

Liberto de Anunciação Marcolino Pombal

**Estratégias para a Resolução de
Problemas de Complementariedade
Linear Estendida**



1910001019



**ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS DE COMPLEMENTARIDADE
LINEAR ESTENDIDA**

Liberto de Anunciação Marcolino Pombal

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP - 059

Rua Cristovão Colombo, 2265
Caixa Postal 136
15054-000 - São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (017) 221-2444
Fax: (017) 221-2445



ESTRATÉGIAS PARA A RESOLUÇÃO DE
PROBLEMAS DE COMPLEMENTARIDADE
LINEAR ESTENDIDA

Liberto de Anunciação Marcolino Pombal

Dissertação de Mestrado
Em Matemática Aplicada
M.A.P. 039

Pombal, Liberto de Anunciação marcolino.

Estratégias para a resolução de problemas de complementaridade linear estendida / Liberto de Anunciação Marcolino Pombal. – São José do Rio Preto : [s.n.], 2001.

078 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Roberto Andreani.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.

1. Complementaridade. 2. Programação não linear. 3. Condições de otimalidade. I. Andreani, Roberto. II. Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título

CDU – 519.0

Liberto de Anunciação Marcolino Pombal

Estratégias Para a Resolução de Problemas de Complementaridade Linear Estendida

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.



T1.019/01

Orientador: Prof. Dr. Roberto Andreani

São José do Rio Preto

2001



Liberto de Anunciação Marcolino Pombal

Estratégias Para a Resolução de Problemas de Complementaridade Linear Estendida

Comissão Julgadora

Dissertação para obtenção de título de Mestre

Presidente e orientador : Prof. Dr. Roberto Andreani - DCCE-IBILCE-UNESP

2º Examinador : Profa. Dra. Ana Friedlander - DMA-IMECC-UNICAMP

3º Examinador : Profa. Dra. Maria S. N. Rangel - DCCE-IBILCE-UNESP

4º Examinador : Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga - DCCE-IBILCE-UNESP

5º Examinador : Profa. Dra. Sandra A. Santos - DMA-IMECC-UNICAMP.

São José do Rio Preto, 21 de Setembro de 2001.



Resumo

O objectivo desta dissertação é estudar as diferentes estratégias propostas para a resolução de problemas da complementaridade linear estendida (*XLCP*), com ênfase no problema da complementaridade linear horizontal (*HLCP*). É também feita uma mudança nas estratégias dos resultados já existentes, utilizando as funções de Fischer-Burmeister e Fischer-Burmeister penalizada o que resultou numa adaptação natural para o caso linear estendido. Os resultados computacionais de todas as estratégias sugeridas são também abordados com profundidade nesta dissertação.

Key words: Complementarity, Box constrained minimization, Optimality con-

Palavras-chave: Complementaridade; Minimização com restrições de caixa; Condições de otimalidade.

Abstract

The purpose of this work is to study different strategies for the resolution of the extended linear complementarity problems (*XLCP*), with emphasis on the horizontal linear complementarity problem (*HLCP*). A substitution in the strategies of the existents results, using the Fischer-Burmeister and penalized Fischer-Burmeister functions is also made. An adaptation of the extended linear case is a natural consequence. The numerical results of all strategies are also discussed in this work.

Keywords: Complementarity; Box constrained minimization; Optimality conditions.

“A vida é o que se realiza diante dos nossos olhos,
o sucesso é a realização daquilo que os nossos olhos desejam ver. ”

Maria de Fátima (Liberto Pombal)

Aos meus irmãos

Delfa, Paulo, Dora, Janete,

Paulo, Kêta, Paulinho, Lúcia,

Paulo e Nery.

Delfa,

Agradecimentos

A minha família que sempre me apoiou em todos os momentos da minha vida. Em especial, a minha mãe, Maria de Fátima Marcolino Pombal e ao meu pai, Paulo António Pombal.

Ao professor do meu doutoramento, Roberto Andreari, pela orientação deste trabalho e principalmente por ter acreditado em mim.

A todos os professores do departamento depois da graduação, em especial a Paula Helena Crestana, Tereza, Gláucia, Duclier, Marayoshi, Kanga.

Aos meus professores de graduação e que permitiram que aqui chegasse em especial a Angélica, Hilde, Tadeu, Euripedes, Demas, Bete, Paulo Roberto, Soraia, Nereu, e pelas importantes contribuições para minha formação académica.

A todos os colegas de pós-graduação que estiveram comigo ao decorrer deste curso pelo incentivo e ajuda prestada em especial a Paulo e a Gláucia que sempre estiveram e estão presentes todas as dificuldades.

A minha *Cozinha*, pelo companheirismo e por tudo que ela representa pra mim.

A todos os professores e funcionários que de alguma forma colaboraram para a realização deste trabalho.

Ao Paqueta Arraújo, Angélica, IFPA e
pela minha inspiração.

A todos por minha vida.

Aos meus pais,

Paulo António Pombal e

Maria de Fátima Marcolino Pombal.

Aos meus irmãos,

Bela, Paula, Toy, Jenito,

Vado[†], Kito, Pauluxo, Licinia,

Délcio e Nere.

Dedico.

Agradecimentos

A minha família que sempre me apóia em todos os momentos da minha vida. Em especial, a minha mãe, Maria de Fátima Marcolino Pombal e ao meu pai, Paulo António Pombal.

Ao professor doutor Roberto Andreani, pela orientação deste trabalho e principalmente por ter acreditado em mim.

A todos os professores do departamento de pós-graduação, em especial a Eliana, Heloisa, Cleonice, Socorro, Geraldo, Dimitar, Massayoshi, Ranga.

Aos meus professores de graduação e que permitiram que aqui chegasse em especial a Ângela, Hélia, Tadini, Eurípedes, Hermes, Baida, Paulo Roberto, Sueli, Neusa, e pelas importantes contribuições para minha formação acadêmica.

A todos os colegas da pós-graduação que estiveram comigo no decorrer deste curso pela amizade e ajuda prestada em especial o Paulo e a Graziela que comigo estiveram e juntos passamos todas as dificuldades.

A minha Celeste pelo companheirismo e por tudo que ela representa pra mim.

A todos os professores e funcionários que de alguma forma colaboraram para a realização deste trabalho.

As Forças Armadas Angolanas (F.A.A), a CAPES, e a minha família pelo auxílio financeiro.

A deus pela minha saúde.



Sumário

Introdução

1	Introdução	10
1.1	Definições, Propriedades e Notações.	15
1.2	Exemplos de casos especiais de <i>XLCP</i>	21
2	Aspectos teóricos e resultados prévios.	24
2.1	Resultados Prévios	24
2.1.1	Equivalência com o Problema Bilinear	26
2.1.2	Equivalência com o problema de otimização com restrições simples	31
3	Reformulação como problema de otimização sem restrições	44
3.1	Propriedades da função de Fischer-Burmeister	46
3.2	Teoremas de equivalência	49
4	Resultados Numéricos e Conclusões	58
4.1	Implementação Computacional	58
4.2	Tabelas e Gráficos.	59
4.3	Conclusões e Considerações Finais	68
	Referências	69
	Apêndice	73



Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho consideramos problemas de complementaridade linear estendida (*XLCP*), com ênfase no problema horizontal (*HLCP*). Nos últimos anos, o *HLCP* tem recebido uma grande atenção por parte de muitos pesquisadores interessados nos métodos de pontos interiores para resolver programas lineares e de complementaridade. Este tipo de problema foi introduzido por Mangasarian e Pang [15], que com o uso de um problema bilinear natural, estabeleceram várias propriedades básicas do *XLCP*.

O *XLCP* surge nos estudos de sistemas de eventos discretos [19], como por exemplo em sistemas de manufatura flexível, sistemas de processamento paralelo, redes de tráfego subterrâneo, redes de telecomunicações, possui também aplicações em programação linear e quadrática [19]; na economia, em problemas de equilíbrio de mercado, problema ótimo do capital invariante de estoques, teoria de jogos [6], etc.

O problema de complementaridade linear estendida (*XLCP*), consiste em encontrar $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, tais que :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= 0, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ Mx - Ny &\in C \end{aligned} \tag{1.0.1}$$

onde $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $C \subset \mathbb{R}^m$. Se $N = I$ e $C = \{-q\}$, então o problema resulta em :



$Mx - y = -q \implies y = Mx + q, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \langle x, y \rangle = 0$. Que é conhecido como o problema da complementaridade linear $LCP(M, q)$, onde $q \in \mathbb{R}^n$. Se $C = \{q\}, q \in \mathbb{R}^n$, temos o problema horizontal da complementaridade linear $HLCP(M, N, q)$.

Como está definido, o $XLCP$ não é um problema de otimização. A primeira proposta para a sua resolução como um problema de otimização foi feita por Mangasarian e Pang [15], que consiste em resolver o seguinte problema bilinear de otimização :

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \langle x, y \rangle \\ &\text{sujeita a:} \quad Mx - Ny \in C, \\ &\quad \quad \quad x \geq 0, y \geq 0. \end{aligned} \tag{1.0.2}$$

onde $C = \{x : Ax \geq 0\}$. Uma solução com valor zero da função objetivo, é claramente um mínimo global do problema (1.0.2) e solução do $XLCP$. Para achar pontos estacionários existem métodos eficientes, porém achar mínimos globais é uma tarefa complicada, para a qual existem algoritmos específicos para cada tipo de problema, mas não uma teoria geral consolidada. Assim, Mangasarian e Pang [15], determinaram condições para que pontos estacionários de (1.0.2) sejam soluções do $XLCP(1.0.1)$. Estes resultados foram posteriormente estendidos por Gowda [12] para a mesma reformulação.

A reformulação de problemas de complementaridade, desigualdades variacionais e problemas de equilíbrio como problemas de otimização é um enfoque que ultimamente tem sido intensamente pesquisado, assim Solodov [20] introduziu algumas reformulações alternativas para o $XLCP$.

Andreani e Martínez [1], introduziram um problema de otimização equivalente que coloca o $XLCP$ como um problema de otimização com restrições de caixa. Propuseram também duas definições para o conjunto C . Neste trabalho reformulamos tais conjuntos, reformulando o $XLCP$ como um problema de otimização sem restrições. Para isto, adaptamos as funções de Fischer-Burmeister [11] e a recentemente introduzida por Chen, Chen e Kanzow [4], Fischer-Burmeister penalizada, visto que estas funções são válidas para o caso da complementaridade.

dade não linear (*NCP*) e apresentam resultados teóricos e numéricos expressivos. Além disso propusemos uma nova função para a complementaridade baseada numa função exponencial, que embora não tenha as mesmas propriedades teóricas, foi possível de ser implementada computacionalmente.

É nosso objetivo reformular os problemas correspondentes para os dois tipos de conjuntos definidos da seguinte maneira :

$$C = \left\{ (u, z) \in \mathbb{R}^{m+l} : Au - b - z = 0, z = (z_1, 0), z_1 \in \mathbb{R}^p, z_1 \geq 0 \right\}, \quad (1.0.3)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $b \in \mathbb{R}^l$. O problema de otimização equivalente para $XLCP(M, N, C)$ que propomos é :

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \phi(x, y) + \rho \|AMx - ANy - b - z\|^2 \\ &\text{sujeita a:} \quad x \geq 0, y \geq 0, z_1 \geq 0, \end{aligned} \quad (1.0.4)$$

onde $\rho > 0$ é uma constante arbitrária. A segunda definição para C é a seguinte:

$$C = \left\{ (w, z) \in \mathbb{R}^{m+s} : w = Lz + q, z = (z_1, z_2), z_1 \in \mathbb{R}^v, z_1 \geq 0, z_2 \in \mathbb{R}^{s-v} \right\} \quad (1.0.5)$$

O problema de otimização equivalente dado por Andreani e Martínez em [1] para este caso é :

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \phi(x, y) + \rho \|Mx - Ny - Lz - q\|^2 \\ &\text{sujeita a:} \quad x \geq 0, y \geq 0, z_1 \geq 0. \end{aligned} \quad (1.0.6)$$

A função $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, verifica a seguinte condição de complementaridade : $x \geq 0$, e $y \geq 0$, então $\phi(x, y) = 0 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$. Para os dois casos daremos condições suficientes sob as quais pontos estacionários destes problemas são soluções do *XLCP* (1.0.1).

Nesta dissertação usamos o fato que o *HLCP* pode ser formulado como equivalente a achar o mínimo global com valor zero de

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \phi(x, y) + \rho \|Mx - Ny - q\|^2 \\ &\text{sujeita a:} \quad x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

A vantagem deste tipo de problema é que a função objetivo é um polinômio com grau ≤ 4 e as restrições são de caixa. Serão propostas para a função $\phi(x, y)$, cinco estratégias, que definiremos em seguida, para a implementação computacional da resolução do *HLCP*.

Estas estratégias além de manter as propriedades de não diferenciabilidade, podem ser resolvidas com qualquer método. Elas consistem em :

(i) Estratégias totalmente diferenciáveis [1, 12, 20]

$$\phi_1(x, y) = \langle x, y \rangle$$

$$\phi_2(x, y) = \frac{1}{2} \langle x, y \rangle^2$$

$$\phi_e(x, y) = \frac{1}{2} (e^{\langle x, y \rangle} - 1)$$

Estas funções cumprem com a condição de complementaridade :

Se $x \geq 0$, $y \geq 0$, então $\phi(x, y) = 0 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$.

(ii) Estratégias baseadas na função de Fischer-Burmeister [4, 11];

$$\phi_{FB}(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(-\sqrt{x_i^2 + y_i^2} + x_i + y_i \right)^2$$

$$\phi_{FBP}(x, y) = \sum_{i=1}^n \left(-\sqrt{x_i^2 + y_i^2} + x_i + y_i + \mu (x_i)_+ (y_i)_+ \right)^2$$

onde $a_+ = \max(a, 0)$. Provaremos que o uso da função de Fischer no problema de otimização, mantém as mesmas propriedades teóricas e características fundamentais para o *XLCP*. Neste caso temos a vantagem de que o problema de otimização é sem restrições.

Para estabelecer a equivalência dos pontos estacionários de :

$$\text{minimizar } \phi(x, y) + \rho \|AMx - ANy - q\|^2$$

e as soluções do *XLCP* :

$$\{Mx - Ny \in C, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^T y = 0\},$$

provamos que a função de Fischer-Burmeister e Fischer-Burmeister penalizada, satisfazem propriedades que vão permitir a adaptação dos resultados teóricos provados por Andreani e Martínez [1], para as estratégias totalmente diferenciáveis, com exceção da exponencial, dando uma sustentação forte para obtenção dos resultados computacionais.

A implementação computacional e a comparação numérica entre as cinco estratégias, apresentada no capítulo 4, foi feita usando o software Easy de minimização de funções, desenvolvido pelo departamento de matemática aplicada da UNICAMP [9, 10, 13, 16], em ambiente Linux.

Os resultados numéricos confirmaram as nossas expectativas quanto ao bom comportamento da função de Fischer-Burmeister penalizada.

1.1 Definições, Propriedades e Notações.

Definição 1.1.1. Ver [17] :

Um subconjunto $A \in \mathbb{R}^n$ é chamado conjunto afim se $(1 - \lambda)x + \lambda y \in A$, para todo $x, y \in A$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

1. $\mathbb{R}^n$ é o conjunto dos vetores coluna

$$x \in \mathbb{R}^n \implies x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

2. $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (vetor transposto).
3. $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ (produto escalar), para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.
4. $\|x\| = (x^T x)^{\frac{1}{2}}$ (norma euclidiana).
5. $\mathbb{R}^{m \times n}$ é o conjunto de matrizes reais de $m \times n$. Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, denotamos A^T a matriz transposta.
6. I é a matriz identidade ($a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $a_{ii} = 1$).
7. Gradiente de f :

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

8. Se a matriz A é semidefinida positiva ($x^T A x \geq 0$), para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então escrevemos $A \geq 0$. Analogamente se A é definida positiva ($x^T A x > 0$), para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então escrevemos $A > 0$.
9. $x \circ y = (x_1 y_1, \dots, x_n y_n)^T$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ é o produto de Hadamard.
10. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$: $x^+ = (\max\{0, x_1\}, \dots, \max\{0, x_n\})$, $x^- = x^+ - x$.
11. Denotamos A_i como a i -ésima linha da matriz A , e A_j a j -ésima coluna da matriz A .
12. Seja M_j a j -ésima coluna da matriz M . dadas $M, N \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dizemos que $\{\overline{M}, \overline{N}\}$ é um rearranjo de $\{M, N\}$ se para cada índice i ,

$$\overline{M}_i = M_i \text{ e } \overline{N}_i = N_i \text{ ou } \overline{M}_i = N_i \text{ e } \overline{N}_i = M_i.$$

13. $(\cdot)_+$ projeção do operador no ortante não negativo.

Definição 1.1.2 (politopo, Ver [17]). : Um politopo é o conjunto de soluções de um sistema finito de desigualdades lineares.

Definição 1.1.3. : Um subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de cone se este é fechado sob a multiplicação de um escalar positivo, isto é $\lambda x \in K$, quando $x \in K$ e $\lambda > 0$.

Definição 1.1.4. : Um cone (no sentido de politopo) é o conjunto das soluções de um sistema finito de desigualdades lineares homogêneas.

Definição 1.1.5. : Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ é convexo se e somente se para todo $x, y \in S$, $\lambda \in [0, 1]$ se verifica que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$.

Definição 1.1.6. : Chamamos de cone de recessão C denotado por 0^+C , ao conjunto de todos os vetores $y \in \mathbb{R}^n$ que satisfazem a seguinte condição:

Seja $C \neq \emptyset$ um conjunto convexo do $\mathbb{R}^n$, se $x + \lambda y \in C$ para todo $\lambda \geq 0$ e $x \in C$. Onde o seu dual é denotado por $(0^+C)^*$.

Mostraremos abaixo exemplos para ilustrar a definição acima usando cones de recessão de conjuntos convexos no $\mathbb{R}^2$:

$$C_1 = \{(\xi_1, \xi_2) : \xi_1 > 0, \xi_2 \geq \frac{1}{\xi_1}\},$$

$$C_2 = \{(\xi_1, \xi_2) : \xi_2 \geq \xi_1^2\},$$

$$C_3 = \{(\xi_1, \xi_2) : \xi_1^2 + \xi_2^2 \leq 1\},$$

$$C_4 = \{(\xi_1, \xi_2) : \xi_1 > 0, \xi_2 > 0\} \cup \{(0, 0)\},$$

então temos :

$$0^+C_1 = \{(\xi_1, \xi_2) : \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0\},$$

$$0^+C_2 = \{(\xi_1, \xi_2) : \xi_1 = 0, \xi_2 \geq 0\},$$

$$0^+C_3 = \{(\xi_1, \xi_2) : \xi_1 = 0 = \xi_2\} = \{(0, 0)\},$$

$$0^+C_4 = \{(\xi_1, \xi_2) : \xi_1 > 0, \xi_2 > 0\} \cup \{(0, 0)\} = C_4.$$

Definição 1.1.7. Seja x^* um ponto que satisfaz as restrições

$$h(x^*) = 0, \quad g(x^*) \leq 0, \quad (1.1.7)$$

e seja J o conjunto dos índices j de modo que $g_j(x^*) = 0$. Então dizemos que x^* é um ponto regular das restrições (1.1.7) se os vetores gradiente $\nabla h_i(x^*)$, $\nabla g_j(x^*)$, $1 \leq i \leq m, j \in J$ são linearmente independente, ver [14].

Definição 1.1.8. Condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), ver [14]

Seja x^* um ponto que minimiza o problema:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad f(x) \\ &\text{sujeita a:} \quad h(x) = 0 \\ &\quad \quad \quad g(x) \leq 0. \end{aligned}$$

Suponha que x^* é um ponto regular para as restrições. Então existem dois vetores $\lambda \in \mathbb{R}^n$ e $\mu \in \mathbb{R}^p$, com $\mu \geq 0$, tais que :

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \lambda^T \nabla h(x^*) + \mu^T \nabla g(x^*) &= 0 \\ \mu^T g(x^*) &= 0, \quad \lambda^T h(x^*) = 0 \\ h(x^*) &= 0, \quad g(x^*) \leq 0. \end{aligned}$$

Exemplo : considere o problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 10x_2 \\ &\text{suajeito a} \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 5, \quad 3x_1 + x_2 \leq 6. \end{aligned}$$

As condições necessárias de primeira ordem, juntamente com as restrições, são:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - 10 + 2\mu_1x_1 + 3\mu_2 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 10 + 2\mu_1x_2 + \mu_2 &= 0 \\ \mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0 \\ \mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 5) &= 0 \\ \mu_2(3x_1 + x_2 - 6) &= 0. \end{aligned}$$

Definição 1.1.9. *Matriz da classe $\mathbf{P}$. [7].*

Dizemos que $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz da classe $\mathbf{P}$ se para cada vetor $u \neq 0$, existe um índice i tal que $(Mu)_i > 0$.

Definição 1.1.10. *Matriz da classe $\mathbf{P}_0$. [7].*

Dizemos que $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz da classe $\mathbf{P}_0$ se para cada vetor $u \neq 0$, existe um índice i tal que $(Mu)_i \geq 0$.

Das duas definições acima decorre o seguinte, ver [7].

Se $M \in \mathbf{P}$ então $M^T \in \mathbf{P}$. Se $M \in \mathbf{P}_0$ então $M^T \in \mathbf{P}_0$.

Outra consequência importante é, se $M + M^T$ é definida positiva então $M \in \mathbf{P}$. Se $M + M^T$ é semi definida positiva então $M \in \mathbf{P}_0$.

Definição 1.1.11. *Matriz da classe $\mathbf{S}$. [7].*

Dizemos que $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz da classe $\mathbf{S}$ se para cada vetor $u \neq 0$, $u \geq 0$, existe um índice i tal que $(Mu)_i > 0$.

Definição 1.1.12. *Matriz da classe $\mathbf{S}_0$. [7].*

Dizemos que $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz da classe $\mathbf{S}_0$ se para cada vetor $u \neq 0$, $u \geq 0$, existe um índice i tal que $(Mu)_i \geq 0$.

As classes das matrizes $\mathbf{S}$ e $\mathbf{S}_0$ estão relacionadas com as classes $\mathbf{P}$ e $\mathbf{P}_0$ da seguinte maneira:

Se $M \in \mathbf{P}$, então $M \in \mathbf{S}$. Se $M \in \mathbf{P}_0$, então $M \in \mathbf{S}_0$.

Definição 1.1.13. *Matriz suficiente.*

Uma matriz é linha suficiente se $x_i(Mx)_i \leq 0 \implies x_i(Mx)_i = 0, \forall i$. Se M^T é linha suficiente, então M é coluna suficiente.

As extensões da definição acima são assim definidas:

Definição 1.1.14. *Coluna-Suficiente estendida, ver [12].*

Dadas matrizes $M, N \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e C um politopo, dizemos que $\{M, N\}$ possui a propriedade de X -coluna-suficiente com respeito a C se a seguinte condição

se verifica:

$$\left\{ \begin{array}{l} Mu - Nv \in C - C \\ u \circ v \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow u \circ v = 0.$$

onde $u \circ v = (x_1 y_1, \dots, x_n y_n)^T$ é o produto de Hadamard. Observe que esta propriedade é invariante sob o rearranjo das colunas de $\{M, N\}$, de acordo com a propriedade 12.

Definição 1.1.15. *Coluna-Suficiente em HLCP.*

No caso do problema horizontal descrito na definição 1.2.4 deste capítulo, com

$(M, N) = (A, B)$ e $C = \{q\}$, esta propriedade resulta em:

$$\left\{ \begin{array}{l} Au - Bv = 0 \\ u \circ v \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow u \circ v = 0.$$

Iremos nos referir a esta propriedade como H-coluna-suficiente de $\{A, B\}$. Observe que para o $XLCP(M, N, C)$, será provado mais adiante, no capítulo 2, que quando $MN^T \geq 0$ em $(0^+C)^*$, todo vetor KKT de

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \langle x, y \rangle \\ \text{sujeita a:} & Mx - Ny \in C \\ & x \geq 0, y \geq 0, \end{array}$$

é solução de $XLCP(M, N, C)$. Este resultado é um caso especial de um resultado mais geral na propriedade de linha-suficiente [12] do par $\{M, N\}$ com respeito a C .

Definição 1.1.16. *Dadas matrizes $M, N \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e o politopo C , dizemos que $\{M, N\}$ possui a propriedade X-linha-suficiente com respeito a C se a seguinte condição é satisfeita:*

$$\left\{ \begin{array}{l} (M^T u) \circ (N^T u) \leq 0 \\ u \in (O^+C)^* \end{array} \right\} \Rightarrow (M^T u) \circ (N^T u) = 0$$

Observe que esta propriedade [12], é invariante sob $\{\overline{M}, \overline{N}\}$, isto é para qualquer rearranjo das colunas de M e N .

Definição 1.1.17. *Linha-Suficiente em HLCP*

Para o HLCP descrito na definição 1.2.4 deste capítulo, esta propriedade resulta em :

$$(A^T u) \circ (B^T u) \leq 0 \implies (A^T u) \circ (B^T u) = 0$$

Chamaremos esta propriedade de H-linha-suficiente de $\{A, B\}$.

Para ilustrarmos de uma forma mais clara, vamos mostrar um diagrama que mostra a disposição das classes de matrizes acima definidas, para M não simétrica.

Legenda 1.1.1. $S+ \rightarrow$ Semi definida positiva;

$D+ \rightarrow$ Definida positiva;

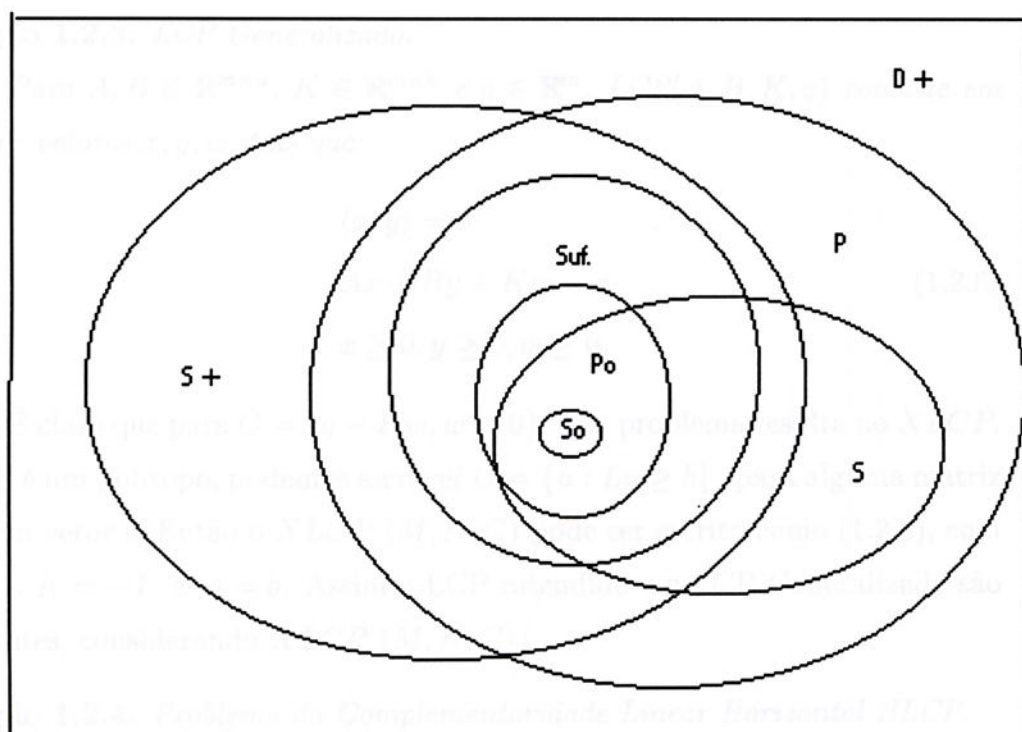
$S \rightarrow$ S Matriz;

$P \rightarrow$ P Matriz;

$Suf. \rightarrow$ Matriz suficiente;

$So \rightarrow$ So Matriz;

$Po \rightarrow$ Po Matriz;



1.2 Exemplos de casos especiais de XLCP.

Definição 1.2.1. Dadas as seguintes matrizes $M, N \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e um conjunto $C \subset \mathbb{R}^m$, o problema da complementaridade linear estendida associado a M, N e C , $XLCP(M, N, C)$ consiste em encontrar $x, y \in \mathbb{R}^n$, tais que:

$$\langle x, y \rangle = 0$$

$$Mx - Ny \in C$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Definição 1.2.2. Problema da complementaridade linear LCP.

Dada uma matriz $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e um vetor $q \in \mathbb{R}^n$ o LCP consiste em encontrar dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$, tais que:

$$\langle x, y \rangle = 0$$

$$x - By = q$$

$$x \geq 0, y \geq 0.$$

Definição 1.2.3. *LCP Generalizado.*

Para $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $K \in \mathbb{R}^{m \times k}$ e $q \in \mathbb{R}^m$, $LCP(A, B, K, q)$ consiste em encontrar vetores x, y, w , tais que:

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= 0 \\ Ax + By + Kw &= q \\ x \geq 0, y \geq 0, w &\geq 0.\end{aligned}\tag{1.2.8}$$

É claro que para $C = \{q - Kw, w \geq 0\}$, este problema resulta no $XLCP$. Já que C é um politopo, podemos escrever $C = \{u : Lu \geq b\}$, para alguma matriz L e algum vetor b . Então o $XLCP(M, N, C)$ pode ser escrito como (1.2.8), com $A = LM$, $K = -I$ e $q = b$. Assim o LCP estendido e o LCP Generalizado são equivalentes, considerando $XLCP(M, N, C)$.

Definição 1.2.4. *Problema da Complementaridade Linear Horizontal HLCP.*

Dadas matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $q \in \mathbb{R}^n$, $HLCP(A, B, q)$, consiste em encontrar $x, y \in \mathbb{R}^n$, tais que:

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= 0 \\ Ax + By &= q \\ x \geq 0, y &\geq 0.\end{aligned}$$

O termo horizontal é usado para caracterizar a forma geométrica da matriz $[AB]$.

E claro que o $HLCP$ é um $XLCP$ com $C = \{q\}$. Como $m = n$, se $A = I$, este reduz-se ao $LCP(B, q)$.

Definição 1.2.5. *Problema da Complementaridade Linear Vertical VLCP.*

Dadas matrizes $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $a, b \in \mathbb{R}^m$, $VLCP(A, B, a, b)$, consiste em encontrar $x \in \mathbb{R}^n$, tal que:

$$\langle (Ax + a), (Bx + b) \rangle = 0.$$

Fazendo $y = Ax + a$ e $z = Bx + b$, temos que este $VLCP$ resulta em $XLCP$, onde:

$$M = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 \\ -I \end{pmatrix}, \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} Ax \\ Bx \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Como neste problema assumimos que $m \geq n$, então torna-se uma generalização do LCP.

Definição 1.2.6. *Problema da Complementaridade Linear Misto MLCP.*

Dadas matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $K \in \mathbb{R}^{k \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{k \times k}$ e os vetores $a \in \mathbb{R}^m$ e $b \in \mathbb{R}^k$, o MLCP (A, B, K, D, a, b) , consiste em encontrar os vetores $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^k$, tais que:

$$Ax + By + a = 0$$

$$\langle y, (Kx + Dy + b) \rangle = 0.$$

Este problema surge nas desigualdades variacionais afins e nos seus aspectos de estabilidade, problemas de complementaridade e numa variedade de programas matemáticos, ver [12].

Fazendo $z = Kx + Dy + b$, o MLCP resulta no XLCP com

$$M = \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}, \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} Ax \\ Kx \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Observamos que os conjuntos de soluções do MLCP e do XLCP estão relacionados por uma transformação linear. Quando A é uma matriz inversível o MLCP é equivalente ao LCP $(D - KA^{-1}B, b - KA^{-1}a)$, quando B é inversível, é equivalente ao VLCP $(K - DB^{-1}A, -B^{-1}A, b - DB^{-1}a, -B^{-1}a)$, e quando K é inversível é equivalente ao HLCP $(B - AK^{-1}D, -AK^{-1}, AK^{-1}b - a)$.

Capítulo 2

Aspectos teóricos e resultados prévios.

Neste capítulo, trataremos de enunciar aspectos e resultados prévios que sustentam toda nossa abordagem teórica apresentada no capítulo 3 e os resultados computacionais apresentados no capítulo 4.

2.1 Resultados Prévios

Mangasarian e Pang [15], introduziram o problema $XLCP$ (1.0.1), e formularam um problema natural equivalente ao problema bilinear : (BLP)

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \langle x, y \rangle \\ &\text{sujeita a:} \quad (x, y) \geq 0; \quad Mx - Ny \in C, \end{aligned}$$

onde $C = \{u \in \mathbb{R}^n : Au \geq 0\}$ isto é, um politopo em $\mathbb{R}^n$. Estabeleceram propriedades para o $XLCP$, e também uma condição suficiente para que todo ponto KKT do problema bilinear (BLP) acima seja uma solução do $XLCP (M, N, C)$. Gowda [12], tratou o mesmo problema estendendo os resultados de Mangasarian e Pang [15], dando algumas caracterizações do $XLCP$. Introduziu a condição de X-coluna-suficiente e X-linha-suficiente, sendo estas, extensões naturais dos conceitos Matriz-coluna suficiente e linha suficiente, condições formuladas para



o (LCP) [5], que são mais fracas que a condição de $MN^T \geq 0$ (semi definida positiva no $(O^+C)^*$), isto é $\mu^T MN^T \mu \geq 0$, para todo $\mu \in (O^+C)^*$, referida em Mangasarian e Pang [15], para a mesma reformulação. Com isto os resultados foram adaptados para as estratégias que apresentaremos nos capítulos seguintes. O resultado acima é mostrado no seguinte lema :

Lema 2.1.1. *Se $MN^T \geq 0$ no $(O^+C)^*$, então o par $\{M, N\}$ é X-linha-suficiente*

Prova :

Dado $C = \{u \in \mathbb{R}^n : Au \geq b\}$, onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, e $b \in \mathbb{R}^m$, então $O^+C = \{u \in \mathbb{R}^n : Au \geq 0\}$, e o seu dual $(O^+C)^* = \{v \in \mathbb{R}^n : v = A^T \lambda, \lambda \geq 0\}$.

Sabemos por hipótese que $0 \leq v^T MN^T v$ para todo $v \in (O^+C)^*$.

Agora, suponha que o par $\{M, N\}$ satisfaz $(M^T v)_i \cdot (N^T v)_i \leq 0$, para todo i e $v \in (O^+C)^*$, então

$$0 \leq v^T MN^T v = \sum_{i=1}^n (M^T v)_i (N^T v)_i \leq 0.$$

Isto implica que

$$\sum_{i=1}^n (M^T v)_i (N^T v)_i = 0. \quad (2.1.1)$$

Como $(M^T v)_i \cdot (N^T v)_i \leq 0$, para todo i , (2.1.1) implica que $(M^T v)_i (N^T v)_i = 0$.

Portanto $\{M, N\}$ é X-linha-suficiente. $\diamond$

A recíproca do Lema anterior não é verdadeira, como mostra o seguinte

Contra exemplo : Seja $n = 2$,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

temos : $C = \{u \in \mathbb{R}^2 : Au \geq b\} = \{u \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0\}$, então $O^+C = C$

e o seu dual $(O^+C)^* = \{v \in \mathbb{R}^2 : v = A^T \lambda, \lambda \geq 0\}$, então

$$(O^+C)^* = \{v \in \mathbb{R}^2 : v \geq 0\}.$$

Temos : $(M^T v)_1 (N^T v)_1 = -v_1 v_2 \leq 0$

$(M^T v)_2 (N^T v)_2 = -v_2^2 \leq 0 \implies v_2 = 0 \implies v_1 v_2 = 0$, isto implica que se

$(M^T v)_i \cdot (N^T v)_i \leq 0, \forall i \implies (M^T v) \cdot (N^T v) = 0 \forall i$, logo o par $\{M, N\}$ é X-linha suficiente.

Agora $MN^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, levando $v = (3, 1)$ em $(0^+C)^*$ resulta

$$v^T MN^T v = -2 < 0, \text{ então } MN^T \text{ não é semi-definida positiva em } (0^+C)^*$$

2.1.1 Equivalência com o Problema Bilinear

Mangasarian e Pang [15] provaram que se MN^T é semi-definida positiva no $(0^+C)^*$, então todo ponto estacionário de (problema bilinear):

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \langle x, y \rangle \\ &\text{sujeita a: } (x, y) \geq 0; \quad Mx - Ny \in C, \end{aligned}$$

é solução do $XLCP(M, N, C)$. Gowda [12] introduziu a propriedade de linha-suficiente para o caso do $XLCP$, como vimos na secção anterior, e caracterizou a mesma com o seguinte teorema:

Teorema 2.1.1. *Seja L uma matriz e b um vetor, o par $\{M, N\}$ é X-linha-suficiente com respeito a $C = \{u \in \mathbb{R}^m : Lu \geq b\}$, se e somente se para cada $p \in \mathbb{R}^m$, e para todo rearranjo $\{\overline{M}, \overline{N}\}$ das colunas de $\{M, N\}$, todo ponto estacionário de :*

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \langle x, y \rangle \\ &\text{sujeita a: } x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \overline{M}x - \overline{N}y \in C + p, \end{aligned}$$

é solução do $XLCP(\overline{M}, \overline{N}, C + p)$.

Prova :

$(\implies)$ Como $C = \{u \in \mathbb{R}^m : Lu \geq b\}$, então $0^+C = \{u \in \mathbb{R}^m : Lu \geq 0\}$, e o seu dual $(0^+C)^* = \{v = L^T \lambda, \lambda \geq 0\}$.

Para $\{M, N\}$ X-linha-suficiente a propriedade é invariante se trocarmos $\{M, N\}$ por qualquer rearranjo das suas colunas e C no lugar de $C + p$, então, sem perda de generalidade, podemos provar o resultado para o $XLCP(M, N, C)$.

Seja (x, y) um ponto KKT para o problema bilinear

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \langle x, y \rangle \\ &\text{sujeita a: } x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad LMx - LNy \geq b. \end{aligned}$$

Então existem vetores $r \geq 0$, $s \geq 0$ e $\lambda \geq 0$, tais que:

$$x = -N^T \lambda + s,$$

$$y = M^T \lambda + r,$$

$$\langle x, r \rangle = \langle y, s \rangle = \lambda^T (LMx - LNy - b) = 0.$$

Já que $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \geq 0$, por hipótese e pela definição de $(0^+C)^*$, isto implica que $L^T \lambda = u \in (0^+C)^*$, então $(M^T \lambda)_i \cdot (N^T \lambda)_i = (y_i - r_i) \cdot (s_i - x_i) = r_i s_i - y_i x_i \leq 0$, $\forall i$, logo $(M^T \lambda)_i (N^T \lambda)_i = -r_i s_i - y_i x_i = 0$, $\forall i$, então claramente $\langle x, y \rangle = 0$. Desta maneira (x, y) é solução do $XLCP(M, N, C)$.

($\Leftarrow$) Suponha que a propriedade de X-linha-suficiente com respeito a $C = \{u \in \mathbb{R}^m : Lu \geq b\}$, não é válida, então $\exists u \in (0^+C)^*$ e $\exists k$, tal que $(M^T u)_i (N^T u)_i \leq 0, \forall i$, e

$$(M^T u)_k (N^T u)_k < 0, \quad (2.1.2)$$

para algum k . Definimos então :

$$x^* = (N^T u)^-, \quad s^* = (N^T u)^+, \quad y^* = (M^T u)^+, \quad r^* = (M^T u)^-.$$

$$\text{Onde : } \begin{cases} (x^-)_i = x_i, & \text{se } x_i \leq 0 \\ (x^-)_i = 0, & \text{em outro caso.} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} (x^+)_i = x_i, & \text{se } x_i > 0 \\ (x^+)_i = 0, & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

Claramente $x^* = -N^T u + s^*$, $y^* = M^T u + r^*$, $\langle x^*, y^* \rangle > 0$, $\langle y^*, r^* \rangle = 0$ e $\langle x^*, s^* \rangle = 0$.

Vamos escolher um vetor p^* apropriado, tal que o par (x^*, y^*) , seja ponto KKT de :

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \langle x, y \rangle \\ &\text{sujeita a: } x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad Mx - Ny \in C + p^* \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Ou para o problema equivalente:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \langle x, y \rangle \\ &\text{sujeita a: } x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad LMx - LNy \geq b + Lp^*, \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

mas não é solução do $XLCP(M, N, C + p^*)$. Com efeito :

Definimos : $t = L(Mx^* - Ny^*) - b$,

claramente o conjunto $\{p : Lp \leq t\} \neq \emptyset$, pois $C = \{u \in \mathbb{R}^m : Lu \geq b\} \neq \emptyset$.

e $\{p : Lp \leq t\} = \{p : L(Mx^* - Ny^*) - b \geq Lp\} = \{p : L(Mx^* - Ny^* - p) \geq b\}$,

também o conjunto $\{\lambda : L^T \lambda = u, \lambda \geq 0\} \neq \emptyset$,

porque

$$u \in (0^+C)^* \implies u \in \{v : v = L^T \lambda, \lambda \geq 0\}. \quad (2.1.5)$$

Agora escrevemos os seguintes problemas :

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar } \lambda^T t & \text{maximizar } p^T u \end{array}$$

$$\text{sujeita a: } L^T \lambda = u, \lambda \geq 0 \quad \text{e} \quad \text{sujeita a: } Lp \leq t$$

dado que os conjuntos factíveis, dos problemas acima, não são vazios, então existem soluções do primal λ^* e do dual p^* tais que

$$(\lambda^*)^T t = (p^*)^T u$$

$$Lp^* \leq t,$$

e pelo teorema das folgas complementares

$$\lambda^{*T} (Lp - t) = 0, \quad (2.1.6)$$

de (2.1.5) temos que $Lp^* \leq (LMx^* - LNy^*) - b \implies LMx^* - LNy^* - Lp^* \geq b$ é factível, de (2.1.6) temos que

$$\lambda^{*T} (LMx^* - LNy^* - Lp^* - b) = 0. \quad (2.1.7)$$

e dado que $L^T \lambda = u$, obtemos

$$x^* = -N^T L^T \lambda + s^* \quad , \quad y^* = M^T L^T \lambda + r^* \quad (2.1.8)$$

$$\langle x^*, r^* \rangle = \langle y^*, s^* \rangle = 0$$

$$x^* \geq 0, y^* \geq 0, r^* \geq 0, s^* \geq 0$$

logo (2.1.7) e (2.1.8) mostram que (x^*, y^*) é um ponto KKT mas não é solução do $XLCP(M, N, C)$. $\diamond$

Outras alternativas para a resolução do $XLCP$, foram introduzidas por Solodov [20], isto é condições suficientes para que todo ponto estacionário de:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \langle x, y \rangle \\ &\text{sujeita a:} \quad G(Mx - Ny) \geq g, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

seja solução do $XLCP$. As propriedades que descrevem este problema bilinear são relatadas na seguinte proposição :

Proposição 2.1.1. *Suponha que uma das seguintes condições é satisfeita:*

- i) *A matriz $MN^T \geq 0$ no $(0^+C)^*$.*
- ii) *$M^T v \leq 0$ e $N^T v \geq 0$ para todo $v \in (0^+C)^*$.*
- iii) *$(0, 0) \in C$.*

Então todo ponto KKT de

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \langle x, y \rangle \\ &\text{sujeita a:} \quad G(Mx - Ny) \geq g, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \end{aligned}$$

é necessariamente uma solução de $XLCP$.

Prova :

Usando as condições de KKT e as variáveis de folga $t, s \in \mathbb{R}^n$, temos que:

Existe $\mu \in \mathbb{R}^k, \mu \geq 0$, tal que

- a) $0 = \langle x, t \rangle = \langle y, s \rangle$
- b) $y - \mu^T GM - t = 0 \implies y - t = \mu^T GM$
- c) $x + \mu^T GN - s = 0 \implies x - s = -\mu^T GN$
- d) $\mu^T (GMx - GNy - g) = 0$
- e) $GMx - GNy - g \geq 0$
- f) $x, y, t, s \geq 0$

Por hipótese $MN^T \geq 0$, então como $x \geq 0, y \geq 0$

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x, t \rangle - \langle y, s \rangle + \langle t, s \rangle - \langle t, s \rangle \\
 &= \langle x - s, y - t \rangle - \langle t, s \rangle \\
 &= \langle -\mu^T GN, \mu^T GM \rangle - \langle t, s \rangle \\
 &= -\langle \mu^T GN, \mu^T GM \rangle - \langle t, s \rangle \\
 &= -\langle \mu^T GNM^T, \mu^T G \rangle - \langle t, s \rangle \\
 &= -\langle MN^T (G^T \mu), \mu^T G \rangle - \langle t, s \rangle \leq 0, \text{ pois}
 \end{aligned}$$

$MN^T \geq 0$ em $(0^+C)^*$, $G^T \mu \in (0^+C)^*$ e $t \geq 0, s \geq 0$, logo $\langle x, y \rangle = 0$, portanto (x, y) é uma solução do $XLCP$.

Agora suponha que a condição (ii) é satisfeita. Temos que

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle x, y \rangle + \langle y, s \rangle = \langle x, y - M^T G^T \mu \rangle + \langle y, x + N^T G^T \mu \rangle \\
 &= 2\langle x, y \rangle - \langle x, M^T G^T \mu \rangle + \langle y, N^T G^T \mu \rangle.
 \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Como se verifica que $M^T v \leq 0$ e $N^T v \geq 0$ para todo $v \in (0^+C)^*$, segue da não negatividade de x e y que cada termo de (2.1.10) é não negativo. Portanto eles são todos nulos. Em particular, $\langle x, y \rangle = 0$ e (x, y) é solução do $XLCP$.

Finalmente, supomos a última condição (iii) satisfeita. Já que $(0, 0) \in C$, segue que $0 \geq g$. De (2.1.10) obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= 2\langle x, y \rangle - \langle Mx - Ny, G^T \mu \rangle \\ &= 2\langle x, y \rangle - \langle GMx - GNy - g, \mu \rangle - \langle g, \mu \rangle = 2\langle x, y \rangle - \langle g, \mu \rangle. \end{aligned}$$

Esta última igualdade decorre das condições de KKT. Pelo fato de que $g \leq 0$ quanto $\mu \geq 0$, os termos no lado direito desta última igualdade são não negativos. Logo $\langle x, y \rangle = 0$ e (x, y) é solução do *XLCP*. $\diamond$

A primeira condição (i) da proposição acima, foi estabelecida por Mangasarian e Pang [15]. As condições (ii) e (iii) foram introduzidas recentemente por Solodov [20]. Além disso esta proposição 2.1.1 garante que se $(0, 0) \in C$ então todos os pontos KKT do problema bilinear (BLP) são soluções do *XLCP*.

2.1.2 Equivalência com o problema de otimização com restrições simples

Andreani e Martínez [1], consideraram duas representações diferentes para o conjunto C . No primeiro caso, C é definido por um conjunto de igualdades e desigualdades. Assim podemos escrever o conjunto, sem perda de generalidade, da seguinte forma implícita :

$$C = \{(u, z) \in \mathbb{R}^{m+l} : Au - b - z = 0, \quad z = (z_1, 0), \quad z_1 \in \mathbb{R}^p, \quad z_1 \geq 0\}, \quad (2.1.11)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $b \in \mathbb{R}^l$, $z = (z_1, 0) \in \mathbb{R}^l$. O problema restrito associado ao conjunto C acima é :

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \langle x, y \rangle^2 + \rho \|AMx - ANy - b - z\|^2 \\ &\text{sujeita a:} \quad x \geq 0, y \geq 0, z_1 \geq 0, \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

onde $\rho > 0$ é uma constante qualquer foi proposto em [1]. Se (x^*, y^*, z^*) é um minimizador do problema (2.1.12), para o qual o valor da função objetivo é zero,

isto é :

$$\langle x^*, y^* \rangle^2 + \rho \|AMx^* - ANy^* - b - z^*\|^2 = 0,$$

então (x^*, y^*) é um minimizador de

$$\text{minimizar } \langle x, y \rangle^2$$

$$\text{sujeita a: } Mx - Ny \in C, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Logo temos :

$$\langle x^*, y^* \rangle^2 = 0 \implies \langle x^*, y^* \rangle = 0.$$

Então (x^*, y^*) é uma solução do $XLCP$ (1.0.1).

Contudo devido a dificuldade de achar o mínimo global, muitos algoritmos eficientes para resolver problemas restritos como (2.1.12), encontram pontos estacionários e não minimizadores globais. O que nos leva a procurar condições suficientes sob as quais os pontos estacionários do problema (2.1.12) sejam de fato soluções do $XLCP$ (1.0.1).

Andreani e Martínez [1], provaram que a condição de X-linha-suficiente introduzida por Gowda [12], para o problema bilinear de otimização (1.0.2) é também suficiente para garantir que os pontos estacionários do problema (2.1.12) sejam soluções do $XLCP$.

Além disso, provaram também o recíproco do teorema, para o caso em que o politopo é definido por um subespaço afim. Em alguns casos o politopo pode ser definido na forma paramétrica, isto é C pode ser visto como a imagem de um cone simples em $\mathbb{R}^s$, nomeadamente:

$$C = \{(w, z) \in \mathbb{R}^{m+s} : w = Lz + q, z = (z_1, z_2), z_1 \in \mathbb{R}^v, z_2 \in \mathbb{R}^{s-v}\}. \quad (2.1.13)$$

Definimos agora o seguinte problema restrito associado, que corresponde a equação (2.1.13):

$$\text{minimizar } \langle x, y \rangle^2 + \rho \|Mx - Ny - Lz - q\|^2$$

$$\text{sujeita a: } x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z_1 \geq 0. \quad (2.1.14)$$

Analogamente ao caso (2.1.11), podemos usar soluções restritas em caixa para resolver o problema (2.1.14). Consequentemente, apresentaremos também um

teorema que estabelece condições suficientes sob as quais os pontos estacionários do problema (2.1.14) são soluções do $XLCP$ (1.0.1). Precisaremos para isto de alguns resultados importantes:

Dado $C = \{u \in \mathbb{R}^n : Au \geq b\}$, então $0^+C = \{u \in \mathbb{R}^n : Au \geq 0\}$, logo $(0^+C)^* = \{v \in \mathbb{R}^n : v = A^T \lambda, \lambda \geq 0\}$.

Se $C = \{(u, z) \in \mathbb{R}^{m+l} : Au - b - z = 0, z = (z_1, 0), z_1 \in \mathbb{R}^p, z_1 \geq 0\}$, onde $A \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $b \in \mathbb{R}^l$, $z = (z_1, 0) \in \mathbb{R}^l$,

usando o raciocínio acima, temos que :

$0^+C = \{(u, \delta) \in \mathbb{R}^{m+l} : Au = \delta, \delta = (\delta_1, 0), \delta_1 \geq 0 \in \mathbb{R}^p\}$

e $(0^+C)^* = \{v \in \mathbb{R}^m / v = A^T \lambda, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2), \lambda_1 \geq 0 \in \mathbb{R}^p\}$

Se $C = \{w \in \mathbb{R}^m / w = Lz + q, z = (z_1, z_2), z_1 \in \mathbb{R}^v, z_2 \in \mathbb{R}^{s-v}\}$,

temos que : $0^+C = \{u \in \mathbb{R}^m / u = L\delta, \delta = (\delta_1, \delta_2), \delta_1 \geq 0 \in \mathbb{R}^v\}$

e $(0^+C)^* = \{v \in \mathbb{R}^m / L^T v = \lambda, \lambda = (\lambda_1, 0), \lambda_1 \geq 0 \in \mathbb{R}^v\}$.

Vamos agora enunciar alguns teoremas que facilitarão a compreensão dos resultados adaptados no capítulo 3. Teoremas provados por Andreani e Martínez [1], demonstrando que a condição de linha-suficiente [12], garante que pontos estacionários do problema de otimização equivalente (2.1.12) de C definido em (2.1.11) são soluções do $XLCP$:

Teorema 2.1.2. *Assuma que o par $\{M, N\}$ possui a propriedade de X-linha-suficiente com respeito a:*

$C = \{(u, z) \in \mathbb{R}^{m+l} : Au - b - z = 0, z = (z_1, 0), z_1 \in \mathbb{R}^p, z_1 \geq 0\}$, onde $A \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $b \in \mathbb{R}^l$, $z = (z_1, 0) \in \mathbb{R}^l$. Então para cada $f \in \mathbb{R}^m$ e para todo rearranjo $\{\overline{M}, \overline{N}\}$ das colunas de $\{M, N\}$, tal que (1.0.1), (1.0.2) e (2.1.11) é factível, todo ponto KKT de

$$\text{minimizar } \langle x, y \rangle^2 + \rho \|A\overline{M}x - A\overline{N}y - b - Af - z\|^2$$

$$\text{sujeita a: } x \geq 0, y \geq 0, z_1 \geq 0,$$

é solução do $XLCP$ $(\overline{M}, \overline{N}, C + f)$.

Prova : Como a propriedade de X-linha-suficiente é invariante sob $\{\overline{M}, \overline{N}\}$ e $C + f = \{u \in \mathbb{R}^m : Au - b - Af - z = 0, z = (z_1, 0), z_1 \in \mathbb{R}^p, z_1 \geq 0\}$.

Então sem perda de generalidade, é suficiente provar o resultado desejado para o $XLCP(M, N, C)$. Seja (x^*, y^*, z^*) um vetor KKT e $u^* = AMx^* - ANy^* - b - z^*$. Então (x^*, y^*, z^*) satisfaz as condições de primeira ordem em

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \langle x, y \rangle^2 + \rho \|AMx - ANy - b - z\|^2 \\ &\text{sujeita a:} \quad x \geq 0, y \geq 0, z_1 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Temos:

$$2\rho M^T A^T (AMx - ANy - b - z) + 2\langle x, y \rangle y - \mu_1 = 0,$$

para (x^*, y^*, z^*) vetor KKT, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= 2\rho M^T A^T (AMx^* - ANy^* - b - z^*) + 2\langle x^*, y^* \rangle y^* - \mu_1 = \\ &= 2\rho M^T A^T u^* + 2\langle x^*, y^* \rangle y^* - \mu_1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2\rho M^T (A^T u^*) + 2\langle x^*, y^* \rangle y^* - \mu_1 = 0, \quad (2.1.16)$$

Analogamente:

$$-2\rho N^T (A^T u^*) + 2\langle x^*, y^* \rangle x^* - \mu_2 = 0, \quad (2.1.17)$$

$$-2\rho [u^*]_i - [\mu_3]_i = 0, i = 1, \dots, p. \quad (2.1.18)$$

$$\langle x^*, \mu_1 \rangle = 0, \quad (2.1.19)$$

$$\langle y^*, \mu_2 \rangle = 0, \quad (2.1.20)$$

$$\langle [z_1]^*, \mu_3 \rangle = 0, \quad (2.1.21)$$

$$x^* \geq 0, y^* \geq 0, [z_1]^* \geq 0, \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \mu_3 \geq 0, \quad (2.1.22)$$

por (2.1.18), obtemos:

$$-[u^*]_i = \frac{[\mu_3]_i}{2\rho} \geq 0, i = 1, \dots, p \quad (2.1.23)$$

também por (2.1.16) e (2.1.17), obtemos :

$$\left\{ \begin{array}{l} -2\rho M^T (A^T u^*) = 2\langle x^*, y^* \rangle y^* - \mu_1 \\ -2\rho N^T (A^T u^*) = 2\langle x^*, y^* \rangle x^* + \mu_2 \end{array} \right\}$$

fazendo o produto obtemos :

$$4\rho^2 [M^T (A^T (-u^*))]_i [N^T (A^T (-u^*))]_i = -4\langle x^*, y^* \rangle^2 [y^*]_i [x^*]_i - [\mu_1]_i [\mu_2]_i \leq 0, \quad (2.1.24)$$

observe que : $2\mu_2\langle x^*, y^* \rangle y^* = 0$, pois , $\langle \mu_2, y^* \rangle = 0$. Analogamente,

$2\mu_1\langle x^*, y^* \rangle x^* = 0$, assim $A^T (-u^*) \in (O^+C)^*$.

E como $\{M, N\}$ possui X-linha-suficiente, com respeito a C , então (2.1.23) e (2.1.24) implicam que :

$$[M^T (A^T (-u^*))]_i [N^T (A^T (-u^*))]_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Assim temos:

$$-4\langle x^*, y^* \rangle^2 [y^*]_i [x^*]_i - [\mu_1]_i [\mu_2]_i = 0 \implies$$

$$-4\langle x^*, y^* \rangle^2 [y^*]_i [x^*]_i = [\mu_1]_i [\mu_2]_i \geq 0 \implies -4\langle x^*, y^* \rangle^2 [y^*]_i [x^*]_i \geq 0 \implies$$

$$4\langle x^*, y^* \rangle^2 [y^*]_i [x^*]_i \leq 0 \implies$$

$$[y^*]_i [x^*]_i = 0, \quad (2.1.25)$$

para todo $i=1, \dots, n$. Pela equação (2.1.25), nas equações (2.1.16)-(2.1.22) resta:

$$2\rho(AM)^T u^* - \mu_1 = 0, \quad (2.1.26)$$

$$-2\rho(AN)^T u^* - \mu_2 = 0, \quad (2.1.27)$$

$$-2\rho u^* - \mu_3 = 0, \quad (2.1.28)$$

$$\langle x^*, \mu_1 \rangle = 0, \quad (2.1.29)$$

$$\langle y^*, \mu_2 \rangle = 0, \quad (2.1.30)$$

$$\langle [z_1]^*, \mu_3 \rangle = 0, \quad (2.1.31)$$

$$x^* \geq 0, y^* \geq 0, [z_1]^* \geq 0, \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \mu_3 \geq 0. \quad (2.1.32)$$

Mas, estas últimas equações são as condições necessárias e suficientes verificadas para um minimizador global do seguinte problema quadrático de minimização convexa :

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \rho \|AMx - ANy - b - z\|^2 \\ &\text{sujeita a:} \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z_1 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.1.33)$$

Como o $XLCP$ é fatível, e (x^*, y^*, z^*) é um ponto KKT de (2.1.15), então :

$$\langle x^*, y^* \rangle^2 + \rho \|AMx^* - ANy^* - b - z^*\|^2 = 0.$$

Logo,

$$\rho \|AMx^* - ANy^* - b - z^*\|^2 = 0.$$

Então,

$$AMx^* - ANy^* - b - z^* = 0. \quad (2.1.34)$$

Assim (x^*, y^*, z^*) é o minimizador global de (2.1.33). Por (2.1.25) e por (2.1.34), temos que (x^*, y^*) é uma solução do $XLCP(M, N, C)$. $\diamond$

O teorema que segue é o recíproco do teorema 2.1.2, para o qual C é um subespaço afim.

Teorema 2.1.3. *Assuma que $C = \{u \in \mathbb{R}^m : Au = b\} \neq \emptyset$ e que para cada $f \in \mathbb{R}^m$ e para cada $\{\overline{M}, \overline{N}\}$, tal que $XLCP(\overline{M}, \overline{N}, C + f)$ é factível, sendo qualquer que seja o ponto estacionário de*

$$\text{minimizar } \langle x, y \rangle^2 + \rho \|A\overline{M}x - A\overline{N}y - b - Af\|^2$$

$$\text{sujeita a: } x \geq 0, y \geq 0,$$

solução do $XLCP(\overline{M}, \overline{N}, C + f)$. Então o par $\{M, N\}$ possui a propriedade X-linha-suficiente com respeito a C .

Prova : suponha que o par $\{M, N\}$ não possui a propriedade X-linha-suficiente com respeito a C . Sem perda de generalidade, podemos trocar as colunas de M_j e N_j e trabalhar com $\{\overline{M}, \overline{N}\}$. Podemos assegurar que existe $r^* \in \mathbb{R}^l$, não nulo e um índice $j \in \{1, \dots, n\}$, tal que :

$$0 \neq [M^T A^T r^*]_i \geq 0 \quad e \quad 0 \neq [M^T A^T r^*]_i \leq 0,$$

para todo $i = 1, \dots, n$, mas por suposição $[M^T r^*]_j [N^T r^*]_j < 0$, para algum j .

Definimos :

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R}^l / t = AMx - ANy, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Tomemos :

$u^* = AM\bar{x} - AN\bar{y}$ a projecção ortogonal de r^* em Ω . Note que o conjunto Ω é convexo, pois :

Seja $\lambda \in [0, 1]$ e $s \in \Omega, t \in \Omega \implies$

$$t = AMx - ANy, s = AMx - ANy, x \geq 0, y \geq 0$$

$$\begin{aligned} \lambda s + (1 - \lambda)t &= \lambda AMx - \lambda ANy + (1 - \lambda)(AMx - ANy) = \\ &= \lambda AMx - \lambda ANy + AMx - ANy - \lambda AMx + \lambda ANy = \\ &= AMx - ANy \in \Omega. \end{aligned}$$

Então pela convexidade de Ω , temos que :

$$\langle r^* - u^*, AMx - ANy - (AM\bar{x} - AN\bar{y}) \rangle \leq 0$$

para todo $x \geq 0, y \geq 0$. Portanto:

$$\begin{aligned} 0 &\geq \langle r^* - u^*, AMx - ANy - (AM\bar{x} - AN\bar{y}) \rangle = \\ &= \langle r^* - u^*, AM(x - \bar{x}) - AN(y - \bar{y}) \rangle = \\ &= \langle (M^T A^T r^* - M^T A^T u^*) [x - \bar{x}] - (N^T A^T r^* - N^T A^T u^*) [y - \bar{y}] \rangle \leq 0 \end{aligned}$$

portanto

$$\sum_{i=1}^n ([M^T A^T r^*]_i - [M^T A^T u^*]_i) [x - \bar{x}]_i - \sum_{i=1}^n ([N^T A^T r^*]_i - [N^T A^T u^*]_i) [y - \bar{y}]_i \leq 0.$$

para todo $x \geq 0, y \geq 0$. Isso implica que

$$0 \leq [M^T A^T r^*]_i \leq [M^T A^T u^*]_i, 0 \geq [N^T A^T r^*]_i \geq [N^T A^T u^*]_i \quad (2.1.35)$$

para todo $i = 1, \dots, n$, e $[M^T u^*]_j [N^T u^*]_j < 0$.

Assim: $[M^T A^T (-u^*)] \leq 0, [N^T A^T (-u^*)] \geq 0$.

Definimos: $\beta = \rho^2 \langle (N^T A^T (-u^*))^+, (M^T A^T (-u^*))^- \rangle > 0$,

$$x^* = \rho \frac{(N^T A^T (-u^*))^+}{\beta^{\frac{1}{3}}}, \quad \mu_1 = 0 \quad (2.1.36)$$

$$y^* = \rho \frac{(M^T A^T (-u^*))^-}{\beta^{\frac{1}{3}}}, \quad \mu_2 = 0 \quad (2.1.37)$$

Claramente, $\langle x^*, y^* \rangle > 0$. Pois

$$\langle x^*, y^* \rangle = \langle \rho \frac{(N^T A^T (-u^*))^+}{\beta^{\frac{1}{3}}}, \rho \frac{(M^T A^T (-u^*))^-}{\beta^{\frac{1}{3}}} \rangle =$$

$$= \frac{1}{\beta^{\frac{1}{3}}} \left(\rho^2 \langle (N^T A^T (-u^*))^+, (M^T A^T (-u^*))^- \rangle \right) = \frac{1}{\beta^{\frac{1}{3}}} (\beta) = \beta^{\frac{1}{3}} > 0.$$

Além disso

$$2\rho M^T A^T (-u^*) + 2\langle x^*, y^* \rangle y^* - \mu_1 = 0, \quad (2.1.38)$$

$$-2\rho N^T A^T (-u^*) + 2\langle x^*, y^* \rangle x^* - \mu_2 = 0, \quad (2.1.39)$$

$$\langle x^*, \mu_1 \rangle = 0, \quad (2.1.40)$$

$$\langle y^*, \mu_2 \rangle = 0 \quad (2.1.41)$$

$$x^* \geq 0, y^* \geq 0, \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \quad (2.1.42)$$

Já que C é não vazio, existe f^* satisfazendo:

$$A(Mx^* - Ny^* + M\bar{x} - N\bar{y} - f^*) = b$$

$$Af^* = AMx^* - ANy^* + u^* - b.$$

Assim,

$$AMx - ANy - Af^* = AMx - ANy + AMx^* + ANy^* - u^* + b$$

$$= AM(x - x^*) - AN(y - y^*) - u^* + b$$

$$= AM(x - x^*) - AN(y - y^*) - AM\bar{x} + AN\bar{y} + b$$

$$= AM(x - x^* - \bar{x}) - AN(y - y^* - \bar{y}) + b$$

Fazendo $\tilde{x} = x^* + \bar{x} \geq 0$, $\tilde{y} = y^* + \bar{y} \geq 0$, obtemos:

$$AMx - ANy - Af^* = AM(x - \tilde{x}) - AN(y - \tilde{y}) + b \implies$$

$$AM\tilde{x} - AN\tilde{y} - Af^* = b.$$

Assim o $XLCP(M, N, C + f^*)$ é factível. Usando as equações (2.1.32)-(2.1.38) vemos que (x^*, y^*) é um ponto estacionário de:

$$\text{minimizar } \langle x, y \rangle^2 + \rho \|AM\bar{x} - AN\bar{y} - b - Af^*\|^2$$

$$\text{sujeita a: } x \geq 0, y \geq 0$$

Contudo, vemos que (x^*, y^*) não é factível e não complementar para o problema factível $XLCP(M, N, C + f^*)$. O que completa a prova. $\diamond$

Observe que o problema restrito (2.1.12) pode ser interpretado como um simples subproblema penalizado associado a minimização de $\langle x, y \rangle^2$, sujeita à $Mx - Ny \in C$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Portanto o teorema 2.1.2 fornece uma condição suficiente simples sob a qual todo ponto KKT de qualquer subproblema deste tipo, independentemente do parâmetro de penalização, é um minimizador global do problema original restrito. Por outro lado o subproblema penalizado associado ao problema (1.0.2) e a equação (2.1.11) é :

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \phi(x, y) + \rho \|AMx - ANy - b - z\|^2 \\ &\text{sujeita a: } x \geq 0, y \geq 0, z_1 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.1.43)$$

Onde $\phi(x, y) = \langle x, y \rangle$ ou $\phi(x, y) = \frac{1}{2}(e^{x^T y} - 1)$

Contudo pontos estacionários da equação (2.1.43) não são necessariamente soluções do *XLCP* (1.0.1) sob as condições gerais do teorema 2.1.3

Por exemplo, considere o problema de complementaridade linear monótono para $n = 1$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : 1 - y = 0\}$, onde $A = 1$, $M = 0$, $N = 1$, $b = -1$. Sob estas condições o problema de otimização para $\phi(x, y) = \frac{1}{2}(e^{x^T y} - 1)$ resta :

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \frac{1}{2}(e^{x^T y} - 1) + \rho(-y + 1 - z)^2 \\ &\text{sujeita a: } x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0. \end{aligned}$$

Aplicando as condições de primeira ordem obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{y}{2}(e^{xy}) &= 0 \implies y = 0 \\ \frac{x}{2}(e^{xy}) - 2\rho(-y + 1 - z) &= 0 \implies x = 0 \\ -2\rho(-y + 1 - z) &= 0 \implies z = 1 \end{aligned}$$

contudo $x = 0, y = 0, z = 1$ é um ponto estacionário do problema acima, e para qualquer $u \in (0^+C)^*$ temos $(M^T u) \cdot (N^T u) = 0$. Logo a propriedade de linha-suficiente é satisfeita, mas $Mx - Ny \in R$ e $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 / 1 - y = 0\} \in R^2$. Desta forma, não é solução do *XLCP* sob as condições do teorema 2.1.3. Para a $\phi(x, y) = \langle x, y \rangle$, o resultado segue da mesma forma ver [1, 10]. Contudo veremos mais adiante que para estas duas funções, apesar de não satisfazerem estas

condições teóricas, foi possível a implementação computacional e apresentaram resultados numéricos satisfatórios.

Agora vamos analisar os pontos estacionários do problema de otimização definido em (2.1.14) relacionado com a definição da equação (2.1.13) de C . Deixemos recordar que um caso particular da equação (2.1.13) corresponde ao caso no qual $z \geq 0$. Este caso é conhecido como LCP generalizado. Além disso, quando a matriz L é nula, o XLCP com a definição da equação (2.1.13) é o HLCP. Assuma que $l_1, \dots, l_s \in \mathbb{R}^m$, são as colunas da matriz L de dimensão $m \times s$:

Teorema 2.1.4. *Assuma que o par $\{M, N\}$ possui a propriedade de X-linha-suficiente com respeito a*

$$C = \{(w, z) \in \mathbb{R}^{m+s} : w = Lz + q, z = (z_1, z_2), z_1 \in \mathbb{R}^v, z_1 \geq 0, z_2 \in \mathbb{R}^{s-v}\},$$

então para cada $f \in \mathbb{R}^m$ e para toda $\{\overline{M}, \overline{N}\}$, tal que XLCP $(\overline{M}, \overline{N}, C + f)$ é factível, todo ponto KKT de

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \langle x, y \rangle^2 + \rho \|Mx - Ny - Lz - q\|^2 \\ &\text{sujeita a:} \quad x \geq 0, y \geq 0, z_1 \geq 0, \end{aligned}$$

é uma solução do XLCP $(\overline{M}, \overline{N}, C + f)$.

Prova : Como a propriedade de X-linha-suficiente é invariante sob $\{\overline{M}, \overline{N}\}$ e $C + f = \{u \in \mathbb{R}^m : u = Lz + q + f, z_1 \geq 0\}$.

Então sem perda de generalidade, é suficiente provar o resultado desejado para o XLCP (M, N, C) . Seja

$$u^* = Mx^* - Ny^* - Lz^* - q \quad (2.1.44)$$

Aplicando as condições de primeira ordem em (2.1.14), temos:

$$2\rho M^T u^* + 2\langle x^*, y^* \rangle y^* - \mu_1 = 0, \quad (2.1.45)$$

$$-2\rho N^T u^* + 2\langle x^*, y^* \rangle x^* - \mu_2 = 0, \quad (2.1.46)$$

$$-2\rho \langle l_i, u^* \rangle - [\mu_3]_i = 0, i = 1, \dots, v \quad (2.1.47)$$

$$\langle l_i, \mu^* \rangle = 0, \quad (2.1.48)$$

$$\langle x^*, \mu_1 \rangle = 0, \quad (2.1.49)$$

$$\langle y^*, \mu_2 \rangle = 0, \quad (2.1.50)$$

$$\langle [z_1]^*, \mu_3 \rangle = 0, \quad (2.1.51)$$

$$x^* \geq 0, y^* \geq 0, [z_1]^* \geq 0, \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \mu_3 \geq 0, \quad (2.1.52)$$

por (2.1.47) e (2.1.48) e pela forma do O^+C no caso (2.1.13), obtemos:

$$-u^* \in (O^+C)^* \quad (2.1.53)$$

Também por (2.1.45)- (2.1.52), obtemos :

$$4\rho^2 [M^T(-u^*)]_i [N^T(-u^*)]_i = -4\langle x^*, y^* \rangle^2 [y^*]_i [x^*]_i - [\mu_1]_i [\mu_2]_i \leq 0, \quad (2.1.54)$$

Para todo $i = 1, \dots, n$, note que $2\mu_2 \langle x^*, y^* \rangle y^* = 0$, pois, $\langle \mu_2, y^* \rangle = 0$.

Analogamente, $2\mu_1 \langle x^*, y^* \rangle x^* = 0$

Como $\{M, N\}$ possui a propriedade X-linha-suficiente, com respeito a C , obtemos:

$$[y^*]_i [x^*]_i = 0 \quad (2.1.55)$$

O resultado segue usando os mesmos argumentos do teorema 2.1.2. $\diamond$

Como mencionado anteriormente, o *HLCP* é um caso particular da equação (2.1.13), que corresponde a $L = 0$. Portanto, o problema associado correspondente é

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \langle x, y \rangle^2 + \rho \|Mx - Ny - q\|^2 \\ &\text{sujeita a:} \quad x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{aligned} \quad (2.1.56)$$

Obtemos a condição suficiente dada pelo corolário que segue:

Corolário 2.1.1. *Seja (x^*, y^*) um ponto KKT da equação (2.1.56), assuma que o problema da complementaridade linear é factível e o par $\{M, N\}$ é H-linha-suficiente. Então (x^*, y^*) é uma solução do HLCP. Além disso se para todas*

as escolhas de $q \in \mathbb{R}^n$, e $\{\overline{M}, \overline{N}\}$, que façam o HLCP fatível, todo ponto estacionário do problema (2.1.56) é uma solução, então o par $\{M, N\}$ é H-linha-suficiente.

Prova : Seja $u^* = Mx^* - Ny^* - q$

Aplicando as condições de primeira ordem em (2.1.14) com $L = 0$ temos :

$$2\rho M^T u^* + 2\langle x^*, y^* \rangle y^* - \mu_1 = 0, \quad (2.1.57)$$

$$-2\rho N^T u^* + 2\langle x^*, y^* \rangle x^* - \mu_2 = 0, \quad (2.1.58)$$

$$\langle x^*, \mu_1 \rangle = 0, \quad (2.1.59)$$

$$\langle y^*, \mu_2 \rangle = 0, \quad (2.1.60)$$

$$x^* \geq 0, y^* \geq 0, \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \quad (2.1.61)$$

por (2.1.57) - (2.1.61) obtemos :

$$4\rho^2 [M^T (-u^*)]_i [N^T (-u^*)]_i = -4\langle x^*, y^* \rangle^2 [y^*]_i [x^*]_i - [\mu_1]_i [\mu_2]_i \leq 0, \quad (2.1.62)$$

para todo $i = 1, \dots, n$, Como $\{M, N\}$ possui a propriedade H-linha-suficiente, com respeito a C , obtemos :

$$[y^*]_i [x^*]_i = 0 \quad (2.1.63)$$

Nas equações (2.1.57)-(2.1.61) resta :

$$2\rho M^T u^* - \mu_1 = 0, \quad (2.1.64)$$

$$-2\rho N^T u^* - \mu_2 = 0 \quad (2.1.65)$$

$$\langle x^*, \mu_1 \rangle = 0, \quad (2.1.66)$$

$$\langle y^*, \mu_2 \rangle = 0, \quad (2.1.67)$$

$$x^* \geq 0, y^* \geq 0, \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \quad (2.1.68)$$

que são as condições necessárias e suficientes verificadas para o minimizador global do seguinte problema quadrático convexo :

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \rho \|Mx - Ny - q\|^2 \\ &\text{sujeita a: } x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{aligned} \quad (2.1.69)$$

Já que o *HLCP* é factível e pelo fato de que (x^*, y^*) é um vetor KKT de (2.1.56), isto implica que

$$\rho \|Mx^* - Ny^* - q\|^2 = 0 \implies \rho \|Mx^* - Ny^* - q\| = 0$$

Assim (x^*, y^*) é o minimizador global com valor zero da função objetivo da equação (2.1.69). Portanto (x^*, y^*) é uma solução do *HLCP* tendo em conta (2.1.63). $\diamond$

Concluimos que resolver o *XLCP* usando o problema (1.0.2), envolve um problema de programação quadrática, enquanto que usando os problemas (2.1.12) ou (2.1.14), requer a minimização de uma função com restrições não negativas. Sob o ponto de vista da minimização global, o problema (1.0.2), pode ser reduzido à minimização de uma quadrática com restrições não negativas. Contudo, as condições sob as quais pontos KKT deste problema são minimizadores globais, são mais fortes do que as condições sob as quais pontos KKT do problema (1.0.2), são soluções do *XLCP*. Por outro lado, as condições que garantem que pontos KKT do problema (1.0.2), são soluções globais, também garantem que pontos KKT da reformulação quadrática solucionam o *XLCP*.

Capítulo 3

Reformulação como problema de otimização sem restrições

Neste capítulo adaptaremos os resultados obtidos por Andreani e Martínez [1], para as duas definições do conjunto C , usando na função objetivo a função de Fischer-Burmeister penalizada [4, 11]. É claro que os resultados obtidos com a função de F-B penalizada se estendem para a função de F-B quando $\mu = 0$.

Consideraremos neste capítulo os seguintes problemas de otimização:

$$\text{minimizar } \phi(x, y) + \rho \|AMx - ANy - b - z\|^2$$

$$\text{sujeita a: } x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z_1 \geq 0.$$

e

$$\text{minimizar } \phi(x, y) + \rho \|Mx - Ny - Lz - q\|^2$$

$$\text{sujeita a: } x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z_1 \geq 0.$$

Como vimos no capítulo anterior podemos usar como estratégia, na função objetivo, a seguinte função de complementaridade $\phi_2(x, y) = (x^T y)^2$, que foi uma proposta de Andreani e Martínez [1] e também vimos que os mesmos resultados não podem ser adaptados para $\phi_1(x, y) = (x^T y)$ e $\phi_5(x, y) = \frac{1}{2}(e^{x^T y} - 1)$, observe que esta última função é uma proposta nossa. Embora que estas duas estratégias não satisfazem certos aspectos teóricos, os seus resultados computacionais, que mostraremos no capítulo seguinte, são satisfatórios.



Vamos aqui, de maneira mais detalhada adaptar os mesmos resultados do capítulo anterior para o *XLCP*, usando para isto duas estratégias que podem ser aplicadas aos problemas de otimização acima. Uma das propostas para a resolução dos *XLCP* acima é usar como função de complementaridade a função de Fischer-Burmeister, esta função foi introduzida por Fischer [11], que é assim definida :

$$\phi_{FB}(x, y) = x + y - \sqrt{x^2 + y^2},$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ Esta função foi introduzida no sentido de caracterizar as condições KKT para programação não linear (NCP) e problemas de complementaridade linear como sistemas de equações. Aqui nós estamos interessados, meramente, nesta função definida da seguinte forma:

$$\phi_{FB}(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (-\sqrt{x_i^2 + y_i^2} + x_i + y_i)^2,$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n$. Uma outra alternativa baseada nesta função é a função de Fischer-Burmeister penalizada ($F - B_p$), introduzida por Chen, Chen e Kanzow [4]. Esta nova função - NCP possui todas as propriedades da função de F-B para convergência local, e sua definição é dada como segue:

$$\phi_{FBP}(x, y) = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i - \sqrt{x_i^2 + y_i^2} + \mu (x_i)_+ (y_i)_+)^2.$$

Onde $a_+ = \max(a, 0)$. Como os resultados obtidos através desta função para os casos NCP são excelentes, então resolvemos adaptá-la para o caso linear estendido, levando em consideração que para $\mu = 0$ esta função resulta na função de F-B.

Antes de adaptarmos os resultados do capítulo anterior, para a função de Fischer-Burmeister penalizada, estabeleceremos algumas propriedades características desta função :

3.1 Propriedades da função de Fischer-Burmeister

Para adaptar a função de Fischer-Burmeister penalizada (*NCP*), para o caso *XLCP*, provaremos que esta função mantém as mesmas propriedades teóricas e no capítulo 4 vamos mostrar que apresenta resultados computacionais expressivos. Com efeito mostraremos então que esta função satisfaz as propriedades que enunciaremos a seguir :

$$\text{I. } \phi(x, y) \geq 0, \forall x \geq 0, y \geq 0 ; \text{ além disso } \phi(x, y) = 0 \iff \langle x, y \rangle = 0, \\ \forall x \geq 0, y \geq 0.$$

$$\text{II. } \phi(x, y) = 0 \iff \nabla \phi(x, y) = 0 \iff \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = 0 \iff \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = 0.$$

$$\text{III. } x \geq 0, y \geq 0, \langle \nabla_x \phi(x, y), \nabla_y \phi(x, y) \rangle \leq 0 \implies \phi(x, y) = 0$$

$$\text{IV. } x_i = 0, y_i \geq 0 \implies [\nabla_y \phi(x, y)]_i = 0$$

e

$$y_i = 0, x_i \geq 0 \implies [\nabla_x \phi(x, y)]_i = 0$$

$$\text{V. } \langle x, \nabla_x \phi(x, y) \rangle + \langle y, \nabla_y \phi(x, y) \rangle = c\phi(x, y), c > 0$$

$$\text{VI. } \langle \nabla_x \phi(x, y), \nabla_y \phi(x, y) \rangle \geq 0, \text{ para todo } x \geq 0, y \geq 0.$$

Provaremos agora estas propriedades para a função de Fischer penalizada. Com efeito:

$$\text{I. Por simples inspeção da função, } \phi_P(x, y), \text{ temos que } \phi_{FBP}(x, y) \geq 0 .$$

por outro lado se $\phi_{FBP}(x, y) = 0$, então

$$\text{a) se } x = y = 0, \text{ claramente } \langle x, y \rangle = 0$$

$$\text{b) Se } (x, y) \neq (0, 0), \text{ então}$$

$$\phi_{FBP}(x, y) = (-\sqrt{x^2 + y^2} + x + y + \mu(x)_+(y)_+)^2 = 0 \iff$$

$$\begin{aligned}
 -\sqrt{x^2 + y^2} + x + y + \mu(x)_+(y)_+ &= 0 \iff \\
 -\sqrt{x^2 + y^2} + x + y &= -\mu(x)_+(y)_+. \quad (3.1.1)
 \end{aligned}$$

Se $x < 0$ então (3.1.1) não se verifica, e dado que :

$$-\sqrt{x^2 + y^2} + |x| + y = -\sqrt{x^2 + y^2} - |x| + y < 0$$

e $-\mu(x)_+(y)_+ = 0$, então $x \geq 0$, com o mesmo critério $y \geq 0$,
agora se $x \geq 0$ e $y \geq 0$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \geq x + y \implies x^2 + y^2 \geq x^2 + 2xy + y^2$$

$$\iff 2xy \leq 0 \iff x = 0 \text{ ou } y = 0 \implies \langle x, y \rangle = 0. \forall x \geq 0, y \geq 0.$$

II. Se $x = y = 0$ segue o resultado para $\phi_{FBP}(x, y)$. Se $(x, y) \neq (0, 0)$, é suficiente mostrar que $\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial y}(x, y) = 0 \implies \phi_{FBP}(x, y) = 0$, já que se $\phi_{FBP}(x, y) = 0$, então todas as igualdades são satisfeitas, com efeito :

seja $\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial x}(x, y) = 0$ e $\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial y}(x, y) = 0$, então respectivamente temos:

$$2 \left(-\sqrt{x^2 + y^2} + x + y + \mu(x)_+(y)_+ \right) \left(\frac{x}{-\sqrt{x^2 + y^2}} + 1 + \mu \partial(x)_+(y)_+ \right) = 0;$$

$$2 \left(-\sqrt{x^2 + y^2} + x + y + \mu(x)_+(y)_+ \right) \left(\frac{y}{-\sqrt{x^2 + y^2}} + 1 + \mu(x)_+ \partial(y)_+ \right) = 0;$$

Se $\left(-\sqrt{x^2 + y^2} + x + y + \mu(x)_+(y)_+ \right) = 0$, a propriedade se verifica

Agora assumamos que $\left(\frac{x}{-\sqrt{x^2 + y^2}} + 1 + \mu \partial(x)_+(y)_+ \right) = 0$,

como $\mu \partial(x)_+(y)_+ \geq 0$, temos que $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \geq 0 \iff$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \geq 1 \iff x \geq \sqrt{x^2 + y^2} \iff x^2 \geq x^2 + y^2 \iff y = 0 \iff \phi_P(x, y) = 0,$$

III. $x \geq 0, y \geq 0, \langle \nabla_x \phi(x, y), \nabla_y \phi(x, y) \rangle \leq 0 \implies$

$$4\phi_{FBP}(x, y) \left(\frac{x}{-\sqrt{x^2+y^2}} + 1 + \mu\partial(x)_+(y)_+ \right) \left(\frac{y}{-\sqrt{x^2+y^2}} + 1 + \mu(x)_+\partial(y)_+ \right) \leq 0$$

$$\iff \left(\frac{x}{-\sqrt{x^2+y^2}} + 1 + \mu\partial(x)_+(y)_+ \right) \leq 0, \text{ ou } \left(\frac{y}{-\sqrt{x^2+y^2}} + 1 + \mu(x)_+\partial(y)_+ \right) \leq 0.$$

Assuma sem perda de generalidade que

$$\left(\frac{x}{-\sqrt{x^2+y^2}} + 1 + \mu\partial(x)_+(y)_+ \right) \leq 0 \implies \left(\frac{y}{-\sqrt{x^2+y^2}} + 1 + \mu(x)_+\partial(y)_+ \right) \geq 0,$$

$$\text{como } \mu(x)_+\partial(y)_+ \geq 0 \implies \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1 \geq 0 \implies \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \geq 1 \implies x \geq \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\implies y = 0 \implies \phi_{FBP}(x, y) = 0.$$

$$\text{IV. } x_i = 0, y_i \geq 0 \implies [\nabla_y \phi_{FBP}(x, y)]_i = \left[2(y - y + 0) \left(\frac{y}{y} - 1 + 0 \right) \right] = 0,$$

$$\text{e segue o mesmo resultado para } y_i = 0, x_i \geq 0 \implies [\nabla_x \phi_{FBP}(x, y)]_i = 0,$$

$$\text{V. } \langle x, \nabla_x \phi(x, y) \rangle + \langle y, \nabla_y \phi(x, y) \rangle = c\phi(x, y), \quad c > 0.$$

Se $x = y = 0$, o resultado segue trivialmente. Se $(x, y) \neq (0, 0)$, então podemos escrever $\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial y}(x, y)$ respectivamente

$$2 \left(-\sqrt{x^2+y^2} + x + y + \mu(x)_+(y)_+ \right) \left(\frac{x}{-\sqrt{x^2+y^2}} + 1 + \mu\partial(x)_+(y)_+ \right)$$

$$2 \left(-\sqrt{x^2+y^2} + x + y + \mu(x)_+(y)_+ \right) \left(\frac{y}{-\sqrt{x^2+y^2}} + 1 + \mu(x)_+\partial(y)_+ \right)$$

$$\text{Para a função } \phi_{FBP}(x, y), \text{ temos: } x \frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial y}(x, y) =$$

$$= 2 \left(-\sqrt{x^2+y^2} + x + y + \mu(x)_+(y)_+ \right) *$$

$$\left(\frac{x^2}{-\sqrt{x^2+y^2}} + x + \mu\partial(x)_+(y)_+(x) + \frac{y^2}{-\sqrt{x^2+y^2}} + y + \mu(x)_+\partial(y)_+(y) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left(-\sqrt{x^2 + y^2} + x + y + \mu(x)_+(y)_+ \right) \left(\frac{x^2 + y^2}{-\sqrt{x^2 + y^2}} + x + y + \mu(x)_+(y)_+ \right) = \\
&= 2 \left(-\sqrt{x^2 + y^2} + x + y + \mu(x)_+(y)_+ \right) \left(-\sqrt{x^2 + y^2} + x + y + \mu(x)_+(y)_+ \right) = \\
&2\phi_{FBP}(x, y).
\end{aligned}$$

VI. Para $\phi_{FBP}(x, y)$ temos $\langle \nabla_x \phi_{FBP}(x, y), \nabla_y \phi_{FBP}(x, y) \rangle =$

$$\left(4\phi_{FBP}(x, y) \left(\frac{x}{-\sqrt{x^2 + y^2}} + 1 + \mu\partial(x)_+(y)_+ \right) \left(\frac{y}{-\sqrt{x^2 + y^2}} + 1 + \partial(y)_+(x)_+ \right) \right)$$

Pela propriedade I resta provar que

$$\left(\frac{x}{-\sqrt{x^2 + y^2}} + 1 + \mu\partial(x)_+(y)_+ \right) \left(\frac{y}{-\sqrt{x^2 + y^2}} + 1 + \partial(y)_+(x)_+ \right) \geq 0$$

observe que

$$\frac{x}{-\sqrt{x^2 + y^2}} < 1, \quad \frac{y}{-\sqrt{x^2 + y^2}} < 1, \quad \mu\partial(y)_+(x)_+ \geq 0, \quad \text{logo a propriedade se verifica.}$$

3.2 Teoremas de equivalência

Nesta secção vamos enunciar e provar três teoremas que são uma adaptação dos resultados de Andreani e Martínez [1], usando para isto a função F-B penalizada, onde as variáveis x e y são livres,

$$\phi_{FBP}(x, y) = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i - \sqrt{x_i^2 + y_i^2} + \mu(x_i)_+(y_i)_+)^2.$$

Teorema 3.2.1. *Assuma que o par $\{M, N\}$ é X -linha-suficiente com respeito a*

$$C = \{(u, z) \in \mathbb{R}^{m+l} : Au - b - z = 0, \quad z = (z_1, 0), \quad z_1 \in \mathbb{R}^p, \quad z_1 \geq 0\},$$

se e somente se para cada $f \in \mathbb{R}^m$, e para todo rearranjo $\{\overline{M}, \overline{N}\}$ das colunas

de $\{M, N\}$, tais que os problemas (1.0.1)-(1.0.3) são factíveis, todo ponto estacionário de

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \phi_{FBP}(x, y) + \rho \|A\overline{M}x - A\overline{N}y - b - Af - z\|^2 \\ &\text{sujeita a: } z_1 \geq 0, \end{aligned}$$

é solução do $XLCP(\overline{M}, \overline{N}, C + f)$.

Prova : Já que a propriedade X-linha-suficiente é invariante sob $\{\overline{M}, \overline{N}\}$ e $C + f = \{(u, z) \in \mathbb{R}^{m+l} : Au - b - Af - z = 0, \quad z = (z_1, 0), \quad z_1 \geq 0\}$, sem perda de generalidade é suficiente provar o resultado desejado para o $XLCP(M, N, C)$. Seja $u^* = AMx^* - ANy^* - b - z^*$, aplicando as condições de primeira ordem em

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \phi_{FBP}(x, y) + \rho \|AMx - ANy - b - z\|^2 \\ &\text{sujeita a: } z_1 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

temos,

$$2\rho M^T(A^T u^*) + \frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial x}(x^*, y^*) = 0 \quad (3.2.3)$$

$$-2\rho N^T(A^T u^*) + \frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial y}(x^*, y^*) = 0 \quad (3.2.4)$$

$$-2\rho [u^*]_i - [\mu_1]_i = 0, i = 1, \dots, p \quad (3.2.5)$$

$$\langle [z_1]^*, \mu_1 \rangle = 0 \quad (3.2.6)$$

$$[z_1]^* \geq 0, \mu_1 \geq 0, \quad (3.2.7)$$

por (3.2.3)-(3.2.7), obtemos,

$$-[u^*]_i = \frac{[\mu_1]_i}{2\rho} \geq 0, i = 1, \dots, p \quad (3.2.8)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} -2\rho M^T(A^T u^*) = \frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial x}(x^*, y^*) \\ -2\rho N^T(A^T u^*) = -\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial y}(x^*, y^*) \end{array} \right\}$$



o produto obtido é : $4\rho^2 [M^T (A^T (-u^*))]_i [N^T (A^T (-u^*))]_i =$

$$= - \left[\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial x} (x^*, y^*) \right]_i \left[\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial y} (x^*, y^*) \right]_i \leq 0. \quad (3.2.9)$$

Para todo $i = 1, \dots, n$. Assim $A^T (-u^*) \in (O^+C)^*$, pela própria definição de O^+C , para este caso e como $\{M, N\}$ possui a propriedade de X-linha-suficiente, com respeito a C , então (3.2.8) e (3.2.9) implicam que,

$$[M^T (A^T (-u^*))]_i [N^T (A^T (-u^*))]_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Assim temos $-\left[\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial x} (x^*, y^*) \right]_i \left[\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial y} (x^*, y^*) \right]_i = 0, \quad 1, \dots, n.$

Logo $\left[\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial x} (x^*, y^*) \right]_i \left[\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial y} (x^*, y^*) \right]_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$

Pela propriedade II obtemos : $\left[\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial x} (x^*, y^*) \right]_i = \left[\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial y} (x^*, y^*) \right]_i = 0$, assim

$$\phi_{FBP} (x^*, y^*) = 0 \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2.10)$$

Deste modo pelas equações (3.2.3)-(3.2.7), resta :

$$2\rho(AM)^T u^* = 0, \quad (3.2.11)$$

$$-2\rho(AN)^T u^* = 0, \quad (3.2.12)$$

$$-2\rho u^* - \mu_1 = 0, \quad (3.2.13)$$

$$\langle [z_1]^*, \mu_1 \rangle = 0, \quad (3.2.14)$$

$$[z_1]^* \geq 0, \mu_1 \geq 0. \quad (3.2.15)$$

Mas, estas últimas equações são as condições necessárias e suficientes verificadas pelo minimizador global do seguinte problema quadrático de minimização convexa:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \rho \|AMx - ANy - b - z\|^2 \\ &\text{sujeita a:} \quad z_1 \geq 0, \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

como o $XLCP$ é factível, e como (x^*, y^*, z^*) é um KKT de (3.2.2), então

$$\phi_{FBP}(x^*, y^*) + \rho \|AMx^* - ANy^* - b - z^*\|^2 = 0 \implies$$

$$\rho \|AMx^* - ANy^* - b - z^*\|^2 = 0 \implies \rho \|AMx^* - ANy^* - b - z^*\| = 0 \implies$$

$$AMx^* - ANy^* - b - z^* = 0 \quad (3.2.17)$$

Então (x^*, y^*, z^*) é solução global de (3.2.16). Por (3.2.10) e por (3.2.17), temos que (x^*, y^*) é uma solução do $XLCP(M, N, C)$. $\diamond$

Provaremos agora a recíproca do teorema 3.2.1 usando para isso o fato de C ser um subespaço afim e neste caso sem nenhuma restrição:

Teorema 3.2.2. *Assuma que $C = \{u \in \mathbb{R}^m / Au = b\} \neq \emptyset$ e que para cada $f \in \mathbb{R}^m$ e todo rearranjo de $\{\overline{M}, \overline{N}\}$ das colunas de $\{M, N\}$ tais que o $XLCP(\overline{M}, \overline{N}, C + f)$ é factível, todo ponto estacionário de*

$$\text{minimizar } \phi_{FBP}(x, y) + \rho \|A\overline{M}x - A\overline{N}y - b - Af\|^2,$$

é solução do $XLCP(\overline{M}, \overline{N}, C + f)$. Então o par $\{M, N\}$ possui a propriedade de linha-suficiente estendida com respeito a C .

prova : suponha que o par $\{M, N\}$ não possui a propriedade X-linha-suficiente com respeito a C . Sem perda de generalidade, podemos trocar as colunas de M_j e N_j e trabalhar com $\{\overline{M}, \overline{N}\}$. podemos assegurar que existe $r^* \in \mathbb{R}^l$, não nulo e um índice $j \in \{1, \dots, n\}$, tal que :

$$0 \neq [M^T A^T r^*]_i \geq 0 \quad \text{e} \quad 0 \neq [M^T A^T r^*]_i \leq 0,$$

para todo $i = 1, \dots, n$, mas por suposição $[M^T r^*]_j [N^T r^*]_j < 0$, para algum j .

Definimos : $\Omega = \{t \in \mathbb{R}^l : t = AMx - ANy, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Tomemos : $u^* = A\overline{M}\overline{x} - A\overline{N}\overline{y}$

a projecção ortogonal de r^* em Ω . Note que o conjunto Ω é convexo, pois se $\lambda \in [0, 1]$ e $s \in \Omega, t \in \Omega \implies t = AMx - ANy, s = AMx - ANy, x \geq 0, y \geq 0$

$$\lambda s + (1 - \lambda)t = \lambda AMx - \lambda ANy + (1 - \lambda)(AMx - ANy) =$$

$$= \lambda AMx - \lambda ANy + AMx - ANy - \lambda AMx + \lambda ANy =$$

$$= AMx - ANy \in \Omega.$$

Observe que a convexidade aqui é válida para qualquer x, y , então pela convexidade de Ω , temos que :

$$\langle r^* - u^*, AMx - ANy - (AM\bar{x} - AN\bar{y}) \rangle \leq 0 \text{ para todo } x, y$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \langle r^* - u^*, AMx - ANy - (AM\bar{x} - AN\bar{y}) \rangle = \\ &= \langle r^* - u^*, AM(x - \bar{x}) - AN(y - \bar{y}) \rangle = \\ &= \langle (M^T A^T r^* - M^T A^T u^*) [x - \bar{x}] - (N^T A^T r^* - N^T A^T u^*) [y - \bar{y}] \rangle \leq 0, \end{aligned}$$

portanto

$$\sum_{i=1}^n ([M^T A^T r^*]_i - [M^T A^T u^*]_i) [x - \bar{x}]_i - \sum_{i=1}^n ([N^T A^T r^*]_i - [N^T A^T u^*]_i) [y - \bar{y}]_i \leq 0.$$

para todo x, y . Isto implica que

$$0 \leq [M^T A^T r^*]_i \leq [M^T A^T u^*]_i, 0 \geq [N^T A^T r^*]_i \geq [N^T A^T u^*]_i \quad (3.2.18)$$

para todo $i = 1, \dots, n$ e $[M^T u^*]_j [N^T u^*]_j < 0$.

Assim, $[M^T A^T (-u^*)] \leq 0$, $[N^T A^T (-u^*)] \geq 0$.

Definimos, $\beta = \rho^2 \langle (N^T A^T (-u^*))^+, (M^T A^T (-u^*))^- \rangle > 0$,

$$x^* = \rho \frac{(N^T A^T (-u^*))^+}{\beta^{\frac{1}{3}}} \quad (3.2.19)$$

$$y^* = \rho \frac{(M^T A^T (-u^*))^-}{\beta^{\frac{1}{3}}} \quad (3.2.20)$$

Claramente $\phi_{FBP}(x^*, y^*) > 0$, pela sua própria definição e porque

$$\langle x^*, y^* \rangle = \langle \rho \frac{(N^T A^T (-u^*))^+}{\beta^{\frac{1}{3}}}, \rho \frac{(M^T A^T (-u^*))^-}{\beta^{\frac{1}{3}}} \rangle =$$

$$= \frac{1}{\beta^{\frac{2}{3}}} \left(\rho^2 \langle (N^T A^T (-u^*))^+, (M^T A^T (-u^*))^- \rangle \right) =$$

$$= \frac{1}{\beta^{\frac{2}{3}}} (\beta) = \beta^{\frac{1}{3}} > 0 \implies (x^*) \neq 0 \neq (y^*)$$

Além disso

$$2\rho M^T A^T (-u^*) + \frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial x}(x^*, y^*) = 0, \quad (3.2.21)$$

$$-2\rho N^T A^T(-u^*) + \frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial y}(x^*, y^*) = 0, \quad (3.2.22)$$

já que C é não vazio, existe f^* satisfazendo : $A(Mx^* - Ny^* + M\bar{x} - N\bar{y} - f^*) = b$

$Af^* = AMx^* - ANy^* + u^* - b$. Assim,

$$AMx - ANy - Af^* = AMx - ANy + AMx^* + ANy^* - u^* + b$$

$$= AM(x - x^*) - AN(y - y^*) - u^* + b$$

$$= AM(x - x^*) - AN(y - y^*) - AM\bar{x} + AN\bar{y} + b$$

$$= AM(x - x^* - \bar{x}) - AN(y - y^* - \bar{y}) + b,$$

fazendo $\tilde{x} = x^* + \bar{x} \geq 0$, $\tilde{y} = y^* + \bar{y} \geq 0$, obtemos:

$$AMx - ANy - Af^* = AM(x - \tilde{x}) - AN(y - \tilde{y}) + b \implies AM\tilde{x} - AN\tilde{y} - Af^* = b.$$

Assim o $XLCP(M, N, C + f^*)$ é factível. Usando as equações (3.2.19)-(3.2.22)

vemos que : (x^*, y^*) é um ponto estacionário de:

$$\text{minimizar } \phi_{FBP}(x, y) + \rho \|AM\bar{x} - AN\bar{y} - b - Af^*\|^2$$

Contudo, vemos que (x^*, y^*) não é factível e não satisfaz a condição de complementaridade para o problema factível $XLCP(M, N, C + f^*)$. O que completa a prova. $\diamond$

Para o teorema que apresentaremos agora usaremos a segunda definição do conjunto C (2.1.13), sugerida por Andreani e Martínez [1], observando que quando a matriz L é nula, o $XLCP$, com a definição da equação (2.1.13), é o $HLCP$.

Teorema 3.2.3. *Assuma que o par $\{M, N\}$ possui a propriedade de X -linha-suficiente com respeito a*

$$C = \{(w, z) \in \mathbb{R}^{m+s} : w = Lz + q, \quad z = (z_1, z_2), \quad z_1 \in \mathbb{R}^v, \quad z_1 \geq 0, \quad z_2 \in \mathbb{R}^{s-v}\},$$

então para cada $f \in \mathbb{R}^m$ e para toda $\{\bar{M}, \bar{N}\}$, tal que $XLCP(\bar{M}, \bar{N}, C + f)$ é factível, todo ponto KKT de

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \phi_{FBP}(x, y) + \rho \|Mx - Ny - Lz - q\|^2 \\ &\text{sujeita a: } z_1 \geq 0, \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

é uma solução do $XLCP(\bar{M}, \bar{N}, C + f)$.

Prova : Como a propriedade de X-linha-suficiente é invariante sob $\{\overline{M}, \overline{N}\}$ e $C + f = \{u \in \mathbb{R}^m : u = Lz + q + f, z_1 \geq 0\}$. Então sem perda de generalidade, é suficiente provar o resultado desejado para o $XLCP(M, N, C)$. Seja

$$u^* = Mx^* - Ny^* - Lz^* - q \quad (3.2.24)$$

Aplicando as condições de primeira ordem em (3.2.23) Temos:

$$2\rho M^T u^* + \left[\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial x}(x^*, y^*) \right] = 0, \quad (3.2.25)$$

$$-2\rho N^T u^* + \left[\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial y}(x^*, y^*) \right] = 0, \quad (3.2.26)$$

$$-2\rho \langle l_i, u^* \rangle - [\mu_1]_i = 0, i = 1, \dots, v, \quad (3.2.27)$$

$$\langle l_i, \mu^* \rangle = 0, \quad (3.2.28)$$

$$\langle [z_1]^*, \mu_1 \rangle = 0, \quad (3.2.29)$$

$$[z_1]^* \geq 0, \mu_1 \geq 0, \quad (3.2.30)$$

por (3.2.27) e (3.2.28) e pela definição do O^+C no caso (2.1.13), obtemos,

$$-u^* \in (O^+C)^* \quad (3.2.31)$$

por (3.2.25) - (3.2.30), obtemos,

$$4\rho^2 [M^T(-u^*)]_i [N^T(-u^*)]_i = - \left[\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial x}(x^*, y^*) \right]_i \left[\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial y}(x^*, y^*) \right]_i \leq 0, \quad (3.2.32)$$

para todo $i = 1, \dots, n$, Como $\{M, N\}$ possui X-linha-suficiente, com respeito a C ,

obtemos, $[M^T(-u^*)]_i [N^T(-u^*)]_i = 0$.

$$\text{Assim } \left[\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial x}(x^*, y^*) \right]_i \left[\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial y}(x^*, y^*) \right]_i = 0$$

e pela propriedade II segue o resultado usando os mesmos argumentos do teorema 3.2.1. $\diamond$

Provaremos o teorema acima para o caso em que $L = 0$ que corresponde ao *HLCP*, principal objetivo dos nossos experimentos computacionais, onde o problema de otimização equivalente associado é:

$$\text{minimizar } \phi_{FBP}(x, y) + \rho \|Mx - Ny - q\|^2 \quad (3.2.33)$$

Corolário 3.2.1. *Seja (x^*, y^*) um ponto estacionário da equação (3.2.33), assumamos que o problema da complementaridade linear é factível e o par $\{M, N\}$ é H-linha-suficiente. Então (x^*, y^*) é uma solução do HLCP. Além disso se para todas as escolhas de $q \in \mathbb{R}^n$, e $\{\bar{M}, \bar{N}\}$, que façam o HLCP factível, todo ponto estacionário da equação (3.2.33) é uma solução, então o par $\{M, N\}$ é H-linha-suficiente.*

De fato, seja $u^* = Mx^* - Ny^* - q$, aplicando as condições de primeira ordem em (3.2.33) com $L = 0$ temos,

$$2\rho M^T u^* + \left[\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial x}(x^*, y^*) \right] = 0, \quad (3.2.34)$$

$$-2\rho N^T u^* + \left[\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial y}(x^*, y^*) \right] = 0, \quad (3.2.35)$$

por (3.2.34) - (3.2.35) obtemos,

$$4\rho^2 [M^T (-u^*)]_i [N^T (-u^*)]_i = - \left[\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial x}(x^*, y^*) \right] \left[\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial y}(x^*, y^*) \right] \leq 0, \quad (3.2.36)$$

para todo $i = 1, \dots, n$, como $\{M, N\}$ possui a propriedade H-linha-suficiente, com respeito a C , usando a propriedade III e os mesmos argumentos do teorema anterior obtemos:

$$[\phi_{FBP}(x^*, y^*)]_i = 0 \implies \left[\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial x}(x^*, y^*) \right] = \left[\frac{\partial \phi_{FBP}}{\partial y}(x^*, y^*) \right] = 0. \quad (3.2.37)$$

Nas equações (3.2.34)-(3.2.35) resta :

$$2\rho M^T u^* = 0, \quad (3.2.38)$$

$$-2\rho N^T u^* = 0, \quad (3.2.39)$$

que são as condições necessárias e suficientes que verificam um minimizador global do seguinte problema quadrático convexo :

$$\text{minimizar } \rho \|Mx - Ny - q\|^2, \quad (3.2.40)$$

como o *HLCP* é factível e pelo fato de que (x^*, y^*) é um vetor KKT de (3.2.33), temos que

$$\rho \|Mx^* - Ny^* - q\|^2 = 0 \implies \rho \|Mx^* - Ny^* - q\| = 0.$$

Assim, (x^*, y^*) é o minimizador global com valor zero da função objetivo do problema (3.2.40). Portanto, (x^*, y^*) é uma solução do *HLCP* tendo em conta (3.2.37). $\diamond$

Feita esta abordagem teórica, estamos agora em condições de mostrar que além da função de Fischer-Burmeister penalizada ser bem sucedida na adaptação natural dos resultados teóricos, ela também possui uma excelente performance nos resultados numéricos para o caso *XLCP*, o que comprova as nossas suspeitas, motivadas pelos bons resultados para o caso *NCP* [4]. Por outro lado, apesar das funções $\phi_1(x, y) = \langle x, y \rangle$ e $\phi_5(x, y) = \frac{1}{2}(e^{\langle x, y \rangle} - 1)$, não satisfazerem as propriedades teóricas acima, como é o caso da função de Fischer-Burmeister penalizada, mostraremos no capítulo seguinte que elas apresentam, ainda assim, bons resultados numéricos.

Capítulo 4

Resultados Numéricos e Conclusões

4.1 Implementação Computacional

Neste capítulo apresentaremos os resultados numéricos de um estudo feito para comparar o desempenho computacional das cinco estratégias propostas nos capítulos anteriores para o caso *HLCP*. Isto é testamos a eficiência das seguintes funções :

$$\phi_1(x, y) = \langle x, y \rangle$$

$$\phi_2(x, y) = \frac{1}{2} \langle x, y \rangle^2$$

$$\phi_{FB}(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(-\sqrt{x_i^2 + y_i^2} + x_i + y_i \right)^2$$

$$\phi_{FBP}(x, y) = \sum_{i=1}^n \left(-\sqrt{x_i^2 + y_i^2} + x_i + y_i + \mu (x_i)_+ (y_i)_+ \right)^2$$

onde $a_+ = \max(a, 0)$.

$$\phi_e(x, y) = \frac{1}{2} (e^{\langle x, y \rangle} - 1),$$

esta última função foi usada para podermos verificar o que realmente acontece quando a função mínimo penaliza o fato de $\langle x, y \rangle \neq 0$. A nossa função objetivo é não negativa para todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, tal que $x, y \geq 0$.

Para todos os experimentos foi usado o software **EASY**, codificado em **Fortran**, para resolver problemas de otimização linear e não linear, desenvolvido



pelo Departamento de Matemática Aplicada da UNICAMP, ver [9, 10, 13, 16], usando para isto o ambiente **Linux**.

Numa primeira fase usamos o fato de que se MN^T é semi-definida positiva no cone $\varrho = \{v \in \mathbb{R}^q : v = A^T \lambda : \lambda \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0, A \in \mathbb{R}^{n \times q}\}$, então todo ponto estacionário de

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad \langle x, y \rangle \\ &\text{sujeita a:} \quad Mx - Ny \in C : x \geq 0, y \geq 0, \end{aligned}$$

é necessariamente uma solução de

$$Mx - Ny \in C, \quad \langle x, y \rangle = 0 : \quad x \geq 0, y \geq 0.$$

Para as matrizes M, N , escolhemos matrizes tridiagonais, de Hilbert e Identidade, esta última foi usada para analisarmos também o caso *LCP*. Posteriormente, testamos para os casos em que as matrizes M e N foram geradas de modo aleatório, para melhor concluirmos nossos resultados.

A função objetivo que implementamos computacionalmente para obter os resultados numéricos está definida da seguinte forma,

$$\text{minimizar} \quad \phi(x, y) + \|Mx - Ny - q\|^2, \quad (4.1.1)$$

que é o *HLCP*(M, N, q), com a as restrições de caixa, não negativas. Usamos como aproximações iniciais os pontos $x_0 = \{0, 0, 0, \dots, n\}$, $x_0 = \{1, 1, 1, \dots, n\}$, e $x_0 = \{1, 0, 1, 0, \dots, n\}$, onde n é a ordem da matriz. A função $\phi(x, y)$ é substituída por alguma das cinco estratégias sugeridas.

4.2 Tabelas e Gráficos.

Vamos mostrar, em média, o desempenho de cada estratégia, tendo como parâmetro de comparação entre elas, o tempo de processamento (cpu) para alcançar o ponto ótimo, a precisão do valor da função objetivo e a quantidade de vezes em que cada estratégia achou a solução do problema proposto, variando a ordem das matrizes, usando o caso em que se cumprem as condições suficientes e caso contrário.

Do total dos experimentos feitos, analizamos até no máximo 20 problemas diferentes para $n = 5$ (tabela 1), $n = 20$ (tabela 2) e $n = 50$ (tabela 3), e no máximo 10 para $n = 100$ (tabela 4) e $n = 200$ (tabela 5).

Encontramos casos em que algumas estratégias não conseguiram achar a solução, mas sim o ponto estacionário, enquanto que para estes mesmos casos, a estratégia de Fischer-Burmeister penalizada foi excelente no seu desempenho na procura do ponto ótimo, isto pode ser verificado nas tabelas 1, 4 e 5, analisando o percentual da quantidade de vezes que a estratégia achou a solução, principalmente para o caso aleatório em que foram geradas matrizes que não verificam $MN^T \geq 0$. Isto foi provocado pelo fato de usarmos matrizes mal condicionadas, associadas a matrizes de Hilbert e tri-diagonais, o que prejudica, pelo que podemos analisar, o desempenho das estratégias.

Legenda 4.2.1. : *Tempo (cpu)* - média do tempo de processamento;
Val. f.o. - média do valor da função objetivo, quando a solução foi achada;
Sol. - percentual das vezes que a estratégia achou a solução.

$n = 5$						
$MN^T \geq 0$				Aleatório		
$\phi_i(x,y)$	Tempo (cpu)	Val. f.o	Sol.	Tempo (cpu)	Val. f.o	Sol.
$\phi_1(x,y)$	0.0086 (seg)	5.7×10^{-16}	100%	0.016 (seg)	4.32×10^{-12}	90%
$\phi_2(x,y)$	0.0124 (seg)	9.80×10^{-09}	100%	0.012 (seg)	4.38×10^{-11}	90%
$\phi_e(x,y)$	0.0182 (seg)	2.15×10^{-15}	100%	0.028 (seg)	2.52×10^{-17}	90%
$\phi_{FB}(x,y)$	0.0242 (seg)	7.24×10^{-13}	100%	0.026 (seg)	1.45×10^{-15}	90%
$\phi_{FBP}(x,y), \mu = 0.1$	0.022 (seg)	1.254×10^{-10}	100%	0.018 (seg)	8.75×10^{-14}	90%
$\phi_{FBP}(x,y), \mu = 1$	0.0242 (seg)	6.64×10^{-09}	100%	0.020 (seg)	1.67×10^{-13}	90%
$\phi_{FBP}(x,y), \mu = 10$	0.020 (seg)	1.42×10^{-12}	100%	0.012 (seg)	1.72×10^{-14}	95%

Tabela 1. Resultados médios para no máximo 20 problemas.



$n = 20$

$MN^T \geq 0$				Aleatório		
$\phi_i(x,y)$	Tempo (cpu)	Val. f.o	Sol.	Tempo (cpu)	Val. f.o	Sol.
$\phi_1(x,y)$	5.56 (seg)	1.40×10^{-03}	100%	7.38 (seg)	4.0×10^{-04}	90%
$\phi_2(x,y)$	5.96 (seg)	4.08×10^{-06}	100%	8.15 (seg)	1.20×10^{-06}	95%
$\phi_e(x,y)$	16.02 (seg)	1.40×10^{-04}	100%	10.12 (seg)	1.54×10^{-03}	90%
$\phi_{FB}(x,y)$	9.26 (seg)	1.20×10^{-09}	100%	10.12 (seg)	2.03×10^{-12}	95%
$\phi_{FBP}(x,y), \mu = 0.1$	7.25 (seg)	1.94×10^{-09}	100%	9.10 (seg)	4.80×10^{-06}	95%
$\phi_{FBP}(x,y), \mu = 1$	3.14 (seg)	3.2×10^{-12}	100%	6.76 (seg)	3×10^{-09}	95%
$\phi_{FBP}(x,y), \mu = 10$	8.20 (seg)	4.2×10^{-11}	100%	10.22 (seg)	1.70×10^{-05}	95%

Tabela 2. Resultados médios para no máximo 20 problemas.

$n = 50$

$MN^T \geq 0$				Aleatório		
$\phi_i(x,y)$	Tempo (cpu)	Val. f.o	Sol.	Tempo (cpu)	Val. f.o	Sol.
$\phi_1(x,y)$	37.16 (seg)	2.21×10^{-09}	100%	53.24 (seg)	1.26×10^{-13}	90%
$\phi_2(x,y)$	237.95 (seg)	5.70×10^{-06}	100%	292.84 (seg)	1.20×10^{-08}	100%
$\phi_e(x,y)$	437.20 (seg)	2.24×10^{-06}	90%	164.75 (seg)	2.24×10^{-08}	90%
$\phi_{FB}(x,y)$	224.68 (seg)	6×10^{-06}	100%	83.53 (seg)	7.07×10^{-10}	100%
$\phi_{FBP}, \mu = 0.1$	181.40 (seg)	4.30×10^{-09}	100%	57.55 (seg)	4.27×10^{-10}	100%
$\phi_{FBP}(x,y), \mu = 1$	32.36 (seg)	2.60×10^{-09}	100%	58.3 (seg)	8.54×10^{-09}	100%
$\phi_{FBP}(x,y), \mu = 10$	162.08 (seg)	1.65×10^{-09}	100%	44.81 (seg)	1.30×10^{-09}	100%

Tabela 3. Resultados médios para no máximo 20 problemas.

$n = 100$

$MN^T \geq 0$				Aleatório		
$\phi_i(x,y)$	Tempo (cpu)	Val. f.o	Sol.	Tempo (cpu)	Val. f.o	Sol.
$\phi_1(x,y)$	273.55 (seg)	4.61×10^{-13}	100%	256.37 (seg)	1.08×10^{-20}	90%
$\phi_2(x,y)$	287.95 (seg)	7.21×10^{-18}	100%	158.24 (seg)	4.20×10^{-24}	90%
$\phi_e(x,y)$	437.20 (seg)	2.24×10^{-06}	100%	249.02 (seg)	2.24×10^{-04}	70%
$\phi_{FB}(x,y)$	200 (seg)	2.6×10^{-13}	100%	32.17 (seg)	2.84×10^{-12}	90%
$\phi_{FBP}(x,y), \mu = 0.1$	180.40 (seg)	1.66×10^{-12}	100%	47.67 (seg)	1.20×10^{-12}	90%
$\phi_{FBP}(x,y), \mu = 1$	113.5 (seg)	1.75×10^{-08}	100%	43.52 (seg)	7.06×10^{-08}	100%
$\phi_{FBP}(x,y), \mu = 10$	206.68 (seg)	1.07×10^{-13}	100%	55.20 (seg)	1.47×10^{-13}	100%

Tabela 4. Resultados médios para no máximo 10 problemas.

$n = 200$

$MN^T \geq 0$				Aleatório		
$\phi_i(x,y)$	Tempo (cpu)	Val. f.o	Sol.	Tempo (cpu)	Val. f.o	Sol.
$\phi_1(x,y)$	372.18 (seg)	2.54×10^{-13}	100%	354.49 (seg)	3.24×10^{-12}	90%
$\phi_2(x,y)$	487.95 (seg)	3.21×10^{-11}	100%	248.24 (seg)	2.20×10^{-14}	90%
$\phi_e(x,y)$	537.20 (seg)	2.24×10^{-11}	100%	301.02 (seg)	2.24×10^{-14}	90%
$\phi_{FB}(x,y)$	400 (seg)	5.23×10^{-13}	100%	266.17 (seg)	1.48×10^{-12}	90%
$\phi_{FBP}(x,y), \mu = 0.1$	254.40 (seg)	1.50×10^{-14}	100%	247.67 (seg)	2.10×10^{-12}	90%
$\phi_{FBP}(x,y), \mu = 1$	267.5 (seg)	1.11×10^{-11}	100%	243.52 (seg)	3.06×10^{-11}	100%
$\phi_{FBP}(x,y), \mu = 10$	398.68 (seg)	1.53×10^{-13}	100%	255.20 (seg)	5.47×10^{-13}	90%

Tabela 5. Resultados médios para no máximo 10 problemas.

Legenda 4.2.2. : Sequência1 - MN^T semi definida positiva;
Sequência2 - Matrizes geradas de modo aleatório.



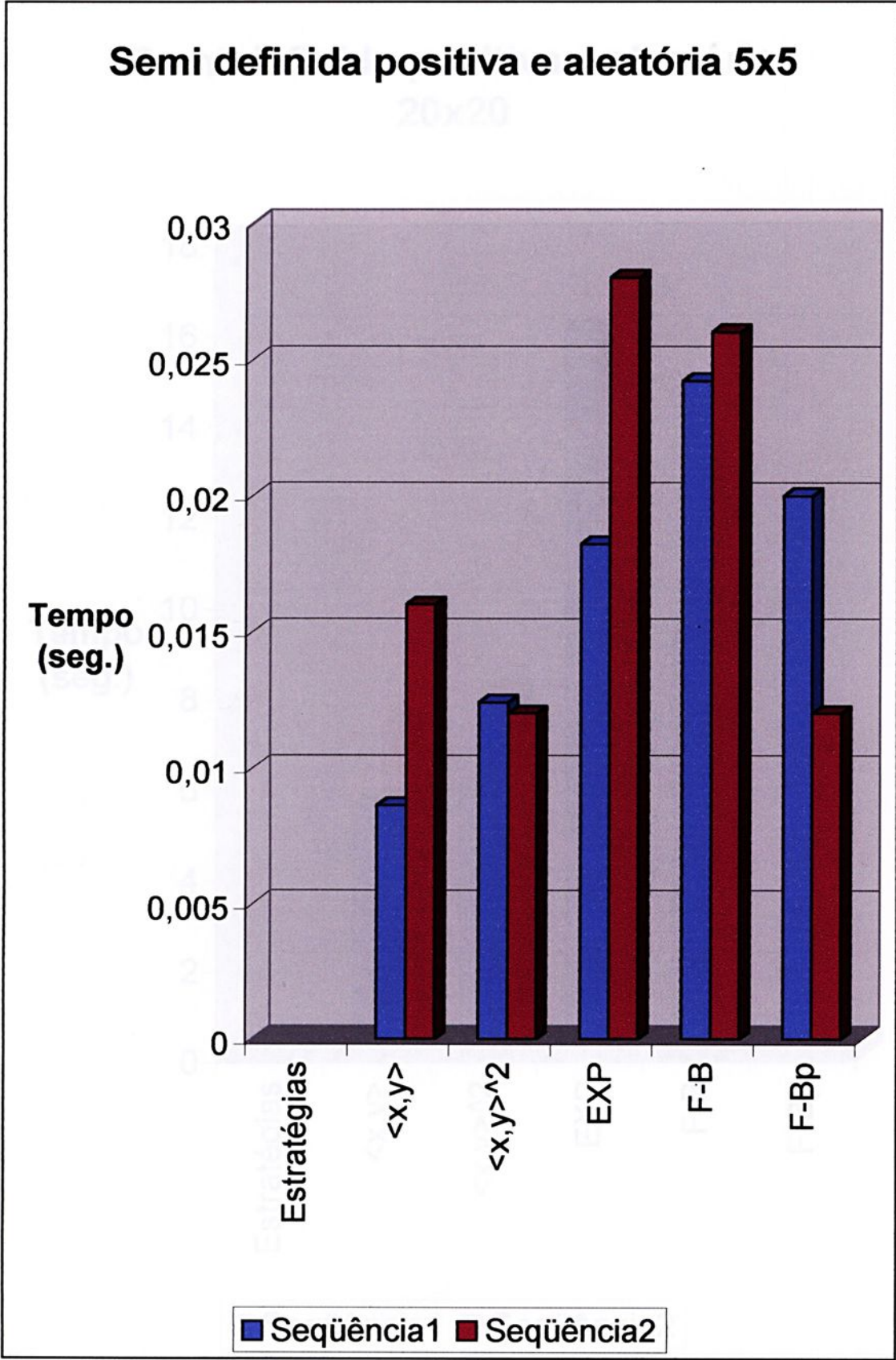


Gráfico 1 - Resultados para no máximo 20 problemas.

Semi definida positiva e aleatória 20x20

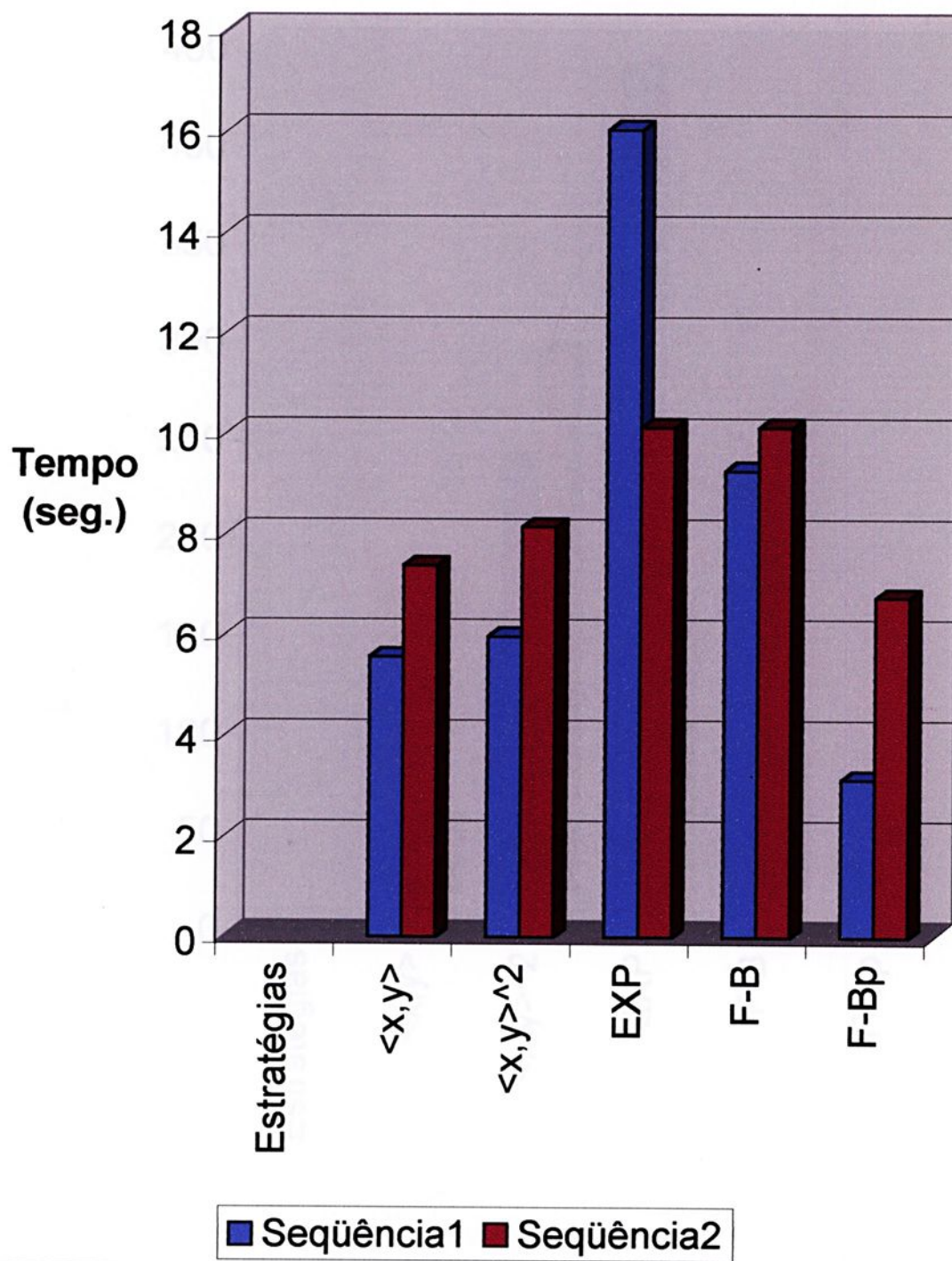


Gráfico 2 - resultados médios para no máximo 20 problemas.

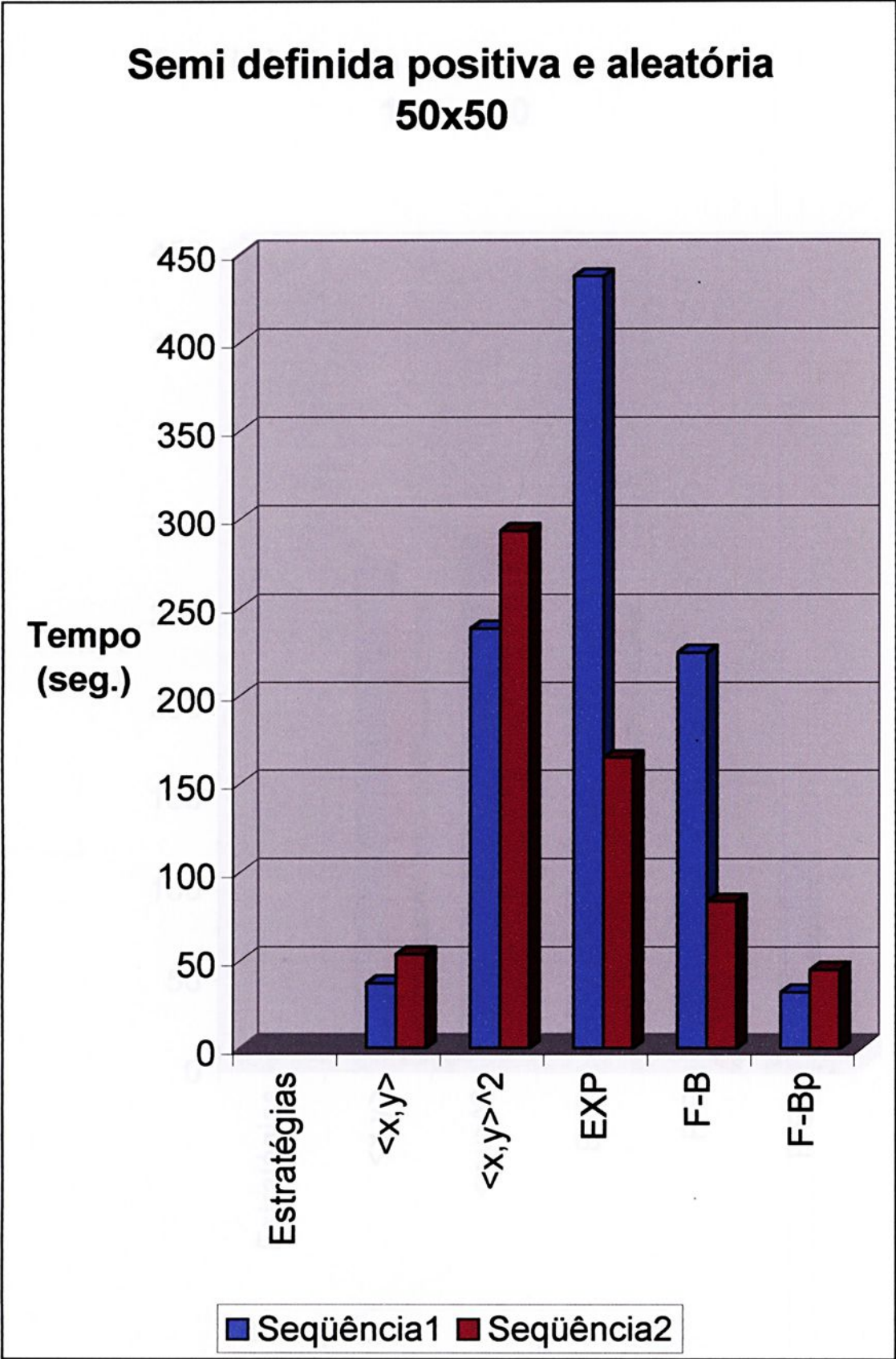


Gráfico 3 - Resultados médios para no máximo 20 problemas.

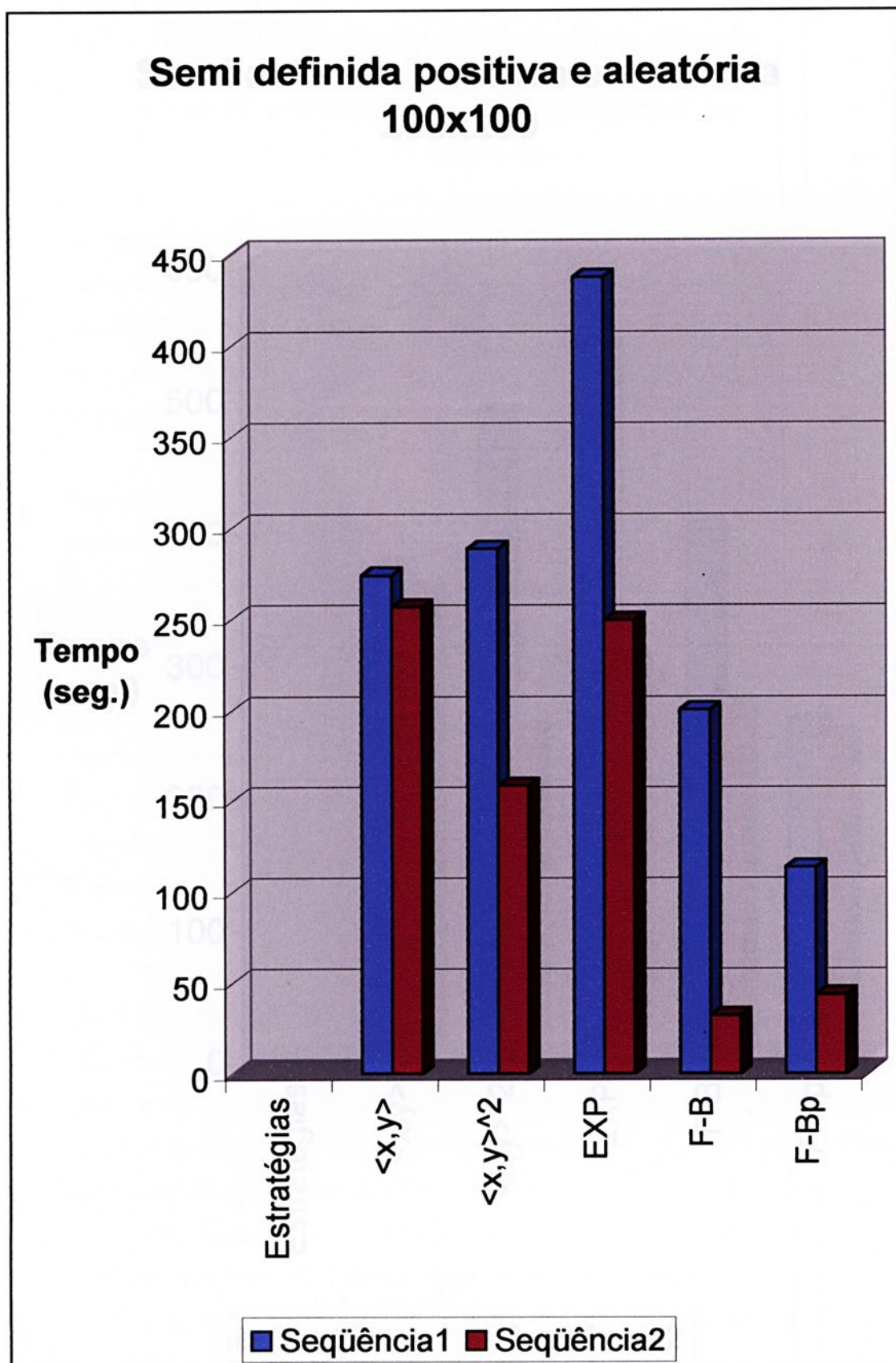


Gráfico 4 - Resultados médios para no máximo 10 problemas.

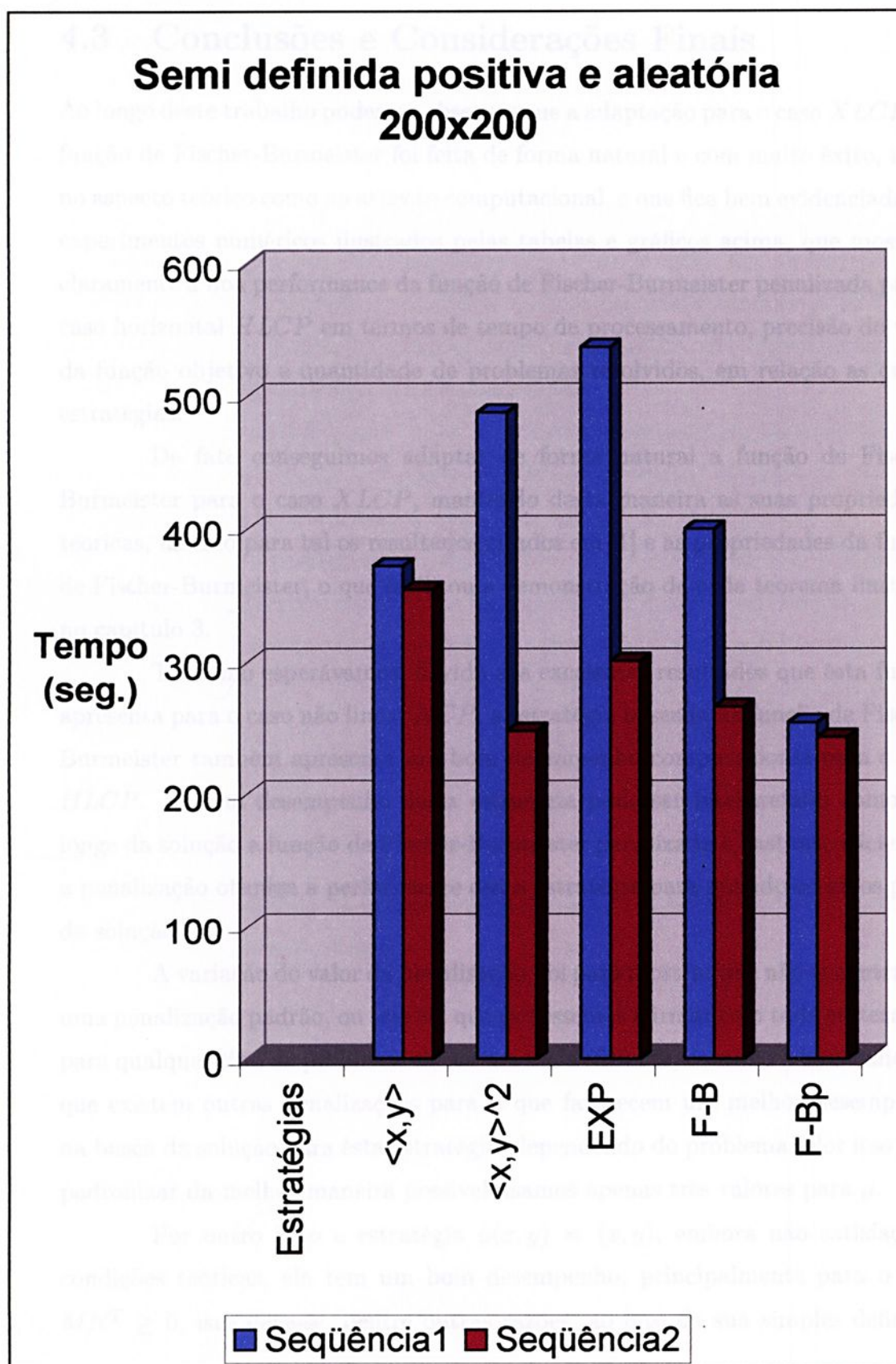


Gráfico 5 - Resultados médios para no máximo 10 problemas.

4.3 Conclusões e Considerações Finais

Ao longo deste trabalho podemos observar que a adaptação para o caso *XLCP*, da função de Fischer-Burmeister foi feita de forma natural e com muito êxito, tanto no aspecto teórico como no aspecto computacional, o que fica bem evidenciado nos experimentos numéricos ilustrados pelas tabelas e gráficos acima, que mostram claramente a boa performance da função de Fischer-Burmeister penalizada para o caso horizontal *HLCP* em termos de tempo de processamento, precisão do valor da função objetivo e quantidade de problemas resolvidos, em relação as outras estratégias.

De fato conseguimos adaptar de forma natural a função de Fischer-Burmeister para o caso *XLCP*, mantendo desta maneira as suas propriedades teoricas, usando para tal os resultados citados em [1] e as propriedades da função de Fischer-Burmeister, o que facilitou a demonstração de cada teorema ilustrado no capítulo 3.

Tal como esperávamos, devido aos excelentes resultados que esta função apresenta para o caso não linear *NCP*, a estratégia baseada na função de Fischer-Burmeister também apresenta um bom desempenho computacional para o caso *HLCP*. O bom desempenho desta estratégia pode ser interpretado como que longe da solução a função de Fischer-Burmeister penalizada é bastante eficiente e a penalização otimiza a performance desta estratégia para quando estamos perto da solução.

A variação do valor da penalização, foi para mostrar que não encontramos uma penalização padrão, ou seja tal que podessemos afirmar com toda certeza que para qualquer tipo de problema ela seria a mais eficiente, contudo é bom salientar que existem outras penalizações para μ que favorecem um melhor desempenho na busca da solução para esta estratégia, dependendo do problema. Por isso para padronizar da melhor maneira possivel usamos apenas três valores para μ .

Por outro lado a estratégia $\phi(x, y) = \langle x, y \rangle$, embora não satisfaça as condições teóricas, ela tem um bom desempenho, principalmente para o caso $MN^T \geq 0$, isto deve-se, dentre outras razões, ao fato da sua simples definição



que leva a cometer menos erros computacionais que no caso $\phi_2(x, y) = \langle x, y \rangle^2$ que é ligeiramente mais eficiente para o caso aleatório. Já a função exponencial tem um desempenho razoável já que a função mínimo associada à exponencial, penaliza fortemente o fato de $x^T y \neq 0$.

Em determinados problemas de ordem inferior à 50, podemos verificar que algumas estratégias, principalmente a $\phi_2(x, y)$, tiveram um desempenho demorado em termos de tempo, e para problemas de ordem superior à 50 um desempenho bem mais rápido (sempre comparando com as outras estratégias), isto mostra que é uma estratégia a ser considerada.

Por fim, notamos que todas as estratégias apresentam resultados robustos, pois ainda nos casos que não se verifica as condições suficientes, em quase 90% destes casos as estratégias acham a solução.

No futuro pretendemos trabalhar em cima de critérios que nos levem a descrever e identificar os tipos de problemas que nos quais as estratégias aqui apresentadas não funcionam e os respectivos casos em que o desempenho é excelente na resolução do *XLCP*. É nosso objetivo também, descobrir novas estratégias e combinações entre elas que possam facilitar a resolução deste tipo de problemas e que possuam uma base teórica sustentável.

No apêndice apresentaremos como foi feita a implementação destas funções usando a linguagem **Fortran**.



Referências Bibliográficas

- [1] Andreani, R. and Martínez, J.M. (1998), *On the solution of the extended linear complementarity problem*, Linear Algebra and its Applications 281, pp. 247-257.
- [2] Andreani, R., Friedlander, A. and Santos, S. (2000), *On the solution of generalized nonlinear complementarity problem*, Department of computer science and statistics, University of the State of S. Paulo (Unesp) and department of applied Mathematics, IMECC-UNICAMP, University of Campinas.
- [3] Andreani, R. and Pombal, L. A. M. *Resolução do problema estendido da complementaridade linear, XLCP*, CNMAC-2000.
- [4] Chen, B., Chen, X. and Kanzow, C. *A penalized Fischer-Burmeister NCP-FUNCTION, theoretical investigation and numerical results*, Mathematical Programming, 88: 211-216.
- [5] Cottle, R.W., Pang, J.S. and Stone, R.E., *The Linear Complementarity Problem* (Academic Press, Boston, MA, 1992).
- [6] Ferris, M.C. and Pang, J.S. (1997), *Engineering and Economic Applications of Complementarity Problems*, Siam Review 39:(4)669-713.
- [7] Fieldler, M. and Pták, V. (1966), *Some generalizations of positive definiteness and monotonicity*, Numerische Mathematik 9, 163-172.



- [8] Friedlander, A., Martínez, J. M. and Santos, S. A. (1994), *Solution of linear complementarity problems using minimization with simple bounds*, Department of Applied Mathematics, State University of Campinas.
- [9] Friedlander, A. and Martínez, J.M. (1994), Concave quadratic function with box constraints, *SIAM Journal Optimization* 4, pp 177-192.
- [10] Friedlander, A., Martínez, J.M. and Santos, S.A. (1994), On the resolution of large scale linearly constrained convex minimization problems, *SIAM Journal on Optimization* 4, pp. 331-339.
- [11] Geiger, C. and Kanzow, C. *On the resolution of monotone complementarity problems*. Institute of Applied Mathematics, University of Hamburg Bundesstrasse 55, D-20146 Hamburg, Germany April 1994.
- [12] Gowda, M. S. (1996), *On the extended linear complementarity problem*, *Mathematical Programming*, vol 72, pp. 33-50.
- [13] Krejic, N., Martínez, J.M., Mello, M.P. and Pilotta, E.A. (2000), Validation of an augmented lagrangian algorithm with a Gauss-Newton Hessian approximation using a set of hard-spheres problems., *Computational Optimization and Applications* 16, 247-263.
- [14] Luenberger, D.G. (1984) *Linear and Nonlinear Programming, second edition*, Addison-Wesley Publishing Company.
- [15] Mangasarian, O.L. and Pang, J-S. (1995) *The extended linear complementarity problem*, *Siam Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol 91, pp. 85-92.
- [16] Martínez, J.M. (1998), Augmented lagrangians and sphere packing problems, *International Journal on Optimization* 70, pp. 75-86.
- [17] Rockafellar, R.T. (1972), *Convex Analysis*, Princeton USA
- [18] Schutter, B. and Moor, B. (1995), *The extended linear complementarity problem*, *Mathematical Programming*, SSDI 0025-5610(95)00032-1.



- [19] Schutter, B. and Moor, B. (1995), *Minimal realization in the max algebra is an extended linear complementarity problem*, Elsevier Science.
- [20] Solodov, M. V.(1999), *Some optimization reformulations of the extended linear complementarity problem*, Computational Optimization and Applications, 13, 187-200.



Apêndice

Neste apêndice mostraremos alguns trechos de como foram implementadas as estratégias que fazem parte do nosso trabalho. Isto foi permitido usando de uma maneira simples o programa EASY na linguagem FORTRAN para programação não-linear e linear, elaborado pelo grupo de otimização do departamento de Matemática Aplicada da UNICAMP. O acesso e uso destes programas é totalmente livre. Podem ser obtidos por download em <http://www.ime.unicamp.br/martinez>.

```
subroutine fLeDados(n, m)
implicit double precision (a-h,o-z)
integer ordem, i, j, k
real*8 mat
real*8 aux(ordem)
real*8 matrizM(300,300), MatrizN(300,300), vetorQ(300)
common matrizM, MatrizN, vetorQ, ordem
```

```
      (comentário) "abre o arquivo da função objetivo e monta o vetor"
open(unit=5, file="vetorQ.dat")
do i=1, ordem
  10 read(5,*,end=15) mat
  vetorQ(i)= mat
end do
  15 continue
close(5)
```

```
(comentário) "abre o arquivo da função objectivo e monta a matriz M"
open(20, file="matrizM.dat")
do i=1, ordem
  read(20,*,end=25) aux
  do j=1, ordem
    matrizM(i,j)= aux(j)
  end do
  25 continue
end do
close(20)
```

```
(comentário) "abre o arquivo da função objectivo e monta a matriz N"
open(45, file="matrizN.dat")
read(45,*,end=55) aux
do j=1, ordem
  matrizN(i,j)= aux(j)
end do
55 continue
end do
close(45)
```

```
return
end
```

```
subroutine feasy(x, f)
implicit double precision (a-h,o-z)
dimension x(*)
integer ordem, i, j, k
real*8 aux1(300), aux2(300), normal1(300), norma, fl
real*8 matrizM(300,300), MatrizN(300,300), vetorQ(300)
common matrizM, MatrizN, vetorQ, ordem
```

```
(comentário) YOUR FUNCTION !!:
```

```
do i=1, ordem
```

```
aux1(i)=0.0
```

```
aux2(i)=0.0
```

```
end do
```

```
(comentário) "abre o arquivo da função objectivo e monta a norma"
```

```
do i=1, ordem
```

```
do j=1, ordem
```

```
aux1(i)=aux1(i) + matrizM(i,j)*x(j)
```

```
aux2(i)=aux2(i) + matrizN(i,j)*x(j+ordem)
```

```
end do
```

```
end do
```

```
do i=1, ordem
```

```
normal(i)=0.0
```

```
end do
```

```
do i=1, ordem
```

```
normal(i)= aux1(i) - aux2(i) - vetorQ(i)
```

```
end do
```

```
(comentário) "abre o arquivo da função objectivo e monta a primeira estratégia"
```

```
norma =0.0
```

```
f1 = 0.0
```

```
do i=1, ordem
```

```
norma = norma + normal(i)*normal(i)
```

```
f1 = f1 + x(i)*x(i+ordem)
```

```
end do
```

(comentário) "abre o arquivo da função objectivo e monta a estratégia baseada na função de Fischer-Burmeister"

```
norma =0.0
```

```
f1 = 0.0
```

```
do i=1, ordem
```

```
norma = norma + normal(i)*normal(i)
```

```
f1 = f1 + 0.5*((x(i)*x(i)+x(i+ordem)*x(i+ordem))**0.5 - x(i)  
- x(i+ordem))**2
```

```
end do
```

(comentário) "abre o arquivo da função objectivo e monta a estratégia baseada na função de Fischer-Burmeister penalizada"

```
norma =0.0
```

```
f1 = 0.0
```

```
do i=1, ordem
```

```
norma = norma + normal(i)*normal(i)
```

```
f1 = f1 + (((x(i)*x(i))+x(i+ordem)*x(i+ordem)))**0.5  
- x(i) - x(i+ordem) + 1.0*x(i)*x(i+ordem))**2
```

```
end do
```

(comentário) "abre o arquivo da função objectivo e monta a estratégia baseada na função exponencial"

```
norma =0.0
```

```
f1 = 1
```

```
do i=1, ordem
```



```
norma = norma + normal(i)*normal(i)
```

```
f1 = f1 * (EXP(x(i)*x(i+ordem)))
```

```
end do
```

```
f1 = 0.5*(f1 - 1)
```

```
f = f1 + norma
```

```
(comentário)    End of Your function
```

```
return
```

```
end
```

```
(comentário)    YOUR CONSTRAINTS !! :
```

```
aqui usamos o easy.dat com todas as restrições positivas na caixa.
```

```
(comentário)    End of Your constraints
```

```
integer ordem, i, j, k
```

```
real*8 matrizM(300,300), MatrizN(300,300), vetorQ(300)
```

```
common matrizM, MatrizN, vetorQ, ordem
```

```
write(*,*) "Entre com a ordem"
```

```
read(*,*) ordem
```

```
call fLeDados(n, m)
```

Aqui mostramos apenas um trecho do programa que faz a leitura das matrizes, do vetor e executa as estratégias. O gradiente da função objectivo também é embutido no programa.



Este programa é executado normalmente com o compilador fortran e usa o EASY para a resolução dos problemas de otimização.



