

ADALBERTO ZANATTA NEDER LAZARINI

**CONDIÇÕES DE RELAXAMENTO PARA A
ESTABILIDADE DE SISTEMAS NÃO LINEARES
T-S UTILIZANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV
FUZZY**

Ilha Solteira
2017

ADALBERTO ZANATTA NEDER LAZARINI

**CONDIÇÕES DE RELAXAMENTO PARA A
ESTABILIDADE DE SISTEMAS NÃO LINEARES
T-S UTILIZANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV
FUZZY**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Ilha Solteira - UNESP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Especialidade: Automação.

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Orientador

Ilha Solteira
2017



FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

L431c Lazarini, Adalberto Zanatta Neder.
Condições de relaxamento para a estabilidade de sistemas não-lineares T-S utilizando funções de Lyapunov fuzzy / Adalberto Zanatta Neder Lazarini. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2017
85 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Inclui bibliografia

1. Politopo. 2. Modelos fuzzy Takagi-Sugeno. 3. Funções de Lyapunov fuzzy. 4. Desigualdades matriciais lineares (LMIs). 5. Estabilidade. 6. Sistemas não lineares.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Condições de relaxamento para a estabilidade de sistemas não lineares T-S utilizando funções Lyapunov Fuzzy

AUTOR: ADALBERTO ZANATTA NEDER LAZARINI

ORIENTADOR: MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: AUTOMAÇÃO pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. RODRIGO CARDIM
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. MÁRCIO ROBERTO COVACIC
Departamento de Engenharia Elétrica / UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

Ilha Solteira, 19 de janeiro de 2017

Dedicatória

A minha família, em especial meus pais, Edson Lazarini e Cláudia Regina Zanatta Neder Lazarini, pelo apoio dado ao longo de todos esses anos de estudo e por todos os valores passados para que eu pudesse me tornar não só um profissional melhor, como uma pessoa melhor, minha irmã Maria Eduarda Zanatta Neder Lazarini, pela companhia e parceria durante esses anos, e meu avô Izidoro Lazarini, por todo ensinamento e exemplo de pessoa que foi durante os anos que estive entre nós.

Agradecimentos

Aos meus grandes amigos Vinícius, Sara, Gabriele, Pedro, entre outros, e em especial a minha namorada Clara, por todos esses anos de amizade e companheirismo, por todo apoio dado nos momentos bons e ruins, e por todas as histórias que teremos para contar.

Ao Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, por ter sido, além de um exímio orientador, um grande amigo, não só transmitindo seu conhecimento acadêmico como sempre dando conselhos pessoais de grande valor.

Aos Profs. Drs. Edvaldo Assunção, Rodrigo Cardim e Jean Marcos de Souza Ribeiro, que sempre se mostraram a total disposição, sendo exemplos em todo meu processo de formação pessoal e profissional.

Aos técnicos do DEE, Aderson, Adilson, Chaves, Massa e Everaldo, pelo auxílio e ajuda essencial desempenhados durante os anos de curso de graduação e mestrado.

Aos meus companheiros de LPC Diogo, Uiliam, Leonardo, Alexandre, entre outros, que sempre foram muito solícitos, ajudando em todos os momentos necessários, além de tornarem o ambiente de trabalho bem mais divertido.

Aos meus companheiros de curso de graduação Pedro (Curitiba), Eduardo (Edinho), Roberta, Maria Emília, Leonardo (Custela), Nikolai, entre tantos outros “esquisitos” do ano 2010/1, por todas alegrias e tristezas passadas em conjunto.

Resumo

Neste trabalho são feitas análises sobre quando as condições de existência dos teoremas apresentados por (GUEDES, 2015), que propõem condições necessárias e suficientes para a estabilidade de sistemas não lineares de tempo contínuo descritos através de modelos fuzzy Takagi-Sugeno (TS), que transformam sistemas não lineares em um conjunto convexo de sistemas lineares a partir de regras *se-então*, baseadas em Funções de Lyapunov Fuzzy (FLF), são satisfeitas. Primeiramente, são analisados os casos particulares de 3 e 4 modelos locais. Logo após, são tratados casos genéricos, com quantidades de regras tanto pares quanto ímpares, identificando quando as condições impostas pelos teoremas citados são satisfeitas. Para os casos nos quais as condições não são satisfeitas, é proposto também um algoritmo para obtenção do “pior caso” possível, varrendo todas as possibilidades que o sistema apresenta. Este algoritmo oferece condições necessárias e suficientes para o problema e também pode ser utilizado quando as condições exigidas pelos dois teoremas apresentados em (GUEDES, 2015) são satisfeitas. Por fim, são analisadas as contribuições do uso do algoritmo, onde são considerados parâmetros como número de LMIs, número de variáveis matriciais simétricas $n \times n$ simétricas utilizadas na resolução das LMIs e tempo computacionalmente necessário.

Palavras chave: Politopo. Modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Funções de Lyapunov fuzzy. Desigualdades matriciais lineares (LMIs). Estabilidade. Sistemas não lineares.

Abstract

In this work, the required conditions for the theorems presented by (GUEDES, 2015), which propose necessary and sufficient conditions for the stability of continuous-time nonlinear systems described by Takagi-Sugeno (TS) fuzzy models based on Lyapunov fuzzy functions (LFF), are analysed. First of all, the cases with 3 and 4 local models are considered. After that, generic cases are studied, with odd or even number of rules, identifying when the conditions imposed by these theorems hold. If the conditions are not satisfied, an algorithm is proposed as a way of finding the “worst case scenario” for the system, considering all possible options. This algorithm offers necessary and sufficient conditions for solving this problem and also can be used when the conditions for the application of the theorems presented in (GUEDES, 2015) hold. Finally, the algorithm’s contributions are analyzed, considering parameters such as number of LMIs, number of symmetric matrix variables used on solving the LMIs and computational time.

Keywords: Polytope. Takagi-Sugeno fuzzy models. Fuzzy Lyapunov functions. Linear Matrix Inequalities (LMIs). Stability. Nonlinear systems.

Lista de Figuras

1	Ilustração da aproximação obtida por modelos fuzzy TS.	12
2	Número de LMIs fornecidas pelos Teoremas 3, 4 e 5 para $1 \leq r \leq 6$	22
3	Número de LMIs fornecidas pelos Teoremas 3, 4 e 5 para $7 \leq r \leq 10$	22
4	Áreas de estabilidade ϕ 's iguais para $r = 3$ Teorema 1 (\cdot), Teorema 2 (\cdot, o), Teorema 3 e 5 (\cdot, o, x).	23
5	Áreas de estabilidade ϕ 's iguais para $r = 4$ Teorema 1 (\cdot), Teorema 2 (\cdot, o), Teorema 3 e 4 (\cdot, o, x).	25
6	Fluxograma para obtenção do “pior caso”.	39
7	Número de LMIs de acordo com o número de regras r e a posição i do termo alterado.	53
8	Área de factibilidade para $r = 3$, x para o Teorema 5 e o para o algoritmo.	60
9	Área de factibilidade para $r = 4$, x para o Teorema 4 e o para o algoritmo.	62
10	Área de factibilidade para $r = 5$, x para o Teorema 5 e o para o algoritmo.	63
11	Área de factibilidade para $r = 5$, x para o Teorema 3 e o para o algoritmo.	64

Sumário

1	Introdução	6
2	Sistemas fuzzy Takagi-Sugeno	10
2.1	Modelagem	10
2.2	Funções de Lyapunov	13
2.2.1	<i>Função de Lyapunov Quadrática</i>	13
2.2.2	<i>Função de Lyapunov Fuzzy</i>	14
3	Estabilidade de sistemas não lineares usando modelos fuzzy TS via hiper-retângulos e politopos para intervalos de h_i	15
3.1	Condições Relaxadas para a Estabilidade através de Hiper-retângulos	17
3.2	Condições Relaxadas para a Estabilidade através de Politopos	18
3.2.1	<i>Exemplos numéricos</i>	21
3.3	Conclusões parciais	25
4	Análise sobre condições de relaxamento para estabilidade e estabilização de sistemas não lineares fuzzy TS	26
4.1	Novas propostas para análise das condições propostas para as LMIs	26
4.2	Teorema da utilização dos limites	37
4.3	Número de LMIs	45
4.4	Exemplos Numéricos	53
4.5	Conclusões Parciais	66
5	Conclusões e continuação do trabalho	68
	REFERÊNCIAS	70

6	Artigos submetidos à periódicos	75
7	Apêndice	76
7.1	Provas dos Teoremas 4 e 5	76
7.1.1	<i>Teorema 4 (caso r par)</i>	76
7.1.2	<i>Teorema 5 (caso r ímpar)</i>	79

1 Introdução

No mundo real e não idealizado, a enorme maioria dos sistemas dinâmicos encontrados têm uma natureza não linear. Tal característica dificulta a análise desses sistemas, uma vez que várias ferramentas matemáticas utilizadas na classe de sistemas lineares são ineficazes, já que equações não lineares em geral não podem ser resolvidas analiticamente, e as transformadas de Laplace e Fourier não são aplicáveis a estes sistemas. Apesar dessa dificuldade, existe uma vasta gama de ferramentas para análise e projeto de controle para sistemas não lineares (SLOTINE; LI, 1991).

Um dos estudos mais importantes na área aconteceu graças ao matemático russo Aleksandr Lyapunov (LYAPUNOV, 1992), no final do século XIX. Apesar da data do estudo, as teorias de Lyapunov demoraram muito para chegar ao ocidente, começando a serem estudadas a fundo somente nos anos 50 e 60, fato que permitiu à Rússia, então URSS, grande avanço tecnológico.

Lyapunov conseguiu desenvolver teorias que analisavam sistemas dinâmicos não lineares através de sua “energia” ou localmente, linearizando o sistema. No primeiro caso, a teoria oferece técnicas baseada em uma função que é positiva fora do ponto de equilíbrio e que representa a “energia” do sistema analisado, a chamada função de Lyapunov. Assim, é possível analisar a estabilidade desse sistema a partir do comportamento dessa função “energia” em função do tempo. Se a “energia” decrescer, ou seja, se a derivada da função de Lyapunov for negativa, o sistema tende a ficar num ponto de equilíbrio quando sua função energia atingir o ponto de equilíbrio $x = 0$. Dessa maneira, tem-se uma análise geral de comportamento de sistemas dinâmicos.

Já no segundo caso, é escolhido um modelo local em torno de um ponto de equilíbrio do sistema. Ao redor desse ponto, quando possível, o sistema não linear é representado através de uma aproximação linear, fazendo valer todas as ferramentas e características existentes e estudadas na área de controle linear (OGATA, 2011).

Além das teorias de análise de sistemas, outra área que ganhou grande atenção da

comunidade científica nas últimas décadas foi a de descrição de sistemas, com a teoria de lógica fuzzy (ZADEH, 1965). No caso específico da área de controle de sistemas não lineares, a adaptação mais importante da lógica fuzzy foi a dos sistemas Takagi-Sugeno (TS) (TAKAGI; SUGENO, 1985).

Desde quando foi apresentada, a lógica fuzzy possibilitou enorme avanço em técnicas de processamento de dados, trazendo uma nova abordagem nas especificações das variáveis, antes binárias. Era questão de tempo até que essa representação chegasse às teorias de controle (MAMDANI, 1974). A partir de um conjunto de regras *se-então*, a lógica fuzzy permite que sejam modelados vários sistemas diferentes e que, associando esses sistemas a funções de pertinência, seja um sistema mais fiel ao real estudado. Essa abordagem ajudou muito a análise de sistemas complexos, como os não lineares, permitindo grande avanço nas técnicas de projeto, aumentando a gama de sistemas controláveis e possibilitando o estudo de sistemas robustos e controladores chaveados (SOUZA et al., 2013; FARIA; VALENTION; OLIVEIRA, 2013). As aplicações de tais técnicas são as mais diversas, de robôs a automóveis modernos, uma vez que o grande avanço tecnológico possibilitou que técnicas de processamento de dados avançadas fossem inclusas em aparelhos do dia a dia (ABDELMALEK, 2009; KING et al., 1988; MAMDANI, 1977; OSTERGAARD; HOLMBLAD, 1982; TANAKA; NISHIMURA; WANG, 1998; TSOUKALAS; UHRIG, 1996; YASUNOBU; MIYAMOTO; SUGENO, 1985; WILL; TEIXEIRA; ŽAK, 1997).

Pode-se dividir a representação de sistemas em modelos fuzzy de duas maneiras: os modelos Mamdani e os modelos fuzzy TS. Os modelos TS demonstraram através do tempo que oferecem uma representação da planta mais exata do que o modelo Mamdani, e até por isso é o mais utilizado em pesquisas relacionadas a controle utilizando lógica fuzzy, apesar da intuitividade dos modelos Mamdani. Enquanto os modelos Mamdani são mais adaptados para o entendimento humano, os modelos fuzzy TS são mais eficientes computacionalmente, além de trabalharem melhor com métodos de otimização, estratégias lineares de controle e análises matemáticas. A passagem de uma regra para outra é feita, em geral, por uma transição suave nos modelos TS, ou seja, uma interpolação entre as regras (ABDELMALEK, 2009). Softwares de processamento de dados, como o Matlab[®], apresentam até funções internas de conversão entre esses dois sistemas.

Com a evolução dos processadores, que permitiram maior processamento de dados em menos tempo, especialmente nos anos 90, novas técnicas de controle foram adotadas, porém criando novos problemas, tanto em análise de sistemas quanto na resolução de equações, ou até inequações, para projeto dos controladores. Assim, foi necessária a cri-

ação de uma nova e poderosa ferramenta: as desigualdades matriciais lineares, ou LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities* (BOYD et al., 1994; WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1996). As LMIs são extremamente eficientes e poderosas na literatura de programação matemática (GAHINET et al., 1995; PEAUCELLE et al., 2002), o que permitiu que, em certas classes de sistemas não lineares, os modelos fuzzy TS apresentassem uma modelagem exata e os projetos baseados em LMIs ampliassem a possibilidade de encontrar soluções factíveis, por exemplo através de generalizações dos procedimentos apresentados inicialmente em (WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1996).

Durante a modelagem de sistemas fuzzy TS, são obtidas as funções de pertinência dos modelos locais em relação ao vetor de estados ($h_j(x(t))$). Em (TANAKA; HORI; WANG, 2003), foi proposta a utilização de uma função de Lyapunov fuzzy, a partir de várias matrizes simétricas definidas positivas P_j , sendo que a função de Lyapunov fuzzy é definida como $V(x(t)) = \sum_{j=1}^r h_j(x(t)) x^T(t) P_j x(t)$, possibilitando assim um relaxamento na busca por soluções de sistemas fuzzy TS. Essa nova abordagem permitiu avanços em relação aos sistemas fuzzy TS (MOZELLI et al., 2009; ESTEVES, 2011). Porém, introduziu também um novo problema na análise dos sistemas descritos por fuzzy: o tratamento das derivadas das funções de pertinência.

Utilizando-se teorias como a região de operação (ALVES et al., 2016; CHEN et al., 2015), é possível definir limitantes superiores e inferiores para essas funções de pertinências, assim como para suas derivadas em relação ao tempo ($\dot{h}_j(x(t))$). Atualmente as técnicas de análise de estabilidade e estabilização de sistemas fuzzy TS através da função Lyapunov fuzzy ainda se apoiam nesses máximos e mínimos, sem nenhuma adaptação dos mesmos (WANG; ZANG; LIU, 2016; ZHAI et al., 2017; MÁRQUEZ et al., 2017). Tal característica torna conservativa a busca por uma solução, uma vez que podem estar sendo considerados casos que não nunca poderia acontecer, dada a principal característica da função Lyapunov fuzzy: a somatória das derivadas no tempo das funções de pertinência é igual a 0, ou seja, $\sum_{j=1}^r \dot{h}_j(x(t)) = 0$, sendo r o número de regras que descreve o sistema.

Neste texto, são feitas análises sobre condições de existência dos teoremas apresentados em (GUEDES, 2015) que, quando satisfeitas, oferecem condições necessárias e suficientes para a estabilidade de sistemas não-lineares descritos por modelos fuzzy TS. Foi provado que, considerando a condição inicial proposta (somatória das derivadas no tempo das funções de pertinência é igual a 0), então para os casos de $r = 1, 2, 3$ e 4 , as hipóteses apresentadas em (GUEDES, 2015) para a obtenção das LMIs são sempre satisfeitas. Porém, para os casos de $r > 4$, não necessariamente as hipóteses apresentadas serão satisfeitas,

necessitando assim uma análise um pouco mais detalhada sobre os máximos e mínimos que os limites de $\dot{h}_j(x(t))$ podem assumir, que resulta na procura do “pior caso”, varrendo todos os casos possíveis, como será mostrado no Capítulo 4.

No Capítulo 2, será realizada uma revisão da modelagem de sistemas fuzzy TS e dos tipos de função de Lyapunov abordadas nessa dissertação. No Capítulo 3, serão apresentados os teoremas utilizados no trabalho realizado, propostos por (MOZELLI et al., 2009; ESTEVES, 2011; GUEDES, 2015), e uma comparação, mostrando os avanços proporcionados pelas condições destes teoremas. No Capítulo 4, serão analisadas as condições de existência impostas por (GUEDES, 2015) para seus teoremas. Nos casos em que essas condições não são satisfeitas, é proposta uma abordagem generalizada, com condições necessárias e suficientes para análise de estabilidade de sistemas não-lineares TS utilizando-se funções Lyapunov fuzzy. Através dos exemplos numéricos, é possível concluir que o presente trabalho traz contribuições à teoria apresentada em (GUEDES, 2015), principalmente no número de LMIs necessárias para a análise de estabilidade, no número de variáveis e no tempo computacional. Por fim, no Capítulo 5, são feitas conclusões sobre o trabalho realizado, bem como propostas para a continuidade do mesmo.

Em todos os capítulos, é interessante ressaltar que $\mathbb{K}_r = \{1, 2, 3, \dots, r\}$.

2 Sistemas fuzzy Takagi-Sugeno

2.1 Modelagem

Sistemas fuzzy Takagi-Sugeno foram introduzidos nos anos 80 (TANIGUCHI et al., 2001; TAKAGI; SUGENO, 1985) como uma representação de uma planta não linear através da combinação convexa de um certo número de modelos locais lineares e invariantes no tempo. Em alguns casos, quanto maior o número de modelos locais utilizados nessa representação, maior a fidelidade com o modelo real. Porém, ao mesmo tempo que a fidelidade aumenta, paga-se o preço da necessidade de alta capacidade computacional, ocasionalmente inviabilizando a implementação do projeto. Assim, deve-se sempre analisar a relação custo-benefício do uso de vários modelos locais.

A modelagem fuzzy TS é um método simples, sendo sua principal característica o conjunto de regras *se-então*, em que a descrição das dinâmicas locais de cada regra fuzzy é dada por um modelo de sistema linear (ESTEVEES, 2011).

Tem-se o seguinte modelo linear local

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t).$$

Como nesse trabalho, o principal objetivo foi a análise de estabilidade, será considerado o sistema não forçado ($u(t) = 0$). Portanto, o modelo linear local será descrito por

$$\dot{x}(t) = A_i x(t),$$

sendo $i \in \mathbb{K}_r$ (r é o número de modelos lineares) e $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado. Assim, pode ser montado um conjunto de regras *se-então* disponíveis que regem o sistema, sendo que a i -ésima regra tem a forma:

$$\text{Regra } i: \begin{cases} \text{Se} & z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z_p(t) \text{ é } M_p^i, \\ \text{então} & \dot{x}(t) = A_i x(t). \end{cases} \quad (2.1)$$

Tem-se que M_j^i , com $j = 1, 2, \dots, p$, é o conjunto fuzzy j da regra i e $z_1(t), z_2(t), \dots, z_p(t)$ são as variáveis premissas. Seja $\mu_j^i(z_j(t))$ o “peso” do conjunto fuzzy M_j^i associado à variável premissa $z_j(t)$, e seja

$$w^i(z(t)) = \prod_{j=1}^p \mu_j^i(z_j(t)), \quad z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_p(t)].$$

Como $\mu_j^i(z_j(t)) \geq 0$ tem-se, para $i \in \mathbb{K}_r$,

$$w^i(z(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^r w^i(z(t)) > 0, \quad i \in \mathbb{K}_r.$$

Uma escolha conveniente para a obtenção de um modelo fuzzy TS para sistemas não lineares é adotar $z(t) = x(t)$, sendo $x(t)$ o vetor de estado do sistema não linear. Defina

$$h = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_r]^T.$$

Desta forma, dados $[x(t), u(t), z(t)]$, o modelo matemático final do sistema fuzzy é inferido utilizando o método do centro de gravidade para a defuzzificação (TANIGUCHI et al., 2001), e é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))(A_i x(t))}{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))}, \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t)), \\ &= \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i \right) x(t), \\ &= A(h)x(t), \end{aligned} \tag{2.2}$$

sendo que,

$$h_i(z(t)) = \frac{w^i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))}, \quad i \in \mathbb{K}_r. \tag{2.3}$$

Em (2.3), $h_i(z(t))$ é o peso normalizado de cada modelo de regra, também conhecido como função de pertinência do modelo local i , $i \in \mathbb{K}_r$ (CARDIM, 2009).

É importante observar que, para $i \in \mathbb{K}_r$, tem-se a combinação linear convexa dos modelos, ou seja,

$$h_i(z(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \quad i \in \mathbb{K}_r. \tag{2.4}$$

Então, o sistema (2.2) e (2.4) pode ser descrito pelo modelo fuzzy Takagi-Sugeno

abaixo:

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^r h_j(x(t)) A_j x(t), \quad (2.5)$$

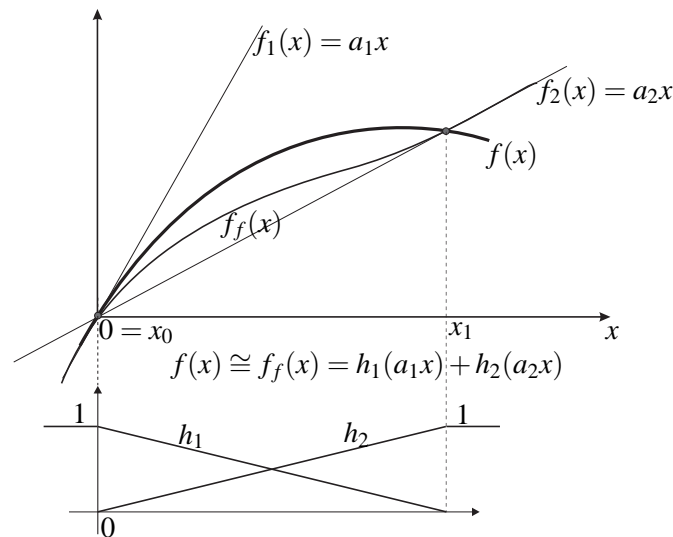
sendo que, $j \in \mathbb{K}_r$ (r é o número de modelos lineares), $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $h_j(x(t))$ é o peso normalizado do modelo local A_j que satisfaz as seguintes propriedades:

$$h_j(x(t)) \geq 0, \quad \sum_{j=1}^r h_j(x(t)) = 1, \quad \sum_{j=1}^r \dot{h}_j(x(t)) = 0, \quad t \geq 0 \quad \text{e} \quad j \in \mathbb{K}_r. \quad (2.6)$$

Exemplo

Um bom exemplo da modelagem fuzzy TS de sistemas pode ser encontrado em (MACHADO, 2003; GUEDES, 2015), como mostra a figura abaixo.

Figura 1 - Ilustração da aproximação obtida por modelos fuzzy TS.



Fonte: Machado (2003), Cardim (2009) e Esteves (2011)

Considerando a função não linear $f(x)$ mostrada na Figura 1, nota-se que esta pode ser aproximada, para $x \approx x_0 = 0$, por $f_1(x) = a_1x$, que é a reta tangente desta curva em $x = 0$. Uma aproximação linear para esta função, para $x \approx x_1$, é $f_2(x) = a_2x$; observe que esta segunda aproximação linear não é tão boa quanto a primeira aproximação linear, pois $f_2(x)$ não corresponde à reta tangente de $f(x)$ em $x = x_1$. Adotando-se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ como modelos locais, e as funções $h_1(x)$, $h_2(x)$ definidas na Figura 1 (observe que $h_1(x)$ e $h_2(x)$ são positivas ou nulas e que $h_1(x) + h_2(x) = 1$), um modelo fuzzy TS para $f(x)$ seria $f_f(x) = h_1(x)f_1(x) + h_2(x)f_2(x)$, como ilustrado na Figura 1. Pode-se observar que para $x \approx x_0$, então $h_1 \approx 1$, $h_2 \approx 0$ e $f_f(x) \approx f_1(x)$ e para $x \approx x_1$, então $h_2 \approx 1$, $h_1 \approx 0$ e

$f_f(x) \approx f_2(x)$. Finalmente, verifica-se que $f_f(x)$ proporciona uma aproximação da função $f(x)$ muito melhor do que as funções $f_1(x)$ (linearização em torno de um ponto de operação) ou $f_2(x)$, por exemplo para $x_0 \leq x \leq x_1$. Esse exemplo simples mostra o potencial dos modelos fuzzy TS, no tratamento de funções e/ou de sistemas não lineares. Para obter melhores aproximações, é necessário escolher funções $h_1(x)$ e $h_2(x)$ de modo a conseguir uma aproximação exata da função $f(x)$ utilizando $f_f(x)$ (CARDIM, 2009; ESTEVES, 2011; MACHADO, 2003; TEIXEIRA; ZAK, 1999).

Baseado em (TANIGUCHI et al., 2001) e (SOUZA et al., 2013), a representação do sistema é realizada considerando os limites inferiores e superiores das não linearidades do sistema e também termos lineares incertos, onde esses máximos e mínimos formam vértices que descrevem um um polítopo. Os limites são calculados considerando uma região de operação conhecida do vetor de estado e o conjunto conhecido dos parâmetros incertos da planta. Os modelos fuzzy TS obtidos com este procedimento apresentam modelos locais conhecidos e pesos normalizados desconhecidos.

2.2 Funções de Lyapunov

Vários métodos para obtenção da função de Lyapunov foram propostos ao longo dos anos, como a função de Lyapunov quadrática, a função de Lyapunov fuzzy, a função de Lyapunov de integral de linha e as funções Lyapunov por partes (BERNAL; HUSEK, 2005; CHADLI; MAQUIN; RAGOT, 2000; JADBABAIE, 1999; JOHANSSON; RANTZER; ARZEN, 1999; OHTAKE; TANAKA; WANG, 2003; TANAKA; HORI; WANG, 2003; TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; TANAKA; SANO, 1994; WANG; TANAKA; GRIFIN, 1996; RHEE; WON, 2006).

Sendo assim, diferentes tipos de funções Lyapunov são utilizadas por diferentes autores na literatura, dependendo da natureza do sistema e de sua complexidade (ABDELMALEK, 2009), levando sempre em conta o conservadorismo das suas condições de estabilidade.

2.2.1 Função de Lyapunov Quadrática

Lyapunov conseguiu desenvolver teorias que analisavam sistemas dinâmicos não lineares através de sua “energia”. A teoria oferece técnicas baseada em uma função que é positiva fora do ponto de equilíbrio e que representa a “energia” do sistema analisado, a chamada função de Lyapunov. Assim, é possível analisar a estabilidade desse sistema

a partir do comportamento dessa função “energia” em função do tempo. Se a “energia” decrescer, ou seja, se a derivada da função de Lyapunov for negativa, o sistema tende a ficar num ponto de equilíbrio quando sua função energia atingir o ponto de equilíbrio $x = 0$.

Considere o sistema fuzzy TS apresentado em (2.5) e (2.6). A função de Lyapunov mais simples utilizada na literatura, também chamada de Função de Lyapunov Quadrática (FLQ), é dada por:

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t), \quad P > 0, \quad P^T = P. \quad (2.7)$$

Se $\dot{V} < 0$, para $x(t) \neq 0$, então o ponto $x = 0$ é assintoticamente estável para o sistema descrito em (2.5) e (2.6).

2.2.2 Função de Lyapunov Fuzzy

As funções de Lyapunov fuzzy (FLF) foram uma nova abordagem proposta para a análise da estabilidade do sistema fuzzy TS (2.5) e (2.6), em busca de menos conservadorismo. As FLF podem ser definidas como (JADBABAIE, 1999; LEE; PARK; JOO, 2012; LEE; JOO; TAK, 2014; TANAKA; HORI; WANG, 2003):

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) x^T(t) P_i x(t), \quad (2.8)$$

sendo que, P_i , $i \in \mathbb{K}_r$, são matrizes simétricas definidas positivas.

A análise sobre a derivada da FLF será feita na Seção 4.2, dentro do Teorema 6.

3 Estabilidade de sistemas não lineares usando modelos fuzzy TS via hiper-retângulos e politopos para intervalos de \dot{h}_i

Neste capítulo, serão apresentados os resultados obtidos em (GUEDES, 2015) para análise de estabilidade de sistemas não lineares. No dado trabalho, todos os resultados foram comparados com outras formulações disponíveis na literatura (MOZELLI et al., 2009; ESTEVES, 2011).

O método que utiliza função quadrática de Lyapunov leva apenas em conta as características do politopo que descreve o sistema, deixando de avaliar a sua variação no tempo, sem considerar variação temporal das funções de pertinência (TOGNETTI, 2011). Por isso, o método de análise baseado na função de Lyapunov quadrática, que ainda é utilizado para análise da estabilidade global do modelo fuzzy, acaba por trazer grande conservadorismo.

Por esse motivo, novas formulações foram propostas através do tempo com o objetivo de relaxar a formulação original. Algumas formulações mais importantes que podem ser citadas são as funções de Lyapunov por partes (ARRIFANO; OLIVEIRA; COSSI, 2006; CAO; REES; FENG, 1996, 1997b; JOHANSSON; RANTZER; ARZEN, 1999; RANTZER; JOHANSSON, 2000; TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; TOGNETTI; OLIVEIRA, 2010; SOUZA et al., 2014) e as funções de Lyapunov fuzzy (CAO; REES; FENG, 1997a; CHADLI; MAQUIN; RAGOT, 2000; HADJILI, 2002; JADBABAIE, 1999; TANAKA; HORI; WANG, 2001, 2003; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003; TANAKA et al., 2007), aumentando a gama de sistemas para aplicação.

Os Teoremas 1 e 2, apresentados (MOZELLI et al., 2009) e (ESTEVES, 2011), propõem condições suficientes para a estabilidade de sistemas fuzzy TS (2.5) e (2.6), a partir de (2.8). Estes teoremas foram utilizados por (GUEDES, 2015) para comparações

numéricas e são descritos abaixo.

Teorema 1. *Considere que $|\dot{h}_k(x(t))| \leq \phi_k$, $k \in \mathbb{K}_r$, sendo que as constantes ϕ_k são conhecidas. O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema fuzzy TS (2.5) e (2.6) é assintoticamente estável se existirem matrizes simétricas P_i , $i \in \mathbb{K}_r$ e X tais que as seguintes LMIs sejam satisfeitas,*

$$\begin{aligned} P_i &> 0, \quad i \in \mathbb{K}_r, \\ P_i + X &\geq 0, \quad i \in \mathbb{K}_r, \\ \tilde{P}_\phi + \frac{1}{2} (A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j) &< 0, \quad i, j \in \mathbb{K}_r, \quad i \leq j, \end{aligned} \tag{3.1}$$

sendo que $\tilde{P}_\phi = \sum_{k=1}^r \phi_k (P_k + X)$.

Demonstração. (MOZELLI et al., 2009). □

O Teorema 1 apresenta LMIs mais relaxadas em relação às presentes em Tanaka, Hori e Wang (2003).

O teorema a seguir apresenta condições ainda mais relaxadas para estabilidade, baseadas na inclusão de variáveis de folga X_{ij} simétricas e constantes para cada um dos modelos locais.

Teorema 2. *Considere que $|\dot{h}_\rho(x(t))| \leq \phi_\rho$, $t \geq 0$ e $\rho \in \mathbb{K}_r$, sendo que as constantes ϕ_ρ são conhecidas. O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema fuzzy TS (2.5) e (2.6) é assintoticamente estável, se existirem matrizes simétricas P_i e X_{ij} , $i, j \in \mathbb{K}_r$, tais que as seguintes LMIs sejam satisfeitas:*

$$\begin{aligned} P_i &> 0, \quad i \in \mathbb{K}_r, \\ P_k + X_{ij} &\geq 0, \quad i, j, k \in \mathbb{K}_r, \quad i \leq j, \\ \tilde{P}_{\phi_{ij}} + \frac{1}{2} (A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j) &< 0, \quad i, j \in \mathbb{K}_r, \quad i \leq j, \end{aligned} \tag{3.2}$$

sendo que $\tilde{P}_{\phi_{ij}} = \sum_{\rho=1}^r \phi_\rho (P_\rho + X_{ij})$, $i, j \in \mathbb{K}_r$.

Demonstração. (ESTEVEES, 2011). □

O Teorema 3 apresenta um conjunto de condições, baseadas no hiper-retângulo do conjunto fechado das derivadas temporais das funções de pertinência, que garantem a

estabilidade de (2.5) e (2.6), considerando a FLF dada em (2.8). Esta é uma das contribuições propostas em (GUEDES, 2015).

3.1 Condições Relaxadas para a Estabilidade através de Hiper-retângulos

Teorema 3. *Considere que $-\phi_{\rho,1} \leq \dot{h}_{\rho}(x(t)) \leq \phi_{\rho,2}$, $t \geq 0$ e $\rho \in \mathbb{K}_r$, sendo que as constantes $\phi_{\rho 1}$ e $\phi_{\rho 2}$ são conhecidas. O ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema fuzzy TS (2.5) e (2.6) é assintoticamente estável, se existirem matrizes simétricas P_i e X_{ij} , $i, j \in \mathbb{K}_r$, tais que as seguintes LMIs sejam satisfeitas,*

$$P_i > 0, \quad i \in \mathbb{K}_r, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
& F_{ij} - \phi_{1,1} (P_1 + X_{ij}) - \phi_{2,1} (P_2 + X_{ij}) - \phi_{3,1} (P_3 + X_{ij}) \\
& \quad \cdots - \phi_{r-2,1} (P_{r-2} + X_{ij}) - \phi_{r-1,1} (P_{r-1} + X_{ij}) - \phi_{r1} (P_r + X_{ij}) < 0, \\
& F_{ij} - \phi_{11} (P_1 + X_{ij}) - \phi_{21} (P_2 + X_{ij}) - \phi_{31} (P_3 + X_{ij}) \\
& \quad \cdots - \phi_{r-2,1} (P_{r-2} + X_{ij}) - \phi_{r-1,1} (P_{r-1} + X_{ij}) + \phi_{r2} (P_r + X_{ij}) < 0, \\
& F_{ij} - \phi_{1,1} (P_1 + X_{ij}) - \phi_{2,1} (P_2 + X_{ij}) - \phi_{3,1} (P_3 + X_{ij}) \\
& \quad \cdots - \phi_{r-2,1} (P_{r-2} + X_{ij}) + \phi_{r-1,2} (P_{r-1} + X_{ij}) - \phi_{r1} (P_r + X_{ij}) < 0, \\
& F_{ij} - \phi_{1,1} (P_1 + X_{ij}) - \phi_{2,1} (P_2 + X_{ij}) - \phi_{3,1} (P_3 + X_{ij}) \\
& \quad \cdots - \phi_{r-2,1} (P_{r-2} + X_{ij}) + \phi_{r-1,2} (P_{r-1} + X_{ij}) + \phi_{r2} (P_r + X_{ij}) < 0, \\
& \vdots \\
& F_{ij} + \phi_{1,2} (P_1 + X_{ij}) + \phi_{2,2} (P_2 + X_{ij}) + \phi_{3,2} (P_3 + X_{ij}) \\
& \quad \cdots + \phi_{r-2,2} (P_{r-2} + X_{ij}) - \phi_{r-1,1} (P_{r-1} + X_{ij}) - \phi_{r1} (P_r + X_{ij}) < 0, \\
& F_{ij} + \phi_{1,2} (P_1 + X_{ij}) + \phi_{2,2} (P_2 + X_{ij}) + \phi_{3,2} (P_3 + X_{ij}) \\
& \quad \cdots + \phi_{r-2,2} (P_{r-2} + X_{ij}) - \phi_{r-1,1} (P_{r-1} + X_{ij}) + \phi_{r2} (P_r + X_{ij}) < 0, \\
& F_{ij} + \phi_{1,2} (P_1 + X_{ij}) + \phi_{2,2} (P_2 + X_{ij}) + \phi_{3,2} (P_3 + X_{ij}) \\
& \quad \cdots + \phi_{r-2,2} (P_{r-2} + X_{ij}) + \phi_{r-1,2} (P_{r-1} + X_{ij}) - \phi_{r1} (P_r + X_{ij}) < 0, \\
& F_{ij} + \phi_{1,2} (P_1 + X_{ij}) + \phi_{2,2} (P_2 + X_{ij}) + \phi_{3,2} (P_3 + X_{ij}) \\
& \quad \cdots + \phi_{r-2,2} (P_{r-2} + X_{ij}) + \phi_{r-1,2} (P_{r-1} + X_{ij}) + \phi_{r2} (P_r + X_{ij}) < 0.
\end{aligned} \quad (3.4)$$

sendo que o termo F_{ij} é definido por,

$$F_{ij} = \frac{1}{2} (A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j), \quad i, j \in \mathbb{K}_r, \quad i \leq j. \quad (3.5)$$

Demonstração. (GUEDES, 2015) □

Corolário 1. *Se as condições do Teorema 2 são factíveis, então as condições do Teorema 3 são também factíveis.*

Demonstração. (GUEDES, 2015) □

É possível observar que, para cada $P_i, i \in \mathbb{K}_r$, existe um máximo $\phi_{i,2}$ e um mínimo $\phi_{i,1}$ associado. Como ambos são utilizados na formulação das LMIs, onde são contemplados todos os casos possíveis de máximos e mínimos para cada $P_i, i \in \mathbb{K}_r$, pode-se concluir que o Teorema 3 fornece 2^r LMIs, sem considerar as LMIs que definem $P_i > \mathbf{0}$, sendo r o número de regras que descrevem o sistema fuzzy TS.

Mais adiante são apresentados exemplos que mostram que as condições do Teorema 3 podem ser mais gerais do que as condições do Teorema 2, em termos de áreas factíveis. (GUEDES et al., 2013).

3.2 Condições Relaxadas para a Estabilidade através de Politopos

A partir dessa seção e até o final desse capítulo, são apresentados os teoremas propostos em (GUEDES, 2015), que fornecem condições necessárias e suficientes para a estabilidade de (2.5) e (2.6), quando os máximos e mínimos de $\dot{h}_i, i \in \mathbb{K}_r$, satisfazem certas condições. Adicionalmente, estes resultados possibilitam a determinação algébrica dos vértices dos politopos formados pela interseção dos hiper-retângulos com os hiper-planos das variações das derivadas temporais das funções de pertinência, no estudo da estabilidade de sistemas não lineares utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno.

No total, são apresentados dois teoremas: um para o caso de número ímpar de regras e outro para o caso de número par de regras.

Defina o conjunto

$$\psi_r = \left\{ \omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \cdots \ \omega_r]^T \in \mathbb{R}^r / \omega_1 \neq \omega_2 \neq \cdots \neq \omega_r \text{ e } \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r \in \mathbb{K}_r \right\}. \quad (3.6)$$

Suponha que as constantes $\phi_{\rho,1}$ e $\phi_{\rho,2}, \rho \in \mathbb{K}_r$ sejam positivas e conhecidas, tais que

$$-\phi_{\rho,1} \leq \dot{h}_{\rho} \leq \phi_{\rho,2}, \rho \in \mathbb{K}_r. \quad (3.7)$$

Como $h_{\omega_1} + h_{\omega_2} + \dots + h_{\omega_r} = 1$, então

$$\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \dots + \dot{h}_{\omega_r} = 0. \quad (3.8)$$

Teorema 4. *Suponha que (3.7) e (3.8) são satisfeitas e que r é par.*

Considere ainda que para todo $\omega \in \Psi_r$ definido em (3.6), as seguintes condições são satisfeitas:

$$-\phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,1}} \leq \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \dots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+3,2}} - \dots - \phi_{\omega_{r,2}} \leq \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}}, \quad (3.9)$$

ou

$$-\phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}} \leq \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \dots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \dots - \phi_{\omega_{r,2}} \leq \phi_{\omega_{\frac{r}{2},2}}. \quad (3.10)$$

Para todo $\omega \in \Psi_r$ dado em (3.6), defina as LMIs abaixo:

(A) Se a condição (3.9) é satisfeita, então:

$$F_{ij} - \phi_{\omega_{1,1}}P_{\omega_1} - \phi_{\omega_{2,1}}P_{\omega_2} - \dots - \phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}}P_{\omega_{\frac{r}{2}}} + \left(\phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \dots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+3,2}} - \dots - \phi_{\omega_{r,2}} \right) P_{\omega_{\frac{r}{2}+1}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}}P_{\omega_{\frac{r}{2}+2}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+3,2}}P_{\omega_{\frac{r}{2}+3}} + \dots + \phi_{\omega_{r,2}}P_{\omega_r} < 0; \quad (3.11)$$

(B) Se a condição (3.10) é satisfeita, então:

$$F_{ij} - \phi_{\omega_{1,1}}P_{\omega_1} - \phi_{\omega_{2,1}}P_{\omega_2} - \dots - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}}P_{\omega_{\frac{r}{2}-1}} + \left(\phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \dots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \dots - \phi_{\omega_{r,2}} \right) P_{\omega_{\frac{r}{2}}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}}P_{\omega_{\frac{r}{2}+1}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}}P_{\omega_{\frac{r}{2}+2}} + \dots + \phi_{\omega_{r,2}}P_{\omega_r} < 0. \quad (3.12)$$

Então, a partir de (3.5), tem-se

$$J_{ij}(x) = x^T [F_{ij} + \dot{h}_{\omega_1}P_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2}P_{\omega_2} + \dots + \dot{h}_{\omega_r}P_{\omega_r}] x < 0, \forall x \neq 0, \quad (3.13)$$

se e somente se, para todo $\omega \in \Psi_r$ definido em (3.6) as condições dadas em (3.9) e (3.11) ou (3.10) e (3.12) são factíveis.

Demonstração. Vide apêndice. □

Teorema 5. *Suponha que (3.7) e (3.8) estão satisfeitas e que r é ímpar.*

Considere ainda que para todo $\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r]^T \in \Psi_r$ definido em (3.6),

$$-\phi_{\omega_{\frac{r+1}{2},1}} \leq \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \dots + \phi_{\omega_{\frac{r-1}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}} - \phi_{\omega_{\frac{r+5}{2},2}} - \dots - \phi_{\omega_{r,2}} \leq \phi_{\omega_{\frac{r+1}{2},2}}. \quad (3.14)$$

Então, considerando (3.5), tem-se

$$J_{ij}(x) = x^T [F_{ij} + \dot{h}_{\omega_1} P_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} P_{\omega_2} + \dots + \dot{h}_{\omega_r} P_{\omega_r}] x < 0, \quad \forall x \neq 0, \quad (3.15)$$

se e somente se,

$$\begin{aligned} & F_{ij} - \phi_{\omega_{1,1}} P_{\omega_1} - \phi_{\omega_{2,1}} P_{\omega_2} - \dots - \phi_{\omega_{\frac{r-1}{2},1}} P_{\omega_{\frac{r-1}{2}}} + \\ & + \left(\phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \dots + \phi_{\omega_{\frac{r-1}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}} - \phi_{\omega_{\frac{r+5}{2},2}} - \dots - \phi_{\omega_{r,2}} \right) P_{\omega_{\frac{r+1}{2}}} \\ & + \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}} P_{\omega_{\frac{r+3}{2}}} + \phi_{\omega_{\frac{r+5}{2},2}} P_{\omega_{\frac{r+5}{2}}} + \dots + \phi_{\omega_{r,2}} P_{\omega_r} < 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

para todo $\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r]^T \in \Psi_r$ definido em (3.6).

Demonstração. Vide apêndice. □

É importante observar que a principal característica que acaba diferenciando o sistema descrito por intervalos de \dot{h}_i assimétricos, simétricos e iguais é o número de LMIs.

As Tabelas 1, 2 e 3 mostram o número de LMIs gerada pelos teoremas apresentados em função do número de regras r que descrevem o sistema. Esses resultados também são mostrados nas Figuras 2 e 3.

Tabela 1 - Número de LMIs fornecidas pelos Teoremas 4 e 5 de acordo com o número de regras nos polítopos para ϕ 's assimétricos ($-\phi_{i,1} \leq \dot{h}_i \leq \phi_{i,2}$) ou simétricos ($-\phi_i \leq \dot{h}_i \leq \phi_i$).

r	1	2	3	4	5	6	7	8
$LMIs$	1	2	6	12	30	60	140	280

Fonte: (GUEDES, 2015)

A fórmula que fornece os números de LMIs apresentados nas Tabelas 1 e 2 será deduzida mais adiante, no Capítulo 4.

Tabela 2 - Número de LMIs fornecidas pelos Teoremas 4 e 5 de acordo com o número de regras nos polítopos para ϕ 's iguais ($-\phi \leq \dot{h}_i \leq \phi$).

r	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>LMIs</i>	1	2	6	6	30	20	140	70

Fonte: (GUEDES, 2015)

Tabela 3 - Número de LMIs fornecidas pelo Teorema 3 de acordo com o número de regras no hiper-retângulo para ϕ 's assimétricos ($-\phi_{i,1} \leq \dot{h}_i \leq \phi_{i,2}$), simétricos ($-\phi_i \leq \dot{h}_i \leq \phi_i$) ou ϕ 's iguais ($-\phi \leq \dot{h}_i \leq \phi$).

r	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>LMIs</i>	2	4	8	16	32	64	128	256

Fonte: (GUEDES, 2015)

3.2.1 Exemplos numéricos

Serão apresentados alguns exemplos presentes em (GUEDES, 2015) que demonstram a eficácia das LMIs. Nesses casos, serão utilizados ϕ 's iguais ($-\phi \leq \dot{h}_\rho(x(t)) \leq \phi$, $\rho \in \mathbb{K}_r$).

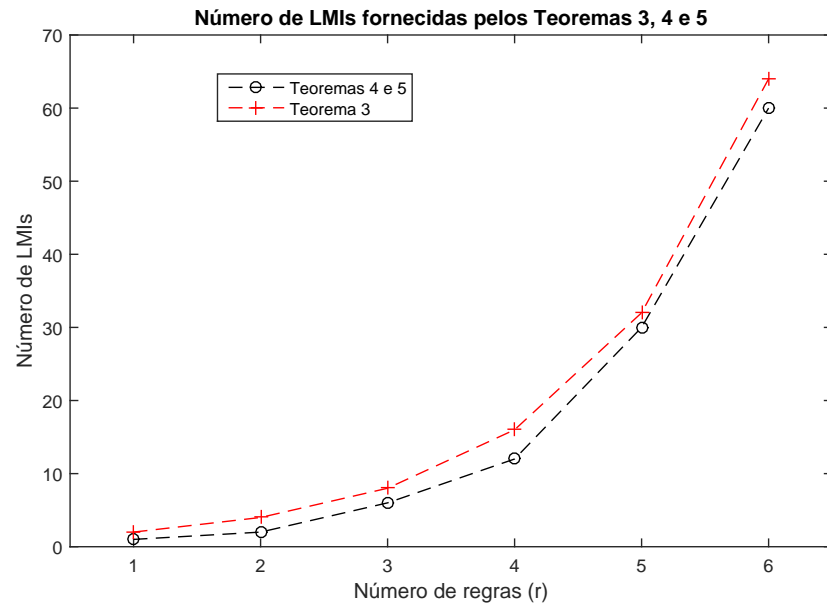
Exemplo 1 - Para $r = 3$ (três regras ou modelos locais).

Considere o sistema descrito pelo model fuzzy TS presente em (2.5), (2.6) e (3.6)-(3.8), cujos parâmetros são

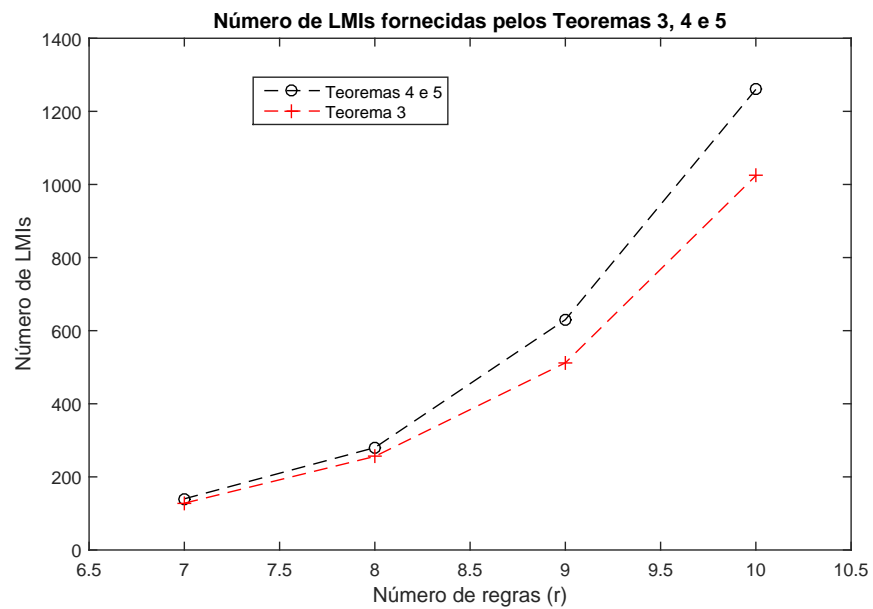
$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{5}(3b-2) & \frac{1}{5}(3a-4) \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{1}{5}(2b-3) & \frac{1}{5}(2a-6) \end{bmatrix}.$$

LMIs resultantes com o hiper-retângulo Teorema 3.

$$\begin{aligned} F_{ij} - \phi_1 (P_1 + X_{ij}) - \phi_2 (P_2 + X_{ij}) - \phi_3 (P_3 + X_{ij}) &< 0, \\ F_{ij} - \phi_1 (P_1 + X_{ij}) - \phi_2 (P_2 + X_{ij}) + \phi_3 (P_3 + X_{ij}) &< 0, \\ F_{ij} - \phi_1 (P_1 + X_{ij}) + \phi_2 (P_2 + X_{ij}) - \phi_3 (P_3 + X_{ij}) &< 0, \\ F_{ij} - \phi_1 (P_1 + X_{ij}) + \phi_2 (P_2 + X_{ij}) + \phi_3 (P_3 + X_{ij}) &< 0, \\ F_{ij} + \phi_1 (P_1 + X_{ij}) - \phi_2 (P_2 + X_{ij}) - \phi_3 (P_3 + X_{ij}) &< 0, \\ F_{ij} + \phi_1 (P_1 + X_{ij}) - \phi_2 (P_2 + X_{ij}) + \phi_3 (P_3 + X_{ij}) &< 0, \\ F_{ij} + \phi_1 (P_1 + X_{ij}) + \phi_2 (P_2 + X_{ij}) - \phi_3 (P_3 + X_{ij}) &< 0, \\ F_{ij} + \phi_1 (P_1 + X_{ij}) + \phi_2 (P_2 + X_{ij}) + \phi_3 (P_3 + X_{ij}) &< 0. \end{aligned}$$

Figura 2 - Número de LMIs fornecidas pelos Teoremas 3, 4 e 5 para $1 \leq r \leq 6$ 

Fonte: O próprio autor.

Figura 3 - Número de LMIs fornecidas pelos Teoremas 3, 4 e 5 para $7 \leq r \leq 10$ 

Fonte: O próprio autor.

LMIs resultantes com o Politopo obtido através do Teorema 5.

$$F_{ij} + \phi (P_2 - P_1) < 0,$$

$$F_{ij} + \phi (P_1 - P_2) < 0,$$

$$F_{ij} + \phi (P_3 - P_1) < 0,$$

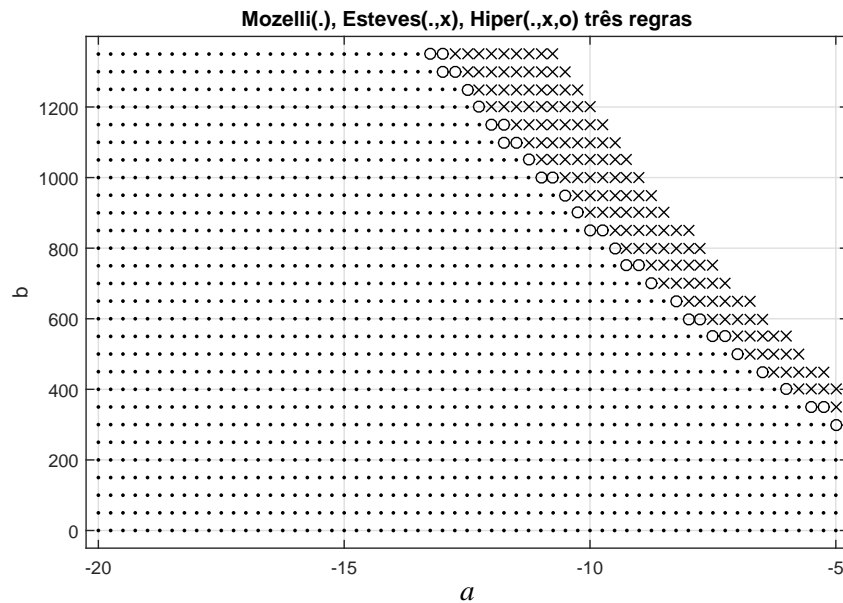
$$F_{ij} + \phi (P_1 - P_3) < 0,$$

$$F_{ij} + \phi (P_3 - P_2) < 0,$$

$$F_{ij} + \phi (P_2 - P_3) < 0.$$

A Figura 4, presente em (GUEDES, 2015), mostra o resultado das regiões de factibilidade obtidas com os Teoremas 1 e 2, com o hiper-retângulo Teorema 3 e com o Teorema 5, para vários valores dos pares ordenados (a, b) , $a \in [-20, -5]$, $b \in [0, 1350]$ e $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi = 0,85$. É importante ressaltar que as áreas de factibilidade para os Teoremas 3 e 5 são iguais, conforme mostrado por (GUEDES, 2015).

Figura 4 - Áreas de estabilidade ϕ 's iguais para $r = 3$ Teorema 1 (\cdot), Teorema 2 (\cdot, o), Teorema 3 e 5 (\cdot, o, x).



Exemplo 2 - Para $r = 4$ (quatro regras ou modelos locais).

Considere o sistema descrito pelo model fuzzy TS presente em (2.5), (2.6) e (3.6)-(3.8),, cujos parâmetros são

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{5}(3b-2) & \frac{1}{5}(3a-4) \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{1}{5}(2b-3) & \frac{1}{5}(2a-6) \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix}.$$

Que, de acordo com o Teorema 3, resultam em,

$$\begin{aligned} F_{ij} - \phi_1(P_1 + X_{ij}) - \phi_2(P_2 + X_{ij}) - \phi_3(P_3 + X_{ij}) - \phi_4(P_4 + X_{ij}) &< 0, \\ F_{ij} - \phi_1(P_1 + X_{ij}) - \phi_2(P_2 + X_{ij}) - \phi_3(P_3 + X_{ij}) + \phi_4(P_4 + X_{ij}) &< 0, \\ F_{ij} - \phi_1(P_1 + X_{ij}) - \phi_2(P_2 + X_{ij}) + \phi_3(P_3 + X_{ij}) - \phi_4(P_4 + X_{ij}) &< 0, \\ F_{ij} - \phi_1(P_1 + X_{ij}) - \phi_2(P_2 + X_{ij}) + \phi_3(P_3 + X_{ij}) + \phi_4(P_4 + X_{ij}) &< 0, \\ F_{ij} - \phi_1(P_1 + X_{ij}) + \phi_2(P_2 + X_{ij}) - \phi_3(P_3 + X_{ij}) - \phi_4(P_4 + X_{ij}) &< 0, \\ F_{ij} - \phi_1(P_1 + X_{ij}) + \phi_2(P_2 + X_{ij}) - \phi_3(P_3 + X_{ij}) + \phi_4(P_4 + X_{ij}) &< 0, \\ F_{ij} - \phi_1(P_1 + X_{ij}) + \phi_2(P_2 + X_{ij}) + \phi_3(P_3 + X_{ij}) - \phi_4(P_4 + X_{ij}) &< 0, \\ F_{ij} - \phi_1(P_1 + X_{ij}) + \phi_2(P_2 + X_{ij}) + \phi_3(P_3 + X_{ij}) + \phi_4(P_4 + X_{ij}) &< 0, \\ F_{ij} + \phi_1(P_1 + X_{ij}) - \phi_2(P_2 + X_{ij}) - \phi_3(P_3 + X_{ij}) - \phi_4(P_4 + X_{ij}) &< 0, \\ F_{ij} + \phi_1(P_1 + X_{ij}) - \phi_2(P_2 + X_{ij}) - \phi_3(P_3 + X_{ij}) + \phi_4(P_4 + X_{ij}) &< 0, \\ F_{ij} + \phi_1(P_1 + X_{ij}) - \phi_2(P_2 + X_{ij}) + \phi_3(P_3 + X_{ij}) - \phi_4(P_4 + X_{ij}) &< 0, \\ F_{ij} + \phi_1(P_1 + X_{ij}) - \phi_2(P_2 + X_{ij}) + \phi_3(P_3 + X_{ij}) + \phi_4(P_4 + X_{ij}) &< 0, \\ F_{ij} + \phi_1(P_1 + X_{ij}) + \phi_2(P_2 + X_{ij}) - \phi_3(P_3 + X_{ij}) - \phi_4(P_4 + X_{ij}) &< 0, \\ F_{ij} + \phi_1(P_1 + X_{ij}) + \phi_2(P_2 + X_{ij}) - \phi_3(P_3 + X_{ij}) + \phi_4(P_4 + X_{ij}) &< 0, \\ F_{ij} + \phi_1(P_1 + X_{ij}) + \phi_2(P_2 + X_{ij}) + \phi_3(P_3 + X_{ij}) - \phi_4(P_4 + X_{ij}) &< 0, \\ F_{ij} + \phi_1(P_1 + X_{ij}) + \phi_2(P_2 + X_{ij}) + \phi_3(P_3 + X_{ij}) + \phi_4(P_4 + X_{ij}) &< 0. \end{aligned}$$

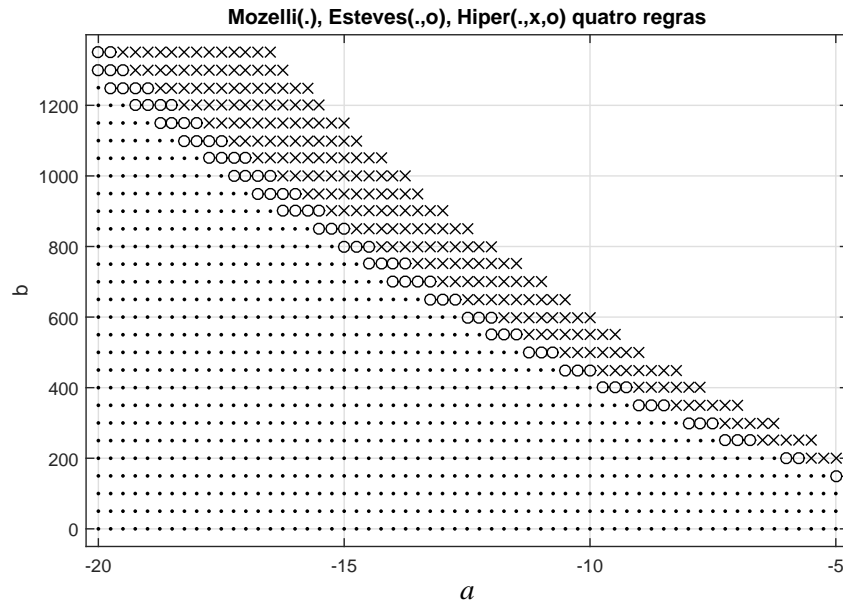
LMIs resultantes com o Polítopo obtido através do Teorema 4.

$$\begin{aligned} F_{ij} + \phi(P_1 + P_2 - P_3 - P_4) &< 0, \\ F_{ij} + \phi(P_1 - P_2 - P_3 + P_4) &< 0, \\ F_{ij} + \phi(P_1 - P_2 + P_3 - P_4) &< 0, \\ F_{ij} + \phi(-P_1 - P_2 + P_3 + P_4) &< 0, \\ F_{ij} + \phi(-P_1 + P_2 + P_3 - P_4) &< 0, \\ F_{ij} + \phi(-P_1 + P_2 - P_3 + P_4) &< 0. \end{aligned}$$

A Figura 5, presente de (GUEDES, 2015), mostra o resultado das regiões de fac-

tibilidade obtidas com os Teoremas 1 e 2, com o hiper-retângulo Teorema 3 e com o Teorema 4, para vários valores dos pares ordenados (a, b) , $a \in [-20, -5]$, $b \in [0, 1350]$ e $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \phi = 0,85$. É importante ressaltar que as áreas de factibilidade para os Teoremas 3 e 4 são iguais, conforme mostrado por (GUEDES, 2015).

Figura 5 - Áreas de estabilidade ϕ 's iguais para $r = 4$ Teorema 1 (.), Teorema 2 (.,o), Teorema 3 e 4 (.,o,x).



Fonte: (GUEDES, 2015)

3.3 Conclusões parciais

Neste capítulo, foi feita uma revisão bibliográfica sobre as teorias que serão mais aprofundadas na continuação deste texto. As condições apresentadas por (GUEDES, 2015) mostraram-se bastante eficazes quando comparadas com os métodos clássicos, justificando a continuação dos estudos na área, bem como a utilização da função Lyapunov fuzzy. O prosseguimento lógico do trabalho seria provar em que as condições propostas nos teoremas em (GUEDES, 2015) são satisfeitas, propôr novos métodos de projeto de reguladores e/ou observadores, bem como aplicação em plantas descritas por modelos fuzzy TS.

4 Análise sobre condições de relaxamento para estabilidade e estabilização de sistemas não lineares fuzzy TS

Como explicado nas conclusões parciais do capítulo anterior, o objetivo desse trabalho foi verificar em que situações as condições presentes em (GUEDES, 2015) são sempre satisfeitas, além de tentar encontrar aprimoramentos na teoria, como redução de número de LMIs geradas e/ou diminuição no número de variáveis envolvidas nos cálculos. Em todas as análises abaixo, os vetores $\omega \in \psi_r$, definido em (3.6), como exigido nos Teoremas 4 e 5.

4.1 Novas propostas para análise das condições propostas para as LMIs

A primeira parte deste trabalho consiste em verificar e estabelecer rigorosamente através de provas, em quais casos as condições (3.9) e (3.10) (r par) ou (3.14) (r ímpar), propostas nos Teoremas 4 e 5 são sempre satisfeitas, dadas as características do sistemas em (2.5), (2.6), (3.7) e (3.8).

Observação 1. *Pode-se facilmente ver que, para os casos de intervalos iguais de ϕ 's ($-\phi \leq \dot{h}_\rho(x(t)) \leq \phi, \rho \in \mathbb{K}_r$), as condições de existência dos Teoremas 4 e 5 são satisfeitas. Para tal, basta substituir ϕ e $-\phi$ nas equações (3.9), (3.10) e (3.14). As equações (3.9) e (3.10) resultam em $-\phi \leq \phi \leq \phi$ e $-\phi \leq -\phi \leq \phi$, respectivamente, enquanto (3.14) resulta em $-\phi \leq 0 \leq \phi$. Portanto, as análises feitas a seguir sobre as condições de existência dos Teoremas 4 e 5 consideram sempre casos mais genéricos, com ϕ 's assimétricos.*

Para $r = 2$:

Levando-se em conta ϕ 's assimétricos ($-\phi_{\rho,1} \leq \dot{h}_\rho(x(t)) \leq \phi_{\rho,2}$), as condições de existência, descritas no Teorema 4, em (3.9) e (3.10), são dadas por:

$$-\phi_{\omega_{2,1}} \leq \phi_{\omega_{1,1}} - \phi_{\omega_{2,2}} \leq \phi_{\omega_{2,2}} \quad (4.1)$$

ou

$$-\phi_{\omega_{1,1}} \leq \phi_{\omega_{1,1}} - \phi_{\omega_{2,2}} \leq \phi_{\omega_{1,2}}. \quad (4.2)$$

Dada a característica (3.8)

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 + \dot{h}_2 &= 0, \\ \dot{h}_1 &= -\dot{h}_2, \end{aligned} \quad (4.3)$$

ou seja

$$\begin{aligned} \dot{h}_{1_{max}} &= -\dot{h}_{2_{min}}, \\ \dot{h}_{1_{min}} &= -\dot{h}_{2_{max}}, \\ \phi_{\omega_{1,2}} &= \phi_{\omega_{2,1}}, \\ \phi_{\omega_{1,1}} &= \phi_{\omega_{2,2}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Substituindo (4.4) em (4.1) e (4.2)

$$\begin{aligned} -\phi_{\omega_{2,1}} &\leq \phi_{\omega_{1,1}} - \phi_{\omega_{1,1}} \leq \phi_{\omega_{2,2}}, \\ -\phi_{\omega_{2,1}} &\leq 0 \leq \phi_{\omega_{2,2}}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

ou

$$\begin{aligned} -\phi_{\omega_{1,1}} &\leq \phi_{\omega_{1,1}} - \phi_{\omega_{2,2}} \leq \phi_{\omega_{1,2}}, \\ -\phi_{\omega_{1,1}} &\leq 0 \leq \phi_{\omega_{1,2}}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

provando assim que as condições propostas no Teorema 4 são sempre satisfeitas para casos de $r = 2$.

Para $r = 3$:

Para o caso específico de 3 regras ($r = 3$), e levando-se em conta ϕ 's assimétricos ($-\phi_{\rho,1} \leq \dot{h}_\rho(x(t)) \leq \phi_{\rho,2}$) a condição de existência das LMIs do Teorema 5 é

$$-\phi_{\omega_{2,1}} \leq \phi_{\omega_{1,1}} - \phi_{\omega_{3,2}} \leq \phi_{\omega_{2,2}}, \quad (4.7)$$

para todo $\omega_i \in \mathbb{K}_3$, $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_3$.

Para provar tal propriedade, deve-se recorrer a uma das características do sistema,

dada em (3.8). Por tal característica, é possível afirmar que, se algum dos \dot{h}_i assumir o valor máximo, como a soma de todos \dot{h}_i é nula, então a soma deste \dot{h}_i máximo com os valores mínimos dos outros dois \dot{h}_i será menor ou igual a 0. Ou seja

$$\begin{aligned} -\phi_{\omega_{1,1}} - \phi_{\omega_{2,1}} + \phi_{\omega_{3,2}} &\leq 0, \\ -\phi_{\omega_{2,1}} &\leq \phi_{\omega_{1,1}} - \phi_{\omega_{3,2}}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Além disso, é possível afirmar também que, se algum dos \dot{h}_i assumir o valor mínimo, como a soma de todos \dot{h}_i é nula, então a soma deste \dot{h}_i mínimo com os valores máximos dos outros dois \dot{h}_i será maior ou igual a 0.

Sendo assim

$$\begin{aligned} -\phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,2}} + \phi_{\omega_{3,2}} &\geq 0 \\ \phi_{\omega_{2,2}} &\geq \phi_{\omega_{1,1}} - \phi_{\omega_{3,2}} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Associando (4.8) e (4.9), fica provada que a condição (4.7) sempre será satisfeita dadas as características do sistema.

Para $r = 4$:

Para o caso específico de 4 regras, levando-se também em conta ϕ 's assimétricos, as condição de existência das LMIs do Teorema 4 são

$$-\phi_{\omega_{3,1}} \leq \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} - \phi_{\omega_{4,2}} \leq \phi_{\omega_{3,2}}, \tag{4.10}$$

ou

$$-\phi_{\omega_{2,1}} \leq \phi_{\omega_{1,1}} - \phi_{\omega_{3,2}} - \phi_{\omega_{4,2}} \leq \phi_{\omega_{2,2}}. \tag{4.11}$$

para todo $\omega_i \in \mathbb{K}_4, \omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_3 \neq \omega_4$.

Utilizando novamente a características do sistema dada em (3.8), se algum dos \dot{h}_i assumir o valor máximo e considerando os outros \dot{h}_i iguais aos seus valores mínimos, o resultado da soma deles é menor ou igual a 0:

$$\begin{aligned} -\phi_{\omega_{1,1}} - \phi_{\omega_{2,1}} - \phi_{\omega_{3,1}} + \phi_{\omega_{4,2}} &\leq 0 \\ -\phi_{\omega_{3,1}} &\leq \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} - \phi_{\omega_{4,2}}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Além disso, é possível afirmar também que, se algum dos \dot{h}_i assumir o valor mínimo e considerando os outros três \dot{h}_i iguais aos seus valores máximos, o resultado da soma deles

é maior ou igual a 0.

Sendo assim

$$\begin{aligned} -\phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,2}} + \phi_{\omega_{3,2}} + \phi_{\omega_{4,2}} &\geq 0 \\ \phi_{\omega_{2,2}} &\geq \phi_{\omega_{1,1}} - \phi_{\omega_{3,2}} - \phi_{\omega_{4,2}}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

É importante observar que a prova acima apenas comprova uma parte de cada uma das condições apresentadas em (4.10) e (4.11). Porém, é possível ver que, quando uma das condições que não pode ser provada é falsa, isso implicará que a outra é verdadeira.

Uma das condições que não foi provada é a descrita em (4.11),

$$-\phi_{\omega_{2,1}} \leq \phi_{\omega_{1,1}} - \phi_{\omega_{3,2}} - \phi_{\omega_{4,2}}. \quad (4.14)$$

Supondo que (4.14) seja falsa, isso implica que

$$-\phi_{\omega_{2,1}} > \phi_{\omega_{1,1}} - \phi_{\omega_{3,2}} - \phi_{\omega_{4,2}}. \quad (4.15)$$

Rearranjando (4.15), tem-se

$$\phi_{\omega_{3,2}} > \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} - \phi_{\omega_{4,2}}, \quad (4.16)$$

comprovando assim a condição que não havia sido provada anteriormente presente em (4.10).

Assim, se a condição (4.11) não for satisfeita, então a condição (4.10) será satisfeita.

Analogamente, se a condição que ainda não foi provada em (4.10), dada por

$$\phi_{\omega_{3,2}} \geq \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} - \phi_{\omega_{4,2}} \quad (4.17)$$

não for satisfeita, então

$$\phi_{\omega_{3,2}} < \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} - \phi_{\omega_{4,2}}. \quad (4.18)$$

Reescrevendo (4.18), observe que

$$-\phi_{\omega_{2,1}} < \phi_{\omega_{1,1}} - \phi_{\omega_{3,2}} - \phi_{\omega_{4,2}} \quad (4.19)$$

que é justamente a condição que faltava para atender as condições dadas em (4.11).

Desta forma, se a condição (4.10) não for atendida, a condição (4.11) será atendida.

Portando, fica comprovado que, para o caso específico de $r = 4$, as condições propostas pelo Teorema 4, equações (4.10) ou (4.11), são sempre obedecidas.

Para $r \geq 5$.

Caso 1 - Número ímpar de regras.

Nessa seção, será provado que para um número ímpar $r \geq 5$ de regras, as condições apresentadas por (GUEDES, 2015) nem sempre são satisfeitas. Para tal, será utilizado método da indução matemática. Assim, é necessário provar que as condições propostas por (GUEDES, 2015) não são satisfeitas para um número ímpar de regras r qualquer.

Suponha um sistema descrito por 5 regras ($r = 5$), em que os limites dos ϕ 's são dados

$$\begin{aligned} -1 &\leq \dot{h}_1 \leq 1 \\ -1 &\leq \dot{h}_2 \leq 1 \\ -1 &\leq \dot{h}_3 \leq 1 \\ -2 &\leq \dot{h}_4 \leq 2 \\ -2 &\leq \dot{h}_5 \leq 2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Note que, para qualquer valor máximo ou mínimo utilizado, os outros limites dos \dot{h}_j , $j \in \mathbb{K}_r$, conseguem levar a soma de todos a 0, respeitando a característica (3.8) do sistema.

Porém, analisando as condições de existência das LMIs para o Teorema 5, equações (3.14), tem-se:

Condição 1

$$\phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} - \phi_{\omega_{4,2}} - \phi_{\omega_{5,2}} \leq \phi_{\omega_{3,2}} \quad (4.21)$$

Utilizando-se os valores apresentados em (4.20), tem-se

$$\begin{aligned} 1 + 1 - 2 - 2 &\leq 1 \\ -2 &\leq 1 \end{aligned} \quad (4.22)$$

comprovando então que a Condição 1 é obedecida.

Condição 2

$$-\phi_{\omega_{3,1}} \leq \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} - \phi_{\omega_{4,2}} - \phi_{\omega_{5,2}} \quad (4.23)$$

Utilizando-se novamente os valores apresentados em (4.20), tem-se

$$\begin{aligned} -1 &\leq 1 + 1 - 2 - 2 \\ -1 &\leq -2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

comprovando então que a condição 2 NÃO é obedecida.

Portanto, fica comprovado que para $r \geq 5$, r ímpar, mesmo com a característica do (3.8) obedecida, existem casos em que as condições necessárias para a estabilidade, propostas por (GUEDES, 2015), presente nesse texto em (3.14), não são satisfeitas.

A partir desse resultado, seguindo o método da indução matemática, é proposta uma análise de um caso genérico com número ímpar q de regras.

Suponha, portanto, um $r = q$, q ímpar e $q \geq 5$, respeitando a condição (3.8), sendo

$$-\phi_{i,1} \leq \dot{h}_i(x(t)) \leq \phi_{i,2} \quad (4.25)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_q$.

Considere também que a condição da esquerda da equação (3.14) apresentada pelo Teorema 5 seja falsa, ou seja

$$-\phi_{\omega_{\frac{q+1}{2},1}} > \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \dots + \phi_{\omega_{\frac{q-1}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{q+3}{2},2}} - \phi_{\omega_{\frac{q+5}{2},2}} - \dots - \phi_{\omega_{q,2}}. \quad (4.26)$$

Suponha agora que, para um $r = q + 2$, tem-se

$$\begin{aligned} -\phi_{i,1} &\leq \dot{h}_i(x(t)) \leq \phi_{i,2} \\ -\varepsilon_1 &\leq \dot{h}_{q+1}(x(t)) \leq \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_3 &\leq \dot{h}_{q+2}(x(t)) \leq \varepsilon_4 \end{aligned} \quad (4.27)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_q$, e sendo que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \geq 0$.

O primeiro passo para a análise da condição estabelecida no Teorema 5 é verificar se a

somatória dos \dot{h}_i continua sendo igual a zero para $r = q + 2$, para não ferir esta propriedade do sistema. Para tal, basta que nenhum dos novos limites (ε_1 , ε_2 , ε_3 e ε_4) seja maior que a somatória dos outros limites. Ou seja, adotando-se os mínimos e máximos para \dot{h}_{q+1} e \dot{h}_{q+2} , têm-se:

$$\begin{aligned} \max\{\dot{h}_{q+1}\} + \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q+1}}^{q+2} \min\{\dot{h}_i\} \right) &\leq 0, \\ \varepsilon_2 &\leq - \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q+1}}^{q+2} \min\{\dot{h}_i\} \right), \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \max\{\dot{h}_{q+2}\} + \left(\sum_{i=1}^{q+1} \min\{\dot{h}_i\} \right) &\leq 0, \\ \varepsilon_4 &\leq - \left(\sum_{i=1}^{q+1} \min\{\dot{h}_i\} \right), \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \min\{\dot{h}_{q+1}\} + \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q+1}}^{q+2} \max\{\dot{h}_i\} \right) &\geq 0, \\ \varepsilon_1 &\leq \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q+1}}^{q+2} \max\{\dot{h}_i\} \right), \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \min\{\dot{h}_{q+2}\} + \left(\sum_{i=1}^{q+2} \max\{\dot{h}_i\} \right) &\geq 0, \\ \varepsilon_3 &\leq \left(\sum_{i=1}^{q+1} \max\{\dot{h}_i\} \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Feito isso, é preciso analisar se as condições propostas por (GUEDES, 2015) continuam não sendo satisfeitas com a introdução dos novos termos.

A condição a ser analisada é:

$$\begin{aligned} -\phi_{\omega_{\frac{q+2+1}{2},1}} &> \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{q+2-1}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{q+2+3}{2},2}} - \phi_{\omega_{\frac{q+2+5}{2},2}} - \cdots - \phi_{\omega_{q+2,2}} \\ -\phi_{\omega_{\frac{q+2+1}{2},1}} &> \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{q+2-1}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{q+2+3}{2},2}} - \phi_{\omega_{\frac{q+2+5}{2},2}} - \cdots - \varepsilon_2 - \varepsilon_4 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Note que em (4.26), somando $-\phi_{\omega_{\frac{q+3}{2},1}}$ à esquerda e à direita da inequação e passando o termo $-\phi_{\omega_{\frac{q+1}{2},1}}$ para o lado direito, então,

$$\begin{aligned}
& -\phi_{\omega_{\frac{q+3}{2},1}} \\
& > \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{q-1}{2},1}} + \phi_{\omega_{\frac{q+1}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{q+3}{2},2}} - \phi_{\omega_{\frac{q+5}{2},2}} - \cdots - \phi_{\omega_{q,2}} - \phi_{\omega_{\frac{q+3}{2},1}} \\
& = \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{q+1}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{q+5}{2},2}} - \cdots - \phi_{\omega_{q,2}} + (-\phi_{\omega_{\frac{q+3}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{q+3}{2},2}}) \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Comparando (4.26) com (4.33), note que como (4.33) é factível, então se $-\varepsilon_2 - \varepsilon_4 = -\phi_{\omega_{\frac{q+3}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{q+3}{2},2}}$, (4.26) será satisfeita também.

Um solução é adotar $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \phi_{\omega_{\frac{q+3}{2},1}}$ e $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \phi_{\omega_{\frac{q+3}{2},2}}$. Dessa maneira, (3.14) não será satisfeita, completando assim a prova por indução matemática.

Caso 2 - Número par de regras.

Nessa seção, será provado que para um número par $r \geq 6$ de regras, as condições apresentadas por (GUEDES, 2015) nem sempre são satisfeitas. Para tal, será utilizado novamente método da indução matemática, conforme explicado na seção anterior.

Suponha um sistema descrito por 6 regras ($r = 6$), em que os limites dos ϕ 's são dados

$$\begin{aligned}
-1 & \leq \dot{h}_1 \leq 1 \\
-1 & \leq \dot{h}_2 \leq 1 \\
-1 & \leq \dot{h}_3 \leq 1 \\
-1 & \leq \dot{h}_4 \leq 1 \\
-2 & \leq \dot{h}_5 \leq 2 \\
-3 & \leq \dot{h}_6 \leq 3.
\end{aligned} \quad (4.34)$$

Note que, para qualquer valor máximo ou mínimo utilizado, os outros limites dos \dot{h}_j , $j \in \mathbb{K}_r$, conseguem levar a soma geral a 0, respeitando a característica (3.8) do sistema.

Porém, analisando as condições de existência das LMIs para o Teorema 4, equação (3.9) tem-se:

Condição 1

$$-\phi_{\omega_{4,1}} \leq \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \phi_{\omega_{3,1}} - \phi_{\omega_{5,2}} - \phi_{\omega_{6,2}} \leq \phi_{\omega_{4,2}} \quad (4.35)$$

Utilizando-se os valores apresentados em (4.34), tem-se

$$\begin{aligned} -1 &\leq 1 + 1 + 1 - 2 - 3 \leq 1 \\ -1 &\leq -2 \leq 1 \end{aligned} \tag{4.36}$$

comprovando então que uma parte da condição 1 NÃO é obedecida.

Agora, considere a segunda condição do Teorema 4, dada em (3.10):

Condição 2

$$-\phi_{\omega_{3,1}} \leq \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} - \phi_{\omega_{4,2}} - \phi_{\omega_{5,2}} - \phi_{\omega_{6,2}} \leq \phi_{\omega_{3,2}} \tag{4.37}$$

Utilizando-se novamente os valores apresentados em (4.34), tem-se

$$\begin{aligned} -1 &\leq 1 + 1 - 1 - 2 - 3 \leq 1 \\ -1 &\leq -4 \leq 1 \end{aligned} \tag{4.38}$$

comprovando então que uma parte da Condição 2 NÃO é obedecida.

Portanto, fica comprovado que para $r \geq 6$, r par, mesmo com a condição (3.8) obedecida, existem casos em que as condições de existência das LMIs, dadas por (3.9) ou (3.10), não são satisfeitas.

O próximo passo é analisar as condições para uma quantidade par genérica de regras q .

Suponha um $r = q$, q par, respeitando a condição (3.8), sendo

$$-\phi_{i,1} \leq \dot{h}_i(x(t)) \leq \phi_{i,2} \tag{4.39}$$

para todo $i \in \mathbb{K}_q$.

Considere também que as condições da esquerda apresentadas pelo Teorema 4, equações (3.9) e (3.10), sejam falsas. Ou seja

$$-\phi_{\omega_{\frac{q}{2}+1,1}} > \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{q}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+2,2}} - \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+4,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{q,2}} \tag{4.40}$$

e

$$-\phi_{\omega_{\frac{q}{2},1}} > \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{q}{2}-1,1}} - \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+1,2}} - \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+3,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{q,2}} \tag{4.41}$$

Suponha agora que, para um $r = q + 2$, tem-se

$$\begin{aligned} -\phi_{i,1} &\leq \dot{h}_i(x(t)) \leq \phi_{i,2} \\ -\varepsilon_1 &\leq \dot{h}_{q+1}(x(t)) \leq \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_3 &\leq \dot{h}_{q+2}(x(t)) \leq \varepsilon_4 \end{aligned} \tag{4.42}$$

para todo $i \in \mathbb{K}_q$, e sendo que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \geq 0$.

O primeiro passo para a análise da condição estabelecida no Teorema 4 é verificar se a somatória dos \dot{h}_i continua sendo igual zero para $r = q + 2$, para não ferir esta propriedade do sistema. Para tal, basta que nenhum dos novos limites ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ e ε_4) seja maior que a somatória dos outros limites. Ou seja, adotando-se os mínimos e máximos para \dot{h}_{q+1} e \dot{h}_{q+2} , têm-se:

$$\begin{aligned} \max\{\dot{h}_{q+1}\} + \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q+1}}^{q+2} \min\{\dot{h}_i\} \right) &\leq 0, \\ \varepsilon_2 &\leq - \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q+1}}^{q+2} \min\{\dot{h}_i\} \right), \end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned} \max\{\dot{h}_{q+2}\} + \left(\sum_{i=1}^{q+1} \min\{\dot{h}_i\} \right) &\leq 0, \\ \varepsilon_4 &\leq - \left(\sum_{i=1}^{q+1} \min\{\dot{h}_i\} \right), \end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned} \min\{\dot{h}_{q+1}\} + \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q+1}}^{q+2} \max\{\dot{h}_i\} \right) &\geq 0, \\ \varepsilon_1 &\leq \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq q+1}}^{q+2} \max\{\dot{h}_i\} \right), \end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned} \min\{\dot{h}_{q+2}\} + \left(\sum_{i=1}^{q+1} \max\{\dot{h}_i\} \right) &\geq 0, \\ \varepsilon_3 &\leq \left(\sum_{i=1}^{q+1} \max\{\dot{h}_i\} \right). \end{aligned} \tag{4.46}$$

Feito isso, é preciso analisar se as condições propostas por (GUEDES, 2015), equações (3.9) e (3.10), continuam não sendo satisfeitas com a introdução dos novos termos.

$$-\phi_{\omega_{\frac{q+2}{2}+1,1}} > \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{q+2}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{q+2}{2}+2,2}} - \phi_{\omega_{\frac{q+2}{2}+3,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{q+2,2}} \quad (4.47)$$

$$-\phi_{\omega_{\frac{q+2}{2}+1,1}} > \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{q+2}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{q+2}{2}+2,2}} - \phi_{\omega_{\frac{q+2}{2}+3,2}} - \cdots - \varepsilon_2 - \varepsilon_4$$

e

$$-\phi_{\omega_{\frac{q+2}{2},1}} > \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{q+2}{2}-1,1}} - \phi_{\omega_{\frac{q+2}{2}+1,2}} - \phi_{\omega_{\frac{q+2}{2}+2,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{q+2,2}} \quad (4.48)$$

$$-\phi_{\omega_{\frac{q+2}{2},1}} > \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{q+2}{2}-1,1}} - \phi_{\omega_{\frac{q+2}{2}+1,2}} - \phi_{\omega_{\frac{q+2}{2}+2,2}} - \cdots - \varepsilon_2 - \varepsilon_4$$

Note que em (4.40), somando $-\phi_{\omega_{\frac{q+2}{2}+1,1}}$ à esquerda e à direita da inequação e passando o termo $-\phi_{\omega_{\frac{q}{2}+1,1}}$ para o lado direito, então,

$$\begin{aligned} & -\phi_{\omega_{\frac{q+2}{2}+1,1}} \\ & > \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+1,1}} - \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+2,2}} - \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+3,2}} - \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+4,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{q,2}} - \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+2,1}} \\ & = \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+1,1}} - \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+3,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{q,2}} + (-\phi_{\omega_{\frac{q}{2}+2,1}} - \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+2,2}}). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Comparando (4.47) com (4.49), note que como (4.49) é factível, então se $-\varepsilon_2 - \varepsilon_4 = -\phi_{\omega_{\frac{q}{2}+2,1}} - \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+2,2}}$, (4.47) será factível também.

Uma solução é adotar $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+2,1}}$ e $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+2,2}}$. Dessa maneira, (3.9) não será satisfeita.

Agora, note que em (4.41), somando $-\phi_{\omega_{\frac{q+2}{2},1}}$ à esquerda e à direita da inequação e passando o termo $-\phi_{\omega_{\frac{q}{2},1}}$ para o lado direito, então,

$$\begin{aligned} & -\phi_{\omega_{\frac{q+2}{2},1}} \\ & > \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{q}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+1,2}} - \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+2,2}} - \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+3,2}} - \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+4,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{q,2}} - \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+1,1}} \\ & = \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{q}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+3,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{q,2}} + (-\phi_{\omega_{\frac{q}{2}+1,1}} - \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+1,2}}). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Comparando (4.48) com (4.50), note que como (4.50) é factível, então se $-\varepsilon_2 - \varepsilon_4 = -\phi_{\omega_{\frac{q}{2}+1,1}} - \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+1,2}}$, (4.48) será factível também.

Uma solução é adotar $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+1,1}}$ e $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+1,2}}$. Dessa maneira, (3.9) não será satisfeita.

Porém, é preciso achar valores para ε_1 , ε_2 , ε_3 e ε_4 que tornem tanto (4.47) quanto (4.48) factíveis. Para tal, basta que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \max\{\phi_{\omega_{\frac{q}{2}+1,1}}, \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+1,2}}, \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+2,1}}, \phi_{\omega_{\frac{q}{2}+2,2}}\}$.

Ao escolher o máximo entre os termos indicados, não será ferida a condição da soma dos $\dot{h}_i = 0$, pois o máximo de \dot{h}_{q+1} será igual o mínimo de \dot{h}_{q+2} , multiplicando por -1 , e vice-versa. Portanto, se um desses \dot{h}_i assumir seu máximo ou mínimo, os outros limites se adaptarão, levando a soma de todos \dot{h}_i 's a 0.

Assim, fica provado, por indução matemática, que as condições propostas por (GUEDES, 2015) nos Teoremas 4 e 5 nem sempre são satisfeitas.

4.2 Teorema da utilização dos limites

Suponha que, para um sistema com mais do que 4 regras ($r \geq 5$), as condições dos Teoremas 4 e 5 não sejam atendidas. Assim, é proposto um procedimento para construir as LMIs de maneira a contemplar o “pior caso” possível, como é demonstrado no teorema a seguir.

Defina o conjunto

$$\Psi_r = \left\{ \omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \cdots \ \omega_r]^T \in \mathbb{R}^r / \omega_1 \neq \omega_2 \neq \cdots \neq \omega_r \text{ e } \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r \in \mathbb{K}_r \right\}. \quad (4.51)$$

Suponha que as constantes $\phi_{\rho,1}$ e $\phi_{\rho,2}, \rho \in \mathbb{K}_r$ sejam positivas e conhecidas, tais que

$$-\phi_{\rho,1} \leq \dot{h}_\rho \leq \phi_{\rho,2}, \rho \in \mathbb{K}_r. \quad (4.52)$$

É importante lembrar que:

$$\begin{aligned} h_{\omega_1} + h_{\omega_2} + \cdots + h_{\omega_r} &= 1, \\ \dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \cdots + \dot{h}_{\omega_r} &= 0. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Teorema 6. *Considere o sistema fuzzy TS (2.5), descrito por:*

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^r h_j(x(t)) A_j x(t), \quad (4.54)$$

sendo que h_i , $i \in \mathbb{K}_r$, satisfaz as condições apresentadas em (4.52) e (4.53).

Assim, a partir da FLF presente em (2.8), sendo $P_i = P_i^T > 0$, o sistema (4.54) terá o ponto $x = 0$ como assintoticamente estável, se e somente se

$$F_{ij}(x(t)) + J^*(x(t)) < 0, \quad (4.55)$$

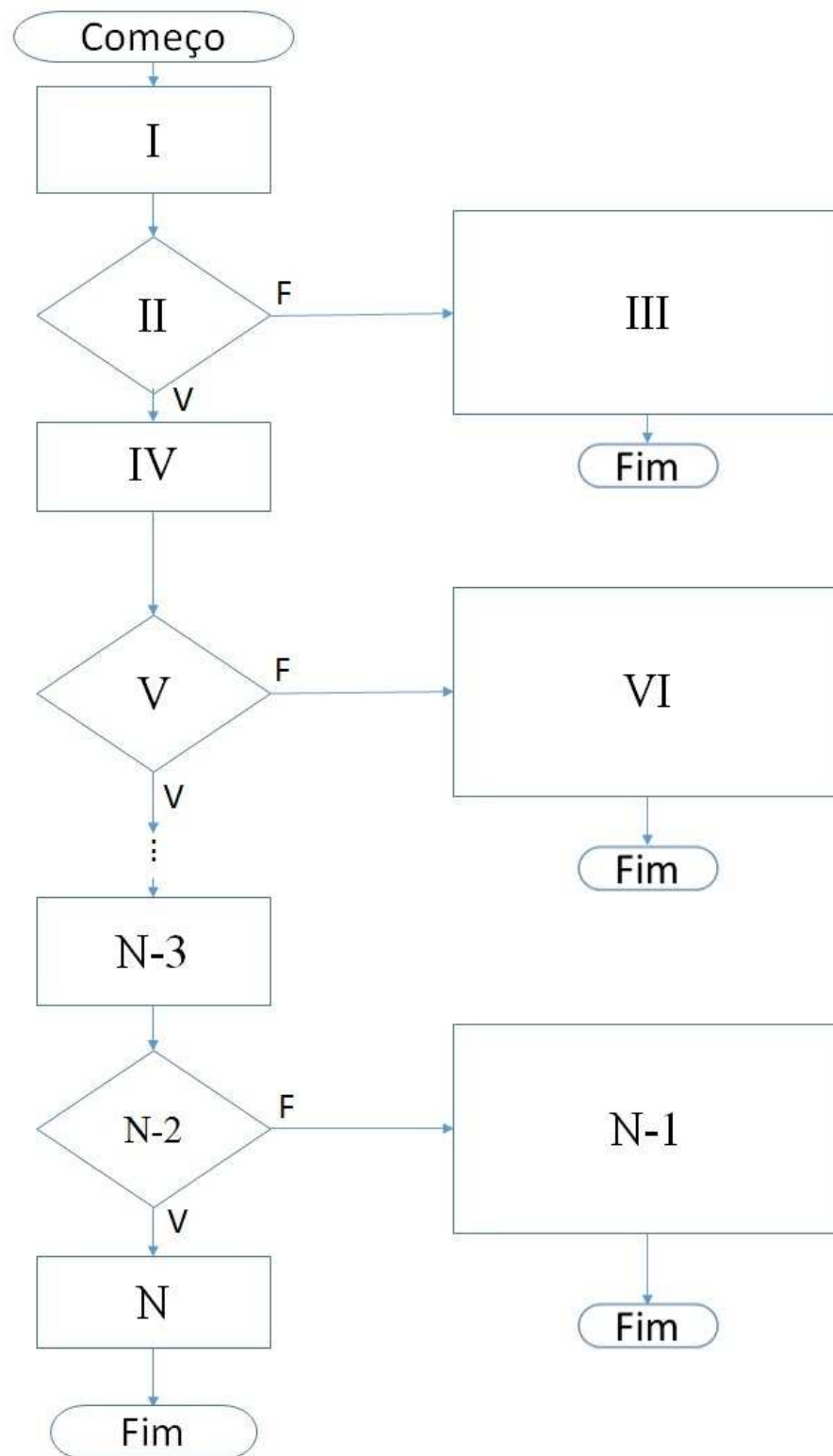
for factível, sendo que

$$F_{ij} = \frac{1}{2}(A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j), i, j \in \mathbb{K}_r, i \geq j, \quad (4.56)$$

$$J^* = -\phi_{\omega_1,1} P_{\omega_1} - \phi_{\omega_2,1} P_{\omega_2} - \cdots - \phi_{\omega_{i(\omega)-1},1} P_{\omega_{i(\omega)-1}} \\ + \phi_{\omega_{i(\omega)}^*} P_{\omega_{i(\omega)}} + \phi_{\omega_{i(\omega)+1,2} P_{\omega_{i(\omega)+1}} + \cdots + \phi_{\omega_r,2} P_{\omega_r} < 0, \quad (4.57)$$

para todo $\omega_i \in \psi_r$, definido em (4.51), e $\phi_{\omega_1,1}, \phi_{\omega_2,1}, \dots, \phi_{\omega_r,2}$ os pesos associados a cada P_i , calculados pelo algoritmo proposto na Figura 6 e equações (4.58)-(4.67).

Figura 6 - Fluxograma para obtenção do “pior caso”.



Fonte: O próprio autor

sendo

I:

$$\begin{aligned} \dot{h}_{\omega_r} &= \phi_{\omega_{r,2}} \\ \dot{h}_{\omega_{r-1}} &= \phi_{\omega_{r-1,2}} \end{aligned} \quad (4.58)$$

II:

$$\phi_{\omega_{r,2}} + \phi_{\omega_{r-1,2}} + \left(\sum_{i=1}^{r-2} \min\{\dot{h}_i\} \right) < 0 \quad (4.59)$$

III:

$$\alpha = \frac{\left(- \sum_{i=1}^{r-2} \min\{\dot{h}_i\} \right) - \phi_{\omega_{r,2}}}{\phi_{\omega_{r-1,2}}}$$

Se $\alpha \geq 0$

$$\text{Então } \dot{h}_{\omega_{r-1}} = \alpha \phi_{\omega_{r-1,2}} \quad (4.60)$$

$$\text{Caso contrário } \left\{ \alpha = - \frac{\left(- \sum_{i=1}^{r-2} \min\{\dot{h}_i\} \right) - \phi_{\omega_{r,2}}}{\phi_{\omega_{r-1,1}}}; \dot{h}_{\omega_{r-1}} = -\alpha \phi_{\omega_{r-1,1}} \right\}$$

$$\dot{h}_{\omega_{r-2}} = -\phi_{\omega_{r-2,1}}, \dot{h}_{\omega_{r-3}} = -\phi_{\omega_{r-3,1}}, \dots, \dot{h}_{\omega_1} = \phi_{\omega_{1,1}}$$

IV:

$$\dot{h}_{\omega_{r-2}} = \phi_{\omega_{r-2,2}} \quad (4.61)$$

V:

$$\left(\sum_{i=r-2}^q \max\{\dot{h}_i\} \right) + \left(\sum_{j=1}^{r-3} \min\{\dot{h}_j\} \right) < 0 \quad (4.62)$$

VI:

$$\alpha = \frac{\left(- \sum_{i=1}^{r-3} \max\{\dot{h}_i\} \right) - \phi_{\omega_{r,2}} - \phi_{\omega_{r-1,2}}}{\phi_{\omega_{r-2,2}}}$$

Se $\alpha \geq 0$

$$\text{Então } \dot{h}_{\omega_{r-2}} = \alpha \phi_{\omega_{r-2,2}} \quad (4.63)$$

$$\text{Caso contrário } \left\{ \alpha = - \frac{\left(- \sum_{i=1}^{r-3} \max\{\dot{h}_i\} \right) - \phi_{\omega_{r,2}} - \phi_{\omega_{r-1,2}}}{\phi_{\omega_{r-2,2}}}; \dot{h}_{\omega_{r-2}} = -\alpha \phi_{\omega_{r-2,1}} \right\}$$

$$\dot{h}_{\omega_{r-3}} = -\phi_{\omega_{r-3,1}}, \dot{h}_{\omega_{r-4}} = -\phi_{\omega_{r-4,1}}, \dots, \dot{h}_{\omega_1} = \phi_{\omega_{1,1}}$$

$N - 3$:

$$\dot{h}_{\omega_2} = \phi_{\omega_{2,2}} \quad (4.64)$$

$N - 2$:

$$\left(\sum_{i=2}^r \max\{\dot{h}_i\} \right) - \phi_{\omega_{1,1}} < 0 \quad (4.65)$$

$N - 1$:

$$\alpha = \frac{-\left(\sum_{i=3}^r \max\{\dot{h}_i\} \right) + \phi_{\omega_{1,1}}}{\phi_{\omega_{2,2}}}$$

Se $\alpha \geq 0$

$$\text{Então } \dot{h}_{\omega_2} = \alpha \phi_{\omega_{2,2}} \quad (4.66)$$

$$\text{Caso contrário } \left\{ \alpha = -\frac{-\left(\sum_{i=3}^r \max\{\dot{h}_i\} \right) + \phi_{\omega_{1,1}}}{\phi_{\omega_{2,1}}}; \dot{h}_{\omega_2} = -\alpha \phi_{\omega_{2,1}} \right\}$$

$$\dot{h}_{\omega_1} = -\phi_{\omega_{1,1}}$$

N :

$$\dot{h}_{\omega_1} = -\phi_{\omega_{1,1}} \quad (4.67)$$

sendo que N é o número máximo de passos dado pelo algoritmo, sendo dependente do número de regras r .

Observação 2. É importante ressaltar que o algoritmo retornará LMIs redundantes para casos de $r > 3$, como será explicado mais adiante. Para eliminar tais LMIs, basta adicionar um passo de verificação se a LMI resultante da dada iteração já existe no conjunto de LMIs formadas pelas iterações anteriores. O número de LMIs particulares para cada caso será analisado mais adiante.

Demonstração. Suficiência: Considerando a candidata a função de Lyapunov fuzzy descrita por

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) x^T(t) P_i x(t), \quad (4.68)$$

sendo que, P_i , $i \in \mathbb{K}_r$, são matrizes simétricas definidas positivas.

Então,

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^r \dot{h}_i(x(t)) x^T(t) P_i x(t) + \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) [\dot{x}^T(t) P_i x(t) + x^T(t) P_i \dot{x}(t)].$$

Usando (4.54) e sua transposta, note que

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_\rho(x(t)) x^T(t) P_\rho x(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) x^T(t) [A_j^T P_i + P_i A_j] x(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_\rho(x(t)) x^T(t) P_\rho x(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) x^T(t) [A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j] x(t). \end{aligned}$$

Multiplicando o termo $\sum_{\rho=1}^r \dot{h}_\rho(x(t)) x^T(t) P_\rho x(t)$ por $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t))$, que é igual a 1 devido à equação $\sum_{j=1}^r h_j(x(t)) = 1$, e tendo em vista (4.56), tem-se que

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(x(t)) h_j(x(t)) x^T(t) \left[\sum_{\rho=1}^r \dot{h}_\rho(x(t)) P_\rho + F_{ij}(x(t)) \right] x(t). \quad (4.69)$$

Portanto, é possível ver que $\dot{V}(x(t)) < 0$ para $x(t) \neq 0$, se

$$F_{ij}(x(t)) + J(x(t)) < 0, F_{ij}(x) = x(t)^T F_{ij} x(t), J(x) = x(t)^T \left[\sum_{\rho=1}^r \dot{h}_\rho(x(t)) P_\rho \right] x(t). \quad (4.70)$$

Porém, é preciso ainda saber se está contemplado o “pior caso” possível. Para tal, o algoritmo processa todas as combinações possíveis de $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$.

Na primeira iteração, o algoritmo irá supor que, para um dado $x(t)$,

$$P_{\omega_i} = P_{\omega_i}^T > 0, i \in \mathbb{K}_r, x^T P_{\omega_r} x \geq x^T P_{\omega_{r-1}} x \geq \dots \geq x^T P_{\omega_2} x \geq x^T P_{\omega_1} x, \quad (4.71)$$

sendo que $\omega \in \Psi_r$ definido em (4.51), e $r \geq 2$.

O algoritmo define os pesos de cada P_i de modo que tem-se:

$$\begin{aligned} J^*(x(t)) &= x^T [-\phi_{\omega_1,1} P_{\omega_1} - \phi_{\omega_2,1} P_{\omega_2} - \dots - \phi_{\omega_{i(\omega)-1,1}} P_{\omega_{i(\omega)-1}} \\ &\quad + \phi_{\omega_i(\omega)}^* P_{\omega_i(\omega)} + \phi_{\omega_{i(\omega)+1,2}} P_{\omega_{i(\omega)+1}} + \dots + \phi_{\omega_r,2} P_{\omega_r}] x, 0 \leq \alpha \leq 1. \end{aligned} \quad (4.72)$$

sendo que $\phi_{\omega_i(\omega)}^*$ pode ser igual a $-\alpha\phi_{\omega_i(\omega),1}$ ou $\alpha\phi_{\omega_i(\omega),2}$, conforme descrito no algoritmo representado na Figura 6.

Suponha que exista uma outra distribuição dos pesos que multiplicam os P_{ω_i} , de modo que seja possível obter um $J_{ij_N}(x(t))$ maior do que o $J^*(x(t))$ descrito em (4.72).

Pela construção do algoritmo, tem-se que de (4.72):

$$-\phi_{\omega_{1,1}} - \phi_{\omega_{2,1}} - \cdots - \phi_{\omega_{i(\omega)-1,1}} + \phi_{\omega_{i(\omega)}}^* + \phi_{\omega_{i(\omega)+1,2}} + \cdots + \phi_{\omega_{r,2}} = 0. \quad (4.73)$$

Assim, considerando ainda que o termo que multiplica P_{ω_i} , correspondente a \dot{h}_{ω_i} , pertence ao intervalo $[-\phi_{\omega_i(\omega),1}, \phi_{\omega_i(\omega),2}]$, a forma geral de um novo $J(x(t))$, a partir de (4.72) é a seguinte:

$$\begin{aligned} J(x(t)) = x^T [& (-\phi_{\omega_{1,1}} + \eta_{\omega_1})P_{\omega_1} + (-\phi_{\omega_{2,1}} + \eta_{\omega_2})P_{\omega_2} - \cdots \\ & + (-\phi_{\omega_{i(\omega)-1,1}} + \eta_{\omega_{i(\omega)-1}})P_{\omega_{i(\omega)-1}} + (\phi_{\omega_{i(\omega)}}^* + \eta_{\omega_{i(\omega)}})P_{\omega_{i(\omega)}} \\ & + (\phi_{\omega_{i(\omega)+1,2}} - \eta_{\omega_{i(\omega)+1}})P_{\omega_{i(\omega)+1}} + \cdots + (\phi_{\omega_{r,2}} - \eta_{\omega_r})P_{\omega_r}]x, 0 \leq \alpha \leq 1. \end{aligned} \quad (4.74)$$

sendo que $\eta_{\omega_1}, \eta_{\omega_2}, \dots, \eta_{\omega_{i(\omega)-1}}, \eta_{\omega_{i(\omega)+1}}, \dots, \eta_{\omega_r} \geq 0$, $\eta_{\omega_j} \in [0, \phi_{\omega_{j,1}} + \phi_{\omega_{j,2}}]$ para $j \in \mathbb{K}_r$, $j \neq i(\omega)$, e $\eta_{\omega_{i(\omega)}} \in [-\phi_{\omega_{i(\omega)}}^* - \phi_{\omega_{i(\omega),1}}, -\phi_{\omega_{i(\omega)}}^* + \phi_{\omega_{i(\omega),2}}]$. Ainda, pode-se dizer que:

$$\eta_{\omega_1} + \eta_{\omega_2} + \cdots + \eta_{\omega_{i(\omega)-1}} + \eta_{\omega_{i(\omega)}} - \eta_{\omega_{i(\omega)+1}} - \cdots - \eta_{\omega_r} = 0. \quad (4.75)$$

As justificativas destas equações seguem das condições dadas em (4.52) e (4.53).

Substituindo (4.75) em (4.74), considerando $-\eta_{\omega_1} - \eta_{\omega_2} - \cdots - \eta_{\omega_{i(\omega)-1}} + \eta_{\omega_{i(\omega)+1}} + \cdots + \eta_{\omega_r} = \eta_{\omega_{i(\omega)}}$, tem-se que, de (4.72):

$$\begin{aligned} J(x(t)) = J^*(x(t)) + x^T [& \eta_{\omega_1}(-P_{\omega_{i(\omega)}} + P_{\omega_1}) + \eta_{\omega_2}(-P_{\omega_{i(\omega)}} + P_{\omega_2}) \\ & + \cdots + \eta_{\omega_{i(\omega)-1}}(-P_{\omega_{i(\omega)}} + P_{\omega_{i(\omega)-1}}) + \eta_{\omega_{i(\omega)+1}}(P_{\omega_{i(\omega)}} - P_{\omega_{i(\omega)+1}}) \\ & + \cdots + \eta_{\omega_r}(P_{\omega_{i(\omega)}} - P_{\omega_r})]x. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Agora, de (4.71), observe que:

$$\begin{aligned}
x^T [\eta_{\omega_1} (-P_{\omega_{i(\omega)}} + P_{\omega_1})] x \leq 0, x^T [(-P_{\omega_{i(\omega)}} + P_{\omega_2})] x \leq 0, \dots, \\
x^T [(-P_{\omega_{i(\omega)}} + P_{\omega_{i(\omega)-1}})] x \leq 0, x^T [(P_{\omega_{i(\omega)}} - P_{\omega_{i(\omega)+1}})] x \leq 0, \dots, \\
x^T [(P_{\omega_{i(\omega)}} - P_{\omega_r})] x \leq 0. \quad (4.77)
\end{aligned}$$

Logo, a partir de (4.76) e (4.77),

$$J(x(t)) - J^*(x(t)) \leq 0 \quad (4.78)$$

e assim

$$J(x(t)) \leq J^*(x(t)). \quad (4.79)$$

Desta forma, $J^*(x(t))$ dado em (4.72) é máximo. Logo, não existe outro conjunto de pesos que, satisfazendo as condições apresentadas em (4.52) e (4.53), produza um $J(x(t))$ maior do que o obtido pelo algoritmo.

Na iteração seguinte, o algoritmo permuta os valores de $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$, e o processo começa novamente.

Se as condições forem satisfeitas para todo o conjunto $\omega \in \Psi_r$, então o máximo para qualquer $x(t)$ e $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$ especificados em (4.71) será contemplado. Assim, as condições apresentadas são suficientes.

Necessidade: Suponha que

$$x^T (\dot{h}_{\omega_1} P_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} P_{\omega_2} + \dots + \dot{h}_{\omega_r} P_{\omega_r}) x \leq J^*(x(t)) \quad (4.80)$$

para todo \dot{h}_i descrito em (4.51)-(4.53), sendo $J^*(x(t))$ definido em (4.72), obtido através do algoritmo descrito na Figura 6 e (4.58)-(4.67).

Em particular, (4.80) é verificada para $\dot{h}_{\omega_1} = -\phi_{\omega_1,1}, \dot{h}_{\omega_2} = -\phi_{\omega_2,1}, \dots, \dot{h}_{\omega_{i(\omega)-1}} = -\phi_{\omega_{i(\omega)-1,1}, \dot{h}_{\omega_{i(\omega)}} = -\alpha\phi_{\omega_{i(\omega),1}}$ ou $\dot{h}_{\omega_{i(\omega)}} = \alpha\phi_{\omega_{i(\omega),2}, \dot{h}_{\omega_{i(\omega)+1}} = \phi_{\omega_{i(\omega)+1,2}, \dots, \dot{h}_{\omega_r} = -\phi_{\omega_r,2}$.

Observe que esta escolha para $\dot{h}_i, \dots, \dot{h}_r$ satisfaz $\dot{h}_j \in [-\phi_{\omega_j,1}, \phi_{\omega_j,2}], \forall j \in \mathbb{K}_r$ e ainda (4.73) é obedecida. Desta forma, esta condição que é fornecida pelo algoritmo é uma condição necessária. \square

4.3 Número de LMIs

Como o Teorema 3, proposto por (GUEDES et al., 2013), já apresenta resultados importantes quanto à factibilidade de sistemas não lineares, não foi possível obter áreas de factibilidade maiores que o mesmo. Analisando os resultados obtidos pelo algoritmo contido no Teorema 6 em relação às condições de existência dos Teoremas 4 e 5, propostos por (GUEDES, 2015), pode ser que o número de LMIs fornecidas seja menor quando comparados ao número de LMIs fornecidas pelo Teorema 3.

Pode-se dividir a análise quanto ao número de LMIs em duas partes:

1 - Quando as condições de existência dos Teoremas 4 e 5 são satisfeitas

Se as condições de existência dos Teoremas 4 e 5, (3.9) ou (3.10) para o caso de r par ou (3.14) para o caso de r ímpar, para todo $\omega_i \in \Psi_r$, forem satisfeitas, pode-se observar que o algoritmo funcionará da seguinte maneira:

- Para casos de r ímpar

A primeira iteração do algoritmo irá supor que

$$x^T P_{\omega_r} x \geq x^T P_{\omega_{r-1}} x \geq \dots \geq x^T P_{\omega_2} x \geq x^T P_{\omega_1} x. \quad (4.81)$$

Portanto, o primeiro passo do algoritmo, de acordo com o Blocos I e II da Figura 6, será verificar se

$$\phi_{\omega_{r,2}} + \phi_{\omega_{r-1,2}} + \left(\sum_{i=1}^{r-2} \min\{h_i\} \right) < 0. \quad (4.82)$$

Observe que, de (3.14),

$$\begin{aligned} -\phi_{\omega_{\frac{r+1}{2},1}} &\leq \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \dots + \phi_{\omega_{\frac{r-1}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}} - \dots - \phi_{\omega_{r-2,2}} - \phi_{\omega_{r-1,2}} - \phi_{\omega_{r,2}}; \\ \phi_{\omega_{r,2}} + \phi_{\omega_{r-1,2}} &\leq \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \dots + \phi_{\omega_{\frac{r-1}{2},1}} + \phi_{\omega_{\frac{r+1}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}} - \dots - \phi_{\omega_{r-2,2}}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

A partir de (4.83), é possível ver que $\phi_{\omega_{r,2}} + \phi_{\omega_{r-1,2}}$ é menor que a soma de apenas alguns termos mínimos. Reescrevendo (4.83):

$$\phi_{\omega_{r,2}} + \phi_{\omega_{r-1,2}} \leq - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{\frac{r+1}{2}} \min\{h_i\} \right)}_{\text{Termos negativos}} - \underbrace{\left(\sum_{j=\frac{r+3}{2}}^{r-2} \max\{h_j\} \right)}_{\text{Termos positivos}}. \quad (4.84)$$

Então, quando são considerados todos os termos mínimos, pode-se concluir que

$$\phi_{\omega_{r,2}} + \phi_{\omega_{r-1,2}} \leq - \left(\sum_{i=1}^{\frac{r+1}{2}} \min\{h_i\} \right) - \left(\sum_{j=\frac{r+3}{2}}^{r-2} \max\{h_j\} \right) < - \left(\sum_{i=1}^{r-2} \min\{h_i\} \right). \quad (4.85)$$

e, portanto, (4.82) é verdadeira.

Assim, o algoritmo passa para os Blocos IV e V da Figura 6, seguindo o mesmo padrão para verificar as condições propostas, conforme ilustra o algoritmo. Esse procedimento vai continuar até o termo $\omega_{\frac{r+1}{2}}$. Nesse termo, o algoritmo tentará verificar se

$$\phi_{\omega_{r,2}} + \dots + \phi_{\omega_{\frac{r+1}{2},2}} + \left(\sum_{i=1}^{\frac{r-1}{2}} \min\{h_i\} \right) < 0. \quad (4.86)$$

Rearranjando-se os termos

$$\phi_{\omega_{\frac{r+1}{2},2}} < -\phi_{\omega_{r,2}} - \phi_{\omega_{r-1,2}} - \dots - \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}} - \left(\sum_{i=1}^{\frac{r-1}{2}} \min\{h_i\} \right), \quad (4.87)$$

que é o contrário da condição da direita mostrada em (3.14) e provando que (4.86) é falsa.

Assim, o algoritmo irá adaptar o limite de $\phi_{\omega_{\frac{r+1}{2}}}$, de maneira que

$$\phi_{\omega_{\frac{r+1}{2}}}^* = \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \dots + \phi_{\omega_{\frac{r-1}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}} - \phi_{\omega_{\frac{r+5}{2},2}} - \dots - \phi_{\omega_{r,2}}, \quad (4.88)$$

sendo que $\phi_{\omega_{\frac{r+1}{2}}}^* \in [-\phi_{\omega_{\frac{r+1}{2},1}}, \phi_{\omega_{\frac{r+1}{2},2}}]$.

A LMI a ser formada nesse caso é

$$F_{ij} - \phi_{\omega_{1,1}} P_{\omega_1} - \dots - \phi_{\omega_{\frac{r-1}{2},1}} P_{\omega_{\frac{r-1}{2}}} + \phi_{\omega_{\frac{r+1}{2}}}^* P_{\omega_{\frac{r+1}{2}}} + \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}} P_{\omega_{\frac{r+3}{2}}} + \dots + \phi_{\omega_{r,2}} P_{\omega_r} < 0, \quad (4.89)$$

que é exatamente a mesma LMI fornecida pelo Teorema 5.

Portanto, se (3.14) for satisfeita, o algoritmo fornecerá não só o mesmo número como

as mesmas LMIs do Teorema 5.

- Para casos de r par.

A primeira iteração do algoritmo irá supor que

$$x^T P_{\omega_r} x \geq x^T P_{\omega_{r-1}} x \geq \dots \geq x^T P_{\omega_2} x \geq x^T P_{\omega_1} x. \quad (4.90)$$

Portanto, o primeiro passo do algoritmo, de acordo com o Blocos I e II da Figura 6, será verificar se

$$\phi_{\omega_{r,2}} + \phi_{\omega_{r-1,2}} + \left(\sum_{i=1}^{r-2} \min\{\dot{h}_i\} \right) < 0. \quad (4.91)$$

Observe que, de (3.9),

$$\begin{aligned} -\phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,1}} &\leq \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \dots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \dots - \phi_{\omega_{r-2,2}} - \phi_{\omega_{r-1,2}} - \phi_{\omega_{r,2}}; \\ \phi_{\omega_{r,2}} + \phi_{\omega_{r-1,2}} &\leq \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \dots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,1}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \dots - \phi_{\omega_{r-2,2}}, \end{aligned} \quad (4.92)$$

ou, a partir de (3.10),

$$\begin{aligned} -\phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}} &\leq \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \dots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}} - \dots - \phi_{\omega_{r-2,2}} - \phi_{\omega_{r-1,2}} - \phi_{\omega_{r,2}}; \\ \phi_{\omega_{r,2}} + \phi_{\omega_{r-1,2}} &\leq \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \dots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}} - \dots - \phi_{\omega_{r-2,2}}. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Reescrevendo (4.92) e (4.93), tem-se:

$$\phi_{\omega_{r,2}} + \phi_{\omega_{r-1,2}} \leq \underbrace{- \left(\sum_{i=1}^{\frac{r}{2}+1} \min\{\dot{h}_i\} \right)}_{\text{Termos negativos}} - \underbrace{\left(\sum_{j=\frac{r}{2}+2}^{r-2} \max\{\dot{h}_j\} \right)}_{\text{Termos positivos}} < - \left(\sum_{i=1}^{r-2} \min\{\dot{h}_i\} \right), \quad (4.94)$$

e

$$\phi_{\omega_{r,2}} + \phi_{\omega_{r-1,2}} \leq \underbrace{- \left(\sum_{i=1}^{\frac{r}{2}} \min\{\dot{h}_i\} \right)}_{\text{Termos negativos}} - \underbrace{\left(\sum_{j=\frac{r}{2}+1}^{r-2} \max\{\dot{h}_j\} \right)}_{\text{Termos positivos}} < - \left(\sum_{i=1}^{r-2} \min\{\dot{h}_i\} \right), \quad (4.95)$$

e, portanto, (4.91) é verdadeira, independente de qual condição de existência do Teorema 4 tenha sido satisfeita.

Assim, o algoritmo passa para os Blocos IV e V da Figura 6, seguindo o mesmo padrão para verificar as condições propostas, conforme ilustra o algoritmo. Esse procedimento vai continuar até o termo $\omega_{\frac{r}{2}+1}$, no caso da condição (3.9) ter sido satisfeita, ou até $\omega_{\frac{r}{2}}$, no caso da condição (3.10) ter sido satisfeita. No primeiro caso, o algoritmo tentará verificar se

$$\phi_{\omega_{r,2}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}} + \left(\sum_{i=1}^{\frac{r}{2}} \min\{\dot{h}_i\} \right) < 0. \quad (4.96)$$

No segundo caso, o algoritmo tentará verificar se

$$\phi_{\omega_{r,2}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2},2}} + \left(\sum_{i=1}^{\frac{r}{2}-1} \min\{\dot{h}_i\} \right) < 0. \quad (4.97)$$

Rearranjando-se os termos de (4.96)

$$\phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}} < -\phi_{\omega_{r,2}} - \phi_{\omega_{r-1,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \left(\sum_{i=1}^{\frac{r}{2}} \min\{\dot{h}_i\} \right), \quad (4.98)$$

que é o contrário da condição da direita mostrada em (3.9) e provando que (4.96) é falsa.

Assim, o algoritmo irá adaptar o limite de $\phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1}}$, de maneira que

$$\phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1}}^* = \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+3,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}}, \quad (4.99)$$

sendo que $\phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1}}^* \in [-\phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,1}}, \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}}]$.

A LMI a ser formada nesse caso é

$$F_{ij} - \phi_{\omega_{1,1}} P_{\omega_1} - \cdots - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}} P_{\omega_{\frac{r}{2}-1}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1}}^* P_{\omega_{\frac{r}{2}+1}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} P_{\omega_{\frac{r}{2}+2}} + \cdots + \phi_{\omega_{r,2}} P_{\omega_r} < 0, \quad (4.100)$$

que é exatamente a mesma LMI fornecida pelo Teorema 4, a partir da condição (3.9).

É possível observar que o algoritmo tem comportamento análogo caso a condição satisfeita seja (3.10). A diferença é que o termo a ser alterado seria $\phi_{\omega_{\frac{r}{2}}}$ ao invés de $\phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1}}$.

Logo, o algoritmo fornece não só o mesmo número de LMIs que o Teorema 4, como

as mesmas LMIs, casos as condições (3.9) ou (3.10) sejam satisfeitas.

2 - Quando as condições de existência dos Teoremas 4 e 5 NÃO são satisfeitas

- Para casos de r ímpar.

Suponha que exista um $\omega_i \in \Psi_r$ em que a condição (3.14) não seja satisfeita. Ou seja

$$-\phi_{\omega_{\frac{r+1}{2},1}} > \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r-1}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}} - \phi_{\omega_{\frac{r+5}{2},2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}} \quad (4.101)$$

ou

$$\phi_{\omega_{\frac{r+1}{2},2}} < \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r-1}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}} - \phi_{\omega_{\frac{r+5}{2},2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}}. \quad (4.102)$$

Observe que, quando as condições de existência do Teorema 5 eram respeitadas, o algoritmo retornava LMIs em que o termo alterado tinha sempre uma posição central, com um mesmo número de máximos e mínimos utilizados para a formulação da mesma. Já a partir de (4.101) e (4.102) e do processo descrito nos casos anteriores, é possível observar que, quando o algoritmo chegar no termo central $\omega_{\frac{r+1}{2}}$, o valor necessário para o ajuste do limite $\phi_{\omega_{\frac{r+1}{2}}}$ será maior que o máximo ou menor que o mínimo. Por tanto, o algoritmo irá encontrar uma solução onde o termo alterado esteja antes ou depois do termo central $\omega_{\frac{r+1}{2}}$.

O número de LMIs particulares fornecidas pelo algoritmo em função do número de regras r e a posição do termo alterado i é dada por:

$$Q_{LMI} = \frac{r!}{(i-1)!(r-i)!}. \quad (4.103)$$

A expressão (4.103) pode ser obtida através da análise de redundâncias nas LMIs a partir do algoritmo. Cada LMI segue o seguinte modelo:

$$J_{ij}^*(x(t)) = x^T \left[\underbrace{-\phi_{\omega_{1,1}} P_{\omega_1} - \phi_{\omega_{2,1}} P_{\omega_2} - \cdots - \phi_{\omega_{i(\omega)-1,1}} P_{\omega_{i(\omega)-1}}}_A + \phi_{\omega_{i(\omega)}}^* P_{\omega_{i(\omega)}} + \underbrace{\phi_{\omega_{i(\omega)+1,2}} P_{\omega_{i(\omega)+1}} + \cdots + \phi_{\omega_{r,2}} P_{\omega_r}}_B \right] x. \quad (4.104)$$

Analisando os conjuntos A e B de termos, pode-se observar que, no caso do conjunto

A , tem-se $(i-1)$ termos que podem ser permutados livremente entre si, não alterando a LMI gerada. No caso do conjunto B , são $(r-i)$ termos que tem a mesma característica do conjunto A .

Logo, desconsiderando o termo alterado $\omega_{i(\omega)}$, têm-se $(r-1)$ termos para serem combinados em 2 grupos: um com $(i-1)$ termos e outro com $(r-i)$. A combinação matemática (WAGNER, 2005) tem fórmula definida como:

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad (4.105)$$

onde n é o número de termos disponíveis e m é o número utilizados por grupo.

Assim, no conjunto A , têm-se $(r-1)$ termos para combinar-se em grupos de $(i-1)$ elementos. Portanto

$$C_{(i-1)}^{(r-1)} = \frac{(r-1)!}{(i-1)!(r-1-i+1)!}. \quad (4.106)$$

Para formar o conjunto B , sobraram $(r-i)$ elementos que podem permutar livremente entre si, uma vez que a ordem desses termos não forma LMIs diferentes das anteriores, já que, por exemplo, $\phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} = \phi_{\omega_{2,1}} + \phi_{\omega_{1,1}}$. Assim, juntando (4.105) com (4.106) e considerando que existem r opções de ω_i diferentes que podem ocupar o termo alterado $\omega_{i(\omega)}$, tem-se

$$Q_{LMI} = r \frac{(r-1)!}{(i-1)!(r-i)!} = \frac{r!}{(i-1)!(r-i)!}. \quad (4.107)$$

Se as condições de existência do Teorema 5 forem respeitadas, o termo alterado será o central e, portanto, a posição i do termo será $i = \frac{r+1}{2}$. Logo

$$Q_{LMI} = \frac{r!}{\left(\frac{r-1}{2}\right)!\left(\frac{r-1}{2}\right)!}, \quad (4.108)$$

que é exatamente a mesma fórmula encontrada por (GUEDES, 2015). Porém, caso as condições de existência do Teorema 5 NÃO forem respeitadas, o termo alterado não será central. Então, $i = \frac{r+1}{2} \pm j, 2 \leq i \leq r-1, j \in \mathbb{Z}^+$.

Para o caso em que $i = \frac{r+1}{2} + j$:

$$Q_{LMI} = \frac{r!}{\left(\frac{r+1}{2} + j - 1\right)!\left(r - \frac{r+1}{2} - j\right)!} = \frac{r!}{\left(\frac{r-1+2j}{2}\right)!\left(\frac{r-1-2j}{2}\right)!}. \quad (4.109)$$

Dividindo (4.108) por (4.109)

$$\frac{\frac{r!}{(\frac{r-1}{2})!(\frac{r-1}{2})!}}{\frac{r!}{(\frac{r-1+2j}{2})!(\frac{r-1-2j}{2})!}} = \frac{\prod_{k=0}^{j-1} \left(\frac{r-1+2j}{2} - k \right)}{\prod_{k=0}^{j-1} \left(\frac{r-1}{2} - k \right)} > 1. \quad (4.110)$$

Logo, o número de LMIs geradas pelo termo central é maior do que o número de LMIs geradas pelo termo deslocado e, portanto, quando as condições de existência do Teorema 5 não são satisfeitas, o algoritmo gera ainda menos LMIs do que se as mesmas fossem satisfeitas.

- Para casos de r par.

Suponha que exista um $\omega_i \in \Psi_r$ em que as condições (3.9) e (3.10) não sejam satisfeita.

Ou seja

$$-\phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,1}} > \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}} \quad (4.111)$$

ou

$$\phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}} < \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}} \quad (4.112)$$

e

$$-\phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}} > \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}} \quad (4.113)$$

ou

$$\phi_{\omega_{\frac{r}{2},2}} < \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}}. \quad (4.114)$$

Observe que, quando as condições de existência do Teorema 4 eram respeitadas, o algoritmo retornava LMIs em que o termo alterado tinha sempre uma posição igual, que dependia se a condição (3.9) ou (3.10) era satisfeita. Já a partir de (4.111)-(4.114) e do processo descrito nos casos anteriores, é possível observar que, quando o algoritmo chegar no termo que antes era alterado (no caso de a condição (3.9) ser satisfeita, era o termo $\omega_{\frac{r}{2}+1}$, e no caso de a condição (3.10) ser satisfeita, era o termo $\omega_{\frac{r}{2}}$), o valor necessário para o ajuste dos limites $\omega_{\frac{r}{2}+1}$ ou $\omega_{\frac{r}{2}}$ será maior que o máximo ou menor que o mínimo dos mesmos. Por tanto, o algoritmo irá encontrar uma solução onde o termo alterado esteja antes ou depois dos termos utilizados anteriormente.

O número de LMIs particulares fornecidas pelo algoritmo em função do número de regras r e a posição do termo alterado i continua sendo o mesmo apresentado em (4.103), utilizando-se da mesma análise, uma vez que o algoritmo não difere os sistemas em quan-

tidades ímpares ou pares de regras.

Se as condições de existência do Teorema 4 forem respeitadas, o termo alterado terá posições $i = \frac{r}{2} + 1$ ou $i = \frac{r}{2}$. Logo

$$Q_{LMI} = \frac{r!}{\left(\frac{r-2}{2}\right)! \left(\frac{r}{2}\right)!}, \quad (4.115)$$

que é exatamente a mesma fórmula encontrada por (GUEDES, 2015). É importante ressaltar que, apesar do número de LMIs ter sido calculado com a posição $i = \frac{r}{2}$, a partir da condição (3.10), esse número seria o mesmo caso fosse calculado com a posição $i = \frac{r}{2} + 1$, a partir de (3.9).

Porém, caso as condições de existência do Teorema 4 NÃO forem respeitadas, o termo alterado terá uma posição diferente. Então, $i = \frac{r}{2} \pm j, 2 \leq i \leq r-1, j \in \mathbb{Z}^+$.

Para o caso em que $i = \frac{r}{2} + j$:

$$Q_{LMI} = \frac{r!}{\left(\frac{r}{2} + j - 1\right)! \left(r - \frac{r}{2} - j\right)!} = \frac{r!}{\left(\frac{r}{2} + j - 1\right)! \left(\frac{r}{2} - j\right)!}. \quad (4.116)$$

Dividindo (4.115) por (4.116)

$$\frac{\frac{r!}{\left(\frac{r-2}{2}\right)! \left(\frac{r}{2}\right)!}}{\frac{r!}{\left(\frac{r}{2} + j - 1\right)! \left(\frac{r}{2} - j\right)!}} = \frac{\prod_{k=1}^{j-1} \left(\frac{r}{2} + j - k\right)}{\prod_{k=0}^{j-1} \left(\frac{r}{2} - k\right)} > 1. \quad (4.117)$$

Logo, o número de LMIs geradas pelo termo utilizado quando as condições (3.9) ou (3.10) são satisfeitas é maior do que o número de LMIs geradas pelo termo deslocado e, portanto, quando as condições de existência do Teorema 4 não são satisfeitas, o algoritmo gera ainda menos LMIs.

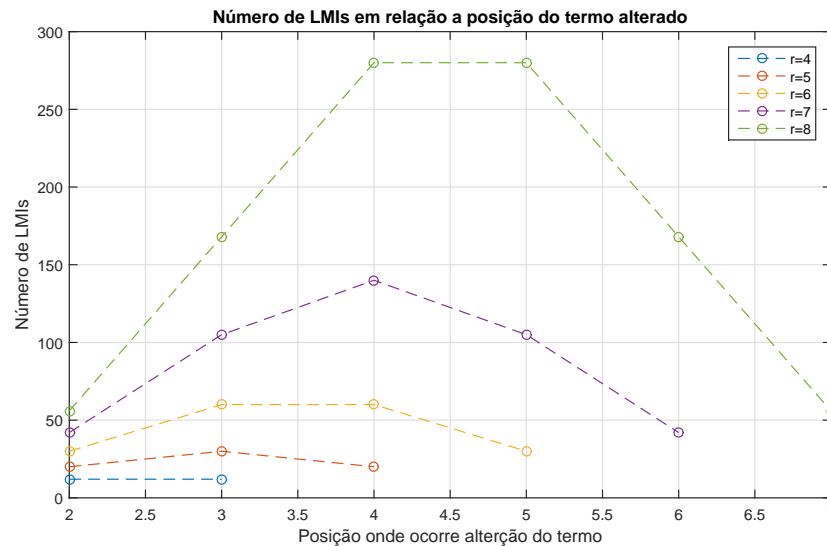
A Tabela 4 e a Figura 7 ilustram os resultados obtidos nessa seção. A Figura 7 mostra que, quando as condições dos Teoremas 4 e 5 são satisfeitas, o número de LMIs é máximo.

Tabela 4 - Número MÁXIMO de LMIs fornecidas pelo algoritmo de acordo com o número de regras.

r	2	3	4	5	6	7	8
$LMIs$	2	6	12	30	60	140	280

Fonte: O próprio autor.

Figura 7 - Número de LMIs de acordo com o número de regras r e a posição i do termo alterado.



Comparando as Tabelas 1, 2, 3 e 4, é possível perceber que, para os casos em que as condições de existência dos Teoremas 4 e 5 são satisfeitas, os valores das Tabelas 1, 2 e 3 coincidem. Também é possível observar que, nos casos de $r \leq 6$, o algoritmo fornece menos LMIs que o Teorema 3, conforme mostrado também na Figura 2. Porém, apesar de nos casos $r \geq 7$ o algoritmo poder fornecer mais LMIs que o Teorema 3, conforme mostrado também na Figura 3, ainda será indicado o uso do algoritmo, como será demonstrado nos exemplos numéricos.

4.4 Exemplos Numéricos

Exemplo 1 -Exemplo de funcionamento do algoritmo

Foi utilizado o mesmo exemplo numérico para o caso geral de $r = 5$ presente neste capítulo, foi desenvolvido um programa via Matlab[®] para que pudessem ser feitas todas

as rodadas obtidas da permutação dos ω_i 's, já que haviam 120 combinações diferentes. Essas combinações, conforme comentado anteriormente, fornecem LMIs redundantes. Caso fossem consideradas apenas as LMIs particulares, haveriam apenas 30 combinações diferentes. Porém, como nesse exemplo será apenas demonstrado o funcionamento do algoritmo, serão mantidas as 120 combinações possíveis.

É importante lembrar que os limites dos ϕ_i 's que NÃO satisfazem as condições de existência do Teorema 5 citados na prova de casos ímpares com $r \geq 5$, em (4.20), são dados por:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \dot{h}_1 \leq 1 \\ -1 &\leq \dot{h}_2 \leq 1 \\ -1 &\leq \dot{h}_3 \leq 1 \\ -2 &\leq \dot{h}_4 \leq 2 \\ -2 &\leq \dot{h}_5 \leq 2. \end{aligned} \tag{4.118}$$

Para ilustrar o algoritmo, é suposto um caso em que

$$x^T P_5 x \geq x^T P_4 x \geq x^T P_3 x \geq x^T P_2 x \geq x^T P_1 x. \tag{4.119}$$

Portanto, seguindo o fluxograma, o primeiro passo é colocar os limites superiores em \dot{h}_5 e \dot{h}_4 e os limites inferiores para \dot{h}_3 , \dot{h}_2 e \dot{h}_1 , verificando se a soma dos \dot{h}_i ainda é negativa.

$$\begin{aligned} \dot{h}_{5_{max}} + \dot{h}_{4_{max}} - \dot{h}_{3_{min}} - \dot{h}_{2_{min}} - \dot{h}_{1_{min}} \\ 2 + 2 - 1 - 1 - 1 = 1. \end{aligned} \tag{4.120}$$

Como pode ser visto, o resultado de (4.120) prova que o limite superior de \dot{h}_4 não pode ser utilizado neste caso, já que os outros \dot{h}_i 's não conseguiriam levar a soma de todos a zero. Portanto, só uma parcela dele poderá ser utilizado. Sendo assim:

$$\begin{aligned}
\dot{h}_4 &= \alpha \phi_{4,2} \\
\alpha &= -\frac{\left(\sum_{i=1}^3 \min\{\dot{h}_i\}\right) - \phi_{5,2}}{\phi_{4,2}} \\
\alpha &= \frac{1+1+1-2}{2} = \frac{1}{2} = 0,5 \\
\dot{h}_4 &= \alpha \phi_{4,2} = 1 \\
\dot{h}_3 &= -\phi_{3,1} = -1 \\
\dot{h}_2 &= -\phi_{2,1} = -1 \\
\dot{h}_1 &= -\phi_{1,1} = -1
\end{aligned} \tag{4.121}$$

Nesse caso, a LMI gerada seria

$$\begin{aligned}
J_{ij}(x(t)) &= x^T [F_{ij} + \dot{h}_1 P_1 + \dot{h}_2 P_2 + \dot{h}_3 P_3 + \dot{h}_4 P_4 + \dot{h}_5 P_5] |_{\max x} < 0, \forall x \neq 0, \\
J_{ij}^*(x(t)) &= x^T [F_{ij} + (-1)P_1 + (-1)P_2 + (-1)P_3 + (1)P_4 + (2)P_5] x < 0, \forall x \neq 0.
\end{aligned} \tag{4.122}$$

Os outros resultados obtidos estão apresentados na Tabela 5, sendo que N é o número da permutação que está sendo rodada e a representa aonde o limite superior não pode ser aplicado. Por exemplo, para $a = 4.1$, o limite $\phi_{\omega_{4,2}}$ não pode ser aplicado, e foi usado apenas uma parcela do mesmo. Para $a = 4.2$, o limite $\phi_{\omega_{4,2}}$ também não pode ser aplicado, porém neste caso foi usado uma parcela do valor de $-\phi_{\omega_{4,1}}$. Para $a = 3.1$ e $a = 3.2$, o limite $\phi_{\omega_{3,2}}$ não pode ser aplicado, com os indicadores .1 e .2 indicando se foi usado uma parcela do limite inferior ou superior, de maneira igual ao exemplo $a = 4$ e, finalmente, para $a = 2.1$ e $a = 2.2$, foi limite $\phi_{\omega_{2,2}}$ que não pode ser aplicado, com os indicadores .1 e .2 funcionando de maneira análoga aos outros dois casos.

Exemplo de como ler a tabela:

Na linha onde $N = 7$, tem-se $\omega_5 = 5$, $\omega_4 = 3$, $\omega_3 = 4$, $\omega_2 = 2$ e $\omega_1 = 1$. Portanto, $\dot{h}_{\omega_5} = \dot{h}_5$, $\dot{h}_{\omega_4} = \dot{h}_3$, $\dot{h}_{\omega_3} = \dot{h}_4$, $\dot{h}_{\omega_2} = \dot{h}_2$ e $\dot{h}_{\omega_1} = \dot{h}_1$.

É possível observar que o índice a vale 3.2 nessa linha. Portanto, o limite $\phi_{\omega_{3,2}} = \phi_{4,2}$ não pode ser utilizado. Não foi possível utilizar nem uma parcela desse limite superior. Portanto, foi utilizada uma parcela do limite inferior ($-\phi_{4,1}$), sendo essa parcela o resultado da equação $\alpha x - \phi_{4,1}$. Como $\alpha = 0,5$ e $\phi_{4,1} = -2$, o resultado foi -1 . Dessa maneira, é possível observar que a soma dos \dot{h}_i 's é zero, assim como em todas as linhas.

Observação 3. *Analizando a Tabela 5, fica claro que as primeiras 6 linhas geram os*

mesmos coeficientes ($\dot{h}_5 = 2$, $\dot{h}_4 = 1$, $\dot{h}_3 = -1$, $\dot{h}_2 = -1$ e $\dot{h}_1 = -1$), sendo essas linhas apenas permutações livres dos termos ω_3 , ω_2 e ω_1 e, portanto, geram a mesma LMI. Assim, fica demonstrada a importância da filtragem citada para o número de LMIs ser o mínimo possível.

Tabela 5 - Resultados obtidos pelo programa de desenvolvido a partir do algoritmo proposto.

N	ω_5	ω_4	ω_3	ω_2	ω_1	\dot{h}_{ω_1}	\dot{h}_{ω_2}	\dot{h}_{ω_3}	\dot{h}_{ω_4}	\dot{h}_{ω_5}	a	α
1	5	4	3	2	1	-1	-1	-1	1	2	4.1	0,5
2	5	4	3	1	2	-1	-1	-1	1	2	4.1	0,5
3	5	4	2	3	1	-1	-1	-1	1	2	4.1	0,5
4	5	4	2	1	3	-1	-1	-1	1	2	4.1	0,5
5	5	4	1	2	3	-1	-1	-1	1	2	4.1	0,5
6	5	4	1	3	2	-1	-1	-1	1	2	4.1	0,5
7	5	3	4	2	1	-1	-1	-1	1	2	3.2	0,5
8	5	3	4	1	2	-1	-1	-1	1	2	3.2	0,5
9	5	3	2	4	1	-1	-2	0	1	2	3.1	0
10	5	3	2	1	4	-2	-1	0	1	2	3.1	0
11	5	3	1	2	4	-2	-1	0	1	2	3.1	0
12	5	3	1	4	2	-1	-2	0	1	2	3.1	0
13	5	2	3	4	1	-1	-2	0	1	2	3.1	0
14	5	2	3	1	4	-2	-1	0	1	2	3.1	0
15	5	2	4	3	1	-1	-1	-1	1	2	3.2	0,5
16	5	2	4	1	3	-1	-1	-1	1	2	3.2	0,5
17	5	2	1	4	3	-1	-2	0	1	2	3.1	0
18	5	2	1	3	4	-2	-1	0	1	2	3.1	0
19	5	1	3	2	4	-2	-1	0	1	2	3.1	0
20	5	1	3	4	2	-1	-2	0	1	2	3.1	0
21	5	1	2	3	4	-2	-1	0	1	2	3.1	0
22	5	1	2	4	3	-1	-2	0	1	2	3.1	0
23	5	1	4	2	3	-1	-1	-1	1	2	3.2	0,5
24	5	1	4	3	2	-1	-1	-1	1	2	3.2	0,5
25	4	5	3	2	1	-1	-1	-1	1	2	4.1	0,5
26	4	5	3	1	2	-1	-1	-1	1	2	4.1	0,5
27	4	5	2	3	1	-1	-1	-1	1	2	4.1	0,5
28	4	5	2	1	3	-1	-1	-1	1	2	4.1	0,5
29	4	5	1	2	3	-1	-1	-1	1	2	4.1	0,5
30	4	5	1	3	2	-1	-1	-1	1	2	4.1	0,5
31	4	3	5	2	1	-1	-1	-1	1	2	3.2	0,5
32	4	3	5	1	2	-1	-1	-1	1	2	3.2	0,5
33	4	3	2	5	1	-1	-2	0	1	2	3.1	0
34	4	3	2	1	5	-2	-1	0	1	2	3.1	0
35	4	3	1	2	5	-2	-1	0	1	2	3.1	0
36	4	3	1	5	2	-1	-2	0	1	2	3.1	0
37	4	2	3	5	1	-1	-2	0	1	2	3.1	0
38	4	2	3	1	5	-2	-1	0	1	2	3.1	0
39	4	2	5	3	1	-1	-1	-1	1	2	3.2	0,5
40	4	2	5	1	3	-1	-1	-1	1	2	3.2	0,5
41	4	2	1	5	3	-1	-2	0	1	2	3.1	0
42	4	2	1	3	5	-2	-1	0	1	2	3.1	0
43	4	1	3	2	5	-2	-1	0	1	2	3.1	0
44	4	1	3	5	2	-1	-2	0	1	2	3.1	0
45	4	1	2	3	5	-2	-1	0	1	2	3.1	0

N	ω_5	ω_4	ω_3	ω_2	ω_1	\dot{h}_{ω_1}	\dot{h}_{ω_2}	\dot{h}_{ω_3}	\dot{h}_{ω_4}	\dot{h}_{ω_5}	a	α
46	4	1	2	5	3	-1	-2	0	1	2	3.1	0
47	4	1	5	2	3	-1	-1	-1	1	2	3.2	0,5
48	4	1	5	3	2	-1	-1	-1	1	2	3.2	0,5
49	3	4	5	2	1	-1	-1	-1	2	1	3.2	0,5
50	3	4	5	1	2	-1	-1	-1	2	1	3.2	0,5
51	3	4	2	5	1	-1	-2	0	2	1	3.1	0
52	3	4	2	1	5	-2	-1	0	2	1	3.1	0
53	3	4	1	2	5	-2	-1	0	2	1	3.1	0
54	3	4	1	5	2	-1	-2	0	2	1	3.1	0
55	3	5	4	2	1	-1	-1	-1	2	1	3.2	0,5
56	3	5	4	1	2	-1	-1	-1	2	1	3.2	0,5
57	3	5	2	4	1	-1	-2	0	2	1	3.1	0
58	3	5	2	1	4	-2	-1	0	2	1	3.1	0
59	3	5	1	2	4	-2	-1	0	2	1	3.1	0
60	3	5	1	4	2	-1	-2	0	2	1	3.1	0
61	3	2	5	4	1	-1	-2	1	1	1	3.1	0,5
62	3	2	5	1	4	-2	-1	1	1	1	3.1	0,5
63	3	2	4	5	1	-1	-2	1	1	1	3.1	0,5
64	3	2	4	1	5	-2	-1	1	1	1	3.1	0,5
65	3	2	1	4	5	-2	-1	1	1	1	2.2	0,5
66	3	2	1	5	4	-2	-1	1	1	1	2.2	0,5
67	3	1	5	2	4	-2	-1	1	1	1	3.1	0,5
68	3	1	5	4	2	-1	-2	1	1	1	3.1	0,5
69	3	1	2	5	4	-2	-1	1	1	1	2.2	0,5
70	3	1	2	4	5	-2	-1	1	1	1	2.2	0,5
71	3	1	4	2	5	-2	-1	1	1	1	3.1	0,5
72	3	1	4	5	2	-1	-2	1	1	1	3.1	0,5
73	2	4	3	5	1	-1	-2	0	2	1	3.1	0
74	2	4	3	1	5	-2	-1	0	2	1	3.1	0
75	2	4	5	3	1	-1	-1	-1	2	1	3.2	0,5
76	2	4	5	1	3	-1	-1	-1	2	1	3.2	0,5
77	2	4	1	5	3	-1	-2	0	2	1	3.1	0
78	2	4	1	3	5	-2	-1	0	2	1	3.1	0
79	2	3	4	5	1	-1	-2	1	1	1	3.1	0,5
80	2	3	4	1	5	-2	-1	1	1	1	3.1	0,5
81	2	3	5	4	1	-1	-2	1	1	1	3.1	0,5
82	2	3	5	1	4	-2	-1	1	1	1	3.1	0,5
83	2	3	1	5	4	-2	-1	1	1	1	2.2	0,5
84	2	3	1	4	5	-2	-1	1	1	1	2.2	0,5
85	2	5	3	4	1	-1	-2	0	2	1	3.1	0
86	2	5	3	1	4	-2	-1	0	2	1	3.1	0
87	2	5	4	3	1	-1	-1	-1	2	1	3.2	0,5
88	2	5	4	1	3	-1	-1	-1	2	1	3.2	0,5
89	2	5	1	4	3	-1	-2	0	2	1	3.1	0
90	2	5	1	3	4	-2	-1	0	2	1	3.1	0

N	ω_5	ω_4	ω_3	ω_2	ω_1	\dot{h}_{ω_1}	\dot{h}_{ω_2}	\dot{h}_{ω_3}	\dot{h}_{ω_4}	\dot{h}_{ω_5}	a	α
91	2	1	3	5	4	-2	-1	1	1	1	2.2	0,5
92	2	1	3	4	5	-2	-1	1	1	1	2.2	0,5
93	2	1	5	3	4	-2	-1	1	1	1	3.1	0,5
94	2	1	5	4	3	-1	-2	1	1	1	3.1	0,5
95	2	1	4	5	3	-1	-2	1	1	1	3.1	0,5
96	2	1	4	3	5	-2	-1	1	1	1	3.1	0,5
97	1	4	3	2	5	-2	-1	0	2	1	3.1	0
98	1	4	3	5	2	-1	-2	0	2	1	3.1	0
99	1	4	2	3	5	-2	-1	0	2	1	3.1	0
100	1	4	2	5	3	-1	-2	0	2	1	3.1	0
101	1	4	5	2	3	-1	-1	-1	2	1	3.2	0,5
102	1	4	5	3	2	-1	-1	-1	2	1	3.2	0,5
103	1	3	4	2	5	-2	-1	1	1	1	3.1	0,5
104	1	3	4	5	2	-1	-2	1	1	1	3.1	0,5
105	1	3	2	4	5	-2	-1	1	1	1	2.2	0,5
106	1	3	2	5	4	-2	-1	1	1	1	2.2	0,5
107	1	3	5	2	4	-2	-1	1	1	1	3.1	0,5
108	1	3	5	4	2	-1	-2	1	1	1	3.1	0,5
109	1	2	3	4	5	-2	-1	1	1	1	2.2	0,5
110	1	2	3	5	4	-2	-1	1	1	1	2.2	0,5
111	1	2	4	3	5	-2	-1	1	1	1	3.1	0,5
112	1	2	4	5	3	-1	-2	1	1	1	3.1	0,5
113	1	2	5	4	3	-1	-2	1	1	1	3.1	0,5
114	1	2	5	3	4	-2	-1	1	1	1	3.1	0,5
115	1	5	3	2	4	-2	-1	0	2	1	3.1	0
116	1	5	3	4	2	-1	-2	0	2	1	3.1	0
117	1	5	2	3	4	-2	-1	0	2	1	3.1	0
118	1	5	2	4	3	-1	-2	0	2	1	3.1	0
119	1	5	4	2	3	-1	-1	-1	2	1	3.2	0,5
120	1	5	4	3	2	-1	-1	-1	2	1	3.2	0,5

Fonte: O próprio autor.

Análise de áreas de factibilidade e número de LMIs

Exemplo 2 - Para $r = 3$

Considerando o modelo Takagi-Sugeno com 3 regras, descrito por:

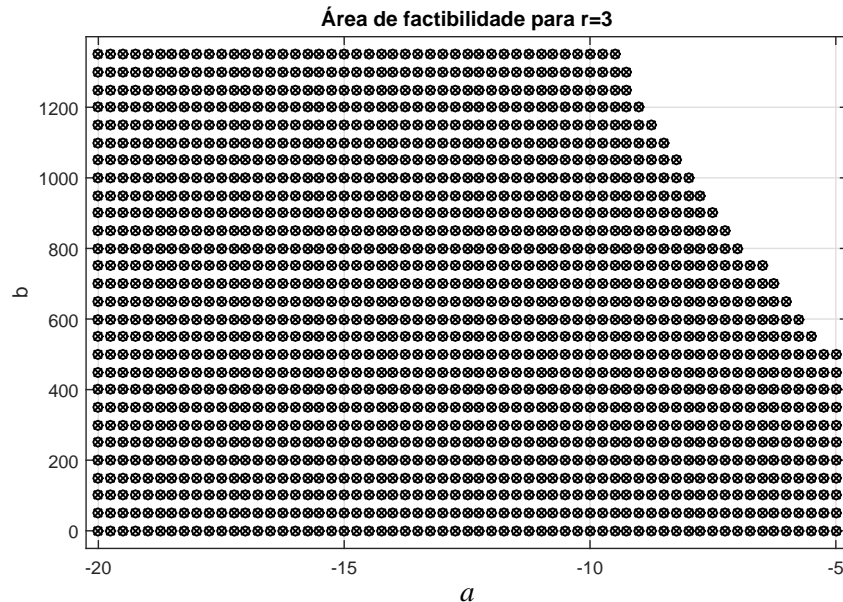
$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{5}(3b-2) & \frac{1}{5}(3a-4) \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{1}{5}(2b-3) & \frac{1}{5}(2a-6) \end{bmatrix},$$

considerando os limites dos \dot{h}_i como sendo

$$\begin{aligned} -0,65 &\leq \dot{h}_1 \leq 0,85 \\ -0,55 &\leq \dot{h}_2 \leq 0,75 \\ -0,95 &\leq \dot{h}_3 \leq 0,45, \end{aligned} \tag{4.123}$$

e variando os parâmetros a e b de $[-20, -5]$ e $[0, 1350]$, respectivamente, a Figura 8 mostra que as regiões de factibilidade fornecidas pelo algoritmo e pelo Teorema 5 são iguais.

Figura 8 - Área de factibilidade para $r = 3$, x para o Teorema 5 e o para o algoritmo.



- Número de LMIs particulares fornecidas pelo algoritmo em função do termo F_{ij} : 6;
- Número de LMIs particulares fornecidas pelo Teorema 5 em função do termo F_{ij} : 6;
- Número de variáveis matriciais simétricas $n \times n$ utilizadas pelo algoritmo e pelo Teorema 5 : 3;

- Número de LMIs particulares fornecidas pelo Teorema 3 (Hiper-retângulos), em função do termo F_{ij} : 8;
- Número de variáveis matriciais simétricas $n \times n$ utilizadas pelo Teorema 3 : 9.

Exemplo 3 - Para $r = 4$

Considerando o modelo Takagi-Sugeno com 4 regras, descrito por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{5}(3b-2) & \frac{1}{5}(3a-4) \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{1}{5}(2b-3) & \frac{1}{5}(2a-6) \end{bmatrix}$$

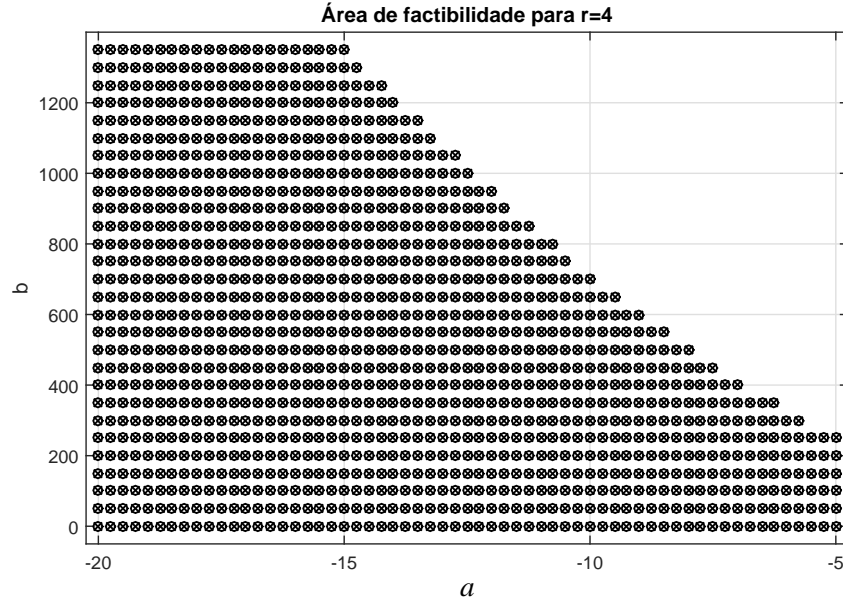
$$A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix},$$

considerando os limites dos \dot{h}_i como sendo

$$\begin{aligned} -0,65 &\leq \dot{h}_1 \leq 0,85 \\ -0,55 &\leq \dot{h}_2 \leq 0,75 \\ -0,95 &\leq \dot{h}_3 \leq 0,45 \\ -0,7 &\leq \dot{h}_4 \leq 0,8, \end{aligned} \tag{4.124}$$

e variando os parâmetros a e b de $[-20, -5]$ e $[0, 1350]$, respectivamente, a Figura 9 mostra que as regiões de factibilidade fornecidas pelo algoritmo e pelo Teorema 4 são iguais.

- Número de LMIs particulares fornecidas pelo algoritmo em função do termo F_{ij} : 12;
- Número de LMIs particulares fornecidas pelo Teorema 4 em função do termo F_{ij} : 12;
- Número de variáveis matriciais simétricas $n \times n$ utilizadas pelo algoritmo e pelo Teorema 4 : 4;
- Número de LMIs particulares fornecidas pelo Teorema 3 (Híper-retângulos), em função do termo F_{ij} : 16;
- Número de variáveis matriciais simétricas $n \times n$ utilizadas pelo Teorema 3 : 14.

Figura 9 - Área de factibilidade para $r = 4$, x para o Teorema 4 e o para o algoritmo.**Exemplo 4 - Para $r = 5$, satisfazendo condições de existência do Teorema 5**

Considerando o modelo Takagi-Sugeno com 5 regras, descrito por:

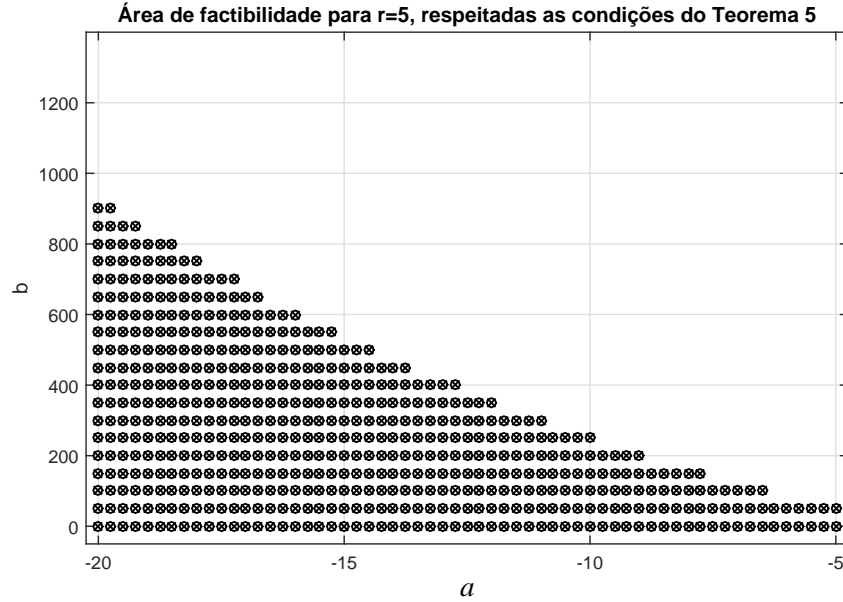
$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{5}(3b-2) & \frac{1}{5}(3a-4) \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{1}{5}(2b-3) & \frac{1}{5}(2a-6) \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -3 & a \end{bmatrix},$$

considerando os limites dos \dot{h}_i como sendo

$$\begin{aligned} -0,65 &\leq \dot{h}_1 \leq 0,85 \\ -0,55 &\leq \dot{h}_2 \leq 0,75 \\ -0,95 &\leq \dot{h}_3 \leq 0,45 \\ -0,7 &\leq \dot{h}_4 \leq 0,8 \\ -0,8 &\leq \dot{h}_5 \leq 0,8, \end{aligned} \tag{4.125}$$

e variando os parâmetros a e b de $[-20, -5]$ e $[0, 1350]$, respectivamente, a Figura 10 mostra que as regiões de factibilidade fornecidas pelo algoritmo e pelo Teorema 5 são iguais.

Figura 10 - Área de factibilidade para $r = 5$, x para o Teorema 5 e o para o algoritmo.

- Número de LMIs particulares fornecidas pelo algoritmo em função do termo F_{ij} : 30;
- Número de LMIs particulares fornecidas pelo Teorema 5 em função do termo F_{ij} : 30;
- Número de variáveis matriciais simétricas $n \times n$ utilizadas pelo algoritmo e pelo Teorema 5 : 5;
- Número de LMIs particulares fornecidas pelo Teorema 3 (Hiper-retângulos), em função do termo F_{ij} : 32;
- Número de variáveis matriciais simétricas $n \times n$ utilizadas pelo Teorema 3 : 20.

Exemplo 5 - Para $r = 5$, NÃO satisfazendo condições de existência do Teorema 5

Considerando o modelo Takagi-Sugeno com 5 regras, descrito por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{5}(3b-2) & \frac{1}{5}(3a-4) \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{1}{5}(2b-3) & \frac{1}{5}(2a-6) \end{bmatrix}$$

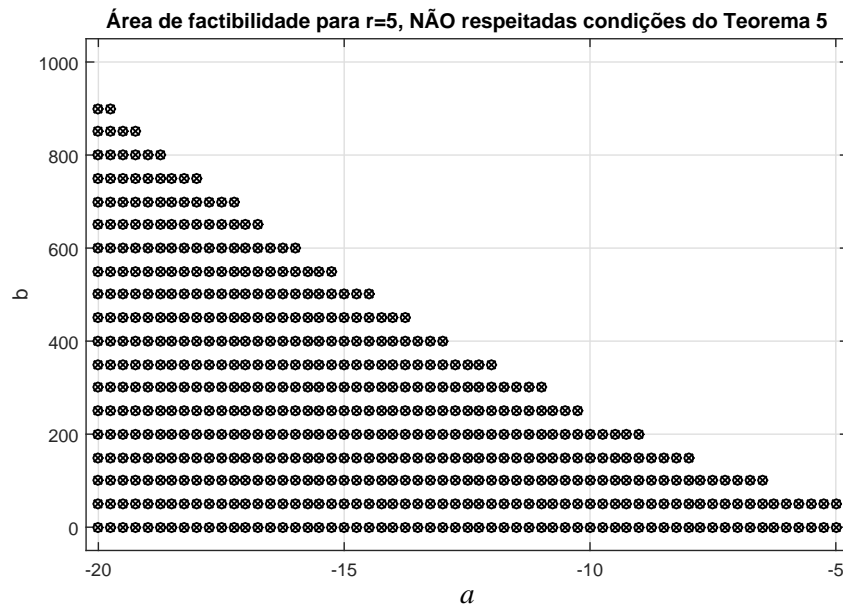
$$A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -3 & a \end{bmatrix},$$

considerando os limites dos \dot{h}_i como sendo

$$\begin{aligned}
 -0,65 &\leq \dot{h}_1 \leq 0,85 \\
 -0,55 &\leq \dot{h}_2 \leq 0,75 \\
 -0,95 &\leq \dot{h}_3 \leq 0,45 \\
 -0,7 &\leq \dot{h}_4 \leq 0,8 \\
 -2 &\leq \dot{h}_5 \leq 2,
 \end{aligned} \tag{4.126}$$

e variando os parâmetros a e b de $[-20, -5]$ e $[0, 1350]$, respectivamente, a Figura 11 mostra que as regiões de factibilidade fornecidas pelo algoritmo e pelo Teorema 3 são iguais.

Figura 11 - Área de factibilidade para $r = 5$, x para o Teorema 3 e o para o algoritmo.



- Número de LMIs particulares fornecidas pelo algoritmo em função do termo F_{ij} : 22;
- Número de LMIs particulares fornecidas pelo Teorema 5 em função do termo F_{ij} : Não existe;
- Número de variáveis matriciais simétricas $n \times n$ utilizadas pelo algoritmo: 5;
- Número de LMIs particulares fornecidas pelo Teorema 3 (Hiper-retângulos), em função do termo F_{ij} : 32;

- Número de variáveis matriciais simétricas $n \times n$ utilizadas pelo Teorema 3 : 20.

Exemplo 6 - Para $r = 7$

Foi analisado, no Capítulo 3, que, para casos com $r \geq 7$, o número de LMIs fornecidas pelo Teorema 3 é menor que o número de LMIs fornecidas pelo Teorema 5. Portanto, dependendo dos intervalos dos ϕ 's o Teorema 3 PODE fornecer menos LMIs que o algoritmo. Sendo assim, é necessária uma análise mais detalhada sobre as vantagens das LMIs geradas pelo algoritmo.

Considerando o modelo Takagi-Sugeno com 7 regras, descrito por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{5}(3b-2) & \frac{1}{5}(3a-4) \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{1}{5}(2b-3) & \frac{1}{5}(2a-6) \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -3 & a \end{bmatrix} \quad A_6 = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ \frac{2}{5}(2b-4) & \frac{3}{10}(2a-5) \end{bmatrix}$$

$$A_7 = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ b & -4 \end{bmatrix},$$

considerando os limites dos \dot{h}_i como sendo

- Caso 1 - Condições de existência do Teorema 5 satisfeitas.

$$\begin{aligned} -0,65 &\leq \dot{h}_1 \leq 0,65 \\ -0,65 &\leq \dot{h}_2 \leq 0,65 \\ -0,65 &\leq \dot{h}_3 \leq 0,65 \\ -0,65 &\leq \dot{h}_4 \leq 0,65 \\ -0,65 &\leq \dot{h}_5 \leq 0,65 \\ -0,65 &\leq \dot{h}_6 \leq 0,65 \\ -0,65 &\leq \dot{h}_7 \leq 0,65. \end{aligned} \tag{4.127}$$

- Caso 2 - Condições de existência do Teorema 5 NÃO satisfeitas.

$$\begin{aligned}
-0,65 &\leq \dot{h}_1 \leq 0,85 \\
-0,55 &\leq \dot{h}_2 \leq 0,75 \\
-0,95 &\leq \dot{h}_3 \leq 0,45 \\
-0,7 &\leq \dot{h}_4 \leq 0,8 \\
-1 &\leq \dot{h}_5 \leq 1 \\
-0,85 &\leq \dot{h}_6 \leq 0,85 \\
-3 &\leq \dot{h}_7 \leq 3.
\end{aligned} \tag{4.128}$$

A análise feita sobre o caso $r = 7$ “trava” os parâmetros a e b em -20 e 50 , respectivamente, para factibilidade, e -15 e 500 para não-factibilidade, diferentemente do que foi feito nos outros casos, a fim de entender onde as LMIs geradas pelo Teorema 6 apresentam uma melhora sobre as LMIs geradas pelo Teorema 3. Para tal, os programas foram executados utilizando o pacote LMILab no Matlab[®], em Intel[®] Core i5[®] 2.4Ghz, com 8Gb de RAM. Os resultados obtidos foram:

Tabela 6 - Resultados comparando os Teoremas 6 e 3.

	N° de LMIs		N° de VMS*		Indicando Factibilidade		Indicando Não-Factibilidade	
	Teo 3	Teo 6	Teo 3	Teo 6	Teo 3	Teo 6	Teo 3	Teo 6
$r = 3$	8	6	9	3	0.5s	<<1s	0.6s	<<1s
$r = 4$	16	12	14	4	1.9s	<<1s	2.66s	0.2s
$r^a = 5$	32	30	20	5	4.8s	3s	11s	6.4s
$r^b = 5$	32	22	20	5	5.13s	2.57s	9.16s	4.36s
$r^a = 7$	140	128	35	7	1min02s	36s	3min19.5s	2min14s
$r^b = 7$	140	90	35	7	1min11s	22,45s	3min20s	1min31s

* Variáveis Matriciais Simétricas $n \times n$, ^a Casos em que as condições de existência dos Teoremas 4 e 5 são respeitadas, ^b Casos em que as condições de existência dos Teoremas 4 e 5 não são respeitadas.

4.5 Conclusões Parciais

Neste capítulo, foram apresentadas análises baseadas nas teorias propostas por (GUEDES, 2015), bem como propostas para generalização das mesmas independente do número de regras que o sistema fuzzy TS possa apresentar.

Ficou provado que os teoremas propostos por (GUEDES, 2015) funcionam muito bem para sistemas que são descritos por no máximo 4 regras ($r \leq 4$), em que suas condições de existência são sempre obedecidas. No entanto, ficou provado também que, para sistemas descritos por no mínimo 5 regras ($r \geq 5$), as condições de existência impostas por (GUE-

DES, 2015) nem sempre são obedecidas, necessitando assim de uma nova proposta para a análise de estabilidade desses sistemas.

Para tal, foi proposto um algoritmo que avalia a utilização dos limites máximos e mínimos das não linearidades, alterando-os conforme necessário para que a soma dos \dot{h}_j seja sempre igual a zero. Dessa maneira, o pior caso possível é sempre contemplado, e fica provado que, se para esse caso o sistema tem no ponto $x = 0$ o ponto assintoticamente estável, então para qualquer outro caso $x = 0$ também é o ponto assintoticamente estável do sistema. Ou seja, foram obtidas condições necessárias e suficientes para tratar os termos correspondentes aos $\dot{h}_i, i \in \mathbb{K}_r$, de modo a assegurar a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $x = 0$ utilizando funções de Lyapunov fuzzy.

Além disso, foi analisada qual a vantagem do uso do algoritmo proposto para a análise de estabilidade de sistemas não lineares e, ficou provado que, além de o algoritmo contemplar casos que os Teoremas 4 e 5 não contemplam, o mesmo ainda retorna sempre um número menor de LMIs do que o Teorema 3 para casos de $r \leq 6$, sendo que o número máximo de LMIs geradas pelo algoritmo acontece quando as condições de existência dos Teoremas 4 e 5 são satisfeitas, e esse número é igual ao obtido por (GUEDES, 2015).

Para os casos $r \geq 7$, ficou provado que o algoritmo nem sempre forma menos LMIs que o Teorema 3, pois esse número de LMIs depende dos intervalos dos ϕ 's. Porém, foi mostrado que, mesmo nos casos em que o algoritmo retorna mais LMIs que o Teorema 3, ainda há um ganho computacional relevante, uma vez que as LMIs do algoritmo conseguem ser resolvidas em tempo consideravelmente menor do que as LMIs do Teorema 3, já que o algoritmo utiliza muito menos variáveis matriciais simétricas $n \times n$.

5 Conclusões e continuação do trabalho

Os modelos fuzzy TS (TAKAGI; SUGENO, 1985), que descrevem um sistema não linear utilizando a combinação de um dado número de modelos locais lineares e invariantes no tempo, obtendo assim seu modelo global, foram analisados a princípio.

Com o objetivo de redução do conservadorismo das relaxações baseadas em LMIs dos sistemas fuzzy TS, foi proposto por (GUEDES, 2015) e revisado no Capítulo 3, um teorema, que oferece condições para a estabilidade de sistemas fuzzy TS, baseado no hiper-retângulo composto pelo conjunto fechado das derivadas temporais das funções de pertinência de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (TS). Utilizando funções de Lyapunov fuzzy, via LMIs, foi considerada uma generalização do conceito de limitantes das variações temporais das funções de pertinência como pertencentes a duplas desigualdades completamente assimétricas, isto é, $-\phi_{\rho 1} \leq \dot{h}_{\rho}(x(t)) \leq \phi_{\rho 2}$, $\rho \in \mathbb{K}_r$, sendo que as constantes $\phi_{\rho 1}$ e $\phi_{\rho 2}$ são conhecidas, que até então na literatura eram modulares, isto é, baseadas em duplas desigualdades com extremos conhecidos e iguais em módulo, mas com sinais trocados. Com essa análise generalizada, foi possível comparar as condições de ϕ 's assimétricos, simétricos e iguais, mostrando que no caso de ϕ 's iguais, o número de LMIs diminuiu bastante, tornando o processo computacional de resolução das mesmas bem mais rápido e menos suscetível a erros (GUEDES, 2015).

Em seguida, foram, estudadas as condições de existência impostas pelos Teoremas 4 e 5, propostos por (GUEDES, 2015), primeiramente para casos particulares com 3 e 4 regras ($r = 3$ e $r = 4$, respectivamente), e mais tarde para casos gerais ($r \geq 5$) com números ímpares ou pares de regras. Ficou comprovado que, dadas as características dos sistema, os casos com 3 e 4 regras (e também em casos com 1 ou 2 regras) sempre obedecem as condições propostas e exigidas para aplicação dos resultados de (GUEDES, 2015). Entretanto, os casos com $r \geq 5$ necessitam de uma análise um pouco mais profunda, com casos que, apesar de obedecerem as características do sistema, apresentam valores

fora dos parâmetros ditados pelas condições, tanto para casos de r ímpar quanto par, descritas nos Teoremas 4 e 5, propostos por (GUEDES, 2015).

Finalmente, foi proposto um algoritmo para que todos possíveis cenários apresentados pelo sistema a ser analisado sejam considerados, de maneira que um desses cenários é o crítico ou máximo. Portanto, se é possível afirmar que, diante dos parâmetros que tornam o sistema crítico, o sistema é estável, então pode-se afirmar que, para qualquer outros parâmetros apresentados dentro dos limites impostos provisoriamente, o sistema também será estável. Este algoritmo oferece condições necessárias e suficientes para este problema.

Foi feita também uma análise para saber o número de LMIs geradas pelo algoritmo, para saber qual era o ganho da teoria proposta em relação ao Teorema 3, que obteve resultados importantes em relação a teoremas anteriores (MOZELLI et al., 2009; ESTEVES, 2011). Ficou provado que, caso as condições de existência dos Teoremas 4 e 5 sejam satisfeitas, o algoritmo gera o mesmo número de LMIs que esses Teoremas. Já no caso em que as condições de existência dos Teoremas 4 e 5 NÃO são satisfeitas, o algoritmo gera ainda menos LMIs, mostrando que, além de contemplar casos em que não é possível aplicar os Teoremas 4 e 5, ainda gera significativamente menos LMIs que o Teorema 3 para os casos $r \leq 6$. Para os casos de $r \geq 7$, foi mostrado que, apesar de o algoritmo PODER gerar mais LMIs que o Teorema 3, ainda são utilizadas bem menos variáveis matriciais $n \times n$, o que representa um bom ganho computacional, onde é possível obter resultados quanto à factibilidade em consideravelmente menos tempo em relação ao Teorema 3.

A continuação desse trabalho terá como objetivo o estudo de métodos de estabilização por meio de realimentação de estado, podendo esta ser feita por meio de um ganho K único ótimo com projeto via LMIs, ou vários ganhos K_i 's, obtidos via LMIs através de projetos de controladores chaveados, visto que os mesmo trazem bastante benefícios, possibilitando muitas vezes ampliar as regiões de factibilidade e aprimorar a performance dos sistemas (SOUZA et al., 2013; FARIA; VALENTION; OLIVEIRA, 2013; ALVES et al., 2016).

REFERÊNCIAS

ABDELMALEK, I. *Non linear systems control: LMI fuzzy approach*. 104 p. Tese (Doutorado) — University Hadj Lakhdar de Batna - République Algérienne Démocratique et Populaire, 2009.

ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R. de; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A. de. Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, v. 30, p. 1408–1433, 2016.

ARRIFANO, N. S. D.; OLIVEIRA, V. A.; COSSI, L. A. V. Synthesis of an LMI-based fuzzy control system with guaranteed cost performance: a piecewise Lyapunov approach. *SBA: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automática*, Campinas, v. 17, p. 213 – 225, 2006. ISSN 0103-1759.

BERNAL, M.; HUSEK, P. Non-quadratic performance design for Takagi-Sugeno fuzzy systems. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, Zielona Gora, v. 15, n. 3, p. 383–391, 2005.

BOYD, S.; GHAOUI, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear matrix inequalities in systems and control theory*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. 193 p.

CAO, S. G.; REES, N. W.; FENG, G. Analysis and design of a class of continuous time fuzzy control systems. *International Journal Control*, Abingdon, v. 64, p. 1069–1087, 1996.

CAO, S. G.; REES, N. W.; FENG, G. Analysis and design for a class of complex control systems part ii: Fuzzy controller design. *Automatica*, Tarrytown, v. 33, n. 6, p. 1029–1039, 1997. ISSN 0005-1098.

CAO, S. G.; REES, N. W.; FENG, G. Analysis and design of a class of complex control systems. *International Journal Control*, Abingdon, v. 33, n. 6, p. 1029–1039, 1997.

CARDIM, R. *Projeto de controladores baseados em LMIs: realimentação derivativa e sistemas chaveados utilizando estrutura variável*. 120 p. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.

CHADLI, M.; MAQUIN, D.; RAGOT, J. Relaxed stability conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS, 2000, Nashville. *Proceedings...* Nashville: [s.n.], 2000. p. 3514–3519.

CHEN, Y.-J.; TANAKA, M.; TANAKA, K.; WANG, H. O. Stability Analysis and Region-of-Attraction Estimation Using Piecewise Polynomial Lyapunov Functions: Polynomial Fuzzy Model Approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 23, p. 1314–1322, 2015.

- ESTEVEVES, T. T. *Análise da estabilidade de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno utilizando as desigualdades de Lyapunov-Metzler*. 99 p. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de —, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2011.
- FARIA, F. A.; VALENTION, M. C.; OLIVEIRA, V. A. Stabilizing switched T-S fuzzy systems using a fuzzy Lyapunov function approach. *European Control Conference*, p. 4305 – 4310, 2013.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. *LMI Control toolbox - for use with matlab*. [S.l.: s.n.], 1995. Disponível em: <<http://www.mathworks.com/access>>. Acesso em: 22 set. 2009.
- GUEDES, J. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Stability of nonlinear system using Takagi-Sugeno fuzzy models and hyper-rectangle of LMIs. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Springer US, Heidelberg, v. 24, n. 1-2, p. 46–53, 2013.
- GUEDES, J. B. *Novas condições de estabilidade de sistemas não lineares utilizando funções Lyapunov fuzzy*. 92 p. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - Campus Ilha Solteira, 2015.
- HADJILI, M. L. *Fuzzy logic in nonlinear modeling and control*. 95 p. Tese (Doutorado) — Université Catholique de Louvain, Belgium, 2002.
- JADBABAIE, A. A reduction in conservatism in stability and L_2 gain analysis of Takagi-Sugeno fuzzy systems via linear matrix inequalities. In: 14TH IFAC WORD CONGRESS, 1999, China. *Proceedings...* China, 1999. p. 285–289.
- JOHANSSON, M.; RANTZER, A.; ARZEN, K. Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, Piscataway, v. 7, n. 6, p. 713–722, 1999. ISSN 1063-6706.
- KING, R. E.; KARONIS, F. C.; GUPTA, M. M.; YAMAKAWA, T. Multi-level expert control of a large-scale industrial process. In: *Fuzzy Computing Theory, Hardware and Applications*. Amsterdam: Elsevier, 1988. p. 323–340.
- LEE, D. H.; JOO, Y. H.; TAK, M. H. Local stability analysis of continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems: A fuzzy Lyapunov function approach. *Information Sciences*, Santa Rosa, v. 257, p. 163 – 175, 2014. ISSN 0020-0255.
- LEE, D. H.; PARK, J. B.; JOO, Y. H. A fuzzy Lyapunov function approach to estimating the domain of attraction for continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems. *Information Sciences*, Santa Rosa, v. 185, n. 1, p. 230 – 248, 2012. ISSN 0020-0255.
- LYAPUNOV, A. M. *General problem of the stability of motion*. 1. ed. [S.l.]: CRC Press, 1992. 270 p.
- MACHADO, E. R. M. D. *Modelagem e controle de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno*. 190 p. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2003.

- MAMDANI, E. H. Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant. *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, Washington, v. 121, n. 3, p. 1585–1588, 1974. ISSN 0020-3270.
- MAMDANI, E. H. Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic synthesis. *Computers, IEEE Transactions on*, IEEE, Piscataway, v. 100, n. 12, p. 1182–1191, 1977.
- MÁRQUEZ, R.; GUERRA, T. M.; BERNAL, M.; KRUSZEWSKI, A. Asymptotically necessary and sufficient conditions for Takagi-Sugeno models using generalized non-quadratic parameter-dependent controller design. *Fuzzy Sets and Systems*, Amsterdam, p. 48–62, 2017.
- MOZELLI, L. A.; PALHARES, R. M.; SOUZA, F. O.; MENDES, E. M. A. M. Reducing conservativeness in recent stability conditions of TS fuzzy systems. *Automatica*, Kidlington, v. 45, n. 6, p. 1580–1583, 2009.
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. [S.l.]: Pearson, 2011. 824 p. ISBN 8576058103.
- OHTAKE, H.; TANAKA, K.; WANG, H. Piecewise nonlinear control. In: 42ND IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL. *Proceedings...* [S.l.: s.n.], 2003. v. 5, p. 4735–4740. ISSN 0191-2216.
- OSTERGAARD, J. J.; HOLMBLAD, L. P. Fuzzy information and decision processes. M. M. Gupta and E. Sanches, Amsterdam, p. 389–399, 1982.
- PEAUCELLE, D.; HENRION, D.; LABIT, Y.; TAITZ, K. *User's Guide for SeDuMi Interface 1.04*. Toulouse, 2002. 37 p. Disponível em: <<http://www.laas.fr/~peaucell/software>>. Acesso em: 22 set. 2009.
- RANTZER, A.; JOHANSSON, M. Piecewise linear quadratic optimal control. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, Piscataway, v. 45, n. 4, p. 629–637, 2000. ISSN 0018-9286.
- RHEE, B. J.; WON, S. A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi - Sugeno fuzzy control system design. *Fuzzy Sets and Systems*, Amsterdam, p. 1211–1228, 2006.
- SLOTINE, J.; LI, W. *Applied nonlinear control*. [S.l.]: Prentice Hall, 1991. 461 p. ISBN 9780130408907.
- SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On Switched Regulator Design of Uncertain Nonlinear Systems Using Takagi-Sugeno Fuzzy Models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, p. 1720–1727, 2014.
- SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On Switched Control Design of Linear Time-Invariant Systems with Polytopic Uncertainties. *Mathematical Problems in Engineering*, Hidawi Publishing Corporation, p. 10, 2013. ISSN 595029.
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, New York, v. 15, n. 1, p. 116–132, 1985.

TANAKA, K.; HORI, T.; WANG, H. A dual design problem via multiple Lyapunov functions. In: THE 10TH IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS. *Proceedings...* [S.l.: s.n.], 2001. v. 1, p. 388–391.

TANAKA, K.; HORI, T.; WANG, H. A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 11, n. 4, p. 582–589, 2003.

TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, Amsterdam, v. 6, n. 2, p. 250–265, 1998. ISSN 1063-6706.

TANAKA, K.; NISHIMURA, M.; WANG, H. O. Multi-objective fuzzy control of high rise/high speed elevators using LMIs. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 4., 1998, Philadelphia. *Proceedings of the...* Philadelphia: [s.n.], 1998. p. 3450–3454.

TANAKA, K.; SANO, M. A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, Amsterdam, v. 2, n. 2, p. 119–134, 1994. ISSN 1063-6706.

TANAKA, K.; YOSHIDA, H.; OHTAKE, H.; WANG, H. A sum of squares approach to stability analysis of polynomial fuzzy systems. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE. *Proceedings of the...* [S.l.]: [s.n.], 2007. p. 4071–4076. ISSN 0743-1619.

TANIGUCHI, T.; TANAKA, K.; OHTAKE, H.; WANG, H. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 9, n. 4, p. 525–538, 2001. ISSN 1063-6706.

TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 11, n. 5, p. 613–623, 2003.

TEIXEIRA, M. C. M.; ZAK, S. H. Stabilizing Controller Design for Uncertain Nonlinear Systems Using Fuzzy Models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, p. 133–142, 1999.

TOGNETTI, E. S. *Controle de sistemas nebulosos Takagi-Sugeno usando relaxações LMIs*. 138 p. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2011.

TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, V. A. Fuzzy pole placement based on piecewise Lyapunov functions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Chichester, v. 20, n. 5, p. 571–578, 2010.

TSOUKALAS, L. H.; UHRIG, R. E. *Fuzzy and neural approaches in engineering*. New York: John Wiley & Sons, 1996. 600 p. ISBN 0471160032.

WAGNER, C. G. *Basic Combinatorics*. [S.l.]: University of Tennessee, 2005. 112 p.

WANG, H.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, Piscataway, v. 4, n. 1, p. 14–23, 1996. ISSN 1063-6706.

- WANG, L. K.; ZANG, H. G.; LIU, X. D. \mathcal{H}_∞ Observer Design for Continuous-Time Takagi-Sugeno Fuzzy Model With Unknown Premise Variables via Nonquadratic Lyapunov Function. *IEEE Transactions On Cybernetics*, p. 1986–1996, 2016.
- WILL, A. B.; TEIXEIRA, M. C. M.; ŻAK, S. H. Four wheel steering control systems design using fuzzy models. In: IEEE CONFERENCE ON CONTROL APPLICATIONS, 6., 1997, Hartford. *Proceedings of the...* Hartford: IEEE, 1997. p. 73–78.
- YASUNOBU, S.; MIYAMOTO, S.; SUGENO, M. Automatic train operation system by predictive fuzzy control. In: *Industrial Applications of Fuzzy Control*. Amsterdam: Elsevier, 1985. p. 1–18.
- ZADEH, L. A. Fuzzy sets. *Information and Control*, Maryland Heights, v. 8, n. 2, p. 338–353, 1965.
- ZHAI, D.; LU, A.-Y.; DONG, J.; ZHANG, Q.-L. Stability analysis and state feedback control of continuous-time T-S fuzzy systems via a new switched fuzzy Lyapunov function approach. *Applied Mathematics and Computation*, Philadelphia, v. 293, p. 586–599, 2017.

6 Artigos submetidos à periódicos

- LAZARINI, A. Z. N.; TEIXEIRA, M. C. M.; GUEDES, J. A.; RIBEIRO, J. M. S.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.. *On Necessary and Sufficient Stability Conditions for TS Fuzzy Models Using Fuzzy Lyapunov Functions*. Fuzzy Sets & Systems.

7 Apêndice

7.1 Provas dos Teoremas 4 e 5

Ambas as provas a seguir estão disponíveis em (GUEDES, 2015)

7.1.1 Teorema 4 (caso r par)

Suponha que (3.7) e (3.8) são satisfeitas e que r é par.

Considere ainda que para todo $\omega \in \psi_r$ definido em (3.6), as seguintes condições são satisfeitas:

$$-\phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,1}} \leq \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+3,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}} \leq \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}}, \quad (7.1)$$

ou

$$-\phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}} \leq \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}} \leq \phi_{\omega_{\frac{r}{2},2}}. \quad (7.2)$$

Para todo $\omega \in \psi_r$ dado em (3.6), defina as LMIs abaixo:

Se a condição (7.1) é satisfeita, então:

$$F_{ij} - \phi_{\omega_{1,1}}P_{\omega_1} - \phi_{\omega_{2,1}}P_{\omega_2} - \cdots - \phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}}P_{\omega_{\frac{r}{2}}} + \left(\phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+3,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}} \right) P_{\omega_{\frac{r}{2}+1}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}}P_{\omega_{\frac{r}{2}+2}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+3,2}}P_{\omega_{\frac{r}{2}+3}} + \cdots + \phi_{\omega_{r,2}}P_{\omega_r} < 0, \quad (7.3)$$

Se a condição (7.2) é satisfeita, então:

$$F_{ij} - \phi_{\omega_{1,1}}P_{\omega_1} - \phi_{\omega_{2,1}}P_{\omega_2} - \cdots - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}}P_{\omega_{\frac{r}{2}-1}} + \left(\phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}} \right) P_{\omega_{\frac{r}{2}}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}}P_{\omega_{\frac{r}{2}+1}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}}P_{\omega_{\frac{r}{2}+2}} + \cdots + \phi_{\omega_{r,2}}P_{\omega_r} < 0. \quad (7.4)$$

Logo,

$$J_{ij}(x) = x^T [F_{ij} + \dot{h}_{\omega_1}P_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2}P_{\omega_2} + \cdots + \dot{h}_{\omega_r}P_{\omega_r}] x < 0, \quad \forall x \neq 0, \quad (7.5)$$

se e somente se, para todo $\omega \in \Psi_r$ definido em (3.6) as condições dadas em (7.1) e (7.3) ou (7.2) e (7.4) são factíveis.

Necessidade: Considere que (7.5) é verdadeira para todos $\hat{h}_\rho, \rho \in \mathbb{K}_r$, satisfazendo (3.7) e (3.8). Suponha que para um $\omega \in \Psi_r$ dado em (3.6) a condição (7.1) é satisfeita. Neste caso, para $\dot{h}_{\omega_1} = -\phi_{\omega_{1,1}}, \dot{h}_{\omega_2} = -\phi_{\omega_{2,1}}, \dots, \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}}} = -\phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}}, \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+1}} = (\phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \dots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+3,2}} - \dots - \phi_{\omega_{r,2}})$, $\dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+2}} = \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}}, \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+3}} = \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+3,2}}, \dots, \dot{h}_{\omega_r} = \phi_{\omega_{r,2}}$, que é uma escolha que atende (3.7) e (3.8) tendo em vista (7.1), a condição (7.5) deve ser satisfeita. Note que nesta situação esta condição (7.5) é equivalente à condição (7.3), e assim esta é uma condição necessária.

Considere agora que para um $\omega \in \Psi_r$ dado em (3.6) a condição (7.2) é satisfeita. Neste caso, para $\dot{h}_{\omega_1} = -\phi_{\omega_{1,1}}, \dot{h}_{\omega_2} = -\phi_{\omega_{2,1}}, \dots, \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}-1}} = -\phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}}, \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}}} = (\phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \dots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \dots - \phi_{\omega_{r,2}})$, $\dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+1}} = \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}}, \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+2}} = \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}}, \dots, \dot{h}_{\omega_r} = \phi_{\omega_{r,2}}$, que é uma escolha que atende (3.7) e (3.8) tendo em vista (7.2), a condição (7.5) deve ser satisfeita. Note que nesta situação esta condição (7.5) é equivalente à condição (7.4), e assim esta é uma condição necessária. Como o teorema supõe que para todos os $\omega \in \Psi_r$ arbitrários, (7.1) ou (7.2) é satisfeita, a análise acima contempla todos os casos e assim a necessidade está demonstrada.

Suficiência: Observe que, dado um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ e matrizes $P_1, P_2, \dots, P_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$, simétricas e positivas definidas, sempre é possível encontrar um $\omega \in \Psi_r$ definido em (3.6), tal que:

$$x^T P_{\omega_r} x \geq x^T P_{\omega_{r-1}} x \geq \dots \geq x^T P_{\omega_2} x \geq x^T P_{\omega_1} x. \quad (7.6)$$

Considerando que de (3.6) e (3.8), $\dot{h}_{\omega_r} = -\dot{h}_{\omega_1} - \dot{h}_{\omega_2} - \dots - \dot{h}_{\omega_{r-1}}$, note que (3.13) pode ser representada como:

$$\begin{aligned} J_{ij}(x) = x^T [& F_{ij} - \dot{h}_{\omega_1} (P_{\omega_2} - P_{\omega_1}) - (\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2}) (P_{\omega_3} - P_{\omega_2}) - \dots \\ & - (\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \dots + \dot{h}_{\omega_{r-2}}) (P_{\omega_{r-1}} - P_{\omega_{r-2}}) - (\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \dots + \dot{h}_{\omega_{r-1}}) (P_{\omega_r} - P_{\omega_{r-1}})] x. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Novamente usando (3.6) e (3.8) e substituindo em (7.7):

$$\begin{aligned} -(\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \dots + \dot{h}_{\omega_{r-1}}) &= \dot{h}_{\omega_r}, \\ -(\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \dots + \dot{h}_{\omega_{r-2}}) &= \dot{h}_{\omega_r} + \dot{h}_{\omega_{r-1}}, \\ &\vdots \\ -(\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \dots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+1}}) &= \dot{h}_{\omega_r} + \dot{h}_{\omega_{r-1}} + \dots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+2}}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Observe que (7.7) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
J_{ij}(x) = & x^T [F_{ij} - \dot{h}_{\omega_1} (P_{\omega_2} - P_{\omega_1}) - (\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2}) (P_{\omega_3} - P_{\omega_2}) \\
& - (\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}}}) (P_{\omega_{\frac{r}{2}+1}} - P_{\omega_{\frac{r}{2}}}) + (\dot{h}_{\omega_r} + \dot{h}_{\omega_{r-1}} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+2}}) \\
& \times (P_{\omega_{\frac{r}{2}+2}} - P_{\omega_{\frac{r}{2}+1}}) + \cdots + (\dot{h}_{\omega_r} + \dot{h}_{\omega_{r-1}}) (P_{\omega_{r-1}} - P_{\omega_{r-2}}) + \dot{h}_{\omega_r} (P_{\omega_r} - P_{\omega_{r-1}})] x.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

De (7.6) tem-se que:

$$x^T (P_{\omega_{i+1}} - P_{\omega_i}) x \geq 0, i \in \mathbb{K}_{r-1} \tag{7.10}$$

e de (3.7), $-\phi_{\rho,1} \leq \dot{h}_{\rho} \leq \phi_{\rho,2}$, $\rho \in \mathbb{K}_r$.

Agora a análise será dividida em duas partes:

a) Suponha que, para um $\omega \in \Psi_r$ dado em (3.6), a condição (7.1) é satisfeita. Nesse caso, de (3.7), (7.9) e (7.10), um limitante superior para $J_{ij}(x) < 0$ é obtido para:

$$\begin{aligned}
(-\dot{h}_{\omega_1})_{\text{máx}} &= \phi_{\omega_{1,1}}, (-\dot{h}_{\omega_1} - \dot{h}_{\omega_2})_{\text{máx}} = \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}}, \cdots, \\
(-\dot{h}_{\omega_1} - \dot{h}_{\omega_2} - \cdots - \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}-1}})_{\text{máx}} &= \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}}, \\
(-\dot{h}_{\omega_1} - \dot{h}_{\omega_2} - \cdots - \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}}})_{\text{máx}} &= \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}}, \\
(\dot{h}_{\omega_r} + \dot{h}_{\omega_{r-1}} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+2}})_{\text{máx}} &= \phi_{\omega_{r,2}} + \phi_{\omega_{r-1,2}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}}, \\
&\vdots \\
(\dot{h}_{\omega_r} + \dot{h}_{\omega_{r-1}} + \dot{h}_{\omega_{r-2}})_{\text{máx}} &= \phi_{\omega_{r,2}} + \phi_{\omega_{r-1,2}} + \phi_{\omega_{r-2,2}}, \\
(\dot{h}_{\omega_r} + \dot{h}_{\omega_{r-1}})_{\text{máx}} &= \phi_{\omega_{r,2}} + \phi_{\omega_{r-1,2}}, \\
(\dot{h}_{\omega_r})_{\text{máx}} &= \phi_{\omega_{r,2}}.
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Substituindo (7.11) em (7.9) é obtida a relação:

$$\begin{aligned}
J_{ij}(x) \leq & x^T [F_{ij} - \phi_{\omega_{1,1}} P_{\omega_1} - \phi_{\omega_{2,1}} P_{\omega_2} - \cdots - \phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}} P_{\omega_{\frac{r}{2}}} + (\phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2},1}} \\
& - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+3,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}}) P_{\omega_{\frac{r}{2}+1}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} P_{\omega_{\frac{r}{2}+2}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+3,2}} P_{\omega_{\frac{r}{2}+3}} + \cdots + \phi_{\omega_{r,2}} P_{\omega_r}] x.
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Assim, da (7.3) e (7.12) tem-se que $J_{ij}(x) < 0$, para $x \neq 0$, nesse caso.

b) Suponha que para um $\omega \in \Psi_r$ dado em (3.6), a condição (7.2) é satisfeita.

Nesse caso, tendo em vista que de (3.8),

$$\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}}} = -\dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+1}} - \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+2}} - \cdots - \dot{h}_{\omega_r},$$

então substituindo em (7.9) $-(\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}}})$, por $\dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+1}} + \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+2}} + \cdots + \dot{h}_{\omega_r}$, logo

de (3.7), (7.9) e (7.10) um limitante superior para $J_{ij}(x) < 0$ é obtido para:

$$\begin{aligned}
(-\dot{h}_{\omega_1})_{\text{máx}} &= \phi_{\omega_{1,1}}, (-\dot{h}_{\omega_1} - \dot{h}_{\omega_2})_{\text{máx}} = \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}}, \\
&\vdots \\
(-\dot{h}_{\omega_1} - \dot{h}_{\omega_2} - \cdots - \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}-1}})_{\text{máx}} &= \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}}, \\
(\dot{h}_{\omega_r} + \dot{h}_{\omega_{r-1}} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+2}} + \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+1}})_{\text{máx}} &= \phi_{\omega_{r,2}} + \phi_{\omega_{r-1,2}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}}, \quad (7.13) \\
(\dot{h}_{\omega_r} + \dot{h}_{\omega_{r-1}} + \cdots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r}{2}+2}})_{\text{máx}} &= \phi_{\omega_{r,2}} + \phi_{\omega_{r-1,2}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}}, \\
&\vdots \\
(\dot{h}_{\omega_r} + \dot{h}_{\omega_{r-1}})_{\text{máx}} &= \phi_{\omega_{r,2}} + \phi_{\omega_{r-1,2}}, (\dot{h}_{\omega_r})_{\text{máx}} = \phi_{\omega_{r,2}}.
\end{aligned}$$

Substituindo a (7.13) em (7.9) é obtida a relação:

$$\begin{aligned}
J_{ij}(x) &\leq x^T [F_{ij} - \phi_{\omega_{1,1}}P_{\omega_1} - \phi_{\omega_{2,1}}P_{\omega_2} - \cdots - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}}P_{\omega_{\frac{r}{2}-1}} + (\phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}-1,1}} \\
&\quad - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}} - \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}})P_{\omega_{\frac{r}{2}}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+1,2}}P_{\omega_{\frac{r}{2}+1}} + \phi_{\omega_{\frac{r}{2}+2,2}}P_{\omega_{\frac{r}{2}+2}} + \cdots + \phi_{\omega_{r,2}}P_{\omega_r}]x. \quad (7.14)
\end{aligned}$$

Assim, de (7.4) e de (7.14) tem-se que $J_{ij}(x) < 0$, para $x \neq 0$, nesse caso.

Como o teorema supõe que para todos os $\omega \in \psi_r$ arbitrários (7.1) ou (7.2) é satisfeita, então os casos a) e b) acima contemplam todas as situações e a suficiência está demonstrada.

7.1.2 Teorema 5 (caso r ímpar)

Suponha que (3.7) e (3.8) estão satisfeitas e que r é ímpar.

Considere ainda que para todo $\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r]^T \in \psi_r$ definido em (3.6),

$$-\phi_{\omega_{\frac{r+1}{2},1}} \leq \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r-1}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}} - \phi_{\omega_{\frac{r+5}{2},2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}} \leq \phi_{\omega_{\frac{r+1}{2},2}}. \quad (7.15)$$

Então,

$$J_{ij}(x) = x^T [F_{ij} + \dot{h}_{\omega_1}P_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2}P_{\omega_2} + \cdots + \dot{h}_{\omega_r}P_{\omega_r}]x < 0, \quad \forall x \neq 0, \quad (7.16)$$

se e somente se,

$$\begin{aligned}
&F_{ij} - \phi_{\omega_{1,1}}P_{\omega_1} - \phi_{\omega_{2,1}}P_{\omega_2} - \cdots - \phi_{\omega_{\frac{r-1}{2},1}}P_{\omega_{\frac{r-1}{2}}} + \\
&+ \left(\phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r-1}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}} - \phi_{\omega_{\frac{r+5}{2},2}} - \cdots - \phi_{\omega_{r,2}} \right) P_{\omega_{\frac{r+1}{2}}} \\
&+ \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}}P_{\omega_{\frac{r+3}{2}}} + \phi_{\omega_{\frac{r+5}{2},2}}P_{\omega_{\frac{r+5}{2}}} + \cdots + \phi_{\omega_{r,2}}P_{\omega_r} < 0, \quad (7.17)
\end{aligned}$$

para todo $\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r]^T \in \psi_r$ definido em (3.6).

Necessidade: Considere que (7.16) é verdadeira para todos os \dot{h}_ρ , $\rho \in \mathbb{K}_r$, satisfazendo (3.7) e (3.8). Então, para $\dot{h}_{\omega_1} = -\phi_{\omega_{1,1}}$, $\dot{h}_{\omega_2} = -\phi_{\omega_{2,1}}$, \dots , $\dot{h}_{\omega_{\frac{r-1}{2}}} = -\phi_{\omega_{\frac{r-1}{2},1}}$,
 $\dot{h}_{\omega_{\frac{r+1}{2}}} = \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \dots + \phi_{\omega_{\frac{r-1}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}} - \phi_{\omega_{\frac{r+5}{2},2}} - \dots - \phi_{\omega_{r,2}}$, $\dot{h}_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}} = \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}}$,
 $\dot{h}_{\omega_{\frac{r+5}{2},2}} = \phi_{\omega_{\frac{r+5}{2},2}}$, \dots , $\dot{h}_{\omega_r} = \phi_{\omega_{r,2}}$,
sendo $\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r]^T \in \Psi_r$ arbitrário, que é uma escolha que atende (3.7) e (3.8), tendo em vista a condição (7.15), a condição (7.16) deverá ser verificada. Observando que nesta situação esta condição (7.16) é equivalente à condição (7.17), para todo $\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r]^T \in \Psi_r$, então a necessidade está demonstrada.

Suficiência: Note que dado um vetor $x \in \mathbb{R}^n$, e matrizes $P_1, P_2, \dots, P_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$, então sempre é possível encontrar $\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r]^T \in \Psi_r$ definida em (3.6) tal que,

$$x^T P_{\omega_r} x \geq x^T P_{\omega_{r-1}} x \geq \dots \geq x^T P_{\omega_2} x \geq x^T P_{\omega_1} x. \quad (7.18)$$

Observe que (3.15) pode ser representada como:

$$\begin{aligned} J_{ij}(x) = & x^T [F_{ij} - \dot{h}_{\omega_1} (P_{\omega_2} - P_{\omega_1}) - (\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2}) (P_{\omega_3} - P_{\omega_2}) \\ & - (\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \dot{h}_{\omega_3}) (P_{\omega_4} - P_{\omega_3}) - \dots - (\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \dots + \dot{h}_{\omega_{r-2}}) (P_{\omega_{r-1}} - P_{\omega_{r-2}}) \\ & - (\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \dots + \dot{h}_{\omega_{r-1}}) (P_{\omega_r} - P_{\omega_{r-1}})] x. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Note que, usando a (3.8), podemos escrever a (7.19), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} J_{ij}(x) = & x^T [F_{ij} - \dot{h}_{\omega_1} (P_{\omega_2} - P_{\omega_1}) - (\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2}) (P_{\omega_3} - P_{\omega_2}) \\ & - \dots - \left(\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \dots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r-1}{2}}} \right) \left(P_{\omega_{\frac{r+1}{2}}} - P_{\omega_{\frac{r-1}{2}}} \right) + \left(\dot{h}_{\omega_r} + \dot{h}_{\omega_{r-1}} + \dots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r+3}{2}}} \right) \\ & \times \left(P_{\omega_{\frac{r+3}{2}}} - P_{\omega_{\frac{r+1}{2}}} \right) + \dots + (\dot{h}_{\omega_{r-1}} + \dot{h}_{\omega_r}) (P_{\omega_{r-1}} - P_{\omega_{r-2}}) + \dot{h}_{\omega_r} (P_{\omega_r} - P_{\omega_{r-1}})] x \end{aligned} \quad (7.20)$$

Agora, note que de (7.18),

$$x^T (P_{\omega_{i+1}} - P_{\omega_i}) x \geq 0, i \in \{1, 2, \dots, r-1\}. \quad (7.21)$$

Assim, um limitante superior para $J_{ij}(x)$ dada em (7.20), considerando (7.21) ocorre quando:

$$\begin{aligned} (-\dot{h}_{\omega_1})_{\text{máx}} &= \phi_{\omega_{1,1}}, \quad (-\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2})_{\text{máx}} = \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}}, \dots, \\ \left(-\left(\dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \dots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r-1}{2}}} \right) \right)_{\text{máx}} &= \phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \dots + \phi_{\omega_{\frac{r-1}{2},1}}, \\ \left(\left(\dot{h}_{\omega_r} + \dot{h}_{\omega_{r-1}} + \dots + \dot{h}_{\omega_{\frac{r+3}{2}}} \right) \right)_{\text{máx}} &= \phi_{\omega_{r,2}} + \phi_{\omega_{r-1,2}} + \dots + \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}}, \dots, \\ (\dot{h}_{\omega_{r-1}} + \dot{h}_{\omega_r})_{\text{máx}} &= \phi_{\omega_{r-1,2}} + \phi_{\omega_{r,2}}, \quad (\dot{h}_{\omega_r})_{\text{máx}} = \phi_{\omega_{r,2}}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Substituindo (7.22) em (7.20) é obtida a relação:

$$J_{ij}(x) \leq x^T \left[F_{ij} - \phi_{\omega_{1,1}} P_{\omega_1} - \phi_{\omega_{2,1}} P_{\omega_2} - \cdots - \phi_{\omega_{\frac{r-1}{2},1}} P_{\omega_{\frac{r-1}{2}}} + (\phi_{\omega_{1,1}} + \phi_{\omega_{2,1}} + \cdots + \phi_{\omega_{\frac{r-1}{2},1}} - \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}} - \phi_{\omega_{\frac{r+5}{2},2}} - \phi_{r,2}) P_{\omega_{\frac{r+1}{2}}} + \phi_{\omega_{\frac{r+3}{2},2}} P_{\omega_{\frac{r+3}{2}}} + \cdots + \phi_{\omega_{r-1,2}} P_{\omega_{r-1}} + \phi_{\omega_{r,2}} P_{\omega_r} \right] x. \quad (7.23)$$

Logo de (7.23), a condição (7.17) assegura a condição (7.16).

Assim, a suficiência está demonstrada.