

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

GABRIEL BORDERES MOTTA

**Potencial Gravitacional Usando Mascons e a Dinâmica ao Redor de Corpos
Irregulares**

Guaratinguetá
2018

Gabriel Borderes Motta

**Potencial gravitacional usando mascons e a dinâmica ao
redor de corpos irregulares**

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade
de Engenharia do Campus de Guaratinguetá,
Universidade Estadual Paulista, para a ob-
tenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter

GUARATINGUETÁ
2018

B728p Borderes-Motta, Gabriel
Potencial gravitacional usando Mascons e a dinâmica ao redor de corpos irregulares / Gabriel Borderes-Motta – Guaratinguetá, 2018.
101 f. : il.
Bibliografia: f. 96

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2018.
Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter

1. Espaço de fase (Física estatística). 2. Campos gravitacionais.
3. Asteróides. 4. Anéis. I. Título.

CDU 523.44(043)


Luciana Máximo
Bibliotecária-CRB-8/3595

GABRIEL BORDERES MOTTA

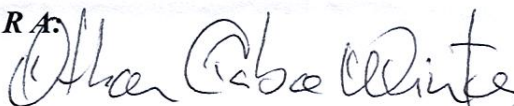
ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“DOUTOR EM FÍSICA”

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Prof. Dr. Konstatin Georgiev Kostov
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. OTHO CABO WINTER

Orientador / UNESP/FEG



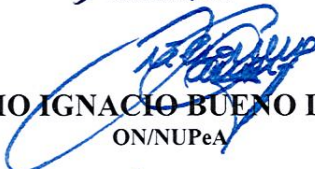
Prof. Dr. ERNESTO VIEIRA NETO

UNES/PFEG



Profª. Dªr. SILVIA MARIA GIULIATTI WINTER

UNESP/FEG



Prof Dr. JULIO IGNACIO BUENO DE CAMARGO

ON/NUPeA



Profª. Drª. TERESINHA DE JESUS STUCHI

IF/UFRJ

DADOS CURRICULARES

GABRIEL BORDERES MOTTA

NASCIMENTO 14.08.1989 – Itajaí / Brasil

FILIAÇÃO Fernando da Silva Motta
Tânia Regina Borderes Motta

2007/2011 Curso de Graduação Bacharelado em Física
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá
Universidade Estadual Paulista-UNESP

2012/2014 Curso de Pós-Graduação em Física, Nivel de Mestrado
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá
Universidade Estadual Paulista-UNESP

2014/2018 Curso de Pós-Graduação em Física, Nivel de Doutorado
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá
Universidade Estadual Paulista-UNESP

Dedico este trabalho ao meu avô Daniel Ligério Borderes.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar a Deus por minha vida, inteligência, força de vontade e saúde.

À minha mãe, Tânia Regina Borderes Motta, por me trazer à vida, prover amor, cozinhar tão bem e pela criação.

Ao meu pai, Fernando da Silva Motta, que junto com minha mãe é o maior responsável pela pessoa que sou.

Às minhas irmãs, Mariana e Isabel Borderes Motta, pelo companheirismo de confidencialidade de irmãos.

À minha namorada, Bárbara Celi Braga Camargo, por dividir comigo as alegrias e tristezas desses anos de formação e por me motivar a buscar ser sempre mais de mim mesmo.

Ao meu orientador, Othon Cabo Winter, pela paciência e ensinamentos inestimáveis, sem o qual esse trabalho não poderia ser realizado.

À todos os meus demais mestres, professores e orientadores, em especial à Profa. Dra. Maria Cecília França de Paula S. Zanardi.

Aos meus grandes amigos de vida, Thales, Dany, Paulo, Simone, Isabel, Bruno e associados, por muitas experiências vividas, que me deram força e apoio, além de me manterem sóbrio e são.

Aos amigos de formação, Ricardo, Thiago, Rubia, Josué, Rodolfo, Rafael, Dino, Nilton e todos os colegas da pós graduação, por sempre proporcionarem boa companhia, momentos de alegria e apoio quando precisei. Agradeço em especial ao Ricardo, pelo modelo em Latex nas normas da biblioteca que funciona, mesmo não tendo sido pago pra isso.

Aos companheiros de trabalho que me auxiliaram direta ou indiretamente no meu trabalho, André, Prof. Ernesto, Prof. Rafael, Helton, Luiz, Tamires e Tais.

À minha tia madrinha Tete e aos meus tios e primos, que mesmo distantes me deram todo o apoio possível.

Ao Grupo de Dinâmica Orbital e Planetologia por proporcionar experiências de trabalho e de pesquisa de alto nível.

À Faculdade de engenharia de Guaratinguetá, por me fornecer um ambiente de estudo onde meu caminho pode ser trilhado nestes últimos 11 anos.

Aos *pets* presentes nesse período, fornecendo grande alegria, Bowie, Milu e Mel.

Este trabalho contou com o suporte financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - **CAPES**

“Aprovecha ahora que eres joven para sufrir todo lo que puedas, que estas cosas no duran toda la vida.”

Gabriel García Márquez

Nota

Devido ao grande volume de gráficos e dados numéricos apresentados nesta tese, e a fim de compatibilizar a transferência de resultados entre aplicações de software e a escrita do texto, tomamos a liberdade de utilizar o padrão norte americano como marcador decimal, no qual o símbolo “ . ” (ponto) representa o separador decimal em vez do símbolo “ , ” (vírgula) adotado na língua portuguesa.

RESUMO

Em geral, pequenos corpos do sistema solar, como asteroides e cometas, têm uma forma muito irregular, o que afeta significativamente o seu potencial gravitacional, dificultando os estudos da dinâmica ao redor destes corpos. Uma primeira aproximação é a expansão em harmônicos esféricos, onde os termos C_{20} e C_{22} caracterizam a irregularidade do corpo. Usamos essa aproximação em superfícies de secção de Poincaré para estudar as regiões próximas ao planeta anão Haumea, onde foi observado um anel. A partir do mapeamento feito pela técnica de superfície de secção de Poincaré, foi possível identificar Famílias de órbitas periódicas e regiões estáveis. Duas Famílias de órbitas periódicas foram destacadas, a primeira uma Família de segundo tipo associada à ressonância 1:3 (Família ressonante) e a segunda uma Família de primeiro tipo (Família central). As simulações indicam que as partículas do anel podem estar em órbitas da Família central. Já a Família ressonante, não pode ser responsável pelo anel devido a excentricidade de suas órbitas e da sua posição. Para simular de forma mais realista a irregularidade de um pequeno corpo, é usada uma melhor aproximação para o cálculo do potencial gravitacional. O modelo de concentração de massa, ou modelo de mascons, é uma aproximação discreta da forma de um corpo, capaz de simular um potencial irregular, assimétrico e tridimensional. A esse modelo é aplicada a superfície de secção de Poincaré, com o objetivo de estudar a dinâmica da região próxima ao asteroide 4179 Toutatis. Quatro Famílias de órbitas periódicas são destacadas e estudadas. Uma Família é de primeiro tipo e as outras três são de segundo tipo associadas às ressonâncias 3:1, 2:1 e 2:3. Apesar do potencial gravitacional tridimensional ser adotado em uma ferramenta usualmente bidimensional, é possível analisar como um problema bidimensional quando a variação na terceira dimensão é baixa. Estudando em conjunto as superfícies de secção de Poincaré e a variação máxima na terceira dimensão, verifica-se a estabilidade ou não das trajetórias simuladas.

PALAVRAS-CHAVE: Superfície de secção de Poincaré. Mascon. Harmônicos esféricos. Pequenos corpos irregulares. 216 Kleopatra. 4179 Toutatis. Haumea.

ABSTRACT

In general, small bodies of the Solar system, e.g. asteroids and comets, have a very irregular shape. This feature affects significantly the gravitational potential around these irregular bodies, which hinders dynamical studies. A first approximation is an expansion in spherical harmonics, where C_{20} and C_{22} characterize the irregularity of the body. This approach is used on Poincaré surfaces of sections to study regions close to the dwarf planet Haumea. This regions are where the observed ring. By the technique of Poincaré surface of section, it was identified Families of periodic orbits and stable regions. Two Families of periodic orbits were studied, the first Family is a second type associated with the 1:3 resonance (resonant Family) and the second Family is a first type (central Family). During the simulations the ring particles can be in orbits of the central Family. But the resonant Family can not be responsible for the ring due the eccentricity and position of their orbits. In order to more realistically simulation of the irregularity of the body, a better approximation is necessary for the computation of the gravitational potential. The mass concentration model, or mascon model, is a discrete approximation of the shape of a body. This model simulates an irregular, asymmetric and three-dimensional potential. This model was applied in a Poincaré surfaces of section, mainly to study the dynamics of the region close to the asteroid 4179 Toutatis. Four Families of periodic orbits were studied. One of then is a first type and the others were the second type and associated with the resonances 3:1, 2:1 and 2:3. Although the three-dimensional gravitational potential is adopted in a usually two-dimensional tool, it is possible to analyze as a two-dimensional problem when the variation in the third dimension is low. By a analyzing of the Poincaré surfaces of section and a maximum variation in the free dimension together, the stability of the simulated trajectories is measured.

KEYWORDS: Poincaré surface of section. Mascon. Spherical harmonics. Small irregular bodies. 216 Kleopatra. 4179 Toutatis. Haumea.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Esquema gráfico de Haumea e seu anel.	22
Figura 2 -	Poliedro que simula a forma irregular do asteroide 216 kleopatra. Com 2048 vértices em 4092 faces.	23
Figura 3 -	Pontos de equilíbrio do asteroide 216 kleopatra. Três pontos internos e quatro pontos externos.	24
Figura 4 -	Poliedro que simula a forma irregular do asteroide 4179 Toutatis. Com 6400 vértices em 12796 faces. Dados fornecidos em NATIONALAeronauticsandSpaceAdministration (2017).	25
Figura 5 -	Pontos de equilíbrio do asteroide 4179 Toutatis. Um ponto interno e quatro pontos externos. Dados cedidos pela mestra Tamires dos Santos de Moura.	26
Figura 6 -	Superfície de secção de Poincaré para $C_j = 3.050$ (adimensional) para um problema circular restrito de três corpos com uma razão específica de massa segundo Winter; Murray (1994a).	28
Figura 7 -	Ilhas de estabilidade destacadas das superfície de secção de Poincaré, um par de cada quantidade de ilhas, sendo uma simétrica e uma assimétrica em relação ao eixo $\dot{x} = 0$. a- uma ilha (simétrica); b- uma ilha (assimétrica); c- duas ilhas (simétrica); d- duas ilhas (assimétrica); e- três ilhas (simétrica); f- três ilhas (assimétrica); g- quatro ilhas (simétrica); h- quatro ilhas (assimétrica).	29
Figura 8 -	Superfície de secção de Poincaré para a- $C_j = 3.150$, b- $C_j = 3.147$, c- $C_j = 3.140$ e d- $C_j = 3.104$ (adimensional) para um problema circular restrito de três corpos com uma razão específica de massa segundo Winter; Murray (1997b).	30
Figura 9 -	Curvas para obtenção do ponto de equilíbrio no eixo $x > 0$	34
Figura 10 -	Superfícies de secção de Poincaré para $C_j = 0.8000, 0.8100$ e $0.8250 \text{ km}^2/\text{s}^2$. Foram definidas as condições iniciais com $x_0 \geq 2000 \text{ km}$. Em verde e rosa estão indicadas ilhas de estabilidade bifurcadas de segunda ordem.	35
Figura 11 -	Superfície de secção de Poincaré para $C_j = 0.8180 \text{ km}^2/\text{s}^2$. Em verde as ilhas que indicam as órbitas quase-periódicas da Família I e em rosa as ilhas que indicam as órbitas quase-periódicas da Família II.	37

Figura 12 - Superfície de secção de Poincaré para $C_j = 0.8250 \text{ km}^2/\text{s}^2$. Em verde as ilhas que indicam as órbitas quase-periódicas da Família I e em rosa as ilhas que indicam as órbitas quase-periódicas da Família II.	37
Figura 13 - Superfície de secção de Poincaré para $C_j = 0.8270 \text{ km}^2/\text{s}^2$. Em verde as ilhas que indicam as órbitas quase-periódicas da Família I e em rosa as ilhas que indicam as órbitas quase-periódicas da Família II.	38
Figura 14 - Superfície de secção de Poincaré para $C_j = 0.8277 \text{ km}^2/\text{s}^2$. Em verde as ilhas que indicam as órbitas quase-periódicas da Família I e em rosa as ilhas que indicam as órbitas quase-periódicas da Família II.	38
Figura 15 - Evolução das Famílias I e II nas superfícies da secção de Poincaré. Uma amostra das maiores ilhas de estabilidade, uma ilha intermediária e os pontos dentro que representam a órbita periódica mostrando a estrutura para diferentes valores de C_j . As cores correspondentes aos valores indicados de C_j	39
Figura 16 - A órbita periódica da Família I no sistema girante para constante Jacobi $0.8180 \text{ km}^2/\text{s}^2$. As cores indicam a velocidade no sistema inercial. A órbita é dividida em 20 partes com passos de tempo iguais e os pontos são numerados para mostrar a sequência da trajetória.	40
Figura 17 - A órbita periódica da Família II no sistema girante para constante Jacobi $0.8180 \text{ km}^2/\text{s}^2$. As cores indicam a velocidade no sistema inercial. A órbita é dividida em 20 partes com passos de tempo iguais e os pontos são numerados para mostrar a sequência da trajetória.	40
Figura 18 - Órbita periódica da Família I: a esquerda no sistema girante, plano xy ; a direita no sistema inercial, plano xy . As órbitas são integradas ao longo de três períodos rotacionais de Haumea. As cores correspondem aos valores indicados de C_j	41
Figura 19 - Órbita periódica da Família II: a esquerda no sistema girante, plano xy ; a direita no sistema inercial, plano xy . As órbitas são integradas ao longo de três período de uma rotação de Haumea. As cores correspondem aos valores indicados de C_j	42
Figura 20 - A maior órbita quase periódica (em azul) e a órbita ressonante (em vermelho) da Família I no sistema girante para diferentes valores de C_j . Para $C_j = 0.8277 \text{ km}^2/\text{s}^2$ a libração das órbitas quase periódicas é mínima, de forma a estarem encobertas pelas órbitas periódicas.	43
Figura 21 - A maior órbita quase periódica (em azul) e a órbita ressonante (em vermelho) da Família II no sistema girante para diferentes valores de C_j . Para $C_j = 0.8277 \text{ km}^2/\text{s}^2$ a libração das órbitas quase periódicas é mínima, de forma a estarem encobertas pelas órbitas periódicas.	44

Figura 22 - Órbita periódica da Família Central: a esquerda no sistema girante, plano xy ; a direita no sistema inercial, plano xy . As órbitas são integradas ao longo de três períodos rotacionais de Haumea. As cores correspondentes aos valores indicados de C_j	45
Figura 23 - Gráfico de C_j pelo período orbital das Famílias ressonante e central. A Família ressonante compreende os dados que são comuns às Famílias I e II. É destacada em vermelho o período exato da ressonância 1:3 (período orbital : período rotacional).	46
Figura 24 - Gráfico de semi-eixo maior pela excentricidade das Famílias central e ressonante, e do anel observado em (ORTIZ et al., 2017). A Família ressonante compreende os dados que são comuns às Famílias I e II.	47
Figura 25 - Região de estabilidade gerada pela Família central. A região cinza compreende a extensão das órbitas quase-periódicas associadas a Família, a região azul denota a região do anel, a curva vermelha denota as órbitas periódicas da Família central e a linha tracejada indica a aproximação da ilhas da Família ressonante do centro.	48
Figura 26 - Sequência dos vértices de um tetraedro para que o determinante dê positivo.	52
Figura 27 - Tetraedro com um ponto de teste e os tetraedros formados entre as faces e o ponto.	52
Figura 28 - Pontos distribuídos ao redor do asteroide 216 kleopatra.	55
Figura 29 - Distância radial pelo módulo do erro relativo comparando os <i>clusters</i> de mascons obtidos por distribuição em grade e por tetraedro.	57
Figura 30 - Distância radial pelo módulo do erro relativo comparando os <i>clusters</i> de mascons obtidos por distribuição em grade para diferentes valores de espaçamento.	58
Figura 31 - Distância radial pelo módulo do erro relativo comparando os <i>clusters</i> de mascons obtidos por distribuição em tetraedros para diferentes valores de mascons por tetraedro.	59
Figura 32 - Parte do asteroide 216 kleopatra com um tetraedro marcado em vermelho que cruza a concavidade do corpo.	60
Figura 33 - Diagrama esquemático de uma órbita ao redor do corpo fixo no sistema girante. x_0 marca a posição inicial e a seta azul indica a velocidade na posição inicial.	63
Figura 34 - Superfícies de secção de Poincaré para $C_j = 1.20, 2.10$ e 2.25 . Foram definidas as condições iniciais com $x_0 \geq 2.6 \text{ km}$. Até mil pontos por condição inicial são gerados para cada condição inicial. As curvas associadas à Família 1 são indicadas em roxo, Família 2 em laranja, Família 3 em verde e Família 4 em vermelho.	66

Figura 35 - Casos ilustrativos de curvas de velocidade zero indicadas pela região proibida (em azul). O caso a- $C_j = 2.003$ e o caso b- $C_j = 2.004$	67
Figura 36 - Exemplo de órbitas centrais da Família 1: a- no sistema girante (xy); b- no sistema inercial (xy). As órbitas completaram apenas um ciclo na sistema girante. As cores correspondem aos valores indicados de C_j	68
Figura 37 - Exemplo de órbitas centrais da Família 1: a- projeção das trajetórias no plano xz ; b- projeção das trajetórias no plano yz , ambas são apresentadas no sistema girante. As órbitas completaram muitos ciclos no sistema girante. As cores correspondem aos valores indicados de C_j	68
Figura 38 - Órbita central com $C_j = 2.25$ para vários ciclos orbitais. A forma é semelhante às bordas de um paraboloide hiperbólico.	69
Figura 39 - Projeção da órbita central (vermelho) e a órbita quase-periódica (azul) da Família 1. a- no plano xy ; b- no plano xz ; c- no plano yz . A constante de Jacobi para essa órbita é 2.25.	69
Figura 40 - Evolução temporal dos elementos osculantes semi-eixo maior, excentricidade e inclinação da Família 1. Órbita central com $C_j = 2.25$. As linhas vermelhas indicam um ciclo orbital completo no sistema girante.	70
Figura 41 - Evolução do período orbital para as órbitas centrais da Família 1, quando projetadas no plano de rotação, em função da constante de Jacobi.	71
Figura 42 - A evolução da Família 2 na superfície de secção de Poincaré. Uma amostra com um par de ilhas de maior amplitude de libração orbital, um par de ilhas intermediárias e os pontos dentro das ilhas que representam a órbita central para diferentes valores de C_j . As cores correspondem aos valores indicados de C_j	72
Figura 43 - Órbita central da Família 2 no sistema girante para a constante de Jacobi 2.25. As cores indicam o módulo da velocidade no sistema inercial. A órbita é dividida em 23 partes de mesmo intervalo temporal e os pontos são numerados de forma a mostrar a sequência da trajetória.	73
Figura 44 - Órbitas centrais da Família 2: a- sistema girante, plano xy ; b- sistema inercial, plano xy . A órbita completa apenas um ciclo no sistema girante. As cores correspondem aos valores indicados de C_j	73
Figura 45 - Órbitas centrais da Família 2: a- projeção da trajetória no plano xz ; b- projeção da trajetória no plano yz , ambos são apresentados no sistema girante. A órbita completa vários ciclos no sistema girante. As cores correspondem aos diferentes valores de C_j	74
Figura 46 - Evolução do semi-eixo maior, excentricidade e inclinação da órbita central da Família 2 com $C_j = 2.25$. A linha vermelha corresponde a um período orbital completo no sistema girante.	74
Figura 47 - Evolução temporal da inclinação na Família 2 com $C_j = 2.25$	75

Figura 48 - Evolução do período orbital das órbitas centrais da Família 2 quando projetadas no sistema girante como função da constante de Jacobi. . .	75
Figura 49 - A maior órbita quase-periódica (azul) e a órbita central (vermelho) da Família 2 no sistema girante para diferentes valores de C_j	76
Figura 50 - A evolução da Família 3 na superfície de secção de Poincaré. Uma amostra com um par de ilhas de maior amplitude de libração orbital, um par de ilhas intermediárias e os pontos dentro das ilhas que representam a órbita central para diferentes valores de C_j . As cores correspondem aos valores indicados de C_j	77
Figura 51 - Órbitas centrais da Família 3: a- sistema girante, plano xy ; b- sistema inercial, plano xy . A órbita completa apenas um ciclo no sistema girante. As cores correspondem aos valores indicados de C_j	78
Figura 52 - Órbitas centrais da Família 3: a- projeção da trajetória no plano xz ; b- projeção da trajetória no plano yz , ambos são apresentados no sistema girante. A órbita completa vários ciclos no sistema girante. As cores correspondem aos diferentes valores de C_j	79
Figura 53 - Evolução do semi-eixo maior, excentricidade e inclinação da órbita central da Família 3 com $C_j = 1.76$. A linha vermelha corresponde a um período orbital completo no sistema girante.	79
Figura 54 - Evolução temporal da inclinação na Família 3 com $C_j = 1.76$	80
Figura 55 - Evolução da período orbital das órbitas centrais da Família 4 quando projetadas no sistema girante como função da constante de Jacobi. . .	80
Figura 56 - A maior órbita quase-periódica (azul) e a órbita central (vermelho) da Família 3 no sistema girante para diferentes valores de C_j	81
Figura 57 - A evolução da Família 4 na superfície de secção de Poincaré. Uma amostra com um par de ilhas de maior amplitude de libração orbital, um par de ilhas intermediárias e os pontos dentro das ilhas que representam a órbita central para diferentes valores de C_j . As cores correspondem aos valores indicados de C_j	82
Figura 58 - Órbita central da Família 4 no sistema girante para a constante de Jacobi 1.33. As cores indicam o módulo da velocidade no sistema inercial. A órbita é dividida em 20 partes de mesmo intervalo temporal e os pontos são numerados de forma a mostrar a sequencia da trajetória.	83
Figura 59 - Órbitas centrais da Família 3: a- sistema girante, plano xy ; b- sistema inercial, plano xy . A órbita completa apenas um ciclo no sistema girante. As cores correspondem aos valores indicados de C_j	83
Figura 60 - Órbitas centrais da Família 3: a- projeção da trajetória no plano xz ; b- projeção da trajetória no plano yz , ambos são apresentados no sistema girante. A órbita completa vários ciclos no sistema girante. As cores correspondem aos diferentes valores de C_j	84

Figura 61 - Evolução do semi-eixo maior, excentricidade e inclinação da órbita central da Família 4 com $C_j = 1.28$. A linha vermelha corresponde a um período orbital completo no sistema girante.	85
Figura 62 - Evolução temporal da inclinação na Família 4 com $C_j = 1.28$	85
Figura 63 - Evolução da período orbital das órbitas centrais da Família 4 quando projetadas no sistema girante como função da constante de Jacobi.	86
Figura 64 - A maior órbita quase-periódica (azul) e a órbita central (vermelho) da Família 2 no sistema girante para diferentes valores de C_j	87
Figura 65 - Superfície de secção de Poincaré para $C_j = 3.00$ e os limites de variação no eixo z para cada condição inicial. Um conjunto de ilhas de estabilidade é indicado em vermelho.	88
Figura 66 - Superfície de secção de Poincaré para $C_j = 2.25$ e os limites de variação no eixo z para cada condição inicial. Uma trajetória caótica é indicada em azul e um par de ilhas de estabilidade é indicada em vermelho.	89
Figura 67 - Superfície de secção de Poincaré para $C_j = 2.10$ e os limites de variação no eixo z para cada condição inicial. As estruturas caóticas estão indicadas em diferentes cores para cada condição inicial.	90
Figura 68 - Superfície de secção de Poincaré para $C_j = 1.80$ e os limites de variação no eixo z para cada condição inicial. As estruturas caóticas são indicadas em cores diferentes para cada condição inicial. Trajetórias que colidiram com o asteroide são indicadas por quadrados vermelhos.	91
Figura 69 - Superfície de secção de Poincaré para $C_j = 1.20$ e os limites de variação no eixo z para cada condição inicial. As estruturas caóticas são indicadas em cores diferentes para cada condição inicial. Trajetórias que colidiram com o asteroide são indicadas por quadrados vermelhos.	92

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Grades de mascons usados para comparação das diferentes distribuições.	55
Tabela 2 - Tempo de execução do cálculo do potencial gravitacional.	59

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	CORPOS IRREGULARES E SUAS PROPRIEDADES	21
2.1	HAUMEA	21
2.2	216 KLEOPATRA	22
2.3	4179 TOUTATIS	24
3	SUPERFÍCIE DE SECÇÃO DE POINCARÉ AO REDOR DE UM CORPO MODELADO POR UM ELIPSOIDE	27
3.1	SUPERFÍCIE DE SECÇÃO DE POINCARÉ	27
3.2	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	33
3.3	CONSIDERAÇÕES	48
4	MODELO DE CONCENTRAÇÃO DE MASSA - MASCONS	50
4.1	MODELO DE GRADE	51
4.2	MODELO DE TETRAEDRO	53
4.3	CÁLCULO DE POTENCIAL GRAVITACIONAL E COMPARAÇÃO DAS ABORDAGENS DE MASCONS	54
4.4	OS PROBLEMAS DE CONCAVIDADE E DENSIDADE DE MASCONS	60
5	SUPERFÍCIE DE SECÇÃO DE POINCARÉ AO REDOR DO ASTE- ROIDE 4179 TOUTATIS: MODELO DE MASCONS	62
5.1	SUPERFÍCIE DE SECÇÃO DE POINCARÉ	62
5.2	SIMULAÇÕES	64
5.2.1	Família 1	67
5.2.2	Família 2	71
5.2.3	Família 3	76
5.2.4	Família 4	81
5.2.5	O efeito 3-D	87
5.3	COMENTÁRIOS	92
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	94
6.1	PERSPECTIVAS FUTURAS	95
	REFERÊNCIAS	96

1 INTRODUÇÃO

Dentre os corpos celestes conhecidos, existem corpos que não possuem massa suficiente para atingir o equilíbrio hidrostático. Ou seja, as formas desses corpos são irregulares. Podemos chamar estes corpos de pequenos e irregulares, pela comparação com os demais corpos celestes. Asteroides, cometas e alguns satélites são pequenos corpos irregulares. Apesar de pequenos, estes corpos são relevantes e despertam o interesse da comunidade científica. Esse interesse se deve a dados sobre a origem do sistema solar, que esses corpos possam conter, o perigo que representam à vida na Terra e mesmo a possibilidade de mineração (ABELL et al., 2017). Muitos estudos já foram realizados graças às missões espaciais como a NEAR-Schoemaker (PROCKTER et al., 2002) da NASA, a Hayabusa (KAWAGUCHI; FUJIWARA; UESUGI, 2008) da JAXA e a ROSETTA (ROLL; WITTE; ARNOLD, 2016) da ESA. Essas três missões visitaram respectivamente os asteroides 433 Eros, 25143 Itokawa e o cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko. Outras missões ainda estão ativas ou a caminho de seus alvos como, a Hayabusa-2 (KAWAGUCHI; FUJIWARA; UESUGI, 2008) da JAXA e OSIRES-Rex (LAURETTA et al., 2017) da NASA, endereçadas aos asteroides 162173 1999 JU3 e 101995 Bennu, respectivamente. Para o sucesso dessas missões, são necessários planejamentos robustos que levem em conta a dinâmica da sonda e da região por onde ela passará. Contudo, o conhecimento que se têm de um corpo irregular antes da aproximação da sonda advém exclusivamente de dados observacionais obtidos na Terra, ou em órbita da Terra por telescópios espaciais.

No presente trabalho propomos duas modelagens para o corpo irregular aplicadas a uma ferramenta de dinâmica. As duas modelagens usam dados observacionais para desenvolver o cálculo do potencial gravitacional do corpo irregular. A primeira é a expansão no potencial gravitacional em termos de harmônicos esféricos em segunda ordem. A segunda é a modelagem de mascons (*mass concentration*) que consistem em uma grade de pontos massivos distribuídos no volume do corpo simulado. A ferramenta de dinâmica usada é a superfície de secção de Poincaré, que em poucas palavras é um mapa no espaço de fase capaz de fornecer dados sobre estabilidade, instabilidade e ressonâncias.

A técnica desenvolvida foi aplicada a dois corpos, o planeta anão Haumea e o asteroide 4179 Toutatis. Usamos dados de Haumea, cujo os dados observacionais são precisos, em relação à suas dimensões, e resultam em um elipsoide de superfície suave. Mesmo assim aplicamos a expansão em harmônicos para o potencial gravitacional, por estarmos interessados em estudar a região que contém o anel (ORTIZ et al., 2017). Todavia, apesar de estar em equilíbrio hidrostático, os coeficientes gravitacionais de Haumea são altos,

o que faz com que a modelagem se compare a uma primeira aproximação de um corpo irregular. Para o asteroide 4179 Toutatis usamos dados obtidos durante uma aproximação que o asteroide teve com a Terra (HUDSON; OSTRO, 1995). Entre os dados o *polyhedron shape model* (modelo que simula a forma de um corpo irregular por meio de um poliedro) do asteroide foi usado, o que possibilita a construção do modelo de mascons.

O estudo realizado para o asteroide 4179 Toutatis apresenta uma nova proposta onde usamos a superfície de secção de Poincaré nos moldes adotados para um problema planar em um problema tridimensional com movimento na terceira dimensão devido à não simetria do potencial gravitacional usado. Apresentamos uma abordagem onde, a variação máxima na terceira dimensão auxilia nas análises sobre estabilidade das órbitas simuladas.

O objetivo deste trabalho é apresentar e testar uma abordagem para o estudo da dinâmica ao redor de corpos irregulares. Esse estudo deve prover dados acerca da estabilidade, instabilidade e condições de ressonância entre rotação do corpo irregular e a órbita de uma partícula. Pela uso da superfície de secção de Poincaré, pretende-se ainda, um mapeamento amplo e sistemático ao redor do corpo irregular.

Na sequência deste trabalho, no capítulo 2, são introduzidos os objetos de estudo, o planeta anão Haumea e os asteroides 216 Kleopatra e 4179 Toutatis.

No capítulo 3 é apresentado o modelo usado para obter a superfície de secção de Poincaré, a partir de um potencial definido por uma expansão de segunda ordem nos harmônicos esféricos. A técnica é aplicada à Haumea de forma a estudar a região onde se encontra o anel. Foram encontradas regiões de estabilidade para explicar a presença do anel.

No capítulo 4 são apresentadas duas abordagens para o modelo de mascons, que se diferenciam na forma de distribuir os pontos no volume do corpo. Uma denominamos modelo de mascons de grade e a outra de modelo de mascons de tetraedro. As duas abordagens são aplicadas ao asteroide 216 Kleopatra para poderem ser comparadas com o objetivo de justificar a escolha de uma delas para aplicação no trabalho.

No capítulo 5 é apresentado o modelo usado para obter a superfície de secção de Poincaré, a partir de um potencial definido por mascons. A técnica é aplicada ao asteroide 4179 Toutatis. São identificadas 4 Famílias de órbitas periódicas, que são estudadas mais profundamente. Um estudo completo nas secções de Poincaré é realizado com o auxílio dos limites de variação na terceira dimensão. E por fim são destacadas as semelhanças e diferenças entre a técnica usada e a de uma superfície de secção de Poincaré bidimensional.

Finalmente, no capítulo 6 são apresentados os comentários finais sobre o trabalho desenvolvido.

2 CORPOS IRREGULARES E SUAS PROPRIEDADES

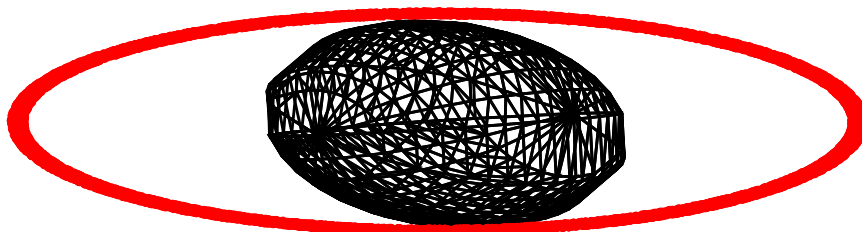
Neste capítulo serão apresentados o planeta anão Haumea e os asteroides 216 Kleopatra e 4179 Toutatis. Estes corpos são utilizados nas simulações, sendo que o planeta anão é simulado a partir de seus coeficientes gravitacionais e os dois asteroides por meio do modelo de mascons. Serão exploradas individualidades desses corpos, que os fazem bons alvos para as abordagens desejadas.

2.1 HAUMEA

Haumea é um dos quatro planetas anões conhecidos, com órbita além da de Netuno, (ORTIZ et al., 2017). Este corpo foi descoberto em dezembro de 2004 por Brown et al. (2005) junto com seus satélites Hi'iaka e Namaka. Haumea recebeu esse nome em homenagem à deusa do parto e da fertilidade na mitologia havaiana, sendo que na mitologia Hi'iaka e Namaka são filhos de Haumea que foram gerados a partir de partes do corpo da mãe. Acredita-se que os satélites tenham vindo do corpo principal do planeta anão, por isso a ligação com a divindade havaiana (INTERNATIONAL, 2017c). Além de possuir dois satélites, sua forma alongada e seu curto período de rotação (~ 3.9155 h) o tornam um alvo de grande interesse para pesquisas. Recentemente uma nova característica de Haumea foi descoberta, a presença de um anel (ORTIZ et al., 2017), o que o tornou o segundo corpo (que não é um planeta) do sistema solar a possuir um anel.

Assumimos neste trabalho, que Haumea tenha uma forma elipsoidal de semi eixos $a = 1161$, $b = 852$ e $c = 513$ km (ORTIZ et al., 2017). Dessa forma, as constantes gravitacionais consideradas são $C_{20} = -1.55 \times 10^{11} m^2$ e $C_{22} = 3.11 \times 10^{10} m^2$. Na figura 1 é apresentado um esquema gráfico desse formato de Haumea, bem como o anel, com sua largura estimada de 70 km e centrado a 2287 km do centro de Haumea (ORTIZ et al., 2017).

Figura 1: Esquema gráfico de Haumea e seu anel.



fonte: Produção do próprio autor.

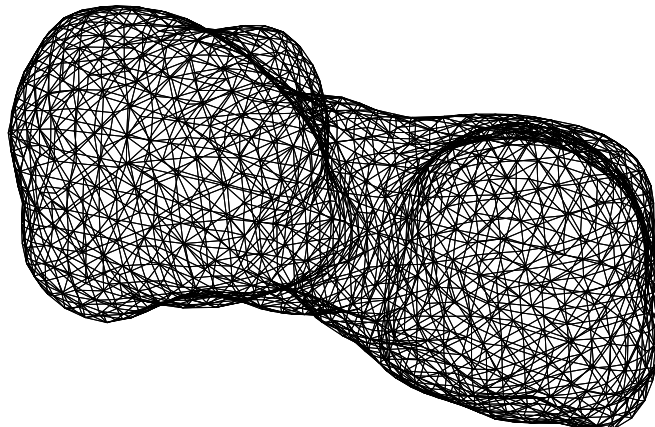
No capítulo 3, será explorada a dinâmica da região próxima à Haumea onde está o anel. Através da secção de superfície de Poincaré pretendemos estudar a estabilidade e possíveis ressonâncias, que propiciaram a permanência do anel.

Hi'iaka tem semi-eixo orbital de 49880 km e Namaka de 25657 km Brown et al. (2005), ou seja a distância entre os satélites e Haumea é uma ordem de grandeza maior que a distância do sistema de anéis a Haumea. Os raios de Hill de Hi'iaka e Namaka em relação à Haumea são $\sim 5406 \text{ km}$ e $\sim 1022 \text{ km}$ respectivamente. Devido a essa distância e a complexidade que envolveria adicionar os satélites nas simulações, não pretendemos estudar em conjunto a dinâmica que envolve os satélites.

2.2 216 KLEOPATRA

216 Kleopatra é um asteroide do cinturão principal, descoberto em 10 Abril 1880 pelo astrônomo austríaco Johann Palisa no observatório Pola (INTERNATIONAL, 2017A). Além dos dois satélites (DESCAMPS et al., 2011), a forma altamente irregular (figura 2) descrita em detalhes em Ostro et al. (2000) motivaram diversos trabalhos acerca da dinâmica (YU; BAOYIN, 2012; CHANUT et al., 2015; HIRABAYASHI; SCHEERES, 2014). A forma complexa do asteroide 216 Kleopatra, fez desse o melhor candidato para explorar as diferentes distribuições de mascons apresentadas no capítulo 4. O asteroide 216 Kleopatra tem dimensões $217 \times 94 \times 81 \text{ km}$, com o volume de aproximadamente $7.09 \times 10^5 \text{ km}^3$ (OSTRO et al., 2000), o que o faz um asteroide grande, quando comparado a outros asteroides do sistema solar.

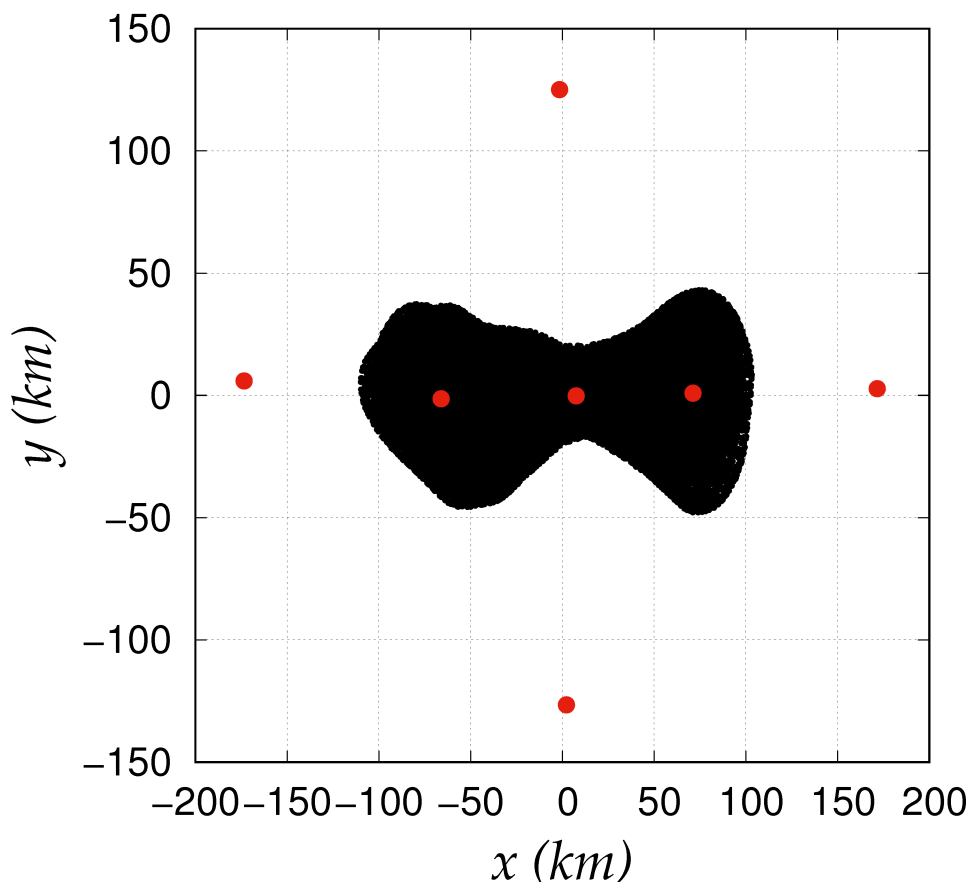
Figura 2: Poliedro que simula a forma irregular do asteroide 216 kleopatra. Com 2048 vértices em 4092 faces.



fonte: NATIONALAeronauticsandSpaceAdministration (2017).

O período de rotação do asteroide é de 5.385 horas (OSTRO et al., 2000), o que influencia muito na dinâmica ao redor desse corpo (MOURA, 2016). Esse período reflete na localização dos pontos de equilíbrio externo, sendo a distância entre alguns dos pontos e a superfície muito menor do que o raio médio do asteroide, como mostra a figura 3.

Figura 3: Pontos de equilíbrio do asteroide 216 kleopatra. Três pontos internos e quatro pontos externos.



fonte: Comunicação privada com mestra Tamires dos Santos de Moura.

2.3 4179 TOUTATIS

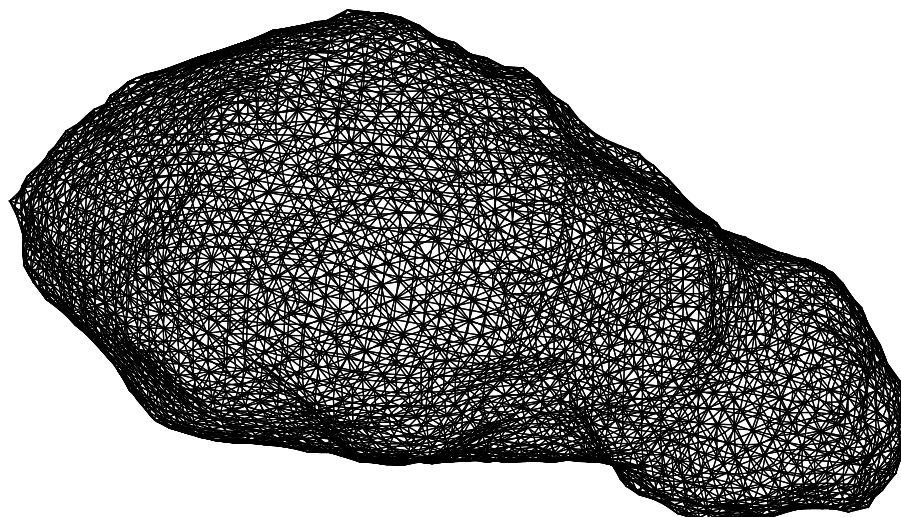
Asterix e Obelix é um desenho que conta a história de dois gauleses da única tribo da Gália não dominada pelos romanos em 50 a.C., cujo único medo é que o céu possa cair em suas cabeças um dia. Essa foi a inspiração para o astrônomo francês, Christian Pollas, dar o nome do deus Gaulês protetor da tribo ao 4179 Toutatis (INTERNATIONAL, 2017B), asteroide da família Apollo que têm potencial de colisão com a Terra.

O período orbital do 4179 Toutatis é de 1473.27 dias e suas dimensões são de $1.70 \times 2.03 \times 4.26$ km (HUDSON; OSTRO; SCHEERES, 2003), e por ser um NEA (*Near Earth Asteroid*) frequentemente se aproxima da Terra. Essas aproximações possibilitaram a observação deste corpo por radiotelescópios em 1992 (HUDSON; OSTRO, 1995), e pela sonda Chang'e-2 durante um *fly-by* em 2012 (HUANG et al., 2013). Essas observações se traduziram em dados sobre a órbita, estado de rotação e estrutura do asteroide 4179 Toutatis.

Foi obtido um *polyhedron shape model* (modelo que simula a forma de um corpo irregular por meio de um poliedro) (SIMONELLI et al., 1993) para o 4179 Toutatis. O

poliedro (figura 4) que o simula possui 6400 vértices e 12796 faces (HUDSON; OSTRO; SCHEERES, 2003). Consideramos densidade de 2.5 g/cm^3 e massa de $\sim 1.97 \times 10^{13} \text{ kg}$ (Scheeres et al. 1998).

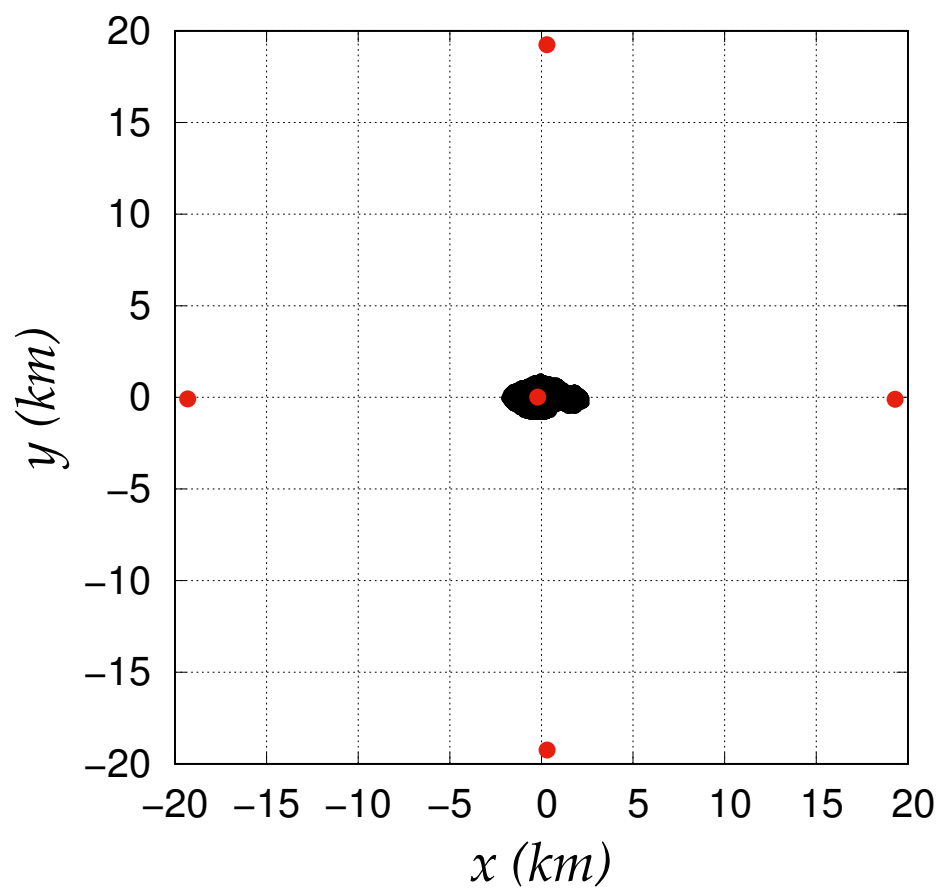
Figura 4: Poliedro que simula a forma irregular do asteroide 4179 Toutatis. Com 6400 vértices em 12796 faces. Dados fornecidos em NATIONALAeronauticsandSpaceAdministration (2017).



fonte: Produção do próprio autor.

O asteroide 4179 Toutatis apresenta um período de rotação peculiar de 176.4 horas, quando a maioria dos asteroides observados têm período orbital inferior a 10 horas. Essa característica influencia significativamente na dinâmica ao redor desse asteroide. Como pode se observar na figura 5, os pontos de equilíbrio externo são varias vezes o raio médio do corpo, ou seja, são bem mais afastados quando comparamos com os pontos de equilíbrio externo de 216 Kleopatra, por exemplo. Isso facilita um estudo da dinâmica na região interna aos pontos de equilíbrio. No Capítulo 5 essa região interna aos ponto de equilíbrio será amplamente estudada.

Figura 5: Pontos de equilíbrio do asteroide 4179 Toutatis. Um ponto interno e quatro pontos externos. Dados cedidos pela mestra Tamires dos Santos de Moura.



fonte: Produção do próprio autor

3 SUPERFÍCIE DE SECÇÃO DE POINCARÉ AO REDOR DE UM CORPO MO- DELADO POR UM ELIPSOIDE

Neste capítulo pretendemos analisar a dinâmica da região ao redor do planeta anão Haumea, buscando regiões estáveis que possam confirmar características observadas, como o anel de Haumea. Para esse estudo utilizamos superfície de secção de Poincaré, que consiste em um mapa no espaço de fase capaz de prover informações sobre estabilidade, estruturas orbitais e ressonâncias.

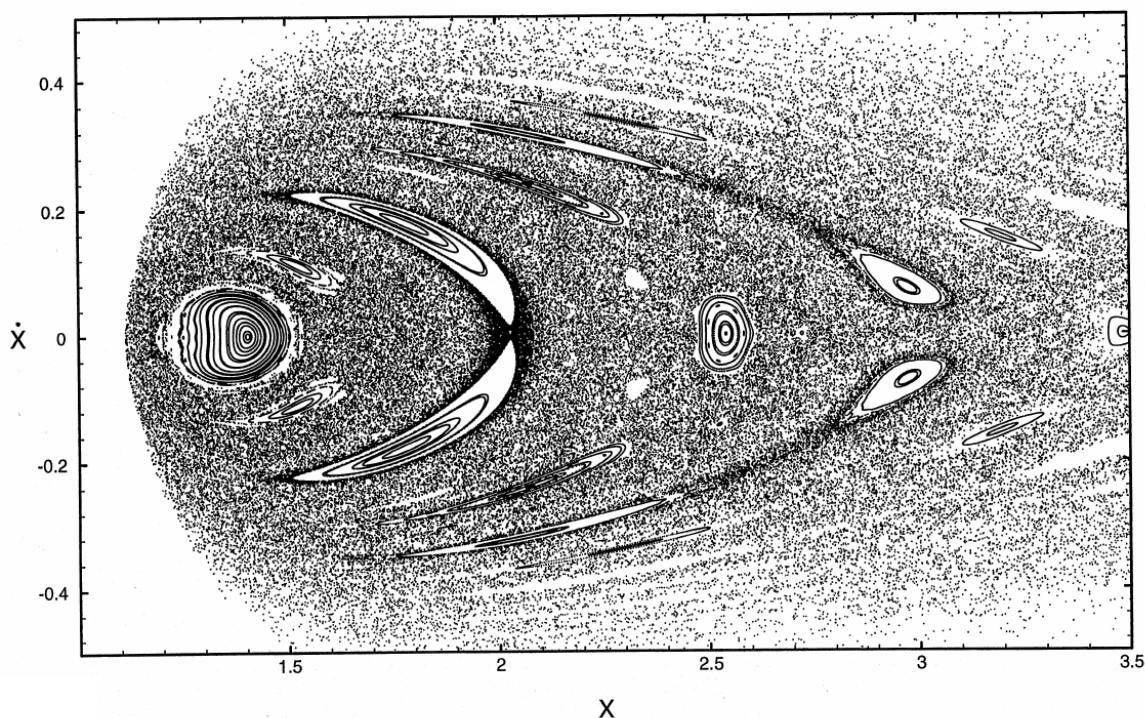
3.1 SUPERFÍCIE DE SECÇÃO DE POINCARÉ

A técnica de superfície de secção de Poincaré tem sido aplicada amplamente e com sucesso em dinâmica orbital. Um número significativo de estudos do problema circular restrito de três corpos, através da superfície de secção de Poincaré, foram realizados nos últimos 50 anos, como por exemplo Hénon (1965a,b, 1966a,b, 1969); Jefferys (1971). Esses estudos, em geral, consideram um sistema girante onde os corpos primário e secundário estão fixos no sistema e apenas o terceiro corpo descreve um movimento livre, que cruza uma secção definida no sistema. Quando a partícula cruza essa secção definida, seus dados são plotados em um espaço de fase bidimensional formando um mapa. Esse mapa é capaz de prover inúmeras informações sobre a dinâmica do terceiro corpo, tais como estabilidade e ressonância orbital. Um trabalho mais abrangente sobre superfícies de secção de Poincaré, para uma razão específica de massa entre o corpo primário e secundário, foi realizado há duas décadas em Winter; Murray (1994b,a). Nesses atlas, (WINTER; MURRAY, 1994B,A), é possível acompanhar a evolução de diversas estruturas presentes na superfícies de secção de Poincaré. Usando o problema restrito de três corpos para o sistema Sol-Júpiter-partícula, Winter; Murray (1997a,b) analisaram ressonâncias de primeira ordem e regiões de libração. Winter (2000) aplicou a técnica de superfície de secção de Poincaré para o sistema Terra-Lua-partícula, onde regiões de estabilidade e órbitas periódicas foram encontradas, bem como a máxima amplitude de libração das órbitas quase-periódicas (órbitas dinamicamente influenciadas por uma órbita periódica).

As superfícies de secção de Poincaré são mapas criados no espaço de fase, de pontos dados pelo cruzamentos da órbita de uma partícula sem massa com uma secção fixa no sistema. Os mapas são criados para um valor fixo de constante de Jacobi (C_j), constante que será melhor discutida na sequência deste capítulo. Um exemplo desse mapa é apresentado na figura 6, retirada de Winter; Murray (1994a). A primeira vista, pontos espalhados

no mapa dominam uma grande região da figura. Esses pontos preenchem aleatoriamente toda uma região. Esses pontos espalhados são criados por órbitas caóticas. As falhas ou regiões não preenchidas por pontos aleatórios são regiões estáveis. As trajetórias caóticas não penetram nas regiões estáveis nem mesmo passam por ela, caso uma região estável separe duas regiões instáveis.

Figura 6: Superfície de secção de Poincaré para $C_j = 3.050$ (adimensional) para um problema circular restrito de três corpos com uma razão específica de massa segundo Winter; Murray (1994a).



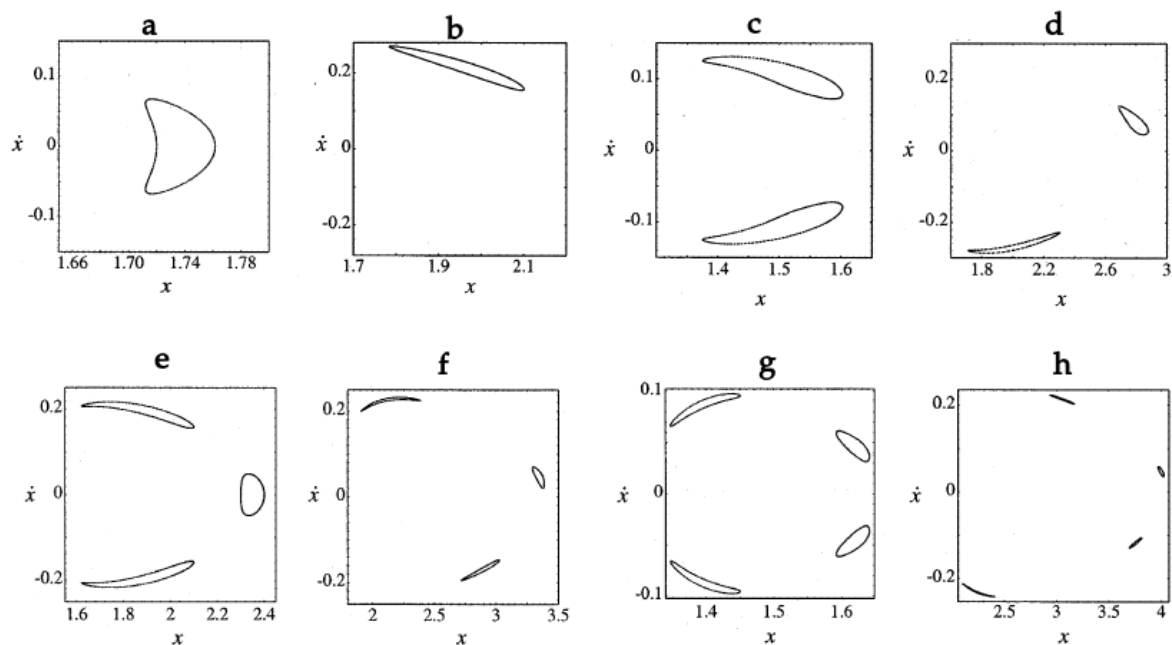
fonte: Winter; Murray (1994a).

Curvas fechadas se formam dentro das regiões estáveis, estas curvas serão chamadas de ilhas de estabilidade. Cada ilha de estabilidade é formada por uma única órbita quase-periódica. As órbitas quase-periódicas são chamadas assim por que não possuem um período definido, no entanto seguem o comportamento de uma órbita periódica ficando ao redor dela. As órbitas quase-periódicas demarcam regiões, de forma que uma órbita quase-periódica não invada ou cruze a região de uma outra órbita quase-periódica.

No centro de todas as ilhas de estabilidade de uma região estável há um ponto. Este ponto é formado por uma órbita periódica que todas as vezes que cruza a secção, passa pelo mesmo ponto no espaço. Essas órbitas periódicas podem ser classificadas em dois tipos (POINCARÉ; MAGINI, 1899). As órbitas periódicas de primeiro tipo são órbitas quase circulares que não estão associadas a nenhuma ressonância e as de segundo tipo

são órbitas associadas à ressonância. Na superfície de secção de Poincaré as órbitas periódicas de primeiro tipo são identificadas por ilhas de estabilidade individuais, enquanto de segundo tipo podem ser identificadas por ilhas unitárias, por pares de ilhas ou por um número inteiro qualquer de ilhas de estabilidade. Dessa forma é possível identificar que a órbita periódica é de segundo tipo pelas superfícies de secção de Poincaré, caso ela tenha mais de uma ilha de estabilidade.

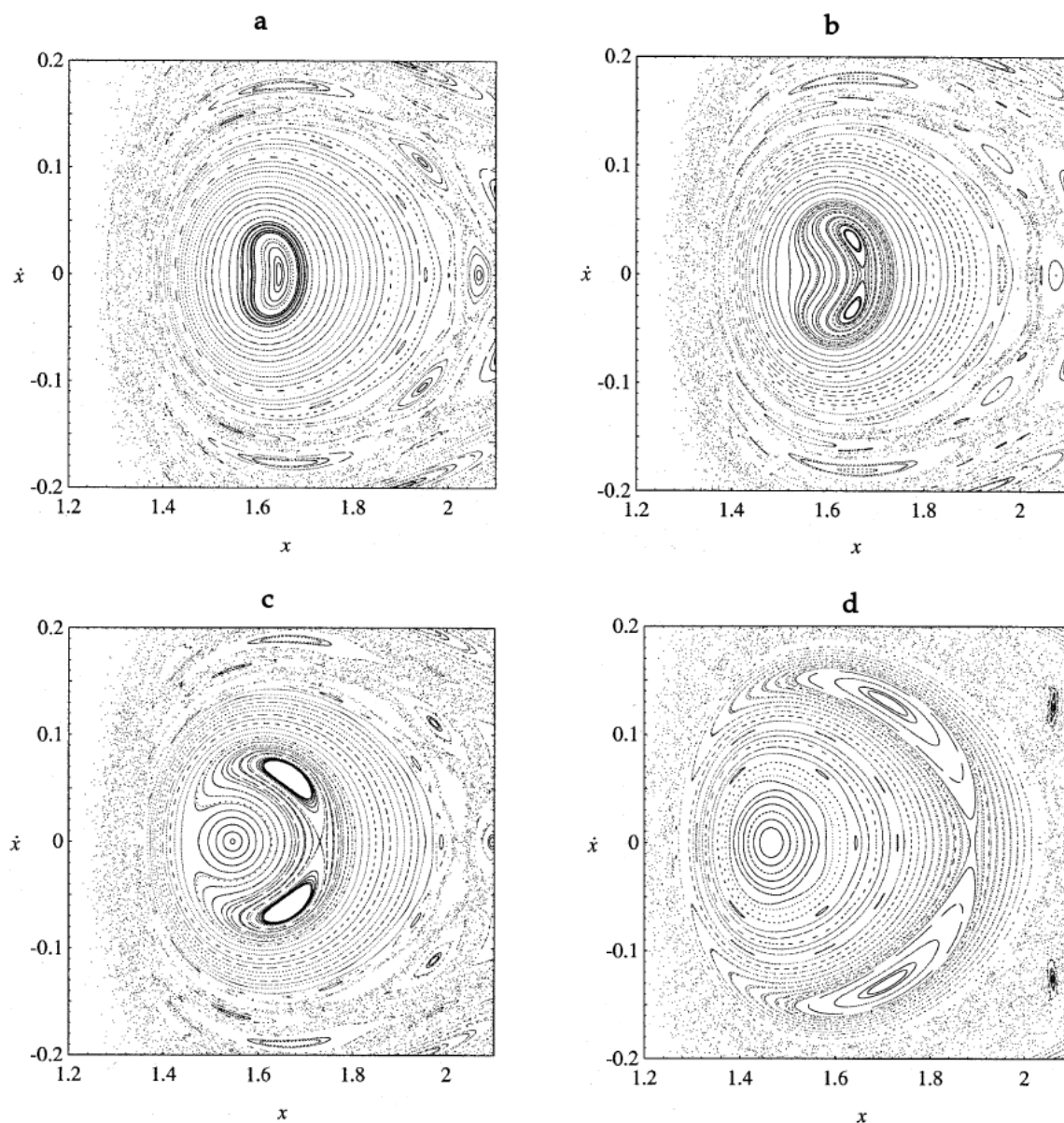
Figura 7: Ilhas de estabilidade destacadas das superfícies de secção de Poincaré, um par de cada quantidade de ilhas, sendo uma simétrica e uma assimétrica em relação ao eixo $\dot{x} = 0$. a- uma ilha (simétrica); b- uma ilha (assimétrica); c- duas ilhas (simétrica); d- duas ilhas (assimétrica); e- três ilhas (simétrica); f- três ilhas (assimétrica); g- quatro ilhas (simétrica); h- quatro ilhas (assimétrica).



fonte: Winter; Murray (1997b).

Na figura 7 são apresentados 8 exemplos de ilhas de estabilidade, sendo dois de ilhas unitárias, dois de um par de ilhas, dois de um trio de ilhas e dois exemplos com grupos de quatro ilhas. Todas essas ilhas são órbitas quase-periódicas ao redor de órbitas periódicas de segundo tipo.

Figura 8: Superfície de seção de Poincaré para a- $C_j = 3.150$, b- $C_j = 3.147$, c- $C_j = 3.140$ e d- $C_j = 3.104$ (adimensional) para um problema circular restrito de três corpos com uma razão específica de massa segundo Winter; Murray (1997b).



fonte: Winter; Murray (1997b).

O número de ilhas de estabilidade é o mesmo número da ordem da ressonância ao qual a órbita periódica está associada (WINTER; MURRAY, 1997B). Em outras palavras, as ilhas de estabilidade das figuras 7a e b libram ao redor de uma órbita periódica associada a uma ressonância de movimento médio de primeira ordem, as figuras 7c e d de segunda ordem, as figuras 7e e f de terceira ordem e as figuras 7g e h de quarta ordem, sendo que as ressonâncias de movimento médio são respectivamente 2:3, 1:2, 3:5, 1:3, 2:5, 1:4, 3:7

e 1:5 (WINTER; MURRAY, 1997B).

As órbitas periódicas em geral podem ser agrupadas em Famílias. As Famílias de órbitas periódicas são conjuntos de órbitas periódicas de primeiro tipo ou de segundo tipo com a mesma ressonância, que se apresentam continuamente em um intervalo de C_j variando sua estrutura e sua localização de forma suave nas superfícies de secção de Poincaré.

É destacado na figura 7, que cada par de gráficos com o mesmo número de ilhas de estabilidade, uma é simétrica em relação a $\dot{x} = 0$ e a outra é assimétrica. As ilhas assimétricas indicam órbitas periódicas bifurcadas de uma Família de órbitas periódicas do segundo tipo de ressonância de movimento médio 1: j , onde $j = 2, 3, 4, 5$ (WINTER; MURRAY, 1997B). A Família de órbita periódica bifurca em duas Famílias de órbitas periódicas de mesma ressonância.

Na figura 8 são apresentadas superfícies de secção de Poincaré para um intervalo decrescente de C_j . Em destaque no centro, uma ilha de estabilidade que bifurca a medida que o C_j é menor. Após a bifurcação, duas ilhas que se completam simetricamente apresentam as duas novas Famílias de órbitas periódicas. Todavia, cada uma das duas regiões estáveis é preenchida por um conjunto distinto de condições iniciais. Uma condição inicial pode gerar uma ilha de estabilidade ou um ponto apenas na região estável para $\dot{x} > 0$ ou na região estável para $\dot{x} < 0$.

A superfície de secção de Poincaré pode ser usada também para o estudo de problema de dois corpos, corpo primário massivo e uma partícula sem massa, quando o corpo primário apresenta uma rotação. Nesse caso, ao invés do movimento orbital entre corpo primário e secundário, é o movimento rotacional do corpo primário que dá o movimento do sistema girante. Dessa forma, o corpo primário está fixo no sistema girante e o corpo secundário tem movimento livre e passa a ser o objeto do estudo. Da mesma forma que no problema restrito de três corpos, a superfície de secção de Poincaré aplicada ao problema de dois corpos é capaz de prover informações sobre estabilidade e ressonância, mas nesse caso a ressonância é spin-órbita (entre rotação do corpo primário e a órbita do corpo secundário). No contexto da aplicação da técnica de superfície de secção de Poincaré aplicada a um problema de dois corpos, Broucke; Elipe (2005) consideraram um anel circular para modelar o potencial gravitacional e encontrar várias Famílias de órbitas periódicas, bem como estruturas dinâmicas ao redor do anel. Silva; Winter; Prado (2009) analisaram a região em torno de formas planares (um placa quadrada e uma triangular) através da superfície de secção de Poincaré e determinaram regiões estáveis e instáveis. Najid; Haj Elourabi; Zegoumou (2011) usou a superfície de secção de Poincaré em torno de um segmento reto. Esse segmento foi definido perpendicular ao sistema girante, e sua densidade varia simetricamente em relação ao plano de rotação. O potencial gravitacional gerado por este segmento é bidimensional, uma vez que a densidade do segmento é uma função que torna o potencial gravitacional simétrico. Feng; Hou (2017) utilizaram uma expansão em harmônicos esféricos de segunda ordem para modelar o potencial gravita-

cional de um corpo. A partir desse potencial, foram calculadas superfícies de secção de Poincaré, que auxiliaram no estudo da dinâmica ao redor do corpo.

No presente capítulo, adaptamos o modelo de expansão em harmônicos esféricos usado em Feng; Hou (2017), para simular o potencial gerado pelo planeta anão Haumea. Dessa forma, pudemos estudar a dinâmica da região próxima ao corpo, região muito importante devido à presença de um anel. Portanto, o estudo pode prover informações sobre essa estrutura recém descoberta (ORTIZ et al., 2017). Para o desenvolvimento do modelo, é necessário o uso de equações do movimento definidas no sistema girante ($Oxyz$), dado em Scheeres et al. (1996):

$$\ddot{x} = \omega^2 x - 2\omega\dot{y} + \frac{\partial U'}{\partial x} \quad (1)$$

$$\ddot{y} = \omega^2 y + 2\omega\dot{x} + \frac{\partial U'}{\partial y} \quad (2)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U'}{\partial z} \quad (3)$$

onde U' é o potencial gravitacional e ω a velocidade rotacional de Haumea. Utilizamos como normalização: $r_{sinc} = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3} = 1$ para as distâncias, $\frac{1}{\omega} = 1$ para o tempo e $M = 1$ para a massa. Sendo que r_{sinc} é o raio orbital síncrono do caso kepleriano, ω é a velocidade de rotação e M a massa de Haumea. Dessa forma, as equações do movimento passam a ser:

$$\ddot{x} = x - 2\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\ddot{y} = y + 2\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \quad (5)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (6)$$

onde U é o potencial gravitacional adimensional, que pode ser expresso como (HU; SCHEERES, 2004):

$$U = \frac{1}{r} + \frac{C_{20}}{r^3} \left(\frac{3z^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{3C_{22}}{r^5} (x^2 - y^2) \quad (7)$$

onde $C_{20} = -1.55 \times 10^{11} m^2$ e $C_{22} = 3.11 \times 10^{10} m^2$ são os coeficientes gravitacionais (ORTIZ et al., 2017), r é a distância do centro de massa do sistema ao ponto onde se está calculando o potencial e x , y e z são as coordenadas de r (distância da partícula à origem do sistema).

A partir da equação 7 se obtêm as seguintes derivadas do potencial gravitacional

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{x}{r^3} + C_{20} \left(\frac{3x}{2r^5} - \frac{15xz^2}{2r^7} \right) + C_{22} \left(\frac{6}{r^5} - \frac{15}{r^7} x(x^2 - y^2) \right), \quad (8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{y}{r^3} + C_{20} \left(\frac{3y}{2r^5} - \frac{15yz^2}{2r^7} \right) + C_{22} \left(y\frac{6}{r^5} - \frac{15}{r^7}y(x^2 - y^2) \right) \quad e \quad (9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{z}{r^3} + C_{20} \left(\frac{3z}{2r^5} + 3\frac{z}{r^5} - \frac{15z^3}{2r^7} \right) - C_{22} \frac{15}{r^7}z(x^2 - y^2), \quad (10)$$

que são usadas nas equações do movimento.

Uma quantidade conservada, tal como a constante de Jacobi (C_j), é útil para a análise das equações de movimento. Esta constante é explicitamente calculada em Scheeres et al. (1996).

$$C_j = (x^2 + y^2) + 2U - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2. \quad (11)$$

A constante de Jacobi é fixa em cada mapa plotado, o que faz com que o problema seja reduzido em um grau de liberdade.

As equações (4-6) são numericamente integradas através do integrador Burlish-Stoer (BULIRSCH; STÖER, 1966). A secção é fixada no plano $y = 0$ e as condições iniciais são distribuídas sistematicamente sobre o eixo x . É definido $y_0 = z_0 = \dot{x}_0 = \dot{z}_0 \equiv 0$ e \dot{y}_0 é calculado a partir de C_j (Eq. 11). Durante a integração, as condições da órbita são guardadas a cada instante que acontece o cruzamento da trajetória com a secção definida em $y = 0$ e com $\dot{y} > 0$. O método de Newton-Rapson é utilizado para obter uma precisão no cruzamento da órbita da mesma ordem da usada no integrador (10^{-13}). Os pontos guardados são plotados no espaço de fase (x, \dot{x}) , construindo assim, as superfícies de secções de Poincaré.

3.2 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Para começar as simulações, é interessante definir a região a ser estudada, bem como as constantes de Jacobi e o sentido da velocidade inicial. Como o nosso interesse está na região do anel, fixamos o intervalo das condições iniciais em $2000 < x < 3000 \text{ km}$ variando com passos de 10 km , que contém o anel observado, que vai de 2252 a 2322 km (ORTIZ et al., 2017). Para saber o sentido da velocidade inicial é preciso encontrar o ponto de equilíbrio. Para encontrar o ponto de equilíbrio a seguinte relação deve ser satisfeita (JIANG et al., 2014):

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

onde

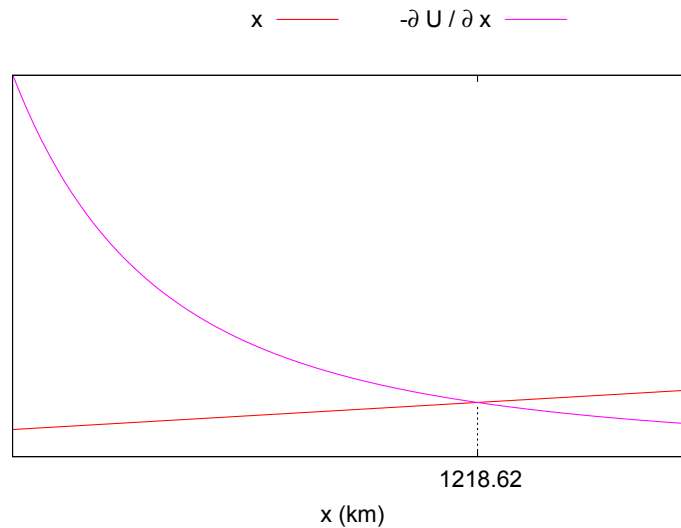
$$V = \frac{(x^2 + y^2)}{2} + U \quad (13)$$

dessa forma, a relação para encontrar o ponto de equilíbrio no eixo x é dada por:

$$x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (14)$$

Plotando separadamente as curvas x e $-\frac{\partial U}{\partial x}$, podemos obter no cruzamento das curvas o ponto de equilíbrio em $x > 0$, como se verifica na figura 9.

Figura 9: Curvas para obtenção do ponto de equilíbrio no eixo $x > 0$.

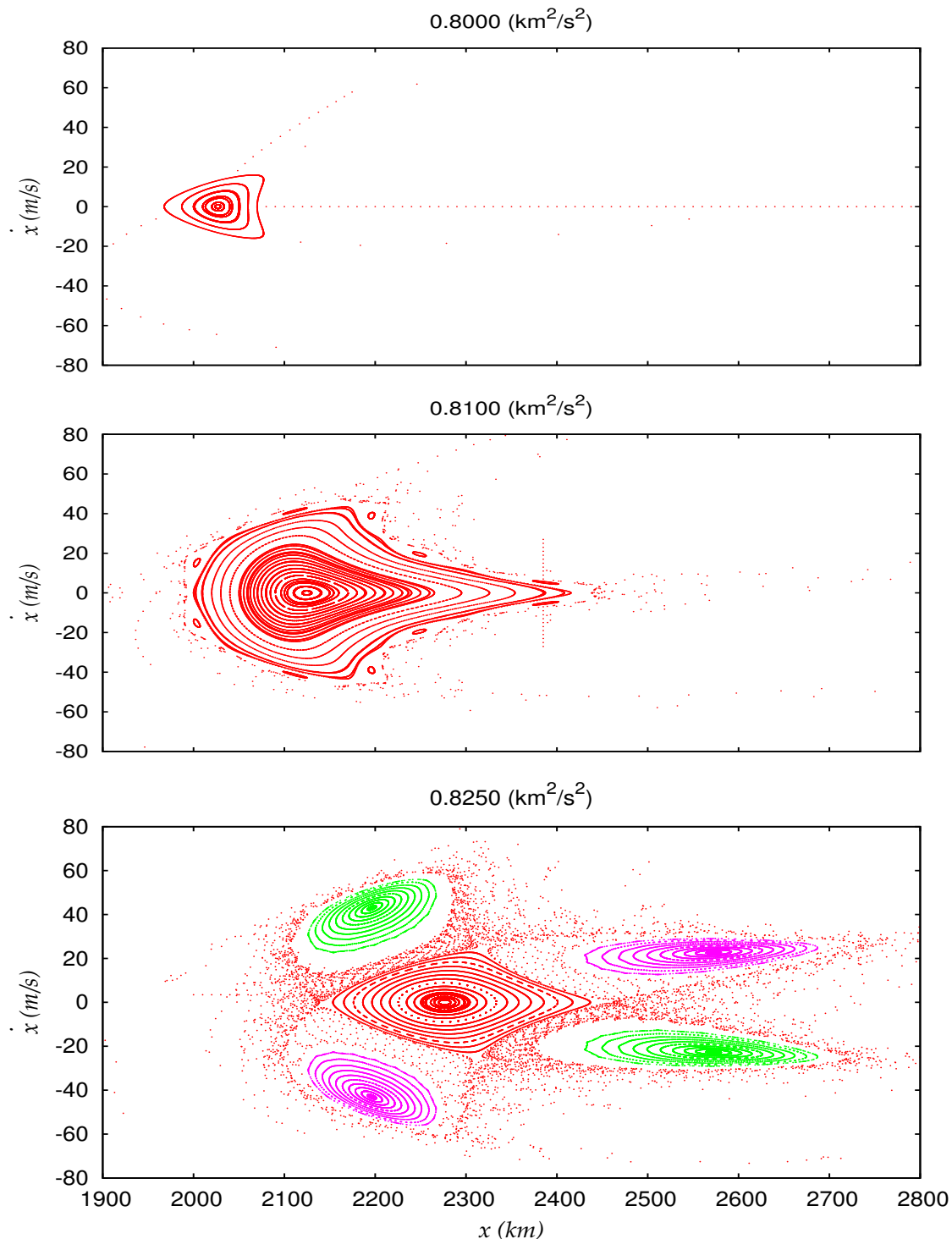


fonte: Produção do próprio autor.

Como a região, onde foi observado o anel, está mais afastada de Haumea que o ponto de equilíbrio, necessariamente a velocidade na condição inicial deve ser contrária a rotação do sistema, ou seja, $\dot{y} < 0$. Essa região apresenta dinâmica semelhante à observada na região externa do problema de três corpos, ou seja, quando o terceiro corpo apresenta raio orbital maior que o raio orbital da partícula que orbita os sistema. Portanto podemos usar como guia os estudos realizados em Winter; Murray (1994a); Winter; Murray (1997b).

Variamos a constante de Jacobi até encontrar alguma estrutura na região explorada. Encontramos estruturas a partir $C_j = 0.8000 \text{ km}^2/\text{s}^2$, e evoluímos até $C_j = 0.9000 \text{ km}^2/\text{s}^2$. A figura 10 apresenta três exemplos de superfícies de secção de Poincaré obtidas nas simulações. É possível identificar na figura 10, estruturas que indicam órbitas periódicas, órbitas quase periódicas, ilhas de estabilidade, órbitas periódicas ressonantes e trajetórias caóticas, como descrito anteriormente neste capítulo. Os resultados preliminares são construídos com condições iniciais sempre com $\dot{x} = 0$. Posteriormente varia-se \dot{x} , nas condições iniciais, para encontrar outras estruturas, como por exemplo as ilhas de estabilidade marcadas em rosa e verde na superfície de secção de Poincaré para $C_j = 0.8250 \text{ km}^2/\text{s}^2$.

Figura 10: Superfícies de secção de Poincaré para $C_j = 0.8000, 0.8100$ e $0.8250 \text{ km}^2/\text{s}^2$. Foram definidas as condições iniciais com $x_0 \geq 2000 \text{ km}$. Em verde e rosa estão indicadas ilhas de estabilidade bifurcadas de segunda ordem.



fonte: Produção do próprio autor.

Nas superfícies de secção de Poincaré, procuramos estruturas que indicassem ressonância 1:3 (período orbital da partícula:período de rotação de Haumea), ressonância em que estaria o anel (ORTIZ et al., 2017). Apenas uma estrutura com essa característica

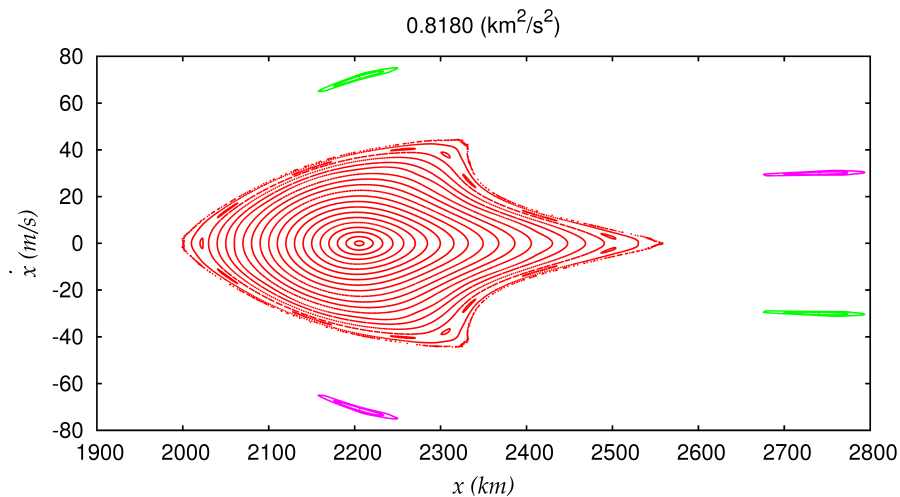
foi encontrada nas secções estudadas, trata-se das ilhas de estabilidade marcadas em rosa e verde na figura 10. A evolução das ilhas, e consequentemente das Famílias de órbitas periódicas, é apresentada nas figuras de 11 a 14. Nas 4 figuras um conjunto de ilhas de estabilidade preenchem o centro da superfície. No centro dessas ilhas estão órbitas periódicas de primeiro tipo pertencentes a uma Família que denominaremos central, e que será estudada em mais detalhes na sequência a este capítulo. Um par de ilhas de estabilidade é apresentado em verde e outro par em rosa. Essas ilhas de estabilidade são originárias de condições iniciais diferentes e são a bifurcação de uma Família de órbita periódica associada a uma ressonância de ordem dois. As órbitas periódicas nos centros de cada par de ilhas pertencem à Famílias de órbitas periódicas distintas, essas Famílias serão denominadas I e II, e quando estudadas juntas serão chamadas de Família ressonante. Usamos neste trabalho Famílias de órbitas periódicas como definição para um conjunto de órbitas periódicas de estrutura semelhante e que estão presentes em um intervalo contínuo de C_j .

A figura 11 é a superfície de secção de Poincaré para $C_j = 0.8180 \text{ km}^2/\text{s}^2$, essa secção é a de menor valor de C_j em que encontramos as ilhas de estabilidade associadas à ressonância de ordem dois. A não existência das ilhas para C_j de valores menores e mesmo a pequena largura que ela apresenta para $C_j = 0.8180 \text{ km}^2/\text{s}^2$, se deve a região caótica onde as ilhas se encontram. Para distinguir as duas órbitas periódicas associada a uma ressonância e as quase-periódicas ao redor delas, indicamos pela cor verde as órbitas pertencentes à Família I e pela cor rosa as órbitas pertencentes à Família II.

A figura 12 apresenta a superfície de secção de Poincaré para $C_j = 0.8250 \text{ km}^2/\text{s}^2$. As ilhas de estabilidade estão imersas em uma região caótica e bem próximas às órbitas quase-periódicas centrais. As ilhas apresentam uma largura maior e é possível identificar as três estruturas formadas por três condições iniciais diferentes, usadas para cada par de ilhas, sendo duas órbitas quase-periódicas e um ponto no centro de cada ilha, que indica a órbita periódica associada a uma ressonância.

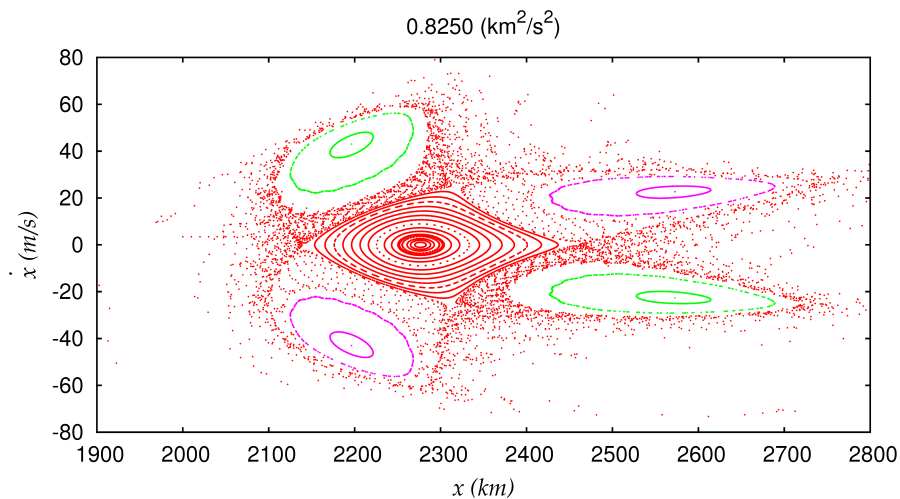
A figura 13 apresenta a superfície de secção de Poincaré para $C_j = 0.8270 \text{ km}^2/\text{s}^2$. As ilhas então dentro da região das órbitas quase-periódicas que libram ao redor da órbita central. A figura 14 é a superfície de secção de Poincaré para $C_j = 0.8277 \text{ km}^2/\text{s}^2$, essa secção é a de maior valor de C_j em que estas ilhas estão presentes. As ilhas de estabilidade estão bem próximas do centro das estrutura principal e as amplitudes de libração das ilhas são menores em relação às amplitudes das ilhas para $C_j = 0.8250$.

Figura 11: Superfície de secção de Poincaré para $C_j = 0.8180 \text{ km}^2/\text{s}^2$. Em verde as ilhas que indicam as órbitas quase-periódicas da Família I e em rosa as ilhas que indicam as órbitas quase-periódicas da Família II.



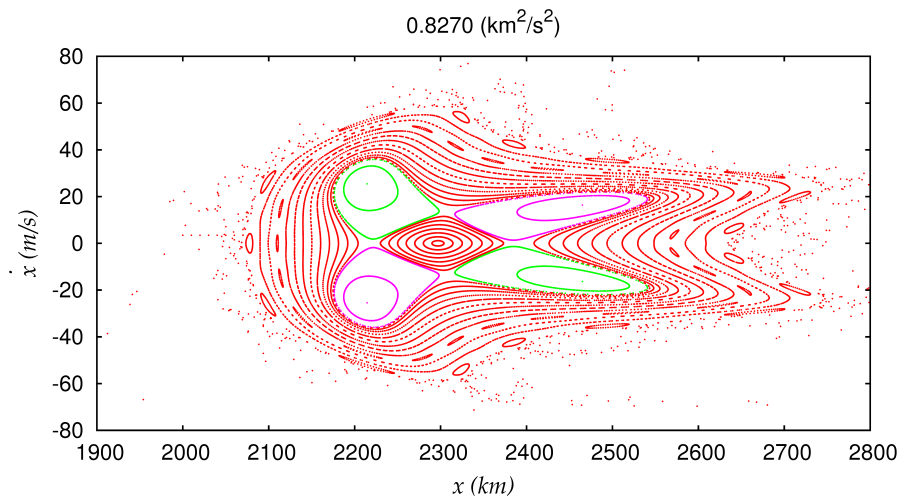
fonte: Produção do próprio autor.

Figura 12: Superfície de secção de Poincaré para $C_j = 0.8250 \text{ km}^2/\text{s}^2$. Em verde as ilhas que indicam as órbitas quase-periódicas da Família I e em rosa as ilhas que indicam as órbitas quase-periódicas da Família II.



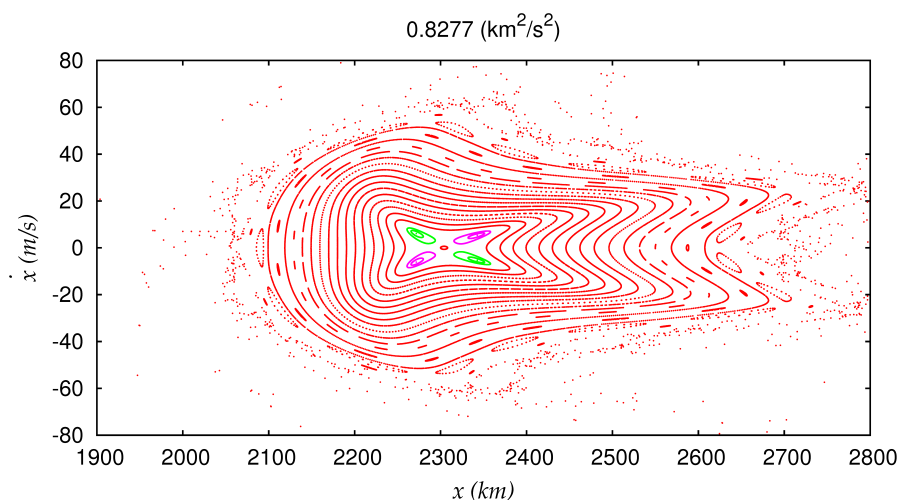
fonte: Produção do próprio autor.

Figura 13: Superfície de secção de Poincaré para $C_j = 0.8270 \text{ km}^2/\text{s}^2$. Em verde as ilhas que indicam as órbitas quase-periódicas da Família I e em rosa as ilhas que indicam as órbitas quase-periódicas da Família II.



fonte: Produção do próprio autor.

Figura 14: Superfície de secção de Poincaré para $C_j = 0.8277 \text{ km}^2/\text{s}^2$. Em verde as ilhas que indicam as órbitas quase-periódicas da Família I e em rosa as ilhas que indicam as órbitas quase-periódicas da Família II.

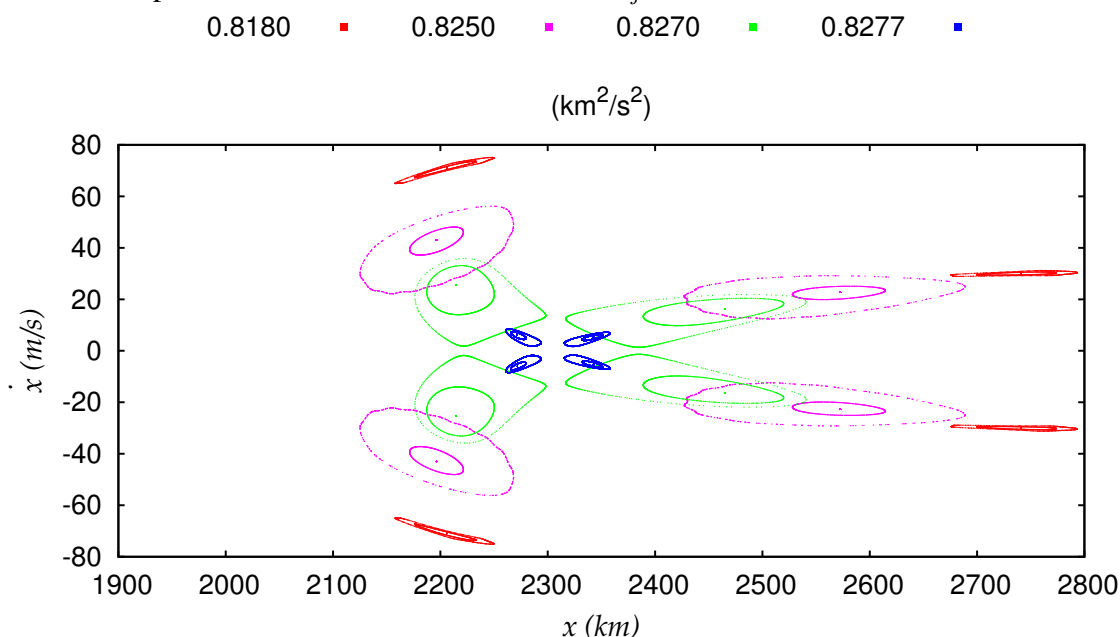


fonte: Produção do próprio autor.

Para uma visão ampla da evolução de ambas as Famílias, I e II, apresenta-se na figura 15 as ilhas de estabilidade de diferentes valores de C_j no mesmo espaço de fase. Cada cor usada na figura 15 indica um valor diferente de C_j , ou seja para cada cor um conjunto de ilhas de estabilidade de cada Família, I e II, é apresentado. Cada ilha é representada pela ilha de estabilidade mais larga, uma ilha intermediária e o ponto que corresponde à órbita periódica. Verifica-se que, a medida que o valor de C_j aumenta, as ilhas de estabilidade

convergem para o centro comum às quatro ilhas. Próximo ao centro, as ilhas voltam a ter uma amplitude de libração menor que a distância entre as ilhas. Este comportamento é relativamente raro nas superfícies de secções de Poincaré (WINTER; MURRAY, 1994A). Esse comportamento dificultou encontrarmos o valor de C_j em que ocorre a bifurcação, durante nossas simulações.

Figura 15: Evolução das Famílias I e II nas superfícies da secção de Poincaré. Uma amostra das maiores ilhas de estabilidade, uma ilha intermediária e os pontos dentro que representam a órbita periódica mostrando a estrutura para diferentes valores de C_j . As cores correspondentes aos valores indicados de C_j .

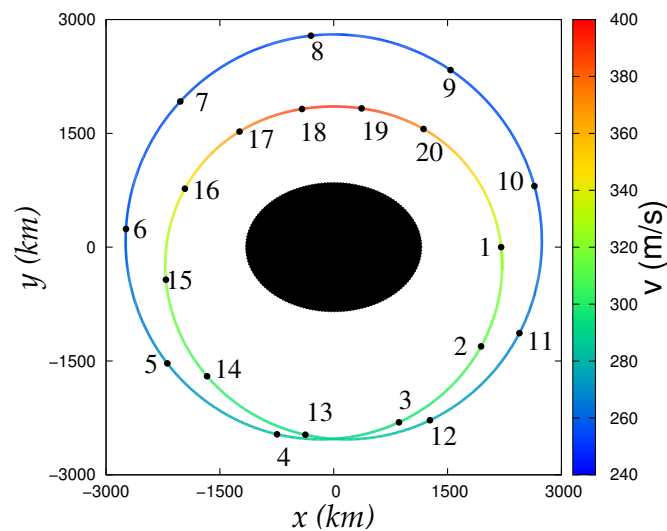


fonte: Produção do próprio autor.

Na sequência estudamos as órbitas periódicas das Famílias I e II. Nas Figs 16 e 17 são apresentadas as órbitas periódicas das Famílias I e II respectivamente para $C_j = 0.8180 \text{ km}^2/\text{s}^2$. São numerados em sequência alguns pontos na órbita para se compreender a orientação da trajetória da partícula.

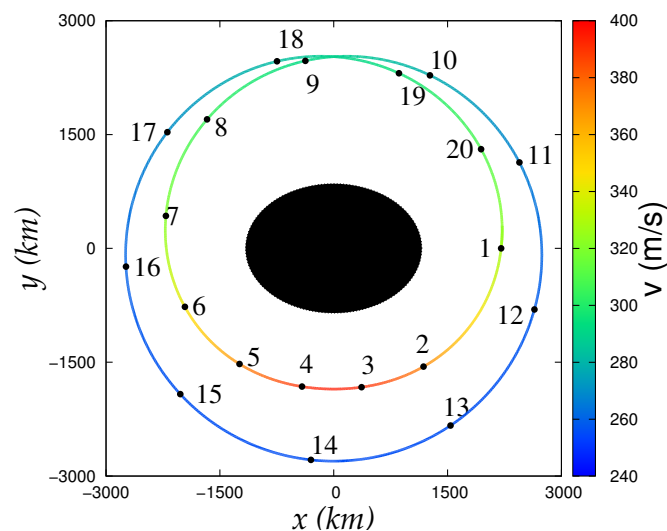
Os pontos numerados são igualmente espaçados no tempo e a cor da curva indica o módulo da velocidade no sistema inercial. Quanto maior a proximidade entre a partícula e Haumea maior também o módulo da velocidade, indicando a região do pericentro da órbita. Da mesma forma, as menores velocidades coincidem com as maiores distâncias entre partícula e Haumea, indicando o apocentro.

Figura 16: A órbita periódica da Família I no sistema girante para constante Jacobi $0.8180 \text{ km}^2/\text{s}^2$. As cores indicam a velocidade no sistema inercial. A órbita é dividida em 20 partes com passos de tempo iguais e os pontos são numerados para mostrar a sequência da trajetória.



fonte: Produção do próprio autor.

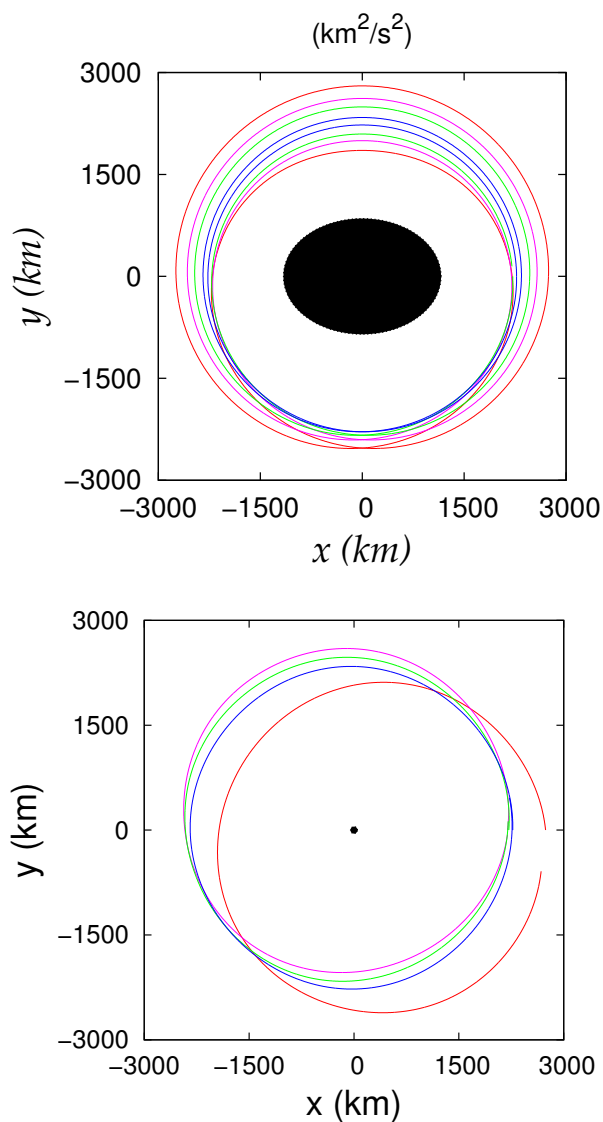
Figura 17: A órbita periódica da Família II no sistema girante para constante Jacobi $0.8180 \text{ km}^2/\text{s}^2$. As cores indicam a velocidade no sistema inercial. A órbita é dividida em 20 partes com passos de tempo iguais e os pontos são numerados para mostrar a sequência da trajetória.



fonte: Produção do próprio autor.

Figura 18: Órbita periódica da Família I: a esquerda no sistema girante, plano xy ; a direita no sistema inercial, plano xy . As órbitas são integradas ao longo de três períodos rotacionais de Haumea. As cores correspondem aos valores indicados de C_j .

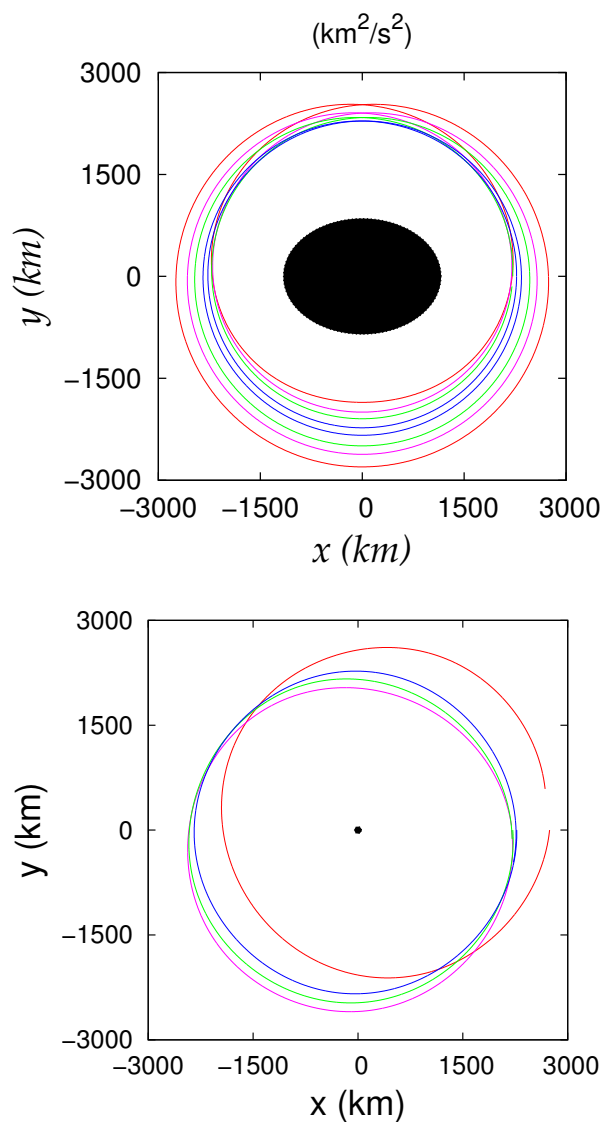
0.8180 ■ 0.8250 ■ 0.8270 ■ 0.8277 ■



fonte: Produção do próprio autor.

Figura 19: Órbita periódica da Família II: a esquerda no sistema girante, plano xy ; a direita no sistema inercial, plano xy . As órbitas são integradas ao longo de três período de uma rotação de Haumea. As cores correspondem aos valores indicados de C_j .

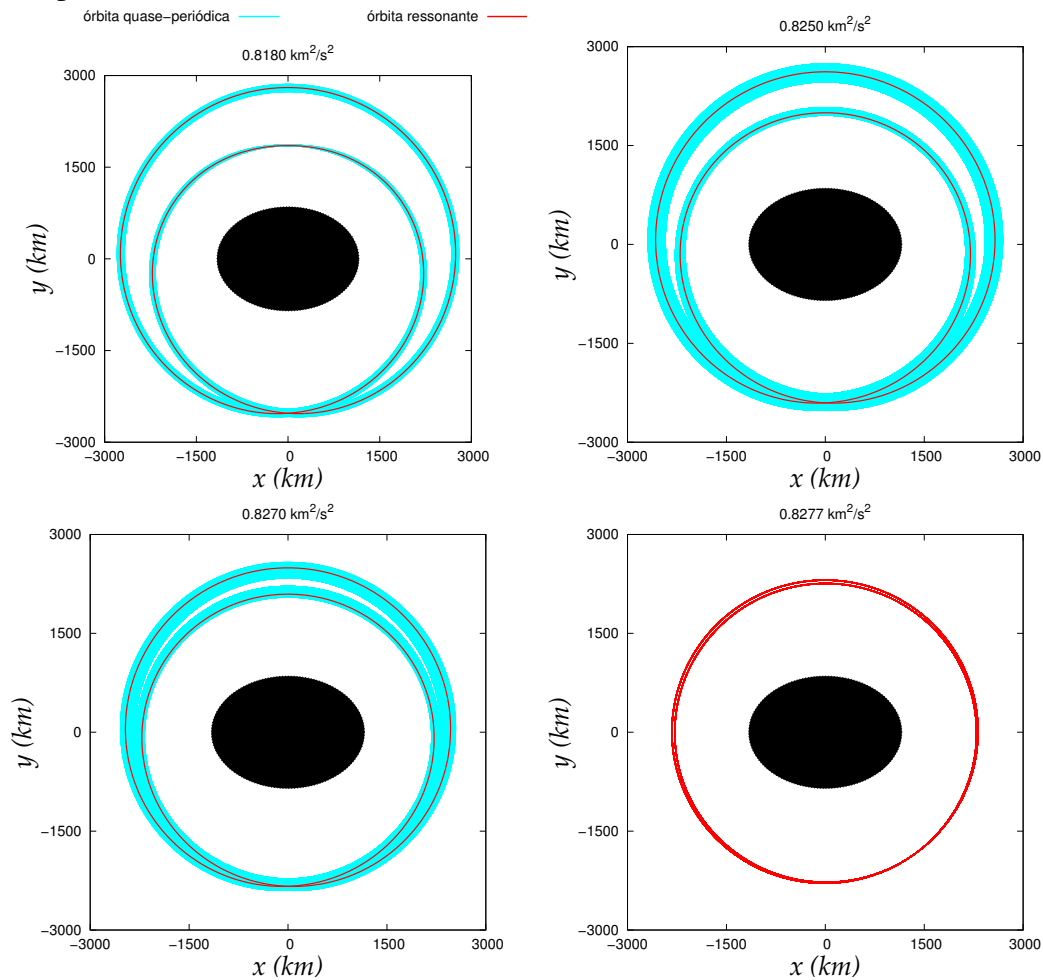
0.8180 ■ 0.8250 ■ 0.8270 ■ 0.8277 ■



fonte: Produção do próprio autor.

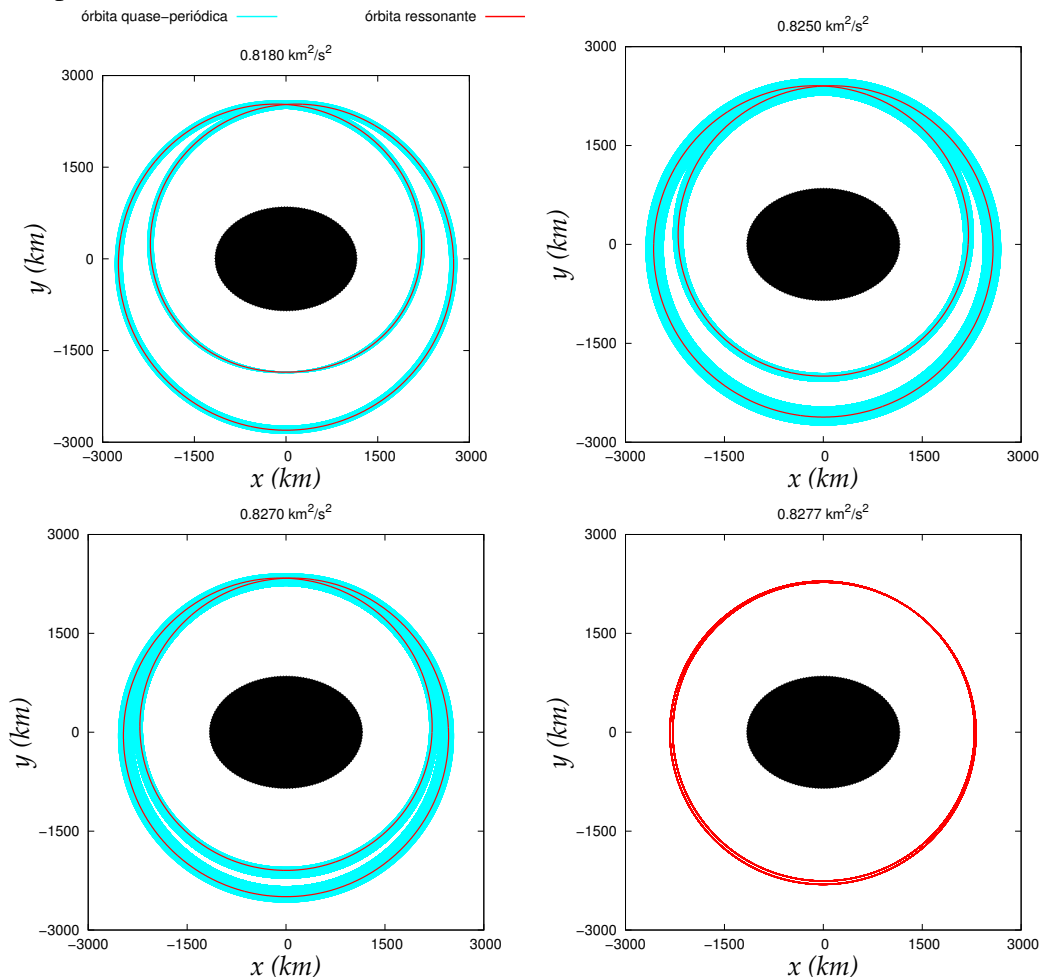
As Famílias apresentam intensa estabilidade. Essa estabilidade se apresenta em toda a largura das ilhas e cria regiões de estabilidade que podem ser observadas nas figuras 20 e 21. Estas figuras apresentam a órbita ressonante e a órbita quase-periódica de maior amplitude de libração das Famílias I e II, respectivamente, para diferentes valores de C_j . Como já observado nas ilhas, as maiores amplitudes de libração estão presentes para os valores intermediários de C_j .

Figura 20: A maior órbita quase periódica (em azul) e a órbita ressonante (em vermelho) da Família I no sistema girante para diferentes valores de C_j . Para $C_j = 0.8277 \text{ km}^2/\text{s}^2$ a libração das órbitas quase periódicas é mínima, de forma a estarem encobertas pelas órbitas periódicas.



fonte: Produção do próprio autor.

Figura 21: A maior órbita quase periódica (em azul) e a órbita ressonante (em vermelho) da Família II no sistema girante para diferentes valores de C_j . Para $C_j = 0.8277 \text{ km}^2/\text{s}^2$ a libração das órbitas quase periódicas é mínima, de forma a estarem encobertas pelas órbitas periódicas.

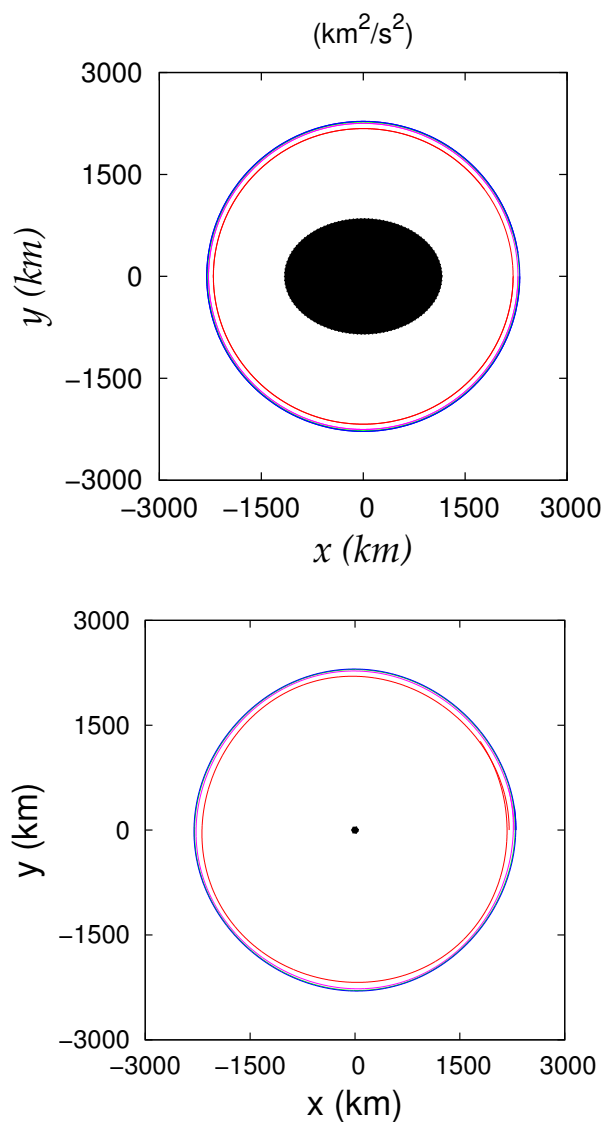


fonte: Produção do próprio autor.

Outra Família de órbitas periódicas, como mencionado anteriormente, é a Família central. A figura 22 apresenta alguns exemplos de órbitas periódicas da Família central nos sistema girante e inercial. Essa amostra tem os mesmos valores de C_j usados no estudo das Famílias I e II. Percebe-se que em ambos os sistemas as órbitas são bem circulares, indicando a baixa excentricidade.

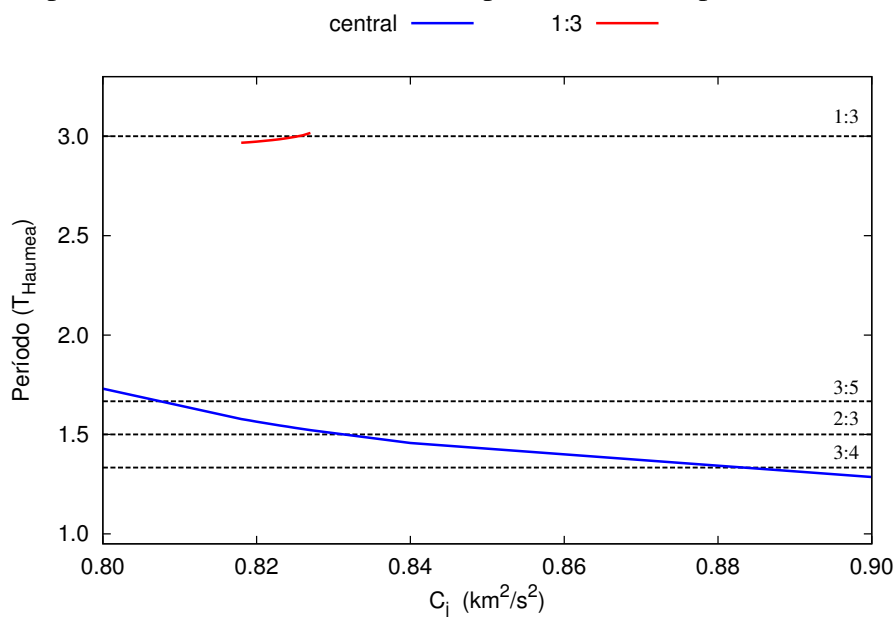
Figura 22: Órbita periódica da Família Central: a esquerda no sistema girante, plano xy ; a direita no sistema inercial, plano xy . As órbitas são integradas ao longo de três períodos rotacionais de Haumea. As cores correspondentes aos valores indicados de C_j .

0.8180 ■ 0.8250 ■ 0.8270 ■ 0.8277 ■



fonte: Produção do próprio autor.

Figura 23: Gráfico de C_j pelo período orbital das Famílias ressonante e central. A Família ressonante compreende os dados que são comuns às Famílias I e II. É destacada em vermelho o período exato da ressonância 1:3 (período orbital : período rotacional).

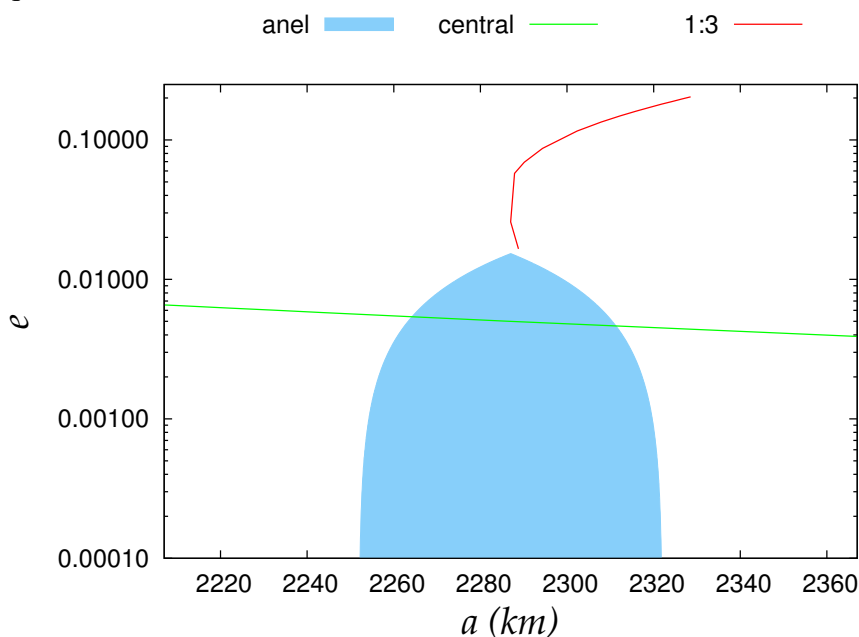


fonte: Produção do próprio autor.

Comparando as Famílias I, II e central, é possível verificar que a Família central apresenta órbitas possíveis às partículas do anel de Haumea. Na figura 23 são apresentados os períodos das órbitas periódicas das Famílias central e ressonante, estamos chamando de Família ressonante as Famílias I e II que apresentam o mesmo período orbital para o mesmo C_j . Nota-se que a Família ressonante começa e termina próxima à ressonância. Por outro lado, a órbita central cruza vários períodos inclusive a ressonância exata.

Além do período, podemos usar a localização do anel para determinar a qual Família de órbitas periódicas o anel é compatível. Usando o intervalo radial onde o anel está localizado (2252 km a 2322 km), segundo observações (ORTIZ et al., 2017), traçamos uma região em que a razão entre semi-eixo maior e excentricidade permite o anel confinado, região marcada e azul na figura 24. Para criar essa curva igualamos o apocentro à borda externa e o pericentro à borda interna do anel. As Famílias de órbitas periódicas ressonante e central também estão representadas na figura 24, nas cores vermelho e azul respectivamente. Para cada órbita periódica foram obtidas a maior e a menor distância do centro do sistema e comparados com o pericentro e o apocentro. Dessa forma, obtemos o semieixo e a excentricidade de uma elipse com variação radial equivalente à variação radial órbita periódica.

Figura 24: Gráfico de semi-eixo maior pela excentricidade das Famílias central e ressonante, e do anel observado em (ORTIZ et al., 2017). A Família ressonante compreende os dados que são comuns às Famílias I e II.

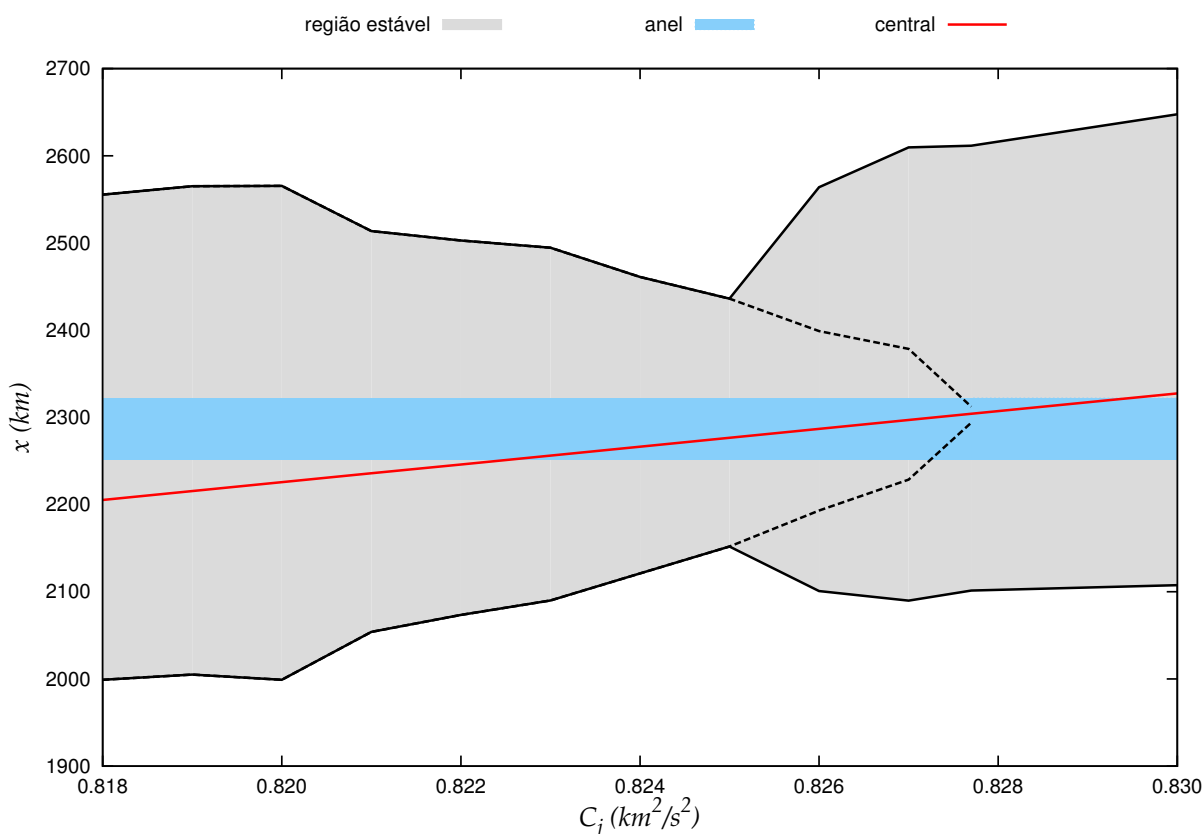


fonte: Produção do próprio autor.

A curva verde cruza a região azul e a curva vermelha não cruza a região azul. Ou seja, para o anel observado as órbitas periódicas da Família central são compatíveis, diferente das órbitas periódicas da Família ressonante que não podem manter partículas orbitando na região do anel. Atenta-se que, a curva da Família ressonante compreende a extensão máxima encontrada, ou seja não foram encontradas órbitas periódicas dessa Família fora da curva. Enquanto que a Família central está representada em todo o intervalo do gráfico apresentando órbitas não representadas na curva verde.

A figura 25 mostra a extensão da região de estabilidade devido à Família central, ou seja a largura ocupada pelas órbitas quase-periódicas ao redor das órbitas periódicas da Família central. Uma faixa em azul localiza o anel no eixo x . O anel está completamente contido na região estável, o que possibilita que as partículas do anel também possam estar em órbitas quase-periódicas, desde que a excentricidade seja baixa. Esse gráfico também mostra que o anel pode estar em todo o intervalo de C_j utilizado.

Figura 25: Região de estabilidade gerada pela Família central. A região cinza compreende a extensão das órbitas quase-periódicas associadas a Família, a região azul denota a região do anel, a curva vermelha denota as órbitas periódicas da Família central e a linha tracejada indica a aproximação da ilhas da Família ressonante do centro.



fonte: Produção do próprio autor.

3.3 CONSIDERAÇÕES

Nosso modelo considerou uma expansão com C_{20} e C_{22} no potencial gravitacional de Haumea e definiu um sistema girante que acompanha a rotação do asteroide. Usamos superfícies de secção de Poincaré para estudar a região ao redor de Haumea. Buscamos uma região nas proximidades do anel, que possa estar em concordância com os dados observacionais de Ortiz et al. (2017).

Encontramos duas Famílias bifurcadas associadas à ressonância 1:3. As órbitas quase-periódicas dessa Família não preenchem regularmente a região que ocupam no sistema girante. Isso se deve ao fato de que por serem bifurcadas, as Famílias associadas a ressonância são separadas por uma região instável de trajetórias caóticas, o que impossibilita o cruzamento e o fechamento da região. As órbitas periódicas apresentam excentricidades e localizações que não coincidem com a localização do anel.

Outra Família de órbitas periódicas encontrada e estudada, é a central. Apesar de não

estar associada a ressonância, possui órbitas periódicas coerentes com o anel, tanto em localização quanto em excentricidade.

Nossas simulações mostraram que apesar de estarem próximas da ressonância esperada (1:3), a Família central domina a dinâmica na região do anel.

4 MODELO DE CONCENTRAÇÃO DE MASSA - MASCONS

Para o estudo da dinâmica orbital de e ao redor de um corpo, é necessário definir o modelo que simule o potencial gravitacional gerado por esse corpo. O modelo mais simples consiste em considerar o corpo um ponto matemático em seu centro de massa, com toda a massa concentrada no ponto. As propriedades estruturais do corpo podem ser representadas mais precisamente, se, ao invés de usar um ponto massivo, for feita uma expansão por séries harmônicas no potencial gravitacional, como a que utilizamos no capítulo 3. Isso é válido para qualquer corpo (MACMILLAN, 1936). A precisão do potencial gravitacional é maior quando a série harmônica tem um elevado número de coeficientes gravitacionais. Uma outra modelagem para o potencial gravitacional é o *Ivory's approach*. Ao se ajustar um elipsoide triaxial a estrutura geométrica do corpo, seus efeitos gravitacionais podem ser medidos (LAPLACE, 1782; KELLOGG, 1954).

Nas últimas duas décadas uma nova ferramenta tem auxiliado o cálculo do potencial gravitacional de corpos irregulares, tornando-os ainda mais próximos dos valores reais. Essa ferramenta é o *polyhedron shape model*, que determina com boa precisão a forma, volume e momentos de inércia de um corpo observado (NEESE, 2004). A partir de dados obtidos por análise de curva de luz, imagem de radar ou por imageamento de alta resolução feito por sondas espaciais, é possível construir um poliedro de faces triangulares que simule a forma irregular do corpo irregular (SCHEERES, 2012). Devido à complexidade para obtenção dos dados necessários para a construção do modelo, o número de asteroides com essa modelagem é muito inferior ao número de asteroides conhecidos. É possível acessar dados desses poliedros em repositórios como NATIONALAeronauticsandSpace-Administration (2017) e JETPropulsionLaboratory (2017). A partir desses dados duas abordagens são amplamente exploradas na literatura e serão descritas a seguir.

A abordagem denominada modelo de poliedros, que foi desenvolvida por Werner (1994), consiste na integração do potencial gravitacional de um elemento de massa sobre todo o volume interno do poliedro. A outra abordagem foi usada em Geissler et al. (1996) e posteriormente denominada "mascons"(mass concentration) (WERNER; SCHEERES, 1996; ROSSI; MARZARI; FARINELLA, 1999). O modelo de mascons baseia-se em preencher o sólido dado pelo poliedro com pontos massivos. Desta forma a massa pode ser distribuída espacialmente dentro da forma do asteroide. A distribuição dos pontos no volume do corpo pode ser feita de duas formas: mantendo os pontos equidistantes como uma grade (GEISLER et al., 1996) ou aproveitando a geometria das faces do poliedro para distribuir sistematicamente os pontos (VENDITTI, 2013), abordagens que

chamaremos de modelo de grade e modelo de tetraedro, respectivamente.

No presente capítulo, as duas formas de distribuição serão descritas, simuladas e comparadas.

4.1 MODELO DE GRADE

O poliedro é uma forma complexa, o que dificulta sua manipulação matemática, portanto antes de aplicar um modelo de distribuição de mascons é necessário dividir o sólido em sólidos mais simples. As formas derivadas do *polyhedron shape model* são geralmente poliedros de faces triangulares, o que facilita a divisão do poliedro em tetraedros. Basta unir os vértices de cada face triangular ao centro geométrico do poliedro, que se obtêm um corpo formado por N tetraedros, em que N é o número de faces do poliedro original.

O modelo de distribuição de mascons de grade (GEISLER et al., 1996), consiste em criar uma grade de pontos igualmente espaçados contida na forma do poliedro. A variação desse modelo se da no espaçamento utilizado, sendo este inversamente proporcional ao número resultante de pontos na grade. Tendo sido criada uma grade que contem o poliedro, é necessário um algoritmo capaz de excluir os pontos que não estão contidos no asteroide.

Seja V o volume de um tetraedro e $\Omega_{tetra.}$ o elemento volumétrico do mesmo, o volume pode ser calculado na seguinte forma (DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DE ENGENHARIA AEROSPAIAL DA UNIVERSIDADE DO COLORADO EM BOULDER, 2017):

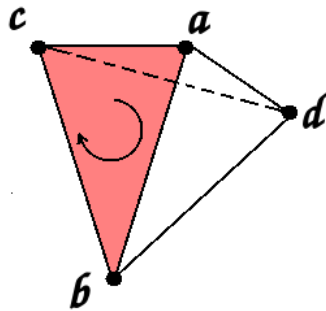
$$V = \int_{\Omega_{tetra.}} d\Omega_{tetra.} = \frac{1}{6} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_a & x_b & x_c & x_d \\ y_a & y_b & y_c & y_d \\ z_a & z_b & z_c & z_d \end{bmatrix}, \quad (15)$$

onde x , y e z são as coordenadas dos vértices indicados em seus índices e sendo que a , b , c e d são vértices que formam um tetraedro. O determinante da matriz é um valor escalar positivo ou negativo. É possível garantir que o valor seja positivo se uma sequência for obedecida. Escolhendo uma das 4 faces, o vértice que não pertence a face é o d , os outros são ordenados a , b e c no sentido horário, na parte oposta ao vértice d , da face. Essa sequência é mostrada na figura 26:

Pensando agora em um ponto de teste dentro do tetraedro, podemos observar na figura 27 que a ordem dos pontos é mantida sempre que o ponto teste substitui um dos vértices. Mesmo que a face seja declarada no sentido anti-horário, resultando em uma matriz com sinal negativo, os tetraedros formados com o ponto teste manterão o sinal do tetraedro original. Por outro lado, caso o ponto teste esteja fora do tetraedro, ao menos um tetraedro formado com o ponto terá determinante de sinal divergente ao do tetraedro original.

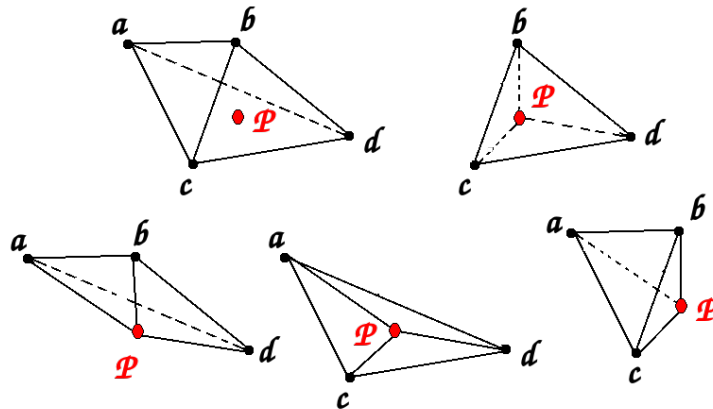
Substituindo agora o vértice d pelo centro geométrico localizado na origem do sistema,

Figura 26: Sequência dos vértices de um tetraedro para que o determinante dê positivo.



fonte: Produção do próprio autor.

Figura 27: Tetraedro com um ponto de teste e os tetraedros formados entre as faces e o ponto.



fonte: Produção do próprio autor.

obtemos as cinco matrizes:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_a & x_b & x_c & 0 \\ y_a & y_b & y_c & 0 \\ z_a & z_b & z_c & 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_p & x_b & x_c & 0 \\ y_p & y_b & y_c & 0 \\ z_p & z_b & z_c & 0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_a & x_p & x_c & 0 \\ y_a & y_p & y_c & 0 \\ z_a & z_p & z_c & 0 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_a & x_b & x_p & 0 \\ y_a & y_b & y_p & 0 \\ z_a & z_b & z_p & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

e

$$D_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_a & x_b & x_c & x_p \\ y_a & y_b & y_c & x_p \\ z_a & z_b & z_c & x_p \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Sendo assim, se D_1 , D_2 , D_3 e D_4 tiverem mesmo sinal de D o ponto pertence ao tetraedro, caso um deles tenha um sinal diferente o ponto está fora do tetraedro. Se um dos determinantes for igual a zero, com exceção do determinante da matriz D , então o ponto está contido na face.

Com esse algoritmo é possível excluir todos os pontos fora do tetraedro. Tendo distribuído pontos dentro do volume do poliedro, para simular o corpo que o poliedro representa, divide-se a massa do corpo irregular igualmente entre os pontos. Dessa forma se obtêm o modelo de mascons de grade.

4.2 MODELO DE TETRAEDRO

A segunda abordagem para dispor os mascons dentro do volume do poliedro aproveita a forma dos tetraedros descritos na abordagem anterior. Os mascons são alocados nos centros de cada tetraedro, ou no centro dos sólidos formados pela divisão dos mesmos tetraedros (VENDITTI, 2013). Dessa forma, o número de mascons do modelo é múltiplo do número de faces do poliedro usado. Esse modelo foi inicialmente proposto em Venditti (2013) para o estudo de manobras orbitais. Posteriormente foi comparado com o modelo de poliedros em Chanut; Aljbaae; Carruba (2015). O algoritmo descrito nesta seção foi elaborado pelo autor, para a distribuição dos pontos nos tetraedros.

O poliedro é centrado na origem do sistema, ou seja, seu centro geométrico coincide com a origem do sistema. Dessa forma, a origem também é um vértice de todos os tetraedros. Os outros vértices de cada tetraedro são dados pelos vértices da face triangular na superfície do poliedro. Nessas condições, as coordenadas dos vértices das faces triangulares são também os vetores que formam o tetraedro. Logo, para obter o volume de um dos tetraedros divide-se por seis o produto misto dos três vetores (STEINBRUCH; WINTERLE, 1987). Seja $0 < k' < 1$, onde k' é uma fração que multiplica cada um dos

vetores, temos:

$$\frac{\det \begin{pmatrix} (v_1)_x & (v_1)_y & (v_1)_z \\ (v_2)_x & (v_2)_y & (v_2)_z \\ (v_3)_x & (v_3)_y & (v_3)_z \end{pmatrix}}{6} = k'^3 Vol, \quad (21)$$

sendo Vol o volume original do tetraedro, $(v)_b^a$ a coordenada $b = x, y$ ou z do vértice $a = 1, 2$ ou 3 . Ou seja, com uma fração k' dos vetores originais, é possível obter uma fração k'^3 do volume do tetraedro original. Definindo $k \equiv k'^3$ podemos determinar a fração desejada do tetraedro por k .

Seja n o número de mascons que se pretende alocar por tetraedro se fizermos:

$$k = \frac{i}{2n}, \quad (22)$$

com $i = 1, 3, \dots, (2n - 1)$, obtemos pela multiplicação das componentes dos vetores por $(k)^{1/3}$ se tem os vértices de um triângulo no plano onde o mascon deve ser alocado. Por fim basta calcular o baricentro deste triângulo para obter as coordenadas do mascon. Sendo assim, as coordenadas dos mascons são dadas por:

$$x_{masc} = \left(\frac{i}{2n} \right) \left(\frac{(v_1)_x + (v_2)_x + (v_3)_x}{3} \right), \quad (23)$$

$$y_{masc} = \left(\frac{i}{2n} \right) \left(\frac{(v_1)_y + (v_2)_y + (v_3)_y}{3} \right) \quad (24)$$

e

$$z_{masc} = \left(\frac{i}{2n} \right) \left(\frac{(v_1)_z + (v_2)_z + (v_3)_z}{3} \right), \quad (25)$$

Com esse algoritmo é possível alocar pontos dentro de cada tetraedro. Tendo distribuído pontos, para simular o corpo que o poliedro representa, atribui-se a cada mascon a massa equivalente ao volume que o mascon representa. Dessa forma se obtêm o modelo de mascons de tetraedro.

4.3 CÁLCULO DE POTENCIAL GRAVITACIONAL E COMPARAÇÃO DAS ABORDAGENS DE MASCONS

Com um modelo de pontos massivos capaz de simular o corpo irregular, é possível computar o potencial gravitacional (U),

$$U = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}, \quad (26)$$

onde G é a constante gravitacional universal, m_i é a massa do mascon i e r_i a distância do mascon i ao ponto no espaço onde se está calculando o potencial gravitacional.

Para comparar os modelos apresentados, foi selecionado o asteroide 216 kleopatra por

sua forma com irregularidade acentuada. Esse asteroide tem seu poliedro de 2048 vértices em 4092 faces como mostra a Figura 2.

A partir desse poliedro são criados 3 *clusters* de mascons pela distribuição de grade e 3 pela distribuição de tetraedros, onde buscou-se um espaçamento para a grade e um número de mascons por tetraedro que resultassem em *clusters* de quantidades de mascons próximas. Na Tabela 1 são apresentados os *clusters* de mascons de grade a esquerda e de mascons de tetraedros à direita. Para o modelo de grade é apresentado o espaçamento usado na grade, e no modelo de tetraedros a quantidade de mascons por tetraedro. São ainda atribuídos códigos para cada *cluster*, que serão usados a seguir para referenciá-los.

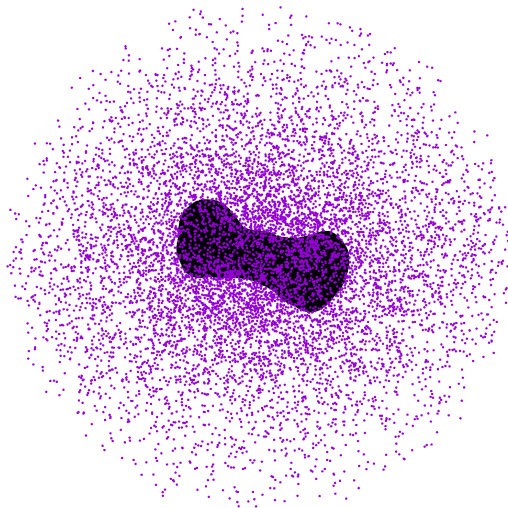
Tabela 1: Grades de mascons usados para comparação das diferentes distribuições.

Grade			Tetraedro		
cód.	espaçamento	mascons	cód.	masc./tetra.	mascons
MG_a	5.60 km	4046	MT_a	1	4092
MG_b	2.92 km	28441	MT_b	7	28644
MG_c	1.00 km	708649	MT_c	174	712008

fonte: Produção do próprio autor.

Para a comparação foram distribuídos randomicamente 10.000 pontos ao redor de 216 kleopatra, sendo que os pontos que acabaram dentro do asteroide foram excluídos, sobrando assim 9.587 pontos. Esses pontos estão distribuído em uma esfera oca de raio interno de 50 km e externo de 300 km, como está apresentado na figura 28.

Figura 28: Pontos distribuídos ao redor do asteroide 216 kleopatra.



fonte: Produção do próprio autor.

Para todos os *clusters* de mascon foram calculados os potenciais gravitacionais dos pontos da esfera oca. Foi cedido pelo Dr. André Amarante esse potenciais calculados

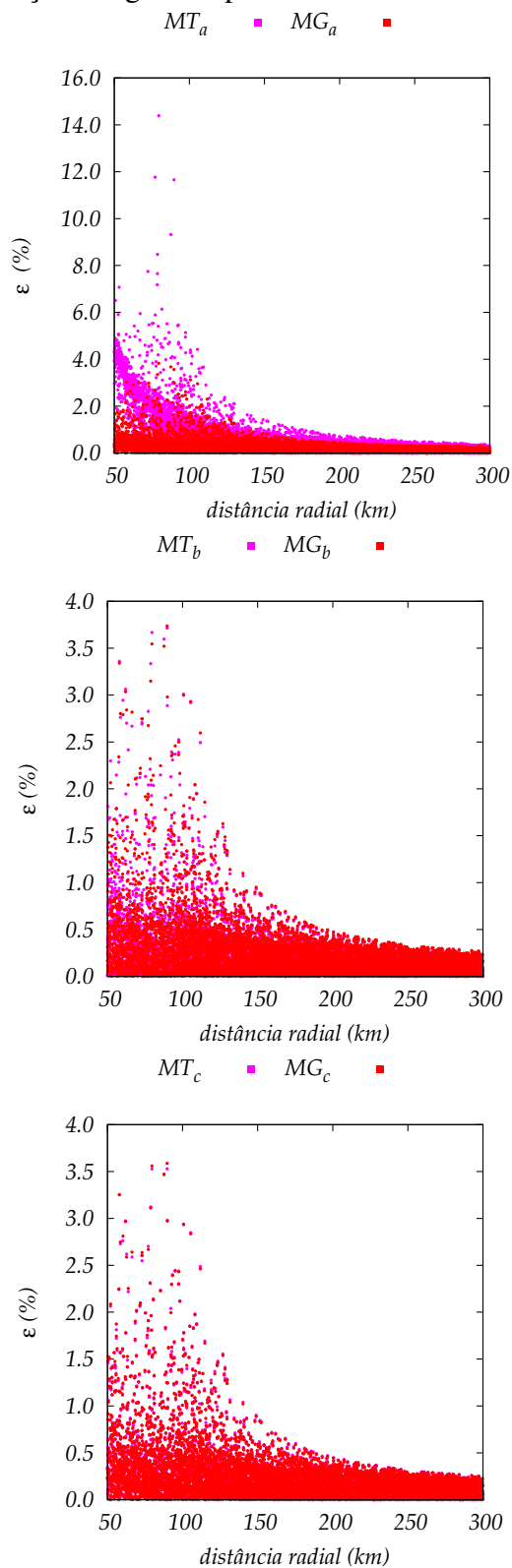
pelo modelo de poliedro. Por ser uma integração do sólido, o modelo de poliedro fornece os potenciais gravitacionais que servem de referência de precisão para os potenciais calculados por mascons.

A seguir, o módulo do erro entre o potencial calculado pelo modelo de poliedros e modelo de mascons (tanto o de grade quanto o de tetraedros) são apresentados, dado por:

$$\varepsilon = \frac{|V_{pol} - V_{model}|}{V_{pol}}, \quad (27)$$

onde V_{pol} é o potencial calculado usando modelo de poliedros (dados fornecidos pelo Dr. André Amarantes), V_{model} é o potencial calculado usando o modelo comparado (modelo de tetraedros e modelo de grade). Em cada gráfico na figura 29, estão os erros para um cluster de cada tipo de distribuição de mascons, onde os números totais de mascons é próximo.

Figura 29: Distância radial pelo módulo do erro relativo comparando os *clusters* de mascons obtidos por distribuição em grade e por tetraedro.

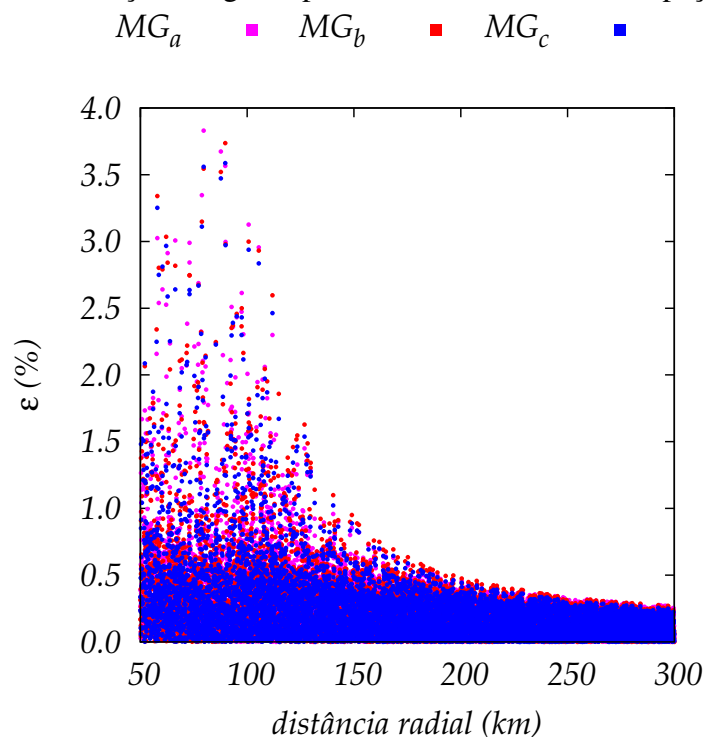


fonte: Produção do próprio autor.

Nota-se que, para menores quantidades de mascons a divergência entre a distribuição

por grade e por tetraedro é maior. Devido aos modelos, existe uma dificuldade para se obter o mesmo número de mascons, MG_a tem $\sim 11\%$ a menos que MT_a , MG_b tem $\sim 7\%$ a menos que MT_a e MG_c tem $\sim 5\%$ a menos que MT_c . Mas, essa diferença em número de mascons não é o suficiente para explicar a diferença no erro do potencial gravitacional, principalmente quando comparamos com variação do potencial em *clusters* de mesmo tipo de distribuição (Figs. 30 e 31). Os maiores erros calculados estão próximos ao corpo.

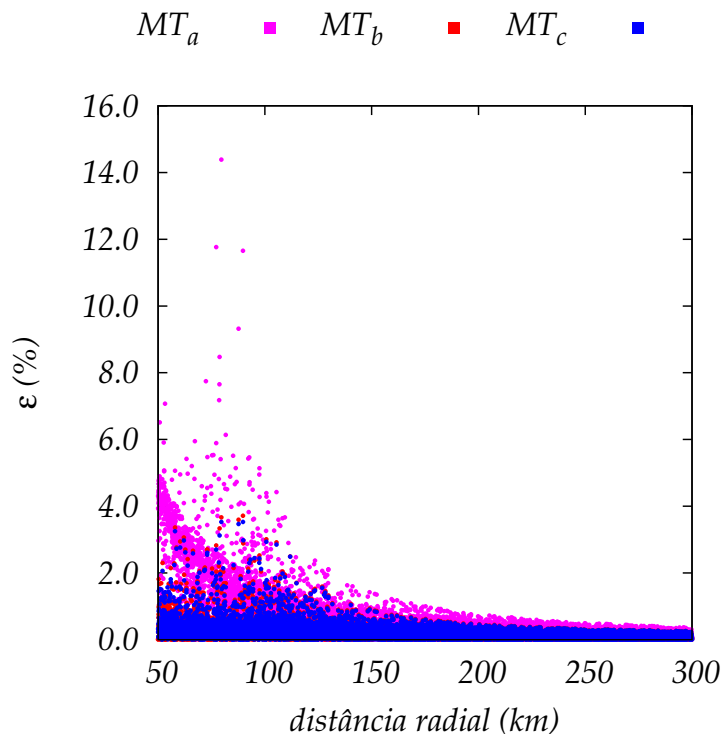
Figura 30: Distância radial pelo módulo do erro relativo comparando os *clusters* de mascons obtidos por distribuição em grade para diferentes valores de espaçamento.



fonte: Produção do próprio autor.

Para uma melhor visão da queda do erro com a quantidade de mascons, a figura 30 mostra o erro no potencial gravitacional para os *clusters* de mascons por grade e a figura 31 para os *clusters* de mascons por tetraedro. Após uma queda abrupta de erro em MT_a para o erro em MT_b , a diferença é pequena entre MT_b e MT_c . Já nos *clusters* obtidos por uma distribuição de mascons em uma grade igualmente espaçada, apresentam uma queda suave no erro com o aumento no número de mascons.

Figura 31: Distância radial pelo módulo do erro relativo comparando os *clusters* de mascons obtidos por distribuição em tetraedros para diferentes valores de mascons por tetraedro.



fonte: Produção do próprio autor.

Além do erro, outro fato importante na escolha do mascon, é o custo computacional. É importante avaliar dentro da precisão desejada, qual o ganho de precisão terá os resultados em detrimento ao tempo que levará a simulação. A Tabela 2 apresenta o tempo de processamento do potencial gravitacional em cada *cluster*.

Tabela 2: Tempo de execução do cálculo do potencial gravitacional.

Grade		Tetraedro	
cód.	Tempo(s)	cód.	Tempo (s)
MG_a	2.207	MT_a	1.660
MG_b	9.892	MT_b	11.279
MG_c	263.789	MT_c	274.692

fonte: Produção do próprio autor.

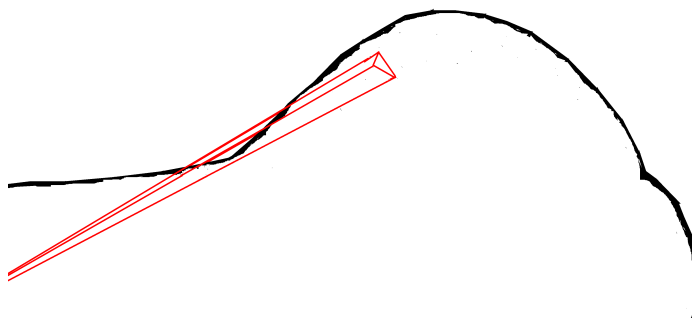
O tempo de MG_a , MG_b , MT_a e MT_b é muito menor que o tempo de MG_c e MT_c , diferença que não corresponde ao ganho em precisão (menos $\sim 0.2\%$ e $\sim 0.1\%$ no erro entre MT_b e MT_c e MG_b e MG_c). Já a diferença em tempo de execução de MT_a e MT_b , é pequena enquanto o ganho em precisão é significativo (menos $\sim 10.7\%$ no erro). Dentre os *clusters* de mascons utilizados, o de melhor eficiência é o MG_a . Com exceção do MT_a os *clusters* têm um erro máximo de 4%, o que consideramos um bom resultado se tratando de um corpo tão irregular quanto o 216 kleopatra. Dentre os dois modelos de

distribuição de mascons, conclui-se que para *clusters* com menores números de mascons o modelo de grade apresenta um erro menor em relação ao modelo de tetraedro,

4.4 OS PROBLEMAS DE CONCAVIDADE E DENSIDADE DE MASCONS

Dois problemas foram identificados no modelo de distribuição de mascons de tetraedro, e serão abordados nessa seção. O primeiro é o problema que deriva das concavidades encontradas nos corpos irregulares. Devido a modelagem por tetraedro, ocasionalmente parte de um tetraedro pode estar fora do corpo simulado. Isso ocorre porque o caminho que liga a face ao centro geométrico do corpo, passa por uma concavidade, como pode ser observado na figura 32.

Figura 32: Parte do asteroide 216 kleopatra com um tetraedro marcado em vermelho que cruza a concavidade do corpo.



fonte: Produção do próprio autor.

Além de contabilizar um volume que não pertence ao corpo, devido a esse problema, alguns mascons podem ser alocados fora do corpo. Por exemplo, com a rotina usada no modelo de grade para identificação de pontos que estão dentro ou fora do asteroide, identificamos que MT_c apresenta 25502 mascons fora do corpo o que representa $\sim 3,6\%$ do total do *cluster*.

É importante ressaltar, que a princípio o problema da concavidade pode afetar a modelagem de distribuição por grade. Mas sempre que um tetraedro cruza uma concavidade, um segundo tetraedro cobrirá a mesma região. Expandindo esse pensamento sabe-se que todo ponto que pertencer a um número par ou nulo de tetraedros, está fora do corpo, e toda vez que um ponto pertence a um número ímpar de tetraedro, o mesmo pertence ao corpo.

O outro problema devido a modelagem de tetraedro deriva da dependência do poliedro obtido das observações. Os tetraedros formados pelas faces e os centros geométricos dão a distribuição dos mascons, entretanto esses tetraedros não são uniformes. No exemplo usado, o poliedro que simula o asteroide 216 kleopatra tem como maior volume para um de seus tetraedros $\sim 9.73 \times 10^2 \text{ km}^3$, e como menor volume 10^{-2} km^3 . É uma razão de $\sim 2.69 \times 10^{-5}$ entre o menor e o maior volume, isso reflete na massa e no volume

representado pelos mascons. Ou seja, a densidade volumétrica de mascons no sólido não será uniforme.

Levando em conta os problemas descritos, optamos neste trabalho por utilizar o modelo de mascons obtido a partir de uma grade igualmente espaçada.

5 SUPERFÍCIE DE SECÇÃO DE POINCARÉ AO REDOR DO ASTEROIDE 4179 TOUTATIS: MODELO DE MASCONS

Neste capítulo pretendemos estudar a dinâmica da região ao redor do asteroide 4179 Toutatis, por meio de uma superfície de secção de Poincaré. Para esse estudo utilizamos o modelo de mascons para simular o potencial gravitacional do asteroide. Com essa modelagem usamos um potencial gravitacional tridimensional em uma ferramenta tipicamente bidimensional. Analisamos a semelhança entre a abordagem usada neste capítulo e um problema bidimensional. Parte do trabalho apresentado neste capítulo foi publicado em Borderes-Motta; Winter (2018).

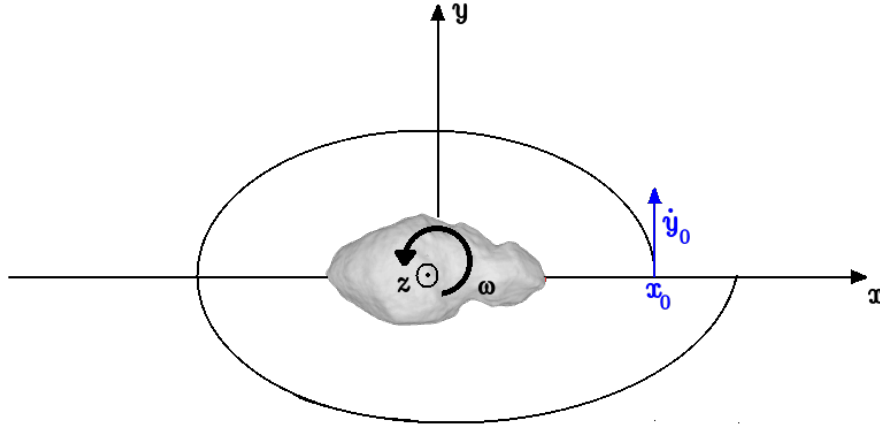
5.1 SUPERFÍCIE DE SECÇÃO DE POINCARÉ

Como visto no capítulo 3, muitos trabalhos em dinâmica orbital usaram a superfície de secção de Poincaré para estudar a dinâmica tanto no problema restrito de três corpos como em Hénon (1965a,b, 1966a,b, 1969); Jefferys (1971); Winter; Murray (1997a,b); Winter; Murray (1994b,a); Winter (2000) ou em problema de dois corpos em que o corpo central apresenta rotação, como em Broucke; Elife (2005); Silva; Winter; Prado (2009); Najid; Haj Elourabi; Zegoumou (2011); Liu; Baoyin; Ma (2011); Feng; Hou (2017). Todavia, os problemas citados são bidimensionais ou tridimensionais com simetria no eixo z , o que mantém a inclinação nula e caracteriza um problema planar. Já Scheeres et al. (1996), levou em conta um potencial gravitacional tridimensional e assimétrico usando um mapa de Poincaré que localiza somente órbitas periódicas. Regiões estáveis e não estáveis não foram analisadas por esse método.

Para explorar ampla e sistematicamente regiões estáveis e caóticas ao redor de corpos irregulares e assimétricos na terceira dimensão, nós usamos a superfície de secção de Poincaré, adaptando o modelo para um potencial tridimensional. Nosso objetivo é mostrar que ainda com mais graus de liberdade, as superfícies de secção de Poincaré não são, em geral, destruídas. Dessa forma, a técnica não está restrita em buscar órbitas periódicas, mas mapeia toda a estrutura dinâmica ao redor do corpo.

Tendo sido definido no capítulo 4 a modelagem a ser usada para simular o potencial gravitacional do 4179 Toutatis, o sistema girante ($Oxyz$) pode ser definido a partir do movimento rotacional do asteroide. Dessa forma o asteroide fica fixo no sistema, como pode ser observado na figura 33.

Figura 33: Diagrama esquemático de uma órbita ao redor do corpo fixo no sistema girante. x_0 marca a posição inicial e a seta azul indica a velocidade na posição inicial.



fonte: Produção do próprio autor.

As equações do movimento são dadas em Scheeres et al. (1996):

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \omega^2 x + \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (28)$$

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \omega^2 y + \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (29)$$

$$\ddot{z} = +\frac{\partial U}{\partial z}, \quad (30)$$

onde U é a o potencial gravitacional. ω é a velocidade rotacional de 4179 Toutatis, dada por $\omega = 2\pi/T_{ast}$, onde $T_{ast} = 176,4$ h é o período rotacional de 4179 Toutatis. O potencial gravitacional calculado a partir do modelo de mascons é dado por

$$U = U(x, y, z) = -\sum_{i=0}^N \frac{Gm}{r_i^2}, \quad (31)$$

onde G é a constante gravitacional, N é o número total de mascons e m é a massa de cada mascon, $m = \frac{M}{N}$ com M sendo a massa total de 4179 Toutatis. r_i é a distância entre o mascon e a partícula que orbita o sistema sendo dado por

$$r_i = ((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2)^{1/2}, \quad (32)$$

com x, y e z sendo as coordenadas da partícula e x_i, y_i e z_i as coordenadas do mascon i .

A partir da equação 31 se obtêm as seguintes derivadas do potencial gravitacional

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \sum_{i=0}^N \frac{Gm(x - x_i)}{r_i^3}, \quad (33)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \sum_{i=0}^N \frac{Gm(y - y_i)}{r_i^3} \quad e \quad (34)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \sum_{i=0}^N \frac{Gm(z - z_i)}{r_i^3}, \quad (35)$$

que são usadas nas equações de movimento.

A constante de Jacobi (C_j) é explicitamente calculada em Scheeres et al. (1996).

$$C_j = \omega^2(x^2 + y^2) + 2U(x, y, z) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2. \quad (36)$$

As equações (28-30) descrevem o movimento de uma partícula sem massa e são numericamente integradas através do integrador Burlish-Stöer (BULIRSCH; STÖER, 1966). Uma secção de intersecção é fixada no plano $y = 0$ e as condições iniciais são distribuídas sistematicamente sobre o eixo x . É definido $y_0 = z_0 = \dot{x}_0 = \dot{z}_0 \equiv 0$ e \dot{y}_0 é calculado a partir de C_j (Eq. 36). Durante a integração, as condições da órbita são guardadas a cada instante que acontece o cruzamento da trajetória com a secção de intersecção definida em $y = 0$ e com $\dot{y} > 0$. O método de Newton-Raphson é utilizado para obter uma precisão no cruzamento da órbita da mesma ordem usada no integrador (10^{-13}). Os pontos salvos são plotados no espaço de fase (x, \dot{x}) construindo assim as secção de superfície de Poincaré.

O método utilizado neste trabalho foi construído como um caso planar bidimensional, adicionando a terceira dimensão (z) à trajetória da partícula. A velocidade \dot{z} foi definida como zero na condição inicial, e durante a integração, tanto a coordenada (z) quanto a velocidade (\dot{z}) têm variação livre.

Para analisar os resultados, o movimento projetado sobre o sistema girante é considerado desacoplado do movimento na terceira dimensão. Então, estudou-se a influência da variação z no comportamento da órbita no sistema girante. Na superfície de secção de Poincaré, a órbita mais interna de um conjunto de ilhas de estabilidade é chamada, neste trabalho, órbita central. Cada órbita central é representada por um ou mais pontos isolados na superfície de secção de Poincaré. A órbita central, quando projetada no plano xy , é a órbita periódica. Daqui em diante, apresentamos um estudo sobre a dinâmica em torno do asteroide 4179 Toutatis, que foi escolhido como já explicado no capítulo 2.

5.2 SIMULAÇÕES

Calculamos a constante de Jacobi no ponto de equilíbrio (capítulo 2) no eixo $x > 0$ ($\sim 2.0035 \times 10^{-7} \text{ km}^2/\text{s}^2$) e definimos um intervalo para o estudo inicial de $1.2 \times 10^{-7} \leq C_j \leq 3.0 \times 10^{-7} \text{ km}^2/\text{s}^2$, variando em passos de $1.5 \times 10^{-8} \text{ km}^2/\text{s}^2$. Por simplicidade, neste capítulo, as constantes de Jacobi serão dadas em termos de $10^{-7} \text{ km}^2/\text{s}^2$. Setenta e cinco condições iniciais para cada valor de C_j , foram simuladas. Essas condições são distribuídas ao longo do eixo x , de 2.6 a 10 km com passos de 0.1 km . Esse intervalo é

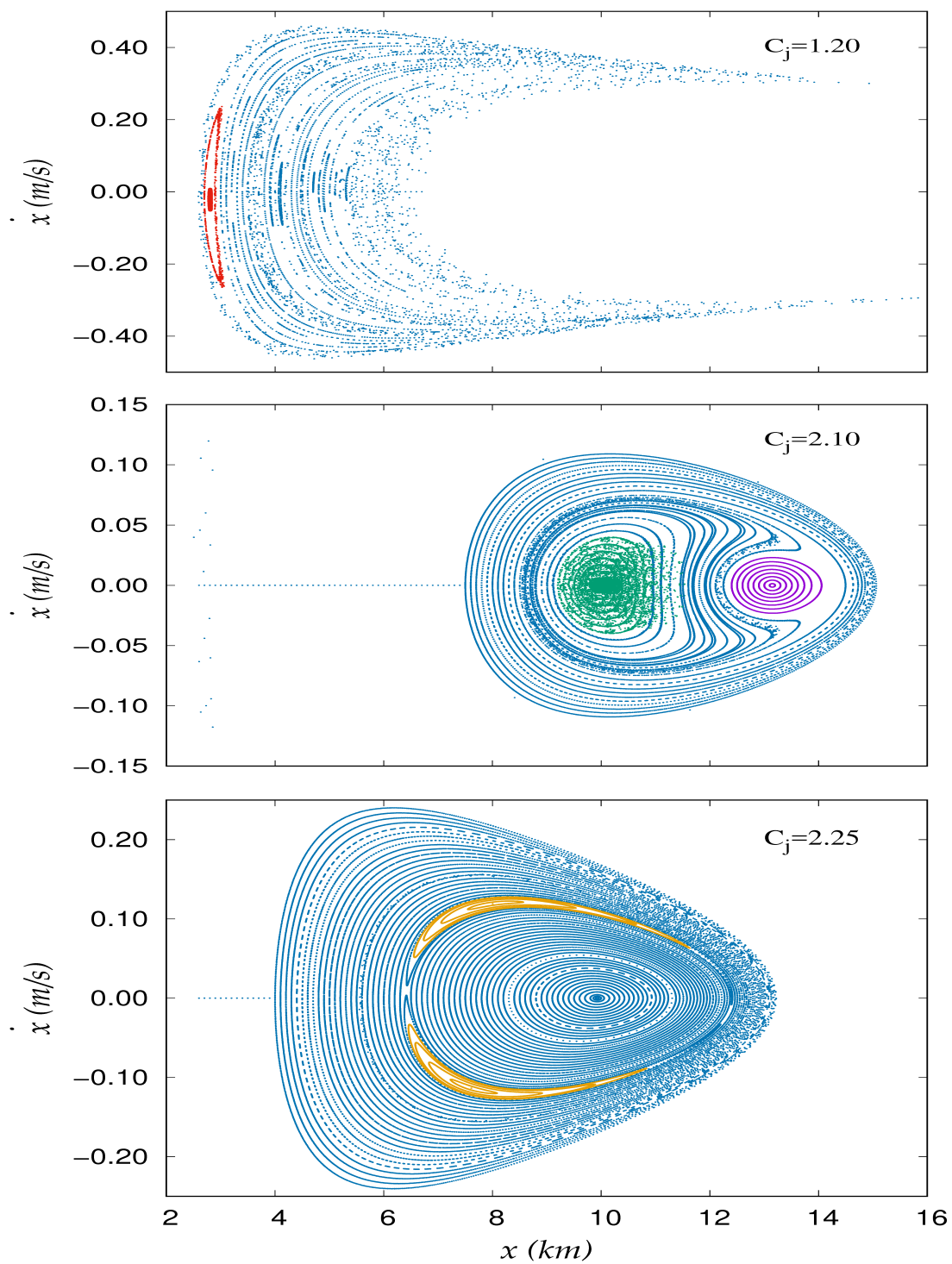
mais próximo dos corpos que o ponto de equilíbrio no eixo x , o que permite trajetórias tanto no mesmo sentido ou no sentido oposto do sistema girante, adotamos $\dot{y} > 0$. Essa região apresenta dinâmica semelhante à observada na região interna do problema de três corpos, ou seja, quando o terceiro corpo apresenta semieixo menor que o raio orbital do corpo secundário. Portanto, podemos usar como guia os estudos realizados em Winter; Murray (1994b).

Uma amostra ilustrativa das superfícies de secção de Poincaré esta presente na figura 34. Quatro Famílias de órbitas periódicas (projeções de uma órbita central) foram selecionadas para ser uma amostra representativa de nossos resultados. As Famílias são identificadas na figura 34, por meio de estruturas compostas por órbitas centrais e órbitas quase-periódicas, que libram em torno das órbitas centrais. As Famílias são apresentadas em crescente ordem de complexidade. As ilhas associadas à Família 1 são indicadas em roxo, à Família 2 em laranja, à Família 3 em verde e à Família 4 em vermelho.

Há uma linha de pontos com $\dot{x} = 0$ na figura 34, para $C_j = 2.10$ e 2.25 . Esses pontos indicam condições iniciais cujas trajetórias colidiram com o asteroide antes do primeiro ciclo orbital se completar no sistema girante. A superfície de secção de Poincaré para $C_j = 1.20$ mostra uma linha de pontos com $\dot{x} = 0$, correspondente à condições iniciais instáveis cujas trajetórias foram ejetadas do sistema. É considerada ejeção, quando a partícula está além de 250 km do centro do asteroide. Quanto maior for o valor C_j , menor é a região caótica na superfície de secção de Poincaré.

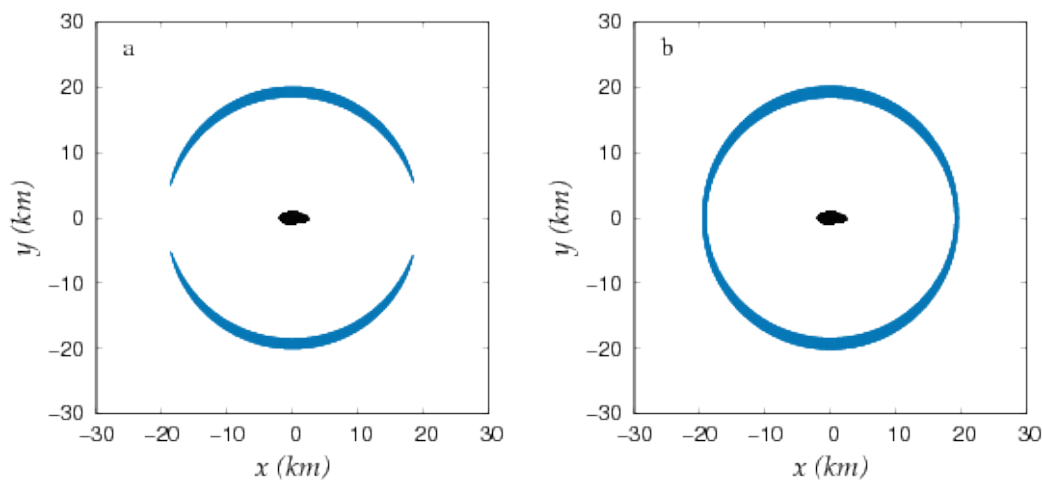
Para compreender a diferença entre a superfície de secção de Poincaré para $C_j = 1.20$ e as superfícies de secção de Poincaré para $C_j = 2.10$ e $C_j = 2.25$, é útil obter as superfícies de velocidade zero. Essas superfícies criam regiões proibidas, quando projetadas no plano xy . Para $C_j = 1.20$ a região proibida está aberta (figura 5.3a), o que permite grandes regiões caóticas. Por outro lado, para $C_j > 2.003$ a região proibida está fechada (figura 5.3b), limitando o movimento, aumentando as regiões de estabilidade. Esse comportamento pode ser visto em mais detalhes em Winter; Murray (1994b) e Murray; Dermott (1999).

Figura 34: Superfícies de secção de Poincaré para $C_j = 1.20, 2.10$ e 2.25 . Foram definidas as condições iniciais com $x_0 \geq 2.6 \text{ km}$. Até mil pontos por condição inicial são gerados para cada condição inicial. As curvas associadas à Família 1 são indicadas em roxo, Família 2 em laranja, Família 3 em verde e Família 4 em vermelho.



fonte: Produção do próprio autor.

Figura 35: Casos ilustrativos de curvas de velocidade zero indicadas pela região proibida (em azul). O caso a- $C_j = 2.003$ e o caso b- $C_j = 2.004$.



fonte: Produção do próprio autor.

Neste capítulo, as Famílias 1,2,3 e 4 e o efeito da assimetria do potencial gravitacional nas estruturas da superfície de secção de Poincaré serão estudadas e discutidas.

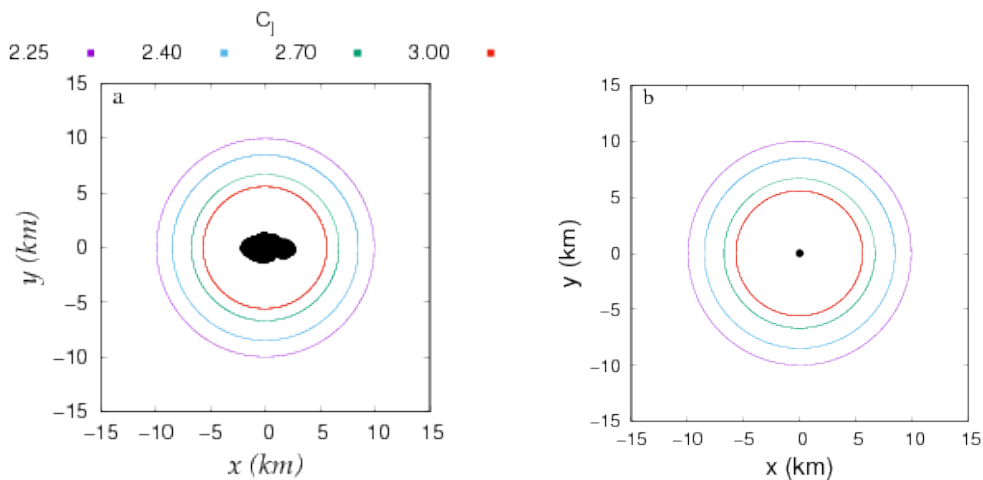
5.2.1 Família 1

A Família 1 é a mais presente nas superfícies de secção de Poincaré para os valores estudados de C_j . A figura 36 mostra um conjunto de órbitas centrais da Família 1 projetada no sistema girante e no sistema inercial. Essas órbitas são quase circulares em ambos os sistemas. As órbitas centrais estão mais próximas do asteroide quando os valores de C_j são maiores.

A figura 37 mostra as projeções das órbitas centrais nos planos xz e yz . A amplitude de variação no eixo z é muito menor que a amplitude de variação no sistema girante. Para maiores valores de C_j , os intervalos de libração das órbitas centrais no eixo z são menores.

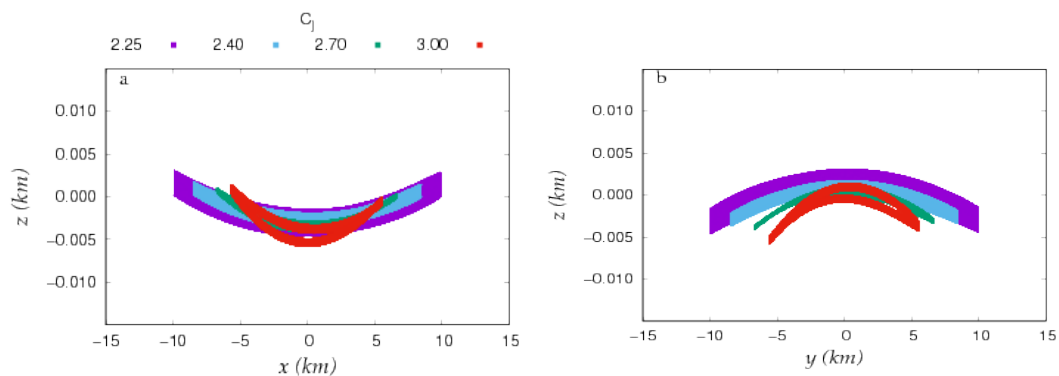
No espaço de rotação tridimensional, as órbitas centrais tem a forma do contorno de uma superfície de parabolóide hiperbólica no sistema girante (figura 38).

Figura 36: Exemplo de órbitas centrais da Família 1: a- no sistema girante (xy); b- no sistema inercial (xy). As órbitas completaram apenas um ciclo na sistema girante. As cores correspondem aos valores indicados de C_j .



fonte: Produção do próprio autor.

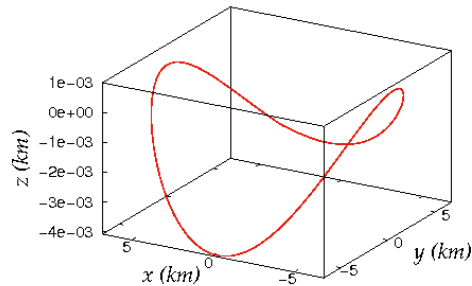
Figura 37: Exemplo de órbitas centrais da Família 1: a- projeção das trajetórias no plano xz ; b- projeção das trajetórias no plano yz , ambas são apresentadas no sistema girante. As órbitas completaram muitos ciclos no sistema girante. As cores correspondem aos valores indicados de C_j .



fonte: Produção do próprio autor.

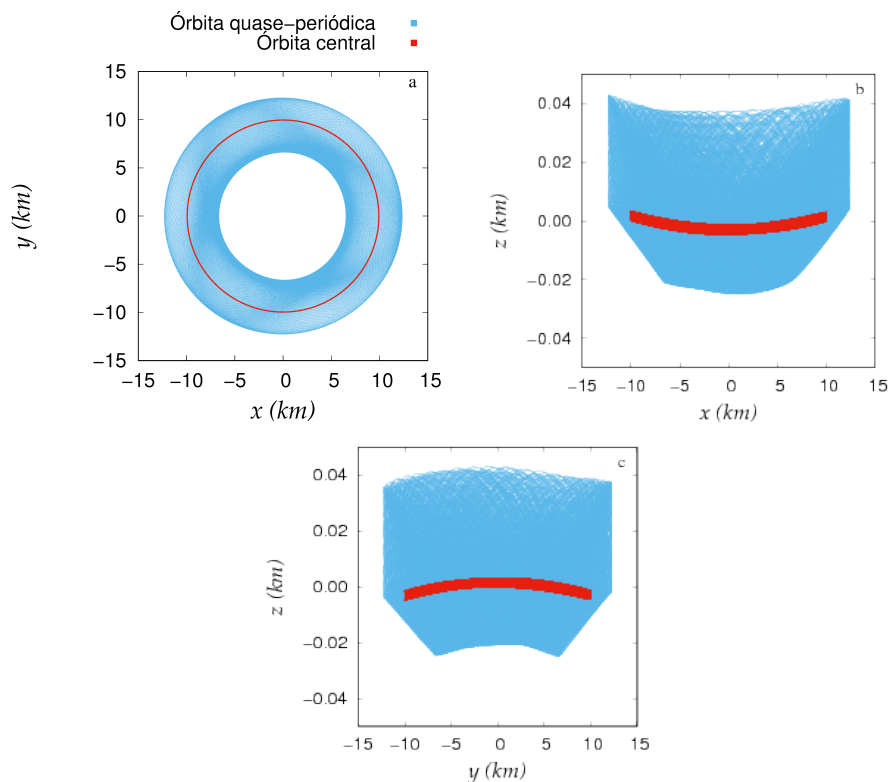
Para ilustrar as órbitas quase-periódicas, na figura 39 é apresentada a libração de uma órbita quase periódica em torno da órbita central da Família 1 com $C_j = 2.25$. A libração conserva a estrutura original da órbita central. A figura 39 mostra ainda, a libração de uma órbita periódica e uma órbita quase-periódica, com $C_j = 2.25$, em xz e yz , respectivamente. Eles são assimétricos em relação ao plano da rotação e o comportamento é o mesmo para as outras famílias estudadas neste trabalho. Essa característica será analisada na subseção 5.2.5.

Figura 38: Órbita central com $C_j = 2.25$ para vários ciclos orbitais. A forma é semelhante às bordas de um parabolóide hiperbólico.



fonte: Produção do próprio autor.

Figura 39: Projeção da órbita central (vermelho) e a órbita quase-periódica (azul) da Família 1. a- no plano xy ; b- no plano xz ; c- no plano yz . A constante de Jacobi para essa órbita é 2.25.

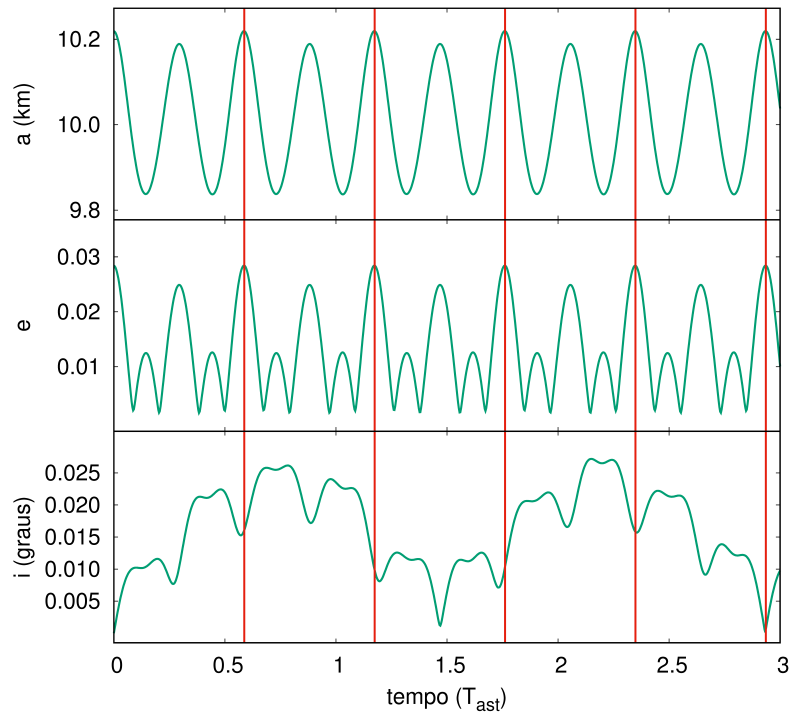


fonte: Produção do próprio autor.

Na figura 40 é apresentada a evolução temporal dos elementos osculantes semi-eixo maior, excentricidade e inclinação, de uma órbita central da Família 1. O semi-eixo maior e a excentricidade têm uma mesma frequência principal de variação (cujo período é \sim

$0.586 T_{ast}$). A inclinação orbital apresenta duas frequências principais de períodos $\sim 0.267 T_{ast}$ e $\sim 1.469 T_{ast}$.

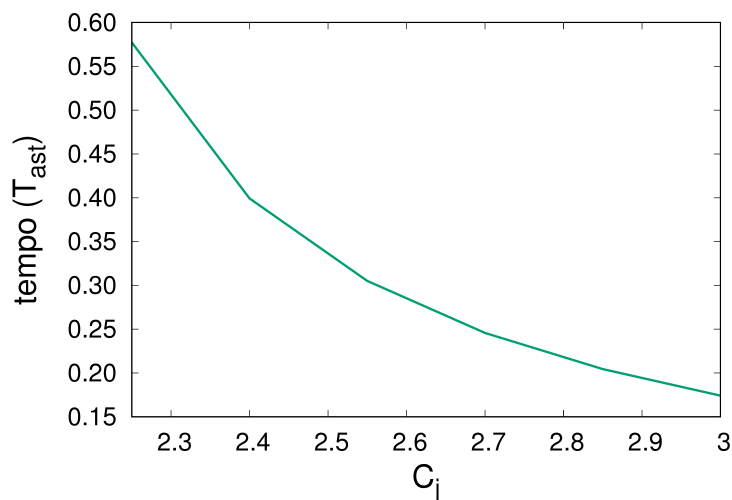
Figura 40: Evolução temporal dos elementos osculantes semi-eixo maior, excentricidade e inclinação da Família 1. Órbita central com $C_j = 2.25$. As linhas vermelhas indicam um ciclo orbital completo no sistema girante.



fonte: Produção do próprio autor.

Os períodos das órbitas centrais da Família 1 que são projetados no plano da rotação em função da constante Jacobi são mostrados na figura 41. O período diminui à medida que o valor de C_j é maior. Esta evolução do período é contínua entre 0.17 e $0.58 T_{ast}$ e não está conectada a uma ressonância, mesmo cruzando valores comensuráveis com o período do asteroides (figura 41). Como as órbitas centrais não estão em uma dada ressonância e a excentricidade é muito baixa, a Família 1 é classificada como do primeiro tipo (POINCARÉ; MAGINI, 1899).

Figura 41: Evolução do período orbital para as órbitas centrais da Família 1, quando projetadas no plano de rotação, em função da constante de Jacobi.

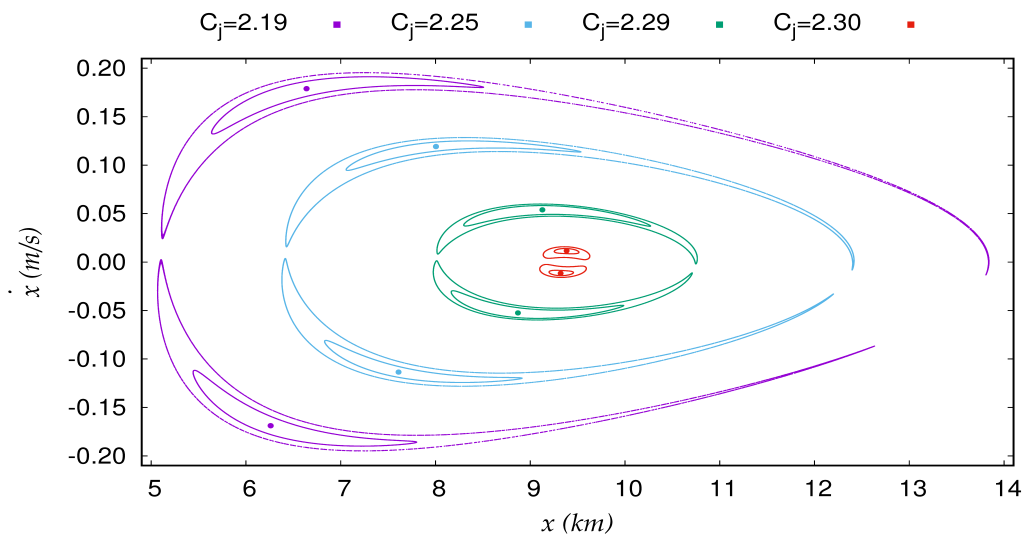


fonte: Produção do próprio autor.

5.2.2 Família 2

A Família 2 é identificada por um par de ilhas estáveis para valores de C_j de 2.19 a 2.30. Essas ilhas estão em torno de dois pontos nas superfícies de secção de Poincaré e estes dois pontos representam a órbita central da Família 2. A figura 42 mostra a evolução dessa Família usando par de ilhas de maior amplitude de libração, um par intermediário de ilhas e um par de pontos de um conjunto de valores diferentes de C_j . Para maiores valores de C_j as ilhas aproximam-se e a amplitude da variação (largura das ilhas) diminui. Esse comportamento é refletido na excentricidade orbital das trajetórias. Na figura 42, uma assimetria é identificada, ela é criada pela assimetria no potencial gravitacional. Esse comportamento persiste mesmo quando o efeito da terceira dimensão é negligenciado.

Figura 42: A evolução da Família 2 na superfície de secção de Poincaré. Uma amostra com um par de ilhas de maior amplitude de libração orbital, um par de ilhas intermediárias e os pontos dentro das ilhas que representam a órbita central para diferentes valores de C_j . As cores correspondem aos valores indicados de C_j .

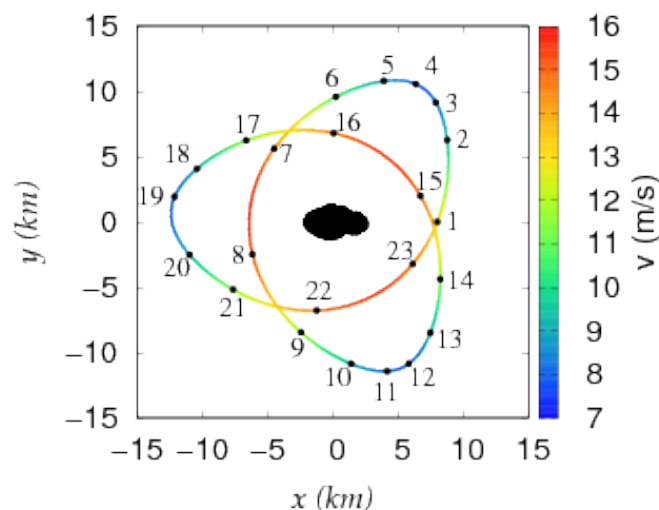


fonte: Produção do próprio autor.

Para valores de C_j inferiores a 2.19 e superiores a 2.30 esta Família não existe. Para $C_j < 2.19$, a estrutura apresenta uma região cujas trajetórias colidem com o asteroide.

Na figura 43 é apresentada a trajetória da órbita central com $C_j = 2.25$ no sistema girante. Os pontos pretos são igualmente espaçados no tempo e as cores indicam o módulo da velocidade no sistema inercial. As velocidades mais altas coincidem com o momento nas trajetórias cuja partícula está mais próxima do asteroide, caracterizando os três pericentros. Por outro lado, regiões com menor velocidade e longe do asteroide caracterizam os três apocentros.

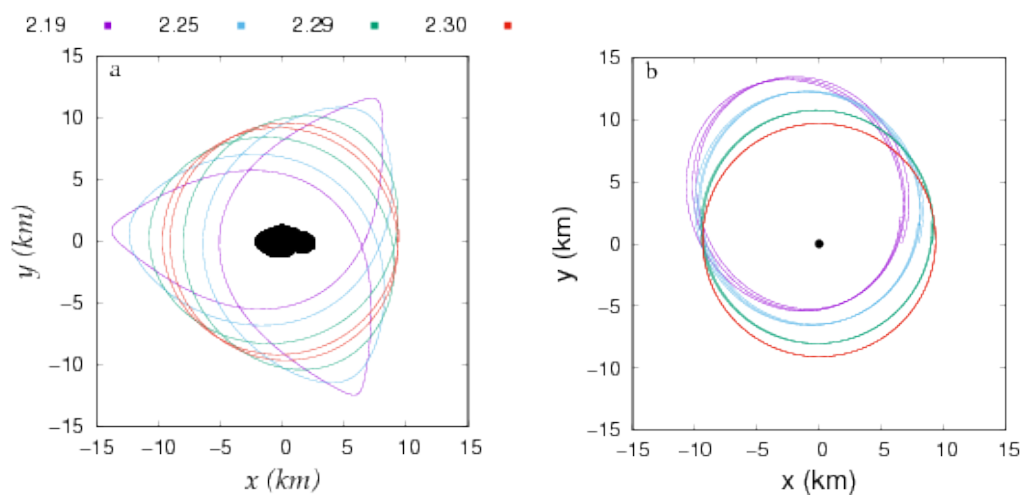
Figura 43: Órbita central da Família 2 no sistema girante para a constante de Jacobi 2.25. As cores indicam o módulo da velocidade no sistema inercial. A órbita é dividida em 23 partes de mesmo intervalo temporal e os pontos são numerados de forma a mostrar a sequência da trajetória.



fonte: Produção do próprio autor.

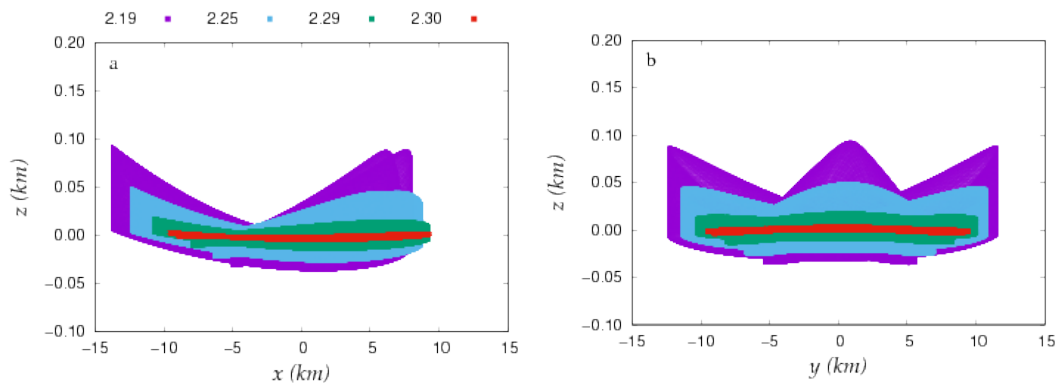
Na figura 44 é apresentada a evolução de um conjunto representativo de órbitas centrais em função de C_j . Para os valores maiores de C_j a excentricidade é menor.

Figura 44: Órbitas centrais da Família 2: a- sistema girante, plano xy ; b- sistema inercial, plano xy . A órbita completa apenas um ciclo no sistema girante. As cores correspondem aos valores indicados de C_j .



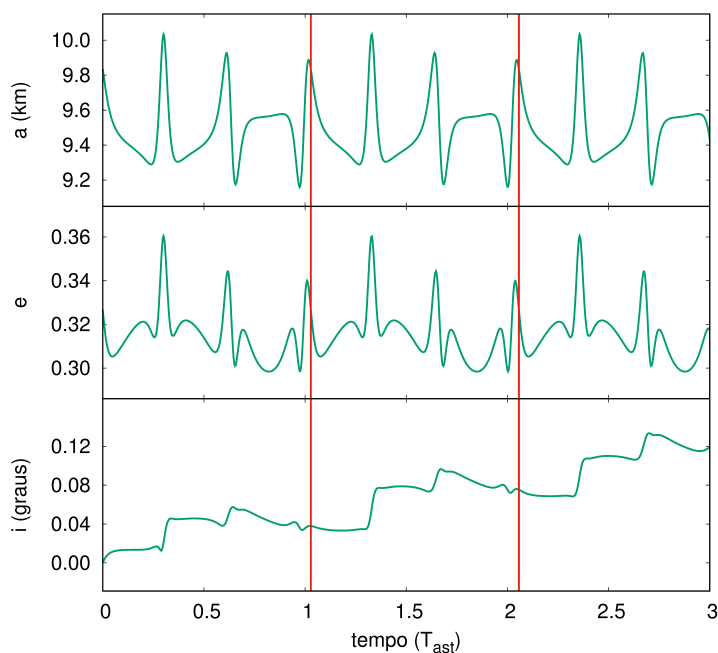
fonte: Produção do próprio autor.

Figura 45: Órbitas centrais da Família 2: a- projeção da trajetória no plano xz ; b- projeção da trajetória no plano yz , ambos são apresentados no sistema girante. A órbita completa vários ciclos no sistema girante. As cores correspondem aos diferentes valores de C_j .



fonte: Produção do próprio autor.

Figura 46: Evolução do semi-eixo maior, excentricidade e inclinação da órbita central da Família 2 com $C_j = 2.25$. A linha vermelha corresponde a um período orbital completo no sistema girante.

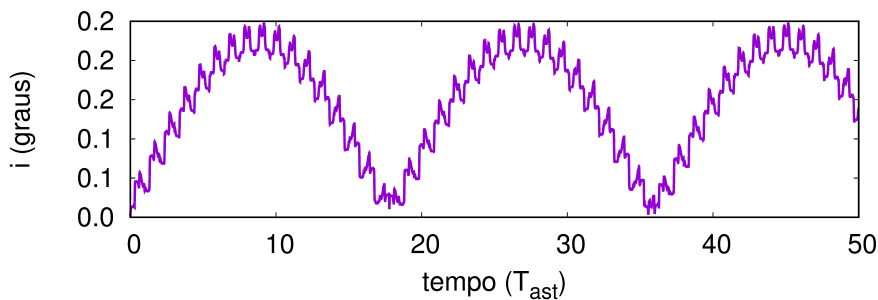


fonte: Produção do próprio autor.

Na figura 45 são apresentadas as projeções das órbitas centrais nos planos xz e yz no sistema girante. A variação de amplitude na terceira dimensão é muito menor do que a variação de amplitude nas outras duas dimensões. Além disso, as amplitudes diminuem quando o valor de C_j é maior.

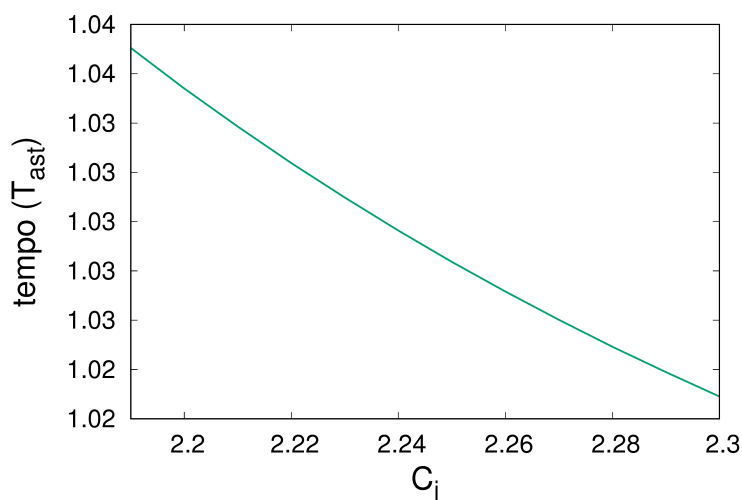
A evolução dos elementos osculantes semi-eixo maior, excentricidade e inclinação da órbita central da Família 2, com $C_j = 2.25$, são apresentados na figura 46. É possível identificar a mesma frequência principal (cujo período é de $\sim 1.028 T_{ast}$) no semi-eixo maior e na excentricidade. A inclinação tem duas frequências principais, a frequência com o maior período ($\sim 17.79 T_{ast}$) pode ser melhor observada na figura 47.

Figura 47: Evolução temporal da inclinação na Família 2 com $C_j = 2.25$.



fonte: Produção do próprio autor.

Figura 48: Evolução do período orbital das órbitas centrais da Família 2 quando projetadas no sistema girante como função da constante de Jacobi.

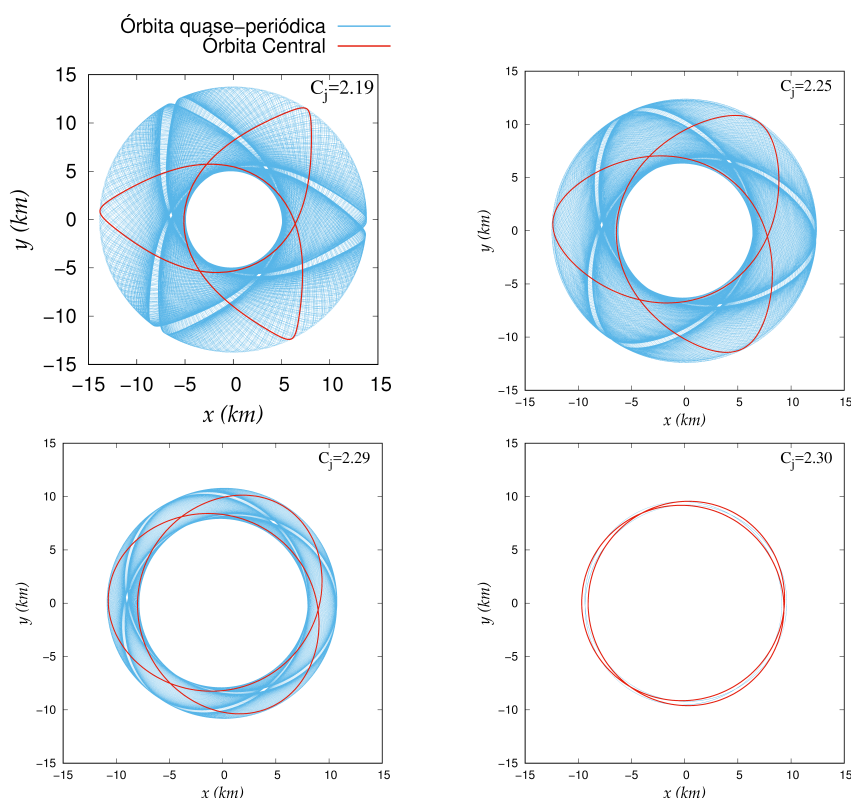


fonte: Produção do próprio autor.

A projeção da órbita central é uma órbita periódica. O período dessa órbita periódica para diferentes valores de C_j é calculado, então uma curva da evolução desse período é construída (figura 48). Os períodos calculados estão próximos do período de rotação do asteroide. Nas figuras 43 e 44, cada ciclo completo no sistema girante, corresponde aproximadamente a três ciclos completos no sistema inercial. Portanto, a Família 2 está associada à ressonância 3:1 (órbita das partículas: rotação do asteroide).

A maior órbita quase-periódica é usada para definir a largura da região onde a estrutura das trajetórias é semelhante à órbita central (figura 49). Maiores valores de C_j apresentam órbitas centrais com menor excentricidade e menor amplitude de libração.

Figura 49: A maior órbita quase-periódica (azul) e a órbita central (vermelho) da Família 2 no sistema girante para diferentes valores de C_j .



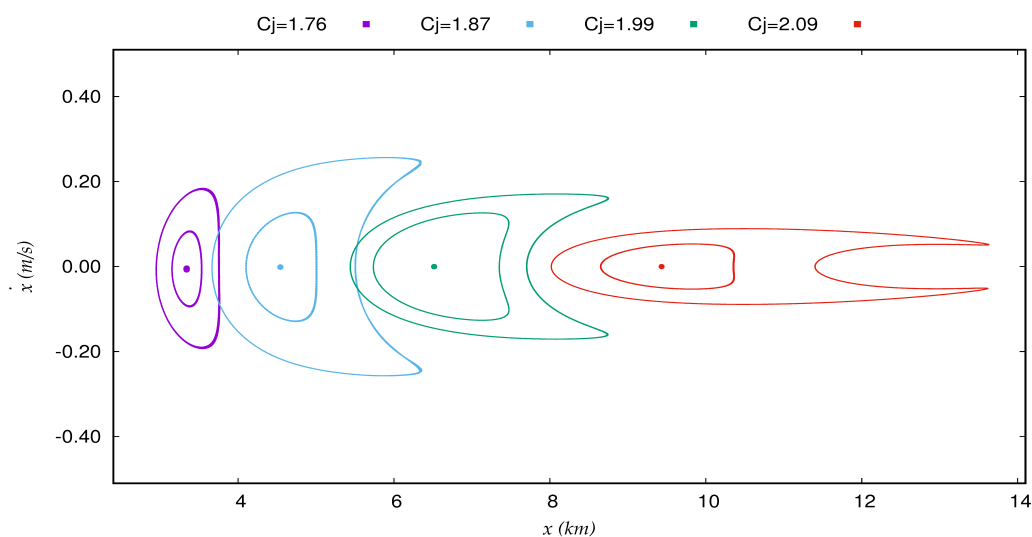
fonte: Produção do próprio autor.

Scheeres et al. (1998) (veja a figura 13b) encontrou uma órbita periódica semelhante à órbita central da Família 2. Ao usar a superfície de secção de Poincaré mostrou que é possível encontrar não só a Família inteira da órbita, mas também a largura das regiões de libração das órbitas.

5.2.3 Família 3

A Família 3 está nas superfícies de secções de Poincaré no intervalo de C_j de 1.76 à 2.11, o que quer dizer que a Família existe tanto na superfícies de secção de Poincaré com a região proibida fechada (figura 5.3b) quanto com a região proibida aberta (figura 5.3a). A figura 50 mostra a evolução dessa Família usando as ilhas de maior amplitude de libração, um par intermediário de ilhas e um par de pontos de um conjunto de valores diferentes de C_j . Verifica-se pelas ilhas de maior amplitude de libração que a largura de influencia da Família em x é maior para maiores valores de C_j e em \dot{x} é menor para maiores valores de C_j .

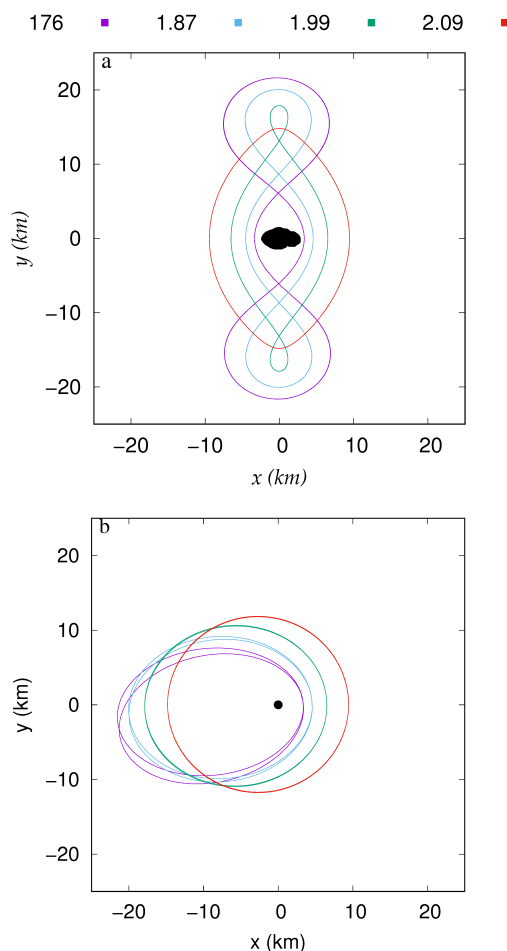
Figura 50: A evolução da Família 3 na superfície de secção de Poincaré. Uma amostra com um par de ilhas de maior amplitude de libração orbital, um par de ilhas intermediárias e os pontos dentro das ilhas que representam a órbita central para diferentes valores de C_j . As cores correspondem aos valores indicados de C_j .



fonte: Produção do próprio autor.

A figura 51 apresenta um conjunto de órbitas centrais da Família 3 no sistema girante e no sistema inercial. É possível notar a existência de dois pericentros e de dois apocentros. No sistema inercial (figura 51a) o ciclo duplo é mais visível para $C_j = 1.76$ onde a excentricidade é maior. Dois laços estão presentes nos sistema girante (figura 51b) para todas as órbitas centrais de $C_j \leq 1.99$ na figura 51. Estes laços acontecem pois a variação na velocidade orbital é grande o suficiente para ser mais veloz que a rotação do sistema no pericentro e mais lenta que a rotação do sistema no apocentro.

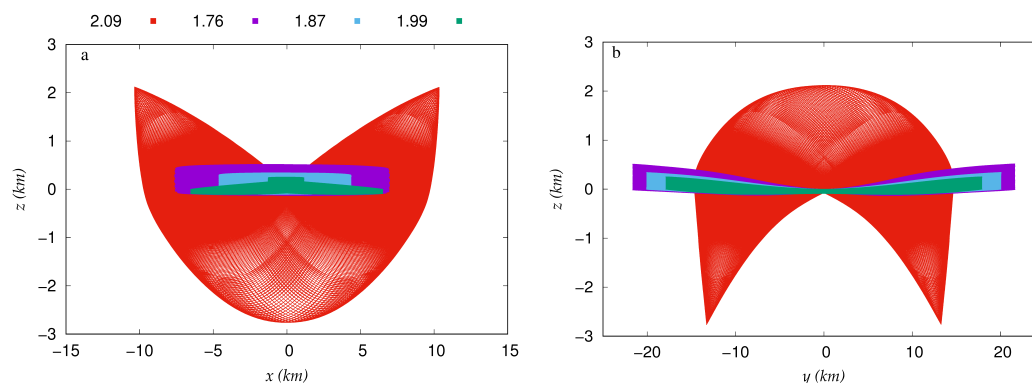
Figura 51: Órbitas centrais da Família 3: a- sistema girante, plano xy ; b- sistema inercial, plano xy . A órbita completa apenas um ciclo no sistema girante. As cores correspondem aos valores indicados de C_j .



fonte: Produção do próprio autor.

A amplitude de variação no eixo z (figura 52) é menor que a variação nos outros eixos. Todavia, a órbita para $C_j = 2.09$ tem uma amplitude de variação no eixo z uma ordem de grandeza maior que as demais amplitudes de variação no eixo z . Esse comportamento discrepante dessa Família pode estar relacionada com o caos que interrompe a Família quando o valor de $C_j = 2.10$. Uma estrutura caótica se apresenta no exato lugar onde a órbita periódica da Família 3 e suas órbitas quase-periódicas deveriam estar. Essa estrutura caótica será estudada na subseção 5.2.5.

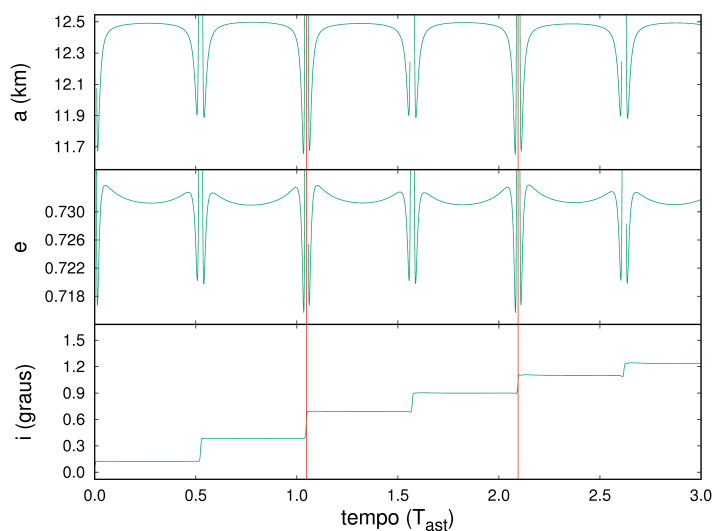
Figura 52: Órbitas centrais da Família 3: a- projeção da trajetória no plano xz ; b- projeção da trajetória no plano yz , ambos são apresentados no sistema girante. A órbita completa vários ciclos no sistema girante. As cores correspondem aos diferentes valores de C_j .



fonte: Produção do próprio autor.

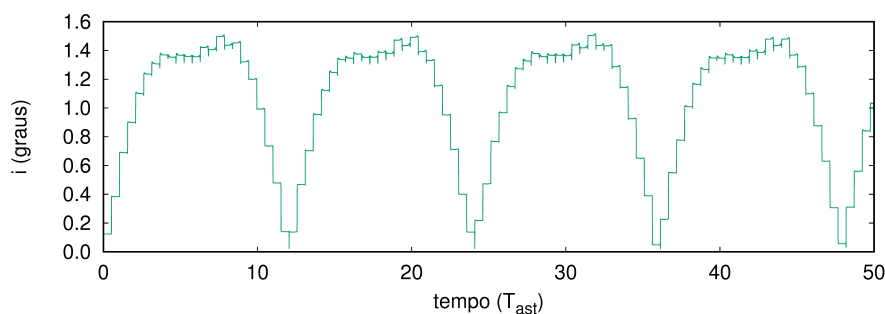
Na figura 53 são apresentadas a evolução dos elementos osculantes semi-eixo maior, excentricidade e inclinação da órbita central com $C_j = 1.76$. O período da frequência principal do semi-eixo maior e da excentricidade é de $\sim 0.52 T_{ast}$ e a frequência principal da inclinação, na figura 54, é de $\sim 47.07 T_{ast}$.

Figura 53: Evolução do semi-eixo maior, excentricidade e inclinação da órbita central da Família 3 com $C_j = 1.76$. A linha vermelha corresponde a um período orbital completo no sistema girante.



fonte: Produção do próprio autor.

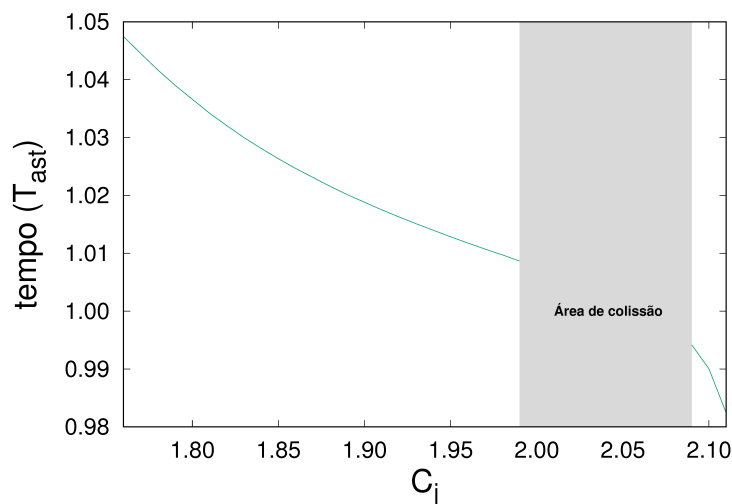
Figura 54: Evolução temporal da inclinação na Família 3 com $C_j = 1.76$.



fonte: Produção do próprio autor.

Na figura 55, é apresentada a variação do período das órbitas centrais para diferentes valores de C_j . O período da órbita central é próximo a três períodos de rotação do asteroide. Um ciclo no sistema girante ($\sim 1 T_{ast}$) corresponde a dois ciclos no sistema inercial, isto indica uma conexão entre a Família 3 e a ressonância 2:1 (órbita de partículas: rotação de asteroides). Existe uma região onde a Família é destruída por colisões, essa região coincide com a abertura ou o fechamento da região proibida.

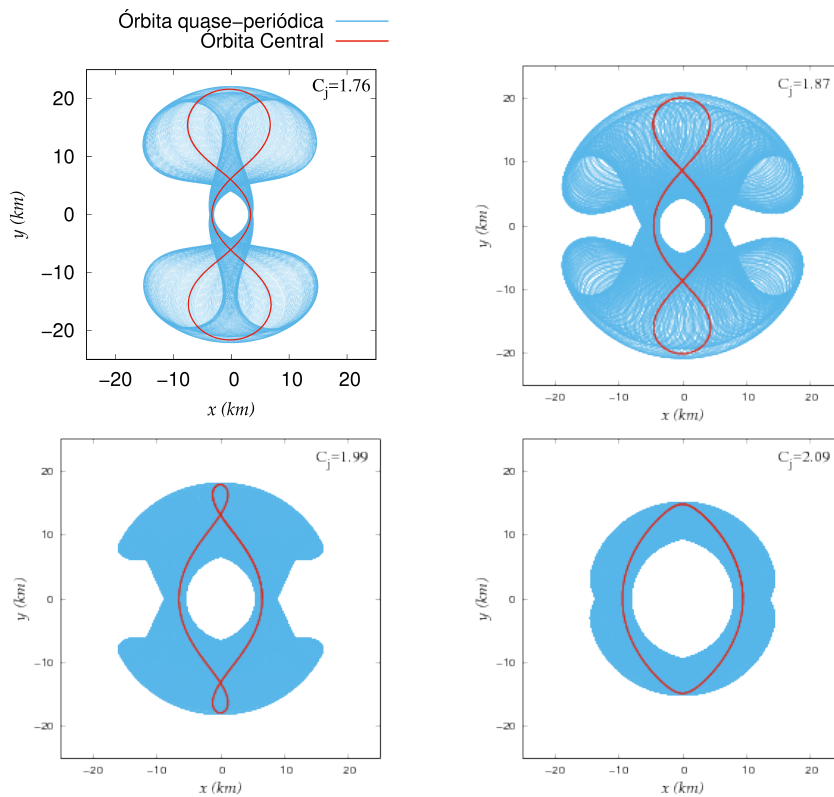
Figura 55: Evolução da período orbital das órbitas centrais da Família 4 quando projetadas no sistema girante como função da constante de Jacobi.



fonte: Produção do próprio autor.

Um conjunto de órbitas-quase periódicas de maior amplitude de libração e as órbitas centrais para diferentes valores de C_j é apresentada na figura 56. As maiores órbitas quase-periódicas dão o limite em que as órbitas preservam a estrutura da órbita central. Ou seja, demarcam uma certa largura de influência da órbita periódica.

Figura 56: A maior órbita quase-periódica (azul) e a órbita central (vermelho) da Família 3 no sistema girante para diferentes valores de C_j .

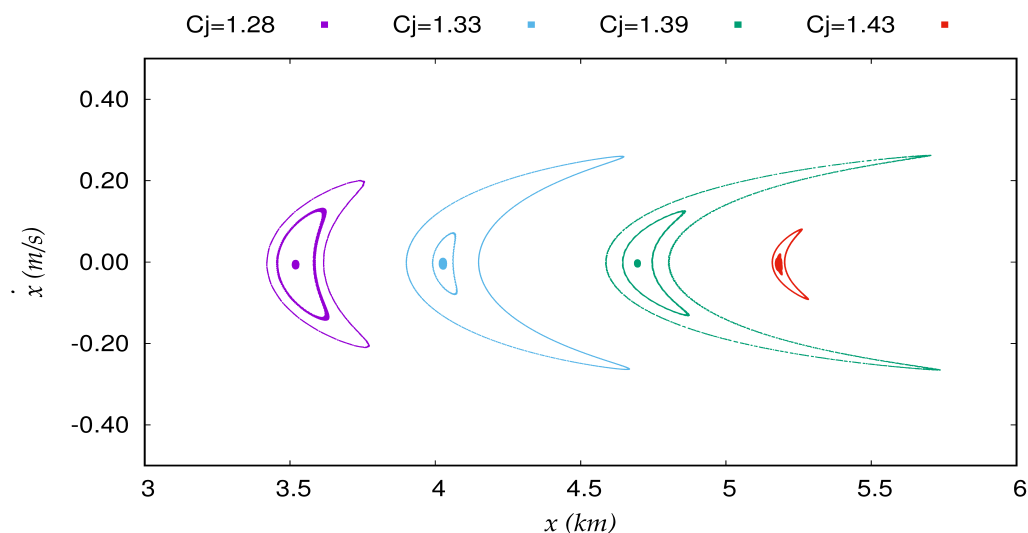


fonte: Produção do próprio autor.

5.2.4 Família 4

A Família 4 está nas superfícies de secções de Poincaré com os valores mais baixos de C_j dos valores explorados no trabalho. Na figura 57 a evolução da Família nas superfícies de secção de Poincaré é apresentada por meio da ilha de maior amplitude, uma ilha intermediária e o ponto que corresponde a órbita central. Essas estruturas com diferentes valores de C_j , foram escolhidas para ser uma amostra representativa da Família. Quando o valor de C_j é maior, a amplitude de libração da ilha se torna maior, mas a ilha de maior valor de C_j (em vermelho) quebra esse comportamento. Este fenômeno se deve à região caótica onde esta ilha se encontra. O caos destrói as ilhas que são maiores do que a maior ilha na figura 57 com $C_j = 1.43$.

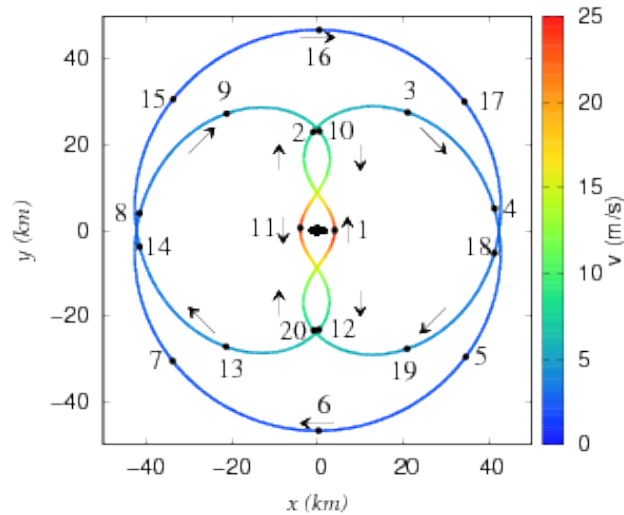
Figura 57: A evolução da Família 4 na superfície de secção de Poincaré. Uma amostra com um par de ilhas de maior amplitude de libração orbital, um par de ilhas intermediárias e os pontos dentro das ilhas que representam a órbita central para diferentes valores de C_j . As cores correspondem aos valores indicados de C_j .



fonte: Produção do próprio autor.

A figura 58 mostra a trajetória da órbita central da Família 4 com $C_j = 1.33$. As setas dão a direção sequencial da trajetória e os pontos estão espaçados em intervalos de tempos iguais e numerados também na sequência da trajetória. Existem duas regiões com maior velocidade e mais próximas do asteroide, indicando os pericentros da órbita. A situação oposta, ou seja, velocidades mais baixas e maiores distâncias do asteroide, indicam os apocentros. Uma diferença entre a Família 4 e as demais Famílias, é que existem momentos cujas trajetórias se tornam retrógradas no sistema girante, devido à grande excentricidade.

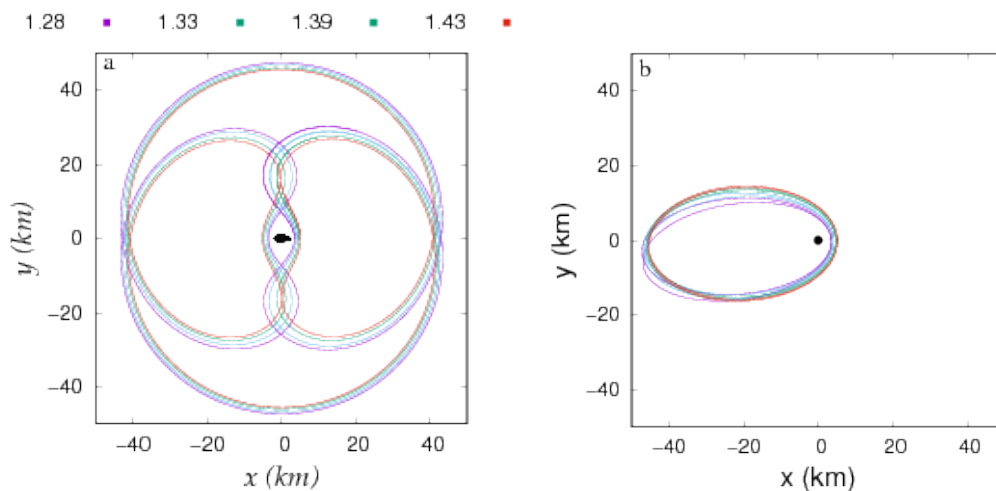
Figura 58: Órbita central da Família 4 no sistema girante para a constante de Jacobi 1.33. As cores indicam o módulo da velocidade no sistema inercial. A órbita é dividida em 20 partes de mesmo intervalo temporal e os pontos são numerados de forma a mostrar a sequência da trajetória.



fonte: Produção do próprio autor.

A variação na velocidade orbital é grande o suficiente para ser mais veloz que a rotação do sistema no pericentro e mais lenta que a rotação do sistema no apocentro. Dessa forma a trajetória apresenta momentos em que o movimento se torna retrogrado à rotação do sistema. A figura 59 apresenta um conjunto de órbitas centrais no sistema girante e no sistema inercial. É possível notar a existência de dois pericentros e dois apocentros.

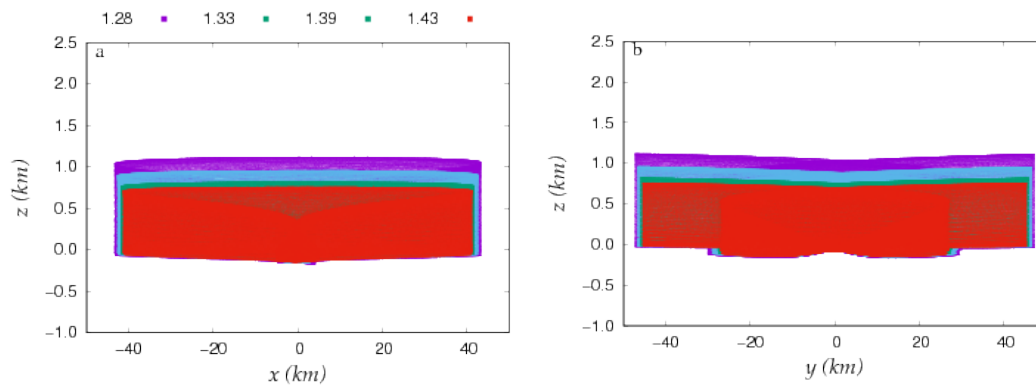
Figura 59: Órbitas centrais da Família 3: a- sistema girante, plano xy ; b- sistema inercial, plano xy . A órbita completa apenas um ciclo no sistema girante. As cores correspondem aos valores indicados de C_j .



fonte: Produção do próprio autor.

Como nas outras famílias, a amplitude de variação no eixo z é menor que a variação nos outros eixos. Essa amplitude diminui quando o valor de C_j é aumentado (figura 60). A variação da estrutura e da amplitude da trajetória nos planos xz e yz são as menores entre as famílias estudadas. Isso porque a Família 4 é restrita a um pequeno intervalo de valores de C_j .

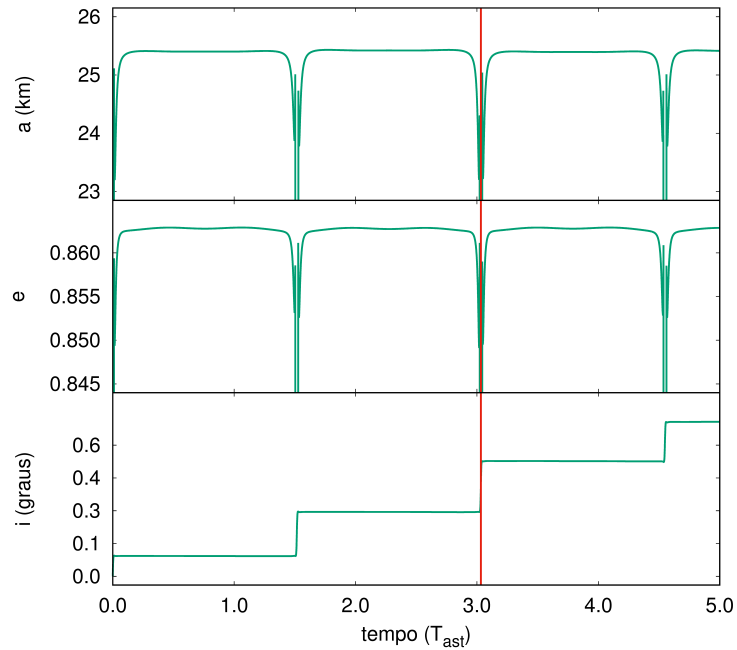
Figura 60: Órbitas centrais da Família 3: a- projeção da trajetória no plano xz ; b- projeção da trajetória no plano yz , ambos são apresentados no sistema girante. A órbita completa vários ciclos no sistema girante. As cores correspondem aos diferentes valores de C_j .



fonte: Produção do próprio autor.

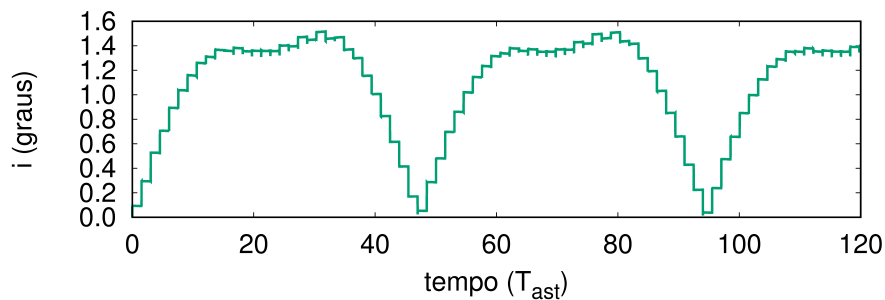
Na figura 61 são apresentadas a evolução do semi-eixo maior, da excentricidade e da inclinação da órbita central com $C_j = 1.28$. O período da frequência principal do semi-eixo maior e da excentricidade é de $\sim 1.52 T_{ast}$ e a frequência principal com o maior período ($\sim 47.07 T_{ast}$) na evolução da inclinação pode ser vista na figura 62.

Figura 61: Evolução do semi-eixo maior, excentricidade e inclinação da órbita central da Família 4 com $C_j = 1.28$. A linha vermelha corresponde a um período orbital completo no sistema girante.



fonte: Produção do próprio autor.

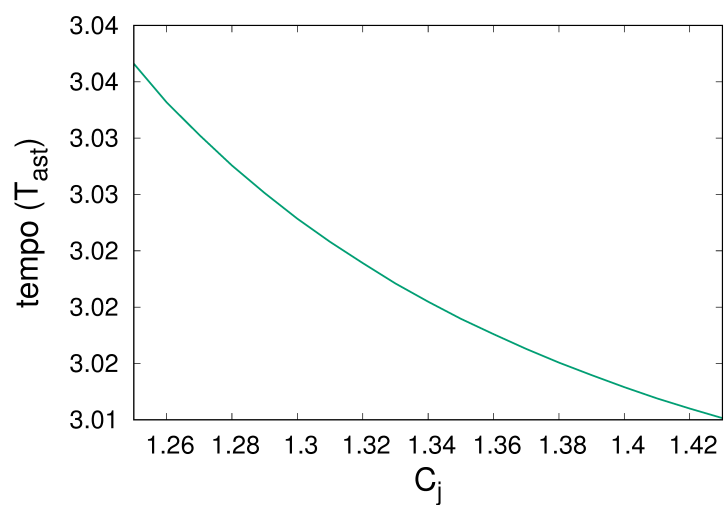
Figura 62: Evolução temporal da inclinação na Família 4 com $C_j = 1.28$.



fonte: Produção do próprio autor.

A variação do período das órbitas centrais para diferentes valores de C_j é mostrada na figura 63, onde o período da órbita central é aproximadamente três períodos de rotação do asteroide. Um ciclo no sistema girante ($\sim 3T_{ast}$) corresponde a dois ciclos no sistema inercial (figuras 58 e 60), isto indica uma conexão entre Família 4 e a ressonância 2:3 (órbita de partículas: rotação de asteroides).

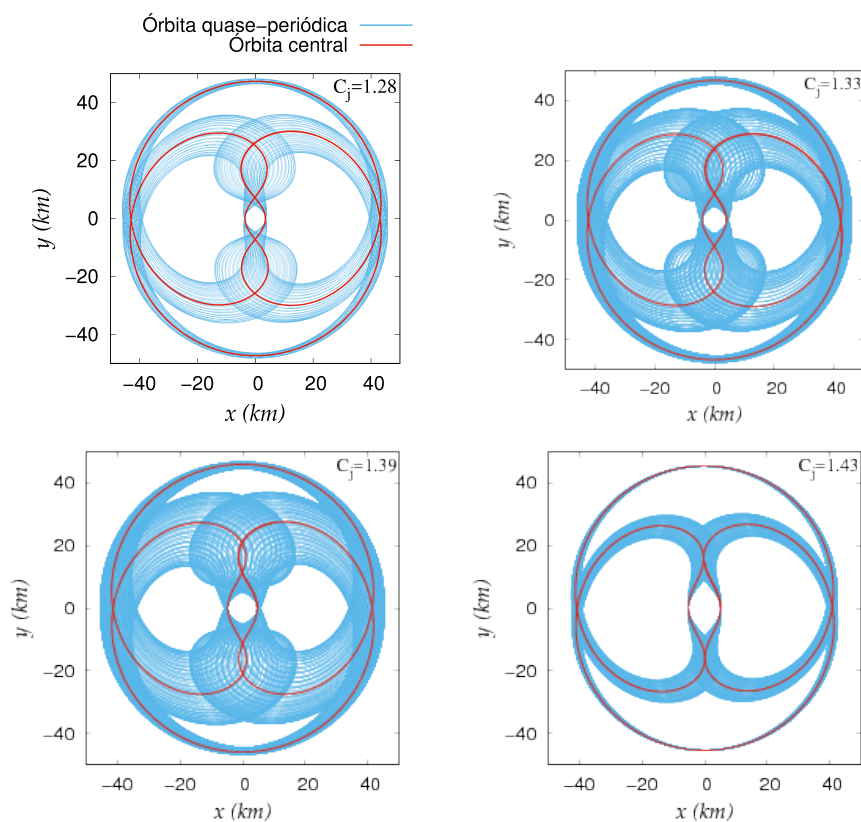
Figura 63: Evolução da período orbital das órbitas centrais da Família 4 quando projetadas no sistema girante como função da constante de Jacobi.



fonte: Produção do próprio autor.

Uma amostra com as órbitas quase-periódicas de maior amplitude de libração e as órbitas centrais para diferentes valores de C_j é apresentada na figura 64. As maiores órbitas quase-periódicas dão o limite em que as órbitas preservam a estrutura da órbita central.

Figura 64: A maior órbita quase-periódica (azul) e a órbita central (vermelho) da Família 2 no sistema girante para diferentes valores de C_j .



fonte: Produção do próprio autor.

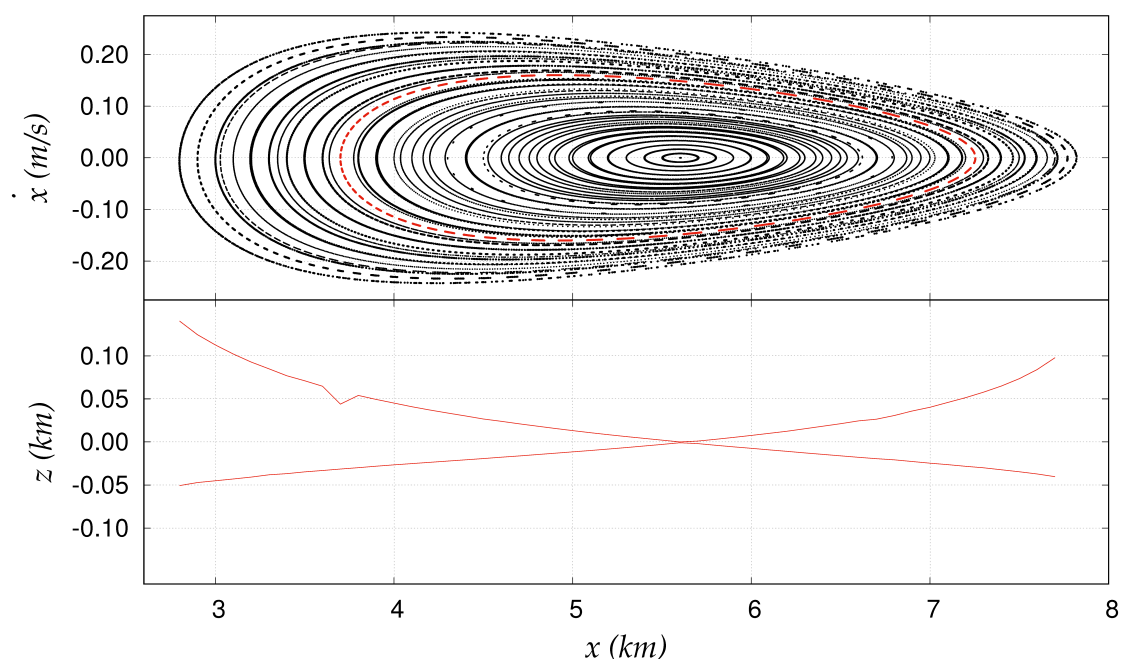
5.2.5 O efeito 3-D

Uma vez que estamos lidando com um sistema tridimensional, a análise das superfícies de secção de Poincaré não é suficiente para compreender completamente a dinâmica ao redor do corpo. No presente capítulo, apresentamos uma análise das superfícies de secção de Poincaré combinadas com a amplitude de variação da componente z das trajetórias. Nós plotamos gráficos que mostraram, para cada valor inicial de x (x_0), os limites superior e inferior, da componente z entre os pontos das superfícies de secção de Poincaré.

A seguir, é apresentado um conjunto representativo das superfícies de secção de Poincaré e seus limites de variação na terceira dimensão. A figura 65 mostra a superfície de secção de Poincaré para $C_j = 3.00$ (na parte superior) e os limites de variação na terceira dimensão para cada condição inicial no eixo x (na parte inferior). Para esse valor da constante Jacobi, a região proibida está fechada (figura 5.3b). As condições iniciais $x_0 \geq 9.2$ km não são integradas pois estão dentro da região proibida. Por outro lado, as condições iniciais com $8.0 \leq x_0 < 9.2$ km são integradas mas colidem com o asteroide ou são ejetadas. Os limites da variação na terceira dimensão são muito inferiores à amplitude da trajetória no plano xy . Quando a condição inicial é ajustada próxima à órbita central da

Família 1, o limite de variação em z é mais próximo de zero. Em $x_0 = 3.7 \text{ km}$ existe uma ruptura na suavidade da curva de variação de amplitude na terceira dimensão. Na superfície de secção de Poincaré, esta condição inicial (indicada em vermelho) não reflete nenhum comportamento distinto de sua vizinhança, mas quando integramos a trajetória por mais tempo, esta torna-se visivelmente caótica.

Figura 65: Súperfcie de secção de Poincaré para $C_j = 3.00$ e os limites de variação no eixo z para cada condição inicial. Um conjunto de ilhas de estabilidade é indicado em vermelho.

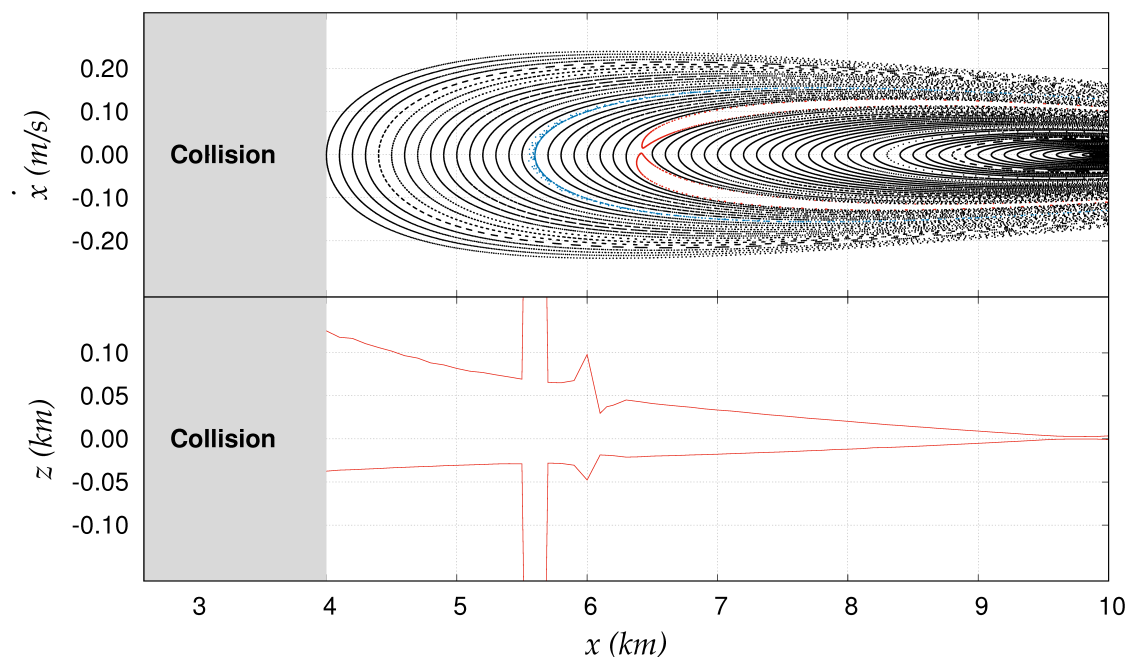


fonte: Produção do próprio autor.

A figura 66 mostra a superfície de secção de Poincaré e os limites da variação na terceira dimensão para $C_j = 2.25$. Para este valor de C_j , a região proibida ainda está fechada (figura 5.3b), mas menor que as regiões para valores mais altos de C_j . Na figura 66, a região cujas condições iniciais têm as trajetórias interrompidas pela colisão da partícula em órbita com o asteroide são marcadas em cinza. Perto da órbita central os limites na terceira dimensão tendem a zero, como no caso para $C_j = 3.00$. Em $x_0 = 5.6 \text{ km}$ os pontos indicados em azul na superfície de secção de Poincaré correspondem ao limite superior $\sim 1.18 \text{ km}$ e o limite inferior $\sim -1.10 \text{ km}$ na terceira dimensão. Esses limites estão fora do gráfico porque são muito maiores que os outros valores, apenas uma descontinuidade é vista no gráfico que corresponde a uma trajetória caótica na superfície de secção de Poincaré. Portanto, a trajetória caótica apresenta uma grande variação na terceira dimensão. Na superfície de secção de Poincaré com $C_j = 2.25$ existe uma órbita central da Família 2. Em $x_0 = 6.4$ é uma órbita quase-periódica que está librando em torno da órbita central

da Família 2, indicada em vermelho. Nota-se que a estrutura não tem uma variação no comportamento do limite na terceira dimensão, uma vez que não é caótico.

Figura 66: Superfície de secção de Poincaré para $C_j = 2.25$ e os limites de variação no eixo z para cada condição inicial. Uma trajetória caótica é indicada em azul e um par de ilhas de estabilidade é indicada em vermelho.

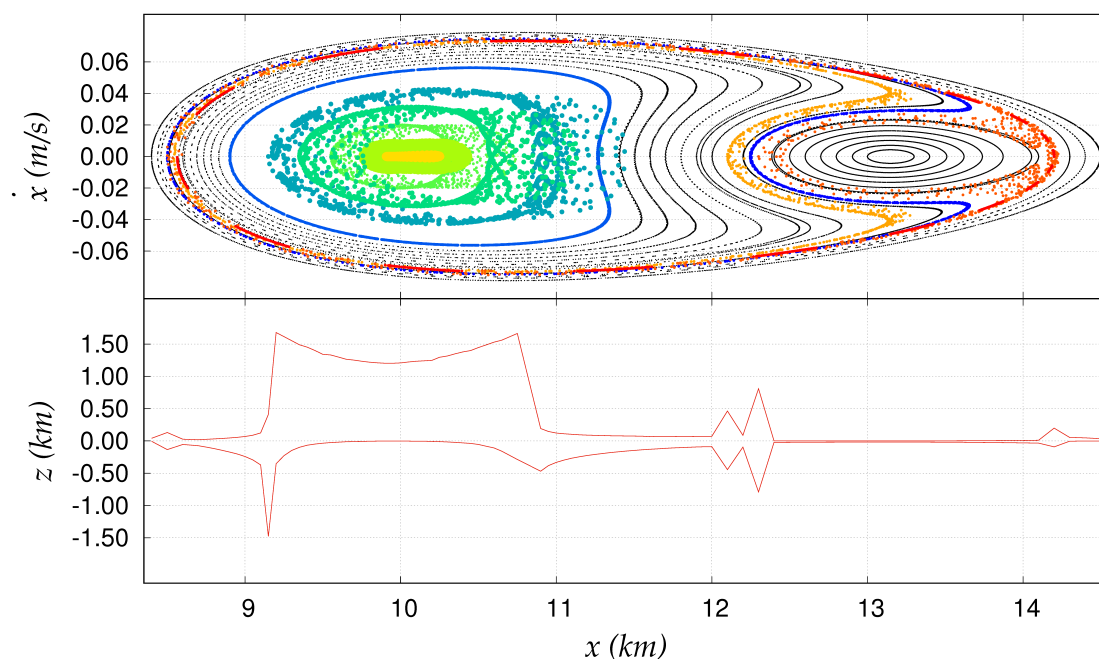


fonte: Produção do próprio autor.

A figura 67 mostra a superfície de secção de Poincaré para $C_j = 2.10$ e os limites respectivos da variação na terceira dimensão. Por esse valor de C_j , a região proibida ainda está fechada. A superfície da secção de Poincaré apresenta regiões estáveis e instáveis em proporções iguais. Existem estruturas com duas órbitas centrais. Entre $x_0 = 12.4$ e 14.1 km , os limites da variação em z são muito próximos de zero em comparação com os outros no gráfico e esse comportamento é semelhante ao da figura 65. Esta região corresponde a uma região estável de órbitas quase periódicas em torno da órbita central da Família 1. Outras regiões estáveis podem ser encontradas pela evolução dos limites na terceira dimensão e correspondem a órbitas quase periódicas. As órbitas quase periódicas são indicadas em preto na superfície da secção de Poincaré. Os picos em $x_0 = 8.5$ e 14.2 km correspondem a trajetórias caóticas na superfície de secção de Poincaré. Os resultados de $x_0 = 8.5$ km são indicados em azul escuro e os resultados por $x_0 = 14.2$ km são indicados em vermelho. De $x_0 = 12.0$ a 12.4 km , existe uma região instável (laranja) confinada entre duas regiões estáveis. E entre $x_0 = 9.1$ e 10.9 km , existe uma região instável com os maiores limites de variações na terceira dimensão. Nesta região, cada condição inicial é indicada em cores diferentes (amarelo, verde e azul). Existe uma

estrutura caótica confinada nesta região. Esta estrutura apresenta um comportamento contínuo na superfície de secção de Poincaré da região e nos limites de variação na terceira dimensão. Essa região caótica se apresenta no lugar das ilhas de estabilidade influenciada pela órbita periódica da Família 3. Na superfície de secção de Poincaré, pelo menos uma trajetória passa da região instável para a região estável. Na verdade, este fenômeno é devido à terceira dimensão. Na superfície de secção de Poincaré de sistemas bidimensionais isso não ocorre. O caso bidimensional aceita apenas uma solução de x e \dot{x} pelo teorema de Picard–Lindelöf. Portanto, não há cruzamento entre duas soluções para diferentes condições iniciais em um caso bidimensional. Aqui estudamos um caso tridimensional projetado em um espaço de fase bidimensional. Existe apenas uma solução para x , z , \dot{x} e \dot{z} , mas um número infinito de soluções para x e \dot{x} com diferentes valores de z e \dot{z} .

Figura 67: Superfície de secção de Poincaré para $C_j = 2.10$ e os limites de variação no eixo z para cada condição inicial. As estruturas caóticas estão indicadas em diferentes cores para cada condição inicial.

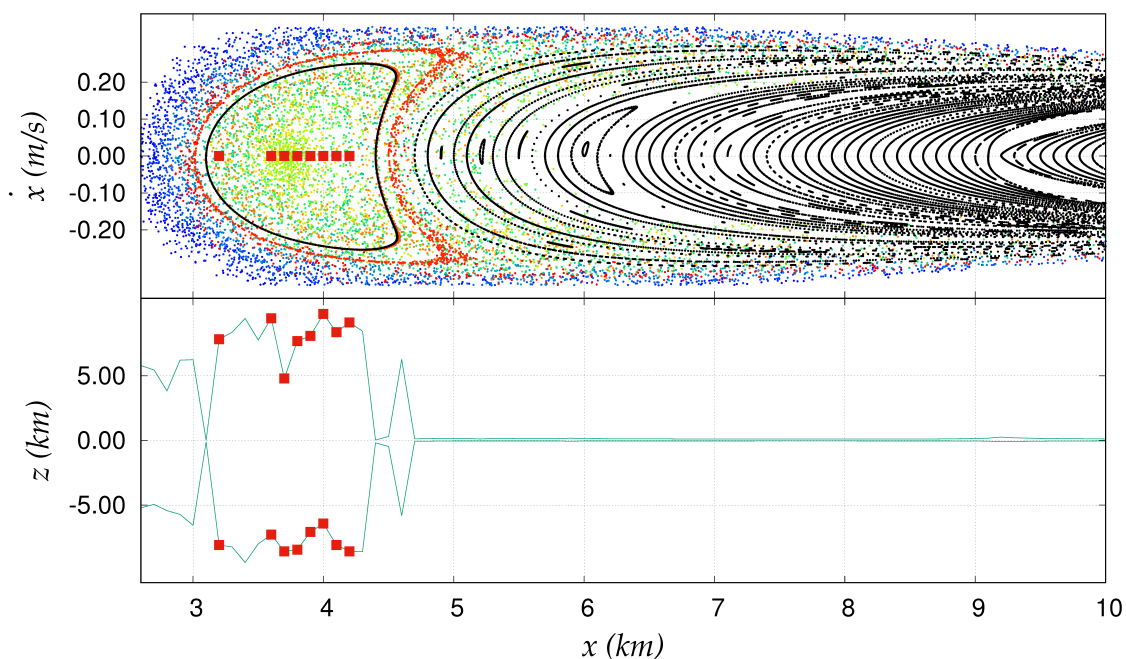


fonte: Produção do próprio autor.

Na figura 68 a superfície de secção de Poincaré para $C_j = 1.80$ e os respectivos limites do movimento em terceira dimensão são apresentados. Para este valor de C_j , a região proibida é aberta (figura 5.3b). As trajetórias estáveis são indicadas em preto. As trajetórias instáveis são indicadas em cores diferentes, em um intervalo de vermelho para azul, distribuídas dos valores mais baixos para valores mais altos de x_0 . A região instável para este valor de C_j é maior do que as regiões instáveis de valores mais altos de C_j . Dos

limites da variação na terceira dimensão, é possível identificar as regiões instáveis e estáveis que estão claramente separadas. A região estável começa com $x_0 = 4.7 \text{ km}$, onde os limites da variação na terceira dimensão são muito menores do que na região antes de $x_0 = 4.7 \text{ km}$. Os quadrados vermelhos indicam as condições iniciais cujas partículas colidiram com o asteroide antes da trajetória completar 1000 pontos na superfície de secção de Poincaré. Comparando a secção e os limites da variação em z , é possível encontrar trajetórias caóticas que produzem pontos na superfície de secção de Poincaré sobre a região estável, da mesma forma que aconteceu na superfície de secção de Poincaré para $C_j = 2.10$ (figura 67).

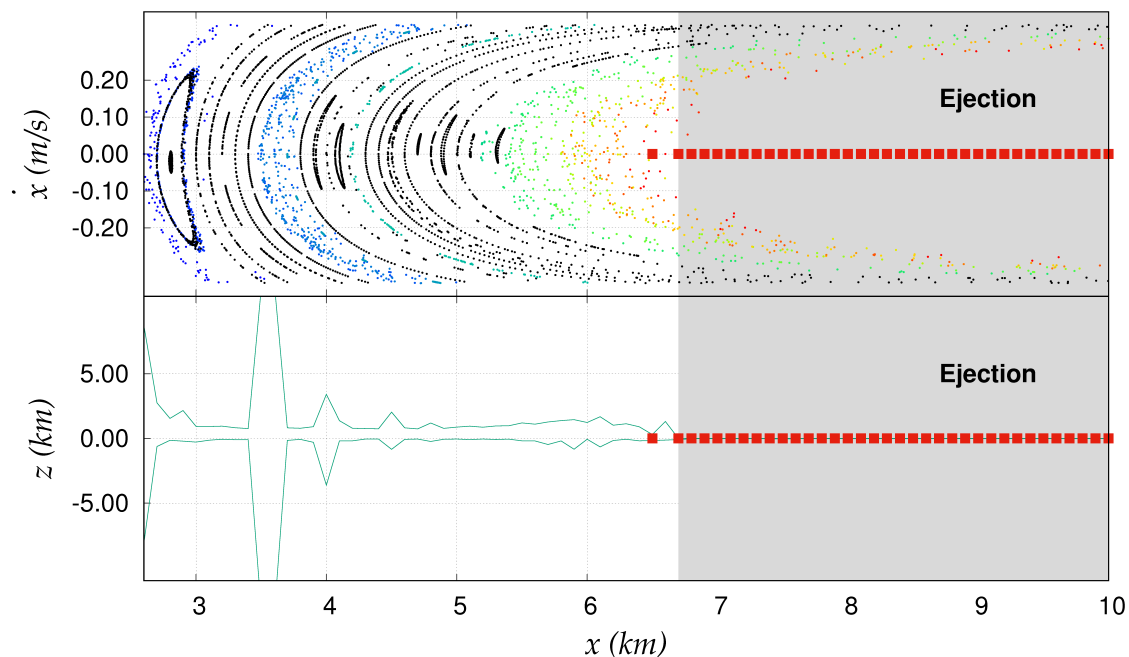
Figura 68: Superfície de secção de Poincaré para $C_j = 1.80$ e os limites de variação no eixo z para cada condição inicial. As estruturas caóticas são indicadas em cores diferentes para cada condição inicial. Trajetórias que colidiram com o asteroide são indicadas por quadrados vermelhos.



fonte: Produção do próprio autor.

Na figura 69 é apresentada a superfície de secção de Poincaré para $C_j = 1.20$ e seus respectivos limites de variação na terceira dimensão. Para esse valor de C_j , a região proibida é amplamente aberta. Na variação dentro dos limites de z , não há separação entre regiões estáveis e instáveis, mas uma mistura de ambas. Para valores superiores a $x_0 = 6.7 \text{ km}$, todas as trajetórias são ejetadas. Os quadrados vermelhos indicam as condições iniciais que ejetaram.

Figura 69: Superfície de secção de Poincaré para $C_j = 1.20$ e os limites de variação no eixo z para cada condição inicial. As estruturas caóticas são indicadas em cores diferentes para cada condição inicial. Trajetórias que colidiram com o asteroide são indicadas por quadrados vermelhos.



fonte: Produção do próprio autor.

5.3 COMENTÁRIOS

No presente capítulo exploramos a dinâmica da região próxima ao asteroide 4179 Toutatis por meio da superfície de secção de Poincaré. Usamos o modelo de mascon para simular um potencial gravitacional tridimensional para o corpo. Definimos um intervalo de C_j ao redor do valor encontrado no ponto de equilíbrio e um intervalo em x inferior ao x do ponto de equilíbrio. Identificamos a partir das simulações 4 Famílias de órbitas periódicas, as quais foram estudadas individualmente.

Nos estudos realizados com as Famílias encontramos estruturas e comportamentos semelhantes aos encontrados em um superfície de secção de Poincaré bidimensional. As Famílias 2, 3 e 4 são do tipo ressonante, sendo assim sua estrutura é influenciada por uma ressonância. Diferente da Família 1 que se apresenta como órbitas de primeira tipo.

Para um estudo mais abrangente, estudamos conjuntamente a secção de superfície de Poincaré e a máxima libração na terceira dimensão. Com baixas variações o comportamento é idêntico à uma superfície de secção de Poincaré bidimensional. Dessa forma é possível definir regiões de estabilidade. Por outro lado uma grande variação pode indicar uma tendência à trajetória se tornar caótica. Sendo assim, a aplicação da modelagem pro-

posta se mostrou eficaz em estudos dinâmicos para órbitas ao redor de corpos irregulares.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Definimos neste trabalho duas modelagens diferentes para simular o potencial gravitacional e as usamos nas superfícies de secção de Poincaré. Usando uma expansão com C_{20} e C_{22} no potencial gravitacional para Haumea, mapeamos a região ao redor do anel observado em Haumea. Encontramos uma estrutura bifurcada associadas à ressonância 1:3. As nossas simulações indicaram que as partículas do anel podem estar vinculadas a uma região regular associada às órbitas periódicas de uma Família do primeiro tipo.

Para um potencial mais realista apresentamos o modelo de mascons, que consiste em preencher o volume do corpo com pontos massivos. Para o preenchimento apresentamos duas formas de distribuição dos pontos massivos. Uma distribuição utiliza a geometria dos dados observacionais (modelo de tetraedros) e a outra distribui os pontos em uma grade igualmente espaçada (modelo de grade). Aplicamos as duas distribuições ao asteroide 216 Kleopatra, pela forma altamente irregular do corpo. Comparamos o potencial das duas distribuições a partir do potencial gravitacional obtido pelo *polihedron model*, que é uma aproximação mais precisa. Apesar de alguma diferença, os resultados não foram conclusivos para optar-se por uma das distribuições. Todavia, a homogeneidade do modelo de grade e o problema da concavidade no modelo de tetraedro, nos fez optar pelo modelo de grade para aplicação na superfície de secção de Poincaré.

Na sequência utilizamos o modelo de mascons para exploramos a dinâmica da região próxima ao asteroide 4179 Toutatis por meio da superfície de secção de Poincaré. Identificamos a partir das simulações, 4 Famílias de órbitas periódicas. As Famílias 2, 3 e 4 são do tipo ressonantes, ou seja, estão ligadas às ressonâncias 3:1, 2:1 e 2:3 respectivamente. A Família 1 se apresenta como órbitas de primeiro tipo. Ressaltamos que nossa modelagem usa um potencial irregular, assimétrico e tridimensional em uma ferramenta bidimensional. Nos estudos realizados com as Famílias, encontramos estruturas e comportamentos semelhantes aos encontrados em um superfície de secção de Poincaré bidimensional. Para um estudo completo, analisamos o comportamento de um conjunto representativo de superfícies de secção de Poincaré combinadas com a máxima libração na terceira dimensão. Mostramos que a técnica de superfície de secção de Poincaré é aplicável a um sistema dinâmico tridimensional nos moldes aqui utilizados. Para baixas variações na terceira dimensão a análise da superfície é semelhante a um problema bidimensional. Grandes variações na terceira dimensão podem indicar instabilidade na órbita. Com baixas variações o comportamento é idêntico à uma superfície de secção de Poincaré bidimensional. Dessa forma é possível definir regiões de estabilidade. Por

outro lado, uma grande variação pode indicar uma tendência à trajetória se tornar caótica. Sendo assim, a aplicação da modelagem proposta se mostrou eficaz em estudos dinâmicos para órbitas ao redor de corpos irregulares. Por fim, a ferramenta aqui apresentada se mostra eficiente para ser utilizada no estudo da dinâmica ao redor de corpos irregulares.

6.1 PERSPECTIVAS FUTURAS

Como perspectivas futuras de trabalho utilizando a superfície de secção de Poincaré a partir de um corpo irregular modelado por mascons, destacamos:

- Estudar a dinâmica ao redor de um ponto de equilíbrio estável; e
- Estudar a dinâmica da região exterior ao ponto de equilíbrio.

REFERÊNCIAS

- ABELL, P. A. et al. NASA's asteroid redirect mission (ARM). In: LUNAR AND PLANETARY SCIENCE CONFERENCE, 48, 2017, The Woodlands. **Anais...** The Woodlands: Lunar and Planetary Institute, 2017.
- BORDERES-MOTTA, G.; WINTER, O. C. Poincaré surfaces of section around a 3D irregular body: the case of asteroid 4179 Toutatis. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 474, fev. 2018. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2018MNRAS.474.2452B>>. Acesso em: 05 mar 2018.
- BROUCKE, R.; ELIPE, A. The dynamics of orbits in a potential field of a solid circular ring. **Regular and Chaotic Dynamics**, v. 10, jan. 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1070%2Frd2005v010n02abeh000307>>. Acesso em: 05 mar 2018.
- BROWN, M. E. et al. Keck observatory laser guide star adaptive optics discovery and characterization of a satellite to the large kuiper belt object 2003 EL₆₁. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 632, out. 2005. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2005ApJ...632L..45B>>. Acesso em: 05 mar 2018.
- BULIRSCH, R.; STÖER, J. Numerical treatment of ordinary differential equations by extrapolation methods. **Journal Numerische Mathematik**, v. 8. 1966. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007>>mar 2018.
- CHANUT, T. G. G.; ALJBAAE, S.; CARRUBA, V. Mascon gravitation model using a shaped polyhedral source. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 450, jul. 2015. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2015MNRAS.450.3742C>>. Acesso em: 05 mar 2018.
- CHANUT, T. G. G. et al. 3D plausible orbital stability close to asteroid (216) Kleopatra. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 452, set. 2015. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2015MNRAS.452.1316C>>. Acesso em: 05 mar 2018.
- DEPARTAMENTO de Ciência de Engenharia Aeroespacial da Universidade do Colorado em Boulder, DEPARTAMENTO de Ciência de Engenharia Aeroespacial da Universidade do Colorado em Boulder. **Advanced finite element methods for solids, plates and shells**, Capítulo 9 The Linear Tetrahedron. Disponível em: <<https://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/AFEM.d/AFEM.Ch09.d/AFEM.Ch09.pdf>>. Acesso em: 4 dez 2017.
- DESCAMPS, P. et al. Triplicity and physical characteristics of Asteroid (216) Kleopatra. **Icarus**, v. 211, fev. 2011. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2011Icar..211.1022D>>. Acesso em: 05 mar 2018.

FENG, J.; HOU, X. Dynamics of equilibrium points in a uniformly rotating second-order and degree gravitational field. **The Astronomical Journal**, v. 154, jul. 2017. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2017AJ....154...21F>>. Acesso em: 05 mar 2018.

GEISSLER, P. et al. Erosion and ejecta reaccretion on 243 Ida and its moon. **Icarus**, v. 120, mar. 1996. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1996Icar..120..140G>>. Acesso em: 05 mar 2018.

HÉNON, M. Exploration numérique du problème restreint. I. Masses égales ; orbites périodiques. **Annales d'Astrophysique**, v. 28, fev. 1965. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/full/1965AnAp...28..499H>>. Acesso em: 05 mar 2018.

HÉNON, M. Exploration numérique du problème restreint. II. Masses égales, stabilité des orbites périodiques. **Annales d'Astrophysique**, v. 28, fev. 1965. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/full/1965AnAp...28..992H>>. Acesso em: 05 mar 2018.

HÉNON, M. Exploration numérique du problème restreint. III. Masses égales, orbites non périodiques. **Annales d'Astrophysique**, v. 1, fev. 1966. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/full/1965AnAp...28..499H>>. Acesso em: 05 mar 2018.

HÉNON, M. Exploration numérique du problème restreint. IV. Masses égales, orbites non périodiques. **Annales d'Astrophysique**, v. 1, fev. 1966. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/full/1965AnAp...28..992H>>. Acesso em: 05 mar 2018.

HÉNON, M. Numerical exploration of the restricted problem. V. Hill's case: Periodic orbits and their stability. **Academie des Sciences Paris Comptes Rendus Serie B Sciences Physiques**, v. 268, fev. 1969. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1969CRASB.268..223H>>. Acesso em: 05 mar 2018.

HIRABAYASHI, M.; SCHEERES, D. J. Analysis of asteroid (216) Kleopatra using dynamical and structural constraints. **The Astrophysical Journal**, v. 780, jan. 2014. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2014ApJ...780..160H>>. Acesso em: 05 mar 2018.

HU, W.; SCHEERES, D. J. Numerical determination of stability regions for orbital motion in uniformly rotating second degree and order gravity fields. **Planetary and Space Science**, v. 52, jul. 2004. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2004PA>>. Acesso em: 05 mar 2018.

HUANG, J. et al. The ginger-shaped asteroid 4179 Toutatis: New observations from a successful flyby of Chang'e-2. **Scientific Reports**, v. 3, dez. 2013. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2013NatSR...3E3411H>>. Acesso em: 05 mar 2018.

HUDSON, R. S.; OSTRO, S. J. Shape and non-principal axis spin state

of asteroid 4179 Toutatis. **Science**, v. 270, out. 1995. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1995Sci...270...84H>>. Acesso em: 05 mar 2018.

HUDSON, R. S.; OSTRO, S. J.; SCHEERES, D. J. High-resolution model of asteroid 4179 Toutatis. **Icarus**, v. 161, fev. 2003. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2003Icar..161..346H>>. Acesso em: 05 mar 2018.

INTERNATIONAL Astronomical Union; MINOR Planet Center, INTERNATIONAL. **(216) Kleopatra = 1905 OA = 1910 RA**, Dados do Asteroide 216 Kleopatra. Disponível em: <https://www.minorplanetcenter.net/db_search/show_object?object_id=216>. Acesso em: 4 dez 2017.a.

INTERNATIONAL Astronomical Union; MINOR Planet Center, INTERNATIONAL. **(4179) Toutatis = 1934 CT = 1989 AC**, Dados do Asteroide 4179 Toutatis. Disponível em: <https://www.minorplanetcenter.net/db_search/show_object?object_id=4179>. Acesso em: 4 dez 2017.b.

INTERNATIONAL Astronomical Union, INTERNATIONAL. **IAU names fifth dwarf planet Haumea**, Dados do Planeto Anão Haumea. Disponível em: <<https://www.iau.org/news/pressreleases/detail/iau0807/>>. Acesso em: 4 dez 2017.c.

JEFFERYS, W. **An atlas of surfaces of section for the restricted problem of three bodies**. 1. ed. Austin: Publications Department of Astronomy, 1971. 21 p.

JET Propulsion Laboratory, JETPropulsionLaboratory. **Asteroid radar research**, Dados de Asteroides. Disponível em: <<https://echo.jpl.nasa.gov/links.html>>. Acesso em: 4 dez 2017.

JIANG, Y. et al. Orbits and manifolds near the equilibrium points around a rotating asteroid. **Astrophysics and Space Science**, v. 349, jan. 2014. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2014ApA>>. Acesso em: 05 mar 2018.

KAWAGUCHI, J.; FUJIWARA, A.; UESUGI, T. HayabusaIts technology and science accomplishment summary and Hayabusa-2. **Acta Astronautica**, v. 62, mai. 2008. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2008AcAau..62..639K>>. Acesso em: 05 mar 2018.

KELLOGG, O. D. **Foundations of potential theory**. 1. ed. Cambridge: Springer, 1954. 406 p.

LAPLACE, P. S. **Oeuvres de laplace**. 1. ed. Paris: Imprimerie royale, 1782. 571 p. v. 1.

LAURETTA, D. S. et al. OSIRIS-REx: sample return from asteroid (101955) Bennu. **ArXiv e-prints**, fev. 2017. Disponível

em:<<http://adsabs.harvard.edu/abs/2017arXiv170206981L>>. Acesso em: 05 mar 2018.

LIU, X.; BAOYIN, H.; MA, X. Periodic orbits in the gravity field of a fixed homogeneous cube. **Astrophysics and Space Science**, v. 334, ago. 2011. Disponível em:<<http://adsabs.harvard.edu/abs/2011ApA>> Acesso em: 05 mar 2018.

MACMILLAN, W. D. **Dynamics of rigid bodies**. 1. ed. New York: McGraw-Hill, 1936. 505 p.

MOURA, T. S. **Pontos de equilíbrio ao redor de asteroides: localização e estabilidade**. 2016. 116 p. Dissertação (Mestrado em Física) -. Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2016. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/143467/moura_ts_me_guara.pdf?sequence=3>. Acesso em: 4 dez 2017.

MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar system dynamics**. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 606 p.

NAJID, N.-E.; HAJ ELOURABI, E.; ZEGOUMOU, M. Potential generated by a massive inhomogeneous straight segment. **Research in Astronomy and Astrophysics**, v. 11, mar. 2011. Disponível em:<<http://adsabs.harvard.edu/abs/2011RAA....11..345N>>. Acesso em: 05 mar 2018.

NATIONAL Aeronautics and Space Administration, NATIONALAeronauticsandSpace-Administration. **Planetary data system: Shape and gravity models**, Formas e Potencial Gravitacional. Disponível em: <<http://sbn.psi.edu/pds/archive/shape.html>>. Acesso em: 30/10/2017.

NEESE, C. Small body radar shape models V2.0. **NASA Planetary Data System**, v. 16, out. 2004. Disponível em:<<http://adsabs.harvard.edu/abs/2004PDSS...16....N>>. Acesso em: 05 mar 2018.

ORTIZ, J. L. et al. The size, shape, density and ring of the dwarf planet Haumea from a stellar occultation. **Nature**, v. 550, out. 2017. Disponível em:<<http://adsabs.harvard.edu/abs/2017Natur.550..219O>>. Acesso em: 05 mar 2018.

OSTRO, S. J. et al. Radar observations of asteroid 216 Kleopatra. **Science**, v. 288, mai. 2000. Disponível em:<<http://adsabs.harvard.edu/abs/2000Sci...288..836O>>. Acesso em: 05 mar 2018.

POINCARÉ, H.; MAGINI, R. **Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste**. 1. ed. Paris: Springer, 1899. 130 p. v. 10.

PROCKTER, L. et al. The near shoemaker mission to asteroid 433 eros. **Acta Astronautica**, v. 51, jul. 2002. Disponível em:<<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S009457650200098X>>. Acesso em: 05 mar 2018.

ROLL, R.; WITTE, L.; ARNOLD, W. ROSETTA lander Philae - soil strength analysis. **Icarus**, v. 280, dez. 2016. Disponível em:<<http://adsabs.harvard.edu/abs/2016Icar..280..359R>>. Acesso em: 05 mar 2018.

ROSSI, A.; MARZARI, F.; FARINELLA, P. Orbital evolution around irregular bodies. **Earth, Planets, and Space**, v. 51, nov. 1999. Disponível em:<<http://adsabs.harvard.edu/abs/1999EP>>. Acesso em: 05 mar 2018.

SCHEERES, D. J. **Orbital motion in strongly perturbed environments**. 1. ed. Boulder: Springer, 2012. 390 p.

SCHEERES, D. J. et al. Dynamics of orbits close to asteroid 4179 Toutatis. **Icarus**, v. 132, mar. 1998. Disponível em:<<http://adsabs.harvard.edu/abs/1998Icar..132...53S>>. Acesso em: 05 mar 2018.

SCHEERES, D. J. et al. Orbits close to asteroid 4769 Castalia. **Icarus**, v. 121, mai. 1996. Disponível em:<<http://adsabs.harvard.edu/abs/1996Icar..121...67S>>. Acesso em: 05 mar 2018.

SILVA, A. A.; WINTER, O. C.; PRADO, A. F. B. A. Collision and stable regions around bodies with simple geometric shape. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2009, out. 2009. Disponível em:<<https://www.hindawi.com/journals/mpe/2009/396267/ref/>>. Acesso em: 05 mar 2018.

SIMONELLI, D. P. et al. The generation and use of numerical shape models for irregular Solar System objects. **ICARUS**, v. 103, mai. 1993. Disponível em:<<http://adsabs.harvard.edu/abs/1993Icar..103...49S>>. Acesso em: 05 mar 2018.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria analítica**. 1. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987. 302 p.

VENDITTI, F. C. F. **Manobras orbitais ao redor de corpos irregulares**. 2013. 196 p. Tese (Doutorado em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle) -. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2013. Disponível em: <<http://mtc-m16d.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/mtc-m19/2013/11.12.19.30/doc/publicacao.pdf>>. Acesso em: 4 dez 2017.

WERNER, R. A. The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut

corners. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 59, jul. 1994. Disponível em:<<http://adsabs.harvard.edu/abs/1994CeMDA..59..253W>>. Acesso em: 05 mar 2018.

WERNER, R. A.; SCHEERES, D. J. Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 65, set. 1996. Disponível em:<<http://adsabs.harvard.edu/abs/1996CeMDA..65..313W>>. Acesso em: 05 mar 2018.

WINTER, O.; MURRAY, C. **Atlas of the planar, circular, restricted three-body problem: External orbits**. 1. ed. London: Queen Mary and Westfield College, 1994. 423 p. v. 17.

WINTER, O.; MURRAY, C. **Atlas of the planar, circular, restricted three-body problem: Internal orbits**. 1. ed. London: Queen Mary and Westfield College, 1994. 419 p. v. 16.

WINTER, O. C. The stability evolution of a family of simply periodic lunar orbits. **Planetary and Space Science**, v. 48, jan. 2000. Disponível em:<<http://adsabs.harvard.edu/abs/2000PA>>. Acesso em: 05 mar 2018.

WINTER, O. C.; MURRAY, C. D. Resonance and chaos. I. First-order interior resonances. **Astronomy and Astrophysics**, v. 319, mar. 1997. Disponível em:<<http://adsabs.harvard.edu/abs/1997AA>>. Acesso em: 05 mar 2018.

WINTER, O. C.; MURRAY, C. D. Resonance and chaos. II. Exterior resonances and asymmetric libration. **Astronomy and Astrophysics**, v. 328, dez. 1997. Disponível em:<<http://adsabs.harvard.edu/abs/1997AA>>. Acesso em: 05 mar 2018.

YU, Y.; BAOYIN, H. Orbital dynamics in the vicinity of asteroid 216 Kleopatra. **The Astrophysics Journal**, v. 143, mar. 2012. Disponível em:<<http://adsabs.harvard.edu/abs/2012AJ....143...62Y>>. Acesso em: 05 mar 2018.