



---

TESE DE DOUTORADO

IFT-T.006/02

Aspectos não-Perturbativos e Sólitons  
em Teorias de Campos Integráveis

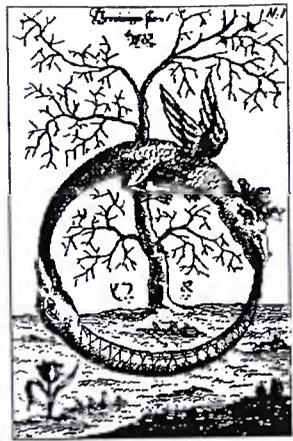
Érica Emilia Leite

Orientador

*Luiz Agostinho Ferreira*



Maio de 2002



SOLVE ET COAGULA

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer meu orientador Luiz Agostinho, cujo incentivo e a prontidão no esclarecimento das dúvidas permitiram a evolução deste trabalho.

Imensa gratidão devo ao Fernando P. Devecchi, pelo aprendizado nos temas importantes; sem o seu apoio e confiança nada disso seria possível.

Meu muito obrigada aos meus pais e irmãos. Agradeço aos amigos do Instituto, Cristiane, Cristina, Dáfni, Vanessa, Hebe, Fernandinho de Campos, Breno, Brenno, Cristiano, Cabelo, Gadelha, Marcelo Leite, Dona Maria, Iraida, Alejandro, Paulo, Jorge. Aos amigos de sempre Verônica, Luiza, Ana Helena, Grande Bi, Alex, Ernesto, Kênia, pela grande inspiração.

Agradeço à FAPESP pelo suporte financeiro.

## Resumo

Neste trabalho procedemos à busca de sistemas integráveis em teorias de campos, utilizando como guia um critério de integrabilidade válido em qualquer dimensão. A procura estabeleceu-se em duas etapas. Primeiramente, estruturas inerentes ao **formalismo** do critério proposto foram elucidadas. Em uma segunda fase, passou-se ao estudo de sistemas físicos propriamente ditos onde a abordagem via integrabilidade mostrou-se frutífera. O critério utilizado para julgar a integrabilidade de um sistema de equações dinâmicas generaliza o formalismo de curvatura nula em duas dimensões. Dentro desta proposta, entendemos o papel de algumas estruturas algébricas que contribuem para a construção de infinitas correntes conservadas. Dentro das aplicações, conseguimos construir quantidades conservadas em modelos que exibem as estruturas algébricas mencionadas acima, como é o caso dos modelos sigma não-lineares. Construimos também a **solução exata** para um modelo de interesse em teorias de cordas, o modelo de teoria de cordas de matrizes.

**Palavras chave:** Modelos integráveis; Sólitons; Teorias de Campos; Sistemas não lineares; Soluções exatas.

**PACS Number(s) :** 11.15.Kc; 11.15.Tk; 11.27.+d; 11.10.Lm; 11.10.Kk.

## Abstract

We study integrable field theories in any dimension using as guideline an approach that generalizes the zero curvature condition in two dimension. The work was accomplished in two stages. First, we concentrate in some aspects of the formalism itself. Next, we applied the method in the study of some relevant physical models. The criteria, as a generalization of zero curvature condition, exhibits a rich algebraic structure that we have exploited in order to construct submodels with an infinite number of conserved currents. The role of some of these algebraic structures was clarified. As part of the applications, we succeeded in constructing conserved quantities for models that present the algebraic properties related to the structures mentioned above. As an example we have the case of non-linear sigma models. We also construct an exact solution to a model of great interest in string theory, namely, the Matrix String Theory

**Keywords:** Integrable Models; Solitons; Non-linear Systems; Field Theory; Exact Solutions.

**PACS Number(s) :** 11.15.Kc; 11.15.Tk; 11.27.+d; 11.10.Lm; 11.10.Kk.

# Conteúdo

<b>I</b>	<b>Formalismo</b>	<b>7</b>
<b>1</b>	<b>Abordagem Tradicional em duas dimensões</b>	<b>8</b>
1.1	Construção geométrica das cargas conservadas . . . . .	11
1.2	Teorema de Stokes não-abeliano . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Abordagem em dimensões maiores que dois</b>	<b>15</b>
2.1	Integrabilidade em três dimensões . . . . .	16
2.1.1	Condições de integrabilidade locais . . . . .	20
2.2	Generalização para dimensões quaisquer . . . . .	25
2.2.1	Construção das cargas conservadas . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Cargas conservadas e submodelos</b>	<b>29</b>
3.1	Teorias integráveis em espaços quociente . . . . .	30
3.2	A construção de submodelos integráveis . . . . .	32
3.2.1	O papel dos estados de singleto . . . . .	36
3.3	O caso de espaços simétricos . . . . .	38
3.4	O caso da variedade do grupo . . . . .	39
3.4.1	O exemplo de $SU(2)$ . . . . .	42
3.5	O exemplo de espaços simétricos não-compactos . . . . .	45
3.5.1	O caso onde $G$ é a forma real normal . . . . .	46

3.6	Os submodelos e a fixação de gauge . . . . .	51
<b>II</b>	<b>Aplicações</b>	<b>54</b>
<b>4</b>	<b>Modelos formulados em espaços quocientes</b>	<b>55</b>
4.1	Modelos $\mathbb{CP}^N$ . . . . .	56
4.1.1	Submodelos integráveis de $\mathbb{CP}^N$ . . . . .	60
4.2	A teoria de Yang-Mills autodual . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Instantons em teorias de cordas</b>	<b>71</b>
5.1	Teoria de cordas IIA e teoria de Matrizes . . . . .	73
5.2	Teoria de Yang-Mills supersimétrica: MST . . . . .	76
5.2.1	A interpretação em termos de cordas . . . . .	78
5.3	As equações do IC-INSTANTON . . . . .	79
5.4	Sistema de Hitchin e curvatura nula generalizada . . . . .	80
5.4.1	Equações do IC-INSTANTON como soluções BPS . . . . .	81
5.4.2	Equações do IC-INSTANTON como auto-dualidade . . . . .	82
5.5	A solução de IC-INSTANTON . . . . .	83
5.6	Equações do IC-INSTANTON como como curvatura nula . . . . .	86
<b>6</b>	<b>O IC-INSTANTON Bi-dimensional</b>	<b>89</b>
6.1	Construção das soluções em $d = 2$ . . . . .	89
6.2	A conexão com o IC-INSTANTON . . . . .	96
6.3	Regularização das integrais . . . . .	106
6.3.1	As funções $f_N$ . . . . .	111
6.4	Análise da solução . . . . .	111
6.4.1	Os cálculos numéricos . . . . .	117
6.5	Correntes conservadas . . . . .	123

6.5.1	O segundo conjunto de correntes . . . . .	124
6.5.2	As correntes não locais . . . . .	126
7	As Correntes Não-locais	128
7.1	Duas dimensões e as correntes . . . . .	130
A	Integrabilidade em quatro dimensões	132
B	Teoria de Representação da álgebra Kac-Moody	137
C	Construção dos Operadores de Vértice	139
C.1	Propriedade dos Operadores de Vértice . . . . .	142
D	Análise de $\zeta$	144
E	Funções delta sobre superfícies de Riemman	146
F	Formulário	149
G	Programa para o cálculo numérico - Mathematica	151
	Bibliografia	157

# Introdução

Embora não reste dúvidas quanto à importância das teorias quânticas de campos na compreensão das leis fundamentais da natureza, ainda não ficou claro o papel desempenhado por seus aspectos não perturbativos.

Apesar de não compreendermos exatamente o significado físico das soluções clássicas destas teorias, podemos obter daí valiosas informações sobre seus aspectos quânticos. Há uma profunda relação entre a geometria diferencial e a topologia das soluções clássicas, por um lado, e certas propriedades quânticas - como a estrutura do vácuo, por outro. Isto foi notado quando Belavin, Polyakov, Schwartz e Tyupkin descobriram a existência de instantons [BPST]. Desde então, técnicas de aproximação semi-clássica e o estudo de sólitons vêm contribuindo enormemente para a compreensão das teorias de gauge não abelianas. Sendo o ambiente onde soluções tipo sóliton ocorrem, o estudo de modelos integráveis não-lineares tornou-se bastante promissor.

Nesta tese, exploramos uma abordagem alternativa para o estudo das teorias integráveis, aplicável a qualquer dimensão. Os autores de [AFG] propõem uma generalização de resultados obtidos em duas dimensões, encontrando uma contrapartida para a relação de Lax, - mais freqüentemente denominada equação de CURVATURA NULA - baseada em uma lei de conservação do tipo Gauss.

Utilizamos a CURVATURA NULA generalizada para qualquer dimensão como ferramenta na análise de sistemas relevantes em teoria de campos e na física de altas energias. O aparato permite abordar teorias como Yang-Mills auto-dual, modelos  $\mathbb{C}P^N$  em  $(2 + 1)$

dimensões e a equação de Bogomol'ny em quatro dimensões, apenas para citar alguns exemplos.

O presente trabalho compõem-se de duas partes. Estas correspondem a avanços efetuados no entendimento de estruturas formais do método, e no estudo de propriedades de modelos em teorias de campos evidenciados sob a perspectiva do formalismo.

Iniciamos fazendo um breve resumo da teoria de sistemas integráveis em duas dimensões. Este primeiro Capítulo de modo algum pretende ser uma introdução ao tema; antes vem a ser uma apresentação dos tópicos e idéias que se seguirão. A teoria dos modelos integráveis bi-dimensionais contém estruturas intrínsecas a duas dimensões, como é o caso das álgebras de Kac-Moody, presentes na construção de soluções. No entanto, a construção de quantidades conservadas para estes modelos utiliza conceitos geométricos – como o Teorema de Stokes – passíveis de generalização para dimensões maiores. Neste primeiro Capítulo fazemos então a exposição da construção das correntes conservadas em duas dimensões. Para tal, os modelos integráveis devem permitir que suas equações de movimento sejam escritas como condição de CURVATURA NULA.

No Capítulo 2, mostramos como a CURVATURA NULA é generalizada, fornecendo um critério de integrabilidade válido em qualquer dimensão. A idéia básica é introduzir quantidades definidas sobre uma hipersuperfície  $\Sigma$ , e buscar as condições para que sejam independentes da hipersuperfície (sob variações que mantenham a borda fixa). A independência de  $\Sigma$  é uma lei de conservação. Deste modo, em um espaço de dimensão  $d + 1$ , introduz-se um tensor totalmente antissimétrico de ordem  $d$ ,  $B_{\mu_1\mu_2\dots\mu_d}$ , e uma conexão sem curvatura  $A_\mu$ . Considera-se então quantidades da forma

$$\bar{\mathcal{P}} \exp \int_{\Sigma} dS^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} W^{-1} B_{\mu_1\mu_2\dots\mu_d} W$$

onde  $A_\mu = -\partial_\mu W W^{-1}$ , e onde  $\bar{\mathcal{P}}$  denota o ordenamento na hipersuperfície onde está sendo efetuada a integração. A condição para que esta quantidade seja independente da hipersuperfície  $\Sigma$  é em geral não local. No entanto, há uma condição local suficiente para

que a curvatura seja nula. Esta pode ser expressa em termos do dual de  $B_{\mu_1\mu_2\dots\mu_d}$  como

$$D_\mu \tilde{B}^\mu = 0.$$

Com isto, a curvatura é nula localmente, e podemos garantir que as leis de conservação sejam locais. E justamente esta relação é tomada como sendo a EQUAÇÃO DE MOVIMENTO de uma dada teoria de campos.

A seguir, no Capítulo 3, temos a primeira exposição original da tese. Conseguimos entender, dentro do formalismo em dimensões superiores, o papel desempenhado por certas estrutura algébricas na construção de uma classe de submodelos integráveis. Este trabalho foi publicado em [FL]. Como já mencionamos, em duas dimensões utilizamos álgebras de Lie de dimensão infinita na construção das infinitas correntes conservadas, como a álgebra de de Kac-Moody. Ao contrário, em mais dimensões utilizaremos as infinitas representações de uma dada álgebra de Lie como artifício na construção das infinitas correntes conservadas. No entanto, para que estas cargas pertençam ao modelo estudado, teremos uma restrição às representações empregadas, bem como uma condição sobre o próprio modelo, aparecendo como vínculos que conduzem a submodelos integráveis. Explicamos então, no Capítulo 3 as condições onde temos submodelos com um número infinito de correntes conservadas.

Na segunda parte da tese, utilizamos o método para extrair propriedades de modelos em teorias de campos. Neste exercício de aplicação identificamos e aprimoramos mecanismos do formalismo. Houve uma reciprocidade nas duas direções, no sentido de que as aplicações, ao mesmo tempo que ofereciam um teste ao método, esclareceram e evidenciaram as estruturas relevantes, sendo um verdadeiro laboratório.

Sendo assim, tomamos alguns sistemas sabidamente integráveis em duas dimensões, como os modelos sigma não-lineares, analisados no no Capítulo 4. As variáveis dinâmicas destes modelos tomam valores em uma variedade  $\mathcal{M}$  que pode ser escrita como uma espaço quociente:  $\mathcal{M} \sim G/H$ , sendo  $G$  e  $H$  grupos de Lie. Mais especificamente, para

o caso dos modelos sigma não-lineares, estes grupos são tais que a variedade  $\mathcal{M}$  é um espaço simétrico. Utilizamos então propriedades dos espaços simétricos na construção dos submodelos integráveis dos modelos  $\mathbb{CP}^N$  – uma particular classe de modelos sigma não-lineares – apresentando aí uma série inédita de quantidade conservadas.

As teorias de Yang-Mills autoduais em quatro dimensões também admitem formulação em termos da CURVATURA NULA generalizada. Uma vez que os campos da teoria, as conexões  $A_\mu$ , tomam valores numa álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  de um grupo de Lie  $G$ , escrevemos este grupo como um espaço quociente:  $G \sim (G \otimes G)/G_D$  ( $G_D$  denota o subgrupo diagonal).

Os Capítulos 5, 6 tratam de uma solução clássica das teorias de Yang-Mills, chamada IC-INSTANTON, de particular interesse em teorias de cordas. Conjectura-se que estas soluções conectem estados de espalhamento de cordas da teoria do tipo IIA. Assim, no Capítulo 5 indicamos brevemente os meios por onde esta interpretação pode ser sustentada, introduzindo o IC-INSTANTON. Este Capítulo está baseado nos artigos de revisão [Bo], [Bi]. A parte das conexões existentes, o IC-INSTANTON acaba por surgir como soluções das equações de Hitchin. Estas podem ser obtidas via dois procedimentos: surgem como equações de movimento de uma teoria de Yang-Mills  $U(N)$  supersimétrica com quebra de metade das supersimetrias; ou podem ser vistas como sendo as equações de autodualidade de uma teoria de Yang-Mills pura após efetuarmos uma redução dimensional. Ambas abordagens conduzem-nos ao sistema de Hitchin, e é este sistema que será objeto de estudo no Capítulo seguinte.

No Capítulo 6, fixamo-nos nas equações de Hitchin em duas dimensões. Com isto, pudemos valer-nos de métodos como o de Leznov-Saveliev para construirmos a solução de IC-INSTANTON. Utilizamos então uma abordagem mista: escrevemos as equações do sistema de Hitchin como CURVATURA NULA generalizada, e construimos explicitamente a solução *exata* para os IC-INSTANTONS com auxílio do método de Leznov-Saveliev. Após um *ansatz* inicial para o sistema de Hitchin, reduzimos suas equações a um sistema de sinh-Gordon com condições de contorno especiais. Muitas soluções de sinh-Gordon podem

ser obtidas a partir da solução trivial vácuo; no entanto, a solução de IC-INSTANTON surge de um condensado infinito de sólitons do modelo de sinh-Gordon.

O fato de mesclarmos as técnicas utilizadas na construção das correntes conservadas do IC-INSTANTON, fez com que obtivéssemos pela primeira vez um novo conjunto de correntes para os modelos conhecidos como Toda multidimensional. Explicamos resumidamente, no Capítulo 7, como construir tais correntes.

Talvez seja importante frisar que os desenvolvimentos apresentado em 3, 4, 6 e 7 são originais. Alguns, como ocorreu com o Capítulo 3, já foram publicados [FL]. Os restantes estão em fase de redação para posterior submissão à publicação.

Parte I

**Formalismo**

## Capítulo 1

# Abordagem Tradicional em duas dimensões

O estudo de soluções de sólitons em sistemas de equações diferenciais não-lineares desenvolveu-se consideravelmente nas últimas décadas. Apesar da grande variedade de tipos de equações consideradas – cada uma das quais podendo ser abordadas por algum dos vários métodos existentes para construção de soluções – algumas características básicas permanecem comuns a uma ampla classe de equações. Estas características relacionam-se a especificidade das soluções de sóliton. Por sólitons entemos uma solução das equações localizada espacialmente que propaga-se sem dispersão, e mantém sua identidade em processos de interação com outros sólitons.

Estaremos interessados aqui em algumas teorias de campos. Em teorias onde há invariância de Lorentz, como por exemplo no modelos de Toda, os sólitons são passíveis de uma interpretação em termos de partículas, havendo inclusive fortes indicações da existência de uma transformação de dualidade que relaciona o espectro quântico das teorias de campos às soluções de um sóliton. Em quatro dimensões, tal dualidade generaliza a dualidade eletromagnética, e relaciona monopolos e partículas de gauge [O], [O], [OF].

Praticamente todas as teorias formuladas em um espaço-tempo com uma ou duas di-

mensões que apresentam soluções do tipo sóliton possuem uma representação em termos de uma condição de curvatura nula ou da equação de Lax-Zakharov-Shabat. O correspondente operador de Lax toma valores em alguma álgebra de Lie de dimensão infinita. De fato, quase todas equações de sóliton relacionam-se às álgebras de Kac-Moody. Vejamos brevemente a origem do estudo dos sólitons em termos da condição de curvatura nula.

Sólitons estão associados a sistemas INTEGRÁVEIS. Há muitas definições do que seria um sistema INTEGRÁVEL. Para o propósito da teoria dos sólitons, utilizamos um critério cujas bases foram lançadas por Liouville. Em poucas palavras, um sistema é INTEGRÁVEL, segundo Liouville, quando há um número de quantidades conservadas em involução igual ao número de graus de liberdade do sistema. Neste caso, existe uma transformação canônica que permite reescrever as equações em termos de novas variáveis (denominadas variáveis de ÂNGULO E AÇÃO), como equações solúveis em quadratura. Porém resta o problema de encontrar tal transformação canônica, o que mostra-se impraticável.

Com o trabalho de Lax [L], é proposto um critério geométrico para encontrar uma estrutura de integrabilidade em uma teoria, equivalente ao de Liouville, com a vantagem de prescindir da transformação canônica para obter-se as soluções. Tal critério consiste em encontrar um par de operadores  $M, L$  (OPERADORES DE LAX) cuja relação de comutação reproduza as equações diferenciais, ou seja, a relação

$$\frac{\partial L(\lambda)}{\partial t} = [M(\lambda), L(\lambda)] \quad (1.0.1)$$

contém implicitamente toda dinâmica do sistema em questão. Os operadores  $M, L$  são mapeamentos do espaço de configuração do sistema físico numa álgebra de Lie. O parâmetro  $\lambda$ , conhecido como parâmetro espectral  $\lambda$  é uma variável complexa, e introduz na formulação elementos da análise complexa.

Após este trabalho inicial, Zakharov e Shabat [ZS] ampliaram o poder do formalismo de Lax, abrindo caminho para escrever-se as equações de movimento de muitos modelos em Teorias de Campos em duas dimensões – como o modelo de sine-Gordon – em termos

do que ficou conhecido como CONDIÇÃO DE CURVATURA NULA

$$[\partial_0 + A_0, \partial_1 + A_1] = 0. \quad (1.0.2)$$

Esta formulação apareceu primeiramente no trabalho de Zakharov e Shabat [ZS] sobre a equação de Schrödinger não-linear, em 1971.

No estudo de Teorias de Campos tratamos de sistemas com um número infinito de graus de liberdade, o que indica que, para que possam ser completamente integráveis, deva haver um número infinito de cargas conservadas (segundo Liouville). Mais ainda, interessa-nos teorias com invariância de Lorentz. Este fato restringiu a duas dimensões os avanços nesta área. Ocorre que, em duas dimensões, acredita-se que as infinitas quantidades conservadas podem estar relacionadas a alguma simetria não linear que mistura graus de liberdade internos com graus de liberdade relativos as simetrias do espaço-tempo. Em geral tais simetrias são pouco conhecidas; em duas dimensões, a mais das vezes podemos descrevê-las em termos das álgebras  $W$ . Em quatro dimensões, para teorias de campos bem comportadas, valem proibições como a do teorema de Coleman e Mandula, segundo qual **não há**, em teorias invariantes de Lorentz em dimensões maiores que dois, uma mistura não trivial dos grupos de simetrias internas e do espaço-tempo; neste contexto, a supersimetria surge como a tentativa bem sucedida de contornar as imposições do teorema de Coleman-Mandula. Neste sentido não há perspectiva de traduzir a especificidade de algumas estruturas que ocorrem nas teorias em duas dimensões. Porém desenvolveram-se métodos diretos de construção das cargas, independente desta especificidade.

Alguns métodos e resultados utilizados em duas dimensões, como a construção de um número infinito de cargas conservadas, podem ser estendidos a dimensões superiores. Por basear-se em uma lei de conservação do tipo Gauss, utilizando então conceitos geométricos **não** restritos a duas dimensões, a construção de infinitas quantidades conservadas em dimensões maiores que dois poderá ser generalizada. Vejamos rapidamente quais conceitos envolvidos são passíveis de tal generalização.

Considere uma conexão  $A_\mu$  e uma curva  $\Gamma$  em um espaço-tempo bi-dimensional. Podemos resumir da seguinte forma a construção das quantidades conservadas. Introduce-se o operador de transporte paralelo  $W$  através da equação

$$\frac{dW}{d\sigma} + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} W = 0 \quad (1.0.3)$$

onde  $\sigma$  parametriza a curva  $\Gamma$ . Como explicaremos na Seção 1.1, (1.0.2) é a condição para que a quantidade  $W$  independa da curva  $\Gamma$ , contanto que as extremidades da curva sejam mantidas fixas. Portanto,  $W$  avaliado em uma curva fechada contrátil deve ser a unidade. Assim, como veremos em 1.1, tomando o espaço-tempo como sendo  $\mathbb{R} \times S^1$ , qualquer potência  $N$  da exponencial ordenada no caminho  $\text{Tr} \left( P \exp \left( \int_{S^1} A_x(x, t) dx \right) \right)^N$  é conservada no tempo. É deste modo que a condição de curvatura nula (1.0.2) fornece leis de conservação.

## 1.1 Construção geométrica das cargas conservadas

Os conceitos e técnicas envolvidos no formalismo de modelos integráveis em uma e duas dimensões é agora bem conhecido. Existe uma variedade de métodos para a construção de soluções e de cargas conservadas. Grande parte das estruturas empregadas nestes métodos relacionam-se a conceitos intrinsecamente relacionados a dimensão dois, como é o caso das álgebras de Kac-Moody, ligadas a transformações conformes; isto nos faz crer que a análise em duas dimensões dificilmente possa ser ampliada para dimensões maiores. Entretanto, os conceitos geométricos expostos a seguir são permissíveis a tais extensões.

A curvatura nula em duas dimensões

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = 0 \quad (1.1.4)$$

reflete a condição para que a integral ordenada  $P \exp \left( \int_\Gamma dx^\mu A_\mu \right)$  seja independente do caminho  $\Gamma$  para extremidades fixas. Isto constitui um tipo de generalização da lei de Gauss, e de fato conduz-nos a cargas conservadas. Em dimensões superiores, podemos traçar uma

analogia, onde as condições para uma integral de (hiper)superfície ordenada de conexões de ordem superiores sejam independentes da (hiper)superfície podem ser expressas como equações locais que generalizam a condição de curvatura nula (1.0.2) no sentido de que soluções e cargas locais podem ser construídas. Os cálculos necessários para implementação destas idéias dependem crucialmente de uma generalização adequada do teorema de Stokes não abeliano [Ar] para conexões de ordem superiores.

## 1.2 Teorema de Stokes não-abeliano

Faremos aqui uma revisão da versão usual do teorema de Stokes não-abeliano para conexões ordinárias, de um modo conveniente para sua posterior generalização para dimensões superiores.

Os cálculos a seguir independem do número de dimensões do espaço tempo, e assim tomaremos os índices gregos  $\mu, \nu \dots$  variando de 0 a  $d$ . Considere a curva  $\Gamma$ , parametrizada por  $\sigma$ , de modo que  $\sigma = 0$  e  $\sigma = 2\pi$  correspondam as extremidades de  $\Gamma$ . Seja  $W$  uma quantidade definida através da equação diferencial

$$\frac{dW}{d\sigma} + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} W = 0 \quad (1.2.5)$$

com condição inicial  $W(0) = I$  onde  $A_\mu$  é uma conexão tomando valores numa álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  de uma grupo de Lie  $G$ .

Estudaremos então como  $W$  varia sob deformações de  $\Gamma$  que mantém fixo o ponto inicial  $x^\mu(\sigma = 0)$ . Temos

$$\frac{d\delta W}{d\sigma} + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta W + \delta \left( A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right) W = 0 \quad (1.2.6)$$

Multiplicando a esquerda por  $W^{-1}$  e utilizando o fato de que (1.2.5) implica

$$\frac{dW^{-1}}{d\sigma} - W^{-1} A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} = 0, \quad (1.2.7)$$

temos

$$\frac{d}{d\sigma} (W^{-1} \delta W) = -W^{-1} \left( \partial_\lambda A_\mu \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma} + A_\mu \frac{d\delta x^\mu}{d\sigma} \right) W \quad (1.2.8)$$

Após uma integração por partes obtemos

$$W^{-1}\delta W = -W^{-1}A_\mu W \delta x^\mu + \int_0^\sigma d\sigma' W^{-1}F_{\mu\nu}W \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \delta x^\nu \quad (1.2.9)$$

com

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \quad (1.2.10)$$

Se considerarmos variações de  $\Gamma$  onde o ponto final em  $\sigma = 2\pi$  também é mantido fixo, segue de (1.2.9)

$$W^{-1}(2\pi)\delta W(2\pi) = \int_0^{2\pi} d\sigma' W^{-1}F_{\mu\nu}W \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \delta x^\nu \quad (1.2.11)$$

Consideremos agora o caso onde  $\Gamma$  é uma curva fechada ( $x_0 \equiv x^\mu(0) = x^\mu(2\pi)$ ), e seja  $\Sigma$  a superfície bi-dimensional tendo  $\Gamma$  como sua borda. Podemos varrer  $\Sigma$  com loops (laços) iniciando e terminando em um ponto fixo  $x_0$ ; tais loops podem ser parametrizados por  $\tau$  de modo que  $\tau = 0$  corresponda ao loop infinitesimal em torno de  $x_0$  e  $\tau = 2\pi$  corresponda a  $\Gamma$ . Então tomamos a variação de  $W$  de modo a corresponder a deformações de um loop em outro, i.e.  $\delta = \delta\tau \frac{d}{d\tau}$ . Com isto podemos escrever (1.2.11) as

$$\frac{dW(2\pi)}{d\tau} - W(2\pi) \int_0^{2\pi} d\sigma' W^{-1}F_{\mu\nu}W \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (1.2.12)$$

O fato de  $W$  para um loop poder ser determinado tanto por (1.2.5) quanto (1.2.12) é a própria asserção do teorema de Stokes não abeliano. De fato, integrando estas equações temos

$$P \exp \left( \int_\Gamma d\sigma A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right) = \mathcal{P} \exp \left( \int_\Sigma d\tau d\sigma W^{-1}F_{\mu\nu}W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \quad (1.2.13)$$

onde  $P$  e  $\mathcal{P}$  significam ordenamento no caminho e na superfície, respectivamente. Repare que omitimos de ambos lados de (1.2.13) a constante de integração multiplicativa que corresponde ao valor inicial de  $W$ , i.e.  $W(x_0)$ .

Quantidade conservadas são contruídas do seguinte modo. Primeiramente consideramos o caso onde o espaço-tempo é um cilindro. Em um tempo fixo  $t_0$  considere um loop  $\gamma_0$  iniciando e terminando em  $x_0$ . Em um tempo posterior  $t_1$  considere um loop  $\gamma_1$  também

iniciando e terminando em  $x_0$ . Seja  $\gamma_{01}$  um caminho conectando  $(t_0, x_0)$  com  $(t_1, x_0)$ . A conexão plana permite-nos integrar a equação de transporte paralelo (1.2.5) ao longo de dois distintos caminhos, obtendo  $W(\gamma_0) = W(\gamma_{01})^{-1}W(\gamma_1)W(\gamma_{01})$ . Observe que  $W(\gamma_0)$  transforma-se sob uma transformação de gauge  $g(x)$  como  $W(\gamma_0) \rightarrow g(x_0)W(\gamma_0)g(x_0)^{-1}$ . As quantidades conservadas devem ser invariantes de gauge. Caso  $\chi$  seja um caracter para o grupo  $G$  segue que  $\chi(W(\gamma_0))$  será invariante de gauge, bem como  $\chi(W(\gamma_0)) = \chi(W(\gamma_1))$ . Então podemos construir uma quantidade conservada invariante de gauge

$$\chi(W(\gamma_0)) \tag{1.2.14}$$

para cada caracter independente do grupo. Estas são as constantes de movimento na construção de curvatura nula. Repare que as informações necessárias para o cálculo de  $\chi(W(\gamma_0))$  são todas determinadas no tempo  $t_0$ .

As quantidades conservadas (1.2.14) são não locais pois, em geral, a conexão  $A_\mu$  pertence a uma álgebra não abeliana. Entretanto, existem casos, como nos modelos de Toda afim [OT2], onde é possível obterem-se leis de conservação locais, colocando-se  $A_\mu$  numa subálgebra abeliana através de uma transformação de gauge.

## Capítulo 2

# Abordagem em dimensões maiores que dois

A proposta de generalização da condição de curvatura nula para teorias de campos relativísticas em dimensões maiores tem por base um princípio geométrico – o teorema de Stokes para o caso não-abeliano. A abordagem fornece um critério para integrabilidade em  $d > 2$ , permitindo o estabelecimento de novos modelos integráveis, e pode ser usado para construir-se um número infinito de correntes conservadas e novas soluções.

Alguns dos métodos utilizados em duas dimensões, como a existência de um número infinito de cargas conservadas, podem ser generalizados para teorias em dimensões maiores. A proposta de [AFG] é fornecer uma extensão da curvatura nula. A equação (1.0.2) é a condição de compatibilidade ou integrabilidade para derivadas covariantes.

Em poucas palavras, num espaço-tempo de dimensão  $d + 1$  introduz-se um tensor antissimétrico de ordem  $d$ , e define-se o análogo do loop de Wilson  $W$  em (1.0.3) como sendo a integração de tal tensor sob uma superfície  $d$ -dimensional. O princípio condutor é a procura de uma lei de Gauss para conexões de ordem superior. Entretanto surgem dois problemas. Primeiramente procuram-se condições *locais* para a independência da superfície, i.e., condições de curvatura nula locais. E em segundo lugar, estas condições

devem ser suficientemente ricas para conterem toda estrutura das equações de movimento dos sistemas não-lineares. Ao tomarmos um tensor de ordem  $d$  pertencente a uma álgebra abeliana a independência da superfície segue naturalmente do teorema de Stokes abeliano, e simplesmente atesta que a derivada exterior do tensor deve anular-se. Esta condição é local, mas não é suficientemente rica para abarcar as teorias não lineares. Caso tomemos o tensor numa álgebra não-abeliana conseguimos uma condição altamente não-linear para independência da superfície.

O caso tridimensional contém os ingredientes básicos presentes na generalização da curvatura nula. A seguir, derivamos então as condições para que uma quantidade  $V$  seja independente da superfície, o que nos conduzirá a condições de integrabilidade em três dimensões, e explicamos como se constróem cargas conservadas. Na seção 2.2 apresentamos um breve resumo de como tratar dimensões quaisquer, sendo que ilustramos o caso  $d = 4$  no Apêndice A.

## 2.1 Integrabilidade em três dimensões

Em dimensões superiores, teremos uma situação análoga a bi-dimensional, porém com superfícies tomando o lugar da curva  $\Gamma$ , e volumes substituindo superfícies. A independência então se dará com respeito a integração de um novo objeto, um tensor antissimétrico de ordem superior, e algum cuidado especial deve ser tomado para que as leis de conservação sejam locais.

Teremos um objeto  $V$ , fazendo as vezes de  $W$  em (1.2.5), definido pela equação

$$\frac{dV}{d\tau} - VT(B, A, \tau) = 0$$

onde a quantidade  $T(B, A, \tau)$  é dada por

$$T(B, A, \tau) \equiv \int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Do mesmo modo, analisando como  $V$  se comporta com a deformação da superfície  $\Sigma$

(onde  $\tau$  parametriza os distintos loops que varrem  $\Sigma$ , e  $\sigma$  parametriza cada loop), encontraremos uma equação para as variações de  $V$  sob deformações de uma superfície. Inpondo que  $V$  independa de deformações de  $\Sigma$  que mantém  $\Gamma$  fixo, chega-se a condições não-locais sobre  $\tilde{B}_{\mu\nu}$  e  $A_\mu$ , a saber, que a curvatura destas duas conexão se anulem. Para a conexão  $A_\mu$  esta condição é simplesmente  $F_{\mu\nu} = 0$ ; no entanto, a expressão para a curvatura de  $B_{\mu\nu}$  é altamente não local, expressa por

$$\mathcal{K} \equiv \int d\sigma W^{-1} (D_\lambda B_{\mu\nu} + D_\mu B_{\nu\lambda} + D_\nu B_{\lambda\mu}) W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{\delta x^\lambda}{d\zeta} - [T(B, A, \tau), T(B, A, \zeta)]$$

Tem-se então de explorar estrutura algébricas que conduzirão à condições locais. Um dos modos de implementar a localidade seria impondo que

$$D_\mu \tilde{B}^\mu = 0, \quad F_{\mu\nu} = 0 \quad (2.1.1)$$

onde  $D_\mu \cdot \equiv \partial_\mu \cdot + [A_\mu, \cdot]$ ,  $F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]$ , e  $\tilde{B}^\mu \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} B_{\nu\rho}$ . Além disto,  $A_\mu$  toma valores em uma álgebra de Lie  $\mathcal{G}$ , e  $\tilde{B}^\mu$  em um ideal abeliano da álgebra. Requer-se que a curvatura da conexão  $A_\mu$  se anule para que  $V$  independa da maneira escolhida para varrer  $\Sigma$ .

Vale a pena percorrer a dedução com mais detalhes, o que faremos a seguir.

Considere uma superfície bi-dimensional  $\Sigma$  com borda  $\Gamma$ . Escolhe-se um ponto de base  $x_0$  em  $\Gamma$ , e varre-se a superfície  $\Sigma$  com loops passando por  $x_0$  e sendo parametrizados por  $\tau$ , de modo que  $\tau = 0$  corresponda ao loop infinitesimal em torno de  $x_0$ , e  $\tau = 2\pi$  corresponda a borda  $\Gamma$ . Cada loop é parametrizado por  $\sigma$  com  $\sigma = 0$  e  $\sigma = 2\pi$  correspondendo ao ponto fixo  $x_0$ .

Introduz-se então: um tensor antissimétrico de ordem dois  $B_{\mu\nu}$  transformando-se sob a representação adjunta do grupo; um potencial vetor  $A_\mu$ , e define-se uma quantidade  $V$  através da equação

$$\frac{dV}{d\tau} - VT(B, A, \tau) = 0 \quad (2.1.2)$$

onde

$$T(B, A, \tau) \equiv \int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (2.1.3)$$

A condição inicial é tomada como  $V(\tau = 0) = I$ . A quantidade  $W$  depende do vetor  $A_\mu$  e é definida através da equação (1.2.5). Quer-se que a quantidade  $V$  independa do modo escolhido para varrer  $\Sigma$  com loops passando por  $x_0$ ; para tal, começamos por impor que a conexão  $A_\mu$  seja plana

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = 0. \quad (2.1.4)$$

Como deduzido do teorema de Stokes não-abeliano 1.1, a condição (2.1.4) implica que  $W$  independe do caminho de integração quando os extremos são mantidos fixos. Cada ponto em  $\Sigma$  pertence a um dado loop do conjunto que varre  $\Sigma$ . Assim,  $W$  é definido em dado ponto de  $\Sigma$  integrando-se (1.2.5) ao longo de um loop que se inicia  $x_0$  e contém o ponto em questão. Ao mudar-se o modo de varrer  $\Sigma$ , o valor de  $W$  associado a cada ponto de  $\Sigma$  não muda, pois (2.1.4) garante que  $W$  independe do caminho já que  $x_0$  está fixo. Consequentemente, o integrando em (2.1.3) é uma função local de  $\Sigma$ . O  $V$  assim obtido da integração de (2.1.2) independe de como varre-se  $\Sigma$ , uma vez que a mudança de varredura equivale a mudança das coordenadas  $(\sigma, \tau)$  em  $\Sigma$  - pois mostrou-se  $W^{-1} B_{\mu\nu} W$  é função somente dos pontos de  $\Sigma$ , e não do loop.

A condição inicial  $W(x_0) = I$  permite calcular-se  $W$  univocamente em qualquer ponto através da integração de (1.2.5), donde tem-se que

$$A_\mu = -\partial_\mu W W^{-1} \quad (2.1.5)$$

Quer-se estudar como  $V$  se modifica sob deformações de  $\Sigma$  que mantenham a borda  $\Gamma$  fixa. Para tal, fazem-se variações nos loops que varrem  $\Sigma$ , variações esta perpendiculares a  $\Sigma$ . \*

---

\* Apesar de tratar-se do caso tri-dimensional, os desenvolvimentos que se seguem são válidos em qualquer dimensão .

Deduz-se de (2.1.2) que

$$\frac{dV^{-1}}{d\tau} + T(B, A, \tau) V^{-1} = 0 \quad (2.1.6)$$

Então, variando (2.1.2) tem-se

$$\frac{d}{d\tau} (\delta V V^{-1}) = V \delta T(B, A, \tau) V^{-1} \quad (2.1.7)$$

Para o cálculo da variação de  $T(B, A, \tau)$  utiliza-se (1.2.9) e (2.1.4) para obtenção de

$$\delta W = -A_\mu W \delta x^\mu \quad (2.1.8)$$

Utiliza-se a derivada  $\delta x^\mu$  para efetuar uma integração por partes, e o fato de

$$\delta x^\mu(\sigma = 0) = \delta x^\mu(\sigma = 2\pi) = \delta x^\mu(\tau = 0) = \delta x^\mu(\tau = 2\pi) = 0 \quad (2.1.9)$$

Também utiliza-se o fato de  $W$  satisfazer a equação (1.2.5) com as derivadas em  $\sigma$  substituídas por derivadas em  $\tau$ , já que ambas nos fornecem variações do contorno.

Os cálculos conduzem a

$$\begin{aligned} \delta V(\tau) V^{-1}(\tau) &= V(\tau) \left( \int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu \right) V^{-1}(\tau) \\ &+ \int_0^\tau d\tau' V(\tau') \\ &\times \left( \int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} (D_\lambda B_{\mu\nu} + D_\mu B_{\nu\lambda} + D_\nu B_{\lambda\mu}) W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau'} \delta x^\lambda \right. \\ &\left. - [T(B, A, \tau'), \int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu] \right) V^{-1}(\tau') \quad (2.1.10) \end{aligned}$$

onde

$$D_\lambda B_{\mu\nu} \equiv \partial_\lambda B_{\mu\nu} + [A_\lambda, B_{\mu\nu}] \quad (2.1.11)$$

Observe que, tomando-se  $\tau = 2\pi$  em (2.1.10) segue de (2.1.9) que o primeiro termo no lado direito de (2.1.10) se anula.

Considere-se agora o caso onde  $\Sigma$  é uma superfície fechada onde o loop  $\Gamma$  colapsou no ponto fixo  $x_0$ . Saja então  $\Omega$  uma volume cuja borda é  $\Sigma$ . Analogamente, pode-se varrer o volume  $\Omega$  com superfícies fechadas que possuam em comum o ponto  $x_0$ . Tais superfícies

podem ser parametrizadas por  $\zeta$  de modo que  $\zeta = 0$  corresponda à superfície infinitesimal em torno de  $x_0$  e  $\zeta = 2\pi$  corresponda a borda  $\Sigma$ . Neste caso, pode-se considerar a variação de  $V$  que corresponde a deformação de uma superfície fechada em outra. Pode-se então escrever ( $\delta \equiv d\zeta \frac{d}{d\zeta}$ )

$$\frac{dV_c}{d\zeta} - \left( \int_0^{2\pi} d\tau V \mathcal{K} V^{-1} \right) V_c = 0 \quad (2.1.12)$$

onde  $V_c$  denota  $V$  definido em uma superfície fechada

$$\mathcal{K} \equiv \int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} (D_\lambda B_{\mu\nu} + D_\mu B_{\nu\lambda} + D_\nu B_{\lambda\mu}) W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\zeta} - [T(B, A, \tau), T(B, A, \zeta)] \quad (2.1.13)$$

A propriedade de que  $V$  para superfícies fechadas de pode ser obtido tanto pela integração de (2.1.2) quanto de (2.1.12), permite a generalização do teorema de Stokes não-abeliano. A integração de (2.1.2) e (2.1.12) fornece

$$\mathcal{P} \exp \left( \int_\Sigma d\tau d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) = \hat{\mathcal{P}} \exp \left( \int_\Omega d\zeta d\tau V \mathcal{K} V^{-1} \right) \quad (2.1.14)$$

onde  $\mathcal{P}$  e  $\hat{\mathcal{P}}$  denotam ordenamento na superfície e no volume.

A parte as muitas muitas aplicações que esta expressão possui, na formulação aqui exposta ela é utilizada para a construção das cargas conservadas.

Outras aplicações da condição de curvatura nula (2.1.27) é o fato da mesma possibilitar o desenvolvimento de métodos para construção de soluções.

### 2.1.1 Condições de integrabilidade locais

Para a construção das quantidades conservadas deve-se fazer uso de  $V$ , introduzido (2.1.2), independer da superfície. Uma condição suficiente para tal é que a a curvatura  $\mathcal{K}$ , definida em (6.4.159), seja nula. No entanto, observe que  $\mathcal{K}$  é uma quantidade não-local.

Há dois modos possíveis de garantir que **localmente**  $\mathcal{K}$  se anule. As condições para tal são a generalização em três dimensões da condição de curvatura nula (1.0.2) em duas dimensões. A seguir, alguns exemplos de teorias de campos em dimensões maiores onde tais condições equivalem às equações de movimento serão construídas.

### Primeiro tipo de condições de integrabilidade locais

Tomou-se a conexão  $A_\mu$  como sendo plana para garantir que  $V$  independa do modo como se varre a superfície com loops. Considere-se então o caso onde  $B_{\mu\nu}$  é covariantemente constante

$$D_\lambda B_{\mu\nu} = 0, \quad F_{\mu\nu} = 0 \quad (2.1.15)$$

Ao tomar-se o valor de  $B_{\mu\nu}$  em dado ponto do espaço-tempo como sendo, digamos,  $B_{\mu\nu}^{(0)}$  então

$$B_{\mu\nu}(x) \equiv W(x)B_{\mu\nu}^{(0)}W^{-1}(x) \quad (2.1.16)$$

satisfaz (2.1.15) devido a (??). Além disto, de (2.1.3)

$$T(B, A, \tau) = B_{\mu\nu}^{(0)} \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (2.1.17)$$

Assim, caso todas componentes de  $B_{\mu\nu}^{(0)}$  comutem entre si, i.e.

$$[B_{\mu\nu}^{(0)}, B_{\rho\sigma}^{(0)}] = 0 \quad (2.1.18)$$

conclui-se de (6.4.159) e (2.1.15) que  $\mathcal{K}$  se anula. Observe que (2.1.16) e (2.1.18) implicam que, em cada ponto do espaço-tempo, todas components de  $B_{\mu\nu}$  comutam entre si, porém não necessariamente componentes em pontos diferentes.

Utilizando o mesmo tipo de argumentação que conduz a (1.2.14), conclui-se que há quantidades conservadas. No espaço-tempo tri-dimensional introduz-se um vetor constante que toma valores na álgebra de Lie

$$v^\mu \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} B_{\nu\rho}^{(0)} \quad (2.1.19)$$

Então

$$\int_\Sigma d\tau d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} = v^\rho \varepsilon_{\rho\mu\nu} \int_\Sigma d\tau d\sigma \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \equiv v^\rho S_\rho^\Sigma \quad (2.1.20)$$

onde  $S_\rho^\Sigma$  é o vetor associado a área da superfície  $\Sigma$ . A generalização das leis de conservação (1.2.14), decorrem de uma relação do tipo  $V(S^2, x_0) = W(x_1, x_0)^{-1} V(S^2, x_1) W(x_1, x_0)$ ,

implicando que  $\chi(V(S^2, x_0))$ ; daqui somos conduzidos às leis de conservação expressas por

$$\chi(\exp v^\mu S_\mu(S^2)) . \quad (2.1.21)$$

### O segundo tipo de modelos integráveis

Seja  $\hat{\mathcal{G}}$  uma álgebra de Lie não-semisimples, e  $\mathcal{P}$  um ideal abeliano de  $\hat{\mathcal{G}}$ . Então, tomando-se

$$A_\mu \in \hat{\mathcal{G}} ; \quad B_{\mu\nu} \in \mathcal{P} \quad (2.1.22)$$

segue-se que

$$W^{-1} B_{\mu\nu} W \in \mathcal{P} \quad (2.1.23)$$

e portanto o termo do comutador em (6.4.159) se anula

$$[T(B, A, \tau), T(B, A, \zeta)] = 0 \quad (2.1.24)$$

já que  $\mathcal{P}$  é abeliano.

Portanto, ao impor-se

$$D_\lambda B_{\mu\nu} + D_\mu B_{\nu\lambda} + D_\nu B_{\lambda\mu} = 0 \quad (2.1.25)$$

segue de (6.4.159) que  $\mathcal{K} = 0$  e portanto, de (2.1.10) tem-se que  $\delta V V^{-1} = 0$ . Assim,  $V$  é independente da superfície  $\Sigma$  caso sua borda seja mantida fixa.

No espaço-tempos tri-dimensional introduz-se o dual de  $B_{\mu\nu}$  como

$$\tilde{B}^\mu \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} B_{\nu\rho} \quad (2.1.26)$$

Com isto, as condições para que  $V$  independa da superfície escrevem-se como

$$D_\mu \tilde{B}^\mu = 0 , \quad F_{\mu\nu} = 0 \quad (2.1.27)$$

Estas constituem as condições de integrabilidade **locais** para teorias definidas em espaços-tempo tri-dimensionais, que generalizam a condição de curvatura nula (1.0.2) em duas dimensões. Observe entretanto, que o aparecimento de condições **locais** associa-se a estruturas das álgebras de Lie não-semisimples. Modelos chirais para uma álgebra de Lie

qualquer, modelos sigma não-lineares e modelos  $\mathbb{C}P^N$  podem facilmente serem formulados neste contexto, como teremos oportunidade de verificar adiante (4,4.1)

Podemos construir uma álgebra de Lie semi-simples com auxílio de uma dada representação. De acordo com o teorema de Levi [J] segue que, se  $\hat{\mathcal{G}}$  tem dimensão finita, e se  $\mathcal{P}$  é seu radical – ideal maximamente solúvel – e então  $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{H} + \mathcal{P}$ , onde  $\mathcal{H}$  é uma subálgebra de Lie semi-simples de  $\hat{\mathcal{G}}$ . Os exemplos considerados serão deste tipo, e portanto podemos tomar a seguinte álgebra de Lie não-semisimples. Seja  $\mathcal{G}$  uma álgebra de Lie, e  $R$  uma sua representação. Construimos então a álgebra de Lie não-semisimples  $\mathcal{G}_R$  como

$$\begin{aligned} [T_a, T_b] &= f_{ab}^c T_c \\ [T_a, P_i] &= P_j R_{ji}(T_a) \\ [P_i, P_j] &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

onde  $T_a$  constitui uma base de  $\mathcal{G}$  e  $P_i$  é uma base para o ideal abeliano  $\mathcal{P}$  (espaço de representação). O fato de  $R$  ser uma representação matricial, i.e.,

$$[R(T_a), R(T_b)] = R([T_a, T_b]) \quad (2.1.29)$$

segue da identidade de Jacobi.

No presente caso, toma-se a conexão  $A_\mu$  pertencendo a  $\mathcal{G}$ , e o tensor antisimétrico  $B_{\mu\nu}$  pertencendo a um ideal abeliano  $\mathcal{P}$ , i.e.

$$A_\mu = A_\mu^a T_a, \quad B_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}^i P_i \quad (2.1.30)$$

Com isto os resultados anteriores, i.e. (2.1.23)-(2.1.27), aplicam-se também aqui.

Observe que as equações (2.1.27) são de fato leis de conservação. Segue-se de (??) e (2.1.27) que as correntes

$$J_\mu \equiv W^{-1} \tilde{B}_\mu W \quad (2.1.31)$$

são conservadas

$$\partial^\mu J_\mu = 0 \quad (2.1.32)$$

As cargas obtidas de (2.1.32) são do mesmo gênero que aquelas em (1.2.14). De fato, uma vez que  $B_{\mu\nu}$  mora numa subálgebra abeliana invariante, o ordenamento na superfície é desnecessário:

$$\int_{S^2} d\tau d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \int_{S^2} ds_\mu J^\mu \quad (2.1.33)$$

onde  $ds_\mu \equiv d\tau d\sigma \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \frac{dx^\rho}{d\tau}$ .

Observe que (2.1.27) é invariante sob transformações de gauge locais

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu^g = g A_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} \\ B_{\mu\nu} &\rightarrow B_{\mu\nu}^g = g B_{\mu\nu} g^{-1} \end{aligned} \quad \text{com } g \equiv \exp \mathcal{G} \quad (2.1.34)$$

As correntes (2.1.31) são invariantes de gauge. As transformações (2.1.34) implicam que  $W(x) \rightarrow g(x) W(x) g(x_0)^{-1}$ , onde escolheu-se  $x_0 = \infty$ . Impondo  $g(\infty) = 1$ , e tem-se consequentemente que  $J_\mu \rightarrow J_\mu$ .

Uma vez que a conexão  $A_\mu$  é plana, i.e.  $[D_\mu, D_\nu] = 0$ , tem-se que (2.1.27) também é invariante sob transformação de gauge

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu \\ B_{\mu\nu} &\rightarrow B_{\mu\nu} + D_\mu \alpha_\nu - D_\nu \alpha_\mu \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

onde  $\alpha_\mu$  é uma vetor parametrizando a transformação.

Sob (2.1.35), as correntes (2.1.31) transformam-se como

$$J_\mu \rightarrow J_\mu + \epsilon_{\mu\nu\rho} \partial^\nu (W^{-1} \alpha^\rho W) \quad (2.1.36)$$

A álgebra das transformações de gauge (2.1.34) é isomorfa à álgebra dos  $T_a$ 's. A álgebra de (2.1.35) é abeliana, bem como a álgebra dos  $P_i$ 's. As transformações (2.1.34) e (2.1.35) não comutam. De fato, realizando primeiro (2.1.34) e então (2.1.35) tem-se

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow g A_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} \\ B_{\mu\nu} &\rightarrow g B_{\mu\nu} g^{-1} + D_\mu^{A^g} \alpha_\nu - D_\nu^{A^g} \alpha_\mu \end{aligned} \quad (2.1.37)$$

Agora, efetuando primeiro (2.1.35) e em seguida (2.1.34) tem-se

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow g A_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} \\ B_{\mu\nu} &\rightarrow g B_{\mu\nu} g^{-1} + g (D_\mu^A \alpha_\nu - D_\nu^A \alpha_\mu) g^{-1} \end{aligned} \quad (2.1.38)$$

E pode-se verificar que

$$D_\mu^{A^g} \alpha_\nu = g (D_\mu^A (g^{-1} \alpha_\nu g)) g^{-1} \quad (2.1.39)$$

De fato, tomando-se transformações infinitesimais com  $g \sim 1 + \epsilon$  ( $\epsilon \equiv \epsilon^a T_a$ ), segue que

$$\begin{aligned} [\delta_\epsilon, \delta_\alpha] A_\mu &= 0 \\ [\delta_\epsilon, \delta_\alpha] B_{\mu\nu} &= D_\mu^A [\epsilon, \alpha_\nu] - D_\nu^A [\epsilon, \alpha_\mu] \end{aligned} \quad (2.1.40)$$

Portanto a álgebra completa das transformações de gauge (2.1.34) e (2.1.35) é isomorfa a álgebra  $\mathcal{G}_R$  (2.1.28).

Estas transformações de gauge têm importante papel na construção das soluções. Caso uma solução (trivial) para a condição de curvatura nula (2.1.27) seja conhecida, então os potenciais transformados  $A_\mu$  e  $B_{\mu\nu}$  corresponderão a novas soluções não triviais.

## 2.2 Generalização para dimensões quaisquer

Espelhado nos casos acima, para cada acréscimo na dimensão dos objetos envolvidos (hipersuperfície de integração), adicionamos novos tensores para desempenhar o papel de  $B$ . Num espaço de dimensão  $d + 1$ , introduz-se um tensor antissimétrico de ordem  $d$ , que obedece uma equação de transporte paralelo do tipo

$$\frac{dV}{d\sigma_d} - \mathcal{V} \mathcal{T}(B^{(d)}, B^{(d-1)}, \dots, B^{(1)}, A^{(d)}, A^{(d-1)}, \dots, A^{(1)}, \sigma_d) = 0 \quad (2.2.41)$$

sendo que a quantidade  $\mathcal{T}$  é definida nos moldes de  $T(B, A, \tau)$  e onde  $(B^{(n)})$  denota o tensor antissimétrico de ordem  $n$  introduzido a cada novo acréscimo da dimensão;  $\sigma_n$  denota o parâmetro da  $n$ -ésimo parâmetro de uma hipersuperfície de dimensão  $d$  e cada

uma das conexões  $A^{(n)}$  é introduzida de modo a permitir o transporte paralelo ao longo das hipersuperfícies. Com isto chega-se a quantidades da forma

$$\mathcal{P} \exp \int_{\Sigma} d\sigma_1 d\sigma_2 \dots d\sigma_d \mathcal{W}^{-1} B_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_d}^{(d)} \mathcal{W} \frac{dx_1^\mu}{d\sigma_1} \frac{dx_2^\mu}{d\sigma_2} \dots \frac{dx_d^\mu}{d\sigma_d} = \hat{\mathcal{P}} \exp \int_{\Omega} d\sigma_{d+1} d\sigma_d \mathcal{V} \hat{\mathcal{K}} \mathcal{V}^{-1}$$

E novamente as condições para que  $\mathcal{V}$  independa da hipersuperfície envolverão as curvaturas das conexões  $A^{(n)}$ 's e  $\hat{\mathcal{K}} = 0$ .

Para o estudo que seguem, interessam-nos os casos em que podemos obter as condições de integrabilidade locais colocando a conexão de ordem superior  $B_{\mu_1 \dots \mu_d}$  em  $d+1$  dimensões numa subálgebra abeliana, ou seja, os casos similares ao do segundo tipo de modelos integráveis, seção 2.1.1. Uma vez que no espaço tempo de dimensão  $d+1$  o dual de uma  $d$ -forma é uma 1-forma, podemos escrever estas condições como ((2.1.27))

$$\boxed{D_\mu \tilde{B}^\mu = 0} \quad \boxed{F_{\mu\nu} = 0} \tag{2.2.42}$$

sendo  $\tilde{B}^\mu$  o dual de  $B_{\mu_1 \dots \mu_d}$ . As correntes conservadas localmente neste caso são

$$\boxed{J_\mu \equiv W^{-1} \tilde{B}_\mu W} \tag{2.2.43}$$

### 2.2.1 Construção das cargas conservadas

No caso das condições de curvatura nula locais (2.1.27) a construção das correntes conservadas é relativamente direta. De (2.1.1) segue-se que  $J_\mu \equiv W^{-1} \tilde{B}_\mu W$ , satisfaz  $\partial^\mu J_\mu = 0$ . Portanto, o número de correntes conservadas é igual a dimensão da representação de  $\mathcal{G}$  definida pela álgebra abeliana onde  $\tilde{B}^\mu$  more. Em duas dimensões, as infinitas leis de conservação estão em geral associadas a uma álgebra de dimensão infinita. Aqui o quadro é diferente. As infinitas cargas surgem das infinitas representações.

Para entender como são construídas as quantidades conservadas, tomemos o caso bi-dimensional como exemplo.

Considere que o espaço-tempo seja cilíndrico. Em um tempo fixo  $t_0$ , tomemos o loop  $\gamma_0$  que começa e termina em  $x_0$ . Em um tempo posterior  $t_1$ , tomemos o loop  $\gamma_1$  também

iniciando e terminando em  $x_0$ . A conexão plana irá nos permitir integrar a equação de transporte paralelo (2.2.41) ao longo de dois caminhos diferentes obtendo  $W(\gamma_0) = W(\gamma_{10})^{-1}W(\gamma_1)W(\gamma^{01})$ . Observe que  $W(\gamma_0)$  modifica-se por uma transformação de gauge como  $W(\gamma_0) \rightarrow g(x_0)W(\gamma_0)g^{-1}(x_0)$ . A quantidade conservada deve ser invariante de gauge. Ora, se tomarmos o traço de  $W$ , temos uma quantidade invariante. E além disto,  $\text{Tr } W(\gamma_0) = \text{Tr } W(\gamma_1)$ . Assim, qualquer potência da exponencial ordenada no caminho

$$\text{Tr} \left( P \exp \int_{\Gamma} d\sigma A_{\mu} \frac{dx^{\mu}}{d\sigma} \right)^n$$

é conservada no tempo.

Para o caso de dimensões maiores, a construção é semelhante, mas devemos substituir os loops  $\gamma$ 's por hipersuperfícies. Apenas para dar uma noção da construção, segue abaixo um esquema comparativo.

	1+1	d+1
Conexão	$A_\mu$ definido numa curva $\Gamma$	$B_{\mu\nu\sigma\dots\rho}$ definido numa $d$ -superfície $\Sigma$
Curvatura	$F_{\mu\nu}$ definida num volume $\Sigma$ ; $\partial\Sigma = \Gamma$	$\mathcal{K}(B, A)$ def. num $d + 1$ volume $\Omega$ ; $\partial\Omega = \Sigma$
loop de Wilson	$W = \mathcal{P} \exp \left( \int_\Sigma W^{-1} F_{\mu\nu} W \right)$	$V_c = \hat{\mathcal{P}} \exp \left( \int_\Omega V \mathcal{K} V^{-1} \right)$
Condições de Integrabilidade	$F = 0$	$\mathcal{K} = 0$ $(F = 0, DB = 0)$
Quantidades Conservadas	$\text{Tr} (W(\Gamma_t))^N$	$\text{Tr} (V(\Omega_t))^N$

## Capítulo 3

# Cargas conservadas e submodelos

Como mostrado na seção 2.1.1 muitas das teorias cujas equações de movimento podem ser escritas como uma condição de curvatura nula nos moldes do que foi exposto no Capítulo 2, não apresentam um número infinito de cargas conservadas, mas estas aparecem em **submodelos integráveis**.

Estabelecemos em [FL] contextos nos quais submodelos integráveis aparecem. As condições para tal relacionam-se a propriedades de espaços homogêneos, sendo que muitas teorias de campos podem aí serem formuladas. Construimos uma representação de curvatura nula para modelos sigma não lineares em espaços homogêneos, definidos em um espaço tempo de qualquer dimensão seguindo a construção proposta.

Esclareceremos aqui as condições suficientes para o aparecimento de submodelos integráveis dentro de uma teoria que admite representação de curvatura nula. Para tal, estudaremos teorias de campos invariante de Lorentz em espaços-tempo de dimensão quaisquer definidas sobre um espaço homogêneo. Mostramos que as equações de movimento são determinadas por uma representação  $R^S$  do subgrupo  $K$  definido pelo espaço tangente de  $G/K$ . A construção de submodelos integráveis mostra-se então relacionada a representações de  $G$  que contenham  $R^S$  em seu branching em termos de representações de  $K$ . O submodelo é de fato determinado pelo vínculo de que a condição de curvatura nula,

tomada em tais representações impõe à teoria original. O número de leis de conservação do submodelo é igual a soma da dimensão das representações de  $G$  contendo  $R^S$  e tendo o mesmo conjunto de vínculos. Em muitos casos este número é infinito.

Observe que o critério de construção de submodelos aqui exposto não exaure todas possibilidades. Entretanto os mesmos apontam a aspectos e estruturas relevantes que certamente são importantes para o estudo da integrabilidade. Particularmente, os vínculos que conduzem aos submodelos talvez possam apresentar interpretações como condições de autodualidade para a teoria original.

### 3.1 Teorias integráveis em espaços quociente

Considere um grupo de Lie  $G$  com uma álgebra de Lie  $\mathcal{G}$  e um subgrupo  $K$  com álgebra de Lie  $\mathcal{K}$ . Temos então a decomposição

$$\mathcal{G} = \mathcal{S} + \mathcal{K} \quad (3.1.1)$$

onde denotamos por  $\mathcal{S}$  o complemento ortogonal de  $\mathcal{K}$  em  $\mathcal{G}$ . Temos então

$$[\mathcal{K}, \mathcal{K}] \subset \mathcal{K} \quad [\mathcal{K}, \mathcal{S}] \subset \mathcal{S} \quad [\mathcal{S}, \mathcal{S}] \subset \mathcal{S} + \mathcal{K} \quad (3.1.2)$$

Denotaremos por  $\Pi$  e  $(1 - \Pi)$  as projeções ortogonais de  $\mathcal{G}$  em  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{K}$  respectivamente

$$\Pi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{S} \quad (1 - \Pi) : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{K} \quad (3.1.3)$$

Interessa-nos modelos definidos no espaço quociente  $G/K$ . Os campos de tais modelos são tomados como o conjunto de coordenadas locais  $\zeta^i$  em  $G/K$ ,  $i = 1, 2, \dots, \dim G/K$ . Localmente podemos pensar em  $G$  com o produto direto de  $G/K$  e  $K$ , e portanto um conjunto de coordenadas locais em  $G$  pode ser tomado como as coordenadas  $\zeta^i$  de  $G/K$  e algum conjunto de coordenadas em  $K$ .

Consideraremos teorias em um espaço-tempo de dimensão  $d + 1$   $M$  com coordenadas  $x^\mu$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, d$ , e portanto os campos  $\zeta^i$  serão mapeamentos de  $M$  a  $G/K$ .

Seguindo (2.1.28), introduzimos uma álgebra de Lie não-semisimples construída a partir de  $\mathcal{G}$  e sua representação adjunta

$$\begin{aligned} [T_a, T_b] &= f_{ab}^c T_c \\ [T_a, P^\psi(T_b)] &= f_{ab}^c P^\psi(T_c) \\ [P^\psi(T_a), P^\psi(T_b)] &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

com  $T_a$  sendo uma base para  $\mathcal{G}$  e  $P^\psi$  denotando o espaço vetorial da representação adjunta (onde o peso máximo é a raiz mais alta  $\psi$  de  $\mathcal{G}$ ,  $R_{cb}^\psi(T_a) = f_{ab}^c$ ).

Denotamos  $S_i$  e  $K_r$  como sendo os geradores do subespaço  $S$  e da subálgebra  $\mathcal{K}$  respectivamente ( $i = 1, 2, \dots, \dim G/K$ ,  $r = 1, 2, \dots, \dim K$ ). Introduzimos então os potenciais

$$A_\mu \equiv g^{-1} \partial_\mu g = g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \zeta^i} \frac{\partial \zeta^i}{\partial x^\mu} \equiv A_\mu^a T_a \quad (3.1.5)$$

$$\tilde{B}_\mu \equiv P^\psi(\Pi(g^{-1} \partial_\mu g)) = A_\mu^i P^\psi(S_i) \quad (3.1.6)$$

onde  $g$  é uma elemento de  $G$ .

Uma vez que a conexão  $A_\mu$  é puro gauge, a condição  $F_{\mu\nu} = 0$  em (2.2.42) é satisfeita automaticamente. Portanto, para obtermos uma condição de curvatura nula local devemos somente impor que a divergência covariante de  $\tilde{B}_\mu$  se anule (ver seção 2.1.1). Esta será tomada como as equações de movimento de uma teoria de campo em  $G/K$ . De fato, o número de tais equações se iguala ao número de campos  $\zeta^i$ , i.e à dimensão de  $G/K$ . Portanto temos

$$D^\mu \tilde{B}_\mu = P^\psi(\Pi(\partial^\mu(g^{-1} \partial_\mu g))) + \left[ (1 - \Pi)(g^{-1} \partial^\mu g), P^\psi(\Pi(g^{-1} \partial_\mu g)) \right] = 0 \quad (3.1.7)$$

onde, desde que trabalhamos na representação adjunta, utilizamos o fato de que

$$\left[ \Pi(g^{-1} \partial^\mu g), P^\psi(\Pi(g^{-1} \partial_\mu g)) \right] = A^{\mu,i} A_\mu^j \left[ S_i, P^\psi(S_j) \right] = A^{\mu,i} A_\mu^j P^\psi([S_i, S_j]) = 0 \quad (3.1.8)$$

A ação correspondente a (3.1.7) é

$$S = \frac{1}{2} \int d^{d+1}x \operatorname{Tr}(\Pi(g^{-1} \partial_\mu g))^2 = \frac{1}{2} \int d^{d+1}x A_\mu^i A^{j,\mu} \operatorname{Tr}(S_i S_j) \quad (3.1.9)$$

Podemos reescrever a equação (3.1.7) como

$$(\partial^\mu A_\mu^i + A^{\mu,r} A_\mu^j R_{ij}^S(K_r)) P^\psi(S_i) = 0 \quad (3.1.10)$$

onde  $R_{ij}^S(K_r)$  são as matrizes da representação da subálgebra  $\mathcal{K}$  definidas pelo subespaço  $\mathcal{S}$

$$[K_r, P^\psi(S_j)] = P^\psi(S_i) R_{ij}^S(K_r) \quad (3.1.11)$$

De fato, a representação adjunta  $R^\psi$  de  $\mathcal{G}$  se decompõe, em termos das representações da subálgebra  $\mathcal{K}$ , como

$$R^\psi = R^S + R^K \quad (3.1.12)$$

onde  $R^S$  e  $R^K$  são as representações de  $\mathcal{K}$  definidas pelos subespaços  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{K}$  respectivamente. De fato,  $R^K$  é a adjunta de  $\mathcal{K}$ . Repare que as mesmas não são necessariamente irredutíveis.

De acordo com (2.2.43), as correntes conservadas de tais teorias são dadas por (comparando (2.1.5) e (3.1.5) vemos que  $W \equiv g^{-1}$ )

$$J_\mu = A_\mu^i g P^\psi(S_i) g^{-1} = A_\mu^i R_{ai}^\psi(g) P^\psi(T_a) \equiv J_\mu^a P^\psi(T_a) \quad (3.1.13)$$

### 3.2 A construção de submodelos integráveis

Apesar da teoria descrita anteriormente possuir uma representação em termos de uma curvatura nula local (2.2.42), a mesma ainda não apresenta um número infinito de correntes conservadas. De fato, como observa-se de (3.1.13) o número de correntes é o mesmo que a dimensão de  $\mathcal{G}$ . Entretanto as equações de movimento (3.1.10) são determinadas pela decomposição da representação adjunta de  $\mathcal{G}$  em representações do subgrupo  $\mathcal{K}$ . Mais precisamente, como mostrado em (3.1.11), o relevante são as representações de  $\mathcal{K}$  definidas pelo subespaço  $\mathcal{S}$ . Portanto, qualquer representação de  $\mathcal{G}$  que contenha, em suas regras de branching aquela representação de  $\mathcal{K}$  dada por  $\mathcal{S}$ , pode ser usada para escrever uma representação de curvatura nula para o modelo. A seguir mostramos como implementar tal construção.

Seja  $R^\lambda$  uma representação \* de  $G$  que, quando decomposta em representações do subgrupo  $K$  apresente a representação  $R^S$  de  $K$  definida pelo subespaço  $S$  ao menos uma vez, i.e.

$$R^\lambda = R^S + \text{algo} \quad (3.2.1)$$

Introduzimos a álgebra de Lie não-semisimples

$$\begin{aligned} [T_a, T_b] &= f_{ab}^c T_c \\ [T_a, P_\alpha^\lambda] &= P_\beta^\lambda R_{\beta\alpha}^\lambda(T_a) \\ [P_\alpha^\lambda, P_\beta^\lambda] &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

com  $P_\alpha^\lambda$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, \dim R^\lambda$ , sendo uma base do espaço de representação de  $R^\lambda$ .

Segundo (3.1.6), definimos os potenciais

$$\begin{aligned} A_\mu &\equiv g^{-1} \partial_\mu g \equiv A_\mu^a T_a \\ \tilde{B}_\mu^\lambda &\equiv A_\mu^i P_i^\lambda \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

onde  $P_i^\lambda$  corresponde a base do subespaço de  $R^\lambda$  que carrega a representação  $R^S$  de  $K$  definida por (3.1.11), e que transforma-se exatamente como  $P^\psi(S_i)$ , i.e.

$$[K_r, P_j^\lambda] = P_i^\lambda R_{ij}^S(K_r) \quad (3.2.4)$$

Repare que se  $R^S$  é redutível podemos reescalar a base de cada componente irredutível independentemente sem afetar a relação entre (3.1.11) e (3.2.4).

Então temos

$$D^\mu \tilde{B}_\mu^\lambda = \left( \partial^\mu A_\mu^i P_i^\lambda + A_\mu^r A_\mu^i [K_r, P_i^\lambda] \right) + A_\mu^i A_\mu^j [S_i, P_j^\lambda] \quad (3.2.5)$$

Repare que os primeiros dois termos no membro direito de (3.2.5) são ideéticos a (3.1.7) (ou (3.1.10)) e portanto às equações de movimento da teoria em  $G/K$  definida anteriormente.

---

\* não necessariamente irredutível

Entretanto, ao contrário de (3.1.8) que é uma identidade, o último termo no membro direito de (3.2.5) em geral não se anula.

Portanto, o sumodelo de (3.1.10) definido pelas equações

$$\partial^\mu A_\mu^i + A^{\mu,r} A_\mu^j R_{ij}^S(K_r) = 0 \quad (3.2.6)$$

$$A_\mu^i A^{j,\mu} \left( [S_i, P_j^\lambda] + [S_j, P_i^\lambda] \right) = 0 ; \quad i, j = 1, 2, \dots \dim G/K \quad (3.2.7)$$

admite uma representação em termos de curvatura nula

$$D^\mu \bar{B}_\mu^\lambda = 0 \quad F_{\mu\nu} = 0 \quad (3.2.8)$$

e portanto possui as correntes conservadas

$$J_\mu^\lambda \equiv A_\mu^i g P_i^\lambda g^{-1} = P_\alpha^\lambda R_{\alpha i}^\lambda(g) A_\mu^i \equiv J_\mu^{\lambda,\alpha} P_\alpha^\lambda \quad (3.2.9)$$

onde  $P_\alpha^\lambda$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots \dim R^\lambda$ , é uma base de  $R^\lambda$ .

Uma vez que  $S_i$  e  $P_i^\lambda$  transformam-se sob a mesma representação  $R^S$  de  $\mathcal{K}$ , segue que

$$\left( [S_i, P_j^\lambda] + [S_j, P_i^\lambda] \right)$$

transforma-se sob  $(R^S \otimes R^S)_s$ , onde o subscrito  $s$  denota a parte simétrica do produto tensorial. Considere agora a decomposição

$$(R^S \otimes R^S)_s = \sum_\gamma R^\gamma(\mathcal{K}) \quad (3.2.10)$$

e

$$R^\lambda = R^S(\mathcal{K}) + \sum_\beta R^\beta(\mathcal{K}) \quad (3.2.11)$$

onde  $R^\gamma(\mathcal{K})$  e  $R^\beta(\mathcal{K})$  são representações irredutíveis de  $\mathcal{K}$ .

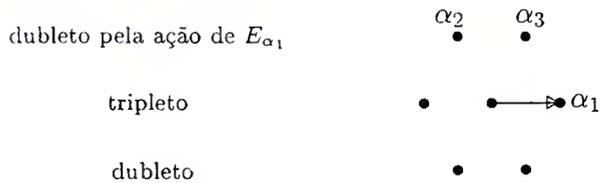
Já que  $\left( [S_i, P_j^\lambda] + [S_j, P_i^\lambda] \right)$  corresponde a um dado estado em  $R^\lambda$ , nunca terá de se anular enquanto tal estado pertencer a uma representação  $R^\gamma(\mathcal{K})$  em (3.2.10) que não apareça em (3.2.11). Consequentemente, os vínculos sobre os campos (3.2.7) que realmente são efetivos são os correspondentes às representações  $R^\gamma(\mathcal{K})$  em (3.2.10) que coincidam com uma das  $R^\beta(\mathcal{K})$ 's em (3.2.11).

Conseqüentemente, caso o grupo  $G$  possua um número de representações  $R^\lambda$ 's (que pode ser infinito) preenchendo os dois seguintes requisitos

1. A decomposição de tais representações de  $G$  em representações de  $K$  apresente, ao menos uma vez, a representação  $R^S$  de  $K$  definida pelo subespaço  $\mathcal{S}$  (veja (3.1.11))
2. A relação (3.2.7), em qualquer destas representações, implique o mesmo vínculo sobre os campos. Em outras palavras, as representações  $R^\gamma(\mathcal{K})$ 's em (3.2.10), aparecendo na decomposição de  $R^\lambda$  em (3.2.11), sejam as mesmas para todos  $R^\lambda$ 's.

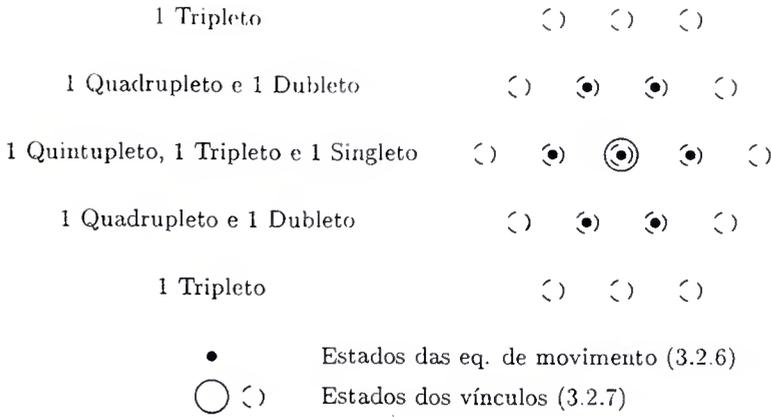
Então o submodelo definido em (3.2.6)-(3.2.7) possui um número de correntes conservadas, dadas por (3.2.9), igual a soma da dimensão das representações  $R^\lambda$ 's.

Para ilustrar, tomemos o exemplo de uma teoria formulada num espaço quociente  $G/H$  onde  $G = SU(3)$  e  $H = SU(2)$ . A equação de movimento (3.1.10) faz menção aos estados da representação adjunta. Para o caso de tomarmos o  $SU(2)$  gerado pelo operador associado à raiz  $\alpha_1$ , a ação descrita por (3.1.11) corresponde a quebrar a representação adjunta em dois dubletos e um tripleto de  $SU(2)$ :



Decomposição da rep. adjunta em termos da subálgebra  $\mathcal{K} = su(2)$  gerada por  $E_{\alpha_1}$ .

Para iniciarmos a construção das infinitas cargas conservadas, tomamos, por exemplo, a representação 27 de  $su(3)$ . Vemos que esta preenche o quesito (1) acima: a decomposição em termos do  $\mathcal{K} = su(2)$  gerada por  $E_{\alpha_1}$  contém os dois dubletos e o tripleto que decrevem a equação de movimento (3.1.11); a relação (3.2.11) é satisfeita:



decomposição da representação **27** de  $SU(3)$  em termos de representações de  $SU(2)$ .

Os outros estados devem satisfazer o vínculo (3.2.7).

### 3.2.1 O papel dos estados de singlete

Discutiremos aqui um caso particular onde pode-se facilmente construir-se submodelos integráveis com um número infinito de correntes conservadas. Suponha que  $G$  possua uma representação  $R^\lambda$  que, quando decomposta em representações de  $\mathcal{K}$  apresente  $R^S$  como em (3.2.1), mas continha também um estado de singlete  $P_\Lambda^\lambda$  da subálgebra  $\mathcal{K}$ , i.e.†

$$[\mathcal{K}, P_\Lambda^\lambda] = 0 \tag{3.2.12}$$

Considerando representações que sejam produtos tensoriais de  $R^\lambda$  consigo mesmo obtêm-se várias representações de  $\mathcal{K}$  equivalentes a  $R^S$ , que são dadas pelo produto tensorial de  $R^S$  com cópias do singlete  $P_\Lambda^\lambda$ . No caso de  $R^\lambda \otimes R^\lambda$  temos que  $R^S \otimes P_\Lambda^\lambda$  e  $P_\Lambda^\lambda \otimes R^S$  são equivalentes a  $R^S$ . De fato, de (3.2.4) segue

$$[1 \otimes K_r + K_r \otimes 1, P_\Lambda^\lambda \otimes P_j^\lambda] = (P_\Lambda^\lambda \otimes P_i^\lambda) R_{ij}^S(K_r) \tag{3.2.13}$$

Para o caso de  $(\otimes R^\lambda)^n$  qualquer representação da forma  $(\otimes P_\Lambda^\lambda)^l \otimes R^S (\otimes P_\Lambda^\lambda)^{n-l-1}$  equivale a  $R^S$ . Portanto, seguindo (3.2.3) introduzimos os potenciais

$$A_\mu^{(n)} \equiv A_\mu^a \sum_{l=0}^{n-1} (\otimes 1)^l \otimes T_a (\otimes 1)^{n-l-1} \tag{3.2.14}$$

---

†Para os casos onde  $\mathcal{K}$  é abeliana,  $R^\lambda$  decompõem-se somente em estados singletos. Então exigimos que  $P_\Lambda^\lambda$  seja um singlete de carga zero.

$$\tilde{B}_\mu^{\lambda(n)} \equiv A_\mu^i \sum_{l=0}^{n-1} c_{n,l} \left( \otimes P_\Lambda^\lambda \right)^l \otimes P_i^\lambda \left( \otimes P_\Lambda^\lambda \right)^{n-l-1} \quad (3.2.15)$$

onde  $c_{n,l}$  são constantes. Introduzimos tais constantes porque, como observado anteriormente - (3.2.4), podemos reescalonar a base de cada componente irredutível das representações de  $\mathcal{K}$  independentemente, sem afetar as equações de movimento. Somente os vínculos que definem o submodelo são afetados pelas constantes  $c_{n,l}$ .

As correspondentes condições de curvatura nula (3.2.8) fornecem, neste caso, as seguintes equações de movimento (veja (3.2.6)-(3.2.7))

$$\partial^\mu A_\mu^i + A^{\mu,r} A_\mu^j R_{ij}^S(K_r) = 0 \quad (3.2.16)$$

e os vínculos

$$A_\mu^i A^{j,\mu} \left[ \left( \sum_{m=0}^{n-1} (\otimes 1)^m \otimes S_i (\otimes 1)^{n-m-1} \right), \left( \sum_{l=0}^{n-1} c_{n,l} \left( \otimes P_\Lambda^\lambda \right)^l \otimes P_j^\lambda \left( \otimes P_\Lambda^\lambda \right)^{n-l-1} \right) \right] = 0 \quad (3.2.17)$$

com  $i, j = 1, 2, \dots, \dim G/K$ .

Portanto, uma vez que (3.2.16) são as mesmas equações que (3.1.10) temos um submodelo do modelo formulado em  $G/K$ . A subclasse de soluções é determinada pelos vínculos (3.2.17).

As correntes conservadas obtidas daa condição de curvatura nula são (veja (3.2.9))

$$\begin{aligned} J_\mu^{\lambda(n)} &\equiv A_\mu^i (\otimes g)^n \left( \sum_{l=0}^{n-1} c_{n,l} \left( \otimes P_\Lambda^\lambda \right)^l \otimes P_i^\lambda \left( \otimes P_\Lambda^\lambda \right)^{n-l-1} \right) (\otimes g^{-1})^n \\ &= A_\mu^i \left( \sum_{l=0}^{n-1} c_{n,l} V_{\alpha_1}(g) \dots V_{\alpha_l}(g) R_{\alpha_{l+1}i}^\lambda(g) V_{\alpha_{l+2}}(g) \dots V_{\alpha_n}(g) \right) P_{\alpha_1}^\lambda \otimes \dots \otimes P_{\alpha_n}^\lambda \\ &\equiv J_\mu^{\lambda,(\alpha_1 \dots \alpha_n)} P_{\alpha_1}^\lambda \otimes \dots \otimes P_{\alpha_n}^\lambda \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

onde

$$g P_\Lambda^\lambda g^{-1} = P_\alpha^\lambda V_\alpha(g) \quad (3.2.19)$$

Consequenteente, caso possamos escolher as constantes  $c_{n,l}$  de modo a (3.2.17) implicarem - para qualquer  $n$  - os mesmos vínculos sobre o modelo, teremos um número infinito

de de correntes conservadas locais para o submodelo. Observe que, neste caso, temos

$$J_{\mu}^{\lambda,(\alpha_1 \dots \alpha_n)} = \sum_{l=0}^{n-1} c_{n,l} V_{\alpha_1}(g) \dots V_{\alpha_l}(g) J_{\mu}^{\lambda, \alpha_{l+1}}(g) V_{\alpha_{l+2}}(g) \dots V_{\alpha_n}(g) \quad (3.2.20)$$

onde  $J_{\mu}^{\lambda, \alpha} = A_{\mu}^i R_{\alpha i}^{\lambda}$ , são as conservadas para o caso  $n = 1$ .

Caso existam singletos adicionais satisfazendo (3.2.12), podemos utiliza-los para construir novas correntes e submodelos. De fato, os conceitos algébricos relevantes aqui são os do kernel da ação adjunta da subálgebra  $\mathcal{K}$  na álgebra não-semisimples (3.2.2), já que  $P_{\Lambda}^{\lambda} \in Ker(Ad_{\mathcal{K}})$ .

### 3.3 O caso de espaços simétricos

Consideraremos agora espaços quocientes  $G/K$  que são espaços simétricos [He]. Em tais casos existe um automorfismo involutivo  $\sigma$ ,  $\sigma^2 = 1$ , tal que  $K$  é o subgrupo invariante. Então decompomos a álgebra  $G$  como em (3.1.1) de modo que  $\mathcal{S}$  corresponda ao subespaço ímpar, i.e.

$$\sigma(\mathcal{S}) = -\mathcal{S} ; \quad \sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{K} \quad (3.3.1)$$

Assim, ao invés de (3.1.2) temos

$$[\mathcal{K}, \mathcal{K}] \subset \mathcal{K} \quad [\mathcal{K}, \mathcal{S}] \subset \mathcal{S} \quad [\mathcal{S}, \mathcal{S}] \subset \mathcal{K} \quad (3.3.2)$$

A projeção  $\Pi$ , introduzida em (3.1.3), pode aqui ser realizada pelo automorfismo  $\sigma$ . De fato,  $(1 - \sigma)$  e  $(1 + \sigma)$  mapeiam  $\mathcal{G}$  em  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{K}$  respectivamente.

Para cada elemento de  $g \in G$  definimos a chamada variável principal [OP, EF] como

$$y(g) \equiv g \sigma(g)^{-1} \quad (3.3.3)$$

Observe que  $y(gk) = y(g)$  para  $k \in K$ , e portanto  $y(g)$  é definida no quociente  $G/K$ . Há de fato uma correspondência um a um entre as variáveis do espaço quociente e  $y$ , e portanto  $y$  pode ser usada para parametrizar  $G/K$ . Repare que  $\sigma(y) = y^{-1}$ .

O modelo sigma não-linear sobre um espaço simétrico  $G/K$ , definido em um espaço-tempo  $M$  de dimensão  $d + 1$ , é dado pela ação

$$S \equiv \frac{1}{2} \int d^{d+1}x \operatorname{Tr} (y^{-1} \partial_\mu y)^2 \quad (3.3.4)$$

que corresponde às equações de movimento

$$\partial^\mu (y^{-1} \partial_\mu y) = 0 \quad (3.3.5)$$

Tais teorias admitem um representação simples em termos das condições de curvatura nula local (2.2.42). Considere uma álgebra de Lie não-semisimples (3.1.4) e introduza

$$\begin{aligned} A_\mu &\equiv y^{-1} \partial_\mu y \\ \tilde{B}_\mu &\equiv P^\psi (y^{-1} \partial_\mu y) \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Claramente,  $F_{\mu\nu} = 0$ , e a condição  $D^\mu \tilde{B}_\mu = 0$  equivale a (3.3.5).

Repare que

$$y^{-1} \partial_\mu y = \sigma(g) (g^{-1} \partial_\mu g - \sigma(g^{-1} \partial_\mu g)) \sigma(g)^{-1} \quad (3.3.7)$$

Portanto, efetuando a transformação de gauge (2.1.34) com  $\sigma(g)^{-1}$  obtém-se

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow g^{-1} \partial_\mu g \\ \tilde{B}_\mu &\rightarrow P^\psi ((1 - \sigma) (g^{-1} \partial_\mu g)) \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Repare que estes potenciais estão no mesmo gauge que aqueles em (3.1.6). Portanto a análise apresentada em (3.1.7)-(3.1.13), bem como a discussão sobre os submodelos integráveis da seção 3.2, permanecem válidas para o presente caso.

### 3.4 O caso da variedade do grupo

O modelo sigma não-linear em uma variedade de grupo  $G$ , definida sobre um espaço-tempo  $M$  de dimensão  $d + 1$ , é dada por

$$S \equiv \frac{1}{2} \int dx^{d+1} \operatorname{Tr} (g^{-1} \partial_\mu g)^2 ; \quad g \in G \quad (3.4.1)$$

e as correspondentes equações de movimento são

$$\partial^\mu (g^{-1} \partial_\mu g) = 0 ; \quad \text{or} \quad \partial^\mu (\partial_\mu g g^{-1}) = 0 \quad (3.4.2)$$

Estes modelos já foram estudados em [GMS] utilizando a mesma abordagem de curvatura nula explicitada no Capítulo 2, e alguns submodelos interessantes, bem como as correspondentes cargas conservadas foram construídos. Entretanto, qualquer grupo  $G$  é um espaço simétrico [EF] e portanto a teoria (3.4.1) pode ser estudada com auxílio das técnicas das seções 3.1 e 3.3. Este formalismo sistematiza a construção dos submodelos integráveis. O espaço simétrico relevante é  $G \otimes G / G_D$ , onde os elementos do grupo tensorial  $G \otimes G$  são da forma  $g_1 \otimes g_2$ , com  $g_1, g_2 \in G$ , e  $G_D$  é o subgrupo diagonal com elementos  $g \otimes g$ , com  $g \in G$ . O automorfismo involutivo é

$$\sigma (g_1 \otimes g_2) = g_2 \otimes g_1 \quad (3.4.3)$$

e de fato  $G_D$  é o subgrupo invariante sob  $\sigma$ .

O grupo  $G$  é difeomorfo a  $G \otimes G / G_D$ , com o difeomorfismo  $G \otimes G \rightarrow G$  sendo dado por  $g_1 \otimes g_2 \rightarrow g_1 g_2^{-1}$ . Obviamente o kernel é  $G_D$  mesmo.

A variável principal  $y$  introduzida em (3.3.3) é dada por

$$y (g_1 \otimes g_2) = g_1 \otimes g_2 \sigma (g_1 \otimes g_2)^{-1} = g_1 g_2^{-1} \otimes (g_1 g_2^{-1})^{-1} \quad (3.4.4)$$

Observe que  $y$  é sempre o produto tensorial de dado elemento do grupo com seu inverso. Como  $y$  parametriza  $G \otimes G / G_D$  e uma vez que tem a mesma dimensão que  $G$ , podemos sempre escolher um gauge onde  $y = g \otimes g^{-1}$ , onde  $g \in G$ . Portanto, a equação de movimento (3.3.5) torna-se

$$\partial^\mu (y^{-1} \partial_\mu y) = \partial^\mu (g^{-1} \partial_\mu g) \otimes 1 - 1 \otimes \partial^\mu (\partial_\mu g g^{-1}) = 0 \quad (3.4.5)$$

Assim o modelo sigma não-linear definido em  $G \otimes G / G_D$  e  $G$  são os mesmos, uma vez que (3.4.2) e (3.4.5) são equivalentes.

Seguindo (3.3.6) podemos introduzir os potenciais  $A_\mu$  e  $\tilde{B}_\mu$ , que no gauge (3.3.8) são dados por

$$\begin{aligned} A_\mu &= p^{-1} \partial_\mu p \otimes 1 - 1 \otimes \partial_\mu p p^{-1} = (p^{-1} \otimes p) \partial_\mu (p \otimes p^{-1}) \\ \tilde{B}_\mu &= P^\psi \left( (1 - \sigma) (p^{-1} \partial_\mu p \otimes 1 - 1 \otimes \partial_\mu p p^{-1}) \right) \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

onde  $p$  é tal que  $pp = g$ , com  $g$  sendo o elemento do grupo que define  $y$  (de fato  $y(p \otimes p^{-1}) = g \otimes g^{-1}$ , veja (3.3.3) e (3.4.3)).

As condições de curvatura nula locais (2.2.42) implicam então as equações de movimento (3.4.5), pois  $F_{\mu\nu} = 0$  é trivialmente satisfeito uma vez que  $A_\mu$  é da forma de puro gauge, e

$$D^\mu \tilde{B}_\mu = (1 - \sigma) \left( (\partial^\mu (p^{-1} \partial_\mu p) + \partial^\mu (\partial_\mu p p^{-1}) + [p^{-1} \partial_\mu p, \partial^\mu p p^{-1}]) \otimes 1 \right) = 0 \quad (3.4.7)$$

é equivalente a (3.4.5).

As correntes conservadas (2.2.43) são dadas por

$$J_\mu = (p \otimes p^{-1}) \tilde{B}_\mu (p^{-1} \otimes p) = (\partial_\mu g g^{-1}) \otimes 1 - 1 \otimes (g^{-1} \partial_\mu g) \quad (3.4.8)$$

que correspondem às correntes de Noether associadas à invariância de (3.4.1) sob translações globais à esquerda e à direita por elementos de  $G$ .

Consideremos agora a construção de submodelos integráveis da teoria (3.4.1), que possuem um grande número de correntes conservadas, utilizando as idéias da seção 3.2. A álgebra  $\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}$  de  $G \otimes G$  decompõe-se sob  $\sigma$  como (veja (3.3.1))

$$\mathcal{G} \oplus \mathcal{G} = \mathcal{S} + \mathcal{K} \quad (3.4.9)$$

com

$$\mathcal{S} \equiv \{ \mathcal{T}_a^{\mathcal{S}} \equiv 1 \otimes T_a - T_a \otimes 1 \} ; \quad \mathcal{K} \equiv \{ \mathcal{T}_a^{\mathcal{K}} \equiv 1 \otimes T_a + T_a \otimes 1 \} \quad (3.4.10)$$

onde  $T_a$ ,  $a = 1, 2, \dots, \dim G$ , são os geradores da álgebra  $\mathcal{G}$  de  $G$  ( $[T_a, T_b] = f_{ab}^c T_c$ ). Assim

$$[\mathcal{T}_a^{\mathcal{K}}, \mathcal{T}_b^{\mathcal{K}}] = f_{ab}^c \mathcal{T}_c^{\mathcal{K}} ; \quad [\mathcal{T}_a^{\mathcal{K}}, \mathcal{T}_b^{\mathcal{S}}] = f_{ab}^c \mathcal{T}_c^{\mathcal{S}} ; \quad [\mathcal{T}_a^{\mathcal{S}}, \mathcal{T}_b^{\mathcal{S}}] = f_{ab}^c \mathcal{T}_c^{\mathcal{K}} \quad (3.4.11)$$

De fato, denotando

$$p^{-1}\partial_\mu p \pm \partial_\mu p p^{-1} \equiv A_\mu^\pm \equiv A_\mu^{\pm,a} T_a \quad (3.4.12)$$

obtemos de (3.4.6)

$$\begin{aligned} A_\mu &= \frac{1}{2} A_\mu^{-,a} \mathcal{T}_a^\mathcal{K} + \frac{1}{2} A_\mu^{+,a} \mathcal{T}_a^\mathcal{S} \\ \tilde{B}_\mu &= A_\mu^{+,a} P^\psi (\mathcal{T}_a^\mathcal{S}) \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

As equações de movimento são então escritas como

$$\partial^\mu A_\mu^{+,a} + \frac{1}{2} f_{bc}^a A_\mu^{-,b} A^{+,c,\mu} = 0 \quad (3.4.14)$$

Como discutido na seção 3.2, a parte de  $A_\mu$  que realmente contribui para as equações de movimento são aquelas de  $\mathcal{K}$ . Além disto, estas equações são determinadas pelas representações de  $\mathcal{K}$  definidas pelo subespaço  $\mathcal{S}$ . Mas  $\mathcal{K}$ , a álgebra  $G_D$ , é isomorfa a  $\mathcal{G}$  e portanto tal representação é a adjunta. Conseqüentemente, como observado em 3.2, qualquer representação de  $G \otimes G$  que contenha a adjunta de  $G$  em sua regra de decomposição pode ser utilizada para fornecer uma curvatura nula para submodelos da teoria (3.4.1). Dadas duas representações  $R^\lambda$  e  $R^{\lambda'}$  de  $G$  pode-se construir uma representação de  $G \otimes G$  tomando-se o produto tensorial das mesmas. Portanto, pode-se procurar representações  $R^\lambda$  e  $R^{\lambda'}$  tais que

$$R^\lambda \otimes R^{\lambda'} = \text{adjunta de } G + \text{algo} \quad (3.4.15)$$

A construção da curvatura nula para submodelos de (3.4.1) (com número infinito de correntes conservadas) é feita seguindo as idéias descritas na seção 3.2.

### 3.4.1 O exemplo de $SU(2)$

Podemos ilustrar esta idéias com o exemplo de  $SU(2)$  onde as relações de comutação são dadas por

$$[T_i, T_j] = i \varepsilon_{ijk} T_k ; \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (3.4.16)$$

As equações de movimento são aquelas de (3.4.14) com  $f_{ab}^c$  substituído por  $i\varepsilon_{ijk}$ . Utilizamos o fato de que a adjunta (tripletto) de  $SU(2)$  poder ser obtida pelo produto tensorial de dois dubletos, i.e.

$$2 \otimes 2 = 3 + 1 \quad (3.4.17)$$

Denotando a base dos dubletos por  $P_{\pm 1/2}^{(1/2)}$  temos ( $T_{\pm} \equiv T_1 \pm iT_2$ )

$$\left[ T_3, P_{\pm 1/2}^{(1/2)} \right] = \pm \frac{1}{2} P_{\pm 1/2}^{(1/2)} ; \quad \left[ T_{\pm}, P_{\mp 1/2}^{(1/2)} \right] = P_{\pm 1/2}^{(1/2)} \quad (3.4.18)$$

Para o espaço de representação do produto tensorial toma-se a base

$$\begin{aligned} P_1^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} &\equiv i \left( P_{1/2}^{(1/2)} \otimes P_{1/2}^{(1/2)} - P_{-1/2}^{(1/2)} \otimes P_{-1/2}^{(1/2)} \right) \\ P_2^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} &\equiv P_{-1/2}^{(1/2)} \otimes P_{1/2}^{(1/2)} + P_{-1/2}^{(1/2)} \otimes P_{-1/2}^{(1/2)} \\ P_3^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} &\equiv -i \left( P_{1/2}^{(1/2)} \otimes P_{-1/2}^{(1/2)} + P_{-1/2}^{(1/2)} \otimes P_{1/2}^{(1/2)} \right) \\ P_{\Lambda}^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} &\equiv P_{-1/2}^{(1/2)} \otimes P_{1/2}^{(1/2)} - P_{1/2}^{(1/2)} \otimes P_{-1/2}^{(1/2)} \end{aligned} \quad (3.4.19)$$

Pode-se verificar que estas satisfazem

$$\begin{aligned} \left[ \mathcal{T}_i^{\mathcal{K}}, P_j^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \right] &= i \varepsilon_{ijk} P_k^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} & \left[ \mathcal{T}_i^{\mathcal{S}}, P_j^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \right] &= i \delta_{ij} P_{\Lambda}^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \\ \left[ \mathcal{T}_i^{\mathcal{K}}, P_{\Lambda}^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \right] &= 0 & \left[ \mathcal{T}_i^{\mathcal{S}}, P_{\Lambda}^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \right] &= -i P_i^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

Introduzimos então os potenciais

$$\tilde{B}_{\mu}^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \equiv A_{\mu}^{+,i} P_i^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \quad (3.4.21)$$

que, como (3.4.13), contêm estados transformando-se sob a adjunta (tripletto).

Pode-se verificar facilmente que a equação

$$D^{\mu} \tilde{B}_{\mu}^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = 0 \quad (3.4.22)$$

com o mesmo potencial  $A_{\mu}$  que em (3.4.13), fornece as mesmas equações de movimento (3.4.14). Entretanto, esta possui componentes na direção dos estados de singletto que impõem os seguintes vínculos ao modelo

$$A_{\mu}^{+,i} A^{+,j,\mu} \left[ \mathcal{T}^{\mathcal{S}}, P_j^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \right] = i A_{\mu}^{+,i} A^{+,i,\mu} P_{\Lambda}^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = 0 \quad \rightarrow \quad A_{\mu}^{+,i} A^{+,i,\mu} = 0 \quad (3.4.23)$$

Utilizando (3.4.12), e o fato de que  $g^{-1}\partial_\mu g = p^{-1}(p^{-1}\partial_\mu p + \partial_\mu p p^{-1})p$ , tais vínculos podem ser escritos como

$$\text{Tr} (p^{-1}\partial_\mu p + \partial_\mu p p^{-1})^2 = \text{Tr} (g^{-1}\partial_\mu g)^2 = 0 \quad (3.4.24)$$

onde utilizamos  $\text{Tr} (T_i T_j) \sim \delta_{ij}$ . Assim, tais vínculos implicam que a ação (3.4.1) se anula quando avaliada nas soluções de tais submodelos.

As quatro correspondentes correntes conservadas são

$$J_\mu^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = (p \otimes p^{-1}) \tilde{B}_\mu^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} (p^{-1} \otimes p) = J_\mu^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \alpha\beta} P_\alpha^{(1/2)} \otimes P_\beta^{(1/2)} \quad (3.4.25)$$

with  $\alpha, \beta = \pm 1/2$ , and

$$\begin{aligned} J_\mu^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \alpha\beta} &\equiv (A_\mu^{+,2} + iA_\mu^{+,1}) D_{\frac{1}{2}}^\alpha(p) D_{\frac{1}{2}}^\beta(p^{-1}) + (A_\mu^{+,2} - iA_\mu^{+,1}) D_{-\frac{1}{2}}^\alpha(p) D_{-\frac{1}{2}}^\beta(p^{-1}) \\ &- iA_\mu^{+,3} \left( D_{\frac{1}{2}}^\alpha(p) D_{-\frac{1}{2}}^\beta(p^{-1}) + D_{-\frac{1}{2}}^\alpha(p) D_{\frac{1}{2}}^\beta(p^{-1}) \right) \end{aligned} \quad (3.4.26)$$

e onde

$$p P_\alpha^{(1/2)} p^{-1} = P_\beta^{(1/2)} D_\alpha^\beta(p) \quad (3.4.27)$$

Como temos um  $\mathcal{K}$ -singleto em tal representação podemos utilizar as idéias da seção 3.2.1 para construirmos submodelos com mais leis de conservação. Introduzimos então os potenciais

$$\begin{aligned} A_\mu^{(n)} &\equiv \frac{1}{2} A_\mu^{-,i} \sum_{l=0}^{n-1} (\otimes 1)^l \otimes \mathcal{T}_i^{\mathcal{K}} (\otimes 1)^{n-l-1} + \frac{1}{2} A_\mu^{+,i} \sum_{l=0}^{n-1} (\otimes 1)^l \otimes \mathcal{T}_i^{\mathcal{S}} (\otimes 1)^{n-l-1} \\ \tilde{B}_\mu^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (n)} &\equiv A_\mu^{+,i} \sum_{l=0}^{n-1} c_{n,l} \left( \otimes P_\Lambda^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \right)^l \otimes P_i^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \left( \otimes P_\Lambda^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \right)^{n-l-1} \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

Como argumentado na seção 3.2.1 a condição de curvatura nula para estes potenciais fornecem as mesmas equações de movimento que as de (3.4.21), i.e. (3.4.14). Entretanto, os vínculos correspondem aqueles descritos em (3.2.17). Pode-se verificar facilmente que para o caso  $n = 2$  não há vínculos impostos aos campos caso escolhamos

$$c_{2,0} + c_{2,1} = 0 \quad (3.4.29)$$

Entretanto, para  $n > 2$  não há escolha de  $c_{n,l}$  que possa eliminar todos os vínculos. Em tais casos tem-se de impor

$$A_{\mu}^{+,i} A^{+,j,\mu} = 0 \quad \text{para qualquer } i, j \quad (3.4.30)$$

Denotando os parâmetros do grupo por  $\zeta^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , segue de (3.4.12) que  $A_{\mu}^{+,i} = \mathcal{M}^{(+)}_j^i(p) \partial_{\mu} \zeta^j$ , com  $\mathcal{M}^{(+)}_j^i(p)$  sendo uma matriz inversível. Assim, os vínculos (3.4.30) implicam que  $\partial_{\mu} \zeta^i \partial^{\mu} \zeta^j = 0$ . Agora, podemos escrever  $A_{\mu}^{-,i} = \mathcal{M}^{(-)}_j^i(p) \partial_{\mu} \zeta^j$ , e consequentemente  $A_{\mu}^{-,i} A^{+,j,\mu} = 0$ . Além disto,

$$\partial^{\mu} A_{\mu}^{+,i} = \mathcal{M}^{(+)}_j^i(p) \partial^2 \zeta^j + \partial_k \left( \mathcal{M}^{(+)}_j^i(p) \right) \partial^{\mu} \zeta^k \partial_{\mu} \zeta^j \quad (3.4.31)$$

Portanto, das equações de movimento (3.4.14) e vínculos (3.4.30), segue que o submodelo é definido por

$$\partial^2 \zeta^j = 0 ; \quad \partial_{\mu} \zeta^i \partial^{\mu} \zeta^j = 0 \quad (3.4.32)$$

No caso de permitirmos que os campos sejam complexos (i.e. caso trabalhemos com  $SL(2, \mathbb{C})$ ), então (3.4.32) é o mesmo submodelo de  $\mathbb{CP}^3$  discutido na seção 4.1.1. As correntes conservadas podem ser avaliadas utilizando-se (3.2.20). Discutiremos com mais detalhes tal tipo de modelos na seção 4.1.1.

### 3.5 O exemplo de espaços simétricos não-compactos

Consideraremos agora espaços simétricos  $G/K$  onde  $G$  é um grupo de Lie simples real não-compacto munido de uma involução de Cartan  $\sigma$ ,  $\sigma^2 = 1$ , com  $K$ , invariante sob  $\sigma$ , sendo o subgrupo compacto maximal de  $G$  [He]. A propriedade de Cartan de  $\sigma$  significa que, se  $\text{Tr}$  é uma forma bilinear  $\sigma$ -invariante álgebra  $\mathcal{G}$  de  $G$  ( $\text{Tr}(TT') = \text{Tr}(\sigma(T)\sigma(T'))$ ) então  $\text{Tr}(T\sigma(T'))$  negativa definida. Isto implica que  $\text{Tr}(TT')$  é:

- Positivo definida se  $T, T' \in \mathcal{S}$ ;
- Negativo definida se  $T, T' \in \mathcal{K}$ ;

- Zero se  $T \in \mathcal{S}$  e  $T' \in \mathcal{K}$ .

Tal espaço simétrico possui algumas propriedades muito especiais devido a chamada decomposição de Iwasawa de  $G$  [He]. Seja  $\mathcal{A}$  o subespaço abeliano maximal de  $\mathcal{S}$ . Segue que a ação adjunta de  $\mathcal{A}$  em  $\mathcal{G}$  pode ser diagonalizada simultaneamente. Denotamos  $\mathcal{G}_\gamma \equiv \{T \in \mathcal{G} \mid [H, T] = \gamma(H)T, \text{ for } H \in \mathcal{A}\}$ . Agora definimos a subálgebra nilpotente  $\mathcal{N} \equiv \sum_{\gamma>0} \mathcal{G}_\gamma$ . a decomposição de Iwasawa corresponde a [He]

$$\mathcal{G} = \mathcal{N} + \mathcal{A} + \mathcal{K} ; \quad g = n a k \equiv b k \quad (3.5.1)$$

onde  $k \in K$ , e  $n$  e  $a$  são elementos do subgrupo obtidos pela exponenciação de  $\mathcal{N}$  e  $\mathcal{A}$  respectivamente, e onde introduzimos  $b \equiv na$ .

Segue então que tais espaços simétricos possuem uma estrutura de grupo escondida, uma vez que os elementos de  $G/K$  podem ser postos em correspondência unívoca com os elementos  $b$  do chamado subgrupo de Borel. Mesmo não sendo  $G/K$  ele mesmo um grupo, podemos parametrizá-lo por elementos do grupo  $b$ .

Utilizando a simetria (2.1.34) podemos escolher um gauge onde os potenciais (3.3.8), no caso de tais espaços simétrico não-compactos, tomam a forma

$$A_\mu = b^{-1} \partial_\mu b = a^{-1} \partial_\mu a + a^{-1} (n^{-1} \partial_\mu n) a \quad (3.5.2)$$

$$\tilde{B}_\mu = P^\psi ((1 - \sigma) (b^{-1} \partial_\mu b)) = P^\psi (2 a^{-1} \partial_\mu a + a^{-1} (n^{-1} \partial_\mu n) a - a \sigma (n^{-1} \partial_\mu n) a^{-1})$$

sendo que utilizamos  $\sigma(a) = a^{-1}$ , já que  $\mathcal{A} \in \mathcal{S}$  and so  $\sigma(\mathcal{A}) = -\mathcal{A}$ .

### 3.5.1 O caso onde $G$ é a forma real normal.

Considere o caso onde álgebra  $\mathcal{G}$  of  $G$  é gerada por combinações lineares da base de Chevalley  $H_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, \text{rank } \mathcal{G}$ ,  $E_\alpha$  and  $E_{-\alpha}$ , com  $\alpha$  sendo as raízes positivas de  $\mathcal{G}$ . Esta é a forma real não-compacta maximal do correspondente grupo de Lie simples complexo, e é chamada forma normal. A involução de Cartan que consideramos é dada por ( $\sigma^2 = 1$ )

$$\sigma(H_\alpha) = -H_\alpha ; \quad \sigma(E_\alpha) = -E_{-\alpha} \quad (3.5.3)$$

Portanto

$$\begin{aligned} S &= \{H_a, a = 1, 2, \dots, \text{rank } \mathcal{G}; E_\alpha + E_{-\alpha}, \text{ para qqr. raiz positiva } \alpha\} \\ \mathcal{K} &= \{E_\alpha - E_{-\alpha}, \text{ para qqr. raiz positiva } \alpha\} \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

e

$$\mathcal{A} = \{H_a, a = 1, 2, \dots, \text{rank } \mathcal{G}\}; \quad \mathcal{N} = \{E_\alpha, \text{ para qqr. raiz positiva } \alpha\} \quad (3.5.5)$$

Parametrizando o elemento do grupo como

$$a = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{a=1}^{\text{rank } \mathcal{G}} \varphi^a H_a\right); \quad n = \exp\left(\sum_{\alpha>0} \zeta^\alpha E_\alpha\right) \quad (3.5.6)$$

temos de (3.5.2)

$$\begin{aligned} A_\mu &= -\frac{1}{2} \sum_{a=1}^{\text{rank } \mathcal{G}} \partial_\mu \varphi^a H_a + \sum_{\alpha, \beta>0} \partial_\mu \zeta^\alpha \nu_{\alpha\beta}(\zeta) e^{\frac{1}{2} K_{\beta\alpha} \varphi^\alpha} E_\beta \\ \tilde{B}_\mu &= P^\psi \left( -\sum_{a=1}^{\text{rank } \mathcal{G}} \partial_\mu \varphi^a H_a + \sum_{\alpha, \beta>0} \partial_\mu \zeta^\alpha \nu_{\alpha\beta}(\zeta) e^{\frac{1}{2} K_{\beta\alpha} \varphi^\alpha} (E_\beta + E_{-\beta}) \right) \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

onde  $K_{\beta\alpha} \equiv \frac{2\beta \cdot \alpha_a}{\alpha_a^2}$ , com  $\alpha_a$  sendo uma raiz simples de  $\mathcal{G}$ , e

$$n^{-1} \frac{\partial n}{\partial \zeta^\alpha} \equiv \sum_{\beta>0} \nu_{\alpha\beta}(\zeta) E_\beta \quad (3.5.8)$$

As correntes conservadas (2.2.43) são dadas por ( $W^{-1} \equiv na$ )

$$\begin{aligned} J_\mu &= na \tilde{B}_\mu a^{-1} n^{-1} \\ &= P^\psi \left( n \left( -\sum_{a=1}^{\text{rank } \mathcal{G}} \partial_\mu \varphi^a H_a + \sum_{\alpha, \beta>0} \partial_\mu \zeta^\alpha \nu_{\alpha\beta}(\zeta) (E_\beta + e^{K_{\beta\alpha} \varphi^\alpha} E_{-\beta}) \right) n^{-1} \right) \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

**O exemplo de  $sl(2)$**

Neste caso há apenas uma raiz positiva, e assim denotamos  $a = e^{-\frac{1}{2}\varphi H}$ ,  $n = e^{\zeta E_+}$ . As relações de comutação para  $sl(2)$  são

$$[H, E_\pm] = \pm 2 E_\pm; \quad [E_+, E_-] = H \quad (3.5.10)$$

Temos  $n^{-1} \frac{\partial n}{\partial \zeta} = E_+$ , e portanto  $\mathcal{V}_{\alpha\beta} \equiv 1$ . Assim, de (3.5.7) segue que

$$D^\mu \tilde{B}_\mu = P^\psi \left( \left( -\partial^2 \varphi + e^{2\varphi} (\partial_\mu \zeta)^2 \right) H + e^\varphi (\partial^2 \zeta + 2\partial_\mu \varphi \partial^\mu \zeta) (E_+ + E_-) \right) \quad (3.5.11)$$

Conseqüentemente, as condições de curvatura nula locais (2.2.42) implicam as equações de movimento

$$\partial^2 \varphi - e^{2\varphi} (\partial_\mu \zeta)^2 = 0 \quad (3.5.12)$$

$$\partial^2 \zeta + 2\partial_\mu \varphi \partial^\mu \zeta = 0 \quad (3.5.13)$$

As correntes conservadas (3.5.9) são

$$J_\mu = J_\mu^+ P^\psi (E_+) + J_\mu^0 P^\psi (H) + J_\mu^- P^\psi (E_-) \quad (3.5.14)$$

com

$$\begin{aligned} J_\mu^+ &= (1 - \zeta^2 e^{2\varphi}) \partial_\mu \zeta + 2\zeta \partial_\mu \varphi \\ J_\mu^0 &= -\partial_\mu \varphi + e^{2\varphi} \zeta \partial_\mu \zeta \\ J_\mu^- &= e^{2\varphi} \partial_\mu \zeta \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

Seguindo a discussão da seção 3.2, construímos que possui um número infinito de correntes conservadas. Na notação daquela seção, o subgrupo  $K$  aqui corresponde a  $SO(2)$  (ou  $U(1)$ ) e é gerado por  $(E_+ - E_-)$ . O subespaço  $\mathcal{S}$  é gerado por  $H$  e  $(E_+ + E_-)$ . Uma vez que estes geradores não diagonalizam a ação do subgrupo  $SO(2)$ , devemos utilizar a base <sup>†</sup>

$$T_3 \equiv \frac{1}{2i} (E_+ - E_-) ; \quad T_\pm \equiv \frac{1}{2} (H \pm i(E_+ + E_-)) \quad (3.5.16)$$

que satisfaz

$$[T_3, T_\pm] = \pm T_\pm ; \quad [T_+, T_-] = 2T_3 \quad (3.5.17)$$

<sup>†</sup>Repere que, formalmente, o  $sl(2)$  gerado por  $T_3$  e  $T_\pm$  não é o mesmo que o gerado por  $H$  e  $E_\pm$ , uma vez que são relacionados por combinações lineares *complexas*. São de fato formas reais distintas do mesmo  $sl(2, \mathbb{C})$  complexo.

Portanto, os potenciais (3.5.7) tornam-se

$$\begin{aligned} A_\mu &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi + ie^\varphi\partial_\mu\zeta)T_+ - \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi - ie^\varphi\partial_\mu\zeta)T_- + ie^\varphi\partial_\mu\zeta T_3 \equiv A_\mu^i T_i \\ \tilde{B}_\mu &= -P^\psi((\partial_\mu\varphi + ie^\varphi\partial_\mu\zeta)T_+ + (\partial_\mu\varphi - ie^\varphi\partial_\mu\zeta)T_-) \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

Obviamente, a adjunta de  $SL(2)$  possui um estado singlete da subálgebra  $SO(2)$ , a saber  $P^\psi(T_3)$ . Portanto, usando as idéias da seção 3.2.1 podemos construir submodelos com grande número de leis de conservação. Assim, seguindo (3.2.15) introduzimos

$$\begin{aligned} A_\mu^{(n)} &\equiv A_\mu^i \sum_{l=0}^{n-1} (\otimes 1)^l \otimes T_i (\otimes 1)^{n-l-1} \\ \tilde{B}_\mu^{\psi(n)} &\equiv \sum_{l=0}^{n-1} \left(\otimes P^\psi(T_3)\right)^l \otimes \left(A_\mu^+ P^\psi(T_+) + A_\mu^- P^\psi(T_-)\right) \left(\otimes P^\psi(T_3)\right)^{n-l-1} \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

De acordo com os comentários após (3.2.4) e (3.2.15) podemos rescalonar as bases de representações irredutíveis de  $SO(2)$ , independentemente. Entretanto, tal liberdade não produz mais submodelos com um número infinito de correntes conservadas (veja a discussão após (4.1.33) para uma situação similar) §

Como argumentado na seção 3.2.1 a curvatura nula para estes potenciais fornece as equações de movimento (3.5.13) e os vínculos correspondentes a (3.2.17). Podemos verificar que tais vínculos para qualquer valor de  $n$  correspondem a  $(A_\mu^+)^2 = (A_\mu^-)^2 = 0$ , que são equivalentes a

$$(\partial_\mu\varphi + ie^\varphi\partial_\mu\zeta)^2 = 0 \quad (3.5.20)$$

Assim as equações de movimento e vínculos do submodelo definido por (3.5.13) de (3.5.20) pode ser escrito como

$$\partial^2\varphi - (\partial_\mu\varphi)^2 = 0; \quad \partial^2\zeta = 0; \quad (\partial_\mu\varphi)^2 - e^{2\varphi}(\partial_\mu\zeta)^2 = 0; \quad \partial_\mu\zeta\partial^\mu\varphi = 0 \quad (3.5.21)$$

Introduzindo

$$\phi \equiv e^{-\varphi}; \quad \text{and so } \phi \geq 0 \quad (3.5.22)$$

§Há uma escolha adicional que poderia conduzir ao vínculo  $|\partial_\mu\varphi + ie^\varphi\partial_\mu\zeta|^2 = 0$ , ao invés de (3.5.20).

Entretanto, o método da seção 3.2.1 neste caso levaria-nos a correntes conservadas somente para o caso  $n = 2$ .

torna-se

$$\partial^2 \phi = 0; \quad \partial^2 \zeta = 0; \quad \partial_\mu \zeta \partial^\mu \phi = 0; \quad (\partial_\mu \phi)^2 = (\partial_\mu \zeta)^2 \quad (3.5.23)$$

Agora, utilizando os resultados da seção 3.2, podemos encontrar um número infinito de correntes conservadas para os submodelos definidos pelas equações (3.5.13). Estas correntes tomarão a forma de (3.2.20); uma vez que para este modelo

$$b = na = e^{\zeta E_+} e^{-\frac{1}{2}\varphi H} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\varphi} & \zeta e^{\frac{1}{2}\varphi} \\ 0 & e^{\frac{1}{2}\varphi} \end{pmatrix}, \quad (3.5.24)$$

os  $V_\alpha(b)$ 's tomam a forma

$$b P^\psi (T_3) b^{-1} = P^\psi \left( \begin{pmatrix} V^0 & V^+ \\ V^- & -V^0 \end{pmatrix} \right) \quad (3.5.25)$$

com

$$\begin{aligned} V^+ &= (1 + \zeta^2 e^{2\varphi}) e^{-\varphi} = \left(1 + \frac{\zeta^2}{\phi^2}\right) \phi \\ V^0 &= -\zeta e^\varphi = -\frac{\zeta}{\phi} \\ V^- &= -e^\varphi = -\frac{1}{\phi} \end{aligned}$$

Portanto, para o caso  $n = 2$  em (3.2.20), temos

$$\begin{aligned} J_\mu^{2,(+,+)} &\equiv J_\mu^+ V^+ = e^{-\varphi} (1 + \zeta^2 e^{2\varphi}) [2\zeta \partial_\mu \varphi + (1 - \zeta^2 e^{2\varphi}) \partial_\mu \zeta]; \\ J_\mu^{2,(0,0)} &\equiv J_\mu^0 V^0 = \zeta e^\varphi \partial_\mu \varphi - \zeta^2 e^{3\varphi} \partial_\mu \zeta; \\ J_\mu^{2,(-,-)} &\equiv J_\mu^- V^- = -e^{3\varphi} \partial_\mu \zeta; \\ J_\mu^{2,(0,-)} &\equiv J_\mu^0 V^- + J_\mu^- V^0 = e^\varphi \partial_\mu \varphi - 2\zeta e^{3\varphi} \partial_\mu \zeta; \\ J_\mu^{2,(0,+)} &\equiv J_\mu^0 V^+ + J_\mu^+ V^0 = 2\zeta^3 e^{3\varphi} \partial_\mu \zeta - (1 + 3\zeta^2 e^{2\varphi}) e^{-\varphi} \partial_\mu \phi; \\ J_\mu^{2,(+,-)} &\equiv J_\mu^+ V^- + J_\mu^- V^+ = 2\zeta^2 e^{3\varphi} \partial_\mu \zeta - 2\zeta e^\varphi \partial_\mu \varphi; \end{aligned}$$

Os modelos discutidos na seção 3.5.1, e em particular o exemplo de  $sl(2)$  dado por (3.5.13), tem sido discutido na literatura [CLLPST, CJLP] no contexto de dualidades nas teorias de supergravidade.

### 3.6 Os submodelos e a fixação de gauge

Mostramos como obtermos um conjunto infinito de cargas conservadas em dimensões maiores que dois. Como já mencionado, o procedimento conduz a submodelos da teoria sob questão, onde a representação dos campos pode ser estendida, gerando um número infinito de correntes conservadas. Todavia, os vínculos que permitem a construção são fortemente dependentes da escolha de gauge, e chega-se a distintos submodelos fixando-se diferentes gauges. Nesta seção expomos sucintamente um importante resultado, referente à construção dos submodelos integráveis. Compreendemos que há uma liberdade de escolha de submodelos, devida à liberdade de gauge, o que de certa forma amplia o número de submodelos integráveis de uma teoria. Entendemos então que o método que utiliza os espaços quocientes não exaure todas possibilidades de construção de submodelos integráveis. A seguir, delineamos outras formas de abordagem que podem conduzir a submodelos integráveis.

Recapitulando, classificamos um sistema como integrável em dimensões maiores que dois ao escrevermos suas equações de movimento como

$$F_{\mu\nu} = 0 \quad D^\mu B_\mu = 0 \quad (3.6.26)$$

onde

- é um potencial de curvatura nula que toma valores em alguma álgebra de Lie  $\mathcal{G}$ ;
- é um potencial auxiliar  $B_\mu \in \mathcal{P}$ , que toma valores em um ideal abeliano de  $\mathcal{G}$ . Tal ideal constitui uma representação de  $\mathcal{G}$  e, nos exemplos considerados, a representação relevante é a adjunta.

Obtemos então as correntes conservadas com auxílio de  $B_\mu$ :

$$J_\mu \equiv W B_\mu W^{-1}$$

O número de correntes conservadas é igual à dimensão de  $\mathcal{P}$ . Para obtermos então um número infinito de correntes conservadas, tentamos encontrar condições adicionais sobre

os potenciais  $A_\mu$  e  $B_\mu$ , de modo que (1.1.4) permaneça válida ao extendermos  $B_\mu$  sobre outras infinitas representações que não a adjunta. Estas condições adicionais restringem as equações de movimento do modelo, porém estes "submodelos" possuem infinitas leis de conservação.

Tomemos por exemplo, o caso  $SU(2)$ . Podemos escrever os potenciais  $A$  e  $B$  como, digamos,

$$\begin{aligned} A_\mu &= a_\mu^+ T_+ + a_\mu^0 T_3 + a_\mu^- T_- \\ B_\mu &\doteq -b_\mu^+ P_1^{(1)} + b_\mu^0 \frac{P_0^{(1)}}{\sqrt{2}} + b_\mu^- P_{-1}^{(1)} \end{aligned} \quad (3.6.27)$$

onde estamos denotando por  $P_i^{(1)}$  os estados da representação adjunta  $P^{(1)}$ . Ocorre que, ao tomarmos estes dois potenciais teremos a seguinte equação de movimento

$$\begin{aligned} D^\mu B_\mu &= (\partial^\mu b_\mu^+ + a^{0,\mu} b_\mu^+ - a^{+,\mu} b_\mu^0) \left( -P_1^{(1)} \right) \\ &+ (\partial^\mu b_\mu^0 + 2(a^{+,\mu} b_\mu^- - a^{-,\mu} b_\mu^+)) \left( \frac{P_0^{(1)}}{\sqrt{2}} \right) \\ &+ (\partial^\mu b_\mu^- + a^{-,\mu} b_\mu^0 - a^{0,\mu} b_\mu^-) \left( P_{-1}^{(1)} \right) \end{aligned} \quad (3.6.28)$$

Considerando a seguir a curvatura nula em uma representação qualquer (para construirmos novas cargas) novos estados são gerados na equação de movimento original, e teríamos algo como

$$\begin{aligned} D^\mu B_\mu^{(j)} &= c_+ a^{+,\mu} b_\mu^+ \sqrt{j(j+1) - 2P_2^{(j)}} + c_- a^{-,\mu} b_\mu^- \sqrt{j(j+1) - 2P_{-2}^{(j)}} \\ &+ c_+ \left( \partial^\mu b_\mu^+ + a^{0,\mu} b_\mu^+ + \frac{c_0 \sqrt{j(j+1)}}{c_+} a^{+,\mu} b_\mu^0 \right) P_1^{(j)} \\ &+ c_0 \left( \partial^\mu b_\mu^0 + \frac{c_- \sqrt{j(j+1)}}{c_0} a^{+,\mu} b_\mu^- + \frac{c_+ \sqrt{j(j+1)}}{c_0} a^{-,\mu} b_\mu^+ \right) P_0^{(j)} \\ &+ c_- \left( \partial^\mu b_\mu^- + \frac{c_0 \sqrt{j(j+1)}}{c_-} a^{-,\mu} b_\mu^0 - a^{0,\mu} b_\mu^- \right) P_{-1}^{(j)} \end{aligned}$$

sendo que as raízes aparecem nos estados da representação para garantir que se transformem do mesmo modo que os estados da representação adjunta. Os novos termos desta expressão devem ser anulados a fim de recuperarmos a equação de movimento original, e

daí originam-se os vínculos:

$$\begin{aligned}
 a^{+, \mu} b_{\mu}^{+} &= 0 & a^{-, \mu} b_{\mu}^{-} &= 0 \\
 \left( \frac{c_0 \sqrt{j(j+1)}}{c_+} + 1 \right) a^{+, \mu} b_{\mu}^0 &= 0 & \left( \frac{c_0 \sqrt{j(j+1)}}{c_-} - 1 \right) a^{-, \mu} b_{\mu}^0 &= 0 \\
 \left( \frac{c_- \sqrt{j(j+1)}}{c_0} - 2 \right) a^{+, \mu} b_{\mu}^{-} &+ \left( \frac{c_+ \sqrt{j(j+1)}}{c_0} + 2 \right) a^{-, \mu} b_{\mu}^{+} &= 0
 \end{aligned}$$

A teoria descrita então pelas equações de movimento (3.6.28) e pelo conjunto de vínculos possui então um número infinito de correntes conservadas expressas por

$$J_{\mu}^{(j)} \equiv W B_{\mu}^{(j)} W^{-1} = \sum_{m=-j}^j J_{\mu}^{(j,m)} P_m^{(j)}$$

Há um ponto importante a mencionar aqui: a equação de curvatura nula (1.1.4) é invariante sob as transformações de gauge

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{\mu} \rightarrow g A_{\mu} g^{-1} - \partial_{\mu} g g^{-1} \\ B_{\mu} \rightarrow g B_{\mu} g^{-1} \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} \\ B_{\mu} \rightarrow B_{\mu} + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} D^{\nu} \tilde{\alpha}^{\rho\sigma} = B_{\mu} + D^{\nu} \alpha_{\mu\nu} \end{array} \right.$$

onde  $\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \tilde{\alpha}^{\rho\sigma}$ .

Percebemos então que os vínculos dependem fortemente do gauge. Isto significa que

TEMOS A LIBERDADE DE ESCOLHER UMA TRANSFORMAÇÃO  
DE GAUGE QUE NOS CONDUZA A UM CONJUNTO DE  
VÍNCULOS COMPATÍVEIS COM A SOLUÇÃO DESEJADA.

Parte II

Aplicações

## Capítulo 4

# Modelos formulados em espaços quocientes

Como já mencionamos, buscamos obter informações não perturbativas das teorias de campos através do estudo de propriedades topológicas e geométrica, como as fornecidas, por exemplo, pelo estudo de soluções tipo soliton.

Além disto, os solitons permitem identificarmos pontos de interseção entre teorias distintas e aparentemente desconexas. No caso, por exemplo, do modelo fermiônico de Thirring e da teoria bosônica de sine-Gordon, encontramos uma correspondência entre os setores fracamente acoplado de uma com o fortemente acoplado da outra teoria. Isto significa que podemos estabelecer uma equivalência na descrição das teorias, escolhendo para cada regime a descrição conveniente. Esta correspondência é encontrada através dos solitons.

Assim, concentramo-nos no estudo das teorias que têm lançado luzes sobre vários aspectos das teorias de campos, como é o caso dos modelos  $\mathbb{CP}^N$  e da teoria de Yang-Mills auto-dual.

A seguir, apresentarei um breve panorama dos temas estudados. Primeiramente, tentarei localizar o problema, informando depois nossa abordagem. Como os assuntos

não são desconexos, muitas vezes voltamos a um assunto anterior. Assim a sucessão dos temas não se deve a uma evolução linear, mas tento apresentá-los consistentemente. Basicamente nos concentramos nos seguinte tópicos:

- Modelos  $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$ ;
- Teoria de Yang-Mills auto-dual.

Todos estes modelos apresentam algum tipo de solução exata, sóliton ou instanton. Deste modo, caso possamos incluí-los no formalismo desenvolvido em [AFG, FL] e escrever sua dinâmica como uma equação de curvatura nula, teríamos um grande avanço na compreensão dos mecanismos de integrabilidade em dimensões maiores quer dois.

## 4.1 Modelos $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$

Os modelos  $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$  contém  $N$  campos escalares complexos  $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , e num espaço-tempo de dimensão  $d + 1$  são definidos pela ação

$$S \equiv \int d^{d+1}x \frac{(1 + u^\dagger \cdot u) (\partial_\mu u^\dagger \cdot \partial^\mu u) - (u^\dagger \cdot \partial_\mu u) (\partial^\mu u^\dagger \cdot u)}{(1 + u^\dagger \cdot u)^2} \quad (4.1.1)$$

onde denotamos por  $u$  a matriz coluna  $N$ -dimensional com componentes  $u_i$ , e por  $u^\dagger$  o complexo conjugado de sua transposta. As equações de movimento correspondentes são \*

$$(1 + u^\dagger \cdot u) \partial^2 u_i = 2 (u^\dagger \cdot \partial_\mu u) \partial^\mu u_i \quad (4.1.2)$$

e os correspondentes complexos conjugados.

Os modelos  $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$  de fato correspondem a modelos sigma não-lineares em um espaço simétrico  $SU(N + 1)/SU(N) \times U(1)$ , definidos como discutido na seção 3.3, e portanto possuem uma representação de curvatura nula. (Veja [FS, FHS] para formulações alternativas). Sejam  $\alpha_i$  e  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , respectivamente, as raízes simples e os pesos

\*A equação de movimento é de fato derivada da ação (4.1.1) é  $(1 + u^\dagger \cdot u) \partial^2 u_i + 2 \frac{(u^\dagger \cdot \partial_\mu u)^2 u_i}{(1 + u^\dagger \cdot u)} - 2 (u^\dagger \cdot \partial_\mu u) \partial^\mu u_i - (u^\dagger \cdot \partial^2 u) u_i = 0$ . Entretanto, tais equações (bem como (4.1.2)) implicam, por contração com  $u_i^*$ , que  $(u^\dagger \cdot \partial^2 u) = 2 \frac{(u^\dagger \cdot \partial_\mu u)^2}{(1 + u^\dagger \cdot u)}$ . Estas duas relações nos conduzem a (4.1.2).

fundamentais de  $SU(N+1)$ . Então satisfazem  $\frac{2\lambda_i \cdot \alpha_j}{\alpha_j^2} = \delta_{ij}$ . O automorfismo involutivo relevante é dado por

$$\sigma(T) \equiv \Omega T \Omega^{-1}; \quad \Omega \equiv e^{i\pi\Lambda}; \quad \Lambda \equiv \frac{2\lambda_N \cdot H}{\alpha_N^2} \quad (4.1.3)$$

com  $T$  sendo um elemento da álgebra  $su(N+1)$ , e  $H_i$  sendo a base de sua subálgebra de Cartan. Portanto, a subálgebra de  $su(N+1)$  invariante sob  $\sigma$  é gerada pela subálgebra de Cartan e pelos operadores escada  $E_{\pm\alpha}$  correspondentes a raízes ortogonais a  $\lambda_N$ , ou, em outras palavras, que não contenham  $\alpha_N$  em sua expansão em termos de raízes simples. Portanto, correspondem a subálgebra  $su(N) \oplus u(1)$ , onde as raízes simples de tal  $su(N)$  são as primeiras  $N-1$  raízes simples de  $su(N+1)$ , i.e.  $\alpha_a$ ,  $a = 1, 2, \dots, N-1$ . O fator  $u(1)$  é obviamente gerado por  $\Lambda$  definido em (4.1.3). Seguindo a notação de (3.3.1) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\equiv \{S_{\pm i} \equiv E_{\pm(\alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_N)}; \quad i = 1, 2, \dots, N\} \\ \mathcal{K} &\equiv su(N) \oplus u(1) \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

A ação e as equações de movimento do modelos  $\mathbb{CP}^N$  podem então serem escritas na forma (3.3.4) e (3.3.5) respectivamente. O problema central é encontrar a parametrização correta em termos dos campos  $u_i$  do elemento do grupo  $g$  de  $SU(N+1)$  em (3.3.3), de modo que (3.3.5) reproduza (4.1.2). A resposta é dada por

$$g = e^{iS} e^{\varphi[S, S^\dagger]} e^{iS^\dagger}; \quad \varphi \equiv \frac{\log \sqrt{1 + u^\dagger \cdot u}}{u^\dagger \cdot u} \quad (4.1.5)$$

onde definimos

$$S \equiv u_i S_i \quad S^\dagger \equiv u_i^* S_{-i} \quad (4.1.6)$$

com  $S_{\pm i}$  introduzido em (4.1.4), e onde utilizamos o fato de que em qualquer representação finita podemos escolher uma base tal que  $H_i^\dagger = H_i$  and  $E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha}$ .

Na representação definidora  $(N+1)$ -dimensional de  $SU(N+1)$ ,  $g$  é dado por

$$g \equiv \frac{1}{\vartheta} \begin{pmatrix} \Delta & iu \\ iu^\dagger & 1 \end{pmatrix}; \quad \vartheta \equiv \sqrt{1 + u^\dagger \cdot u} \quad (4.1.7)$$

onde  $\Delta$  é uma matriz hermitiana  $N \times N$  dada por

$$\Delta_{ij} \equiv \vartheta \delta_{ij} - \frac{u_i u_j^*}{1 + \vartheta} ; \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (4.1.8)$$

Segue então que  $g$  é na verdade uma matriz unitária.

Observe que  $u$  é um autovetor de  $\Delta$  com autovalor 1 (um)

$$\Delta \cdot u = u \quad (4.1.9)$$

Na representação definidora,  $\Lambda$  e  $\Omega$  fornecem o automorfismo  $\sigma$  de (4.1.3) dado por

$$\Lambda = \frac{1}{N+1} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{N \times N} & 0 \\ 0 & -N \end{pmatrix} \quad \Omega = e^{i\pi/(N+1)} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{N \times N} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.1.10)$$

e portanto <sup>†</sup>

$$\sigma(g) = \Omega g \Omega^{-1} = g^{-1} \quad \text{e} \quad y(g) = g^2 \quad (4.1.11)$$

onde  $y(g)$  é definido em (3.3.3).

Podemos verificar que

$$g^{-1} \partial_\mu g = \frac{1}{\vartheta^2} \begin{pmatrix} \kappa_\mu & i\Delta \cdot \partial_\mu u \\ i(\partial_\mu u^\dagger) \cdot \Delta & v_\mu \end{pmatrix} \quad (4.1.12)$$

onde

$$\begin{aligned} \kappa_{ij}^\mu &\equiv \frac{\vartheta}{1 + \vartheta} (u_i \partial^\mu u_j^* - (\partial^\mu u_i) u_j^*) + \frac{1}{2} (u^\dagger \cdot \partial^\mu u - (\partial^\mu u^\dagger) \cdot u) \frac{u_i u_j^*}{(1 + \vartheta)^2} \\ v_\mu &\equiv \frac{1}{2} (u^\dagger \cdot \partial_\mu u - (\partial_\mu u^\dagger) \cdot u) \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Podemos escrever (4.1.12) como uma combinação linear da base de  $su(N+1)$  usando os geradores ímpares  $S_{\pm i}$  introduzidos em (4.1.4). Para simplificar a notação, definiremos a derivada covariante

$$\nabla_\mu u_i \equiv \Delta_{ij} \partial_\mu u_j = \left( \vartheta \partial_\mu - \frac{u^\dagger \cdot \partial_\mu u}{1 + \vartheta} \right) u_i \quad (4.1.14)$$

<sup>†</sup>Repare que, de (4.1.3), (4.1.5) e (4.1.11), temos (ao menos na rep. definidora) que  $\Omega g \Omega^{-1} = e^{-iS} e^{\vartheta[S, S^\dagger]} e^{-iS^\dagger} = g^{-1}$ , e também podemos escrever  $g = e^{iS^\dagger} e^{-\vartheta[S, S^\dagger]} e^{iS}$ .

Os potenciais (3.3.8) podem ser escritos como

$$\begin{aligned}
 A_\mu &= g^{-1} \partial_\mu g \\
 &= \frac{1}{\vartheta^2} \left( i \nabla_\mu S + i (\nabla_\mu S)^\dagger + \frac{[S, (\partial_\mu S)^\dagger] - [\partial_\mu S, S^\dagger]}{1 + \vartheta} - v_\mu \frac{[S, S^\dagger]}{(1 + \vartheta)^2} \right) \\
 \tilde{B}_\mu &= P^\psi ((1 - \sigma) (g^{-1} \partial_\mu g)) \\
 &= \frac{2i}{\vartheta^2} P^\psi (\nabla_\mu S + (\nabla_\mu S)^\dagger) = \frac{2i}{\vartheta^2} (\nabla_\mu u_i P^\psi (S_i) + (\nabla_\mu u_i)^\dagger P^\psi (S_{-i}))
 \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

Repare que na parte par de  $A_\mu$  sob  $\sigma$ , i.e. os termos envolvendo comutadores dos  $S$ 's, as derivadas ordinárias podem ser substituídas pelas derivadas covariantes (4.1.14) devido a antisimetria dos termos.

Impondo a condição de curvatura nula local (2.2.42) sobre estes potenciais obtemos as equações de movimento de  $\mathbb{CP}^N$  (4.1.2). De fato, a condição  $F_{\mu\nu} = 0$  é satisfeita trivialmente já que  $A_\mu$  é da forma de puro gauge. a condição  $D^\mu \tilde{B}_\mu = 0$  fornece  $2N$  equações que são equivalentes a (4.1.2).

De acordo com (2.2.43) (ou (3.1.13)) as correntes conservadas do modelo  $\mathbb{CP}^N$  são dadas por †

$$\begin{aligned}
 J_\mu &= g \tilde{B}_\mu g^{-1} = 2 P^\psi \left( \begin{pmatrix} J_\mu^{ij} & i J_\mu^i \\ i J_\mu^{i\dagger} & -J_\mu \end{pmatrix} \right) = P^\psi (J_\mu^{ij} [S_i, S_{-j}] + i J_\mu^i S_i + i J_\mu^{i\dagger} S_{-i}) \\
 &= \frac{1}{1 + u^\dagger \cdot u} P^\psi \left( [\partial_\mu (S + S^\dagger), S + S^\dagger] + i \partial_\mu (S + S^\dagger) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{u^\dagger \cdot \partial_\mu u - \partial_\mu u^\dagger \cdot u}{1 + u^\dagger \cdot u} (i (S - S^\dagger) + [S, S^\dagger]) \right)
 \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

com  $i, j = 1, 2, \dots, N$ , e

$$\begin{aligned}
 J_\mu^{ij} &= \frac{(1 + u^\dagger \cdot u) (\partial_\mu u_i u_j^\dagger - u_i \partial_\mu u_j^\dagger) - u_i u_j^\dagger (u^\dagger \cdot \partial_\mu u - \partial_\mu u^\dagger \cdot u)}{(1 + u^\dagger \cdot u)^2} \\
 J_\mu^i &= \frac{(1 + u^\dagger \cdot u) \partial_\mu u_i - u_i (u^\dagger \cdot \partial_\mu u - \partial_\mu u^\dagger \cdot u)}{(1 + u^\dagger \cdot u)^2} \\
 J_\mu &= \frac{u^\dagger \cdot \partial_\mu u - \partial_\mu u^\dagger \cdot u}{(1 + u^\dagger \cdot u)^2}
 \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

†Onde usamos a propriedade de que na representação definidora de  $SU(N+1)$ , temos  $(S_i)_{rs} = \delta_{ir} \delta_{s, N+1}$  e  $(S_{-i})_{rs} = \delta_{r, N+1} \delta_{is}$ , com  $r, s = 1, 2, \dots, N+1$ , e  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Em (4.1.16)  $J_\mu^{ij}$ ,  $J_\mu^i$ ,  $J_\mu^{i\dagger}$  e  $J_\mu$  referem-se às matrizes  $(N \times N)$ ,  $(N \times 1)$ ,  $(1 \times N)$  e  $(1 \times 1)$  respectivamente. Repare que o número de correntes conservadas é igual a dimensão de  $SU(N+1)$ , i.e.  $(N^2 + 2N)$ , já que  $\sum_{i=1}^N J_\mu^i = J_\mu$ .

#### 4.1.1 Submodelos integráveis de $\mathbb{CP}^N$

Seguindo a estratégia da seção 3.2, construiremos a seguir submodelos de  $\mathbb{CP}^N$  apresentando um número infinito de correntes conservadas.

Uma vez que  $su(N+1)$  não possui raízes contendo  $\pm\alpha_N$  duas vezes em sua expansão em termos das raízes simples, segue que  $\mathcal{S}$  definido em (4.1.4) divide-se em dois subespaços abelianos gerados por  $S_i$  e  $S_{-i}$ , i.e.

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_+ + \mathcal{S}_- ; \quad \mathcal{S}_\pm \equiv \{S_{\pm i} ; i = 1, 2, \dots, N\} \quad (4.1.18)$$

and

$$[S_i, S_j] = [S_{-i}, S_{-j}] = 0 ; \quad \text{any } i, j \quad (4.1.19)$$

Segue que  $\mathcal{S}_+$  e  $\mathcal{S}_-$  transformam-se sob a representação  $N(1)$  e  $\bar{N}(-1)$  respectivamente, da subálgebra  $\mathcal{K} = su(N) \oplus u(1)$ , i.e.

$$\begin{aligned} [\mathcal{K}, P^\psi(S_i)] &= P^\psi(S_j) R_{ji}^{N(1)}(\mathcal{K}) \\ [\mathcal{K}, P^\psi(S_{-i})] &= P^\psi(S_{-j}) R_{ji}^{\bar{N}(-1)}(\mathcal{K}) \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Asim, de acordo com a discussão da seção 3.2 devemos procurar representações  $P^\lambda$  de  $su(N+1)$  tais que seus termos na decomposição de  $su(N) \oplus u(1)$  possuam as representações  $N(1)$  e  $\bar{N}(-1)$  ao menos uma vez, i.e.

$$P^\lambda = N(1) + \bar{N}(-1) + \text{algo} \quad (4.1.21)$$

Caso isto ocorra, denotaremos  $P_i^\lambda$  e  $P_{-i}^\lambda$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , a base dos subespaços correspondentes a  $N(1)$  e  $\bar{N}(-1)$  respectivamente, que transforma-se como  $P^\psi(S_i)$  e  $P^\psi(S_{-i})$ ,

i.e.

$$\begin{aligned} [\mathcal{K}, P_i^\lambda] &= P_j^\lambda R_{ji}^{N(1)}(\mathcal{K}) \\ [\mathcal{K}, P_{-i}^\lambda] &= P_{-j}^\lambda R_{ji}^{\bar{N}(-1)}(\mathcal{K}) \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

Como comentado após (3.2.4), podemos rescalonar independentemente as bases  $P_i^\lambda$  e  $P_{-i}^\lambda$  de  $N(1)$  e  $\bar{N}(-1)$  respectivamente, sem afetar a relação entre (4.1.20) e (4.1.22). Então seguindo (4.1.15), introduzimos o potencial

$$\tilde{B}_\mu^\lambda = \frac{2i}{\vartheta^2} \left( \nabla_\mu u_i P_i^\lambda + \beta (\nabla_\mu u_i)^\dagger P_{-i}^\lambda \right) \quad (4.1.23)$$

onde  $\beta$  é um parâmetro que leva em conta a liberdade de rescalonar a base das componentes irredutíveis.

Novamente, seguindo a seção 3.2 a condição de curvatura nula

$$D^\mu \tilde{B}_\mu^\lambda = 0 \quad (4.1.24)$$

onde as derivadas covariantes são com respeito as mesmo potencial  $A_\mu$  que em (4.1.15), conduzindo a equações de movimento do modelo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$  (4.1.2) mais os vínculos (veja (3.2.7))

$$\partial_\mu u_i \partial^\mu u_j \left( [S_i, P_j^\lambda] + [S_j, P_i^\lambda] \right) = 0 \quad (4.1.25)$$

$$\partial_\mu u_i^* \partial^\mu u_j^* \left( [S_{-i}, P_{-j}^\lambda] + [S_{-j}, P_{-i}^\lambda] \right) = 0 \quad (4.1.26)$$

$$\partial_\mu u_i \partial^\mu u_j^* \left( \beta [S_i, P_{-j}^\lambda] + [S_{-j}, P_i^\lambda] \right) = 0 \quad (4.1.27)$$

No cálculo acima utilizamos  $\nabla_\mu u_i = \Delta_{ij} \partial_\mu u_j$ , juntamente com o fato de  $\Delta_{ij}$  ser inversível, i.e.

$$\Delta_{ij}^{-1} \equiv \frac{1}{\vartheta} \left( \delta_{ij} + \frac{u_i u_j^*}{1 + \vartheta} \right) \quad (4.1.28)$$

Portanto, qualquer equação do tipo  $\nabla_\mu u_i \nabla^\mu u_j M_{ij} = 0$  pode ser escrita como  $\partial_\mu u_i \partial^\mu u_j M_{ij} = 0$ , para um tensor genérico  $M_{ij}$ .

Os termos envolvidos nos comutadores de (4.1.25), (4.1.26), e (4.1.27) transformam-se sob  $\mathcal{K} = su(N) \oplus u(1)$  como  $(N \times N)_s(2) = \frac{N(N+1)}{2}(2)$ ,  $(\bar{N} \times \bar{N})_s(-2) = \frac{N(N+1)}{2}(-2)$ , e

$(N \times \bar{N})(0) = (1 + \text{adjoint})(0)$ , respectivamente. Assim, como discutido na seção 3.2, os vínculos (4.1.25)-(4.1.27) serão efetivos caso tais representações apareçam na decomposição de  $P^\lambda$  em termos de representações de  $\mathcal{K} = su(N) \oplus u(1)$ .

Em todo caso, o modelo definido pelas equações (4.1.2) e vínculos (4.1.25)-(4.1.27) possui as correntes conservadas (veja (2.2.43))

$$J_\mu^\lambda \equiv g \tilde{B}_\mu^\lambda g^{-1} \quad (4.1.29)$$

com  $g$  dado por (4.1.5). Caso o número de representações  $P^\lambda$  satisfazendo as condições discutidas acima seja infinito, obviamente temos um número infinito de correntes conservadas.

### Os estados de singlete e o número infinito de correntes conservadas

A representação adjunta de  $SU(N+1)$  decompõem-se em representações de  $SU(N) \otimes U(1)$  como

$$Adj(SU(N+1)) = N(1) + \bar{N}(-1) + Adj(SU(N))(0) + 1(0) \quad (4.1.30)$$

Portanto possuem um estado de inglete satisfazendo (3.2.12). Tal singlete corresponde ao gerador  $\Lambda$  de  $U(1)$  definido em (4.1.3) e (4.1.10).

Conseqüentemente, podemos aplicar as idéias da seção 3.2.1 para construirmos um número infinito de correntes conservadas para os submodelos de  $\mathbb{C}P^N$ . Denotando os geradores de  $\mathcal{K} = su(N) \oplus u(1)$ , por  $K_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, N^2$ , podemos escrever os potenciais  $A_\mu$  em (4.1.15) como

$$A_\mu = i \left( A_\mu^r K_r + b_\mu + b_\mu^\dagger \right); \quad b_\mu \equiv \frac{\nabla_\mu S}{1 + u^\dagger \cdot u} \quad (4.1.31)$$

Então, seguindo (3.2.15) definimos

$$A_\mu^{(n)} \equiv i \sum_{l=0}^{n-1} (\otimes 1)^l \otimes \left( A_\mu^r K_r + b_\mu + b_\mu^\dagger \right) (\otimes 1)^{n-l-1} \quad (4.1.32)$$

$$\tilde{B}_\mu^{\psi(n)} \equiv 2i \sum_{l=0}^{n-1} \left( \otimes P^\psi(\Lambda) \right)^l \otimes P^\psi \left( c_{n,l} b_\mu + \bar{c}_{n,l} b_\mu^\dagger \right) \left( \otimes P^\psi(\Lambda) \right)^{n-l-1}$$

Como a representação  $R^S = N(1) + \bar{N}(-1)$ , é redutível podemos rescalonar independentemente cada componente (veja comentários após (3.2.4) e (3.2.15)). As constantes  $c_{n,l}$  e  $\bar{c}_{n,l}$  dão conta desta liberdade.

Inipomos agora aos potenciais a condição de curvatura nula (3.2.8). Obviamente  $A_\mu^{(n)}$  satisfaz  $F_{\mu\nu} = 0$ . Como argumentado na seção 3.2.1, as componentes da condição  $D^\mu \tilde{B}_\mu^{\psi(n)} = 0$ , envolvendo  $\partial^\mu \tilde{B}_\mu^{\psi(n)}$  e o comutador de  $\tilde{B}_\mu^{\psi(n)}$  com a parte  $\mathcal{K}$  de  $A_\mu^{(n)}$  fornecem as equações de movimento do modelo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$  (4.1.2). O comutador de  $\tilde{B}_\mu^{\psi(n)}$  com a parte  $\mathcal{S}$  de  $A_\mu^{(n)}$  fornece os vínculos que definem o submodelo. Analizamos tais vínculos coletando os termos do produto tensorial linearmente independentes. Os termos envolvendo os  $b_\mu$ 's nas posições  $l$  e  $m$  do produto tensorial são ( $l < m$ )

$$\begin{aligned}
 & (c_{n,l} + c_{n,m}) \left( \otimes P^\psi(\Lambda) \right)^{l-1} \otimes P^\psi(b_\mu) \left( \otimes P^\psi(\Lambda) \right)^{m-l} P^\psi(b^\mu) \left( \otimes P^\psi(\Lambda) \right)^{n-m} \\
 & - (\bar{c}_{n,l} + \bar{c}_{n,l}) \left( \otimes P^\psi(\Lambda) \right)^{l-1} \otimes P^\psi(b_\mu^\dagger) \left( \otimes P^\psi(\Lambda) \right)^{m-l} P^\psi(b^{\dagger\mu}) \left( \otimes P^\psi(\Lambda) \right)^{n-m} \\
 & - (c_{n,l} - \bar{c}_{n,m}) \left( \otimes P^\psi(\Lambda) \right)^{l-1} \otimes P^\psi(b^\mu) \left( \otimes P^\psi(\Lambda) \right)^{m-l} P^\psi(b_\mu^\dagger) \left( \otimes P^\psi(\Lambda) \right)^{n-m} \\
 & + (\bar{c}_{n,l} - c_{n,m}) \left( \otimes P^\psi(\Lambda) \right)^{l-1} \otimes P^\psi(b_\mu^\dagger) \left( \otimes P^\psi(\Lambda) \right)^{m-l} P^\psi(b^\mu) \left( \otimes P^\psi(\Lambda) \right)^{n-m} = 0
 \end{aligned} \tag{4.1.33}$$

onde utilizamos  $[\Lambda, b_\mu + b_\mu^\dagger] = b_\mu - b_\mu^\dagger$ .

Os termos envolvendo os comutadores de  $b_\mu$ 's são

$$(c_{n,l} - \bar{c}_{n,l}) \left( \otimes P^\psi(\Lambda) \right)^l \otimes P^\psi \left( [b^\mu, b_\mu^\dagger] \right) \left( \otimes P^\psi(\Lambda) \right)^{n-l-1} = 0 \tag{4.1.34}$$

Assim, se escolhermos

$$c_{n,l} = \bar{c}_{n,l} = 1 ; \quad \text{para quaisquer } n \text{ e } l \tag{4.1.35}$$

temos os vínculos  $\nabla_\mu u_i \nabla^\mu u_j = 0$  e  $(\nabla_\mu u_i)^\dagger (\nabla^\mu u_j)^\dagger = 0$ , para qualquer  $i$  e  $j$ . Entretanto, de (4.1.14) temos que  $\nabla_\mu u_i = \Delta_{ij} \partial_\mu u_j$ , e como  $\Delta_{ij}$  é inversível (veja (4.1.28)), segue que os vínculos tornam-se somente  $\partial_\mu u_i \partial^\mu u_j = 0$  e seus conjugados complexos.

Utilizando tais vínculos nas equações de movimento de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$  (4.1.2) temos que  $\partial^2 u_i = 0$ .

Consequentemente, os submodelos obtidos são definidos pelas equações

$$\partial^2 u_i = 0 ; \quad \partial_\mu u_i \partial^\mu u_j = 0 \tag{4.1.36}$$

e as correspondentes equações conjugadas.

De acordo com a discussão da seção 3.2.1 tais submodelos possuem um número infinito de correntes conservadas dadas por (3.2.20). As quantidades  $V_\alpha$ , definidas em (3.2.19), são dadas por

$$\begin{aligned} g P^\psi (\Lambda) g^{-1} &= P^\psi \left( \begin{pmatrix} V^{ij} & -iV^i \\ iV^{i\dagger} & -V \end{pmatrix} \right) = P^\psi \left( V^{ij} [S_i, S_{-j}] - iV^i S_i + iV^{i\dagger} S_{-i} \right) \\ &= P^\psi \left( \Lambda - \frac{1}{1+u^\dagger \cdot u} \left( [S, S^\dagger] + i(S - S^\dagger) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.1.37)$$

com  $i, j = 1, 2, \dots, N$ , e

$$\begin{aligned} V^{ij} &\equiv \frac{\delta_{ij}}{N+1} - \frac{u_i u_j^\dagger}{1+u^\dagger \cdot u} \\ V^i &\equiv \frac{u_i}{1+u^\dagger \cdot u} \\ V &\equiv -\frac{1}{N+1} + \frac{1}{1+u^\dagger \cdot u} \end{aligned} \quad (4.1.38)$$

Em (4.1.37) utilizamos a mesma notação que em (4.1.16). O número de quantidades independentes  $V$ 's é igual a dimensão de  $SU(N+1)$ , já que  $\sum_{i=1}^N V_{ii} = V$ .

Podemos verificar facilmente que as correntes (4.1.17) podem ser escritas em termos de (4.1.38) como

$$\begin{aligned} J_\mu^{ij} &= - \left( \frac{\delta V^{ij}}{\delta u_m} \partial_\mu u_m - \frac{\delta V^{ij}}{\delta u_m^\dagger} \partial_\mu u_m^\dagger \right) \\ J_\mu^i &= \frac{\delta V^i}{\delta u_m} \partial_\mu u_m - \frac{\delta V^i}{\delta u_m^\dagger} \partial_\mu u_m^\dagger \\ J_\mu^{i\dagger} &= - \left( \frac{\delta V^{i\dagger}}{\delta u_m} \partial_\mu u_m - \frac{\delta V^{i\dagger}}{\delta u_m^\dagger} \partial_\mu u_m^\dagger \right) \end{aligned} \quad (4.1.39)$$

Uma vez que escolhemos todos  $c_{n,l}$ 's como sendo um (veja (4.1.35)), segue que todas quantidades conservadas (3.2.20) são da forma

$$J_\mu^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \equiv \frac{\delta \mathcal{F}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}}{\delta u_m} \partial_\mu u_m - \frac{\delta \mathcal{F}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}}{\delta u_m^\dagger} \partial_\mu u_m^\dagger \quad (4.1.40)$$

onde

$$\mathcal{F}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \equiv - \prod_{l=1}^n V^{\alpha_l} \quad (4.1.41)$$

com os  $V^\alpha$ 's sendo qualquer uma das quantidades em (4.1.38), i.e  $V^{ij}$ ,  $V^i$  e  $V^{i\dagger}$ .

De fato, qualquer quantidade da forma

$$J_\mu = \mathcal{M}_i \partial_\mu u_i + \mathcal{N}_i \partial_\mu u_i^\dagger \quad (4.1.42)$$

com  $\mathcal{M}_i$  e  $\mathcal{N}_i$  sendo funcionais de  $u_j$  e  $u_j^\dagger$ , é uma corrente conservada do submodelo (4.1.36) contanto que [FHS]

$$\frac{\delta \mathcal{M}_i}{\delta u_j^\dagger} + \frac{\delta \mathcal{N}_j}{\delta u_i} = 0 \quad (4.1.43)$$

As quantidades conservadas obtidas acima, utilizando as idéias da seção 3.2.1, são casos particulares do caso onde  $\mathcal{M}_i = \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u_i}$  e  $\mathcal{N}_i = -\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta u_i^\dagger}$ .

É valido mencionar ainda que a quantidade de leis de conservação que o submodelo (4.1.36) possui é devida (ao menos parcialmente) ao imenso grupo de simetria presente. De fato, o submodelo (4.1.36) é invariante sob as transformações

$$\begin{aligned} u_i &\rightarrow u_i' \equiv \omega_i^{(1)}(u) + \omega_i^{(2)}(u^*) \\ u_i^* &\rightarrow u_i^{*'} \equiv \omega_{-i}^{(1)}(u) + \omega_{-i}^{(2)}(u^*) \end{aligned} \quad (4.1.44)$$

caso

$$\begin{aligned} \omega_i^{(1)}(u) \omega_j^{(2)}(u^*) + \omega_i^{(2)}(u^*) \omega_j^{(1)}(u) &= h_{ij}^{(1)}(u) + h_{ij}^{(2)}(u^*) \\ \omega_{-i}^{(1)}(u) \omega_{-j}^{(2)}(u^*) + \omega_{-i}^{(2)}(u^*) \omega_{-j}^{(1)}(u) &= h_{-i,-j}^{(1)}(u) + h_{-i,-j}^{(2)}(u^*) \end{aligned} \quad (4.1.45)$$

para qualquer  $i, j, k, l = 1, 2, \dots, N$ , e onde  $(\omega_{\pm i}^{(1)}, h_{\pm i, \pm j}^{(1)})$  e  $(\omega_{\pm i}^{(2)}, h_{\pm i, \pm j}^{(2)})$  são funções dos  $u_i$ 's e  $u_i^*$ 's somente, respectivamente. Soluções particulares para (4.1.45) são obtidas tomando-se  $\omega_i^{(1)} = \text{const.}$ , e  $\omega_j^{(2)}$  arbitrários, ou vice-versa. O mesmo é válido para  $\omega$ 's negativos. Portanto, iniciando com um pequeno conjunto adequado de correntes, pode-se construir um grande número delas através das transformações (4.1.44).

No caso  $n = 2$ , as correntes (4.1.40) são dadas por

$$J_\mu^{ij} V^{kl} + V^{ij} J_\mu^{kl} = \frac{1}{(1 + u^\dagger \cdot u)^2} \left\{ \frac{2(u^\dagger \cdot \partial_\mu u - \partial_\mu u^\dagger \cdot u)}{1 + u^\dagger \cdot u} u_i u_j^\dagger u_k u_l^\dagger \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(1 + u^\dagger \cdot u)}{(N + 1)} \left[ \delta_{kl} (\partial_\mu u_i u_j^\dagger - u_i \partial_\mu u_j^\dagger) + \delta_{ij} (\partial_\mu u_k u_l^\dagger - u_k \partial_\mu u_l^\dagger) \right] \\
 & - u_i u_j^\dagger (\partial_\mu u_k u_l^\dagger - u_k \partial_\mu u_l^\dagger) - u_k u_l^\dagger (\partial_\mu u_i u_j^\dagger - u_i \partial_\mu u_j^\dagger) \\
 & - \frac{(u^\dagger \cdot \partial_\mu u - \partial_\mu u^\dagger \cdot u)}{N + 1} \left( \delta_{kl} u_i u_j^\dagger + \delta_{ij} u_k u_l^\dagger \right) \Big\} \\
 J_\mu^{ij} V^k - V^{ij} J_\mu^k & = \frac{1}{(1 + u^\dagger \cdot u)^2} \left[ u_k (\partial_\mu u_i u_j^\dagger - u_i \partial_\mu u_j^\dagger) + u_i u_j^\dagger \partial_\mu u_k \right. \\
 & - \frac{2(u^\dagger \cdot \partial_\mu u - \partial_\mu u^\dagger \cdot u)}{1 + u^\dagger \cdot u} u_i u_j^\dagger u_k \\
 & \left. - \frac{1 + u^\dagger \cdot u}{N + 1} \delta_{ij} \partial_\mu u_k + \frac{(u^\dagger \cdot \partial_\mu u - \partial_\mu u^\dagger \cdot u)}{N + 1} u_k \delta_{ij} \right] \\
 J_\mu^i V^j + V^i J_\mu^j & = \frac{u_i \partial_\mu u_j + u_j \partial_\mu u_i}{(1 + u^\dagger \cdot u)^2} - \frac{2u_i u_j}{(1 + u^\dagger \cdot u)^3} (u^\dagger \cdot \partial_\mu u - \partial_\mu u^\dagger \cdot u) \\
 J_\mu^{ij} V^{k\dagger} + V^{ij} J_\mu^{k\dagger} & = \frac{1}{(1 + u^\dagger \cdot u)^2} \left[ u_k^\dagger (\partial_\mu u_i u_j^\dagger - u_i \partial_\mu u_j^\dagger) \right. \\
 & - \frac{2(u^\dagger \cdot \partial_\mu u - \partial_\mu u^\dagger \cdot u)}{1 + u^\dagger \cdot u} u_i u_j^\dagger u_k^\dagger - u_i u_j^\dagger \partial_\mu u_k^\dagger \\
 & \left. + \frac{1 + u^\dagger \cdot u}{N + 1} \delta_{ij} \partial_\mu u_k^\dagger + \frac{(u^\dagger \cdot \partial_\mu u - \partial_\mu u^\dagger \cdot u)}{N + 1} \delta_{ij} u_k^\dagger \right] \\
 J_\mu^{i\dagger} V^j - V^{i\dagger} J_\mu^j & = \frac{1}{(1 + u^\dagger \cdot u)^3} \left\{ (1 + u^\dagger \cdot u) (\partial_\mu u_i^\dagger u_j - u_i^\dagger \partial_\mu u_j) \right. \\
 & \left. + 2u_i^\dagger u_j (u^\dagger \cdot \partial_\mu u - \partial_\mu u^\dagger \cdot u) \right\} \tag{4.1.46} \\
 J_\mu^{i\dagger} V^{j\dagger} + V^{i\dagger} J_\mu^{j\dagger} & = \frac{\partial_\mu u_i^\dagger u_j^\dagger + u_i^\dagger \partial_\mu u_j^\dagger}{(1 + u^\dagger \cdot u)^2} - \frac{2u_i^\dagger u_j^\dagger}{(1 + u^\dagger \cdot u)^3} (\partial_\mu u^\dagger \cdot u - u^\dagger \cdot \partial_\mu u)
 \end{aligned}$$

Note que com a escolha (4.1.35), o operador  $\tilde{B}_\mu^{\psi(n)}$  dado em (4.1.32), pertence a parte simétrica do produto tensorial. Assim, as correntes acima estão associadas a representações irredutíveis de  $SU(N+1)$  na parte simétrica do produto tensorial da representação adjunta consigo mesma. Por exemplo, no caso de  $N = 1$  temos que a adjunta (tripleto) de  $SU(2)$  satisfaz  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{5}_s + \mathbf{3}_a + \mathbf{1}_s$ . De fato, para  $N = 1$  podemos averiguar facilmente que (4.1.46) fornece 6 correntes e que 5 delas coincidem com a corrente de spin  $j = 2$  (5) calculada em [AFG] para o exemplo de  $\mathbb{C}P^1$ . A sexta coincide com uma corrente de spin  $j = 1$  de [AFG].

## Outros submodelos

Ao analisarmos os vínculos (4.1.33) e (4.1.34) buscamos soluções válidas para qualquer  $n$  de modo a obtermos um número infinito de correntes. Entretanto, para o caso  $n = 2$  há uma solução adicional there is an additional solution, além de (4.1.35), que corresponde a

$$c_{2,0} + c_{2,1} = 0 ; \quad \bar{c}_{2,0} + \bar{c}_{2,1} = 0 \quad (4.1.47)$$

Tal escolha conduz-nos ao submodelo de  $\mathbb{C}P^N$  definido por

$$\left(1 + u^\dagger \cdot u\right) \partial^2 u_i = 2 \left(u^\dagger \cdot \partial_\mu u\right) \partial^\mu u_i ; \quad \partial_\mu u_i \partial^\mu u_j^* = 0 \quad (4.1.48)$$

com  $i, j = 1, 2, \dots, N$ . Portanto, utilizando o mesmo procedimento da seção 4.1.1 obtemos correntes conservadas do tipo (4.1.46). Neste caso, as correntes dependerão de um parâmetro que é a razão  $\bar{c}_{2,0}/c_{2,0}$ .

Correntes conservadas adicionais para o submodelo (4.1.48) podem ser constuidas utilizando as idéias da seção 4.1.1. Como exemplo, considere o caso  $\mathbb{C}P^2$ . As representações  $\mathbf{10}$  e  $\bar{\mathbf{10}}$  of  $SU(3)$  decompõem-se em irredutíveis de  $SU(2) \otimes U(1)$  como

$$\begin{aligned} \mathbf{10} &= \mathbf{4}(1) + \mathbf{3}(0) + \mathbf{2}(-1) + \mathbf{1}(-2) \\ \bar{\mathbf{10}} &= \mathbf{4}(-1) + \mathbf{3}(0) + \mathbf{2}(1) + \mathbf{1}(2) \end{aligned} \quad (4.1.49)$$

Portanto,  $\mathbf{10} + \bar{\mathbf{10}}$  contém a representação  $R^S = \mathbf{2}(1) + \mathbf{2}(-1)$  discutida em (4.1.21), e assim podemos definir um operador  $\tilde{B}_\mu$  como em (4.1.23) usando tais representações. Pode-se verificar que os vínculos (4.1.25)-(4.1.27) podem ser resolvidos impondo-se  $\partial_\mu u_i \partial^\mu u_j^* = 0$ ,  $i, j = 1, 2$ . Então através de (4.1.29) obtemos 20 correntes conservadas para o submodelo correspondente (4.1.48) de  $\mathbb{C}P^2$ .

## 4.2 A teoria de Yang-Mills autodual

Ingrediente essencial na compreensão das teorias de partículas elementares, os campos das teorias de Yang-Mills descrevem as interações fundamentais. Sua dinâmica é regida por

complicadas equações não lineares, o que restringe as tentativas de encontrar soluções a métodos perturbativos. Porém há, dentro destas teorias, uma subclasse que admite uma abordagem não perturbativa: as teorias de Yang-Mills autoduais (SDYM).

Os campos das teorias de Yang-Mills são vetores de Lorentz, que tomam valores em uma álgebra de Lie  $[A]$ . A lagrangeana livre (sem interação com a matéria) é

$$\mathcal{L} = \int d^2x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{sendo } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = [A_\mu, A_\nu] \quad (4.2.50)$$

que nos fornece as equações de movimento

$$\mathcal{D}_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad \mathcal{D}_\mu {}^*F^{\mu\nu} = 0 \quad (4.2.51)$$

A primeira é uma equação não linear de segunda ordem para os campos  $A_\mu$ , e resolvida apenas aproximativamente via teoria de perturbação. A segunda vem a ser a identidade de Bianchi, cumprida uma vez que os campos tem a interpretação geométrica de uma conexão. Através de uma condição adicional, a **condição de autodualidade**

$$F = {}^*F \quad (4.2.52)$$

a equação de movimento é automaticamente satisfeita, “transformando-se” na identidade de Bianchi; trocamos uma complicada equação de segunda ordem por um problema de encontrar formas autoduais num espaço quadridimensional. Como consequência, conseguimos encontrar soluções exatas.

A condição de autodualidade em quatro dimensões só possui soluções reais para um espaço euclidiano - isto devido aos autovalores do operador estrela de Hodge  $*$ . Belavin, Polyakov, Schwarz e Tseytlin encontraram soluções para este caso, que ficaram conhecidas na literatura como *instantons* [BPST]. Estas soluções minimizam a ação euclidiana, e podem ser interpretadas como conectando os diferentes vácuos da teoria.

Além de fornecer informações sobre aspectos não perturbativos das teorias de Yang-Mills, as teorias autoduais servem como laboratório de estudos de vários outros modelos integráveis. Uma hipótese devida a Ward [W] considera que **todo** sistema integrável

conhecido poderia ser obtido da equação de autodualidade através de uma REDUÇÃO por alguma simetria. Em seu trabalho, Ward analisa as diversas classes de modelos integráveis, mostrando que há uma conexão entre elas. Assim, o estudo de SDYM desdobra-se em uma variedade de temas.

A abordagem padrão para o estudo de SDYM inicia-se com uma mudança de variáveis. Yang [Y] reescreveu a condição de autodualidade  $F = *F$  em termos de novas variáveis como

$$F_{y\bar{y}} + F_{z\bar{z}} = 0 \quad F_{yz} = 0 = F_{\bar{y}\bar{z}} \quad (4.2.53)$$

que são conhecidas como equações de Yang. Um potencial  $A$  que satisfaz estas equações pode ser escrito como

$$\begin{aligned} A_y &= -\partial_y g_1 g_1^{-1}; & A_{\bar{y}} &= -\partial_{\bar{y}} g_2 g_2^{-1}; \\ A_z &= -\partial_z g_1 g_1^{-1}; & A_{\bar{z}} &= -\partial_{\bar{z}} g_2 g_2^{-1}. \end{aligned} \quad (4.2.54)$$

Com este mapeamento podemos reescrever as equações de Yang como

$$\begin{aligned} \partial_y (w^{-1} \partial_{\bar{y}} w) + \partial_z (w^{-1} \partial_{\bar{z}} w) &= 0 \\ \partial_{\bar{y}} (\partial_y w w^{-1}) + \partial_{\bar{z}} (\partial_z w w^{-1}) &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.55)$$

sendo a  $w \equiv g_2^{-1} g_1$ .

Utilizando as técnicas do Capítulo 3, formulamos as equações de Yang como uma condição de curvatura nula em um espaço homogêneo. Para tal, precisamos de uma variável que parametrize o espaço homogêneo  $G/H$ , e que os campos da teoria sejam descritos em termos desta variável. Para o caso das teorias de SDYM, a variável deve tomar valores na mesma variedade que  $g_1$  e  $g_2$ , que são os parâmetros da teoria. Portanto, tomando

$$G \equiv G \otimes G; \quad H \equiv G_D \quad \rightarrow \quad G/H \sim \tilde{G} \quad (4.2.56)$$

onde  $G_D$  denota o subgrupo diagonal, e  $\tilde{G}$ , o grupo de Lie onde está definida a teoria. Para então escrevermos a condição de curvatura nula, utilizamos a variável que parametriza

$G/H$ ,  $\mathcal{W}$ :

$$\mathcal{W} = g \sigma^{-1}(g) \quad g \in G \quad \rightarrow \quad g = g_2^{-1} \otimes g_1^{-1} \quad \rightarrow \quad \mathcal{W} = g_2^{-1} g_1 \otimes g_1^{-1} g_2 \quad (4.2.57)$$

já que  $\sigma(m \otimes n) = n \otimes m$ . Com esta variável, escrevemos uma conexão em  $G/H$  que tem curvatura nula:

$$A_\mu = \mathcal{W}^{-1} \partial_\mu \mathcal{D} = w^{-1} \partial_\mu w \otimes \mathbb{1} - \mathbb{1} \otimes \partial_\mu w w^{-1} \quad \text{com } w \equiv g_2^{-1} g_1 \quad (4.2.58)$$

Tomando então os potenciais

$$\begin{aligned} B_y &= w^{-1} \partial_y w \otimes \mathbb{1} & \bar{B}_{\bar{y}} &= -\mathbb{1} \otimes \partial_{\bar{y}} w w^{-1} \\ B_z &= w^{-1} \partial_z w \otimes \mathbb{1} & \bar{B}_{\bar{z}} &= -\mathbb{1} \otimes \partial_{\bar{z}} w w^{-1} \end{aligned} \quad (4.2.59)$$

a condição  $D_\mu B^\mu = 0$  reproduz as equações de Yang.

Ocorre que, ao projetarmos  $D_\mu B^\mu = 0$  sobre a subálgebra par por  $\sigma$ , e assim obtermos o submodelo integável, a equação de vínculo trivializa o problema, pois é por demais restritiva. Portanto, estamos tentando abordar o problema por outra via: ao invés da condição de curvatura nula nos fornecer as equações de Yang, tentamos obter uma teoria cujas equações de movimento **juntamente** com o vínculo reproduzam SDYM.

## Capítulo 5

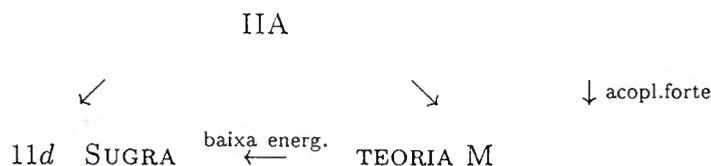
# Instantons em teorias de cordas

Efetuiremos aqui uma mudança de cenário. Tendo como pano de fundo as teorias de cordas, estudaremos uma nova solução das teorias de Yang-Mills que desempenha importante papel na interação das cordas. A relação entre teorias de cordas e teorias de Yang-Mills tem sido frutiferamente exploradas sob a perspectiva das transformações de dualidade. Exemplos dos avanços neste sentido encontram-se na conexão entre teorias de Yang-Mills conformes supersimétricas e teorias de supercordas do tipo IIA num espaço-tempo anti-deSitter (simetria ADS/CFT). Mas nos capítulos seguintes iremos nos concentrar numa solução que trouxe luz a uma via mais direta de contato: as soluções do tipo IC-INSTANTONS. Estas constituem configurações clássicas conhecidas como instantons riemannianos, que emergem, dentro das teorias de Yang-Mills, como soluções clássicas modeladas sobre superfícies de Riemann, e conduzem naturalmente a uma interpretação em termos de cordas.

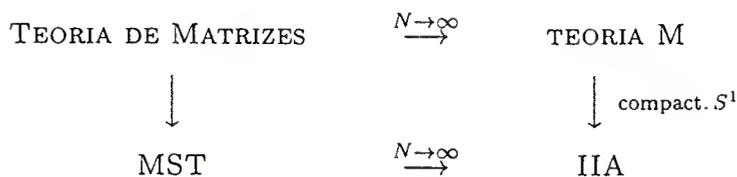
Nossa conquista foi no sentido de fornecermos uma forma explícita para tais soluções, inserindo-as no contexto de sistemas integráveis a qualquer dimensão. Nossos resultados foram obtidos de considerações de uma teoria de Yang-Mills supersimétrica. No entanto, para explicitar a riqueza do problema, tentaremos a seguir situá-lo desde a perspectiva das teorias de cordas.

Como sabemos, as teorias de Yang-Mills desempenham papel essencial na compreensão

das teorias de partículas elementares. Na tentativa de unificar as teorias de gauge e a gravitação, aparecem as teorias de cordas, que tomaram um impulso nas duas últimas décadas. Como exemplo dos resultados, podemos citar a teoria da supercorda do tipo IIA: No limite de acoplamento forte do setor à baixas energias, esta fornece uma descrição da supergravidade em onze dimensões. A dificuldade surge, porém, ao tentar-se compreender os outros limites da teoria: não se sabe qual a teoria quântica consistente nos outros setores de energia. Nos últimos anos surgiu uma candidata à teoria “final”, de onde as outras teorias de cordas apareceriam como algum limite: esta teoria é denominada teoria M. Com relação ao exemplo citado, a teoria M seria então o limite de acoplamento forte da supercorda IIA, cujo limite à baixas energias é a supergravidade em onze dimensões.



Há alguns anos, surgiu uma conjectura [BFSS] que traça uma equivalência entre a teoria M e a mecânica quântica de matrizes  $U(N)$  quando  $N \rightarrow \infty$ . Partindo-se da teoria M e efetuando uma compactificação no círculo e tomando-se alguns limites apropriados chega-se a teoria de cordas IIA; segundo então a equivalência citada, a compactificação no círculo desta teoria, referida como teoria de matrizes de corda (MST para *Matrix String Theory*) representaria, segundo os autores de [BBTT], no limite de acoplamento forte, as teorias de cordas do tipo II. Teríamos algo como



onde a equivalência entre MST e a teoria IIA tem por ora o estatuto de conjectura, reforçada no entanto pelos resultados de IC-INSTANTON.

A seguir daremos então um panorama geral das conexões expostas no diagrama acima, com vistas na teoria MST, baseado no artigo de revisão [Bo] Posteriormente, para efeito

de nossa construção, estaremos lidando com a teoria MST comô uma teoria de Yang-Mills supersimétrica com simetria de gauge  $U(N)$ , donde fluem os IC-INSTANTONS. Apesar deste capítulo tratar essencialmente de uma revisão, alguns resultados novos obtidos são apresentados na seção 5.6.

## 5.1 Teoria de cordas IIA e teoria de Matrizes

Vejamos aqui brevemente como a teoria de cordas IIA relaciona-se a teoria M, e esta à mecânica quântica de matrizes.

Estaremos tratando da teoria de cordas supersimétrica do tipo IIA formuladas de acordo com Green-Schwarz GS. No gauge do cone de luz, eliminam-se dois dos dez campos  $x^M(\sigma, \tau)$  ( $M = 0, \dots, 9$ ): definindo  $x^\pm = x^0 \pm x^9$ , fixa-se o gauge prescrevendo  $x^+ \sim \tau$ , enquanto  $x^-$  pode ser completamente fixado em termos dos graus de liberdade transversos. Portanto os verdadeiros graus de liberdade são os transversos,  $x^i$  com  $i = 1, \dots, 8$ . A teoria supersimétrica contém também os parceiros fermiônicos dos campos  $x^i$ , que consistem em dois conjuntos de férmions de Majorana  $\theta_s$  e  $\theta_c$ . Com isto, a ação de GS no cone de luz é dada por

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\sigma \int_{-\infty}^\infty d\tau (\partial_\mu x^i \partial^\mu x^i - i\bar{\theta} \rho^\mu \partial_\mu \theta) \quad (5.1.1)$$

onde os índices  $\mu, \nu$  percorrem o espaço-tempo de Minkowski bi-dimensional  $\mu, \nu = 0, 1$  e a métrica tem assinatura  $(+, -)$ ; temos que  $\bar{\theta} = \theta^T \rho^0$  sendo  $\theta^T = (\theta_s, \theta_c)$ , e  $\rho^\mu$  são as matrizes gama em duas dimensões.

A ação GS é invariante sob dois conjuntos de transformações de supersimetria, cada um dos quais caracterizado por 8 parâmetros. O espectro massivo coincide com o da supergravidade IIA em  $d = 10$ , que constitui sua teoria efetiva a baixas energias.

A teoria IIA contém em seu espectro objetos extensos do tipo membranas, além das cordas. Estes objetos aparecem como soluções macroscópicas – como sólitons – e suas folhas-mundo acoplam-se aos potenciais da teoria. As cordas são os objetos fundamentais

na teoria do tipo IIA, enquanto que, de acordo com a teoria de matrizes, as  $D0$ -branas são os principais constituintes da teoria M.

A teoria M relaciona-se à teoria IIA do seguinte modo: A constante de acoplamento da teoria das cordas da teoria IIA  $g_s$  pode ser utilizado como parâmetro de expansão enquanto permanecer pequeno; quando este parâmetro cresce, a representação da teoria IIA em termos de cordas torna-se inadequada. Ocorre que o limite  $g_s \rightarrow \infty$  acrescenta uma nova dimensão à teoria. Esta dimensão está envolucrada num círculo cujo raio  $R$  é expresso por meio de  $g_s$ ; apenas quando  $g_s$  é pequeno esta dimensão adicional pode ser negligenciada. A nova teoria em  $g_s \rightarrow \infty$  não pode ser uma teoria de cordas, já que não há propagação consistente de supercordas em 11 dimensões. Esta nova teoria é a teoria M. Estaremos concentrados na região de  $g_s$  pequeno. A teoria efetiva a baixas energias da teoria M é a supergravidade em  $d = 11$ . A teoria M contém dois tipos de soluções de sólitons: membranas e 5-branas. A compactificação no círculo mapeia os graus de liberdade da teoria M naqueles da teoria IIA.

Resumidamente, temos que

- $g_s \rightarrow \infty$  fornece um critério de divisão da teoria IIA em regiões de validade da descrição em termos de cordas;
- teoria IIA em  $d = 10$ : descrição por cordas;
- $g_s \rightarrow \infty \longrightarrow d = 11$  : teoria M;
- compactificação  $S^1$  da teoria M: teoria IIA.

Para a teoria M não há ainda uma formulação conveniente, similar à descrição da teoria IIA em termos de cordas; há sim uma proposta desenvolvendo-se: a teoria de matrizes [Bi]. Os objetos básicos da teoria de matrizes são supergrávitons, que podem ser identificados com as  $D0$ -branas da teoria IIA. Para entendimento da proposta da teoria de matrizes é necessário deter-se um pouco sobre dois ingredientes: a ação efetiva para um sistema de

$N$  D-branas, e o quadro de momentum infinito (IMF para *infinite momentum frame*).

O primeiro ingrediente diz respeito às D-branas. Classicamente, D-branas são sub-variedades do espaço alvo que as extremidades das cordas abertas podem percorrer, e portanto satisfazem as correspondentes condições de contorno de Dirichlet. Portanto, as auto-interações e interações mútuas de um sistema de  $N$  D-branas podem ser representadas em termos de teorias de cordas. Em condições convenientes, a ação deste sistema de D-branas pode ser aproximada por uma ação supersimétrica de Yang-Mills (SYM) obtida pela redução de uma teoria SYM em  $d = 10$  para a dimensão do volume-mundo da D-brana. Numa aproximação não-relativística, a ação efetiva apropriada para um sistema de  $N$  D0-branas é portanto, a redução de  $d = 10$  SYM para uma dimensão:

$$S_{D0} = \int d\tau \text{Tr} \left( \frac{1}{2g_s} (D_0 X^p)^2 - i\theta^T D_0 \theta + \frac{1}{4g_s} [X^p, X^q]^2 + \theta^T \hat{\Gamma}^p [X_p, \theta] \right) \quad (5.1.2)$$

onde  $p = 1, \dots, 9$ ,  $X^p$  são matrizes hermiteanas  $N \times N$ ,  $\hat{\Gamma}^p$  são matrizes gama  $16 \times 16$  de  $SO(9)$ ,  $\theta$  são matrizes  $N \times N$  cujas entradas são espinores unidimensionais.

O segundo ingrediente é o quadro de momentum infinito (IMF). Imagine um sistema de partículas com momenta  $p^a$  – onde  $a$  indica a partícula – e suponha que façamos um boost para uma velocidade muito grande em dada direção. Neste caso, a energia do sistema tomará a forma aproximada de

$$E \sim p_{\parallel}^{\text{tot}} + \sum_a \frac{(p_{\perp}^a)^2}{2p_{\parallel}^a} \quad (5.1.3)$$

onde  $\parallel, \perp$  denotam as componentes do momentum nas direções paralela e perpendicular ao boost, respectivamente.

Considerando o sistema de D0-branas em vistas de (5.1.3), as direções transversas são identificadas com as nove direções espaciais da teoria SYM em  $d = 10$  discutida acima (cuja compactificação conduz à ação (5.1.2)), enquanto que a direção do boost é identificada com a 11ª dimensão da teoria M (de modo que  $p_{\parallel} = p_{11}$ ). Quando este sistema sofre um boost na 11ª direção chega-se a um regime efetivo não relativístico. A idéia de [BFSS]

é assumir que a ação não relativística (5.1.2) fornece uma descrição adequada para tal sistema de  $N$  D0-branas num referencial que sofreu um boost de inomentum infinito. A proposta da teoria de matrizes é então de que a ação (5.1.2) representa completamente a teoria M no limite de  $N$  muito grande. A dimensão a menos da teoria de matrizes seria recuperada no limite  $N \rightarrow \infty$ .

## 5.2 Teoria de Yang-Mills supersimétrica: MST

A conjectura de que a teoria de matrizes representa a teoria M vêm sendo confirmada, apesar de não haver uma modo eficiente de utilizar-se a teoria de matrizes para efetivação de cálculos. Surge então a MST como uma importante confirmação da hipótese da teoria de matrizes. A MST como proposta em [DVV] é obtida do seguinte modo: Primeiramente compactifica-se a teoria de matrizes ao longo da 9ª direção em um círculo de raio  $1/R_9$ , obtendo-se uma teoria SYM em uma dimensão temporal e uma dimensão espacial, esta última estando envolucrada em torno de um círculo de raio  $R_9$  [T]. Após esta operação somos deixados com dois raios de compactificação  $R = R_{11}$  ao longo da 11ª direção e  $R_9$ . Intercambiam-se então as 9ª e 11ª direções. No limite  $R \rightarrow \infty$  da teoria de matrizes recupera-se a teoria IIA apropriada: dez dimensões mais uma compactificada ao longo do círculo  $R_9$ , que torna-se a 11ª direção da teoria M; é este raio que espera-se corresponda a  $g_s$ . Isto é o que é chamado de MST, e que espera-se que represente uma versão não perturbativa da teoria IIA.

A MST em duas dimensões é definida pelo modelo SYM  $U(N)$  em um espaço-tempo de Minkowski dado pela ação

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d\sigma d\tau \text{Tr} \left( D_\mu X^i D^\mu X^i + \frac{1}{2g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{g^2}{2} [X^i, X^j]^2 - i\bar{\theta}\rho^\mu D_\mu\theta - g\theta^T\Gamma_i[X^i, \theta] \right) \quad (5.2.4)$$

onde  $g$  é a constante de acoplamento de gauge,  $\sigma$  e  $\tau$  são as coordenadas da folha-mundo no cilindro.  $X^i$  com  $i = 1, \dots, 8$  são matrizes hermiteanas  $N \times N$ ;  $\theta$  representa 2 matrizes

$N \times N$  cujas entradas são espinores bi-dimensionais que podem ser escritos como  $\theta^T = (\theta_s, \theta_c)$ , onde  $\theta_s, \theta_c$  são espinores das representações  $\mathbf{8}_s$  e  $\mathbf{8}_c$  de  $SO(8)$ ;  $\rho_\mu$  denota as matrizes gama em duas dimensões e as matrizes  $\Gamma_i$  são as matrizes  $16 \times 16$  de  $SO(8)$ . Escreveremos as matrizes  $\rho_\mu$  e  $\Gamma_i$  na forma

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_i \\ \bar{\gamma}_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \quad (5.2.5)$$

A ação (5.2.4) do modelo  $SYM_{1+1}$  no espaço de Minkowski é invariante pelas transformações de supersimetria

$$\begin{aligned} \delta X^i &= \frac{i}{g} \epsilon \Gamma^i \theta & \delta A_\mu &= -i \bar{\epsilon} \rho_\mu \theta, \\ \delta \theta &= \frac{1}{2g^2} \rho^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \epsilon - \frac{i}{2} [X^i, X^j] \Gamma_{ij} \epsilon - \frac{1}{g} \rho^\mu D_\mu X^i \rho^0 \Gamma_i \epsilon, \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

onde  $\epsilon^T = (\epsilon^-, \epsilon^+)$  são parâmetros da transformação.

Como veremos adiante, estaremos interessados em soluções desta teoria que preservam parte da supersimetria. Então é possível adotar dois caminhos: pode-se utilizar as transformações de supersimetria acima (5.2.6), encontrar-se as equações clássicas cujas soluções preservem parte da supersimetria e então efetuar uma rotação de Wick a fim de obter-se a versão euclideana de tais equações; ou pode-se efetuar primeiramente uma rotação de Wick, e partir-se da versão euclideana das transformações de supersimetria, encontrando-se então quais soluções preservam parte da supersimetria. Os dois procedimentos conduzem aos mesmos resultados, mas por simplicidade adota-se a segunda via.

Ao fazermos então uma rotação de Wick e introduzirmos as coordenadas complexas

$$w = \frac{1}{2}(x^1 + ix^2), \quad \bar{w} = \frac{1}{2}(x^1 - ix^2), \quad A_w = A_1 - iA_2, \quad A_{\bar{w}} = A_1 + iA_2, \quad (5.2.7)$$

para passarmos ao espaço euclideano, a ação torna-se

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{\pi} \int d^2w \operatorname{Tr} & \left( D_w X^i D_{\bar{w}} X^i - \frac{1}{4g^2} F_{w\bar{w}}^2 - \frac{g^2}{2} [X^i, X^j]^2 \right. \\ & \left. + i(\theta_s^- D_{\bar{w}} \theta_s^- + \theta_c^+ D_w \theta_c^+) + ig \theta^T \Gamma_i [X^i, \theta] \right), \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Neste caso, as transformações de supersimetria tomam a forma

$$\begin{aligned}
 \delta X^i &= \frac{i}{g}(\epsilon_s^- \gamma^i \theta_c^+ + \epsilon_c^+ \tilde{\gamma}^i \theta_s^-) \\
 \delta \theta_s^- &= \left(-\frac{i}{2g^2} F_{w\bar{w}} + \frac{1}{2}[X^i, X^j] \gamma_{ij}\right) \epsilon_s^- - \frac{1}{g} D_w X^i \gamma_i \epsilon_c^+ \\
 \delta \theta_c^+ &= \left(\frac{i}{2g^2} F_{w\bar{w}} + \frac{1}{2}[X^i, X^j] \tilde{\gamma}_{ij}\right) \epsilon_c^+ - \frac{1}{g} D_{\bar{w}} X^i \tilde{\gamma}_i \epsilon_s^- \\
 \delta A_w &= -2\epsilon_s^- \theta_s^-, \quad \delta A_{\bar{w}} = -2\epsilon_c^+ \theta_c^+, \tag{5.2.9}
 \end{aligned}$$

onde

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\gamma_i \tilde{\gamma}_j - \gamma_j \tilde{\gamma}_i), \quad \tilde{\gamma}_{ij} = \frac{1}{2}(\tilde{\gamma}_i \gamma_j - \tilde{\gamma}_j \gamma_i). \tag{5.2.10}$$

### 5.2.1 A interpretação em termos de cordas

Uma interpretação simplista pode ser esquematizada tomando-se ingenuamente o limite de acoplamento forte em (5.2.8). Reescala-se  $A \rightarrow \frac{1}{g}A$  e imagina-se que os campos representam pequenas oscilações sobre um fundo trivial. O limite de acoplamento forte  $g \rightarrow \infty$  em uma análise ingênua faz com que todos campos comutem, podendo portanto serem simultaneamente diagonalizados. O aspecto formal é o mesmo da teoria GS na abordagem do cone de luz (5.1.1); há no entanto uma variante significativa. Os campos são autovalores de  $X_i$  e  $\theta$ . Assim, para cada campo da teoria de GS têm-se aqui  $N$  campos: a teoria torna-se uma teoria livre dos graus de liberdade diagonais. A liberdade de gauge pode ser completamente fixada a menos de uma invariância residual; isto permite fixar-se as condições de contorno para os graus de liberdade diagonais a menos da transformação de gauge residual que tem a forma do grupo de permutações de  $N$  elementos. Deste modo, os graus de liberdade conduzem a uma interpretação natural como sendo eles mesmos cordas livres de comprimentos variados.

Por exemplo, sejam  $x_N^i$  os autovalores de  $X^i$ ,  $\hat{X}^i = \text{Diag}(x_1^i, \dots, x_N^i)$ , e considere-se o

feito em tais configurações da ação do elemento do grupo de permutações  $\mathcal{P}$  dado por

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2.11)$$

As condições de contorno  $\hat{X}^i(2\pi) = \mathcal{P}\hat{X}^i(0)\mathcal{P}^{-1}$  implicam que  $x_k^i(2\pi) = x_{k-1}^i$ , e portanto os  $x_k^i$  formam uma única corda longa de comprimento  $2\pi N$ . É óbvio que há outras configurações possíveis além da determinada por (5.2.11), com cordas de comprimentos variados, cada qual correspondendo a uma classe conjugada do grupo de permutações.

### 5.3 As equações do IC-INSTANTON

Os instantons BPS aparecem como soluções clássicas da versão euclideana da teoria, preservando metade da supersimetria. Para tal, se fixarmos  $\theta = 0$  e procurarmos soluções para a equação  $\delta\theta^\pm = 0$ , isto é, de (5.2.9)

$$\left(\frac{i}{2g^2}F_{w\bar{w}} + \frac{1}{2}[X^i, X^j]\tilde{\gamma}_{ij}\epsilon_c^+\right) = 0, \quad D_w X^i \gamma_i \epsilon_c^+ = 0 \quad (5.3.12)$$

$$\left(-\frac{i}{2g^2}F_{w\bar{w}} + \frac{1}{2}[X^i, X^j]\gamma_{ij}\epsilon_s^-\right) = 0, \quad D_{\bar{w}} X^i \tilde{\gamma}_i \epsilon_s^- = 0. \quad (5.3.13)$$

saberemos que a solução destas equações preservarão metade das supersimetrias.

Após algumas manipulações e tomando  $X^i = 0$  para todo  $i$  exceto dois deles (suponhamos,  $X^i \neq 0$  para  $i = 1, 2$ ); e introduzindo a notação complexa  $X = X^1 + iX^2$ ,  $\bar{X} = X^1 - iX^2 = X^\dagger$ , segue que, as condições (5.3.12),(5.3.13) tornam-se

$$F_{w\bar{w}} - ig^2 [X, \bar{X}] = 0 \quad (5.3.14)$$

$$D_{\bar{w}} X = 0, \quad D_w \bar{X} = 0. \quad (5.3.15)$$

É possível verificar que soluções não triviais de (5.3.15) satisfazem (5.2.8). A ação com

$\theta = 0, X^i = 0$  para  $i = 3, \dots, 8$  é

$$\mathcal{S}_{inst} = \frac{1}{2\pi} \int d^2w \operatorname{Tr} \left( -X D_w D_{\bar{w}} \bar{X} - \bar{X} D_w D_{\bar{w}} X - \frac{1}{2g^2} F_{w\bar{w}}^2 + \frac{g^2}{2} [X, \bar{X}]^2 \right). \quad (5.3.16)$$

Pode-se também mostrar que  $\mathcal{S}_{inst}$  se anula para soluções de (5.3.14), (5.3.15) que sejam univalentes no cilindro.

Do ponto de vista matemático (5.3.14), (5.3.15) são identificados com um sistema de Hitchin [Hi] em uma esfera subtraída de dois pontos. Em tais sistemas,  $F$  é a curvatura com respeito a um fibrado vetorial  $V$ , e  $\bar{X}$  é o fibrado de linha canônico sobre a base.

## 5.4 Sistema de Hitchin e curvatura nula generalizada

Até aqui lidamos com a teoria MST em duas dimensões, onde a interpretação em termos de cordas é melhor compreendida. No entanto, os IC-INSTANTONS existem em dimensões superiores, em especial em  $d = 4$ . Para percebermos isto, basta lembrar que a teoria MST vem a ser uma teoria de Yang-Mills supersimétrica. Como interessa-nos aplicar as técnicas introduzidas nos capítulos 2, 3, buscamos a compreensão dessas soluções em dimensões maiores que dois, o que exporemos a seguir. Em particular, conseguimos escrever as equações do IC-INSTANTON em  $d = 6$  como condição de curvatura nula, como mostraremos na seção 5.6.

Começamos por considerar a teoria em  $d = 4$ . A ação no espaço-tempo de Minkowski da teoria SYM com quatro supersimetrias em  $d = 4$  é

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = \int_{\chi} d^4x \operatorname{Tr} \left( -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} D_{\mu} X^i D^{\mu} X^i + \frac{g^2}{4} [X^i, X^j]^2 \right. \\ \left. + \frac{i}{2} \bar{\lambda} \gamma^{\mu} D_{\mu} \lambda + \frac{g}{2} \left( \lambda^T C \gamma^{i\dagger} [X^i, \lambda] - \lambda^{\dagger} C \gamma^i [X^i, \lambda^*] \right) \right) \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

sendo  $i = 1, \dots, 6$ ;  $\chi$  é uma variedade quadridimensional do tipo  $\chi = \mathbb{R} \times \mathcal{M}_3$  onde  $\mathcal{M}_3$  é uma variedade tridimensional compacta.  $X^i$  são matrizes hermiteanas  $N \times N$  na representação adjunta de  $U(N)$ ;  $\lambda$  é uma matriz  $N \times N$  cujas entradas são espinores de Weyl de  $SO(1, 3)$  e vetores na representação fundamental de  $SU(4)$ : os  $\gamma^{\mu}$ 's agem nos

índices espinoriais de  $SO(1, 3)$ , enquanto os  $\gamma^i$ 's atuam nos índices de  $SU(4)$ . Utilizam-se as matrizes gama

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^i \\ \gamma^{i\dagger} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4.18)$$

onde  $\sigma^0 = -\bar{\sigma}^0 = \mathbb{1}$ ;  $\sigma^i = \bar{\sigma}^i$  são as matrizes de Pauli;  $\Gamma^i$  são as matrizes gama  $8 \times 8$  [So] e  $C$  é a matriz de conjugação de carga; elas satisfazem as relações de anticomutação usuais

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \quad \{\Gamma^i, \Gamma^j\} = 2\delta^{ij}. \quad (5.4.19)$$

As transformações de simetria para a ação (5.4.17) são dadas por

$$\begin{aligned} \delta X^i &= \frac{i}{g} \left( \epsilon^T C \gamma^{i\dagger} \lambda - \epsilon^\dagger C \gamma^i \lambda^* \right) \\ \delta A_\mu &= -i \left( \bar{\epsilon} \gamma^\mu \lambda - \bar{\lambda} \gamma^\mu \epsilon \right) \\ \delta \lambda &= -\frac{1}{g^2} F_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} \epsilon - i [X_i, X_j] \gamma^{ij} \epsilon + \frac{2}{g} D_\mu X_i \gamma^\mu \gamma^0 C \gamma^i \epsilon^*. \end{aligned} \quad (5.4.20)$$

Os IC-INSTANTONS em  $d = 2$  podem aparecer tanto como soluções clássicas BPS da teoria SYM bem como uma redução para duas dimensões da equação de autodualidade em  $d = 4$ . Analogamente, em  $d = 4$ , os IC-INSTANTONS podem ser visto tanto como soluções que preservam metade das supersimetrias tanto quanto sistemas autoduais em  $d = 8$  reduzidos para  $d = 4$ .

#### 5.4.1 Equações do IC-INSTANTON como soluções BPS

Para obtermos as equações do IC-INSTANTON vamos primeiramente passar para o espaço euclideano, como mencionado anteriormente. A ação (5.4.17) em termos das coordenadas complexas  $v = \frac{1}{2}(x^1 + ix^2)$ ,  $w = \frac{1}{2}(x^3 + ix^4)$  é dada por

$$\begin{aligned} S = \int_X d^2v d^2w \operatorname{Tr} & \left( D_v X^i D_{\bar{v}} X^i + D_w X^i D_{\bar{w}} X^i - \frac{g^2}{2} [X^i, X^j]^2 \right. \\ & - \frac{1}{4g^2} (F_{v\bar{v}}^2 + F_{w\bar{w}}^2 - 2F_{vw} F_{\bar{v}\bar{w}} - 2F_{v\bar{w}} F_{\bar{v}w}) \\ & - 2(\lambda_1^* D_{\bar{v}} \lambda_1 + \lambda_2^* D_{\bar{v}} \lambda_2) - 2(\lambda_1^* D_{\bar{w}} \lambda_2 + \lambda_2^* D_{\bar{w}} \lambda_1) \\ & \left. - \frac{g}{2} \left( \lambda^T C \gamma^{i\dagger} [X^i, \lambda] - \lambda^\dagger C \gamma^i [X^i, \lambda^*] \right) \right) \end{aligned} \quad (5.4.21)$$

Aqui então, as transformações da supersimetria  $\mathcal{N} = 4$  na versão euclidiana tomam a forma

$$\begin{aligned}\delta X^i &= \frac{i}{g} \left( \epsilon^T C \gamma^{i\dagger} \lambda - \epsilon^\dagger C \gamma^i \lambda^* \right) \\ \delta A_\mu &= - \left( \epsilon^\dagger \gamma^\mu \lambda - \lambda^\dagger \gamma^\mu \epsilon \right) \\ \delta \lambda &= -\frac{1}{g^2} F_{\mu\nu} \gamma^{\mu\nu} \epsilon - i [X_i, X_j] \gamma^{ij} \epsilon + \frac{2i}{g} D_\mu X_i \gamma^\mu C \gamma^i \epsilon^*. \quad (5.4.22)\end{aligned}$$

onde considera-se as variáveis  $\lambda^*$  e  $\epsilon^*$  como independentes de  $\lambda$  e  $\epsilon$ . Procuram-se soluções que preservem 1/4 das supersimetrias. Para tal, tomam-se todos campos  $X^i$  com  $i = 3, \dots, 6$  como sendo zero, e define-se  $X = X^1 + iX^2$  e  $\bar{X} = X^\dagger$ . As equações que definem tais soluções seguem da condição de que  $\delta\lambda = 0$ , ou seja, são definidas por

$$F_{v\bar{v}} + F_{w\bar{w}} - ig^2 [X, \bar{X}] = 0 \quad (5.4.23)$$

$$F_{vw} = 0, \quad F_{\bar{v}\bar{w}} = 0 \quad (5.4.24)$$

$$D_{\bar{v}}X = 0 = D_v\bar{X}, \quad D_w\bar{X} = 0 = D_{\bar{w}}X \quad (5.4.25)$$

Os IC-INSTANTONS são portanto soluções deste conjunto de equações que, como veremos a seguir, pode ser obtido dentro de outro contexto.

#### 5.4.2 Equações do IC-INSTANTON como auto-dualidade

As soluções da teoria de Yang-Mills autodual em  $d = 4$  são instantons bem conhecidos. No entanto as condições de autodualidade em  $d = 8$  não foram ainda tão exploradas [W3].

Estas condições em  $d = 8$  são expressas em termos da curvatura  $F_{\mu\nu}$  por

$$F_{12} + F_{34} + F_{56} + F_{78} = 0$$

$$F_{13} + F_{42} + F_{57} + F_{86} = 0$$

$$F_{14} + F_{23} + F_{76} + F_{85} = 0$$

$$F_{15} + F_{62} + F_{73} + F_{48} = 0$$

$$F_{16} + F_{25} + F_{38} + F_{47} = 0$$

$$\begin{aligned}
 F_{17} + F_{82} + F_{35} + F_{64} &= 0 \\
 F_{18} + F_{27} + F_{63} + F_{54} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.4.26}$$

Agora façamos uma redução do sistema acima para  $d = 4$ . Para isto, mantemos a dependência nas coordenadas  $x^1, \dots, x^4$  e impomos que nenhuma quantidade depende das outras coordenadas, ou seja  $\partial_5, \dots, \partial_6 \equiv 0$ . Introduzimos as coordenadas complexas  $v = \frac{1}{2}(x^1 + ix^2)$ ,  $w = \frac{1}{2}(x^3 + ix^4)$ , definimos  $A_7 = A_8 = 0$ , e chamamos  $X = A_5 - iA_6$ . Então o sistema de equações (5.4.26) torna-se exatamente as expressões de (5.4.23), (5.4.24), (5.4.25).

## 5.5 A solução de IC-INSTANTON

Os sistemas de equações (5.3.14), (5.3.15) ou (5.4.23), (5.4.24), (5.4.25) possuem vários tipos de soluções. Observe que, caso  $X = 0$ , (5.4.23) e (5.4.24) tornam-se as usuais condições de autodualidade em  $d = 4$ . Portanto as soluções dos sistemas considerados incluem os instantons ordinários. Porém estaremos interessados nas soluções com  $X \neq 0$ , o que confere uma riqueza ao problema. A proposta consiste então em encontrar-se soluções para o par  $(A, X)$  de (5.3.14), (5.3.15) (ou (5.4.23), (5.4.24), (5.4.25)).

Iniciamos então com o *ansatz*

$$A_\mu = -iY^{-1}\partial_\mu Y \qquad X = Y^{-1}MY \tag{5.5.27}$$

onde  $\mu = w$  para o sistema em duas dimensões, e  $\mu = v, w$  para as equações em  $d = 4$ ; os potenciais  $A_{\bar{w}}$  são os conjugados complexos dos potenciais relativos às coordenadas sem barra, e.g.,  $A_{\bar{w}} = A_w^\dagger$ .  $Y$  é um elemento genérico no grupo complexo  $SL(N, \mathbb{C})$  e  $M$  especifica um recobrimento da variedade de base.

Como exemplo, tomemos o caso  $d = 2$  onde o grupo de gauge é  $U(2)$  ( $N = 2$ ). Então uma solução  $(A, X)$  que satisfaça (5.3.14), (5.3.15) como já vimos pode ser obtida com o

ansatz

$$X = Y^{-1}MY \quad A_w = i\partial_w Y^\dagger (Y^{-1})^\dagger \quad (5.5.28)$$

onde  $Y$  é uma matriz específica de  $SL(2, \mathbb{C})$ , e  $M$  pode ser escrito como a seguinte matrix  $2 \times 2$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.5.29)$$

sendo  $a$  uma função das coordenadas do cilindro. Como consequência da equação  $D_{\bar{w}}X = 0$ , segue que  $\partial_{\bar{w}}a = 0$ , isto é,  $a$  é holomórfica em termos de  $w$ . Dada então tal função holomórfica  $a$  quer-se encontrar  $Y$  que satisfaça (5.3.14), (5.3.15). Parametriza-se tal  $Y$  por

$$Y = KL = \begin{pmatrix} e^p & 0 \\ 0 & e^{-p} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} e^{\frac{u}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{u}{2}} \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} |a|^{\frac{1}{4}} & 0 \\ 0 & |a|^{-\frac{1}{4}} \end{pmatrix} \quad (5.5.30)$$

onde  $u$  é uma função a ser determinada e

$$p = \frac{u}{2} + \frac{1}{2} \ln |a|. \quad (5.5.31)$$

Então, utilizando o ansatz (5.5.28) têm-se

$$X = \begin{pmatrix} 0 & ae^{-2p} \\ e^{2p} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_w = i\partial_w p \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.5.32)$$

Agora verifica-se que a equação (5.3.14) implica a seguinte equação para  $p$

$$2\partial_w \partial_{\bar{w}} p - g^2 (e^{4p} - |a|^2 e^{-4p}) = 0 \quad (5.5.33)$$

ou, em termos de  $u$

$$\partial_w \partial_{\bar{w}} u + \frac{1}{2} \partial_w \partial_{\bar{w}} \ln |a| = g^2 |a| \sinh 2u \quad (5.5.34)$$

Fazendo uma mudança de variável  $w \rightarrow \zeta$  de modo que  $\frac{\partial \zeta}{\partial w} = \sqrt{a}$ , pode-se reescrever (5.5.34) como

$$\partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} u - g^2 \sinh 2u = -\frac{\pi}{4} \delta(a) \partial_\zeta a \partial_{\bar{\zeta}} \bar{a}. \quad (5.5.35)$$

Esta é a equação de sinh-Gordon com condições de contorno dadas pela distribuição  $\delta(a)$ , ou seja, com condições de contorno nos pontos onde a função holomórfica  $a$  se anula.

Então a solução consiste de dois ingredientes: o fator do grupo  $Y$  e o recobrimento  $M$ . Vejamos brevemente o papel atribuído a cada um deles na solução.

A matrix  $M$  representa, como já foi dito, um recobrimento do cilindro gerado pela coordenada  $w$ . Para tentar visualizar isto, diagonaliza-se  $M$  por meio de uma matriz em  $SL(2, \mathbb{C})$

$$M = S\hat{M}S^{-1}, \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} \end{pmatrix}, \quad S = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a^{\frac{1}{4}} & a^{\frac{1}{4}} \\ a^{-\frac{1}{4}} & -a^{-\frac{1}{4}} \end{pmatrix} \quad (5.5.36)$$

Agora é conveniente passar-se a uma nova coordenada  $z = e^w$ , que mapeia o cilindro em um plano complexo  $z$  sem os dois pontos  $z = 0$  e  $z = \infty$ ,  $\mathbb{C}/\{0\} \cup \{\infty\}$ . Os dois autovalores de  $M$  (ou de  $X$ ) podem ser pensados como as folhas de um duplo recobrimento do cilindro. Cada folha é uma cópia do plano complexo  $z$ . Cada ponto em cada folha é projetado – com auxílio de uma projeção  $\pi$  – em um correspondente ponto no plano  $z$ . Suponha-se, por simplicidade, que  $a = z - z_0$ . Então há um ponto de ramificação em  $z = z_0$  e outro em  $z = \infty$ . Pode-se traçar um corte entre estes dois pontos de ramificação, de modo que as duas folhas conectam-se ao longo do corte. Isto significa que, contornando a origem no plano  $z$  com um círculo que não passe pelo corte, produz-se uma imagem inversa sob  $\pi$  no recobrimento formada por dois círculos em torno da origem, um em cada folha. Porém a mesma operação efetuada num círculo que passe pelo corte tem o efeito de multiplicar as raízes por  $e^{i\pi}$ , de modo que  $\sqrt{a}$  torna-se  $-\sqrt{a}$  e vice-versa, isto é, passa-se de uma folha a outra. Isto significa que a contra-imagem deste círculo no recobrimento é um único círculo longo estendendo-se pelas duas folhas. Geometricamente o que se têm é uma superfície de Riemann representada por um recobrimento do plano complexo  $z$ .

Pode-se fornecer uma interpretação em termos de cordas do seguinte modo: A coordenada  $x_1$  é tomada como sendo o tempo euclideano. Portanto  $z = 0$  corresponde ao tempo  $-\infty$  e  $z = \infty$  ao tempo  $+\infty$ . As contraimagens do círculo em torno da origem que não

do cruzam o corte podem ser naturalmente interpretadas como duas cordas aproximando-se. Esta configuração não se altera mesmo ao aumentar-se o raio do círculo, desde que este não cruze o corte. Diz-se que as cordas propagam-se sem interagir. No entanto, quando o raio do círculo não plano  $z$  torna-se grande o suficiente para cruzar o corte, a contra-imagem torna-se uma única curva fechada estendendo-se sobre ambas folhas, e esta configuração propaga-se inalteradamente. Portanto o instanton considerado representa a ligação de duas cordas formando uma corda com o dobro do comprimento. A ligação tem lugar no ponto  $z = z_0$ , que é onde começa o corte. A imagem inversa sob  $\pi$  de  $z = 0$  e  $z = \infty$  correspondem a pontos na superfície de Riemann onde as cordas que se aproximam entram na superfície, e onde a corda existe.

Observe que, caso existam mais pontos de ramificação originando superfícies de Riemann mais complicadas, as interações serão também mais complicadas. E no caso de um grupo de gauge  $U(N)$  com  $N > 2$ , teremos  $N$  folhas de Riemann, e até  $N$  cordas interagindo.

## 5.6 Equações do IC-INSTANTON como curvatura nula

Conseguimos inserir o sistema de Hitchin da teoria  $\mathcal{N} = 8$  SYM  $U(N)$  dentro do critério de integrabilidade apresentado nos Capítulos 2, 3.

Nossa abordagem consistiu em considerar o sistema (5.4.23), (5.4.24), (5.4.25) como advindo da redução dimensional  $6d \rightarrow 4d$ . Assim pudemos utilizar as técnicas da seção 4.2, onde tratamos justamente da teoria de Yang-Mills autodual vista como uma teoria em um espaço quociente.

Escrevemos então o sistema (5.4.23), (5.4.24), (5.4.25) como uma representação de curvatura nula em 6 dimensões

$$F_{\mu\nu} = 0 \quad D_\mu B^\mu = 0 \quad (5.6.37)$$

onde  $\mu = 1, \dots, 6$ . Para reproduzirmos o sistema de Hitchin tomamos os seguintes poten-

ciais tomando valores na álgebra de um grupo quociente  $G' = G \otimes G/G_D$  :

$$\begin{aligned} A_\alpha &= W^{-1} \partial_\alpha W = \tilde{w}^{-1} \partial_\alpha \tilde{w} \otimes \mathbb{1} - \mathbb{1} \otimes \partial_\alpha \tilde{w} \tilde{w}^{-1} \\ B_\alpha &= \tilde{w}^{-1} \partial_\alpha \tilde{w} \otimes \mathbb{1} \quad \bar{B}_{\bar{\alpha}} = -\mathbb{1} \otimes \partial_{\bar{\alpha}} \tilde{w} \tilde{w}^{-1} \end{aligned} \quad (5.6.38)$$

sendo  $W \equiv \tilde{w}^{-1} \otimes \tilde{w}$  um elemento de  $G' = G \otimes G/G_D$ , e onde fizemos a transformação para as coordenadas complexas  $\alpha = w, v, z$ :  $w = x^1 + ix^2$ ,  $v = x^3 + ix^4$ ,  $z = x^5 + ix^6$ . Repare que, desde que  $A_\mu = W^{-1} \partial_\mu W$ , temos trivialmente satisfeita uma das condições da curvatura nula, a saber,  $F_{\mu\nu} = 0$ . A condição  $D^\mu B_\mu = 0$  implica as equações

$$\partial_{\bar{\alpha}}(\partial_\alpha \tilde{w} \tilde{w}^{-1}) = 0 \quad \partial_\alpha(\tilde{w}^{-1} \partial_{\bar{\alpha}} \tilde{w}) = 0. \quad (5.6.39)$$

Estas descrevem exatamente nosso sistema se tomarmos o elemento de grupo

$$\tilde{w} = nwm \quad (w = g_2^{-1} g_1) \quad (5.6.40)$$

com a parametrização

$$\begin{aligned} g_2 &= Y^{-1} & g_1 &= Y^\dagger \\ n &= e^{\bar{y}M} & m &= e^{y\bar{M}} \end{aligned} \quad (5.6.41)$$

Note que nesta abordagem, **nenhum campo depende de  $z, \bar{z}$** . Assim, de acordo com o ansatz (5.5.27) tomamos

$$\begin{aligned} A_z &= X & A_w &= \partial_w Y^\dagger Y^{\dagger-1} & A_v &= \partial_v Y^\dagger Y^{\dagger-1} \\ A_{\bar{z}} &= \bar{X} & A_{\bar{w}} &= -Y^{-1} \partial_{\bar{w}} Y & A_{\bar{v}} &= -Y^{-1} \partial_{\bar{v}} Y, \end{aligned} \quad (5.6.42)$$

Com isto, a condição de curvatura nula

$$\partial_{\bar{z}}(\partial_z \tilde{w} \tilde{w}^{-1}) + \partial_{\bar{w}}(\partial_w \tilde{w} \tilde{w}^{-1}) + \partial_{\bar{v}}(\partial_v \tilde{w} \tilde{w}^{-1}) = 0 \quad (5.6.43)$$

nos conduz às equações

$$\partial_w(w^{-1} \partial_{\bar{w}} w) + \partial_v(w^{-1} \partial_{\bar{v}} w) = [w^{-1} M w, \bar{M}] \quad (5.6.44)$$

$$\partial_{\bar{w}}(\partial_w w w^{-1}) + \partial_{\bar{v}}(\partial_v w w^{-1}) = [M, w \bar{M} w^{-1}] \quad (5.6.45)$$

que nos fornecem o sistema de Hitchin (5.4.23), (5.4.24), (5.4.25) ao fazermos as substituições (5.6.40).

A solução de IC-INSTANTON é fornecida pelos campos  $M, Y$  e  $Y^\dagger$ . Com isto, estaremos aptos a construir as cargas conservadas. Porém é necessário, para tal, que os campos satisfaçam certos vínculos, que aplicam-se à submodelos da teoria original (vide seção 3.6). Estas equações de vínculos dependem fortemente da fixação de gauge, e buscamos no momento um gauge onde sejam satisfeitas. Algumas dificuldades surgem também do fato de utilizarmos uma descrição em seis dimensões para tratar as equações do modelo em quatro dimensões.

A fim de iluminar um caminho para uma possível escolha de gauge, fizemos alguns estudos em duas dimensões, onde a solução de IC-INSTANTON é melhor compreendida. Acabamos aí por construirmos explicitamente as soluções de IC-INSTANTON, como explicaremos no próximo Capítulo.

## Capítulo 6

# O IC-INSTANTON Bi-dimensional

Após mostrarmos a integrabilidade das equações do IC-INSTANTON em dimensão maior que dois, voltamos a abordagem tradicional feita em duas dimensões. Em  $d = 2$  construímos a solução exata para o sistema, e obtivemos um conjunto de correntes conservadas que, a princípio, nada tem a ver com as correntes obtidas utilizando o método de [AFG, FL]. Estas correntes adicionam novos elementos aos sistemas de Toda em duas dimensões, e serão analisadas com maior detalhe no Capítulo 7.

### 6.1 Construção das soluções em $d = 2$

Como tomamos como paradigma o caso bi-dimensional, é possível utilizarmos todo aparato tradicional, como o método de Leznov-Saveliev para construção de soluções. Este método algébrico tem por base a existência de uma álgebra de Lie de dimensão infinita, como a álgebra de Kac-Moody, sendo esta a responsável pelo aparecimento das infinitas cargas conservadas.

No caso bi-dimensional, os potenciais relevantes para a descrição do sistema de Hitchin

(5.3.14), (5.3.15) nas coordenadas  $x_+ = x_1 - ix_2$ ,  $x_- = x_1 + ix_2$  tomam a forma

$$\begin{aligned} A_- &\equiv -\partial_- \gamma \gamma^{-1} + E_{-1} & A_+ &\equiv \gamma E_1 \gamma^{-1} \\ B_- &\equiv P^\psi (E_{-1}) & B_+ &\equiv P^\psi (\gamma E_1 \gamma^{-1}) \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

com

$$\gamma \equiv e^{\varphi H^0 + \mu D + \nu C} \quad (6.1.2)$$

e

$$E_1 \equiv \alpha_1 T_+^0 + \beta_1 T_-^1 \quad E_{-1} \equiv \alpha_{-1} T_+^{-1} + \beta_{-1} T_-^0. \quad (6.1.3)$$

$T_\pm^n$  são geradores de um álgebra de Kac-Moody  $\widehat{sl}(2, \mathbb{C})$ , e  $P^\psi (*)$  denota a representação adjunta da álgebra.

A álgebra de Kac-Moody  $\hat{\mathcal{G}}$  pode ser decomposta, por meio do operador de gradação  $Q$ , em subespaços de grau positivo e negativo

$$Q \equiv \frac{1}{2} H^0 + 2D; \quad [Q, \hat{\mathcal{G}}_n] = n \hat{\mathcal{G}}_n \quad (6.1.4)$$

sendo que o subespaço  $\hat{\mathcal{G}}_n$  com  $n > 0$  contém exclusivamente operadores de grau positivo, e  $\hat{\mathcal{G}}_n$  com  $n < 0$ , os operadores de grau negativo

$$\hat{\mathcal{G}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\mathcal{G}}_n \quad \hat{\mathcal{G}}_+ = \bigoplus_{n > 0} \hat{\mathcal{G}}_n \quad \hat{\mathcal{G}}_- = \bigoplus_{n < 0} \hat{\mathcal{G}}_n \quad (6.1.5)$$

No caso específico  $\widehat{sl}(2, \mathbb{C})$ , observe que os potenciais tomam valores somente em  $n = -1, 0, 1$ :

$$\hat{\mathcal{G}} = \hat{\mathcal{G}}_+ + \hat{\mathcal{G}}_0 + \hat{\mathcal{G}}_- \quad (6.1.6)$$

sendo que

$$A_- \in \hat{\mathcal{G}}_0 + \hat{\mathcal{G}}_- \quad A_+ \in \hat{\mathcal{G}}_+ + \hat{\mathcal{G}}_0 \quad B_- \in \hat{\mathcal{G}}_- \quad B_+ \in \hat{\mathcal{G}}_+ + \hat{\mathcal{G}}_0 \quad (6.1.7)$$

uma vez que  $\gamma$  é a exponenciação de membros de  $\hat{\mathcal{G}}_0$ , e  $E_1 \in \hat{\mathcal{G}}_+$ ,  $E_{-1} \in \hat{\mathcal{G}}_-$ .

Assim, temos como condição de curvatura nula

$$F_{\mu\nu} = 0 \quad D^\mu B_\mu = 0 \quad (6.1.8)$$

onde  $\mu, \nu = +, -$ , ou  $\mu, \nu = 0, 1$ . A primeira condição,  $F = 0$  nos fornece as equações de movimento

$$\begin{aligned}
 F_{+-} &= \partial_+ A_- - \partial_- A_+ + [A_+, A_-] \\
 &= -\partial_+ (\partial_- \gamma \gamma^{-1}) + [\gamma E_1 \gamma^{-1}, E_{-1}] + \partial_+ E_{-1} - \gamma \partial_- E_1 \gamma^{-1} \\
 &= -\partial_+ \partial_- (\varphi H^0 + \mu D + \nu C) + (\alpha_1 \beta_{-1} e^{2\varphi} - \alpha_{-1} \beta_1 e^{-2\varphi + \mu}) H^0 \\
 &\quad + \alpha_{-1} \beta_1 e^{-2\varphi + \mu} C \\
 &\quad + \partial_+ \alpha_{-1} T_+^{-1} + \partial_+ \beta_{-1} T_-^0 - \gamma (\partial_- \alpha_1 T_+^0 + \partial_- \beta_1 T_-^1) \gamma^{-1}
 \end{aligned} \tag{6.1.9}$$

A segunda condição nos conduz a

$$\begin{aligned}
 D_+ B_- + D_- B_+ &= \partial_+ B_- + [A_+, B_-] + \partial_- B_+ + [A_-, B_+] \\
 &= P^\psi ([\gamma E_1 \gamma^{-1}, E_{-1}] - [\gamma E_1 \gamma^{-1}, \partial_- \gamma \gamma^{-1}]) \\
 &\quad + [-\partial_- \gamma \gamma^{-1} + E_{-1}, \gamma E_1 \gamma^{-1}] + \partial_+ E_{-1} + \gamma \partial_- E_1 \gamma^{-1} \\
 &= P^\psi (\partial_+ \alpha_{-1} T_+^{-1} + \partial_+ \beta_{-1} T_-^0 + \gamma (\partial_- \alpha_1 T_+^0 + \partial_- \beta_1 T_-^1) \gamma^{-1})
 \end{aligned} \tag{6.1.10}$$

As condições (6.1.9) e (6.1.10) implicam que

$$\partial_- \alpha_1 = \partial_- \beta_1 = \partial_+ \alpha_{-1} = \partial_+ \beta_{-1} = 0 \tag{6.1.11}$$

ou seja,

$$\alpha_1 \equiv \alpha_1(x_+) \quad \beta_1 \equiv \beta_1(x_+) \quad \alpha_{-1} \equiv \alpha_{-1}(x_-) \quad \beta_{-1} \equiv \beta_{-1}(x_-) \tag{6.1.12}$$

Além disto, (6.1.9) e (6.1.10) implicam as equações de movimento

$$\partial_+ \partial_- \varphi = \alpha_1 \beta_{-1} e^{2\varphi} - \alpha_{-1} \beta_1 e^{-2\varphi + \mu} \tag{6.1.13}$$

$$\partial_+ \partial_- \mu = 0 \tag{6.1.14}$$

$$\partial_+ \partial_- \nu = \alpha_{-1} \beta_1 e^{-2\varphi + \mu} \tag{6.1.15}$$

O fato da conexão  $A_\mu$  ser plana permite-nos escrever

$$A_\mu \equiv -\partial_\mu W W^{-1}. \tag{6.1.16}$$

A condição de integrabilidade  $F = 0$  diz que a integral  $\int_{x_0}^{x_1} A_\mu dx^\mu$  independe do caminho que conecta os pontos inicial e final; assim, podemos avalia-la (a integral) utilizando diferentes curvas  $\Gamma$  tal que  $\Gamma(0) = x_0$ ;  $\Gamma(2\pi) = x_1$ . Este princípio nos permite escrevermos o elemento  $W$  de dois modos distintos: fim de integrar-mos as equações, denotaremos

$$W = g_1 = \gamma g_2 \quad \rightarrow \quad \gamma = g_1 g_2^{-1} \quad (6.1.17)$$

portanto

$$\begin{aligned} \partial_\mu W W^{-1} &= \partial_\mu g_1 g_1^{-1} \\ \partial_\mu W W^{-1} &= \partial_\mu \gamma \gamma^{-1} + \gamma \partial_\mu g_2 g_2^{-1} \gamma^{-1} \end{aligned} \quad (6.1.18)$$

e assim

$$\partial_+ g_1 g_1^{-1} = -\gamma E_1 \gamma^{-1} \quad \partial_+ g_2 g_2^{-1} = -\gamma^{-1} \partial_+ \gamma - E_1 \quad (6.1.19)$$

$$\partial_- g_1 g_1^{-1} = \partial_- \gamma \gamma^{-1} - E_{-1} \quad \partial_- g_2 g_2^{-1} = -\gamma^{-1} E_{-1} \gamma \quad (6.1.20)$$

Caso  $|\lambda\rangle$  seja um estado de peso máximo de uma representação da álgebra (6.1.3) dos  $E_i$ 's (veja Apêndice B), ao atuarmos com um elemento de  $\mathcal{G}_+$  sobre  $|\lambda\rangle$  obtemos zero, como ocorre com  $E_1$ , ( $E_1 |\lambda\rangle = 0$ ); portanto

$$\partial_+ g_1 g_1^{-1} |\lambda\rangle = -g_1 \partial_+ g_1^{-1} |\lambda\rangle = -\gamma E_1 \gamma^{-1} |\lambda\rangle = 0 \quad (6.1.21)$$

(lembrando-nos que  $\gamma$  só contém elementos de  $\mathcal{G}_0$  (6.1.2)), e assim (utilizando (B.0.2)) temos que

$$\partial_+ g_1^{-1} |\lambda\rangle = 0 \quad (6.1.22)$$

Analogamente, a ação dos elementos de grau negativo sobre  $\langle\lambda|$  aniquila o estado

$$\langle\lambda| \partial_- g_2 g_2^{-1} = -\langle\lambda| \gamma^{-1} E_{-1} \gamma = 0 \quad (6.1.23)$$

donde temos

$$0 = \langle\lambda| \partial_- g_2 \quad (6.1.24)$$

Portanto, os elementos de grupo  $g_1$  e  $g_2$  assim escolhidos são quirais

$$\begin{aligned} g_1^{-1} | \lambda \rangle &\equiv \text{função somente de } x_- \\ \langle \lambda | g_2 &\equiv \text{função somente de } x_+ \end{aligned} \quad (6.1.25)$$

Segue de (6.1.17) que

$$\langle \lambda | \gamma^{-1} | \lambda \rangle = \langle \lambda | g_2 g_1^{-1} | \lambda \rangle \quad (6.1.26)$$

Agora utilizamos uma decomposição do tipo Gauss para escrevermos  $g_{1,2}$

$$g_1 \equiv N \gamma_- M_- \quad g_2 \equiv M \gamma_+ N_+ \quad (6.1.27)$$

com

$$\gamma_{\pm} \in \exp(\hat{\mathcal{G}}_0) \quad N, N_+ \in \exp(\hat{\mathcal{G}}_+) \quad M, M_- \in \exp(\hat{\mathcal{G}}_-). \quad (6.1.28)$$

Com isto temos

$$\partial_{\mu} g_1 g_1^{-1} = \partial_{\mu} N N^{-1} + N \partial_{\mu} \gamma_- \gamma_-^{-1} N^{-1} + N \gamma_- \partial_{\mu} M_- M_-^{-1} \gamma_-^{-1} N^{-1} \quad (6.1.29)$$

$$\partial_{\mu} g_2 g_2^{-1} = \partial_{\mu} M M^{-1} + M \partial_{\mu} \gamma_+ \gamma_+^{-1} M^{-1} + M \gamma_+ \partial_{\mu} N_+ N_+^{-1} \gamma_+^{-1} M^{-1} \quad (6.1.30)$$

Utilizando (6.1.19)-(6.1.20) juntamente com (6.1.29)-(6.1.30) chegamos a

$$-N^{-1} \gamma E_1 \gamma^{-1} N = N^{-1} \partial_+ N + \partial_+ \gamma_- \gamma_-^{-1} + \gamma_- \partial_+ M_- M_-^{-1} \gamma_-^{-1} \quad (6.1.31)$$

$$N^{-1} (\partial_- \gamma \gamma^{-1} - E_{-1}) N = N^{-1} \partial_- N + \partial_- \gamma_- \gamma_-^{-1} + \gamma_- \partial_- M_- M_-^{-1} \gamma_-^{-1} \quad (6.1.32)$$

$$M^{-1} (-\gamma^{-1} \partial_+ \gamma - E_1) M = M^{-1} \partial_+ M + \partial_+ \gamma_+ \gamma_+^{-1} + \gamma_+ \partial_+ N_+ N_+^{-1} \gamma_+^{-1} \quad (6.1.33)$$

$$-M^{-1} \gamma^{-1} E_{-1} \gamma M = M^{-1} \partial_- M + \partial_- \gamma_+ \gamma_+^{-1} + \gamma_+ \partial_- N_+ N_+^{-1} \gamma_+^{-1} \quad (6.1.34)$$

Comparando as gradações em ambos lados de (6.1.31) vemos que

$$\partial_+ \gamma_- \gamma_-^{-1} = 0 \quad \partial_+ M_- M_-^{-1} = 0 \quad \partial_+ N N^{-1} = -\gamma E_1 \gamma^{-1} \quad (6.1.35)$$

De modo análogo, (6.1.34) implica

$$\partial_- \gamma_+ \gamma_+^{-1} = 0 \quad \partial_- N_+ N_+^{-1} = 0 \quad -\gamma^{-1} E_{-1} \gamma = \partial_- M M^{-1} \quad (6.1.36)$$

No membro esquerdo de (6.1.32), vemos que o único termo com gerador de grau  $-1$  é  $-E_{-1}$ , já que é conjugado com  $N$  que contém somente geradores de grau positivo. Assim

$$\partial_- M_- M_-^{-1} = -\gamma_-^{-1} E_{-1} \gamma_- \quad (6.1.37)$$

Analogamente, no membro esquerdo de (6.1.33), vemos que o único termo com gerador de grau  $1$  é  $-E_1$ , uma vez que está conjugado com  $M$  que contém somente geradores de grau positivo. Assim

$$\partial_+ N_+ N_+^{-1} = -\gamma_+^{-1} E_1 \gamma_+ \quad (6.1.38)$$

Conseqüentemente, de (6.1.26) e (6.1.27) segue que

$$(\lambda | \gamma^{-1} | \lambda) = (\lambda | \gamma_+(x_+) N_+(x_+) M_-^{-1}(x_-) \gamma_-^{-1}(x_-) | \lambda) \quad (6.1.39)$$

Os parâmetro da solução são  $\gamma_{\pm}$ .  $N_+$  e  $M_-$  são determinados a partir de (6.1.38) e (6.1.37) respectivamente.

As representações escalar e espinorial da álgebra de Kac-Moody afim  $sl(2)$  possuem estados de peso máximo  $|\lambda_0\rangle$  e  $|\lambda_1\rangle$  satisfazendo

$$H^0 |\lambda_0\rangle = 0 \quad C |\lambda_0\rangle = |\lambda_0\rangle \quad D |\lambda_0\rangle = d_0 |\lambda_0\rangle \quad (6.1.40)$$

$$H^0 |\lambda_1\rangle = |\lambda_1\rangle \quad C |\lambda_1\rangle = |\lambda_1\rangle \quad D |\lambda_1\rangle = d_1 |\lambda_1\rangle \quad (6.1.41)$$

onde os autovalores  $d_0$  e  $d_1$  dependem da realização da representação. Entretanto é verdade que podemos mudá-los à vontade, isto porque qualquer operador da forma

$$D' = D + \text{const.} C \quad (6.1.42)$$

representa  $D$ , uma vez que suas relações de comutação são as mesmas que  $D$ . Portanto, sempre podemos mudar os autovalores  $d_0$  e  $d_1$  arbitrariamente.

Assim, denotando

$$\gamma_{\pm} = \exp(\theta_{\pm}(x_{\pm}) H^0 \mp \zeta_{\pm}(x_{\pm}) D + \xi_{\pm}(x_{\pm}) C) \quad (6.1.43)$$

segue de (6.1.2) e (6.1.39)

$$e^{-d_0\mu-\nu} = e^{-d_0(\zeta_++\zeta_-)+\xi_+-\xi_-} \langle \lambda_0 | N_+(x_+) M_-^{-1}(x_-) | \lambda_0 \rangle \quad (6.1.44)$$

$$e^{-\varphi-d_1\mu-\nu} = e^{\theta_+-\theta_- - d_1(\zeta_++\zeta_-)+\xi_+-\xi_-} \langle \lambda_1 | N_+(x_+) M_-^{-1}(x_-) | \lambda_1 \rangle \quad (6.1.45)$$

O campo  $\mu$  é um campo livre e portanto sua solução é da forma

$$\mu = \mu_+(x_+) + \mu_-(x_-) \quad (6.1.46)$$

Usando (6.1.17) e (6.1.27) temos

$$\gamma^{-1} = g_2 g_1^{-1} = M \gamma_+ N_+ M_-^{-1} \gamma_-^{-1} N^{-1} \quad (6.1.47)$$

Uma vez que os  $\gamma_{\pm}$  são exponenciações de subálgebras de grau zero, segue todos geradores da álgebra são autovetores de sua ação adjunta. Assim podemos escrever

$$M \gamma_+ N_+ M_-^{-1} \gamma_-^{-1} N^{-1} = M \gamma_+ \gamma_-^{-1} \tilde{N}_+ \tilde{M}_-^{-1} N^{-1} = \gamma_+ \gamma_-^{-1} \tilde{M} \tilde{N}_+ \tilde{M}_-^{-1} N^{-1} \quad (6.1.48)$$

onde  $\tilde{N}_+ = \gamma_- N_+ \gamma_-^{-1}$ ,  $\tilde{M}_-^{-1} = \gamma_- M_-^{-1} \gamma_-^{-1}$ , e  $\tilde{M} = \gamma_- \gamma_+^{-1} M \gamma_+ \gamma_-^{-1}$ . Isto significa que o elemento do grupo com tilda é obtido por um elemento sem tilda por meio da multiplicação dos parâmetros pelos autovalores dos geradores a que correspondem. Consequentemente, segue de (6.1.47) que

$$\gamma_- \gamma_+^{-1} \gamma_-^{-1} = \tilde{M} \tilde{N}_+ \tilde{M}_-^{-1} N^{-1} \quad (6.1.49)$$

O membro direito de (6.1.49) não contém nenhuma exponenciação do operador  $D$ . Uma vez que  $D$  não resulta de nenhum comutador, segue que o membro direito de (6.1.49) não contém nenhuma potência de  $D$  em qualquer um dos termos de sua expansão. Portanto, o mesmo tem de ocorrer com o membro esquerdo de (6.1.49). Usando (6.1.2) e (6.1.43) temos então

$$-\mu + \zeta_+ + \zeta_- = 0 \quad (6.1.50)$$

Como a solução para  $\mu$  é fornecida por (6.1.46) temos

$$\mu_{\pm} = \zeta_{\pm} \quad (6.1.51)$$

Com estes ingredientes estamos aptos a escrever a solução geral do modelo, expressa por

$$e^{-\varphi} = \frac{\langle \lambda_1 | N_+(x_+) M_-^{-1}(x_-) | \lambda_1 \rangle}{\langle \lambda_0 | N_+(x_+) M_-^{-1}(x_-) | \lambda_0 \rangle} e^{\theta_+ - \theta_-} \quad (6.1.52)$$

$$e^{-\nu} = \langle \lambda_0 | N_+(x_+) M_-^{-1}(x_-) | \lambda_0 \rangle e^{\xi_+ - \xi_-} \quad (6.1.53)$$

$$\mu = \mu_+(x_+) + \mu_-(x_-) \quad (6.1.54)$$

Repare que as funções  $\mu_{\pm}$  devem ser regulares, já que de outro modo  $\mu$  não satisfaz a equação livre para o campo escalar. Além disto, o elemento de grupo  $W$  introduzido em (6.1.16) também deve ser regular, pois do contrário  $A_{\mu}$  não seria plana. Para que  $A_{\mu}$  satisfaça a condição de curvatura nula é necessário que as derivadas atuando sobre  $W$  comutem; isto implica que os elementos de grupo  $g_1$ ,  $g_2$  e  $\gamma$  também têm de ser regulares. Por regular entendemos uma quantidade cujas ação das derivadas  $\partial_+$  e  $\partial_-$  comutem. Utilizando [GV]

$$\partial_{\bar{z}} z^{-k-1} = (-1)^k \frac{\pi}{k!} \delta^{(k,0)}(\bar{z}, z) \quad (6.1.55)$$

observamos que

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} z^{-k-1} = \partial_{\bar{z}} \partial_z z^{-k-1} \quad (6.1.56)$$

Portanto, os campos  $\varphi$ ,  $\mu$  e  $\nu$ , bem como os parâmetros  $\theta_{\pm}$ ,  $\zeta_{\pm}$  e  $\xi_{\pm}$  podem possuir singularidades logarítmicas, correspondentes a polos dos elementos do grupo. O parâmetro  $\alpha_{\pm 1}$  e  $\beta_{\pm 1}$  não necessitam serem regulares uma vez que não utilizamos a comutatividade das derivadas sobre os mesmos.

## 6.2 A conexão com o IC-INSTANTON

Para utilizarmos a solução geral (6.1.52)–(6.1.54) no caso específico apresentado em [BBTT], fazemos as seguintes identificações

$$\begin{aligned} x_- &\equiv x_1 + ix_2 \equiv w & \alpha_1 &= g & \alpha_{-1} &= ga(z) \\ x_+ &\equiv x_1 - ix_2 \equiv \bar{w} & \beta_{-1} &= g & \beta_1 &= g\bar{a}(\bar{z}) \end{aligned} \quad (6.2.57)$$

e assim obtemos, substituindo nas equações de movimento obtidas da curvatura nula

(6.1.13)

$$\partial_w \partial_{\bar{w}} \varphi = g^2 (e^{2\varphi} - |a|^2 e^{-2\varphi + \mu}) \quad (6.2.58)$$

Tomando

$$\varphi \equiv 2p \quad \mu = 0 \quad (6.2.59)$$

onde  $p$  é a variável dinâmica do IC-INSTANTON (5.5.31), obtemos **exatamente** (5.5.33),

ou seja,

$$2\partial_w \partial_{\bar{w}} p = g^2 (e^{4p} - |a|^2 e^{-4p}) \quad (6.2.60)$$

que corresponde justamente à equação do IC-INSTANTON. Doravante estaremos nos referindo a equação do IC-INSTANTON como sendo (6.2.58) com  $\mu = 0$ , ou seja

$$\partial_w \partial_{\bar{w}} \varphi = g^2 (e^{2\varphi} - |a|^2 e^{-2\varphi}) \quad (6.2.61)$$

Repare que, de acordo com (5.5.30) vemos que

$$Y = \gamma^{\frac{1}{2}} \quad (6.2.62)$$

De fato, efetuando uma transformação de gauge

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow g A_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} \\ B_\mu &\rightarrow g B_\mu g^{-1} \end{aligned} \quad (6.2.63)$$

com  $g = \gamma^{-\frac{1}{2}}$  observamos que a condição de curvatura nula fornece as equações do sistema de Hitchin (5.3.14), (5.3.15).

A fim de construirmos a solução utilizamos a relação (5.5.31) juntamente com (6.2.59):

$$2p = \varphi \equiv u + \frac{1}{2} \log |a| \quad (6.2.64)$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\frac{d\zeta}{dw} = \sqrt{a} \quad \frac{d\bar{\zeta}}{d\bar{w}} = \sqrt{\bar{a}} \quad (6.2.65)$$

temos

$$\partial_{\zeta}\partial_{\bar{\zeta}}u - 2g^2 \sinh 2u = -\frac{\pi}{4}\delta(a)\partial_{\zeta}a\partial_{\bar{\zeta}}\bar{a} \quad (6.2.66)$$

Como foi visto no Capítulo 5, o fator de grupo  $Y$  – que no nosso caso é  $\gamma^{\frac{1}{2}}$  – é composto de duas partes (5.5.30),  $K$  e  $L$ , sendo que a dependência de gauge está contida no fator  $L$ . A solução do sistema de Hitchin deve ser suave, ou seja, o par  $(A, X)$  deve ser suave no plano complexo  $z$ . Mas os autovalores de  $X = Y^{-1}MY$  (ou de  $M$  (5.5.36)) são degenerados nos zeros das funções holomórficas  $a$ , e a matriz  $K$  diverge em  $z = z_0$ . Para que as equações de movimento (6.2.61) ou (6.2.66), sejam satisfeitas, impõem-se condições de contorno sobre os campos

$$u \sim -\frac{1}{2} \ln |a|, \quad a \sim 0 \quad (6.2.67)$$

de modo que esta singularidade logarítmica, presente no fator  $e^{\pm \frac{u}{2}}$  que compõe  $Y$ , compensa a singularidade de  $K$ ; resulta que a solução  $(X, A)$  assim obtida é suave. Assim, para que  $\varphi$  seja uma solução suave de (6.2.61),  $u$  deve obedecer (6.2.67), que implica o correspondente comportamento para  $\varphi$

$$\varphi \sim \text{finita} \quad a \sim 0 \quad (6.2.68)$$

Resumindo, a solução de IC-INSTANTON satisfaz (6.2.66) com condições de contorno

$$u \sim -\frac{1}{2} \log |a| \quad \varphi \sim \text{finita} \quad a \sim 0 \quad (6.2.69)$$

e portanto  $u$  diverge logaritmicamente nos zeros de  $a$ . Isto implica que  $\varphi$  deve permanecer finito nos zeros de  $a$ . Por outro lado, longe dos zeros de  $a$  necessitamos

$$u \sim 0 \quad \varphi \sim \frac{1}{2} \log |a| \quad (6.2.70)$$

A solução geral de (6.2.58), e portanto de (6.2.66), é dada por (6.1.52). Assim o IC-INSTANTON deve corresponder a uma particular escolha dos parâmetros. Partindo de

(6.1.38), (6.1.37), e (6.2.57), temos

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{w}} N_+ N_+^{-1} &= -g \gamma_+^{-1} (T_+^0 + \bar{a}(\bar{w}) T_-^1) \gamma_+ \\ \partial_w M_- M_-^{-1} &= -g \gamma_-^{-1} (a(w) T_+^{-1} + T_-^0) \gamma_- \end{aligned} \quad (6.2.71)$$

Devido a (6.2.59) e (6.1.51) segue-se

$$\zeta_{\pm} = \mu_{\pm} = 0 \quad (6.2.72)$$

e assim

$$\partial_{\bar{w}} N_+ N_+^{-1} = -g \left( e^{-2\theta_+} T_+^0 + \bar{a}(\bar{w}) e^{2\theta_+} T_-^1 \right) \quad (6.2.73)$$

$$\partial_w M_- M_-^{-1} = -g \left( a(w) e^{-2\theta_-} T_+^{-1} + e^{2\theta_-} T_-^0 \right) \quad (6.2.74)$$

Para então obtermos a solução de IC-INSTANTON, escolhemos as funções  $\theta_{\pm}$  como

$$\theta_+ = -\frac{1}{4} \log \bar{a} \quad \theta_- = \frac{1}{4} \log a \quad (6.2.75)$$

Com isto (6.2.73), (6.2.74) torna-se

$$\partial_{\bar{w}} N_+ N_+^{-1} = -g \sqrt{\bar{a}(\bar{w})} (T_+^0 + T_-^1) \equiv -g \sqrt{\bar{a}(\bar{w})} b_1 \quad (6.2.76)$$

$$\partial_w M_- M_-^{-1} = -g \sqrt{a(w)} (T_+^{-1} + T_-^0) \equiv -g \sqrt{a(w)} b_{-1} \quad (6.2.77)$$

Os operadores  $b_1, b_{-1}$  satisfazem a álgebra dos operadores harmônicos, que podem ser vistos como elementos de uma álgebra de Heisenberg gerada por

$$b_{2n+1} \equiv T_+^n + T_-^{n+1} \quad [b_{2m+1}, b_{2n+1}] = C(2m+1) \delta_{m+n+1,0} \quad (6.2.78)$$

Podemos então integrar (6.2.76), (6.2.77), obtendo

$$N_+ = e^{I_+ b_1 h_+} \quad I_+ = -g \int d\bar{w} \sqrt{\bar{a}(\bar{w})} \quad (6.2.79)$$

$$M_- = e^{I_- b_{-1} h_-} \quad I_- = -g \int dw \sqrt{a(w)} \quad (6.2.80)$$

Repare que a integração envolve dois elementos constantes  $h_{\pm}$ , que estarão intimamente relacionados ao comportamento da solução nos limites onde impõem-se as condições de

contorno. Observe que podemos efetuar a mudança de variáveis (6.2.65) e reescrever

$$I_+ = -g\bar{\zeta} \quad I_- = -g\zeta \quad (6.2.81)$$

Retornamos agora a solução geral (6.1.52). Com a escolha de  $\theta_{\pm}$  (6.2.75), temos

$$e^{-\varphi} = \frac{\langle \lambda_1 | N_+ M_-^{-1} | \lambda_1 \rangle}{\langle \lambda_0 | N_+ M_-^{-1} | \lambda_0 \rangle} e^{-\frac{1}{2} \log|a|} \quad (6.2.82)$$

que, em vistas de (6.2.64) torna-se

$$e^{-u} = \frac{\langle \lambda_1 | N_+ M_-^{-1} | \lambda_1 \rangle}{\langle \lambda_0 | N_+ M_-^{-1} | \lambda_0 \rangle} \quad (6.2.83)$$

Para encontrar-mos as constantes de integração  $h_{\pm}$  adequadas, introduzimos o operador de vértice  $V(\mu)$  (veja Apêndice C)

$$V(\mu_i) \equiv :: e^{2Q(\mu_i)} :: \quad (6.2.84)$$

que possui a propriedade de ser autovalor dos osciladores da álgebra de Heisenberg dos osciladores

$$[b_{2n+1}, V(\mu)] = -2\mu^{2n+1} V(\mu) \quad (6.2.85)$$

Fixamos então as constantes  $h_+, h_-$  em (6.2.79), (6.2.80) de modo a satisfazerem

$$h_+ h_-^{-1} \equiv \prod_{i=1}^{\infty} e^{V(\mu_i)} \quad (6.2.86)$$

Os operadores de vértice agindo sobre o vácuo criam um sólon. Assim, esta escolha de  $h_+, h_-$  corresponde a tomarmos o IC-INSTANTON sobre um **condensado de sólitons**.

Com isto, a solução depende de

$$\begin{aligned} \langle \lambda | N_+ M_-^{-1} | \lambda \rangle &= \langle \lambda | g \prod_{i=1}^{\infty} e^{V(\mu_i)} g^{-1} | \lambda \rangle \\ &= \langle \lambda | \prod_{i=1}^{\infty} e^{g V(\mu_i) g^{-1}} | \lambda \rangle \\ &= \langle \lambda | \prod_{i=1}^{\infty} (1 + g V(\mu_i) g^{-1}) | \lambda \rangle \end{aligned} \quad (6.2.87)$$

onde definimos  $g \equiv e^{I_+ b_1} e^{I_- b_{-1}}$ , e utilizamos (veja Apêndice C)

$$V(z)V(w) \rightarrow 0 \quad \text{com} \quad z \rightarrow w \quad (6.2.88)$$

Conforme as propriedades do operador de vértice (examinadas no Apêndice C) temos

$$g V(\mu_i) g^{-1} = e^{\beta_i} V(\mu_i) \quad \beta_i = -2 \left( \mu_i I_+ + \frac{I_-}{\mu_i} \right) \quad (6.2.89)$$

Agora expandimos o v.e.v. (*vacuum expectation value*) em termos de somas:

$$\begin{aligned} \langle \lambda | N_+ M_-^{-1} | \lambda \rangle &= \langle \lambda | \prod_{i=1}^{\infty} (1 + g V(\mu_i) g^{-1}) | \lambda \rangle \\ &= 1 + \sum_i e^{\beta_i} \langle \lambda | V(\mu_i) | \lambda \rangle \\ &+ \sum_{i < j} e^{\beta_i} e^{\beta_j} \langle \lambda | V(\mu_i) V(\mu_j) | \lambda \rangle \\ &+ \sum_{i < j < k} e^{\beta_i} e^{\beta_j} e^{\beta_k} \langle \lambda | V(\mu_i) V(\mu_j) V(\mu_k) | \lambda \rangle + \dots \end{aligned} \quad (6.2.90)$$

Novamente, devido a definição de  $V$

$$V(z)V(w) =: V(z)V(w) :: \left( \frac{w-z}{w+z} \right)^2 \quad (6.2.91)$$

donde podemos concluir

$$\langle \lambda | \overbrace{V(\mu_i) \dots V(\mu_j)}^n | \lambda \rangle = c_\lambda^n \overbrace{\left( \frac{\mu_k - \mu_i}{\mu_k + \mu_i} \right)^2 \dots \left( \frac{\mu_j - \mu_k}{\mu_j + \mu_k} \right)^2}^{\frac{n(n-1)}{2}} \langle \lambda | :: \overbrace{V(\mu_i) \dots V(\mu_j)}^n :: | \lambda \rangle \quad (6.2.92)$$

onde a constante  $c_\lambda$  deriva das propriedades das representações  $\langle \lambda_0 |$  e  $\langle \lambda_1 |$  (veja [KO])

$$c_\lambda = \begin{cases} 1 & \text{quando} \quad \lambda = \lambda_0 \\ -1 & \text{quando} \quad \lambda = \lambda_1 \end{cases}$$

Utilizando

$$\langle \lambda | :: V(\mu_i) \dots V(\mu_j) :: | \lambda \rangle = 1 \quad (6.2.93)$$

segue de (6.2.90) que

$$\langle \lambda_0 | N_+ M_-^{-1} | \lambda_0 \rangle = 1 + \sum_i e^{\beta_i} + \sum_{i < j} e^{\beta_i} e^{\beta_j} \left( \frac{\mu_j - \mu_i}{\mu_j + \mu_i} \right)^2$$

$$+ \sum_{i < j < k} e^{\beta_i} e^{\beta_j} e^{\beta_k} \left( \frac{\mu_j - \mu_i}{\mu_j + \mu_i} \right)^2 \left( \frac{\mu_k - \mu_i}{\mu_k + \mu_i} \right)^2 \left( \frac{\mu_k - \mu_j}{\mu_k + \mu_j} \right)^2 + \dots$$

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 | N_+ M_-^{-1} | \lambda_1 \rangle &= 1 - \sum_i e^{\beta_i} + \sum_{i < j} e^{\beta_i} e^{\beta_j} \left( \frac{\mu_j - \mu_i}{\mu_j + \mu_i} \right)^2 \\ &- \sum_{i < j < k} e^{\beta_i} e^{\beta_j} e^{\beta_k} \left( \frac{\mu_j - \mu_i}{\mu_j + \mu_i} \right)^2 \left( \frac{\mu_k - \mu_i}{\mu_k + \mu_i} \right)^2 \left( \frac{\mu_k - \mu_j}{\mu_k + \mu_j} \right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (6.2.94)$$

Observe que tomamos os valores de todos  $\mu_i$ 's como sendo diferentes para evitar o cancelamento de termos devido a propriedade (6.2.88). Além disto, devemos tomar os  $\mu_i$ 's como sendo reais.

Estas expressões encontram um modo compacto de expressão em termos de determinantes, a saber,

$$\begin{aligned} \langle \lambda_0 | N_+ M_-^{-1} | \lambda_0 \rangle &= \det(1 + W) \\ \langle \lambda_1 | N_+ M_-^{-1} | \lambda_1 \rangle &= \det(1 - W) \end{aligned} \quad (6.2.95)$$

onde  $W$  é a matriz [Ba] \*

$$W_{ij} \equiv e^{\beta_i/2} e^{\beta_j/2} \frac{\sqrt{4\mu_i\mu_j}}{\mu_i + \mu_j} \quad (6.2.96)$$

Utilizando (6.2.83) temos que

$$u = \ln \left( \frac{\det(1 + W)}{\det(1 - W)} \right) \quad (6.2.97)$$

Agora, usando a relação

$$\ln \det M = \text{Tr} \ln M \quad (6.2.98)$$

segue que

$$u = \text{Tr} \ln \frac{1 + W}{1 - W} \quad (6.2.99)$$

Usando a expansão

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad (6.2.100)$$

---

\*Gostaríamos de agradecer ao Prof. Olivier Babelon por esclarecimentos neste ponto.

temos

$$u = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Tr } W^{2n+1}}{2n+1} \quad (6.2.101)$$

A solução  $u$  deve ser real. Para tanto, tomamos  $\mu_i$  como sendo reais e positivos. A positividade garante que não haja um fato  $i$  vindo da raiz quadrada na expressão de  $W_{ij}$  em (6.2.96). De (6.2.81) e (6.2.89) temos

$$\beta_i = 2g \left( \bar{\zeta} \mu_i + \zeta \frac{1}{\mu_i} \right) \quad (6.2.102)$$

e portanto de (6.2.96)

$$W_{ij}^*(\mu) = W_{ij} \left( \frac{1}{\mu} \right) \quad (6.2.103)$$

Assim, a soma sobre  $\mu_i$  deve conter  $\mu$  e  $1/\mu$  de modo simétrico. Transformamos então o índice  $i$  de  $\mu_i$  em uma variável contínua  $\nu$  que toma valores no intervalo de  $-\infty$  a  $\infty$  e tomamos  $\mu_\nu \equiv e^\nu$ , i.e.

$$\begin{aligned} i &\rightarrow \nu \equiv \text{variável real} \\ \mu_i &\rightarrow \mu_\nu = e^\nu \\ \sum_i &\rightarrow \Lambda \int_{-\infty}^{\infty} d\nu = \Lambda \int_0^{\infty} \frac{d\mu}{\mu} \end{aligned} \quad (6.2.104)$$

onde  $\Lambda$  é um fator de escala da medida de integração. A expressão para a solução (6.2.101) torna-se

$$\begin{aligned} u &= 2 \left( \Lambda \int_0^{\infty} \frac{d\mu}{\mu} e^{\beta(\mu)} + \frac{\Lambda^3}{3} \int_0^{\infty} \frac{d\mu_1}{\mu_1} \int_0^{\infty} \frac{d\mu_2}{\mu_2} \int_0^{\infty} \frac{d\mu_3}{\mu_3} \times \right. \\ &\quad \times \left. e^{\beta(\mu_1)/2} \frac{\sqrt{4\mu_1\mu_2}}{\mu_1 + \mu_2} e^{\beta(\mu_2)} \frac{\sqrt{4\mu_2\mu_3}}{\mu_2 + \mu_3} e^{\beta(\mu_3)} \frac{\sqrt{4\mu_3\mu_1}}{\mu_3 + \mu_1} e^{\beta(\mu_1)/2} + \dots \right) \\ &= 2 \left( \Lambda \int_0^{\infty} \frac{d\mu}{\mu} e^{\beta(\mu)} + \frac{2^3 \Lambda^3}{3} \int_0^{\infty} \frac{d\mu_1}{\mu_1} \int_0^{\infty} \frac{d\mu_2}{\mu_2} \int_0^{\infty} \frac{d\mu_3}{\mu_3} \times \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \frac{\mu_2}{\mu_2 + \mu_3} \frac{\mu_3}{\mu_3 + \mu_1} e^{\beta(\mu_1) + \beta(\mu_2) + \beta(\mu_3)} + \dots \right) \end{aligned} \quad (6.2.105)$$

Ao tomarmos então o conjugado complexo de  $u$  temos que

$$\beta(\mu_i) \rightarrow \beta \left( \frac{1}{\mu_i} \right) \quad (6.2.106)$$

Note que efetuando a mudança de variáveis nas integrais

$$\mu_i \rightarrow \frac{1}{\mu_i} \quad \text{temos} \quad \int_0^\infty \frac{d\mu_i}{\mu_i} \rightarrow \int_0^\infty \frac{d\mu_i}{\mu_i} \quad (6.2.107)$$

e o integrando permanece invariante uma vez que

$$\frac{\mu_i}{\mu_i + \mu_j} \rightarrow \frac{\mu_j}{\mu_i + \mu_j} \quad (6.2.108)$$

Portanto, esta análise permite-nos concluir que  $u$  é real.

Conseqüentemente, de (6.2.99) podemos escrever

$$u = \frac{1}{2} \left( \text{Tr} \ln \frac{1+W}{1-W} + \text{Tr} \ln \frac{1+W^*}{1-W^*} \right) = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \frac{1+W+W^* + \frac{1}{2}(WW^* + W^*W)}{1-W-W^* + \frac{1}{2}(WW^* + W^*W)} \quad (6.2.109)$$

Tomando ( $\varepsilon = \pm 1$ )

$$\begin{aligned} 1 + \varepsilon W + \varepsilon W^* + \frac{1}{2} (WW^* + W^*W) = & \quad (6.2.110) \\ \delta_{\mu_i, \mu_j} + \varepsilon e^{\beta(\mu_i)/2} \frac{\sqrt{4\mu_i\mu_j}}{\mu_i + \mu_j} e^{\beta(\mu_j)/2} + \varepsilon e^{\beta^*(\mu_i)/2} \frac{\sqrt{4\mu_i\mu_j}}{\mu_i + \mu_j} e^{\beta^*(\mu_j)/2} \\ + \frac{1}{2} \left( e^{\beta(\mu_i)/2} e^{\beta^*(\mu_j)/2} + e^{\beta(\mu_j)/2} e^{\beta^*(\mu_i)/2} \right) \int_0^\infty \frac{d\mu}{\mu} \frac{\sqrt{4\mu_i\mu}}{\mu_i + \mu} \frac{\sqrt{4\mu\mu_j}}{\mu + \mu_j} e^{(\beta(\mu) + \beta^*(\mu))/2} \end{aligned}$$

Agora denotamos

$$\zeta \equiv |\zeta| e^{i\varphi} \quad (6.2.111)$$

e portanto

$$\beta(\mu) = 2g |\zeta| \left( \cos \varphi \left( \mu + \frac{1}{\mu} \right) - i \sin \varphi \left( \mu - \frac{1}{\mu} \right) \right) \quad (6.2.112)$$

Assim,

$$\begin{aligned} 1 + \varepsilon W + \varepsilon W^* + \frac{1}{2} (WW^* + W^*W) = & \delta_{\mu_i, \mu_j} \\ + 2\varepsilon \frac{\sqrt{4\mu_i\mu_j}}{\mu_i + \mu_j} e^{g|\zeta|\cos\varphi\left(\mu_i + \mu_j + \frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_j}\right)} \cos\left(g|\zeta|\sin\varphi\left(\mu_i + \mu_j - \frac{1}{\mu_i} - \frac{1}{\mu_j}\right)\right) \\ + e^{g|\zeta|\cos\varphi\left(\mu_i + \mu_j + \frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_j}\right)} \cos\left(g|\zeta|\sin\varphi\left(\mu_i - \mu_j - \frac{1}{\mu_i} + \frac{1}{\mu_j}\right)\right) \times \\ \times \int_0^\infty \frac{d\mu}{\mu} \frac{\sqrt{4\mu_i\mu}}{\mu_i + \mu} \frac{\sqrt{4\mu\mu_j}}{\mu + \mu_j} e^{2g|\zeta|\cos\varphi\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right)} \end{aligned} \quad (6.2.113)$$

Consequentemente, observamos que

$$1 + \varepsilon W + \varepsilon W^* + \frac{1}{2} (WW^* + W^*W) \rightarrow 1 \quad (6.2.114)$$

caso  $g \cos \bar{\varphi} < 0$ , e para  $|\zeta| \rightarrow \infty$ . Além disto

$$1 + \varepsilon W + \varepsilon W^* + \frac{1}{2} (WW^* + W^*W) \rightarrow \frac{1}{2} (WW^* + W^*W) \quad (6.2.115)$$

caso  $g \cos \varphi > 0$ , e para  $|\zeta| \rightarrow \infty$ . Portanto,

$$u \rightarrow 0 \quad \text{para } |\zeta| \rightarrow \infty \quad (6.2.116)$$

Por outro lado temos que

$$\beta(\mu) \rightarrow 0 \quad \text{para } |\zeta| \rightarrow 0 \quad (6.2.117)$$

Consequentemente, a solução torna-se

$$u \rightarrow 2 \left( \Lambda \int_0^\infty \frac{d\mu}{\mu} + \frac{2^3 \Lambda^3}{3} \int_0^\infty \frac{d\mu_1}{\mu_1} \int_0^\infty \frac{d\mu_2}{\mu_2} \int_0^\infty \frac{d\mu_3}{\mu_3} \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \frac{\mu_2}{\mu_2 + \mu_3} \frac{\mu_3}{\mu_3 + \mu_1} + \dots \right) \\ 2 \left( \Lambda \int_0^\infty \frac{d\mu}{\mu} + \frac{2^2 \Lambda^3}{3} \left( \int_0^\infty \frac{d\mu}{\mu} \right)^3 + \dots \right) \quad (6.2.118)$$

onde fizemos a mudança de variáveis

$$\mu_i \rightarrow \nu_i = \mu_i + \mu_{i+1} \quad (\text{soma mod } 3) \quad (6.2.119)$$

e utilizamos o fato do Jacobiano ser  $\frac{1}{2}$ . Portanto vemos que

$$u \rightarrow +\infty \quad \text{para } |\zeta| \rightarrow 0 \quad (6.2.120)$$

Para verificarmos como as divergências dependem de  $|\zeta|$ , temos que encontrar um modo de regularizar as integrais, o que fazemos em 6.3. Antes, porém, devemos nos deter brevemente na forma de  $|\zeta|$ .

### 6.3 Regularização das integrais

Utilizaremos a notação  $N = 2n + 1$ . As integrais que temos de tratar são da forma

$$I_N \equiv \int_0^\infty \frac{d\mu_1}{\mu_1} \dots \int_0^\infty \frac{d\mu_N}{\mu_N} \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \frac{\mu_2}{\mu_2 + \mu_3} \dots \frac{\mu_N}{\mu_N + \mu_1} e^{\beta(\mu_1) + \dots + \beta(\mu_N)} \quad (6.3.121)$$

Podemos efetuar uma das integrações fazendo uma mudança adequada de variáveis.

Primeiramente definimos

$$\mu_i \equiv e^{\theta_i} \quad (6.3.122)$$

e assim reescrevemos a expressão (6.3.121) como

$$I_N = \int_{-\infty}^\infty d\theta_1 \dots \int_{-\infty}^\infty d\theta_N \frac{1}{1 + e^{\theta_2 - \theta_1}} \frac{1}{1 + e^{\theta_3 - \theta_2}} \dots \frac{1}{1 + e^{\theta_1 - \theta_N}} e^{\beta(\theta_1) + \dots + \beta(\theta_N)} \quad (6.3.123)$$

Agora, introduzimos as variáveis

$$\begin{aligned} \phi_i &= \theta_i - \theta_{i+1} & i = 1, 2, \dots, N-1 \\ \phi_N &= \sum_{i=1}^N \theta_i \end{aligned} \quad (6.3.124)$$

Portanto a transformação pode ser realizada por uma matriz  $N \times N$   $J$  dada por

$$\phi = J \cdot \theta \quad J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.3.125)$$

assim, o inverso do Jacobiano é

$$\left| \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta_j} \right| = \det J = N. \quad (6.3.126)$$

A relação inversa é dada por

$$\theta_l = \frac{1}{N} \left( \phi_N - \sum_{n=1}^{l-1} n \phi_n + \sum_{n=l}^{N-1} (N-n) \phi_n \right) \quad (6.3.127)$$

Com isto, a expressão para o fator  $\beta$  (6.2.102), (6.2.106) torna-se

$$\sum_{l=1}^N \beta(\theta_l) = 2g \left( \bar{\zeta} \sum_{l=1}^N e^{\theta_l} + \zeta \sum_{l=1}^N e^{-\theta_l} \right) = 2g \left( \bar{\zeta} e^{\phi_N/N} f_N(\phi) + \zeta e^{-\phi_N/N} f_N(-\phi) \right) \quad (6.3.128)$$

onde

$$f_N(\phi) \equiv \sum_{l=1}^N e^{h_l(\phi)} \quad h_l(\phi) \equiv \frac{1}{N} \left( - \sum_{n=1}^{l-1} n \phi_n + \sum_{n=l}^{N-1} (N-n) \phi_n \right) \quad (6.3.129)$$

Repare que  $f_N(\phi)$  e  $h_l(\phi)$  não dependem de  $\phi_N$ .

Voltando a expressão para  $I_N$  (6.3.123) temos

$$I_N = \frac{1}{2^N N} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_N \frac{e^{2g(\bar{\zeta} e^{\phi_N/N} f_N(\phi) + \zeta e^{-\phi_N/N} f_N(-\phi))}}{\cosh(\frac{1}{2}\phi_1) \cosh(\frac{1}{2}\phi_2) \dots \cosh(\frac{1}{2}\phi_{N-1}) \cosh(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1} \phi_n)}$$

Agora novamente introduzimos um nova variável

$$\nu \equiv e^{\phi_N/N} \quad (6.3.130)$$

e consequentemente

$$I_N = \frac{1}{2^N} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_1 \dots d\phi_{N-1} \frac{1}{\cosh(\frac{1}{2}\phi_1) \cosh(\frac{1}{2}\phi_2) \dots \cosh(\frac{1}{2}\phi_{N-1}) \cosh(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1} \phi_n)} \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{d\nu}{\nu} e^{2g(\bar{\zeta} f_N(\phi) \nu + \zeta f_N(-\phi) \frac{1}{\nu})} \quad (6.3.131)$$

Utilizando a equação (F.0.1) temos

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x} e^{\frac{i\mu}{2} \left( x - \frac{\beta^2}{x} \right)} = 2K_0(\beta\mu) \quad \text{Im}\mu > 0 \quad \text{Im}(\beta^2\mu) < 0 \quad (6.3.132)$$

Repare que as funções  $f_N(\phi)$  são reais e positivas. portanto, caso  $\text{Re}(g\zeta) < 0$ , temos

$$I_N = \frac{1}{2^{N-1}} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_1 \dots d\phi_{N-1} \frac{K_0 \left( 4 |g| |\zeta| \sqrt{f_N(\phi) f_N(-\phi)} \right)}{\cosh(\frac{1}{2}\phi_1) \cosh(\frac{1}{2}\phi_2) \dots \cosh(\frac{1}{2}\phi_{N-1}) \cosh(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1} \phi_n)} \quad (6.3.133)$$

Observe que, de (6.2.105) e (6.3.133) resulta que a solução para o campo  $u$  depende somente da norma de  $\zeta$  e  $g$ .

Temos que

$$f_N(\phi) f_N(-\phi) = N + 2 \sum_{i>j} \cosh(h_i(\phi) - h_j(\phi)) \quad (6.3.134)$$

Assim

$$f_N(\phi) f_N(-\phi) \geq N^2 \quad (6.3.135)$$

Para argumentos muito grandes temos que

$$K_0(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left( 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right) \quad (6.3.136)$$

Consequentemente, é claro que ,

$$I_N \rightarrow 0 \quad \text{para} \quad |\zeta| \rightarrow \infty \quad (6.3.137)$$

e portanto, o campo  $u$  vai a zero para  $\zeta$  tomando valores muito grandes, como requerido.

Utilizando (F.0.5) temos que, para argumentos pequenos

$$K_0(z) = -\ln \frac{z}{2} I_0(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \psi(k+1) \quad (6.3.138)$$

onde

$$I_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \quad \psi(1) = -0.577215... \quad \psi(k+1) = \psi(k) + \frac{1}{k} \quad (6.3.139)$$

A análise para  $\zeta$  pequeno é um pouco mais engenhosa. Isto porque tomar pequenos valores de  $|\zeta|$  não garante que o argumento da função de Bessel  $K_0$  seja pequeno, uma vez que  $f_N(\phi) f_N(-\phi)$  pode ser infinitamente grande. Entretanto, na região onde  $|\zeta| f_N(\phi) f_N(-\phi)$  diverge para  $|\zeta|$  pequeno, a função  $K_0$  se anula, e portanto não contribui para a integral  $I_N$ . Assim, podemos utilizar o seguinte argumento: Suponhamos que  $|\zeta|$  tenha um valor fixo infinitesimal  $|\zeta| = \varepsilon$ . Com isto podemos dividir o domínio de integração em duas regiões, a saber

$$\begin{aligned} D_0 &\equiv \text{região de } (\phi_1, \dots, \phi_{N-1}) \text{ onde } \varepsilon^4 |g| \sqrt{f_N(\phi) f_N(-\phi)} < \sqrt{\varepsilon} \\ D_1 &\equiv \text{região de } (\phi_1, \dots, \phi_{N-1}) \text{ onde } \varepsilon^4 |g| \sqrt{f_N(\phi) f_N(-\phi)} > \sqrt{\varepsilon} \end{aligned} \quad (6.3.140)$$

Na região  $D_0$  utilizamos a expansão (6.3.138), e na região  $D_1$  utilizamos (6.3.136). Assim

$$\begin{aligned}
 I_N &= \frac{1}{2^{N-1}} \int_{D_0} d\phi_1 \dots d\phi_{N-1} \frac{-\ln\left(2|g|\zeta|\sqrt{f_N(\phi)f_N(-\phi)}\right) + O(1)}{\cosh\left(\frac{1}{2}\phi_1\right)\cosh\left(\frac{1}{2}\phi_2\right)\dots\cosh\left(\frac{1}{2}\phi_{N-1}\right)\cosh\left(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1}\phi_n\right)} \\
 &+ \frac{1}{2^{N-1}} \int_{D_1} d\phi_1 \dots d\phi_{N-1} \frac{\sqrt{\frac{\pi}{8|g|\zeta|\sqrt{f_N(\phi)f_N(-\phi)}}}}{\cosh\left(\frac{1}{2}\phi_1\right)\cosh\left(\frac{1}{2}\phi_2\right)\dots\cosh\left(\frac{1}{2}\phi_{N-1}\right)\cosh\left(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1}\phi_n\right)} e^{-4|g|\zeta|\sqrt{f_N(\phi)f_N(-\phi)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{2}\right)\right)
 \end{aligned} \tag{6.3.141}$$

Repare que, na região  $D_1$  temos

$$\sqrt{f_N(\phi)f_N(-\phi)} \leq \frac{1}{4|g|\sqrt{\varepsilon}} \tag{6.3.142}$$

Portanto,

$$\sqrt{f_N(\phi)f_N(-\phi)} \rightarrow \infty \quad \text{com} \quad \varepsilon \rightarrow \infty \tag{6.3.143}$$

Deste modo, utilizando a forma de  $f_N(\phi)f_N(-\phi)$  (que explicitaremos adiante, (6.3.154)), vemos que no limite  $\varepsilon$  a região  $D_1$  torna-se uma superfície infinita, já que o único modo de termos  $\sqrt{f_N(\phi)f_N(-\phi)} \rightarrow \varepsilon$  é termos ao menos um dos  $\phi$ 's divergindo. Além disto, na região  $D_1$  o argumento de  $K_0$  nunca se anula, de modo que  $K_0$  é finita em  $D_1$ . Por outro lado, o denominador do integrando em  $D_1$  é sempre divergente. Portanto,

$$\frac{K_0\left(4|g|\zeta|\sqrt{f_N(\phi)f_N(-\phi)}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{2}\phi_1\right)\cosh\left(\frac{1}{2}\phi_2\right)\dots\cosh\left(\frac{1}{2}\phi_{N-1}\right)\cosh\left(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1}\phi_n\right)} \rightarrow 0 \tag{6.3.144}$$

Consequentemente, temos que

$$I_N \sim -\kappa_N \ln|\zeta| \quad \text{para} \quad |\zeta| \rightarrow 0 \tag{6.3.145}$$

com

$$\kappa_N \equiv \frac{1}{2^{N-1}} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_1 \dots d\phi_{N-1} \frac{1}{\cosh\left(\frac{1}{2}\phi_1\right)\cosh\left(\frac{1}{2}\phi_2\right)\dots\cosh\left(\frac{1}{2}\phi_{N-1}\right)\cosh\left(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1}\phi_n\right)} \tag{6.3.146}$$

Podemos agora avaliar  $\kappa_N$ . Temos

$$\kappa_N = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_1 \dots d\phi_{N-1} \frac{1}{\cosh(\phi_1)\cosh(\phi_2)\dots\cosh(\phi_{N-1})\cosh\left(\sum_{n=1}^{N-1}\phi_n\right)}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_1 \dots d\phi_N \frac{\delta \left( \sum_{i=1}^N \phi_i \right)}{\prod_{i=1}^N \cosh \phi_i} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_1 \dots d\phi_N \frac{e^{ik \sum_{i=1}^N \phi_i}}{\prod_{i=1}^N \cosh \phi_i} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left( \int_{-\infty}^{\infty} d\phi \frac{e^{ik\phi}}{\cosh \phi} \right)^N \\
&= \frac{2^N}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left( \int_0^{\infty} d\phi \frac{\cos(k\phi)}{\cosh \phi} \right)^N \\
&= \frac{2^{N+1}}{2\pi} \int_0^{\infty} dk \left( \int_0^{\infty} d\phi \frac{\cos(k\phi)}{\cosh \phi} \right)^N \\
&= 2\pi^{N-2} \int_0^{\infty} dk \frac{1}{\cosh^N k} \quad \text{usando (F.0.4)} \\
&= \pi^{N-2} B \left( \frac{1}{2}, \frac{N}{2} \right) \quad \text{usando (F.0.2)} \tag{6.3.147}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\kappa_N = \pi^{N-2} \frac{\Gamma \left( \frac{1}{2} \right) \Gamma \left( \frac{N}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{N+1}{2} \right)} \tag{6.3.148}$$

e

$$\kappa_{2n+1} = \frac{\pi^{2n} (2n-1)!!}{2^n n!} \tag{6.3.149}$$

Além disso temos †

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\mu}{\mu} e^{\beta(\mu)} = K_0(4|g||\zeta|) \tag{6.3.150}$$

e assim

$$I_1 \sim -\ln |\zeta| \quad \text{para} \quad |\zeta| \rightarrow 0 \tag{6.3.151}$$

e

$$\kappa_1 = 1 \tag{6.3.152}$$

Isto explica o fator  $\frac{1}{2}$  em (6.3.150) já que (6.3.149) também fornece  $\kappa_1 = 1$  (lembramo-nos que  $(-1)!! = 1$ ).

---

†repare que, por conveniencia, evidenciamos um fator  $\frac{1}{2}$  nas integrais

### 6.3.1 As funções $f_N$

Observe que de (6.3.124), (6.3.127) e (6.3.129) temos que

$$\begin{aligned}
 \phi_i &= \theta_i - \theta_{i+1} = h_i - h_{i+1} \\
 \phi_i + \phi_{i+1} &= \theta_i - \theta_{i+2} = h_i - h_{i+2} \\
 \phi_i + \phi_{i+1} + \phi_{i+2} &= \theta_i - \theta_{i+3} = h_i - h_{i+3} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{6.3.153}$$

Portanto, de (6.3.134) segue

$$\begin{aligned}
 f_N(\phi) f_N(-\phi) &= N + 2 \sum_{i>j} \cosh(h_i(\phi) - h_j(\phi)) \\
 &= N + 2 \left( \sum_{i=1}^{N-1} \cosh(\phi_i) + \sum_{i=1}^{N-2} \cosh(\phi_i + \phi_{i+1}) + \dots \right. \\
 &\quad + \sum_{i=1}^2 \cosh(\phi_i + \phi_{i+1} + \phi_{i+2} \dots + \phi_{i+N-3}) \\
 &\quad \left. + \cosh(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \dots + \phi_{N-1}) \right)
 \end{aligned} \tag{6.3.154}$$

Assim, para  $N = 3$

$$f_3(\phi) f_3(-\phi) = 3 + 2(\cosh(\phi_1) + \cosh(\phi_2) + \cosh(\phi_1 + \phi_2)) \tag{6.3.155}$$

e para  $N = 5$

$$\begin{aligned}
 f_5(\phi) f_5(-\phi) &= 5 + 2(\cosh(\phi_1) + \cosh(\phi_2) + \cosh(\phi_3) + \cosh(\phi_4)) \\
 &\quad + \cosh(\phi_1 + \phi_2) + \cosh(\phi_2 + \phi_3) + \cosh(\phi_3 + \phi_4) \\
 &\quad + \cosh(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + \cosh(\phi_2 + \phi_3 + \phi_4) + \cosh(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4)
 \end{aligned} \tag{6.3.156}$$

## 6.4 Análise da solução

Após regularizarmos as integrais, podemos reescrever (6.2.105) como

$$u = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\Lambda)^{2n+1}}{2n+1} I_{2n+1} \tag{6.4.157}$$

e assim, para  $\zeta$  pequeno a solução se comporta como

$$u \sim -\frac{2}{\pi} f(2\pi\Lambda) \ln |\zeta| \quad (6.4.158)$$

onde

$$f(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n! (2n+1)} x^{2n+1} \quad (6.4.159)$$

Observe que esta série é convergente para  $x^2 < 1$ , e divergente para  $x^2 > 1$ . Para  $x^2 = 1$  podemos averiguar, com auxílio de cálculo numérico<sup>‡</sup>, que a série é convergente aí, e que  $f(1) = \pi/2$ .

De acordo com a análise de  $\zeta$  feita em D, próximo do zero de  $a$  vale o comportamento  $\zeta \sim a^{3/2}$ . Portanto, temos

$$u \sim -\frac{3}{\pi} f(2\pi\Lambda) \ln |a| \quad (6.4.160)$$

o que implica que devemos fixar  $\Lambda$  de modo a obtermos  $f(2\pi\Lambda) = \pi/6$ . Podemos verificar através de cálculo numérico que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \quad (6.4.161)$$

Consequentemente,

$$\Lambda = \frac{1}{4\pi} \quad (6.4.162)$$

fornece o condição de contorno correta

$$u \sim -\frac{1}{2} \ln |a| \quad (6.4.163)$$

Segue então de (6.4.158)

$$\partial_\zeta u \sim -\frac{1}{\pi} f(2\pi\Lambda) \frac{1}{\zeta} \quad (6.4.164)$$

e portanto

$$\partial_{\bar{\zeta}} \partial_\zeta u \sim -f(2\pi\Lambda) \delta(\zeta, \bar{\zeta}) \quad (6.4.165)$$

Utilizando a análise das funções delta efetuadas no Apêndice E, temos

$$\delta(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{3}{2} \delta(a, \bar{a}) \partial_\zeta a \partial_{\bar{\zeta}} \bar{a} \quad (6.4.166)$$

<sup>‡</sup>Mathematica

o que implica então que

$$\partial_{\bar{\zeta}} \partial_{\zeta} u \sim -f(2\pi\Lambda) \delta(\zeta, \bar{\zeta}) = -f(2\pi\Lambda) \frac{3}{2} \delta(a, \bar{a}) \partial_{\zeta} a \partial_{\bar{\zeta}} \bar{a}. \quad (6.4.167)$$

Assim vemos que (6.4.161) também fornece o fator correto da delta na equação de movimento.

Resumindo, desejávamos solucionar a equação do IC-INSTANTON (6.2.66)

$$\partial_{\zeta} \partial_{\bar{\zeta}} u - 2g^2 \sinh 2u = -\frac{\pi}{4} \delta(a) \partial_{\zeta} a \partial_{\bar{\zeta}} \bar{a} \quad (6.4.168)$$

A solução que obtivemos é expressa por

$$u = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\Lambda)^{2n+1}}{2n+1} I_{2n+1} \quad (6.4.169)$$

onde

$$I_N = \frac{1}{2^{N-1}} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_1 \dots d\phi_{N-1} \frac{K_0 \left( 4 |g| |\zeta| \sqrt{f_N(\phi) f_N(-\phi)} \right)}{\cosh \left( \frac{1}{2} \phi_1 \right) \cosh \left( \frac{1}{2} \phi_2 \right) \dots \cosh \left( \frac{1}{2} \phi_{N-1} \right) \cosh \left( \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \phi_n \right)} \quad (6.4.170)$$

Portanto, a solução depende somente da combinação  $4 |g| |\zeta|$ , e é simétrica, no plano  $\zeta$ , sob rotações em torno da origem  $\zeta = 0$ .

Note que a série para  $u$  (6.4.169) é convergente. Para argumentos de  $K_0(z)$  – denotamos  $z \equiv 4 |g| |\zeta| \sqrt{f_N(\phi) f_N(-\phi)}$  – os cálculos numéricos que forneceram a Tabela 1 (seção 6.4.1) mostram que as integrais  $I_N$  caem rapidamente para  $z > 1$ . O problema torna-se delicado próximo de  $z \sim 0$ . Portanto, garantindo a convergência da série nesta região, podemos estar seguros quanto a convergência para qualquer  $z$ .

Podemos utilizar o critério da razão para determinarmos o raio de convergência próximo de  $z \sim 0$ , onde sabemos que  $I_{2n+1} \rightarrow \kappa_{2n+1}$  (6.3.145); temos então

$$\frac{u^{(2n+3)}}{u^{(2n+1)}} = \frac{(2\Lambda)^{2n+3}}{2n+3} \frac{2n+1}{(2\Lambda)^{2n+1}} \frac{\kappa_{2n+3}}{\kappa_{2n+1}}$$

$$\begin{aligned}
&= (2\Lambda)^2 \frac{\pi^{2n+2} (2n+1)!!}{2^{n+2} (n+1)!} \frac{2^n n!}{\pi^{2n} (2n-1)!!} \\
&= (\pi\Lambda)^2 \frac{2n+1}{n+1} \\
&= (\pi\Lambda)^2 \left( 2 - \frac{1}{n+1} \right)
\end{aligned}$$

Portanto, para que

$$\frac{u^{(2n+3)}}{u^{(2n+1)}} < 1 \quad (6.4.171)$$

basta restringirmos

$$2 (\pi\Lambda)^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad \Lambda < \frac{1}{\sqrt{2} \pi} \quad (6.4.172)$$

Ora, como estamos num caso onde  $\Lambda = 1/4\pi$ , a convergência da série próxima de  $z \sim 0$  fica garantida, o que estende-se para demais regiões do argumento dos  $I_N$ ,  $z$ .

A função de Bessel  $K_0$  satisfaz a seguinte equação diferencial

$$z^2 K_0''(z) + z K_0'(z) - z^2 K_0(z) = 0 \quad (6.4.173)$$

Denotaremos

$$w_N \equiv f_N(\phi) f_N(-\phi) \quad (6.4.174)$$

e decorre então da análise da seção 6.3.1 que

$$w_N = N + 2 \sum_{l=0}^{N-2} \sum_{j=1}^{N-l-1} \cosh \sum_{i=j}^{j+l} \phi_i \quad (6.4.175)$$

Para verificarmos que (6.4.169) é realmente solução de (6.4.168), substituímos a expressão na equação diferencial tomando com o cuidado de avaliar corretamente o valor das derivadas nos zeros de  $\zeta$ . Para tal, dividimos a análise em duas partes: em  $\zeta = 0$ , e fora do zero. As derivadas de  $u$  em  $\zeta = 0$  foram calculadas em (6.4.165), (6.4.167). Portanto devemos agora proceder a verificação para a região onde  $\zeta \neq 0$ .

Temos então

$$\partial_\zeta K_0(4 |g| |\zeta| \sqrt{w_N}) = 4 |g| \sqrt{w_N} \partial_\zeta |\zeta| K_0'(4 |g| |\zeta| \sqrt{w_N}) \quad (6.4.176)$$

e

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{\zeta}} \partial_{\zeta} K_0(4|g||\zeta|\sqrt{w_N}) &= (4|g|)^2 w_N \partial_{\bar{\zeta}} |\zeta| \partial_{\zeta} |\zeta| K_0''(4|g||\zeta|\sqrt{w_N}) \\ &+ 4|g|\sqrt{w_N} \partial_{\bar{\zeta}} \partial_{\zeta} |\zeta| K_0'(4|g||\zeta|\sqrt{w_N}) \end{aligned} \quad (6.4.177)$$

Além disto, temos que

$$\partial_{\zeta} |\zeta| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{\zeta}}{\zeta}} \quad \partial_{\bar{\zeta}} |\zeta| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\zeta}{\bar{\zeta}}} \quad (6.4.178)$$

Utilizando o fato de

$$\partial_{\bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta} = \pi \delta(\zeta, \bar{\zeta}) \quad (6.4.179)$$

segue que

$$\partial_{\bar{\zeta}} \partial_{\zeta} |\zeta| = \frac{1}{4|\zeta|} + \frac{\pi}{4} |\zeta| \delta(\zeta, \bar{\zeta}) \quad (6.4.180)$$

Uma vez que estamos fora do ponto  $\zeta = 0$  – estamos efetuando a análise para  $\zeta \neq 0$  – o termo multiplicado pela função delta é anulado; utilizando então a equação (6.4.173), temos

$$\partial_{\bar{\zeta}} \partial_{\zeta} K_0(4|g||\zeta|\sqrt{w_N}) = 4g^2 w_N K_0(4|g||\zeta|\sqrt{w_N}) \quad (6.4.181)$$

Portanto, de (6.4.170) decorre que

$$\partial_{\bar{\zeta}} \partial_{\zeta} I_N = 4g^2 J_N \quad \zeta \neq 0 \quad (6.4.182)$$

onde  $\kappa_N$  foi definido em (6.3.149), e onde introduzimos

$$J_N \equiv \frac{1}{2^{N-1}} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_1 \dots d\phi_{N-1} \frac{w_N K_0(4|g||\zeta|\sqrt{w_N})}{\cosh(\frac{1}{2}\phi_1) \cosh(\frac{1}{2}\phi_2) \dots \cosh(\frac{1}{2}\phi_{N-1}) \cosh(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \phi_n)} \quad (6.4.183)$$

Observe que a relação (6.4.182) também é válida para  $N = 1$ , com

$$J_1 = K_0(4|g||\zeta|) \quad (6.4.184)$$

Isto porque de (6.3.150) segue que  $I_1 = K_0(4|g||\zeta|)$ , e portanto (6.4.184) segue de (6.4.182) e (6.4.181) utilizando o fato de  $w_1 = 1$  e  $\kappa_1 = 1$ .

Usando argumentos similares aqueles que conduzem a (6.4.181), podemos verificar que  $I_N$  e  $J_N$  satisfazem

$$x^2 I_N''(x) + x I_N'(x) = x^2 J_N(x) \quad (6.4.185)$$

onde  $x$  denota o argumento destas funções, i.e.  $x \equiv 4 |g| |\zeta|$ .

Temos agora, de (6.4.169) e (6.4.167), que

$$\partial_{\bar{\zeta}} \partial_{\zeta} u = 8g^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\Lambda)^{2n+1}}{2n+1} J_{2n+1} - \delta(\zeta, \bar{\zeta}) f(2\pi\Lambda) \quad (6.4.186)$$

onde  $f(x)$  foi definido em (6.4.159).

Assim, substituindo na equação de movimento (6.4.168), obtemos

$$2g^2 \left( 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\Lambda)^{2n+1}}{2n+1} J_{2n+1} - \sinh 2u \right) = \delta(\zeta, \bar{\zeta}) f(2\pi\Lambda) - \frac{\pi}{4} \delta(a) \partial_{\zeta a} \partial_{\bar{\zeta} \bar{a}} \quad (6.4.187)$$

Para que o membro direito de (6.4.187) se anule, devemos fixar  $\Lambda$  de modo que  $f(2\pi\Lambda) = \pi/6$  uma vez que temos (veja Apêndice E)

$$\delta(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{3}{2} \delta(a, \bar{a}) \partial_{\zeta a} \partial_{\bar{\zeta} \bar{a}} \quad (6.4.188)$$

Esta escolha é exatamente a que foi feita em (6.4.161) e (6.4.162) para obtermos as condições de contorno corretas para o IC-INSTANTON.

Por outro lado, o membro esquerdo de (6.4.187) se anula para qualquer  $\Lambda$ . Para averiguar como isto ocorre, expandimos o membro esquerdo de (6.4.187) em potências de  $\Lambda$ . Temos

$$\begin{aligned} \Lambda &\rightarrow K_0(4|g||\zeta|) = K_0(4|g||\zeta|) & (I_1 = J_1) \\ \Lambda^3 &\rightarrow J_3 = I_3 + 8I_1^3 & (6.4.189) \\ \Lambda^5 &\rightarrow J_5 = I_5 + \frac{40}{3} I_1^2 I_3 + \frac{32}{3} I_1^5 \\ \Lambda^7 &\rightarrow J_7 = I_7 + \frac{224}{9} I_1^4 I_3 + \frac{56}{9} I_1 I_3^2 + \frac{56}{5} I_1^2 I_5 + \frac{256}{45} I_1^7 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Caso estas relações sejam válidas, então de (6.4.185) segue que os  $I_{2n+1}$ 's satisfazem equações não-lineares acopladas:

$$\begin{aligned}
 I_3'' + \frac{1}{x}I_3' - I_3 &= 8I_1^3 & (6.4.190) \\
 I_5'' + \frac{1}{x}I_5' - I_5 &= \frac{40}{3}I_1^2 I_3 + \frac{32}{3}I_1^5 \\
 I_7'' + \frac{1}{x}I_7' - I_7 &= \frac{224}{9}I_1^4 I_3 + \frac{56}{9}I_1 I_3^2 + \frac{56}{5}I_1^2 I_5 + \frac{256}{45}I_1^7 \\
 &\vdots \quad \vdots \quad \vdots
 \end{aligned}$$

Portanto, o que faz a distinção entre  $K_0(x)$  e o  $I_{2n+1}$ 's é o membro direito destas equações.

Não conseguimos verificar analiticamente as relações (6.4.189). Entretanto, obtivemos fortes indícios de sua validade através de cálculos numéricos. Estes são apresentados a seguir.

#### 6.4.1 Os cálculos numéricos

Para realizarmos os cálculos numéricos, é mais apropriado realizarmos uma mudança nas variáveis de integração nas expressões para  $I_N$  e  $J_N$ . Definimos

$$\phi_i = \ln \frac{1+x_i}{1-x_i} \quad i = 1, 2, \dots, N_1 \quad (6.4.191)$$

Então

$$\begin{aligned}
 x_i = -1 &\rightarrow \phi_i = -\infty \\
 x_i = 1 &\rightarrow \phi_i = \infty
 \end{aligned} \quad (6.4.192)$$

Temos que

$$d\phi_i = \frac{2}{1-x_i^2} dx_i \quad (6.4.193)$$

Além disto, temos

$$\operatorname{cosh} \left( \frac{1}{2} \phi_i \right) = \frac{1}{\sqrt{1-x_i^2}}$$

$$\begin{aligned}
\cosh\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N-1}\phi_i\right) &= \frac{1}{2}\frac{\prod_{i=1}^{N-1}(1+x_i)+\prod_{i=1}^{N-1}(1-x_i)}{\prod_{i=1}^{N-1}\sqrt{1-x_i^2}} \\
\cosh\left(\sum_{i=j_1}^{j_2}\phi_i\right) &= \frac{1}{2}\left(\prod_{i=j_1}^{j_2}\frac{(1+x_i)}{(1-x_i)}+\prod_{i=j_1}^{j_2}\frac{(1-x_i)}{(1+x_i)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\left(\prod_{i=j_1}^{j_2}(1+x_i)\right)^2+\left(\prod_{i=j_1}^{j_2}(1-x_i)\right)^2}{\prod_{i=j_1}^{j_2}(1-x_i^2)} \tag{6.4.194}
\end{aligned}$$

Então segue que

$$\begin{aligned}
I_N(z) &= \int_{-1}^1 d^{N-1}x_i \frac{K_0(z\sqrt{w_N})}{v_N} \\
J_N(z) &= \int_{-1}^1 d^{N-1}x_i \frac{w_N K_0(z\sqrt{w_N})}{v_N} \tag{6.4.195}
\end{aligned}$$

onde

$$w_N = N + \sum_{l=0}^{N-2} \sum_{j=1}^{N-l-1} \left( \prod_{i=j}^{j+l} \frac{(1+x_i)}{(1-x_i)} + \prod_{i=j}^{j+l} \frac{(1-x_i)}{(1+x_i)} \right) \tag{6.4.196}$$

e

$$v_N = \frac{1}{2} \left( \prod_{i=1}^{N-1} (1+x_i) + \prod_{i=1}^{N-1} (1-x_i) \right) \tag{6.4.197}$$

Para avaliar as integrais multidimensionais foi utilizado o método de Monte Carlo, com  $10^6$  pontos. Os cálculos foram efetuados no Mathematica.

Nas tabelas a seguir denotamos

$$\begin{aligned}
L_3 &\equiv I_3 + 8I_1^3 \\
L_5 &\equiv I_5 + \frac{40}{3}I_1^2 I_3 + \frac{32}{3}I_1^5 \\
L_7 &\equiv I_7 + \frac{224}{9}I_1^4 I_3 + \frac{56}{9}I_1 I_3^2 + \frac{56}{5}I_1^2 I_5 + \frac{256}{45}I_1^7 \tag{6.4.198}
\end{aligned}$$

Portanto, a idéia é comparar  $J_N$  com  $L_N$ .

$z$	$I_1$	$I_3$	$I_5$	$I_7$
0.001	7.02369	26.2432	155.304	1030.21
0.01	4.72124	14.9093	73.2467	392.142
0.1	2.42707	4.45538	11.4281	30.1074
0.5	0.924419	0.431247	0.243255	0.13814
1	0.421024	0.0494501	0.00665967	0.000899806
5	0.0036911	$4.43487 \cdot 10^{-8}$	$5.54594 \cdot 10^{-13}$	$7.09459 \cdot 10^{-18}$
10	0.0000177801	$5.28605 \cdot 10^{-15}$	$1.56093 \cdot 10^{-24}$	$4.6911 \cdot 10^{-34}$
100	$4.65663 \cdot 10^{-45}$	$1.01368 \cdot 10^{-133}$	$1.93103 \cdot 10^{-222}$	$4.536300999912516 \cdot 10^{-311}$

Tabela 1

$z$	$J_3$	$J_5$	$J_7$
0.001	2536.5	185175.	$7.54145 \cdot 10^6$
0.01	837.105	29602.1	510214.
0.1	119.043	1259.12	7747.44
0.5	6.76128	12.3637	14.6365
1	0.645795	0.264697	0.072811
5	$4.46301 \cdot 10^{-7}$	$1.58783 \cdot 10^{-11}$	$4.0114 \cdot 10^{-16}$
10	$5.05304 \cdot 10^{-14}$	$4.19947 \cdot 10^{-23}$	$2.48817 \cdot 10^{-32}$
100	$9.18311 \cdot 10^{-133}$	$4.86778 \cdot 10^{-221}$	$2.243466788014094 \cdot 10^{-309}$

Tabela 2

$z$	$J_3$	$L_3$
0.001	2536.5	2798.2
0.01	837.105	856.807
0.1	119.043	118.832
0.5	6.76128	6.75095
1	0.645795	0.646502
5	$4.46301 \cdot 10^{-7}$	$4.46655 \cdot 10^{-7}$
10	$5.05304 \cdot 10^{-14}$	$5.02526 \cdot 10^{-14}$
100	$9.18311 \cdot 10^{-133}$	$9.09169 \cdot 10^{-133}$

Tabela 3.a

$z$	$J_5$	$L_5$
0.001	185175.	199746.
0.01	29602.1	29525.7
0.1	1259.12	1259.7
0.5	12.3637	12.3576
1	0.264697	0.264647
5	$1.58783 \cdot 10^{-11}$	$1.59189 \cdot 10^{-11}$
10	$4.19947 \cdot 10^{-23}$	$4.27958 \cdot 10^{-23}$
100	$4.86778 \cdot 10^{-221}$	$5.4594 \cdot 10^{-221}$

Tabela 3.b

$z$	$J_7$	$L_7$
0.001	$7.54145 \cdot 10^6$	$6.50368 \cdot 10^6$
0.01	510214.	507034.
0.1	7747.44	7754.01
0.5	14.6365	14.6559
1	0.072811	0.0725407
5	$4.0114 \cdot 10^{-16}$	$3.94879 \cdot 10^{-16}$
10	$2.48817 \cdot 10^{-32}$	$2.54311 \cdot 10^{-32}$
100	$2.243466788014094 \cdot 10^{-309}$	$2.268454893691221 \cdot 10^{-309}$

Tabela 3.c

Os resultados portanto são convincentes. As relações (6.4.189) parecem serem válidas, e o membro esquerdo de (6.4.187) parece anular-se para qualquer  $\Lambda$ .

### Outra simulação

Esta simulação foi efetuada para comparando-se diretamente as duas expressões no membro esquerdo de (6.4.187), ou seja,  $\sinh 2u$  e a série dos  $J_{2n+1}$ . Para isto, fixou-se o valor de  $\Lambda$ , (6.4.162):

$$\Lambda = \frac{1}{4\pi}. \quad (6.4.199)$$

Denotamos, então, as expressões do membro esquerdo de (6.4.187) por

$$u = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{2n+1} (2n+1)} I_{2n+1} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} u^{(2n+1)} \quad (6.4.200)$$

Além disto,

$$T_1 \equiv \sinh 2u \quad (6.4.201)$$

e

$$T_2 \equiv 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{2n+1} (2n+1)} J_{2n+1} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} T_2^{(2n+1)} \quad (6.4.202)$$

Denotou-se o argumento de tais quantidade como

$$z = 4 |g| |\zeta| \quad (6.4.203)$$

Através do método de Monte Carlo, a região de integração foi amostrada com  $2 \times 10^5$  pontos. Na **Tabela A** são fornecidos os valores para o campo  $u$ ; na **Tabela B**, os valores de  $T_2$ ; e na **Tabela C**, comparam-se os dois termos do membro esquerdo de (6.4.187), a saber,  $T_1$  e  $T_2$ . Observe que a concordância melhora conforme  $z$  diminui. Isto porque a série para  $T_2$  converge mais demoradamente conforme nos aproximamos da origem. De fato, para  $z = 0.001$  têm-se que  $T_2^{(7)}$  é todavia grande, e portanto  $T_2^{(9)}$ , que foi descartado, deveria fornecer uma contribuição considerável. Portanto, os dados são convincentes. Realmente o membro esquerdo de (6.4.187) se anula.

$z$	$u^{(1)}$	$u^{(3)}$	$u^{(5)}$	$u^{(7)}$	$u$
0.001	2.23571	0.070563	0.00639629	0.000761756	2.31343
0.01	1.50282	0.0401033	0.00300196	0.000284662	1.54621
0.1	0.77256	0.0119652	0.000465552	0.0000223161	0.785013
0.5	0.294252	0.00115498	$9.94778 \cdot 10^{-6}$	$1.01694 \cdot 10^{-7}$	0.295417
1	0.134016	0.000133247	$2.71906 \cdot 10^{-7}$	$6.6715 \cdot 10^{-10}$	0.13415
5	0.00117491	$1.18861 \cdot 10^{-10}$	$2.32352 \cdot 10^{-17}$	$4.8563 \cdot 10^{-24}$	0.00117491
10	$5.65957 \cdot 10^{-6}$	$1.4009 \cdot 10^{-17}$	$6.36666 \cdot 10^{-29}$	$3.77822 \cdot 10^{-40}$	$5.65957 \cdot 10^{-6}$
100	$1.48225 \cdot 10^{-45}$	$2.6567 \cdot 10^{-136}$	$7.72572 \cdot 10^{-227}$	$1.6492 \cdot 10^{-317}$	$1.48225 \cdot 10^{-45}$

Tabela A

$z$	$T_2^{(1)}$	$T_2^{(3)}$	$T_2^{(5)}$	$T_2^{(7)}$
0.001	4.47142	14.0358	15.3165	8.10628
0.01	3.00564	4.62128	2.39107	0.753618
0.1	1.54512	0.641157	0.10275	0.0114345
0.5	0.588503	0.0362274	0.00100911	0.0000214977
1	0.268032	0.00348283	0.0000217377	$1.08203 \cdot 10^{-7}$
5	0.00234983	$2.40465 \cdot 10^{-9}$	$1.30277 \cdot 10^{-15}$	$5.7553 \cdot 10^{-22}$
10	0.0000113191	$2.68971 \cdot 10^{-16}$	$3.46717 \cdot 10^{-27}$	$3.75293 \cdot 10^{-38}$
100	$2.9645 \cdot 10^{-45}$	$4.92493 \cdot 10^{-135}$	$3.34931 \cdot 10^{-225}$	$1.29488 \cdot 10^{-315}$

Tabela B

$z$	$T_1 = \sinh(2u)$	$T_2$	$\frac{T_1 - T_2}{(T_1 + T_2)/2}$
0.001	51.0915	41.93	0.196976
0.01	10.9924	10.7716	0.0202937
0.1	2.29937	2.30046	-0.000475796
0.5	0.625814	0.625761	0.0000833475
1	0.27153	0.271537	-0.0000262378
5	0.00234983	0.00234983	$-1.88331 \cdot 10^{-9}$
10	0.0000113191	0.0000113191	$6.67501 \cdot 10^{-14}$
100	$2.9645 \cdot 10^{-45}$	$2.9645 \cdot 10^{-45}$	0.

Tabela C

## 6.5 Correntes conservadas

A condição de curvatura nula (6.1.8) juntamente com (6.1.1), implicam a existência de dois tipos de correntes conservadas, a saber

- A primeira faz uso do fato de que, sendo a conexão plana, existe um elemento do

grupo tal que  $A_\mu = -\partial_\mu W W^{-1}$  com a igualdade sendo verdadeira **somente quando valem as equações de movimento** - (*on-shell*). Então a segunda equação em (6.1.8) implica que

$$J_\mu \equiv W^{-1} B_\mu W \quad (6.5.204)$$

é conservada. Repare que estas correntes são não locais. Isto deve-se ao fato de  $A_\mu$  ser plana somente *on-shell*, e portanto  $W$  é um funcional não local dos campos do modelo, a saber  $\varphi$ .

- O segundo conjunto de correntes existem somente em dimensão dois e sob algumas circunstâncias que aplicam-se ao modelo em questão. Baseia-se no fato de que os potenciais  $A_\mu$  (não necessariamente  $B_\mu$ ) podem ser colocados numa subálgebra abeliana. Em duas dimensões podemos encontrar um elemento de grupo  $f$  tal que

$$A_\mu \rightarrow \mathcal{A}_\mu = f A_\mu f^{-1} - \partial_\mu f f^{-1} \quad (6.5.205)$$

de modo que  $\mathcal{A}_\mu$  seja abeliano. A primeira equação em (6.1.8) torna-se

$$\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu = 0 \quad (6.5.206)$$

Então as correntes conservadas são dadas por

$$j_\mu \equiv \epsilon_{\mu\nu} \mathcal{A}^\nu \quad (6.5.207)$$

### 6.5.1 O segundo conjunto de correntes

Explicaremos aqui como calcular o segundo conjunto de correntes. (Para uma explicação mais detalhada ver [O, FL] )

Retornamos aos potenciais originais (6.1.1), que fornecem as equações de movimento do modelo em termos da condição de curvatura nula. Utilizamos (6.2.57):

$$\begin{aligned} A_w &= -\partial_w \varphi H^0 + g (a(w) T_+^{-1} + T_-^0) \\ A_{\bar{w}} &= g (e^{2\varphi} T_+^0 + e^{-2\varphi} \bar{a}(\bar{w}) T_-^1). \end{aligned} \quad (6.5.208)$$

Efetuamos uma transformação de *gauge* com o elemento  $g_0 = e^{-\frac{1}{4} \log a H^0}$ , a fim de prepararmos os potenciais e obtermos

$$\begin{aligned} A_w \rightarrow \tilde{A}_w &= - \left( \partial_w \varphi - \frac{\partial_w a}{4a} \right) F_0 + g \sqrt{a} b_{-1} \\ A_{\bar{w}} \rightarrow \tilde{A}_{\bar{w}} &= \frac{g}{2\sqrt{a}} (e^{2\varphi} + a\bar{a} e^{-2\varphi}) b_1 + \frac{g}{2\sqrt{a}} (e^{2\varphi} - a\bar{a} e^{-2\varphi}) F_1 \end{aligned} \quad (6.5.209)$$

onde

$$F_0 = H^0 \quad b_{-1} = T_+^{-1} + T_-^0 \quad b_1 = T_+^0 + T_-^1 \quad F_1 = T_+^0 - T_-^1$$

A abelianização dos potenciais é consequência do fato de podermos separar a álgebra de Kac-Moody em duas partes

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}} &= \text{Ker}_{\text{ad } b_{-1}} + \text{Im}_{\text{ad } b_{-1}} \\ [\text{Ker}_{\text{ad } b_{-1}}, \text{Ker}_{\text{ad } b_{-1}}] &= 0 \quad [\text{Ker}_{\text{ad } b_{-1}}, \text{Im}_{\text{ad } b_{-1}}] \in \text{Im}_{\text{ad } b_{-1}} \end{aligned} \quad (6.5.210)$$

onde tomamos  $b_{-1}$  como os geradores de uma subálgebra de Heisenberg

$$b_{2n+1} = T_+^{2n+1} + T_-^{2n+1} \quad [b_{2n+1}, b_{2m-1}] = 0$$

Assim, se pudermos assegurar que

$$\mathcal{A}_{\bar{w}}, \mathcal{A}_w \in \text{Ker}_{\text{ad } b_{-1}} \quad (6.5.211)$$

automaticamente satisfazemos

$$[\mathcal{A}_{\bar{w}}, \mathcal{A}_w] = 0.$$

Precisamos para tal, efetuar uma transformação de *gauge* de modo que as únicas componentes não nulas dos potenciais estejam ao longo de  $\text{Ker}_{\text{ad } b_{-1}}$ . Para tal, utilizamos o elemento  $f = e^{\sum_{n>0} \zeta_n F_n}$ :

$$\tilde{A}_w \rightarrow \mathcal{A}_w = \sum_{n>0} \mathcal{A}_w^{(n)} b_n + g \sqrt{a} b_{-1} \quad (6.5.212)$$

$$\tilde{A}_{\bar{w}} \rightarrow \mathcal{A}_{\bar{w}} = \sum_{n>0} \mathcal{A}_{\bar{w}}^{(n)} b_n + \sum_{n>0} f_{\bar{w}}^{(n)} F_n \quad (6.5.213)$$

Os coeficientes  $\zeta$ 's são fixados pela condição (6.5.211).

Utilizando (6.5.212),(6.5.213), podemos quebrar a condição de curvatura nula em duas partes, uma contendo os geradores da subálgebra de Heisenberg, e outra onde comparecem os geradores de  $\text{Im}_{\text{ad}} b_{-1}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n>0} \left( \partial_w \mathcal{A}_{\bar{w}}^{(n)} - \partial_{\bar{w}} \mathcal{A}_w^{(n)} \right) b_n + [g \sqrt{a} b_{-1} + \sum_{n>0} \mathcal{A}_w^{(n)} b_n, \sum_{m>0} \mathcal{A}_{\bar{w}}^{(m)} b_m] &= 0 \\ \sum_{n>0} (\partial_w f_{\bar{w}}^n) F_n + [g \sqrt{a} b_{-1} + \sum_{n>0} \mathcal{A}_w^{(n)} b_n, \sum_{m>0} f_{\bar{w}}^{(m)} F_m] &= 0 \end{aligned} \quad (6.5.214)$$

onde usamos o fato de  $\partial_{\bar{w}} a = 0$  (??).

Uma vez que o termo de grau mais baixo em (6.5.214) é

$$g \sqrt{a} f_{\bar{w}}^{(1)} [b_{-1}, F_1] \quad (6.5.215)$$

e este é o único termo de grau zero, a condição de curvatura nula implica que  $f_{\bar{w}}^{(1)} = 0$ .

Pelo mesmo motivo, concluímos que **todos**  $f_{\bar{w}}^{(n)}$ 's são nulos. Isto garante que

$$\mathcal{A}_w = \sum_{n>0} \mathcal{A}_w^{(n)} b_n + g \sqrt{a} b_{-1} \quad (6.5.216)$$

$$\mathcal{A}_{\bar{w}} = \sum_{n>0} \mathcal{A}_{\bar{w}}^{(n)} b_n \quad (6.5.217)$$

Com estes resultados podemos mostrar que a equação de curvatura nula esta inteiramente contida nas relações

$$\partial_w \mathcal{A}_{\bar{w}}^{(n)} = \partial_{\bar{w}} \mathcal{A}_w^{(n)} \quad (6.5.218)$$

## 6.5.2 As correntes não locais

Para calcularmos o primeiro conjunto de correntes conservadas, (6.5.204), precisamos, primeiramente, colocar os potenciais  $B_\mu$  no mesmo *gauge* que  $A_\mu$ . Partindo de (6.1.1) e (6.5.208) , segue-se que

$$\tilde{B}_w = g \sqrt{a} P^\psi(b_{-1})$$

$$\tilde{B}_{\bar{w}} = \frac{g}{2\sqrt{a}} (e^{2\varphi} + |a|^2 e^{-2\varphi}) P^\psi(b_1) + \frac{g}{2\sqrt{a}} (e^{2\varphi} - |a|^2 e^{-2\varphi}) P^\psi(F_1) \quad (6.5.219)$$

A seguir, ao efetuarmos a transformação de *gauge* com  $f$ , os potenciais  $\tilde{B}$ 's transformam-se em

$$\begin{aligned}\tilde{B}_w &\rightarrow \mathcal{B}_w = \sum_{n>0} \mathcal{B}_w^{(2n+1)} P^\psi(b_{2n+1}) + \sum_{n>0} \mathcal{F}_w^{(n)} P^\psi(F_n) \\ \tilde{B}_{\bar{w}} &\rightarrow \mathcal{B}_{\bar{w}} = \sum_{n>0} \mathcal{B}_{\bar{w}}^{(2n+1)} P^\psi(b_{2n+1}) + \sum_{n>0} \mathcal{F}_{\bar{w}}^{(n)} P^\psi(F_n)\end{aligned}\quad (6.5.220)$$

onde os coeficientes  $\mathcal{B}^n, \mathcal{F}^n$  são determinados de maneira análoga à dos  $\mathcal{A}^n$ .

Podemos agora calcular as correntes; devemos então conjugar os potenciais  $\mathcal{B}$  com o elemento de grupo que localmente fornece os potenciais abelianos  $\mathcal{A}$ ,

$$\mathcal{A}_\mu = -\partial_\mu \mathcal{W} \mathcal{W}^{-1} \quad \mathcal{W} = e^T \mathcal{W}(w_0, \bar{w}_0) \quad (6.5.221)$$

onde  $\mathcal{W}(w_0, \bar{w}_0)$  é um elemento de grupo constante, e

$$T \equiv \eta^{(-1)} b_{-1} + \sum_{n \leq 0} (\eta^{(2n+1)} + \bar{\eta}^{(2n+1)}) b_{2n+1} \quad (6.5.222)$$

sendo

$$\eta^{(2n+1)} = \int dw' \mathcal{A}_w^{(2n+1)} \quad \bar{\eta}^{(2n+1)} = \int d\bar{w}' \mathcal{A}_{\bar{w}}^{(2n+1)} \quad (6.5.223)$$

Assim, as correntes conservadas são dadas por

$$\begin{aligned}J_w &= \mathcal{B}_w + [T, \mathcal{B}_w] + \frac{1}{2!} [T, [T, \mathcal{B}_w]] + \dots \\ J_{\bar{w}} &= \mathcal{B}_{\bar{w}} + [T, \mathcal{B}_{\bar{w}}] + \frac{1}{2!} [T, [T, \mathcal{B}_{\bar{w}}]] + \dots\end{aligned}\quad (6.5.224)$$

## Capítulo 7

# As Correntes Não-locais

O sistema de equações conhecido como Toda multidimensional [RS] é o modelo conhecido em mais dimensões cuja construção deve-se a da curvatura nula  $F = 0$  de uma conexão  $A_\mu$  definida em um espaço  $2d$  dimensional. Porém aí a curvatura nula não é suficiente para gerar infinitas correntes conservadas.

Muitos modelos podem ter suas equações de movimento escritas como equações do tipo Toda multidimensional, como por exemplo o modelo de Wess-Zumino-Novikov-Witten generalizado [GS].

Os autores de [RS] partem de uma conexão em um fibrado principal sobre uma variedade  $\mathcal{M}$ , tomada ou como sendo uma variedade real  $\mathbb{R}^{2d}$ , ou como uma variedade complexa  $\mathbb{C}^d$ , de modo que a  $\dim \mathcal{M} = 2d$ . Denotando por  $z^{+i}, z^{-i}, i = 1, \dots, d$  as coordenadas em  $\mathcal{M}$ . Considera-se então um fibrado principal trivial  $\mathcal{M} \times G \rightarrow \mathcal{M}$ , com  $G$  sendo um grupo de Lie. Toma-se uma 1-forma de conexão  $\omega$  sobre  $\mathcal{M}$  com valores na álgebra de Lie de  $G$ ,  $\mathcal{G}$ . A 2-forma de curvatura da conexão  $\omega$  é determinada por  $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ , e a conexão é nula se e somente se

$$d\omega + \omega \wedge \omega = 0 \tag{7.0.1}$$

Caso esta condição seja satisfeita, existe um elemento  $\varphi \in G$  tal que

$$\omega = \varphi^{-1} d\varphi. \tag{7.0.2}$$

Então uma conexão geral  $\omega$  satisfazendo a condição de curvatura nula (7.0.1) pode ser escrita na seguinte representação

$$\omega = \sum_{i=1}^d (\omega_{-i} dz^{-i} + \omega_{+i} dz^{+i}) \quad (7.0.3)$$

onde  $\omega_{\pm i}$  são mapeamentos de  $\mathcal{M}$  em  $\mathcal{G}$ . Em termos de  $\omega_{\pm i}$  a curvatura nula toma a forma

$$\partial_{-i}\omega_{-j} - \partial_{-j}\omega_{-i} + [\omega_{-i}, \omega_{-j}] = 0 \quad (7.0.4)$$

$$\partial_{+i}\omega_{+j} - \partial_{+j}\omega_{+i} + [\omega_{+i}, \omega_{+j}] = 0 \quad (7.0.5)$$

$$\partial_{-i}\omega_{+j} - \partial_{+j}\omega_{-i} + [\omega_{-i}, \omega_{+j}] = 0 \quad (7.0.6)$$

onde utilizamos a notação

$$\partial_{-i} \equiv \partial/\partial z^{-i}, \quad \partial_{+i} \equiv \partial/\partial z^{+i}. \quad (7.0.7)$$

Introduzindo uma gradação da álgebra  $\mathcal{G}$  como em (6.1.5)

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{G}_m \quad (7.0.8)$$

onde os subespaços  $\mathcal{G}_m$  satisfazem

$$[\mathcal{G}_m, \mathcal{G}_n] \subset \mathcal{G}_{m+n}, \quad (7.0.9)$$

o elemento  $\phi$  que compõe (7.0.2) pode ser decomposto como

$$\varphi = \mu_+ \nu_- \nu_- \quad \text{ou} \quad \varphi = \mu_- \nu_+ \nu_+ \quad (7.0.10)$$

onde os subíndices indicam que os elementos são exponenciações de elementos de  $\mathcal{G}_n$  com  $n$  positivo ou negativo. Como vimos, esta decomposição tem importante papel na construção das soluções. Tendo em conta a gradação, escrevem-se então as componentes da conexão como

$$\omega_{-i} = \sum_{m=0}^{-l_-i} \omega_{-i,m} \quad \omega_{+i} = \sum_{m=0}^{l_+i} \omega_{+i,m} \quad (7.0.11)$$

onde  $\omega_{\pm i,m}$  tomam valores em  $\mathcal{G}_{\pm}$ ;  $l_{\pm}$  são constantes positivas escolhidas de modo que os mapeamentos  $\omega_{\pm i,m}$  satisfaçam uma condição de gradação – impondo a  $\omega_{\pm i,m}$  que assumam valores somente numa escolha específica dos subespaços  $\mathcal{G}_{\pm}$ .

Chega-se a seguinte forma geral para uma conexão obedecendo à curvatura nula e as condições de gradação

$$\omega_{-i} = \gamma^{-1} \partial_{-i} \gamma + \sum_{m=-1}^{-l_{-1}+1} v_{-i,m} + c_{-1} \quad (7.0.12)$$

$$\omega_{+i} = \gamma^{-1} \left( \sum_{m=1}^{l_{+1}-1} v_{+i,m} + c_{-1} \right) \gamma \quad (7.0.13)$$

onde  $\gamma$  e  $v_{\pm i,m}$  são chamdos campos de Toda e de matéria, respectivamente, que são as variáveis dinâmicas dos modelos do tipo Toda.

## 7.1 Duas dimensões e as correntes

Como acabamos de observar, a construção prescinde da existência de conexões de ordem superior para a obtenção de uma classe de modelos integráveis em dimensões pares. No entanto, o método apoiado na curvatura nula apenas da conexão  $\omega$  não fornece as correntes conservadas do sistema.

Tomando como referência a análise das equações do IC-INSTANTON em duas dimensões, pudemos constatar que a conexão de ordem superior  $B$  introduzida no Capítulo 2 fornece um número infinito de correntes conservadas para o modelo de Toda. Repare que as equações do sistema de Hitchin em duas dimensões (5.3.14), (5.3.15) são equações do tipo Toda. Isto pode ser melhor observado ao definirmos uma conexão  $\mathcal{A}$  como sendo

$$\mathcal{A}_w = A_w + \lambda g X \quad \mathcal{A}_{\bar{w}} = A_{\bar{w}} - \frac{g}{\lambda} \bar{X} \quad (7.1.14)$$

sendo  $\lambda$  é o parâmetro espectral. Em termos de  $\mathcal{A}$ , reescrevemos as equações do sistema de Hitchin como condição de curvatura nula

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\bar{w}w} &= \partial_{\bar{w}} \mathcal{A}_w - \partial_w \mathcal{A}_{\bar{w}} + i [\mathcal{A}_{\bar{w}}, \mathcal{A}_w] \\ &= (F_{\bar{w}w} + ig^2 [X, \bar{X}]) + \lambda g (D_{\bar{w}} X) - \frac{g}{\lambda} (D_w \bar{X}) \end{aligned} \quad (7.1.15)$$

Segue então que a condição  $\mathcal{F}$  implica (5.3.14), (5.3.15).

Por outro lado, este mesmo sistema é obtido da curvatura nula generalizada

$$F_{\mu\nu} = 0 \quad D^\mu B_\mu = 0 \quad (7.1.16)$$

caso utilizemos os potenciais (6.1.1), como mostramos no Capítulo 6:

$$\begin{aligned} A_- &\equiv -\partial_- \gamma \gamma^{-1} + E_{-1} & A_+ &\equiv \gamma E_1 \gamma^{-1} \\ B_- &\equiv P^\psi (E_{-1}) & B_+ &\equiv P^\psi (\gamma E_1 \gamma^{-1}) \end{aligned} \quad (7.1.17)$$

Na verdade, para um sistema multidimensional, podemos reproduzir as equações de curvatura nula (7.0.4)-(7.0.6) utilizando a seguinte correspondência para os potenciais (7.0.13) **sem** os campos de matéria  $v_{\pm i, m_i}$ :

$$\begin{aligned} A_{-i} &= \gamma^{-1} \partial_{-i} \gamma + c_{-i} & B_{-i} &= \mathcal{P}(c_{-i}) \\ A_{+i} &= \gamma^{-1} c_{+i} \gamma & B_{+i} &= \gamma^{-1} \mathcal{P}(c_{+i}) \gamma \end{aligned} \quad (7.1.18)$$

A curvatura nula (7.1.16)

$$\sum_i \{ \partial_i B_{-i} + \partial_{-i} B_i + [A_i, B_{-i}] + [A_{-i}, B_i] \} = 0 \quad (7.1.19)$$

implica as equações para o multidimensional. Todas são trivialmente satisfeitas. Caso pudéssemos um  $W$  tal que

$$A_\mu = -\partial_\mu W W^{-1}, \quad (7.1.20)$$

teríamos as correntes conservadas

$$J_\mu = W^{-1} B_\mu W \quad (7.1.21)$$

## Apêndice A

# Integrabilidade em quatro dimensões

Baseado nos resultados em duas e tres dimensões, consideraremos aqui um volume tri-dimensional  $\Omega$  com borda  $\partial\Omega$ . Escolhe-se um ponto fixo  $x_0$  em  $\partial\Omega$  e varre-se a superfície de  $\Omega$  com superfícies fechadas bi-dimensionais, todas tendo em comum o ponto de base  $x_0$ . Parametriza-se estas superfícies por meio de um parâmetro  $\zeta$  de modo que  $\zeta = 0$  corresponda a superfície fechada infinitesimal em torno de  $x_0$  e  $\zeta = 2\pi$  corresponda a borda  $\partial\Omega$ . Introdz-se então os tensores antissimétricos  $H_{\mu\nu\rho}$  e  $B_{\mu\nu}$ , e dois vetores  $A_\mu$  e  $\mathcal{A}_\mu$ . Define-se então a quantidade  $U$  através da equação

$$\frac{dU}{d\zeta} + S(H, B, A, \mathcal{A}, \zeta) U = 0 \quad (\text{A.0.1})$$

onde

$$S(H, B, A, \mathcal{A}, \zeta) = \int_0^{2\pi} d\tau V \left( \int_0^{2\pi} d\sigma \mathcal{W}^{-1} H_{\mu\nu\rho} \mathcal{W} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\zeta} \right) V^{-1} \quad (\text{A.0.2})$$

e onde  $V$  é definido em (2.1.2), e  $\mathcal{W}$  satisfaz a equação (1.2.5) com  $A_\mu$  substituído por  $\mathcal{A}_\mu$ , i.e.

$$\frac{d\mathcal{W}}{d\sigma} + \mathcal{A}_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \mathcal{W} = 0 \quad (\text{A.0.3})$$

A quantidade  $S(H, B, A, \mathcal{A}, \zeta)$  é definida em toda superfície fechada varrendo  $\Omega$ , e para calculá-la varre-se cada uma destas superfícies fechadas com loops passando através de um ponto fixo comum  $x_0$ . Parametrizamos esta varredura por  $\tau$ , de modo que  $\tau = 0$  e  $\tau = 2\pi$  correspondam a loops infinitesimais em torno de  $x_0$ , definindo o início e o fim da varredura. Todos estes loops são por seu lado parametrizados por  $\sigma$ , de modo que  $\sigma = 0$  e  $\sigma = 2\pi$  correspondam a  $x_0$ , seu ponto inicial e final.

Apesar de integração da equação (A.0.1) envolver uma varredura do volume  $\Omega$ , não quer-se que  $U$  dependa da varredura escolhida. Em uma varredura qualquer, cada ponto do volume  $\Omega$  pertence a dado loop, que por sua vez pertence a uma dada superfície fechada. a quantidade  $\mathcal{W}^{-1} H_{\mu\nu\rho} \mathcal{W}$  em (A.0.2) é definida em cada ponto de  $\Omega$ , mas seu valor real é obtido integrando-se (A.0.3), desde  $x_0$  até um dado ponto, por um loop que contenha tal ponto. Entretanto, como discutido após (2.1.4), a quantidade  $\mathcal{W}^{-1} H_{\mu\nu\rho} \mathcal{W}$  dependerá somente do ponto, e não do loop a que o ponto pertence. Caso a conexão  $\mathcal{A}_\mu$  seja plana, temos

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] = 0 \quad (\text{A.0.4})$$

A quantidade

$$dX(\tau) \equiv \int_0^{2\pi} d\sigma \mathcal{W}^{-1} H_{\mu\nu\rho} \mathcal{W} \frac{dx^\mu}{d\sigma} dx^\nu dx^\rho \quad (\text{A.0.5})$$

é uma função do loop especificado por  $\tau$ , e independe da superfície fechada a que o loop pertence. Entretanto, a quantidade  $V(\tau)$  depende não somente do loop especificado por  $\tau$  mas também, de acordo com (2.1.2), da superfície sobre a qual é integrada. Assim, se quer-se que a quantidade

$$V(\tau) dX(\tau) V^{-1}(\tau) \quad (\text{A.0.6})$$

dependa somente do loop, há que se impor que  $V$  deva permanecer invariante sob deformações da superfície que mantenham a borda fixa. Mas, de (2.1.10) e (6.4.159) vê-se que uma condição suficiente para tal é

$$\mathcal{K}(B, A) = 0 \quad (\text{A.0.7})$$

Portanto (A.0.4) e (A.0.7) são condições suficientes para que a quantidade  $U$  definida em (A.0.1), independa do modo como varr-se  $\Omega$ . De acordo com (1.2.9) e (2.1.10) segue-se

$$\delta\mathcal{W} = -\mathcal{A}_\mu \mathcal{W} \delta x^\mu \quad (\text{A.0.8})$$

e

$$\delta V = V \int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu \quad (\text{A.0.9})$$

Quer-se agora estudar as modificações de  $U$  conforme as variações de  $\Omega$ , mas mantendo-se o ponto  $x_0$  fixo. Assim, de (A.0.1) têm-se

$$U^{-1} \frac{d\delta U}{d\zeta} + U^{-1} \delta S(H, B, A, \mathcal{A}, \zeta) U + U^{-1} S(H, B, A, \mathcal{A}, \zeta) \delta U = 0 \quad (\text{A.0.10})$$

Novamente, de (A.0.1) segue-se

$$\frac{dU^{-1}}{d\zeta} - U^{-1} S(H, B, A, \mathcal{A}, \zeta) = 0 \quad (\text{A.0.11})$$

e assim

$$\frac{d}{d\zeta} (U^{-1} \delta U) = -U^{-1} \delta S(H, B, A, \mathcal{A}, \zeta) U \quad (\text{A.0.12})$$

Uma integração por partes é feita ao avaliar-se  $\delta S(H, B, A, \mathcal{A}, \zeta)$  sempre que houver uma derivada de  $\delta x^\mu$ , e utilizando-se

$$\delta x^\mu(\sigma = 0) = \delta x^\mu(\sigma = 2\pi) = \delta x^\mu(\tau = 0) = \delta x^\mu(\tau = 2\pi) = \delta x^\mu(\zeta = 0) = 0 \quad (\text{A.0.13})$$

Assim, os cálculos (sem manter fixa a borda de  $\Omega$ ) conduzem a

$$\begin{aligned} U^{-1} \delta U(\zeta) &= -U^{-1} \left( \int_0^{2\pi} d\tau V \left( \int_0^{2\pi} d\sigma \mathcal{W}^{-1} H_{\mu\nu\rho} \mathcal{W} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\rho \right) V^{-1} \right) U \\ &- \int_0^\zeta d\zeta' U^{-1} \left( \int_0^{2\pi} d\tau V \left( \int_0^{2\pi} d\sigma \times \right. \right. \\ &\times \left. \left. \mathcal{W}^{-1} (\mathcal{D}_\lambda H_{\mu\nu\rho} - \mathcal{D}_\mu H_{\nu\rho\lambda} + \mathcal{D}_\nu H_{\rho\lambda\mu} - \mathcal{D}_\rho H_{\lambda\mu\nu}) \mathcal{W} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\zeta'} \delta x^\lambda \right) V^{-1} \right. \\ &- \left. [S(H, B, A, \mathcal{A}, \zeta'), \int_0^{2\pi} d\tau V \left( \int_0^{2\pi} d\sigma \mathcal{W}^{-1} H_{\mu\nu\rho} \mathcal{W} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\rho \right) V^{-1}] \right) U \\ &- \int_0^\zeta d\zeta' U^{-1} \int_0^{2\pi} d\tau V \left( [T(B, A, \delta), \int_0^{2\pi} d\sigma \mathcal{W}^{-1} H_{\mu\nu\rho} \mathcal{W} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\zeta'}] \right. \\ &- \left. [T\left(B, A, \frac{d}{d\tau}\right), \int_0^{2\pi} d\sigma \mathcal{W}^{-1} H_{\mu\nu\rho} \mathcal{W} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\rho}{d\zeta'} \delta x^\nu] \right. \\ &- \left. [T\left(B, A, \frac{d}{d\zeta'}\right), \int_0^{2\pi} d\sigma \mathcal{W}^{-1} H_{\mu\nu\rho} \mathcal{W} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \delta x^\rho] \right) V^{-1} U \end{aligned} \quad (\text{A.0.14})$$

onde denotou-se

$$T(B, A, *) \equiv \int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} * x^\nu \quad (\text{A.0.15})$$

e introduziu-se a derivada covariante

$$\mathcal{D}_\lambda H_{\mu\nu\rho} \equiv \partial_\lambda H_{\mu\nu\rho} + [A_\lambda, H_{\mu\nu\rho}] \quad (\text{A.0.16})$$

Ao realizar-se a integração até  $\zeta = 2\pi$ , mantendo fixa a borda  $\partial\Omega$ , i.e.

$$\delta x^\mu(\zeta = 2\pi) = 0 \quad (\text{A.0.17})$$

o primeiro termo no lado direito de (A.0.14) sê anula.

Considere agora o caso onde o volume tri-dimensional  $\Omega$  é fechado, e portanto  $\partial\Omega$  reduz-se a um ponto. Seja  $\mathcal{M}$  o quadri-volumes do qual  $\Omega$  é a borda. Pode-se então varrer  $\mathcal{M}$  com tri-volumes fechados que tenham um ponto fixo  $x_0$  em comun. Parametriza-se tais tri-volumes fechados por  $\xi$  de maneira que  $\xi = 0$  corresponda ao volume infinitesimal em torno de  $x_0$  e  $\xi = 2\pi$  corresponda à borda  $\Omega$ . A discussão acima é então refeita, considerando agora a variação como correspondendo a deformações de um tri-volume fechado em outro, e escreve-se  $\delta \equiv d\xi \frac{d}{d\xi}$ . Denotando por  $U_c$  a quantidade  $U$  integrada sobre um tri-volume fechado obtém-se de (A.0.14)

$$\frac{dU_c}{d\xi} + U_c \left( \int_0^{2\pi} d\zeta U^{-1} C U \right) = 0 \quad (\text{A.0.18})$$

onde introduziu-se a quantidade

$$\begin{aligned} C &= \int_0^{2\pi} d\tau V \left( \int_0^{2\pi} d\sigma \times \right. \\ &\times \mathcal{W}^{-1} (\mathcal{D}_\lambda H_{\mu\nu\rho} - \mathcal{D}_\mu H_{\nu\rho\lambda} + \mathcal{D}_\nu H_{\rho\lambda\mu} - \mathcal{D}_\rho H_{\lambda\mu\nu}) \mathcal{W} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\zeta} \frac{dx^\lambda}{d\xi} \\ &- \left[ T \left( B, A, \frac{d}{d\xi} \right), \int_0^{2\pi} d\sigma \mathcal{W}^{-1} H_{\mu\nu\rho} \mathcal{W} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\zeta} \right] \\ &- \left[ T \left( B, A, \frac{d}{d\tau} \right), \int_0^{2\pi} d\sigma \mathcal{W}^{-1} H_{\mu\nu\rho} \mathcal{W} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\rho}{d\zeta} \frac{dx^\nu}{d\xi} \right] \\ &- \left. \left[ T \left( B, A, \frac{d}{d\zeta} \right), \int_0^{2\pi} d\sigma \mathcal{W}^{-1} H_{\mu\nu\rho} \mathcal{W} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\xi} \right] \right) V^{-1} \\ &- [S(H, B, A, A, \zeta), S(H, B, A, A, \xi)] \end{aligned} \quad (\text{A.0.19})$$

O fato de  $U$  para tri-volumes fechados ser obtido pela integração de ou (A.0.1) ou (A.0.18) permite formular-se outra generalização do teorema de Stokes não-abeliano. Integrando (A.0.1) sobre um tri-volume fechado  $\Omega$  e (A.0.18) sobre um quadri-volume  $\mathcal{M}$  cuja borda é  $\Omega$  obtém-se

$$\hat{\mathcal{P}} \exp \left( \int_{\Omega} d\zeta d\tau V \left( d\sigma \mathcal{W}^{-1} H_{\mu\nu\rho} \mathcal{W} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\zeta} \right) V^{-1} \right) = \tilde{\mathcal{P}} \exp \left( \int_{\mathcal{M}} d\xi d\zeta U^{-1} \mathcal{C} U \right) \quad (\text{A.0.20})$$

onde  $\hat{\mathcal{P}}$  significa ordenamento no tri-volume e  $\tilde{\mathcal{P}}$  ordenamento no quadri-volume.

Observe de (A.0.14) e (A.0.19) que  $\mathcal{C} = 0$  é uma condição suficiente para  $U$  ser independente do tri-volume  $\Omega$ , caso sua borda  $\partial\Omega$  seja mantida fixa. Em particular, caso  $\Omega$  seja um volume fechado segue que  $U$  integrado sobre  $\Omega$  é igual ao seu valor inicial em  $x_0$ , i.e.  $U(x_0)$ , pois, devido a independência do volume, pode-se deformar continuamente  $\Omega$  até o volume infinitesimal em torno de  $x_0$ .

## Apêndice B

# Teoria de Representação da álgebra Kac-Moody

Em uma representação de peso máximo podemos tomar

$$(H^n)^\dagger = H^{-n} \quad (T_+^n)^\dagger = T_-^{-n} \quad (\text{B.0.1})$$

Seja  $|\lambda\rangle$  um estado de peso máximo. Então

$$T_+^m |\lambda\rangle = T_-^n |\lambda\rangle = H^n |\lambda\rangle = 0 \quad m \geq 0; \quad n > 0 \quad (\text{B.0.2})$$

Portanto, a norma do estado  $T_+^{-m} |\lambda\rangle$ ,  $m > 0$ , é

$$\langle \lambda | T_-^m T_+^{-m} | \lambda \rangle = \langle \lambda | [T_-^m, T_+^{-m}] | \lambda \rangle = \langle \lambda | -H^0 + mC | \lambda \rangle \quad (\text{B.0.3})$$

Utilizando (6.1.40) e (6.1.41), temos

$$T_+^{-1} |\lambda_1\rangle = 0 \quad (\text{B.0.4})$$

Analogamente, a norma do estado  $T_+^{-m} T_-^m |\lambda\rangle$ ,  $m > 0$ , é

$$\begin{aligned} \langle \lambda | T_-^m T_+^{-m} T_+^m T_-^m | \lambda \rangle &= \langle \lambda | [T_-^m T_-^m, T_+^{-m} T_+^m] | \lambda \rangle \\ &= \langle \lambda | T_-^m [T_-^m, T_+^{-m} T_+^m] | \lambda \rangle = \langle \lambda | [T_-^m, [T_-^m, T_+^{-m} T_+^m]] | \lambda \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle \lambda | [T_-^m, (-H^0 + mC) T_+^{-m} + T_+^{-m} (-H^0 + mC)] | \lambda \rangle \\
&= \langle \lambda | -2T_-^m T_+^{-m} + (-H^0 + mC) (-H^0 + mC) + (-H^0 + mC) (-H^0 + mC) | \lambda \rangle \\
&= 2\langle \lambda | (-H^0 + mC) (-H^0 + mC) - (-H^0 + mC) | \lambda \rangle \tag{B.0.5}
\end{aligned}$$

Portanto, de (6.1.40)

$$T_+^{-1} T_+^{-1} | \lambda_0 \rangle = 0 \tag{B.0.6}$$

Utilizando argumentos similares temos que

$$T_-^0 | \lambda_0 \rangle = 0 \quad . \quad T_-^0 T_-^0 | \lambda_1 \rangle = 0 \tag{B.0.7}$$

Introduzimoa agora a seguinte base para a álgebra de Kac-Moody  $sl(2)$  afim

$$b_{2m+1} = T_+^m + T_-^{m+1} \tag{B.0.8}$$

$$F_{2m+1} = T_+^m - T_-^{m+1} \tag{B.0.9}$$

$$F_{2m} = H^m - \frac{1}{2} C \delta_{m,0} \tag{B.0.10}$$

além dos geradores  $C$  (termo central) e  $D$ . as relações de comutação são

$$[b_{2m+1}, b_{2n+1}] = C(2m+1) \delta_{m+n+1,0} \tag{B.0.11}$$

$$[b_{2m+1}, F_{2n+1}] = -2F_{2(m+n+1)} \tag{B.0.12}$$

$$[b_{2m+1}, F_{2n}] = -2F_{2(m+n)+1} \tag{B.0.13}$$

$$[F_{2m+1}, F_{2n+1}] = -C(2m+1) \delta_{m+n+1,0} \tag{B.0.14}$$

$$[F_{2m+1}, F_{2n}] = -2b_{2(m+n)+1} \tag{B.0.15}$$

$$[F_{2m}, F_{2n}] = C2m \delta_{m+n,0} \tag{B.0.16}$$

## Apêndice C

# Construção dos Operadores de Vértice

Discutiremos agora a representação principal dos operadores de vértice da álgebra Kac-Moody  $sl(2)$ . Estes diferem da representação homogênea, i.e. os vértices de Fubini-Veneziano, no sentido de que os osciladores possuem somente índices ímpares, e portanto não contém modos zero. Introduzimos então

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z^{-N}}{N} b_N - \frac{z^N}{N} b_{-N} \right) \quad N = 2n + 1 \quad (\text{C.0.1})$$

$$P(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-N} b_N + z^N b_{-N}) \quad (\text{C.0.2})$$

Note que estes campos diferem dos de Fubini-Veneziano, uma vez que não possuem modos zero em suas expansões .

$$\begin{aligned} P(z)Q(w) &= :: P(z)Q(w) :: + \frac{wz}{z^2 - w^2} C \quad |z| > |w| \\ Q(w)P(z) &= :: Q(w)P(z) :: - \frac{wz}{w^2 - z^2} C \quad |w| > |z| \end{aligned} \quad (\text{C.0.3})$$

Construiremos operadores de vértice que reproduzam a álgebra Kac-Moody  $sl(2)$

$$V(z) = :: e^{\alpha Q(z)} :: \quad (\text{C.0.4})$$

$$\begin{aligned}
 P(z)V(w) &= :: P(z)V(w) :: + \frac{\alpha wz}{z^2 - w^2} CV(w) \quad |z| > |w| \\
 V(w)P(z) &= :: V(w)P(z) :: - \frac{\alpha wz}{w^2 - z^2} CV(w) \quad |w| > |z| \quad (C.0.5)
 \end{aligned}$$

Expandimos  $V(z)$  em termos dos modos dos osciladores

$$V(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n} A_n \quad A_n = \oint \frac{dz z^n}{2\pi i z} V(z) \quad (C.0.6)$$

o que significa que  $b_M A_n$  e  $A_n b_M$  podem ser escritos como uma integral dupla do mesmo termo

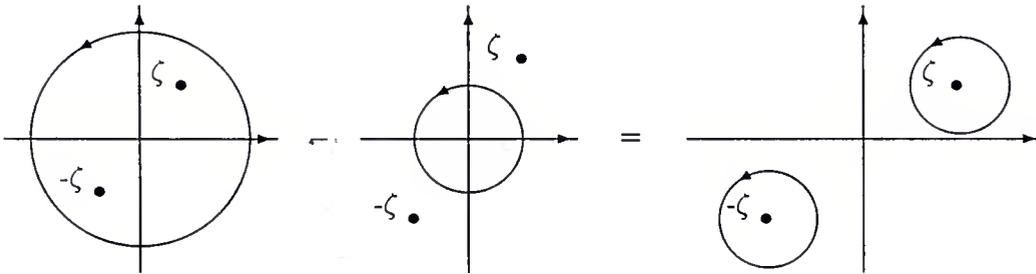
$$\begin{aligned}
 b_M A_n &= - \left( \oint \frac{d\zeta \zeta^n}{2\pi i \zeta} \oint \frac{dz z^M}{2\pi i z} \right)_{|z| > |\zeta|} \left\{ :: P(z)V(\zeta) :: + \frac{\alpha \zeta z}{z^2 - \zeta^2} CV(\zeta) \right\} \\
 A_n b_M &= - \left( \oint \frac{d\zeta \zeta^n}{2\pi i \zeta} \oint \frac{dz z^M}{2\pi i z} \right)_{|\zeta| > |z|} \left\{ :: P(z)V(\zeta) :: + \frac{\alpha \zeta z}{z^2 - \zeta^2} CV(\zeta) \right\} \quad (C.0.7)
 \end{aligned}$$

onde utilizamos

$$\oint \frac{dz}{2\pi i z} z^M P(z) = -b_M \quad M \text{ odd} \quad (C.0.8)$$

Repare que

$$\left( \oint \frac{d\zeta \zeta^n}{2\pi i \zeta} \oint \frac{dz z^M}{2\pi i z} \right)_{|z| > |\zeta|} - \left( \oint \frac{d\zeta \zeta^n}{2\pi i \zeta} \oint \frac{dz z^M}{2\pi i z} \right)_{|\zeta| > |z|} = \quad (C.0.9)$$



A única contribuição é devida aos polos em  $z = \pm\zeta$ , pois eliminamos os polos em  $z = 0$ .

Então temos

$$[b_M, A_n] = - \oint \frac{d\zeta \zeta^n}{2\pi i \zeta} \oint \frac{dz z^M}{2\pi i z} \left\{ :: P(z)V(\zeta) :: + \frac{\alpha \zeta z}{z^2 - \zeta^2} CV(\zeta) \right\} \quad (C.0.10)$$

O primeiro termo no lado direito está ordenado normalmente, o que garante que não há contribuição desta parte em  $z = \zeta$ . O segundo termo tem um polo simples em  $z = \pm\zeta$ .

Então, pelo teorema de resíduos temos

$$\begin{aligned}
 [b_M, A_n] &= -\frac{\alpha}{2} C \oint \frac{d\zeta \zeta^n}{2\pi i \zeta} \zeta^M V(\zeta) + \frac{\alpha}{2} C \oint \frac{d\zeta \zeta^n}{2\pi i \zeta} (-\zeta)^M V(\zeta) \\
 &= -\alpha C A_{n+M}
 \end{aligned}
 \tag{C.0.11}$$

uma vez que  $M$  é ímpar e utilizamos (C.0.6),(C.0.8). Esta relação corresponde a (B.0.12),(B.0.13), mas para reproduzirmos a álgebra temos que impor

$$[b_M, A_n] = -2 A_{n+M} \Rightarrow \alpha C = 2
 \tag{C.0.12}$$

Agora devemos verificar as relações de comutação restantes, a saber,  $[A_m, A_n]$ . Para tal, devemos avaliar  $V(z)V(\zeta)$

$$V(z)V(\zeta) = :: V(z)V(\zeta) :: e^{\frac{\alpha^2}{2} C \ln\left(\frac{z-\zeta}{z+\zeta}\right)} \quad |z| > |\zeta|
 \tag{C.0.13}$$

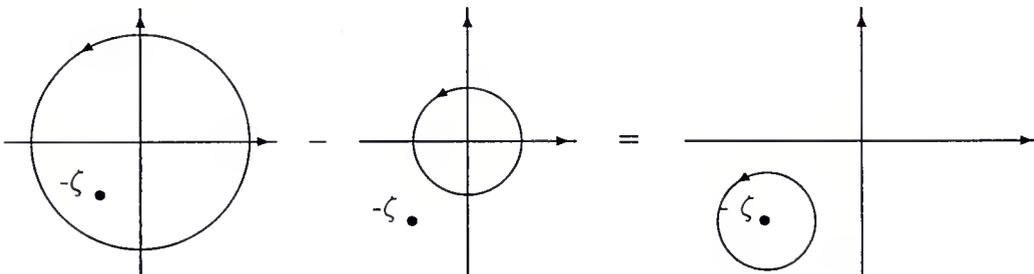
donde podemos concluir que

$$\begin{aligned}
 [A_m, A_n] &= \oint \frac{dz z^m}{2\pi i z} z^m \oint \frac{d\zeta \zeta^n}{2\pi i \zeta} \zeta^n :: V(z)V(\zeta) :: \times \\
 &\quad \times \left[ \left. \left(\frac{z-\zeta}{z+\zeta}\right)^{\frac{\alpha^2}{2} C} \right|_{|z|>|\zeta|} - \left. \left(\frac{\zeta-z}{\zeta+z}\right)^{\frac{\alpha^2}{2} C} \right|_{|\zeta|>|z|} \right]
 \end{aligned}
 \tag{C.0.14}$$

Como temos (C.0.12)  $\alpha C = 2$ ,  $\frac{\alpha^2}{2} C = 2$  e portanto

$$[A_m, A_n] = \oint \frac{dz z^m}{2\pi i z} z^m \oint \frac{d\zeta \zeta^n}{2\pi i \zeta} \zeta^n :: V(z)V(\zeta) :: \left(\frac{z-\zeta}{z+\zeta}\right)^2
 \tag{C.0.15}$$

onde tomamos a integral de contorno como sendo



De acordo com a fórmula integral de Cauchy

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz
 \tag{C.0.16}$$

o que implica que

$$\begin{aligned} [A_m, A_n] &= \oint \frac{d\zeta \zeta^n}{2\pi i \zeta} \zeta^{n+m} [4(m-2)(-1)^m + 4\alpha(-1)^m P(\zeta)] \\ &= 4(m-2)(-1)^m \delta_{m+n,0} - 4\alpha(-1)^m b_{m+n} \end{aligned} \quad (\text{C.0.17})$$

onde usamos (C.0.8); estas relações reproduzem as relações de comutação (B.0.14),(B.0.15).

## C.1 Propriedade dos Operadores de Vértice

Utilizando (C.0.1)

$$Q_{>}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-N}}{N} b_N \quad Q_{<}(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^N}{N} b_{-N} \quad N = 2n + 1 \quad (\text{C.1.18})$$

$$\begin{aligned} V(z)V(w) &= e^{2Q_{<}(z)} e^{2Q_{>}(z)} e^{2Q_{<}(w)} e^{2Q_{>}(w)} \\ &= e^{2Q_{<}(z)} e^{2Q_{>}(z)} e^{2Q_{<}(w)} e^{-2Q_{>}(z)} e^{2Q_{>}(z)} e^{2Q_{>}(w)} \end{aligned} \quad (\text{C.1.19})$$

$$\begin{aligned} e^{2Q_{>}(z)} e^{2Q_{<}(w)} e^{-2Q_{>}(z)} &= e^{e^{2Q_{>}(z)} 2Q_{<}(w) e^{-2Q_{>}(z)}} \\ &= e^{2Q_{<}(w) + [2Q_{>}(z), 2Q_{<}(w)]} \\ &= e^{2Q_{<}(w)} e^{-2 \ln\left(\frac{z+w}{z-w}\right)} \end{aligned} \quad (\text{C.1.20})$$

onde usamos

$$\begin{aligned} [2Q_{>}(z), 2Q_{<}(w)] &= -4 \sum_{n,m \geq 0} \frac{z^{-N}}{N} \frac{w^M}{M} [b_N, b_{-M}] \\ &= -4 \sum_{n,m \geq 0} \frac{z^{-N}}{N} \frac{w^M}{M} N \delta_{N,M} \\ &= -4 \sum_{n \geq 0} \frac{1}{N} \left(\frac{w}{z}\right)^N \\ &= -2 \ln\left(\frac{z+w}{z-w}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.1.21})$$

Então, de (C.1.20) temos

$$e^{2Q_{>}(z)} e^{2Q_{<}(w)} = e^{2Q_{<}(w)} e^{2Q_{>}(z)} e^{-2 \ln\left(\frac{z+w}{z-w}\right)} \quad (\text{C.1.22})$$

Assim, retornando a (C.1.19) e usando (C.1.22)

$$\begin{aligned} V(z)V(w) &= e^{2Q_{<}(z)} e^{2Q_{<}(w)} e^{2Q_{>}(z)} e^{2Q_{>}(w)} e^{-2 \ln\left(\frac{z+w}{z-w}\right)} \\ &= :: V(z)V(w) :: \left(\frac{z-w}{z+w}\right)^2 \end{aligned} \quad (\text{C.1.23})$$

Pelo mesmo argumento

$$V(z)V(w)V(k) = :: V(z)V(w)V(k) :: \left(\frac{z-w}{z+w}\right)^2 \left(\frac{z-k}{z+k}\right)^2 \left(\frac{w-k}{w+k}\right)^2 \quad (\text{C.1.24})$$

e assim em diante.

## Apêndice D

### Análise de $\zeta$

Devemos resolver

$$\frac{d\zeta}{dw} = \sqrt{a} \quad (\text{D.0.1})$$

Concentraremos-nos no caso

$$a = e^w - \alpha \quad (\text{D.0.2})$$

com  $\alpha$  sendo uma constante. Observe que as dificuldades surgem das singularidades associadas a raiz quadrada de  $a$ . Entretanto, como veremos, precisamos avaliar  $\zeta$  quando este tende para as singularidades, mas não exatamente sobre as mesmas. Assim, damos uma solução de  $\zeta$  que parece válida fora das singularidades. Introduzimos

$$\zeta = 2\sqrt{\alpha} \left( \frac{\sqrt{e^w - \alpha}}{\sqrt{\alpha}} - \arctan \frac{\sqrt{e^w - \alpha}}{\sqrt{\alpha}} \right) \quad (\text{D.0.3})$$

Podemos verificar através de uma diferenciação ingênua (i.e., esquecendo as singularidades), que temos

$$\frac{d\zeta}{dw} = \sqrt{e^w - \alpha} \quad (\text{D.0.4})$$

Usando as relações

$$\arctan z = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + iz}{1 - iz} \quad (\text{D.0.5})$$

podemos também escrever  $\zeta$  como

$$\zeta = 2\sqrt{e^w - \alpha} + i\sqrt{\alpha} \ln \frac{\sqrt{\alpha} + i\sqrt{e^w - \alpha}}{\sqrt{\alpha} - i\sqrt{e^w - \alpha}} \quad (\text{D.0.6})$$

Desejamos agora obter os valores de  $\zeta$  para  $\text{Re} w \rightarrow \pm\infty$  e  $e^w \rightarrow \alpha$ . Utilizando a expansão

$$\arctan z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots \quad |z| \leq 1 \quad z^2 \neq -1 \quad (\text{D.0.7})$$

temos

$$\zeta \sim \frac{2}{3\alpha} (e^w - \alpha)^{3/2} \quad \text{para} \quad e^w \rightarrow \alpha \quad (\text{D.0.8})$$

Denotaremos

$$\alpha = |\alpha| e^{i\theta_\alpha} \quad w = w_1 + iw_2 \quad (\text{D.0.9})$$

Então, de (D.0.6) ou (D.0.3) temos que, para  $\text{Re} w \rightarrow -\infty$

$$\zeta \rightarrow 2i\sqrt{\alpha} + i\sqrt{\alpha} \ln \frac{e^w}{4\alpha} \rightarrow e^{i(\theta_\alpha + \pi)/2} \sqrt{|\alpha|} |w_1| \quad \text{para} \quad w_1 \rightarrow -\infty \quad (\text{D.0.10})$$

Utilizando a expansão

$$\arctan z = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} - \frac{1}{5z^5} + \dots \quad |z| > 1 \quad z^2 \neq -1 \quad (\text{D.0.11})$$

temos de (D.0.3) que, para  $\text{Re} w \rightarrow \infty$ ,

$$\zeta \rightarrow 2\sqrt{\alpha} \left( \sqrt{\frac{e^w}{\alpha}} - \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{\alpha}{e^w}} \right) \rightarrow 2e^{iw_2/2} e^{w_1/2} \quad \text{para} \quad w_1 \rightarrow \infty \quad (\text{D.0.12})$$

Agora queremos analisar o comportamento da solução nestes limites, o que é um tanto quanto delicado devido as singularidades De (6.2.81), (D.0.8), (D.0.10) e (D.0.12) temos (tomando  $\bar{\zeta}$  como complexo conjugado de  $\zeta$ )

$$e^{\beta(x)} \rightarrow 1 \quad \text{no zero de } a \quad (\text{D.0.13})$$

$$e^{\beta(x)} \rightarrow e^{2g\sqrt{|\alpha|} \left( \mu(x) + \frac{1}{\mu(x)} \right) \cos((\theta_\alpha - \pi)/2)|w_1|} e^{i2g\sqrt{|\alpha|} \left( \mu(x) - \frac{1}{\mu(x)} \right) \sin((\theta_\alpha - \pi)/2)|w_1|} \quad w_1 \rightarrow -\infty$$

$$e^{\beta(x)} \rightarrow e^{4g \left( \mu(x) + \frac{1}{\mu(x)} \right) \cos(w_2/2)e^{w_1/2}} e^{i4g \left( \mu(x) - \frac{1}{\mu(x)} \right) \sin(w_2/2)e^{w_1/2}} \quad w_1 \rightarrow \infty$$

## Apêndice E

# Funções delta sobre superfícies de Riemann

A função  $a(z)$  supostamente é polinomial, e representa uma superfície de Riemann hiperelíptica. A equação para uma superfície de Riemann hiperelíptica geral é

$$y^2 = a(z) = (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n) \quad (\text{E.0.1})$$

Há pontos de ramificações em  $z = z_1, \dots, z_n$ . Suponhamos que todos sejam distintos. O ponto no infinito também é um ponto de ramificação quando  $n$  é ímpar. Por simplicidade consideraremos  $n$  par. Há duas folhas descritas pela equação (E.0.1). Estas aparecem ao *extrair-se a raiz*:  $y = \sqrt{a}$ . As folhas são duas cópias do plano  $z$ . Há cortes conectando  $z_1$  a  $z_2$ ,  $z_3$  a  $z_4$ , etc., e as duas folhas estão conectadas entre si através dos cortes. Ao percorrermos um círculo que entorne um ponto de ramificação passamos de uma folha a outra, e, após completarmos  $4\pi$ , voltamos ao ponto inicial. Este procedimento gera uma superfície de Riemann hiperelíptica com dois furos em uma extremidade, outros dois furos na outra extremidade e  $(n - 2)/2$  alças. Chamemos tal superfície  $\Sigma$ .

Retomemos a equação (E.0.1).  $y$  e  $z$  são coördenadas de dois planos complexos, mas podem ser consideradas como funções sobre  $\Sigma$ . Enquanto coordenada,  $z$  não pode ser



Figura E.1: Superfície de Riemann hiperelíptica  $\Sigma$ .

considerada uma boa coordenada perto do ponto de ramificação, uma vez que é necessário contornar duas vezes o ponto de ramificação para retornar-se ao valor inicial. Uma boa coordenada local perto de um ponto de ramificação  $z_i$  é  $\xi_i = \sqrt{z - z_i}$ . Quer dizer, próximo a  $z_i$  temos  $z = z_i + \xi_i^2$ .  $z$  não é uma boa coordenada também no infinito, onde deve ser substituída por  $w = 1/z$ . Após estas substituições vemos que  $y$  é uma função meromórfica, com  $n$  zeros nos pontos de ramificação (de fato próximo a  $z_i$  temos  $y \sim \xi_i$ ), e uma polo de ordem  $n$  em  $z = \infty$  em cada folha.

Consideremos agora o diferencial  $dz$ .  $dz \sim \xi_i d\xi_i$  próximo a  $z_i$ , portanto  $dz$  tem zeros simples nos pontos de ramificação. No infinito,  $dz \sim w^{-2} dw$ , e portanto  $dz$  tem um polo duplo aí, em ambas folhas.

Agora o produto  $y dz$  é portanto uma 1-forma meromórfica sobre  $\Sigma$ , com um polo de ordem  $n + 2$  no infinito, e a operação de integrar esta 1-forma ao longo de um caminho é definida. Isto é o que é feito em no Apêndice D quando escrevemos  $\zeta = \int \sqrt{a} dz$ .

Retornemos a função  $a$ . Próximo a um ponto de ramificação genérico,  $a \sim z - z_0$ , uma boa coordenada é  $\xi = \sqrt{a}$ . Em termos desta coordenada temos

$$a \sim \xi^2, \quad \zeta = \int dz \sqrt{a} \sim \int \xi^2 d\xi \sim \xi^3, \quad a \sim \zeta^{2/3} \quad (\text{E.0.2})$$

Considere a boa coordenada  $\xi$  e

$$\int d^2 \xi \partial_{\xi} \partial_{\bar{\xi}} \ln |\xi| = \frac{\pi}{2} \int d^2 \xi \delta(\xi, \bar{\xi}) \quad (\text{E.0.3})$$

Uma vez que a contribuição para a integral deve-se somente à origem, podemos restringir o domínio de integração a um círculo unitário em torno da origem, e aplicar o teorema de

Stokes

$$\int d^2\xi \partial_\xi \partial_{\bar{\xi}} \ln|\xi| = \frac{1}{2} \int d^2\xi \partial_{\bar{\xi}} \frac{1}{\xi} = \frac{1}{2} \oint d\xi \frac{1}{\xi} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi i \quad (\text{E.0.4})$$

onde a integral de contorno estende-se sobre o círculo unitário em toro da origem, e  $\xi = e^{i\theta}$ .

Ao repetirmo a mesma operação com a coordenada errada  $a$  temos

$$\int d^2a \partial_a \partial_{\bar{a}} \ln|a| = \frac{\pi}{2} \int d^2a \delta(a, \bar{a}) \quad (\text{E.0.5})$$

e

$$\int d^2a \partial_a \partial_{\bar{a}} \ln|a| = \frac{1}{2} \int d^2a \partial_{\bar{a}} \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \oint da \frac{1}{a} = \frac{4\pi i}{2} = 2\pi i \quad (\text{E.0.6})$$

As duas últimas passagens devem-se ao fato da integração angular para  $a$  estender-se a  $4\pi$ , já que  $a \sim \xi^2$ .

De maneira similar, para  $\zeta$  teremos

$$\int d^2\zeta \partial_\zeta \partial_{\bar{\zeta}} \ln|\zeta| = \frac{1}{2} \int d^2\zeta \partial_{\bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{2} \oint d\zeta \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{2} \int_0^{6\pi} d\theta = 3\pi i \quad (\text{E.0.7})$$

Em outras palavras, devemos tomar cuidado com a interpretação das funções delta. Talvez mesmo seria melhor utilizarmos símbolos distintos:  $\delta(\xi, \bar{\xi})$ , que é a função delta ordinária, e  $\delta_a(a, \bar{a}), \delta_\zeta(\zeta, \bar{\zeta})$  de modo que

$$\delta_a(a, \bar{a}) \sim 2\delta(\xi, \bar{\xi}), \quad \delta_\zeta(\zeta, \bar{\zeta}) \sim 3\delta(\xi, \bar{\xi}) \quad (\text{E.0.8})$$

Neste caso há um Jacobiano devido a mudança de coordenadas – a função delta transforma-se como a componente de uma 1-forma:  $\delta(w, \bar{w})dw d\bar{w}$  é invariante sob transformações regulares de coordenadas.

Concluindo, chegamos a relação

$$\delta_\zeta(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{3}{2} \delta_a(a, \bar{a}) \partial_\zeta a \partial_{\bar{\zeta}} \bar{a} \quad (\text{E.0.9})$$

# Apêndice F

## Formulário

Reproduzimos aqui algumas fórmulas utilizadas, retiradas do Gradshteyn & Ryzhik [Gra].

3.471.10

$$\int_0^{\infty} x^{\nu-1} \exp\left[\frac{i\mu}{2}\left(x - \frac{\beta^2}{x}\right)\right] dx = 2\beta^{\nu} e^{\frac{i\nu\pi}{2}} K_{-\nu}(\beta\mu) \quad [\operatorname{Im} \mu > 0, \operatorname{Im}(\beta^2\mu) < 0] \quad (\text{F.0.1})$$

3.512.2

$$\int_0^{\infty} \frac{\sinh^{\mu} x}{\cosh^{\nu} x} dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{\mu+1}{2}, \frac{\nu-\mu}{2}\right) \quad [\operatorname{Re} \mu > -1, \operatorname{Re}(\mu - \nu) < 0] \quad (\text{F.0.2})$$

onde, de acordo com 8.384.1

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (\text{F.0.3})$$

3.981.3

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{\cosh \beta x} dx = \frac{\pi}{2\beta} \operatorname{sech} \frac{a\pi}{2\beta} \quad [\operatorname{Re} \beta > 0, \text{todo } a \text{ real}] \quad (\text{F.0.4})$$

8.447.3

$$K_0(z) = -\ln \frac{z}{2} I_0(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \psi(k+1) \quad (\text{F.0.5})$$

onde

$$I_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} \quad \psi(1) = -0.577215... \quad \psi(k+1) = \psi(k) + \frac{1}{k} \quad (\text{F.0.6})$$

## Apêndice G

# Programa para o cálculo numérico - Mathematica

Cálculo de  $I_3$  e  $J_3$

$$g3[a1_, a2_] := \frac{((3 + a1 - a2 + a1 * a2) * (3 - a1 + a2 + a1 * a2))}{((-1 + a1) * (1 + a1) * (-1 + a2) * (1 + a2));}$$

$$den3[a1_, a2_] := 1 + a1 * a2;$$

$$int3[z_, a1_, a2_] := BesselK[0, zSqrt[g3[a1, a2]]]/den3[a1, a2];$$

$$int3b[z_, w_, v_] := BesselK[0, zSqrt[w]]/v;$$

$$imy3[z_, n_] := Block[intloop3, intloop3[z] = 0;$$

$$Do[a1 = Random[Real, -1, 1]; a2 = Random[Real, -1, 1];$$

$$intloop3[z] = intloop3[z] + int3[z, a1, a2], i, n]; 2^2 intloop3[z]/(n)];$$

```

jmy3[z_, n_] := Block[intloop3, w, intloop3[z] = 0;
Do[a1 = Random[Real, -1, 1]; a2 = Random[Real, -1, 1];
w = g3[a1, a2]; v = den3[a1, a2];
intloop3[z] = intloop3[z] + wint3b[z, w, v], i, n];
22intloop3[z]/(n)];

```

```

both3[z_, n_] := Block[intloop3i, intloop3j, w, v, intloop3i[z] = 0; intloop3j[z] = 0;
Do[a1 = Random[Real, -1, 1]; a2 = Random[Real, -1, 1];
w = g3[a1, a2]; v = den3[a1, a2];
intloop3i[z] = intloop3i[z] + int3b[z, w, v];
intloop3j[z] = intloop3j[z] + wint3b[z, w, v], i, n];
22intloop3i[z]/(n), 22intloop3j[z]/(n)];

```

### Cálculo de $I_5$ e $J_5$

```

g5[a1_, a2_, a3_, a4_] := ((5 + 3 * a1 + a2 + 3 * a1 * a2 - a3 + a1 * a3 + 3 * a2 * a3
+ a1 * a2 * a3 - 3 * a4 - a1 * a4 + a2 * a4 - a1 * a2 * a4 + 3 * a3 * a4
+ a1 * a3 * a4 - a2 * a3 * a4 + a1 * a2 * a3 * a4) * (5 - 3 * a1 - a2 + 3 * a1 *
+ a3 + a1 * a3 + 3 * a2 * a3 - a1 * a2 * a3 + 3 * a4 - a1 * a4 + a2 * a4
+ a1 * a2 * a4 + 3 * a3 * a4 - a1 * a3 * a4 + a2 * a3 * a4 + a1 * a2 * a3 * a4))
/((-1 + a1) * (1 + a1) * (-1 + a2) * (1 + a2) * (-1 + a3)
*(1 + a3) * (-1 + a4) * (1 + a4));

```

```

den5[a1_, a2_, a3_, a4_] := 1 + a1 * a2 + a1 * a3 + a2 * a3 + a1 * a4 +
a2 * a4 + a3 * a4 + a1 * a2 * a3 * a4;

```

$\text{int5}[z\_ , a1\_ , a2\_ , a3\_ , a4\_ ] := \text{BesselK}[0, z\text{Sqrt}[g5[a1, a2, a3, a4]]]/\text{den5}[a1, a2, a3, a4];$

$\text{int5b}[z\_ , w\_ , v\_ ] := \text{BesselK}[0, z\text{Sqrt}[w]]/v;$

$\text{imy5}[z\_ , n\_ ] := \text{Block}[\text{intloop5}, \text{intloop5}[z] = 0;$

$\text{Do}[a1 = \text{Random}[\text{Real}, -1, 1]; a2 = \text{Random}[\text{Real}, -1, 1];$

$a3 = \text{Random}[\text{Real}, -1, 1]; a4 = \text{Random}[\text{Real}, -1, 1];$

$\text{intloop5}[z] = \text{intloop5}[z] + \text{int5}[z, a1, a2, a3, a4], i, n]; 2^4 \text{intloop5}[z]/(n);$

$\text{jmy5}[z\_ , n\_ ] := \text{Block}[\text{intloop5j}, w, v, \text{intloop5j}[z] = 0;$

$\text{Do}[a1 = \text{Random}[\text{Real}, -1, 1]; a2 = \text{Random}[\text{Real}, -1, 1];$

$a3 = \text{Random}[\text{Real}, -1, 1]; a4 = \text{Random}[\text{Real}, -1, 1];$

$w = g5[a1, a2, a3, a4]; v = \text{den5}[a1, a2, a3, a4];$

$\text{intloop5j}[z] = \text{intloop5j}[z] + w\text{int5b}[z, w, v].i, n]; 2^4 \text{intloop5j}[z]/(n);$

$\text{both5}[z\_ , n\_ ] := \text{Block}[\text{intloop5i}, \text{intloop5j}, w, v,$

$\text{intloop5i}[z] = 0; \text{intloop5j}[z] = 0;$

$\text{Do}[a1 = \text{Random}[\text{Real}, -1, 1]; a2 = \text{Random}[\text{Real}, -1, 1];$

$a3 = \text{Random}[\text{Real}, -1, 1]; a4 = \text{Random}[\text{Real}, -1, 1];$

$w = g5[a1, a2, a3, a4]; v = \text{den5}[a1, a2, a3, a4];$

$\text{intloop5i}[z] = \text{intloop5i}[z] + \text{int5b}[z, w, v];$

$\text{intloop5j}[z] = \text{intloop5j}[z] + w\text{int5b}[z, w, v], i, n];$

$2^4 \text{intloop5i}[z]/(n), 2^4 \text{intloop5j}[z]/(n);$

### Cálculo de $I_7$ e $J_7$

$g7[a1\_ , a2\_ , a3\_ , a4\_ , a5\_ , a6\_ ] := ((7 + 5 * a1 + 3 * a2 + 5 * a1 * a2 + a3$

$$\begin{aligned}
& +3 * a1 * a3 + 5 * a2 * a3 + 3 * a1 * a2 * a3 - a4 + a1 * a4 + 3 * a2 * a4 + a1 * a2 * a4 \\
& +5 * a3 * a4 + 3 * a1 * a3 * a4 + a2 * a3 * a4 + 3 * a1 * a2 * a3 * a4 \\
& -3 * a5 - a1 * a5 + a2 * a5 - a1 * a2 * a5 + 3 * a3 * a5 + a1 * a3 * a5 \\
& -a2 * a3 * a5 + a1 * a2 * a3 * a5 + 5 * a4 * a5 + 3 * a1 * a4 * a5 + a2 * a4 * a5 \\
& +3 * a1 * a2 * a4 * a5 - a3 * a4 * a5 + a1 * a3 * a4 * a5 + 3 * a2 * a3 * a4 * a5 \\
& +a1 * a2 * a3 * a4 * a5 - 5 * a6 - 3 * a1 * a6 - a2 * a6 - 3 * a1 * a2 * a6 + a3 * a6 \\
& -a1 * a3 * a6 - 3 * a2 * a3 * a6 - a1 * a2 * a3 * a6 + 3 * a4 * a6 + a1 * a4 * a6 \\
& -a2 * a4 * a6 + a1 * a2 * a4 * a6 - 3 * a3 * a4 * a6 - a1 * a3 * a4 * a6 + a2 * a3 * a4 * a6 \\
& -a1 * a2 * a3 * a4 * a6 + 5 * a5 * a6 + 3 * a1 * a5 * a6 + a2 * a5 * a6 + 3 * a1 * a2 * a5 * a6 \\
& -a3 * a5 * a6 + a1 * a3 * a5 * a6 + 3 * a2 * a3 * a5 * a6 + a1 * a2 * a3 * a5 * a6 \\
& -3 * a4 * a5 * a6 - a1 * a4 * a5 * a6 + a2 * a4 * a5 * a6 - a1 * a2 * a4 * a5 * a6 \\
& +3 * a3 * a4 * a5 * a6 + a1 * a3 * a4 * a5 * a6 - a2 * a3 * a4 * a5 * a6 + a1 * a2 * a3 * a4 * a5 * a6) \\
& *(7 - 5 * a1 - 3 * a2 + 5 * a1 * a2 - a3 + 3 * a1 * a3 + 5 * a2 * a3 + 3 * a2 * a4 \\
& -3 * a1 * a2 * a3 + a4 + a1 * a4 - a1 * a2 * a4 + 5 * a3 * a4 - 3 * a1 * a3 * a4 \\
& -a2 * a3 * a4 + 3 * a1 * a2 * a3 * a4 + 3 * a5 - a1 * a5 + a2 * a5 + a1 * a2 * a5 \\
& +3 * a3 * a5 - a1 * a3 * a5 + a2 * a3 * a5 + a1 * a2 * a3 * a5 \\
& +5 * a4 * a5 - 3 * a1 * a4 * a5 - a2 * a4 * a5 + 3 * a1 * a2 * a4 * a5 \\
& +a3 * a4 * a5 + a1 * a3 * a4 * a5 + 3 * a2 * a3 * a4 * a5 \\
& -a1 * a2 * a3 * a4 * a5 + 5 * a6 - 3 * a1 * a6 - a2 * a6 \\
& +3 * a1 * a2 * a6 + a3 * a6 + a1 * a3 * a6 \\
& +3 * a2 * a3 * a6 - a1 * a2 * a3 * a6 + 3 * a4 * a6 - a1 * a4 * a6 \\
& +a2 * a4 * a6 + a1 * a2 * a4 * a6 + 3 * a3 * a4 * a6 \\
& -a1 * a3 * a4 * a6 + a2 * a3 * a4 * a6 + a1 * a2 * a3 * a4 * a6 \\
& +5 * a5 * a6 - 3 * a1 * a5 * a6 - a2 * a5 * a6 + 3 * a1 * a2 * a5 * a6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+a3 * a5 * a6 + a1 * a3 * a5 * a6 + 3 * a2 * a3 * a5 * a6 \\
&-a1 * a2 * a3 * a5 * a6 + 3 * a4 * a5 * a6 - a1 * a4 * a5 * a6 \\
&+a2 * a4 * a5 * a6 + a1 * a2 * a4 * a5 * a6 + 3 * a3 * a4 * a5 * a6 \\
&-a1 * a3 * a4 * a5 * a6 + a2 * a3 * a4 * a5 * a6 + a1 * a2 * a3 * a4 * a5 * a6)) \\
&/((-1 + a1) * (1 + a1) * (-1 + a2) * (1 + a2) \\
&*(-1 + a3) * (1 + a3) * (-1 + a4) * (1 + a4) \\
&*(-1 + a5) * (1 + a5) * (-1 + a6) * (1 + a6));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{den7}[a1\_, a2\_, a3\_, a4\_, a5\_, a6\_] := &1 + a1 * a2 + a1 * a3 + a2 * a3 + a1 * a4 + a2 * a4 \\
&+a3 * a4 + a1 * a2 * a3 * a4 + a1 * a5 + a2 * a5 + a3 * a5 + a1 * a2 * a3 * a5 + a4 * a5 \\
&+a1 * a2 * a4 * a5 + a1 * a3 * a4 * a5 + a2 * a3 * a4 * a5 + a1 * a6 + a2 * a6 + a3 * a6 \\
&+a1 * a2 * a3 * a6 + a4 * a6 + a1 * a2 * a4 * a6 + a1 * a3 * a4 * a6 + a2 * a3 * a4 * a6 + a5 * a6 \\
&+a1 * a2 * a5 * a6 + a1 * a3 * a5 * a6 + a2 * a3 * a5 * a6 + a1 * a4 * a5 * a6 \\
&+a2 * a4 * a5 * a6 + a3 * a4 * a5 * a6 + a1 * a2 * a3 * a4 * a5 * a6;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{int7}[z\_, a1\_, a2\_, a3\_, a4\_, a5\_, a6\_] := &\text{BesselK}[0, z\text{Sqrt}[g7[a1, a2, a3, a4, a5, a6]]] / \\
&\text{den7}[a1, a2, a3, a4, a5, a6];
\end{aligned}$$

$$\text{int7b}[z\_, w\_, v\_] := \text{BesselK}[0, z\text{Sqrt}[w]] / v;$$

$$\begin{aligned}
\text{imy7}[z\_, n\_] := &\text{Block}[\text{intloop7}, \text{intloop7}[z] = 0; \\
&\text{Do}[a1 = \text{Random}[\text{Real}, -1, 1]; a2 = \text{Random}[\text{Real}, -1, 1]; \\
&a3 = \text{Random}[\text{Real}, -1, 1]; a4 = \text{Random}[\text{Real}, -1, 1]; \\
&a5 = \text{Random}[\text{Real}, -1, 1]; a6 = \text{Random}[\text{Real}, -1, 1]; \\
&\text{intloop7}[z] = \text{intloop7}[z] + \text{int7}[z, a1, a2, a3, a4, a5, a6], \{i, n\}; 2^6 \text{intloop7}[z] / (n)];
\end{aligned}$$

```

jmy7[z_, n_] := Block[intloop7j, w, v, intloop7j[z] = 0;
Do[a1 = Random[Real, -1, 1]; a2 = Random[Real, -1, 1];
a3 = Random[Real, -1, 1]; a4 = Random[Real, -1, 1];
a5 = Random[Real, -1, 1]; a6 = Random[Real, -1, 1];
w = g7[a1, a2, a3, a4, a5, a6]; v = den7[a1, a2, a3, a4, a5, a6];
intloop7j[z] = intloop7j[z] + wint7b[z, w, v], i, n]; 26intloop7j[z]/(n)];

```

```

both7[z_, n_] := Block[intloop7i, intloop7j, w, v, intloop7i[z] = 0; intloop7j[z] = 0;
Do[a1 = Random[Real, -1, 1]; a2 = Random[Real, -1, 1];
a3 = Random[Real, -1, 1]; a4 = Random[Real, -1, 1];
a5 = Random[Real, -1, 1]; a6 = Random[Real, -1, 1];
w = g7[a1, a2, a3, a4, a5, a6]; v = den7[a1, a2, a3, a4, a5, a6];
intloop7i[z] = intloop7i[z] + int7b[z, w, v];
intloop7j[z] = intloop7j[z] + wint7b[z, w, v], i, n];
26intloop7i[z]/(n), 26intloop7j[z]/(n)];

```

### Saídas:

```

i1[z_] := N[BesselK[0, z]]; out[z_, n_]
:= Block[t1, t2, Print[t1 = i1[z], same, both3[z, n], both5[z, n], both7[z, n]];
InputForm[z, n] >>> data.m;

"%%%%%%%%%">>>data.m;
"valores de I e J">>>data.m;
"%%%%%%%%%">>>data.m;
InputForm[t1]>>>data.m;

```

```
"%%%%%%%%%" >>> data.m;
```

```
TeXForm[z,n]>>> res.tex;
```

```
"%%%%%%%%%" >>> res.tex;
```

```
"valores de I e J" >>> res.tex;
```

```
"%%%%%%%%%" >>> res.tex;
```

```
TeXForm[t1]>>> res.tex;
```

```
"%%%%%%%%%" >>> res.tex;
```

```
Print[t2 = {{t1[[2, 2]], t1[[2, 1]] + 8t1[[1, 1]]3},
  {t1[[3, 2]], t1[[3, 1]] + (40/3)t1[[1, 1]]2t1[[2, 1]] + (32/3)t1[[1, 1]]5},
  {t1[[4, 2]], t1[[4, 1]] + (224/9)t1[[1, 1]]4t1[[2, 1]] +
  (56/9)t1[[1, 1]]t1[[2, 1]]2 +
  (56/5)t1[[1, 1]]2t1[[3, 1]] + (256/45)t1[[1, 1]]7}}];
```

```
Comparing >>> data.m;
```

```
"%%%%%%%%%" >>> data.m;
```

```
InputForm[t2] >>> data.m;
```

```
"%%%%%%%%%" >>> data.m;
```

```
"Comparing" >>> res.tex;
```

```
"%%%%%%%%%" >>> res.tex;
```

```
TeXForm[t2]>>> res.tex;
```

```
"%%%%%%%%%" >>> res.tex;
```

```
autout[n_] := Block[{}, out[.001, n]; out[.01, n]; out[.1, n]; out[.5, n]; out[1, n];
  out[5, n]; out[10, n]; out[100, n];
```

# Referências Bibliográficas

- [A] Atiyah, M. F. *Geometry of Yang-Mills Fields* Pisa: Scuola Normale Superiore (1979)
- [Ar] Ya. Aref'eva, THEOR. MAT. PHYS. **43** (1980) 353, N.E.Bralic *Exact computation of loop averages in two dimensional Yang-Mills theory*, PHYS. REV. **D22** (1980) 3090.
- [AFGZ] H. Aratyn, L.A. Ferreira, J.F. Gomes e A.H. Zimerman, *The conserved charges and integrability of the conformal affine Toda models*, MOD. PHYS. LETT. **A9** (1994) 2783-2801, hep-th/9308086.
- [AFG] O. Alvarez, L. A. Ferreira e J. Sánchez Guillén *A new approach to integrable theories in any dimension* NUCL. PHYS. **B529** (1998) 689, hep-th/ 9710147.
- [Ba] O. Babelon; *Introduction to Classical Integrable Systems* – To be published.
- [B] E.B. Bogomolny, *Stability of classical solutions*, SOV. J. NUCL. PHYS. **24** (1976) 449-454.
- [Bi] A. Bilal, *M(atrix) theory: a pedagogical introduction*, FORTSCH.PHYS. **47** (1999) 5-28, hep-th/ 9710136.
- [Bo] L. Bonora; *Yang-Mills Theory and Matrix String Theory*; Em: Mitra, A.N. (ed.) *Quantum field theory: A 20th Century Profile* Hindustan Book Agency; 665-699.

- [BB] O.Babelon and D.Bernard, *Affine solitons: a relation between tau functions, dressing and Backlund transformations* INT. J. MOD. PHYS. **A8** (1993) 507-543, hep-th/9206002.
- [BBN] G. Bonelli, L. Bonora, F. Nesti *Matrix string theory, 2D SYM instanton and affine Toda systems* PHYS. LETT. **435B** (1998) 303-311, hep-th/ 9805071.
- [BBN2] G. Bonelli, L. Bonora, F. Nesti *String interactions from matrix string theory* NUCL. PHYS. **B538** (1999) 100-116, hep-th/ 9807232; SISSA-85-98-EP.
- [BBTT] G. Bonelli, L. Bonora, S. Terna, A. Tomasiello *Instantons and Scattering in  $\mathcal{N} = 4$  SYM in 4D* hep-th/ 9912227; G. Bonelli, L. Bonora, F. Nesti, A. Tomasiello *Matrix String Theory and its Moduli Space*, NUCL. PHYS. **B554** (1999) 103-135, hep-th/ 9901093.
- [BC] L. Bonora, C.S. Chu *On the string interpretation of M(atrix) theory*, PHYS. LETT. **410B** (1997) 142-150, hep-th/ 9705137.
- [BFSS] T. Banks, W. Fischler, S.H. Shenker and L. Susskind, *M theory as a matrix model: a conjecture*, PHYS. REV. **D55** (1997) 5112-5128, hep-th 9610043.
- [BP] A.A. Belavin and A.M. Polyakov, *Metastable states of two-dimesional isotropic ferromagnets*, JETP LETT. **22** (1975) 245-247.
- [BPST] A.A. Belavin, A.M. Polyakov, A.S. Schwartz e Yu.S. Tyupkin, *Pseudoparticle Solutions of the Yang-Mills Equations*, PHYS. LETT. **59B** (1975) 85-87.
- [CLLPST] E. Cremmer, I.V. Lavrinenko, H. Lu, C.N. Pope, K.S. Stelle and T.A. Tran; *Euclidean-signature Supergravities, Dualities and Instantons*; In : Trieste 1998, Nonperturbative aspects of strings, branes and supersymmetry, 264-290, hep-th/9803259.

- [CJLP] E. Cremmer, B. Julia, H. Lu and C.N. Pope; *Dualisation of Dualities II: Twisted self-duality of doubled fields and superdualities*; NUCL. PHYS. **B535** (1998) 242-292, hep-th/9806106.
- [DVV] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde; *Matrix String Theory*, NUCL. PHYS. **B500** (1997) 43, hep-th/9703030.
- [EF] Eichenherr H., M. Forger *Higher local conservation laws for nonlinear sigma models on symmetric spaces*, COMM. MATH. PHYS. **82** (1981) 227; *On the dual symmetry of the nonlinear sigma models*, NUCL. PHYS. **B155** (1979) 381.
- [GV] I.M. Guelfand; M.D. Graev, N.Ja. Vilenkin, *Les Distributions*, TOME 5, Dunod, Paris, 1970.
- [GS] J.-L. Gervais, M.V. Savelev, *Higher grading generalisations of Toda systems*, NUCL. PHYS. **B453** (1995) 449-476, hep-th/9505047.
- [GMS] D. Gianso, J.O. Madsen, e J. Sánchez Guillén, *Integrable chiral theories in (2+1)-dimensions*, NUCL. PHYS. **B537** (1999) 586-598, hep-th/9805094.
- [FL] Luiz A. Ferreira e Érica E. Leite *Integrable theories in any dimension and homogenous spaces*, NUCL. PHYS. **B 547** (1999) 471-500, hep-th/9810067, ift-p/067/98.
- [FHS] K. Fujii, Y. Homma, T. Suzuki, *Submodels of non-linear grassmann sigma models in any dimension and conserved currents, exact solutions*, MOD. PHYS. LETT. **A14** (1999) 919-928, hep-th/9809149.
- [FS] K. Fujii e Tatsuo Suzuki, *Non-linear sigma models in (1+2)-dimensions and an infinite number of conserved currents*, hep-th/9802105; *Some useful formulas in non-linear sigma models in (1+2)-dimensions*, hep-th/9804004; K. Fujii, Y. Homma and T. Suzuki, *Non-linear grassmann sigma models in any dimension*

- and an infinite number of conserved currents, *PHYS. LETT.* **438B** (1998) 290-294, hep-th/9806084.
- [Gra] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, fifth edition.
- [He] Sigurdur Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press (1978).
- [Hi] N. Hitchin, *The self-dual equation on a Riemann surface* *PROC.LONDON MATH.SOC.* **55** (1987) 59.
- [J] N. Jacobson, *Lie Algebras*, Interscience Publishers. John Wiley & Sons (1962).
- [KO] Marco A.C. Knneip e David I. Olive, *Crossing and Antisolitons in Affine Toda Theories* *NUCL. PHYS.* **B408** (1993) 565, hep-th/9305154.
- [L] P.D. Lax, *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, *COMM.PUR.APPL.MATH.* **XXI** (1968) 467.
- [Ma] J.Maldacena; *The large N limit of superconformal field theories and supergravity*, *ADV.THEOR.MATH.PHYS.* **2**(1998) 231, hep-th/9711200.
- [MO] C. Montonen, D. Olive; *Magnetic Monopoles as Gauge Particles?* *PHYS. LETT.* **72B** (1977) 17117.
- [N] Mikio Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* IOP Publishing Ltd (1990)
- [O] D. Olive; *Exact eletromagnetic duality*; *NUCL. PHYS. PROC. SUPPL.* **45A** (1996) 88-102; *NUCL. PHYS. PROC. SUPPL.* **46** (1996) 1-15; hep-th/9508089.
- [OF] L.A. Ferreira, *Exact electromagnetic duality I* e D. Olive, *Exact electromagnetic duality II*, Proceedings of the IX Jorge André Swieca Summer School, Section: Particles and Fields, Campos do Jordão, Brazil, Feb/97 (World Scientific).

- [OP] M. Olshanetsky e A. Perelomov, INVENTIONES MATH.**54**(1979)261; THEOR.MATH.PHYS.**45**(1980)843; PHYS. REPORTS **71** (1981) 313.
- [OT] D. Olive, N. Turok; NUCL.PHYS.**B257** [FS14](1985)277.
- [OT2] D.I. Olive, N. Turok, NUCL. PHYS. **B220** (1983) 491.
- [OI] D. Olive, P. Goddard, *Kac-Moody nad Virasoro algebras in relation to quantum physics* INT.JOUR.MOD.PHYS. **A1** (1986).
- [So] M.F. Sohnius, *Introducing Supersymmetry*, PHYS. REPORTS **128** (1985) 39.
- [RS] A.V. Razumov, M.V. Savelev, *Multidimensional Toda type systems*, TEOR.MAT.FIZ. **112** (1997) 254-282, THEOR.MATH.PHYS. **112** (1997) 999-1022, hep-th/9609031.
- [T] W. Taylor; *D-brane Field Theory on Compact Spaces*; PHYS. LETT. **394B** (1997) 43; hep-th/ 9611042.
- [W] R. S. Ward, *Integrable and Solvable systems, and the relations among them*, PHIL.TRANS.R.SOC.LOND.A **315** (1985) 451-457; *On self-dual gauge fields*, PHYS. LETT. **61A** (1977) 81-82.
- [W2] R.S. Ward, *Slowly moving lumps in the  $\mathbb{C}P^1$  model in  $(2+1)$ -dimensions*, PHYS. LETT. **158B** (1985) 424-428.
- [W3] R.S. Ward; *Completely solvable gauge field equation in dimension greater than four*; NUCL. PHYS. **B236** (1984) 381.
- [ZS] V.E. Zakharov and A.B. Shabat, ZH. EXP. TEOR. FIZ. **61**(1971) 118-134; SOVIET PHYS. JETP **34** (1972) 62-69.
- [Y] Yang, C. N. *Condition of selfduality for  $SU(2)$  gauge fields on Euclidean four-dimension space*, PHYS. REV. LETT. **38** (1977) 1377-1379.

