



Universidade Estadual Paulista

Campus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Máquina de Somar, Conjuntos de Julia e Fractais de Rauzy

Rafael Asmat Uceda

Orientador: Prof. Dr. Ali Messaoudi

Tese apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Câmpus São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática

São José do Rio Preto

15 de Março - 2011

Uceda, Rafael Asmat.

Máquina de Somar, Conjuntos de Julia e Fractais de Rauzy /Rafael Asmat Uceda. - São José do Rio Preto: [s.n.], 2011.

107 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Ali Messaoudi

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Sistemas dinâmicos discretos. 2. Conjuntos de Julia 3. Fractais 4. Processos de Markov. 5. Máquinas de Somar I. Messaoudi, Ali. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 517.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
Campus de São José do Rio Preto - UNESP

RAFAEL MARCEL ASMAT UCEDA

Máquina de Somar, Conjuntos de Julia e Fractais de Rauzy

Tese apresentada para obtenção do título de Doutor em Matemática, área de Geometria e Topologia junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, "Julio de Mesquita Filho", Campus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ali Messaoudi

Professor Doutor

UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita

Professor Doutor

UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Daniel Smania Brandão

Professor Doutor

ICMC - USP, São Carlos

Prof. Dr. Christian Mauduit

Professor Doutor

Institut de Mathématique de Luminy, Marselha

Prof. Dr. Glauco Valle da Silva Coelho

Professor Doutor

UFRJ - Rio de Janeiro

São José do Rio Preto, 15 de março de 2011

Aos meus pais,
Gerardo e Arlette
e aos meus queridos irmãos,
Martin e Denisse
dedico.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a DEUS pela oportunidade de poder estudar no Brasil e todas as coisas que me brindou durante este processo de estar longe de casa e ter conhecido pessoas maravilhosas que me ajudaram durante o caminho.

Agradeço aos meus pais, Gerardo e Arlette, e meus irmãos Martin e Denisse, pelo amor, paciência, respeito e confiança. Pelo apoio e a união que sempre nos fortaleceu e nos fez crescer mais como família e como seres humanos.

Agradeço especialmente ao meu orientador, Ali Messaoudi, pela orientação, amizade, paciência e por ter acreditado em mim. Pela oportunidade de aprender junto com ele e pelos conselhos acadêmicos, profissionais e humanos.

Agradeço aos professores da banca examinadora: Prof. Dr. Christian Mauduit, Prof. Dr. Daniel Smania Brandão, Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita, Prof. Dr. Glauco Valle da Silva Coelho pela disponibilidade e ajuda na redação da minha tese.

Agradeço também aos professores do departamento de matemática do Ibilce, ao professor Dr. Claudio, pelo apoio e ajuda durante todos estes anos, ao professor Dr. German Lozada, pela amizade e apoio durante meu processo de adaptação e professor Dr. Walter Julio, pelo incentivo, simpatia e acolhida desde o início.

Aos amigos da mestrado e doutorado, Pedro, Tiago, Canetas, Oyran, Ruikson, Ana Paula, Gustavo, Rodiak, pela ajuda e amizade. Aos meus amigos brasileiros e estrangeiros, Lina, Cinthya, Camilo, Harvey, Bárbara, Alanna por ter-me acompanhado e brindado sua amizade sincera e pelos grandes momentos de alegria.

A FAPESP, pelo apoio financeiro.

A todos que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste trabalho.

“A crise acontece enquanto o velho não acaba de morrer e o novo não acaba de nascer.”
(Bertold Brecht)

Resumo

Em 2000, Killeen e Taylor definiram a máquina de somar estocástica em base 2. Eles mostraram que o espectro do operador de transição (agindo em $l^\infty(\mathbb{N})$), associado a essa máquina, é igual ao conjunto de Julia cheio de uma função quadrática. Nesse trabalho, estudamos outras propriedades espectrais e topológicas da máquina de Killeen e Taylor, e também das suas extensões à $l^\infty(\mathbb{Z})$ e à outras bases não constantes. Esse estudo envolve conjuntos de Julia de funções quadráticas e também conjuntos de Julia cheios de endomorfismos de $\mathbb{C}^2$. Finalmente estudamos algumas propriedades aritméticas e topológicas de uma classe de fractais de Rauzy. Em particular estudamos o azulejamento periódico do plano complexo $\mathbb{C}$ induzido por eles.

Palavras chave: Máquina de somar, cadeias de Markov, operador de transição, Espectro, conjuntos de Julia, Fractal de Rauzy.

Abstract

In 2000, Killeen and Taylor defined the stochastic adding machine in base 2. They proved that the spectrum of the transition operator (acting in $l^\infty(\mathbb{N})$) associated to this machine is equal to the filled Julia set of a quadratic polynomial map. In this work, we study other spectral and topological properties of Killeen and Taylor machine, and also of its extensions to $l^\infty(\mathbb{Z})$ and to other non constant bases. This study involves Julia sets of quadratic maps and also filled Julia sets of endomorphisms of C^2 . Finally we study some arithmetical and topological properties of a class of Rauzy fractals. In particular we study the periodic tiling of complex plane $\mathbb{C}$ induced by this class.

Key words: Adding machine, Markov chains, transition operator, Spectrum, Julia sets, Rauzy Fractal.

Sumário

Introdução	11
1 Preliminares	15
2 Máquina de Somar Estocástica em Base 2	25
2.1 Máquina de somar	25
2.2 Transdutor e Máquina de somar Estocástica	27
2.2.1 Máquina de Somar em Base 2	28
2.2.2 Máquina de Somar Estocástica em Base 2	29
2.2.3 Novos Resultados	39
3 Extensões da Máquina de somar em Base 2 para $\mathbb{Z}$	48
3.1 Primeira Extensão	48
3.2 Segunda Extensão	54
3.3 Máquina de Somar Estocástica	55
4 Máquina de Somar Estocástica em Bases Quadráticas	60
4.1 Bases Quadráticas	60
4.1.1 O Caso Fibonacci	61
4.2 Máquina de Somar em Base Quadrática	64
4.3 Máquina de Somar Estocástica	66
4.3.1 Relação entre $\sigma_{pt}(S)$ e o conjunto $\mathcal{K}_p$	76
4.4 Propriedades de $\mathcal{K}_p$	77
4.4.1 Propriedades da fronteira de $\mathcal{G}$	87

5	Propriedades Topológicas de uma Classe de Fractais de Rauzy	92
5.1	Introdução	92
5.2	Sistemas de Numeração	94
5.2.1	β -Numeração	94
5.2.2	β -representação de Rényi	95
5.2.3	Sistema de Numeração sobre os Inteiros	97
5.3	Propriedades do Fractal de Rauzy	98

Introdução

O objetivo desse trabalho é estudar alguns problemas em torno das áreas de Sistemas dinâmicos, Teoria dos números, fractais de Rauzy e Processos estocásticos. Esse estudo envolve: Máquinas de somar estocásticas, Espectros de operadores de transições associados a cadeias de Markov, Conjuntos de Julia de endomorfismos de $\mathbb{C}^2$ e Fractais de Rauzy.

A máquina de somar estocástica foi definida por Killeen e Taylor [34] da seguinte maneira: Seja N um inteiro natural escrito na base 2 como $N = \sum_{i=0}^{k(N)} \varepsilon_i(N)2^i$, onde $\varepsilon_i = 0$ ou 1. Existe um algoritmo (máquina de somar) que calcula os dígitos de $N+1$. Podemos descrever este algoritmo introduzindo uma variável auxiliar “vai 1”, $c_i(N)$, para cada dígito $\varepsilon_i(N)$, da seguinte maneira:

Fazemos $c_{-1}(N+1) = 1$ e para todo $i \geq 0$,

$$\varepsilon_i(N+1) = \varepsilon_i(N) + c_{i-1}(N+1) \bmod(2)$$

$$c_i(N+1) = \left\lceil \frac{\varepsilon_i(N) + c_{i-1}(N+1)}{2} \right\rceil.$$

Generalizamos esta descrição para incluir uma máquina de somar estocástica considerando uma família $\{e_i(n) : i \geq 0, n \in \mathbb{N}\}$ de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas parametrizadas pelos números naturais i, n , tomando o valor 0 com probabilidade $1-p$ e o valor 1 com probabilidade p . Fazendo $c'_{-1}(N+1) = 1$ e para todo $i \geq 0$,

$$\varepsilon_i(N+1) = \varepsilon_i(N) + e_i(N)c'_{i-1}(N+1) \bmod(2)$$

$$c'_i(N+1) = \left\lfloor \frac{\varepsilon_i(N) + e_i(N)c'_{i-1}(N+1)}{2} \right\rfloor.$$

Killen e Taylor [34], estudaram também o espectro do operador S associado a máquina de somar estocástica na base 2, agindo em $l^\infty(\mathbb{N})$ e provaram que ele está relacionado com o conjunto de Julia de $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = (\frac{z-1-p}{p})^2$. Abdalaoui-Messaoudi [6] estudaram o espectro do operador S agindo em outros espaços de Banach clássicos, $\mathcal{C}_0(\mathbb{N})$ e $l^q(\mathbb{N})$, $q > 1$.

Nesta tese consideramos uma outra maneira de construir a máquina de somar estocástica via autômatos ou “transdutores”, e vamos considerar a matriz de truncamento S_n do operador S , onde

$$(S_n)_{i,j} = S_{ij}, \quad \forall 0 \leq i, j \leq n$$

e o conjunto dos autovalores de S_n denotado por $\sigma(S_n)$. A idéia da máquina de somar estocástica usando transdutores foi apresentada por Messaoudi-Smania [43]. Depois estendemos a máquina de somar em base 2 para o conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z}$. Com isso obtemos dois tipos de operadores agindo em $l^\infty(\mathbb{Z})$.

Consideramos também, em vez da base 2, uma sequência recorrente $(F_n)_{n \geq 0}$ dada por

$$F_{n+2} = aF_{n+1} + bF_n, \quad \forall n \geq 0,$$

com condições iniciais

$$F_0 = 1, F_1 = aF_0 + 1 = a + 1,$$

onde a, b são inteiros naturais tais que $a \geq b \geq 1$.

Nesta base, usando o algoritmo fominha, é possível escrever todo inteiro natural N de forma única, como $N = \sum_{i=0}^{k(N)} \varepsilon_i(N) F_i$, onde os dígitos ε_i são inteiros naturais satisfazendo:

$$\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} <_{lex} ab, \quad \text{para todo } i \geq 1,$$

onde $<_{lex}$ é a ordem lexicográfica.

A partir destas considerações vamos provar vários resultados novos. Em particular provaremos:

Teorema 1: Seja $E = (\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(S_{2^k}))'$. Então E satisfaz as seguintes propriedades:

- 1) Se $0 < p < 1$, então $\partial J_c(f) \subset E$.
- 2) Se $0 < p < 1/2$, então $E = \partial J_c(f)$.
- 3) Se $1/2 \leq p < 1$, então $E \subset J_c(f)$.

onde A' denota o conjunto dos pontos de acumulação de A .

Teorema 2: O espectro do operador de transição S agindo em $l^\infty(\mathbb{Z})$ é igual ao espectro pontual de S e é igual ao conjunto de Julia da função quadrática $f(z) = \left(\frac{z-(1-p)}{p}\right)^2$.

Teorema 3: O espectro pontual de S agindo em $l^\infty(\mathbb{N})$ associado a máquina de somar estocástica em relação a base quadrática $(F_n)_{n \geq 0}$ está contido no conjunto $\mathcal{K}_p = \{\lambda \in \mathbb{C}, (\lambda_1, \lambda) \in J_c(f)\}$, onde $J_c(f)$ é o conjunto de Julia cheio da função $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por $f(x, y) = (\frac{1}{p^2}(x-1+p)^a(y-1+p)^b, x)$ e $\lambda_1 = \frac{(\lambda+p-1)^{F_1}}{p^{F_1-1}}$.

Teorema 4: O conjunto $\mathcal{K}_p$ satisfaz as seguintes propriedades topológicas:

- i. $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_p$ é um conjunto conexo.
- ii. Se $b = 1$ e $a \geq 1$, então existe $d < 1/2$ tal que $\mathcal{K}_p$ não é conexo para todo $0 < p \leq d$.

O trabalho está dividido em cinco capítulos. No primeiro capítulo damos algumas definições e resultados básicos sobre a Teoria Espectral dos operadores contínuos, Processos estocásticos e cadeias de Markov, Conjuntos de Julia de funções polinomiais e fractais de Rauzy.

No segundo capítulo definimos a máquina de somar em base 2 usando o transdutor e mostramos alguns resultados novos ao considerarmos a matriz de truncamento S_n do operador S .

No terceiro capítulo estendemos a máquina de somar para o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ obtendo desta forma dois tipos de operadores agindo em $l^\infty(\mathbb{Z})$, $\overline{S}_1$ e $\overline{S}_2$.

No quarto capítulo, construímos o transdutor da máquina de somar estocástica considerando a base quadrática recorrente $(F_n)_{n \geq 0}$ e mostramos que o espectro pontual do operador S , $\sigma_{pt}(S)$ está contido no conjunto $\mathcal{K}_p$. Finalmente Estudamos algumas propriedades topológicas do conjunto $\mathcal{K}_p$.

No quinto capítulo estudamos as propriedades topológicas de uma nova classe de fractais auto-similares gerados por um sistema de numeração. Estes conjuntos foram introduzido por G. Rauzy em 1982 e estão relacionado com varias áreas como Sistemas Dinâmicos, Sistemas de Numeração Complexa, entre outras. Em particular, temos que ele é compacto, conexo, com interior simplesmente conexo e induz um azulejamento periódico do plano complexo módulo $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo daremos algumas definições e resultados clássicos sobre: Espectro de operadores lineares em espaços de Banach, Processos estocásticos e cadeias de Markov, Conjuntos de Julia e Fractais de Rauzy.

1.1 Espectro de un Operador Linear (Ver [16], [37], [58])

Definição 1.1.1 Sejam E um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $T : E \rightarrow E$ um operador linear contínuo. O conjunto

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I \text{ não é bijetivo}\}$$

é chamado de espectro do operador linear T .

Proposição 1.1.1 $\sigma(T)$ é um conjunto não vazio e compacto de $\mathbb{C}$. Além do mais, $\sigma(T) \subset \overline{D(0, \|T\|)}$, onde $\|T\| = \sup\{|Tx|, |x| \leq 1\}$ e $\overline{D(0, \|T\|)} = \{x \in E, |x| \leq \|T\|\}$.

Classificação do Espectro

O espectro de um operador $T : E \rightarrow E$ é particionado em 3 subconjuntos:

(i) **O espectro pontual** $\sigma_{pt}(T)$, ou o conjunto dos autovalores do operador T , isto é,

$$\sigma_{pt}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I \text{ não é injetivo}\}.$$

(ii) **O espectro contínuo** $\sigma_c(T)$, definido como o conjunto dos pontos do espectro de T que não pertencem ao espectro pontual e tal que $Im(T - \lambda I)$ é densa em E , isto é,

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, T - \lambda I \text{ é injetivo}, \overline{(T - \lambda I)E} = E, (T - \lambda I)E \neq E\}.$$

(ii) **O espectro residual** é o conjunto $\sigma_r(T) = \sigma(T) \setminus (\sigma_{pt}(T) \cup \sigma_c(T))$, isto é,

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - T \text{ é injetivo}, \overline{(\lambda I - T)E} \neq E\}.$$

Exemplo 1.1.1 Seja $E = l^2(\mathbb{N})$ e considere o operador $T : E \rightarrow E$ definido por $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$.

Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor de T , então existe um autovetor não nulo $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in l^2(\mathbb{N})$ tal que:

$$(0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \dots)$$

Se $\lambda = 0$ então $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = 0$, absurdo.

Se $\lambda \neq 0$, então $x_1 = 0$ e pela segunda condição temos $x_2 = x_3 = \dots = 0$, absurdo.

Portanto, T não tem autovalores. Logo $\sigma_{pt}(T) = \emptyset$.

1.2 Processos Estocásticos e Cadeias de Markov

1.2.1 Processos Estocásticos (Ver [45], [52])

Um processo estocástico é um processo aleatório que evolui com o tempo. Mais precisamente, um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias X_t indexadas pelo tempo que assumem valores em um conjunto denominado o espaço de estados. Este espaço de estados pode ser um subconjunto dos inteiros não negativos $\{0, 1, 2, \dots\}$ ou um subconjunto de $[0, \infty)$, os números reais não negativos. No primeiro caso temos um processo estocástico discreto e no segundo um processo estocástico contínuo. Nesta seção vamos considerar o espaço de estados discreto,

isto é um conjunto finito ou enumerável.

Definição 1.2.1 Um processo estocástico $\{X(t), t \in I\}$ é uma coleção de variáveis aleatórias, classificadas mediante um parâmetro t , que varia no conjunto I , onde $I = \mathbb{N}$ ou $I = [0, +\infty)$. O conjunto I é chamado o conjunto de índices do processo.

Definimos o espaço de estados de um processo estocástico como o conjunto de todos os possíveis valores que as variáveis aleatórias $X(t)$ podem assumir.

1.2.2 Cadeias de Markov

Um Processo de Markov $X(t)$ é um processo estocástico tal que, a distribuição condicional de um estado futuro X_{n+1} não depende dos estados passados $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ mas só do estado atual, X_n , isto é, sempre que o processo esteja no estado $X_n = i$ existe uma probabilidade fixa p_{ij} de que esse estado passe para o estado $X_{n+1} = j$. Formalmente,

$$P\{X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\} = p_{ij}$$

para todos os estados $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}$ e todo $n \geq 0$.

Para uma cadeia de Markov teremos:

- i) Um espaço de estados indexado por inteiros não negativos: $\{0, 1, 2, \dots\}$.
- ii) Para cada dois estados i e j , uma probabilidade de transição do estado i ao estado j , denotada por $p_{ij} = P\{X(n+1) = j | X(n) = i\}$ que designa a probabilidade que o estado i transite para j .
- iii) A matriz de transição do processo dada por,

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & \cdot & \cdot & p_{0n} \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ p_{n0} & \cdot & \cdot & p_{nn} \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Além do mais, $\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$, para todo i e $p_{ij} \geq 0$, para todo i, j . Logo, a matriz de transição é uma matriz estocástica. A matriz de transição é duplamente estocástica se a soma dos coeficientes de cada coluna assim como a soma dos coeficientes de cada linha é 1.

Proposição 1.2.1 Um Processo de Markov está completamente definido quando sua matriz de probabilidades de transição e seu estado inicial X_0 (ou, mais genericamente, a distribuição de probabilidade de X_0) estão especificados.

Definição 1.2.2

- 1) Um estado j é dito ser **acessível** desde um estado i se $P_{ij}^{(n)} > 0$, para algum $n \geq 0$.
- 2) Dois estados i e j são **comunicáveis** se cada um deles for acessível ao outro (Notação $i \leftrightarrow j$). Então, se dois estados i e j não são comunicáveis, $P_{ij}^{(n)} = 0$ ou $P_{ji}^{(n)} = 0$, $\forall n \geq 0$.
- 3) Um conjunto de estados E em uma cadeia de Markov é uma **classe de comunicação** se nenhum estado fora de E é acessível por qualquer estado em E . Se a cadeia inteira é formada por uma única classe, isto é, todos os estados são comunicáveis, a cadeia é dita **irredutível**.
- 4) Um estado s_i é **periódico** com período $T > 1$ se T é o menor número tal que todos os caminhos que levam do estado s_i de volta para s_i tem comprimento múltiplo de T . Se um estado recorrente não é periódico, então ele é dito **aperiódico**.

1.2.3 Classificação de Estados

Definição 1.2.3 Dada uma cadeia de Markov irredutível e um estado $X_n = i$ denotamos por f_i a probabilidade de que, começando no estado i , o processo retorne

infinitas vezes ao estado i . Dizemos que o estado i é recorrente se $f_i = 1$ e transiente se $f_i < 1$.

Definição 1.2.4 Seja i um estado recorrente e T o tempo de primeiro retorno para i , isto é,

$$T = \inf\{n > 0 \mid X_n = i\}.$$

Dizemos que o estado i é:

- 1) recorrente positivo se $E[T] < \infty$
- 2) recorrente nulo se $E[T] = \infty$.

Proposição 1.2.2 Um estado i é :

- i. recorrente se e somente se $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} = \infty$.
- ii. transiente se e somente se $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{(n)} < \infty$.

Definição 1.2.6 Seja X uma cadeia de Markov com matriz de transição P e $u \in l^\infty(\mathbb{N})$. Dizemos que u é uma probabilidade (ou distribuição) invariante de X se $uP = u$.

Teorema 1.2.1 [45] Uma cadeia de Markov homogênea com matriz de transição P possui uma única probabilidade invariante u se e somente se ela tem exatamente uma classe de comunicação recorrente positiva C . Neste caso, temos

$$u(i) = \begin{cases} \frac{1}{E[T]}, & \text{se } i \in C \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Teorema 1.2.2 [45] Seja X uma cadeia de Markov homogênea irreduzível com matriz de transição P . Seja R a matriz obtida a partir da remoção de uma linha e uma coluna de P . Para que X seja recorrente é necessário e suficiente que o sistema

$$u = Ru, \quad 0 \leq u \leq 1,$$

tenha como única solução $u = 0$.

1.3 Conjuntos de Julia (Ver [21], [23], [55])

Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial de grau $n \geq 2$ com coeficientes complexos, isto é $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Denotamos por f^k a k -ésima composta $\underbrace{f \circ f \dots \circ f}_k$ da função f .

Definição 1.3.1 Sejam $z \in \mathbb{C}$ um ponto periódico de f de período $p \in \mathbb{N}$ e $\lambda = |(f^p)'(z)|$.

- i. Se $\lambda > 1$, dizemos que z é um ponto repulsor.
- ii. Se $\lambda = 1$, dizemos que z é um ponto indiferente.
- iii. Se $0 < \lambda < 1$, dizemos que z é um ponto atrator.

Definição 1.3.2 Definimos o conjunto de Julia de f como o fecho dos pontos periódicos repulsores de f , isto é,

$$J(f) = \overline{\{z \in \mathbb{C}, z \text{ é um ponto periódico repulsor de } f\}}.$$

O complementar do conjunto de Julia é chamado conjunto de Fatou e é denotado por $\mathcal{F}$.

Exemplo 1.3.1 Seja $f(z) = z^2$. Os pontos periódicos de f são os pontos que satisfazem $z^{2^p} = z, z \neq 0$. Então $z^{2^n-1} = 1$, logo z é uma raiz da unidade e $|z| = 1$. Vamos verificar que os pontos são repulsores. Temos que $f^p(z) = z^{2^p}$, então $(f^n)'(z) = 2^n z^{2^n-1}$ e portanto $|(f^n)'(z)| = 2^n |z|^{2^n-1} = 2^n > 1$.

Se $z = 0$, é possível verificar que z é um ponto fixo superatrator e portanto não pertence ao conjunto de Julia. Então temos que $J(f) \subseteq \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ e tomando o fecho temos a igualdade.

Definição 1.3.3 Sejam $U \subset \mathbb{C}$ aberto e $\{g_k\}_{k \geq 0}$ uma família de funções analíticas complexas de U em $\mathbb{C}$. Dizemos que a família $\{g_k\}_{k \geq 0}$ é normal em U se toda

sequência de funções escolhida de g_k possui uma subsequência que converge uniformemente em cada subconjunto compacto de U , ou para uma função analítica limitada ou para infinito.

A família $\{g_k\}_{k \geq 0}$ é normal no ponto w de U se existe algum subconjunto aberto V de U contendo w tal que $\{g_k\}_{k \geq 0}$ é uma família normal em V .

Teorema 1.3.1 O conjunto de Julia de f , $J(f)$, satisfaz as seguintes propriedades:

- i. $J(f)$ é não vazio e compacto.
- ii. $J(f) = f(J(f)) = f^{-1}(J(f))$.
- iii. Se $z \in J(f)$, então $J(f) = \overline{\bigcup_{k=1}^{+\infty} f^{-k}\{z\}}$.
- iv. $J(f) = \{z \in \mathbb{C}, \text{ a família } \{f^k\}_{k \geq 0} \text{ não é normal em } z\}$.

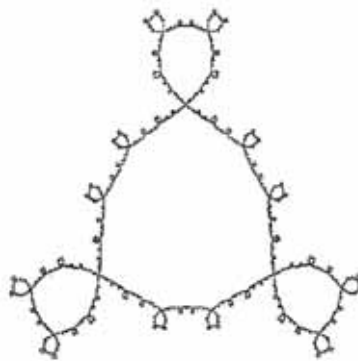


Fig. 01 O Conjunto de Julia da função $f(z) = z^3 - i$

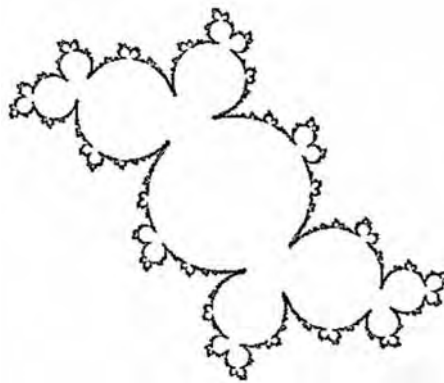


Fig 02 O conjunto de Julia da função $f(z) = z^2 + e^{\frac{2\pi i}{3}}z$

Definição 1.3.4 O conjunto de Julia cheio de f é definido por

$$J_c(f) = \{z \in \mathbb{C} : (f^n(z))_{n \geq 0} \text{ é limitada}\}.$$



Fig. 03 O Conjunto de Julia cheio da função $f(z) = z^2 - 1/4$



Fig. 04 O Conjunto de Julia cheio da função $f(z) = z^2 + 0.36 - 0.63i$

Proposição 1.3.1[23] O conjunto de Julia cheio é compacto, não vazio e $\partial J_c(f) = J(f)$.

No caso $f_c(z) = z^2 + c, c \in \mathbb{C}$, obtemos o seguinte resultado clássico.

Teorema 1.3.2 [21] Seja $f_c(z) = z^2 + c, c \in \mathbb{C}$. Os seguintes resultados são válidos:

- 1) Se $0 \in J_c(f)$, então $J_c(f)$ é conexo
- 2) Se $0 \notin J_c(f)$, então $J_c(f)$ é homeomorfo ao conjunto de Cantor.

1.4 Fractais de Rauzy (Ver [8], [32] [36], [39], [40])

Seja $(T_n)_{n \geq 0}$ a sequência de definida por $T_0 = 0, T_1 = 0, T_2 = 1, T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n, \forall n \geq 0$.

É possível provar, usando o algoritmo “fominha”(greedy), que todo inteiro natural n pode escrever-se de maneira única como $n = \sum_{i=3}^N \varepsilon_i T_i$, onde, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ e $\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \varepsilon_{i+2} \neq 111, \forall i \geq 3$.

Considere o polinômio $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$. Este polinômio possui uma raiz real $\beta > 1$ e duas raízes complexas λ e $\bar{\lambda}$ de módulo estritamente menor que 1.

Podemos associar a este polinômio o conjunto $\mathcal{E} \subset \mathbb{C}$ definido por:

$$\mathcal{E} = \left\{ \sum_{i=3}^{+\infty} \varepsilon_i \lambda^i : \varepsilon_i \in \{0, 1\} \text{ e } \varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} <_{lex} 111, \forall i \geq 3 \right\},$$

onde $<_{lex}$ é a ordem lexicográfica sobre as palavras finitas definida por: se $a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_n$ são palavras finitas sobre um alfabeto finito munida de uma relação de ordem “ $<$ ”, dizemos que $a_1 \dots a_n <_{lex} b_1 \dots b_n$ se existe $n_0 \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a_{n_0} < b_{n_0}$ e $a_n = b_n$, para todo $n < n_0$.

O conjunto $\mathcal{E}$ é chamado **Fractal de Rauzy Clássico**. Foi introduzido por G. Rauzy em 1982 e está relacionado com varias áreas como Sistemas Dinâmicos, Sistemas de Numeração Complexa, entre outras. Em particular, sabe-se que ele é compacto, conexo, com interior simplesmente conexo e induz um azulejamento periódico do plano complexo módulo $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\lambda$.



Fig. 05 Fractal de Rauzy Clássico

Teorema 1.4.1 O conjunto $\mathcal{E}$ possui as seguintes propriedades:

- $\mathcal{E}$ é compacto.
- $\mathcal{E}$ é conexo
- $\mathcal{E}$ induz um azulejamento periódico de $\mathbb{C}$ módulo $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\lambda$, isto é

$$\mathbb{C} = \bigcup_{p,q \in \mathbb{Z}} (\mathcal{E} + p + q\lambda)$$

e para todo $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$, $\text{int}(\mathcal{E} + p + q\lambda) \cap (\mathcal{E} + r + s\lambda) \neq \emptyset$ implica que $p = r$ e $q = s$.



Fig. 06 Azulejamento periódico do plano $\mathbb{C}$ módulo $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\lambda$

Capítulo 2

Máquina de Somar Estocástica em Base 2

Neste capítulo estudamos a máquina de somar estocástica em base 2 definida por Killen e Taylor e consideramos uma outra maneira de construir esta máquina via autômatos. Também estudamos os autovalores da matriz de truncamento S_n do operador de transição, S , associado com esta máquina, agindo em $l^\infty(\mathbb{N})$.

2.1 Máquina de somar

Dado um número natural N é possível escrever ele de forma única, usando o algoritmo “fominha”, como $N = \sum_{i=0}^{k(N)} \varepsilon_i(N) 2^i$ onde $(\varepsilon_i)_{i \geq 0}$ são os dígitos de N na base 2 e assumem os valores 0 ou 1. Existe um algoritmo (máquina de somar) que calcula os dígitos de $N + 1$.

Exemplo 2.1.1 *Consideremos o processo de somar 1 ao número $N = 215 = 11010111$. Temos:*

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 10 \ 11 \ 11 \ 1 \\ +1 \\ \hline 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

adicionamos 1 ao 1 da parte superior direita em 11010111 e obtemos 10, escrevemos o zero debaixo e levamos 1 denotado como super índice no segundo 1 e assim por diante.

Podemos resumir este processo em termos de um sistema de equações de evolução, introduzindo uma variável auxiliar “vai 1”, $c_i(N)$, para cada dígito $\varepsilon_i(N)$, da maneira seguinte:

Seja $c_{-1}(N+1) = 1$ e

$$\varepsilon_i(N+1) = \varepsilon_i(N) + c_{i-1}(N+1) \bmod(2)$$

$$c_i(N+1) = \left\lfloor \frac{\varepsilon_i(N) + c_{i-1}(N+1)}{2} \right\rfloor$$

onde $i \geq 0$ e $\lfloor z \rfloor$ denota a parte inteira de $z \in \mathbb{R}$.

P. R. Killeen e T. J. Taylor [34], generalizaram esta descrição para incluir uma máquina de somar falível da seguinte maneira:

Seja $\{e_i(n) : i \geq 0, n \in \mathbb{N}\}$ uma família de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas parametrizadas pelos números naturais i, n , tomando o valor 0 com probabilidade $1-p$ e o valor 1 com probabilidade p . Seja N um inteiro. Dada uma seqüência $(\varepsilon_i(N))_{i \geq 0}$ de 0 e 1 tal que $\varepsilon_i(N) = 1$ para um número finito de índices i , consideramos as seqüências $(\varepsilon_i(N+1))_{i \geq 0}$ e $(c'_i(N+1))_{i \geq -1}$ definidas por $c'_{-1}(N+1) = 1$ e para todo $i \geq 0$

$$\varepsilon_i(N+1) = \varepsilon_i(N) + e_i(N)c'_{i-1}(N+1) \bmod(2)$$

$$c'_i(N+1) = \left\lfloor \frac{\varepsilon_i(N) + e_i(N)c'_{i-1}(N+1)}{2} \right\rfloor,$$

Com isto temos que um número $\sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon_i(N)2^i$ transita para o número $\sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon_i(N+1)2^i$.

Em particular, um inteiro N com representação binária da forma $\varepsilon_n \dots \varepsilon_{k+1} 0 \underbrace{11 \dots 11}_k$ transita para $\varepsilon_n \dots \varepsilon_{k+1} 1 \underbrace{00 \dots 00}_k$ com probabilidade p^{k+1} e um número com representação binária da forma $\varepsilon_n \dots \varepsilon_k \underbrace{11 \dots 11}_k$ transita para $\varepsilon_n \dots \varepsilon_k \underbrace{00 \dots 00}_k$ com probabilidade $p^k(1 - p)$.

A máquina de somar estocástica está definida por Killeen e Taylor e tem aplicações na psicologia (ver [35])

2.2 Transdutor e Máquina de somar Estocástica

Uma outra maneira de definir a máquina de somar é via autômatos ou “transdutores”. A vantagem deste método é que pode ser generalizado a outras bases.

Seja A um alfabeto finito. Um autômato em A , denotado por $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, T)$, é um grafo orientado cujas arestas estão etiquetadas com elementos de A , sendo Q um conjunto finito de estados, $I \subset Q$ um conjunto de estados iniciais, $T \subset Q$ um conjunto de estados terminais e $E \subset Q \times A \times Q$ o conjunto das arestas.

Um elemento $(p, a, q) \in E$ é também denotado por $q \xrightarrow{a} p$. Um caminho finito c , no autômato $\mathcal{A}$ é por definição uma seqüência finita de arestas consecutivas, isto é, $c = (p_n, a_{n-1}, p_{n-1}) \dots (p_2, a_1, p_1)(p_1, a_0, p_0)$.

Seja B um outro alfabeto finito. Seja A^* (resp. B^*) o conjunto das palavras finitas escritas com o alfabeto A (resp. B).

Um Transdutor em $A^* \times B^*$ é um autômato finito onde as etiquetas são elementos de $A^* \times B^*$. Uma aresta de $\mathcal{T}$ que liga um estado p a um estado q e que tem como etiqueta $(u, v) \in A^* \times B^*$ é denotada por $q \xrightarrow{u/v} p$. Dizemos que $\mathcal{T}$ lê a palavra de entrada em A^* e a transforma em uma palavra em B^* . (Maiores referências [9], [13], [14]).

Os autômatos usados nesta tese tem 2 estados, um estado inicial e outro terminal. Além do mais, eles são determinísticos, isto é, se (p, a, q) e $(p, a, q') \in E$ então $q = q'$.

2.2.1 Máquina de Somar em Base 2

A adição de 1 na base 2 pode ser representada por um transdutor finito (ver Figura 7) formado por dois estados, um estado inicial I e um estado terminal T . O estado inicial está conectado a si mesmo por uma flecha etiquetada por $(1/0)$. Existe também uma flecha saindo do estado inicial para o estado terminal. Esta flecha está etiquetada por $(0/1)$. O estado terminal está conectado a si mesmo por uma flecha etiquetada por (x/x) .

Suponha que $N = \varepsilon_n \dots \varepsilon_0$. Para achar os dígitos de $N + 1$ vamos considerar o caminho finito $c = (p_{k+1}, a_k/b_k, p_k) \dots (p_2, a_1/b_1, p_1)(p_1, a_0/b_0, p_0)$, onde $p_i \in \{I, T\}, p_0 = I, p_{k+1} = T, a_i, b_i \in A^*$.

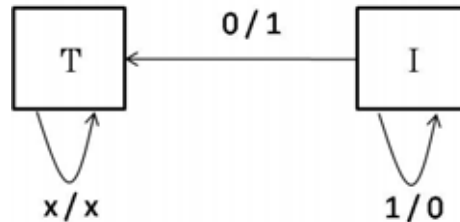


Figura 7: Transdutor da máquina de somar em base 2

Além do mais $\dots 0 \dots 0a_k \dots a_0 = \dots 0 \dots 0\varepsilon_n \dots \varepsilon_0$.

Logo $N + 1 = \varepsilon'_n \dots \varepsilon'_0$, onde

$$\dots 0 \dots b_k \dots b_0 = \dots 0 \dots 0\varepsilon'_n \dots \varepsilon'_0$$

Exemplo 2.2.1 Se $N = 11 = 1011_2$ então N corresponde ao caminho

$$(T, 1/1, T)(T, 0/1, I)(I, 1/0, I)(I, 1/0, I).$$

Logo $N + 1 = 1100_2 = 12$.

Se $N = 13 = 1101_2$ então N corresponde a caminho

$$(T, 1/1, T)(T, 1/1, T)(T, 0/1, I)(I, 1/0, I).$$

Logo $N + 1 = 1110_2 = 14$.

2.2.2 Máquina de Somar Estocástica em Base 2

Agora vamos definir a máquina de somar estocástica na base 2 usando o transdutor. Essa idéia foi apresentada por Messaoudi-Smania [43].

Seja $(p_0, a_0/b_0, p_1)(p_1, a_1/b_1, p_2) \dots (p_n, a_n/b_n, p_{n+1})$ um caminho finito associado a N , então $N = a_n \dots a_0$. Construimos um transdutor probabilístico $\mathcal{T}_p$ (ver Figura 8), onde $0 < p \leq 1$, da seguinte maneira:

Os estados de $\mathcal{T}_p$ são I e T . As etiquetas são da forma $(0/0, 1)$, $(1/1, 1)$, $(a/b, p)$ ou $(a/a, 1 - p)$, onde a/b é uma etiqueta e, $\mathcal{T}$. Se $(p_i, a_i/b_i, p_{i+1})$ é uma aresta em $\mathcal{T}$, onde $p_i = I$, então $(p_i, (a_i/b_i, p), p_{i+1})$ e $(p_i, (a_i/a_i, 1 - p), T)$ são arestas em $\mathcal{T}_p$. Se $(p_i, a_i/a_i, p_{i+1})$ é uma aresta em $\mathcal{T}$ onde $p_i = T$, então $(p_i, (a_i/a_i, 1)p_{i+1})$ é uma aresta em $\mathcal{T}_p$.

Seja $(p_{n+1}, (a_n/b_n, t_n), p_n) \dots (p_1, (a_0/b_0, t_0), p_0)$ um caminho em $\mathcal{T}_p$ onde $p_0 = I$ e $p_{n+1} = T$. Dizemos que o número $a_n \dots a_0$ transita para o número $b_n \dots b_0$ e a probabilidade de transição é $t_n t_{n-1} \dots t_0$.

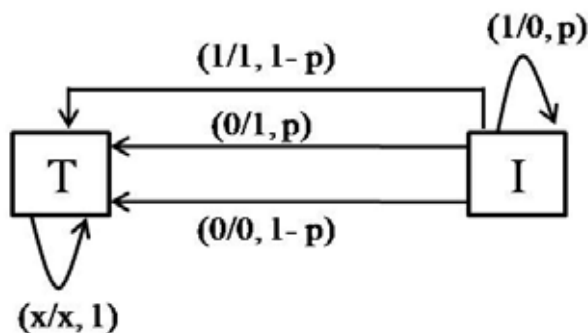


Figura 8: Transdutor da máquina de somar estocástica em base 2

Exemplo 2.2.2 Se $N = 11 = 1011_2$, então no transdutor da máquina de somar, N corresponde ao caminho,

$$(T, 1/1, T)(T, 0/1, I)(I, 1/0, I)(I, 1/0, I).$$

Na máquina de somar estocástica, temos os seguintes caminhos:

- (a) $(T, (1/1, 1), T)(T, (0/0, 1), T)(T, (1/1, 1), T)(T, (1/1, 1-p), I)$. Neste caso $N = 1011$ transita para 1011 com probabilidade $1 - p$.
- (b) $(T, (1/1, 1), T)(T, (0/0, 1), T)(T, (1/1, 1-p), I)(I, (1/0, p), I)$. Neste caso $N = 1011$ transita para $1010 = 10$ com probabilidade $p(1 - p)$.
- (c) $(T, (1/1, 1), T)(T, (0/0, 1 - p), I)(I, (1/0, p), I)(I, (1/0, p), I)$. Neste caso $N = 1011$ transita para $1000 = 8$ com probabilidade $p^2(1 - p)$.
- (d) $(T, (1/1, 1), T)(T, (0/1, p), I)(I, (1/0, p), I)(I, (1/0, p), I)$. Neste caso $N = 1011$ transita para $1100 = 12$ com probabilidade p^3 .

Usando o transdutor $\mathcal{T}_p$, podemos provar o seguinte resultado.

Proposição 2.2.1 Seja N um inteiro não negativo, então os seguintes resultados são válidos.

- i. N transita para N com probabilidade $1 - p$.
- ii. Se $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_1 0, k \geq 1$ (N par), então N transita para $N+1$ com probabilidade p .
- iii. Se $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_t \underbrace{0 1 \dots 1}_s, s \geq 1, k \geq t \geq s+1$ (N ímpar), então N transita para $N+1 = \varepsilon_k \dots \varepsilon_t \underbrace{1 0 \dots 0}_s$ com probabilidade p^{s+1} e N transita para $N - 2^m + 1 = \varepsilon_k \dots \varepsilon_k \underbrace{0 1 \dots 1}_{s-m} \underbrace{0 \dots 0}_m, 1 \leq m \leq s$ com probabilidade $p^m(1 - p)$.

Demonstração:

- (i) Se $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_1 0$ então N corresponde ao caminho (na máquina de somar em base 2)

$$(T, \varepsilon_k / \varepsilon_k, T) \dots (T, \varepsilon_1 / \varepsilon_1, T)(T, 0/1, I).$$

Na máquina de somar estocástica N corresponde aos seguintes caminhos:

(A) $(T, (\varepsilon_k / \varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_1 / \varepsilon_1, 1), T)(T, (0/0, 1-p), I)$. Neste caso N transita para N com probabilidade $1 - p$.

(B) $(T, (\varepsilon_k / \varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_2 / \varepsilon_2, 1), T)(T, (0/1, p), I)$. Logo N transita para $N + 1$ com probabilidade p .

- (ii) Se $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_t 0 \underbrace{1 \dots 1}_s$, então N corresponde ao caminho

$(T, \varepsilon_k / \varepsilon_k, T) \dots (T, \varepsilon_t / \varepsilon_t, T)(T, 0/1, I) \underbrace{(I, 1/0, I) \dots (I, 1/0, I)}_s$. Na máquina de somar estocástica em base 2, N corresponde aos seguintes caminhos.

(A) $(T, (\varepsilon_k / \varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_t / \varepsilon_t, 1), T)(T, (0/0, 1), T)$
 $\underbrace{(T, 1/1, 1), T) \dots (T, (1/1, 1 - p), I)}_s$. Neste caso N transita para N com probabilidade $1 - p$.

(B) $(T, (\varepsilon_k / \varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_t / \varepsilon_t, 1), T)(T, (1/0, p), I)$
 $\underbrace{(I, (0/1, p), I) \dots (I, (0/1, p), I)}_s$. Neste caso N transita para $N + 1$ com probabilidade p^{s+1} .

(C) $(T, (\varepsilon_k / \varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_t / \varepsilon_t, 1), T)(T, (0/0, 1), T)$
 $\underbrace{(T, (1/1, 1), T) \dots (T, (1/1, 1), T)}_{s-m-1}(T, (1/1, 1 - p), I)$
 $\underbrace{(I, (1/0, p), I) \dots (I, (1/0, p), I)}_m$. Neste caso N transita para $N - 2^m + 1 =$
 $\varepsilon_k \dots \varepsilon_t 0 \underbrace{1 \dots 1}_{s-m} \underbrace{0 \dots 0}_m$ com probabilidade $p^m(1 - p)$.

□

Usando a proposição 2.2.1, construímos o grafo de transição,

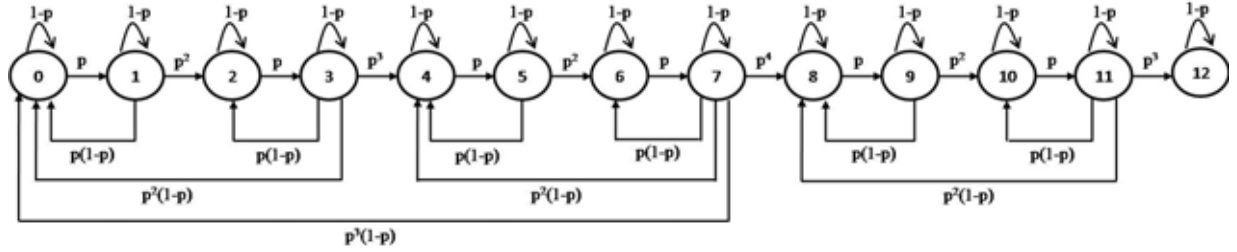


Figura 9: Grafo de transição de máquina de somar em base 2

Observação 2.2.1 Podemos notar que o grafo de transição é auto-semelhante pois ele é formado por blocos que se repetem de maneira periódica.

O operador de transição S_p associado ao grafo de transição é

$$S_p = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ p(1-p) & 1-p & p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ p^2(1-p) & 0 & p(1-p) & 1-p & p^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p(1-p) & 1-p & p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ p^3(1-p) & 0 & 0 & 0 & p^2(1-p) & 0 & p(1-p) & 1-p & p^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p(1-p) & 1-p & p^2 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^2(1-p) & 0 & p(1-p) & 1-p & p^2 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p(1-p) & 1-p \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Observações 2.2.1

1) Podemos verificar que a soma dos coeficientes de cada linha (resp. de cada coluna) de S é igual a 1. Logo, a matriz de transição, S , é duplamente estocástica.

2) Observamos que existe uma matriz $A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p(1-p) & 1-p \end{pmatrix}$ que se repete infinitamente na região diagonal.

- 3) Como S é estocástica, é fácil verificar que $S(l^\infty) \subset l^\infty$. De fato, se $v = (v_i) \in l^\infty$ então $|Sv|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |Sv_i| = \sup_{i \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=0}^{\infty} S_{ij}v_j \right| \leq |v|_\infty$.
- 4) É fácil verificar que $\|S\| = 1$, logo pela proposição 1.1.1, $\sigma(S) \subset \overline{D(0,1)}$.
- 5) Se $p = 1$, então a matriz S_p é definida por

$$\begin{cases} S_{ij} = 1, & j = i + 1 \\ S_{ij} = 0, & j \neq i + 1 \end{cases}$$

Temos $S \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$. Nesse caso a matriz S_p corresponde ao operador shift. Se $p \neq 1$ o operador S_p pode ser visto como uma perturbação estocástica do operador shift.

Proposição 2.2.2 Para $0 < p < 1$, a cadeia de Markov é irredutível, periódica de período 2 e também recorrente nula.

Demonstração: É fácil verificar que a cadeia é irredutível, periódica de período 2. Seja u uma probabilidade invariante de S_p , então é fácil verificar que $u = (1, 1, \dots)$, que não é uma probabilidade, logo pelo Teorema 1.2.2 o processo não é positivo recorrente.

Por outro lado, seja $u \in l^\infty(\mathbb{N})$ tal que $Ru = u$, $|u_n| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e suponha que $p \neq 0$. É fácil verificar que $u = {}^t(u_0, \frac{u_0}{p}, \frac{u_0}{p}, \dots, \frac{u_0}{p^n}, \frac{u_0}{p^n}, \dots)$. Logo, $|u| \leq 1$ se e somente se $u_0 = 0$ e pelo Teorema 1.2.3, temos que a classe de Markov é nula recorrente. $\square$

O resultado principal de Killen e Taylor [34] é o seguinte:

Teorema 2.2.1 O espectro de S em $l^\infty(\mathbb{N})$ é igual ao conjunto de Julia cheio da função quadrática $f(z) = \left(\frac{z - (1-p)}{p} \right)^2$, isto é

$$\sigma_p = \{z \in \mathbb{C}, (f^n(z))_{n \geq 0} \text{ é limitado}\}$$

onde $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ vezes}}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Observação 2.2.2 Considere o operador de transição $\tilde{S} = (S - (1-p)I)/p$. $\tilde{S}$ tem período 2 e o operador $\tilde{S}^2$ se decompõe em dois grafos de transição, um deles age sobre os números naturais pares e o outro sobre os números naturais ímpares sendo cada grafo isomorfo ao grafo de transição de S .

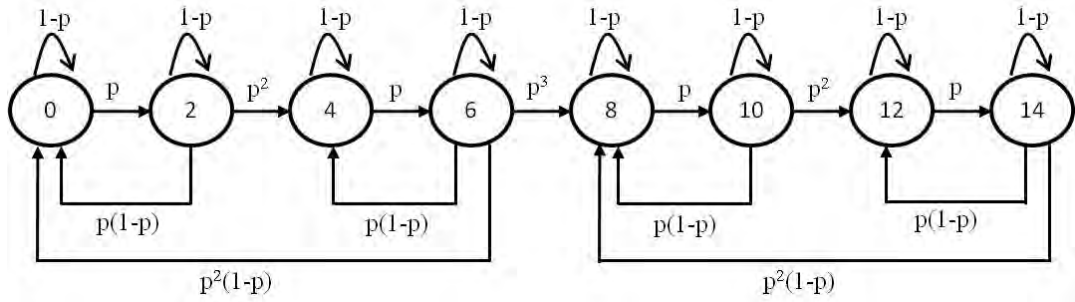


Figura 10: Grafo de transição da máquina de somar estocástica sobre os naturais pares

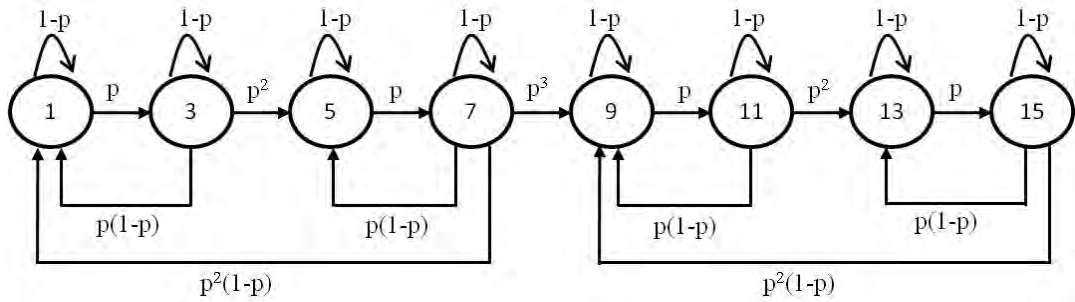


Figura 11: Grafo de transição da máquina de somar estocástica sobre os naturais ímpares

Para provar o teorema 2.2.1 precisamos dos seguintes resultados.

Proposição 2.2.3 Sejam E e O duas aplicações em $l^\infty(\mathbb{N})$ definidas por $E(v) = (v_0, 0, v_1, 0, v_2, \dots)$ e $O(v) = (0, v_0, 0, v_1, 0, v_2, \dots)$, para todo $v = (v_i)_{i \geq 0} \in l^\infty(\mathbb{N})$. Então as seguintes propriedades são válidas

$$1) \tilde{S}Ov = Ev \text{ e } \tilde{S}Ev = OSv.$$

$$2) \tilde{S}^2 = S \oplus S, \text{ i.e. para todo } v = (v_i)_{i \geq 0} \in l^\infty, \text{ temos}$$

$$\tilde{S}^2(v) = ES(v_0, v_2, \dots, v_{2n}, \dots) + OS(v_1, v_3, \dots, v_{2n+1}, \dots).$$

$$3) \sigma(\tilde{S}^2) = \sigma(S) = f(\sigma(S)).$$

Demonstração:

$$1) \text{ Seja } w = (w_i)_{i \geq 0} \in l^\infty(\mathbb{N}), \text{ logo } (\tilde{S}(Ow))_i = \sum_{j=0}^{+\infty} \tilde{S}_{ij}w_j.$$

Quando $i = 2k$, pela Proposição 2.2.1, temos $S_{i,i+1} = p$, logo $\tilde{S}_{i,i+1} = 1$ e $\tilde{S}_{i,j} = 0$ para todo $0 \leq j \neq i+1$. Logo, $(\tilde{S}(Ov))_i = v_k$. Quando i é ímpar, então $\tilde{S}_{i,2j+1} = 0$, $\forall j$, logo $(\tilde{S}(Ov))_i = 0$, para todo $j \geq 0, j \neq i, j$ ímpar. Logo $\tilde{S}Ov = Ev$.

Por outro lado, como $(Ev)_n = 0$ para todo n ímpar, então para todo $i \geq 0$,

$$(\tilde{S}(Ev))_i = \sum_{j=0}^{+\infty} \tilde{S}_{i,2j}(Ev)_{2j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \tilde{S}_{i,2j}v_j.$$

Se i é par, então $\tilde{S}_{i,2j} = 0$. Logo $(\tilde{S}(Ev))_i = 0$.

Se $i = 2k+1$ é ímpar, então $\tilde{S}_{2k+1,2j} = S_{k,j}$ (pois $S_{2k+1,2j} = pS_{k,j}$), logo

$$(\tilde{S}(Ev))_i = \sum_{j=0}^{+\infty} \tilde{S}_{2k+1,2j}v_j = \sum_{j=0}^{+\infty} \tilde{S}_{k,j}v_j = (Sv)_k.$$

Logo $\tilde{S}Ev = OSv$.

$$2) \tilde{S}^2(v) = \tilde{S}^2(v_0, 0, v_2, 0, v_4, \dots) + \tilde{S}^2(0, v_1, 0, v_3, \dots) = \tilde{S}^2E(v_0, v_2, \dots, v_{2n}, \dots) + \tilde{S}^2O(v_1, v_3, \dots, v_{2n+1}, \dots).$$

Por outro lado, pelo item 1 temos,

$$\tilde{S}^2E(v_0, v_2, \dots, v_{2n}, \dots) = \tilde{S}OS(v_0, v_2, \dots, v_{2n}, \dots) = ES(v_0, v_2, \dots, v_{2n}, \dots).$$

Temos também pelo item 1, $\tilde{S}O(v_1, v_3, \dots, v_{2n+1}, \dots) = E(v_1, v_3, \dots, v_{2n+1}, \dots)$.

Logo, $\tilde{S}^2O(v_1, v_3, \dots, v_{2n+1}, \dots) = \tilde{S}E(v_1, v_3, \dots, v_{2n+1}, \dots) = OS(v_1, v_3, \dots, v_{2n+1}, \dots)$.

3) Seja $\lambda \in \mathbb{C}$, logo pelo item 2 da Proposição 2.2.3, para todo $v = (v_i)_{i \geq 0}$ temos

$$(\tilde{S}^2 - \lambda I)(v) = E(S - \lambda I)(v_0, v_2, \dots, v_{2n}, \dots) + O(S - \lambda I)(v_1, v_3, \dots, v_{2n+1}, \dots) \quad (2.1)$$

Afirmamos que $\tilde{S}^2 - \lambda I$ é bijetivo se e somente se $S - \lambda I$ também é.

Com efeito, se $S - \lambda I$ não é injetor, então existe $v = (v_i)_{i \geq 0} \neq 0$ em $l^\infty(\mathbb{N})$ tal que $(S - \lambda I)(v) = 0$. Logo por (2.1), deduzimos que se $w = (v_0, v_0, \dots, v_n, v_n, \dots)$, então $(\tilde{S}^2 - \lambda I)(w) = 0$. Assim, $\tilde{S}^2 - \lambda I$ é injetor.

Suponha agora que $\tilde{S}^2 - \lambda I$ não é injetor, então existe $v = (v_i)_{i \geq 0} \neq 0$ tal que $(\tilde{S}^2 - \lambda I)(v) = 0$. Logo, por (2.1), temos $E(S - \lambda I)((v_0, v_2, \dots, v_{2n}, \dots)) = O(S - \lambda I)((v_1, v_3, \dots, v_{2n+1}, \dots)) = 0$. Logo $(S - \lambda I)(v_0, v_2, \dots, v_{2n}, \dots) = (S - \lambda I)(v_1, v_3, \dots, v_{2n+1}, \dots) = 0$. Assim, $S - \lambda I$ não é injetor.

Suponha agora que $(S - \lambda I)$ é sobrejetor. Seja $w = (w_i)_{i \geq 0} \in l^\infty(\mathbb{N})$, logo existe $v = (v_i)_{i \geq 0}, v' = (v'_i)_{i \geq 0}$ tal que $(S - \lambda I)v = (w_0, w_2, \dots, w_{2n}, \dots)$ e $(S - \lambda I)v' = (w_1, w_3, \dots, w_{2n+1}, \dots)$ e $v \neq 0$ ou $v' \neq 0$. Seja $v'' = (v_0, v'_0, \dots, v_n, v'_n, \dots)$, logo

$$(\tilde{S}^2 - \lambda I)(v'') = E(S - \lambda I)v + O(S - \lambda I)v' = (w_0, w_1, \dots) = w.$$

Assim $\tilde{S}^2 - \lambda I$ é sobrejetor.

Suponha agora que $\tilde{S}^2 - \lambda I$ é sobrejetor. Seja $w = (w_i)_{i \geq 0} \in l^\infty(\mathbb{N})$ e considere $w' = (w_0, w_0, w_1, w_1, \dots, w_n, w_n, \dots)$, logo existe $v = (v_i)_{i \geq 0} \in l^\infty(\mathbb{N})$ tal que $(\tilde{S}^2 - \lambda I)(v) = w'$.

Por (2.1) deduzimos que:

$$(S - \lambda I)(v_0, v_2, \dots, v_{2n}, \dots) = (S - \lambda I)(v_1, v_3, \dots, v_{2n+1}, \dots) = (w_0, w_1, \dots, w_n, \dots) = w.$$

Logo $S - \lambda I$ é sobrejetor. □

Proposição 2.2.4 *O espectro de S agindo em $l^\infty(\mathbb{N})$ está contido no conjunto de Julia cheio da função f .*

Demonstração: Pelo item 3) da proposição 2.2.3, temos $f(\sigma(S)) = \sigma(S)$. Como $\tilde{S}^2 = (\frac{S-(1-p)I}{p})^2 = f(S)$ então $\sigma(\tilde{S}^2) = f(\sigma(S))$. Seja $z \in \sigma(S)$, então $f(z) \in \sigma(S)$, portanto $f^n(z) \in \sigma(S)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\sigma(S)$ é compacto, então $z \in J_c(f)$. $\square$

Proposição 2.2.5 *O espectro pontual de S , $\sigma_{pt}(S)$, agindo em $l^\infty(\mathbb{N})$ é igual ao conjunto de Julia cheio da função f_p .*

Demonstração: Seja λ um autovalor de S associado ao autovetor $v = (v_i)_{i \geq 0} \in l^\infty(\mathbb{N})$. Como a probabilidade de transição de qualquer inteiro não negativo i para algum inteiro $i+k, k \geq 2$ é $p_{i,i+k} = 0$ (pela proposição 2.2.1), o operador S satisfaz $S_{i,i+k} = 0$ para todo $i, k \in \mathbb{N}$ com $k \geq 2$. Logo, para todo inteiro $k \geq 1$, temos

$$\sum_{i=0}^k p_{k-1,i} v_i = \lambda v_{k-1} \quad (2.2)$$

Logo, podemos provar por indução sobre k que para todo inteiro $k \geq 1$, existe um número complexo $q_k = q_k(p, \lambda)$ tal que

$$v_k = q_k v_0 \quad (2.3)$$

Usando a proposição 2.2.1, podemos provar que para todo inteiro $n \geq 0$,

$$v_{2^n} = \frac{-1}{p^{n+1}} ((1-p-\lambda)v_{2^n-1} + \sum_{i=1}^n p^i (1-p)v_{2^n-2^i}) \quad (2.4)$$

Por outro lado, temos

$$v_{2^n} = \frac{1}{p} A - \left(\frac{1}{p} - 1 \right),$$

$$\text{onde } A = \frac{1}{p^n} ((1-p-\lambda)v_{2^n-1+(2^{n-1}-1)} + \sum_{i=1}^{n-1} p^i (1-p)v_{2^n-1+(2^{n-1}-2^i)}).$$

Pela autosimilaridade de S , podemos provar que a probabilidade de transição de i para $j, 2^{n-1} \leq i, j \leq 2^n$ é igual à probabilidade de $i - 2^{n-1}$ para $j - 2^{n-1}$, de modo que

$$v_{2^n} = \frac{1}{p} q_{2^{n-1}} v_{2^{n-1}} - \left(\frac{1}{p} - 1 \right) v_0. \quad (2.5)$$

Usando (2.3) e (2.5), temos

$$q_{2^n} = \frac{1}{p} q_{2^{n-1}}^2 - \left(\frac{1}{p} - 1 \right), \forall n \geq 1, \quad (2.6)$$

onde

$$q_{2^0} = q_1 = -\frac{1-p-\lambda}{p}.$$

Então, q_{2^n} tem sua fórmula de recorrência de acordo com a função quadrática

$$g(z) = \frac{z^2}{p} - \frac{1-p}{p}.$$

A aplicação g é conjugada a f mediante a aplicação

$$h(z) = \frac{z}{p} - \frac{1-p}{p},$$

isto é

$$h^{-1} \circ g \circ h(z) = f(z), \forall z \in \mathbb{C}.$$

Temos $h^{-1}(q_{2^0}) = \lambda$. Segue que a sequência q_{2^n} é limitada se e somente se λ pertence ao conjunto de Julia cheio de f .

Por outro lado, $\lambda \in \sigma_{pt}(S)$ se e somente se $(q_n)_{n \geq 0}$ é limitado. Logo, para provar a proposição basta mostrar que se a sequência $(q_{2^n})_{n \geq 0}$ é limitada então a sequência $(q_n)_{n \geq 0}$ é também limitada.

De fato, suponha que $(q_{2^n})_{n \geq 0}$ é limitada. Logo, para todo $n \geq 0, |q_{2^n}| \leq 1$, pois se $|q_{2^k}| > 1$ para algum inteiro não negativo k , usando a relação (2.6) e a desigualdade triangular, temos $|q_{2^k}| - 1 > \frac{1}{p}(|q_{2^k}| - 1)$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$|q_{2^{k+n}}| - 1 > \left(\frac{1}{p} \right)^n (|q_{2^k}| - 1).$$

Logo, $\lim |q_{2^{k+n}}| = +\infty$, que é absurdo.

Assim, para $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, existem k inteiros não negativos $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ tais que $n = 2^{n_1} + \dots + 2^{n_k}$. É possível provar (veja [16]) que

$$q_n = q_{2^{n_1}} \dots q_{2^{n_k}}.$$

Portanto $|q_n| \leq 1$. Logo $(q_n)_{n \geq 0}$ é limitada.

Das proposições 2.2.4 e 2.2.5 deduzimos que $\sigma(S) = \sigma_{pt}(S) = J_c(f)$. $\square$

Outro resultados relacionados com o operador de transição S :

Teorema 2.2.2 (Ver [56]) *O operador S_p está bem definido nos espaços de Banach clássicos, $C_0(\mathbb{N})$ e $l^q(\mathbb{N})$, $q \geq 1$. Em particular, o espectro do operador S_p agindo em $C_0(\mathbb{N})$ (resp. $l^q(\mathbb{N})$, $q > 1$) é igual ao espectro contínuo de S_p , igual ao conjunto de Julia cheio de f , $J_c(f)$. Em $l^1(\mathbb{N})$, o espectro pontual de S_p é vazio, o espectro residual contém um subconjunto enumerável e denso em $\partial J(f)$. O espectro contínuo é igual a $J_c(f) \setminus \sigma_r(S)$.*

2.2.3 Novos Resultados

Nesta seção apresentamos alguns resultados novos obtidos a partir do operador de transição da máquina de somar estocástica em base 2. Vamos considerar n um inteiro natural, e denotamos por S_n a matriz $n \times n$ onde

$$(S_n)_{i,j} = S_{ij}, \quad \forall 0 \leq i, j \leq n$$

S_n é a matriz truncamento de S . $\sigma(S_n)$ denota o conjunto dos autovalores de S_n . O nosso principal resultado é o seguinte:

Teorema 2.2.3 [56] *Seja $E = (\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma(S_{2^k}))'$. Então E satisfaz as seguintes propriedades:*

- i. *Se $0 < p < 1$, então $\partial J_c(f) \subset E$.*
- ii. *Se $0 < p < 1/2$, então $E = \partial J_c(f)$.*
- iii. *Se $1/2 \leq p < 1$, então $E \subset J_c(f)$.*

Para provar o teorema 2.2.3 precisamos de vários resultados ([56]).

Proposição 2.2.6 *Seja $k \in \mathbb{N}$, então $\sigma(S_{2^k}) = \{\lambda \in \mathbb{C}, q_{2^k}(\lambda) = 0\}$, onde $(q_n)_{n \geq 1}$ é a sequência definida na proposição 2.2.5.*

Demonstração: Seja $\lambda \in \sigma(S_{2^k})$, então existe $v = (v_i)_{0 \leq i \leq 2^k-1} \in \mathbb{C}^{2^k} \setminus \{0\}$ tal que $(S_{2^k} - \lambda I)v = 0$. Pela proposição 2.2.5 temos que $v_i = q_i v_0, \forall 1 \leq i \leq 2^k - 1$ e além do mais

$$\sum_{i=0}^{2^k-2} p_{2^k-1,i} v_i + (1 - p - \lambda) v_{2^k-1} = 0. \quad (2.7)$$

Por outro lado, considere o sistema

$$\begin{cases} (1 - p - \lambda)w_0 + pw_1 = 0 \\ p(1 - p)w_0 + (1 - p - \lambda)w_1 + p^2w_2 = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{2^k-2} p_{2^k-1,i} w_i + (1 - p - \lambda)w_{2^k-1} + p_{2^k-1,2^k} w_{2^k} = 0 \end{cases}$$

onde $w_0 = v_0$.

Assim, temos, $w_i = v_i = q_i v_0, \forall 1 \leq i < 2^{k-1}$, e $w_{2^k} = q_{2^k} w_0 = q_{2^k} v_0$.

Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{2^k-2} p_{2^k-1,i} v_i - (1 - p - \lambda) v_{2^k-1} = \sum_{i=0}^{2^k-2} p_{2^k-1,i} w_i - (1 - p - \lambda) w_{2^k-1} \\ &= -p_{2^k-1,2^k} w_{2^k} = -p_{2^k-1,2^k} q_{2^k} v_0 = p^{k+1} q_{2^k} v_0. \end{aligned}$$

Logo, $q_{2^k} = 0$. Portanto $\sigma(S_{2^k}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, q_{2^k}(\lambda) = 0\}$.

Por outro lado, $q_{2^k}(\lambda) = 0$ implica que (2.7) vale. Portanto, obtemos o resultado. $\square$

Lema 2.2.1 $E = \{z \in \mathbb{C}, \exists (w_{n_i})_{i \geq 0} \subset \mathbb{C}, w_{n_i} \text{ distintos 2 à 2 tal que } \lim_{i \rightarrow \infty} w_{n_i} = z \text{ e } f^{n_i}(w_{n_i}) = 0\}$.

Demonstração: Seja $\lambda \in \mathbb{C}$, então $f(\lambda) = q_1^2(\lambda)$. Logo

$$f^{n+1}(\lambda) = q_{2^n}^2(\lambda), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.8)$$

Seja $z \in E$, então existe uma sequência $(w_{n_i})_{i \geq 0} \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} \sigma(S_{2^k})$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} w_{n_i} = z$. Para todo $i \in \mathbb{N}$ existe $n_i - 1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$q_{2^{n_i-1}}(w_{n_i}) = 0.$$

Logo, por (2.8) temos $f^{n_i}(w_{n_i}) = 0$.

A outra inclusão é clara.

□

Proposição 2.2.7 *Os seguintes resultados são válidos:*

- i. $1 \in \partial J_c(f)$.
- ii. $1 \in E$.
- iii. $f(E) \subset E$.
- iv. $f^{-1}(E) \subset E$.

Demonstração:

- i. Temos $f(1) = \left(\frac{1 - (1-p)}{p} \right)^2 = 1$ e $|f'(1)| = \left| \frac{2}{p}(1 - (1-p)) \right| = 2 > 1$. Logo 1 é ponto fixo repulsor de f e portanto $1 \in \partial J_c(f)$.
- ii. Consideremos a sequência w_n definida por

$$w_1 = 1 - p, w_2 = 1 - p + p\sqrt{1-p}, w_n = 1 - p + p\sqrt{w_{n-1}}, \forall n > 2.$$

Afirmção: $(w_n)_{n \geq 0}$ é convergente e $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 1$. Além do mais, $f^n(w_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

De fato: $(w_n)_{n \geq 0}$ é claramente crescente e $w_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Seja $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim w_n = L$. Temos $L = 1 - p + p\sqrt{L}$, portanto $f(L) = L$. Os pontos fixos de f são 1 e $(1-p)^2$. Mas $(1-p)^2 < 1 - p \leq w_1$. Logo, $L = 1$.

Por outro lado, temos $f(w_1) = \left(\frac{1-p-(1-p)}{p} \right)^2 = 0$. Suponha que $f^{n-1}(w_{n-1}) = 0$. Temos, $f(w_n) = w_{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e pelo Lema 2.2.1, deduzimos que $1 \in E$.

iii. Seja $z \in E$, logo, existe uma sequência $(w_{n_i})_{n \geq 0}$ que converge para z e tal que $f^{n_i}(w_{n_i}) = 0$. Como f é contínua, $\lim_{i \rightarrow +\infty} f(w_{n_i}) = f(z)$.

Seja $w'_{n_i-1} = f(w_{n_i})$. Logo w'_{n_i-1} converge para $f(z)$ e além do mais, $f^{n_i-1}(w'_{n_i-1}) = f^{n_i}(w_{n_i}) = 0$. Portanto, $f(z) \in E$.

iv. Seja $z \in f^{-1}(E)$, então $f(z) \in E$ e portanto existe uma sequência w_{n_i} que converge para $f(z)$ e tal que $f^{n_i}(w_{n_i}) = 0$. Como

$$f(z) = \left(\frac{z - (1-p)}{p} \right)^2,$$

então, existem $x_{n_i}, y_{n_i} \in \mathbb{C}$ tais que $f^{-1}(w_{n_i}) = \{x_{n_i}, y_{n_i}\}$ e portanto

$$f(x_{n_i}) = w_{n_i} \longrightarrow f(z), \quad f(y_{n_i}) = w_{n_i} \longrightarrow f(z).$$

Temos,

$$\begin{aligned} f(x_{n_i}) - f(z) &= \left(\frac{x_{n_i} - (1-p)}{p} \right)^2 - \left(\frac{z - (1-p)}{p} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{x_{n_i} - z}{p} \right) \left(\frac{x_{n_i} + z - 2(1-p)}{p} \right) \end{aligned}$$

converge para zero quando i tende para $+\infty$.

Por outro lado,

$$x_{n_i} = \pm p\sqrt{w_{n_i}} + (1-p),$$

$$y_{n_i} = \mp p\sqrt{w_{n_i}} + (1-p).$$

Logo

$$x_{n_i} - y_{n_i} = \pm 2p\sqrt{w_{n_i}} \rightarrow \pm 2p\sqrt{f(z)} \quad (2.9)$$

Suponha que para toda subsequência (n'_i) de (n_i) temos ambos $(x_{n'_i})$ e $(y_{n'_i})$ não convergem para z . Então

$$\lim x_{n'_i} = -z + 2(1 - p) \text{ e } \lim y_{n'_i} = -z + 2(1 - p) \quad (2.10)$$

Logo,

$$\lim x_{n'_i} - y_{n'_i} = 0 \quad (2.11)$$

Caso 1. Se $f(z) \neq 0$, então por (2.9) e (2.11) deduzimos que existe uma subsequência $(n_i)_{i \geq 0}$ tal que $\lim x_{n_i} = z$ ou $\lim y_{n_i} = z$.

Suponha que $\lim_{i \rightarrow +\infty} x_{n_i} = z$, então $f^{n_i+1}(x_{n_i}) = f^{n_i}(w_{n_i}) = 0$. Logo $z \in E$ e portanto $f^{-1}(E) \subset E$.

Caso 2. Se $f(z) = 0$, então $z = 1 - p$. (2.12).

Como $f(z) \in E$, então existe uma subsequência w_{n_i} que converge para 0 e tal que $f^{n_i}(w_{n_i}) = 0$. Além do mais, $f^{-1}(w_{n_i}) = \{x_{n_i}, y_{n_i}\}$ e $f(x_{n_i}) = w_{n_i} \rightarrow 0$.

Por (2.10) e (2.12), temos $\lim x_{n_i} = z$ e $\lim y_{n_i} = z$.

Fazendo $x_{n_i} = x'_{n_i+1}$, temos $\lim x'_{n_i+1} = z$ e tal que $f^{n_i+1}(x'_{n_i+1}) = f^{n_i}(w_{n_i}) = 0$ e portanto $z \in E$.

Isso acaba a prova da proposição 2.2.7.

□

Lema 2.2.2 $0 \in J_c(f)$ se e somente se $p \geq 1/2$.

Demonstração: Suponha $1/2 \leq p < 1$, logo

$$0 < f(0) = \left(\frac{1}{p} - 1\right)^2 < 1,$$

$$0 \leq f^2(0) = \left(\frac{f(0) - (1-p)}{p}\right)^2 < 1,$$

Continuando com este processo, deduzimos que $0 \leq f^n(0) < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo a sequência $(f^n(0))_{n \geq 1}$ é limitada e portanto $0 \in J_c(f)$.

Suponha $p < 1/2$, então $f(0) > 1$. Como $\sigma(S) = J_c(f) \subset \overline{D(0, 1)}$, logo $f(0) \notin J_c(f)$ e portanto $0 \notin J_c(f)$. □

Proposição 2.2.8 *Se $p < 1/2$, então $E \cap J_c(f) \subset \partial J_c(f)$.*

Demonstração:

Afirmção: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sigma(S_{2^n}) \cap J_c(f) = \emptyset$.

De fato, suponha por absurdo que existem um inteiro $n \in \mathbb{N}$ e um número complexo $z \in J_c(f)$ tais que $f^n(z) = 0$. Como $0 \notin J_c(f)$, $f^{m+n}(z) = f^m(0)$ tende para infinito quando m cresce. Mas como $z \in J_c(f)$, $(f^{m+n}(z))_{m \geq 0}$ é limitado, absurdo. Logo, a afirmação é válida.

Portanto,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(S_{2^n}) \cap J_c(f) = \emptyset. \quad (2.13)$$

Para mostrar a proposição basta provar que não pode existir nenhum elemento z em $E \cap J_c(f)$ tal que $z \in \text{int}(J_c(f))$. De fato, se existir tal elemento z , então existe uma subsequência (w_{n_i}) de elementos distintos 2 a 2 de $\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(S_{2^n})$ tal que $\lim w_{n_i} = z$ e $f^{n_i}(w_{n_i}) = 0$.

Além do mais, como $z \in \text{int}(J_c(f))$, existe um $r > 0$ tal que $B(z, r) \subset J_c(f)$. Logo, como $\lim w_{n_i} = z$, existe um inteiro natural N tal que para todo $i \geq N$, $w_{n_i} \in B(z, r) \subset J_c(f)$. Mas isto contradiz (2.13). Portanto, temos o resultado. $\square$

Demonstração do Teorema 2.2.3

i. Pelos itens *ii.* e *iv.* da proposição 2.2.7, temos $f^{-n}\{1\} \subset E$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $\overline{\bigcup_{i=0}^{+\infty} f^{-i}\{1\}} \subset \overline{E} = E$, pois o conjunto dos pontos de acumulação é fechado. Como $1 \in \partial J_c(f)$, obtemos, pelo item *iii.* do teorema 1.3.1, que $\partial J_c(f) = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}\{1\}} \subset E$.

ii. Suponha que $p < 1/2$. Vamos mostrar que $E \subset \partial J_c(f)$.

Seja $z \in E$ e suponha que $z \notin \partial J_c(f)$. Logo, pela proposição 2.2.8, temos $z \notin J_c(f)$. Portanto $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f^n(z)| = +\infty$.

Por outro lado, como $z \in E$, existe uma sequência de números complexos $(w_{n_i})_{i \geq 0}$ que converge para z e tal que $f^{n_i}(w_{n_i}) = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Como $z \notin \partial J_c(f)$, então a sequência de funções $(f^n)_{n \geq 1}$ é normal em z . Logo, existe uma subsequência (n'_i) de (n_i) tal que $f^{n'_i}$ converge uniformemente para uma função g analítica limitada ou $g = +\infty$ em alguma bola $B(z, r)$ com centro $z \in \mathbb{C}$ e raio $r > 0$. Isto é,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall i \geq N, \forall x \in B(z, r), |f^{n'_i}(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Em particular, se $x = w_{n'_i}$, então $g(w_{n'_i})$ converge para 0. Mas, como $\lim w_{n_i} = z$ e g é contínua, então, $g(z) = 0$. Portanto g é limitada. Mas isto não pode ser verdade pois $\lim_{i \rightarrow \infty} |f^{n_i}(z)| = +\infty$. Logo $z \in \partial J_c(f)$ pois $|f^{n_i}(z)| \rightarrow \infty$.

- iii. Suponha que $p \geq 1/2$, então $0 \in J_c(f)$. Logo, para todo inteiro $n \in \mathbb{N}$, $\sigma(S_{2^n}) \subset J_c(f)$.

Logo,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(S_{2^n}) \subset J_c(f).$$

Portanto,

$$E = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(S_{2^n}) \right)' \subset (J_c(f))' = J_c(f).$$

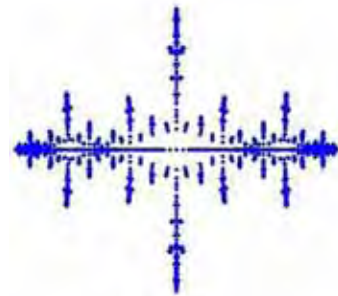
□

Observação 2.2.3 Para $p = 1$ temos $E = \{0\}$ e para $p = 0$, $E = \{1\}$.

Pergunta: Para $p \geq 1/2$ existe $z \in J_c(f) \setminus \partial J_c(f)$ tal que $z \in E$?

As imagens mostram que sim.

Imagens de E para $1/2 < p < 1$:



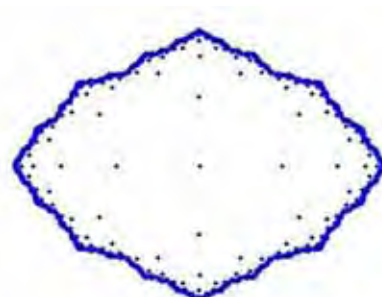
$p = 0.55$



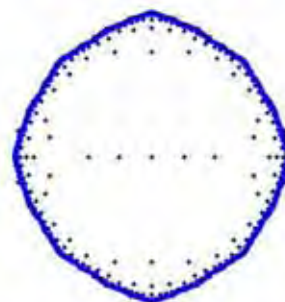
$p = 0.6$



$p = 0.7$



$p = 0.8$

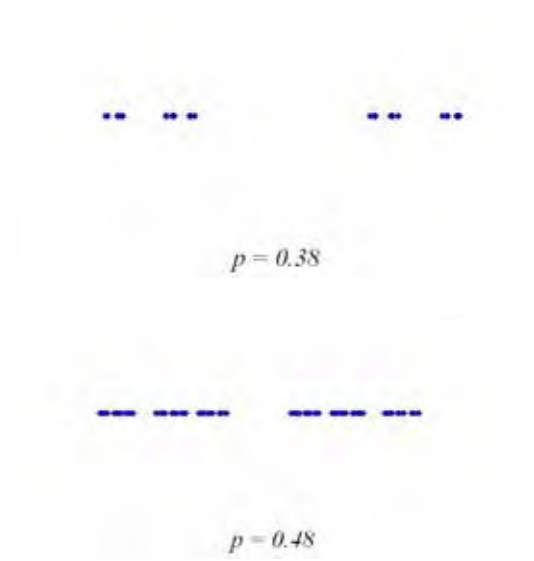


$p = 0.9$

Imagens de E para $0 < p \leq 1/2$:

.. ..

$p = 0.3$



Capítulo 3

Extensões da Máquina de somar em Base 2 para $\mathbb{Z}$

Nesse capítulo vamos definir duas extensões da máquina de somar em base 2 para o conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z}$. Com isso obtemos dois tipos de operadores em $l^\infty(\mathbb{Z})$.

3.1 Primeira Extensão

Vamos considerar o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ como sendo um subconjunto de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (conjunto das sequências com termos 0 e 1). Então, dado um número inteiro n é possível escrever ele, de forma única da seguinte maneira:

- Se $n \geq 0$, então $n = \dots 00\varepsilon_k \dots \varepsilon_0$, onde $\varepsilon_k \dots \varepsilon_0$ é a representação de $n \geq 0$ na base 2.
- Se $n < 0$, considere $-n = \varepsilon_k \dots \varepsilon_0$ (representação na base 2). Temos, $0 < n + 2^{k+1} < 2^{k+1}$, e considere $n + 2^{k+1} = a_k \dots a_0$ (representação na base 2).

Por outro lado, $-n + (n + 2^{k+1}) = 2^{k+1} = \varepsilon_k \dots \varepsilon_0 + a_k \dots a_0$. Logo,

$$n = \dots 111a_k \dots a_0,$$

pois

$$n + (-n) = \dots 11a_k \dots a_0 + \varepsilon_k \dots \varepsilon_0 = 1112 \underbrace{0 \dots 0}_{k\text{-vezes}} = 0.$$

Desta forma, se $n \in \mathbb{N}$, então sua representação é a mesma obtida pelo algoritmo “fominha”. Se $n \in \mathbb{Z}^-$, então sua representação tem uma sequência infinita de 1’s à esquerda. Para achar os dígitos de $N + 1$ na base 2, usamos o mesmo transdutor definido no capítulo 1.

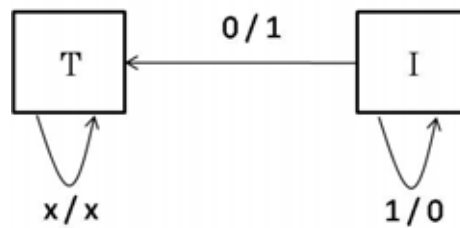


Figura 12: Transdutor da máquina de somar em base 2

Exemplo 3.1.1 Se $n = -1$ então sua representação é $-1 = \dots 111111_2$. De fato, ao somarmos 1 obtemos

$$\begin{array}{r} \dots \quad {}^11 \quad {}^11 \quad {}^11 \quad {}^11 \quad 1 \\ \phantom{{}^11} \phantom{{}^11} \phantom{{}^11} \phantom{{}^11} +1 \\ \hline \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

Exemplo 3.1.2 Se $n = -2$ então $-2 = \dots 1111110_2$. De fato, ao somarmos 1 obtemos

$$\begin{array}{r} \dots \quad {}^11 \quad {}^11 \quad {}^11 \quad {}^11 \quad 0 \\ \phantom{{}^11} \phantom{{}^11} \phantom{{}^11} \phantom{{}^11} +1 \\ \hline \dots \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

Logo $-2 + 1 = -1$.

Usando o transdutor probabilístico $\mathcal{T}_p$ da máquina de somar em base 2 definido no capítulo 1 podemos provar o seguinte resultado.

Proposição 3.1.1 *Seja $N \in \mathbb{Z}$, então os seguintes resultados são válidos.*

- i. N transita para N com probabilidade $1 - p$*
- ii. Se $N \geq 0$ e $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_1 0, k \geq 1$ (par), então N transita para $N + 1$ com probabilidade p*
- iii. Se $N \geq 0$ e $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_t 0 \underbrace{1 \dots 1}_s, s \geq 1, k \geq t \geq s + 1$, (ímpar) então N transita para $N + 1 = \varepsilon_k \dots \varepsilon_t 1 \underbrace{0 \dots 0}_s$ com probabilidade p^{s+1} e N transita para $N - 2^m + 1 = \varepsilon_k \dots \varepsilon_k 0 \underbrace{1 \dots 1}_{s-m} \underbrace{0 \dots 0}_m, 1 \leq m \leq s$ com probabilidade $p^m(1 - p)$.*
- iv. Se $N < 0$ e $N = \dots 11\varepsilon_k \dots \varepsilon_1 0, k \geq 2$, então N transita para $N + 1$ com probabilidade p*
- v. Se $N < 0$ e $N = \dots 11\varepsilon_k \dots \varepsilon_t 0 \underbrace{1 \dots 1}_s, s \geq 1, k \geq t \geq s + 1$, então N transita para $N + 1 = \dots 11\varepsilon_k \dots \varepsilon_t 1 \underbrace{0 \dots 0}_s$ com probabilidade p^{s+1} e N transita para $N - 2^m + 1 = \dots 11\varepsilon_k \dots \varepsilon_t 0 \underbrace{1 \dots 1}_{s-m} \underbrace{0 \dots 0}_m, 1 \leq m \leq s$ com probabilidade $p^m(1 - p)$.*

Demonstração: As partes (ii) e (iii) já foram mostradas na proposição 2.2.1 do capítulo 2.

- (iv) Se $N = \dots 11\varepsilon_k \dots \varepsilon_1 0$, então N corresponde ao caminho (na máquina de somar em base 2)

$$\dots (T, 1/1, T)(T, \varepsilon_k/\varepsilon_k, T) \dots (T, \varepsilon_1/\varepsilon_1, T)(T, 0/1, I).$$

Na máquina de somar estocástica N corresponde aos seguintes caminhos:

$$(A) \dots (T, (1/1, 1), T)(T, (\varepsilon_k/\varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_1/\varepsilon_1, 1), T)(T, (0/0, 1 - p), I).$$

Neste caso N transita para N com probabilidade $1 - p$.

$$(B) \dots (T, (1/1, 1), T)(T, (\varepsilon_k/\varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_1/\varepsilon_1, 1), T)(T, (0/1, p), I). \text{ Logo}$$

N transita para $N + 1$ com probabilidade p .

- (v) Se $N = \dots 11\varepsilon_k \dots \varepsilon_t \underbrace{01\dots 1}_s$, então N corresponde ao caminho
- $$\dots (T, 1/1, T)(T, \varepsilon_k/\varepsilon_k, T) \dots (T, \varepsilon_t/\varepsilon_t, T)(T, 0/1, I) \underbrace{(I, 1/0, I) \dots (I, 1/0, I)}_s.$$

Na máquina de somar estocástica em base 2, N corresponde aos seguintes caminhos.

- (A) $\dots (T, (1/1, 1), T)(T, (\varepsilon_k/\varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_t/\varepsilon_t, 1), T)(T, (0/0, 1), T)$
 $\underbrace{(T, (1/1, 1), T) \dots (T, (1/1, 1-p), I)}_s$. Neste caso N transita para N com
 probabilidade $1-p$.
- (B) $\dots (T, (1/1, 1), T)(T, (\varepsilon_k/\varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_t/\varepsilon_t, 1), T)(T, (0/1, p), I)$
 $\underbrace{(I, (1/0, p), I) \dots (I, (1/0, p), I)}_s$. Neste caso N transita para $N+1$ com
 probabilidade p^{s+1} .
- (C) $\dots (T, (1/1, 1), T)(T, (\varepsilon_k/\varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_t/\varepsilon_t, 1), T)(T, (0/0, 1), T)$
 $\underbrace{(T, (1/1, 1), T) \dots (T, (1/1, 1), T)}_{s-m-1}(T, (1/1, 1-p), I)$
 $\underbrace{(I, (1/0, p), I) \dots (I, (1/0, p), I)}_{m-1}$. Neste caso N transita para $N-2^m+1 =$
 $\dots 11\varepsilon_k \dots \varepsilon_t \underbrace{01\dots 1}_{s-m} \underbrace{0\dots 0}_m$ com probabilidade $p^m(1-p)$.

□

Usando a proposição 3.1.1, construímos o gráfico de transição desta primeira extensão.

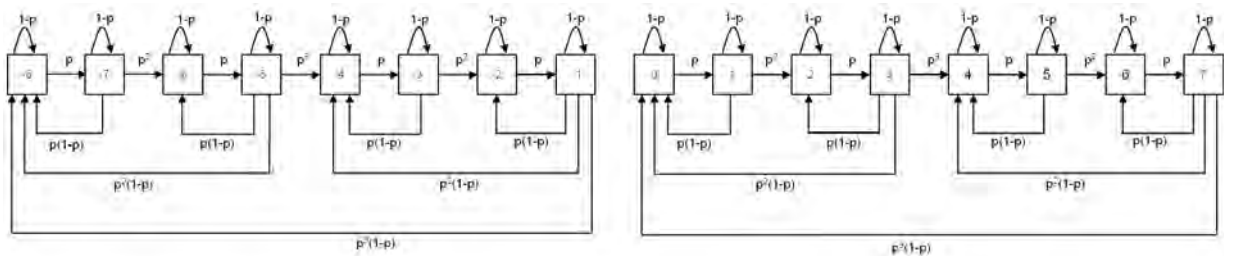


Figura 13: Gráfico de transição da primeira extensão da máquina de somar em base 2

Observação 3.1.1 *O grafo de transição desta primeira extensão é formado por dois grafos transição em base 2 para $\mathbb{Z}^+$ e $\mathbb{Z}^-$.*

O operador de transição $\bar{S}_1$ associado ao gráfico de transição é:

$$\bar{S}_1 = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots 1-p & p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & p(1-p) & 1-p & p^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 & p(1-p) & 1-p & p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 & p^2(1-p) & 0 & p(1-p) & 1-p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p(1-p) & 1-p & p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^2(1-p) & 0 & p(1-p) & 1-p & p^3 & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p(1-p) & 1-p & p^2 \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Observação 3.1.2 *O operador de transição, $\bar{S}_1$ é duplamente estocástico.*

Teorema 3.1.1 *O espectro de $\bar{S}_1$ em $l^\infty(\mathbb{Z})$ é igual ao espectro pontual de $\bar{S}_1$ e é igual ao conjunto de Julia cheio de f .*

Demonstração: Seja λ um autovalor de $\bar{S}_1$ associado ao autovetor $v = (v_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$. É possível provar por indução sobre k que para todo inteiro k existe um número complexo $q_k = q_k(p, \lambda)$ tal que

$$v_k = q_k v_0, \quad \forall k \geq 0 \quad (3.1)$$

$$v_k = \frac{1}{q_{-k+1}} v_{-1}, \quad \forall k < 0 \quad (3.2)$$

Suponha $v_{-1} = 0$ e $v_0 \neq 0$. Seja $\lambda \in J_c(f)$, então $q_n(\lambda)$ é limitado e portanto $\lambda \in \sigma_{pt}(\bar{S}_1)$ pois $v = (\dots 0, 0, v_0, q_1 v_0, q_2 v_0, \dots)$. Logo, $J_c(f) \subset \sigma_{pt}(\bar{S}_1)$.

Por outro lado, temos $\bar{S}_1 = S \oplus {}^t S$, isto é $\bar{S}_1(\dots v_{-1}, v_0, v_1, \dots) = S(v_0, v_1, \dots) + {}^t S(\dots v_{-2}, v_{-1})$, onde ${}^t S(\dots, v_{-2}, v_{-1}) = (v_{-1}, v_{-2}, \dots)S$. Como $\sigma({}^t S) = \sigma(S)$, obtemos que $\sigma(\bar{S}_1) = \sigma(S) = J_c(f)$. $\square$

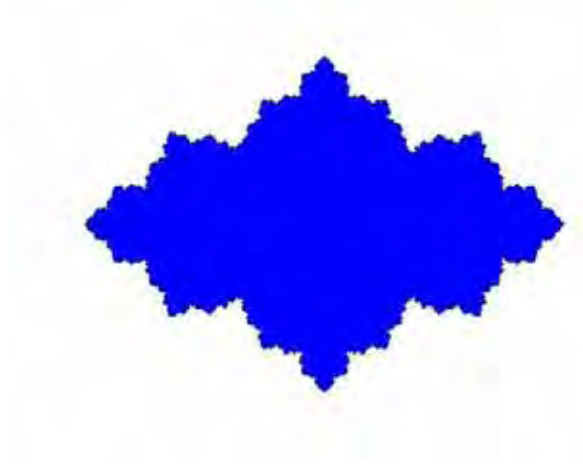


Fig. 14 O conjunto de Julia cheio de f para $p = 0.7$

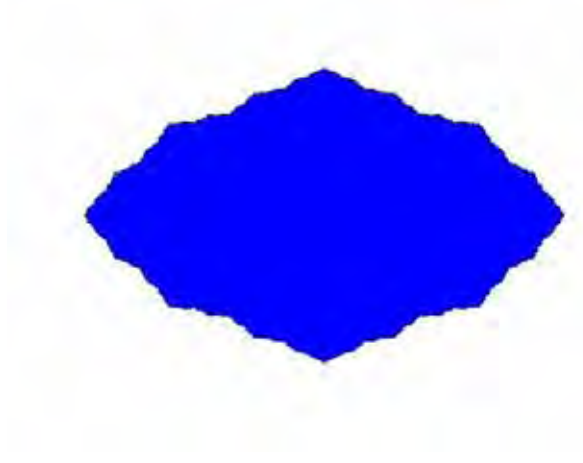


Fig. 15 O conjunto de Julia cheio de f para $p = 0.8$

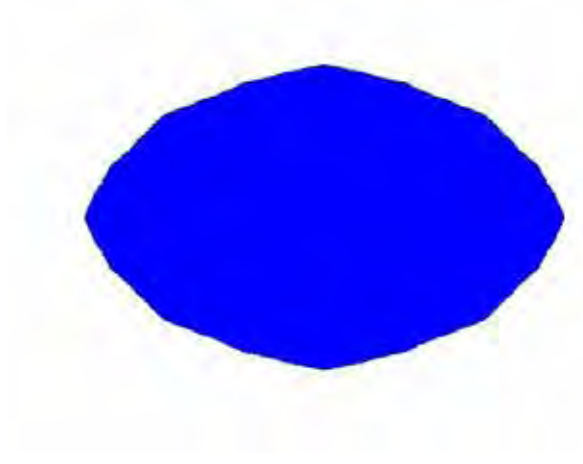


Fig. 16 O conjunto de Julia cheio de f para $p = 0.9$

3.2 Segunda Extensão

Dado um número negativo N escrito na base 2, de forma única, como

$$N = - \sum_{i=0}^{k(N)} \varepsilon_i(N) 2^i \text{ onde } (\varepsilon_i)_{i \geq 0} \in \{0, 1\},$$

vamos definir um transdutor finito (ver Figura 17) para achar os dígitos de $N + 1$ quando somamos 1 na base 2. Este transdutor é formado por dois estados, um estado inicial I e um estado terminal T . O estado inicial está conectado a si mesmo por uma flecha etiquetada por $(0/1)$. Existe também uma flecha saindo do estado inicial para o estado terminal. Esta flecha está etiquetada por $(1/0)$. O estado terminal está conectado a si mesmo por uma flecha, etiquetada por (x/x) .

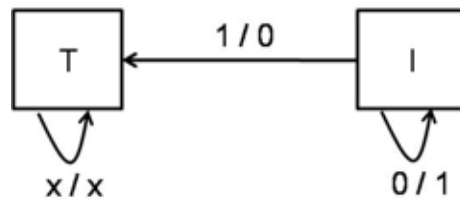


Figura 17: Transdutor da máquina de somar em base 2 para $\mathbb{Z}^-$

Observação 3.2.1 *Esse autômato é o dual do autômato dado pela figura 12 no sentido que as flechas conectando os estados estão etiquetadas de forma inversa, $(1/0)$ por $(0/1)$ e vice-versa.*

Exemplo 3.2.1 *Se $N = -11 = -1011_2$, então $N + 1 = -11 + 1 = -(11 - 1)$ e N corresponde ao caminho*

$$(T, 1/1, T)(T, 0/0, T)(T, 1/1, T)(T, 1/0, I).$$

Logo $N + 1 = -(11 - 1) = -10 = 1010_2$.

Se $N = -12 = -1100_2$, então $N + 1 = -12 + 1 = -(12 - 1)$ e N corresponde ao caminho

$$(T, 1/1, T)(T, 1/0, I)(I, 0/1, I)(I, 0/1, I).$$

Logo $N + 1 = -(12 - 1) = -11 = 1011_2$.

3.3 Máquina de Somar Estocástica

Construímos o transdutor “probabilístico” $\mathcal{T}_p^-$, $0 < p < 1$, da seguinte forma:

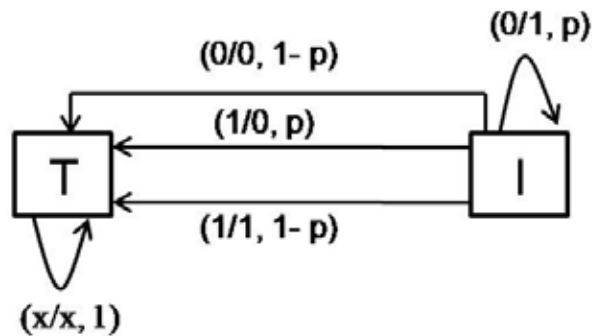


Fig. 18: Transdutor da máquina de somar estocástica para $\mathbb{Z}^-$

Exemplo 3.3.1 Se $N = -11 = -1011_2$, então no transdutor da máquina de somar, N corresponde ao caminho

$$(T, 1/1, T)(T, 0/0, T)(T, 1/1, T)(T, 1/0, I)$$

Na máquina de somar estocástica temos os seguintes caminhos:

(a) $(T, (1/1, 1), T)(T, (0/0, 1), T)(T, (1/1, 1), T)(T, (1/1, 1-p), I)$. Neste caso $N = -11$ transita para -11 com probabilidade $1 - p$.

(b) $(T, (1/1, 1), T)(T, (0/0, 1), T)(T, (1/1, 1), T)(T, (1/0, p), I)$. Neste caso $N = -11$ transita para -10 com probabilidade p .

Exemplo 3.3.2 Se $N = -12 = -1100_2$, então no transdutor da máquina de somar, N corresponde ao caminho

$$(T, 1/1, T)(T, 1/0, I)(I, 0/1, I)(I, 0/1, I).$$

Na máquina de somar estocástica temos os seguintes caminhos:

- (a) $(T, (1/1, 1), T)(T, (1/1, 1), T)(T, (0/0, 1), T)(T, (0/0, 1-p), I)$. Neste caso $N = -12$ transita para -12 com probabilidade $1 - p$.
- (b) $(T, (1/1, 1), T)(T, (1/1, 1), T)(T, (0/0, 1-p), I)(I, (0/1, p), I)$. Neste caso $N = -12$ transita para $-1101 = -13$ com probabilidade $p(1 - p)$.
- (c) $(T, (1/1, 1), T)(T, (1/1, 1-p), I)(I, (0/1, p), I)(I, (0/1, p), I)$. Neste caso $N = -12$ transita para $1111 = -15$ com probabilidade $p^2(1 - p)$.
- (d) $(T, (1/1, 1), T)(T, (1/0, p), I)(I, (0/1, p), I)(I, (0/1, p), I)$. Neste caso $N = -12$ transita para $1011 = -11$ com probabilidade p^3 .

Usando os transdutores $\mathcal{T}_p$ e $\mathcal{T}_p^-$, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.3.1 *Seja $N \in \mathbb{Z}$, então os seguintes resultados são válidos.*

- i. N transita para N com probabilidade $1 - p$.
- ii. Se $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_1 0, k \geq 1$, então N transita para $N + 1$ com probabilidade p .
- iii. Se $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_t 0 \underbrace{1 \dots 1}_s, s \geq 1, k \geq t \geq s + 1$, então N transita para $N + 1 = \varepsilon_k \dots \varepsilon_t 1 \underbrace{0 \dots 0}_s$ com probabilidade p^{s+1} e N transita para $N - 2^m + 1 = \varepsilon_k \dots \varepsilon_t 0 \underbrace{1 \dots 1}_{s-m} \underbrace{0 \dots 0}_m, 1 \leq m \leq s$ com probabilidade $p^m(1 - p)$.
- iv. Se $N = -\varepsilon_k \dots \varepsilon_1 1, k \geq 2$, então N transita para $N + 1$ com probabilidade p .
- v. Se $N = -\varepsilon_k \dots \varepsilon_t 1 \underbrace{0 \dots 0}_s, s \geq 1, k \geq t \geq s + 1$, então N transita para $N + 1 = \varepsilon_k \dots \varepsilon_t 0 \underbrace{1 \dots 1}_s$ com probabilidade p^{s+1} e N transita para $N - 2^m + 1 = \varepsilon_k \dots \varepsilon_t 1 \underbrace{0 \dots 0}_{s-m} \underbrace{1 \dots 1}_m, 1 \leq m \leq s$ com probabilidade $p^m(1 - p)$.

Demonstração: As partes (ii) e (iii) já foram mostradas na proposição 2.2.1 do capítulo 2.

- (iv) Se $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_1 1$, então N corresponde ao caminho (na máquina de somar em base 2)

$$(T, \varepsilon_k / \varepsilon_k, T) \dots (T, \varepsilon_1 / \varepsilon_1, T)(T, 1/0, I).$$

Na máquina de somar estocástica, N corresponde aos seguintes caminhos:

- (A) $(T, (\varepsilon_k / \varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_1 / \varepsilon_1, 1), T)(T, (1/1, 1-p), I)$. Neste caso N transita para N com probabilidade $1 - p$.

- (B) $(T, (\varepsilon_k / \varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_2 / \varepsilon_2, 1), T)(T, (1/0, p), I)$. Logo N transita para $N + 1$ com probabilidade p .

- (v) Se $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_t \underbrace{10 \dots 0}_s$, então N corresponde ao caminho

$(T, \varepsilon_k / \varepsilon_k, T) \dots (T, \varepsilon_t / \varepsilon_t, T)(T, 1/0, I) \underbrace{(I, 0/1, I) \dots (I, 0/1, I)}_s$. Na máquina de somar estocástica em base 2, N corresponde aos seguintes caminhos:

- (A) $(T, (\varepsilon_k / \varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_t / \varepsilon_t, 1), T)(T, (1/1, 1), T)$
 $\underbrace{(T, (0/0, 1), T) \dots (T, (0/0, 1-p), I)}_s$. Neste caso N transita para N com probabilidade $1 - p$.

- (B) $(T, (\varepsilon_k / \varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_t / \varepsilon_t, 1), T)(T, (1/0, p), I)$
 $\underbrace{(I, (0/1, p), I) \dots (I, (0/1, p), I)}_s$. Neste caso N transita para $N + 1$ com probabilidade p^{s+1} .

- (C) $(T, (\varepsilon_k / \varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_t / \varepsilon_t, 1), T)(T, (1/1, 1), T)$
 $\underbrace{(T, (0/0, 1), T) \dots (T, (0/0, 1), T)}_{s-m-1}(T, (0/0, 1-p), I)$
 $\underbrace{(I, (0/1, p), I) \dots (I, (0/1, p), I)}_m$. Neste caso N transita para $N - 2^m + 1 =$
 $\varepsilon_k \dots \varepsilon_t \underbrace{00 \dots 0}_{s-m} \underbrace{1 \dots 1}_m$ com probabilidade $p^m(1 - p)$.

□

Usando a proposição 3.3.1, construímos o grafo de transição:

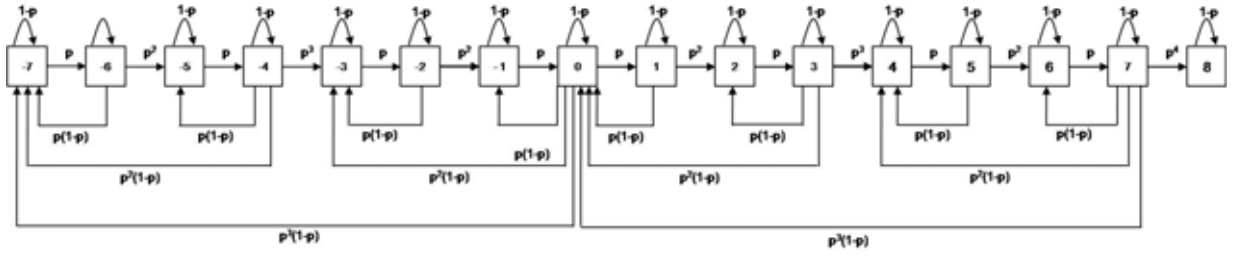


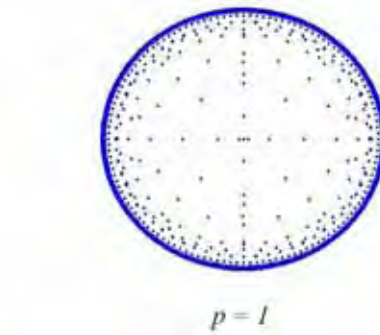
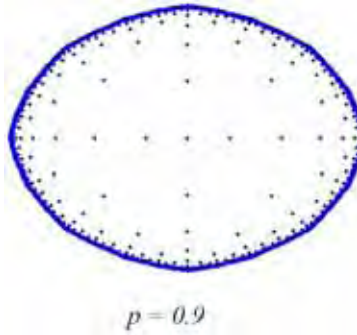
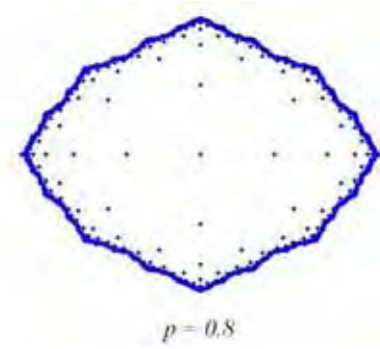
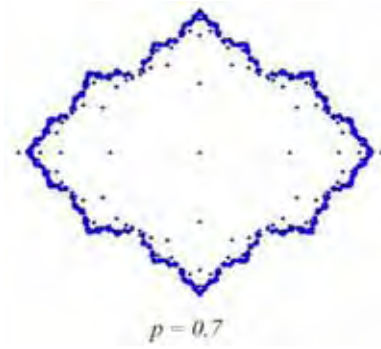
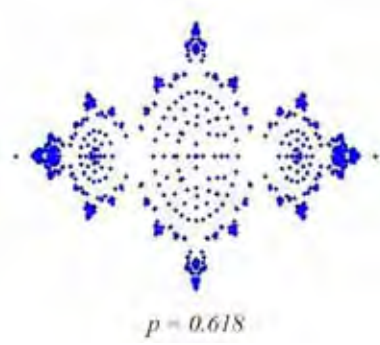
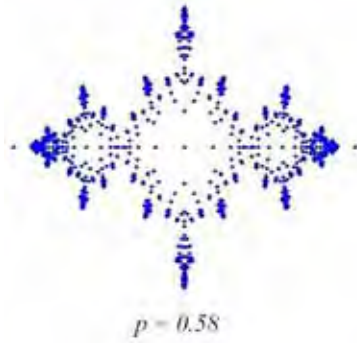
Fig. 19: Grafo de Transição da máquina de somar estocástica para $\mathbb{Z}$

O operador de transição $\overline{S}_2$ associado ao grafo de transição é:

$$\overline{S}_2 = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots p(1-p) & 1-p & p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots p^2(1-p) & 0 & p(1-p) & 1-p & p^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 & 0 & p(1-p) & 1-p & p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-p) & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots p^3(1-p) & 0 & 0 & 0 & p^2(1-p) & 0 & p(1-p) & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p(1-p) & 1-p & p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^2(1-p) & 0 & p(1-p) & 1-p & p^3 & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p(1-p) & 1-p & p^2 \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Observação 3.3.1 A soma dos coeficientes de cada uma das colunas do operador $\overline{S}_2$ é 1 e a soma dos coeficientes de cada uma das linhas (exceto a linha zero cuja soma é $1+p$) é 1.

Imagens do Conjunto $\sigma((\overline{S}_2)_{i,j})$ ($-2^n \leq i, j < 2^n$)



Capítulo 4

Máquina de Somar Estocástica em Bases Quadráticas

Neste capítulo contruímos a máquina de somar estocástica para bases quadráticas $(F_n)_{n \geq 0}$ formadas por sequências recorrentes de ordem 2. Este trabalho é uma extensão do trabalho desenvolvido por Messaoudi-Smania, [43] (no caso Fibonacci). Estudamos também espectro do operador de transição associado à máquina de somar estocástica na base quadrática $(F_n)_{n \geq 0}$.

4.1 Bases Quadráticas

Sejam a, b inteiros naturais tais que $a \geq b \geq 1$ e considere a sequência $(F_n)_{n \geq 0}$ definida por:

$$F_{n+2} = aF_{n+1} + bF_n, \quad \forall n \geq 0$$

com condições iniciais

$$F_0 = 1, F_1 = aF_0 + 1 = a + 1.$$

Usando o algoritmo fominha, é possível escrever todo inteiro não negativo N de forma única (ver [26], [28], [46]), como

$$N = \sum_{i=0}^{k(N)} \varepsilon_i(N) F_i,$$

onde os dígitos ε_i são inteiros naturais satisfazendo:

$$\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} <_{lex} ab, \text{ para todo } i \geq 1$$

e $<_{lex}$ é a ordem lexicográfica sobre palavras finitas.

A relação anterior é chamada de representação de N na base $(F_n)_{n \geq 0}$. A palavra $\varepsilon_{k(N)} \dots \varepsilon_0$ é chamada a expansão de N na base $(F_n)_{n \geq 0}$.

Exemplo 4.1.1

- i. Se $a = b = 1$, então o número $N = 30$ tem sua representação na base F_n como $N = 10100001_F$.*
- ii. Se $a = 2, b = 1$, então o número $N = 35$ tem sua representação na base F_n como $N = 2001_F$.*

4.1.1 O Caso Fibonacci

Vamos considerar o caso $a = b = 1$. Então a sequência $(F_n)_{n \geq 0}$ é chamada a sequência de Fibonacci e é definida por

$$F_0 = 1, F_1 = 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \forall n \geq 2.$$

Usando o algoritmo fominha podemos escrever todo inteiro não negativo N , de forma única, como

$$N = \sum_{i=0}^{k(N)} \varepsilon_i(N) F_i,$$

onde $\varepsilon_i(N) = 0$ ou 1 e satisfazem $\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} <_{lex} 11$, para todo $0 \leq i \leq k(N)$ ou simplesmente $\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \neq 11$.

Máquina de somar de Fibonacci

Sabemos que a soma de 1 na base $(F_n)_{n \geq 0}$ (chamada máquina de somar na base de Fibonacci) é dada por um transdutor finito. Este transdutor está formado por dois estados (um estado inicial I e um estado terminal T). O estado inicial está

conectado a si mesmo por duas flechas. Uma delas está etiquetada por $(10,00)$ e a outra por $(1,0)$. Existem também duas flechas saindo do estado inicial para o estado terminal. Uma destas flechas está etiquetada por $(00, 01)$ e a outra por $(001,010)$. O estado terminal está conectado consigo mesmo por uma flecha etiquetada por (x,x) .

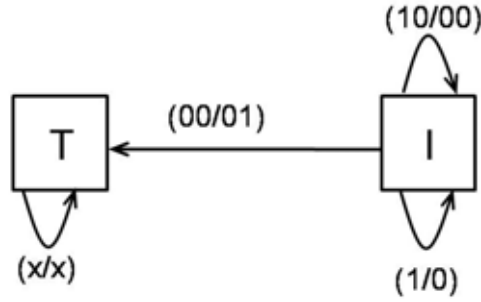


Fig. 20: Transdutor da máquina de somar de Fibonacci

Observação 4.1.1 *O transdutor acima é um pouco diferente daquele definido por Messaoudi-Smania em [43] por:*

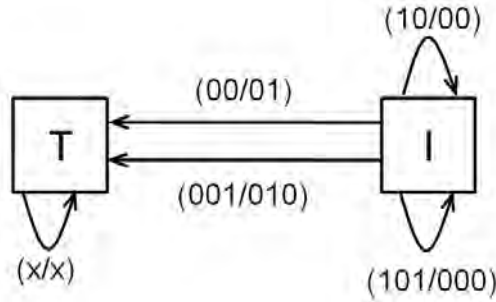


Fig. 21: Transdutor da máquina de somar definido em [43]

Exemplo 4.1.2 *Se $N = 12 = 10101_F$, então N corresponde ao caminho*

$$(T, 0/0, T)(T, 0/1, I)(I, 10/00, I)(I, 10/00, I)(I, 1/0, I).$$

Logo $N + 1 = 0100000_F = 100000_F = 13$.

Suponha que $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_0$ então,

- 1) Se $\varepsilon_1 \varepsilon_0 = 00$ então $N + 1 = \varepsilon_k \dots \varepsilon_2 01$. Neste caso N corresponde ao caminho

$$(T, \varepsilon_k/\varepsilon_k, T) \dots (T, \varepsilon_3/\varepsilon_3, T)(T, \varepsilon_2/\varepsilon_2, T)(T, 00/01, I).$$

2) Se $\varepsilon_1\varepsilon_0 = 10$ então $N + 1 = \varepsilon_k \dots \varepsilon_2 11$. Como $F_0 + F_1 = F_2$, fazemos $\varepsilon'_1\varepsilon'_0 = 00$ e fazemos o vai 1. Logo

(a) Se $\varepsilon_3\varepsilon_2 = 00$, então $N + 1 = \varepsilon_k \dots \varepsilon_4 0100$. Neste caso N corresponde ao caminho $(T, \varepsilon_k/\varepsilon_k, T) \dots (T, \varepsilon_4/\varepsilon_4, T)(T, 00/01, I)(I, 10/00, I)$.

(b) Se $\varepsilon_3\varepsilon_2 = 10$. Seja m o número inteiro tal que $\varepsilon_i\varepsilon_{i-1} = 10$ para todo $1 \leq i \leq m$ e $\varepsilon_{m+2}\varepsilon_{m+1} = 00$. Então $N + 1 = \varepsilon_k \dots \varepsilon_{m+3} 0100 \underbrace{00 \dots 00}_{m+1}$. Neste caso N corresponde ao caminho $(T, \varepsilon_k/\varepsilon_k, T) \dots (T, \varepsilon_{m+3}/\varepsilon_{m+3}, T) \underbrace{(T, 00/01, I)(I, 10/00, I) \dots (I, 10/00, I)}_{(m+1)/2}$.

3) Se $\varepsilon_0 = 1$ então $N + 1 = \varepsilon_k \dots \varepsilon_1 2$. Como $2F_0 = F_1$, fazemos $\varepsilon'_0 = 0$ e fazemos o vai 1. Logo

(a) Se $\varepsilon_2\varepsilon_1 = 00$, então $N + 1 = \varepsilon_k \dots \varepsilon_3 010$. Neste caso N corresponde ao caminho $(T, \varepsilon_k/\varepsilon_k, T) \dots (T, \varepsilon_3/\varepsilon_3, T)(T, 00/01, I)(I, 1/0, I)$.

(b) Se $\varepsilon_2\varepsilon_1 = 10$. Seja m o número inteiro tal que $\varepsilon_i\varepsilon_{i-1} = 10$ para todo $2 \leq i \leq m$ e $\varepsilon_{m+2}\varepsilon_{m+1} = 00$. Então $N + 1 = \varepsilon_k \dots \varepsilon_{m+3} 01 \underbrace{00 \dots 00}_m$. Neste caso N corresponde ao caminho $(T, \varepsilon_k/\varepsilon_k, T) \dots (T, \varepsilon_{m+3}/\varepsilon_{m+3}, T) \underbrace{(T, 00/01, I)(I, 10/00, I) \dots (I, 10/00, I)}_{(m/2)}(I, 1/0, I)$.

Máquina de somar estocástica de Fibonacci

Da mesma maneira que definimos no caso da base 2, temos o transdutor probabilístico, $\mathcal{T}_p$, $0 < p < 1$, da máquina de somar estocástica de Fibonacci dado por:

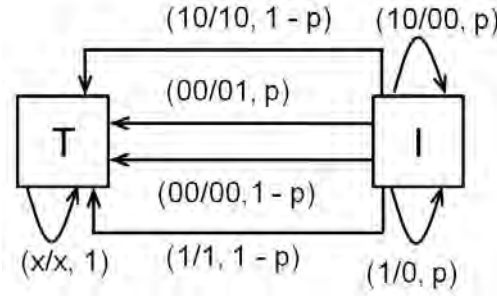


Fig. 22: Transdutor da máquina de somar estocástica de Fibonacci

Exemplo 4.1.3 Se $N = 12 = 10101_F$, então no transdutor da máquina de somar de Fibonacci, N corresponde ao caminho

$$(T, 0/0, T)(T, 0/1, I)(I, 10/00, I)(I, 10/00, I)(I, 1/0, I).$$

Na máquina de somar estocástica de Fibonacci temos os seguintes caminhos:

- (a) $(T, (10/10, 1), T)(T, (10/10, 1), T)(T, (1/1, 1-p), I)$. Neste caso $N = 12$ transita para 12 com probabilidade $1-p$.
- (b) $(T, (10/10, 1), T)(T, (10/10, 1-p), I)(I, (1/0, p), I)$. Neste caso $N = 12$ transita para $10100_F = 11$ com probabilidade $p(1-p)$.
- (c) $(T, (0/0, 1), T)(T, (10/10, 1-p), I)(I, (10/00, p), I)(I, (1/0, p), I)$. Neste caso $N = 12$ transita para $10000_F = 8$ com probabilidade $p^2(1-p)$.
- (d) $(T, (0/0, 1), T)(T, (0/0, 1-p), I)(I, (10/00, p), I)(I, (10/00, p), I)(I, (1/0, p), I)$. Neste caso $N = 12$ transita para $0000000_F = 0$ com probabilidade $p^3(1-p)$.
- (3) $(T, (0/0, 1), T)(T, (0/1, p), I)(I, (10/00, p), I)(I, (10/00, p), I)(I, (1/0, p), I)$. Neste caso $N = 12$ transita para $100000_F = 13$ com probabilidade p^4 .

4.2 Máquina de Somar em Base Quadrática

Como no caso de Fibonacci, a adição de 1 na base $(F_n)_{n \geq 0}$ é dada por um transdutor finito formado por dois estados, um estado inicial I e um estado terminal T e arestas

etiquetadas por elementos de $A^* \times A^*$, onde $A = \{0, 1, \dots, a\}$. O estado inicial está conectado a si mesmo por duas flechas. Uma delas está etiquetada por $(a(b-1)/00)$ e a outra por $(a/0)$. Existe também uma flecha saindo do estado inicial para o estado terminal. Esta flecha está etiquetada por $(\varepsilon_1\varepsilon_0/\varepsilon_1(\varepsilon_0+1))$ e com condições $\varepsilon_1\varepsilon_0 \prec_{lex} ab, \varepsilon_1\varepsilon_0 \neq a(b-1), \varepsilon_0 < a$. Isso vem do fato que se $N = \dots \varepsilon_3\varepsilon_2a(b-1)$ então $N+1 = \dots \varepsilon_2(\varepsilon_2+1)00$ e se $N = \dots \varepsilon_2\varepsilon_1a$ então $N+1 = \dots \varepsilon_2(\varepsilon_1+1)0$ e se $N = \dots \varepsilon_1\varepsilon_0$, onde $\varepsilon_1\varepsilon_0 \prec_{lex} ab, \varepsilon_1\varepsilon_0 \neq a(b-1)$ e $\varepsilon_0 < a$ então $N+1 = \dots \varepsilon_1(\varepsilon_0+1)$.

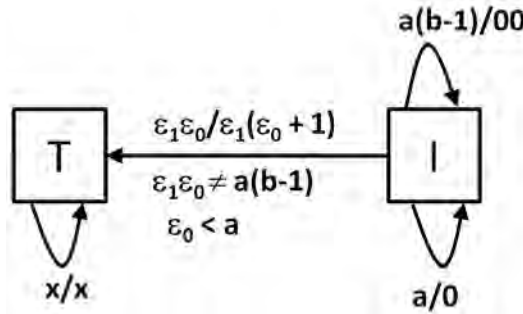


Fig. 23: Transdutor da máquina de somar em base quadrática

Para obter os dígitos da representação na base quadrática $(F_n)_{n \geq 0}$ a regra é a seguinte: Se $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_0$, então $N+1 = \varepsilon'_k \dots \varepsilon'_0$, onde os dígitos ε'_i são definidos da seguinte maneira:

- 1) Se $\varepsilon_1\varepsilon_0 = a(b-1)$, então $\varepsilon'_1\varepsilon'_0 = 00$ e fazemos o vai 1.
- 2) Se $\varepsilon_0 = a$, então $\varepsilon'_0 = 0$ e fazemos o vai 1.
- 3) Se $\varepsilon_1\varepsilon_0 \neq a(b-1)$ e $\varepsilon_0 \neq a$, então $\varepsilon'_k \dots \varepsilon'_0 = \varepsilon_k \dots \varepsilon_1(\varepsilon_0+1)$.

Exemplo 4.2.1 Seja $N = 12$ e considere $a = 2, b = 1$. Então $N = 112_F$ e N corresponde ao caminho:

$$(T, 0/0, T)(T, 11/12, I)(I, 2/0, I).$$

Logo $N+1 = 0120_F = 120_F = 13$.

4.3 Máquina de Somar Estocástica

O transdutor probabilístico, $\mathcal{T}_p$, $0 < p < 1$, da máquina de somar estocástica em bases quadráticas é dado pela figura seguinte:

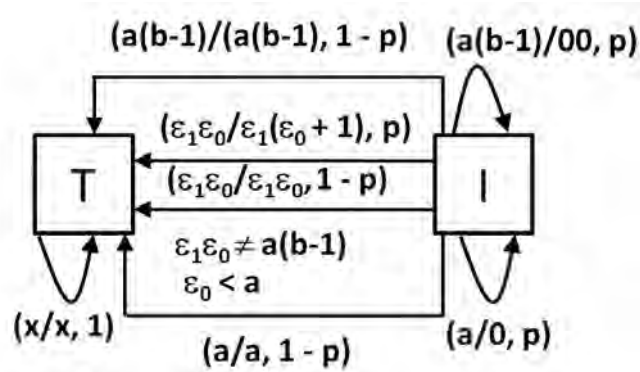


Fig. 24: Transdutor probabilístico da máquina de somar em base quadrática

Exemplo 4.3.1 Se $N = 12$, e $a = 2, b = 1$, temos $N = 112_F$. Logo N corresponde ao caminho

$$(T, 0/0, T)(T, 11/12, I)(I, 2/0, I).$$

Na máquina de somar estocástica temos os seguintes caminhos:

- (a) $(T, (1/1, 1), T)(T, (1/1, 1), T)(T, (2/2, 1-p), I)$. Neste caso $N = 112_F$ transita para 10010_F com probabilidade $1-p$.
- (b) $(T, (0/0, 1), T)(T, (11/11, 1-p), I)(I, (2/0, p), I)$. Neste caso $N = 112_F$ transita para $110_F = 10$ com probabilidade $p(1-p)$.
- (c) $(T, (0/0, 1), T)(T, (11/12, p), I)(I, (2/0, p), I)$. Neste caso $N = 112_F$ transita para $120_F = 13$ com probabilidade p^2 .

Usando o transdutor $\mathcal{T}_p$ temos o seguinte resultado.

Proposição 4.3.1 Seja N um inteiro não negativo, então os seguintes resultados são válidos.

- i) N permanece em N com probabilidade $1 - p$.
- ii) Se $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_0$ com $\varepsilon_1 \varepsilon_0 \neq a(b-1)$ e $\varepsilon_0 < a$, então N transita para $N + 1$ com probabilidade p .
- iii) Se $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_t (a(b-1))^s$ com $s \geq 1$ e $k \geq t \geq 2s$, então N transita para $N + 1$ com probabilidade p^{s+1} e N transita para $N - F_{2k} + 1, 0 \leq k \leq s$ com probabilidade $p^k(1-p)$.
- iv) Se $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_t (a(b-1))^s a$, $s \geq 2$ e $k \geq t \geq 2s + 1$, então N transita para $N + 1$ com probabilidade p^{s+2} e N transita para $N - F_{2k-1} + 1$, com probabilidade $p^k(1-p)$.

Demonstração:

(ii) Se $\varepsilon_1 \varepsilon_0 \neq a(b-1)$ e $\varepsilon_0 \neq a$, então N corresponde aos caminhos:

(a) $(T, (\varepsilon_k/\varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_2/\varepsilon_2, 1), T)(T, ((\varepsilon_1 \varepsilon_0/\varepsilon_1 \varepsilon_0, 1-p), I)$. Logo N transita para N com probabilidade $1 - p$.

(b) $(T, (\varepsilon_k/\varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_2/\varepsilon_2, 1), T)(T, (\varepsilon_1 \varepsilon_0/\varepsilon_1 (\varepsilon_0 + 1), p), I)$. Logo N transita para $N + 1$ com probabilidade p .

(iii) Se $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_t (a(b-1))^s$, então N corresponde aos caminhos:

(a) $(T, (\varepsilon_k/\varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_t/\varepsilon_t, 1), T)(T, (a/a, 1), T)(T, ((b-1)/(b-1), 1), T) \dots$
 $\dots (T, (a/a, 1), T)(T, ((b-1)/(b-1), 1), T)(T, (a(b-1)/a(b-1), 1-p), I)$.

Neste caso N transita para N com probabilidade $1 - p$.

(b) $(T, (\varepsilon_k/\varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_{t-1}/\varepsilon_{t-1}, 1), T)(T, (\varepsilon_t/(\varepsilon_t + 1), p), I)$
 $\underbrace{(I, (a(b-1)/00, p), I) \dots (I, (a(b-1)/00, p), I)}_s$. Neste caso N transita
para $N + 1$ com probabilidade p^{s+1} .

(c) $(T, (\varepsilon_k/\varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_t/\varepsilon_t, 1), T)$
 $\underbrace{(T, (a/a, 1), T)(T, ((b-1)/(b-1), 1), T) \dots (T, (a/a, 1), T)(T, ((b-1)/(b-1), 1), T)}_{2s-2m-2}$

$$(T, (a(b-1)/a(b-1), 1-p), I) \underbrace{(I, (a(b-1)/00, p), I) \dots (I, (a(b-1)/00, p), I)}_m.$$

Neste caso N transita para $N - F_{2m} + 1$ com probabilidade $p^m(1-p)$.

(iv) Se $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_t(a(b-1))^s a$. Neste caso N corresponde aos caminhos:

(a) $(T, (\varepsilon_k/\varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_t/\varepsilon_t, 1), T)(T, (a/a, 1), T)(T, ((b-1)/(b-1), 1), T) \dots$
 $\dots (T, (a/a, 1), T)(T, ((b-1)/(b-1), 1), T)(T, (a/a, 1-p), I)$. Neste caso
 N transita para N com probabilidade $1-p$.

(b) $(T, (\varepsilon_k/\varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_t/(\varepsilon_t + 1), p), I)$
 $\underbrace{(I, (a(b-1)/00, p), I) \dots (I, (a(b-1)/00, p), I)}_s (I, (a/0, p), I)$. Neste caso
 N transita para $N + 1$ com probabilidade p^{s+2} .

(c) $(T, (\varepsilon_k/\varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_t/\varepsilon_t, 1), T)$
 $\underbrace{(T, (a/a, 1), T)(T, ((b-1)/(b-1), 1), T) \dots (T, (a/a, 1), T)(T, ((b-1)/(b-1), 1), T)}_{2s-2m-3}$
 $(T, (a(b-1)/a(b-1), 1-p), I) \underbrace{(I, (a(b-1)/00, p), I) \dots (I, (a(b-1)/00, p), I)}_{m-1}$
 $(I, (a/0, p), I)$. Neste caso N transita para $N - F_{2m-1} + 1 =$
 $\varepsilon_k \dots \varepsilon_t \underbrace{a(b-1) \dots a(b-1)}_{2s-2m-1} \underbrace{00 \dots 00}_{2m+1}$ com probabilidade $p^m(1-p)$.

Para o caso $a = b = 1$, construímos o gráfico de transição de Fibonacci: □

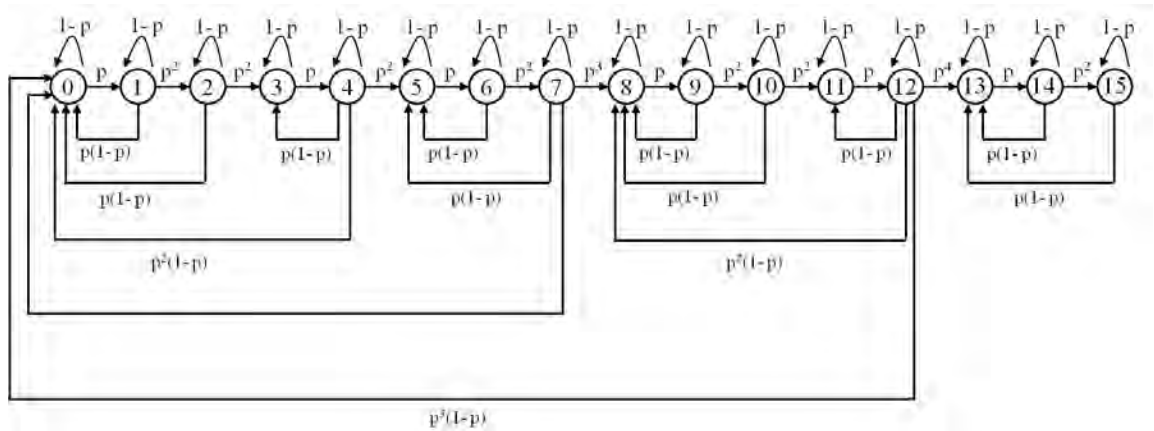


Fig. 25: Gráfico de Transição da máquina de somar estocástica de Fibonacci

O operador S_p associado ao grafo de transição de Fibonacci é o seguinte:

$$S_p = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ p(1-p) & 1-p & p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ p(1-p) & 0 & 1-p & p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ p^2(1-p) & 0 & 0 & p(1-p) & 1-p & p^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p(1-p) & 1-p & p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ p^2(1-p) & 0 & 0 & 0 & 0 & p(1-p) & 0 & 1-p & p^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p(1-p) & 1-p & p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p(1-p) & 0 & 1-p & p^2 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 \dots \\ p^3(1-p) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^2(1-p) & 0 & 0 & p(1-p) & 1-p & p^4 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Para o caso $a = 2, b = 1$, construímos o grafo de transição na base quadrática $(F_n)_{n \geq 0}$,

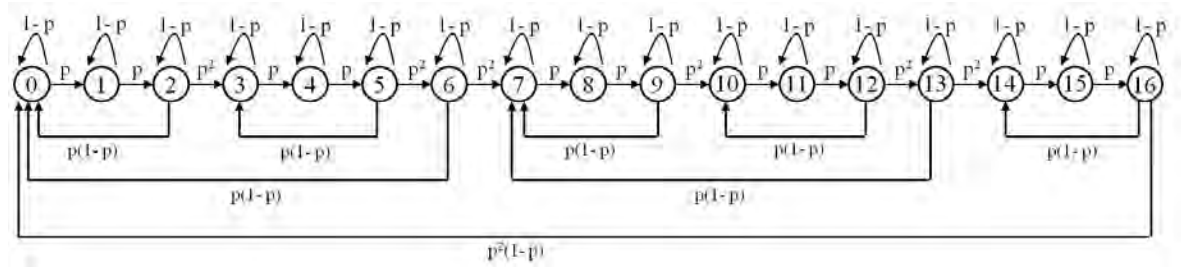


Fig. 26: Grafo de transição da máquina de somar estocástica para $a = 2, b = 1$

O operador de transição associado ao grafo de transição para o caso $a = 2, b = 1$ é o seguinte:

$$S_p = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ p(1-p) & 0 & 1-p & p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & p(1-p) & 0 & 1-p & p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ p(1-p) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p(1-p) & 0 & 1-p & p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p(1-p) & 0 & 1-p & p^2 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p(1-p) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p^2 \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Observação 4.3.1 É fácil verificar que a matriz de transição é estocástica mas não duplamente estocástica. A soma dos coeficientes das colunas é limitada por uma constante fixa k . É fácil verificar que a cadeia de Markov é irredutível e aperiódica.

Usando a proposição 4.3.1, temos o seguinte resultado.

Proposição 4.3.2 Sejam $i, j \in \mathbb{N}^*$ tais que $F_n \leq i, j \leq F_{n+1} - 1$, então a probabilidade de transição de i para j é igual à probabilidade de $i - F_n$ para $j - F_n$, isto é, $p_{i,j} = p_{i-F_n, j-F_n}$.

Demonstração: Se $i = j$, então pela proposição 4.3.1, temos $p_{i,j} = p_{i-F_n, j-F_n} = 1 - p$. Vamos supor então que $i \neq j$ e $p_{i,j} > 0$.

- i. Se $i = \varepsilon_n \dots \varepsilon_1 \varepsilon_0$ com $\varepsilon_1 \varepsilon_0 \prec_{lex} ab, \varepsilon_0 < a$, então pelo item (ii) da proposição 4.3.1, $j = i+1 = \varepsilon_n \dots \varepsilon_1 (\varepsilon_0 + 1)$ e $p_{i,j} = p$. Logo $i - F_n = \varepsilon_{n-1} \dots \varepsilon_1 \varepsilon_0$, $j - F_n = (\varepsilon_n - 1) \varepsilon_{n-1} \dots \varepsilon_1 (\varepsilon_0 + 1)$ e $p_{i-F_n, j-F_n} = p = p_{i,j}$.
- ii. Se $i = \varepsilon_n \dots \varepsilon_t (a(b-1))^s$ com $s \geq 1$, então, pelo item (iii) da proposição 4.3.1, $j = \varepsilon_n \dots (\varepsilon_t + 1) \underbrace{0 \dots 00}_{2s}$ e $p_{i,j} = p^{s+1}$, ou $j = i - F_{2m} + 1 = \varepsilon_n \dots \varepsilon_t \underbrace{a(b-1) \dots a(b-1)}_{2s-2m} \underbrace{0 \dots 00}_{2m}, 1 \leq m \leq s$ e $p_{i,j} = p^m(1-p)$.

Como $F_n \leq i, j \leq F_{n+1} - 1$, então as expansões de i e j são $i = \varepsilon c_{n-1} \dots c_0$ e $j = \varepsilon d_{n-1} \dots d_0$, com $\varepsilon \in \{1, 2, \dots, a\}$. Logo no primeiro caso existe um inteiro $t \leq n_0 \leq k$ tal que $\varepsilon_{n_0} = \varepsilon$, e $\varepsilon_i = 0$ para todo inteiro $n_0 < i \leq k$. Assim, temos $i - F_n = (\varepsilon_{n_0} - 1) \dots \varepsilon_t (a(b-1))^s$ e $j - F_n = (\varepsilon_{n_0} - 1) \dots (\varepsilon_t + 1) \underbrace{0 \dots 00}_{2s}$ e $p_{i-F_n, j-F_n} = p^{s+1} = p_{i,j}$.

No segundo caso, existem um inteiro n_0 tal que $n_0 = 2s - 1$ ou $t \leq n_0 \leq k$; com $\varepsilon_{n_0} = \varepsilon = a$, e $\varepsilon_i = 0$ para todo $n_0 < i \leq k$. Logo, obtemos $i - F_n = (\varepsilon_{n_0} - 1) \dots \varepsilon_t (a(b-1))^s$ (no caso $t \leq n_0 \leq k$) ou $i - F_n = (a-1)(b-1)(a(b-1))^{s-1}$ (no caso $n_0 = 2s - 1$) e $j - F_n = (\varepsilon_{n_0} - 1) \dots \varepsilon_t \underbrace{a(b-1) \dots a(b-1)}_{2s-2m} \underbrace{0 \dots 00}_{2m}$ ou $j - F_n = \underbrace{(a-1)(b-1)a(b-1) \dots a(b-1)}_{2s-2m} \underbrace{0 \dots 00}_{2m}$.

Logo, $p_{i-F_n, j-F_n} = p^m(1-p) = p_{i,j}$.

iii. O caso $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_t (a(b-1))^s a$, $s \geq 1$ se faz exatamente da mesma maneira.

□

Proposição 4.3.3 *Sejam $i, j, n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tais que $0 < i < F_n \leq j$, então $p_{j,i} = 0$.*

Demonstração: Seja n o número inteiro tal que $0 < i < F_n \leq j < F_{n+1}$, logo as expansões de i e j na base $(F_n)_{n \geq 0}$ são

$$j = \varepsilon_n \varepsilon_{n-1} \dots \varepsilon_0, i = \varepsilon'_n \varepsilon'_{n-1} \dots \varepsilon'_0 \quad (4.1)$$

onde para todo $i = 0, \dots, n, \varepsilon_i, \varepsilon'_i \in \{0, 1, \dots, a\}$ e $\varepsilon_{i+1} \varepsilon_i \prec_{lex} ab$ para cada $0 \leq i \leq n-1$. Suponha que $p_{j,i} \neq 0$, então pela Proposição 4.3.1 e o fato que $i < j$, deduzimos que $j = \varepsilon_k \dots \varepsilon_t (a(b-1))^s$ com $s \geq 1$ e $k \geq t \geq 2s+2$, e $i = j - F_{2m} + 1 = \varepsilon_k \dots \varepsilon_t \underbrace{a(b-1) \dots a(b-1)}_{2s-2m} \underbrace{0 \dots 00}_{2m}$, $1 \leq m \leq s$, ou $j = \varepsilon_k \dots \varepsilon_t (a(b-1))^s a$, $s \geq 2$ e $k \geq t \geq 2s+1$, $i = j - F_{2m+1} + 1 = \varepsilon_k \dots \varepsilon_t \underbrace{a(b-1) \dots a(b-1)}_{2s-2m} \underbrace{0 \dots 00}_{2m-1}$, $1 \leq m \leq s$.

Em ambos casos, obtemos uma contradição devido à relação (4.1).

□

Definição 4.3.1 *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Definimos $(q_n(\lambda))_{n \geq 0}$ uma sequência de números complexos dada por*

$$q_1 = q_{F_0}(\lambda) = z = \left(\frac{\lambda - (1-p)}{p} \right), \quad q_{F_1}(\lambda) = \frac{1}{p} z^{a+1} - \left(\frac{1}{p} - 1 \right) = \frac{1}{p} z^{F_1} - \left(\frac{1}{p} - 1 \right),$$

$$\forall n \geq 2, \quad q_{F_n}(\lambda) = \frac{1}{p} q_{F_{n-1}}^a q_{F_{n-2}}^b - \left(\frac{1}{p} - 1 \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad q_N = q_{F_0}^{\varepsilon_0} \dots q_{F_n}^{\varepsilon_n},$$

onde $N = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i F_i$. (representação na base F_n)

Teorema 4.3.1 *O espectro pontual de S , $\sigma_{pt}(S)$, em $l^\infty(\mathbb{N})$, é igual ao conjunto $\{\lambda \in \mathbb{C}, q_n(\lambda) \text{ é limitado}\}$, onde $q_n = q_n(p, \lambda) \in \mathbb{C}$ é a sequência definida acima. Em particular $\sigma_{pt}(S)$ está contido no conjunto $\mathcal{K}_p = \{\lambda \in \mathbb{C}, (\lambda_1, \lambda) \in J_c(f)\}$ onde $\lambda_1 = \left(\frac{\lambda+p-1}{p} \right)^{a+1}$ e $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ é a função definida por $f(x, y) = \left(\frac{1}{p^2}(x-1+p)^a(y-1+p)^b, x \right)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.*

Demonstração: Seja λ um autovalor de P associado ao autovetor $v = (v_i)_{i \geq 0} \in l^\infty(\mathbb{N})$. Como a probabilidade de transição de qualquer inteiro não negativo i para qualquer inteiro $i+k$, $k \geq 2$ é $p_{i,i+k} = 0$ (ver proposição 4.3.1), o operador S satisfaz $S_{i,i+k} = 0$ para todo $i, k \in \mathbb{N}$ com $k \geq 2$. Logo para todo inteiro $k \geq 1$, temos

$$\sum_{i=0}^k p_{k-1,i} v_i = \lambda v_{k-1}. \quad (4.2)$$

Logo, podemos provar por indução sobre k que para todo inteiro $k \geq 1$, existe um número complexo $\beta_k = \beta_k(p, \lambda) \in \mathbb{C}$ tal que

$$v_k = \beta_k v_0 \quad (4.3)$$

Assim, se $\lambda \in \sigma_{pt}(S)$, então o autovetor associado $v = (v_i)_{i \geq 0} \in l^\infty(\mathbb{N})$ é da forma $v = (\beta_i v_0)_{i \geq 0}$. Logo, a sequência $(\beta_i(\lambda))_{i \geq 0}$ é limitada pois $v \in l^\infty(\mathbb{N})$.

Para concluir a prova do Teorema 4.3.1 precisamos dos seguintes lemas.

Lema 4.3.1 $\beta_{F_0} = q_{F_0} = \left(\frac{\lambda - (1-p)}{p} \right), \quad \beta_{F_1} = q_{F_1} = \frac{1}{p} q_{F_0}^{a+1} - \left(\frac{1}{p} - 1 \right).$

Demonstração: Por (4.2) temos para $k = 1$:

$$p_{0,0}v_0 + p_{0,1}v_1 = \lambda v_0.$$

Logo, $(1 - p - \lambda)v_0 + pv_1 = 0$ e portanto $v_1 = -\left(\frac{1-p-\lambda}{p}\right)v_0$. Logo, por (4.3) $\beta_{F_0} = q_{F_0} = \left(\frac{\lambda-(1-p)}{p}\right)$.

Por outro lado, é fácil verificar que $v_i = q_{F_0}^i v_0$ para todo $2 \leq i \leq a$. Tomando $k = F_1 = a + 1$ e usando (4.2) temos

$$p(1-p)v_0 + (1-p-\lambda)v_a + p^2v_{a+1} = 0,$$

$$\text{logo } v_{F_1} = \left(\frac{q_{F_0}^{a+1}}{p} - \left(\frac{1}{p} - 1\right)\right)v_0 \text{ e portanto } \beta_{F_1} = q_{F_1} = \frac{1}{p}q_{F_0}^{a+1} - \left(\frac{1}{p} - 1\right) \quad \square$$

Lema 4.3.2 *Sejam m, n e $r \in \mathbb{N}, n > 0$ tais que $m + rF_n < F_{n+1}$ ($0 < m < F_{n+1} - rF_n$), então $q_{rF_n+m} = q_{F_n}^r q_m$. Em particular, se $n = \sum_{i=0}^N b_i F_i$, onde $b_i b_{i-1} <_{lex} ab$, $\forall 1 \leq i \leq N$, então $q_n = (q_{F_0})^{b_0} \dots (q_{F_N})^{b_N}$.*

Demonstração: Suponha $r = 1$. Para todo inteiro $k \geq 1$ temos por (4.2),

$$\sum_{i=0}^k p_{k-1,i} v_i = \lambda v_{k-1}. \quad (4.4)$$

Fazendo $k = F_n + j$, $1 \leq j \leq m$, então pela Proposição 4.3.3, temos $p_{k-1,i} = 0$ para todo inteiro $0 \leq i < F_n$.

Logo, para todo inteiro $1 \leq j \leq m$ temos

$$\sum_{i=F_n}^{F_n+j} p_{F_n+j-1,i} v_i = \lambda v_{F_n+j-1}.$$

Pela proposição 4.3.2, deduzimos que para todo $1 \leq j \leq m$,

$$\sum_{i=F_n}^{F_n+j} p_{j-1,i-F_n} v_i = \sum_{i=0}^j p_{j-1,i} v_{F_n+i} = \lambda v_{F_n+j-1}. \quad (4.5)$$

Seja $(w_i)_{0 \leq i \leq j}$ definida por $w_i = v_{F_n+i}$, logo, o sistema (4.5) é equivalente ao sistema:

$$\sum_{i=0}^j p_{j-1,i} w_i = \lambda w_{j-1}, 1 \leq j \leq m.$$

Logo, $w_m = q_m w_0$, isto é, $v_{F_n+m} = q_m v_{F_n}$. Como $v_{F_n} = q_{F_n} v_0$ e $v_{F_n+m} = q_{F_n+m} v_0$ obtemos $q_{F_n+m} = q_{F_n} q_m$.

Suponha agora que $r > 1$ e que o resultado é válido para $r = k$:

$$q_{kF_n+m} = q_{F_n}^k q_m. \quad (4.6)$$

Vamos provar o resultado para $r = k+1$. Pela hipótese temos $m + (k+1)F_n < F_{n+1}$. Logo, usando (4.5) temos

$$q_{(k+1)F_n+m} = q_{F_n+(kF_n+m)} = q_{F_n} q_{kF_n+m} = q_{F_n}^{k+1} q_m.$$

Portanto temos o resultado. $\square$

Final da prova do Teorema 4.3.1.

Fazendo $k = F_{2n}$ na relação (4.2) e usando o fato que $F_{2n} - 1 = \underbrace{a(b-1) \dots a(b-1)}_{2n}$ e o item (iii) da proposição 4.3.1, obtemos para todo inteiro $n \geq 0$,

$$v_{F_{2n}} = \frac{-1}{p^{n+1}} ((1-p-\lambda)v_{F_{2n}-1} + \sum_{k=1}^n p^k (1-p)v_{F_{2n}-F_{2k}}) \quad (4.7)$$

Escolhendo $k = F_{2n-1}$ e usando o fato que $F_{2n-1} - 1 = \underbrace{a(b-1) \dots a(b-1)a}_{2n-1}$ e o item (iv) da Proposição 4.3.1, obtemos para todo inteiro $n \geq 0$,

$$v_{F_{2n+1}} = \frac{-1}{p^{n+2}} ((1-p-\lambda)v_{F_{2n+1}-1} + \sum_{k=1}^{n+1} p^k (1-p)v_{F_{2n+1}-F_{2k-1}}). \quad (4.8)$$

Assim, temos $v_{F_{2n+1}} = (1 - \frac{1}{p})v_0 + \frac{1}{p}A$, onde

$$A = \frac{-1}{p^{n+1}} ((1-p-\lambda)V_{bF_{2n}-1+aF_{2n}-1} + \sum_{k=1}^n p^k (1-p)v_{bF_{2n-1}+aF_{2n}-F_{2k-1}}).$$

Usando a relação (4.3) e o lema 4.3.2, temos

$$v_{bF_{2n-1}+aF_{2n}-1} = q_{bF_{2n-1}+aF_{2n}-1} v_0 = q_{F_{2n}}^{a-1} q_{F_{2n-1}}^b v_{F_{2n-1}}$$

para todo $k = 1, \dots, n$. Obtemos também $v_{bF_{2n-1}+aF_{2n}-F_{2k-1}} = q_{F_{2n}}^a q_{F_{2n-1}}^{b-1} v_{F_{2n-1}-F_{2k-1}}$.

Logo, usando a relação (4.8), obtemos $A = q_{F_{2n}}^a q_{F_{2n-1}}^{b-1} v_{F_{2n-1}}$. Portanto

$$v_{F_{2n+1}} = \frac{1}{p} q_{F_{2n}}^a q_{F_{2n-1}}^{b-1} v_{F_{2n-1}} - \left(\frac{1}{p} - 1\right) v_0 \quad (4.9)$$

Logo, por (4.3) e (4.9), temos

$$q_{F_{2n+1}} = \frac{1}{p} q_{F_{2n}}^a q_{F_{2n-1}}^b - \left(\frac{1}{p} - 1\right), \forall n \geq 1 \quad (4.10)$$

Usando o lema 4.3.1 e as relações (4.3) e (4.7), temos

$$q_{F_{2n}} = \frac{1}{p} q_{F_{2n-1}}^a q_{F_{2n-2}}^b - \left(\frac{1}{p} - 1\right), \forall n \geq 1 \quad (4.11)$$

onde $q_{F_0} = q_1 = -\frac{1-\lambda-p}{p}$, $q_{F_1} = q_{a+1} = \frac{1}{p} q_1^{a+1} - \left(\frac{1}{p} - 1\right)$, se $a > 1$ e

$$q_{F_0} = q_1 = -\frac{1-\lambda-p}{p}, q_{F_1} = \frac{1}{p} q_1^2 - \left(\frac{1}{p} - 1\right), \text{ se } a = b = 1.$$

Logo $\sigma_{pt}(S) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (q_n(\lambda)) \text{ é limitada}\}$.

Por outro lado, seja $g(x, y) = \left(\frac{x^a y^b}{p} - \frac{1-p}{p}, x\right)$. Temos, para todo $k \geq 1$,

$$(q_{F_k}, q_{F_{k-1}}) = g^{k-1}(q_{F_1}, q_{F_0}). \quad (4.12)$$

Seja $h : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ definida por $h(x, y) = \left(\frac{x}{p} - \frac{1-p}{p}, \frac{y}{p} - \frac{1-p}{p}\right)$.

Então,

$$h^{-1} \circ g \circ h(x, y) = f(x, y), \forall x, y \in \mathbb{C} \quad (4.13)$$

onde

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{p^2} (x-1+p)^a (y-1+p)^b, x\right) \quad (4.14)$$

Temos também $h^{-1}(q_{F_1}, q_{F_0}) = (\lambda_1, \lambda)$. Logo, pelas relações (4.12), (4.13) e (4.14), a sequência (q_{F_k}) é limitada se e somente se (λ_1, λ) pertence ao conjunto de Julia cheio de f . Portanto $\sigma_{pt}(S) \subset \mathcal{K}_p$. $\square$

Observação 4.3.2 Conjecturamos que $\sigma(S) = \sigma_{pt}(S)$, isto é $\sigma_c(S) = \sigma_r(S) = \emptyset$ como no caso da base 2.

4.3.1 Relação entre $\sigma_{pt}(S)$ e o conjunto $\mathcal{K}_p$

Pelo Teorema 4.3.1 temos que

$$\sigma_{pt}(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (q_n(\lambda))_{n \geq 0} \text{ é limitado}\}$$

e

$$\mathcal{K}_p = \{\lambda \in \mathbb{C} : (q_{F_n}(\lambda))_{n \geq 0} \text{ é limitado}\}.$$

Foi provado que $\sigma_{pt}(S) \subset \mathcal{K}_p$. Surge uma pergunta natural. Será que $\mathcal{K}_p = \sigma_{pt}(S)$? No caso da base 2 temos $\sigma_{pt}(S) = \{\lambda \in \mathbb{C}, q_n(\lambda) \text{ é limitado}\} = \{\lambda \in \mathbb{C}, q_{2^n} \text{ é limitado}\}$. No caso $a = b = 1$ temos o seguinte resultado:

Proposição 4.3.4 Supomos que $a = b = 1$, então se $p < \sqrt{2} - 1$, $\sigma_{pt}(S) \neq \mathcal{K}_p$.

Demonstração: Temos

$$q_{F_0}(z) = z, q_{F_1}(z) = \frac{1}{p}z^2 - \left(\frac{1}{p} - 1\right), q_{F_n}(z) = \frac{1}{p}q_{F_{n-1}}(z)q_{F_{n-2}}(z) - \left(\frac{1}{p} - 1\right), \forall n \geq 2.$$

Suponha $q_{F_2}(z) = z$, logo $(q_{F_n}(z))_{n \geq 0}$ é periódica pois

$$q_{F_3}(z) = z, q_{F_4} = \frac{1}{p}z^2 - \left(\frac{1}{p} - 1\right) = q_{F_1}, \dots$$

Logo $q_{F_n}(z) = q_{F_{n+3}}(z)$, $\forall n \geq 1$.

Por outro lado, $q_{F_2}(z) = z$ implica que

$$\frac{1}{p^2}z^3 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)z - \left(\frac{1}{p} - 1\right) = z. \quad (4.14)$$

As raízes da equação (4.14) são $z_1 = 1, z_2 = -p, z_3 = -1 + p$ e satisfazem, $|z_i| \leq 1, \forall i = 1, 2, 3$.

Seja $k \in \mathbb{N}$ e $n = \sum_{i=0}^k F_{1+3i}$. Pelo Lema 4.3.2 temos $q_n(z) = \prod_{i=0}^k q_{F_{1+3i}}(z) = \left(\frac{1}{p}z^2 - \left(\frac{1}{p} - 1\right)\right)^k$. Vamos provar que $(q_n(z_2))_{n \geq 0}$ não é limitada. Para isto é

suficiente provar que $|\frac{1}{p}z_2^2 - (\frac{1}{p} - 1)| = |p - 1/p + 1| > 1$, isto é $|p^2 + p - 1| > p$. Isto acontece se e somente se $0 < p < \sqrt{2} - 1$.

Logo $(q_n(z_2))_{n \geq 0}$ não é limitada e portanto, $\sigma_{pt}(S) \neq \mathcal{K}_p$ pois $z_2 \in \mathcal{K}_p$ e $z_2 \notin \sigma(S)$. $\square$

Conjectura: Conjecturamos que quando $p \rightarrow 1$ então $\sigma_{pt}(S) = \mathcal{K}_p$, isto é, existe $0 < c < 1$ tal que para todo $p > c$ temos $\sigma_{pt}(S) = \mathcal{K}_p$.

4.4 Propriedades de $\mathcal{K}_p$

Teorema 4.4.1 *O conjunto $\mathcal{K}_p$ satisfaz as seguintes propriedades topológicas:*

- i. $\mathbb{C} \setminus \mathcal{K}_p$ é um conjunto conexo.
- ii. Se $b = 1$ e $a \geq 1$, então existe $d < 1/2$ tal que $\mathcal{K}_p$ não é conexo para todo $0 < p \leq d$.

Para provar o Teorema 4.4.1 precisamos de alguns resultados.

Seja $(f_n)_{n \geq 0}$ uma seqüência de funções definida por:

$$f_0(z) = z, f_1(z) = \frac{1}{p}z^{a+1} + c, f_n(z) = \frac{f_{n-1}^a(z)f_{n-2}^b(z)}{p} + c, \forall n \geq 2 \quad (4.15)$$

onde $c = -(1-p)/p$. Pelas equações (4.9) e (4.10) temos que

$$q_{F_n} = f_n(q_{F_0}), \forall n \geq 0.$$

Seja $\mathcal{G} = \mathcal{G}_p = \{z \in \mathbb{C}, f_n(z) \text{ é limitado} \} = \{z \in \mathbb{C}, (\frac{1}{p}z^{a+1} + c, z) \in J_c(g)\}$.

Podemos provar que $\mathcal{K} = \psi(\mathcal{G})$, onde $\psi(z) = pz + 1 - p$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Lema 4.4.1 *Supomos que existe um inteiro k tal que $|f_n(z)| > 1$ para $n \in \{k, k+1\}$, então a seqüência $(f_n(z))_{n \geq 0}$ não é limitada.*

Demonstração: Como $|f_n(z)| > 1$, para $n \in \{k, k+1\}$, temos por (4.15) e a desigualdade triangular

$$|f_{k+2}(z)| = \frac{1}{p} |f_{k+1}^a(z) f_k^b(z) - (1-p)| \geq \frac{1}{p} ||f_{k+1}^a(z) f_k^b(z)| - (1-p)| > \frac{1}{p} |f_{k+1}^a(z)| - \frac{1}{p} + 1$$

Logo

$$|f_{k+2}(z)| - 1 > \frac{1}{p} (|f_{k+1}(z)|^a - 1) > \frac{1}{p} ||f_{k+1}(z)| - 1|,$$

então $|f_{k+n}(z)| - 1 \geq \frac{1}{p^n} (|f_k(z)| - 1)$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Portanto $(f_n(z))$ não é limitada.

□

Proposição 4.4.1 *Existe um número real $R > 1$ tal que se $|f_k(z)| > R$ para algum inteiro k , então a seqüência $(f_n(z))_{n \geq 0}$ não é limitada.*

Demonstração: Seja $R > \frac{2}{p} - 1 > 1$ um número real suficientemente grande tal que $\frac{(pR - |c|)R^{a^2/b}}{[p(1 + |c|)]^{a/b}} > R^b$ e provemos por indução sobre k que se $|f_k(z)| > R$, para algum inteiro k , então $(f_n(z))_{n \geq 0}$ é uma seqüência não limitada. Pelo Lema 4.4.1 a propriedade é válida para $k = 0$ e $k = 1$.

De fato: Se $|f_0(z)| > R > 1$ então $|f_1(z)| > \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p} - 1\right) > 1$. Logo pelo Lema 4.4.1 $(f_n(z))$ não é limitada. Se $|f_1(z)| > R$ então se $|z| \leq 1$ temos $|f_1(z)| \leq 2/p - 1$, absurdo. Logo $|z| > 1$ e portanto $(f_n(z))$ não é limitada.

Vamos supor que a propriedade é válida para inteiros $2 \leq n < k$ e que

$$|f_k(z)| > R \tag{4.16}$$

Pelo Lema 4.4.1, podemos supor que $|f_n(z)| \leq 1$ para $n = k-1$ e $k+1$.

Pela relação (4.16) e a desigualdade triangular, temos

$$1 \geq |f_{k+1}(z)| > \frac{1}{p} (R^a |f_{k-1}^b(z)|) - |c|$$

Logo

$$|f_{k-1}(z)| < \frac{p^{1/b} (1 + |c|)^{1/b}}{R^{a/b}} \tag{4.17}$$

Por outro lado, usando a desigualdade triangular, temos

$$|f_{k-2}^b(z)| \geq \frac{p|f_k(z)| - |c|}{|f_{k-1}^a(z)|}$$

Logo, usando as relações (4.16) e (4.17) e a condição inicial sobre R , deduzimos que

$$|f_{k-2}^b(z)| > (pR - |c|) \frac{R^{a^2/b}}{[p(1 + |c|)]^{a/b}} > R^b.$$

Logo, $(f_n(z))_{n \geq 0}$ é uma seqüência não limitada. $\square$

Proposição 4.4.2 *Existe um número real $R > 0$ tal que $\mathcal{G} = \bigcap_{n=0}^{\infty} f_n^{-1} \overline{D(0, R)}$, onde $\overline{D(0, R)}$ é o disco fechado de centro 0 e raio R . Em particular $\mathcal{G}$ é compacto.*

Demonstração: É uma conseqüência direta da proposição 4.4.1 $\square$

Observação 4.4.1 *Temos também que se $|f_n(z)| \geq R$ para algum inteiro k , então $(f_n(z))_{n \geq 0}$ é uma seqüência não limitada. Logo $\mathcal{G} = \bigcap_{n=0}^{\infty} f_n^{-1} D(0, R)$.*

Para provar o item *i.* do Teorema 4.4.1 precisamos do seguinte Lema.

Lema 4.4.2 *Seja $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial e $X \subset \mathbb{C}$ um conjunto compacto. Se $\mathbb{C} \setminus X$ é conexo, então $\mathbb{C} \setminus \phi^{-1}(X)$ também é conexo.*

Prova do item *i.* do Teorema 4.4.1

Pela proposição 4.4.1, existe um número real $R > 0$ tal que

$$\mathbb{C} \setminus \mathcal{G} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{C} \setminus f_n^{-1} \overline{D(0, R)}.$$

Pelo Lema 4.4.2, para todo $n \geq 0$, $\mathbb{C} \setminus f_n^{-1} \overline{D(0, R)}$ é conexo.

Como para cada n , $\mathbb{C} \setminus f_n^{-1} \overline{D(0, R)}$ contem uma vizinhança do infinito, deduzimos que $\mathbb{C} \setminus \mathcal{G}$ é conexo. $\square$

Proposição 4.4.3 *Existe um número real $R > 0$ tal que $\mathcal{G} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} f_n^{-1} D(0, R)$ e*

$$f_{n+1}^{-1} D(0, R) \subset f_n^{-1} D(0, R), \forall n \geq 1.$$

Demonstração: Seja $R > \frac{2}{p} - 1 > 1$ grande tal que

$$\frac{(pR - |c|)R^{a^2/b}}{[p(1 + |c|)]^{a/b}} > R^b.$$

Pela proposição 4.4.2 $\mathcal{G} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} f_n^{-1}D(0, R)$. Provemos por indução que para todo $k \in \mathbb{N}$, $f_{k+1}^{-1}D(0, R) \subset f_k^{-1}D(0, R)$.

Suponha que é válido para todo $k = 0, \dots, n-1, n \geq 1$. Seja $z \in f_{n+1}^{-1}D(0, R)$, então $|f_{n+1}(z)| < R$. Suponha que $|f_n(z)| \geq R$. Usando a relação (4.15) e a desigualdade triangular, temos

$$R > |f_{n+1}(z)| \geq \frac{1}{p}R^a|f_{n-1}(z)|^b - |c|.$$

Logo,

$$|f_{n-1}(z)| < \frac{p^{1/b}(|c| + R)^{1/b}}{R^{a/b}} = O(R^{\frac{1-a}{b}}) \quad (4.18)$$

Escolha R suficientemente grande tal que $\frac{p^{1/b}(R + |c|)^{1/b}}{R^{a/b}} \leq R$, então $|f_{n-1}(z)| < R$. Logo, pela hipótese de indução,

$$|f_k(z)| < R, \forall k = 0, \dots, n-2. \quad (4.19)$$

Por outro lado, usando (4.15) e a desigualdade triangular, temos

$$|f_n(z)| < \frac{1}{p}|f_{n-1}(z)|^a|f_{n-2}(z)|^b + |c|.$$

Logo usando (4.18),

$$|f_{n-2}(z)| > \left(\frac{p(|f_n(z)| - |c|)}{|f_{n-1}(z)|^a} \right)^{\frac{1}{b}} = O\left(\frac{R}{R^{\frac{a-a^2}{b}}} \right)^{\frac{1}{b}} = O\left(R^{\frac{a^2-a+b}{b^2}} \right) \quad (4.20)$$

Se $1 \leq b < a$, então $a^2 - a > b^2 - b$. Escolhendo R suficientemente grande tal que $R < O\left(R^{\frac{a^2-a+b}{b^2}} \right)$, temos $|f_{n-2}(z)| > R$. Isto contradiz a relação (4.19). Por tanto, para todo $k \geq 2$, $f_{k+1}^{-1}D(0, R) \subset f_k^{-1}D(0, R)$. Supomos $a = b$, então pelas relações (4.15), (4.18) e (4.20)

$$|f_{n-3}(z)| < \left(\frac{p(|f_{n-1}(z)| + |c|)}{|f_{n-2}(z)|^a} \right)^{\frac{1}{b}} = O\left(\frac{R^{\frac{1-a}{b}}}{R^{\frac{a^3-a^2+ab}{b^2}}} \right)^{\frac{1}{b}} = O\left(R^{\frac{a^2-a^3-2ab+b}{b^3}} \right) \quad (4.21)$$

Usando as relações (4.15), (4.20) e (4.21), deduzimos

$$\begin{aligned} |f_{n-4}(z)| &\geq \left(\frac{p(|f_{n-2}(z)| - |c|)}{|f_{n-3}(z)|^a} \right)^{\frac{1}{b}} = O \left(\frac{R^{\frac{a^2-a+b}{b^2}}}{R^{\frac{a^3-a^4-2a^2b+ab}{b^3}}} \right)^{\frac{1}{b}} = \\ &= O \left(R^{\frac{a^4-a^3+3a^2b-2ab+b^2}{b^4}} \right) = O(R^{\frac{a^4+2a^3-a^2}{a^4}}), \text{ pois } a = b. \end{aligned}$$

Escolhendo R suficientemente grande para $R < O \left(R^{\frac{a^4+2a^3-a^2}{a^4}} \right)$, temos $|f_{n-4}(z)| \geq R$. Isto contradiz a relação (4.19). Por tanto, para todo $k \geq 4$, $f_{k+1}^{-1}D(0, R) \subset f_k^{-1}D(0, R)$. Agora, provaremos que é válido para $k = 0, 1, 2, 3$.

i) Seja $z \in f_1^{-1}D(0, R)$, então $|\frac{1}{p}z^{a+1} - (\frac{1}{p} - 1)| < R$. Logo $|z| < ((R + \frac{1}{p} - 1)p)^{\frac{1}{a+1}}$. Escolhendo R suficientemente grande tal que $((R + \frac{1}{p} - 1)p)^{\frac{1}{a+1}} < R$, obtemos o resultado.

ii) Seja $z \in f_2^{-1}D(0, R)$, então $|f_2(z)| < R$ e usando (4.15) e a desigualdade triangular, $|f_1(z)|^a |f_0(z)|^b < (pR + p|c|)$. Logo

$$|f_1(z)| < (pR + p|c|)^{1/2a} \text{ ou } |f_0(z)| < (pR + p|c|)^{1/2b}.$$

Caso 1: Se $|f_1(z)| < (pR + p|c|)^{1/2a}$, então escolhendo R suficientemente grande tal que $(pR + p|c|)^{1/2a} < R$ temos o resultado.

Caso 2: Se $|f_0(z)| < (pR + p|c|)^{1/2b}$ então $|z| < (pR + p|c|)^{1/2b}$. Logo $|f_1(z)| < \frac{1}{p}(pR + p|c|)^{\frac{a+1}{b}} + |c|$. Escolhendo R suficientemente grande tal que $\frac{1}{p}(pR + p|c|)^{\frac{a+1}{b}} + |c| \leq R$, temos o resultado.

iii) Se $|f_3(z)| < R \Rightarrow |f_2(z)|^a |f_1(z)|^b < (pR + p|c|)$. Logo

$$|f_1(z)| < (pR + p|c|)^{1/2b} \text{ ou } |f_2(z)| < (pR + p|c|)^{1/2a}$$

Caso 1: Se $|f_2(z)| < (pR + p|c|)^{1/2a}$, então escolhendo R suficientemente grande tal que $(pR + p|c|)^{1/2a} \leq R$ temos o resultado.

Caso 2: Se $|f_1(z)| < (pR + p|c|)^{1/2b}$, então $|z| < (p(pR + p|c|)^{1/2b} + |c|)^{\frac{1}{a+1}}$.

Logo

$$|f_2(z)| < \frac{1}{p}(pR + p|c|)^{\frac{a}{2b}}(p(pR + p|c|)^{\frac{1}{2b}} + |c|)^{\frac{b}{a+1}} + |c|.$$

Escolhendo R grande, temos $|f_2(z)| < R$. Logo $f_3^{-1}D(0, R) \subset f_2^{-1}D(0, R)$.

iv) Se $|f_4(z)| < R$, então $|f_2(z)| < (pR + p|c|)^{1/2b}$ ou $|f_3(z)| < (pR + p|c|)^{1/2a}$

Caso 1: Se $|f_3(z)| < (pR + p|c|)^{1/2a}$, então escolhendo R suficientemente grande tal $(pR + p|c|)^{1/2a} \leq R$, temos o resultado.

Caso 2: Se $|f_2(z)| < (pR + p|c|)^{1/2ab}$, então, como foi no caso *iii*) escolhendo um R apropriado, obtemos $|f_3(z)| < R$ e portanto temos o resultado.

□

Proposição 4.4.4 *Seja $E_n = \{z \in \mathbb{C} | f'_n(z) = 0\}$. Se para cada inteiro $n \geq 0$, o conjunto E_n está contido em $f_n^{-1}D(0, R)$, então $\mathcal{G}$ é conexo. Em particular, se para todo inteiro n , $E_n \subset \mathcal{G}$, então $\mathcal{G}$ é conexo.*

Para demonstrar a proposição 4.4.4 precisamos do seguinte lema, que é um caso particular da fórmula de Riemann-Hurwitz.

Lema 4.4.3 *Seja $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial. Seja $R > 0$, então $\phi^{-1}(D(0, R))$ é um conjunto conexo se e somente se $C = \{z \in \mathbb{C} | \phi'(z) = 0\} \subset \phi^{-1}(D(0, R))$.*

Demonstração da Proposição 4.3.4: Seja R o número real definido na Proposição 4.4.3. Pela proposição 4.4.2 e a observação 4.4.2 temos

$$\mathcal{G} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} f_n^{-1}D(0, R) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} f_n^{-1}\overline{D(0, R)}.$$

Logo

$$\mathcal{G} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{f_n^{-1}D(0, R)} \quad (4.31)$$

Suponha que para todo inteiro $n \geq 0$, $E_n \subset f_n^{-1}D(0, R)$. Logo, pelo Lema 4.4.3, $f_n^{-1}D(0, R)$ é conexo. Assim, $\overline{f_n^{-1}D(0, R)}$ também é conexo. Pela proposição 4.4.3 e a relação (4.31) deduzimos que $\mathcal{G}$ é a intersecção de uma seqüência decrescente de conjuntos conexos compactos, portanto $\mathcal{G}$ é conexo. $\square$

Observação 4.4.2 *Os resultados anteriores valem para o conjunto $\mathcal{F}_h = \{z \in \mathbb{C}, g^n(h(z), z) \text{ é limitado}\}$, onde h é um polinômio qualquer não nulo. Em particular $\mathbb{C} \setminus \mathcal{F}_h$ é conexo e existe $R > 1$ tal que*

$$\mathcal{F}_h = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \varphi_n^{-1}D(0, R),$$

onde $\varphi_n^{-1}D(0, R) \supset \varphi_{n+1}^{-1}D(0, R)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\varphi_0(z) = z, \varphi_1(z) = h(z), \varphi_n(z) = \frac{1}{p}\varphi_{n-1}^a\varphi_{n-2}^b - (\frac{1}{p} - 1)$.

Teorema 4.4.2 *Seja $h(z) = a_2z^2 + \dots a_nz^n$, $a_0, \dots a_n \in \mathbb{R}$. Se $p < 1/2$, então $\mathcal{F}_h$ não é conexo.*

Demonstração: É fácil verificar que 0 é um ponto crítico de todos os $\varphi_n, n \geq 1$. Por outro lado $\varphi_2(0) = \varphi_3(0) = c$ e $|c| > 1$ se e somente se $p < 1/2$. Logo se $p < 1/2$, então a seqüência $(\varphi_n(0))$ não é limitada, portanto 0 não pertence a $\mathcal{F}_h$.

Se $0 \notin \mathcal{F}_h$, então existe um inteiro $n \geq 1$ tal que para todo $k \geq n, 0 \notin \varphi_k^{-1}D(0, R)$, onde R é um número real definido na observação 4.4.2. Como $\varphi_n'(0) = 0, \forall n \geq 1$, deduzimos pelo Lema 4.4.3 que $\varphi_k^{-1}D(0, R)$ não é conexo para todo $k \geq n$. Logo pela observação 4.4.2, temos o resultado. $\square$

Caso $a = 1$:

Teorema 4.4.3 *Supomos $a = 1$, então $\mathcal{G}$ não é conexo para $0 < p < 1/2$.*

Demonstração: Temos

$$f_0(z) = z, f_1(z) = z, f_2(z) = \frac{1}{p}z^2 + c, f_3(z) = \frac{1}{p^2}z^3 + \frac{c}{p}z + c, \dots$$

Supomos $\frac{1}{p}z^2 + c = z$, então $z = 1$ ou $z = p - 1$. Logo $1, p - 1 \in \mathcal{G}$.

Suponha $p < 1/2$, logo pelo teorema 4.4.2, $0 \notin \mathcal{G}$. Vamos provar que $ix \notin \mathcal{G}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

De fato: Seja $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Temos,

$$f_2(ix) = -\frac{1}{p}x^2 + c \text{ e } f_3(ix) = -\frac{1}{p^2}ix^3 + \frac{c}{p}ix + c.$$

Como $p < 1/2$, então $f_2(ix) < c = -\left(\frac{1}{p} - 1\right) < -1$, logo $|f_2(ix)| > 1$.

Temos também $|f_3(ix)| \geq \sqrt{\frac{1}{p} - 1} > 1$, logo pelo Lema 4.4.1, $(f_n(ix))$ é uma sequência não limitada e portanto $ix \notin \mathcal{G}$. Logo $\mathcal{G}$ não é conexo. $\square$

Caso $a > 1, b = 1$:

Teorema 4.4.4 *Se $b = 1$ e $a > 1$, então existe $0 < d = d(a) < 1/2$ tal que para todo $0 < p \leq d$, $\mathcal{G}$ não é conexo.*

Demonstração: Temos

$$f_0(z) = z, f_1(z) = \frac{1}{p}z^{a+1} + c = z, f_2(z) = \frac{1}{p}z^{a+1} + c = z.$$

Logo $f_n(z) = z$ para todo $n \geq 1$.

Por outro lado, $f_1(z) = z$ implica que $z = 1$ ou $\psi(z) = z^a + z^{a-1} + \dots + z + 1 - p = 0$. Logo 1 pertence a $\mathcal{G}$.

Caso a ímpar: Temos,

$$\psi(0) = 1 - p > 0 \text{ e } \lim_{z \rightarrow -\infty} \psi(z) = -\infty,$$

logo existe $z_0 < 0$ tal que $\psi(z_0) = 0$. Temos $1, z_0 \in \mathcal{G}$.

Afirmção: Se $p < 1/2$ então $ix \notin \mathcal{G}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

De fato: como $p < 1/2$, então $|f_1(0)| = |f_2(0)| = |c| = \frac{1}{p} - 1 > 1$. Logo, $(f_n(0))$ não é limitada (pelo teorema 4.4.2). Por tanto $0 \notin \mathcal{G}$.

Caso 1: Supomos $a \equiv 1 \pmod{4}$, então

$$f_0(ix) = ix, f_1(ix) = -\frac{1}{p}x^{a+1} + c, f_2(ix) = -\frac{1}{p^2}ix^{a+1} + \frac{c}{p}ix + c, \dots$$

Como $p < 1/2$, $f_1(ix) < c = -\left(\frac{1}{p} - 1\right) < -1$, logo $|f_1(ix)| > 1$.

Por outro lado, $|f_2(ix)| \geq |c| = \frac{1}{p} - 1 > 1$, logo pelo lema 4.4.1 $(f_n(ix))$ é uma sequência não limitada e portanto $ix \notin \mathcal{G}$. Como $1 \in \mathcal{G}$, $z_0 \in \mathcal{G}$ ($z_0 < 0$) e $ix \notin \mathcal{G}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $\mathcal{G}$ não é conexo.

Caso 2: Supomos $a \equiv 3 \pmod{4}$, então

$$f_0(i) = i, f_1(i) = \frac{1}{p}i^{a+1} + c = 1, f_2(i) = \frac{1}{p}i + c, f_3(i) = \frac{1}{p^2}i + \frac{c}{p} + c \dots$$

Temos $|f_2(i)| > 1/p - 1 > 1$ e $|f_3(i)| > -c - \frac{c}{p} > 1$, logo $i \notin \mathcal{G}$. Da mesma maneira $-i \notin \mathcal{G}$.

Por outro lado, como $\mathbb{C} \setminus \mathcal{G}$ é um conjunto aberto, existe $r > 0$ tal que $B(i, r) \subset \mathbb{C} \setminus \mathcal{G}$ e $B(-i, r) \subset \mathbb{C} \setminus \mathcal{G}$. Logo, existe $A < 1$ tal que se $ix \in \mathcal{G}$ então $|x| < A$.

Vamos provar que existe $0 < d < 1/2$ tal que se $p < d$ então $ix \notin \mathcal{G}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

De fato: basta escolher $d = \min \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1 - A^{a+1}}{2} \right\}$. Logo, se $p < d \leq \frac{1 - A^{a+1}}{2}$ então

$$\frac{1}{p}A^{a+1} - \left(\frac{1}{p} - 1\right) < -1.$$

Seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $ix \in \mathcal{G}$, logo $|x| < A$. Como $a + 1$ é par, temos

$$f_1(ix) = \frac{1}{p}x^{a+1} + c < \frac{1}{p}A^{a+1} + c < -1$$

Como no caso anterior, temos que $(f_n(ix))$ é uma sequência não limitada e portanto $ix \notin \mathcal{G}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Caso a par: Temos,

$$f_0(z) = z, f_1(z) = \frac{1}{p}z^{a+1} + c, f_2(z) = \frac{1}{p}f_1(z)^a f_0(z) + c, \dots$$

Supomos $f_1(z) = z$, então temos $z = 1$ ou $\psi_p(z) = z^a \dots + 1 - p = 0$

Se $p = 0$, $\psi_0(z) = z^a + \dots + 1 = \frac{z^{a+1} - 1}{z - 1} = 0$ implica $z^{a+1} = 1$. Então quando $p \rightarrow 0$, as raízes de $\psi_p(z)$ estão próximas as de $\psi_0(z)$, logo existe $A < 0$ tal que se $p < A$ então $\psi_p(z)$ possui pelo menos uma raiz z_2 cuja parte real é menor que 0.

Além do mais $(f_n(z))$ é periódica pois

$$f_0(z) = z, f_1(z) = \frac{1}{p}z^{a+1} + c, f_2(z) = f_3(z) = z, f_4(z) = f_1(z), f_5(z) = f_6(z) = z, \dots$$

Logo, $z_2 \in \mathcal{G}$.

Por outro lado, $1 \in \mathcal{G}$ e temos

$$f_0(ix) = ix, f_1(ix) = \frac{1}{p}i^{a+1}x^{a+1} + c = \frac{1}{p}ii^ax^{a+1} + c, \dots$$

Caso 1: Supomos $a \equiv 0 \pmod{4}$, então

$$f_0(ix) = ix, f_1(ix) = \frac{1}{p}ix^{a+1} + c, f_2(ix) = -\frac{1}{p^2}x^{a+1} - \frac{c}{p}ix + c, \dots$$

Temos $|f_1(ix)| > |\frac{1}{p} - 1| > 1$ pois $p < 1/2$.

Caso 1.1: Se $x > 0$, então $|f_2(x)| \geq \left(\frac{1}{p} - 1\right) + \frac{1}{p^2}x^{a+1} > \left(\frac{1}{p} - 1\right) > 1$. Logo $ix \notin \mathcal{G}$.

Caso 1.2 Se $x < 0$, então existe $0 < A < 1$, tal que se $-A < x < 0$ então $ix \notin \mathcal{G}$.

Escolhendo $d = \min \left\{ \frac{1}{3}, \frac{(-A)^{a+1} + 1}{2} \right\}$. Logo, se $p < d$ então

$$-\frac{1}{p}x^{a+1} - \left(\frac{1}{p} - 1\right) < -\frac{1}{p^2}(-A)^{a+1} - \left(\frac{1}{p} - 1\right) < -1.$$

Logo, $|f_1(ix)| > 1$ e portanto $ix \notin \mathcal{G}$.

Caso 2: Supomos $a \equiv 2 \pmod{4}$, então

$$f_0(ix) = ix, f_1(ix) = -\frac{1}{p}ix^{a+1} + c, f_2(ix) = \frac{1}{p^2}x^{a+1} - \frac{c}{p}ix + c, \dots$$

Logo, $|f_1(ix)| \geq \frac{1}{p} - 1 > 1$.

Caso 2.1: Se $x \leq 0$ então $|f_2(ix)| \geq \left(\frac{1}{p} - 1\right) + \frac{1}{p^2}x^{a+1} > 1$. Logo, $ix \notin \mathcal{G}$.

Caso 2.2 Se $x > 0$ então existe $A < 1$ tal que se $0 < x < A$, $ix \notin \mathcal{G}$.

Escolhendo $d = \min \left\{ \frac{1}{3}, \frac{p - A^{a+1}}{2} \right\}$. Logo, se $p < d \leq \frac{p - A^{a+1}}{2}$ então

$$\frac{1}{p^2}x^{a+1} - \left(\frac{1}{p} - 1\right) < \frac{1}{p^2}A^{a+1} - \left(\frac{1}{p} - 1\right) < -1.$$

Logo, $|f_2(ix)| > 1$ e portanto $ix \notin \mathcal{G}$. $\square$

Teorema 4.4.5 Se $a > 1$, o espectro de S é desconexo.

Demonstração: Como $a > 1$, pelo teorema 4.4.1, o conjunto $\mathcal{K}_p$ é desconexo. Logo, o espectro de S é também desconexo, pois $\sigma(S) \subset \mathcal{K}_p$. $\square$

4.4.1 Propriedades da fronteira de $\mathcal{G}$

Proposição 4.4.5 $\partial\mathcal{G} = \{z \in \mathbb{C}, (f_n)_{n \geq 0} \text{ não é normal em } z\}$.

Demonstração: Seja $z \in \partial\mathcal{G}$, então a sequência $(f_n(z))_{n \geq 0}$ é limitada e para toda vizinhança V de z existe $w \in V$ tal que $|f_n(w)| \rightarrow +\infty$. Logo (f_n) não é normal em z .

Por outro lado, se $z \notin \partial\mathcal{G}$ então $z \in \text{int}(\mathcal{G})$ ou $z \notin \mathcal{G}$. Se $z \in \text{int}(\mathcal{G})$ então existe uma vizinhança U de z tal que $U \subset \mathcal{G}$. Logo (f_n) é normal em z pois ela é limitada em U . Se $z \notin \mathcal{G}$ então existe uma vizinhança W de z tal que $W \not\subset \mathcal{G}$. Logo $|f_n(x)| \rightarrow +\infty, \forall x \in W$. Assim (f_n) converge para $+\infty$ e portanto é normal. $\square$

Proposição 4.4.6 $1 \in \partial\mathcal{G}$.

Demonstração: Temos $1 \in \mathcal{G}$ pois $f_n(1) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{G} \subset \overline{D(0,1)}$ então $1 \in \partial\mathcal{G}$. $\square$

Proposição 4.4.7 $\partial\mathcal{G} \supset \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} f_n^{-1}\{1\}}$.

Demonstração: Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $z \in f_n^{-1}(1)$. Logo $f_n(z) = 1$ e $f_k(z) = 1, \forall k > n$, portanto $z \in \mathcal{G}$.

Seja V uma vizinhança de z , existe $x \in V$ tal que $|f_n(x)| > 1$ e $|f_{n+1}(x)| > 1$, logo $(f_k(x))$ não é limitada, portanto $x \notin \mathcal{G}$. Logo $z \in \partial\mathcal{G}$. $\square$

Pergunta: Será que $\partial\mathcal{G} = \overline{\bigcup f_n^{-1}\{1\}}$?

Generalização

Consideremos a sequência $(F_n)_{n \geq 0}$ dada pela relação

$$F_{n+d} = a_1 F_{n+d-1} + \dots + a_d F_n, \forall n \geq 0,$$

e com condições iniciais

$$F_0 = 1, F_n = a_1 F_{n-1} + \dots + a_n F_0 + 1, \forall 1 \leq n \leq d,$$

onde $a_i, 1 \leq i \leq d$ são inteiros não negativos que satisfazem as relações

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_d > 1.$$

Usando o algoritmo fominha, podemos escrever todo inteiro natural N , de forma única, como $N = \sum_{i=0}^{k(N)} \varepsilon_i(N) F_i$, onde os dígitos $\varepsilon_j(N)$ satisfazem a relação

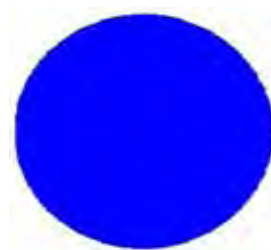
$$\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \dots \varepsilon_{i-d+1} <_{lex} a_1 a_2 \dots a_d, \forall i \geq d-1.$$

Seja $p(x) = x^d - a_1 x^{d-1} - \dots - a_{d-1} x - a_d$ o polinômio característico da sequência $(F_n)_{n \geq 0}$. É fácil provar que esse polinômio tem uma raiz dominante $\beta_d > 1$.

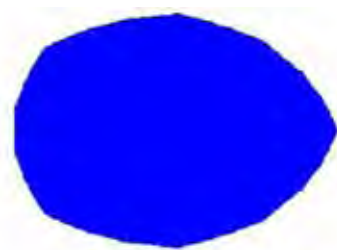
Sabemos que a soma de 1 na base $(F_n)_{n \geq 0}$ é dada por um transdutor finito (ver por exemplo [22]). Usando a mesma construção como no caso das bases quadráticas, podemos definir a máquina de somar estocástica associada a sequência $(F_n)_{n \geq 0}$ e podemos mostrar também que $\sigma_{pt} = \{\lambda \in \mathbb{C}, (q_n(\lambda)) \text{ não é limitada}\}$, onde $q_{F_i}(\lambda), 0 \leq i < d$ são polinômios fixos em λ , $q_{F_n} = \frac{1}{p} q_{F_{n-1}}^{a_1} q_{F_{n-2}}^{a_2} \dots q_{F_{n-d}}^{a_d} - \left(\frac{1}{p} - 1\right)$, para todo $n \geq d$ e $q_N(\lambda) = q_{F_0}^{\varepsilon_0} \dots q_{F_n}^{\varepsilon_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $N = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i F_i$ (greedy representação).

Imagens do conjunto $\mathcal{G}$

Caso $a = 2, b = 1$:



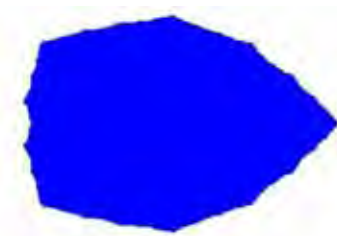
$p = 1$



$p = 0.9$



$p = 0.7$



$p = 0.8$



$p = 0.66$



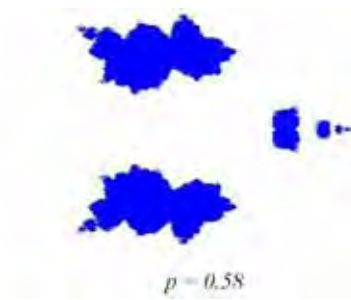
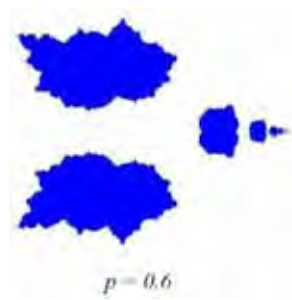
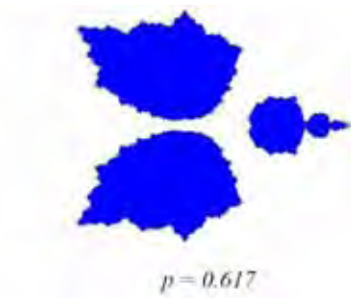
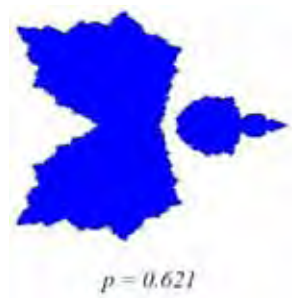
$p = 0.625$



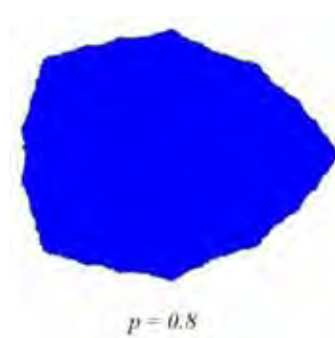
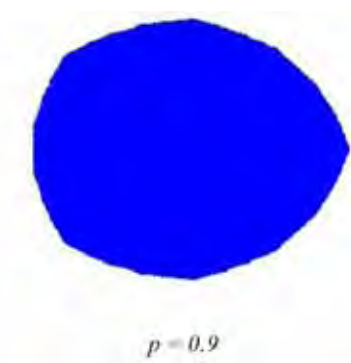
$p = 0.622$

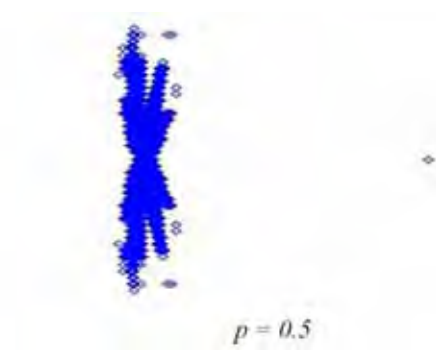
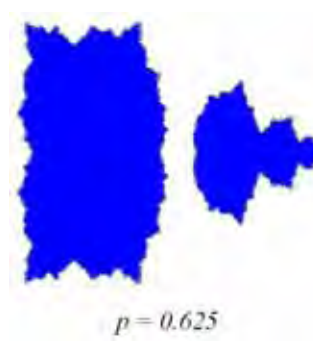
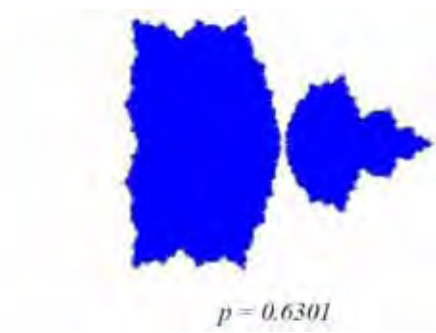
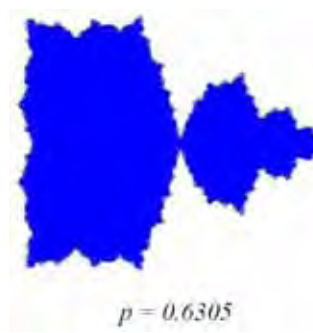
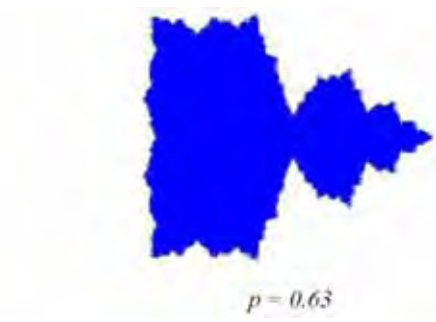
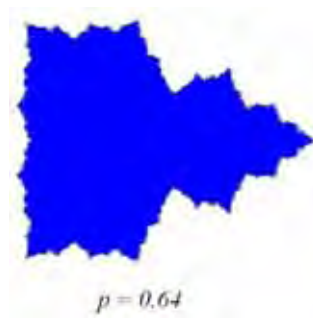


$p = 0.622$



Caso $a = b = 1$:





Capítulo 5

Propriedades Topológicas de uma Classe de Fractais de Rauzy

Neste capítulo estudaremos algumas propriedades topológicas e aritméticas de uma classe de fractais de Rauzy.

5.1 Introdução

Seja $a \geq 2$ um inteiro natural e considere o polinômio $P_a(x) = x^3 - ax^2 - x - 1$. É fácil verificar que $P_a(x)$ possui uma raiz real $\beta > 1$ e duas raízes λ e $\bar{\lambda}$ complexas conjugadas de módulo estritamente menor que 1.

Ao polinômio $P_a(x)$ podemos associar um conjunto $\mathcal{E}_a \subset \mathbb{C}$, definido por:

$$\mathcal{E}_a = \left\{ \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i \lambda^i, \forall i \geq 2, \varepsilon_i = 0, 1, \dots, a, \varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} <_{lex} a11, \varepsilon_3 \varepsilon_2 <_{lex} a1, \varepsilon_2 < a \right\},$$

onde $<_{lex}$ é a ordem lexicográfica.

O mais conhecido dos conjuntos $\mathcal{E}_a$ é o conjunto $\mathcal{E}_1$ chamado **Fractal de Rauzy Clássico**. Foi introduzido por G. Rauzy em 1982. Posteriormente foi estudado por vários matemáticos como A. Messaoudi [40], P. Arnoux [7] S. Ito e M. Kimura [32],

entre outros. O Fractal de Rauzy está relacionado com diversas áreas da matemática como sistemas dinâmicos, teoria dos números, entre outras. Em particular, sabe-se que ele é compacto, conexo, com interior simplesmente conexo e induz um azulejamento periódico do plano complexo módulo $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\lambda$.

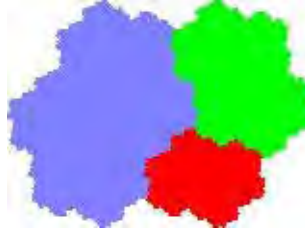


Fig. 27 Fractal de Rauzy Clássico

Neste trabalho vamos considerar os polinômios do tipo $P_{a,b}(x) = x^3 - ax^2 - bx - 1$, onde a e b são inteiros satisfazendo $a \geq 1$ e $b = a + 1$. $P_{a,b}(x)$ possui uma raiz real $\beta > 1$ e duas raízes λ e θ com módulo estritamente menor que 1. De modo análogo ao Fractal de Rauzy clássico, associamos ao polinômio $P_{a,b}(x)$ o conjunto definido da seguinte maneira:

Considere a sequência recorrente $(F_n)_{n \geq 0}$ definida por $F_0 = 0, F_1 = 0, F_2 = 1$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+3} = aF_{n+2} + bF_{n+1} + F_n$, onde $a \geq 1$ e $b = a + 1$.

Usando o algoritmo "Fominha" podemos provar que todo número inteiro se escreve de maneira única como $n = \sum_{i=2}^N \varepsilon_i F_i$, onde $\varepsilon_i \in \{0, 1, \dots, a\}$ e $\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} \varepsilon_{i-3} \varepsilon_{i-4} \prec_{lex} (a+1)00a1, \forall i \geq 6, \varepsilon_5 \varepsilon_4 \varepsilon_3 \varepsilon_2 \prec_{lex} (a+1)00a, \varepsilon_4 \varepsilon_3 \varepsilon_2 \prec_{lex} (a+1)00, \varepsilon_3 \varepsilon_2 \prec_{lex} (a+1)1, \varepsilon_2 \prec a$, onde $\prec_{lex}$ é a ordem lexicográfica.

Chamamos $\varepsilon_N \dots \varepsilon_2 = (\varepsilon_i)_{2 \leq i \leq N}$ de F -representação de n ou simplesmente F representação.

Definimos o Fractal de Rauzy associado a (F_n) por

$$\mathcal{E}_{a,b} = \left\{ \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i \varphi^i, \forall N, (\varepsilon_i)_{2 \leq i \leq N} \text{ é uma } F \text{ representação} \right\},$$

onde $\varphi^i = (\lambda^i, \theta^i)$ se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\varphi^i = \lambda^i$ se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Vamos supor por simplicidade que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. O conjunto $\mathcal{E}_{a,b} \subset \mathbb{C}$ é chamado fractal de Rauzy associado a sequência $(F_n)_{n \geq 0}$.

A fronteira do fractal de Rauzy clássico foi estudada primeiro por S. Ito e M. Kimura [32]. Eles mostraram que é uma curva de Jordan gerada pelo método de Dekking para construir objetos fractais. Em [39] Messaoudi mostrou que a fronteira de $\mathcal{E}$ é gerada por um autômato finito. Usando este fato mostrou que a fronteira de $\mathcal{E}$ é uma curva de Jordan e um quasi-círculo. B. Loridant, A. Messaoudi, J. Thuswaldner, P. Surer [36] estudaram propriedades do Fractal Rauzy associados a polinômios $x^3 - ax^2 - bx - 1, a \geq b \geq 1$. T. M. Rodrigues [49] estudou o caso $x^3 - ax^2 + x - 1, a \geq 2$

O estudo da fronteira de $\mathcal{E}_{a,b}$ está intimamente relacionado com o estudo dos α -desenvolvimentos, ou seja, a representação de números complexos na base α . O objetivo deste capítulo é estudar algumas propriedades da classe $\mathcal{E}_{a,b}$. Existem vários métodos para se construir o Fractal de Rauzy, um deles é via Sistemas de Numeração e beta-expansões que descrevemos na seguinte seção.

5.2 Sistemas de Numeração

5.2.1 β -Numeração

A β -numeração foi apresentada por Rényi em 1957. Serve para representar números reais na base β , de forma única, com dígitos que são inteiros naturais, usando o algoritmo “fominha”.

Definição 5.2.1 *Seja $\beta > 1$ um número real. Uma representação de um número*

$x \in \mathbb{R} \cap [0, \infty]$ na base β é uma sequência infinita $(x_i)_{i \leq k}, k \in \mathbb{N}, x_i \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$x = x_k \beta^k + x_{k-1} \beta^{k-1} + \dots + x_1 \beta + x_0 + x_{-1} \beta^{-1} + x_{-2} \beta^{-2} + \dots$$

Esse número é representado pela sequência $x = x_k x_{k-1} \dots x_1 x_0 x_{-1} x_{-2} \dots$

Denotamos por $\lfloor x \rfloor$ e $\{x\}$ a parte inteira e a parte fracionária do número x , respectivamente. Obtemos uma β -representação ou β -expansão usando o algoritmo “fominha”. Existe um número $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\beta^k \leq x < \beta^{k+1}$. Seja $x_k = \lfloor \frac{x}{\beta^k} \rfloor$ e $r_k = \{\frac{x}{\beta^k}\}$. Então para $i < k$, seja $x_i = \lfloor \beta r_{i+1} \rfloor$ uma fórmula de recorrência e $r_i = \{\beta r_{i+1}\}$. Temos então

$$x = x_k \beta^k + x_{k-1} \beta^{k-1} + \dots$$

se $k < 0$ ($x < 1$), colocamos $x_0 = x_{-1} = \dots = x_{k+1} = 0$.

Se uma β -representação termina com uma infinidade de zeros, omitimos esses zeros e dizemos que ela é finita. Se β é inteiro, os dígitos x_i pertencem ao conjunto $\{0, \dots, \beta - 1\}$ caso contrário pertencem ao conjunto $A = \{0, \dots, \lfloor \beta \rfloor\}$.

5.2.2 β -representação de Rényi

A β -representação de **Rényi**, pode ser definida da seguinte maneira: Sejam $\beta > 1$ e

$$T : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

uma transformação dada por $T_\beta(y) = \{\beta y\}$, onde $\{\}$ denota a parte fracionária.

Se $0 \leq x < 1$, a expansão definida acima coincide com a β -representação de Rényi. Se $x \in [0, 1[$ temos $x_{-j} = \lfloor \beta T_\beta^{j-1}(x) \rfloor$. Todo número real $x \geq 0$ pode ter o seguinte desenvolvimento,

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \beta^{-n}$$

onde x_n é definido da seguinte maneira: se $x > 1$ então $x_0 = \lfloor x \rfloor$ e $x_{n+1} = \lfloor \beta T^n(x) \rfloor, n \in \mathbb{N}$ e se $0 \leq x \leq 1$ então $x_0 = 0$ e $x_{n+1} = \lfloor \beta T^n(x) \rfloor, n \in \mathbb{N}$.

Se $x = 1$, os dois algoritmos ficam diferentes. A β -expansão de 1 é $1 = 1,000\dots$, enquanto a β -representação de Rényi de 1 é $d(1, \beta) = .t_{-1}t_{-2}\dots$, onde $t_{-j} = \lfloor \beta T_\beta^{j-1}(1) \rfloor, \forall j \geq 1$.

Definição 5.2.2 *Seja $Fin(\beta)$ o conjunto dos números reais não negativos que possuem uma β -expansão finita. Dizemos que β tem a propriedade de Finitude ou que β satisfaz a propriedade (F) se*

$$\mathbb{Z}[\beta] \cap [0, +\infty[\subset Fin(\beta),$$

onde $\mathbb{Z}[\beta]$ é o anel gerado por $\mathbb{Z}$ e β .

Definição 5.2.3 *(Ver [1], [2]) Dizemos que β é um número de **Pisot** se β é um inteiro algébrico com conjugados em relação a Galois com módulo menor do que 1. Além disso, se*

$$X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \dots + b_0$$

é polinômio minimal de β então β é dito unidade de Pisot se $b_0 = \pm 1$.

Definição 5.2.4 *Definimos $Fin_N(\beta)$ o conjunto dos números reais positivos cuja β -representação satisfaz $x_k = 0$ para todo $k < N$.*

Sabe-se que a classe dos números de Pisot que possuem a propriedade (F) é igual à classe dos números reais que são exatamente as raízes dominantes do polinômio da forma (com coeficientes inteiros):

$$x^3 - ax^2 - bx - 1, \quad a \geq 0 \text{ e } -1 \geq b \geq a + 1.$$

(se $b = -1$ adicionamos a restrição $a \geq 2$).

A β -representação de Rényi de 1 em relação a esse números é dada pela proposição seguinte:

Proposição 5.2.1 *Seja β um número de Pisot cúbico unitário e que satisfaz a propriedade (F) com polinômio minimal $x^3 - ax^2 - bx - 1$. Então uma das seguintes possibilidades abaixo ocorre:*

$$\begin{aligned}
\text{Se } 0 \geq b \geq a, \text{ então } d(1, \beta) &= .ab1, \\
\text{Se } b = -1 \text{ e } a \geq 2, \text{ então } d(1, \beta) &= .(a-1)(a-1)01, \\
\text{Se } b = a+1, \text{ então } d(1, \beta) &= .(a+1)00a1.
\end{aligned}$$

5.2.3 Sistema de Numeração sobre os Inteiros

Vamos descrever um sistema de numeração sobre os inteiros induzido pelas β -representações da seguinte maneira: supomos que $d(1, \beta) = .a_{-1} \dots a_{-t}$ onde $a_{-t} \neq 0$. Seja $(R_n)_{n \geq 0}$ a sequência de números inteiros definida por:

$$\begin{aligned}
R_0 &= 1, R_1 = a, R_2 a^2 + b, \\
R_{n+3} &= aR_{n+2} + bR_{n+1} + R_n, \forall n \geq 0.
\end{aligned}$$

Como o polinômio $Q(x) = x^t - a_{-1}x^{t-1} - \dots a_{-t}$ é múltiplo do polinômio $x^3 - ax^2 - bx - 1$, a sequência $(R_n)_{n \geq 0}$ satisfaz

$$R_{n+t} = a_{-1}R_{n+t-1} + a_{-2}R_{n+t-2} + \dots + a_{-t}R_n, \forall n \geq 0.$$

Proposição 5.2.2 *todo número inteiro n tem uma única R -representação $(\varepsilon_j)_{k(n) \geq j \geq 0}$ tal que $n = \sum_{j=0}^{k(n)} \varepsilon_j R_j$ com $\varepsilon_j \geq 0$. Em particular:*

- a) Se $a \geq b \geq 0$ e $a \neq 0$ então para todo $i \geq 2$, a palavra $\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} \prec_{lex} ab1, \varepsilon_1 \varepsilon_0 \prec_{lex} ab, \varepsilon_0 \prec_{lex} a$,
- b) Se $b = -1$ e $a \geq 2$ então para todo $i \geq 3$, $\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} \varepsilon_{i-3} \prec_{lex} (a-1)(a-1)01, \varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_0 \prec_{lex} (a-1)(a-1)0, \varepsilon_1 \varepsilon_0 \prec_{lex} (a-1)(a-1), \varepsilon_0 \prec_{lex} a$,
- c) Se $b = a+1$ e $a \geq 1$ então para todo $i \geq 4$, $\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} \varepsilon_{i-3} \varepsilon_{i-4} \prec_{lex} (a+1)00a1, \varepsilon_3 \varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_0 \prec_{lex} (a+1)00a, \varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_0 \prec_{lex} (a+1)00, \varepsilon_1 \varepsilon_0 \prec_{lex} (a+1)1, \varepsilon_0 < a$,
- d) Se $a = 0$ e $b = 1$ então para todo $i \geq 4$, $\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} \varepsilon_{i-3} \varepsilon_{i-4} \prec_{lex} 10001$ e $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$.

Demonstração: Os dígitos $(\varepsilon_j)_{k(n) \geq j \geq 0}$ são obtidos aplicando o algoritmo “fo-minha” para inteiros.

- a) Se $a \geq b \geq 0$ e $a \neq 0$, então $(R_n)_{n \geq 0}$ é uma sequência crescente de inteiros naturais. Logo, pela definição do algoritmo “greedy”, é fácil provar que para todo $0 \leq j \leq k(n)$, $\sum_{i=0}^j \varepsilon_i R_i < R_{j+1}$. Portanto,

$$\varepsilon_j \varepsilon_{j-1} \dots \varepsilon_{j-t+1} \prec_{lex} a_{-1} a_{-2} \dots a_{-t}, \forall j \geq t-1 \quad (5.1)$$

Pela relação (5.1) e a Proposição 5.2.1, temos $\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} \prec_{lex} ab1$. Como $n - \sum_{i=1}^{k(n)} \varepsilon_i R_i = \varepsilon_0 R_0 = \varepsilon_0 < R_1 = a$ e $n - \sum_{i=2}^{k(n)} \varepsilon_i R_i + \varepsilon_0 R_0 < R_2 = a^2 + b = aR_1 + bR_0$, obtemos $\varepsilon_0 < a$ e $\varepsilon_1 \varepsilon_0 \prec_{lex} ab$.

- b) Se $b = -1$ e $a \geq 2$, então usando o mesmo argumento do caso 1, obtemos que para todo $i \geq 3$, $\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} \varepsilon_{i-3} \prec_{lex} (a-1)(a-1)01$. As outras condições são obtidas, pois $\varepsilon_0 R_0 < R_1 = a$, $\varepsilon_1 R_1 + \varepsilon_0 R_0 < R_2 = (a-1)R_1 + (a-1)R_0$ e $\varepsilon_2 R_2 + \varepsilon_1 R_1 + \varepsilon_0 R_0 < R_3 = (a-1)R_2 + (a-1)R_1$.
- c) Se $b = a+1$ e $a \geq 1$ então pelo mesmo argumento do caso (a) temos para todo $i \geq 4$, $\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} \varepsilon_{i-3} \varepsilon_{i-4} \prec_{lex} (a+1)00a1$. As outras inclusões são obtidas pois $R_1 = aR_0$, $R_2 = (a+1)R_1 + R_0$, $R_3 = (a+1)R_2$ e $R_4 = (a+1)R_3 + aR_0$.
- d) Se $a = 0$ e $b = 1$ então a relação (2.1) e a proposição 5.2.1 implicam que para todo $i \geq 4$, $\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} \varepsilon_{i-3} \varepsilon_{i-4} \prec_{lex} 10001$. Por outro lado, temos $R_0 = R_2 = R_3 = R_4 = 1$, $R_1 = 0$, $R_5 = R_6 = 2$. Então temos $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$.

□

O caso $a \geq b \geq 1$ foi estudado por B. Loridan, A. Messaoudi, P. Surer, J. M. Thuswalder [36], e o caso $b = -1$, por T. M. Rodrigues [49].

5.3 Propriedades do Fractal de Rauzy

Notações: Seja $\mathcal{L} = \{(\varepsilon_i)_{i \geq k}, k \in \mathbb{Z}, \forall n \geq k, (\varepsilon_i)_{k \leq i \leq n} \text{ é uma } F\text{-representação}\}$, isto é, para todo $n \geq k+4$, $\varepsilon_n \varepsilon_{n-1} \varepsilon_{n-2} \varepsilon_{n-3} \varepsilon_{n-4} <_{lex} (a+1)00a1$, $\varepsilon_{k+3} \varepsilon_{k+2} \varepsilon_{k+1} \varepsilon_k <_{lex} (a+1)00a$, $\varepsilon_{k+2} \varepsilon_{k+1} \varepsilon_k <_{lex} (a+1)00$, $\varepsilon_{k+1} \varepsilon_k <_{lex} (a+1)1$, $\varepsilon_k < a$.

Denotamos por $\mathcal{N}_f = \{(\varepsilon_i)_{k \leq i \leq n}, k, n \in \mathbb{Z}, (\varepsilon_i)_{k \leq i \leq n} \text{ é uma } F\text{-representação}\}$.

Teorema 5.3.1 *O Fractal de Rauzy, $\mathcal{E}_{a,b}$ induz um azulejamento periódico do plano $\mathbb{C}$, isto é, $\mathbb{C} = \bigcup_{p,q \in \mathbb{Z}} (\mathcal{E}_{a,b} + p + q\lambda)$ e para todo $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$, $\text{int}(\mathcal{E}_{a,b} + p + q\lambda) \cap (\mathcal{E}_{a,b} + r + s\lambda) \neq \emptyset$ implica que $p = q$ e $r = s$.*

Para provar o Teorema 5.3.1 precisamos do seguinte resultado clássico (veja [1], [49]):

Lema 5.3.1 *As seguintes afirmações são válidas:*

- (i) *Para todo $n \geq 2$, temos $\beta^n = F_n\beta^2 + (F_{n-2} + bF_{n-1})\beta + F_{n-1}$. Em particular, se $(\varepsilon_i)_{2 \leq i \leq N} \in (N)_f$, então $\sum_{i=2}^N \varepsilon_i \beta^i = n\beta^2 + r(n)\beta + s(n)$, onde $n = \sum_{i=2}^N \varepsilon_i F_i$, $r(n) = \sum_{i=2}^N \varepsilon_i (bF_{i-1} + F_{i-2})$ e $s(n) = \sum_{i=2}^N \varepsilon_i F_{i-1}$.*
- (ii) *Seja $z \in \mathbb{Z}[\beta] \cap \mathbb{R}^+$ então existe $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathcal{N}_f$ tal que $z = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \beta^i$.*
- (iii) *Sejam $(a_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathcal{N}_f$ e $(b_i)_{l' \leq i \leq \infty} \in \mathcal{L}$ tais que $a_l > 0$ e $b_{l'} > 0$. Se $\sum_{i=l}^N a_i \lambda^i = \sum_{i=l'}^{\infty} b_i \lambda^i$ então $l = l'$ e para todo $i \geq N$, $b_i = 0$ e para todo $l \leq i \leq N$, $a_i = b_i$.*
- (iv) *Seja $(\varepsilon_i)_{2 \leq i \leq N} \in \mathcal{N}_f$. Então, $\sum_{i=2}^N \varepsilon_i \lambda^i \in \text{int}(\mathcal{E})$. Em particular, $0 \in \text{int}(\mathcal{E})$.*
- (v) *Sejam $c, d \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda^2 = c + d\lambda$, então $1, c$ e d são $\mathbb{Q}$ -Linearmente Independentes.*

Demonstração do Teorema 5.3.1: A idéia da prova é exatamente a mesma feita em [49] e ela se generaliza a uma larga classe de Fractais de Rauzy associados com polinômios cuja raiz dominante é um número de Pisot satisfazendo a propriedade (F). $\square$

Proposição 5.3.1 $\mathbb{C} = \bigcup_{p,q \in \mathbb{Z}} (\mathcal{E}_{a,b} + p + q\lambda)$.

Demonstração: Seja $z \in \mathbb{C}$, vamos provar que existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $z + m + n\lambda \in \mathcal{E}_{a,b}$.

Seja $\lambda^2 = c + \lambda d$, $c, d \in \mathbb{R}$. Pelo item (v) do Lema 5.3.1, $1, c, d$ são $\mathbb{Q}$ -linearmente independentes. Logo, pelo teorema de Kronecker, o conjunto $\{n\lambda^2 + p\lambda + q, n \in$

$\mathbb{N}, p, q \in \mathbb{Z}$ é denso em $\mathbb{C}$. Logo, dado $\epsilon > 0$, existe uma sequência $(z_k)_k \geq 0$ tal que

$$z_k = n_k \lambda^2 + p_k \lambda + q_k, n_k \in \mathbb{N}, p_k, q_k \in \mathbb{Z}$$

e para todo $k \geq k_0, |z_k - z| < \epsilon$.

Seja $A_k = n_k \lambda^2 + r(n_k) \lambda + s(n_k)$, onde $r(n_k)$ e $s(n_k)$ são definidos no item (i) do Lema 5.3.1. Temos $A_k \in \mathcal{E}_{a,b}$.

Por outro lado,

$$A_k = z_k + t_k \lambda + m_k,$$

onde $t_k = r(n_k) - p_k$ e $m_k = s(n_k) - q_k$. Logo, $z_k + t_k \lambda + m_k \in \mathcal{E}$.

Como $\mathcal{E}$ é compacto, temos para todo $k \geq k_0$,

$$|z + t_k \lambda + m_k| \leq |z - z_k| + |z_k + t_k \lambda + m_k| < \epsilon + d,$$

onde $d = \max\{|z|, z \in \mathcal{E}\}$.

Como $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\lambda$ é um reticulado, $B(z, \epsilon + d)$ contém somente um número finito de $t_k \lambda + m_k$, logo existe uma sequência crescente $(k_i)_{i \geq 1}$ de números inteiros tal que para todo $i, j \in \mathbb{N}$ $t_{k_i} \lambda + r_{k_i} = t_{k_j} \lambda + r_{k_j}$. Logo, existem $t, r \in \mathbb{Z}$ tais que $t_{k_i} = t_{k_j} = t$ e $r_{k_i} = r_{k_j} = r$, para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Como $z_{k_i} + t_{k_i} \lambda + m_{k_i} \in \mathcal{E}$, $z_{k_i} \rightarrow z$ e $\mathcal{E}$ é fechado, temos que $z + t \lambda + r \in \mathcal{E}$ □

Proposição 5.3.2 *Para quaisquer $u, v \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\lambda$ temos $\text{int}(\mathcal{E}_{a,b} + u) \cap (\mathcal{E}_{a,b} + v) \neq \emptyset$ implica que $u = v$*

Demonstração: Basta provar que se $\text{int}(\mathcal{E}_{a,b} + u) \cap \mathcal{E}_{a,b} \neq \emptyset, u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\lambda$ então $u = 0$. Assuma por absurdo que existem inteiros $p, q \in \mathbb{Z}$ e um elemento $z = \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \lambda^i \in \mathcal{E}_{a,b}$ tal que $z + p + q\lambda \in \text{int}(\mathcal{E}_{a,b})$. Logo existe um inteiro $n_0 \geq 0$ tal que para todo $n \geq n_0$

$$\sum_{i=2}^n \varepsilon_i \lambda^i + p + q\lambda \in \mathcal{E} \tag{5.3}$$

Caso 1: O conjunto $\{i \geq 2, \varepsilon_i \neq 0\}$ é infinito.

Neste caso, se $\beta > 1$ existe um inteiro $N \geq n_0$ tal que $\sum_{i=2}^N \varepsilon_i \beta^i + p + q\beta > 0$. Pelo item (ii) do Lema 5.3.1 deduzimos que

$$\sum_{i=2}^N \varepsilon_i \beta^i + p + q\beta = \sum_{i=l}^M d_i \beta^i \quad (5.4)$$

onde $(d_i)_{l \leq i \leq M} \in \mathcal{N}_f$, $l, M \in \mathbb{Z}$

A partir de (5.3) e (5.4) temos que $\sum_{i=2}^N \varepsilon_i \lambda^i + p + q\lambda = \sum_{i=2}^{\infty} e_i \lambda^i = \sum_{i=l}^M d_i \lambda^i \in \mathcal{E}$.

Assim, pelo item (iii) do Lema 5.3.1, existe um inteiro $K \leq M$ tal que $e_i = 0$ para todo $i \geq K$. Logo

$$\sum_{i=2}^K \varepsilon_i \beta^i + p + q\beta = \sum_{i=2}^K e_i \beta^i = \sum_{i=l}^M d_i \beta^i.$$

Pelo item (i) do Lema 5.3.1 temos que

$$n\beta^2 + (r(n) + q)\beta + (s(n) + p) = l\beta^2 + r(l)\beta + s(l)$$

onde $n = \sum_{i=2}^N \varepsilon_i F_i$ e $l = \sum_{i=2}^K e_i F_i$. Assim, $l = n$ e $\varepsilon_i = e_i$ para todo i (devido a unicidade na base F_i). Portanto, $p = q = 0$.

Caso 2: O conjunto $\{i \geq 2, \varepsilon_i \neq 0\}$ é finito.

Seja $N = \max\{i \geq 2, \varepsilon_i \neq 0\}$. Se $\sum_{i=2}^N \varepsilon_i \beta^i + p + q\beta \geq 0$ então usa-se o mesmo argumento que no Caso 1.

Vamos supor agora que $\sum_{i=2}^N \varepsilon_i \beta^i + p + q\beta < 0$. Temos que

$$\sum_{i=2}^N \varepsilon_i \lambda^i + p + q\lambda = \sum_{i=2}^{\infty} d_i \lambda^i,$$

onde $(d_i)_{i \geq 2} \in \mathcal{L}$.

Pelo item (iv) do Lema 5.3.1, $\sum_{i=2}^N \varepsilon_i \lambda^i \in \text{int}(\mathcal{E})$. Logo existe um inteiro não negativo M tal que

$$-p - q\lambda + \sum_{i=2}^M d_i \lambda^i = \sum_{i=2}^{\infty} e_i \lambda^i \in \mathcal{E}.$$

Como $-p - q\beta + \sum_{i=2}^M d_i\beta^i > 0$ então $-p - q\beta + \sum_{i=2}^M d_i\beta^i = \sum_{i=l}^K f_i\beta^i$, onde $(f_i)_{l \leq i \leq K} \in \mathcal{N}_f$. Logo,

$$-p - q\lambda + \sum_{i=2}^M d_i\lambda^i = \sum_{i=l}^K f_i\lambda^i = \sum_{i=2}^{\infty} e_i\lambda^i$$

onde $(f_i)_{l \leq i \leq K} \in \mathcal{N}_f$ e $l, K \in \mathbb{Z}$.

Pelo item (iii) do Lema 5.3.1 deduzimos que existe um inteiro L tal que $e_i = 0$ para todo $i \geq L$ e pelo mesmo argumento usado no Caso 1 temos que $p = q = 0$. $\square$

Teorema 5.3.2 *A fronteira de $\mathcal{E}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

$$1) \quad \partial\mathcal{E} = \bigcup_{u \in A} \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + u) \quad (\text{ver fig. 28 e 29})$$

onde A é um conjunto finito contido em $\mathbb{Z} + \lambda\mathbb{Z}$, cuja cardinalidade é par e maior ou igual a 8 e $\{\lambda, 1 + b\lambda, 2 + (a + b)\lambda, 1 + a\lambda, -\lambda, -1 - b\lambda, -2 - (a + b)\lambda, -1 - a\lambda\} \subset A$.

$$2) \text{ Seja } z \in \partial\mathcal{E}, \text{ então existem } (\varepsilon_i)_{i \geq 2} \text{ e } (\varepsilon'_i)_{i \geq l} \in \mathcal{L}, l < 2 \text{ tais que } z = \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i\lambda^i = \sum_{i=l}^{+\infty} \varepsilon'_i\lambda^i \text{ e } \varepsilon'_l \neq 0.$$

Demonstração:

1) Seja $z \in \partial\mathcal{E} = \mathcal{E} \setminus \text{int}(\mathcal{E})$. Então existe uma sequência $(z_n)_{n \geq 0}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z \text{ e } z_n \notin \mathcal{E}, \forall n \geq 0.$$

Pela Proposição 5.3.1, existe uma sequência $(p_n)_{n \geq 0}$ de elementos de $\mathbb{Z} + \lambda\mathbb{Z}$ tal que para todo $n \geq 0, z_n \in \mathcal{E} + p_n, \forall n \geq 0$. Logo $(p_n)_{n \geq 0}$ é limitada. Como $\mathbb{Z} + \lambda\mathbb{Z}$ é um grupo discreto, então $(p_n)_{n \geq 0}$ possui um número finito de termos. Logo, existe uma subsequência $(p_{k_n})_{n \geq 0}$ de $(p_n)_{n \geq 0}$ tal que para todo $n, p_{k_n} = p \in \mathbb{Z} + \lambda\mathbb{Z}$.

Como $z_{k_n} \in \mathcal{E} + p$ temos que $z = \lim z_{k_n} \in \mathcal{E} + p$ (pois $\mathcal{E} + p$ é fechado). Portanto,

$$\partial\mathcal{E} \subset \bigcup_{p \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\lambda} \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + p).$$

Por outro lado, se $z \in \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + p)$, $p \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\lambda \setminus \{0\}$. Logo, pela proposição 5.3.2, $z \notin \text{int}(\mathcal{E})$, portanto, $z \in \partial\mathcal{E}$. Assim, $\partial\mathcal{E} = \bigcup_{p \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\lambda} \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + p) = \bigcup_{p \in A} \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + p)$, onde $A = \{p \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\lambda, \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + p) \neq \emptyset\}$.

Vamos provar que A é finito. De fato, seja $p \in A$ então existem $x, y \in \mathcal{E}$ tais que $p = x - y$. Logo $|p| \leq 2M$, onde $M = \max\{|z|, z \in \mathcal{E}\}$. Assim, $A \subset B(0, 2M)$. Portanto, A é finito pois $A \subset \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\lambda$. Finalmente a cardinalidade de A é par pois se $u \in A$, então $-u \in A$.

Vamos provar agora que $\{\lambda, 1 + b\lambda, 2 + (a + b)\lambda, 1 + a\lambda, -\lambda, -1 - b\lambda, -2 - (a + b)\lambda, -1 - a\lambda\} \subset A$.

Podemos verificar facilmente que

$$\begin{aligned} -\lambda^2 &= \sum_{i=1}^{+\infty} (a\lambda^{5i-2} + (a+1)\lambda^{5i+1}) \\ &= \lambda + (a-1)\lambda^2 + \sum_{i=1}^{+\infty} (a\lambda^{5i} + (a+1)\lambda^{5i+2}) \\ &= 1 + b\lambda + (a-1)\lambda^2 + \sum_{i=1}^{+\infty} (a\lambda^{5i-1} + (a+1)\lambda^{5i+2}) \\ &= -1 - a\lambda + \sum_{i=1}^{+\infty} (a\lambda^{5i-2} + (a+1)\lambda^{5i}) \end{aligned}$$

Logo, $-\lambda^2 \in \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + \lambda) \cap (\mathcal{E} + 1 + b\lambda) \cap (\mathcal{E} - 1 - a\lambda)$. Portanto, $\lambda, 1 + b\lambda$ e $-1 - a\lambda \in A$.

Daí, $-\lambda^2 - \lambda \in \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} - \lambda) \cap (\mathcal{E} + 1 + a\lambda) \cap (\mathcal{E} - 1 - b\lambda)$.

$$-\lambda^2 - 1 - b\lambda \in \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} - 1 - b\lambda) \cap (\mathcal{E} - 1 - a\lambda) \cap (\mathcal{E} - 2 - (a + b)\lambda).$$

Logo, $-2 - (a + b)\lambda \in A$. Assim, o conjunto $\{\pm\lambda, \pm(1 + b\lambda), \pm(2 + (a + b)\lambda), \pm(1 + a\lambda)\}$ está contido em A .

2) Seja $z \in \partial\mathcal{E}$. Então

$$z = n + p\lambda + \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i \lambda^i = \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon'_i \lambda^i,$$

onde $(\varepsilon_i)_{i \geq 2}, (\varepsilon'_i)_{i \geq 2} \in (L)$ e $n, p \in \mathbb{Z}$.

Seja $z_k = n + p\lambda + \sum_{i=2}^k \varepsilon_i \lambda^i$. Temos que $\lim_{k \rightarrow +\infty} z_k = n + p\lambda + \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i \lambda^i = \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon'_i \lambda^i = z$. Por outro lado, para todo k , $z_k = \sum_{i=l_k}^{N_k} \varepsilon''_{i,k} \lambda^i$, $\varepsilon''_{i,k} \in \mathcal{D}^\infty$ e $\varepsilon''_{l_k,k} > 0$, com $l_k < 2$, pois caso contrário $n = p = 0$. Além do mais, existe $s \in \mathbb{Z}$, $s < l_k, \forall k \in \mathbb{N}$ (pois z_k é limitado).

É possível provar que cada $\mathcal{E}_t$ é compacto de forma análoga a que foi feita para $\mathcal{E}$. Logo, $\bigcup_{t=s}^1 \mathcal{E}_t$ é compacto, e portanto fechado. Então, $z = \lim_{k \rightarrow +\infty} z_k \in \bigcup_{t=s}^1 \mathcal{E}_t$. Assim, $z = \sum_{i=l}^{+\infty} \varepsilon''_i \lambda^i$, $(\varepsilon''_i)_{l \leq i \leq +\infty} \in \mathcal{L}$, $l < 2$.

□

Azulejamento do plano $\mathbb{C}$ com oito vizinhos (caso $a = 1$ e $b = 2$.)



Fig. 28: Fractal de Rauzy

Azulejamento do plano $\mathbb{C}$ com oito vizinhos (caso $a = 2$ e $b = 3$.)



Fig. 29: Fractal de Rauzy

Referências Bibliográficas

- [1] S. Akiyama, *Cubic Pisot units with finite beta expansions*, Algebraic Number and Diophantine Analysis (2000), 11-26.
- [2] S. Akiyama, *Self affine tiling and Pisot numeration system*, Number Theory and its Applications, (1999), 7-17.
- [3] S. Akiyama, *On the boundary of self affine tilings generated by Pisot numbers*, Journal of Math. Soc. Japan, (2002), 283- 308.
- [4] J. P. Allouche, *Arithmétique et automates finis*, Astérisque 147-148 (1987) 13-26, 343.
- [5] J. P. Allouche, *Automates finis en théorie des nombres*, Exposition Math. 5 (1987), 239-266.
- [6] E. H. Abdalaoui, A. Messaoudi, *On the spectrum of stochastic perturbations of the shift map and Julia sets*, Preprint 2011.
- [7] P. Arnoux, *Un exemple de semi – conjugaison entre un échange d'intervalles et une translation sur le tore*, Bull. Soc. Math. France 116 (1988), 489-500.
- [8] P. Arnoux, S. Ito, *Pisot substitutions and Rauzy Fractal*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 8 (2001), 181-207.
- [9] P. Arnoux, G. Rauzy, *Représentation géométrique de suites de complexité $2n + 1$* , Bull. Soc. Math. France 119 (1991), 101-117.

-
- [10] P. Armoux, J. C. Yoccoz, *Construction de difféomorphismes pseudo – Anosov*, C. R. Acad. Sci. Paris, 202(1981), 75-78.
 - [11] M. P. Béal, D. Perrin, *Symbolic dynamics and finite automata*, Handbook of formal languages, vol. 2, pp. 463-505, Springer, Berlin 1997.
 - [12] V. Berthé, *Autour du système de numération d'Ostrowski*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 8 (2001), 209-239.
 - [13] Z. I. Borevich, I. R. Shafarevich, *Number Theory*, Academic Press, New York, 1966.
 - [14] H. Bruin, G. Keller, M. St. Pierre, *Adding machines and wild attractors*, Ergodic Theory Dynamical Systems 17 (1997), 1267-1287.
 - [15] V. Bruyère, *Automata and numeration systems*, Sémin. Lothar. Combin. 35 (1995), 19 pp.
 - [16] W. W. L. Chen, *Linear functional analysis*, Imperial College, University of London, 1983.
 - [17] N. Chekhova, P. Hubert, A. Messaoudi, *Propriétés combinatoires, ergodiques et arithmétiques de la substitution de Tribonacci*, J. Théor. Nombres Bordeaux 13 (2001), 371-394.
 - [18] V. Canterini, A. Siegel, *Geometric representation of substitutions of Pisot Type*, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), 5121-5144.
 - [19] F. M. Dekking, *The spectrum of dynamical systems arising from substitutions of constant length*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 44 (1977/78), 221-239.
 - [20] F. M. Dekking, *Recurrent Sets*, Advances in mathematics 44(1982), 78-104.
 - [21] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, ABP, 2003.

-
- [22] S. Eilenberg, *Automata, languages, and machines*, Volume 1, Academic Press, New York and London (1974)
- [23] K. Falconer, *Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications*, 1990
- [24] D. J. Feng, Z. Y. Wen, *A property of Pisot numbers*, Journal of Number Theory 97 (2002), no. 2, 305-316.
- [25] N. P. Fogg, *Substitutions in dynamics*, Arithmetics and Combinatorics, Springer-Verlag, Berlin, 2002. Lecture notes in mathematics, 1794. Edited by: V. Berth  , S. Ferenczi, C. Mauduit, A. Siegel.
- [26] A. S. Fraenkel, *Systems of numeration*, Amer. Math. Monthly 92 (1985), 105-114.
- [27] C. Frougny, *Representation of numbers and finite automata*, Math. Systems Theory 25 (1992), 37-60.
- [28] C. Frougny, B. Solomyak, *Finite Beta – expansions*, Ergodic Theory and Dynamical Systems 12 (1992), 713-723.
- [29] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford Science Publications, 1979.
- [30] J. E. Hopcroft, J. D. Ullman, *Introduction to automata theory, languages and computation*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1979.
- [31] P. Hubert, A. Messaoudi, *Best simultaneous diophantine approximation of Pisot numbers and Rauzy Fractals*. Acta Arith. 124 (2006), 1-15.
- [32] S. Ito, M. Kimura, *On the Rauzy fractal*, Japan J. Indust. Appl. Math 8 (1991) 461-486.
- [33] S. Ito, Y. Sano, *On periodic β – expansions of Pisot Numbers and Rauzy fractals*, Osaka J. Math. 38 (2001), 349-368.

-
- [34] P. R. Killen, T. J. Taylor, *A stochastic adding machine and complex dynamics*, Nonlinearity 13 (2000) 1889-1903.
- [35] P. R. Killen, T. J. Taylor, *How the propagation of error through stochastic counters affects time discrimination and other psychophysical judgements*, Psychol. Rev. 107, 430-59.
- [36] B. Loridant, A. Messaoudi, P. Surer, J. M. Thuswalder, *Topological properties for a class of cubic Rauzy Fractal*, preprint 2011.
- [37] S. Maingot, D. Manceau, *Théorie Spectrale*, Laboratoire de Mathématiques appliquées du Havre, Université du Havre, 2009.
- [38] A. Messaoudi, *Combinatorial and geometrical properties of a class of fractals*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin, v. 12, n. 4 (2005), 625-633.
- [39] A. Messaoudi, *Frontière du fractal de Rauzy et systèmes de numération complexe*, Acta Arithmetica, XCV. 3(2000), 195-224.
- [40] A. Messaoudi, *Propriétés arithmétiques et dynamiques du fractal de Rauzy*, J. Théor. Nombres Bordeaux 10 (1998), 135-162.
- [41] A. Messaoudi, *Propriétés arithmétiques et topologiques d'une classe de fractales*. Acta Arithmetica 121 (2006), no. 4, 341–366.
- [42] A. Messaoudi, *Systèmes de numération et automates*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 334 (2002), no. 12, 1043–1046.
- [43] A. Messaoudi, D. Smania, *Eigenvalues of Fibonacci stochastic adding machine*, Stochastics and Dynamics, 2010, 291-313.
- [44] M. G. Nadkarni, *Spectral theory of dynamical systems*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1998.

-
- [45] J. Y. Ouyard, *Probabilités* Volume 2, Cassini, Paris, 2009.
 - [46] W. Parry, *On the β – expansions of real numbers*, Acta Math. Acad. Sci. Hungaray 11(1960), 401-416.
 - [47] G. Rauzy, *Nombres algébriques et substitutions*, Bull. Soc. Math. France, 110 (1982), 147-178.
 - [48] A. Rényi, *Representations of real numbers and their ergodic properties*, Acta Math. Sci. Hungaray 8 (1957), 477-493.
 - [49] T. M. Rodrigues, *Propriedades aritméticas e topológicas de uma classe de Fractais de Rauzy*, tese doutorado, ICMC - USP, São Paulo, 2010.
 - [50] Y. Sano, *On purely periodic β – expansions of pisot numbers*, Nagoya Math. J. Volume 166 (2002), 183-207.
 - [51] Y. Sano, S. Ito, *On periodic β – expansions of Pisot numbers and Rauzy fractals*, Osaka J. Math. 38 (2001), 349-368.
 - [52] E. Seneta, *Non – negative matrices and Markov chains*, Springer Series in Statistics No. 21. U.S.A. 2006.
 - [53] V. F. Sirvent, Y. Wang, *Self – affine tiling via substitutions dynamical systems and Rauzy fractal*, Pacific Journal of Mathematics, 206 (2002), 465-485.
 - [54] W. P. Thurston, *Groups, tilings and finite state automata*, AMS Colloquim lectures 1 (1990).
 - [55] R. A. Uceda, *Propriedades topológicas dos conjuntos de Julia*, Dissertação Mestrado, Universidade Estadual Paulista, Julio de Mesquita Filho, 81f, (2008)
 - [56] R. A. Uceda, A. Messaoudi, *Autovalores da matriz de truncamento do operador de transição da máquina de somar em base 2*, Artigo em preparação.

- [57] K. Yoshida, *Functional analysis*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, US, 1980.
- [58] E. Zeckendorf, *Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 41 (1972) 179-182.