

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE FÍSICA APLICADA

Convergência de órbitas para o estado estacionário em
mapas bidimensionais discretos

Mayla Aparecida Marques de Almeida

**INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS
RIO CLARO**

2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Mayla Aparecida Marques de Almeida

**Convergência de órbitas para o estado estacionário em
mapas bidimensionais discretos**

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
do Câmpus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Fi-
lho", como parte dos requisitos para a ob-
tenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Juliano Antônio de
Oliveira Co-orientador: Prof. Dr. Edson
Denis Leonel

Rio Claro - SP
2025

A447c

Almeida, Mayla Aparecida Marques de

Convergência de órbitas para o estado estacionário em mapas
bidimensionais discretos / Mayla Aparecida Marques de Almeida. --
Rio Claro, 2025

47 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientador: Juliano Antônio de Oliveira

Coorientador: Edson Denis Leonel

1. Sistemas não lineares. 2. Mapeamentos bidimensionais. 3.
Expoentes de Lyapunov. 4. Atratores caóticos. I. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Mayla Aparecida Marques de Almeida

Convergência de órbitas para o estado estacionário em mapas bidimensionais discretos

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
do Câmpus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Fi-
lho", como parte dos requisitos para a ob-
tenção do título de Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Prof. Dr. José Danilo Szezech Junior
UEPG/Ponta Grossa (PR)

Prof. Dr. Makoto Yoshida
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Conceito: Aprovado

Rio Claro (SP), 21 de maio de 2025.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família e amigos por fazerem parte de mais uma etapa da minha jornada acadêmica.

Agradeço profundamente ao prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira pela orientação, dedicação e paciência durante o desenvolvimento do projeto. Agradeço ainda ao prof. Dr. Edson Denis Leonel pelo auxílio e co-orientação indispensáveis para este trabalho.

Agradeço aos amigos do Grupo de Investigação em Sistemas Complexos, em especial André, Célia, Fábio, Matheus e Rodrigo, pelo convívio, pela constante ajuda, pela amizade e parceria durante esses dois anos.

Agradecimentos especiais a Ana, Jessyca, Larielle, Leonardo, Livia, Natália, Nívea, Maria Júlia e Pedro, por me proporcionarem as melhores lembranças.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil (309649/2021-8).

Resumo

Neste trabalho, será considerada uma família de mapeamentos não lineares bidimensionais descritos em termos das variáveis de ação e ângulo. O mapeamento é parametrizado por um parâmetro de controle, que regula a intensidade da não linearidade; por um parâmetro que determina o grau de dissipação; e por um expoente dinâmico. Para determinadas escolhas desses parâmetros, bem como da nomeação das variáveis de ação e ângulo, é possível recuperar diferentes mapeamentos já conhecidos na literatura. Nosso principal objetivo de pesquisa será analisar a convergência das órbitas para o estado estacionário por meio de uma descrição fenomenológica robusta da abordagem de escalonamento nas bifurcações, o que nos permitirá obter um conjunto de expoentes críticos que definem classes de universalidade para bifurcações. Avançaremos nos estudos utilizando expoentes de Lyapunov para caracterizar o caos e investigaremos com cuidado o fenômeno conhecido como crise de fronteira, a fim de analisar o cruzamento entre variedades estáveis e instáveis.

Palavras-chave: Sistemas não lineares, Mapeamentos bidimensionais, Expoentes de Lyapunov, Atratores caóticos.

Abstract

A family of two-dimensional nonlinear mappings described in the action and angle variables will be considered. The mapping is parameterized by a control parameter that controls the intensity of nonlinearity, by a parameter controlling the amount of dissipation, and by a dynamical exponent such that for certain choices of its values and naming the action and angle variables, we will recover different mappings known in the literature. Our main research focus will be to analyze the convergence of orbits to the steady state through a robust phenomenological description of the scaling approach at bifurcation, which will lead us to obtain a set of critical exponents that define universality classes of bifurcations. We will advance our studies using Lyapunov exponents to characterize chaos and carefully investigate the phenomenon known as boundary crises to analyze the crossing of stable and unstable manifolds.

Keywords: Nonlinear systems, Two-dimensional mappings, Lyapunov Exponents, Chaotic Attractors.

*No fundo do sistema caótico,
mudanças sutis na estrutura quase
sempre causam vastas alterações no
comportamento.*

*Comportamento complexo e
controlável parece suprimido. -
Stuart Kauffman*

Lista de Figuras

1	Atrator de Lorenz para os parâmetros $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = \frac{8}{3}$; (a) z vs. x , (b) y vs. x , (c) z vs. y e (d) y vs. t . Figura retirada da referência [5].	12
1.1	Espaço de fases para o mapeamento (1.8), considerando $\gamma = 1$: (a) $\delta = 1$ e $\epsilon = 0,01$; (b) $\delta = 0,99$ e $\epsilon = 0,01$; e (c) $\delta = 0,87$ e $\epsilon = 0,001$	20
2.1	Diagrama de órbitas para o mapa (1.8), considerando $\delta = 0,75$ e $\gamma = 1$. Em (a) and (b), temos I vs. ϵ , enquanto (c) e (d) mostram θ vs. ϵ	24
2.2	Órbitas periódicas obtidas aplicando os parâmetros $\delta = 0,999$, $\epsilon = 0,18$ e $\gamma = 1$	25
2.3	Divergência entre duas condições iniciais. Figura retirada da referência [22].	26
2.4	Comportamento do expoente de Lyapunov para o caso conservativo. Cinco condições iniciais foram escolhidas e cada uma foi iterada 10^8 vezes. Os parâmetros utilizados foram $\delta = 1$, $\gamma = 1$ e $\epsilon = 0,01$	29
2.5	Curva do comportamento do expoente de Lyapunov com os parâmetros de controle $\epsilon = 0,001$, $\delta = 0,87$ e $\gamma = 1$. Cinco condições iniciais foram escolhidas e cada uma foi iterada 10^8 vezes. A Fig. 2.5(a) mostra o comportamento dos expoentes de Lyapunov positivos e a Fig. 2.5(b), dos negativos. Em (c), a soma das médias dos expoentes.	30
2.6	(a,b) Mostra os diagramas de órbitas para o mapa (1.8), enquanto (c) mostra o comportamento do expoente de Lyapunov em função de ϵ . Os parâmetros de controle utilizados foram $\delta = 0,75$ e $\gamma = 1$	31
2.7	Comportamento de convergência de diferentes distâncias para os pontos fixos em (a) e em (b) a sobreposição de todas as curvas para uma universal após as transformações de escala apropriadas. Os parâmetros utilizados foram $\epsilon_c = 0,09717528573$, $\gamma = 1$ e $\delta = 0,75$	34
2.8	Ajuste em lei de potência fornecendo o expoente z . Tal expoente caracteriza a relação $n_x \propto d_0^z$, onde n_x marca a transição de um platô constante para o decaimento em lei de potência, e d_0 é a distância inicial até o atrator. O ajuste confirma o comportamento esperado e fornece uma estimativa de z consistente com o resultado analítico dado por $z = \alpha/\beta$	35

3.1	Variedades estáveis e instáveis produzidas a partir dos mesmos pontos de sela, representados por estrelas na figura. Os pontos fixos assintoticamente estáveis estão representados por círculos em vermelho e preto. Os parâmetros de controle utilizados foram $\epsilon = 0,05$, $\delta = 0,85$ para 3.1(a), correspondentes à dinâmica antes da crise e $\delta = 0,8799$ para 3.1(b), referente à dinâmica imediatamente após a crise de fronteira. As variedades estáveis estão representadas em vermelho e preto e as variedades instáveis, em turquesa e violeta.	38
3.2	Sobreposição das variedades estáveis e das bacias de atração do mapeamento, usando $\epsilon = 0,05$ e $\delta = 0,8799$, correspondentes à dinâmica imediatamente após a crise de fronteira. A região vermelha corresponde à bacia de atração do ponto fixo com $\theta_2 > 0$, enquanto a região azul representa a bacia do ponto fixo com $\theta_2 < 0$, ambos encontrados anteriormente na equação (1.16).	40
3.3	Bacias de atração para $\epsilon = 0,05$, $\gamma = 1$ e δ variando entre 0,8791 e 0,8799, mostrando a evolução das bacias de atração, após um transiente de 10^8 . As bacias referentes ao atrator caótico estão representadas em preto. Em vermelho, temos a bacia de atração do ponto fixo assintoticamente estável $(\theta_1, I) > 0$, e em azul, a bacia do ponto fixo $(\theta_1, I) < 0$, ambos encontrados anteriormente na equação (1.15). . .	41

Sumário

Introdução	11
1 O mapeamento	15
1.1 Obtenção	15
1.2 Caso conservativo	16
1.3 O modelo dissipativo	18
1.4 Espaço de Fases	19
1.5 Pontos Fixos	19
1.6 Convergência para o ponto fixo	21
2 Diagrama de Bifurcação	23
2.1 Diagrama de órbitas	23
2.2 Expoentes de Lyapunov	25
2.3 Propriedades de escala	31
3 Crise de Fronteira	36
3.1 Obtenção das Variedades	36
3.2 Bacias de Atração	39
4 Considerações Finais	43
Considerações Finais e Perspectivas	44
Referências	45

Introdução

A Dinâmica é uma área da Física caracterizada pelo estudo de sistemas que evoluem no tempo e análise de seu comportamento [1]. A teoria de sistemas dinâmicos não lineares, que teve suas raízes fincadas no final do século XIX, por volta de 1880, foi impulsionada pelos esforços do renomado físico e matemático francês, Henri Poincaré (1854 - 1912). Poincaré, através de seus estudos metódicos sobre órbitas planetárias, observou a emergência de comportamentos notavelmente complexos e irregulares em sistemas dinâmicos. Poincaré voltou sua atenção para o intrigante problema dos três corpos e, em suas investigações, chegou à conclusão de que a evolução do sistema era irregular, com as trajetórias variando rapidamente, indicando uma sensibilidade aos dados iniciais que tornava impossível obter uma previsão clara para tempos longos.

Em outras palavras, ele descobriu que havia uma dependência sensível nas condições iniciais, o que tornava impossível fazer previsões precisas a longo prazo. Este fenômeno é o que hoje conhecemos como caos. Além disso, Poincaré percebeu que até mesmo as menores perturbações nos estados iniciais do sistema poderiam levar a estados finais drasticamente diferentes. Esta descoberta revolucionou nossa compreensão dos sistemas dinâmicos e abriu caminho para o desenvolvimento da teoria do caos.

Com a descoberta de sistemas sensíveis a condições iniciais, advindos dos resultados de Poincaré, estudos em dinâmica não linear e caos aumentaram muito ao longo das últimas décadas. Posteriormente, durante a década de 1960, Edward Norton Lorenz (1917-2008), em seus estudos pioneiros sobre previsão do tempo, percebeu que o programa que utilizava estava arredondando as casas decimais dos números de seis para três casas. Esta prática resultou em diferenças significativas nos resultados finais. Lorenz descobriu, através da imprevisibilidade nos sistemas dinâmicos não-lineares, as consequências do caos determinístico. Até então, acreditava-se que o estudo de métodos lineares era suficiente para entender e formular respostas acerca da meteorologia [2].

Em 1963, Lorenz publicou um artigo seminal [2] no qual concluiu que a previsão meteorológica a longo prazo era impossível, a menos que se conhecessem as condições atuais com precisão absoluta. Dada a imprecisão e a incompletude das observações, ele argumentou que a previsão precisa a longo prazo era inviável, pois pequenos erros nas condições iniciais poderiam levar a resultados drasticamente diferentes em tempos longos. Este fenômeno ficou conhecido como Efeito Borboleta: a ideia de que uma borboleta agitando o ar no Brasil poderia, no mês seguinte, alterar sistemas

de tempestades no Texas.

Lorenz, ao estudar uma série de equações de movimento de fluidos, mais especificamente para a convecção, simplificou seu modelo ao máximo, eliminando todos os termos que poderiam ser considerados irrelevantes. Ele acabou por encontrar três equações para descrever o comportamento do seu sistema [3, 4]. Este sistema, que mais tarde ficou conhecido como Sistema de Lorenz, é descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \quad (1)$$

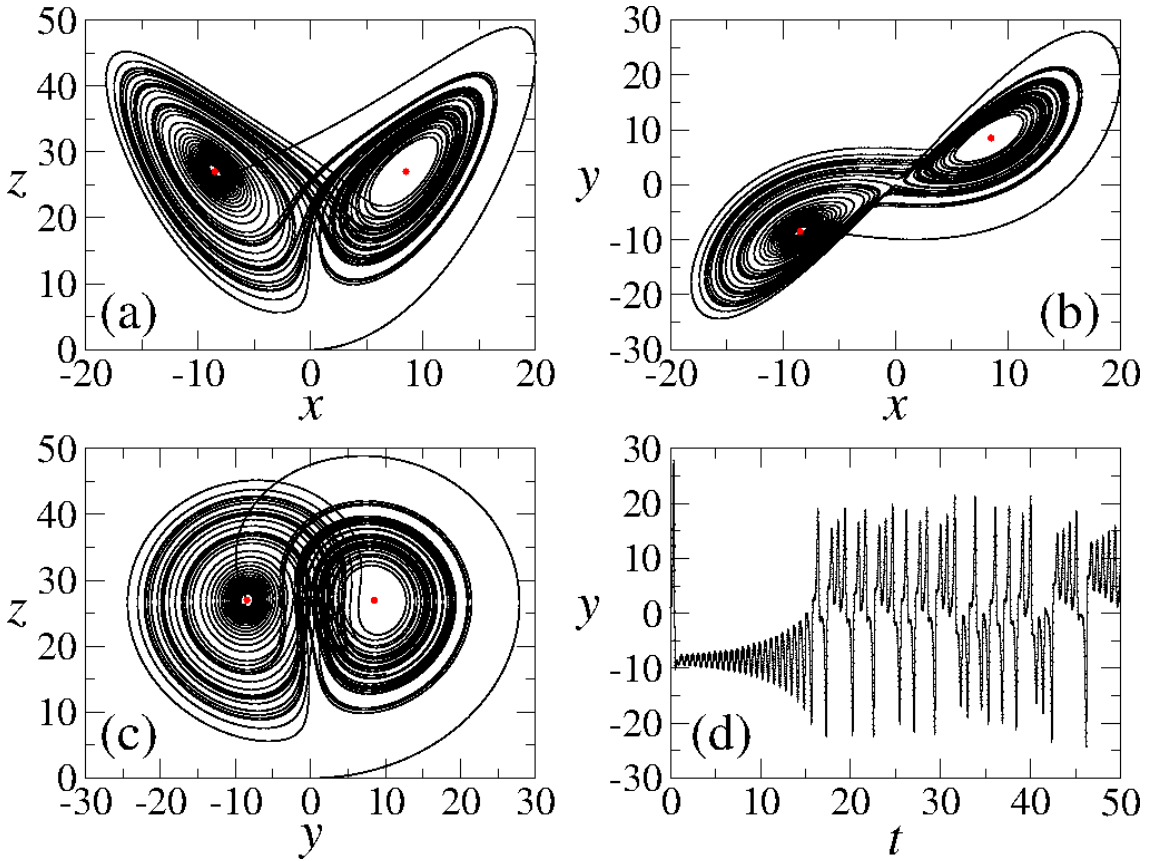


Figura 1: Atrator de Lorenz para os parâmetros $\sigma = 10$, $r = 28$ e $b = \frac{8}{3}$; (a) z vs. x , (b) y vs. x , (c) z vs. y e (d) y vs. t . Figura retirada da referência [5].

Neste contexto, os parâmetros de controle são representados por σ (associado ao coeficiente de difusividade do fluido em estudo), r (diferença de temperatura entre os dois extremos do fluido) e b (razão entre a altura e a largura do fluxo convectivo). A não linearidade que se manifesta nas equações (1) é de natureza quadrática, atribuída aos termos cruzados xz e xy .

O sistema em questão revelou um mapa bastante complexo, esboçando uma forma remanescente de uma espiral dupla em três dimensões. Esta forma, semelhante a uma borboleta com suas duas asas estendidas, pode ser observada na Figura 1.1 utilizando os parâmetros descritos na legenda da figura. Este fenômeno é conhecido como atrator de Lorenz.

Um atrator é definido como um ponto ou conjunto de pontos invariantes no espaço de fases, para os quais as órbitas próximas convergem após um período de tempo suficientemente longo. Ou seja, duas condições iniciais muito próximas divergem exponencialmente uma da outra. No caso do atrator de Lorenz, este apresenta uma complexidade imensa, demonstrando a rica dinâmica do sistema, apresentando geometria complexa de dimensão não inteira (fractal).

No contexto dos sistemas dinâmicos, é essencial compreender sua definição e as propriedades que os caracterizam. Esses sistemas são denominados dinâmicos porque existe uma relação matemática que, a partir de um estado configuracional inicial em um dado instante (frequentemente chamado de condição inicial), permite determinar o estado em instantes de tempo futuros. Em outras palavras, trata-se de sistemas cuja evolução das variáveis de estado depende do tempo como uma variável.

Esses sistemas podem ser classificados de diversas formas, sendo uma delas baseada no uso do tempo como uma variável contínua ou discreta. Quando o tempo é tratado como uma variável contínua, os sistemas são descritos por equações diferenciais, e suas soluções, conhecidas como fluxos, representam a evolução contínua do sistema. Já no caso de sistemas com o tempo representado de forma discreta, suas soluções, chamadas órbitas, são obtidas por iterações sucessivas de um mapeamento [3, 4].

Além da categorização como contínuos ou discretos, os sistemas dinâmicos também podem ser classificados como lineares ou não lineares. Nos sistemas lineares, as equações que descrevem sua dinâmica possuem apenas termos de primeira ordem. Em contrapartida, os sistemas não lineares apresentam termos com potências de grau superior a um, ou mesmo funções como seno, cosseno, exponencial, entre outras. Esses sistemas geralmente possuem parâmetros de controle que desempenham um papel crucial na evolução do sistema, influenciando fenômenos como caos, sensibilidade às condições iniciais e estabilidade [5].

Sistemas dinâmicos discretos, também chamados de mapeamentos ou simplesmente mapas, são ferramentas úteis na análise e caracterização da evolução temporal de sistemas dinâmicos. Eles oferecem uma abordagem mais simples em comparação com as equações diferenciais das quais derivam. A complexidade dos mapas é determinada pelo número de variáveis e pelos parâmetros de controle que influenciam seu comportamento.

Ao investigar a evolução dinâmica de um sistema, partimos de um estado inicial e analisamos a sequência de estados subsequentes gerados ao longo do tempo. Essa sequência é denominada órbita e descreve a dinâmica temporal do sistema sob uma condição inicial específica. Mudando-se a condição inicial, um novo conjunto de estados é gerado, resultando em outra órbita distinta. O conjunto de todas as órbitas possíveis constitui o chamado espaço de fases [5].

Desta maneira, entendemos como sistema dinâmico um conjunto de equações envolvendo os mesmos conjuntos de variáveis que evoluem ao longo do tempo a partir de uma regra matemática bem determinada, entende-se por caos a imprevisibilidade e a sensibilidade do sistema às condições iniciais [1, 6]. O estudo de sistemas dinâmicos tem ganhado cada vez mais destaque nas últimas décadas, contribuindo para o entendimento da dinâmica de problemas de diversas áreas como Biologia, Física, Matemática, Química, entre outros ramos do conhecimento. Diferentes aplicações deste formalismo leva a aplicações que podem ser observadas em diversos estudos, como tokamaks, guias de ondas, aceleração de Fermi e bilhares clássicos [7, 8, 9, 10].

Através de equações matemáticas, é possível realizar estudos sobre os processos de evolução, para ter melhor compreensão e visualização de um determinado sistema dinâmico no decorrer do tempo.

Um sistema não linear e caótico pode ser descrito por meio de equações diferenciais (estas contínuas no tempo, geralmente não lineares) e de mapas (que descrevem a evolução temporal discreta em função das iterações das variáveis do sistema).

Neste interim, vale ainda destacar a contribuição do matemático e físico russo, Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918), que revolucionou a análise de sistemas dinâmicos ao desenvolver uma abordagem pioneira para o estudo da estabilidade [3], ao final do século XIX. Seus trabalhos abriram caminho para a investigação tanto de sistemas lineares quanto não lineares, proporcionando uma base sólida para a compreensão de sistemas com comportamento caótico. Uma de suas contribuições mais notáveis foi a introdução de um “coeficiente característico” que permite quantificar a dinâmica desses sistemas, atualmente conhecido como “expoente de Lyapunov”.

Para melhor expressarmos as nossas intenções, organizamos este trabalho da seguinte maneira: no Capítulo 1, apresentamos uma família de mapeamentos dissipativos bidimensionais. O espaço de fases apresentado é misto, com a coexistência de ilhas de periodicidade, mares de caos e curvas invariantes *spanning*. Apresentamos suas propriedades, como o espaço de fases, a matriz Jacobiana com as derivadas parciais e os pontos fixos. No Capítulo 2, estudamos o diagrama de órbitas e os expoentes de Lyapunov, além das propriedades de invariância de escala. No Capítulo 3, será apresentado o conjunto de variedades estáveis e instáveis, assim como as bacias de atração. Por fim, apresentamos as conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

Todas as simulações numéricas realizadas para a construção dos espaços de fase, dos diagramas de bifurcação, das bacias de atração e dos demais diagramas apresentados ao longo do texto foram computadas utilizando a linguagem de programação FORTRAN, em um ambiente Linux. As figuras foram geradas com o auxílio do software Grace.

Capítulo 1

O mapeamento

Este Capítulo é dedicado a apresentação do modelo do mapeamento que será o objeto de estudo desta dissertação. Através do desenvolvimento do espaço de fases, serão abordadas algumas características importantes do modelo.

1.1 Obtenção

Sistemas Hamiltonianos descrevem uma grande gama de fenômenos físicos. Portanto, para a construção do mapeamento bidimensional, consideremos o Hamiltoniano a seguir:

$$H(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2) = H_0(I_1, I_2) + \epsilon H_1(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2), \quad (1.1)$$

sendo θ e I variáveis ângulo-ação. O parâmetro ϵ trata-se de um pré-fator que controla a transição da integrabilidade do sistema ($\epsilon = 0$), para não integrabilidade ($\epsilon \neq 0$). Assumimos que θ_2 é constante (mod 2π).

Além disso, a parte integrável está representada por H_0 , ao passo que H_1 diz respeito à parte não integrável. O sistema é dito integrável quando se tem tantas constantes de movimento quanto graus de liberdade. Quando essa condição for satisfeita, o espaço de fases apresenta dinâmica regular e está confinado superfícies toroidais. Se tal condição não é satisfeita, o sistema passa a ser não integrável: as superfícies toroidais serão destruídas e surgirão ilhas periódicas e o mar caótico, que começaram a coexistir no mesmo espaço de fases [11].

O sistema Hamiltoniano considerado possui dois graus de liberdade. Se for integrável, sua Hamiltoniana H é escrita nas variáveis ângulo-ação θ e I . Tal Hamiltoniana é independente do tempo, logo, a energia do sistema é constante e a dimensão do espaço de fases pode ser reduzida de quatro para três variáveis dinâmicas. Desta maneira, podemos remover uma variável, como, por exemplo, I_2 e reescrever a Hamiltoniana sem ela. Assim, teremos um mapeamento bidimensional que enuncie qualitativamente o comportamento da equação anterior, sendo descrito da seguinte maneira [1, 5]:

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = I_n + \epsilon h(\theta_n, I_{n+1}), \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + F(I_{n+1}) + \epsilon p(\theta_n, I_{n+1})] \bmod (2\pi), \end{cases} \quad (1.2)$$

sendo h , F e p funções não lineares de suas variáveis, onde o índice n denota a enésima iteração do mapeamento. Para que o mapeamento apresente preservação de volume no espaço de fases, as expressões de $h(\theta_n, I_{n+1})$ e $p(\theta_n, I_{n+1})$ devem se relacionar como:

$$\frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} + \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} = 0, \quad (1.3)$$

A seguir, na seção 1.2, serão apresentadas algumas características do comportamento do sistema conservativo.

1.2 Caso conservativo

Para que a equação (1.3) tenha sua área preservada no espaço de fases, as funções $h(\theta_n, I_{n+1})$ e $p(\theta_n, I_{n+1})$ devem obedecer a algumas relações inerentes, onde consideramos o determinante da matriz Jacobiana:

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_{n+1}} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_{n+1}} \end{pmatrix},$$

onde os coeficientes da matriz J são obtidos a partir das derivadas parciais em relação às variáveis dinâmicas. A partir dos elementos de tal matriz, encontramos que seu determinante é dado por:

$$Det J = \frac{1 + \epsilon \frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n}}{1 - \epsilon \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}}} \quad (1.4)$$

Analisando o determinante, é possível concluir que haverá preservação no espaço de fases quando:

$$\frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} + \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} = 0 \quad (1.5)$$

desta forma, o mapeamento será conservativo.

A escolha das funções F , h e p é feita conforme o modelo a ser investigado. Podemos citar diferentes aplicações encontradas na literatura, ao considerarmos $p(\theta_n, I_{n+1}) = 0$ e $h(\theta_n, I_{n+1}) = \sin(\theta_n)$, como por exemplo:

- $F(I_{n+1}) = I_{n+1} + \xi I_{n+1}^2$, o mapa logístico *twist* [12];
- $F(I_{n+1}) = I_{n+1}$, o mapa de Taylor-Chirikov [13];
- $F(I_{n+1}) = \xi I_{n+1}$, com ξ constante, o modelo *bouncer* [14];

- $F(I_{n+1}) = \frac{2}{I_{n+1}}$, o modelo Fermi-Ulam [15].

Desta maneira, para o desenvolvimento deste trabalho, considerando um mapa não linear bidimensional:

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = I_n + \epsilon \sin(\theta_n), \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{|I_{n+1}|^\gamma} \end{cases} \mod(2\pi), \quad (1.6)$$

onde γ e ϵ são os parâmetros de controle do sistema, as variáveis ângulo-ação são representadas por θ e I , respectivamente. O parâmetro ϵ controla a intensidade da não linearidade da seguinte maneira:

- $\epsilon = 0$, o sistema é integrável, apresentando uma dinâmica regular;
- $\epsilon \neq 0$ o sistema passa a ser não integrável, a regularidade anteriormente observada será aniquilada e o espaço de configurações exibe uma composição mista.

Uma vez conhecidas as equações do mapeamento, o próximo passo é investigar se ocorre ou não a preservação da área no espaço de fases. Para isto, é preciso obter o determinante da matriz Jacobiana, como definida pela equação (1.4), onde teremos:

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} = 1, \\ J_{12} &= \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} = \epsilon \cos(\theta_n), \\ J_{21} &= \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} = -\gamma \frac{1}{|I_{n+1}|^{\gamma+1}} \cdot \text{sgn}(I_{n+1}) \cdot \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n}, \\ J_{22} &= \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} = 1 - \frac{\gamma}{|I_{n+1}|^{\gamma+1}} \cdot \text{sgn}(I_{n+1}) \cdot \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n}, \end{aligned}$$

$$\text{onde } \text{sgn}(I_{n+1}) = \begin{cases} 1, & I_{n+1} > 0 \\ -1, & I_{n+1} < 0 \end{cases}.$$

Tendo encontrado os elementos da matriz Jacobiana, obtemos que o determinante é dado por:

$$\det J = 1 \quad (1.7)$$

Consequentemente, de acordo com o Teorema de Liouville [16], podemos afirmar que ocorre a preservação de volume no espaço de fases. Isto significa que, mesmo que ocorram mudanças no espaço de fases, o volume que os pontos ocupam permanece inalterado.

Na seção 1.3, discutiremos algumas propriedades relacionadas ao caso dissipativo.

1.3 O modelo dissipativo

Para o desenvolvimento deste projeto, ao introduzirmos de forma genérica uma dissipação δ na componente ação do sistema, a equação (1.6) passa a ser escrita da seguinte maneira:

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = \delta I_n + \epsilon \sin(\theta_n), \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{|I_{n+1}|^\gamma} \end{cases} \mod(2\pi), \quad (1.8)$$

onde o parâmetro $\delta \in [0, 1]$ controla a dissipação. O parâmetro ϵ controla a intensidade da não linearidade da seguinte maneira:

- quando $\epsilon = 0$ e $\delta = 1$, o sistema é integrável;
- $\epsilon \neq 0$ e $\delta = 1$ gera um espaço de fases misto.

O módulo sendo necessário para prevenir que a variável ação I tome valores negativos. Além disso, se:

- $\delta = 1$, o sistema conservativo é recuperado, tal que há uma preservação de volume no espaço de fases, comportamento análogo a uma colisão elástica;
- $0 < \delta < 1$ significa que há violação do teorema de Liouville, com $\det(J) \neq 1$, sendo J a matriz Jacobiana;
- $\delta = 0$ comportamento análogo a uma colisão inelástica.

Após estabelecermos as equações do mapeamento e compreendermos o desenvolvimento do algoritmo, um dos aspectos a ser investigado é a preservação da área no espaço de fases. Para isso, é crucial calcularmos o determinante da matriz Jacobiana, definida anteriormente pela equação (1.4). Para o mapeamento definido na equação (1.2) os coeficientes da matriz Jacobiana serão:

$$\begin{aligned} J_{11} &= \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} = \delta, \\ J_{12} &= \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} = \epsilon \cos(\theta_n), \\ J_{21} &= \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} = -\gamma \frac{1}{|I_{n+1}|^{\gamma+1}} \cdot \text{sgn}(I_{n+1}) \cdot \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n}, \\ J_{22} &= \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} = 1 - \frac{\gamma}{|I_{n+1}|^{\gamma+1}} \cdot \text{sgn}(I_{n+1}) \cdot \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n}, \end{aligned}$$

$$\text{onde } \text{sgn}(I_{n+1}) = \begin{cases} 1, & I_{n+1} > 0 \\ -1, & I_{n+1} < 0 \end{cases}.$$

Calculando o determinante encontramos:

$$DetJ = \delta. \quad (1.9)$$

Para $\delta = 1$, o sistema conservativo é recuperado e o determinante $DetJ = 1$, resultando na preservação de volume no espaço de fases [17]. Em contrapartida, para $\delta \neq 1$, de acordo com o Teorema de Liouville [16], a área no espaço de fase não é preservada.

1.4 Espaço de Fases

A figura 1.1 mostra o espaço de fases para $\gamma = 1$: (a) $\delta = 1$ e $\epsilon = 0,01$; (b) $\delta = 0,99$ e $\epsilon = 0,01$; e (c) $\delta = 0,87$ e $\epsilon = 0,001$. Foram realizadas 10^7 iterações e, ao aplicar um transiente, as últimas 850 colisões foram registradas. Podemos observar que a figura 1.1(a) mostra o espaço de fases para o sistema conservativo com uma estrutura mista composta por um mar de caos em volta de ilhas periódicas e limitado por curvas invariantes *spanning* ao passo que as figuras 1.1(b) e (c) mostram o espaço de fases para o sistema dissipativo. Podemos observar, ainda, que devido a escolha dos parâmetros de controle, a estrutura mista observada para o caso conservativo é destruída, convergindo a órbita para atratores caóticos. Para outras escolhas dos parâmetros de controle, é possível notar observar a convergência de órbitas para atratores pontos fixos no espaço de fases.

Tendo em vista que neste trabalho investigaremos a convergência de órbitas para o estado estacionário próximo às bifurcações, consideraremos em nossas investigações o sistema dissipativo.

1.5 Pontos Fixos

Os pontos fixos do mapeamento (1.8) são obtidos através da condição:

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n = I^*, \\ \theta_{n+1} = \theta_n = \theta^* + 2m\pi, \end{cases}$$

onde $m = 1, 2, \dots$. Desta forma, substituindo tais condições na equação do mapeamento 1.8, encontramos:

$$\theta^* + 2m\pi = \theta^* + \frac{1}{|I|^\gamma}. \quad (1.10)$$

Organizando os termos da equação (1.10), temos:

$$I^* = \frac{\epsilon \sin(\theta)}{1 - \delta}. \quad (1.11)$$

Analogamente, para encontrar o outro ponto fixo:

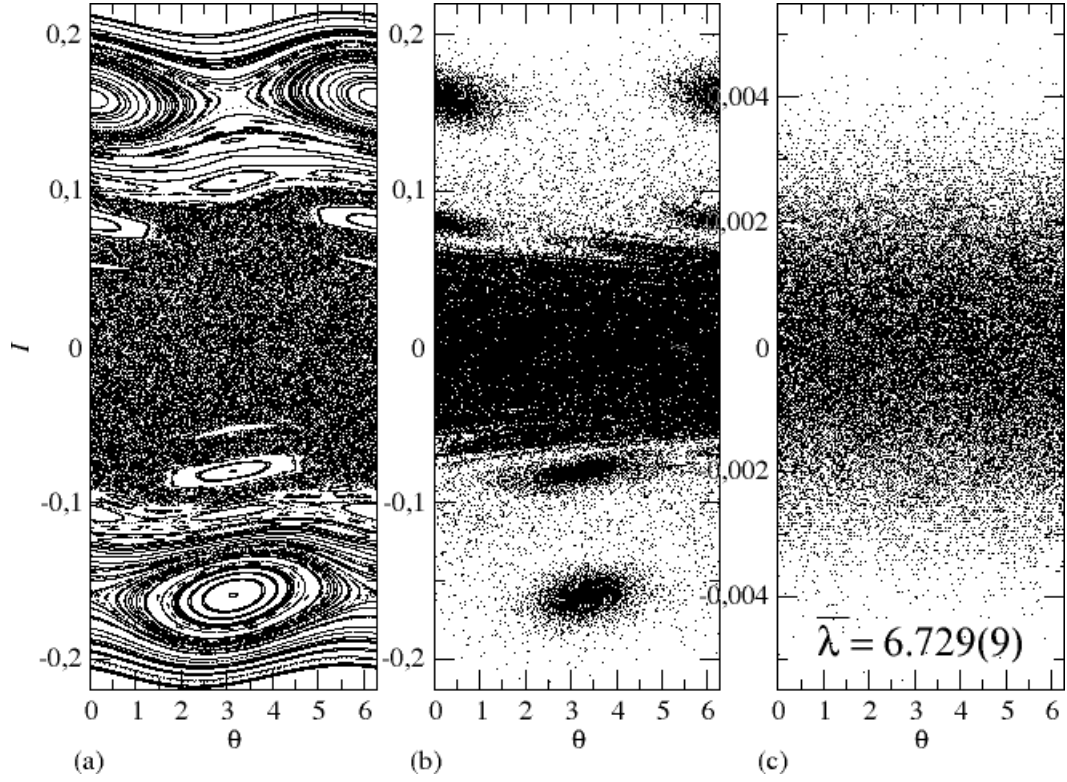


Figura 1.1: Espaço de fases para o mapeamento (1.8), considerando $\gamma = 1$: (a) $\delta = 1$ e $\epsilon = 0,01$; (b) $\delta = 0,99$ e $\epsilon = 0,01$; e (c) $\delta = 0,87$ e $\epsilon = 0,001$.

$$\delta I^*(\delta - 1) = -\epsilon \sin(\theta^*). \quad (1.12)$$

Levando em consideração às condições do termo angular $\sin$ e adicionando a expressão (1.11) temos duas expressões para θ^* , são elas:

$$\theta_1^* = \arcsin \left[\left(\frac{1-\delta}{\epsilon} \right) \cdot \frac{(1)}{(2m\pi)^{\frac{1}{\gamma}}} \right], \quad (1.13)$$

$$\theta_2^* = \pi - \arcsin \left[\left(\frac{1-\delta}{\epsilon} \right) \cdot \frac{(1)}{(2m\pi)^{\frac{1}{\gamma}}} \right]. \quad (1.14)$$

Desta forma, as coordenadas dos pontos fixos serão:

$$(\theta_1^*, I^*) = \left(\arcsin \left[\left(\frac{1-\delta}{\epsilon} \right) \cdot \left(\frac{1}{2m\pi} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right], \pm \left(\frac{1}{2m\pi} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right), \quad (1.15)$$

$$(\theta_2^*, I^*) = \left(\pi - \arcsin \left[\left(\frac{1-\delta}{\epsilon} \right) \cdot \left(\frac{1}{2m\pi} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right], \pm \left(\frac{1}{2m\pi} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right), \quad (1.16)$$

onde a equação (1.15) apresenta os pontos fixos assintoticamente estáveis e a equação (1.16) apresenta os pontos fixos do tipo sela [18].

1.6 Convergência para o ponto fixo

Visto que investigaremos a convergência de órbitas para o estado estacionário próximo às bifurcações, precisamos considerar a distância "d" da condição inicial até o ponto fixo. Sendo assim, temos que, para tempos de convergência suficientemente curtos $n \ll n_x$, supomos que:

$$d(n) \propto d_0^\alpha, \quad (1.17)$$

enquanto para tempos suficientemente longos $n \gg n_x$, supomos que:

$$d(n) \propto n^\beta. \quad (1.18)$$

O tempo característico n_x marca o regime do decaimento da mudança, de forma que:

$$n_x \propto d_0^z. \quad (1.19)$$

As três hipóteses de escala acima permitem descrever a convergência de órbitas para o ponto fixo através de uma função homogênea generalizada, sendo esta uma função que deve satisfazer:

$$f(x, y) = lf(l^a x, l^b y), \quad (1.20)$$

onde l é um fator de escala e a e b expoentes característicos. No nosso caso, escrevemos:

$$d(n, d_0) = ld(l^a n, l^b d_0). \quad (1.21)$$

Como l é um fator de escala, podemos escolher $l^a n = 1$, assim:

$$\begin{aligned} l^a n &= 1, \\ l &= \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{a}} \rightarrow l = n^{-\frac{1}{a}}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Levando a equação (1.22) na expressão (1.21), podemos escrever:

$$\begin{aligned} d(n, d_0) &= n^{-\frac{1}{a}} d((n^{-\frac{1}{a}})^a n, (n^{-\frac{1}{a}})^b d_0), \\ d(n, d_0) &= n^{-\frac{1}{a}} d(1, n^{-\frac{b}{a}} d_0). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Assumindo que a função (1.24) é constante para $n \ll n_x$ e comparando com a primeira hipótese de escala dada pela equação (1.17) podemos concluir que:

$$\begin{aligned} d(n) &= n^\beta, \\ d(n) &= n^{-\frac{1}{a}}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Logo, podemos escrever que $\beta = -\frac{1}{a}$. Em seguida, escolhendo $l^b d_0 = 1$, temos:

$$\begin{aligned} l^b d_0 &= 1, \\ l &= \left(\frac{1}{d_0} \right)^{\frac{1}{b}} \rightarrow l = d_0^{-\frac{1}{b}}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Substituindo agora a expressão (1.26) na equação (1.21) temos:

$$\begin{aligned} d(n, d_0) &= d_0^{-\frac{1}{b}} d((d_0^{-\frac{1}{b}})^a n, (d_0^{-\frac{1}{b}})^b d_0), \\ d(n, d_0) &= d_0^{-\frac{1}{b}} d(d_0^{-\frac{a}{b}} n, 1). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Assumindo agora que a expressão (1.27) seja constante para $n \gg n_x$ e comparando com a segunda hipótese de escala dada pela equação (1.18), podemos concluir que:

$$\begin{aligned} d(n) &= d_0^\alpha, \\ d(n) &= d_0^{-\frac{1}{b}}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Logo, temos que $\alpha = -\frac{1}{b}$. Analisando as duas expressões para o fator de escala, ou seja, as equações (1.25) e (1.27), e sendo $\alpha = -\frac{1}{b}$ e $\beta = -\frac{1}{a}$, concluimos que:

$$\begin{aligned} d_0^{-\frac{1}{b}} &= n^{-\frac{1}{a}}, \\ d_0^\alpha &= n^\beta. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Dessa forma, podemos escrever que:

$$\begin{aligned} n^\beta &= d_0^\alpha, \\ n_x &= d_0^{\frac{\alpha}{\beta}}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Comparando com a terceira hipótese de escala dada pela equação (1.19), finalmente definimos a lei de escala como:

$$z = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{1.30}$$

Capítulo 2

Diagrama de Bifurcação

Neste Capítulo, investigaremos os efeitos da introdução de dissipação em um sistema, explorando as propriedades resultantes dessa modificação. A partir dessa análise, será possível realizar um estudo sobre o decaimento das órbitas para um atrator caótico.

2.1 Diagrama de órbitas

Compreendido o procedimento para a obtenção de pontos fixos, é possível introduzir o conceito de diagrama de órbita. Esse diagrama ilustra o comportamento assintótico de uma trajetória a partir de uma condição inicial x_0 , variando o parâmetro de controle. A região do espaço de fase para onde as trajetórias convergem assintoticamente é denominada atrator.

Quando uma pequena variação em um parâmetro de controle produz uma mudança repentina no comportamento do fluxo de soluções do sistema, ocorre uma bifurcação. As bifurcações podem ser classificadas em locais e globais. As bifurcações locais ocorrem quando uma variação em um parâmetro de controle resulta na mudança de estabilidade de um ponto fixo, afetando diretamente o comportamento local do sistema. Já as bifurcações globais acontecem quando conjuntos invariantes (como atratores caóticos, por exemplo) colidem com variedades instáveis, levando à destruição do atrator caótico. Esse tipo de destruição provoca uma mudança profunda no sistema, que não pode ser prevista unicamente pela análise da estabilidade dos pontos fixos [5]. Um exemplo clássico de bifurcação global são as chamadas crises de fronteira, fenômeno em que o comportamento do sistema muda drasticamente, muitas vezes de forma imprevisível, à medida que diferentes estruturas dinâmicas entram em interação. Neste capítulo, focaremos nas bifurcações locais.

Quando $\gamma = 1$, a Figura 2.1 mostra o comportamento do diagrama de órbitas para o mapeamento (1.8), considerando $\delta = 0,75$. Como condição inicial, foi escolhido $(I_0, \theta_0) = (0,01, \pi)$. Tal condição foi iterada 10^6 vezes e, ao aplicar um transiente, as últimas 100 colisões foram registradas.

Uma ampliação das Figuras 2.1 (a,c) é apresentada nas Figuras 2.1(b,d), considerando $\gamma = 1$, $\delta = 0,75$. A Figura 2.1(a) ilustra o diagrama de órbitas I vs. ϵ e

2.1(b) representa θ vs. ϵ .

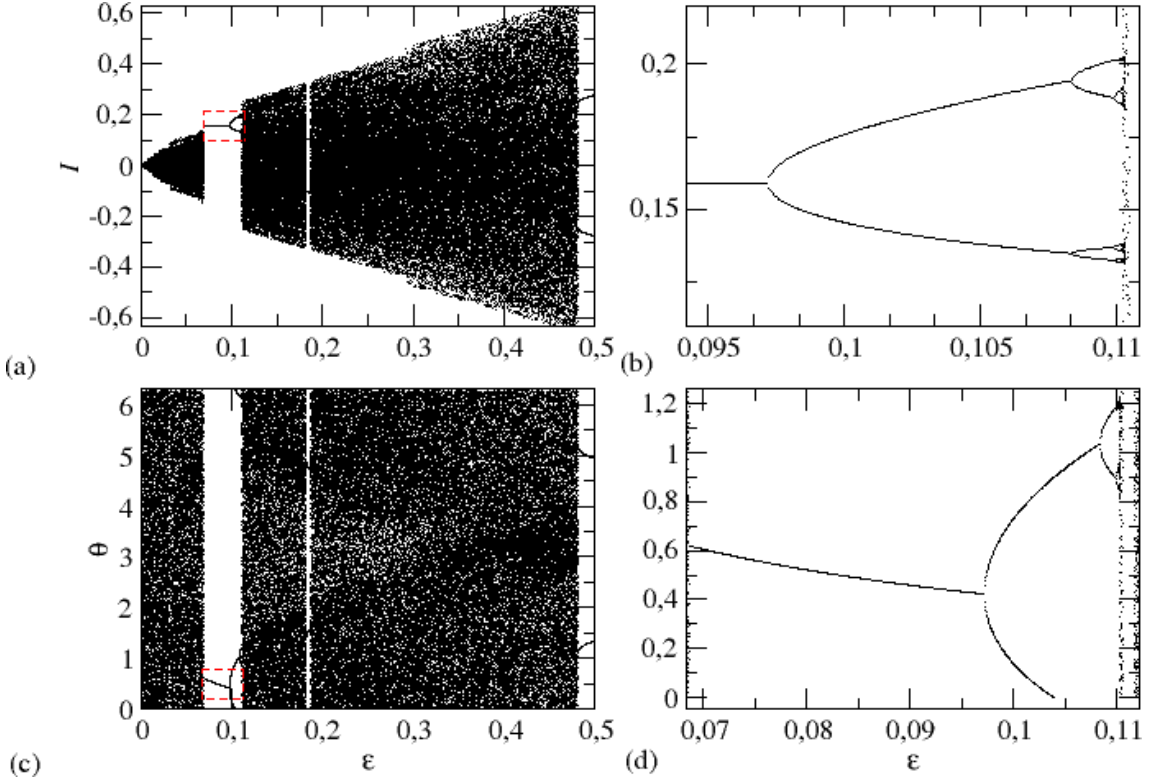


Figura 2.1: Diagrama de órbitas para o mapa (1.8), considerando $\delta = 0,75$ e $\gamma = 1$. Em (a) and (b), temos I vs. ϵ , enquanto (c) e (d) mostram θ vs. ϵ .

A presença de perturbações externas, como a dissipação, ocorre em diversos contextos físicos, sendo um tema amplamente abordado na literatura. Sistemas não lineares dissipativos, descritos por equações diferenciais ou mapeamentos discretos, podem apresentar a coexistência de múltiplos atratores simultaneamente, sejam eles periódicos, caóticos ou, em muitos casos, ambos [5].

Nesta seção, destacamos uma característica importante do efeito da dissipação no sistema. Quando introduzimos uma dissipação de magnitude muito pequena, o sistema passa a exibir um comportamento dominado pelo surgimento de atratores de pontos fixos com diferentes períodos [18, 19]. Para construir a Figura 2.2, foram realizadas 10^4 iterações, no intervalo de condições iniciais $I \in [22 \times 10^{-2}, 22 \times 10^2]$ e $\theta \in (0, 2\pi]$. As cores indicam o período de cada atrator e cada período tem seu próprio caractere.

A figura 2.2 ilustra os atratores ponto fixo com períodos superiores a 1, obtidos para os parâmetros $\delta = 0,999$, $\epsilon = 0,18$ e $\gamma = 1$. As cores indicam os períodos de cada atrator: em preto, órbitas de período 2; em vermelho, órbitas de período 5; em verde, órbitas de período 6; e, em azul, órbitas de período 35. É importante observar que atratores de formatos distintos, mas representados por uma mesma cor,

correspondem ao mesmo conjunto periódico.

Podemos observar uma simetria, que decorre da natureza trigonométrica da dinâmica, cuja estrutura periódica e propriedades ímpares (como $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$) geram reflexões e repetições no espaço de fase. Além disso, a matriz Jacobiana do sistema, ao conservar certas estruturas (como área ou traços de reversibilidade), impõe restrições nos autovalores que se refletem na simetria das órbitas periódicas.

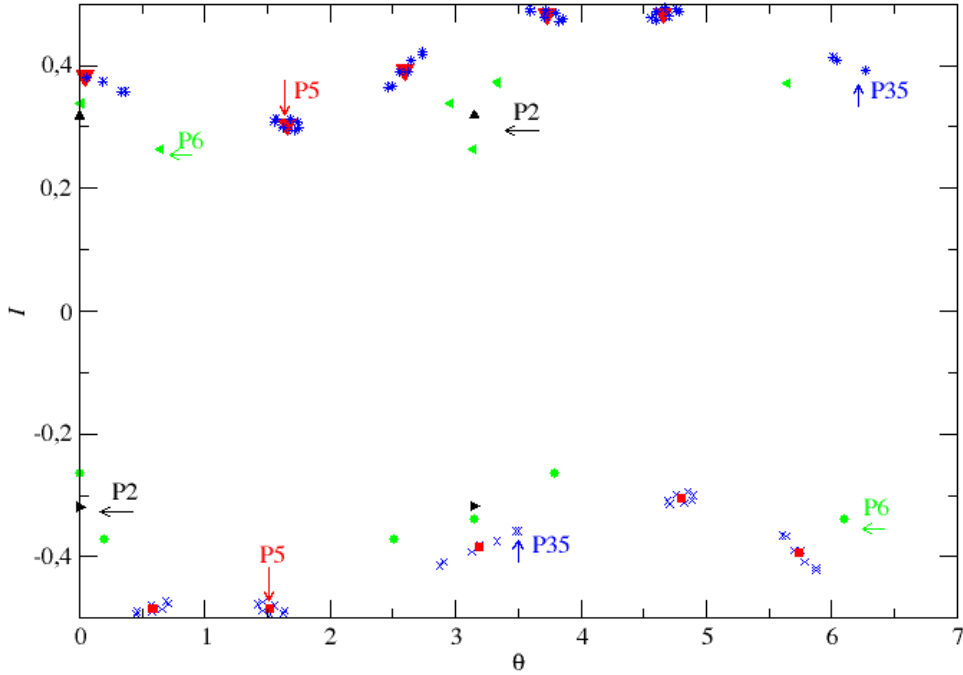


Figura 2.2: Órbitas periódicas obtidas aplicando os parâmetros $\delta = 0,999$, $\epsilon = 0,18$ e $\gamma = 1$.

2.2 Expoentes de Lyapunov

O cálculo do expoente de Lyapunov baseia-se na análise de um par de trajetórias próximas no espaço de fase, medindo a taxa de divergência ou convergência entre elas ao longo do tempo. Em sistemas caóticos, pequenas diferenças nas condições iniciais podem se amplificar significativamente ao longo do tempo. Esse comportamento é evidenciado por um expoente de Lyapunov positivo, que caracteriza a sensibilidade

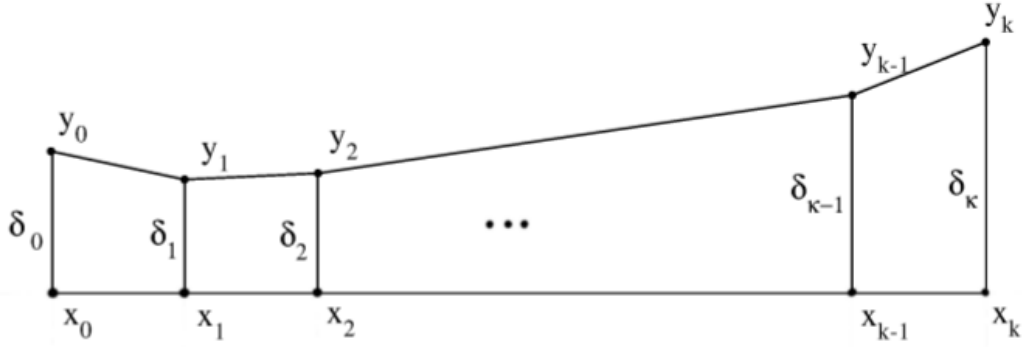


Figura 2.3: Divergência entre duas condições iniciais. Figura retirada da referência [22].

às condições iniciais. Já nos pontos de bifurcação, o expoente de Lyapunov assume valor nulo, refletindo a transição entre diferentes regimes dinâmicos [20, 21].

Sendo um dos indicadores mais comuns para a dinâmica caótica, os expoentes de Lyapunov quantificam a sensibilidade às condições iniciais de sistemas dinâmicos, isto é, a contração ou expansão exponencial média ao redor de um ponto no espaço de fases. Conforme a evolução de um sistema dinâmico no tempo, é descrita a velocidade com a qual dois pontos próximos das condições iniciais do sistema se aproximam ou se afastam exponencialmente [20, 21]. Na Figura 2.3, temos uma exemplificação da divergência entre duas condições iniciais vizinhas, sendo estas x_0 e y_0 . Além disso, δ_0 representa uma distância infinitesimal [22]. Caso um dos expoentes encontrados for positivo, a órbita é dita caótica. Os expoentes ainda possibilitam obter informações acerca da estabilidade de um atrator de acordo com suas direções de contração ($\lambda < 0$) e de expansão ($\lambda > 0$).

Desta maneira, nesta seção será utilizado o cálculo do expoente de Lyapunov para a caracterização do comportamento caótico encontrado no espaço de fases dos modelos conservativo e dissipativo. Para sistemas unidimensionais o cálculo é feito através das derivadas das equações diferenciais que governam a evolução temporal do sistema ao longo da órbita, da mesma forma que para a obtenção da estabilidade do sistema através da equação [5, 23]:

$$\lambda = \lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |F'(x_i)|, \quad (2.1)$$

onde a função F fornece o mapeamento discreto unidimensional.

Para o caso bidimensional, os expoentes de Lyapunov são obtidos a partir da seguinte expressão [23]:

$$\lambda_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |\Lambda_j^{(N)}|, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

em que $|\Lambda_j^{(N)}|$ representa os autovalores da matriz M definida por:

$$M = \prod_{j=1}^N J_i(I_i, \theta_i), \quad (2.3)$$

sendo J_i é a matriz Jacobiana do mapeamento avaliado ao longo da órbita (I_i, θ_i) . É importante ressaltar que a aplicação direta de um algoritmo computacional para avaliar a equação traz consigo profundas limitações na obtenção da matriz M . No contexto da convergência, que se manifesta em grandes ordens de magnitude (N), o acúmulo dos produtos das matrizes (J_i) pode resultar em um rápido crescimento dos coeficientes, o que desencadeia problemas numéricos significativos. Esses problemas, por sua vez, tornam a implementação do algoritmo desafiadora, dificultando a estimativa de λ .

Para lidar com essas dificuldades, optaremos pela utilização do algoritmo de triangularização, proposto por J.P. Eckmann e D. Ruelle [23]. Tal algoritmo envolve a decomposição da matriz (J) em um produto de uma matriz triangular (T) por uma matriz ortogonal (Θ), ou seja:

$$J = \Theta T,$$

sendo (J) a matriz Jacobiana. Vale ressaltar que uma matriz é dita ortogonal quando sua inversa é igual à sua transposta, isto é,

$$\Theta^{-1} = \Theta^T.$$

Considerando a definição anterior, torna-se evidente que a matriz (M) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$M = J_n J_{n-1} J_{n-2} \dots J_2 J_1 = J_n J_{n-1} J_{n-2} \dots J_2 \Theta_1 \Theta_1^{-1} J_1.$$

Definindo $T_1 = \Theta_1^{-1} J_1$ e o produto $J_2 \Theta_1 = \tilde{J}_2$. Seguindo o mesmo raciocínio podemos escrever

$$M = J_n J_{n-1}, \dots, J_3 \Theta_2 \Theta_2^{-1} \tilde{J}_2 T_1.$$

Analogamente, para obtermos $T_2 = \Theta_2^{-1} \tilde{J}_2$ e assim sucessivamente. Assim, avaliando a diagonal principal da matriz triangular (T), composta pelos elementos T_{11} e T_{22} . Em seguida, devemos encontrar os coeficientes de $T_1 = \Theta_1^{-1} J_1$, os quais são expressos por:

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Desenvolvendo o produto das matrizes, teremos:

$$\begin{pmatrix} j_{11} \cos(\theta) + j_{21} \sin(\theta) & j_{12} \cos(\theta) + j_{22} \sin(\theta) \\ -j_{11} \sin(\theta) + j_{21} \cos(\theta) & -j_{12} \sin(\theta) + j_{22} \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}$$

sendo $T_{21} = 0$, o que resulta em $-j_{11} \sin(\theta) + j_{21} \cos(\theta) = 0$, obtemos a seguinte relação:

$$\frac{j_{21}}{j_{11}} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}. \quad (2.4)$$

Pode-se observar que ao empregar $\theta = \arctan\left(\frac{j_{21}}{j_{11}}\right)$, nos deparamos com uma função que acarreta em um custo computacional indesejado. Para contornar essa questão, é preferível utilizar as expressões de $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$ diretamente de J , o que simplifica o processo e evita a necessidade de cálculos adicionais. Assim,

$$\sin(\theta) = \frac{j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \quad (2.5)$$

$$\cos(\theta) = \frac{j_{11}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}. \quad (2.6)$$

Por fim, podemos derivar as expressões para os elementos na diagonal principal da matriz (T) conforme mencionado anteriormente. Isto é, ao expressar $T_{11} = j_{11} \cos(\theta) + j_{21} \sin(\theta)$ e $T_{22} = j_{22} \cos(\theta) - j_{12} \sin(\theta)$, obtemos:

$$T_{11} = \frac{j_{11}^2 + j_{21}^2}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \quad (2.7)$$

$$T_{22} = \frac{j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}. \quad (2.8)$$

Com base nos autovalores T_{11} e T_{22} , podemos calcular numericamente os expoentes de Lyapunov para uma órbita caótica no espaço de fases do modelo de interesse.

Uma das principais e mais interessantes características dos expoentes de Lyapunov é a de que para sistemas conservativos, que é este caso, devemos ter $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, ou seja, $\sum_{i=0}^N \lambda_i = 0$ onde N identifica o número de equações do mapeamento discreto investigado [5].

A Figura 2.4 mostra a evolução temporal do expoente de Lyapunov para o modelo conservativo. Para seu desenvolvimento foram usadas cinco condições iniciais diferentes, conforme mostra na legenda da figura, iteradas 5×10^8 vezes. Podemos perceber que apesar de condições iniciais diferentes, as órbitas convergem para um valor constante após um número suficiente grande de iterações e através desse desenvolvimento calculou-se a média dessas cinco condições iniciais e encontramos o

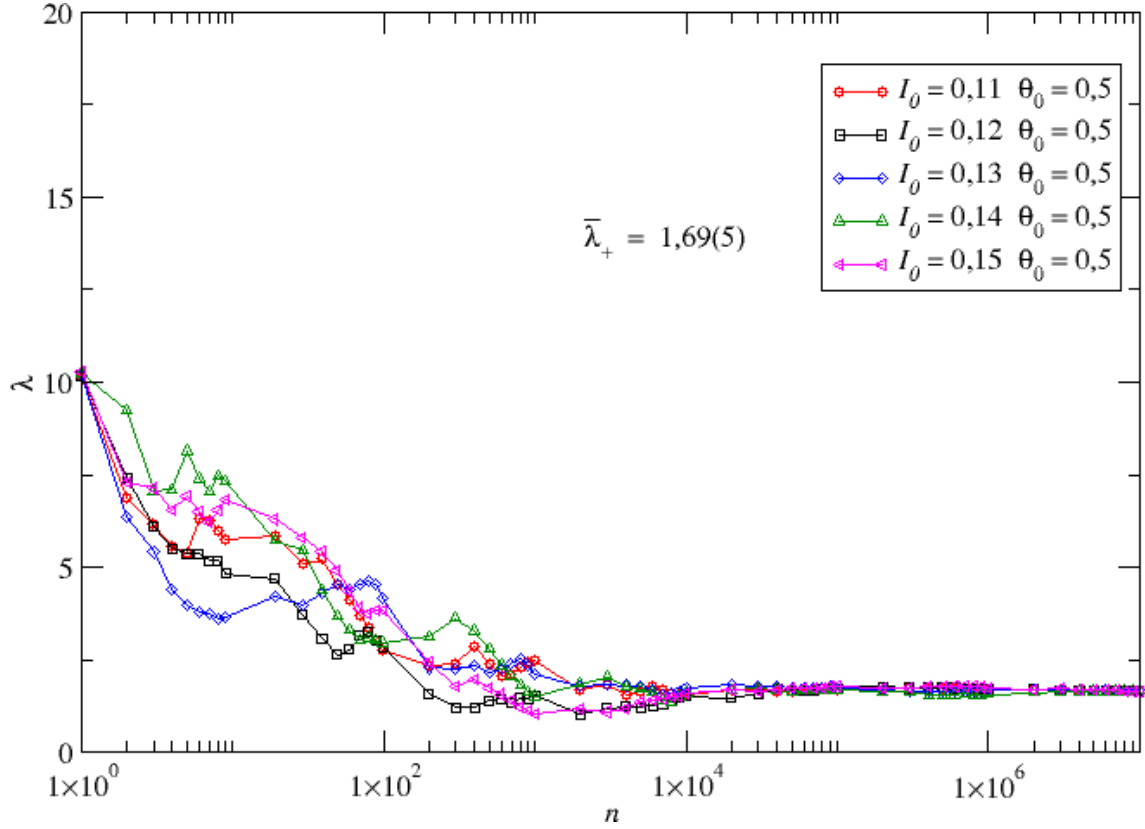


Figura 2.4: Comportamento do expoente de Lyapunov para o caso conservativo. Cinco condições iniciais foram escolhidas e cada uma foi iterada 10^8 vezes. Os parâmetros utilizados foram $\delta = 1$, $\gamma = 1$ e $\epsilon = 0,01$.

valor do expoente de Lyapunov médio, tal qual, aqui, de $\bar{\lambda} = 1,69 \pm 0,005$. O erro $\pm 0,005$ representa o desvio padrão das cinco curvas.

Analogamente, para o caso dissipativo, obtemos também o comportamento do expoente Lyapunov positivo e negativo médio em função do parâmetro de controle ϵ .

O estudo e desenvolvimento das características acerca dos espaços de fases, do estudo da matriz Jacobiana e também da investigação acerca dos expoentes de Lyapunov para os dois modelos de investigação proporcionaram uma base, uma referência para o desenvolvimento avaliado nas próximas seções. Podemos perceber que ao introduzir a dissipação no sistema há a presença de atratores no espaço de fases e buscaremos analisá-los e caracterizar alguns exemplos que podem ser obtidos a partir desse modelo.

A Figura 2.5 ilustra o comportamento dos expoentes de Lyapunov referente ao mapeamento (1.8). Para a construção das curvas visualizadas no diagrama, os parâmetros de controle utilizados foram $\epsilon = 0,001$, $\delta = 0,87$ e $\gamma = 1$. Foram escolhidas

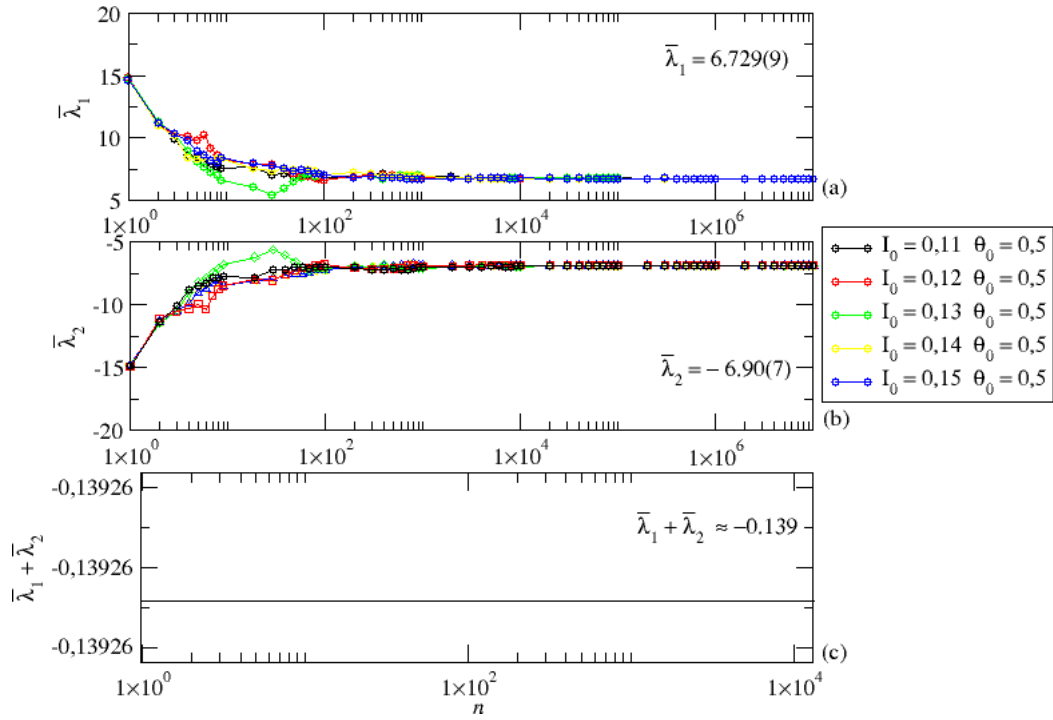


Figura 2.5: Curva do comportamento do expoente de Lyapunov com os parâmetros de controle $\epsilon = 0,001$, $\delta = 0,87$ e $\gamma = 1$. Cinco condições iniciais foram escolhidas e cada uma foi iterada 10^8 vezes. A Fig. 2.5(a) mostra o comportamento dos expoentes de Lyapunov positivos e a Fig. 2.5(b), dos negativos. Em (c), a soma das médias dos expoentes.

cinco condições iniciais diferentes, como representadas na figura, e cada uma das condições foi iterada 10^8 vezes. A Fig. 2.5(a) mostra o comportamento dos expoentes de Lyapunov positivos e a Fig. 2.5(b), dos negativos. A soma das médias dos expoentes é da mesma magnitude que $1 - \delta = 1 - 0,87 \approx -10^{-1}$.

Para investigar o comportamento da convergência para o estado estacionário, na bifurcação e próximo à ela, é necessário um estudo metuculoso utilizando a estabilidade de período um, junto ao expoente de Lyapunov. Isto resulta em uma bifurcação de duplicação de período, como podemos observar em $\epsilon_c = 0,09717528573$. A figura 2.6(a,b) mostra o diagrama de órbitas para o mapa (1.8) enquanto 2.6(c) mostra o comportamento do expoente de Lyapunov em função de ϵ .

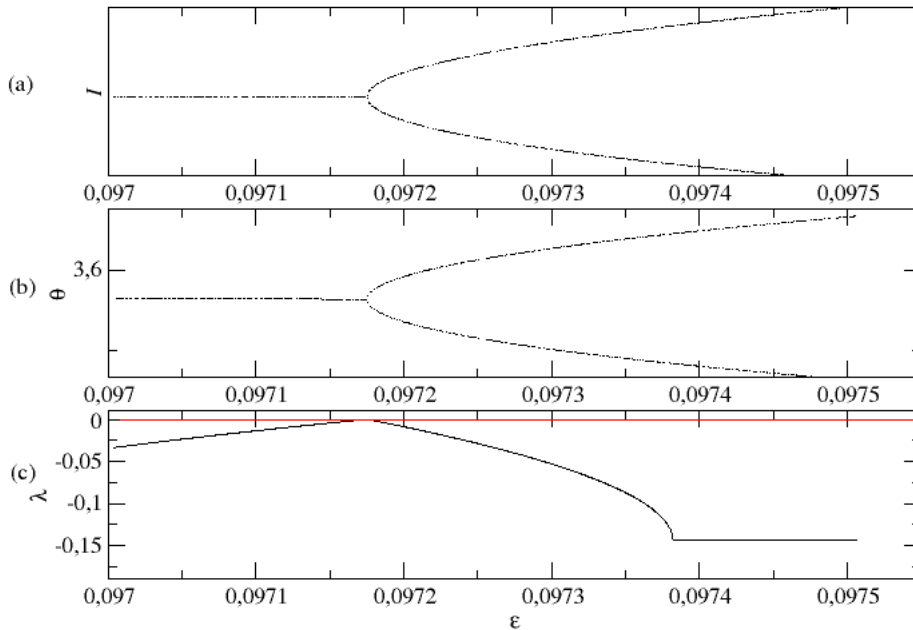


Figura 2.6: (a,b) Mostra os diagramas de órbitas para o mapa (1.8), enquanto (c) mostra o comportamento do expoente de Lyapunov em função de ϵ . Os parâmetros de controle utilizados foram $\delta = 0,75$ e $\gamma = 1$.

2.3 Propriedades de escala

Nosso objetivo é analisar o comportamento da convergência para o estado estacionário próximo a uma bifurcação. Ao se observar um par de trajetórias próximas no espaço de fase e medir a taxa de divergência ou convergência entre elas ao longo do

tempo, determina-se o expoente de Lyapunov. Em sistemas caóticos, pequenas diferenças nas condições iniciais podem resultar em grandes disparidades futuras. Esse comportamento é evidenciado por um expoente de Lyapunov positivo, refletindo a sensibilidade às condições iniciais. Já em um ponto de bifurcação, o expoente de Lyapunov assume um valor nulo. Esta investigação revela uma bifurcação de duplicação de período em $\epsilon_c = 0,09717528573$, sendo este o parâmetro examinado neste estudo. [24, 25]

A dinâmica d em função de n , para diferentes condições iniciais, considerando ϵ_c e $\delta = 0,75$ é apresentada na Figura 2.7. Podemos observar que a convergência para o estado estacionário é medida por $d_n = \sqrt{(I_n - I^*)^2 + (\theta_n - \theta^*)^2}$, como observado na figura a seguir, para os parâmetros de controle $\delta = 0.75$, $\gamma = 1$ e $\epsilon_c = 0,09717528573$. As curvas apresentadas na Figura 2.7 exibem o seguinte comportamento: por um curto intervalo, $n \ll n_x$, as curvas permanecem em um platô estacionário, que pode ser descrito pela relação $d \propto d_0^\alpha$, onde α representa a saturação e $\alpha = 1$, pois o platô se encontra constante estacionado sobre d_0 por um longo intervalo de n .

Eventualmente, a dinâmica do sistema abandona o platô após um número de iterações n_x e entra em um regime de decaimento caracterizado por $d(n) \propto n^\beta$, onde $n \gg n_x$ e β é um expoente crítico que fornece o decaimento para o ponto fixo. Um ajuste de lei de potência da figura 2.2 mostra $\beta = -0.494(1)$. Isso indica que, uma vez fora do platô, o valor de $d(n)$ diminui com uma taxa inversamente proporcional à raiz quadrada do número de iterações, $n^{-1/2}$.

Por último, o número de iterações de transição é dado por $n_x \propto d_0^z$, sendo z outro expoente crítico. O *crossover*, que marca a mudança do regime de platô constante para o decaimento em lei de potência, e o terceiro expoente crítico descreve como o ponto de transição n_x que depende do valor inicial d_0 .

Estas hipóteses de escala nos dá a seguinte lei:

$$z = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (2.9)$$

A figura 2.7 (b) exibe uma sobreposição de todas as curvas mostradas na figura 2.7 (a) em uma única curva universal após as transformações $d \rightarrow d/d_0^\alpha$ e $n \rightarrow n/d_0^z$, representando a invariância de escala para a convergência para o ponto fixo.

2.3.1 Expoentes Críticos

A evolução para o estado estacionário na bifurcação de duplicação de período é conhecida por ser descrita por uma função homogênea e generalizada, que leva a uma lei de escala. Ao focarmos no parâmetro crítico ϵ_c , que marca o início da duplicação de período, identificamos três expoentes críticos: α , β e z , que governam as leis de escala da convergência para o atrator.

Os resultados obtidos mostram boa concordância com estudos anteriores sobre o modelo de Fermi–Ulam [25]. No entanto, a classe de universalidade associada ao mapeamento (1.8) apresenta um leve desvio em relação àquela relatada para o modelo Fermi–Ulam, cujos expoentes são $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$ e $z = 2$. Essa comparação

evidencia distinções sutis entre os dois modelos e reforça a importância de investigar tais variações nas classes de universalidade no contexto de sistemas dinâmicos.

Notavelmente, embora os expoentes obtenham um leve desvio em relação aos valores reportados na literatura, eles ainda guardam uma forte semelhança com aqueles encontrados em mapeamentos unidimensionais [26, 27, 28, 29] que passam por bifurcações semelhantes, indicando uma forma de universalidade que transcende a dimensionalidade [5, 30, 19].

O expoente z pode ser obtido de duas maneiras. A primeira é através da equação (2.9), onde:

$$z = \frac{1}{-0,494} \approx -2,024, \quad (2.10)$$

ou por um ajuste numérico. A Figura 2.8, ilustra a determinação numérica do expoente z por meio de um ajuste de lei de potência do número de iterações de transição n_x em função da condição inicial d_0 . O expoente $z \approx -1.94(9)$ está em concordância com as previsões teóricas e confirma a robustez do comportamento de escala. Tal resultado reforça a ideia de que a dinâmica de convergência próxima a bifurcações do tipo duplicação de período pertence a uma classe universal, independentemente da complexidade dimensional do sistema subjacente [5, 19].

A evolução para o estado estacionário que leva aos mesmos expoentes para o caso bidimensional precisa de transformações de escala adequadas, sendo elas:

$$\begin{aligned} d &\rightarrow d/d_0^\alpha, \\ n &\rightarrow n/d_0^z. \end{aligned}$$

Tais transformações causam a sobreposição de todas as curvas mostradas na figura 2.7(a) e provam a invariância de escala para a convergência para o ponto fixo. Esses achados não apenas fortalecem as conexões entre sistemas dinâmicos de baixa e alta dimensão, como também fornecem uma base sólida para a extensão das análises de leis de escala a modelos mais complexos e realistas. Tal universalidade é essencial para compreender o panorama mais amplo dos fenômenos não lineares, desde mapas simples até modelos com motivações físicas.

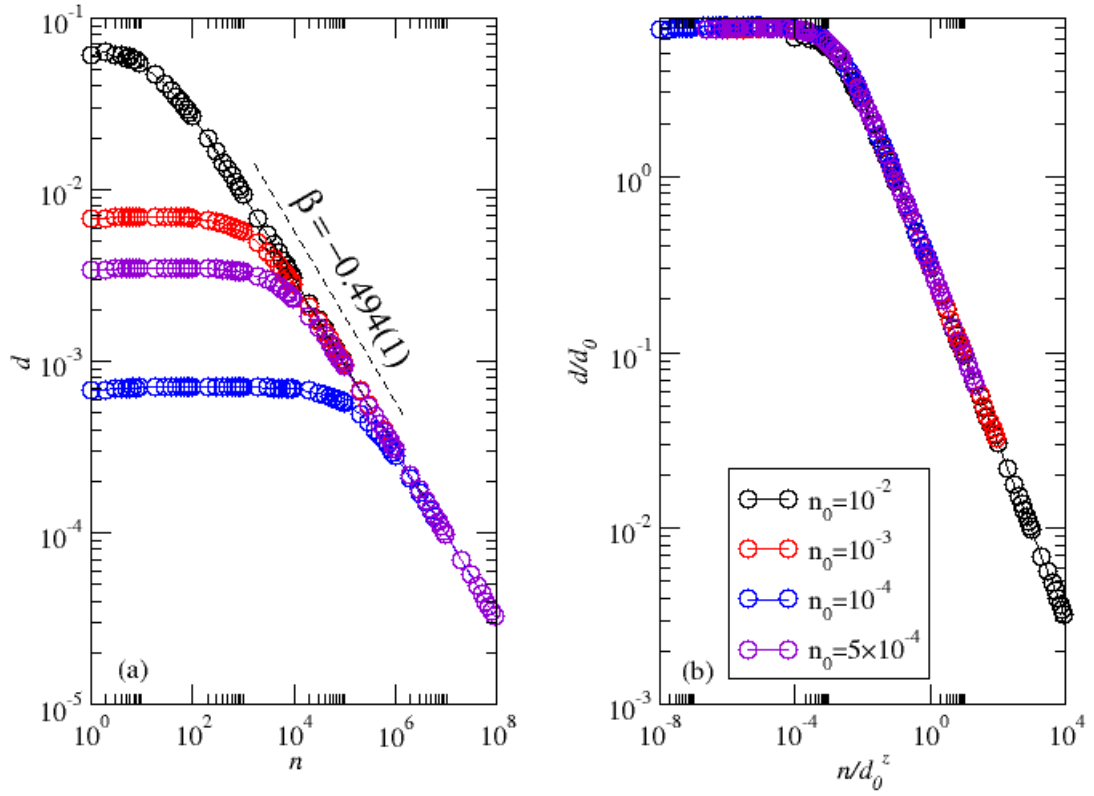


Figura 2.7: Comportamento de convergência de diferentes distâncias para os pontos fixos em (a) e em (b) a sobreposição de todas as curvas para uma universal após as transformações de escala apropriadas. Os parâmetros utilizados foram $\epsilon_c = 0,09717528573$, $\gamma = 1$ e $\delta = 0,75$.

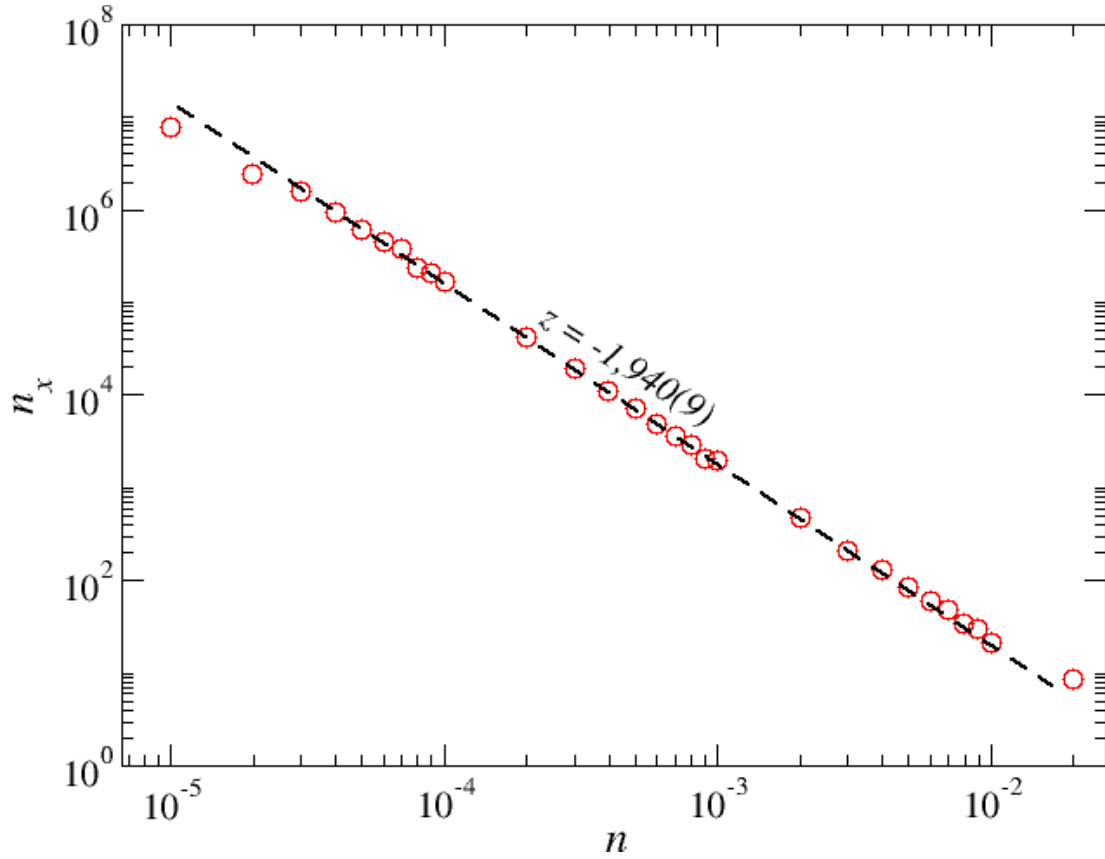


Figura 2.8: Ajuste em lei de potência fornecendo o expoente z . Tal expoente caracteriza a relação $n_x \propto d_0^z$, onde n_x marca a transição de um platô constante para o decaimento em lei de potência, e d_0 é a distância inicial até o atrator. O ajuste confirma o comportamento esperado e fornece uma estimativa de z consistente com o resultado analítico dado por $z = \alpha/\beta$.

Capítulo 3

Crise de Fronteira

Neste Capítulo, caracterizamos uma crise de fronteira e apresentaremos as variedades estáveis e instáveis. A partir delas, será possível analisar a construção de bacias de atração para diferentes valores do parâmetro δ .

3.1 Obtenção das Variedades

Ao variarmos o parâmetro de controle, ocorre a mudança de estabilidade entre os pontos fixos [5, 31]. Tal mudança pode acarretar em alterações drásticas no espaço de fases, como destruição, criação, contração ou expansão de atratores caóticos.

No Capítulo 2, estudamos as bifurcações locais do sistema. Neste Capítulo, estudaremos uma bifurcação global: a crise de fronteira, caracterizada a partir do cruzamento de variedades estáveis e instáveis, oriundas do mesmo ponto de sela. Tal cruzamento resulta em uma colisão das fronteiras da bacia de atração do ponto fixo assintoticamente estável com a da bacia de atração do atrator caótico.

Uma crise de fronteira ocorre quando uma variedade estável intercepta uma variedade instável. Sabemos que um único cruzamento entre essas variedades resulta em um número infinito de cruzamentos [31]. Como consequência, um atrator caótico é abruptamente destruído e substituído por um transiente caótico.

Isso significa que, se uma condição inicial for definida na região onde o atrator caótico existia antes da crise, a dinâmica permanece naquela região por um certo tempo. Eventualmente, a partícula encontra uma trajetória que a leva a escapar desse domínio, movendo-se em direção a outro atrator, que, no caso analisado, corresponde a um ponto fixo atrativo.

Para a construção das variedades instáveis, utilizando o mapeamento (1.8). Após obtermos os pontos fixos, apresentados na equação (1.16), partimos de um conjunto de condições iniciais suficientemente próximas do ponto de sela, mas ao longo de autovetores cujos autovalores serão maior que 1 em módulo. A evolução da dinâmica levará a órbitas que se afastam do ponto de sela. Com o passar do tempo, as variedades instáveis se afastarão do ponto fixo [32].

A variedade instável associada ao ponto de sela possui dois braços distintos. Um deles afasta-se do ponto fixo do tipo sela e converge assintoticamente para o ponto

fixo estável, descrevendo uma trajetória em espiral no sentido anti-horário. Ao longo do tempo, a amplitude do movimento diminui gradualmente, até que, após um tempo suficientemente longo, a dinâmica atinge o estado estacionário, permanecendo confinada no ponto fixo assintoticamente estável por todo o tempo futuro. O segundo braço também se afasta do ponto de sela, mas, diferentemente do primeiro, dirige-se em direção ao atrator caótico, mergulhando na complexidade da dinâmica não linear.

Em contrapartida, as variedades estáveis são obtidas pela iteração do mapeamento inverso e as condições iniciais escolhidas deverão estar alinhadas aos autovetores correspondentes aos autovalores menores que 1 em módulo. As variedades estáveis se aproximam do ponto fixo ao decorrer do tempo [32].

Para obtermos o mapeamento inverso, é necessário determinar, a partir das variáveis conhecidas no instante $(n+1)$, os respectivos valores no instante n . Desta maneira, em vez de iterarmos diretamente o mapa na forma $T(I_n, \theta_n) = T(I_{n+1}, \theta_{n+1})$, devemos encontrar a função inversa de T . Assim, a expressão para o mapa inverso é dado por:

$$T^{-1} : \begin{cases} \theta_n = \left(\theta_{n+1} - \frac{1}{|I_{n+1}|^\gamma} \right) \text{mod}(2\pi), \\ I_n = \frac{1}{\delta} [I_{n+1} - \epsilon \sin(\theta_n)], \end{cases} \quad (3.1)$$

Como as variedades estáveis se expandem predominantemente na componente associada à ação (ou seja, à velocidade da partícula), o fenômeno de colisões sucessivas não é observado nesse regime. Dessa forma, a construção do mapeamento inverso considera apenas as colisões indiretas, em que há um intervalo de tempo entre os impactos sucessivos.

A Figura 3.1 apresenta um gráfico das variedades estáveis e instáveis associadas aos mesmos pontos fixos do tipo sela da equação (1.15), representados por estrelas na figura. As duas variedades estáveis delimitam a bacia de atração, dentro da qual as condições iniciais convergem, e são representadas em vermelho e preto. Os parâmetros de controle utilizados foram $\epsilon = 0,05$ e $\delta = 0,85$ para a figura 3.1(a), referentes à dinâmica antes da crise, e $\delta = 0,8799$ para a figura 3.1(b), correspondente à dinâmica imediatamente posterior à crise de fronteira.

Em vermelho e preto, temos as variedades estáveis, enquanto as variedades instáveis estão representadas em turquesa e violeta. Além disso, os pontos fixos assintoticamente estáveis são representados por círculos, também nas cores vermelho e preto. Em 3.1 (a), antes da crise de fronteira, as variedades estável e instável não se intersectam, e o atrator caótico permanece intacto. Em contraste, em 3.1 (b), observam-se múltiplas interseções entre as variedades estável e instável, uma evidência da crise de fronteira, levando à destruição do atrator caótico e ao surgimento de um transiente caótico.

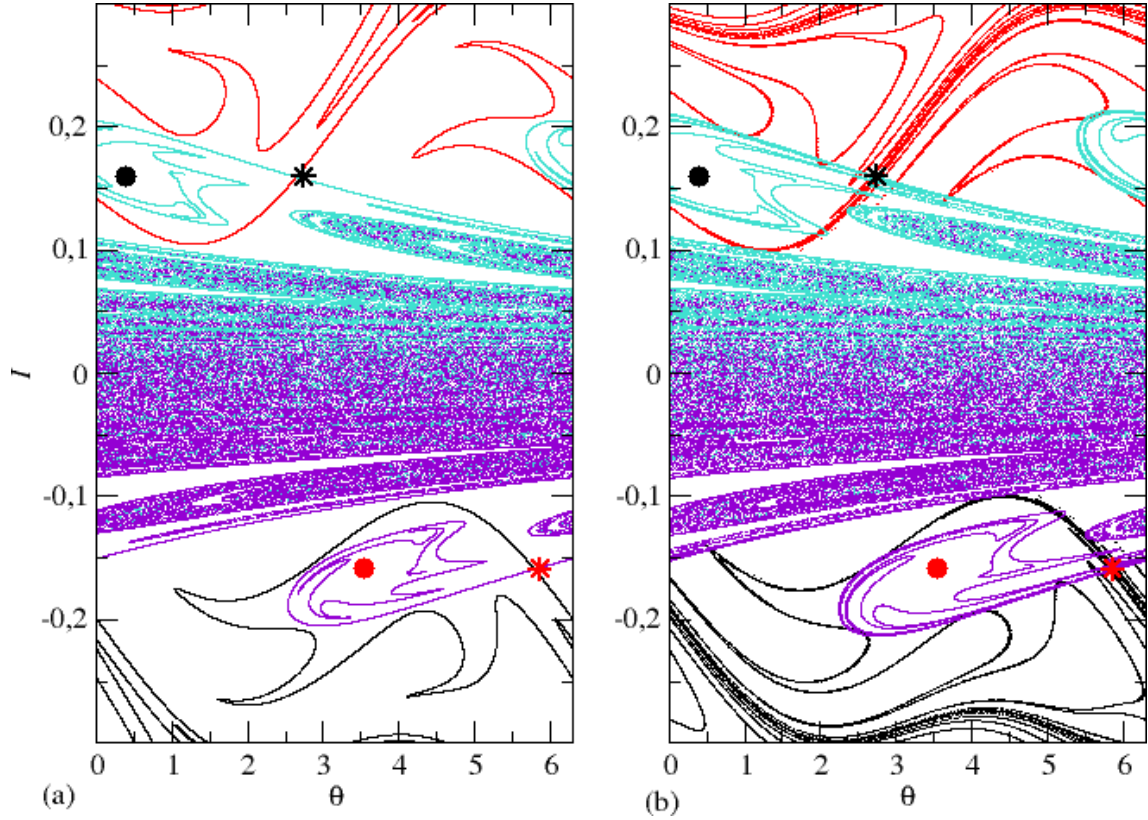


Figura 3.1: Variedades estáveis e instáveis produzidas a partir dos mesmos pontos de sela, representados por estrelas na figura. Os pontos fixos assintoticamente estáveis estão representados por círculos em vermelho e preto. Os parâmetros de controle utilizados foram $\epsilon = 0,05$, $\delta = 0,85$ para 3.1(a), correspondentes à dinâmica antes da crise e $\delta = 0,8799$ para 3.1(b), referente à dinâmica imediatamente após a crise de fronteira. As variedades estáveis estão representadas em vermelho e preto e as variedades instáveis, em turquesa e violeta.

3.2 Bacias de Atração

Denominamos bacia de atração a região do espaço em que os pontos convergem para um determinado atrator. O atrator para qual o ponto convergirá é imprevisível caso o sistema apresente sensibilidade às condições iniciais.

A presença de duas ou mais bacias no espaço resulta em uma região denominada fronteira das bacias de atração, isto é, a região em que tais bacias se encontrarão. Ao introduzir dissipação no mapeamento, o mar de caos é destruído e passa a ser substituído por um atrator caótico. Torna-se, então, possível a construção das fronteiras das bacias de atração dos pontos fixos através dos autovetores das variedades instáveis e estáveis do ponto de sela [31, 33].

A Figura 3.2 apresenta uma sobreposição das variedades estáveis e das bacias de atração, utilizando $\gamma = 1$, $\epsilon = 0,05$ e $\delta = 0,8799$, correspondentes à dinâmica imediatamente posterior à crise de fronteira. Foram realizadas 10^8 iterações. Após a crise de fronteira, o atrator caótico é substituído por um transiente caótico, isto é, uma condição dentro da bacia referente à este atrator não permanece na mesma região após certo tempo, e a órbita passa a ser, então, atraída para um dos pontos fixos assintoticamente estáveis [34]. Em vermelho, temos a bacia de atração para o ponto fixo $(\theta_2^*, I^*) > 0$ e em azul, a bacia do ponto fixo $(\theta_2^*, I^*) < 0$, ambos encontrados anteriormente na equação (1.15).

A Figuras 3.3(a,b,c,d,e,f,g,h,i) apresentam o cenário dinâmico da evolução das bacias de atração [35] para $\gamma = 1$, $\epsilon = 0,05$ e diferentes valores de δ , variando entre 0,8791 a 0,8799. Em preto, temos a bacia referente ao atrator caótico; em vermelho, a bacia de atração para o ponto fixo (θ_1^*, I^*) e em azul, a bacia do ponto fixo (θ_1^*, I^*) , ambos encontrados anteriormente na equação (1.15).

Na Figura 3.3(a), observa-se que a bacia de atração associada ao atrator caótico ocupa a maior parte do espaço de fase, sendo representada pela região preta. As bacias dos atratores regulares, em azul e vermelho, permanecem confinadas às bordas, com fronteiras bem definidas e estáveis. As poucas trajetórias que escapam do domínio caótico convergem para esses atratores regulares. Em 3.3(b), surgem indícios iniciais da fragmentação do atrator caótico, com pontos dispersos vermelhos e azuis se infiltrando na região anteriormente homogênea. Esse processo se intensifica em 3.3(c), onde a presença crescente de trajetórias regulares indica que o caos começa a ser erodido pelas bordas, sugerindo a emergência de instabilidades locais e a gradual substituição da dinâmica caótica por comportamentos mais ordenados.

Na Figura 3.3(d), observa-se um aumento expressivo na densidade de pontos pertencentes às bacias dos atratores regulares. Esse comportamento indica um processo de fragmentação da bacia associada ao atrator caótico, cuja estrutura deixa de ser contínua. Pequenas regiões isoladas, correspondentes aos atratores regulares, emergem no interior da bacia caótica, caracterizando uma transição gradual rumo à dominância dos estados ordenados. Em 3.3(e), observa-se uma intensa competição entre as bacias de atração associadas aos diferentes atratores. O sistema apresenta alta sensibilidade às condições iniciais, refletindo um regime dinâmico transicional no qual pequenas perturbações podem direcionar a trajetória para distintos estados

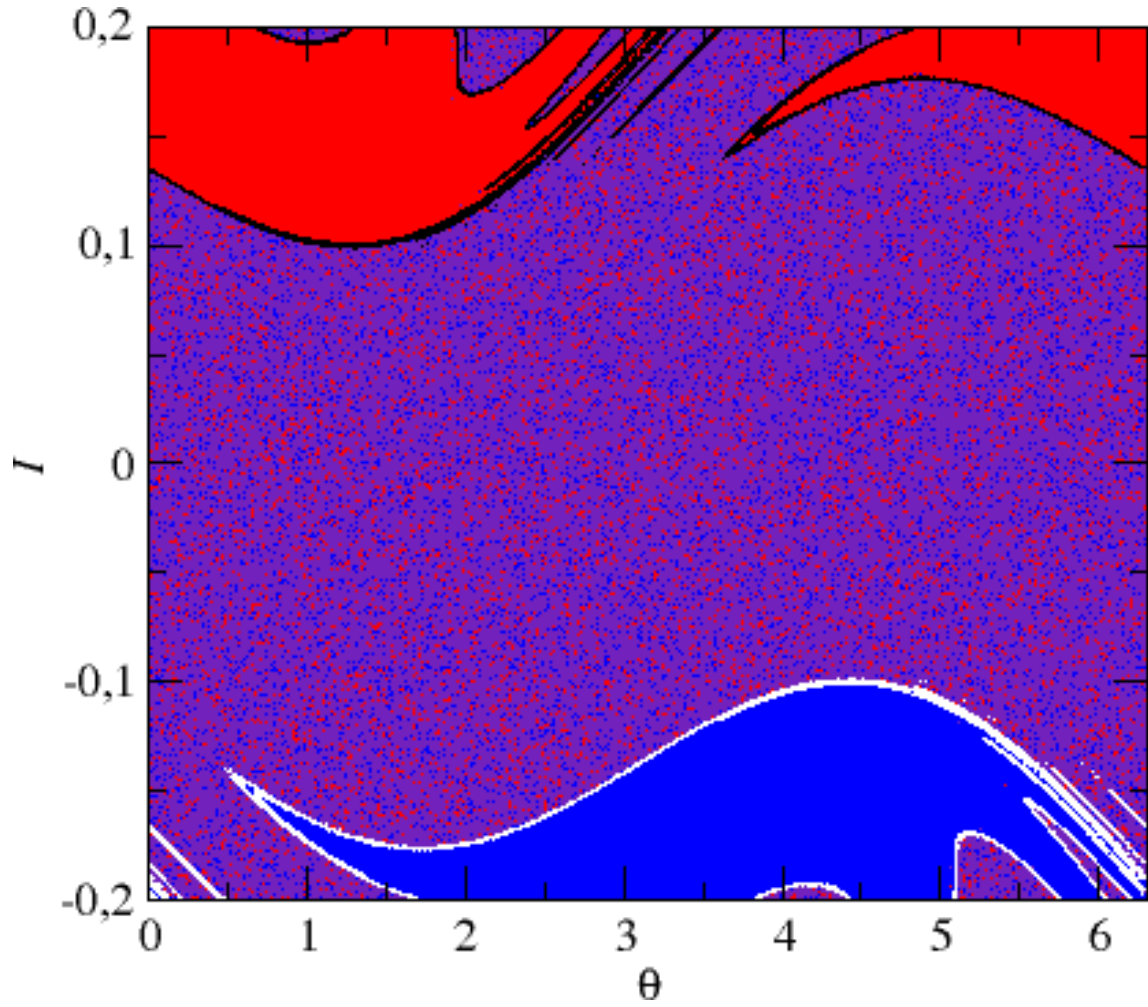


Figura 3.2: Sobreposição das variedades estáveis e das bacias de atração do mapeamento, usando $\epsilon = 0,05$ e $\delta = 0,8799$, correspondentes à dinâmica imediatamente após a crise de fronteira. A região vermelha corresponde à bacia de atração do ponto fixo com $\theta_2 > 0$, enquanto a região azul representa a bacia do ponto fixo com $\theta_2 < 0$, ambos encontrados anteriormente na equação (1.16).

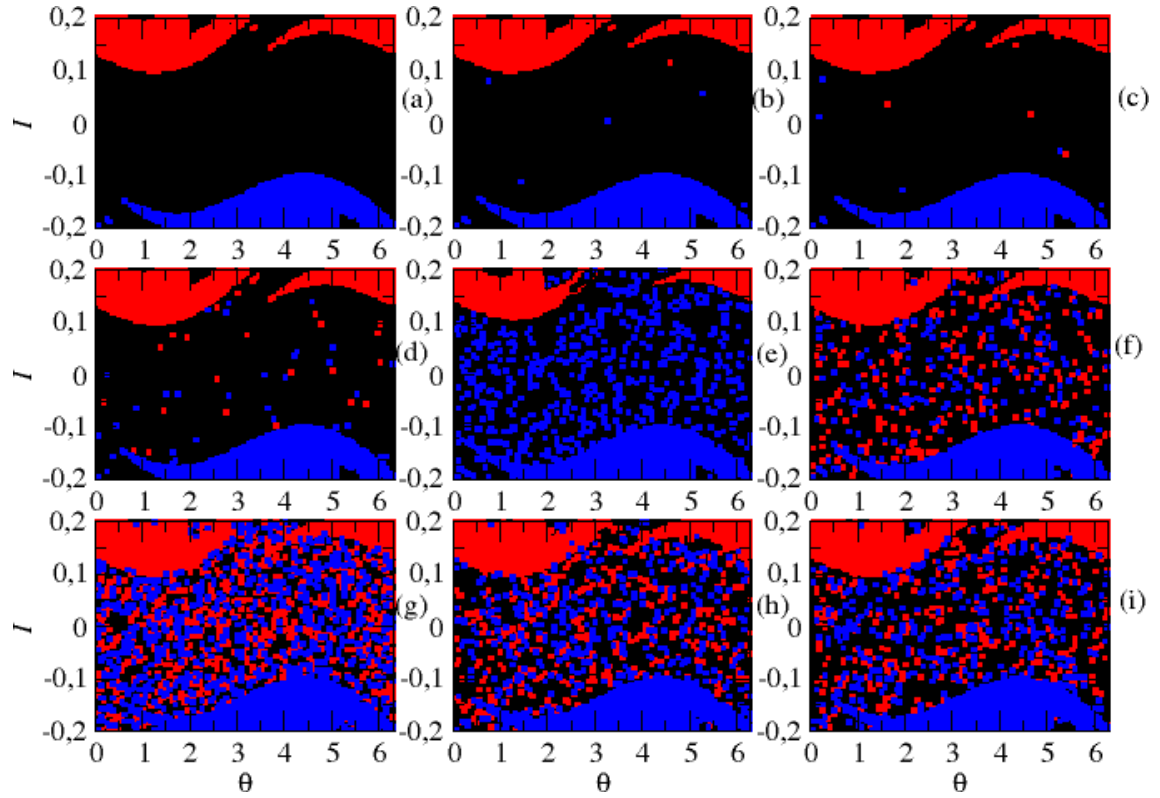


Figura 3.3: Bacias de atração para $\epsilon = 0,05$, $\gamma = 1$ e δ variando entre 0,8791 e 0,8799, mostrando a evolução das bacias de atração, após um transiente de 10^8 . As bacias referentes ao atrator caótico estão representadas em preto. Em vermelho, temos a bacia de atração do ponto fixo assintoticamente estável $(\theta_1, I) > 0$, e em azul, a bacia do ponto fixo $(\theta_1, I) < 0$, ambos encontrados anteriormente na equação (1.15).

finais. Na Figura 3.3(f), nota-se uma redução significativa da região correspondente ao atrator caótico, enquanto as bacias dos atratores regulares se expandem progressivamente, indicando um processo de estabilização do sistema.

Em 3.3(g), embora ainda se observe a presença de regiões associadas ao atrator caótico, sua estrutura encontra-se visivelmente fragmentada e diminuída, indicando um colapso progressivo da bacia correspondente. Na Figura 3.3(h), essa tendência se intensifica: os atratores regulares passam a ocupar quase todo o espaço de fase, com as regiões em azul e vermelho assumindo papel dominante. Por fim, em 3.3(i), o atrator caótico é praticamente extinto, restando apenas as bacias dos atratores estáveis. As fronteiras entre essas regiões apresentam uma morfologia complexa, possivelmente de natureza fractal, refletindo a memória estrutural da dinâmica caótica previamente dominante.

Para otimizar o tempo computacional durante a geração dos arquivos de saída, aumentamos a tolerância numérica para salvar os pontos na saída de 10^{-5} para 10^{-3} . Essa mudança afeta apenas a resolução do efeito visual final, e não a dinâmica subjacente ou a análise. Portanto, enfatizamos que a figura 3.2 não é mais precisa do que a figura 3.3; ambas representam dinâmicas equivalentes, mas foram geradas com parâmetros de tolerância diferentes por questão de eficiência.

Capítulo 4

Considerações Finais

Considerações Finais e Perspectivas

Neste trabalho, estudamos algumas propriedades dinâmicas referentes à uma família de mapeamentos bidimensionais discretos dissipativos. O mapeamento foi obtido a partir de um Hamiltoniano perturbado, através do qual foi possível recuperar diversos mapeamentos encontrados na literatura. No espaço de fases, para o caso conservativo, foi possível observar a presença de ilhas e curvas invariantes *spanning*. A introdução de dissipação mudou a estrutura do espaço de fases, criando atratores.

Para o mapeamento escolhido, foram calculados os expoentes de Lyapunov, obtidos a partir do processo de triangularização de matrizes. Foram, também, construídos os diagramas de bifurcação. O parâmetro $\epsilon_c = 0,09717528573$ identifica uma bifurcação de duplicação de período. A partir do conhecimento de ϵ_c , estudamos o comportamento da convergência para o estado estacionário, identificando três expoentes críticos α , β e z . A partir deles encontramos uma lei de escala, provando assim uma universalidade deste comportamento.

Por último, construímos as variedades a partir do mapa T e sua inversa T^{-1} para observar uma bifurcação global, caracterizando uma crise de fronteira. Os parâmetros de controle envolvidos foram $\gamma = 1$, $\epsilon = 0,05$ e $\delta = 0,8725$. Em seguida, para o mesmo conjunto de parâmetros, encontramos as bacias de atração do atrator caótico e dos pontos fixos assintoticamente estáveis. Fizemos uma sobreposição das variedades estáveis e das bacias de atração.

Como perspectiva de continuidade, esperamos investigar o expoente de transiente na investigação da crise de fronteira e as leis de escala para valores diferentes do parâmetro γ . Esse parâmetro desempenha um papel crucial na estrutura dinâmica do sistema: quando $\gamma = 1$, recuperam-se as propriedades características do mapeamento de Fermi-Ulam. No entanto, ao variar γ e renomear as variáveis ação e ângulo, é possível recuperar modelos diferentes conhecidos na literatura, tais como: o mapa de Kepler, o modelo de guia de ondas corrugado entre outros. Essa generalização nos permitirá definir as classes de universalidade das bifurcações e mapeamentos bidimensionais discretos.

Referências

- [1] Steven H Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. CRC press, 2018.
- [2] Edward N Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of atmospheric sciences*, 20(2):130–141, 1963.
- [3] L. H. A. MONTEIRO. *Sistemas Dinâmicos*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2006.
- [4] N. F. FERRARA and C. P. C. DO PRADO. *Caos: uma introdução*. Editora Blucher, São Paulo, 1994.
- [5] Edson Denis Leonel. *Invariância de escala em sistemas dinâmicos não lineares*. Editora Blucher, 2019.
- [6] George M Zaslavsky. *The Physics of Chaos in Hamiltonian Systems*. world scientific, 2007.
- [7] Edson D Leonel. Corrugated waveguide under scaling investigation. *Physical Review Letters*, 98(11):114102, 2007.
- [8] Edson D Leonel, Diogo R da Costa, and Carl P Dettmann. Scaling invariance for the escape of particles from a periodically corrugated waveguide. *Physics Letters A*, 376(4):421–425, 2012.
- [9] S Oliffson Kamphorst, ED Leonel, and JKL Da Silva. The presence and lack of fermi acceleration in nonintegrable billiards. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 40(37):F887, 2007.
- [10] Matheus Hansen, Gabriel C Lanes, Vinícius LG Brito, and Edson D Leonel. Investigation of pollen release by poricidal anthers using mathematical billiards. *Physical Review E*, 104(3):034409, 2021.
- [11] Allan J Lichtenberg and Michael A Lieberman. *Regular and Chaotic Dynamics (Appl. Math.Sci)*, volume 38. Springer Verlag, NY, 1992.
- [12] James E Howard and Jeffrey Humpherys. Nonmonotonic twist maps. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 80(3):256–276, 1995.

- [13] Boris V Chirikov. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics reports*, 52(5):263–379, 1979.
- [14] Lev Davidovich Pustyl’nikov. Stable and oscillating motions in nonautonomous dynamical systems. a generalization of cl siegel’s theorem to the nonautonomous case. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 23(3):382, 1974.
- [15] Edson D Leonel, Peter VE McClintock, and J Kamphorst Leal Da Silva. Fermi-ulam accelerator model under scaling analysis. *Physical Review Letters*, 93(1): 014101, 2004.
- [16] Edson Denis Leonel. *Fundamentos da física estatística*. Editora Blucher, 2021.
- [17] Edson D Leonel, Julia Penalva, Rivânia MN Teixeira, Raimundo N Costa Filho, Mário R Silva, and Juliano A De Oliveira. A dynamical phase transition for a family of hamiltonian mappings: A phenomenological investigation to obtain the critical exponents. *Physics Letters A*, 379(32-33):1808–1815, 2015.
- [18] Célia Mayumi Kuwana, Juliano A de Oliveira, and Edson D Leonel. A family of dissipative two-dimensional mappings: Chaotic, regular and steady state dynamics investigation. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 395:458–465, 2014.
- [19] Fábio H. da Costa, Mayla A. M. de Almeida, Rene O. Medrano-T, Edson D. Leonel, and Juliano A. de Oliveira. Finding critical exponents and parameter space for a family of dissipative two-dimensional mappings. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 34(12):123124, 12 2024. ISSN 1054-1500. doi: 10.1063/5.0234491. URL <https://doi.org/10.1063/5.0234491>.
- [20] Robert C Hilborn. Lyapunov exponents: a tool to explore complex dynamics, 2017.
- [21] Ch Skokos. The lyapunov characteristic exponents and their computation. In *Dynamics of Small Solar System Bodies and Exoplanets*, pages 63–135. Springer, 2009.
- [22] Fábio Henrique da Costa. Um estudo do espaço de parâmetros em mapeamentos bidimensionais discretos. 2022.
- [23] J-P Eckmann and David Ruelle. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of modern physics*, 57(3):617, 1985.
- [24] Paulo C Rech. Naimark–sacker bifurcations in a delay quartic map. *Chaos, Solitons & Fractals*, 37(2):387–392, 2008.
- [25] Danilo S Rando, Arturo C Martí, and Edson D Leonel. Bifurcations, relaxation time, and critical exponents in a dissipative or conservative fermi model. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 33(2), 2023.

- [26] Hans MJ de Mendonça, Edson D Leonel, and Juliano A de Oliveira. An investigation of the convergence to the stationary state in the hassell mapping. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 466:537–543, 2017.
- [27] Rivania MN Teixeira, Danilo S Rando, Felipe C Geraldo, RN Costa Filho, Juliano A de Oliveira, and Edson D Leonel. Convergence towards asymptotic state in 1-d mappings: A scaling investigation. *Physics Letters A*, 379(18-19): 1246–1250, 2015.
- [28] Edson D Leonel, Rivania MN Teixeira, Danilo S Rando, RN Costa Filho, and Juliano A De Oliveira. Addendum to: “convergence towards asymptotic state in 1-d mappings: A scaling investigation”[phys. lett. a 379 (2015) 1246]. *Physics Letters A*, 379(30-31):1796–1798, 2015.
- [29] R Egydio de Carvalho and Edson D Leonel. Squared sine logistic map. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 463:37–44, 2016.
- [30] Celso Grebogi, Edward Ott, and James A. Yorke. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 7(1): 181–200, 1983. ISSN 0167-2789. doi: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(83\)90126-4](https://doi.org/10.1016/0167-2789(83)90126-4). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278983901264>.
- [31] Celso Grebogi, Edward Ott, and James A Yorke. Critical exponent of chaotic transients in nonlinear dynamical systems. *Physical review letters*, 57(11):1284, 1986.
- [32] Kathleen T Alligood, Tim D Sauer, James A Yorke, and David Chillingworth. Chaos: an introduction to dynamical systems. *SIAM Review*, 40(3):732–732, 1998.
- [33] Celso Grebogi, Edward Ott, and James A Yorke. Chaotic attractors in crisis. *Physical Review Letters*, 48(22):1507, 1982.
- [34] Juliano A de Oliveira, Hans MJ de Mendonça, Diogo R da Costa, and Edson D Leonel. Effects of a parametric perturbation in the hassell mapping. *Chaos, Solitons & Fractals*, 113:238–243, 2018.
- [35] André L.P. Livorati, Iberê L. Caldas, Carl P. Dettmann, and Edson D. Leonel. Crises in a dissipative bouncing ball model. *Physics Letters A*, 379(43): 2830–2838, 2015. ISSN 0375-9601. doi: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2015.09.016>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960115008038>.