

JEAN PAULO DOS SANTOS CARVALHO

AÇÃO DE FORÇAS GRAVITACIONAIS E NÃO GRAVITACIONAIS
SOBRE O MOVIMENTO ORBITAL DE SATÉLITES ARTIFICIAIS

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Mestre em Física na área de Dinâmica orbital.

Orientador: Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes.

Guaratinguetá

2007

C331a Carvalho, Jean Paulo dos Santos
Ação de forças gravitacionais e não gravitacionais sobre o
movimento orbital de satélites artificiais / Jean Paulo dos Santos
Carvalho . – Guaratinguetá : [s.n.], 2007
196 f. : il.
Bibliografia: f. 141-148

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista,
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2007
Orientador: Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes

1. Satélites artificiais I. Título

CDU 629.783



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

"AÇÃO DE FORÇAS GRAVITACIONAIS E NÃO GRAVITACIONAIS
SOBRE O MOVIMENTO ORBITAL DE SATÉLITES ARTIFICIAIS"

JEAN PAULO DOS SANTOS CARVALHO

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE

"MESTRE EM FÍSICA"

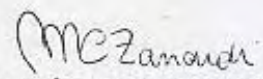
PROGRAMA: FÍSICA

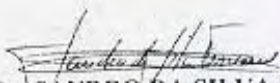
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Denis Dalmazi
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. RODOLPHO VILHENA DE MORAES
Orientador / Unesp-Feg


Prof. Dr. MARIA CECÍLIA FRANÇA DE PAULA S. ZANARDI
Unesp-Feg


Prof. Dr. SANDRO DA SILVA FERNANDES
ITA/São José dos Campos

Abril de 2007

DADOS CURRICULARES

JEAN PAULO DOS SANTOS CARVALHO

NASCIMENTO	14.02.1977 – Alagoinhas / BA
FILIAÇÃO	Armando Torres de Carvalho Enedina dos Santos Carvalho
1998/2003	Curso de Graduação-Licenciatura Plena em Matemática Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS
2005/2007	Curso de Pós-Graduação em Física, nível de Mestrado, na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da UNESP.

de modo especial, aos meus pais Armando e Enedina, aos meus irmãos Leila e Armando, a minha Avó Dalva (in memory) pelo amor, dedicação e apóio em todos os momentos da minha vida. E a minha esposa Renata.

In Memory

Ao meu Avô Niciano Portela que muito incentivou e contribuiu para minha jornada de estudos.

A minha Avó Dalva Torres pelo imenso carinho e apoio em todos os momentos da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus. Agradeço por tudo que tenho conseguido pela constante luta e perseverança ao longo da minha vida, obrigado meu Deus.

em especial, agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Rodolpho Vilhena de Moraes que com muita paciência, amizade e dedicação colaborou imensamente para a realização deste trabalho

à minha esposa Renata pela imensa compreensão, dedicação, amor e companheirismo nesta fase, dedico.

à minha família que tem colaborado bastante para realização dos meus objetivos.

à minha sogra Luzia por suas palavras confortantes em momentos difíceis.

aos professores da pós-graduação pelos ensinamentos e sugestões ao projeto.

ao professor Sandro da Silva Fernandes pela sugestão ao projeto

aos meus colegas da pós-graduação, pela amizade e ajuda nas pequenas dificuldades que apareceram durante a realização deste trabalho.

a todos os amigos e familiares que me deram apoio nesta caminhada

à Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, UNESP, pelo apoio.

Este trabalho contou com apoio da CAPES.

“Eu mantenho o tema dos meus estudos sempre diante de mim, e espero até o amanhecer iniciar gradualmente, pouco a pouco, numa luz clara e completa”

Isaac Newton

CARVALHO, J. P. S. **Ação de forças gravitacionais e não gravitacionais sobre o movimento orbital de satélites artificiais.** 2007. 196f. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2007.

RESUMO

Uma teoria para estudar o movimento orbital de satélites artificiais sobre efeitos do arrasto atmosférico e da pressão de radiação solar direta - considerando a sombra da Terra e alguns termos do geopotencial - é desenvolvida analiticamente. A sombra da Terra é modelada utilizando a função sombra ψ , como introduzida por Ferraz Mello: ψ igual zero quando o satélite está na região de sombra e igual um quando é iluminado pelo Sol. As componentes do arrasto são dadas por Vilhena de Moraes baseado no modelo atmosférico TD-88. O método de Hori para sistemas não-canônicos é aplicado para resolver as equações de movimento. Um software para manipulação algébrica é fundamental para fazer os cálculos necessários. Efeitos seculares e periódicos que influenciam no movimento orbital dos satélites artificiais são analisados. Expressões analíticas são apresentadas explicitamente para os principais termos seculares nas variações dos elementos orbitais. É dada ênfase aos termos de acoplamento que surgem na solução do sistema de equações diferenciais. Utilizando dados orbitais do satélite CBERS-1 um estudo é feito para analisar ordens de grandeza da variação do semi-eixo maior devidas às perturbações consideradas.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria de Perturbação, arrasto atmosférico, pressão de radiação solar, satélites artificiais.

CARVALHO, J. P. S. Action of gravitational and non-gravitational forces on the orbital motion of artificial satellites. 2007. 196f. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2007.

ABSTRACT

A theory to study the orbital motion of artificial satellites under the effects of the atmospheric drag and of the direct solar radiation pressure - considering the Earth's shadow and some terms of the geopotential – is developed analytically. The Earth shadow is modeled using the shadow ψ function introduced by Ferraz Mello: ψ equal zero when the satellite is in the shadow region and equal one when it is illuminated by the Sun. The drag components are given by Vilhena of Moraes based in the TD-88 atmospheric model. The Hori's method for non-canonical systems is applied to solve the motion equations. A algebraic manipulator software is fundamental to do the necessary calculations. Secular and periodic effects on the orbital motion of artificial satellites are analyzed. Analytic expressions are presented explicitly for the main secular terms of the variations of the orbital elements. Emphasis is given to the coupling terms that appear in the solution of the differential equations system. Using orbital data of the satellite CBERS-1 a study is done to analyze the order of magnitude of the variation of the semi-major axis due to the considered perturbations.

KEYWORDS: Theory of perturbations, atmospheric drag, direct solar radiation pressure, artificial satellites.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1-	Potencial gravitacional num ponto P , devido à ação da massa dM	36
FIGURA 2-	Parâmetros orbitais	38
FIGURA 3-	Decaimento orbital devido ao arrasto atmosférico	44
FIGURA 4-	Variação da densidade atmosférica (HL=3)	56
FIGURA 5-	Variação da densidade atmosférica (HL=15)	58
FIGURA 6-	Variação da densidade atmosférica	59
FIGURA 7-	Variação do semi-eixo maior devido ao arrasto sobre o satélite Mimosas	122
FIGURA 8-	Variação do semi-eixo maior devido ao arrasto atmosférico	131
FIGURA 9-	Variação do semi-eixo maior devido à diferença entre a solução de ordem um e a solução de ordem dois	132
FIGURA 10-	Variação do semi-eixo maior devido ao acoplamento do arrasto com a pressão de radiação	133
FIGURA 11-	Variação do semi-eixo maior devido ao acoplamento do arrasto com o geopotencial	134
FIGURA 12-	Diferença entre os termos de acoplamento do arrasto com pressão e do arrasto com geopotencial	135
FIGURA 13-	Variação do semi-eixo maior devido ao acoplamento do arrasto com o geopotencial e do arrasto com a pressão de radiação	136

LISTA DE TABELAS

TABELA 1-	Constantes numéricas $K_{n,j}$	50
TABELA 2-	Fases p_n	50
TABELA 3-	Constantes a_i	51
TABELA 4-	Constantes numéricas $K_{n,j}$ para altitudes de 750 km até 1200 km.	51
TABELA 5-	Constantes a_i para altitudes de 750 km até 1200 km.	51
TABELA 6-	Variação da densidade em relação a altitude (HL=3)	54
TABELA 7-	Variação da densidade em relação a altitude (HL=15)	56
TABELA 8-	A ordem da magnitude da pressão de radiação e correção relativística para diferentes satélites (EL-SAFTAWY; EL-ENNA, 2002).	63
TABELA 9-	Variação do semi-eixo maior sobre o satélite Mimosa	121
TABELA 10-	Erros relativos do semi-eixo maior num período de 24 horas para abordagem de Delhaise (1991) (modificada)	123
TABELA 11-	Variação do semi-eixo maior num período de 24 horas	124
TABELA 12-	Variação do semi-eixo maior para o satélite CBERS-1	128
TABELA 13-	Razão entre aceleração da pressão de radiação e a aceleração do arrasto	129
TABELA 14-	Variação do semi-eixo maior devido ao arrasto atmosférico (km)	130
TABELA 15-	Variação do semi-eixo maior devido à solução de ordem um e a solução de ordem dois	131
TABELA 16-	Variação do semi-eixo maior devido à diferença entre a solução de ordem um e a solução de ordem dois	132
TABELA 17-	Variação do semi-eixo maior devido ao acoplamento do arrasto com a pressão de radiação	133
TABELA 18-	Variação do semi-eixo maior devido ao acoplamento do arrasto com o geopotencial	134
TABELA 19-	Diferença entre os termos de acoplamento do arrasto com pressão e do arrasto com o geopotencial	135
TABELA 20-	Magnitude das forças perturbadoras para o satélite CBERS-1	137

LISTA DE SÍMBOLOS

AKP	índice geomagnético	
ALAT	latitude	
a	semi-eixo maior	km
a_e	semi-eixo equatorial do elipsóide da Terra (raio equatorial da Terra)	km
$\vec{A}_{PR}$	aceleração causada pela pressão de radiação	
A	constante dependendo do arrasto	$A = \frac{1}{2} \frac{SC_D}{m}$
c	velocidade da luz	km/s
C_D	coeficiente de arrasto	
C_R	fator que depende da refletividade do satélite	
DAY	dia do ano	
D	módulo da aceleração do arrasto	$D = \frac{1}{2} \frac{S}{m} C_D \rho_d V^2$
$\overline{D}$	operador definido na teoria de Hori	
EFX	e fluxo solar	
EFBAR		
E	anomalia excêntrica	
e	excentricidade	
f	anomalia verdadeira	
$\overline{F}_{imp}(i)$	função da inclinação normalizada	
$G_{ipq}(e)$	função da excentricidade	
H	hamiltoniana	
HL	hora local	
i	inclinação da órbita	$graus$
J_2	constante associada ao achatamento da Terra	
$J_l(x)$	função de Bessel	
$L_2=G$	elemento orbital de Delaunay	$G = L\sqrt{1-e^2}$
$L_3=H$	elemento orbital de Delaunay	$H = G \cos i$
$l_2 = g$	elemento orbital de Delaunay	$g = \omega$
$l_3=h$	elemento orbital de Delaunay	$h = \Omega$
$L_1=l$	anomalia média	$l=M$
$L_1=L$	elemento orbital de Delaunay	$L = \sqrt{\mu a}$
L_j^*	constantes de integração	
l_j^*	constantes de integração	
k	constante depende das propriedades de reflexão da superfície do satélite	
$K_{n,j}$	constantes numéricas	
m	massa do satélite	kg
M	massa da Terra	kg

M	anomalia média	
n	movimento médio	
P_j	componentes da aceleração do arrasto	
P_S	pressão de radiação na órbita terrestre	
P_n	polinômio de Legendre	
Q_j	componentes da aceleração do arrasto	
q	razão entre a intensidade de radiação solar e a velocidade da luz	
$\hat{r}_s$	versor Terra-Sol	
r_p	distância do perigeu	
R_T	<i>distância da Terra ao Sol</i>	
R_0	distância média da órbita da Terra ao Sol	
r	posição do satélite relativo a Terra	km
R	função perturbadora referente a pressão de radiação solar	
S	área da secção transversal	m^2
S_n	funções geratrizes do método de Hori para sistemas canônicos	
t	tempo	
T_j^n	funções geratrizes do método de Hori para sistemas não-canônicos	
U	geopotencial	
U_J	função que contém termos do achatamento da Terra	
u	argumento do perigeu somado à anomalia verdadeira	
V	velocidade do satélite em relação à atmosfera da Terra	Km/s
X_j	são as componentes da aceleração do arrasto	
$X_k^{n,m}(e)$	coeficientes de Hansen	
Z_j, Z_j^*	funções definidas no método de Hori para sistemas não-canônicos	
Δ	distância entre o ponto e o sólido	
dM	elemento de massa do corpo	
μ	parâmetro gravitacional da Terra	$3,986 \times 10^5 km^3/s^2$
Ω	longitude do nodo ascendente	
ω	argumento do perigeu	
ε	pequeno parâmetro	
τ_0	tempo de passagem pelo pericentro	
θ	tempo sideral	
ρ_d	densidade atmosférica	
ρ	magnitude da pressão de radiação solar $\bar{\rho}$	$\rho = k \frac{S}{m} q$
$\bar{\rho}$	pressão de radiação solar	
ρ_s	parte secular da densidade atmosférica	

$[...]$	parêntesis de Poisson generalizado
ν	fator de eclipse
τ	parâmetro introduzido pelo sistema auxiliar de Hori
δa	variação do semi-eixo maior
δL	variação do termo L
Θ	longitude do Sol
λ	ângulo formado pelas direções geocêntricas do satélite e o pólo escuro do terminador terrestre
σ_i	variável introduzida para evitar aparecimento de termo secular espúrios
ψ	função sombra
$\mathfrak{R}$	representa os termos seculares devido ao geopotencial
w_0	intensidade de radiação à uma unidade astronômica
w	intensidade de radiação, definida como energia incidente por unidade de área
ξ, η	variáveis canônicas na teoria de Brouwer-Hori

SUMÁRIO

	LISTA DE FIGURAS	
	LISTA DE TABELAS	
	LISTA DE SÍMBOLOS	
	INTRODUÇÃO	18
1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	23
1.1	LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO	23
2	FORÇAS GRAVITACIONAIS E NÃO GRAVITACIONAIS	34
2.1	CAMPO GRAVITACIONAL TERRESTRE	34
2.2	GEOPOTENCIAL EM COORDENADAS ESFÉRICAS	35
2.3	INTERPRETAÇÃO DOS COEFICIENTES E EFEITOS DO 37 GEOPOTENCIAL	
2.4	EXPRESSÃO DO GEOPOTENCIAL EM FUNÇÃO DOS 37 ELEMENTOS ORBITAIS	
2.5	GEOPOTENCIAL CONSIDERADO	40
2.6	PERTURBAÇÕES DEVIDAS AO ARRASTO ATMOSFÉRICO	43
2.6.1	Desenvolvimento da densidade em termos da anomalia excêntrica	48
2.6.2	O modelo termosférico TD-88	49
2.6.3	Densidade atmosférica	52
2.6.4	Teoria de Brouwer e Hori	60
2.7	PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOLAR	62
2.7.1	Teoria de Vilhena de Moraes	64
3	EQUAÇÕES DO MOVIMENTO	69
3.1	MÉTODO DE HORI PARA SISTEMAS CANÔNICOS	69
3.1.1	Aplicação do método de Hori para sistema canônico	73
3.1.1.1	Sistema auxiliar do método de Hori	74
3.2	MÉTODO DE HORI PARA SISTEMA NÃO-CANÔNICO	81
3.2.1	O algoritmo de Hori (1971)	82

3.2.2	Aplicação do método de Hori para sistema não-canônico	85
4	SOLUÇÃO DO SISTEMA UTILIZANDO O MÉTODO DE HORI (1971)	93
4.1	MÉTODO DE HORI (1971) INCLUINDO A PRESSÃO DE RADIAÇÃO	93
4.2	DEFINIÇÃO DOS NOVOS ELEMENTOS QUE SERÃO CONSIDERADOS NO SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	96
4.2.1	Definição da hamiltoniana	96
4.2.2	Definição da pressão de radiação solar direta	99
4.2.3	Novas componentes do arrasto atmosférico	99
4.3	SOLUÇÃO DOS TERMOS SECULARES ACOPLADOS	103
5	SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MÉTODO DE HORI (1971)	115
5.1	ANÁLISE DAS EQUAÇÕES DO SISTEMA AUXILIAR DE HORI	115
5.2	SOLUÇÃO DOS TERMOS SECULARES DEVIDO AOS TERMOS l, g e h	117
5.3	REPRESENTAÇÃO DA SOLUÇÃO GERAL DO MÉTODO DE HORI	118
6	APLICAÇÕES	120
6.1	APLICAÇÃO DA TEORIA: SATÉLITE MIMOSA	120
6.2	APLICAÇÃO DA TEORIA: SATÉLITE EURECA	123
6.3	APLICAÇÃO DA TEORIA: SATÉLITE CBERS-1	124
7	CONCLUSÃO	138
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	141
	BIBLIOGRAFIA CONSULTADA	148
	APÊNDICE A - Geopotencial em termos das variáveis de delaunay	149
	APÊNDICE B - Definição dos termos que aparecem nas expressões de ordem dois	150
	APÊNDICE C - Funções periódicas	151
	APÊNDICE D - Programa em linguagem Fortran para calcular a densidade atmosférica	159

APÊNDICE E - Solução de ordem dois devido aos termos seculares 161
das variáveis angulares l, g e h

APÊNDICE F - Funções geratrizes $T_4^{(1)}, T_5^{(1)}$ e $T_6^{(1)}$ 193

INTRODUÇÃO

O espaço sempre fascinou o homem desde a Antigüidade. À medida que a história do homem avançava com a sua tecnologia, foi ficando cada vez mais claro que descobrir o que nos rodeava era apenas uma questão de tempo. Soma-se a isso, as antigas disputas territoriais, que, de uma maneira ou de outra, sempre contribuíram para o progresso de uma nação em relação às outras. Pensava-se antes que, quem dominasse os mares dominaria a Terra; depois, que quem dominasse os ares, conquistaria também a Terra. Depois de conquistar tudo isso o homem ainda queria mais e continuaram em busca de novas descobertas agora fora do nosso planeta Terra, passaram a explorar o espaço começando a partir daí a corrida espacial e as conquistas do século XX.

A disputa entre Estados Unidos e União Soviética (URSS) pela conquista do espaço foi o grande impulso para a exploração espacial e resultou em grandes avanços científicos e tecnológicos, além de descobertas importantes. Em 1957, a URSS saiu na frente, lançando o Sputnik-1, o primeiro satélite artificial a entrar em órbita. Uma semana depois, foi lançado o Sputnik-2.

Em 1958, os EUA reagiram com a criação da Nasa (National Aeronautics & Space Administration), responsável pelo programa espacial do país. Nesse mesmo ano foi lançado o primeiro satélite artificial americano, o Explorer-1.

Satélites Artificiais são lançados em órbita da Terra com diversos fins. Os principais são: satélites de comunicações que servem para transmissões à distância, como nas “transmissões via satélite” de televisão, satélites de sensoriamento remoto que estudam a superfície terrestre, satélites meteorológicos que são usados para a previsão do tempo, satélites de posicionamento global são usados por navios e aviões (ou por qualquer pessoa) para determinar sua posição em qualquer ponto da Terra, satélites de pesquisa científica, como o Hubble, são usados principalmente para

observações astronômicas; por fim os satélites para fins militares, incluindo satélites espões.

Cada finalidade dessas requer que as órbitas dos satélites sejam determinadas com grande precisão, para que, a cada instante, a posição do satélite possa ser prevista. Em qualquer missão espacial, quer se exija que a órbita seja conhecida com maior ou menor precisão, o conhecimento do comportamento da órbita é vital para o sucesso da missão.

Caso o movimento orbital não fosse perturbado, as órbitas dos satélites artificiais seriam elipses de tamanhos e excentricidades constantes, em planos fixos e os satélites permaneceriam nessas órbitas indefinidamente. Os elementos orbitais seriam todos constantes e o movimento orbital seria o kepleriano, bem conhecido na literatura. Porém, como veremos, estes elementos variam com o passar do tempo, com isso é necessário um estudo para aprimorar a dinâmica que rege o movimento dos satélites artificiais. As órbitas dos satélites são influenciadas por diversos efeitos perturbadores como, por exemplo, os de origem gravitacionais: a não-homogeneidade da distribuição da massa da Terra, a atração do Sol e da Lua, marés terrestres; ou os não gravitacionais: arrasto atmosférico, pressão de radiação solar direta e indireta, o efeito Poynting-Robertson, o efeito Yarkovsky, perturbações eletromagnéticas, eclipses etc. Estas perturbações alteram a órbita do veículo espacial fazendo com que ela vá se deteriorando ao passar do tempo, com isso são necessárias algumas manobras para corrigir sua órbita para que o satélite tenha um tempo de vida útil mais longo.

Estudamos o movimento translacional de um satélite artificial sujeito à ação do geopotencial, da pressão de radiação solar direta (considerando a sombra da Terra) e do arrasto atmosférico.

Expressões analíticas para as perturbações, considerando-se modelos realísticos, são desenvolvidas e substituídas nas equações de movimento. As equações são integradas analiticamente por processos de teoria de perturbações permitindo análise

dos termos que compõem a solução. Utilizamos o método de Hori (1971) para resolver o sistema não-canônico.

Neste trabalho descrevemos a teoria baseada em artigos citados na referência bibliográfica e utilizamos um software, o Maple 9.5, para resolver as equações de movimento.

Nosso objetivo é fazer um estudo referente às forças que perturbam o movimento dos satélites artificiais, em especial ao satélite CBERS (satélite Sino-Brasileiro de Recursos Terrestres). Este satélite está situado a uma altitude de 778 km sendo, portanto, influenciado pelo arrasto atmosférico e a pressão de radiação solar que, segundo Vilhena de Moraes (1978) satélites nesta altitude sofre influência das duas forças citadas. A órbita do CBERS é heliossíncrona perfazendo cerca de 14 revoluções por dia. Nesta órbita, o satélite cruza o Equador sempre na mesma hora local, 10:30h da manhã, permitindo assim que se tenha sempre a mesma condição de iluminação solar para a comparação de imagens tomadas em dias diferentes. O satélite obtém a cobertura da Terra em 26 dias.

Este trabalho está dividido em 7 capítulos e 6 apêndices.

No Capítulo 1 apresentamos a revisão bibliográfica de alguns trabalhos desenvolvidos na área.

No Capítulo 2 apresentamos um breve estudo sobre o geopotencial, a densidade atmosférica, modelo termosférico, arrasto atmosférico e a pressão de radiação solar direta considerando a sombra da Terra. Destacamos resumidamente a teoria de Brouwer e Hori (1961) para o arrasto atmosférico e a teoria de Vilhena de Moraes (1978) para a pressão de radiação solar direta e o arrasto atmosférico.

No Capítulo 3 consideramos o sistema de equações diferenciais que descreve o movimento de um satélite artificial influenciado pelo geopotencial e arrasto atmosférico. Apresentamos o método de Hori (1966, 1971) para sistemas canônicos e não-canônicos respectivamente. Fazemos também uma aplicação para cada método e comparamos com outros trabalhos para comprovar a validade do método.

No Capítulo 4 consideramos um satélite artificial perturbado pelo geopotencial (considerando os harmônicos tesserais), pressão de radiação solar direta (considerando a sombra da Terra) e o arrasto atmosférico, dados em termos das variáveis de Delaunay. Reescrevemos o método de Hori (1971) para sistemas não-canônicos conforme nosso propósito, incluindo a pressão de radiação. Definimos a hamiltoniana, a pressão de radiação, o arrasto e o modelo de densidade atmosférica que são utilizados no sistema de equações. O sistema é resolvido utilizando o software Maple. Descrevemos também as novas componentes do arrasto que são usadas no programa. Mostramos apenas as soluções dos termos seculares e seculares acoplados (pressão de radiação e arrasto atmosférico) para as variáveis métricas. Pois tais termos são de considerável importância para o estudo do sistema dinâmico.

No Capítulo 5 expomos as equações do movimento encontradas na aplicação do método de Hori para os termos seculares angulares. Primeiramente fazemos uma análise em relação aos termos de ordem zero do sistema auxiliar de Hori, depois apresentamos as soluções seculares das variáveis angulares. Por fim apresentamos a solução geral do problema.

No Capítulo 6 apresentamos algumas aplicações para verificar a solução do sistema proposto, em que utilizamos dados dos satélites: Mimoso, Eureka e CBERS-1. Fazemos também algumas considerações em relação a pressão de radiação solar.

No último capítulo apresentamos as conclusões e perspectivas para novos desenvolvimentos.

No Apêndice A explicitamos a hamiltoniana segundo o geopotencial de Wnuk (1990a) em que separamos a parte secular na hamiltoniana H_0 e a parte periódica H_1 considerando (harmônicos zonais e tesserais) até a terceira ordem.

No Apêndice B definimos os termos que aparecem nas expressões devidas à solução de ordem dois.

No Apêndice C expomos as funções periódicas de primeira ordem que servem para estudar os efeitos periódicos de curto e longo período.

No Apêndice D apresentamos o programa em linguagem Fortran para calcular a densidade atmosférica utilizando o modelo de densidade TD-88.

No Apêndice E apresentamos as soluções seculares das variáveis angulares.

No Apêndice F apresentamos as funções geratrizes $T_4^{(1)}, T_5^{(1)}$ e $T_6^{(1)}$

CAPÍTULO 1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A partir do século XX, com o surgimento da tecnologia espacial, questionamentos referentes a sua importância e utilidade têm sido levantados. Ao decorrer dos anos, os avanços oriundos da exploração espacial foram produzindo benefícios concretos para toda a sociedade. Citaremos alguns exemplos, como um simples telefonema, propiciado muitas vezes por satélites, até as previsões meteorológicas, e isso sem levar em consideração os benefícios indiretos, como o desenvolvimento de novos materiais e tecnologias, geração de empregos e conhecimento, entre outros. Portanto, observamos o crescente desenvolvimento nesta área e com isso, estudos referentes à dinâmica de satélites artificiais necessitam de aperfeiçoamento para obtermos melhores resultados na elaboração de futuras missões espaciais. Para tal aperfeiçoamento fazemos primeiramente um estudo bibliográfico referentes aos trabalhos desenvolvidos na área. Este levantamento bibliográfico é de suma importância para a realização do trabalho proposto, pois foi fundamental para descrever as equações de movimento (CARVALHO, 2006a, 2006b, 2006c).

1.1 LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO

Brouwer e Hori (1961) apresentam uma solução analítica para o movimento de um satélite artificial no campo gravitacional terrestre considerando-se o efeito do arrasto atmosférico. As equações do movimento são postas nas variáveis canônicas de Delaunay, utilizando propriedades de transformações canônicas para resolver o sistema proposto. A integração das equações desenvolvidas nas variáveis canônicas deu-se pelo método das aproximações sucessivas. Nesse trabalho aparecem termos espúrios de Poisson (função periódica do tempo aparece multiplicada por uma função

linear do tempo) e que são eliminados posteriormente (FITZGIBBON; VILHENA DE MORAES, 1987).

Lála e Sehnal (1969) investigam as perturbações de curto-período das órbitas de um satélite artificial, durante uma revolução do satélite ao redor da Terra, causadas pela pressão de radiação solar direta. É de interesse especial, o estudo da influência da sombra da Terra, que é considerada como uma função matemática especial nas equações de perturbações. Esta teoria semi-analítica é aplicada para perturbações do semi-eixo maior e excentricidade.

Ferraz-Mello (1972) desenvolve um novo modelo matemático para estudar o efeito da pressão de radiação solar na órbita de um satélite artificial da Terra. É elaborada uma teoria semi-analítica a partir de uma aproximação da função sombra tornando canônico o sistema de equações. Isto possibilitou a utilização do método de Von Zeipel (Ferraz-Mello, 2007) para eliminar todos os termos periódicos. O modelo conduziu a não-existência de perturbações seculares puras devido à pressão de radiação solar direta nos elementos métricos: semi-eixo maior, excentricidade e inclinação.

Vilhena de Moraes (1978, 1981) desenvolve uma teoria de primeira ordem semi-analítica (utilizando o método da variação dos parâmetros) para estudar os efeitos da pressão de radiação solar direta e do arrasto atmosférico sobre o movimento de um satélite artificial, considerando a sombra da Terra e incluindo os principais termos seculares devido ao achatamento da Terra. É dada ênfase aos termos de acoplamento que surgem como resultado dos fatores comuns das forças citadas. Fazendo a pressão de radiação igual a zero o problema é reduzido para um já resolvido por Brouwer e Hori (1961). As soluções não são equivalentes, pois na teoria de Brouwer e Hori apareceram termos espúrios de Poisson. Para evitar esses termos é utilizada uma transformação sugerida por Ferraz Mello (1981).

Vilhena de Moraes (1979) mostra que acima de 800 km o efeito da pressão de radiação é maior que do arrasto atmosférico para satélites em órbita circular. Especialmente para satélites com órbitas muito excêntricas, estes dois efeitos devem

ser considerados simultaneamente, para um estudo mais preciso da evolução orbital. De fato, enquanto o efeito do arrasto ocorre principalmente no perigeu, a pressão de radiação está sempre presente e com intensidade constante exceto na sombra. Além disso, quando ambos os efeitos são levados em conta, termos acoplados aparecerão além dos termos devido exclusivamente a cada perturbação. O artigo mostra a importância em considerar estes termos acoplados para alguns satélites e determina a solução de um sistema envolvendo ambos efeitos. É feita também uma aplicação para o satélite Vanguard-I que tem altura do perigeu cerca de 650 km verificando os termos que surgem do acoplamento.

Em Ferraz Mello (1981) a idéia da transformação de Tisserand é usada para evitar o aparecimento de termos seculares espúrios ou seculares misto dependentes do tempo quando estudado o efeito do acoplamento da ação simultânea de duas perturbações de diferente tipo.

Anselmo et al (1983) analisam as perturbações devido à pressão de radiação solar na órbita de um satélite artificial com alta altitude. É o primeiro modelo de um modo simplificado para descrever os efeitos principais para satélites de telecomunicação existentes. É feita uma análise dos efeitos causados por perturbações de longo período nos elementos orbitais.

Vilhena de Moraes e Fitzgibbon (1983, 1987) apresentam uma formulação prática do método de Lagrange para estudar o efeito do acoplamento de forças gravitacionais e não-gravitacionais em órbitas de satélites artificiais. É feita uma aplicação para o acoplamento do arrasto atmosférico e o achatamento da Terra. O artigo faz uma discussão de outros métodos de teoria de perturbação que podem ser utilizados para resolver o problema em questão, um deles é o método de Hori (1971) que é aplicado diretamente no sistema original. A solução encontrada utilizando o método de Lagrange não apresentou termos espúrios como os que surgem no trabalho de Brouwer e Hori (1961).

O modelo TD (TD-Padrão para Densidade Total) é apresentado por Sehnal (1988). O modelo TD é descrito para variações e distribuição da densidade total da

atmosfera da Terra numa região entre 200 e 500 km. A propriedade do modelo é comparada com os modelos DTM, C, CIRA 72 e CIRA 86. Os elementos da densidade que são analisados são mudança na atividade do fluxo solar e geomagnético anual e diurno, mudança latitudinal, perfis de altura realistas. Variando esses elementos são construídos gráficos para a comparação dos modelos. O artigo apresenta a formulação matemática utilizada.

Segan (1988) desenvolve uma interpretação analítica das perturbações dos elementos orbitais do satélite sob influência do arrasto atmosférico. São determinadas algumas fórmulas para a perturbação do semi-eixo maior. O modelo de densidade utilizado é o TD (SEHNAL, 1986a) para desenvolver a teoria, as manipulações algébricas por serem muito complicadas e requererem muito tempo são resolvidas com um software. O modelo atmosférico utilizado é satisfatório para a solução analítica da equação diferencial do movimento.

Wnuk (1988, 1990a) desenvolve uma nova fórmula para o geopotencial expresso em termos dos elementos orbitais/e ou nas variáveis de Delaunay. Aplicando o método de perturbação de Hori (1966), novas fórmulas são desenvolvidas para perturbações do harmônico tesseral em elementos orbitais não-singulares. Com esse novo modelo para o geopotencial um maior número de coeficientes com maior precisão para harmônicos tesserais pode ser aplicado para encontrar as órbitas de satélites de baixa altitude, quando for levado em conta alta ordens e graus dos harmônicos.

Para resolver analiticamente as equações do movimento de satélites artificiais da Terra influenciado pelo arrasto atmosférico, Vilhena de Moraes (1989) utiliza o modelo de densidade TD-88. No presente artigo é desenvolvida uma expressão para densidade atmosférica (ρ_d) em função da anomalia excêntrica/e ou anomalia média para resolver analiticamente as equações do movimento. É feita uma aplicação para uma perturbação secular devido ao arrasto atmosférico e o geopotencial da Terra considerando duas novas componentes do arrasto atmosférico e integrando esse sistema analiticamente com o modelo proposto para a densidade.

Em Wnuk (1990b) são calculadas as fórmulas para perturbações em componentes radial, transversal e binormal do movimento de satélites artificiais da Terra. Perturbações devido à parte tesseral do geopotencial são consideradas. O potencial gravitacional expresso em termos dos elementos orbitais é proposto por Wnuk (1988). As fórmulas para perturbações são obtidas usando o método de Hori (1966). Elas podem ser efetivamente aplicadas em cálculos das perturbações em componentes das forças incluindo os coeficientes de alta ordem e grau dos harmônicos tesserais. As fórmulas derivadas não apresentam singularidades para excentricidade zero.

Sehnal (1990) faz uma comparação entre o modelo termosférico densidade total TD-88 com o CIRA 86. A comparação dos valores de densidade determinada de ambos os modelos é mostrada em função da altura e algumas variações individuais são discutidas. É apresentada a formulação matemática e os termos individuais dependem do fluxo solar médio, densidade média, assimetria norte-sul, variações anuais, semi-anuais, diurno e semi-diurno. Este modelo é introduzido para desenvolver uma teoria analítica do movimento do satélite artificial na atmosfera da Terra. O modelo TD 88 é válido para uma escala de altura entre 150 e 750 km. Há uma correlação muito boa entre as mudanças anuais de ambos os modelos, nas amplitudes e nas posições extremas.

Vokrouhlicky e Sehnal (1993) estudam alguns aspectos da influência perturbadora da radiação refletida pela superfície da Terra (albedo) no movimento de um satélite artificial. É feita uma aplicação para o satélite ERS-1. Segundo o autor a magnitude da pressão de radiação solar direta é cerca de cinco vezes maior que a força de albedo.

Vilhena de Moraes (1994) faz um levantamento bibliográfico de alguns modelos analíticos para forças não-gravitacionais de diferentes origens que tem sido usado em teoria analítica para o movimento rotacional e translacional de satélites artificiais. O artigo apresenta alguns dos modelos propostos para esta finalidade e suas respectivas equações. Apresenta também um método para estudar perturbações acopladas.

Breiter (1997) apresenta uma solução analítica para as perturbações de um satélite artificial devido à parte zonal do geopotencial em que o hamiltoniano é normalizado completamente até a segunda ordem utilizando o método de Hori (1966). As fórmulas permitem um grau arbitrariamente alto dos harmônicos do geopotencial a ser incluído. O modelo utilizado para o geopotencial é dado por Wnuk (1988).

Em Vilhena de Moraes e Wnuk (1998) é sugerida uma aplicação das expansões de algumas funções da anomalia excêntrica E como também os coeficientes de Hansen em séries de potência de $(e - e^*)$, em que e^* é um valor fixo da excentricidade derivado por Da Silva Fernandes (1995). Estas séries são convergentes para todos os valores de $e < 1$. São obtidas novas fórmulas para computação das perturbações devido ao geopotencial em componentes radial, transversal e binormal, válidas para órbitas altamente excêntricas.

Em El-Saftawy et al (1998 a, b) as equações canônicas do movimento de um satélite de forma complexa (satélites de telecomunicações) sobre os efeitos em comum do achatamento da Terra e a pressão de radiação solar direta são formuladas e resolvidas. A hamiltoniana é desenvolvida em termos dos elementos de Delaunay aumentados para remover a dependência explícita do tempo. É utilizado o método adaptado de transformação desenvolvido por Lie-Deprit-Kamel (Deprit, 1969; Kamel, 1969) para desenvolver a hamiltoniana em termos de pequenos parâmetros. Em que J_2 é considerado de primeira ordem e J_3, J_4 de segunda ordem. Analisam também os termos de ressonância e o procedimento para as transformações no caso de ressonância é esboçado.

Wnuk (1999) faz um levantamento bibliográfico sobre teoria analítica do movimento de satélites artificiais e apresenta alguns trabalhos desenvolvidos na área. A análise qualitativa do movimento de satélite também precisou de uma aplicação de fórmulas analíticas que descrevem o movimento. O caráter funcional de vários efeitos de perturbações só pôde ser examinado com o uso de fórmulas analíticas para perturbações. O autor chama a atenção para os métodos de perturbações gerais que têm

um papel importante e que o desenvolvimento de teorias analíticas ainda é uma tarefa de grande importância.

Breiter e Métris (1999) desenvolvem um algoritmo para estudar órbitas de satélites e lixo espaciais em longos intervalos de tempo. Utilizam a técnica do mapeamento simplético. São consideradas as seguintes perturbações: geopotencial (considerando os harmônicos esféricos), arrasto atmosférico, atração gravitacional do Sol e da Lua e a pressão de radiação solar direta (sem efeitos da sombra). É feito um exemplo numérico como aplicação da abordagem desenvolvida.

Em El-Saftawy e El-Enna (2002, 2003) os efeitos da pressão de radiação solar direta e o achatamento da Terra considerando um potencial com correções relativísticas (pós Newtoniano) em um satélite artificial da Terra são considerados. O potencial devido ao achatamento da Terra é limitado para o termos principais e o segundo harmônico zonal. A hamiltoniana do sistema é desenvolvida em termos dos elementos de Delaunay aumentado para remover a dependência explícita do tempo, devido à longitude média do Sol. As equações canônicas do movimento são montadas retendo termos até (J_2^4) para conservar termos surgindo do acoplamento entre a pressão de radiação e os termos do achatamento pós Newtoniano. O trabalho desenvolve uma teoria de satélite artificial para calcular o acoplamento devido às forças consideradas acima, obtendo um conjunto de equações em termos da hamiltoniana.

Em Da Silva Fernandes (2003a, b) são apresentados dois trabalhos em relação ao método de Hori para sistemas canônicos e não-canônicos respectivamente. O autor desenvolve uma nova abordagem para determinar as funções S_m e H_m^* para a versão canônica do algoritmo e depois generaliza para a versão não-canônica. O autor prova algumas proposições e faz aplicações para comprovar a validade das mesmas.

Em Ahmed A. El-Enna (2003, 2004) o problema do movimento de um satélite artificial da Terra incluindo a força de pressão de radiação solar é considerado. O geopotencial é expresso em termos dos harmônicos zonal e tesseral até J_4 e S_{44}

respectivamente. A função hamiltoniana é então obtida em termos do conjunto das variáveis canônicas de Delaunay, aumentado para remover a dependência explícita do tempo devido à longitude média do Sol e devido ao movimento da Terra sobre seu eixo. Nesse trabalho as equações de movimento do satélite da Terra incluindo as perturbações diretas e misturadas devido ao achatamento da Terra e a pressão de radiação solar são obtidas.

Em El-Saftawy (2004) os termos de ressonância produzidos pelo efeito da pressão de radiação solar direta no movimento de um satélite artificial no campo achatado da Terra são analisados. O veículo espacial é assumido axialmente simétrico com antena e painéis solares. Uma técnica de transformação canônica é desenvolvida, baseada na técnica de Bohlin da expansão em potências fracionárias, usando série e transformação de Lie como também o conceito da anomalia de Delaunay.

El-Salam e Sehnal (2004) desenvolvem uma teoria de arrasto atmosférico até segunda ordem baseado no modelo TD-88 para pequenos parâmetros. As pequenas perturbações periódicas, de todos os elementos orbitais, são avaliadas. As perturbações seculares do semi-eixo maior e da excentricidade são obtidas. A teoria é aplicada para determinar o tempo de vida dos satélites ROHINI (1980 62 A) e o micro-satélite MIMOSA. As perturbações seculares da longitude do nodo e do argumento do perigeu devido à gravidade da Terra são levadas em conta até a segunda ordem devido ao achatamento da Terra. Para integrar as equações do movimento uma expressão analítica é requerida para a densidade atmosférica. São feitas algumas manipulações com a força de arrasto e as equações de Gauss para eliminar a dependência do tempo e escrever em termo da anomalia excêntrica. Com a nova expressão para o arrasto e as equações de Gauss resultou um novo conjunto de equações em que os elementos orbitais dependem da anomalia excêntrica e não do tempo. Os seguintes modelos clássicos empíricos, CIRA 86, CIRA 72 e DTM são inadequados para o trabalho analítico. Neste artigo é conveniente o uso do modelo TD-88 expresso em termo da anomalia excêntrica. Com essas transformações as integrais podem ser resolvidas analiticamente.

Ahmed A. El-Enna (2004) neste trabalho é feito o estudo da teoria pós Newtoniano do geopotencial e pressão de radiação solar direta que causam efeitos no movimento de um satélite artificial da Terra. O potencial da Terra é desenvolvido em termos das variáveis de Delaunay, assumindo J_2 de primeira ordem. A expansão do geopotencial é expressa em termos do harmônico zonal até J_5 . São feitas algumas transformações canônicas para remover a dependência explícita do tempo, ficando com ordem de magnitude da pressão de radiação e o relativístico dependente da relação área massa ($\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$) e sua altitude em km.

Vrbik (2005) resolve o problema de Kepler perturbado usando Quatérnio, para isto, ele faz um simples exemplo de perturbações do achatamento que já é bem tratado na literatura, depois os resultados são estendidos para lidar com alto-grau do harmônico zonal. O artigo pretende demonstrar a versão mais recente do algoritmo, daí faz um comentário passo a passo do mesmo. O autor pretende depois investigar perturbações devidas ao harmônico tesseral e setorial que é de natureza dependente do tempo e requer uma extensão correspondente deste algoritmo. Para alcançar uma solução altamente precisa além de incluir termos da ordem de ϵ^3 é necessário também incluir termos mistos que aparecem na solução do problema. Utiliza o programa Mathematica para integrar as equações. O programa trabalha não só com forças conservativas, mas também para outras forças não-conservativas. A técnica pode facilmente ser estendida para perturbações dependentes do tempo incluindo ressonâncias.

De Saedeleer (2005) apresenta uma teoria de satélite artificial usando transformação de Lie como técnica de perturbação canônica (eliminando termos de curto período). É considerada uma perturbação para qualquer harmônico zonal J_n ($n \geq 2$) do primário no satélite no qual nomeou como problema zonal completo do satélite artificial. Formulou uma expressão analítica para calcular diretamente a média da hamiltoniana de primeira ordem. Os cálculos são feitos em forma fechada para todos os termos, válido para todo tipo de órbitas elípticas, calculando a hamiltoniana de modo mais compacto. Adicionalmente, o gerador de primeira ordem associado com esta transformação é determinado na mesma forma fechada, e também é validado.

Pode ser usado como um primeiro passo para obter em um trabalho subsequente, uma teoria de segunda ordem, ou calcular as expressões explícitas direta e inversas da mudança de variáveis na teoria de primeira-ordem atual.

Estas referências têm como objetivo selecionar alguns trabalhos desenvolvidos na área que possam contribuir para o estudo do tema abordado. Para complementar estas referências sugerimos o trabalho de Vilhena de Moraes (1994). O presente trabalho será desenvolvido baseado em Brouwer e Hori (1961), Ferraz Mello (1965), Vilhena de Moraes (1978, 1981, 1989), Fitzgibbon (1982), Vilhena de Moraes e Fitzgibbon (1983, 1987), Sehnal (1988), Fernandes e Sessin (1989), Wnuk (1988, 1990a), Breiter (1997), Da Silva Fernandes (2003b), El-Salam e Sehnal (2004) e no método de Hori (1966, 1971) para sistemas canônicos e não-canônicos respectivamente.

Observamos na literatura que existem diversos trabalhos referentes aos efeitos do geopotencial, acoplamento entre o geopotencial com arrasto atmosférico, geopotencial com a pressão de radiação solar, porém o acoplamento das três perturbações citadas é pouco estudado (VILHENA DE MORAES, 1978, 1981). Com isso pretendemos desenvolver um trabalho que possa vir a contribuir para o desenvolvimento de teorias analíticas em que consideramos novos elementos na teoria como, por exemplo, novo geopotencial dado por Wnuk (1988) considerando os harmônicos tesserais que são pouco abordados na literatura, novos valores para as componentes do arrasto atmosférico e um modelo de densidade atmosférica conveniente para integrações analíticas conforme Vilhena de Moraes (1989) e por fim um método de perturbação (HORI, 1971) para resolver as equações de movimento. Observamos que a ação simultânea dos três efeitos acontece, por exemplo, com órbitas de satélites com altitude da ordem de 700 km (VILHENA DE MORAES, 1978, 1979) e que esse é o caso de alguns dos satélites brasileiros.

Para obtermos resultados mais realísticos consideramos ainda, na integração analítica das equações do movimento, um trabalho de Breiter (1997) em que a

hamiltoniana H_0 considerada não é mais a usual em que faz-se igual ao termo não perturbado do geopotencial e sim todos os termos seculares adotados.

CAPÍTULO 2 FORÇAS GRAVITACIONAIS E NÃO GRAVITACIONAIS

Neste capítulo apresentamos um breve estudo sobre o geopotencial, a densidade atmosférica, arrasto atmosférico, o modelo termosférico TD-88 e a pressão de radiação solar direta considerando a sombra da Terra. Apresentamos resumidamente a teoria de Brouwer e Hori para o arrasto atmosférico e a teoria de Vilhena de Moraes para a pressão de radiação solar direta e o arrasto atmosférico.

2.1 CAMPO GRAVITACIONAL TERRESTRE

O campo gravitacional terrestre e a força de atração associada a este campo, exercida sobre uma massa colocada nele, sendo que essa massa pode ser negligenciada, serão estudados no caso de um satélite artificial. O campo gravitacional terrestre é uma das principais perturbações nos movimentos dos satélites artificiais, devido a sua distribuição não-homogênea de massa. O termo principal devido ao achatamento da Terra é J_2 , bem conhecido na literatura, os demais termos são considerados dependendo da precisão da missão. O geopotencial é uma força de origem gravitacional que perturba as órbitas dos satélites artificiais da Terra.

A Terra não é uma esfera perfeita com distribuição uniforme de massa. Ela não pode ser considerada, neste contexto como sendo um ponto material, devido ao achatamento nos pólos e a forma irregular da sua composição, fato que tem efeito direto na sua densidade. Estas irregularidades produzem uma perturbação na órbita de um satélite artificial, tal que os elementos keplerianos que descrevem tal órbita não permanecem constantes.

2.2 GEOPOTENCIAL EM COORDENADAS ESFÉRICAS

Iremos apresentar o geopotencial em coordenadas esféricas utilizado para satélites artificiais, segundo os desenvolvimentos apresentados por Kaula (1966) e Osório (1973). Fazendo uma mudança de coordenadas esféricas para keplerianas para representar os elementos orbitais explicitamente.

Vamos considerar o potencial de um ponto de massa devido a um sólido de formato e distribuição de massa arbitrários. O ponto de massa está localizado fora do sólido. Podemos definir o potencial da forma:

$$U = G \int \frac{dM}{\Delta} \quad (2.1)$$

em que Δ é a distância entre o ponto e o sólido, dM elemento de massa do corpo e $G=6,6720 \times 10^{-11} \text{ m}^3 /(\text{kg s}^2)$ é a constante gravitacional universal.

Representando esse potencial em termos dos polinômios associados de Legendre dado por (OSÓRIO, 1973) temos:

$$U = \frac{G}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \int (2 - \delta_{m0}) \left(\frac{r'}{r} \right)^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_{lm}(\sin \beta') P_{lm}(\sin \beta) \cos m(\lambda - \lambda') dM \quad (2.2)$$

em que δ_{m0} é o delta de Kronecker e P_{lm} são os polinômios associados de Legendre de grau l e ordem m , (r, λ, β) são as coordenadas esféricas da posição do satélite; λ' e β' são respectivamente a longitude e a latitude do elemento de massa dM . Integrando em toda distribuição de massa e desenvolvendo $\cos m(\lambda - \lambda')$, o potencial fica da forma dada por (KAULA, 1966):

$$U = \frac{\mu}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{a_e}{r} \right)^l P_{lm}(\sin \beta) (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda) \quad (2.3)$$

em que

$$\begin{bmatrix} C_{lm} \\ S_{lm} \end{bmatrix} = \frac{(2 - \delta_{mo}) (l - m)!}{a_e M (l + m)!} \int_M r'^l P_{lm}(\sin \beta') \begin{bmatrix} \cos m\lambda' \\ \sin m\lambda' \end{bmatrix} dM \quad (2.4)$$

a_e é o semi-eixo equatorial do elipsóide da Terra, M a massa da Terra, C_{lm} e S_{lm} os coeficientes harmônicos esféricos e μ ($=GM$) é o parâmetro gravitacional da Terra ($\cong 3,986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$). O potencial satisfaz a equação de Laplace ($\nabla^2 U = 0$), podendo representá-lo em função dos harmônicos esféricos. O potencial perturbador é avaliado no ponto localizado pelo módulo do raio vetor r , pela latitude geocêntrica β' e pela longitude geocêntrica λ' , conforme mostrado na Figura 1.

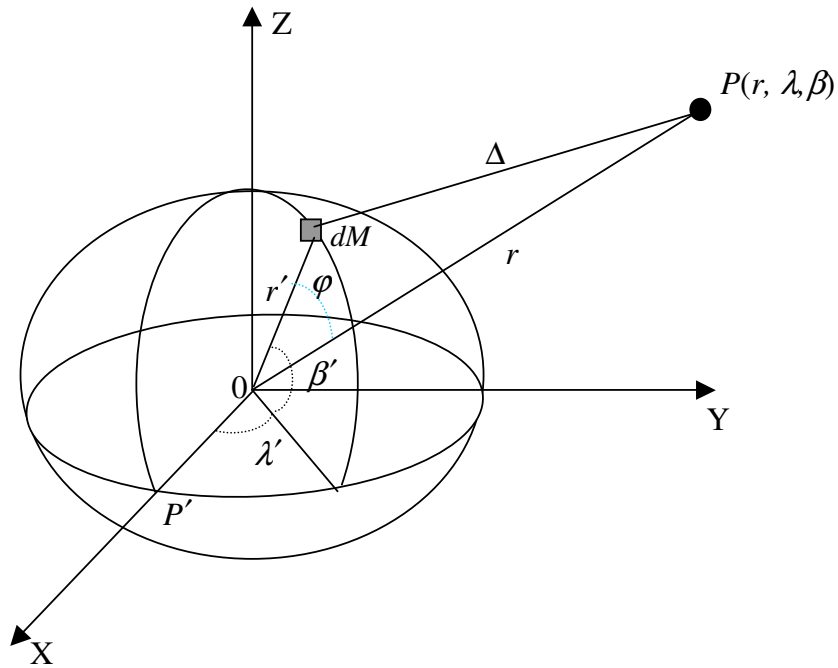


Figura 1- Potencial gravitacional num ponto P , devido à ação da massa dm

Geralmente utilizam-se os coeficientes harmônicos de forma normalizada para simplificar a sua execução quando calculados numericamente. São representados por (KUGA; RAO e CARRARA, 2000):

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{bmatrix} = \left[\frac{1}{4n+2} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \right]^{1/2} \begin{bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

2.3 INTERPRETAÇÃO DOS COEFICIENTES E EFEITOS DO GEOPOTENCIAL

Considerando a expressão (2.4) e através da inspeção, observa-se que, os harmônicos com $m = 0$ não dependem da longitude λ' . Eles dividem a esfera em zonas e são chamados harmônicos zonais. O efeito da distribuição não-uniforme de massa devido ao achatamento dos pólos é refletido no coeficiente zonal C_{20} , o efeito que atribui para a Terra uma forma de pêra é chamado de coeficiente zonal C_{30} . Os harmônicos com $m \neq 0$ sua distribuição de massa é completamente não-simétrica, depende da longitude λ' e são chamados de tesserais. Os termos de ordem $m = l = 0$ descrevem o potencial principal da Terra, ou seja, $C_{00} = 0$ corresponde a Terra com distribuição esférica de massa. Se a origem do sistema de coordenadas coincidir com o centro de massa da Terra pode-se mostrar que $C_{10} = C_{11} = S_{11} = 0$ e $S_{00} = S_{n0} = 0$. A matriz de inércia da Terra é dada por (KUGA; RAO; CARRARA, 2000):

$$I_t = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

Fazendo algumas considerações os coeficientes resultam:

$$\begin{aligned} C_{21} &= \frac{E}{Ma_e^2}, \quad S_{21} = \frac{F}{Ma_e^2}, \\ C_{22} &= \frac{1}{4a_e^2 M} (B - A), \quad S_{22} = \frac{D}{2s_e^2 M} \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.4 EXPRESSÃO DO GEOPOTENCIAL EM FUNÇÃO DOS ELEMENTOS ORBITAIS

Quando desejamos trabalhar com satélites artificiais é conveniente expressar o geopotencial em termos dos elementos orbitais, que estão representados no sistema de coordenadas na Figura 2.

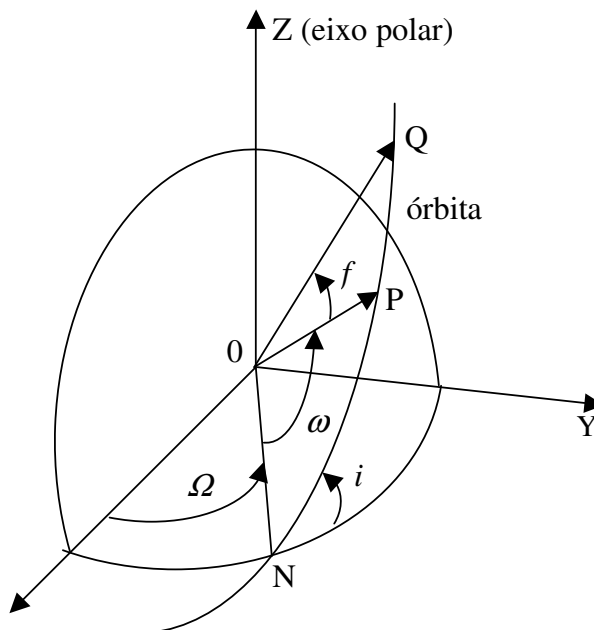


Figura 2- Parâmetros orbitais

A Figura 2 mostra uma órbita no espaço. O arco NQ descreve a órbita do satélite cortando o equador celeste no ponto N (linha dos nodos). O ângulo i é a inclinação da órbita, f é a anomalia verdadeira, Ω é a longitude do nodo ascendente, X aponta para o ponto vernal (γ), ω é o argumento do perigeu (P) e Q representa o satélite na órbita.

Em geral o plano orbital está inclinado em relação ao plano de referência de um ângulo i . A linha de interseção entre o plano da órbita e o plano de referência é chamado linha dos nodos. O ângulo entre a linha de referência até o nodo ascendente é chamado de longitude do nodo ascendente Ω . O ângulo entre a linha dos nodos até o pericentro da órbita é o argumento do pericentro ω e este ângulo dá a orientação da órbita no plano orbital.

A inclinação da órbita pode variar de $0^\circ \leq i \leq 180^\circ$. Se $i < 90^\circ$ o movimento é chamado de prógrado ou direto, enquanto $i > 90^\circ$ o movimento é retrógrado. Quando i

tende a zero ou 180° o plano da órbita coincide com o plano de referência. Os ângulos Ω e ω podem variar de 0° a 360°. O tamanho e o formato da órbita são dados pelo semi-eixo maior a e pela excentricidade e .

Os cinco parâmetros citados acima a , e , i , Ω , ω acrescentando τ_0 (tempo de passagem pelo pericentro) são chamados de elementos orbitais, que são usados na descrição da forma, tamanho e orientação no espaço da órbita de qualquer objeto sob atração gravitacional.

Uma fórmula para o geopotencial em termos dos elementos orbitais considerando os coeficientes zonais e tesserais é dada por (KAULA, 1966):

$$U = \frac{\mu}{r} + \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l V_{lm}, \quad (2.8)$$

em que

$$U_{lm} = \frac{\mu}{a} \left(\frac{a_e}{a} \right)^l \sum_{p=0}^l \bar{F}_{lmp}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lmp}(e) \bar{S}_{lmpq}(\omega, \Omega, M, \theta), \quad (2.9)$$

$$\bar{S}_{lmpq} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{lm} \\ -\bar{S}_{lm} \end{bmatrix}_{l-m \text{ ímpar}}^{l-m \text{ par}} \cos \Psi_{lmpq}^a + \begin{bmatrix} \bar{S}_{lm} \\ \bar{C}_{lm} \end{bmatrix}_{l-m \text{ ímpar}}^{l-m \text{ par}} \sin \Psi_{lmpq}^a \quad (2.10)$$

$$\Psi_{lmpq}^a = (l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega - \theta), \quad (2.11)$$

sendo que $\bar{F}_{lmp}(i)$ é a função da inclinação normalizada, $G_{lmp}(e)$ é função da excentricidade, $\bar{C}_{lm}, \bar{S}_{lm}$ são os coeficientes do geopotencial normalizado, a , e , i , ω , Ω e M são os elementos orbitais, em que, M é a anomalia média definida como $M = n(t - \tau_0)$, θ é o tempo sideral e a_e é o raio equatorial da Terra.

Entretanto, Wnuk (1988) mostra que a fórmula dada por Kaula (1966) se torna muito complexa e custosa quando aumenta a ordem m e o grau l dos coeficientes harmônicos, tornando-se inconveniente para determinadas missões. Além disso, a

fórmula mostra singularidades para pequena excentricidade e inclinação. Portanto, a aplicação da fórmula é bastante limitada. Para eliminar estas dificuldades, Wnuk (1988) desenvolveu uma nova fórmula para expressar o geopotencial em termos dos elementos orbitais e/ou nas variáveis de Delaunay. O significado dessas variáveis em relação aos elementos orbitais clássicos é:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= L = \sqrt{\mu a} \\
 L_2 &= G = L\sqrt{1-e^2} \\
 L_3 &= H = G \cos i \\
 l_1 &= l = M \\
 l_2 &= g = \omega \\
 l_3 &= h = \Omega
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

em que μ , a , e , i , M , ω , e Ω já foram definidos.

2.5 GEOPOTENCIAL CONSIDERADO

Com o modelo do geopotencial proposto por Wnuk (1988) um maior número de coeficientes com maior precisão para os harmônicos zonais e tesserais podem ser aplicados para encontrar as órbitas dos satélites, quando for levado em conta alta ordem e grau dos harmônicos simplificando os cálculos e diminuindo o tempo de execução.

O geopotencial expresso nas variáveis de Delaunay é dado por (WNUK, 1990a):

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{L^2} \sum_{m=0}^N \sum_{k=-N}^N \sum_{q=-Q}^Q \gamma_{km} (\bar{C}_m^{kq} \cos \Psi + \bar{S}_m^{kq} \sin \Psi), \tag{2.13}$$

em que

$$\begin{aligned}\overline{C}_m^{kq} &= \sum_{j=j_1}^N {}^* \overline{Q}_{jm}^{kq} \overline{C}_{jm}, \\ \overline{S}_m^{kq} &= \sum_{j=j_1}^N {}^* \overline{Q}_{jm}^{kq} \overline{S}_{jm},\end{aligned}\tag{2.14}$$

$$\overline{Q}_{jm}^{kq} = \left(\frac{\mu}{L^2} \right)^j \overline{A}_{jm}^k(i) G_{j, (j-k)/2, q}(e),\tag{2.15}$$

$$\Psi = kg + (k+q)l + m(h-\theta) + (k-m)\pi/2,\tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{km} &= (-1)^{E((k-m+1)/2)}, \\ j_1 &= \max[k_1, k_1 + 2E((m+k_1+1)/2)], \\ k_1 &= |k| + 2(\delta_{0k} + \delta_{1k}).\end{aligned}\tag{2.17}$$

em que $\overline{C}_{jm}, \overline{S}_{jm}$ são os coeficientes do geopotencial normalizado, $\overline{A}_{jm}^k(I) = \overline{F}_{j, m(j-k)/2}(i)$ é a função da inclinação normalizado, $G_{j, (j-k)/2, q}(e)$ é função da excentricidade, $E(x)$ é a função inteira, N é a máxima ordem e grau dos coeficientes levados em conta e Q é o máximo valor do índice q . O símbolo $\sum^*$ representa a adição com um passo 2. Os termos que estão representados na expressão (2.14) é definido por Wnuk (1988) como lumped coefficients.

A hamiltoniana pode ser escrita da seguinte maneira:

$$H = \frac{\mu^2}{2L^2} + \frac{\mu^2}{L^2} \sum_{m=0}^N \sum_{k=-N}^N \sum_{q=-Q}^Q \gamma_{km} \left(\overline{C}_m^{kq} \cos \Psi + \overline{S}_m^{kq} \sin \Psi \right)\tag{2.18}$$

Os coeficientes de $F_{lmp}(i)$ são funções da inclinação orbital dado por (KAULA, 1966):

$$\begin{aligned}F_{lmp}(i) &= \frac{(\ell+m)!}{2^l p! (\ell-p)!} \sum_{k=0}^{\ell-m-p} (-1)^k \binom{2p}{\ell-m-k} \binom{2\ell-2p}{k} \cos^{2\ell-\chi} \left(\frac{i}{2} \right) \sin^{\chi} \left(\frac{i}{2} \right) \\ \max\{0, \ell-m-2p\} &\leq K \leq \min\{2\ell-2p, \ell-m\}, \chi = -\ell + m + 2\ell + 2k\end{aligned}\tag{2.19}$$

Vilhena de Moraes e Wnuk (1998) mostram que a função da excentricidade $G_{l,p,q}(e)$ dada por Kaula (1966) é relacionada pelos coeficientes de Hansen $X_k^{n,m}(e)$ pela seguinte equação:

$$G_{l,p,q} = X_{l-2p+q}^{-(l-1),(l-2p)}(e) \quad (2.20)$$

esta fórmula não é numericamente estável para alta ordem da excentricidade. Portanto, utilizando uma fórmula demonstrada por Da Silva Fernandes (1995), em que é válida para qualquer valor da excentricidade entre $0 < e < 1$ temos:

$$X_k^{n,m}(e) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(e - e^*)^{l-1}}{(l-1)!} \frac{d^{l-1}}{de^{l-1}} X_k^{n,m}(e) \Big|_{e=e^*} \quad (2.21)$$

em que e^* é um valor fixo da excentricidade. Esta série converge para todos os valores da excentricidade $e < 1$ tal que $|e - e^*| < \wp(e^*)$. Os valores do raio de convergência $\wp(e^*)$ são determinados por Da Silva Fernandes (1995).

Os coeficientes são calculados por (GIACAGLIA, 1976):

$$X_k^{n,m}(e) = \sum_{s=0}^{s_1} \sum_{j=-s}^{j_1} \binom{n-m+1}{s} \binom{n+m+1}{s+j} f_{n,s,j}(\beta) J_{k-m+j}(ke), \quad (2.22)$$

em que $J_l(x)$ é a função de Bessel.

$$f_{n,s,j}(\beta) = (1 + \beta^2)^{n-1} (-\beta)^j \beta^{2s}, \quad \text{com } \beta = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \quad (2.23)$$

$$S_1 = \begin{cases} n - m + 1 & \text{se } n - m + 1 \geq 0 \\ \infty & \text{se } n - m + 1 \leq 0 \end{cases}$$

e

$$j_1 = \begin{cases} n + m + 1 - s & \text{se } n + m + 1 \geq 0 \\ \infty & \text{se } n + m + 1 \leq 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

A função $f(\beta)$ pode ser expressa na seguinte série de potência da excentricidade e (JARNAGIN, 1965):

$$f_{n,s,j}(\beta) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[2 \binom{-n+2i-2+j+2s}{i} - \binom{-n+2i-1+j+2s}{i} \right] \left(\frac{e}{2} \right)^{2i+j+2s} \quad (2.25)$$

as derivadas são calculadas por:

$$\frac{d^l}{de^l} X_k^{n,m}(e) = \sum_{s=0}^{s_1} \sum_{j=s}^{j_1} \binom{n-m+1}{s} \binom{n+m+1}{s+j} \left[\sum_{r=0}^l \binom{l}{r} \frac{d^r}{de^r} f(\beta) \frac{d^{l-r}}{de^{l-r}} J_{k-m+j}(ke) \right] \quad (2.26)$$

para resolver esta derivada usamos a seguinte relação de Bessel

$$\frac{d^t}{de^t} J_l(x) = \frac{1}{2^t} \sum_{r=0}^t (-1)^r \binom{t}{r} J_{l-t+2r}(x) \quad (2.27)$$

Usando as fórmulas acima podemos calcular os coeficientes de Hansen para valores arbitrários da excentricidade entre zero e um e valores arbitrários dos índices.

Os coeficientes de Hansen também são analisados por Osório (1973) de forma minuciosa.

2.6 PERTURBAÇÕES DEVIDAS AO ARRASTO ATMOSFÉRICO

Um satélite que se move na atmosfera da Terra é influenciado por um atrito, que é denominado força de arrasto, que atua no sentido contrário ao movimento do satélite e tende a diminuir sua energia orbital. O arrasto atmosférico é a principal força não-gravitacional que atua nos satélites de baixa altitude devido ao atrito com a atmosfera. Toda vez que o satélite passa próximo ao perigeu, ou seja, mais próximo da Terra ele perde energia devido ao arrasto causando uma redução no semi-eixo maior, com isso a órbita elíptica contrai-se para uma órbita circular como podemos visualizar na Figura 4. Como um satélite artificial da Terra se move através da atmosfera da Terra, seu movimento orbital é perturbado pela força resistiva. Esta força causa perturbações seculares nos principais parâmetros orbitais, por exemplo, no semi-eixo maior e na

excentricidade reduzindo consideravelmente o tempo de vida do satélite. Em Lafontaine (1984) é feita uma análise para determinar o tempo de vida de um satélite influenciado pela força de arrasto. Segundo Vilhena de Moraes (1978) a influência do arrasto predomina até os 700 Km de altitude.

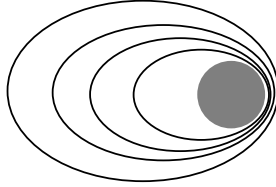


Figura 3- Decaimento orbital devido ao arrasto atmosférico

O módulo da expressão da força de arrasto por unidade de massa é dada por:

$$D = \frac{1}{2} \rho_d C_D \frac{S}{m} V^2 \quad (2.28)$$

em que ρ_d é a densidade local do ar depende da posição e do tempo de uma maneira muito complicada, C_D é o coeficiente de arrasto, S é a área efetiva, m é a massa do satélite e V é a velocidade do satélite em relação à atmosfera da Terra. A variação de ρ_d com altura depende da forma da atmosfera, sendo que diminui rapidamente com ligeiro aumento na altitude. O efeito do achatamento da atmosfera é bastante significativo no movimento orbital do satélite.

A densidade ρ_d e o coeficiente de arrasto C_D são modelados, temos diversos trabalhos que modelam esses coeficientes entre eles podemos citar Sehnal (1982), Vilhena de Moraes (1994). O coeficiente C_D é determinado empiricamente tendo um valor aproximado 2.2 com um erro de 5%. Um artigo apresentado por Sehnal e Pospíšilová (1994) os autores desenvolvem uma expressão para calcular o coeficiente de arrasto. No estudo da influência do arrasto atmosférico no movimento de satélites artificiais vários modelos têm sido propostos para descrever a densidade atmosférica ρ_d entre eles o modelo TD 88 dado por Sehnal (1988), este modelo é adequado para teorias analíticas, vários autores têm desenvolvido teorias analíticas utilizando o modelo TD 88 entre eles Segal (1988); Vilhena de Moraes (1989); El-Salam e Sehnal (2004). Com este modelo para a densidade as equações de movimento podem ser

integradas analiticamente. O modelo TD 88 é válido para alturas entre 150-750 km. Temos um trabalho atual de Bezdek e Vokrouhlicky (2004) em que utilizam este modelo de densidade numa teoria semi-analítica e também estenderam a altitude de alcance da aplicabilidade do modelo de 750 km para 1200 km.

A densidade atmosférica ρ_d , no modelo TD 88, pode ser descrita através das seguintes equações (SEHNAL, 1988):

$$\rho_d = f_x f_0 k_0 \sum_{n=1}^7 h_n g_n \quad (2.29)$$

em que:

$$f_x = 1 + a_1 (F_y - F_b) \quad (2.30)$$

$$f_0 = a_2 + f_m \quad (2.31)$$

$$f_m = (F_b - 60) / 160 \quad (2.32)$$

$$k_0 = 1 + a_3 (K_p - 3) \quad (2.33)$$

A dependência da altitude é descrita por:

$$h_n = K_{n,0} + \sum_{j=1}^7 K_{n,j} \exp((120 - h)/(29 / j)) \quad (2.34)$$

As funções g_n são descritas por:

$$g_1 = 1$$

$$g_2 = f_m / 2 + a_4$$

$$g_3 = \text{sen}(d - p_3) \text{sen} \psi$$

$$g_4 = (a_5 f_m + 1) \text{sen}(d - p_4)$$

$$g_5 = (a_6 f_m + 1) \text{sen} 2(d - p_5)$$

$$g_6 = (a_7 f_m + 1) \text{sen}(t - p_6) \cos \psi$$

$$g_7 = (a_8 f_m + 1) \text{sen} 2(t - p_7) \cos^2 \psi$$

De King-Hele (1964), pode-se escrever a seguinte equação para altitude de um satélite:

$$h = a - ae \cos E - R \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{sen} i \right) - R \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{sen}^2 i \cos 2u \quad (2.35)$$

em que a , e , i , E , e u são, respectivamente, o semi-eixo maior, a excentricidade, a inclinação, a anomalia excêntrica, e u é o argumento do perigeu somado à anomalia verdadeira; R é o raio equatorial da Terra e ε é o achatamento da Terra.

A equação para a densidade, com as funções h descritas pela expressão (2.35), fica da seguinte forma (VILHENA DE MORAES, 1989):

$$\rho_d = f_x f_0 k_0 \sum_{n=1}^7 [K_{n,0} + \sum_{j=1}^3 A_j \exp(c_j \cos 2u) \exp(\beta_j \cos E)] g_n \quad (2.36)$$

em que,

$$c_j = \frac{R \varepsilon \operatorname{sen}^2 i}{2,29 j}, \quad (2.37)$$

$$\beta_j = \frac{ae}{29 j} \quad (2.38)$$

e

$$A_j = \exp \left[\left(120 + R \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{sen}^2 i \right) - a \right) / (29 j) \right] \quad (2.39)$$

A hora local t e a latitude ψ podem ser descritas através de elementos orbitais como mostrado nas seguintes expressões (SEHNAL, 1986b; VILHENA DE MORAES, 1989):

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \psi &= \operatorname{sen} i \operatorname{sen} u \\ \operatorname{sen}(\alpha - \Omega) &= \operatorname{sen} u \cos i / \cos \psi \\ \cos(\alpha - \Omega) &= \cos u \cos \psi \\ t = \alpha - \Omega &= \Omega - \alpha' + \pi \end{aligned}$$

em que Ω , α e α' são respectivamente, o nodo ascendente da órbita, a ascensão reta do satélite e ascensão reta do Sol.

Das relações entre as anomalias excêntrica e verdadeira, podemos escrever (VILHENA DE MORAES, 1989):

$$\text{sen } f = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{lk} \text{sen } kE = \text{sen } E + \frac{e}{2} \text{sen } 2E + \frac{e^2}{4} \text{sen } 3E + \dots \quad (2.40)$$

$$\cos f = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{lk} \cos kE = -\frac{e}{2} + \left(1 - \frac{1}{4}e^2\right) \cos E + \frac{e}{2} \cos 2E + \frac{e^2}{4} \cos 3E + \dots \quad (2.41)$$

Usando os polinômios de Chebyshev, podemos expressar $\cos mv$ como uma função de $\cos^i v$ ($i = 1, \dots, m$) e $\text{sen } mv$ como função de $\text{sen}^i v \cos^i v$ ($i = 1, \dots, m$).

Então, se considerarmos:

$$\cos pf = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{pk} \cos kE \quad (2.42)$$

$$\text{sen } pf = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{pk} \text{sen } kE \quad (2.43)$$

As equações g_n podem então ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} g_n &= \sum_k (G_{nk} \cos kE + G'_{nk} \text{sen } kE) \\ G_{n,k} &= 0 \quad \text{para } n = 1, 2, 4, 5 \text{ e } k > 0 \\ G'_{nk} &= 0 \quad \text{para } n = 1, 2, 4, 5 \text{ e } k \geq 0 \\ G_{10} &= 0 \\ G_{20} &= fm/2 \\ G_{40} &= (a_5 f_m + 1) \text{sen}(d - p_4) \\ G_{50} &= (a_6 f_m + 1) \text{sen} 2(d - p_5) \\ G_{3k} &= \gamma_{lk} \text{sen}(d - p_3) \text{sen } i \text{sen } u \\ G'_{3k} &= \sigma_{lk} \text{sen}(d - p_3) \text{sen } i \cos u \\ G_{6k} &= \sigma_{lk} (a_7 f_m + 1) \left[\left(-1 + \frac{1}{4} \cos^2 i/2 \right) \cos(\omega - B) + \frac{1}{4} \cos^2 i/2 \cos(\omega + B) \right] \\ G'_{6k} &= \gamma_{lk} (a_7 f_m + 1) \left[\left(-1 + \frac{1}{4} \cos^2 i/2 \right) \text{sen}(\omega - B) + \frac{1}{4} \cos^2 i/2 \text{sen}(\omega + B) \right] \\ G_{7k} &= (a_8 f_m + 1) \left[\text{sen}^2 i \text{sen } B' + \gamma_{2k} \cos i \cos^2 i/2 [\text{sen}(B' + 2\omega) + \text{sen}(B' - 2\omega)] \right] \\ G'_{7k} &= \sigma_{2k} (a_8 f_m + 1) \cos i \text{sen}^2 i/2 [\cos(B' + 2\omega) + \cos(B' - 2\omega)] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B &= \Omega - \alpha' + \pi - p_6 \\ B' &= 2(\Omega - \alpha' + \pi - p_7) \end{aligned}$$

2.6.1 Desenvolvimento da densidade em termos da anomalia excêntrica

O termo $\exp(\beta_j \cos E)$ pode ser expandido com a ajuda de expressões assintóticas em termos de funções modificadas de Bessel, produzindo (King-Hele, 1964):

$$\exp(\beta_j \cos E) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(\beta_j) \cos mE = I_0 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} I_m \cos mE$$

em que, para um β_j (escala de altura) grande, a expansão de $I_m(\beta_j)$ é:

$$I_m(\beta_j) = \frac{\exp(\beta_j)}{\sqrt{2\pi\beta_j}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (4m^2 - 1^2)(4m^2 - 3^2) \dots (4m^2 - (2k-1)^2)}{K! (8\beta_j)^k} \quad (2.44)$$

se c_j for pequeno:

$$\exp(c_j \cos 2u) = 1 + \frac{1}{4} c_j^2 + c_j \cos 2u + \frac{1}{4} c_j \cos 4u + \dots$$

Substituindo as equações obtidas na equação da densidade, temos (VILHENA DE MORAES, 1989):

$$\begin{aligned} \rho_d = f_x f_0 k_0 & \left\{ \sum_{n=1}^7 K_{n,0} \sum_{k=0}^{\infty} (G_{nk} \cos kE + G'_{nk} \sin kE) + \right. \\ & \sum_{\varepsilon, \delta} \sum_{n=1}^7 \sum_{j=1}^3 K_{n,j} A_j \left(1 + \frac{c_j^2}{4} \right) \sum_{m=0}^{\infty} F_m(\beta_j) \sum_{k=0}^{\infty} [G_{nk} \cos(k + \varepsilon m)E + G'_{nk} \sin(k + \varepsilon m)E] + \\ & \sum_{\varepsilon, \delta} \sum_{n=1}^7 \sum_{j=1}^3 k_{n,j} \frac{c_j}{2} \sum_m F_m(\beta_j) \sum_k \sum_{k'} [G_{nk} A_{kj} + G'_{nk} B_{k'j}] \cos(k + \delta k' + \delta \varepsilon m)E \\ & \left. + (G_{nk} B_{k'j} + G'_{nk} A_{k'j}) \sin(k + \delta \varepsilon m)E \right\} \quad (2.45) \end{aligned}$$

em que δ e ε podem ser ± 1 e:

$$\begin{aligned} A_{k'j} &= \gamma_{2k'} \cos \omega + \frac{1}{4} c_j \cos 4\omega \\ B_{k'j} &= \sigma_{2k'} \sin 2\omega + \frac{1}{4} \sigma_{4k'} \sin 4\omega \end{aligned}$$

A densidade ρ_d pode ser expressa em termos da anomalia média l , se considerarmos:

$$\cos mE = \sum_{p=0}^{\infty} \gamma'_{mp} \cos pl \quad (2.46)$$

$$\sin mE = \sum_{p=1}^{\infty} \sigma'_{mp} \sin pl \quad (2.47)$$

sendo que, γ'_{mp} e σ'_{mp} podem ser obtidos usando funções de Bessel (Morando, 1974):

$$\cos mE = A_0 + m \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} [J_{m-p}(pe) - J_{m+p}(pe)] \cos pl \quad (2.48)$$

$$\sin mE = m \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} [J_{m-p}(pe) + J_{m+p}(pe)] \sin pl \quad (2.49)$$

em que $A_0 = 1$ se $m = 0$, $A_0 = -e/2$ se $m = \pm 1$ e $A_0 = 0$ se $m \neq 0$ e m é diferente de ± 1 .

2.6.2 O modelo termosférico TD-88

A versão utilizada de modelamento para a densidade total da termosfera é denominada TD 88. Utiliza a linguagem de programação FORTRAN (veja apêndice D) para fornecer-nos dados da variação e distribuição da densidade na superfície terrestre para um intervalo entre 150-750km.

O modelo de Sehnał (1988) para a densidade atmosférica, na versão de Pospíšilová (SEHNAL; POSPÍŠILOVÁ, 1988), é caracterizado por fatores multiplicativos dependendo do fluxo solar médio e do índice geomagnético K_p . Assim, a densidade é dada pela expressão (2.45).

Os símbolos utilizados são:

- $K_{n,j}$ constantes numéricas (tabeladas)
- p_n fases (tabeladas)
- a_i constantes numéricas (tabeladas)
- F_x fluxo solar medido em 10,7cm, por dia

F_b fluxo solar obtido após três rotações solares
 K_p índice geomagnético do local, obtido três horas antes
 h altitude em km
 d dia corrente do ano
 φ latitude
 t tempo local

As constantes numéricas do modelo estão representadas nas Tabelas 1, 2 e 3 em que os dados são obtidos por EL-Salam e Sehnal (2004):

Tabela1- Constantes numéricas $K_{n,j}$

n	j = 0	j = 1	j = 2	j = 3
1	$2,96815 \times 10^{-15}$	$7,66373 \times 10^{-9}$	$1,65738 \times 10^{-10}$	$3,87086 \times 10^{-11}$
2	$2,81456 \times 10^{-14}$	$-4,40149 \times 10^{-9}$	$3,34283 \times 10^{-10}$	$9,35229 \times 10^{-11}$
3	$-1,23300 \times 10^{-14}$	$1,18107 \times 10^{-10}$	$-1,47817 \times 10^{-10}$	$-1,51755 \times 10^{-12}$
4	$-1,14892 \times 10^{-17}$	$-1,59664 \times 10^{-11}$	$-6,46708 \times 10^{-12}$	$-2,04955 \times 10^{-12}$
5	$-3,90064 \times 10^{-16}$	$-2,40755 \times 10^{-10}$	$-1,398567 \times 10^{-11}$	$-3,059493 \times 10^{-12}$
6	$7,42439 \times 10^{-15}$	$6,43785 \times 10^{-11}$	$1,36185 \times 10^{-10}$	$3,517 \times 10^{-11}$
7	$-3,41594 \times 10^{-16}$	$7,44666 \times 10^{-12}$	$4,5416 \times 10^{-12}$	$2,07975 \times 10^{-12}$

Tabela 2- Fases p_n

n	3	4	5	6	7
p_n	263	-263	-29,41	8,0913	10,0813

Tabela 3- Constantes a_i

i	1	2	3	4	5	6	7	8
a_i	0,007	0,2875	0,04762	0,0471	7,0	7,0	0,3333	15,0

Como vimos o modelo TD 88 é válido para altitudes até 750 km, no entanto, Bezdek e Vokrouhlicky (2004) fazem uma extensão do modelo para altitudes entre 750-1200 km. Vamos expor as novas constantes numéricas para a abordagem do modelo segundo o autor citado.

Tabela 4- Constantes numéricas $K_{n,j}$ para altitudes de 750 km até 1200 km.

n	j=1	j=2	j=3
1	$0,766348 \times 10^{-8}$	$0,15645 \times 10^{-9}$	$1,943 \times 10^{-11}$
2	$-0,440146 \times 10^{-8}$	$0,36649 \times 10^{-9}$	$2,661 \times 10^{-10}$
3	$0,118107 \times 10^{-9}$	$-0,14007 \times 10^{-9}$	-1470×10^{-12}
4	$-0,159664 \times 10^{-10}$	$-0,65029 \times 10^{-11}$	$-2,317 \times 10^{-12}$
5	$-0,240756 \times 10^{-9}$	$-0,14318 \times 10^{-10}$	$-3,506 \times 10^{-12}$
6	$0,643785 \times 10^{-10}$	$0,14922 \times 10^{-9}$	$2,019 \times 10^{-11}$
7	$0,744666 \times 10^{-11}$	$0,44938 \times 10^{-11}$	$2,066 \times 10^{-12}$

Tabela 5- Constantes a_i para altitudes de 750 km até 1200 km.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
a_i	0,007243	0,1778	0,1449	-0.01179	7,011	6,968	3,301	14,91

A fase p_n é a mesma da Tabela 2.

2.6.3 Densidade atmosférica

O Sol e a Atmosfera (JACCHIA, 1975): a maioria das radiações solares visíveis provém da superfície aparente, também chamada de fotosfera, sua distribuição de intensidade é apresentada com comprimento de onda semelhante a um corpo negro e temperatura de aproximadamente 5800 Kelvin. A intensidade total da radiação solar na Terra impressiona por ser espetacularmente constante. A “constante solar” não apresenta mudanças sistemáticas superiores a uma ou duas partes em 1000, e mesmo com o aparecimento de “manchas solares” as mudanças não ultrapassam a faixa de três ou quatro por cento.

O aquecimento de regiões da atmosfera terrestre descreve uma variação não linear que vai do topo ao fundo. As nuvens refletem parte da energia de volta ao espaço, mas a energia que passa é suficiente para aquecer a superfície.

A variação que ocorre entre 0 e 20 km é dada de forma gradativa porque existe um aquecimento da superfície terrestre por absorção, que acaba por transmitir calor a atmosfera. Esta temperatura vai caindo quanto maior for a altitude.

O mecanismo de aquecimento do ar à superfície é realizado por contato (condução), por crescentes correntes de ar quente (convecção), e por absorção de raios infravermelhos emitidos, motivo pelo qual a nossa atmosfera é opaca.

Utilizando-se de balões, na década de 40 foi possível constatar que a partir de 20-30 km a temperatura começa a aumentar novamente. Posteriormente, com foguetes, foi descoberto que esse aumento atinge um valor máximo de 270 Kelvin a aproximadamente 50 km. A absorção de raios ultravioleta pela camada de ozônio foi rapidamente identificada como a causa deste aumento de temperatura. O ar vai se tornando rarefeito com o aumento de altitude e isso faz com que moléculas de oxigênio (O_2) se dissolvam como átomos de oxigênio (O). Esses átomos recombina-se com outras moléculas de oxigênio formando desta forma o ozônio (O_3). A reação

descrita começa a ocorrer a uma altitude de 25km e processa-se pelos 20km seguintes, mas a maior concentração de ozônio ocorre a cerca de 35km.

Após o interlúdio do aquecimento da camada atmosférica pelo ozônio, a temperatura volta a decrescer com a altitude pela mesma razão, da troposfera até atingir cerca de 185 K a uma altitude de 90km. Após isso, entretanto, existe um crescimento, primeiro lento até os 100km, e mais rápido no intervalo de 100 a 150 km. O crescimento continua a ocorrer, de forma mais lenta, entre 200 e 250km. Podemos mencionar que esse aumento gradativo é dado pela absorção de radiação EUV, que ocorre na região que ultrapassa os 100km.

Devemos mencionar que as regiões da atmosfera são divididas. Por convenção, é chamada troposfera à região que compreende a superfície terrestre até onde a temperatura decresce, por volta de 10-15km. A linha imaginária que delimita esta camada chama-se tropopausa. A região seguinte é denominada estratosfera que, ainda por convenção, vai até a altitude de 50km. A linha imaginária que delimita a estratosfera chama-se estratopausa. Logo após entramos na mesosfera que se estende até a temperatura mínima, por volta de 90km, onde fica a mesopausa. A partir daí temos a chamada termosfera.

Utilizando-se do princípio de que a densidade varia de acordo com a altitude, são construídos tabelas e gráficos com valores de densidade para certos valores de altitude que, para o Modelo TD 88, compreendem a faixa que vai de 150 km a 750 km.

Para construir tais tabelas, é necessário utilizarmos dados de entrada no programa constantes que, desta forma, não iriam intervir na análise comparativa. Os valores a serem considerados constantes no caso da altitude são:

Dia do ano (DAY);

Fluxo Solar (EFX e EFBAR);

Índice Geomagnético (AKP);

Hora Local (HL) e

Latitude (ALAT).

São utilizados valores para algumas condições, que são representados nas Tabelas 6 e 7 e nas Figuras 5 e 6. As tabelas são obtidas através da implementação do modelo matemático TD 88. Sendo que o usuário pode estar sempre atualizando o valor da densidade já que esta varia de acordo com a altitude e outros fatores como, por exemplo, fluxo solar, índice geomagnético etc.

Tabelas da Variação da Densidade em relação a Altitude:

Tabela 6- Variação da densidade em relação a altitude (HL=3)

Day=80	EFX=EFBAR=150, AKP=4	HL=3, ALAT= 0
Densidade (kg/m ³)	Densidade Escala Altura H (km)	Altitude (km)
4,51633E-010	31,36007	200
3,29070E-010	31,82579	210
2,40971E-010	32,37737	220
1,77469E-010	33,02762	230
1,31548E-010	33,79000	240
9,82148E-011	34,67802	250
7,39122E-011	35,70446	260
5,61045E-011	36,88038	270
4,29811E-011	38,21383	280
3,32473E-011	39,70854	290
2,59758E-011	41,36247	300
2,05006E-011	43,16682	310
1,63429E-011	45,10528	320
1,31568E-011	47,15423	330
1,06920E-011	49,28361	340
8,76646E-012	51,45874	350
7,24721E-012	53,64274	360
6,03671E-012	55,79924	370
5,06295E-012	57,89495	380
4,27238E-012	59,90179	490
3,62497E-012	61,79818	400
3,09050E-012	63,56956	410
2,64599E-012	65,20811	420
2,27381E-012	66,71196	430
1,96031E-012	68,08404	440
1,69482E-012	69,33084	450

Tabela 6- Variação da densidade em relação a altitude (HL=3)

1,46891E-012	70,46121	460
1,27588E-012	71,48532	470
1,11034E-012	72,41386	480
9,67908E-013	73,25739	490
8,45015E-013	74,02597	500
7,38715E-013	74,72884	510
6,46568E-013	75,37434	520
5,66533E-013	75,96982	530
4,96898E-013	76,52172	540
4,36219E-013	77,03555	550
3,83271E-013	77,51604	560
3,37011E-013	96,71713	570
2,96547E-013	78,39230	580
2,61118E-013	78,79426	590
2,30066E-013	79,17539	600
2,02827E-013	79,53767	610
1,78914E-013	79,88273	620
1,57903E-013	80,21194	630
1,39429E-013	80,52645	640
1,23175E-013	80,82722	650
1,08864E-013	81,11508	660
9,62584E-014	81,39072	670
8,51464E-014	81,65476	680
7,53464E-014	81,90772	690
6,66990E-014	82,15008	700
5,90647E-014	82,38226	710
5,23218E-014	82,60464	720
4,63634E-014	82,81759	730
4,10961E-014	83,02144	740
3,64377E-014	83,21650	750

Com os dados da Tabela 6 plotamos a Figura 4 que representa a variação da densidade em relação a altitude, como podemos analisar no gráfico a densidade é inversamente proporcional a altitude.

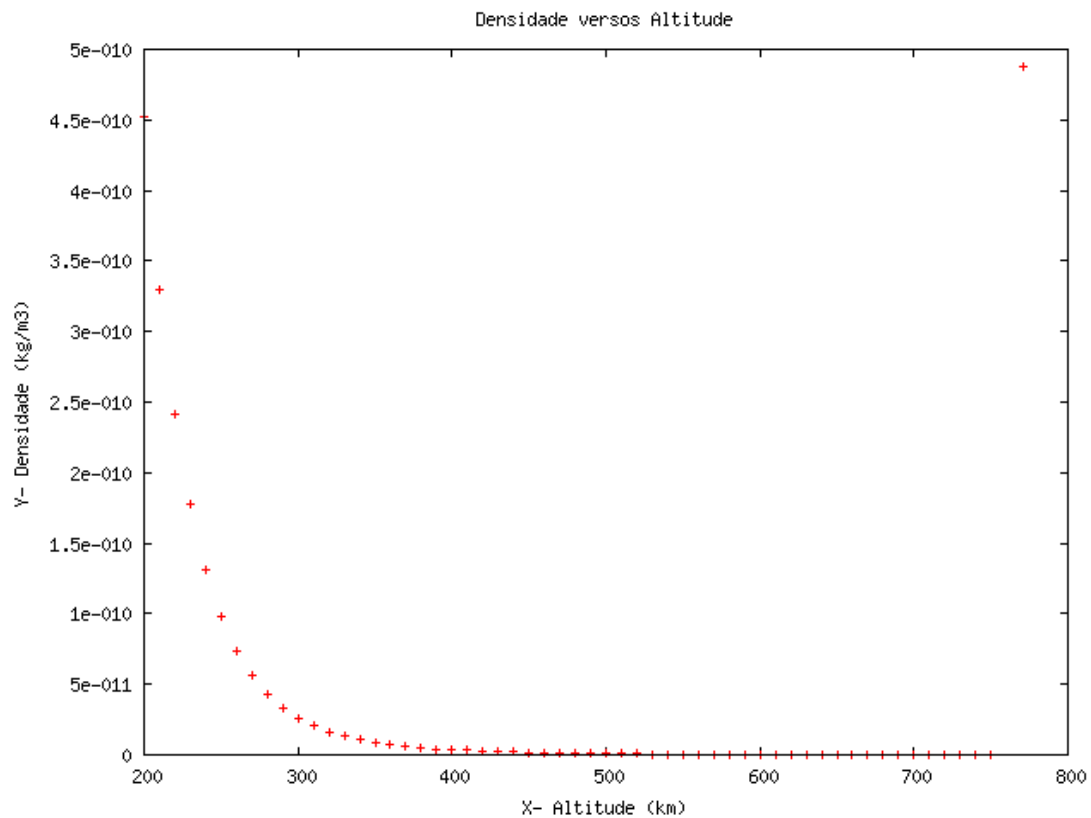


Figura 4- Variação da densidade atmosférica (HL=3)

Variando a hora local para HL=15 temos:

Tabela 7- Variação da densidade em relação a altitude (HL=15)

Day=80	EFX=EFBAR=150, AKP=4	HL=15, ALAT= 0
Densidade (kg/m ³)	Densidade Escala Altura H (km)	Altitude (km)
5,59304E-010	34,44652	200
4,20006E-010	35,40663	210
3,17993E-010	36,50279	220
2,42873E-010	37,74206	230
1,87213E-010	39,12772	240
1,45688E-010	40,65811	250
1,14475E-010	42,32569	260
9,08230E-011	44,11653	270
7,27430E-011	46,01031	280
5,87971E-011	47,98111	290
4,79390E-011	49,99882	300
3,94046E-011	52,03118	310
3,26331E-011	54,04599	320

Tabela 7- Variação da densidade em relação a altitude (HL=15)

2,72105E-011	56,01342	330
2,28294E-011	57,90778	340
1,92597E-011	59,70883	350
1,63282E-011	61,40231	360
1,39031E-011	62,97986	370
1,18837E-011	64,43849	380
1,01919E-011	65,77961	390
8,76706E-012	67,00803	400
7,56113E-012	68,13089	410
6,53619E-012	69,15679	420
5,66180E-012	70,09497	430
4,91336E-012	70,95477	440
4,27085E-012	71,74518	450
3,71784E-012	72,47457	460
3,24077E-012	73,15056	470
2,82836E-012	73,77992	480
2,47120E-012	74,36860	490
2,16137E-012	74,92172	500
1,89219E-012	75,44366	510
1,65801E-012	75,93812	520
1,45404E-012	76,40822	530
1,27616E-012	76,85656	540
1,12087E-012	77,28527	550
9,85173E-013	77,69612	560
8,66479E-013	78,09059	570
7,62570E-013	78,46986	580
6,71527E-013	78,83491	590
5,91694E-013	79,18655	600
5,21640E-013	79,52544	610
4,60121E-013	79,85215	620
4,06062E-013	80,16712	630
3,58527E-013	80,47076	640
3,16702E-013	80,76342	650
2,79880E-013	81,04540	660
2,47443E-013	81,31698	670
2,18853E-013	81,57842	680
1,93642E-013	81,82995	690
1,71398E-013	82,07182	700
1,51762E-013	82,30425	710
1,34421E-013	82,52749	720
1,19100E-013	82,74174	730
1,05558E-013	82,94724	740
9,35829E-014	83,14423	750

Com os dados da Tabela 7 plotamos a Figura 5 que representa a variação da densidade em relação a altitude.

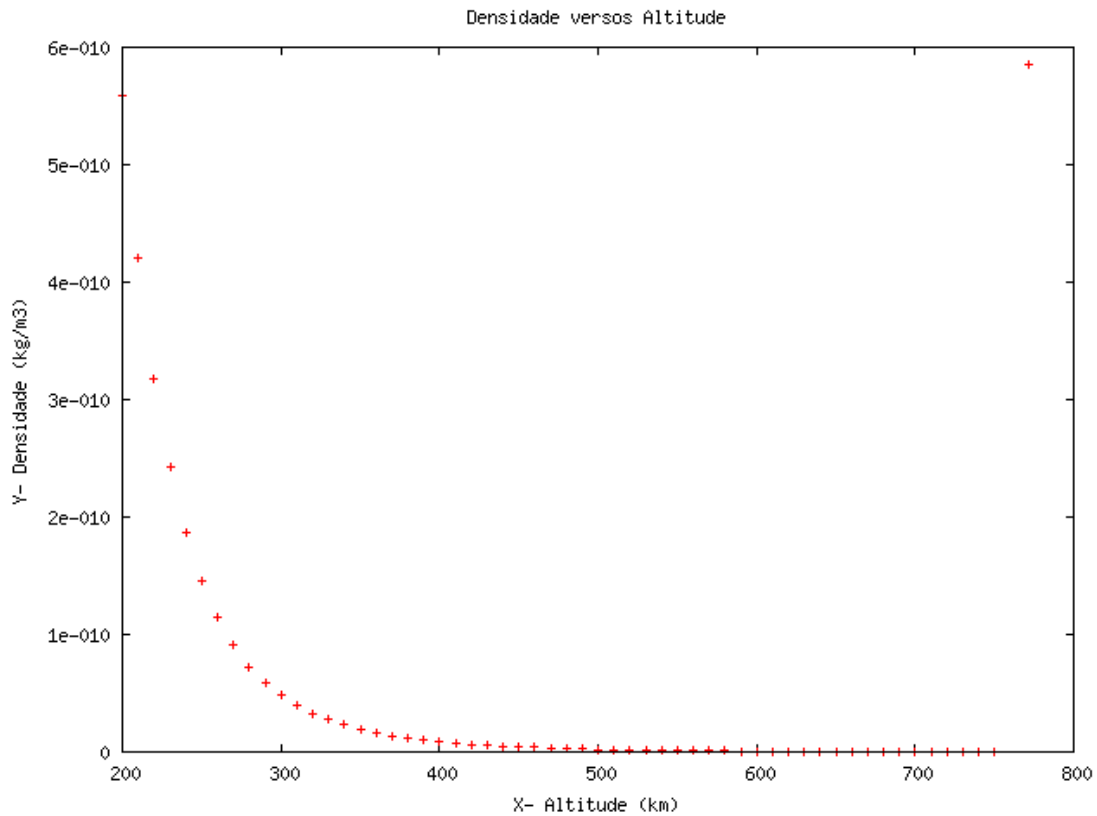


Figura 5- Variação da densidade atmosférica (HL=15)

Plotamos as Figuras 4 e 5 em um único gráfico para efeito de comparação.

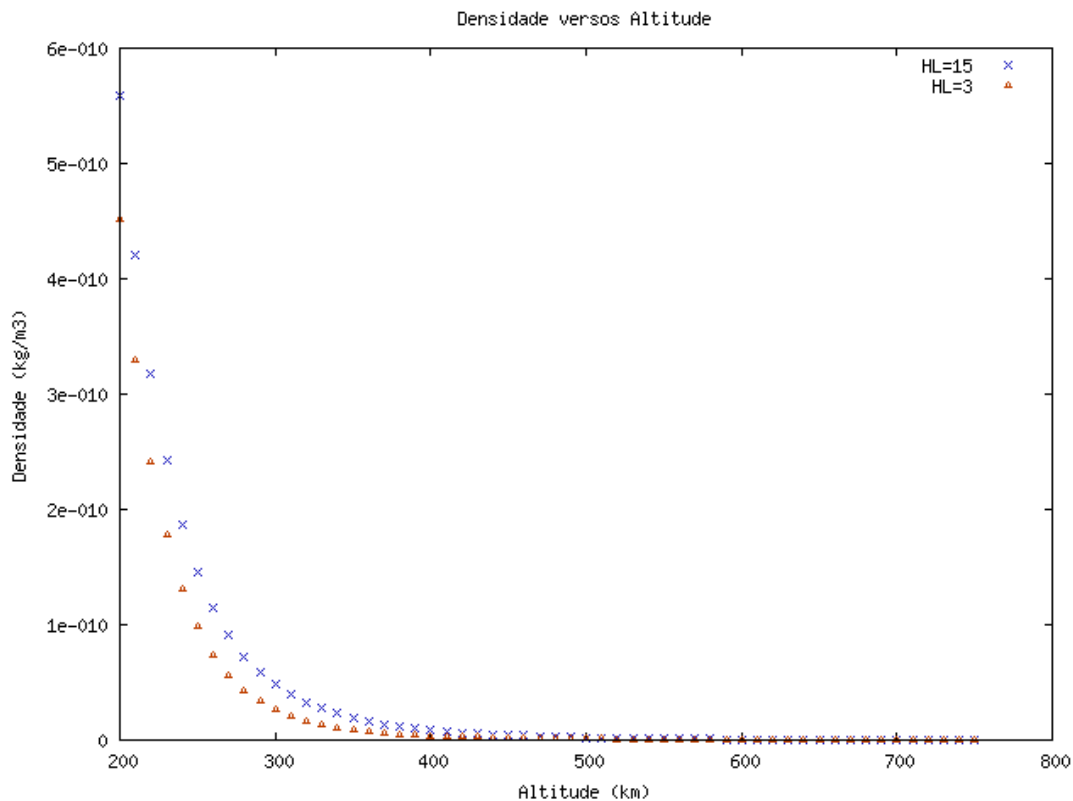


Figura 6- Variação da densidade atmosférica

As tabelas e os gráficos são apenas representativos, pois os dados não estão atualizados. Para obtermos valores mais realísticos é necessário atualizar os dados de entrada conforme o programa solicita.

O fluxo solar é um dos fatores que influencia na densidade atmosférica podendo ser calculado por (EL-SALAM; SEHNAL, 2004):

$$F_{10.7} = 75 \sin \left[\frac{2\pi}{p} \left(D - \frac{p}{4} \right) \right] + 145$$

em que p é o período do ciclo solar (em dias), D é o número de dias entre um certo intervalo de tempo.

2.6.4 Teoria de Brouwer e Hori

Brouwer e Hori (1961) desenvolvem uma teoria de acoplamento do efeito do arrasto atmosférico no movimento do satélite artificial e o achatamento do campo gravitacional da Terra, em que apresentam uma solução analítica.

A teoria em si compreende o desenvolvimento das equações do movimento em variáveis de Delaunay, expressando-as depois, com auxílio de propriedades de transformações canônicas, em termos da solução do problema sem arrasto.

As equações do movimento de um satélite artificial na presença do arrasto atmosférico e do potencial gravitacional terrestre são dadas em um sistema de coordenadas cartesianas por:

$$\frac{d^2 x_j}{dt^2} = \frac{\partial U_j}{\partial x_j} + X_j, \quad j=1,2,3 \quad (2.50)$$

em que a função U_j contém termos do achatamento e os X_j são as componentes da aceleração do arrasto.

A expressão (2.50) pode ser posta em forma canônica estendida e nas variáveis de Delaunay ficam:

$$\begin{aligned} \frac{dL_j}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial l_j} + P_j \\ \frac{dl_j}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial L_j} - Q_j, \quad j=1,2,3 \end{aligned} \quad (2.51)$$

em que

$$\begin{aligned}
P_j &= -AV \exp(-\alpha r) p_j & p_j &= \sum_k \xi_k \frac{\partial n_k}{\partial l_j}, \\
Q_j &= -AV \exp(-\alpha \alpha) q_j & q_j &= \sum_k \xi_k \frac{\partial n_k}{\partial L_j}.
\end{aligned}
\quad (j=1,2,3) \quad (2.52)$$

sendo A e α constantes (associadas a força de arrasto), p_i e q_i são encontradas com o uso das relações do movimento kepleriano.

$$\begin{aligned}
p_1 &= L_1 \left(\frac{2a}{r} - 1 \right), & q_1 &= 2e \sin E + \frac{2}{e} \frac{L_2}{L_1} \sin f, \\
p_2 &= L_2, & q_2 &= -\frac{2}{e} \sin f, \\
p_3 &= L_3, & q_3 &= 0.
\end{aligned} \quad (2.53)$$

em que E é a anomalia excêntrica, f a anomalia verdadeira a , e e r , são funções das variáveis de Delaunay.

V é a velocidade do satélite em relação ao ar, sendo que foi desprezada a velocidade de rotação da atmosfera, dada por:

$$V = \mu^{1/2} \left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.54)$$

Ficando o sistema a ser integrado da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{dL_{j'}}{dt} &= -AV \exp(-\alpha r) p_j - AV'' \exp(-\alpha r'') \delta p_j \\
\frac{dL_{j'}}{dt} &= -\frac{\partial F^{**}}{\partial L_{j'}} + AV \exp(-\alpha r) q_j + AV'' \exp(-\alpha r'') \delta q_j
\end{aligned} \quad (2.55)$$

Devido a presença do fator $V \exp(-\alpha r)$ ou $V'' \exp(-\alpha r'')$ nas equações acima, um desenvolvimento em séries em termos da excentricidade e da anomalia média é necessário antes da integração. Sendo δp_j e δq_j as partes que tem J_2 em fator.

2.7 PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOLAR

A pressão de radiação solar é uma força de origem não-gravitacional que perturba o movimento translacional de um satélite artificial. Sendo que podemos representar sua função perturbadora através do gradiente do potencial (AHMED A. EL-ENNA, 2003, 2004), porém quando consideramos o efeito da sombra da Terra esta representação não é mais válida, sendo que, a força agora não deriva mais de um potencial. Vilhena de Moraes (1978) considerou a sombra da Terra no sistema de equações diferenciais em que o sistema a ser resolvido é não-canônico devido à sombra da Terra. A pressão de radiação solar é gerada através do contínuo fluxo de fótons que se chocam com a superfície do satélite, podendo esta absorver ou refletir este fluxo. A taxa da quantidade de movimento de todos os fótons incidentes na superfície do satélite origina a força de radiação solar podendo causar perturbações nos elementos orbitais. A sua variação é praticamente independente da altitude do satélite: começa a predominar sobre a força aerodinâmica a partir dos 700 km. É grande a sua influência nos satélites geoestacionários (aproximadamente 36000 km de altitude). O interesse no estudo do efeito da pressão de radiação solar no movimento de um satélite artificial é iniciado pela discrepância entre teoria e observação de satélites do tipo balão. Recentemente, a importância de forças não-gravitacionais aumentou drasticamente devido ao aumento da precisão da localização e devido à importância da precisão no planejamento de missões espaciais. O cálculo de órbita para o movimento do satélite artificial da Terra é uma parte importante da tecnologia espacial.

Há também um grande interesse no efeito da pressão de radiação e a correção relativística. Com o aumento das observações houve a necessidade de introduzir efeitos relativísticos na interpretação e medida da posição dos corpos celestes, natural e artificial. Vários trabalhos atuais têm inserido os termos devido ao potencial relativísticos entre eles El-Saftawy e El-Enna (2002); El-Enna e El-Saftawy (2003); Ahmed A. El-Enna (2004); Ahmed A. El-Enna; M.K.M. Ahmed e Abd El-Salam (2006). O efeito da pressão de radiação solar e a correção relativística dependem da

forma do satélite e da sua altitude. A Tabela 8 descreve a ordem de magnitude (aceleração cm/s^2) para o coeficiente harmônico J_2 , a pressão de radiação solar direta e correção relativística para diferentes satélites dependendo de sua altitude (km) e a razão entre a área e sua massa (A/m , cm^2/g). Os dados da Tabela 8 são obtidos de El-Saftawy e El-Enna (2002).

Tabela 8 – A ordem da magnitude da pressão de radiação e correção relativística para diferentes satélites (EL-SAFTAWY; EL-ENNA, 2002).

Satélites	Geosynchronous	Lageos	Atarlette	Seasat (ERS-1)
Semi-eixo maior (a)	$a = 42160$	$a = 12270$	$a = 7300$	$a = 7100$
Taxa área / massa (A/m)	$\text{A/m} = 0,1$	$\text{A/m} = 0,007$	$\text{A/m} = 0,01$	$\text{A/m} = 0,2$
Harmônico J_2	$7,4 \times 10^{-4}$	$1,0 \times 10^{-1}$	$8,3 \times 10^{-1}$	$9,3 \times 10^{-1}$
PRS direta	$4,6 \times 10^{-6}$	$3,2 \times 10^{-7}$	$4,6 \times 10^{-7}$	$9,2 \times 10^{-6}$
Correção relativística	$2,3 \times 10^{-9}$	$9,5 \times 10^{-8}$	$4,5 \times 10^{-7}$	$4,9 \times 10^{-7}$

Sendo que no nosso caso não vamos considerar os termos relativísticos, em que os dados da Tabela 8 são apenas para destacar a ordem de grandeza quando considerado tais efeitos.

A aceleração causada pela pressão de radiação atua na direção Sol-satélite, no sentido oposto ao versor Terra-Sol, $\hat{r}_s$, é dada por:

$$\vec{A}_{PR} = -\nu C_R \frac{S}{m} P_s \hat{r}_s \quad (2.56)$$

em que ν é o fator de eclipse, que vale 0 quando o satélite se encontra na sombra da Terra e um quando o satélite está iluminado (não é considerada a penumbra), C_R é um

fator que depende da refletividade do satélite, denominado de coeficiente de pressão de radiação, S é a secção transversal quando observada na direção de incidência dos raios solares e m é a massa do satélite. P_s é a pressão de radiação na órbita terrestre, e vale aproximadamente $4,55 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$. E $\vec{r}_s$ é o raio vetor do Sol relativo à Terra.

Neste trabalho estudamos a pressão de radiação solar direta, ou seja, a radiação que incide sobre o satélite, no entanto existem outras formas de radiação que perturbam o movimento do satélite, porém de menor magnitude como, por exemplo, a radiação incidente na Terra parte é refletida parte é absorvida e re-irradiada, a parte refletida causa uma pequena variação nos elementos orbitais do veículo espacial. A radiação solar refletida pela Terra de volta ao espaço é chamada de Albedo. O Albedo depende das características da superfície, é variável com o tempo e a posição. O albedo é cerca de 90% menor que a radiação solar direta a 700 km de altitude e a radiação terrestre é aproximadamente 93% menor podendo então ser desprezados. Ambos decrescem com o aumento da altitude. Segundo Vokrouhlicky e Sehnal (1993) a magnitude da pressão de radiação solar direta é cerca de cinco vezes maior que a força de albedo, para maiores detalhes referentes a essa força consultar o artigo citado logo acima.

2.7.1 Teoria de Vilhena de Moraes

Vilhena de Moraes (1978) desenvolveu uma teoria semi-analítica para o estudo simultâneo dos efeitos do arrasto atmosférico e da pressão de radiação solar direta sobre o movimento de um satélite artificial. Dando ênfase aos termos de acoplamento, que em alguns casos podem tornar-se da ordem de cada uma das perturbações tomadas isoladamente. A ordem da perturbação devida ao arrasto deve ser considerada a mesma que a da pressão de radiação solar, fazendo com que a teoria seja válida apenas para satélites de altura do perigeu entre aproximadamente 500 a 900 km. Os

desenvolvimentos são considerados até a ordem do produto das duas perturbações desprezando-se o quadrado da perturbação do arrasto.

No estudo dos efeitos da pressão de radiação solar em órbitas de satélites artificiais, levou-se em conta que o satélite não está sempre iluminado e que a pressão de radiação não é uma função contínua. A sombra da Terra, que pode produzir perturbações importantes nos elementos orbitais do satélite, é considerada neste trabalho por meio da função sombra introduzida por Ferraz Mello (1965). A pressão de radiação solar torna-se importante em casos de satélites de grande razão entre a área e sua massa. Como por exemplo, satélites do tipo balão. Esta perturbação afeta a distância do perigeu da órbita do satélite, fazendo-a decrescer periodicamente, alterando os efeitos do arrasto (que se dá principalmente no perigeu).

Em um referencial geocêntrico cujo plano fundamental é o terminador terrestre, e cujo eixo polar está dirigido para o pólo escuro, a função de forças devido à radiação solar é dada por:

$$R = \rho r \cos \lambda, \quad (2.57)$$

$$\rho = k \frac{S}{m} q \quad (2.58)$$

e

$$\cos \lambda = \sum_{i=1}^6 A_i \cos(f + \lambda_i) \quad (2.59)$$

em que r é a distância geocêntrica do satélite, λ é o ângulo formado pelas direções geocêntricas do satélite e o pólo escuro do terminador terrestre, k constante depende das propriedades de reflexão da superfície do satélite, S a área da secção transversal, m a massa do satélite e q a razão entre a intensidade de radiação solar e a velocidade da luz sendo:

$$q = 4,65 \times 10^{-5} \text{ gcm} / \text{s}^2$$

em que A_i ($i=1,...,6$) são funções da inclinação do plano da órbita e obliquidade da eclíptica, e os λ_i ($i=1,...,6$) são ângulos que envolvem o argumento do perigeu ω , a longitude do nodo ascendente Ω e a longitude do Sol Θ .

As equações do movimento são postas nas variáveis de Delaunay, considerando a pressão de radiação da expressão (2.57) e a função perturbadora devido ao geopotencial temos:

$$\begin{aligned}\frac{dL_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial l_i} + \frac{\partial R}{\partial l_i}, \\ \frac{dl_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial L_i} - \frac{\partial R}{\partial L_i}.\end{aligned}\quad (i = 1,2,3) \quad (2.60)$$

sendo que nesse caso não foi considerada a sombra da Terra. No entanto, o satélite passa por uma região de sombra, em que cessa o efeito perturbador, ou seja, o efeito da pressão de radiação existe somente quando o satélite estiver iluminado pelo Sol, causando uma dificuldade adicional no estudo analítico. Para satisfazer determinadas condições introduzimos a função sombra definida por Ferraz Mello (1965), que é um comutador que vale um quando o satélite está iluminado pelo Sol e zero quando ele se encontra na sombra da Terra (nessa teoria não inclui o efeito da penumbra).

As equações de movimento ficam:

$$\begin{aligned}\frac{dL_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial l_i} + \psi \frac{\partial R}{\partial l_i}, \\ \frac{dl_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial L_i} - \psi \frac{\partial R}{\partial L_i},\end{aligned}\quad (i = 1,2,3) \quad (2.61)$$

em que ψ é a função sombra e H é a hamiltoniana.

Cuja solução é dada por Ferraz Mello (1965) que é da forma:

$$\begin{aligned}L_i &= L_i^* + \rho \delta L_i(L_j^*, l_j^*) \\ l_i &= l_{i0} + \rho \delta l_i(L_j^*, l_j^*)\end{aligned}\quad (i, j = 1,2,3) \quad (2.62)$$

em que L_j^* e l_j^* são constantes de integração, $l_{i0} = l_i^* + n_i(L_j^*)t$, $n_i = -\frac{(\partial H)}{(\partial L_i)}$ e ρ é a magnitude da pressão de radiação solar $\bar{\rho}$.

As equações de movimento de um satélite artificial da Terra submetido aos efeitos do arrasto atmosférico e da pressão de radiação solar direta, levando em conta a sombra da Terra, podem ser postas na seguinte forma (VILHENA DE MORAES, 1978):

$$\begin{aligned}\frac{dL_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial l_i} + \psi \frac{\partial R}{\partial l_i} + P_i \\ \frac{dl_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial L_i} - \psi \frac{\partial R}{\partial L_i} - Q_i\end{aligned}\tag{2.63}$$

em que

$$P_i = -AV \exp[-\alpha(r - r_p)] p_i; \quad Q_i = -AV \exp[-\alpha(r - r_p)] q_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2.64}$$

sendo A e α constantes (associadas a força de arrasto), r_p a altura do perigeu, p_i e q_i são encontradas com o uso das relações do movimento kepleriano, já definidos na teoria de Brouwer-Hori.

A expressão (2.63) é resolvida por Vilhena de Moraes (1978) utilizando o método da variação dos parâmetros (método de Lagrange). Na aplicação do método a pressão de radiação solar é desprezada e a solução encontrada é comparada com os resultados obtidos por Brouwer e Hori (1961), pode-se observar que os resultados são análogos, a menos da presença de termos espúrios de Poisson (seculares mistos) nas expressões analíticas obtidas por Brouwer e Hori. O aparecimento de tais termos deve ser evitado uma vez que eles podem não ter sentido físico algum, quando surgidos apenas de alguma falha na técnica matemática do tratamento da perturbação. Para resolver este inconveniente Ferraz Mello (1981) sugere uma transformação para eliminar os termos de Poisson.

Fitzgibbon (1982) utiliza também o método da variação dos parâmetros para o problema de um satélite artificial sujeito à ação do geopotencial e do arrasto atmosférico e na solução encontrada não apresentou termos de Poisson como na teoria de Brouwer e Hori (1961) comprovando o resultado encontrado por Vilhena de Moraes (1978).

O sistema a ser integrado considerando a pressão e o arrasto é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{dL_k^*}{dt} &= -A V e^{-\alpha(r-r_p)} \left\{ p_k - \rho \sum_{i=1}^3 \left[p_i \frac{\partial(\delta L_k)}{\partial L_i^*} - q_i \frac{\partial(\delta L_k)}{\partial \sigma_i} \right] \right\} \\ \frac{d\sigma_k}{dt} &= n_k + \rho \delta n_k - A V e^{-\alpha(r-r_p)} \left\{ -q_k - \rho \sum_{i=1}^3 \left[p_i \frac{\partial(\delta L_k)}{\partial L_i^*} - q_i \frac{\partial(\delta L_k)}{\partial \sigma_i} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

em que as funções devem ser calculadas nas variáveis L_i^*, σ_i . Sendo σ_i uma variável introduzida para evitar o aparecimento de termos seculares espúrios definida por (FERRAZ MELLO, 1965):

$$\sigma_i = n_i(L_j'')t + \delta n_i(L_j'')t + l_i''$$

CAPÍTULO 3 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Consideramos o sistema de equações diferenciais que descreve o movimento de um satélite artificial influenciado pelo geopotencial, arrasto atmosférico e pressão de radiação solar direta, considerando a sombra da Terra. Tal sistema, como visto no capítulo dois, pode ser colocado na forma:

$$\begin{aligned}\frac{dL_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial l_i} + \psi \frac{\partial R}{\partial l_i} + P_i \\ \frac{dl_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial L_i} - \psi \frac{\partial R}{\partial L_i} - Q_i\end{aligned}\tag{3.1}$$

Para resolver esse sistema de equações diferenciais aplicamos neste trabalho o método de Hori (1971) para sistemas não-canônicos. Inicialmente apresentamos resumidamente o método de Hori para sistemas canônicos, depois o mesmo método para sistemas não-canônicos e, por fim, resolvemos o sistema proposto com as expressões para H , P_i , Q_i e a densidade da atmosfera ρ_d diferentes das apresentadas por Vilhena de Moraes (1978). Analisamos os resultados encontrados, dando ênfase aos termos de acoplamento que surge da junção do arrasto atmosférico com a pressão de radiação, acoplamento este encontrado por Vilhena de Moraes (1978).

3.1 MÉTODO DE HORI PARA SISTEMAS CANÔNICOS

Apresentamos aqui o algoritmo do método até segunda ordem e fazemos uma aplicação com um satélite sob influência do campo gravitacional terrestre, considerando termos até a ordem de J_4 para os harmônicos zonais.

Para desenvolver o algoritmo Hori (1966) utiliza um teorema de Lie (1888) que será exposto abaixo:

Sejam ξ_j, η_j um conjunto de $2n$ variáveis canônicas e $f(\xi, \eta)$, $S(\xi, \eta)$ funções arbitrárias de ξ_j e η_j . Seja o operador $\overline{D}_s^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) definido por:

$$\begin{aligned}\overline{D}_s^0 f &= f \\ \overline{D}_s^1 f &= \{f, S\} \\ \overline{D}_s^n f &= \overline{D}_s^{n-1} (\overline{D}_s^1 f) \quad (n \geq 2)\end{aligned}\tag{3.2}$$

em que $\{ \}$ denota o parêntesis de Poisson.

Teorema de Lie (1888): Um conjunto de $2n$ variáveis canônicas x_j, y_j definidas pela equação:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \overline{D}_s^n f(\xi, \eta)\tag{3.3}$$

é canônico se a série do 2º membro da equação converge, em que ε é uma pequena constante independente das variáveis ξ_j, η_j .

Baseado em tal teorema, Hori propõe uma nova teoria, a qual será, resumidamente exposta a seguir, fornecendo um algoritmo para obtenção da nova hamiltoniana e da função geratriz.

Consideramos um sistema dinâmico cujas equações de movimento são:

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_j}\tag{3.4}$$

$$\frac{dy_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}\tag{3.5}$$

com a hamiltoniana

$$H(x, y) = H_0(x, y) + \sum_{k=1} H_k(x, y) \quad (3.6)$$

em que H_k tem ε^k como fator. É assumido que H não depende explicitamente do tempo e que o sistema é resolvido se ε aproxima-se de zero. Sendo $S(\xi, \eta)$ a função geratriz da transformação canônica $x_j, y_j \rightarrow \xi_j, \eta_j$. $S(\xi, \eta)$ é desenvolvido em potência de ε na forma

$$\varepsilon S(\xi, \eta) = \sum_{k=1} S_k(\xi, \eta) \quad (3.7)$$

em que S_k tem ε^k como um fator.

Sendo que H é livre do tempo por suposição temos então a integral da energia

$$\sum_{k=0} H_k(x, y) = \sum_{k=0} H_k^*(\xi, \eta). \quad (3.8)$$

Expandindo a equação (3.3) substituindo no lado esquerdo da equação (3.8) e igualando os termos com igual potência de ε em ambos os lados, obtemos o seguinte algoritmo do método dado por (HORI, 1966):

Ordem zero:

$$H_0 = H_0^* \quad (3.9)$$

em que $H(\xi, \eta)$,

Ordem um:

$$H_1 + \{H_0, S_1\} = H_1^*; \quad (3.10)$$

em que os colchetes representam o parêntesis de Poisson e S_n as funções geratrizes.

Ordem dois:

$$H_2 + \frac{1}{2}\{H_1 + H_1^*, S_1\} + \{H_0, S_2\} = H_2^*; \quad (3.11)$$

generalizando temos:

$$\{H_0, S_n\} + \Psi_n = H_n^*. \quad (3.12)$$

Para encontramos a nova hamiltoniana H_n^* e a função geratriz S_n é introduzido um parâmetro τ através das equações canônicas dada por (Hori, 1966):

$$\frac{d\xi_j}{d\tau} = \frac{\partial H_0}{\partial \eta_j} \quad (3.13)$$

$$\frac{d\eta_j}{d\tau} = -\frac{\partial H_0}{\partial \xi_j} \quad (3.14)$$

em que

$$\{H_0, S_n\} = -\frac{dS_n}{d\tau}. \quad (3.15)$$

Para resolver a expressão (3.12) já que temos n equações com $2n$ incógnitas que são H_n^* e S_n separamos em parte secular e parte periódica como se faz no princípio da média. Utilizando as expressões (3.13), (3.14) e (3.15) Hori obteve outra maneira de escrever o algoritmo dado por:

Ordem zero:

$$H_0^* = H_0 \quad (3.16)$$

Ordem um:

$$H_1^* = H_{1s} \quad (3.17)$$

$$S_1 = \int H_{1p} d\tau \quad (3.18)$$

Ordem dois:

$$H_2^* = H_{2s} + \frac{1}{2} \{H_1 + H_1^*, S_1\}_s \quad (3.19)$$

$$S_2 = \int \left(F_{2p} + \frac{1}{2} \{H_1 + H_1^*, S_1\}_p \right) d\tau \quad (3.20)$$

e assim por diante, em que o índice s representa a parte secular e o índice p a parte periódica. Para maiores detalhes consultar o artigo de Hori (1966).

A solução das expressões (3.13) e (3.14) é dada por:

$$\begin{aligned} \xi_j &= \xi_j(\tau + c_1, c_2, \dots, c_{2n}) \\ \eta_j &= \eta_j(\tau + c_1, c_2, \dots, c_{2n}), \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (3.21)$$

em que c_n são $2n$ constante de integração em relação a τ .

3.1.1 Aplicação do método de Hori para sistema canônico

Vários autores têm trabalhado com o método de Hori, por exemplo, Wnuk (1988); El-Saftawy; Ahmed e Helali (1998b); El-Enna e El-Saftawy (2003); Ahmed A. El-Enna (2004); Bernard de Saedeleer (2005); Ahmed A. El-Enna; M.K.M. Ahmed e Abd El-Salam (2006), geralmente o método utilizado é o canônico (1966). Esses autores em geral consideram a parte não-perturbada da hamiltoniana apenas o termo

$H_0 = \frac{\mu^2}{2L^2}$ que se refere a uma elipse fixa usual. Mas podemos também considerar para

ordem zero não apenas o termo devido à parte não-perturbada da hamiltoniana como também todos os termos seculares adotados como faz, por exemplo, Breiter (1997), se for considerado estes termos teremos uma elipse precessionando ao invés de uma elipse kepleriana usual fixa.

3.1.1.1 Sistema auxiliar do método de Hori

As expressões (3.13) e (3.14) representam o sistema de equações diferenciais ordinárias chamados sistema auxiliar de Hori (que define a teoria de integração). Para nossa aplicação podemos representá-lo por:

$$\frac{d(L, G, H)}{d\tau} = \frac{\partial H_0}{\partial(l, g, h)} \quad (3.22)$$

$$\frac{d(l, g, h)}{d\tau} = -\frac{\partial H_0}{\partial(L, G, H)} \quad (3.23)$$

em que τ é o próprio tempo t em aproximação de ordem zero (SESSIN, 1983a).

Se considerarmos uma hamiltoniana da seguinte forma:

$$H = H_0 + H_{1s} + H_{1p} \quad (3.24)$$

e fazendo $K_0 = H_0 + H_{1s}$ temos:

$$H = K_0 + H_{1p} \quad (3.25)$$

em que o índice s representa os termos seculares e p representa os termos periódicos. Considerando estes termos na hamiltoniana H_0 iremos escrever o algoritmo de Hori na forma posta por Breiter (1997).

O algoritmo fica:

Ordem zero:

$$K_0^* = K_0 \quad (3.26)$$

Ordem um (BREITER, 1997):

$$K_1^* = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} H_{1p} dldg \quad (3.27)$$

A função geratriz é posta na forma (BREITER, 1997):

$$S_1 = \int H_{1p} d\tau \quad (3.28)$$

Ordem dois (BREITER, 1997):

$$k_2^* = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \{H_1 + K_1, S_1\} dldg \quad (3.29)$$

A função geratriz de ordem dois é posta na forma (BREITER, 1997):

$$S_2 = \int \frac{1}{2} (\{H_1 + K_1, S_1\} - K_2^*) d\tau \quad (3.30)$$

os colchetes representam os parênteses de Poisson.

Consideramos o movimento de um satélite artificial ao redor de um esferóide achatado, dado em termos das variáveis de Delaunay por:

$$H = k_0(L, G, H) + H_1(L, G, H, l) \quad (3.31)$$

Aplicando o método na forma dada por Breiter (1997), vamos considerar as equações diferenciais dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(L, G, H)}{\partial t} &= \frac{\partial H}{\partial(l, g, h)} \\ \frac{\partial(l, g, h)}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial(L, G, H)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

em que $L, G, H, l, g,$ e h são as variáveis de Delaunay e $H = k_0 + H_{1p}$ é dada por (FITZGIBBON, 1982):

$$k_0 = \frac{\mu^2}{2L^2} + \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L^3 G^3} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3H^2}{4G^2} \right) + \frac{3}{8} \frac{\mu^6 J_4 a_e^4}{L^3 G^7} \left(\frac{3}{8} - \frac{15H^2}{4G^2} + \frac{35H^4}{8G^4} \right) \left(\frac{3G^2}{2L^2} - \frac{5}{2} \right) \quad (3.33)$$

$$H_{1P} = \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L^6} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3H^2}{4G^2} \right) (3e) \cos l \quad (3.34)$$

Considerando o sistema auxiliar de Hori temos:

$$\frac{dL}{d\tau} = \frac{\partial k_0}{\partial l} = 0, \quad \frac{dG}{d\tau} = \frac{\partial k_0}{\partial g} = 0, \quad \frac{dH}{d\tau} = \frac{\partial k_0}{\partial h} = 0 \quad (3.35)$$

Cálculo de $\frac{dl}{d\tau} = -\frac{\partial k_0}{\partial L}$:

$$\frac{dl}{d\tau} = -\frac{\partial k_0}{\partial L} = \frac{\mu^2}{L^3} + 3 \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L^4 G^3} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3H^2}{4G^2} \right) - \frac{3}{8} \frac{\mu^6 J_4 a_e^4}{L^4 G^3} \left(\frac{3}{8} - \frac{15H^2}{4G^2} + \frac{35H^4}{8G^4} \right) \left(-\frac{15G^2}{2L^2} + \frac{15}{2} \right) \quad (3.36)$$

fazendo

$$n_l = \frac{\mu^2}{L^3} + 3 \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L^4 G^3} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3H^2}{4G^2} \right) - \frac{3}{8} \frac{\mu^6 J_4 a_e^4}{L^4 G^3} \left(\frac{3}{8} - \frac{15H^2}{4G^2} + \frac{35H^4}{8G^4} \right) \left(-\frac{15G^2}{2L^2} + \frac{15}{2} \right) \quad (3.37)$$

integrando obtemos:

$l = l_0 + n_l \tau$ em que l_0 é constante de integração.

Cálculo de $\frac{dg}{d\tau} = -\frac{\partial k_0}{\partial G}$:

$$\frac{dg}{d\tau} = -\frac{\partial k_0}{\partial G} = \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L^3 G^4} \left(-\frac{3}{4} + \frac{15H^2}{4G^2} \right) - \frac{3}{8} \frac{\mu^6 J_4 a_e^2}{L^3 G^7} \left(\frac{3}{8} - \frac{15H^2}{4G^2} + \frac{35H^4}{8G^4} \right) \left[\left(\frac{35}{2G} - \frac{15G}{2L^2} \right) + \left(-\frac{21}{8G} + \frac{135H^2}{4G^3} - \frac{385H^4}{8G^5} \right) \left(-\frac{5}{2} + \frac{3G^2}{2L^2} \right) \right] \quad (3.38)$$

fazendo

$$n_g = \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L^3 G^4} \left(-\frac{3}{4} + \frac{15H^2}{4G^2} \right) - \frac{3}{8} \frac{\mu^6 J_4 a_e^2}{L^3 G^7} \left[\left(\frac{3}{8} - \frac{15H^2}{4G^2} + \frac{35H^4}{8G^4} \right) \left(\frac{35}{2G} - \frac{15G}{2L^2} \right) + \left(-\frac{21}{8G} + \frac{135H^2}{4G^3} - \frac{385H^4}{8G^5} \right) \left(-\frac{5}{2} + \frac{3G^2}{2L^2} \right) \right] \quad (3.39)$$

integrando obtemos:

$g = g_0 + n_g \tau$ em que g_0 é constante de integração.

Cálculo de $\frac{dh}{d\tau} = -\frac{\partial k_0}{\partial H}$:

$$\frac{dh}{d\tau} = -\frac{\partial k_0}{\partial H} = -\frac{3}{2} \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L^3 G^3} \frac{H}{G^2} - \frac{3}{8} \frac{\mu^6 J_4 a_e^2}{L^3 G^7} \left(-\frac{15H}{2G^2} + \frac{35H^3}{2G^4} \right) \left(\frac{3G^2}{2L^2} - \frac{5}{2} \right) \quad (3.40)$$

fazendo

$$n_h = -\frac{3}{2} \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L^3 G^3} \frac{H}{G^2} - \frac{3}{8} \frac{\mu^6 J_4 a_e^2}{L^3 G^7} \left(-\frac{15H}{2G^2} + \frac{35H^3}{2G^4} \right) \left(\frac{3G^2}{2L^2} - \frac{5}{2} \right) \quad (3.41)$$

integrando obtemos:

$h = h_0 + n_h \tau$ em que h_0 é constante de integração.

Aplicando o algoritmo obtemos:

Ordem zero:

$$K_0^* = k_0 \quad (3.42)$$

Para calcular a ordem um substituímos a expressão (3.34) na expressão (3.27) e (3.28) obtendo:

$$K_1^* = 0 \quad (3.43)$$

$$S_1 = \int \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L^6} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3H^2}{4G^2} \right) (3e) \cos l \, d\tau \quad (3.44)$$

em que $l = l_0 + n_l \tau$ então

$$S_1 = \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{n_l L^6} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3H^2}{4G^2} \right) (3e) \sin l \quad (3.45)$$

Para aplicar o algoritmo para ordem dois temos que calcular o parêntesis de Poisson de $\{H_{1p} + K_1^*, S_1\}$ com $K_1^* = 0$ e S_1 dado pela expressão (3.45):

$$\begin{aligned} \{H_{1p}, S_1\} = & -\frac{54\mu^8 J_2^2 a_e^4}{n_l L^{13}} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3H^2}{4G^2} \right)^2 \left(1 - \frac{G^2}{L^2} \right) + \frac{9\mu^8 J_2^2 a_e^4}{2L^{12}} \left(-\frac{1}{4} \right. \\ & \left. \frac{3H^2}{4G^2} \right)^2 \left(1 - \frac{G^2}{L^2} \right) \bar{\alpha} - \frac{9\mu^8 J_2^2 a_e^4}{2L^{12}} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3H^2}{4G^2} \right)^2 \left(1 - \frac{G^2}{L^2} \right) \bar{\alpha} \cos 2l \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\text{em que } \bar{\alpha}^{-1} = \left(\frac{\partial n_l}{\partial L} \right)^{-1}.$$

Para calcular a hamiltoniana de ordem dois substituindo a expressão (3.46) na expressão (3.29). Obtemos:

$$\begin{aligned} K_2^* = & -\frac{54\mu^8 J_2^2 a_e^4}{n_l L^{13}} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3H^2}{4G^2} \right)^2 \left(1 - \frac{G^2}{L^2} \right) + \frac{9\mu^8 J_2^2 a_e^4}{2L^{12}} \left(-\frac{1}{4} \right. \\ & \left. \frac{3H^2}{4G^2} \right)^2 \left(1 - \frac{G^2}{L^2} \right) \bar{\alpha} \end{aligned} \quad (3.47)$$

A função geratriz utilizando a expressão (3.30) fica:

$$S_2 = -\frac{9\mu^8 J_2^2 a_e^4}{8n_l L^{12}} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3H^2}{4G^2} \right)^2 \left(1 - \frac{G^2}{L^2} \right) \bar{\alpha} \sin 2l \quad (3.48)$$

Iremos calcular os elementos orbitais apenas de primeira ordem:

$$L = L_0 + \frac{\partial S_1}{\partial l} \quad (3.49)$$

$$L = L_0 + \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{n_l L^6} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3H^2}{4G^2} \right) (3e) \cos l \quad (3.50)$$

$$G = G_0 + \frac{\partial S_1}{\partial g} \Rightarrow G = G_0 \quad (3.51)$$

$$H = H_0 + \frac{\partial S_1}{\partial h} \Rightarrow H = H_0 \quad (3.52)$$

$$l = l_0 - \frac{\partial S_1}{\partial L} \quad (3.53)$$

$$l = l_0 - 6 \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{n_l L^7} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3H^2}{4G^2} \right) (3e) \sin l + \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L^6} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3H^2}{4G^2} \right) (3e) \alpha \sin l \quad (3.54)$$

lembrando que $l = l_0 + n_l \tau$.

$$g = g_0 - \frac{\partial S_1}{\partial G} \quad (3.55)$$

$$g = g_0 + \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{n_l L^6} \left(-\frac{3H^2}{2G^3} \right) (3e) \sin l \quad (3.56)$$

$$h = h_0 - \frac{\partial S_1}{\partial H} \quad (3.57)$$

$$h = h_0 - 3 \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{n_l L^6} \frac{H}{2G^2} (3e) \sin l \quad (3.58)$$

Iremos comparar aqui apenas o elemento L com Brouwer (1959) sendo que a comparação tem um caráter formal, mostrando que funcionalmente obtêm-se as mesmas expressões, mas as variáveis têm significados diferentes no que diz respeito às perturbações. Para Brouwer (1959) a frequência n_l é dada por $n_l = \frac{\mu^2}{L^3}$ já no nosso caso é dado pela expressão (3.37). O resultado encontrado pelo autor é:

$$L = L_0 + \frac{\mu^2 k_2}{L^3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{H^2}{G^2} \right) \left(\frac{a^3}{r^3} - \frac{L^3}{G^3} \right) \quad (3.59)$$

sendo

$$\frac{a^3}{r^3} = (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} + (3e) \cos l \quad (3.60)$$

e

$$\frac{L^3}{G^3} = (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} \quad (3.61)$$

subtraindo a expressão (3.60) de (3.61) temos $(3e) \cos l$ e substituindo na equação (3.59) obtemos:

$$L = L_0 + \frac{\mu^2 k_2}{L^3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{H^2}{G^2} \right) (3e) \cos l \quad (3.62)$$

sendo

$$k_2 = \frac{J_2 a_e^2}{2} \quad (3.63)$$

portanto

$$L = L_0 + \frac{\mu^2 J_2 a_e^2}{L^3} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{H^2}{G^2} \right) (3e) \cos l \quad (3.64)$$

Comparando a expressão (3.50) com (3.64) os resultados são os mesmos diferindo apenas nas frequências n_l por causa dos termos devido ao J_2 e J_4 .

Verificamos a validade do método para a primeira ordem, vamos agora apenas indicar o algoritmo para a segunda ordem.

$$L_i = L'_i + \frac{\partial S_1}{\partial l_j} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial S_2}{\partial l_j}, S_2 \right\} + O(\epsilon^3) \quad i = 1, 2, 3; j = 4, 5, 6 \quad (3.65)$$

$$l_j = l'_j + \frac{\partial S_1}{\partial L_i} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial S_2}{\partial L_i}, S_2 \right\} + O(\epsilon^3) \quad i = 1, 2, 3; j = 4, 5, 6 \quad (3.66)$$

Na próxima seção apresentamos o método para sistemas não-canônicos.

3.2 MÉTODO DE HORI PARA SISTEMA NÃO-CANÔNICO

Apresentamos o algoritmo do método até segunda ordem e fazemos uma aplicação com um satélite sob influência do campo gravitacional terrestre e o arrasto atmosférico.

Seja o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dz_j}{dt} = Z_j(z), \quad (j = 1, \dots, m) \quad (3.67)$$

agora tomemos a expressão (3.67) e fazemos uma transformação de variáveis $z_j \rightarrow \zeta_j$, em que introduz-se um conjunto de n funções geratrizes $T_j(\zeta)$. O novo sistema de equações do movimento são:

$$\frac{d\zeta_j}{dt} = Z_j^*(z), \quad (j = 1, \dots, m) \quad (3.68)$$

em que as novas equações de movimento (3.68) tenha alguma vantagem para a solução. Para maiores informações a respeito da demonstração do método consultar o artigo de Hori (1971). Na próxima seção apresentamos o algoritmo até a segunda ordem.

3.2.1 O algoritmo de Hori (1971)

Assumindo-se que Z_j, Z_j^* e T_j possam ser expandidos em séries de potências de um pequeno parâmetro de primeira ordem temos:

$$Z_j = Z_j^{(0)} + Z_j^{(1)} + Z_j^{(2)} + Z_j^{(3)} + \dots, \quad (3.69)$$

$$Z_j^* = Z_j^{*(0)} + Z_j^{*(1)} + Z_j^{*(2)} + Z_j^{*(3)} + \dots \quad (j = 1, \dots, m) \quad (3.70)$$

$$T_j = T_j^{(1)} + T_j^{(2)} + T_j^{(3)} + \dots, \quad (3.71)$$

em que, $T_j^{(0)}$ não aparece na expressão (3.71) porque T_j é assumido ser da ordem do pequeno parâmetro.

Seja a seguinte expressão dada por (HORI, 1971):

$$Z_j^*(\zeta) = Z_j(\zeta) + [Z, T]_j + \frac{1}{2!} [[Z, T], T]_j + \dots \quad (3.72)$$

em que os colchetes representam o parêntesis de Poisson generalizado definido por Hori (1971).

Considerando a expressão (3.68), em vista das equações (3.69), (3.70), (3.71), (3.72) e igualando os termos com igual potência de um pequeno parâmetro obtemos:

Ordem zero:

$$Z_j^{(0)} = Z_j^{*(0)} \quad (3.73)$$

Ordem um:

$$[Z_j^{(0)}, T_j^{(1)}] + Z_j^{(1)} = Z_j^{*(1)} \quad (3.74)$$

Ordem dois:

$$[Z_j^{(0)}, T_j^{(2)}] + \frac{1}{2}[Z_j^{(1)} + Z_j^{*(1)}, T_j^{(1)}] + Z_j^{(2)} = Z_j^{*(2)} \quad (3.75)$$

sendo que Hori (1971) apresenta o algoritmo até a quarta ordem.

As m equações em cada ordem contém $2m$ equações não conhecidas, $T_j^{(n)}$ e $Z_j^{*(n)}$ ($j=1, \dots, m$), tal que um princípio deve ser introduzido para determinar as $2m$ equações desconhecidas a partir das m equações conhecidas.

Introduzindo-se o parâmetro τ , através do sistema auxiliar de Hori dado pelas expressões (3.13) e (3.14) temos:

$$\frac{d\zeta_j}{d\tau} = Z_j^{*(0)}(\zeta), \quad (j=1, \dots, m) \quad (3.76)$$

se a solução for conhecida temos:

$$\zeta_j = \zeta_j(\tau + c_1, c_2, \dots, c_m), \quad (j=1, \dots, m) \quad (3.77)$$

em que c_j são m constantes de integração em relação à τ .

No entanto, podemos reescrever o algoritmo da seguinte maneira (HORI, 1971; FITZGIBBON, 1982; SESSIN, 1983b). Tal forma é também conhecida como teoria de integração de Sessin.

Ordem zero:

$$Z_j^0 = Z_j^{*(0)} \quad (3.78)$$

Ordem um:

$$-\frac{dT_j^{(1)}}{d\tau} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial Z_j^{(0)}}{\partial \zeta_k}(\tau) T_k^{(1)} + Z_j^{(1)} = Z_j^{*(1)}, \quad (j=1, \dots, m) \quad (3.79)$$

Ordem dois:

$$-\frac{dT_j^{(2)}}{d\tau} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial Z_j^{(0)}}{\partial \zeta_k}(\tau) T_k^{(2)} + \frac{1}{2} [Z^{(1)} + Z^{*(1)}, T^{(1)}]_j + Z_j^{(2)} = Z_j^{*(2)} \quad (j=1, \dots, m) \quad (3.80)$$

e assim sucessivamente.

De forma geral, para uma ordem n temos:

$$-\frac{dT_j^{(n)}}{d\tau} + \sum_{k=1}^m \frac{\partial Z_j^{(0)}}{\partial \zeta_k}(\tau) T_k^{(n)} + \phi_j^{(n)}(\tau) = Z_j^{*(n)}, \quad (j=1, \dots, m) \text{ ou}$$

$$\frac{dT_j^{(n)}}{d\tau} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial Z_j^{(0)}}{\partial \zeta_k}(\tau) T_k^{(n)} = \phi_j^{(n)}(\tau) - Z_j^{*(n)}, \quad (j=1, \dots, m) \quad (3.81)$$

com $2m$ incógnitas que são $T_j^{(n)}$ e $Z_j^{*(n)}$. Os $\phi_j^{(n)}$ e $\frac{\partial Z_j^{(0)}}{\partial \zeta_k}(\tau)$ são funções conhecidas de τ .

Este sistema de equações diferenciais deve ser resolvido determinando-se Z_j^* de tal forma que $T_j^{(n)}$ não possua termos seculares ou seculares mistos em τ , como é usual em teoria de perturbação, para que a teoria seja formalmente válida para um intervalo de tempo ilimitado.

Para resolver a equação (3.81) aplicamos uma condição de tratabilidade (HORI, 1971). Com isso obtemos:

$$Z_j^{*(n)} = \left\langle \phi_j^n + \sum_{k=1}^m \frac{\partial Z_j^{(0)}(\tau) T_k^n}{\partial \zeta_k} \right\rangle \quad (3.82)$$

$$\frac{dT_j^{(n)}}{d\tau} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial Z_j^{(0)}(\tau)}{\partial \zeta_k} T_k^{(n)} + \phi_j^{*(n)} - Z_j^{*(n)} \quad (j=1, \dots, m) \quad (3.83)$$

em que a expressão (3.82) só contém termos seculares e (3.83) contém os termos periódicos. Observemos uma vez que a expressão (3.82) não é geral, um algoritmo proposto por Sessin (1983b) e mais tarde tratado por Fernandes e Sessin (1989)

desenvolve um método geral para resolução da expressão (3.81). No entanto, no nosso caso é possível resolver o sistema utilizando a condição de tratabilidade proposta por Hori (1971).

3.2.2 Aplicação do método de Hori para sistema não-canônico

Para aplicação do método proposto consideramos o movimento de um satélite artificial perturbado pelo geopotencial e arrasto atmosférico, dado pelas variáveis de Delaunay:

$$\begin{aligned}\frac{dL_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial l_i} + P_i = Z_j(L_j, l_j), \\ &\hspace{15em} (j=1,2,3) \quad (3.84) \\ \frac{dl_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial L_i} - Q_i = Z_{j+3}(L_j, l_j)\end{aligned}$$

em que L_j e l_j são as variáveis de Delaunay já definidas, H é a hamiltoniana.

Iremos representar a hamiltoniana da seguinte maneira:

$$H = H_0 + H_{1p} \quad (3.85)$$

em que todos os termos seculares adotados estarão contidos em H_0 , sendo (FITZGIBBON, 1982):

$$H_0 = \frac{\mu^2}{2L^2} + \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L^3 G^3} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3H^2}{4G^2} \right) + \frac{3\mu^6 J_4 a_e^4}{8 L^3 G^7} \left(\frac{3}{8} - \frac{15H^2}{4G^2} + \frac{35H^4}{8G^4} \right) \left(\frac{3G^2}{2L^2} - \frac{5}{2} \right) \quad (3.86)$$

e

$$H_{1p} = \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L^6} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3H^2}{4G^2} \right) \left(3e + \frac{27}{8} e^3 \right) \cos l \quad (3.87)$$

e as componentes de arrastos P_i e Q_i são (BROUWER; HORI, 1961):

$$P_1 = -AV \exp(-\alpha r) L \left(\frac{2a}{r} - 1 \right) \quad (3.88)$$

$$P_2 = -AV \exp(-\alpha r) G \quad (3.89)$$

$$P_3 = -AV \exp(-\alpha r) H \quad (3.90)$$

$$Q_1 = -AV \exp(\alpha r) \left(2e \sin E + \frac{2L}{eG} \sin f \right) \quad (3.91)$$

$$Q_2 = AV \exp(-\alpha r) \left(\frac{2}{e} \sin f \right) \quad (3.92)$$

$$Q_3 = 0 \quad (3.93)$$

Consideremos:

$$Z_j = Z_j^{(0)} + Z_j^{(1)} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.94)$$

$$Z_{j+3} = Z_{j+3}^{(0)} + Z_{j+3}^{(1)}$$

em que $Z_j^{(0)}$ e $Z_{j+3}^{(0)}$ contém todos os termos seculares adotado do geopotencial, $Z_j^{(1)}$ e $Z_{j+3}^{(1)}$ contém termos periódicos devido ao geopotencial e termos devido ao arrasto atmosférico.

Para o sistema auxiliar de Hori temos:

$$\frac{dL_j}{d\tau} = \frac{\partial H_0}{\partial(l, g, h)} = Z_j^{(0)} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.95)$$

$$\frac{dl_j}{d\tau} = -\frac{\partial H_0}{\partial(L, G, H)} = Z_{j+3}^{(0)}$$

em que L , G e H são constantes enquanto l , g e h são funções lineares em τ . Assim:

$$Z_1^{(0)} = 0 \quad (3.96)$$

$$Z_2^{(0)} = 0 \quad (3.97)$$

$$Z_3^{(0)} = 0 \quad (3.98)$$

$$Z_4^{(0)} = \frac{\mu^2}{L^3} + 3 \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L^4 G^3} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3H^2}{4G^2} \right) - \frac{3}{8} \frac{\mu^6 J_4 a_e^2}{L^4 G^3} \left(\frac{3}{8} - \frac{15H^2}{4G^2} + \frac{35H^4}{8G^4} \right) \left(-\frac{15G^2}{2L^2} + \frac{15}{2} \right) \quad (3.99)$$

fazendo

$$n_l = \frac{\mu^2}{L^3} + 3 \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L^4 G^3} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3H^2}{4G^2} \right) - \frac{3}{8} \frac{\mu^6 J_4 a_e^2}{L^4 G^3} \left(\frac{3}{8} - \frac{15H^2}{4G^2} + \frac{35H^4}{8G^4} \right) \left(-\frac{15G^2}{2L^2} + \frac{15}{2} \right) \quad (3.100)$$

$$Z_5^{(0)} = \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L^3 G^4} \left(-\frac{3}{4} + \frac{15H^2}{4G^2} \right) - \frac{3}{8} \frac{\mu^6 J_4 a_e^2}{L^3 G^7} \left(\frac{3}{8} - \frac{15H^2}{4G^2} + \frac{35H^4}{8G^4} \right) \left(\frac{35}{2G} - \frac{15G}{2L^2} \right) - \frac{3}{8} \frac{\mu^6 J_4 a_e^2}{L^3 G^7} \left(-\frac{21}{8G} + \frac{135H^2}{4G^3} - \frac{385H^4}{8G^5} \right) \left(-\frac{5}{2} + \frac{3G^2}{2L^2} \right) \quad (3.101)$$

fazendo

$$n_g = \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L^3 G^4} \left(-\frac{3}{4} + \frac{15H^2}{4G^2} \right) - \frac{3}{8} \frac{\mu^6 J_4 a_e^2}{L^3 G^7} \left[\left(\frac{3}{8} - \frac{15H^2}{4G^2} + \frac{35H^4}{8G^4} \right) \left(\frac{35}{2G} - \frac{15G}{2L^2} \right) + \left(-\frac{21}{8G} + \frac{135H^2}{4G^3} - \frac{385H^4}{8G^5} \right) \left(-\frac{5}{2} + \frac{3G^2}{2L^2} \right) \right] \quad (3.102)$$

$$Z_6^{(0)} = -\frac{3}{2} \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L^3 G^3} \frac{H}{G^2} - \frac{3}{8} \frac{\mu^6 J_4 a_e^2}{L^3 G^7} \left(-\frac{15H}{2G^2} + \frac{35H^3}{2G^4} \right) \left(\frac{3G^2}{2L^2} - \frac{5}{2} \right) \quad (3.103)$$

fazendo

$$n_h = -\frac{3}{2} \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L^3 G^3} \frac{H}{G^2} - \frac{3}{8} \frac{\mu^6 J_4 a_e^2}{L^3 G^7} \left(-\frac{15H}{2G^2} + \frac{35H^3}{2G^4} \right) \left(\frac{3G^2}{2L^2} - \frac{5}{2} \right) \quad (3.104)$$

com isso obtemos:

$$l = l_0 + n_l \tau \quad (3.105)$$

$$g = g_0 + n_g \tau \quad (3.106)$$

$$h = h_0 + n_h \tau \quad (3.107)$$

em que l_0, g_0 e h_0 são constantes de integração.

Seja a transformação: $L_j, l_j \rightarrow L'_j, l'_j$ por meio de 6 funções geratrizes $T_k(l'_j, L'_j)$ ($k=1, \dots, 6; j=1, 2, 3$), em que:

$$L_1 = L, L_2 = G, L_3 = H, l_1 = l, l_2 = g, l_3 = h$$

$$T_k(l'_j, L'_j) = T_k^{(1)} + T_k^{(2)} + T_k^{(3)} + \dots \quad (3.108)$$

As novas equações do movimento são:

$$\frac{dL'_j}{dt} = Z_j^* \quad (j=1, 2, 3) \quad (3.109)$$

$$\frac{dl'_j}{dt} = Z_{j+3}^*,$$

com as novas funções sendo:

$$Z_j^*(L'_j, l'_j) = Z_j^{*(0)} + Z_j^{*(1)} + Z_j^{*(2)} + \dots \quad (3.110)$$

$$Z_{j+3}^*(L'_j, l'_j) = Z_{j+3}^{*(0)} + Z_{j+3}^{*(1)} + Z_{j+3}^{*(2)} + \dots,$$

Aplicando o algoritmo do método temos:

$$\frac{dT_j^{(1)}}{d\tau} - \sum_{k=1}^6 \frac{\partial Z_j^{(0)}}{\partial \zeta_k}(\tau) T_k^{(1)} = Z_j^{(1)} - Z_j^{*(1)}, \quad (j=1, \dots, 6) \quad (3.111)$$

ζ_k representa o conjunto das novas variáveis (L', G', H', l', g', h') .

Temos que calcular:

Parte secular:

$$Z_j^{*(1)} = \langle Z_j^{(1)} \rangle_\tau \quad j=1, 2, 3 \quad (3.112)$$

e

$$Z_j^{*(1)} = \left\langle Z_j^{(1)} + \sum_{k=1}^6 \frac{\partial Z_j^{(0)}}{\partial \zeta_k}(\tau) T_k^{(1)} \right\rangle_\tau \quad j=4, 5, 6 \quad (3.113)$$

Parte periódica:

$$T_j^{(1)} = \int (Z_j^{(1)} - Z_j^{*(1)}) d\tau \quad j=1, 2, 3 \quad (3.114)$$

e

$$T_j^{(1)} = \int (Z_j^{(1)} + \sum_{k=1}^6 \frac{\partial Z_j^{(0)}}{\partial \zeta_k}(\tau) T_k^{(1)} - Z_j^{*(1)}) d\tau \quad (j=4, 5, 6) \quad (3.115)$$

Para fazermos esses cálculos consideramos os P_i e Q_i desenvolvidos por Brouwer e Hori (1961) até a 4ª ordem na excentricidade.

Calculando $Z_j^{*(1)} = \langle Z_j^{(1)} \rangle_\tau$ temos

$$Z_1^{*(1)} = Z_1^{(1)} = \frac{\partial H_{1s}}{\partial l} + P_{1s} \quad \text{então}$$

$$Z_1^{*(1)} = P_{1s}$$

pois H_1 é puramente periódica.

$$Z_1^{*(1)} = -A\mu \exp(-\alpha a) \left\{ 1 + \left(\frac{3}{4} + \alpha a + \frac{1}{4} \alpha^2 a^2 \right) e^2 + \left(\frac{21}{64} + \frac{3}{8} \alpha a + \frac{9}{32} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{8} \alpha^3 a^3 + \frac{1}{64} \alpha^4 a^4 \right) e^4 \right\} \quad (3.116)$$

$$\begin{aligned} Z_2^{*(1)} &= Z_2^{(1)} = \frac{\partial H_{1s}}{\partial g} + P_{2s} \\ Z_2^{*(1)} &= P_{2s} \\ Z_2^{*(1)} &= -A\mu \exp(-\alpha a) \frac{G}{L} \left\{ 1 + \left(\frac{3}{4} + \alpha a + \frac{1}{4} \alpha^2 a^2 \right) e^2 + \left(\frac{21}{64} + \frac{3}{8} \alpha a + \frac{9}{32} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{8} \alpha^3 a^3 + \frac{1}{64} \alpha^4 a^4 \right) e^4 \right\} \end{aligned} \quad (3.117)$$

$$\begin{aligned} Z_3^{*(1)} &= Z_3^{(1)} = \frac{\partial H_{1s}}{\partial h} + P_{3s} \\ Z_3^{*(1)} &= P_{3s} \\ Z_3^{*(1)} &= -A\mu \exp(-\alpha a) \frac{H}{L} \left\{ 1 + \left(\frac{3}{4} + \alpha a + \frac{1}{4} \alpha^2 a^2 \right) e^2 + \left(\frac{21}{64} + \frac{3}{8} \alpha a + \frac{9}{32} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{8} \alpha^3 a^3 + \frac{1}{64} \alpha^4 a^4 \right) e^4 \right\} \end{aligned} \quad (3.118)$$

Calculando $T_j^{(1)} = \int (Z_j^{(1)} - Z_j^{*(1)}) d\tau$ $j = 1, 2, 3$ temos:

$$T_1^{(1)} = \int (Z_1^{(1)} - Z_1^{*(1)}) d\tau$$

$$T_1^{(1)} = \int \left(\frac{\partial H_{1p}}{\partial l} + P_1 - P_{1s} \right) d\tau$$

$$\begin{aligned} T_1^{(1)} &= \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{n_l L^6} \left(-\frac{1}{4} + \frac{3H^2}{4G^2} \right) \left(3e + \frac{27e^3}{8} \right) \cos l - \frac{\mu A e^{-\alpha a}}{n_l} \left[-(3 + \alpha a)e + \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2} \alpha a + \frac{7}{8} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{8} \alpha^3 a^3 \right) e^3 \right] \sin l \end{aligned} \quad (3.119)$$

$$T_2^{(1)} = \int (Z_2^{(1)} - Z_2^{*(1)}) d\tau$$

$$T_2^{(1)} = -\frac{\mu A e^{-\alpha a}}{n_l} \frac{G}{L} \left[(1 + \alpha a) e + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \alpha a + \frac{1}{8} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{8} \alpha^3 a^3 \right) e^3 \right] \text{senl} \quad (3.120)$$

$$T_3^{(1)} = \int \left(\frac{\partial H_{1p}}{\partial h} + P_1 - P_{1s} \right) d\tau$$

$$T_3^{(1)} = -\frac{\mu A e^{-\alpha a}}{n_l} \frac{H}{L} \left[(1 + \alpha a) e + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \alpha a + \frac{1}{8} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{8} \alpha^3 a^3 \right) e^3 \right] \text{senl} \quad (3.121)$$

$$\text{Calculando } Z_j^{*(1)} = \left\langle Z_j^{(1)} + \sum_{k=1}^6 \frac{\partial Z_j^{(0)}}{\partial \zeta_k}(\tau) T_k^{(1)} \right\rangle_{\tau} \quad (j=4,5,6) \text{ temos:}$$

$$Z_4^{*(1)} = 0 \quad (3.122)$$

$$Z_5^{*(1)} = 0 \quad (3.123)$$

$$Z_6^{*(1)} = 0 \quad (3.124)$$

Para calcular $T_4^{(1)}, T_5^{(1)}$ e $T_6^{(1)}$ utiliza-se:

$$T_j^{(1)} = \int \left(Z_j^{(1)} + \sum_{k=1}^6 \frac{\partial Z_j^{(0)}}{\partial \zeta_k}(\tau) T_k^{(1)} - Z_j^{*(1)} \right) d\tau \quad (j=4,5,6)$$

em que os resultados estão no apêndice F.

Calculadas as novas funções bem como as funções geratrizes representadas por T , obtemos resultados que, comparados com a Tese de mestrado de Fitzgibbon (1982) o trabalho de Brouwer e Hori (1961) encontramos os mesmos resultados. O trabalho de Brouwer precisa de duas transformações para eliminar os termos periódicos, enquanto que com apenas uma transformação utilizando o método de Hori (1971) eliminamos tais termos simplificando nosso sistema de equação.

Na continuidade do trabalho além de considerarmos os termos seculares na parte da hamiltoniana H_0 iremos considerar novos valores para P_i e Q_i que são as componentes de arrasto dados por (VILHENA DE MORAES, 1989):

$$P_i = -\frac{1}{2} \frac{SC_D}{m} \rho_d \sum_{j'} p_{j'}^i(L_1, L_2, L_3) \cos(\alpha_{j'} l_1 + \beta_{j'} l_2 + \gamma_{j'} l_3) \quad (3.125)$$

$$Q_i = -\frac{1}{2} \frac{SC_D}{m} \rho_d \sum_{j'} q_{j'}^i(L_1, L_2, L_3) \sin(\alpha_{j'} l_1 + \beta_{j'} l_2 + \gamma_{j'} l_3) \quad (3.126)$$

em que $\alpha_{j'}$, $\beta_{j'}$, e $\gamma_{j'}$ são inteiros, $\frac{SC_D}{2m}$ é o coeficiente balístico (será considerado constante).

CAPÍTULO 4 SOLUÇÃO DO SISTEMA UTILIZANDO O MÉTODO DE HORI

Neste capítulo o método de Hori (1971) é aplicado ao sistema de equações diferenciais no qual a pressão de radiação solar e os novos elementos citados em capítulos anteriores são incluídos. O sistema é resolvido utilizando o software Maple 9.5. Apresentamos aqui somente as soluções dos termos seculares acoplados para as componentes métricas. No capítulo 5 expomos as soluções para as variáveis angulares.

4.1 MÉTODO DE HORI (1971) INCLUINDO A PRESSÃO DE RADIAÇÃO

Consideramos o movimento de um satélite artificial perturbado pelo geopotencial, pressão de radiação solar direta (considerando a sombra da Terra) e o arrasto atmosférico, dados em termos das variáveis de Delaunay por (VILHENA DE MORAES, 1978):

$$\begin{aligned} \frac{dL_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial L_i} + \psi \frac{\partial R}{\partial l_i} + P_i = Z_j(L_j, l_j) \quad (i=1,2,3) \\ \frac{dl_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial l_i} - \psi \frac{\partial R}{\partial L_i} - Q_i = Z_j(L_j, l_j) \quad (j=1,2,3) \end{aligned} \tag{4.1}$$

em que H é a hamiltoniana devido ao geopotencial, R a pressão de radiação solar, ψ a função sombra da Terra (FERRAZ MELLO, 1965), P_i e Q_i são as componentes do arrasto (VILHENA DE MORAES, 1989).

Para resolver a expressão (4.1) pelo método proposto, iremos dividir o problema em duas partes primeiro calculamos os termos de primeira ordem depois os de segunda ordem, com isso temos:

Consideramos a seguinte hamiltoniana $H = H_0 + H_{1p}$, em que H_0 contém os termos seculares e H_{1p} os termos periódicos.

Primeira parte:

$$Z_j^* = Z_j^{*(0)} + Z_j^{*(1)} \quad (j=1,2,3) \quad (4.2)$$

$$Z_{j+3}^* = Z_{j+3}^{*(0)} + Z_{j+3}^{*(1)} \quad (j=1,2,3) \quad (4.3)$$

Aplicando o algoritmo temos:

Ordem zero:

$$Z_j^{*(0)} = Z_j^{(0)} \quad (4.4)$$

$$Z_{j+3}^{*(0)} = Z_{j+3}^{(0)} \quad (j=1,2,3) \quad (4.5)$$

em que

$$Z_j^{(0)} = \frac{\partial H_0}{\partial(l, g, h)} \quad (4.6)$$

$$Z_{j+3}^{(0)} = -\frac{\partial H_0}{\partial(L, G, H)} \quad (j=1,2,3) \quad (4.7)$$

Ordem um:

$$Z_j^{*(1)} = \left\langle Z_j^{(1)} \right\rangle_\tau \quad (4.8)$$

$$Z_{j+3}^{*(1)} = \left\langle Z_{j+3}^{(1)} + \sum_k \frac{\partial Z_{j+3}^{(0)}}{\partial \zeta_k} T_k^{(1)} \right\rangle_\tau \quad (j=1,2,3) \quad (4.9)$$

$\langle \rangle$ representa a parte secular de $Z_j^{*(1)}$, sendo

$$Z_j^{(1)} = \frac{\partial H_{1p}}{\partial l_j} + \psi \frac{\partial R}{\partial l_j} + P_j \quad (j=1,2,3) \quad (4.10)$$

$$Z_{j+3}^{(1)} = -\frac{\partial H_{1p}}{\partial L_j} - \psi \frac{\partial R}{\partial L_j} - Q_j \quad (j=1,2,3) \quad (4.11)$$

As funções geratrizes são representadas por:

$$T_j^{(1)} = \int (Z_j^{(1)} - Z_j^{*(1)}) d\tau_j \quad (j=1,2,3) \quad (4.12)$$

$$T_{j+3}^{(1)} = \int \left(Z_{j+3}^{(1)} + \sum_k \frac{\partial Z_{j+3}^{(0)}}{\partial \zeta_k} T_k^{(1)} - Z_{j+3}^{*(1)} \right) d\tau \quad (j=1,2,3) \quad (4.13)$$

Segunda parte:

Ordem dois:

$$Z_j^{*(2)} = \left\langle \sum_k \frac{\partial Z_{j+3}^{(0)}}{\partial \zeta_k} T_k^{(2)} + \frac{1}{2} [Z_{j+3}^{(1)} + Z_{j+3}^{*(1)}, T_{j+3}^{(1)}] \right\rangle \quad (j=1, \dots, 6) \quad (4.14)$$

sendo $[\]$ o parêntesis de Poisson generalizado definido por Hori (1971) em que este pode ser representado por (DA SILVA FERNANDES, 2003):

$$[Z, T]_j = \sum_{k=1}^n \left[T_k \frac{\partial Z_j}{\partial \zeta_k} - Z_k \frac{\partial T_j}{\partial \zeta_k} \right] \quad (4.15)$$

A função geratriz é representada por:

$$T_j^{(2)} = \int \frac{\partial Z_j^{(0)}}{\partial \zeta_k} (\tau) T_k^{(2)} + \frac{1}{2} [Z_j^{(1)} + Z_j^{*(1)}, T_j^{(1)}] - Z_j^{*(2)} d\tau \quad (j=1, \dots, 6) \quad (4.16)$$

A solução final é posta na forma (Hori, 1971):

$$z_j = \zeta_j + \sum_{n=1} \frac{1}{n!} \overline{D}_T^n \zeta_j \quad (4.17)$$

que pode ser expressa por:

$$z_j = \zeta_j + T_j^{(1)} + T_j^{(2)} + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^6 T_k^{(1)} \frac{\partial T_j^{(1)}}{\partial \zeta_k} \right), \quad (j=1, \dots, 6) \quad (4.18)$$

em que

$$\frac{d\zeta_j}{dt} = Z_j^*(\zeta) \quad (j=1, \dots, 6) \quad (4.19)$$

4.2 DEFINIÇÃO DOS NOVOS ELEMENTOS QUE SERÃO CONSIDERADOS NO SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

4.2.1 Definição da hamiltoniana

Apresentamos os termos da forma que são considerados no programa Maple. Inicialmente consideramos o geopotencial (WNUK, 1990a) de forma arbitrária para os harmônicos esféricos e na aplicação do capítulo 6 consideramos apenas o J_2 .

Segundo Breiter (1997) o termo H_0 fica:

$$H_0 = \frac{\mu^2}{2L^2} + C^{0,0} \quad (4.20)$$

em que

$$C^{0,0} = \gamma_{00} \frac{\mu^2}{L^2} C_0^{0,0}$$

sendo:

$$C_0^{0,0} = \sum_{j=j_1}^N \left(\frac{\mu}{L^2} \right)^j \bar{A}_{jm}^k(i) G_{j,(j-k)/2,q}(e) \quad (4.21)$$

para simplificar nosso desenvolvimento na aplicação do método fazemos:

$$C = C^{0,0} = \gamma_{00} \frac{\mu^2}{L^2} C_0^{0,0} \quad (4.22)$$

observamos que C contém apenas termos zonais seculares.

A parte contendo os harmônicos zonais periódicos e os tesserais ficam (WNUK, 1988, 1990a):

$$H_{1p} = \frac{\mu^2}{L^2} \sum_{m=0}^N \sum_{k=-N}^N \sum_{q=-Q}^Q (\gamma_{km} \bar{C}_m^{kq} \cos \Psi + \bar{S}_m^{kq} \sin \Psi) \quad (4.23)$$

$$\Psi = kg + (k+q)l + m(h-\theta) + (k-m)\pi/2,$$

em que

$$\bar{C}_m^{kq} = \sum_{j=j_1}^N \bar{Q}_{jm}^{kq} \bar{C}_{jm} \quad \text{sendo } \bar{C}_{jm} \text{ os harmônicos esféricos normalizados (WNUK, 1990a).}$$

Separando a parte dos termos periódicos em zonais e tesserais temos:

Para os harmônicos zonais temos:

$$H_1 = \frac{\mu^4}{L^6} \bar{C}_{2,0} \sum_{k=1}^N \sum_{q=-Q}^Q \gamma_{k0} \bar{A}_{20}^k G_{2,(2-k)/2,q} \cos(kg + (k+q)l + k\frac{\pi}{2}) \quad (4.24)$$

para nossa simplificação fazemos:

$$E = \frac{\mu^4}{L^6} \bar{C}_{2,0} \sum_{k=1}^N \sum_{q=-Q}^Q \gamma_{k0} \bar{A}_{20}^k G_{2,(2-k)/2,q} \quad (4.25)$$

então

$$H_1 = E \cos(kg + (k + q)l + k \frac{\pi}{2})$$

em que $m=0$, $k \neq q \neq 0$.

Para os harmônicos tesserais temos:

$$H_2 = \frac{\mu^2}{L^2} \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^N \sum_{q=-Q}^Q \gamma_{km} \bar{C}_m^{kq} \cos \Psi \quad (4.26)$$

fazendo

$$F_1 = \frac{\mu^2}{L^2} \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^N \sum_{q=-Q}^Q \gamma_{km} \bar{C}_m^{kq} \quad (4.27)$$

obtemos:

$$H_2 = F_1 \cos \Psi$$

e

$$H_3 = \frac{\mu^2}{L^2} \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^N \sum_{q=-Q}^Q \gamma_{km} \bar{S}_m^{kq} \sin \Psi \quad (4.28)$$

fazendo

$$F_2 = \frac{\mu^2}{L^2} \sum_{m=1}^N \sum_{k=0}^N \sum_{q=-Q}^Q \gamma_{km} \bar{S}_m^{kq} \quad (4.29)$$

obtemos:

$$H_3 = F_2 \sin \Psi$$

em que $\bar{S}_m^{kq} = \sum_{j=j_1} \bar{Q}_{jm}^{kq} \bar{S}_{jm}$ e $\bar{S}_{jm}$ são os harmônicos esféricos normalizados (WNUK, 1990a).

Portanto, a hamiltoniana fica:

$$H = \frac{\mu^2}{2L^2} + \sum C + \sum E \cos(kg + (k+q)l + k\frac{\pi}{2}) + \sum (F_1 \cos \Psi + F_2 \sin \Psi) \quad (4.30)$$

4.2.2 Definição da pressão de radiação solar direta

Segundo Ferraz Mello (1965) temos:

$$\psi \frac{\partial R}{\partial l_j} = \sum \rho B_{L_j} \sin(\alpha l + \beta g + \gamma h + \delta \Theta) \quad (4.31)$$

$$\psi \frac{\partial R}{\partial L_j} = -\rho a_{L_j} - \sum \rho b_{L_j} \cos(\alpha l + \beta g + \gamma h + \delta \Theta) \quad (4.32)$$

em que B_L , a_L e b_L são funções de L , G e H , já Θ é a longitude do Sol.

Sendo:

$$R_j = \sum \rho B_{L_j} \sin(\alpha l + \beta g + \gamma h + \delta \Theta) \quad (j=1,2,3) \quad (4.33)$$

$$R_{j+3} = -\rho a_{L_j} - \sum \rho b_{L_j} \cos(\alpha l + \beta g + \gamma h + \delta \Theta) \quad (j=1,2,3) \quad (4.34)$$

temos que α varia de $-(N+2Q+1)$ à $+(N+2Q+1)$ e β, γ, Θ variam de $-(N+1)$ à $+(N+1)$.

4.2.3 Novas componentes do arrasto atmosférico

No capítulo três descrevemos as componentes do arrasto dadas pelas expressões (3.125) e (3.126). Fazendo:

$$A = \frac{1}{2} \frac{SC_D}{m} \quad (4.35)$$

as componentes ficam:

$$P_i = -A\rho_d \sum_j p_j^f(L_1, L_2, L_3) \cos(\alpha_j l_1 + \beta_j l_2 + \gamma_j l_3) \quad (4.36)$$

$$Q_i = -A\rho_d \sum_j q_j^f(L_1, L_2, L_3) \sin(\alpha_j l_1 + \beta_j l_2 + \gamma_j l_3) \quad (4.37)$$

e ρ_d é a densidade atmosférica.

O modelo utilizado para a densidade atmosférica é o TD 88 (SEHNAL, 1988). Usando o Modelo TD 88 e expressando a hora local e a latitude em termos de elementos orbitais e desconsiderando os termos periódicos fazendo $k = 0$ na expressão (2.45) podendo ser representada por:

$$\rho_s = f_x f_0 k_0 \sum_{n=1}^7 G_{n,0} \left\{ K_{n,0} + \sum_{j=1}^3 K_{n,j} A_j \left[\left(1 + \frac{c_j^2}{4} \right) + \frac{c_i}{4} A_{0j} \right] \right\} \quad (4.38)$$

em que G e A_j são funções da inclinação.

As componentes p_j e q_j dadas pelas equações (4.36) e (4.37) são dadas pelas equações (2.53) e a velocidade V é dada pela equação (2.54).

Colocando $1/a$ em evidência na equação (2.54) obtemos:

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \left(\frac{2a}{r} - 1 \right)^{1/2} \quad (4.39)$$

usando a relação $r = a(1 - e \cos E)$ dada por Prado (2001) em que E é a anomalia excêntrica, substituindo na expressão (4.39) e expandindo em série de Taylor obtemos:

$$V = \left(\sqrt{\frac{\mu}{a}} \right) (1 + e \cos E + 0(e^2)) \quad (4.40)$$

sendo que $\cos E$ é dado por (VILHENA DE MORAES, 1978):

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \left(\cos l + \frac{e}{2} \cos 2l + 0(e^2) \right) \quad (4.41)$$

portanto, substituindo a expressão (4.41) na expressão (4.40) eliminando os termos quadrados obtemos:

$$V = \frac{\mu}{L} (1 + e \cos l) \quad (4.42)$$

Para as componentes p_j temos:

$$p_1 = L(1 + 2e \cos l + 0(e^2)) \quad (4.43)$$

$$p_2 = G \quad (4.44)$$

$$p_3 = H \quad (4.45)$$

sendo que a expressão $p_1 = L_1(\frac{2a}{r} - 1)$ é expandido em série de Taylor obtendo a expressão (4.43).

Para as componentes q_j temos:

$$q_1 = 2e \sin E + \frac{2G}{eL} \text{sen} f$$

sendo f a anomalia verdadeira que pode ser representada por (VILHENA DE MORAES, 1978):

$$\text{sen} f = \frac{a}{r} \sqrt{1 - e^2} \sin E \quad (4.46)$$

$\sin E$ é dado por (VILHENA DE MORAES, 1978):

$$\sin E = \left(1 - \frac{e^2}{2} \right) \sin l + \frac{e}{2} \sin 2l + 0(e^3) \quad (4.47)$$

com algumas manipulações algébricas encontramos:

$$q_1 = \left(2e + \frac{G^2}{L^2} \left(\frac{2}{e} - \frac{5e}{4} \right) \right) \text{sen } l + \dots \quad (4.48)$$

Vale salientar que no desenvolvimento da expressão (4.48) utilizamos a seguinte equação para expandir $\text{sen} 2E$ (MORANDO, 1974).

$$\text{sen} kE = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{k}{p} [J_{p-k}(pe) + J_{p+k}(pe)] \text{sen } pl \quad (4.49)$$

em que os J são funções de Bessel, definidas por (MORANDO, 1974):

$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}}{n!(n+k)!} \quad (4.50)$$

e

$$J_{-k}(x) = (-1)^k J_k(x) \quad (4.51)$$

Desenvolvimento de q_2 :

$$q_2 = -\left(\frac{2}{e}\right) \text{sen } f$$

substituindo a expressão (4.46), com algumas manipulações algébricas e expansões em séries de Taylor encontramos:

$$q_2 = \frac{G}{L} \left(-\frac{2}{e} + \frac{5e}{4} \right) \text{sen } l + \dots \quad (4.52)$$

por fim

$$q_3 = 0 \quad (4.53)$$

Substituímos a expressão (4.42) e os p_j e q_j ($j=1,2,3$) nas equações (4.36) e (4.37) que serão utilizados nas equações de movimento na aplicação do método de

Hori. Utilizando também a expressão (4.38) para a densidade e excluindo os termos de ordem dois na excentricidade obtemos:

$$P_1 = -A\mu\rho_s - A\mu\rho_s \cos(\alpha l + \beta g + \gamma h) - \frac{1}{2} A\mu\rho_s p1_{[L,G]} x \cos(\alpha l + \beta g + \gamma h - l) - \frac{1}{2} A\mu\rho_s p1_{[L,G]} \cos(\alpha l + \beta g + \gamma h + l) \quad (4.54)$$

$$P_2 = -A\mu\rho_s \frac{G}{L} - A\mu\rho_s \frac{G}{L} \cos(\alpha l + \beta g + \gamma h) - \frac{1}{2} A\mu\rho_s p2_{[L,G]} x \cos(\alpha l + \beta g + \gamma h - l) - \frac{1}{2} A\mu\rho_s p2_{[L,G]} \cos(\alpha l + \beta g + \gamma h + l) \quad (4.55)$$

$$P_3 = -A\mu\rho_s \frac{H}{L} - A\mu\rho_s \frac{H}{L} \cos(\alpha l + \beta g + \gamma h) - \frac{1}{2} A\mu\rho_s p3_{[L,G,H]} x \cos(\alpha l + \beta g + \gamma h - l) - \frac{1}{2} A\mu\rho_s p3_{[L,G,H]} \cos(\alpha l + \beta g + \gamma h + l) \quad (4.56)$$

e

$$Q_1 = -A\mu\rho_s q1_{[L,G]} \sin(\alpha l + \beta g + \gamma h) - A\mu\rho_s q2_{[L,G]} x \sin(\alpha l + \beta g + \gamma h + l) + A\mu\rho_s q2_{[L,G]} \sin(\alpha l + \beta g + \gamma h - l) \quad (4.57)$$

$$Q_2 = -A\mu\rho_s q3_{[L,G]} \sin(\alpha l + \beta g + \gamma h) + A\mu\rho_s q4_{[L,G]} x \sin(\alpha l + \beta g + \gamma h + l) + A\mu\rho_s q4_{[L,G]} \sin(\alpha l + \beta g + \gamma h - l) \quad (4.58)$$

$$Q_3 = 0 \quad (4.59)$$

Que são as novas componentes do arrasto atmosférico. Os termos $p1_{[L,G]}$, $p2_{[L,G]}$, $p3_{[L,G,H]}$, $q1_{[L,G]}$, $q2_{[L,G]}$, $q3_{[L,G]}$ e $q4_{[L,G]}$ estão todos definidos no apêndice B.

4.3 SOLUÇÃO DOS TERMOS SECULARES ACOPLADOS

Apresentamos as soluções dos termos seculares devido à aplicação do método de Hori para os elementos orbitais de Delaunay L , G e H , sendo que desprezamos os termos de ordem maior ou igual a dois devido à pressão de radiação e ao arrasto.

O modelo conduziu a não-existência de perturbações seculares pura devido à pressão de radiação solar direta nos elementos métricos: semi-eixo maior, excentricidade e inclinação que está de acordo com Ferraz Mello (1972) e Vilhena de Moraes (1978,1981). Encontramos na ordem dois devido a aplicação do método termos seculares de acoplamento entre o (geopotencial com arrasto) e (arrasto com pressão de radiação) nos elementos métricos que estão apresentados nas expressões (4.61), (4.69) e (4.71):

Encontramos para a primeira ordem na variável L a seguinte expressão:

$$Z_1^{(ord1)} = -A\mu\rho_s \quad (4.60)$$

e para a segunda ordem temos:

$$\begin{aligned} Z_1^{ord2} = & \frac{1}{4L N_{L,G,H}^2} \left(A\mu\rho_s \left(-2 \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l,g,h} \right) L N_{L,G,H} \right. \right. \\ & + E_{L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l,g,h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L,G,H} \right) L + 2 q_{L,G} E_{L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h} \right)^2 L N_{L,G,H} \\ & + 2 G \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h} \right) N_{L,G,H} - G E_{L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L,G,H} \right) \\ & - H E_{L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L,G,H} \right) + E_{L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l,g,h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L,G,H} \right) L \\ & + 2 q_{L,G}^3 E_{L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l,g,h} \right) L N_{L,G,H} \\ & \left. - 2 \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l,g,h} \right) L N_{L,G,H} + 2 H \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h} \right) N_{L,G,H} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) G E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \\
& + \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) H E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \\
& - \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) L \\
& - \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right)^2 L \\
& + \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) G E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \\
& - \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right)^2 L \\
& - 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) L \\
& - 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) L \\
& + \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) H E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \Bigg) + \frac{1}{2 N_{L, G, H}} \left(A \mu \rho_s \Sigma \rho b_H \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \right. \\
& \left. + A \mu \rho_s \Sigma \rho b_G \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) + A \mu \rho_s \Sigma \rho b_L \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) + O(\rho^2) N_{L, G, H} \right)
\end{aligned} \tag{4.61}$$

em que

$$\Psi_{l, g, h} = kg + (k + q)l + k \frac{\pi}{2}$$

$$N_{[L, G, H]} \tau = \Psi_{l, g, h}$$

$$E_{L,G,H} = \frac{\mu^4}{L^6} \bar{C}_{2,0} \sum_{k=1}^N \sum_{q=-Q}^Q \gamma_{k0} \bar{A}_{20}^k G_{2,(2-k)/2,q}$$

$$q1_{[L,G]} = \frac{8L^4 - 9G^2 L^2 + 9G^4}{4L^4 \sqrt{L^2 - G^2}}$$

$$q3_{[L,G]} = \frac{G(L^2 - 9G^2)}{4L^3 \sqrt{L^2 - G^2}}$$

$$C_{L,G,H} = \frac{\mu^2}{L^2} \sum_{j=j_1}^N \left(\frac{\mu}{L^2} \right)^j \bar{A}_{jm}^k(i) G_{j,(j-k)/2,q}(e)$$

esses termos também aparecem nas expressões (4.69) e (4.71).

Iremos apresentar a expressão (4.61) separando os termos de acoplamento entre o arrasto com o geopotencial e o arrasto com a pressão de radiação, respectivamente.

$$\begin{aligned} Z_1^{ord2} = & \frac{1}{4 L N_{L, G, H}^2} \left(A \mu \rho_s \left(-2 \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) L N_{L, G, H} \right. \right. \\ & + E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L, G, H} \right) L + 2 q I_{L, G} E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 L N_{L, G, H} \\ & + 2 G \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) N_{L, G, H} - G E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L, G, H} \right) \\ & - H E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L, G, H} \right) + E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L, G, H} \right) L \\ & + 2 q^3_{L, G} E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) L N_{L, G, H} \\ & \left. - 2 \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) L N_{L, G, H} + 2 H \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) N_{L, G, H} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) G E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \\
& + \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) H E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \\
& - \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) L \\
& - \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right)^2 L \\
& + \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) G E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \\
& - \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right)^2 L \\
& - 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) L \\
& - 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) L \\
& + \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) H E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \Bigg)
\end{aligned}$$

sendo que A representa os termos seculares devido o arrasto $C_{L,G,H}$ e $E_{L,G,H}$ denota os termos devido ao geopotencial e $N_{L,G,H}$ são os termos devido aos movimentos médios das variáveis angulares que surgem na expressão de acoplamento devido a aplicação do método de Hori (1971) na resolução do sistema. Para o acoplamento do arrasto com a pressão temos:

$$Z_1^{ord2} = \frac{1}{2 N_{L, G, H}} \left(A \mu \rho_s \Sigma \rho b_H \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) + A \mu \rho_s \Sigma \rho b_G \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \right. \\ \left. + A \mu \rho_s \Sigma \rho b_L \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) + O(\rho^2) N_{L, G, H} \right)$$

sendo que ρ representa os termos seculares devido a pressão de radiação.

Uma observação que deve ser feita é que, quando as perturbações de segunda ordem são incluídas, o semi-eixo maior não tem parte puramente secular devido ao geopotencial (BROUWER; CLEMENCE, 1961). Este resultado é um teorema de Poisson.

Os termos seculares devido ao arrasto atmosférico influenciam na trajetória do satélite. Sendo que esta perturbação é o fator determinante em relação ao tempo de vida útil do veículo espacial. Sendo assim, analisamos a expressão (4.60) e (4.61) com relação ao termo secular devido ao arrasto e o acoplamento do arrasto com o geopotencial. No capítulo 6 apresentamos algumas aplicações envolvendo essas equações.

Quando substituímos a expressão (4.35) e (4.38) em (4.60) obtemos:

$$Z_1^{(ord1)} = -\frac{SC_D}{2m} \mu f_x f_0 k_0 \sum_{n=1}^7 G_{n,0} \left\{ K_{n,0} + \sum_{j=1}^3 K_{n,j} A_j \left[\left(1 + \frac{c_j^2}{4} \right) + \frac{c_i}{4} A_{0j} \right] \right\} \quad (4.62)$$

sabemos que

$$\mu = n^2 a^3 \quad (4.63)$$

em que n é o movimento médio e a o semi-eixo maior. A expressão (4.63) pode ser encontrada em Prado (2001). Também podemos obter as seguintes expressões (BROUWER; CLEMENCE, 1961):

$$\frac{\delta a}{a} = \frac{2\delta L}{L} \quad (4.64)$$

$$\delta e = \left(\frac{\delta L}{L} - \frac{\delta G}{G} \right) \frac{1-e^2}{e} \quad (4.65)$$

$$\delta \gamma = \left(\frac{\delta G}{G} - \frac{\delta H}{H} \right) \frac{1-2\gamma^2}{4\gamma} \quad (4.66)$$

sendo $\gamma^2 = \sin^2 \frac{1}{2} i$, em que relacionam as variáveis de Delaunay e os elementos keplerianos. Lembrando que $\frac{dL}{dt} = Z_1^{(ord1)}$, integrando no tempo obtemos a variação de L , com a expressão (4.64) encontramos a variação em função do semi-eixo maior. Substituímos a expressão (4.63) em (4.62), o resultado é substituído em (4.64) daí obtemos:

$$\delta a = -\frac{SC_D}{m} a^2 n f_x f_0 k_0 \sum_{n=1}^7 G_{n,0} \left\{ K_{n,0} + \sum_{j=1}^3 K_{n,j} A_j \left[\left(1 + \frac{c_j^2}{4} \right) + \frac{c_j}{4} A_{0j} \right] \right\} \quad (4.67)$$

que corresponde ao resultado encontrado por Segal (1988) e Vilhena de Moraes (1989) para uma revolução.

Para obtermos a variação do perigeu podemos utilizar uma expressão dada por (VILHENA DE MORAES, 1978):

$$\delta r_p = (1-e)\delta a - a\delta e$$

Para a variável G temos:

em primeira ordem:

$$Z_2^{(ord1)} = -A\mu\rho_s \frac{G}{L} \quad (4.68)$$

em segunda ordem:

$$\begin{aligned}
Z_2^{ord2} = & \frac{1}{4L^5 N_{L,G,H}^2} \left(-A \mu \rho_s H E_{L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l,g,h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L,G,H} \right) L^4 \right. \\
& - A \mu \rho_s G E_{L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l,g,h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L,G,H} \right) L^4 \\
& - 2 A \mu \rho_s \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L,G,H} \right) G \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h} \right) L^4 N_{L,G,H} \\
& + 2 A \mu \rho_s q^3_{L,G} E_{L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l,g,h} \right)^2 L^5 N_{L,G,H} \\
& + 2 A \mu \rho_s \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l,g,h} \right) L^5 N_{L,G,H} \\
& - 2 A \mu \rho_s \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L,G,H} \right) G \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l,g,h} \right) L^4 N_{L,G,H} \\
& + 2 A \mu \rho_s E_{L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h} \right) G L^3 N_{L,G,H} \\
& + A \mu \rho_s E_{L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l,g,h} \right) G \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L,G,H} \right) L^4 + 2 O(A^2) L^5 N_{L,G,H}^2 \\
& - A \mu \rho_s E_{L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l,g,h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{L,G,H} \right) L^5 \\
& + 2 A \mu \rho_s H \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l,g,h} \right) L^4 N_{L,G,H} \\
& + 3 A \mu^3 \rho_s E_{L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l,g,h} \right) L - 3 A \mu^3 \rho_s E_{L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h} \right)^2 G \\
& - 2 A \mu \rho_s E_{L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l,g,h} \right) L^4 N_{L,G,H} \\
& + 2 A \mu \rho_s q l_{L,G} E_{L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l,g,h} \right) L^5 N_{L,G,H} \\
& - A \mu \rho_s \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L,G,H} \right) E_{L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h} \right)^2 G L^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 A \mu \rho_s \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) G \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& -2 A \mu \rho_s \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) G \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& -A \mu \rho_s \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right)^2 G L^4 \\
& +A \mu \rho_s \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) H E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right)^2 L^4 \\
& +A \mu \rho_s \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right)^2 L^5 \\
& +A \mu \rho_s \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) L^5 \\
& +A \mu \rho_s \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) H E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& -A \mu \rho_s \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) G \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \right) + \frac{1}{2 L N_{L, G, H}} \left(A \mu \right. \\
& \rho_s \Sigma G \rho b_L \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) + A \mu \rho_s \Sigma G \rho b_H \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) + A \mu \rho_s \Sigma G \rho b_G \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \\
& \left. + O(\rho^2) N_{L, G, H} L \right)
\end{aligned}
\tag{4.69}$$

sendo que as expressões (4.68) e (4.69) nos dão a variação da excentricidade quando se utiliza a expressão (4.65).

Para a variável H temos:

em primeira ordem:

$$Z_3^{(ord1)} = -A \mu \rho_s \frac{H}{L} \tag{4.70}$$

em segunda ordem obtemos:

$$\begin{aligned}
Z_3^{ord2} = & \frac{1}{4 L^5 N_{L, G, H}^2} \left(2 O(A^2) L^5 N_{L, G, H}^2 + 3 A \mu^3 \rho_s E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) L \right. \\
& - 3 A \mu^3 \rho_s E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 H + 2 A \mu \rho_s E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) H L^3 N_{L, G, H} \\
& + 2 A \mu \rho_s G \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 N_{L, G, H} \\
& + A \mu \rho_s E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) H \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L, G, H} \right) L^4 \\
& + 2 A \mu \rho_s q l_{L, G} E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) L^5 N_{L, G, H} \\
& - A \mu \rho_s H E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L, G, H} \right) L^4 \\
& - A \mu \rho_s G E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L, G, H} \right) L^4 \\
& - 2 A \mu \rho_s \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) H \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 N_{L, G, H} \\
& + 2 A \mu \rho_s q^3 L_{L, G} E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) L^5 N_{L, G, H} \\
& + 2 A \mu \rho_s \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) L^5 N_{L, G, H} \\
& - 2 A \mu \rho_s E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 N_{L, G, H} \\
& - 2 A \mu \rho_s \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L, G, H} \right) H \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 N_{L, G, H} \\
& - A \mu \rho_s E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{L, G, H} \right) L^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - A \mu \rho_s \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) H \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& - A \mu \rho_s \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right)^2 H L^4 \\
& - 2 A \mu \rho_s \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) H \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& - A \mu \rho_s \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 H L^4 \\
& + A \mu \rho_s \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) G E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& - A \mu \rho_s \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right)^2 H L^4 \\
& - A \mu \rho_s \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) H \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& + A \mu \rho_s \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) L^5 \\
& + A \mu \rho_s \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) G E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& + A \mu \rho_s \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) L^5 \Bigg] + \frac{1}{2 L N_{L, G, H}} \left(A \mu \rho_s \Sigma \right. \\
& H \rho b_H \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) + A \mu \rho_s \Sigma H \rho b_G \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) + A \mu \rho_s \Sigma H \rho b_L \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \\
& \left. + O(\rho^2) N_{L, G, H} L \right)
\end{aligned}
\tag{4.71}$$

podemos encontrar a variação da inclinação da órbita em função do parâmetro i pela expressão (4.66).

Quando substituirmos as expressões (4.60), (4.61), (4.68), (4.69), (4.70) e (4.71) na expressão (4.19) integrando em relação ao tempo e substituindo na expressão (4.18) obtemos a solução geral do problema, observamos que a teoria de perturbação utilizada não aparece termos mistos de Poisson como aparecem no trabalho de Brouwer e Hori (1961). O método de Hori (1971) torna-se então eficaz em relação ao trabalho citado.

Vale salientar que todas as variáveis métricas possuem na solução do sistema termos seculares acoplados (arrasto com o geopotencial e arrasto com a pressão de radiação) que são de suma importância para alguns tipos de satélites como é o caso do satélite CBERS, cuja altitude está na faixa dos 700 a 800 km, e segundo Vilhena de Moraes (1978) nessa altitude as duas forças possuem a mesma magnitude podendo alterar a órbita do satélite consideravelmente.

No próximo capítulo apresentamos as soluções para as variáveis angulares seculares.

CAPÍTULO 5 SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MÉTODO DE HORI

Neste capítulo expomos as equações do movimento encontradas na aplicação do método de Hori para os termos seculares das variáveis angulares. Primeiramente fazemos uma análise em relação aos termos de ordem zero do sistema auxiliar de Hori depois apresentamos as soluções seculares das variáveis angulares. Por fim apresentamos a solução geral do problema.

5.1 ANÁLISE DAS EQUAÇÕES DO SISTEMA AUXILIAR DE HORI

O sistema auxiliar de Hori fornece as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 Z_1^{(0)} &= 0 \\
 Z_2^{(0)} &= 0 \\
 Z_3^{(0)} &= 0 \\
 Z_4^{(0)} &= \frac{\mu^2}{L^3} - \frac{\partial C^{0,0}}{\partial L} \\
 Z_5^{(0)} &= -\frac{\partial C^{0,0}}{\partial G} \\
 Z_6^{(0)} &= -\frac{\partial C^{0,0}}{\partial H}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Portanto obtemos:

$$\frac{dL}{dt} = 0 \rightarrow L = L_0 \tag{5.2}$$

em que L_0 é constante de integração.

$$\frac{dG}{dt} = 0 \rightarrow G = G_0 \quad (5.3)$$

em que G_0 é constante de integração.

$$\frac{dH}{dt} = 0 \rightarrow H = H_0 \quad (5.4)$$

em que H_0 é constante de integração.

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\mu^2}{L^3} - \frac{\partial C^{0,0}}{\partial L} \rightarrow l = l_0 + \frac{\mu^2}{L^3}t - \frac{\partial C^{0,0}}{\partial L}t \quad (5.5)$$

fazendo

$$n_l = \frac{\mu^2}{L^3} - \frac{\partial C^{0,0}}{\partial L} \quad (5.6)$$

obtemos

$$l = l_0 + n_l t \quad (5.7)$$

em que l_0 é constante de integração.

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{\partial C^{0,0}}{\partial G} \rightarrow g = g_0 - \frac{\partial C^{0,0}}{\partial G}t \quad (5.8)$$

fazendo

$$n_g = -\frac{\partial C^{0,0}}{\partial G} \quad (5.9)$$

obtemos

$$g = g_0 + n_g t \quad (5.10)$$

em que g_0 é constante de integração.

Por fim:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial C^{0,0}}{\partial H} \rightarrow h = h_0 - \frac{\partial C^{0,0}}{\partial H} t \quad (5.11)$$

fazendo

$$n_h = -\frac{\partial C^{0,0}}{\partial H} \quad (5.12)$$

obtemos

$$h = h_0 + n_h t \quad (5.13)$$

em que h_0 é constante de integração. Sendo n_l , n_g e n_h denominados na literatura por movimento médio. Devido ao fato de escolhermos na hamiltoniana H_0 não só o termo do movimento elíptico mais também todos os termos seculares adotados, com isso, aparecem nos elementos angulares de ordem zero termos do potencial perturbador que corresponde a precessão da órbita. Com estas equações obtemos seis constantes de integração de ordem zero.

5.2 SOLUÇÃO DOS TERMOS SECULARES DEVIDO AOS TERMOS l , g e h

Apresentamos as soluções dos termos seculares devido à aplicação do método de Hori para os elementos orbitais de Delaunay l , g e h , sendo que desprezamos os termos de ordem maior ou igual a dois devido à pressão de radiação e ao arrasto. Observamos que até a segunda ordem do método o modelo conduziu a não-existência de perturbações seculares pura devido ao arrasto nas variáveis angulares, que está de acordo com Vilhena de Moraes (1978,1981). Na solução de primeira ordem do método encontramos o termo secular puro devido à pressão de radiação solar. Na solução de segunda ordem do método surgem termos seculares puro devido ao geopotencial e

termos seculares acoplados devido ao geopotencial e a pressão de radiação solar, que era esperado como, por exemplo, em Vilhena de Moraes (1978).

Apresentamos a expressão da anomalia média em função da variável de Delaunay

$$\frac{dl}{dt} = Z_4^{secular} \text{ dada por:}$$

$$Z_4^{(ord1)} = a_L \rho \quad (5.14)$$

Apresentamos a expressão do argumento do perigeu em função da variável de

$$\text{Delaunay } \frac{dg}{dt} = Z_5^{secular} \text{ dada por:}$$

$$Z_5^{(ord1)} = a_G \rho \quad (5.15)$$

Apresentamos a expressão do nodo ascendente em função da variável de

$$\text{Delaunay } \frac{dh}{dt} = Z_6^{secular} \text{ dada por:}$$

$$Z_6^{(ord1)} = a_H \rho \quad (5.16)$$

as respectivas soluções de ordem dois estão representadas no apêndice E.

5.3 REPRESENTAÇÃO DA SOLUÇÃO GERAL DO MÉTODO DE HORI

Podemos escrever a solução dos termos métricos da seguinte maneira:

$$L = L_0 + (A + \Re A)t + (A\rho)t + \text{termos periódicos...} \quad (5.17)$$

em que $\Re$ representa os termos seculares devido ao geopotencial, A representa os termos seculares devido ao arrasto e ρ representa os termos seculares devido a pressão de radiação.

Considerando a solução completa do método de Hori para as variáveis métricas obtemos:

$$(L, H, G) = (L_0, G_0, H_0) + (A + \Re A)t + (A\rho)t + \text{termos periódicos...} \quad (5.18)$$

Para as variáveis angulares a solução pode ser escrita da seguinte maneira:

$$l = l_0 + n_l t + \rho t + (\Re + \Re \rho)t + \text{termos periódicos...} \quad (5.19)$$

Generalizando obtemos:

$$(l, g, h) = (l_0, g_0, h_0) + (n_l, n_g, n_h)t + \rho t + (\Re + \Re \rho)t + \text{termos periódicos...} \quad (5.20)$$

sendo que os termos periódicos podem ser encontrados utilizando a expressão (4.18) e as funções geratrizes de primeira ordem estão representadas no apêndice C.

CAPÍTULO 6 APLICAÇÕES

Neste capítulo apresentamos algumas aplicações, construímos tabelas e gráficos para comparação com outros trabalhos. Desenvolvemos algumas considerações em relação à pressão de radiação.

6.1 APLICAÇÃO DA TEORIA: SATÉLITE MIMOSA

O satélite Mimosa por ser um satélite de baixa altitude é influenciado pelo efeito do arrasto atmosférico já que este predomina sobre órbitas de satélites entre altitudes de 200 a 700 km (VILHENA DE MORAES, 1978), causando assim variações consideráveis nos elementos orbitais em especial o semi-eixo maior e a excentricidade. Para termos soluções mais precisas é necessário considerar os parâmetros devido ao J_2 , J_3 , J_4 e J_2^2 do potencial perturbador na hamiltoniana considerada.

Consideramos a solução devido ao arrasto expressão (4.60) e o acoplamento do arrasto com termos do potencial perturbador expressão (4.61). Inicialmente, fazemos uma análise na variação do semi-eixo maior, construímos tabelas e gráficos para comparação com El-Salam e Sehnal (2004). Fazemos uma aplicação com o satélite Mimosa em que os dados dos elementos orbitais são apresentados por (EL-SALAM; SEHNAL, 2004). O trabalho citado também utiliza o modelo TD 88 para analisar o efeito do arrasto atmosférico, sendo que o autor constrói uma teoria de segunda ordem utilizando as equações de Gauss, a expressão para a densidade encontra-se em função da anomalia excêntrica.

Consideramos a altura do perigeu e do apogeu de 320km e 820km respectivamente. A inclinação da órbita igual a 98° , excentricidade 0,034591 e o semi-eixo maior de 6948,578 km.

Algumas características do satélite são:

$$\begin{aligned} S &= 0,27190 \, m^2 \\ C_D &= 2,2 \\ A &= 0,004532 \, m^2 / kg \\ m &= 66 \, kg \end{aligned} \tag{6.1}$$

Tabela 9- Variação do semi-eixo maior devido ao arrasto atmosférico sobre o satélite Mimosa

Variação do semi-eixo maior devido ao arrasto atmosférico	Tempo em dias
-0,7238493424e-2	1
-0,7834274996e-1	10
-0,1553655076	20
-0,2418104485	30
-0,3480512543	40
-0,4796197070	50
-0,6378367824	60
-0,8180471957	70
-1,010284562	80
-1,199672682	90
-1,368490113	100
-1,498245687	110
-1,572422615	120
-1,579532224	130
-1,516537432	140
-1,391000337	150
-1,222267150	160
-1,040877585	170
-0,8849715638	180
-0,7950092670	190
-0,8075425592	200
-0,9506079820	210
-1,240009692	220
-1,679154152	230
-2,260226831	240
-2,967004005	250

Neste caso fazemos o argumento do perigeu e o nodo ascendente igual a zero, ou seja, a posição inicial do perigeu é no equador da órbita. Sabe-se que o fluxo solar é quase constante para um intervalo de tempo de um ano, então calculamos o valor da densidade atmosférica utilizando o modelo TD 88 para um valor fixo do fluxo solar e depois calculamos a variação do semi-eixo maior para um intervalo de 250 dias.

Apresentamos os valores obtidos através da Tabela-9 e a Figura-7 que estão de acordo com El-Salam e Sehnal (2004), sendo que utilizamos a expressão (4.61).

Com os dados da Tabela 9 construímos a Figura 7.

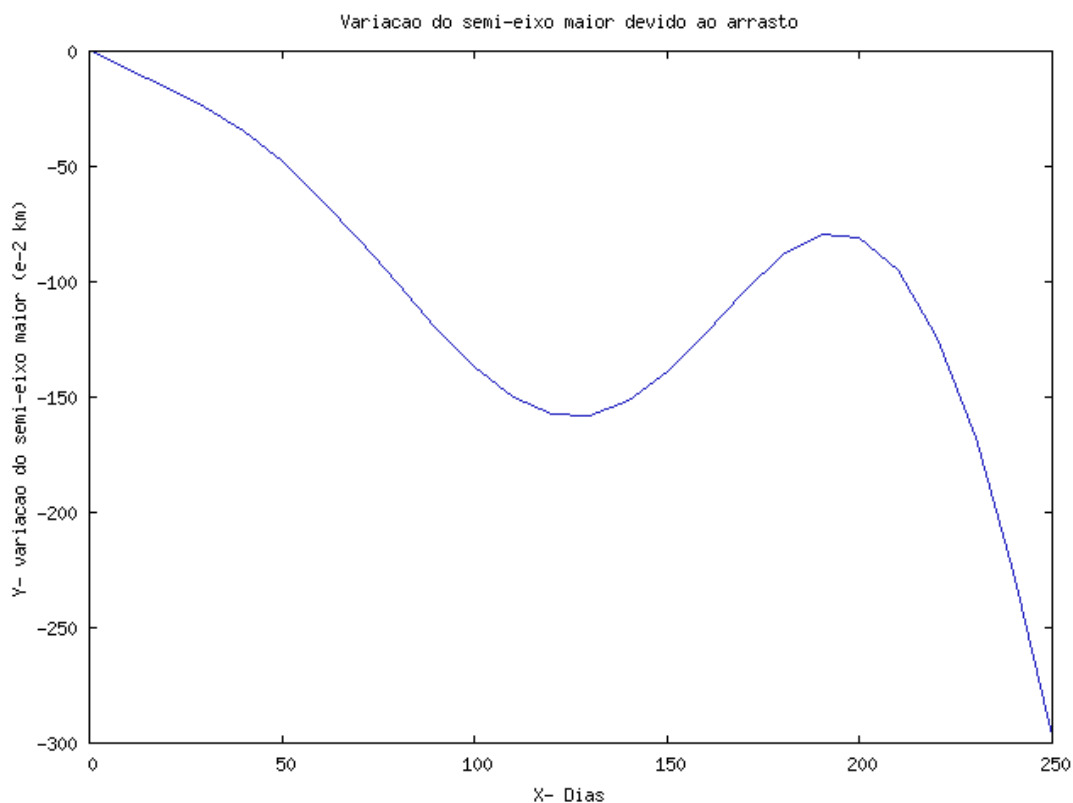


Figura 7- Variação do semi-eixo maior devido ao arrasto sobre o satélite Mimosa

Utilizando a solução de ordem dois dada pela expressão (4.61) considerando somente a parte devido ao acoplamento do arrasto com o geopotencial em que consideramos apenas o J_2 encontramos:

$$\frac{d\delta a}{dt} = -62,84 \text{ mm/dia}$$

O valor obtido é comparado com o de outros autores citados no início do capítulo. Apesar de ser um valor pequeno comparado com a primeira ordem não pode ser negligenciado, pois, para obtermos o estudo do tempo de vida útil mais preciso é necessário considerarmos essa variação. É necessário também considerarmos outros termos do potencial perturbador.

6.2 APLICAÇÃO DA TEORIA: SATÉLITE EURECA.

Em Delhaise (1991) é desenvolvida uma solução analítica para o movimento de um satélite artificial da Terra sujeito aos efeitos combinados do campo gravitacional terrestre e do arrasto atmosférico. O modelo de densidade leva em conta uma variação linear da altura de escala da densidade com altitude. A teoria de perturbação é baseada em transformações de Lie. A autora constrói uma tabela para representar a variação do semi-eixo maior do satélite Eureka que está representado na Tabela-10.

Tabela 10- variação do semi-eixo maior num período de 24 horas para abordagem de Delhaise (1991) (modificada)

a_0 (km)	h_0 (km)	ρ_0 (kg/m ³)	δa (km)
6780	400	1.210×10^{-11}	-5,130
6680	300	2.210×10^{-11}	-3,729
6640	250	6.810×10^{-11}	-16,168
6590	200	2.710×10^{-10}	-73,584

Algumas características do satélite são:

$$\begin{aligned}
 S &= 50m^2 \\
 C_D &= 2,2 \\
 A &= 0,025 \\
 m &= 2200kg
 \end{aligned}
 \tag{6.2}$$

Com esses dados fornecidos substituímos na expressão (4.61), utilizando nossa teoria obtivemos os valores apresentados na Tabela-11. Nosso resultado aproxima-se do valor apresentado na Tabela 10.

Tabela 11- Variação do semi-eixo maior num período de 24 horas

a_0 (km)	h_0 (km)	ρ_0 (kg/m^3)	δa (Km)
6780	400	$1,210 \times 10^{-11}$	-2.717
6680	300	$2,210 \times 10^{-11}$	-4.926
6640	250	$6,810 \times 10^{-11}$	-15.135
6590	200	$2,710 \times 10^{-10}$	-60.002

6.3 APLICAÇÃO DA TEORIA: SATÉLITE CBERS-1.

Considerando as expressões (4.60) e (4.61) fazemos uma aplicação com o satélite CBERS-1 cujos dados orbitais são dados por:

$$\begin{aligned}
a &= 7148,9448 \text{ km} \\
e &= 0,00001 \\
i &= 98,406^\circ \\
C_D &= 2,62 \\
S &= 15,37 \text{ m}^2 \\
\rho_s &= 1,72507 \times 10^{-14} \text{ kg / m}^3 \\
A &= 0,01342 \text{ m}^2 / \text{kg}
\end{aligned} \tag{6.3}$$

em que a densidade é calculada utilizando o programa em linguagem Fortran que está exposto no apêndice D. Os dados de entrada são:

Dia do ano (DAY) = 1

Fluxo Solar (EFX e EFBAR) = 145

Índice Geomagnético (AKP) = 3

Hora Local (HL) = 3

Latitude (ALAT) = 0

Altitude (ALTI) = 770,80 km

Substituindo esses valores na expressão (4.60) e fazendo os cálculos encontramos:

variação do semi-eixo maior (δa)

Ordem um:

$$\frac{d\delta a}{dt} = -2,13541 \times 10^{-3} \text{ km / dia} \tag{6.4}$$

que corresponde a solução de primeira ordem. Para a solução de segunda ordem utilizamos a expressão (4.61) apenas os termos de acoplamento do arrasto com o geopotencial obtemos:

Ordem dois:

$$\frac{d\delta a}{dt} = -6,89932 \times 10^{-7} \text{ km/dia} \quad (6.5)$$

Para calcular a variação da excentricidade utilizamos as expressões (4.68), (4.69) e (4.65) encontramos para o caso do satélite CBERS-1 uma variação da ordem de 10^{-7} . Observamos que, para o caso real, como a excentricidade é próxima de zero, devemos utilizar variáveis não-singulares.

Para o acoplamento do arrasto com a pressão apresentamos um comentário a respeito da pressão para depois fazermos uma aplicação utilizando a expressão (4.61).

Considerando a expressão (2.56) cujo módulo é dado por:

$$A_{pr} = \nu C_R \frac{S}{m} P_s \quad (6.6)$$

em que o coeficiente C_R pode ser modelado. O valor do coeficiente de pressão de radiação é maior em satélites que possuem superfícies altamente refletoras, e depende tanto da geometria quanto das propriedades das superfícies externas. Segundo Kuga; Rao e Carrara (2000) o valor de C_R está compreendido entre 1 e 1,44 para satélites esféricos.

As órbitas de satélites cuja razão entre a área e sua massa for muito grande podem sofrer efeitos significativos devido à força de pressão de radiação solar (VILHENA DE MORAES, 1978). A força aplicada ao satélite depende da energia irradiada pelo Sol. Na órbita da Terra esta energia é constante (não varia com a atividade solar) e vale aproximadamente 1350 w/m^2 (KUGA; RAO e CARRARA, 2000).

Nas proximidades da órbita da Terra P_s é definida por:

$$P_s = w/c \quad (6.7)$$

em que c é a velocidade da luz (300000 km/s) e w é a intensidade de radiação, definida como energia incidente por unidade de área, por unidade de tempo emitida pelo Sol. Sendo:

$$w = w_0 \left(\frac{R_0}{R_T} \right)^2 \quad (6.8)$$

em que w_0 é a intensidade de radiação à uma unidade astronômica, igual a 1350 w/m^2 , R_T é a distância da Terra ao Sol e R_0 é a distância média da órbita da Terra ao Sol (uma unidade astronômica). Substituindo a expressão (6.8) em (6.7) obtemos:

$$P_s = \frac{w_0}{c} \left(\frac{R_0}{R_T} \right)^2 = 4,5 \times 10^{-6} \left(\frac{R_0}{R_T} \right)^2 \text{ N/m}^2 \quad (6.9)$$

Em primeira aproximação vamos supor que $R_T = R_0$, ou seja, supondo que o satélite esteja na superfície da Terra, pois a distância do satélite ao Sol é muito maior do que a distância do satélite à Terra. Portanto, obtemos:

$$P_s = 4,5 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2 \quad (6.10)$$

que substituído na expressão (6.6) temos:

$$A_{pr} = \nu C_R \left(\frac{S}{m} \right) 4,5 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2 \quad (6.11)$$

fazendo

$$A_{pr} = \rho$$

temos:

$$\rho = \nu C_R \left(\frac{S}{m} \right) 4,5 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2 \quad (6.12)$$

lembrando que S é área efetiva e m a massa do satélite.

Para a aplicação consideramos:

$$\begin{aligned} C_R &= 1,44 \\ \nu &= 1 \\ S &= 15,37m^2 \\ m &= 1550kg \end{aligned} \tag{6.13}$$

encontramos para a variação do semi-eixo maior.

Ordem dois (acoplamento do arrasto com a pressão de radiação):

$$\frac{d\delta a}{dt} = -1,18190 \times 10^{-11} \text{ km/dia} \tag{6.14}$$

em que utilizamos a expressão (4.61) somente o termo de acoplamento entre o arrasto e a pressão de radiação. O termo b_L que aparece na expressão (4.61) é dado por (FERRAZ MELLO, 1965):

$$b_L = 2 \frac{L}{\mu}.$$

Sabemos que o efeito da pressão de radiação é importante principalmente para satélites cuja razão entre a área e sua massa for muito grande (VILHENA DE MORAES, 1978), então vamos supor que a razão área massa do satélite CBERS-1 seja $20,7 \text{ m}^2/\text{kg}$ sendo que este valor é de um satélite do tipo balão, com isso obtemos:

Tabela 12-Variação do semi-eixo maior para o satélite CBERS-1

Forças perturbadoras	Variação do semi-eixo maior (km/dia)
arrasto	-4,31489
acoplamento do arrasto com o geopotencial	$-1,39411 \times 10^{-3}$
acoplamento do arrasto com a pressão de radiação	$-3,67564 \times 10^{-8}$

Comparando estes resultados com as expressões (6.4), (6.5) e (6.14) observamos o aumento da variação do semi-eixo maior como, por exemplo, para o arrasto a variação era de 2 m passando aproximadamente para 4 km, nesse caso o satélite cairia rapidamente, para o acoplamento do arrasto com a pressão cuja ordem de grandeza era de 10^{-11} passa para 10^{-8} que é um efeito considerável para determinada missão espacial. Confirmando assim, o resultado encontrado por Vilhena de Moraes (1978).

Com os dados orbitais do satélite CBERS-1 calculamos a aceleração do arrasto utilizando a expressão (2.28) e encontramos:

$$D = -1,29076 \times 10^{-8} \text{ m/s}^2 \quad (6.15)$$

Calculamos também a aceleração da pressão de radiação utilizando a expressão (6.12) encontramos:

$$\rho = 6,63984 \times 10^{-8} \text{ m/s}^2 \quad (6.16)$$

Dividindo a expressão (6.16) por (6.15) encontramos $\left| \frac{\rho}{D} \right| = 5,14414$, ou seja, na altitude do satélite CBERS-1 prevalece o efeito da aceleração da pressão de radiação.

Fazendo a relação da taxa de pressão de radiação pelo arrasto atmosférico numa órbita circular obtemos:

Tabela 13- Razão entre aceleração da pressão de radiação e a aceleração do arrasto

Altitude da órbita h, (km)	200	300	400	500	600	700	800
$\frac{\rho}{D}$	0,00029	0,00540	0,04155	0,17836	0,64585	2,20225	7,27311

Em que o valor da densidade ρ_d é calculado usando o modelo TD-88 para Day=1.

Nós mostramos que a taxa é inversamente proporcional a densidade do ar (ρ_a) e aumenta com a altitude h . Portanto, para o satélite CBERS-1 o arrasto atmosférico predomina até 600 km de altitude no intervalo entre 600 e 700 km as duas perturbações são consideráveis e a partir dos 700 km a pressão de radiação predomina em relação ao arrasto.

Uma questão importante é que, se fazemos o produto da expressão (6.15) com (6.16) obtemos uma grandeza da ordem de 10^{-16} devido ao acoplamento do arrasto com a pressão, porém, utilizando teoria de perturbação para resolver o sistema percebemos que esse acoplamento na verdade não é dessa ordem e sim da ordem de 10^{-11} . Esta queda na ordem de grandeza é devido aos termos do movimento médio os quais, devido ao processo de integração, aparecem no denominador das expressões de acoplamento representados por $N_{L,G,H}$.

A Tabela 14 e a Figura 8 mostram a variação do semi-eixo maior devido ao arrasto na solução de ordem um dado pela expressão (4.60), em que variamos o valor da densidade atmosférica conforme o modelo TD 88. Na Tabela 15 consideramos a expressão (4.60) e a expressão (4.61), ou seja, consideramos a solução de ordem um e a solução de ordem dois (acoplamento do arrasto com geopotencial e arrasto com a pressão) novamente variando a densidade atmosférica.

Tabela 14- Variação do semi-eixo maior devido ao arrasto atmosférico (km)

Variação do semi-eixo maior (km)	Tempo em dias
-0,2135407722e-2	1
-0,2041908462e-1	10
-0,4043626776e-1	20
-0,6274065096e-1	30
-0,8962967128e-1	40
-0,1224522864	50
-0,1612631821	60
-0,2046532524	70
-0,2498106202	80
-0,2929004127	90
-0,3295533104	100

Com os dados da Tabela 14 plotamos a Figura 8.

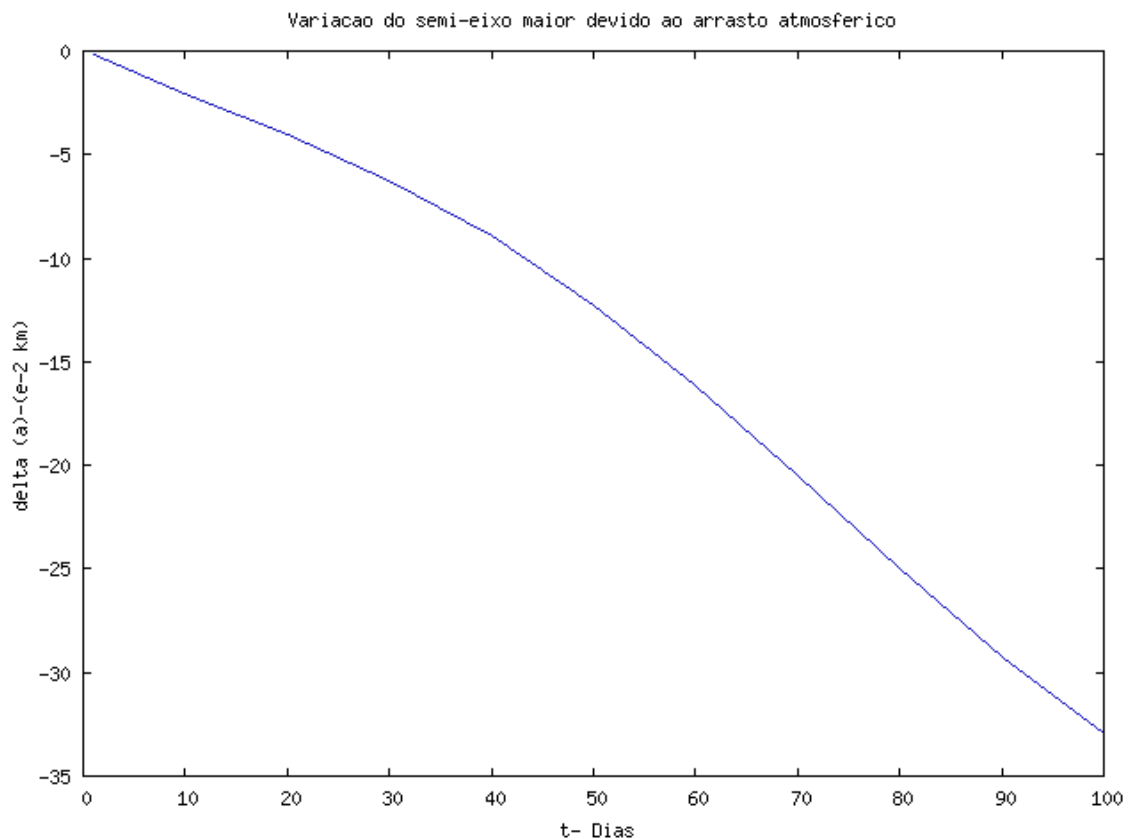


Figura 8- Variação do semi-eixo maior devido ao arrasto atmosférico

Tabela 15- Variação do semi-eixo maior devido à solução de ordem um e a solução de ordem dois

Variação do semi-eixo maior (km)	Tempo em dias
-0,2136097672e-2	1
-0,2042568203e-1	10
-0,4044933278e-1	20
-0,6276092261e-1	30
-0,8965863115e-1	40
-0,1224918519	50
-0,1613152887	60
-0,2047193806	70
-0,2498913420	80
-0,2929950615	90
-0,3296598078	100

Observamos que a Tabela 15 apresenta uma variação maior que a Tabela 14 na ordem de 10^{-4} , por causa do efeito proveniente do acoplamento do arrasto com o geopotencial e do arrasto com a pressão.

Considerando a diferença entre a Tabela 14 com a Tabela 15 obtemos:

Tabela 16- Variação do semi-eixo maior devido à diferença entre a solução de ordem um e a solução de ordem dois

Variação do semi-eixo maior devido à diferença entre as Tabelas 12 e 13 (km)	Tempo em dias
0,689950e-6	1
0,659741e-5	10
0,1306502e-4	20
0,2027165e-4	30
0,2895987e-4	40
0,395655e-4	50
0,521066e-4	60
0,661282e-4	70
0,807218e-4	80
0,946488e-4	90
0,1064974e-3	100

Com os dados da Tabela 16 plotamos a Figura 9.

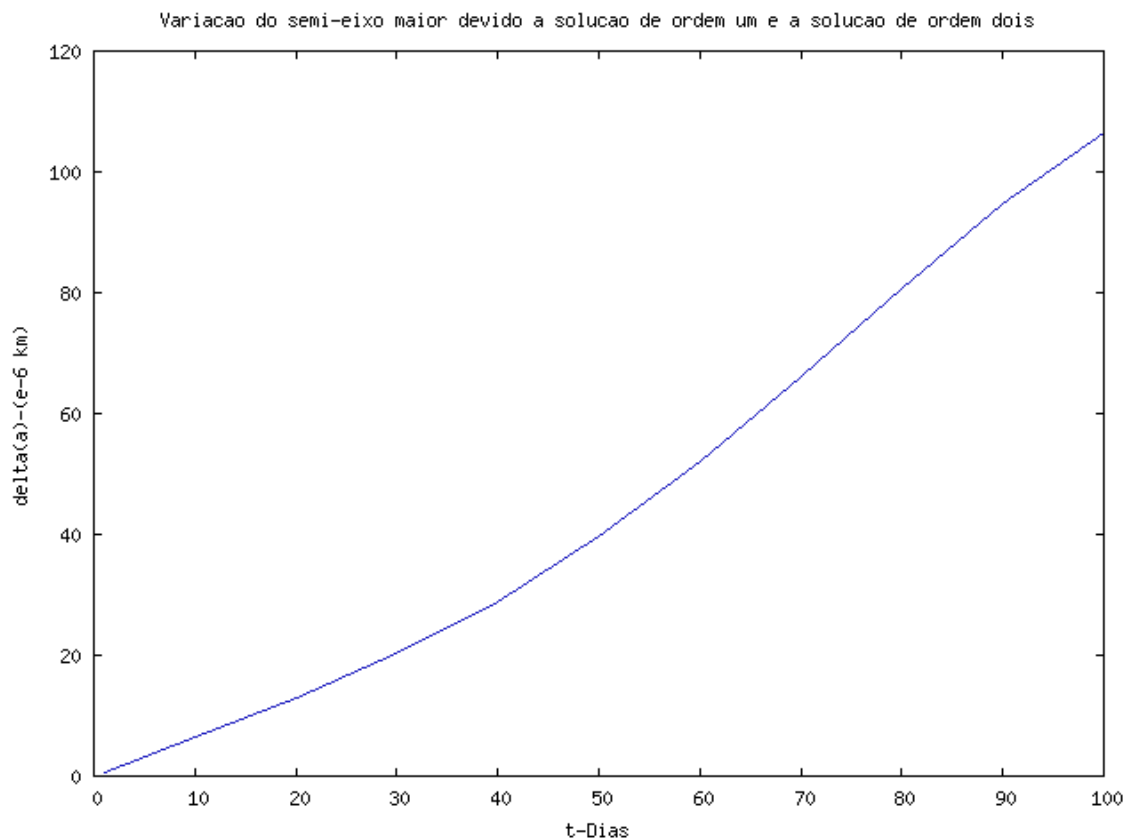


Figura 9- Variação do semi-eixo maior devido à diferença entre a solução de ordem um e a solução de ordem dois

Apresentamos a Tabela 17 e a Figura 10 em que consideramos a expressão (4.61) somente os termos de acoplamento entre o arrasto e a pressão de radiação.

Tabela 17- Variação do semi-eixo maior devido ao acoplamento do arrasto com a pressão de radiação

Variação do semi-eixo maior (km)	Tempo em dias
-0,1819048619e-10	1
-0,1739401467e-9	10
-0,3443753146e-9	20
-0,5340778053e-9	30
-0,7623367944e-9	40
-0,1040393711e-8	50
-0,1368188643e-8	60
-0,1732678731e-8	70
-0,2109962462e-8	80
-0,2466542894e-8	90
-0,2765284421e-8	100

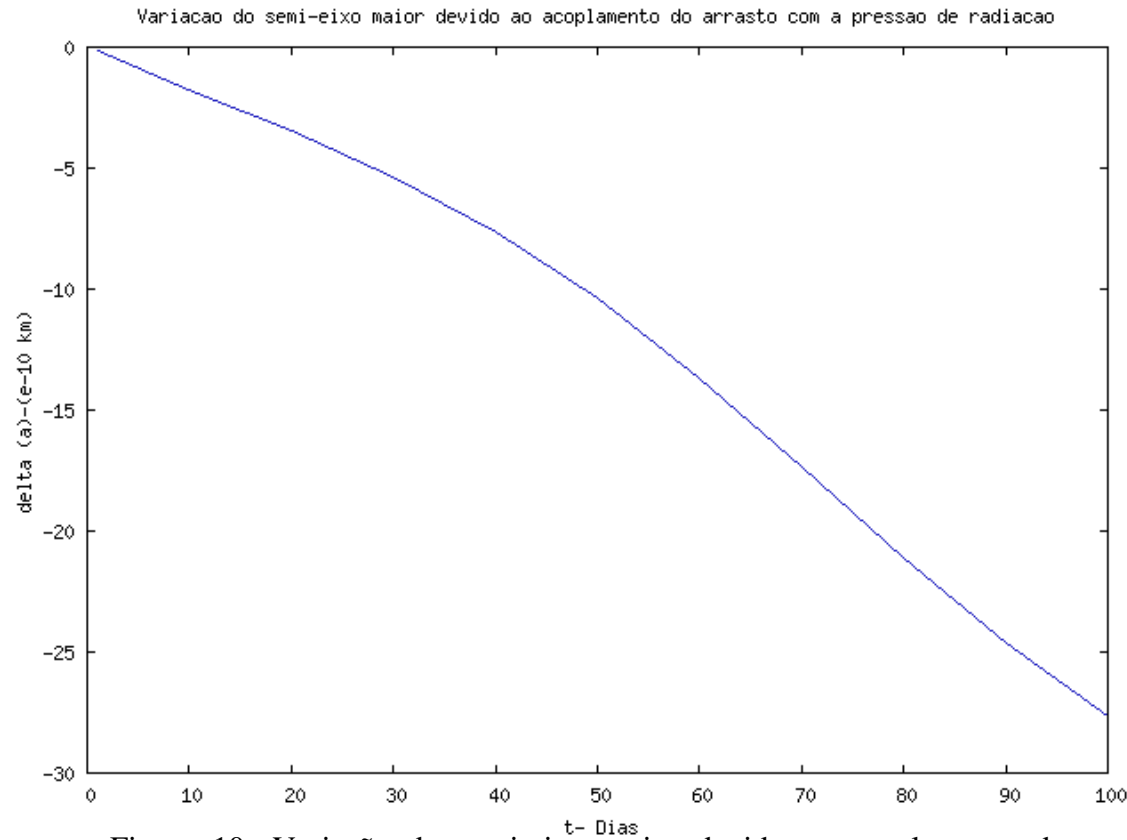


Figura 10- Variação do semi-eixo maior devido ao acoplamento do arrasto com a pressão de radiação

Utilizando ainda a expressão (4.61) construímos a Tabela 18 e a Figura 11 considerando o efeito do acoplamento do arrasto com o geopotencial.

Tabela 18- Variação do semi-eixo maior devido ao acoplamento do arrasto com o geopotencial

Variação do semi-eixo maior (km)	Tempo em dias
-0,6899321370e-6	1
-0,6597234168e-5	10
-0,1306153087e-4	20
-0,2025660221e-4	30
-0,2891405161e-4	40
-0,3946024623e-4	50
-0,5189291366e-4	60
-0,6573000472e-4	70
-0,8004244616e-4	80
-0,9356949828e-4	90
-0,1049024040e-3	100

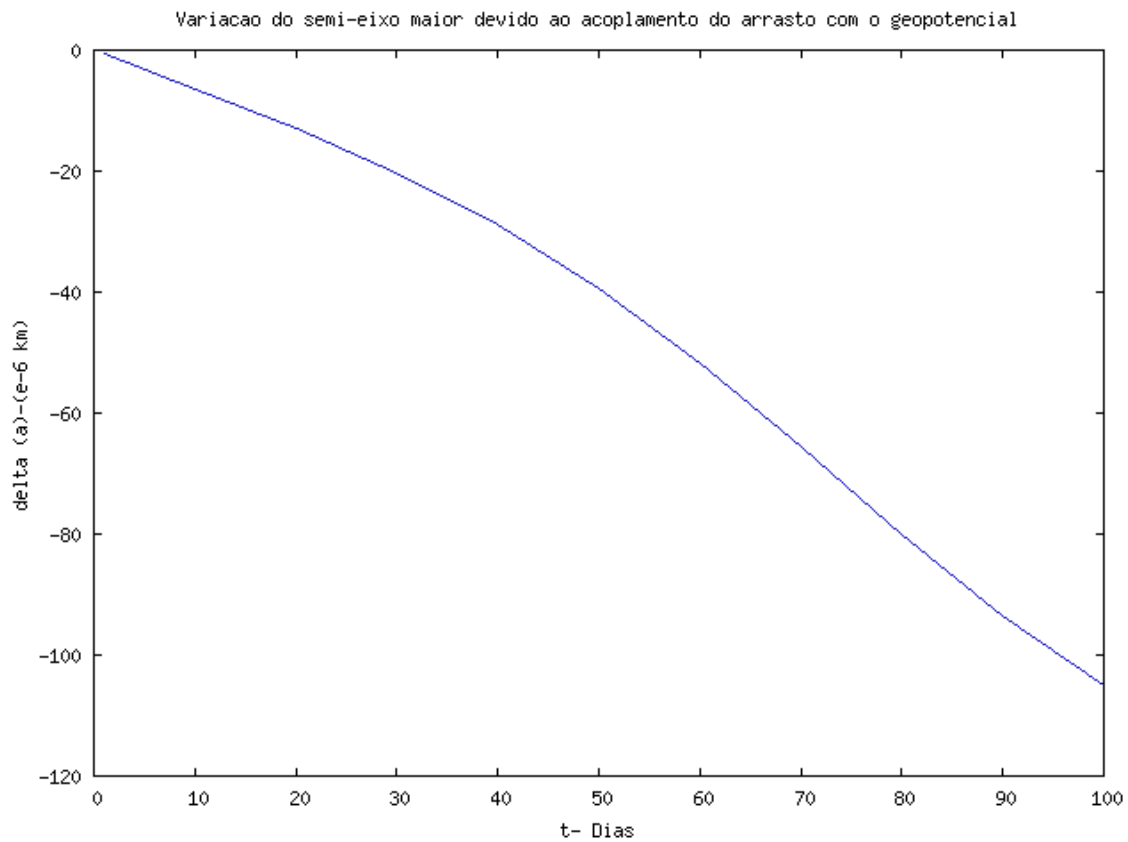


Figura 11- Variação do semi-eixo maior devido ao acoplamento do arrasto com o geopotencial

Apresentamos também a diferença entre a Tabela 17 e 18 para obtermos a magnitude dos efeitos considerados, esboçamos os resultados através da Tabela 19 e da Figura 12.

Tabela19- Diferença entre os termos de acoplamento do arrasto com pressão e do arrasto com o geopotencial

Varição do semi-eixo maior (km)	Tempo em dias
0,6899139465e-6	1
0,6597060228e-5	10
0,1306118649e-4	20
0,2025606813e-4	30
0,2891328927e-4	40
0,3945920584e-4	50
0,5189154547e-4	60
0,6572827204e-4	70
0,8004033620e-4	80
0,9356703174e-4	90
0,1048996387e-3	100

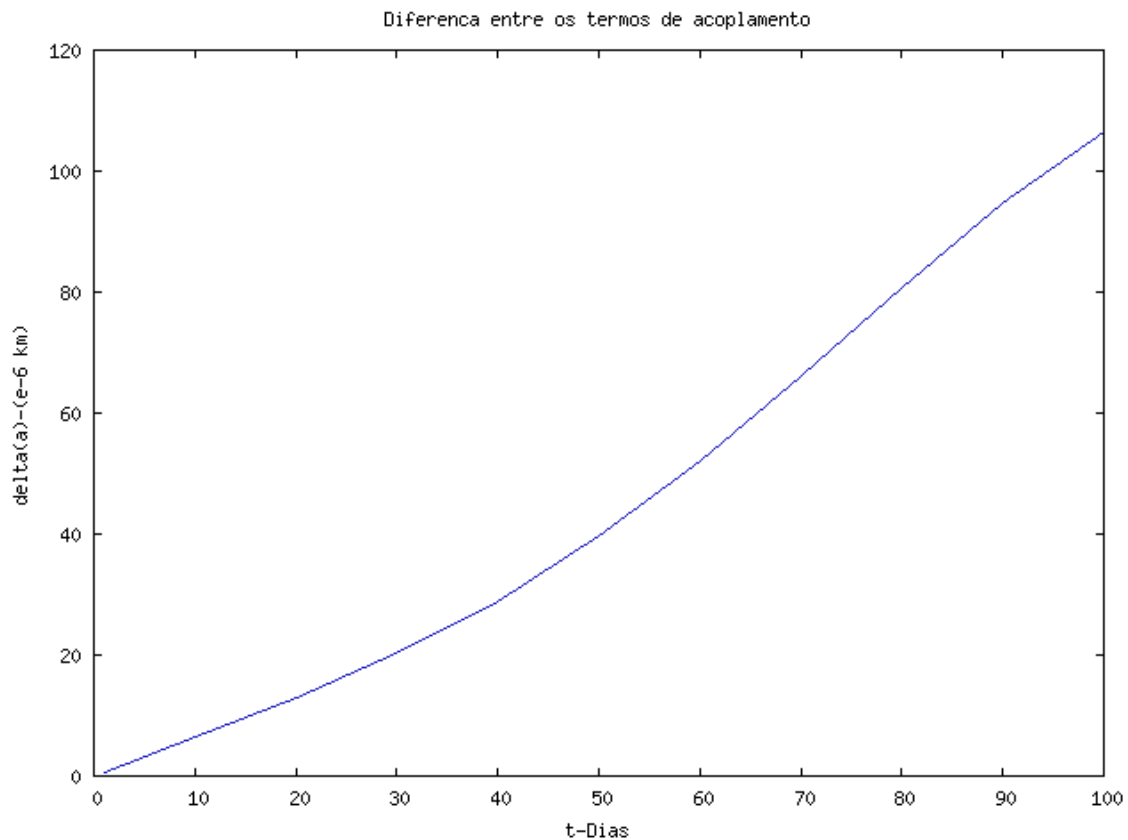


Figura 12- Diferença entre os termos de acoplamento do arrasto com pressão e do arrasto com geopotencial

Iremos apresentar o resultado das Figuras 10 e 11 em uma única figura para efeito de comparação.

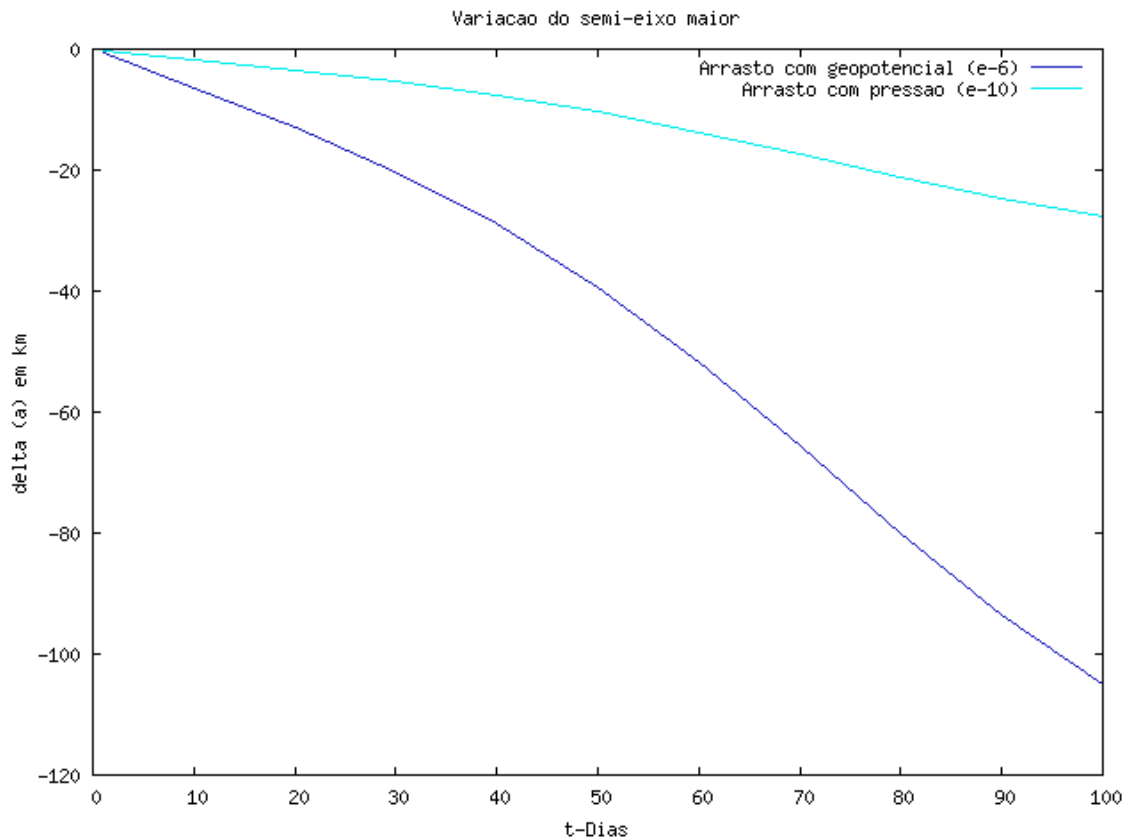


Figura 13- Variação do semi-eixo maior devido ao acoplamento do arrasto com o geopotencial e do arrasto com a pressão de radiação

Construímos a Tabela 20 para expor a magnitude da variação do semi-eixo maior devido às forças perturbadoras atuando sobre o satélite CBERS-1. Esses resultados são importantes para determinadas missões que necessitam de uma precisão acurada da órbita do veículo espacial.

Sendo que esta ordem de grandeza representada na Tabela 20 depende das características do satélite e de sua altitude.

Tabela 20- Magnitude das forças perturbadoras para o satélite CBERS-1

Forças perturbadoras	Variação do semi-eixo maior (km/dia)
Arrasto	10^{-3}
Arrasto acoplado com geopotencial	10^{-7}
Arrasto acoplado com a pressão	10^{-11}

No próximo capítulo apresentamos as conclusões e abordagens subsequentes.

CAPÍTULO 7 CONCLUSÃO

Estudamos o movimento translacional de um satélite artificial sujeito à ação do geopotencial, da pressão de radiação solar direta (considerando a sombra da Terra) e do arrasto atmosférico.

Expressões analíticas para as perturbações, considerando-se modelos realísticos, são desenvolvidas e substituídas nas equações de movimento. As equações são integradas analiticamente por processos de teoria de perturbações permitindo análise dos termos que compõem a solução. É utilizado o método de perturbação de Hori (1971) para resolver o sistema não-canônico.

Resolvido o sistema de equações diferenciais encontramos, para as perturbações devidas à pressão de radiação solar, soluções de acordo com Vilhena de Moraes (1978) e Ferraz Mello (1972). É dada ênfase a variável métrica de Delaunay L em que fazemos algumas manipulações encontrando resultados convenientes para serem comparados com trabalhos que citamos ao longo do texto. Para fazermos aplicações colocamos o resultado em função do semi-eixo maior já que o mesmo encontra-se em função das variáveis de Delaunay.

São feitas algumas aplicações para o satélite CBERS-1 em que as perturbações consideradas são analisadas determinando a ordem de grandeza de cada efeito considerado. Na solução de primeira ordem devido a aplicação do método de Hori (1971) encontramos uma variação para o semi-eixo maior da ordem de 10^{-3} km/dia. Considerando a solução de ordem dois é feita uma análise dos termos de acoplamento em duas etapas; na primeira consideramos o acoplamento entre o geopotencial e o arrasto em que obtivemos uma variação para o semi-eixo maior da ordem de 10^{-7} km/dia, na segunda etapa consideramos o arrasto e a pressão de radiação, cuja variação é da ordem de 10^{-11} km/dia. Esses resultados são importantes para determinadas missões que necessitam de uma precisão acurada da órbita do veículo espacial.

Principalmente para satélites com grande razão área/massa (VILHENA DE MORAES, 1978) o efeito do acoplamento da pressão de radiação e o geopotencial são muito importantes.

Mostramos que a ordem do acoplamento da perturbação do arrasto com a pressão de radiação, não é simplesmente a multiplicação da ordem de ambas as perturbações. A multiplicação daria uma ordem de grandeza de 10^{-16} km/dia e ao utilizarmos a teoria encontramos, para os termos acoplados uma variação da ordem de 10^{-11} km/dia. Está queda na ordem de grandeza é devido aos termos do movimento médio os quais, devido ao processo de integração, aparecem no denominador das expressões de acoplamento.

Expressões Analíticas estão expostas nos capítulos 4, 5 e no apêndice E, sendo que estas servem para estudos referentes a perturbações seculares nos elementos orbitais a , e , i , M , ω e Ω . Para estudar os efeitos de curto e longo período apresentamos no apêndice C as funções periódicas de primeira ordem.

Utilizando o método de Hori (1971), fazemos uma transformação canônica e obtemos a solução do sistema original sem necessidade de efetuarmos transformação inversa. Também termos espúrios de Poisson não surgem na resolução do sistema como os que surgiram no trabalho de Brouwer e Hori (1961). Portanto, o método de Hori (1971) é eficiente e dinâmico para resolução de sistemas não-canônicos. Outro fator importante é que a solução encontrada nos permite calcular diretamente a variação dos seis principais elementos orbitais tanto para analisarmos os efeitos seculares como também os periódicos, de curto e longo período.

Para trabalhos subseqüentes pode-se melhorar o modelo de densidade TD 88 considerando além dos termos seculares também os termos periódicos que no nosso caso não são considerados. Sabe-se que o efeito da pressão de radiação depende da geometria do satélite além da descontinuidade da região entre sombra (esta teoria não considera o efeito de penumbra) ou iluminado entre outros fatores. Então, é necessária uma nova modelagem para a pressão de radiação em que considere esses fatores podendo assim, obter resultados mais convenientes. O satélite CBERS-1, por exemplo,

possui um corpo cúbico e painel solar, como a pressão depende da atitude do satélite ela varia ao longo do tempo. Portanto, podemos perceber a importância de um novo modelo para a pressão de radiação solar (ρ) que no nosso caso é considerado constante.

Um estudo que pode ser feito em relação a esse trabalho é analisar os efeitos de curto e longo período proveniente das soluções periódicas, utilizando as expressões do apêndice C.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AHMED, A. EL-ENNA; M.K.M. AHMED; F.A ABD EL-SALAM. Analytical treatment of the relativistic and solar radiation pressure effects on an artificial satellite, **Appl. Math. Comput.** n. 175, p.1525-1542, 2006.

AHMED, A. EL-ENNA. Analytical treatment of the Earth oblateness and solar radiation pressure effects on an artificial satellite. II. The solution, **Appl. Math. Comput.** n.151, p. 121-145, 2004.

AHMED, A. EL-ENNA. The equations of motion of the joint effects of the relativistic and solar radiation pressure on an Earth artificial satellite, **Appl. Math. Comput.** n. 149, p.359-368, 2004.

AHMED, A. EL-ENNA. Analytical treatment of the Earth oblateness and solar radiation pressure effects on an artificial satellite. I. The equations of motion, **Appl. Math. Comput.** n.38, p. 443, 2003.

ANSELMO, L.; BERTOTTI, B.; FARINELLA, P.; MILANI, A.; NOBILI, A. M. Orbital perturbations due to radiation pressure for spacecraft of complex shape, **Celestial Mechanics**, v.29, p.27-43, 1983.

BEZDDEK, A.; VOKROUHLICKY D. Semianalytic theory of motion for close-Earth spherical satellites including drag and gravitational perturbations, **Planetary and Science** n.52, p.1233-1249, 2004.

BREITER, S.; MÉTRIS, G. Symplectic mapping for satellites and space debris including non gravitational forces, **Celestial Mechanics**, v.71, p.79-94, 1999.

BREITER, S. Second-order solution for the zonal problem of satellite theory, **Celestial Mechanics**, v.67, p.237-249, 1997.

BROUWER, D.; Hori, G. 'Theoretical evaluation of atmospheric drag effects in the motion of an artificial satellite', **Astronomical Journal**, v.66, p.193-225, 1961.

BROUWER, D.; CLEMENCE. G.M. **Methods of celestial mechanics**. New York; Academic Press, 1961. 595p.

BROUWER, D. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag, **Astron. J.** v.64, p.378-397, 1959.

CARVALHO, J.P. DOS S.; VILHENA DE MORAES, R. **Ação de forças gravitacionais e não gravitacionais sobre satélites artificiais**. In: XIII Colóquio Brasileiro de Dinâmica Orbital, Bertioga-SP, Resumo..., 2006c.

CARVALHO, J.P. DOS S.; VILHENA DE MORAES, R. **Ação de forças gravitacionais e não gravitacionais sobre satélites artificiais**. In: 29º Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, Campinas-SP, Resumo..., 2006b.

CARVALHO, J.P. DOS S.; VILHENA DE MORAES, R. **Perturbação em satélites artificiais devido a pressão de radiação solar e ao arrasto atmosférico**, In: IX Jornada de Iniciação científica e Pós Graduação, Guaratinguetá-SP, Resumo..., 2006a.

DA SILVA FERNANDES, S. Notes on Hori method for non-canonical systems. **Celestial mechanics and Dynamical astronomy**, v. 87, p.307-315, 2003b.

DA SILVA FERNANDES, S. Notes on Hori method for canonical systems. **Celestial mechanics and Dynamical astronomy**, v. 85, p.67-77, 2003a.

DA SILVA FERNANDES, S. Some expansions of the elliptic motion to high eccentricities. **Celestial mechanics and Dynamical astronomy**, v. 62, p.305-321, 1995.

DEPRIT, A.: Canonical transformation depending on a small parameter, **Celestial Mechanics**, v.1, p.12-30, 1969.

DE SAEDELEER, B. Complete zonal problem of the artificial satellite: Generic compact analytic first order in closed form, **Celestial Mechanics**, v.91, p.239-268, 2005.

EL-ENNA, A. A.; EL-SAFTAWY, M. I. The joint effect of relativistic and direct solar radiation pressure on an axially symmetric spacecraft. II. The solution and the elements of transformation, **Appl. Math. Comput.** n.138, p.247-265, 2003.

EL-SAFTAWY, M. I. Analytical of the ressonance caused by solar radiation pressure on a spacecraft. **Astrophysics and space science**, v. 295, p. 407-419, 2004.

EL-SALAM; F. A. ABD; SEHNAL, L. A second order analytical atmospheric drag theory based on the TD 88 thermospheric density model, **Celestial Mechanics**, v.90, p.361-389, 2004.

EL-SAFTAWY, M.I; AHMED, A. EL-ENNA. The relativistic and direct solar radiation pressure effects on an axially symmetric spacecraft. I. The Hamiltonian and the canonical equations of motion, **Appl. Math. Comput.** n.132, p.505-514, 2002.

EL-SAFTAWY, I.M; AHMED, M.K.M; Y.E. HELALI. The effect of direct solar radiation pressure on a spacecraft of complex shape. II. The solutions, **Astrophysics and Space Science** v.259, p.151-171, 1998b.

EL-SAFTAWY, I.M.; AHMED, M.K.M.; HELALI , E. Y. The effect or direct solar radiation pressure on a spacecraft of complex shape. I. The equations of motion. **Astrophysics and Space Science**, v.259, p.141-149, 1998a.

FABIENNE DELHAISE. Analytical treatment of air drag and Earth oblateness effects upon an artificial satellite, **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy** v.52, p.85-103, 1991.

FERNANDES, S.S.; SESSIN, W. The generalized canonical form of Hori's method for non-canonical systems, **Celestial Mechanics**, v.46, p.49-57, 1989.

FERRAZ MELLO, S. **Canonical perturbation theories**, New York, Springer, 2007. 341p.

FERRAZ MELLO, S. Elimination of secular terms generated by the coupling of perturbations, **Celest. Mech.** v.25, p.293-296, 1981.

FERRAZ MELLO, S. Analytical study of the Earth's shadowing effects on satellite orbits, **Celestial Mechanics**, v.5, p.80-101, 1972.

FERRAZ MELLO, S. Action de la pression de radiation sur le mouvement d'un satellite artificiel de la Terre, Proc. 14th Intern. **Astronaut. Congress**, Paris, 1963, Vol. IV, PWN, Warsaw, 1965.

FITZGIBBON, M. T. R.; VILHENA DE MORAES, R. An analytical theory on the disturbed motion of an artificial earth satellite, **The Journal of Astronautical Sciences**, v. 35, n.2, p.235-244, 1987.

FITZGIBBON, M. T. R. **Teoria do movimento de um satélite artificial sujeito à ação do geopotencial e do arrasto atmosférico**. 1982. 151f. Dissertação (Mestre em Engenharia Aeronáutica)- Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP.

GIACAGLIA, G.E.O. A note on Hansen's coefficients in satellite theory. **Celestial mechanics**, v.14, p.515, 1976.

HORI, G.I. "Theory of general perturbation for non-canonical systems", **Publ. Astr. Soc. Japan**, v.23,p.567-587,1971.

HORI, G.I. Theory of general perturbations with unspecified canonical variables, **Publ. Astr. Soc. Japan**, n.4, v.18, p.287-296, 1966.

JACCHIA, L. G. The Earth's upper atmosphere, *Sky e Telescope*, v.49, p. 155-159, Março, 1975.

JARNAGIN JR, P.M. Expansions in elliptic motion, **Astron. Papers Am Eph. Naut. Almanac**, v.18, XXXVI, 1965.

KAMEL, A. A.: Expansion formulae in canonical transformations depending on a small parameter, **Celestial mechanics**, v.1, p.190-199, 1969.

KAULA, W. M. **Theory of satellite geodesy**. Waltham:Bleisdell, 1966.

KING-HELE, D. G. **Theory of satellite orbits in an atmosphere**. London, ButterWorths, 1964.165p.

KUGA, H. K.; RAO, R. K.; CARRARA, V. **Satélites artificiais: movimento orbital**. São José dos Campos, INPE, 2000. ...p.

LAFONTAINE, J.; MAMEN R. Orbit lifetime prediction and safety considerations, **IAF paper** p.84-269, 1984.

LÁLA, P.; SEHNAL, L. The Earth shadowing effects in the short – periodic perturbations of satellite orbits, **Astronomical Institute of the Czechoslovak Academy of Sciences**, v.20, n.6, p. 327-330, 1969.

LIE, S.; **Theorie der transformationgruppen I**, Teubner, Leipzig, 1988.

MORANDO, B. **Mouvement d'un satellite artificiel de la terre**. Bureau des Longitudes, Paris, 1974. 255p.

OSÓRIO, J. P. **Perturbações de órbitas de satélites no estudo do campo gravitacional terrestre**. Porto: Imprensa Portuguesa, 1973.126p.

PRADO, A. F. B. DE A. **Trajatórias espaciais e manobras assistidas por gravidade**, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2001.169p.

SEGAN, S. Analytical computation of atmospheric drag effects, **Cel. Mech.**, v.41, p.381-388, 1988.

SEHNAL, L.; POSPÍŠILOVÁ L. Lifetime of the Cesar satellite. **Publ. Astr. Inst. Acad. Sci CR**, v.82, p. 6-15, 1994.

SEHNAL, L. Compararison of the thermosphere total density model TD 88 with CIRA 86, **Adv. Space Res.**, v.10, n.6, p. (6) 27-(6) 32, 1990.

SEHNAL, L.; POSPÍŠILOVÁ L. Termospheric model TD 88, **Astronon-Inst. Czechosl. Acad. Sci.**, Preprint. N°. 67, Ondrojev, 1988.

SEHNAL, L. Thermospheric total density model TD. **Bull. Astron. Inst. Czechosl.** v.39, p.120-127, 1988.

SEHNAL, L. Determination of orbital drag perturbations caused by atmospheric effects, **Adv. Space Res.** v.6, n.9, p. 151-156, 1986b.

SEHNAL, L. The semi-annual variation of the upper atmosphere density, **Bull. Astron. Inst. Czechosl.** v.37, p.196-202, 1986a.

SEHNAL, L. Determination of satellite drag coefficient from the orbital analysis of the ans satellite, in **Astro. Inst. Czechosl.** v.33, p.244 -249,1982.

SESSIN, W. A general algorithm for the determination of $T_j^{(n)}$ and $Z_j^{*(n)}$ in Hori's method for non-canonical systems, **Celestial Mechanics**, v.31, p.109-113, 1983b.

SESSIN, W. Lagrange variational equations from Hori's method for canonical system, **Cel. Mech.**, v. 29, p.361, 1983a.

VILHENA DE MORAES, R.; WNUK, E. Orbital perturbations using geopotential coefficients up to high degree and order: Highly eccentric orbits, **Advances in Astronautical Sciencies**, v.100 part 1, p.227-238, 1998.

VILHENA DE MORAES, R. Non-Gravitational disturbing forces, **Adv. Space Res.** v.14, n.5, p. (5)45-(5) 68, 1994.

VILHENA DE MORAES, R. **Analytical computation of drag perturbations using thermospheric model TD 88**, in orbital dynamics of natural and artificial objects, eds. R. V. Martins, D. Lazzaro and W. Sessin, Oservatório Nacional, Rio de Janeiro, 1989. 135p.

VILHENA DE MORAES, R.; FITZGIBBON M.T.R. **Comment on coupled perturbations on orbits of artificial Earth satellites**. In: NAGOZY, E; FERRAZ-MELLO, S.(Eds). The motion of planets and artificial satellites. Instituto Astronômico e Geofísico: Universidade de São Paulo, v.2, p.175-182, 1983.

VILHENA DE MORAES, R. Combined solar radiation pressure and drag effects on the orbits of artificial satellites, **Celestial Mechanics**, v.25, p.281 1981.

VILHENA DE MORAES, R. **Coupling term in the theory of motion of an artificial earth satellite in the presence of air drag and solar radiation pressure**. In: NAGOZY, E; FERRAZ-MELLO, S.(Eds). Natural and artificial satellite motion. Austin :University of Texas Press, p. 405-410, 1979.

VILHENA DE MORAES, R. **Ação da pressão de radiação solar e do arrasto atmosférico sobre órbitas de satélites artificiais**. 1978. 219f. Tese (Doutor em Ciências)- Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP.

VOKROUHLICKY, D.; SEHNAL, L. On some aspects of the albedo effect application to the ERS-1 satellite, **Celestial Mechanics**, v.56, p.471-490, 1993.

VRBIK, J. Zonal harmonics perturbations, **Celestial Mechanics**, v.91, p.217-237, 2005.

WNUK, E. Recent progress in analytical orbit theories, **Adv. Space Res.** v.23, n.4, p.677-687, 1999.

WNUK, E.; BREITER S. Tesseral harmonic perturbations in radial transverse and binormal components, **Celestial Mechanics**, v.48, p.375-385, 1990b.

WNUK, E. Harmonic perturbations in the keplerian orbital elements, **ACTA Astronomica**, v.40, p.191-198, 1990a.

WNUK, E. Tesseral harmonic perturbations for high order and degree harmonics, **Celestial Mechanics**, v.44, p.179-191, 1988.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ALMLEAKY, M.Y.; HELALI, E.Y.; BASURAH, M.H.; MALAWI, A.A.; GOHARJI, A.A.; ESMAIAL, N.M. Air drag effect on the motion of an artificial Earth satellite, **Earth, Moon and Planets**, v.73, p.109-115, 1996.

JIAN-BO, M.; LIN, L.; XIN, W. Problems concerning the perturbation due to the tesseral harmonic terms in the nonspherical gravitational potential of the Earth, **Chinese Astronomy and Astrophysics**, v.26, p.235-244, 2002.

KABELÁČ, J.; SEHNAL, L. Atmospheric effects on the dynamics of the Mimosa satellite, **Jornal of Geodesy**, v.76, p.536-542, 2003.

KNOWLES, H. S.; PICONE, J. M.; THONNARD, E. S.; NICHOLAS, C.A. The effect of atmospheric drag on satellite orbits during the bastille day event, **Solar Physics**, v.204, p.387-397, 2001.

ROTH, E. A. The gaussian form of the variation-of parameter equations formulated in equinoctial elements- applications: air drag and radiation pressure, **Acta Astronautica**, v.12, n.10, p.719-730, 1985.

ROY, A. E. **Orbital motion**, Institute of physics, Bristol and Philadelphia, 3nd. ed., 1998. 532p.

SERGERMAN, M.A.; COFFEY, L.S. Analytical theory for tesseral gravitational harmonics, **Celestial Mechanics**, v. 76, p.139-156, 2000.

ZANARDI, M.C, **Movimento translacional-rotacional, acoplado, de satélites artificiais**. 1983. 190f. Dissertação (MESTRE EM CIÊNCIAS)- Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP.

WYTRZYSZCZAK, I. Nonsingular elements in description of the motion of small eccentricity and inclination satellites, **Celestial Mechanics**, v.38, p.101-109, 1986.

APÊNDICE A – Geopotencial em termos das variáveis de delaunay

Geopotencial em termos das variáveis de Delaunay dado por Edwin Wnuk (1990a):

$$V = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu^2}{L^2} \sum_{m=0}^N \sum_{K=-N}^N \sum_{q=-Q}^Q \gamma_{km} (\bar{C}_m^{kq} \cos \Psi + \bar{S}_m^{kq} \sin \Psi)$$

$$\bar{C}_m^{kq} = \sum_{j=j_1}^N {}^* \bar{Q}_{jm}^{kq} \bar{C}_{jm}, \bar{S}_m^{kq} = \sum_{j=j_1}^N {}^* \bar{Q}_{jm}^{kq} \bar{S}_{jm}, \bar{Q}_{jm}^{kq} = \left(\frac{\mu}{L^2} \right)^j \bar{A}_{jm}^k (I) G_{j, (j-k)/2, q}(e),$$

$$\Psi = kg + (k+q)l + m(h-\theta) + (k-m) \frac{\pi}{2}, \gamma_{km} = (-1)^{E(\frac{k-m+1}{2})},$$

$$j_1 = \max[k, k_1 + 2E(\frac{m-k_1+1}{2})],$$

$$K_1 = |k| + 2(\delta_{ok} + \delta_{1k})$$

Parte secular da hamiltoniana

$$H[0] = \frac{\mu^2 \gamma_0}{L^2} + \frac{\mu^4 \gamma_0 \bar{C}_{2,0} \bar{A}_{20}^0 G_{2,1,0}}{2 L^6}$$

Parte periódica da hamiltoniana

$$\begin{aligned} H[1] = & \frac{1}{2 L^6} \\ & \left(\mu^4 \bar{C}_{2,0} \left(-\cos[2g+2l] \gamma_{20} \bar{A}_{20}^2 G_{2,0,0} - \cos[2g+3l] \gamma_{20} \bar{A}_{20}^2 G_{2,0,1} - \cos[2g+4l] \gamma_{20} \bar{A}_{20}^2 G_{2,0,2} - \right. \right. \\ & \left. \left. \sin[g+l] \gamma_0 \bar{A}_{20} G_{2,\frac{1}{2},0} - \sin[g+2l] \gamma_0 \bar{A}_{20} G_{2,\frac{1}{2},1} - \sin[g+3l] \gamma_0 \bar{A}_{20} G_{2,\frac{1}{2},2} \right) \right) + \\ & \frac{1}{L^2} \\ & \left(\mu^2 \left((-\cos[l+2(h-\theta)] - \sin[l+2(h-\theta)]) \gamma_0 + (-\cos[2l+2(h-\theta)] - \sin[2l+2(h-\theta)]) \gamma_0 + \right. \right. \\ & (-\cos[h-\theta] + \sin[h-\theta]) \gamma_0 + (-\cos[2(h-\theta)] - \sin[2(h-\theta)]) \gamma_0 + \\ & (-\cos[h+1-\theta] + \sin[h+1-\theta]) \gamma_0 + (-\cos[h+2l-\theta] + \sin[h+2l-\theta]) \gamma_0 + \\ & (\cos[g+h+1-\theta] + \sin[g+h+1-\theta]) \gamma_1 + (-\cos[g+1+2(h-\theta)] + \sin[g+1+2(h-\theta)]) \gamma_2 + \\ & (\cos[2g+h+2l-\theta] - \sin[2g+h+2l-\theta]) \gamma_2 + (\cos[2g+2l+2(h-\theta)] + \sin[2g+2l+2(h-\theta)]) \gamma_4 + \\ & \gamma_1 (\cos[g+h+2l-\theta] \bar{C}_1 + \sin[g+h+2l-\theta] \bar{S}_1) + \gamma_2 (-\sin[2g+h+3l-\theta] \bar{C}_1^2 + \cos[2g+h+3l-\theta] \bar{S}_1^2) + \\ & \gamma_1 (\cos[g+h+3l-\theta] \bar{C}_1^2 + \sin[g+h+3l-\theta] \bar{S}_1^2) + \gamma_2 (-\sin[2g+h+4l-\theta] \bar{C}_1^4 + \cos[2g+h+4l-\theta] \bar{S}_1^4) + \\ & \gamma_2 (\sin[g+2l+2(h-\theta)] \bar{C}_2 - \cos[g+2l+2(h-\theta)] \bar{S}_2) + \\ & \gamma_2 (\sin[g+3l+2(h-\theta)] \bar{C}_2^2 - \cos[g+3l+2(h-\theta)] \bar{S}_2^2) + \\ & \gamma_4 (\cos[2g+3l+2(h-\theta)] \bar{C}_2^2 + \sin[2g+3l+2(h-\theta)] \bar{S}_2^2) + \\ & \left. \gamma_4 (\cos[2g+4l+2(h-\theta)] \bar{C}_2^4 + \sin[2g+4l+2(h-\theta)] \bar{S}_2^4) \right) \end{aligned}$$

APÊNDICE B - Definição dos termos que aparecem nas expressões de ordem dois

Uma observação que deve ser feita em relação à solução encontrada é que o movimento médio n_b , n_g e n_h estão representados por:

$$N_{[L,G,H]} = n_{[l,g,h]}$$

Iremos representar algumas componentes que estão na solução das equações:

$$p1_{[L,G]} = 3 \frac{\sqrt{L^2 - G^2}}{L} \quad p2_{[L,G]} = \frac{G\sqrt{L^2 - G^2}}{L^2} \quad p3_{[L,G,H]} = \frac{H\sqrt{L^2 - G^2}}{L^2}$$

$$q1_{[L,G]} = \frac{8L^4 - 9G^2L^2 + 9G^4}{4L^4\sqrt{L^2 - G^2}} \quad q2_{[L,G]} = \frac{G^2}{L^3}$$

$$q3_{[L,G]} = \frac{G(L^2 - 9G^2)}{4L^3\sqrt{L^2 - G^2}} \quad q4_{[L,G]} = \frac{G}{L^2}$$

Para os argumentos das funções periódicas temos:

$$\psi_{l,g,h} = kg + (k+q)l + k \frac{\pi}{2}$$

$$\psi_{l,g,h,\Theta} = \alpha l + \beta g + \gamma h + \delta \Theta$$

$$\psi2_{l,g,h} = \sum (\alpha l + \beta g + \gamma h + l)$$

$$\psi3_{l,g,h} = \sum (\alpha l + \beta g + \gamma h - l)$$

$$\psi_{l,g,h,\theta} = kg + (k+q)l + m(h-\theta) + (k-m) \frac{\pi}{2}$$

$$N_{[L,G,H]} \tau = \psi_{l,g,h}$$

$$N2_{[L,G,H]} \tau = \psi_{l,g,h,\theta}$$

$$N3_{[L,G,H]} \tau = \psi_{l,g,h,\Theta}$$

$$N4_{[L,G,H]} \tau = \psi2_{l,g,h}$$

$$N5_{[L,G,H]} \tau = \psi3_{l,g,h}$$

APÊNDICE C – Funções periódicas

As funções periódicas de primeira ordem podem ser substituídas na expressão (4.18) para encontrar a solução dos termos periódicos e fazer análise em relação aos termos de curto e longo período que também são importantes para o estudo de satélites artificiais. Estão aqui representadas:

$$\begin{aligned}
 T_1^{ord1} = & \frac{E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \psi_{l, g, h} \right) \cos(\psi_{l, g, h})}{N_{L, G, H}} + \frac{F_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \psi_{l, g, h, \theta} \right) \cos(\psi_{l, g, h, \theta})}{N_{2L, G, H}} \\
 & + \frac{F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \psi_{l, g, h, \theta} \right) \sin(\psi_{l, g, h, \theta})}{N_{2L, G, H}} - \frac{\Sigma \rho B_L \cos(\psi_{l, g, h, \theta})}{N_{3L, G, H}} - \frac{A \mu \rho_s \sin(\psi_{l, g, h})}{N_{L, G, H}} \\
 & - \frac{A \mu \rho_s p_{L, G} \sin(\psi_{3l, g, h})}{2 N_{5L, G, H}} - \frac{A \mu \rho_s p_{L, G} \sin(\psi_{2l, g, h})}{2 N_{4L, G, H}} \\
 \\
 T_2^{ord1} = & \frac{E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \psi_{l, g, h} \right) \cos(\psi_{l, g, h})}{N_{L, G, H}} + \frac{F_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \psi_{l, g, h, \theta} \right) \cos(\psi_{l, g, h, \theta})}{N_{2L, G, H}} \\
 & + \frac{F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \psi_{l, g, h, \theta} \right) \sin(\psi_{l, g, h, \theta})}{N_{2L, G, H}} - \frac{\Sigma \rho B_G \cos(\psi_{l, g, h, \theta})}{N_{3L, G, H}} - \frac{A \mu \rho_s G \sin(\psi_{l, g, h})}{L N_{L, G, H}} \\
 & - \frac{A \mu \rho_s p_{2L, G} \sin(\psi_{3l, g, h})}{2 N_{5L, G, H}} - \frac{A \mu \rho_s p_{2L, G} \sin(\psi_{2l, g, h})}{2 N_{4L, G, H}} \\
 \\
 T_3^{ord1} = & \frac{E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \psi_{l, g, h} \right) \cos(\psi_{l, g, h})}{N_{L, G, H}} + \frac{F_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \psi_{l, g, h, \theta} \right) \cos(\psi_{l, g, h, \theta})}{N_{2L, G, H}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{F2_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \sin(\Psi_{l, g, h, \theta})}{N2_{L, G, H}} - \frac{\Sigma \rho B_H \cos(\Psi_{l, g, h, \theta})}{N3_{L, G, H}} - \frac{A \mu \rho_s H \sin(\Psi_{l, g, h})}{L N_{L, G, H}} \\
& - \frac{A \mu \rho_s p3_{L, G, H} \sin(\Psi_{3l, g, h})}{2 N5_{L, G, H}} - \frac{A \mu \rho_s p3_{L, G, H} \sin(\Psi_{2l, g, h})}{2 N4_{L, G, H}} \\
T_4^{ordl} = & - \frac{\left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L, G, H} \right) \sin(\Psi_{l, g, h})}{N_{L, G, H}} - \frac{\left(\frac{\partial}{\partial L} F1_{L, G, H} \right) \sin(\Psi_{l, g, h, \theta})}{N2_{L, G, H}} \\
& + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial L} F2_{L, G, H} \right) \cos(\Psi_{l, g, h, \theta})}{N2_{L, G, H}} + \frac{\Sigma \rho b_L \sin(\Psi_{l, g, h})}{N_{L, G, H}} + \frac{\Sigma \rho b_L \sin(\Psi_{l, g, h, \theta})}{N3_{L, G, H}} \\
& - \frac{A \mu \rho_s q1_{L, G} \cos(\Psi_{l, g, h})}{N_{L, G, H}} - \frac{A \mu \rho_s q2_{L, G} \cos(\Psi_{2l, g, h})}{N4_{L, G, H}} - \frac{A \mu \rho_s q2_{L, G} \cos(\Psi_{3l, g, h})}{N5_{L, G, H}} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \sin(\Psi_{l, g, h}) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right)}{N_{L, G, H}^2} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \sin(\Psi_{l, g, h}) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)}{N_{L, G, H}^2} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) F1_{L, G, H} \sin(\Psi_{l, g, h, \theta}) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)}{N2_{L, G, H}^2} \\
& + \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) F2_{L, G, H} \cos(\Psi_{l, g, h, \theta}) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)}{N2_{L, G, H}^2} \\
& + \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) \Sigma \rho B_L \sin(\Psi_{l, g, h, \theta}) \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s \cos(\Psi_{l, g, h})}{N3_{L, G, H}^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s \cos(\Psi_{l, g, h})}{N_{L, G, H}^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) \Sigma \rho B_H \sin(\psi_{l, g, h, \theta})}{N_{L, G, H}^3} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) F_{L, G, H} \sin(\psi_{l, g, h, \theta}) \left(\frac{\partial}{\partial g} \psi_{l, g, h, \theta} \right)}{N_{L, G, H}^2} \\
& + \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) F_{L, G, H} \cos(\psi_{l, g, h, \theta}) \left(\frac{\partial}{\partial g} \psi_{l, g, h, \theta} \right)}{N_{L, G, H}^2} \\
& + \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) \Sigma \rho B_G \sin(\psi_{l, g, h, \theta})}{N_{L, G, H}^3} - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s G \cos(\psi_{l, g, h})}{L N_{L, G, H}^2} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \sin(\psi_{l, g, h}) \left(\frac{\partial}{\partial h} \psi_{l, g, h} \right)}{N_{L, G, H}^2} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) F_{L, G, H} \sin(\psi_{l, g, h, \theta}) \left(\frac{\partial}{\partial h} \psi_{l, g, h, \theta} \right)}{N_{L, G, H}^2} \\
& + \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) F_{L, G, H} \cos(\psi_{l, g, h, \theta}) \left(\frac{\partial}{\partial h} \psi_{l, g, h, \theta} \right)}{N_{L, G, H}^2} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s H \cos(\psi_{l, g, h})}{L N_{L, G, H}^2} - \frac{3 \mu^2 E_{L, G, H} \sin(\psi_{l, g, h}) \left(\frac{\partial}{\partial l} \psi_{l, g, h} \right)}{L^4 N_{L, G, H}^2} \\
& - \frac{3 \mu^2 F_{L, G, H} \sin(\psi_{l, g, h, \theta}) \left(\frac{\partial}{\partial l} \psi_{l, g, h, \theta} \right)}{L^4 N_{L, G, H}^2} + \frac{3 \mu^2 F_{L, G, H} \cos(\psi_{l, g, h, \theta}) \left(\frac{\partial}{\partial l} \psi_{l, g, h, \theta} \right)}{L^4 N_{L, G, H}^2} \\
& + \frac{3 \mu^2 \Sigma \rho B_L \sin(\psi_{l, g, h, \theta})}{L^4 N_{L, G, H}^3} - \frac{3 \mu^3 A \rho_s \cos(\psi_{l, g, h})}{L^4 N_{L, G, H}^2} - \frac{3 \mu^3 A \rho_s p_{L, G} \cos(\psi_{l, g, h})}{2 L^4 N_{L, G, H}^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{3 \mu^3 A \rho_s p l_{L, G} \cos(\psi_{2l, g, h})}{2 L^4 N_{L, G, H}^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s p l_{L, G} \cos(\psi_{3l, g, h})}{2 N_{L, G, H}^2} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s p l_{L, G} \cos(\psi_{2l, g, h})}{2 N_{L, G, H}^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s p 2_{L, G} \cos(\psi_{3l, g, h})}{2 N_{L, G, H}^2} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s p 2_{L, G} \cos(\psi_{2l, g, h})}{2 N_{L, G, H}^2} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s p 3_{L, G, H} \cos(\psi_{3l, g, h})}{2 N_{L, G, H}^2} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s p 3_{L, G, H} \cos(\psi_{2l, g, h})}{2 N_{L, G, H}^2} \\
\\
T_5^{ordl} = & - \frac{\left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) \sin(\psi_{l, g, h})}{N_{L, G, H}} - \frac{\left(\frac{\partial}{\partial G} F l_{L, G, H} \right) \sin(\psi_{l, g, h, \theta})}{N_{2L, G, H}} \\
& + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial G} F 2_{L, G, H} \right) \cos(\psi_{l, g, h, \theta})}{N_{2L, G, H}} + \frac{\Sigma \rho b_G \sin(\psi_{l, g, h})}{N_{L, G, H}} + \frac{\Sigma \rho b_G \sin(\psi_{l, g, h, \theta})}{N_{3L, G, H}} \\
& - \frac{A \mu \rho_s q 3_{L, G} \cos(\psi_{l, g, h})}{N_{L, G, H}} + \frac{A \mu \rho_s q 4_{L, G} \cos(\psi_{2l, g, h})}{N_{4L, G, H}} \\
& + \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) F 2_{L, G, H} \cos(\psi_{l, g, h, \theta}) \left(\frac{\partial}{\partial h} \psi_{l, g, h, \theta} \right)}{N_{2L, G, H}^2} + \frac{A \mu \rho_s q 4_{L, G} \cos(\psi_{3l, g, h})}{N_{5L, G, H}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \sin(\psi_{l, g, h}) \left(\frac{\partial}{\partial h} \psi_{l, g, h} \right)}{N_{L, G, H}^2} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) F_{l, G, H} \sin(\psi_{l, g, h, \theta}) \left(\frac{\partial}{\partial h} \psi_{l, g, h, \theta} \right)}{N_{L, G, H}^2} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) F_{l, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \psi_{l, g, h, \theta} \right) \sin(\psi_{l, g, h, \theta})}{N_{L, G, H}^2} \\
& + \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \Sigma \rho B_H \sin(\psi_{l, g, h, \theta})}{N_{L, G, H}^3} - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s H \cos(\psi_{l, g, h})}{N_{L, G, H}^2 L} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \psi_{l, g, h} \right) \sin(\psi_{l, g, h})}{N_{L, G, H}^2} \\
& + \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) F_{2, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \psi_{l, g, h, \theta} \right) \cos(\psi_{l, g, h, \theta})}{N_{L, G, H}^2} \\
& + \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) F_{2, G, H} \cos(\psi_{l, g, h, \theta}) \left(\frac{\partial}{\partial g} \psi_{l, g, h, \theta} \right)}{N_{L, G, H}^2} \\
& + \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) \Sigma \rho B_G \sin(\psi_{l, g, h, \theta})}{N_{L, G, H}^3} - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s G \cos(\psi_{l, g, h})}{N_{L, G, H}^2 L} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \sin(\psi_{l, g, h}) \left(\frac{\partial}{\partial g} \psi_{l, g, h} \right)}{N_{L, G, H}^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) F l_{L, G, H} \sin(\psi_{l, g, h, \theta}) \left(\frac{\partial}{\partial g} \psi_{l, g, h, \theta} \right)}{N_{L, G, H}^2} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s p^3_{L, G, H} \cos(\psi_{3l, g, h})}{2 N_{L, G, H}^5} + \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) \Sigma \rho B_L \sin(\psi_{l, g, h, \theta})}{N_{L, G, H}^3} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s \cos(\psi_{l, g, h})}{N_{L, G, H}^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s p^3_{L, G, H} \cos(\psi_{2l, g, h})}{2 N_{L, G, H}^4} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s p^2_{L, G} \cos(\psi_{3l, g, h})}{2 N_{L, G, H}^5} - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s p^2_{L, G} \cos(\psi_{2l, g, h})}{2 N_{L, G, H}^4} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s p l_{L, G} \cos(\psi_{3l, g, h})}{2 N_{L, G, H}^5} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s p l_{L, G} \cos(\psi_{2l, g, h})}{2 N_{L, G, H}^4} \\
T_6^{ordl} = & - \frac{\left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) \sin(\psi_{l, g, h})}{N_{L, G, H}} - \frac{\left(\frac{\partial}{\partial H} F l_{L, G, H} \right) \sin(\psi_{l, g, h, \theta})}{N_{L, G, H}^2} \\
& + \frac{\left(\frac{\partial}{\partial H} F 2_{L, G, H} \right) \cos(\psi_{l, g, h, \theta})}{N_{L, G, H}^2} + \frac{\Sigma \rho b_H \sin(\psi_{l, g, h})}{N_{L, G, H}} + \frac{\Sigma \rho b_H \sin(\psi_{l, g, h, \theta})}{N_{L, G, H}^3} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) F l_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \psi_{l, g, h, \theta} \right) \sin(\psi_{l, g, h, \theta})}{N_{L, G, H}^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \sin(\Psi_{l, g, h})}{N_{L, G, H}^2} \\
& + \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \cos(\Psi_{l, g, h, \theta})}{N_{2L, G, H}^2} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s G \cos(\Psi_{l, g, h})}{N_{L, G, H}^2 L} + \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) \Sigma \rho B_L \sin(\Psi_{l, g, h, \theta})}{N_{3L, G, H}^2} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s \cos(\Psi_{l, g, h})}{N_{L, G, H}^2} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \sin(\Psi_{l, g, h}) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right)}{N_{L, G, H}^2} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) F_{lL, G, H} \sin(\Psi_{l, g, h, \theta}) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)}{N_{2L, G, H}^2} \\
& + \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) F_{2L, G, H} \cos(\Psi_{l, g, h, \theta}) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)}{N_{2L, G, H}^2} \\
& + \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \Sigma \rho B_G \sin(\Psi_{l, g, h, \theta})}{N_{3L, G, H}^2} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \sin(\Psi_{l, g, h}) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right)}{N_{L, G, H}^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) F_{L, G, H} \sin(\psi_{l, g, h, \theta}) \left(\frac{\partial}{\partial h} \psi_{l, g, h, \theta} \right)}{N_{L, G, H}^2} \\
& + \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) F_{L, G, H} \cos(\psi_{l, g, h, \theta}) \left(\frac{\partial}{\partial h} \psi_{l, g, h, \theta} \right)}{N_{L, G, H}^2} \\
& + \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) \Sigma \rho B_H \sin(\psi_{l, g, h, \theta})}{N_{L, G, H}^3} - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s H \cos(\psi_{l, g, h})}{N_{L, G, H}^2 L} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s p_{L, G} \cos(\psi_{3l, g, h})}{2 N_{L, G, H}^5} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s p_{L, G} \cos(\psi_{2l, g, h})}{2 N_{L, G, H}^4} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s p_{L, G}^2 \cos(\psi_{3l, g, h})}{2 N_{L, G, H}^5} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s p_{L, G}^2 \cos(\psi_{2l, g, h})}{2 N_{L, G, H}^4} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s p_{L, G, H}^3 \cos(\psi_{3l, g, h})}{2 N_{L, G, H}^5} \\
& - \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) A \mu \rho_s p_{L, G, H}^3 \cos(\psi_{2l, g, h})}{2 N_{L, G, H}^4}
\end{aligned}$$

APÊNDICE D – Programa em linguagem Fortran para calcular a densidade atmosférica

O modelo, programado em linguagem Fortran, para calcular a densidade atmosférica utilizando o TD 88 é representado a seguir (SEHNAL; POSPÍSILOVÁ, 1988):

```

      SUBROUTINE TD88
      (DAY,EFX,EFBAR,AKP,ALTI,HL,ALAT,ROA,DENSCH)
      C
      C.....
      C
      C INPUT
      C   DAY ..... DAY NUMBER IN THE YEAR
      C   EFX ..... SOLAR FLUX ON 10.7 CM FOR DAY - 1
      C   EFBAR .... MEAN SOLAR FLUX
      C   AKP ..... GEOMAGNETIC KP INDEX FOR HL - 3
      C   ALTI ..... ALTITUDE IN KM
      C   HL ..... LOCAL TIME IN HOURS
      C   ALAT ..... LATITUDE IN DEGREES
      C
      C OUTPUT
      C       ROA ..... TOTAL DENSITY (KG/M**3)
      C       DENSCH.... DENSITY SCALE HEIGHT
      C.....
      C
      IMPLICIT REAL *8 (A-H,O-Z)
      REAL*8 K
00210      DIMENSION K (7,4),G(12),H(7),A(8),D(7)
      DATA P3,P4,P5,P6,P7/263D0,-263D0,-29.41D0,8.0913D0,10.0813D0/
      DATA K/ 2.96815D-15, 2.81456D-14,-1.23300D-14,-1.14892D-17,
1      -3.90065D-16, 7.42439D-15,-3.41594D-16,
2      7.66373D-09,-4.40149D-09, 1.18107D-10,-1.59664D-11,
3      -2.40755D-10, 6.43785D-11, 7.44666D-12,
4      1.65738D-10, 3.34283D-10,-1.47817D-10,-6.46708D-12,
5      -1.39856D-11, 1.36185D-10, 4.54160D-12,
6      3.87086D-11, 9.35229D-11,-1.51755D-12,-2.04955D-12,
7      -3.05949D-12, 3.51700D-11, 2.07975D-12/
      DATA
A/0.007D0,0.2875D0,0.04762D0,0.0471D0,2*7D0,0.3333D0,15D0/
00320      DATA CDR/0.01745329252D0/,PI/3.14159265D0/
      C
      C .....
      C
00360      ALAR=ALAT*CDR

```

```

00370      DPI=2D0*PI
00380      OV=DPI/365D0
00390      OM=DPI/24D0
00400      FX=1D0+A(1)*(EFX-EFBAR)
00410      AK0=1D0+A(3)*(AKP-3D0)
00420      FM=(EFBAR-60D0)/160D0
00430      F0=A(2)+FM
00440      DA=DCOS(ALAR)
C
C .....
C
00480      G(1)=1D0
00490      G(2)=FM/2D0+A(4)
00500      G(3)=DSIN(OV*(DAY-P3))*DSIN(ALAR)
00510      G(4)=(A(5)*FM+1D0)*DSIN(OV*(DAY-P4))
00520      G(5)=(A(6)*FM+1D0)*DSIN(2D0*(OV*(DAY-P5)))
00530      G(6)=(A(7)*FM+1D0)*DSIN(OM*(HL-P6))*DA
00540      G(7)=(A(8)*FM+1D0)*DSIN(2D0*(OM*(HL-P7)))*DA*DA
C
C .....
C
      90 DO 45 N=1,7
00590      H(N)=0D0
00600      D(N)=0D0
      DO 45 J=2,4
00620      AUX=K(N,J)*DEXP((120D0-ALTI)/29D0/(J-1))
00630      D(N)=D(N)+AUX
00640      H(N)=H(N)-AUX/29D0/(J-1)
      45 CONTINUE
00660      D(N)=D(N)+K(N,1)
00670      ROA=0D0
00680      DROA=0D0
00690      DO 41 I=1,7
00700      DROA=DROA+H(I)*G(I)
      41 ROA=ROA+D(I)*G(I)
00720      DENSCH=-ROA/DROA
00730      ROA=ROA*FX*F0*AK0
C
C .....
C
00770      RETURN
00780      END

```

APÊNDICE E – Solução de ordem dois devido aos termos seculares das variáveis angulares l, g e h

$$Z_4^{ord2} =$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{4 N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H}^3 L^5} \left(-2 O(A^2) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H}^3 L^5 \right. \\
& - F_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} L^5 \\
& - E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L, G, H} \right) N_{L, G, H} N_{2L, G, H}^3 L^5 \\
& - E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L, G, H} \right) N_{L, G, H} N_{2L, G, H}^3 L^5 \\
& - F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} L^5 \\
& - F_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} L^5 \\
& - E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{L, G, H} \right) N_{L, G, H} N_{2L, G, H}^3 L^5 \\
& - F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} L^5 \\
& - F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} L^5 \\
& - F_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} L^5 \\
& + F_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial L \partial H^2} C_{L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} L^5 \\
& + \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) F_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} L^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial L \partial G^2} C_{L, G, H} \right) N_{L, G, H} N_{2L, G, H}^3 L^5 + \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \\
& E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) N_{L, G, H} N_{2L, G, H}^3 L^5 + E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \\
& \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) N_{L, G, H} N_{2L, G, H}^3 L^5 \\
& + F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial L \partial G^2} C_{L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} L^5 \\
& + E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial L^3} C_{L, G, H} \right) N_{L, G, H} N_{2L, G, H}^3 L^5 \\
& + \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) F_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} L^5 \\
& + F_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial L^3} C_{L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} L^5 \\
& + E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial L \partial H^2} C_{L, G, H} \right) N_{L, G, H} N_{2L, G, H}^3 L^5 \\
& + F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial L^3} C_{L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} L^5 \\
& + E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) N_{L, G, H} N_{2L, G, H}^3 L^5 \\
& + \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} L^5 \\
& + E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) N_{L, G, H} N_{2L, G, H}^3 \\
& L^5 + F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial L \partial H^2} C_{L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} L^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + F l_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial L \partial G^2} C_{L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} L^5 \\
& + \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} L^5 \\
& + \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L, G, H} \right) N_{L, G, H} N_{2L, G, H}^3 L^5 \\
& - 2 F l_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L^5 \\
& - 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 L^5 \\
& + 2 F l_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} F l_{L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H}^2 L^5 \\
& - 6 F l_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \mu^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L \\
& + 6 \mu^2 E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L, G, H} \right) N_{L, G, H} N_{2L, G, H}^3 L \\
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial G} F l_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} F l_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H}^2 L^5 \\
& - 12 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \mu^2 N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} \\
& + 6 \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{2L, G, H} \right) \mu^2 F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} L \\
& - 6 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \mu^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 L \\
& + 6 \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) \mu^2 E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{L, G, H} N_{2L, G, H}^3 L \\
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial L} F l_{L, G, H} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H}^2 L^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H}^2 L^5 \\
& + 6 \mu^2 F_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H} L \\
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H}^2 L^5 \\
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L, G, H} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^5 \\
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H}^2 L^5 \\
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{L, G, H} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H}^2 L^5 \\
& + 6 F_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \mu^2 \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H} L \\
& + 3 E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \mu^2 \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{L, G, H} N_{L, G, H}^3 L \\
& + 6 F_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \mu^2 \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H} L \\
& - 12 F_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \mu^2 N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H} \\
& - 6 F_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \mu^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L \\
& + 6 F_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \mu^2 \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H} L \\
& - 6 F_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \mu^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L \\
& - 6 F_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \mu^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -6 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \mu^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 L \\
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) N_{L, G, H}^2 N_{2L, G, H}^3 L^5 \\
& + 6 \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{l, G, H} \right) \mu^2 F_{l, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} L \\
& - 12 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \mu^2 N_{L, G, H} N_{2L, G, H}^3 \\
& + 2 F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} F_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H}^2 L^5 \\
& + 3 \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L, G, H} \right) N_{L, G, H} N_{2L, G, H}^3 L^5 \\
& - 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 L^5 - \\
& 2 F_{l, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 \\
& L^5 + 2 F_{l, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial L^2 \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} L^5 \\
& + 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial L^2 \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) N_{L, G, H} N_{2L, G, H}^3 L^5 + 2 \left(\right. \\
& \left. \frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) F_{l, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{l, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} L^5 + 3 \left(\right. \\
& \left. \frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) N_{L, G, H} \\
& N_{2L, G, H}^3 L^5 + 2 \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) N_{L, G, H} N_{2L, G, H}^3 L^5 \\
& G, H N_{2L, G, H}^3 L^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& H \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{l, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H} \\
& L^5 - 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L^5 + \\
& 2 \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{l, G, H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) F_{l, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{L, G, H}^3 \\
& N_{L, G, H} L^5 + 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \\
& N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^5 \\
& + 2 E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) N_{L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^5 \\
& + 2 E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} E_{L, G, H} \right) N_{L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^5 \\
& - 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 \\
& L^5 + 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \\
& N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^5 + 2 E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} E_{L, G, H} \right) N_{L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^5 \\
& + 3 \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^5 \\
& + 2 F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} F_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H}^2 L^5 + 4 \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{l, G, H} \right) \\
& \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) F_{l, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^5 + 2 F_{2L, G, H} \\
& \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H}
\end{aligned}$$

$$_{G,H} L^5$$

$$\begin{aligned}
& -2 F l_{L,G,H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{2L,G,H} \right) N_{L,G,H}^3 \\
& L^5 + 2 F l_{L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} F l_{L,G,H} \right) N_{L,G,H}^3 N_{2L,G,H}^2 L^5 - 2 F_{2L,G,H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{2L,G,H} \right) N_{L,G,H}^3 L^5 \\
& + 2 F_{2L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} F_{2L,G,H} \right) N_{L,G,H}^3 N_{2L,G,H}^2 L^5 \\
& + 2 F l_{L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} F l_{L,G,H} \right) N_{L,G,H}^3 N_{2L,G,H}^2 L^5 \\
& - 2 F_{2L,G,H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l,g,h,\theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{2L,G,H} \right) N_{L,G,H}^3 L^5 \\
& + 2 E_{L,G,H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l,g,h} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial L \partial H \partial G} C_{L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l,g,h} \right) N_{L,G,H} N_{2L,G,H}^3 L^5 + 4 \left(\frac{\partial}{\partial L} F l_{L,G,H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L,G,H} \right) F l_{L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) N_{L,G,H}^3 N_{2L,G,H}^3
\end{aligned}$$

$$_{G,H} L^5$$

$$\begin{aligned}
& + 2 F_{2L,G,H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial L^2 \partial G} C_{L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) N_{L,G,H}^3 N_{2L,G,H} L^5 \\
& + 2 F l_{L,G,H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial L \partial H \partial G} C_{L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) N_{L,G,H}^3 N_{2L,G,H}
\end{aligned}$$

$$L^5$$

$$-2 F_{2L,G,H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{2L,G,H} \right) N_{L,G,H}^3$$

$$L^5$$

$$-2 E_{L,G,H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l,g,h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l,g,h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L,G,H} \right) N_{2L,G,H}^3 L^5$$

$$\begin{aligned}
& + 2 F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} L^5 - 2 \\
& F_{1L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 \\
& L^5 - 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{2L, G, H} \right) \\
& N_{L, G, H}^3 L^5 \\
& + 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial L^2 \partial H} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} L^5 \\
& - 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 L^5 \\
& - 2 F_{1L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 \\
& L^5 + 2 E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} E_{L, G, H} \right) N_{L, G, H}^2 N_{2L, G, H}^3 L^5 \\
& - 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 L^5 \\
& - 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L^5 - 2 \\
& F_{1L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L^5 \\
& + 3 \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) F_{1L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{1L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} L^5 \\
& + 2 F_{1L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{1L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{2L, G, H} L^5 \\
& + 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial L^2 \partial H} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{L, G, H} N_{2L, G, H}^3 L^5 + 2 F_{2L,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& {}_{G,H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{2L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) N_{L,G,H}^3 N_{2L,G,H} \\
& L^5 + 2 F_{2L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{2L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) N_{L,G,H}^3 \\
& N_{2L,G,H} L^5 - 2 F_{2L,G,H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{2L,G,H} \right. \\
& \left. {}_H \right) N_{L,G,H}^3 L^5 \\
& - 2 E_{L,G,H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l,g,h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l,g,h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L,G,H} \right) N_{2L,G,H}^3 L^5 \\
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{1L,G,H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L,G,H} \right) F_{1L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l,g,h,\theta} \right)^2 N_{L,G,H}^3 N_{2L,G,H} L^5 \\
& - 2 F_{1L,G,H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l,g,h,\theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{2L,G,H} \right) N_{L,G,H}^3 L^5 \\
& - 2 E_{L,G,H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l,g,h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{L,G,H} \right) N_{2L,G,H}^3 L^5 - \\
& 2 F_{1L,G,H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{2L,G,H} \right) N_{L,G,H}^3 \\
& L^5 + 2 F_{1L,G,H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial L^2 \partial H} C_{L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l,g,h,\theta} \right) N_{L,G,H}^3 N_{2L,G,H} L^5 \\
& \left. \right) + \frac{1}{4 N_{L,G,H}^2 L^4} \left(6 \Sigma \rho b_L \mu^2 E_{L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h} \right)^2 \right. \\
& + 2 \Sigma \rho b_G \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L,G,H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l,g,h} \right) N_{L,G,H} L^4 \\
& - \Sigma \rho E_{L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h} \right) b_L \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{L,G,H} \right) L^4 \\
& \left. + 2 \Sigma \rho E_{L,G,H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l,g,h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} b_L \right) N_{L,G,H} L^4 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3 \Sigma \rho b_G \mu^2 E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \\
& + 4 \Sigma \rho \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L, G, H} \right) b_L \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) N_{L, G, H} L^4 \\
& - \Sigma \rho E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) b_L \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L, G, H} \right) L^4 \\
& + 2 \Sigma \rho \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) b_L \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) N_{L, G, H} L^4 \\
& - \Sigma \rho E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) b_L \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L, G, H} \right) L^4 \\
& + 2 \Sigma \rho \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) b_L \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) N_{L, G, H} L^4 \\
& + \Sigma \rho b_G \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right)^2 L^4 \\
& + 2 \Sigma \rho b_L \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 L^4 \\
& + \Sigma \rho b_G \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& + \Sigma \rho b_G \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& + 3 \Sigma \rho b_L \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& + 3 \Sigma \rho b_L \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& + 2 \Sigma \rho \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) b_L \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& + \Sigma \rho \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right)^2 b_L L^4
\end{aligned}$$

$$+ \Sigma \rho \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right)^2 b_L L^4 + 2 O(\rho^2) N_{L, G, H}^2 L^4 \Bigg)$$

$$\begin{aligned} Z_5^{ord2} = & \frac{1}{4 N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H}^3 L^4} \left(2 O(A^2) N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H}^3 L^4 + 2 O(\rho^2) N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H}^3 L^4 \right. \\ & - \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\ & - E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial G^3} C_{L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\ & + \Sigma N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H} \rho \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 b_G L^4 \\ & - E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\ & + \Sigma N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H} \rho \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right)^2 b_G L^4 \\ & - F_{l, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial G^3} C_{L, G, H} \right) N_{L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\ & - \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) F_{l, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{l, G, H} \right) N_{L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\ & - \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\ & - F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial H^2 \partial G} C_{L, G, H} \right) N_{L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\ & - E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& L^4 - E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial L^2 \partial G} C_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\
& - \Sigma N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} \rho E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) b_G \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L, G, H} \right) L^4 \\
& - \Sigma N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} \rho E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) b_G \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{L, G, H} \right) L^4 \\
& - \Sigma N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} \rho E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) b_G \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L, G, H} \right) L^4 \\
& + F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{2L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{2L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\
& + F_{1L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{1L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{2L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + F_{1L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{1L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{2L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\
& + E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\
& + F_{1L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{1L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{2L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{2L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + \Sigma N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} \rho b_L \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) L^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - F l_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial H^2 \partial G} C_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 - E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\
& - \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) F l_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial G} F l_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& - \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\
& + \Sigma N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} \rho b_L \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& + \Sigma N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} \rho b_L \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 L^4 \\
& - F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial L^2 \partial G} C_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& - E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial H^2 \partial G} C_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\
& - F l_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial L^2 \partial G} C_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& - F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial G^3} C_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 - \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\
& - 2 E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} E_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H}^2 L^4 - 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) F l_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} F l_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 - 2 F l_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} F l_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& - 2 F_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& - 2 E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\
& - 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial L \partial G^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 F_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& - 3 \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& - 2 \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 L^4 \\
& - 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial L \partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 \Sigma N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} \rho \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right)^2 b_G L^4 \\
& + 3 \Sigma N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} \rho b_G \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& + 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 L^4 - \\
& 2 E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& L^4 - 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial H \partial G^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& - 2 F_{l, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} F_{l, G, H} \right) N_{2L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 L^4 \\
& - 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial H \partial G^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\
& - 2 F_{l, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} F_{l, G, H} \right) N_{2L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& - 2 E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} E_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H}^2 L^4 \\
& - 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial L \partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 - 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) F_{l, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{l, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} \\
& N_{L, G, H}^3 L^4 - 4 \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 - 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 - 2 \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& - 3 \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) F_{l, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{l, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 F_{l, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& - 2 F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} F_{2L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 3 \Sigma N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H}^2 \rho \mu^2 E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 b_G \\
& + 2 \Sigma N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H}^2 \rho E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} b_G \right) L^4 \\
& + 4 \Sigma N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H}^2 \rho b_G \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& + 2 \Sigma N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H}^2 \rho b_L \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& + 2 \Sigma N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H}^2 \rho \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) b_G \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& + 2 \Sigma N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H}^2 \rho \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L, G, H} \right) b_G \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& - 3 \mu^2 E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} \\
& - 2 \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{2L, G, H} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& - 3 \mu^2 F_{lL, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{lL, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 \\
& - 2 \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H}^2 L^4 \\
& - 2 \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{lL, G, H} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H}^2 L^4 \\
& -3 \mu^2 F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{2L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 \\
& -2 \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{l, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{l, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& -2 \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{l, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{l, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& -2 \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& +3 \Sigma N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} \rho b_G \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& -2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial L \partial G^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 + 2 \\
& F_{l, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 \\
& L^4 - 3 \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\
& + 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 L^4 \\
& - 2 F_{l, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial L \partial G^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 - 4 \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} \\
& N_{L, G, H}^3 L^4 + 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \left(\frac{\partial}{\partial L} F l_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) F l_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 L^4 + 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L^4 + 2 \\
& F l_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 \\
& L^4 + 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{2L, G, H} \right) \\
& N_{L, G, H}^3 L^4 - 2 F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \\
& N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 - 2 \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \\
& N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\
& - 2 F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} F_{2L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& - 3 \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right)^2 N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\
& + 2 F l_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 \\
& L^4 - 2 F l_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} F l_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} \\
& N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 L^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 \\
& L^4 \\
& + 2 F_{lL, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 \\
& L^4 + 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{2L, G, H} \right) \\
& N_{L, G, H}^3 L^4 - 2 F_{lL, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{lL, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \\
& N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 - 2 F_{lL, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} F_{lL, G, H} \right) N_{2L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^4 - \\
& 2 \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} \\
& N_{L, G, H}^3 L^4 + 2 F_{lL, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{2L, G, H} \right) \\
& N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 F_{lL, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L^4 - 2 F_{2L, G, H} \\
& H \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 \\
& L^4 - 2 F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} F_{2L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 F l_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial H \partial G^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 \\
& L^4 - 2 \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& - 2 E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} E_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H}^2 L^4 + 2 F l_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \\
& \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L^4 - 4 \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) \\
& E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 + 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) \\
& \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L^4 - 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \\
& F l_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} F l_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} \\
& N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 \Sigma N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} \rho \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) b_G \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& - 2 F l_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial L \partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 - \\
& 2 F l_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} F l_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} \\
& N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 L^4
\end{aligned}$$

$$+ 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L^4 \right)$$

$$Z_6^{ord2} =$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{4 N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H}^3 L^4} \left(-2 O(A^2) N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H}^3 L^4 \right. \\ & + E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial L^2 \partial H} C_{L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\ & + \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\ & + \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) F_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{L, G, H} \right) N_{L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\ & + E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\ & + F_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial H^3} C_{L, G, H} \right) N_{L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\ & + F_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial H \partial G^2} C_{L, G, H} \right) N_{L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\ & + F_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial H \partial G^2} C_{L, G, H} \right) N_{L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\ & - F_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L, G, H} \right) N_{L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\ & - F_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L, G, H} \right) N_{L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\
& -F_{l, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{l, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{2L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& -F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{2L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& -E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\
& -E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\
& -F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{2L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& -F_{l, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{l, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{2L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& +E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial H \partial G^2} C_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\
& + \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) F_{l, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{l, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{2L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& +F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial L^2 \partial H} C_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& +F_{l, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial H^3} C_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& +F_{l, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial L^2 \partial H} C_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{2L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial^3}{\partial H^3} C_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\
& + \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\
& + 2 F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} F_{2L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& - 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& - 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 L^4 \\
& - 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 L^4 \\
& - 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial L \partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 3 \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 F_{1L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial L \partial H^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& - 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 L^4 + 4 \left(\right. \\
& \quad \left. \frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} \\
& N_{L, G, H}^3 L^4 - 2 F_{1L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 F_{1L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial H^2 \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 F l_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} F l_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 - 2 \\
& F l_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 \\
& L^4 + 2 F l_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} F l_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} \\
& N_{L, G, H}^3 L^4 + 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \\
& N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 - 2 F l_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{2L, G, H} \right) \\
& N_{L, G, H}^3 L^4 + 2 \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \\
& N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 - 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \\
& \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 3 \left(\frac{\partial}{\partial H} F l_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) F l_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\
& + 2 F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} F_{2L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} E_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H}^2 L^4 \\
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{2L, G, H} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{lL, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{lL, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 3 \mu^2 F_{lL, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{lL, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 \\
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{lL, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{lL, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H}^2 L^4 \\
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{lL, G, H} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H}^2 L^4 \\
& + 3 \mu^2 F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{2L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 \\
& - 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 L^4 \\
& + 3 \mu^2 E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} + 2 E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 + 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) F_{lL, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{lL, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{2L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& F l_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 \\
& L^4 \\
& + 2 F l_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial L \partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial H^2 \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\
& + 2 F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{2L, G, H} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& - 2 F l_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 \\
& L^4 + 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial L \partial H^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\
& + 2 E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} E_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H}^2 L^4 + 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right. \\
& \left. F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \right. \\
& \left. - 2 F l_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 \right. \\
& L^4 + 2 \left(\frac{\partial}{\partial G} F l_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) F l_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 + \\
& 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} \\
& H L^4 \\
& + 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial H^2 \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 - \\
& 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& L^4 + 2 E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} E_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H}^2 L^4 + 4 \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{2L, G, H} \right) \left(\right. \\
& \left. \frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 + 2 \left(\frac{\partial}{\partial G} \right. \\
& \left. E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 + 4 \left(\right. \\
& \left. \frac{\partial}{\partial H} F_{1L, G, H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) F_{1L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} \\
& N_{L, G, H}^3 L^4 - 2 F_{1L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial L \partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 + 2 \\
& F_{1L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{1L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} \\
& N_{L, G, H}^3 L^4 + 2 \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right. \\
& \left. \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 + 2 E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \right. \\
& \left. \Psi_{l, g, h} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} L^4 \\
& + 2 F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} F_{2L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^4 + 2 \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{1L, G, H} \right) \\
& \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) F_{1L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 - 2 \\
& F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 \\
& L^4 + 2 F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} \\
& N_{L, G, H}^3 L^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 L^4 \\
& + 2 F_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} F_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& - 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& - 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 \\
& L^4 - 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L^4 - 2 \\
& F_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 \\
& L^4 + 4 \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) F_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} F_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} \\
& N_{L, G, H}^3 L^4 + 2 F_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} F_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& - 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 L^4 + \\
& 2 F_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} F_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} \\
& N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& - 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 L^4 + \\
& 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) N_{2L, G, H}^3 N_{L, G, H} \\
& H L^4 - 2 E_{L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^3 L^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^3}{\partial L \partial H^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 \\
& - 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 \\
& L^4 + 2 F_{1L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} F_{1L, G, H} \right) N_{2L, G, H}^2 N_{L, G, H}^3 L^4 + 2 F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \right. \\
& \left. \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} N_{L, G, H}^3 L^4 + 2 \left(\right. \\
& \left. \frac{\partial}{\partial L} F_{2L, G, H} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) F_{2L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) N_{2L, G, H} \\
& N_{L, G, H}^3 L^4 - 2 F_{1L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 L^4 - \\
& 2 F_{2L, G, H}^2 \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h, \theta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{2L, G, H} \right) N_{L, G, H}^3 \\
& L^4 \left. \right) + \frac{1}{4 N_{L, G, H}^2 L^4} \left(-\Sigma \rho E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) b_H \left(\frac{\partial}{\partial L} N_{L, G, H} \right) L^4 \right. \\
& + 2 \Sigma \rho \left(\frac{\partial}{\partial L} E_{L, G, H} \right) b_H \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) N_{L, G, H} L^4 \\
& + 2 \Sigma \rho \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) b_H \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) N_{L, G, H} L^4 \\
& + 2 \Sigma \rho E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial H} b_H \right) N_{L, G, H} L^4 \\
& - \Sigma \rho E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) b_H \left(\frac{\partial}{\partial H} N_{L, G, H} \right) L^4 + 3 \Sigma \rho \mu^2 E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 b_H \\
& + 2 \Sigma \rho b_L \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) N_{L, G, H} L^4 \\
& + 2 \Sigma \rho \left(\frac{\partial}{\partial G} E_{L, G, H} \right) b_H \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) N_{L, G, H} L^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \Sigma \rho b_G \left(\frac{\partial}{\partial H} E_{L, G, H} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) N_{L, G, H} L^4 \\
& - \Sigma \rho E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) b_H \left(\frac{\partial}{\partial G} N_{L, G, H} \right) L^4 \\
& + \Sigma \rho \left(\frac{\partial^2}{\partial G^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right)^2 b_H L^4 \\
& + 2 \Sigma \rho \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) b_H \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& + \Sigma \rho \left(\frac{\partial^2}{\partial L^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 b_H L^4 \\
& + \Sigma \rho b_G \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right)^2 L^4 \\
& + 2 \Sigma \rho \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) b_H \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& + 2 \Sigma \rho \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) b_H \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& + \Sigma \rho b_G \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& + \Sigma \rho b_L \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& + \Sigma \rho b_G \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 \\
& + \Sigma \rho b_L \left(\frac{\partial^2}{\partial L \partial H} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right)^2 L^4 \\
& + \Sigma \rho \left(\frac{\partial^2}{\partial H^2} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial h} \Psi_{l, g, h} \right)^2 b_H L^4 \\
& + \Sigma \rho b_L \left(\frac{\partial^2}{\partial H \partial G} C_{L, G, H} \right) E_{L, G, H} \left(\frac{\partial}{\partial l} \Psi_{l, g, h} \right) \left(\frac{\partial}{\partial g} \Psi_{l, g, h} \right) L^4 + 2 O(\rho^2) N_{L, G, H}^2 L^4
\end{aligned}$$

)

APÊNDICE F- Funções geratrizes $T_4^{(1)}, T_5^{(1)}$ e $T_6^{(1)}$

$$\begin{aligned}
 T_4 = & \frac{1}{n_l} \left(-\mu^4 J_2 a_e^2 \left(\frac{3}{2L^7} - \frac{9H^2}{2L^7 G^2} \right) \left(3e + \frac{27}{8} e^3 \right) \sin(l) \right. \\
 & - \frac{2\sqrt{\mu} A e^{(-\alpha a)} L \left[e + \left(-1 + \frac{\alpha^2 a^2}{8} \right) e^3 \right] \cos(l)}{\sqrt{a} e^2 G} + \left(\frac{3\mu^2}{L^4} + \mu^4 J_2 a_e^2 \left(-\frac{3}{L^5 G^3} + \frac{9H^2}{L^5 G^5} \right) \right. \\
 & + \frac{3}{8} \mu^6 J_4 a_e^4 \left(\frac{3}{8G^7} - \frac{15H^2}{4G^9} + \frac{35H^4}{8G^{11}} \right) \left(\frac{45}{L^7 G^5} - \frac{30}{L^5 G^7} \right) \left. \right) \left(\mu^4 J_2 a_e^2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{3H^2}{4G^2} \right) \left(3e + \frac{27}{8} e^3 \right) \sin(l) \right. \\
 & \left. \left. \frac{L^6 n_1}{\mu A e^{(-\alpha a)} \left((3 + \alpha a) e + \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2} \alpha a + \frac{7}{8} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{8} \alpha^3 a^3 \right) e^3 \right) \cos(l)} \right) + \frac{1}{L n_1} \left(\left(\mu^4 J_2 a_e^2 \left(-\frac{9}{4L^4 G^4} + \frac{45H^2}{4L^4 G^6} \right) + \frac{3}{8} \mu^6 J_4 a_e^4 \left(-\frac{21}{8G^8} + \frac{135H^2}{4G^{10}} - \frac{385H^4}{8G^{12}} \right) \left(-\frac{15}{2L^6 G^5} + \frac{15}{2L^4 G^7} \right) \right. \right. \right. \\
 & + \frac{3}{8} \mu^6 J_4 a_e^4 \left(\frac{3}{8G^7} - \frac{15H^2}{4G^9} + \frac{35H^4}{8G^{11}} \right) \left(\frac{75}{2L^6 G^6} - \frac{105}{2L^4 G^8} \right) \left. \right) \mu A e^{(-\alpha a)} G \left((1 + \alpha a) e \right. \\
 & + \left. \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \alpha a + \frac{1}{8} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{8} \alpha^3 a^3 \right) e^3 \right) \cos(l) \left. \right) + \frac{1}{L n_1} \left(\left(-\frac{9}{2} \frac{\mu^4 J_2 a_e^2 H}{L^4 G^5} \right. \right. \\
 & + \left. \left. \frac{3}{8} \mu^6 J_4 a_e^4 \left(-\frac{15H}{2G^9} + \frac{35H^3}{2G^{11}} \right) \left(-\frac{15}{2L^6 G^5} + \frac{15}{2L^4 G^7} \right) \right) \mu A e^{(-\alpha a)} H \left((1 + \alpha a) e \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \alpha a + \frac{1}{8} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{8} \alpha^3 a^3 \right) e^3 \cos(l) \Bigg) \Bigg) \\
T_5^{ordl} = & \frac{1}{n_l} \left(\frac{3}{2} \frac{\mu^4 J_2 a_e^2 H^2 \left(3e + \frac{27}{8} e^3 \right) \sin(l)}{L^6 G^3} - \frac{2\sqrt{\mu} A e^{(-\alpha a)} \left[e + \left(-1 + \frac{\alpha^2 a^2}{8} \right) e^3 \right] \cos(l)}{\sqrt{a} e^2} + \left(\mu^4 J_2 a_e^2 \left(-\frac{9}{4L^4 G^4} + \frac{45H^2}{4L^4 G^6} \right) \right. \right. \\
& + \frac{3}{8} \mu^6 J_4 a_e^4 \left(-\frac{21}{8G^8} + \frac{135H^2}{4G^{10}} - \frac{385H^4}{8G^{12}} \right) \left(-\frac{15}{2L^6 G^5} + \frac{15}{2L^4 G^7} \right) \\
& + \frac{3}{8} \mu^6 J_4 a_e^4 \left(\frac{3}{8G^7} - \frac{15H^2}{4G^9} + \frac{35H^4}{8G^{11}} \right) \left(\frac{75}{2L^6 G^6} - \frac{105}{2L^4 G^8} \right) \Bigg) \Bigg(\\
& \frac{\mu^4 J_2 a_e^2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{3H^2}{4G^2} \right) \left(3e + \frac{27}{8} e^3 \right) \sin(l)}{L^6 n_1} \\
& + \frac{\mu A e^{(-\alpha a)} \left((3 + \alpha a) e + \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2} \alpha a + \frac{7}{8} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{8} \alpha^3 a^3 \right) e^3 \right) \cos(l)}{n_1} \Bigg) + \frac{1}{L n_1} \left(\left(\mu^4 J_2 a_e^2 \left(-\frac{3}{L^3 G^5} + \frac{45H^2}{2L^3 G^7} \right) \right. \right. \\
& + \frac{3}{8} \mu^6 J_4 a_e^4 \left(\frac{21}{G^9} - \frac{675H^2}{2G^{11}} + \frac{1155H^4}{2G^{13}} \right) \left(\frac{3}{2L^5 G^5} - \frac{5}{2L^3 G^7} \right) \\
& + \frac{3}{4} \mu^6 J_4 a_e^4 \left(-\frac{21}{8G^8} + \frac{135H^2}{4G^{10}} - \frac{385H^4}{8G^{12}} \right) \left(-\frac{15}{2L^5 G^6} + \frac{35}{2L^3 G^8} \right) \\
& + \frac{3}{8} \mu^6 J_4 a_e^4 \left(\frac{3}{8G^7} - \frac{15H^2}{4G^9} + \frac{35H^4}{8G^{11}} \right) \left(\frac{45}{L^5 G^7} - \frac{140}{L^3 G^9} \right) \Bigg) \mu A e^{(-\alpha a)} G \left((1 + \alpha a) e \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \alpha a + \frac{1}{8} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{8} \alpha^3 a^3 \right) e^3 \cos(l) \Bigg) + \frac{1}{L n_1} \left(\left(-\frac{15}{2} \frac{\mu^4 J_2 a_e^2 H}{L^3 G^6} \right. \right. \\
& + \frac{3}{8} \mu^6 J_4 a_e^4 \left(\frac{135 H}{2 G^{10}} - \frac{385 H^3}{2 G^{12}} \right) \left(\frac{3}{2 L^5 G^5} - \frac{5}{2 L^3 G^7} \right) \\
& + \frac{3}{8} \mu^6 J_4 a_e^4 \left(-\frac{15 H}{2 G^9} + \frac{35 H^3}{2 G^{11}} \right) \left(-\frac{15}{2 L^5 G^6} + \frac{35}{2 L^3 G^8} \right) \Bigg) \mu A e^{(-\alpha a)} H \left((1 + \alpha a) e \right. \\
& \left. \left. + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \alpha a + \frac{1}{8} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{8} \alpha^3 a^3 \right) e^3 \cos(l) \right) \right) \\
\\
T_6^{ordl} = & \frac{1}{n_l} \left(-\frac{3}{2} \frac{\mu^4 J_2 a_e^2 H \left(3e + \frac{27}{8} e^3 \right) \sin(l)}{L^6 G^2} + \left(-\frac{9}{2} \frac{\mu^4 J_2 a_e^2 H}{L^4 G^5} \right. \right. \\
& + \frac{3}{8} \mu^6 J_4 a_e^4 \left(-\frac{15 H}{2 G^9} + \frac{35 H^3}{2 G^{11}} \right) \left(-\frac{15}{2 L^6 G^5} + \frac{15}{2 L^4 G^7} \right) \Bigg) \left(\left(\mu^4 J_2 a_e^2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{3 H^2}{4 G^2} \right) \left(3e + \frac{27}{8} e^3 \right) \sin(l) \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{L^6 n_1}{L^6 n_1} \right. \right. \\
& + \frac{\mu A e^{(-\alpha a)} \left((3 + \alpha a) e + \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2} \alpha a + \frac{7}{8} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{8} \alpha^3 a^3 \right) e^3 \right) \cos(l)}{n_1} \Bigg) + \frac{1}{L n_1} \left(\left(-\frac{15}{2} \frac{\mu^4 J_2 a_e^2 H}{L^3 G^6} \right. \right. \\
& + \frac{3}{8} \mu^6 J_4 a_e^4 \left(\frac{135 H}{2 G^{10}} - \frac{385 H^3}{2 G^{12}} \right) \left(\frac{3}{2 L^5 G^5} - \frac{5}{2 L^3 G^7} \right) \\
& + \frac{3}{8} \mu^6 J_4 a_e^4 \left(-\frac{15 H}{2 G^9} + \frac{35 H^3}{2 G^{11}} \right) \left(-\frac{15}{2 L^5 G^6} + \frac{35}{2 L^3 G^8} \right) \Bigg) \mu A e^{(-\alpha a)} G \left((1 + \alpha a) e \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \alpha a + \frac{1}{8} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{8} \alpha^3 a^3 \right) e^3 \cos(l) \Bigg) + \frac{1}{L n_1} \left(\left(\frac{3}{2} \frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L^3 G^5} \right. \right. \\
& + \frac{3}{8} \mu^6 J_4 a_e^4 \left(-\frac{15}{2 G^9} + \frac{105 H^2}{2 G^{11}} \right) \left(\frac{3}{2 L^5 G^5} - \frac{5}{2 L^3 G^7} \right) \Bigg) \mu A e^{(-\alpha a)} H \left((1 + \alpha a) e \right. \\
& \left. \left. + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \alpha a + \frac{1}{8} \alpha^2 a^2 + \frac{1}{8} \alpha^3 a^3 \right) e^3 \cos(l) \right) \right) \Bigg)
\end{aligned}$$