

LUAN VINICIO DE MATTOS FERREIRA SILVA

**TOROS INVARIANTES E ESTABILIDADE GLOBAL DE SOLUÇÕES EM
OSCILADORES NÃO SUAVES**

Relatório de Pós-doutorado realizado na
Universidade Estadual Paulista (UNESP),
Instituto de Biociências, Letras e Ciências
Exatas, São José do Rio Preto.

Supervisor(a): Prof. Dr. Claudio Aguinaldo
Buzzi

PROPe-UNESP - Projeto N° 5482

São José do Rio Preto

2025

Relatório Científico Final
TOROS INVARIANTES E ESTABILIDADE GLOBAL DE SOLUÇÕES EM
OSCILADORES NÃO SUAVES

Luan Vinicio de Mattos Ferreira Silva

Pós-doutorando

*Departamento de Matemática, Universidade Estadual Paulista, 15054-000, São José do Rio Preto,
SP, Brasil.*

luan.m.silva@unesp.br

Claúdio Aguinaldo Buzzi

Supervisor

*Departamento de Matemática, Universidade Estadual Paulista, 15054-000, São José do Rio Preto,
SP, Brasil.*

claudio.buzzi@unesp.br

1. RESUMO

Neste Relatório Científico Final (RCF), pretendemos descrever as principais atividades científicas, de ensino e de extensão realizadas pelo candidato durante o estágio pós-doutoral contemplado pelo Edital PROPG 06/2024. Destacamos que o resultado do projeto submetido foi publicado e que, em conjunto com o supervisor e o pesquisador Paulo Santana (também doutorando do IBILCE), iniciamos um novo estudo no qual buscamos estender o λ -Lemma, resultado que trata do emaranhamento entre variedades estáveis e instáveis de pontos periódicos, no caso de mapas, e de órbitas periódicas, no caso de campos vetoriais, para o contexto de campos vetoriais não suaves. Nosso principal objetivo com esse trabalho é demonstrar, de forma analítica, a existência de comportamento caótico em campos vetoriais não suaves quando as variedades estáveis e instáveis de órbitas periódicas se intersectam transversalmente.

Além disso, salientamos que o bolsista realizou outras atividades acadêmicas, as quais serão detalhadas ao longo deste relatório, tais como: participação em congressos, pareceres para periódicos de impacto, atuação nos seminários do grupo de pesquisa e lecionamento da disciplina de Álgebra Linear no curso de verão do Mestrado em Matemática do IBILCE.

2. INTRODUÇÃO

De acordo com as normas previstas no Edital 06/2024 do Programa UNESP de Pós-doutorado, a seguir descrevemos as informações e atividades referentes ao Projeto de Pesquisa “Toros Invariantes e Estabilidade global de soluções em osciladores não suaves”

3. OBJETIVO

Inicialmente, o projeto de pesquisa intitulado “Toros Invariantes e Estabilidade Global de Soluções em Osciladores Não Suaves” teve como objetivo o estudo da limitação de todas as soluções da equação diferencial descontínua de segunda ordem

$$(1) \quad \ddot{x} + \operatorname{sgn}(x) = \varepsilon p(t)$$

em que sgn denota a função sinal usual, ε é um parâmetro real de perturbação e $p(t)$ é uma função analítica e σ -periódica. Esse resultado, desenvolvido em colaboração com os pesquisadores Tere Seara e Jordi Villanueva, da Universitat Politècnica de Catalunya, foi publicado na Journal of Differential Equations, conforme referência [10].

partir desse trabalho, deu-se início a uma nova linha de investigação dedicada à extensão do λ -Lemma, um resultado clássico demonstrado por J. Palis em [6], que trata do emaranhamento entre variedades estáveis e instáveis de órbitas periódicas, para o contexto de sistemas dinâmicos não suaves. Esse novo estudo, intitulado “A Piecewise Smooth λ -Lemma”, encontra-se em fase final de redação e será submetido em breve a uma revista de alto impacto na área. A seguir, descrevemos brevemente os principais resultados obtidos até o momento.

3.1. Resultados parciais. O resultado obtido é referente a campos vetoriais suaves por partes onde, ao menos numa vizinha da conexão homoclínica ou heteroclínica, possui somente soluções costurantes, cuja definição pode ser conferida a seguir.

Definição 1. *Sejam $h_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, com $n \geq 2$, $i \in \{1, \dots, N\}$, $N \geq 1$, funções suaves, e defina-se $\Sigma_i = h_i^{-1}(0)$, em que 0 não é necessariamente um valor regular. Definimos a variedade de descontinuidade como $\Sigma = \cup_{i=1}^N \Sigma_i$, e sejam A_1, \dots, A_k , com $k \geq 2$, as componentes conexas de $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$. Para cada $j \in 1, \dots, k$, seja $X_0^j = X_0^j(x)$ um campo vetorial autônomo e suave definido em uma vizinhança de $\overline{A_j}$. Dizemos que X_0^j é uma componente do campo vetorial autônomo por partes suave $Z_0 := (X_0^1, \dots, X_0^k)$.*

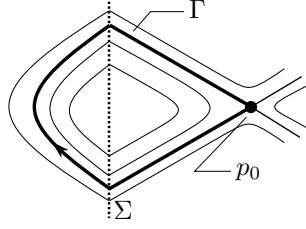
Definição 2 (Ponto de costura). *Seja Z_0 um campo vetorial autônomo por partes suave com conjunto de descontinuidade Σ . Dizemos que $x_0 \in \Sigma$ é um ponto de costura de Z_0 se as seguintes condições forem satisfeitas:*

- (i) *Existe um único $i \in 1, \dots, N$ tal que $x_0 \in \Sigma_i$;*
- (ii) *$\nabla h_i(x_0) \neq 0$;*
- (iii) *$X_0^a h_i(x_0) X_0^b h_i(x_0) > 0$, em que X_0^a e X_0^b são as únicas duas componentes de Z_0 definidas em x_0 ;*

Aqui, $Xh_i(x_0) := \langle X(x_0), \nabla h_i(x_0) \rangle$ denota a derivada de Lie de h_i na direção do campo vetorial X no ponto x_0 .

Dado um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, a dinâmica de Z_0 é a seguinte. Se $x_0 \notin \Sigma$, então existe um único $j \in \{1, \dots, N\}$ tal que $x_0 \in A_j$. Assim, a trajetória local de Z_0 em x_0 é dada pela trajetória local de X_0^j , no sentido clássico. Se $x_0 \in \Sigma$ é um ponto de costura, então, pela Definição 2, existem exatamente duas componentes, X_0^a e X_0^b , de Z_0 definidas em x_0 , e as trajetórias locais associadas a esses campos são transversais a Σ e possuem a mesma orientação. Portanto, a trajetória local de Z_0 em x_0 é definida como a concatenação das trajetórias locais de X_0^a e X_0^b , seguindo a orientação dada, a qual é determinada por $\operatorname{sign}(X_0^a h_i(x_0)) = \operatorname{sign}(X_0^b h_i(x_0))$.

Este breve resumo trata apenas do caso de *conexão homoclínica*, como ilustrado na Figura 1. Seja $p_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ um ponto de sela hiperbólico de Z_0 , com variedades estável e instável locais $W_{loc}^s(p_0)$ e $W_{loc}^u(p_0)$, respectivamente. Como, em geral, campos vetoriais por partes suaves não possuem unicidade de soluções, os conjuntos estável e instável globais $W^{s,u}(p_0)$ são definidos como a *saturação* de $W_{loc}^{s,u}(p_0)$ pelo fluxo de Z_0 , isto é, a união de todas as órbitas de Z_0 cujas condições iniciais pertencem a $W_{loc}^{s,u}(p_0)$.

FIGURE 1. Ilustração da conexão homoclínica Γ de Z , no caso $n = 2$.

Para cada componente suave X_0^j de Z_0 , consideramos o campo vetorial estendido \mathcal{X}_0^j dado por

$$(2) \quad \dot{x} = X_0^j(x), \quad \dot{t} = 1,$$

definido numa vizinhança $\overline{A_j} \times \mathbb{S}^1$, onde $\mathbb{S}^1 := \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ para algum $T > 0$. Ao definir $\mathcal{H}_i: \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ como $\mathcal{H}_i(x, t) = h_i(x)$, observamos que (2) descreve um campo vetorial suave por partes $\mathcal{Z}_0 := (\mathcal{X}_0^1, \dots, \mathcal{X}_0^k)$ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1$, com $\Omega = \cup_{i=1}^N \Omega_i$ sendo seu conjunto de descontinuidade, em que $\Omega_i := \mathcal{H}_i^{-1}(\{0\}) = \Sigma_i \times \mathbb{S}^1$. Mais ainda, se $x \in \Sigma_i$ é um ponto de costura de Z_0 para as componentes X_0^a e X_0^b , então $(x, t) \in \Omega_i$ é um ponto de costura de \mathcal{Z}_0 para \mathcal{X}_0^a e \mathcal{X}_0^b , para cada $t \in \mathbb{S}^1$. Além disso, se $\Phi_0(\tau; x, t)$ denota a solução de \mathcal{Z}_0 com condição inicial $\Phi_0(0; x, t) = (x, t)$, então observamos que a mesma pode ser expressa por

$$\Phi_0(\tau; x, t) = (\varphi_0(\tau; x), \tau + t),$$

onde φ_0 é a solução de Z_0 . Note que a sela hiperbólica $p_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ de Z_0 agora corresponde a uma órbita periódica

$$(3) \quad \gamma_0 := \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1 : x = p_0\} \subset (\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1) \setminus \Omega,$$

do tipo sela de \mathcal{Z}_0 (i.e. $W^{s,u}(\gamma_0) \setminus \gamma_0 \neq \emptyset$). Mais ainda, a interseção entre os conjuntos estáveis e instáveis $W^s(\gamma_0)$ e $W^u(\gamma_0)$ contém a superfície cilíndrica $\Gamma \times \mathbb{S}^1$, cuja interseção com Ω consiste somente em pontos de costura, veja Figure 2(a).

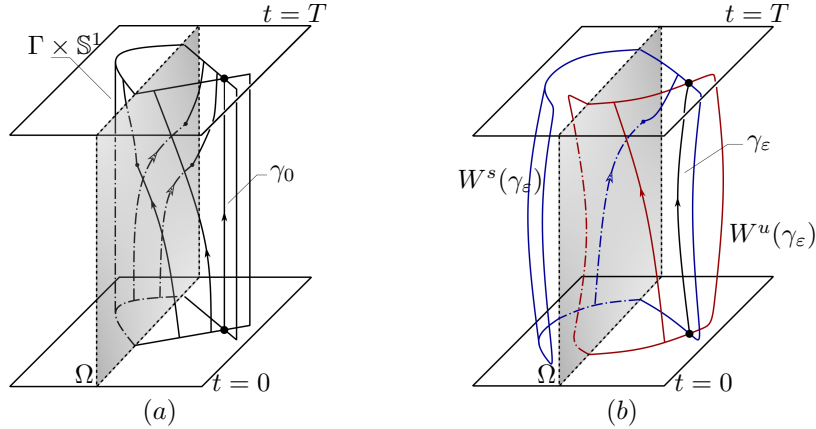


FIGURE 2.

Dado um conjunto aberto $\mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^1$ e $t_0 \in \mathbb{S}^1$, definimos $U_0^{t_0} := \mathcal{U}_0 \cap \{t = t_0\}$. Sob determinadas condições, o mapa tempo- T (mapa de Poincaré) associado a \mathcal{Z}_0 , definido em $U_0^{t_0}$, que, essencialmente devolve o ponto em que a solução de \mathcal{Z}_0 estará após o tempo $\tau = T$, está bem definido para cada $t \in \mathbb{S}^1$ e é dado por

$$(4) \quad \begin{aligned} P_0^t : U_0^t &\longrightarrow V_0^t \\ (x, t) &\longmapsto \Phi_0(T; x, t), \end{aligned}$$

com $V_0^t := P_0^t(U_0^t) \subset \mathbb{R}^n \times \{t\}$.

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, e para cada $1 \leq j \leq k$, consideramos uma pequena perturbação de Z_0 definida por

$$(5) \quad Z_\varepsilon(x, t) := (X_0^1(x) + \varepsilon X_1^1(x, t), \dots, X_0^k(x) + \varepsilon X_1^k(x, t)),$$

com cada $X_i^1(x, t)$ suave e T -periódica em t . De maneira análoga, consideramos o campo vetorial estendido $\mathcal{Z}_\varepsilon := (\mathcal{X}_\varepsilon^1, \dots, \mathcal{X}_\varepsilon^k)$, em que $\mathcal{X}_\varepsilon^j$ é dado por

$$(6) \quad \dot{x} = X_0^j(x) + \varepsilon X_1^j(x, t), \quad \dot{t} = 1,$$

é uma pequena perturbação de Z_0 . Deste modo, a solução de \mathcal{Z}_ε com condição inicial $\Phi_\varepsilon(0; x, t) = (x, t)$ é dada por

$$(7) \quad \Phi_\varepsilon(\tau; x, t) = (\varphi_\varepsilon(\tau; x, t), \tau + t).$$

Então, para ε suficientemente pequeno, o mapa tempo- T $P_\varepsilon^t: U_\varepsilon^t \rightarrow V_\varepsilon^t := P_\varepsilon^t(U_\varepsilon^t)$ associado a \mathcal{Z}_ε é dado por

$$(8) \quad P_\varepsilon^t(x) = \Phi_\varepsilon(T; x, t)$$

está bem definido para cada $t \in \mathbb{S}^1$ numa vizinhança $U_\varepsilon^{t_0}$ de $\Gamma \times \{t = t_0\}$.

Visto que γ_0 não intersecta Ω , segue do Teorema da Função Implícita para P_ε^t que \mathcal{Z}_ε tem uma única órbita T -periódica do tipo sela, γ_ε , próxima a γ_0 . Logo, γ_ε não intersecta Ω para $\varepsilon > 0$ pequeno o bastante.

Seja $p_\varepsilon^{t_0} := \gamma_\varepsilon \cap \{t = t_0\}$, que por sua vez é uma sela hiperbólica de $P_\varepsilon^{t_0}$, para todo $t \in \mathbb{S}^1$, cujas variedades estáveis e instáveis $W_{loc}^{s,u}(\gamma_\varepsilon)$, associadas a \mathcal{Z}_ε , estão bem definidas e próximas de $W_{loc}^{s,u}(\gamma_0)$, veja Figura 2(b).

A seguir, apresentamos o nosso principal resultado relativo ao emaranhamento homoclínico sob condições de transversalidade em campos vetoriais suaves por partes. Uma vez que toda a discussão feita até aqui foi considerando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, assumimos que existe $\varepsilon^* > 0$ tal que todos os objetos e condições dependentes de ε permanecem válidos para $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$.

Teorema 1 (λ -lema para campos vetoriais suaves por partes - emaranhamento homoclínico). *Sejam P_ε^t o mapa tempo- T definido em (8), e p_ε^t o respectivo ponto fixo. Suponhamos que para algum $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon^*$ e $t_0 \in \mathbb{S}^1$, existe um u -disco (vizinhança fechada homeomorfa a uma bola fechada de dimensão u) $\Delta \subset W^u(p_{\varepsilon_0}^{t_0}) \cap U_{\varepsilon_0}^{t_0}$ que intersecta $W^s(p_{\varepsilon_0}^{t_0}) \cap U_{\varepsilon_0}^{t_0}$ transversalmente em um ponto $q_{\varepsilon_0}^{t_0} \in U_{\varepsilon_0}^{t_0} \setminus \Omega^{t_0}$. Então, para cada u -disco $D \subset W^u(p_{\varepsilon_0}^{t_0}) \cap U_{\varepsilon_0}^{t_0}$ tem-se que*

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} (P_{\varepsilon_0}^{t_0})^n(\Delta)$$

contém u -discos arbitrariamente próximos na topologia \mathcal{C}^1 (resp. \mathcal{C}^0) de D quando $D \cap \Omega^{t_0} = \emptyset$ (resp. $D \cap \Omega^{t_0} \neq \emptyset$).

A ilustração para o resultado acima pode ser conferida na Figura 3 (a). Com relação ao emaranhamento dos conjuntos $W^s(\gamma_\varepsilon)$ e $W^u(\gamma_\varepsilon)$, destacamos o seguinte resultado, que nos assegura o referido comportamento entre os conjuntos supracitados, veja Figura 3 (b).

Proposição 2. *Se $W^u(p_{\varepsilon_0}^{t_0})$ e $W^s(p_{\varepsilon_0}^{t_0})$ intersectam transversalmente em um ponto $q_{\varepsilon_0}^{t_0} \in U_{\varepsilon_0}^{t_0} \setminus \Omega^{t_0}$ para algum $t_0 \in \mathbb{S}^1$, então para todo $t \in \mathbb{S}^1$, exceto possivelmente uma quantidade finita, tem-se que $W^u(p_{\varepsilon_0}^t)$ e $W^s(p_{\varepsilon_0}^t)$ intersectam transversalmente em algum ponto $q_{\varepsilon_0}^t \in U_{\varepsilon_0}^t \setminus \Omega^t$.*

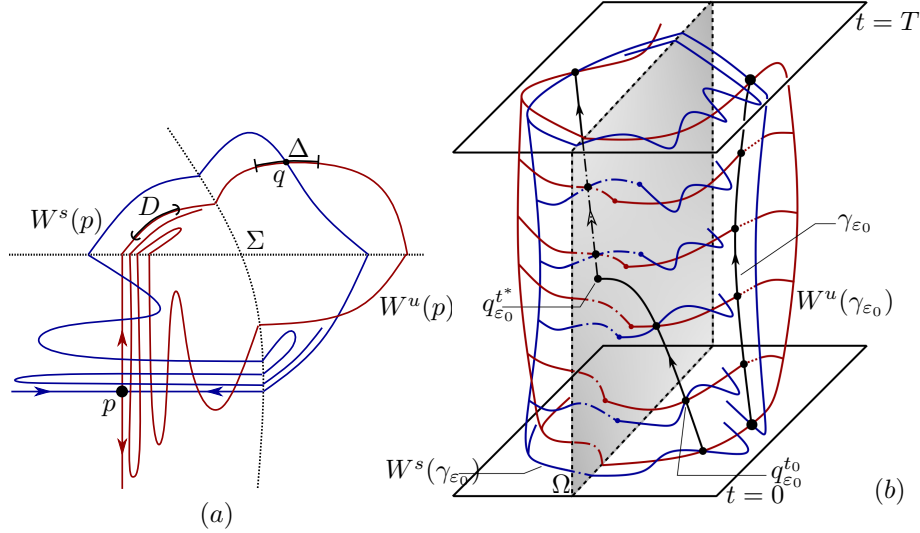


FIGURE 3.

A demonstração desses resultados requer uma análise rigorosa da regularidade dos mapas P_ε^t e um controle preciso das vizinhanças das conexões homoclínicas. Essas demonstrações não serão discutidas aqui, a fim de manter o relatório conciso.

Destacamos ainda que tais resultados serão posteriormente aplicados a fim de determinar comportamento caótico em sistemas dinâmicos não-suaves de forma analítica.

4. PRINCIPAIS AÇÕES REALIZADAS

Os certificados e comprovantes de participação e execução das atividades a seguir podem ser encontrados anexados ao final deste relatório.

4.1. Atividades de pesquisa.

4.1.1. Artigos publicados e em elaboração.

- T. SEARA, L.V.M.F. SILVA, AND J. VILLANUEVA,
On the boundedness of solutions of a forced discontinuous oscillator,
Journal of Differential Equations. 412:529–567 (2024).
- C. BUZZI, P. SANTANA, AND L.V.M.F. SILVA,
A piecewise smooth λ -lemma,
Preprint

4.1.2. Participação em eventos.

- I ENCONTRO DE SISTEMAS DINÂMICOS DA FCT/UNESP,
Ovinte,
7 e 8 de Novembro de 2024 - UNESP - Presidente Prudente-SP.
- WORKSHOP ON DYNAMICAL SYSTEMS - MAT80,
Poster: On the boundedness of solutions of a forced discontinuous oscillator,
25 a 29 de Novembro de 2024 - UNICAMP - Campinas-SP
- SEMINÁRIOS DE SISTEMAS DE DINÂMICOS,
Palestrante: On the application of KAM theory to non-smooth oscillators,
17 de Abril de 2025 - UNESP - São José do Rio Preto-SP

4.1.3. Revisões de artigos.

- COMMUNICATIONS IN NONLINEAR SCIENCE AND NUMERIC SIMULATIONS,
Peer-review
- JOURNAL OF NONLINEAR SCIENCE,
Peer-review

- MATHSCIENET,
Review
- ZBMATH,
Review

4.2. Atividades de ensino.

- CURSO DE ÁLGEBRA LINEAR PARA PÓS-GRADUAÇÃO,
Professor,
Verão (8 de Janeiro a 28 de Fevereiro de 2025) - UNESP - São José do Rio Preto-SP.

4.3. Atividades de extensão.

- XXXVI CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNESP,
Avaliador da área de Ciências Exatas e da Terra,
01 e 02 de Outubro de 2024 - UNESP - São José do Rio Preto-SP.

5. DESCRIÇÃO DO USO DOS RECURSOS FINANCEIROS

A mensalidade da bolsa foi utilizada para a permanência do bolsista na cidade onde foi desenvolvido o projeto de pesquisa.

6. ATUAÇÃO DO PARCEIRO INTERNACIONAL

Embora estivessem previstas reuniões com os parceiros internacionais Joan Torregrossa e Rafael Ortega para os meses de abril, maio e junho, a finalização antecipada do projeto impossibilitou sua realização conforme o cronograma original. Ressaltamos, no entanto, que colaborações futuras continuam em discussão e deverão se concretizar em novos projetos de pesquisa.

7. COLABORAÇÃO DA BOLSA DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA

NÃO SE APLICA

8. PRODUÇÃO BIBLIOGRÁFICA OU ARTÍSTICA E CULTURAL ELABORADAS

- T. SEARA, L.V.M.F. SILVA, AND J. VILLANUEVA,
On the boundedness of solutions of a forced discontinuous oscillator,
Journal of Differential Equations. 412:529–567 (2024).
- C. BUZZI, P. SANTANA, AND L.V.M.F. SILVA,
A piecewise smooth λ -lemma,
Preprint

9. APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS EM EVENTOS CIENTÍFICOS

- WORKSHOP ON DYNAMICAL SYSTEMS - MAT80,
Poster: On the boundedness of solutions of a forced discontinuous oscillator,
25 a 29 de Novembro de 2024 - UNICAMP - Campinas-SP

10. PLANO DE ATIVIDADES PARA O PRÓXIMO PERÍODO

NÃO SE APLICA

REFERENCES

- [1] A. F. FILIPPOV, *Differential equations with discontinuous right-hand sides*, *Math. Appl., Sov. Ser.* 18. x, 304 p. (1988)
- [2] M. GUARDIA, T. M. SEARA AND M. A. TEIXEIRA, *Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems*, *J. Differ. Equations* 250, No. 4, 1967-2023 (2011).
- [3] J. GUCKENHEIMER AND P. HOLMES, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, *Appl. Math. Sci.*, 42. Springer-Verlag. xvi, 453 p. (1983).
- [4] M. W. HIRSCH AND C. C. PUGH, *Stable manifolds and hyperbolic sets*, *Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math.* 14, 133-163 (1970).
- [5] S. E. NEWHOUSE, *Lectures on dynamical systems*, *Dynamical systems, C.I.M.E. Lect.*, Bressanone 1978, *Prog. Math.* 8, 1-114 (1980).

- [6] J. PALIS, *On Morse-Smale dynamical systems*, Topology 8, 385-405 (1969).
- [7] J. PALIS, *A note on the inclination lemma (lambda-lemma) and Feigenbaum's rate of approach*, Geometric dynamics, Proc. int. Symp., Rio de Janeiro/Brasil 1981, Lect. Notes Math. 1007, 630-635 (1983).
- [8] J. PALIS AND W. DE MELO, *Geometric theory of dynamical systems. An introduction. Transl. from the Portuguese by A. K. Manning*, New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag. XII, 198 p. (1982).
- [9] L. PIRES AND G. G. LA GUARDIA, *A Lipschitz version of the λ -lemma and a characterization of homoclinic and heteroclinic orbits*, Qual. Theory Dyn. Syst. 20, No. 3, Paper No. 82, 15 p. (2021).
- [10] T. SEARA, L.V.M.F. SILVA, AND J. VILLANUEVA, *On the boundedness of solutions of a forced discontinuous oscillator*, Journal of Differential Equations. 412:529–567 (2024).
- [11] M. VELAYATI, *λ -lemma for nonhyperbolic point in intersection*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2021, Paper No. 21, 6 p. (2021).
- [12] J. WEBER, *A backward λ -lemma for the forward heat flow*, Math. Ann. 359, No. 3-4, 929-967 (2014).



Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

Journal of Differential Equations 412 (2024) 529–567

Journal of
Differential
Equations

www.elsevier.com/locate/jde

On the boundedness of solutions of a forced discontinuous oscillator

Tere M-Seara^{a,b,c}, Luan V.M.F. Silva^{d,*}, Jordi Villanueva^a

^a *Departament de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya, Diagonal 647, 08028 Barcelona, Spain*

^b *Institut de Matemàtiques de la UPC - Barcelona Tech (IMTech), Pau Gargallo 14, 08028 Barcelona, Spain*

^c *Centre de Recerca Matemàtica, Edifici C, Campus Bellaterra, 08193 Bellaterra, Spain*

^d *Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Rua Sérgio Baruque de Holanda, 651, Cidade Universitária Zeferino Vaz, 13083–859, Campinas, SP, Brazil*

Received 21 February 2024; revised 14 July 2024; accepted 13 August 2024

Abstract

We study the global boundedness of the solutions of a non-smooth forced oscillator with a periodic and real analytic forcing. We show that the impact map associated with this discontinuous equation becomes a real analytic and exact symplectic map when written in suitable canonical coordinates. By an accurate study of the behaviour of the map for large amplitudes and by employing a parametrization KAM theorem, we show that the periodic solutions of the unperturbed oscillator persist as two-dimensional tori under conditions that depend on the Diophantine conditions of the frequency, but are independent on both the amplitude of the orbit and of the specific value of the frequency. This allows the construction of a sequence of nested invariant tori of increasing amplitude that confine the solutions within them, ensuring their boundedness. The same construction may be useful to address such persistence problem for a larger class of non-smooth forced oscillators.

© 2024 Elsevier Inc. All rights are reserved, including those for text and data mining, AI training, and similar technologies.

MSC: 37J40; 34A36; 70H08

Keywords: Non-smooth oscillators; Boundedness of solutions; Invariant tori; KAM theory; Parametrization method

* Corresponding author.

E-mail address: luanmattos@ime.unicamp.br (L.V.M.F. Silva).

<https://doi.org/10.1016/j.jde.2024.08.044>

0022-0396/© 2024 Elsevier Inc. All rights are reserved, including those for text and data mining, AI training, and similar technologies.

A PIECEWISE SMOOTH λ -LEMMA

CLAUDIO BUZZI¹, PAULO SANTANA¹, AND LUAN V. M. F. SILVA¹

ABSTRACT. In this paper we provide extensions of the λ -Lemma (also known as Inclination Lemma) for piecewise smooth vector fields and diffeomorphisms. In order to achieve our main result, we investigate the regularity of time- T -maps of piecewise smooth vector fields defined at crossing orbits. We prove that these maps are homeomorphisms and also piecewise smooth diffeomorphisms.

1. INTRODUCTION

The understanding of a dynamical system often requires identifying the existence of invariant sets in the phase space, such as fixed points, singularities, invariant tori, and periodic orbits. The presence of chaotic sets is equally important in such analysis, as it directly influences the system's predictability. A key tool for studying this phenomenon is determining whether the dynamical system exhibits a hyperbolic structure. In such cases, the classical theory asserts that if there is a transversal intersection between the stable and unstable manifolds of a fixed point (in the case of maps) or a periodic orbit (for vector fields in dimension greater than two), then chaos is present. This result is formalized in the Birkhoff-Smale theorem [25]. Nowadays one of the keystones in the proof the Birkhoff-Smale theorem (see [14, Theorem 5.2.10] and [18, Proposition 2.5]) is the theorem known as λ -Lemma [19] (and also as *Inclination Lemma* [20]).

When dealing with piecewise smooth maps or piecewise smooth vector fields, determining the existence of chaotic sets through this classical method becomes more complex. The lack of smoothness complicates the application of traditional (smooth) tools in such analysis.

Therefore the main goal of this paper is to provide an extension of the λ -Lemma for Poincaré maps of piecewise smooth vector fields, in particular for those following the *Filippov convention* [9], also known as *Filippov vector fields*.

In order to clarify the objects and concepts discussed here, we first introduce them in the classical context before adapting it to our specific setting.

2020 *Mathematics Subject Classification*. Primary: 37C29. Secondary: 34A36 and 34C37.

Key words and phrases. λ -Lemma; Inclination Lemma; Piecewise smooth vector fields; Piecewise smooth diffeomorphisms; Homoclinic and heteroclinic connections.

CERTIFICADO

Certificamos que *Luan Vinicio de Mattos Ferreira Silva* participou do I Encontro de Sistemas Dinâmicos da FCT/UNESP, realizado nos dias 7 e 8 de novembro de 2024, na Faculdade de Ciências e Tecnologia - UNESP, Câmpus de Presidente Prudente, realizado pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional.


A handwritten signature in black ink, reading "Murilo R. Cândido", written over a horizontal line.

Murilo Rodolfo Cândido

Comitê Organizador

Faculdade de Ciências e Tecnologia

Departamento de Matemática e Computação



MAT80

XIII Workshop on Dynamical Systems Celebrating the 80th birthday of Marco Antonio Teixeira

IMECC/Unicamp – November 25-29, 2024

Campinas/SP – Brazil

<http://www.ime.unicamp.br/~mat80/>

Certificate

We hereby certify that **Luan Vinicio de Mattos Ferreira Silva** presented the poster entitled *On the boundedness of solutions of a forced discontinuous oscillator* at the XIII Workshop on Dynamical Systems (MAT80) - *Celebrating the 80th birthday of Marco Antonio Teixeira*, held at Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas, Brazil, from November 25th to November 29th, 2024.

Campinas, November 29th, 2024.



Ricardo Miranda Martins
On behalf of the Organizing Committee

Authors: Luan Vinicio de Mattos Ferreira Silva

luan.m.silva@unesp.br

Title: On the application of KAM theory to non-smooth oscillators

The KAM theory, named after Kolmogorov, Arnol'd, and Moser, is a set of results about the persistence of quasi-periodic motions in analytic and smooth systems, under certain non-degeneracy and Diophantine conditions. The most well-known results are the KAM theorem, the Moser Twist Map Theorem, and Arnol'd's Theorem.

In this talk, we aim to present the main results of KAM theory, along with an application to a discontinuous oscillator described by the Duffing-type equation

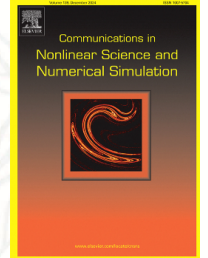
$$\ddot{x} - \operatorname{sgn}(x) = \theta x + \varepsilon p(t),$$

where sgn is the usual sign function, θ and ε are real parameters, and $p(t)$ is a σ -periodic function of class \mathcal{C}^6 . The most interesting aspect of this application is dealing with the lack of smoothness caused by this sign function. To handle this, we build a sequence of coordinate changes that allow us to fit the problem into the conditions required by KAM theory. As a result, we prove the existence of infinitely many invariant tori whose interiors together cover the whole phase space for small enough ε . This guarantees that all solutions of the differential equation remain bounded.

Key words: KAM theory, non-smooth systems, invariant tori, parametrization method.



Communications in Nonlinear
Science and Numerical Simulation



Certificate of Reviewing

Awarded for 1 review in September 2024
presented to

LUAN VINICIO DE MATTOS FERREIRA SILVA

in recognition of the review contributed to the journal

The Editors of Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation



**REVIEWER
CERTIFICATE**

**This certificate is awarded to
Luan Vinicio de Mattos Ferreira Silva**

**in recognition of their contribution to
1 manuscript in 2025 for**

Journal of Nonlinear Science

01 May 2025

ATESTADO

ATESTAMOS que o Prof. Dr. Luan Vinicio de Mattos Ferreira Silva, RG 47.540.624-2 - SSP, ministrou/ministra aulas aos discentes do Programa de Pós-graduação desta Unidade Universitária, conforme abaixo descrito:

Programa: Matemática

Disciplina	Ano	Dt.Início	Dt.Término	Curso	Discentes	Hr/Aula
Álgebra Linear	2025	08/01/2025	28/02/2025	MD	12	120

São José do Rio Preto, 30 de abril de 2025.



Silvia Emiko Kazama
Supervisor Técnico de Seção
Seção Técnica de Pós-Graduação



CERTIFICADO

1ª FASE

Certificamos que **Luan Vinicio de Mattos Ferreira Silva** participou da 1ª Fase do **XXXVI Congresso de Iniciação Científica da UNESP**, realizado no Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas do campus de São José do Rio Preto, no período de 01 a 02 de outubro, na qualidade de **AVALIADOR** da(s) área(s) Ciências Exatas e da Terra.

 São José do Rio Preto, 02 de outubro de 2024.

Edson Cocchieri Botelho
Pró-Reitor de Pesquisa
Presidente do CIC




Reginaldo Barboza da Silva
Coordenador de Iniciação Científica
Vice-Presidente do CIC

