

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Zeros de Polinômios Perturbados

Larissa Ferreira Marques

Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani

Presidente Prudente, Abril de 2013

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Zeros de Polinômios Perturbados

Larissa Ferreira Marques

Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Abril de 2013

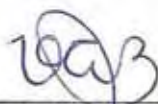
FICHA CATALOGRÁFICA

M319z Marques, Larissa Ferreira.
Zeros de Polinômios Perturbados / Larissa Ferreira Marques. -
Presidente Prudente : [s.n], 2013
00 f.

Orientador: Vanessa Avansini Botta Pirani
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Ciências e Tecnologia
Inclui bibliografia

1. Zeros de Polinômios Perturbados. 2. Polinômios Palindrômicos. 3. Disco
Unitário. 4. Computação - Matemática. I. Botta Pirani, Vanessa Avansini. II.
Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III.
Título.

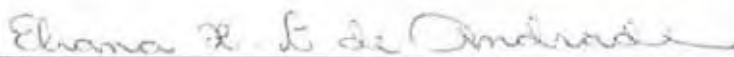
BANCA EXAMINADORA



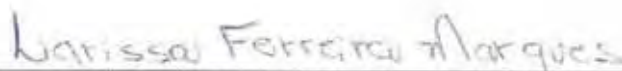
PROFA. DRA. VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI
ORIENTADORA



PROF. DR. MESSIAS MENEGUETTE JUNIOR
FCT/UNESP



PROFA. DRA. ELIANA XAVIER L DE ANDRADE
INSTITUTO DE BIOCIÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO



LARISSA FERREIRA MARQUES

PRESIDENTE PRUDENTE (SP), 03 DE ABRIL DE 2013

RESULTADO: Aprovada

*Aos meus pais, Fátima e Felício,
à minha orientadora, Vanessa,
dedico!*

Agradecimentos

Inicialmente agradeço à Professora Dra. Vanessa, por ter sido, além de minha orientadora, um exemplo a ser seguido. Obrigada por todo incentivo, por todas as experiências compartilhadas e, principalmente, por sua amizade.

À minha família, de um modo especial aos meus pais, meu irmão e minha cunhada, que são o meu alicerce, por todo incentivo, paciência e pelo amor incondicional, sem o qual eu não teria chegado até aqui.

Ao meu namorado Lucas, por ter sido paciente e compreensivo. Meu companheiro de todas as horas. O seu apoio foi fundamental para a concretização deste trabalho. Obrigada meu amor.

Às amigas Amanda, Leticia, Stephanie e Vanessa, pelos quatro anos de luta na graduação. Agradeço também à Camila, que dividiu comigo o sonho de conquistar o título de mestre em matemática.

À primeira turma do posMAC, verdadeiros guerreiros, que iniciaram este Programa de Pós Graduação com muita força de vontade e dedicação, e aos meus companheiros, que ao meu lado formaram a segunda turma do PosMAC. De um modo especial, às amigas Tatiane e Cristiane, que me ensinaram que a distância é um mero detalhe quando se trata de uma amizade verdadeira, a minha pequena Marluce Scarabello, uma grande amiga, que se prontificou a ajudar-me sempre que precisei e a Vanderléa Bazão, uma pessoa admirável, que soube compartilhar com todos de sua sabedoria.

Agradeço a todos os professores do departamento da Matemática e do posMAC, de um modo especial, à Profa. Cristiane, que foi minha primeira inspiração nesta vida acadêmica, ao Prof. Biroca, pela amizade construída e por todas as oportunidades oferecidas, ao meu querido Prof. José Roberto, por ter me orientado com tanta dedicação e me norteado de modo a que eu chegasse até aqui. Agradeço também ao Prof. Suetônio, por ter me aconselhado nas minhas decisões, sendo uma delas o ingresso no PosMAC, e ao admirável Prof. Messias, cuja colaboração foi essencial para a realização desta dissertação.

Aos funcionários da Seção de Pós-Graduação, pela atenção e apoio oferecido, e ao suporte financeiro disponibilizado pela CAPES.

A todos que direta ou indiretamente me ajudaram na elaboração deste trabalho.

Finalmente, e acima de tudo, a Deus, por me amparar nos momentos difíceis, me dar força interior para superar as dificuldades, mostrar o caminho nas horas incertas e me suprir em todas as minhas necessidades. A Nossa Senhora, minha intercessora amada, que jamais me abandonou.

*“É melhor tentar e falhar que
ocupar-se em ver a vida passar.
É melhor tentar, ainda que em vão,
que nada fazer.”*

Martin Luther King

Resumo

Este trabalho consiste em apresentar um estudo de um resultado publicado recentemente, relacionado ao comportamento de zeros de polinômios perturbados. Utilizando os métodos numéricos para a solução de equações diferenciais ordinárias, os métodos (K, L) de Brown e os métodos de Radau (Radau I e Radau II), exemplificamos tal resultado, mostrando a sua validade para alguns polinômios característicos dos métodos citados. Além disso, obtivemos uma extensão deste resultado para uma classe de polinômios palindrômicos, estabelecendo o comportamento de seus zeros em relação ao disco unitário.

Palavras-Chave: Zeros de polinômios perturbados. Polinômios palindrômicos. Disco unitário.

Abstract

This work presents a study of a result published recently, related to the behavior of zeros of perturbed polynomials. Through numerical methods for the solution of ordinary differential equations, Brown (K, L) methods and Radau methods (Radau I and Radau II), we exemplify this result, showing its validity for some characteristic polynomials of the mentioned methods. Furthermore, we obtained an extension of this result to a class of palindromic polynomials, establishing the behavior their zeros of polynomials with respect to the unit disk.

Keywords: Zeros of pertubed polynomials. Palindromic polynomials. Unit disk.

Lista de Figuras

2.1	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 0.5z^3 + 0.3z^2 - 0.3z + 1$	9
2.2	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 2z^5 + 2z^3 - 0.3z^2 - 0.4z - 0.5$. .	11
2.3	Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 10z^6 + 5.5z^5 + 4z^4 + 2.5z^3 + 1.5z^2 + z + 0.75$	11
2.4	Região anelar $0.5 \leq z \leq 0.75$, que representa a localização dos zeros de $P(z)$	12
2.5	Comparação entre os Teoremas 2.6 e 2.7, em relação à localização dos zeros do polinômio $P(z)$	13
2.6	Polinômios de Legendre de grau n , $n = 0, 1, 2, \dots, 4$	22
3.1	Localização dos zeros do polinômio $S(z) = P(z) + \gamma z^4$, $\gamma = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$. .	39
3.2	Localização dos zeros do polinômio $S(z) = P(z) + \gamma z^3$, $\gamma = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$. .	40
3.3	Polinômios $\bar{P}_n$, com $n = 0, 1, 2, \dots, 4$	41
3.4	Imagens da função $H_n(z)$ para $n = 1, \dots, 4$	45
3.5	Localização dos zeros do polinômio $S(z) = P(z) + \gamma z^4$, $\gamma = 0, 0.75, 1.5, 2.25, 3$. .	46
3.6	Sequência de Polinômios $T_n(z)$, $z \in [0, 1]$, com $n = 1, \dots, 4$	50
3.7	Localização dos zeros do polinômio $S(z) = P(z) + \gamma z^4$, $\gamma = 0, 0.75, 1.5, 2.25, 3$. .	50
4.1	Localização dos zeros do polinômio palindrômico $R(z)$ e do polinômio perturbado $S(z) = R(z) + \gamma z^4$, para $\gamma = 0.5$	59
4.2	Localização dos zeros do polinômio palindrômico $R(z)$ e do polinômio perturbado $S(z) = R(z) + \gamma z^6$, para $\gamma = 0.8$	59
4.3	Localização dos zeros do polinômio palindrômico $R(z)$ e do polinômio perturbado $S(z) = R(z) + \gamma z^5$, para $\gamma = 2$ e $\gamma = 4$	60
4.4	Localização dos zeros do polinômio palindrômico $R(z)$ e do polinômio perturbado $S(z) = R(z) + \gamma z^5$, para $\gamma = 0, 5$	60
4.5	Localização dos zeros do polinômio palindrômico $R(z)$ e do polinômio perturbado $S(z) = R(z) + \gamma z^3$, para $\gamma = 0.5$ e para $\gamma = 1$	61

4.6	Localização dos zeros do polinômio palindrômico $R(z)$ e do polinômio perturbado $S(z) = R(z) + \gamma z^7$, para $\gamma = 1$ e $\gamma = 2$	62
-----	--	----

Lista de Tabelas

3.1	Coeficientes dos polinômios relacionados aos métodos (K, L) de Brown, com $L = 1$ e $1 \leq K \leq 5$	38
3.2	Coeficientes dos polinômios relacionados aos métodos (K, L) de Brown, com $L = 2$ e $1 \leq K \leq 3$	38
3.3	Polinômios relacionados aos métodos de Radau I para $n = 1, 2, \dots, 9$	44
3.4	Polinômios relacionados aos métodos de Radau II para $n = 1, 2, \dots, 9$	48

Sumário

1	Introdução	2
2	Resultados Preliminares	5
2.1	Resultados clássicos sobre zeros de polinômios	5
2.1.1	Relações entre coeficientes e raízes	6
2.2	Limitantes para as raízes	7
2.3	Número de zeros de um polinômio	14
2.3.1	Algumas classes de polinômios	14
2.3.2	Sequências de polinômios	15
2.4	Polinômios ortogonais	19
2.4.1	Sequência de polinômios ortogonais	19
2.4.2	Zeros de polinômios ortogonais	20
2.4.3	Polinômios de Legendre	22
2.4.4	Polinômios quase-ortogonais	23
2.5	Fórmulas de quadratura	24
2.5.1	Fórmulas de quadratura gaussianas	25
3	Zeros de Polinômios Perturbados	28
3.1	Zeros de Polinômios Perturbados	28
3.2	Polinômios característicos relacionados a algumas classes de métodos nu- méricos	36
3.2.1	Métodos (K, L) de Brown	37
3.2.2	Métodos de Radau I e Radau II	40
4	Polinômios Palindrômicos	51
4.1	Resultados principais	55
4.1.1	Exemplos numéricos	58
5	Considerações Finais	63

Introdução

Em Matemática, os polinômios formam uma classe importante de funções que, devido à natureza de sua estrutura, são muito simples de se avaliar e por consequência são utilizados extensivamente na Análise Numérica. Historicamente, as questões relacionadas aos polinômios dão origem a muitos problemas interessantes. O comportamento dos zeros dos polinômios, por exemplo, é uma das subáreas clássicas da Análise que, além de possuir um vasto campo de aplicações em diversas áreas do conhecimento, abrange muitos problemas em aberto. Várias celebridades como Gauss, Cauchy, Hermite, Jensen, Dieudonné e Pólya contribuíram nessa área e, também, novos pesquisadores têm se dedicado às pesquisas para novas contribuições.

Instigados a provar a validade da Conjectura 1.1, enunciada a seguir (para maiores detalhes vide [15]), em [3] os autores demonstraram, a partir de resultados clássicos sobre zeros de polinômios, um resultado que determina a localização dos zeros de algumas classes de polinômios, a partir de um polinômio primitivo, cujos coeficientes satisfazem algumas condições e cujos zeros encontram-se em $|z| \leq 1$. Neste contexto, este trabalho consiste em apresentar um estudo detalhado de tal resultado, onde foram apresentadas classes de polinômios que satisfazem as condições do principal resultado de [3] (polinômios característicos dos métodos de Radau I e Radau II). Como consequência desse estudo, foi possível mostrar que os zeros do polinômio $S(z) = R(z) + \gamma z^n$, com

$$R(z) = r_n z^n + r_{n-1}(z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z) + r_n,$$

onde $r_{n-1}, r_n > 0$ e $\gamma \in (0, \infty) \cap [r_{n-1} - 2r_n, \infty)$, encontram-se em $|z| \leq 1$. Tal resultado foi apresentado no trabalho [4], submetido para publicação.

Conjectura 1.1 ([15]). *Considere o polinômio*

$$P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i, \quad 0 < a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{n-1}, \quad a_n > 0.$$

Se as raízes da equação $P(z) = 0$ encontram-se no disco unitário e $na_n > (n-1)a_{n-1}$, então os zeros do polinômio perturbado $S(z) = P(z) + \gamma z^n$ estão no disco unitário, para todo $\gamma > 0$.

Com o intuito de facilitar a leitura desta dissertação, convencionamos as seguintes nomenclaturas:

- (i) $|z| \leq 1$ refere-se a *disco unitário*;
- (ii) $|z| < 1$ refere-se a *interior do disco unitário*;
- (iii) $|z| > 1$ refere-se a *fora do disco unitário*;
- (iv) $|z| = 1$ refere-se a *círculo unitário*;
- (v) *polinômio perturbado* refere-se ao polinômio cujo coeficiente dominante a_n fora substituído por $a_n + \gamma$, $\gamma > 0$.

Para expor a proposta de trabalho, esta dissertação encontra-se organizada da maneira detalhada abaixo.

No Capítulo 2 encontra-se uma revisão bibliográfica que reúne desde conceitos básicos a resultados clássicos sobre zeros de polinômios. A princípio foi definido um polinômio de grau n e, em seguida, os teoremas clássicos, como o teorema fundamental da álgebra e o teorema da decomposição, foram enunciados. A primeira seção deste capítulo traz uma subseção direcionada às relações entre coeficientes e raízes, também conhecidas como fórmulas de Viète. Essas relações são fundamentais para o desenvolvimento deste estudo, pois são utilizadas na demonstração de outros resultados importantes.

A segunda seção do Capítulo 2 consiste de resultados clássicos que apresentam regiões onde estão localizados os zeros de polinômios. Além disso, nessa seção apresentamos exemplos práticos que são importantes para a obtenção de novos resultados. Na sequência, a Seção 2.3 traz alguns resultados sobre o número de zeros de um determinado polinômio com relação ao disco unitário, os quais podem ser encontrados com maiores detalhes em [13]. Essa seção tem por finalidade apresentar o estudo de algumas classes de polinômios a partir dos resultados citados anteriormente.

Para finalizar o Capítulo 2, a Seção 2.4 traz uma abordagem concisa sobre a teoria dos polinômios ortogonais, enfatizando uma das classes de polinômios ortogonais clássicos, os polinômios de Legendre. Como aplicação dos polinômios ortogonais, nesta seção

apresentamos alguns resultados sobre as fórmulas de quadratura. Essa teoria se faz necessária, pois será utilizada na determinação de expressões gerais para os coeficientes dos polinômios relacionados aos métodos de Radau, como veremos no próximo capítulo.

No Capítulo 3 encontra-se um dos principais resultados estudados nesse trabalho, um teorema, cuja origem está relacionada aos polinômios característicos associados aos métodos (K, L) de Brown. No entanto, sua formulação se verifica apenas para uma classe de polinômios que satisfazem determinadas condições que serão apresentadas no decorrer do capítulo. Para exemplificar tal resultado, serão apresentadas algumas propriedades dos polinômios característicos relacionados aos métodos (K, L) de Brown e de Radau, que são métodos numéricos para a solução de equações diferenciais ordinárias.

Por fim, o Capítulo 4 consiste em estudar alguns resultados relacionados aos polinômios palindrômicos, definidos no Capítulo 2. Esse último estudo deu origem ao artigo [4], submetido para publicação.

Resultados Preliminares

Neste capítulo apresentamos desde resultados básicos até resultados clássicos sobre zeros de polinômios. Tais resultados e definições, fundamentais para o desenvolvimento desta dissertação, encontram-se principalmente nos textos [13] e [16].

2.1 Resultados clássicos sobre zeros de polinômios

Dada a sequência de números complexos $a_0, a_1, \dots, a_n$, consideramos a função $P : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ dada por

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n.$$

A função P é denominada *função polinomial* ou *polinômio* associado à sequência dada. Os números $a_0, a_1, \dots, a_n$ são chamados *coeficientes* e as parcelas $a_0, a_1z, a_2z^2, \dots, a_nz^n$ são chamados *termos* do polinômio $P(z)$.

Seja z_0 um zero do polinômio $P(z)$. Dizemos que z_0 é um *zero simples* de $P(z)$ se z_0 tem multiplicidade 1.

O teorema a seguir garante que toda equação polinomial não constante com coeficientes complexos possui todas as soluções em $\mathbb{C}$.

Teorema 2.1 (Teorema Fundamental da Álgebra). *Todo polinômio não-nulo $P(z)$ de grau n com coeficientes complexos a_i , $i = 0, 1, \dots, n$, tem exatamente n zeros complexos, $z_1, z_2, \dots, z_n$.*

Como consequência imediata do teorema anterior, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.2 (Teorema da decomposição). *Seja $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ um polinômio de grau n , $n \geq 1$, com coeficientes complexos a_i , $i = 0, 1, \dots, n$. O polinômio $P(z)$ pode ser unicamente representado por*

$$P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n),$$

onde $z_1, z_2, \dots, z_n$ são zeros complexos do polinômio $P(z)$.

As demonstrações dos Teoremas 2.1 e 2.2 encontram-se em [17].

Teorema 2.3 (Teorema de Rouché). *Sejam $P(z)$ e $Q(z)$ funções analíticas no interior de uma curva de Jordan C simples e fechada. Se P e Q são contínuas em C e*

$$|P(z)| > |Q(z)|, \quad z \in C,$$

então $F(z) = P(z) + Q(z)$ e $Q(z)$ têm o mesmo número de zeros no interior de C .

Note que o círculo unitário é um caso particular da curva C do Teorema 2.3.

2.1.1 Relações entre coeficientes e raízes

Sendo $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ um polinômio de grau n , nesta subseção mostraremos que é possível deduzir relações entre seus zeros e seus coeficientes.

Dado o polinômio

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-2} z^{n-2} + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n, \quad a_n \neq 0, \quad (2.1)$$

cujos zeros são $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$. Do Teorema 2.2, podemos escrever (2.1) como

$$P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_n).$$

Assim,

$$\begin{aligned} P(z) &= a_n z^n - a_n \underbrace{(z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n)}_{S_1} z^{n-1} \\ &\quad + a_n \underbrace{(z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n)}_{S_2} z^{n-2} \\ &\quad - a_n \underbrace{(z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + \dots + z_{n-2} z_{n-1} z_n)}_{S_3} z^{n-3} \\ &\quad + \dots + (-1)^k a_n S_k z^{n-k} + \dots + (-1)^n a_n \underbrace{(z_1 z_2 z_3 \dots z_n)}_{S_n}. \end{aligned}$$

Logo, por (2.1),

$$\begin{aligned}
S_1 &= z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}; \\
S_2 &= z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + \cdots + z_{n-1} z_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}; \\
S_3 &= z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + \cdots + z_{n-2} z_{n-1} z_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}; \\
&\vdots \\
S_k &= (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}; \\
&\vdots \\
S_n &= z_1 z_2 z_3 \cdots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.
\end{aligned}$$

As relações entre coeficientes e raízes apresentadas anteriormente, são conhecidas na literatura como *fórmulas de Viète*¹.

2.2 Limitantes para as raízes

Nesta seção não nos limitaremos a interesses teóricos, pois necessitamos também de exemplos práticos, que são fundamentais para a obtenção de novos resultados. Neste contexto, esta seção consiste em apresentar importantes resultados sobre a localização de zeros de polinômios, além de exemplificá-los.

A seguir, será apresentado um teorema cujo objetivo é determinar uma região anelar que contém todos os zeros de um polinômio complexo.

Teorema 2.4. *Sejam $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, onde $a_0, a_n \neq 0$, um polinômio com coeficientes complexos,*

$$M = \max_{0 \leq i \leq n-1} |a_i| \text{ e } M' = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|.$$

Então, todos os zeros de $P(z)$ satisfazem

$$\frac{|a_0|}{|a_0| + M'} < |z| < 1 + \frac{M}{|a_n|}.$$

¹François Viète nasceu no ano de 1540 em Fontenay-le-Comte, na França, e morreu no dia 13 de dezembro de 1603 em Paris. Apaixonado por álgebra, esse matemático francês foi responsável pela introdução da primeira notação algébrica sistematizada, além de contribuir para a teoria das equações. Ficou conhecido como o Pai da Álgebra.

Demonstração: De fato, considere $|z| > 1$. Assim,

$$\begin{aligned}
 |P(z)| &= |a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n| \\
 &= |a_nz^n - (-a_{n-1}z^{n-1} - \cdots - a_1z - a_0)| \\
 &\geq |a_nz^n| - |a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0| \\
 &\geq |a_n||z^n| - (|a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_1||z| + |a_0|) \\
 &\geq |a_n||z^n| - M(|z|^{n-1} + \cdots + |z| + 1) \\
 &= |a_n||z|^n \left(1 - \frac{M}{|a_n|} \sum_{k=1}^n |z|^{-k} \right) \\
 &> |a_n||z|^n \left(1 - \frac{M}{|a_n|} \sum_{k=1}^{\infty} |z|^{-k} \right) \\
 &= |a_n||z|^n \left(1 - \frac{M}{|a_n|(|z| - 1)} \right) \\
 &= |a_n||z|^n \left[\frac{|z| - \left(1 + \frac{M}{|a_n|}\right)}{|z| - 1} \right].
 \end{aligned}$$

Deste modo, se $|z| > 1 + \frac{M}{|a_n|}$, então $P(z) > 0$, ou seja, $P(z) \neq 0$ para todo z tal que $|z| > 1 + \frac{M}{|a_n|}$.

Logo, $|z| < 1 + \frac{M}{|a_n|}$ é um limitante superior para o módulo dos zeros do polinômio P . Agora, basta determinar um limitante inferior. Para isso, vamos considerar

$$Q(z) = z^n P\left(\frac{1}{z}\right) = a_n + a_{n-1}z + \cdots + a_0z^n.$$

Ao aplicar o resultado obtido anteriormente, observamos que os zeros do polinômio $Q(z)$ encontram-se em $|z| < 1 + \frac{M'}{|a_0|}$.

Mas, considerando z_k um zero de $Q(z)$, então $\frac{1}{z_k}$ é zero de $P(z)$. Desta maneira,

$$\frac{1}{|z_k|} < 1 + \frac{M'}{|a_0|} \Rightarrow |z_k| > \frac{|a_0|}{|a_0| + M'}.$$

Portanto, todos os zeros do polinômio $P(z)$ estão localizados na região anelar

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{|a_0|}{|a_0| + M'} < |z| < 1 + \frac{M}{|a_n|} \right\}. \quad \blacksquare$$

Exemplo 2.1. Seja $P(z) = 0.5z^3 + 0.3z^2 - 0.3z + 1$. Utilizando o Teorema 2.4, determinamos a região anelar $A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0.67 \leq |z| \leq 3\}$, ilustrada em azul, na qual estão

localizados todos os zeros do polinômio $P(z)$, representados pelos pontos em vermelho na Figura 2.1.

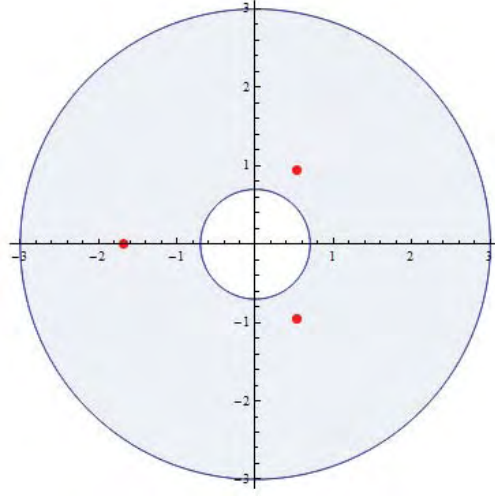


Figura 2.1: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 0.5z^3 + 0.3z^2 - 0.3z + 1$.

O resultado a seguir determina um disco que contém todos os zeros de um polinômio com coeficientes reais.

Teorema 2.5. *Seja $P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$ um polinômio de grau n , tal que $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n$ e $a_n, a_0 \neq 0$. Então, todos os zeros de $P(z)$ estão no disco determinado por*

$$|z| \leq \frac{a_n - a_0 + |a_0|}{|a_n|}.$$

Demonstração: De fato, seja $R(z) = z^n Q\left(\frac{1}{z}\right)$, onde

$$Q(z) = a_n z^{n+1} + (1 - z)P(z) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1})z^k.$$

Então, para $|z| \leq 1$,

$$\begin{aligned} |R(z)| &= \left| z^n Q\left(\frac{1}{z}\right) \right| = \left| a_0 z^n + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) z^{n-k} \right| \\ &\leq |a_0| |z|^n + \left| \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) z^{n-k} \right|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |R(z)| &\leq |a_0| + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) \\ &= |a_0| + a_n - a_0. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\left| Q\left(\frac{1}{z}\right) \right| \leq \frac{|a_0| + a_n - a_0}{|z|^n},$$

e assim,

$$|Q(z)| \leq (|a_0| + a_n - a_0)|z|^n, \quad \text{com } |z| \geq 1.$$

Para $|z| \geq 1$, segue que

$$\begin{aligned} |(z-1)P(z)| &= |a_n z^{n+1} - Q(z)| \\ &\geq |a_n||z|^{n+1} - |Q(z)| \\ &\geq |a_n||z|^{n+1} - (|a_0| + a_n - a_0)|z|^n \\ &= |z|^n [|a_n||z| - (|a_0| - a_n + a_0)] \\ &= |z|^n |a_n| \left[|z| - \left(\frac{|a_0| - a_n + a_0}{|a_n|} \right) \right]. \end{aligned}$$

Como $a_n - a_0 = |a_n - a_0|$, segue que

$$r = \frac{|a_0| + a_n - a_0}{|a_n|} \geq 1.$$

Note que se $|z| > r$, então $|(z-1)P(z)| > 0$. Portanto, $P(z)$ não possui zeros em $|z| > r$, ou seja, todos os zeros de $P(z)$ encontram-se em $|z| \leq r$. ■

Exemplo 2.2. *Seja $P(z) = 2z^5 + 2z^3 - 0.3z^2 - 0.4z - 0.5$ um polinômio cujos coeficientes satisfazem as hipóteses do teorema anterior. Então, podemos concluir que todos os zeros deste polinômio, ilustrados em vermelho, encontram-se no disco $|z| \leq 1.5$, como pode ser observado na figura a seguir.*

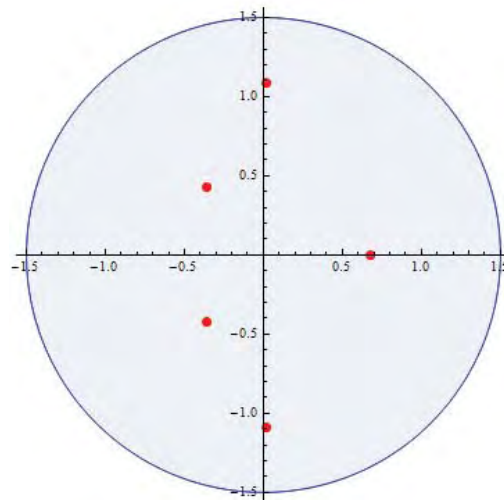


Figura 2.2: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 2z^5 + 2z^3 - 0.3z^2 - 0.4z - 0.5$.

O teorema a seguir, resultado clássico da teoria da distribuição de zeros de polinômios, é uma consequência do resultado anterior, que tem por finalidade localizar zeros de polinômios. Maiores detalhes desse teorema encontram-se em [13].

Teorema 2.6 (Eneström-Kakeya). *Seja $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ um polinômio cujos coeficientes reais $a_i, i = 0, \dots, n$, satisfazem $a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_1 \geq a_0 > 0$. Então, $P(z)$ não possui zeros em $|z| > 1$, ou seja, os zeros de $P(z)$ encontram-se em $|z| \leq 1$.*

Exemplo 2.3. *Dado o polinômio $P(z) = 10z^6 + 5.5z^5 + 4z^4 + 2.5z^3 + 1.5z^2 + z + 0.75$, cujos coeficientes satisfazem a ordenação do Teorema 2.6, é possível concluir que os zeros de $P(z)$ encontram-se localizados no disco unitário $|z| \leq 1$.*

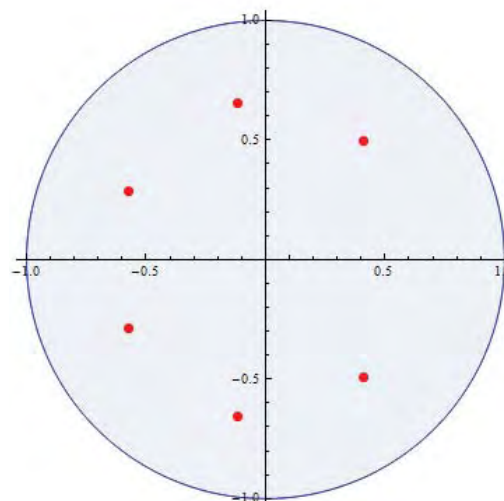


Figura 2.3: Localização dos zeros do polinômio $P(z) = 10z^6 + 5.5z^5 + 4z^4 + 2.5z^3 + 1.5z^2 + z + 0.75$.

O próximo teorema é um caso mais generalizado do teorema de Eneström - Kakeya, que exibe uma região anelar contendo todos os zeros de um determinado polinômio. Esse resultado encontra-se em [1].

Teorema 2.7. *Seja $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ um polinômio de grau n , tal que $n \geq 1$ e $a_k > 0$ para $k = 0, 1, \dots, n$. Considerando*

$$\alpha = \min_{0 \leq k < n} \left\{ \frac{a_k}{a_{k+1}} \right\} \quad e \quad \beta = \max_{0 \leq k < n} \left\{ \frac{a_k}{a_{k+1}} \right\},$$

segue que todos os zeros de $P(z)$ estão na região anelar $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha \leq |z| \leq \beta\}$.

Exemplo 2.4. *Seja $P(z) = 10z^6 + 5.5z^5 + 4z^4 + 2.5z^3 + 1.5z^2 + z + 0.75$ o polinômio apresentado no Exemplo 2.3. De acordo com o Teorema 2.7, é possível exibir a região $\alpha \leq |z| \leq \beta$, onde α e β são determinados a partir do menor e maior valores, respectivamente, entre os valores dados por*

$$\frac{a_0}{a_1} = 0.75, \quad \frac{a_1}{a_2} = 0.67, \quad \frac{a_2}{a_3} = 0.6, \quad \frac{a_3}{a_4} = 0.6, \quad \frac{a_4}{a_5} = 0.7 \quad e \quad \frac{a_5}{a_6} = 0.5.$$

Logo, temos $\alpha = 0.5$ e $\beta = 0.75$. Portanto, os zeros do polinômio $P(z)$ estão em $0.5 \leq |z| \leq 0.75$, como podemos ver na Figura 2.4.

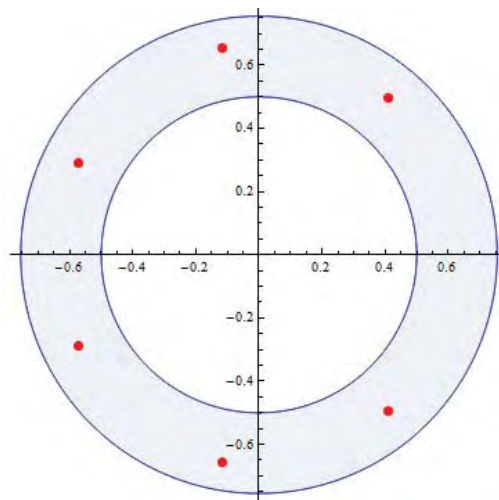


Figura 2.4: Região anelar $0.5 \leq |z| \leq 0.75$, que representa a localização dos zeros de $P(z)$.

A figura a seguir ilustra uma comparação entre os Teoremas 2.6 e 2.7, em relação à localização dos zeros do polinômio $P(z) = 10z^6 + 5.5z^5 + 4z^4 + 2.5z^3 + 1.5z^2 + z + 0.75$.

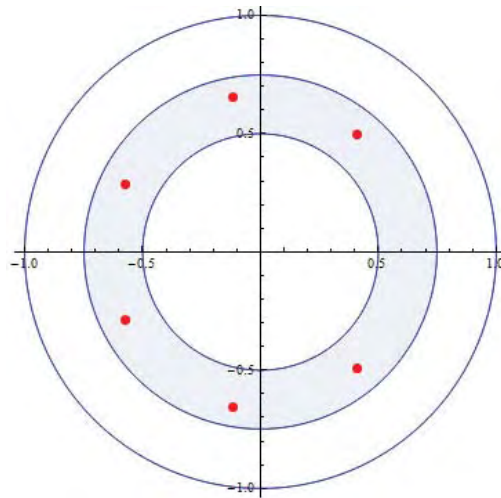


Figura 2.5: Comparação entre os Teoremas 2.6 e 2.7, em relação à localização dos zeros do polinômio $P(z)$.

Ao analisar a Figura 2.5, nota-se que utilizando o Teorema 2.7 é possível obter uma região mais refinada do que a região obtida pelo Teorema 2.6 para a localização dos zeros de $P(z)$. No entanto, isso não significa que o teorema de Eneström-Kakeya seja menos importante, já que este resultado é muito utilizado em problemas de estabilidade de métodos numéricos, onde é necessário analisar se os zeros de um determinado polinômio estão localizados no disco unitário.

O lema a seguir relaciona a localização dos zeros de um determinado polinômio com seus coeficientes de menor e maior graus, respectivamente.

Lema 2.1. *Se o polinômio $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$, $a_i \in \mathbb{R}$, tem todos os seus zeros em $|z| \leq 1$, então $|a_0| \leq |a_n|$. Mas, se pelo menos um desses zeros estiver no interior do disco unitário, então $|a_0| < |a_n|$.*

Demonstração: Sejam $z_1, z_2, \dots, z_n$ os zeros de $P(z)$ em $|z| \leq 1$. Usando as fórmulas de Viète, obtemos

$$(-1)^n \frac{a_0}{a_n} = z_1 z_2 \dots z_n.$$

Assim,

$$\left| \frac{a_0}{a_n} \right| = |z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| |z_2| \dots |z_n| \leq 1,$$

cujas desigualdade é estrita se pelo menos um dos zeros estiver no interior do disco unitário. ■

2.3 Número de zeros de um polinômio

Nesta seção são apresentados resultados importantes que permitem determinar o número de zeros de um dado polinômio em relação ao disco unitário, onde esses zeros podem estar localizados em $|z| < 1$ ou $|z| > 1$, ou ainda, em $|z| = 1$. Além disso, através desses resultados será possível relacionar a quantidade de zeros entre as sequências de polinômios $P_j(z)$ e $P_j^*(z)$, definidas no decorrer desta seção.

2.3.1 Algumas classes de polinômios

Seja $z \mapsto P(z)$ um polinômio de grau n dado por

$$P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n = \sum_{i=0}^n a_i z^i = a_n \prod_{j=1}^n (z - z_j), \quad (2.2)$$

cujos zeros são $z_1, z_2, \dots, z_n$ e $a_i \in \mathbb{R}$. Vamos denotar por p ($p \leq n$) o número de zeros que o polinômio P tem em um determinado disco que, sem perda de generalidade, pode ser tomado como o disco unitário.

Definição 2.1. Associado ao polinômio $P(z)$, consideraremos o polinômio $P^*(z)$, chamado de recíproco de $P(z)$, dado por

$$P^*(z) = z^n \bar{P}\left(\frac{1}{z}\right) = \bar{a}_0 z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + \cdots + \bar{a}_n = \bar{a}_0 \prod_{j=1}^n (z - z_j^*), \quad (2.3)$$

cujos zeros $z_k^* = \frac{1}{\bar{z}_k}$ são os inversos dos zeros z_k de $P(z)$ com relação ao círculo unitário.

Definição 2.2. Dado o polinômio $P(z)$, se $P(z) = P^*(z)$, dizemos que P é um polinômio auto-recíproco.

A classe de polinômios definida a seguir será utilizada para exemplificar o principal resultado estudado nesta dissertação.

Definição 2.3. Se o polinômio $P(z)$ é auto-recíproco e, além disso, se seus coeficientes são todos reais, dizemos que $P(z)$ é um polinômio palindrômico.

O resultado abaixo é caracterizado por relacionar a quantidade de zeros dos polinômios $P(z)$ e $P^*(z)$, em relação ao disco unitário, e encontra-se em [13].

Teorema 2.8. Sejam $P(z)$ e $P^*(z)$ polinômios de grau n definidos em (2.2) e (2.3), respectivamente. Então,

- (i) qualquer zero de $P(z)$ em $|z| = 1$ é também um zero de $P^*(z)$;
- (ii) se todos os zeros de $P(z)$ encontram-se em $|z| > 1$, ou seja, $P(z)$ não tem zeros no disco unitário, então $P^*(z)$ possui todos os seus zeros em $|z| < 1$;
- (iii) supondo que $P(z)$ possui p zeros em $|z| \leq 1$, então $P^*(z)$ tem $n - p$ zeros em $|z| < 1$.

O valor do polinômio $P^*(z)$ no círculo unitário é dado por

$$P^*(e^{i\theta}) = \bar{a}_0 \prod_{j=1}^n \left(e^{i\theta} - \frac{1}{\bar{z}_j} \right) = \frac{\bar{a}_0 e^{in\theta} (-1)^n}{\bar{z}_1 \bar{z}_2 \dots \bar{z}_n} \prod_{j=1}^n (e^{-i\theta} - \bar{z}_j) = e^{in\theta} \bar{P}(e^{-i\theta}).$$

Assim,

$$|P^*(e^{i\theta})| = |P(e^{i\theta})|. \quad (2.4)$$

2.3.2 Sequências de polinômios

A partir dos polinômios $P(z)$ e $P^*(z)$, é possível determinar a sequência de polinômios dada pela definição a seguir.

Definição 2.4. Dado o polinômio $P(z)$, considere a sequência de polinômios $P_j(z)$ definida por

$$P_j(z) = \sum_{k=0}^{n-j} a_k^{(j)} z^k, \quad \text{onde } P_0(z) = P(z) \quad e \quad (2.5)$$

$$P_{j+1}(z) := \Delta P_j(z) := \bar{a}_0^{(j)} P_j(z) - a_{n-j}^{(j)} P_j^*(z), \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2.6)$$

com $P_0^*(z) = P^*(z)$.

Da igualdade (2.6), segue que os coeficientes de $P_{j+1}(z)$ satisfazem a relação de recorrência dada por

$$a_k^{(j+1)} = \bar{a}_0^{(j)} a_k^{(j)} - a_{n-j}^{(j)} \bar{a}_{n-j-k}^{(j)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-j \quad e \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (2.7)$$

Definição 2.5. Em cada polinômio da sequência $P_j(z)$, o termo constante $a_0^{(j)}$ é um número real que será denotado por δ_j . Desta maneira, segue que

$$\delta_{j+1} := a_0^{(j+1)} := \left| a_0^{(j)} \right|^2 - \left| a_{n-j}^{(j)} \right|^2, \quad (2.8)$$

com $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Os próximos resultados relacionam a quantidade de zeros de $P_j(z)$ e $P_{j+1}(z)$ em relação ao disco unitário e serão utilizados na análise dos resultados apresentados no Capítulo 3.

Lema 2.2. *O polinômio $P_j(z)$ satisfaz $\Delta P_j^*(z) = -P_{j+1}(z)$, para todo $j \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: De fato, da Definição 2.4 temos

$$P_{j+1}(z) = \sum_{k=0}^{n-j-1} a_k^{(j+1)} z^k,$$

onde os coeficientes $a_k^{(j+1)}$ são dados pela igualdade (2.7).

Sejam

$$P_j(z) = a_0^{(j)} + a_1^{(j)} z + \cdots + a_{n-j}^{(j)} z^{n-j} \quad \text{e} \quad P_j^*(z) = \bar{a}_0^{(j)} z^{n-j} + \bar{a}_1^{(j)} z^{n-j-1} + \cdots + \bar{a}_{n-j}^{(j)}.$$

Vamos escrever o polinômio $P_j^*(z)$ na forma

$$P_j^*(z) = Q(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_{n-j} z^{n-j}, \quad \text{onde} \quad b_k = \bar{a}_{n-j-k}^{(j)}.$$

Da Definição 2.4 é possível determinar o polinômio

$$\Delta Q(z) = \Delta P_j^*(z) = b_0^{(1)} + b_1^{(1)} z + \cdots + b_{n-j-1}^{(1)} z^{n-j-1},$$

onde os coeficientes $b_k^{(1)}$ são dados pela expressão (2.7), resultando em

$$b_k^{(1)} = \bar{b}_0 b_k - b_{n-j} \bar{b}_{n-j-k}.$$

Mas, como $b_k = \bar{a}_{n-j-k}^{(j)}$, segue que $b_k^{(1)} = a_{n-j}^{(j)} \bar{a}_{n-j-k}^{(j)} - \bar{a}_0^{(j)} a_k^{(j)}$. Deste modo, de (2.7), $b_k^{(1)} = -a_k^{(j+1)}$, o que demonstra o lema. ■

Lema 2.3. *Se o polinômio P_j tem p_j zeros no interior do disco unitário e $\delta_{j+1} \neq 0$, então P_{j+1} tem*

$$p_{j+1} = \begin{cases} p_j, & \text{se } \delta_{j+1} > 0, \\ n - j - p_j, & \text{se } \delta_{j+1} < 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

zeros em $|z| < 1$. Além disso, os zeros de P_{j+1} são os mesmos zeros de P_j em $|z| = 1$.

Demonstração: Inicialmente mostraremos a validade deste resultado para o caso em que $\delta_{j+1} > 0$.

De fato, da igualdade (2.4), com $P(z)$ substituído por $P_j(z)$, e da expressão (2.8), segue que

$$\left| a_{n-j}^{(j)} P_j^*(z) \right| < \left| a_0^{(j)} P_j(z) \right|, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.10)$$

Vamos tomar $\epsilon > 0$ de tal forma que a desigualdade anterior seja válida para $z \in C'$, sendo C' a circunferência definida por $C' = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 - \epsilon\}$, e que $P_j(z) \neq 0$ para $1 - \epsilon \leq |z| < 1$.

Do Teorema 2.3 segue que o polinômio $P_{j+1}(z)$ tem no disco unitário o mesmo número p_j de zeros que $\bar{a}_0^{(j)} P_j(z)$. Assim, se $\text{sgn} \delta_{j+1} = 1$, onde sgn representa o sinal de δ_{j+1} , este número é determinado pela equação (2.9).

Agora, provaremos para o caso em que $\delta_{j+1} < 0$.

Seja

$$\left| a_0^{(j)} P_j(e^{i\theta}) \right| < \left| a_{n-j}^{(j)} P_j^*(e^{i\theta}) \right|. \quad (2.11)$$

Utilizando o mesmo raciocínio do caso anterior, concluímos que o polinômio $P_{j+1}(z)$ tem no disco unitário o mesmo número $(n - j - p_j)$ de zeros que $a_{n-j}^{(j)} P_j^*(z)$. Como para este caso temos $\text{sgn} \delta_{j+1} = -1$, o número de zeros também é determinado pela equação (2.9).

Por outro lado, da equação (2.6), vemos que, em $|z| \leq 1$, todos os zeros de P_j , sendo também um dos zeros de P_j^* , é um zero de P_{j+1} . Mas, das desigualdades (2.10) e (2.11), segue que qualquer ponto no disco unitário, que não é zero de P_j , também não é zero de P_{j+1} .

Portanto, provamos a validade do Lema 2.3 para ambos os casos. ■

Os resultados a seguir se fazem indispensáveis pois serão utilizados na demonstração de dois importantes teoremas estudados nesta dissertação.

Lema 2.4. *Seja $P(z)$ um polinômio com coeficientes reais. Se $P(z)$ tem q zeros em $|z| \leq 1$, então $P_{n-q+1}(z) \equiv 0$. Em particular, se $P(z)$ tem todos os seus zeros no disco unitário, então $\Delta P(z) \equiv 0$.*

Demonstração: De fato, da última afirmação do Lema 2.3, $P_{n-q+1}(z)$ tem os mesmos zeros que $P_{n-q}(z)$ no círculo unitário. Utilizando o mesmo argumento, é possível afirmar que esse polinômio tem os mesmos zeros que P_{n-q-1} em $|z| = 1$ e, portanto, tem os mesmos zeros que $P(z)$ no círculo unitário. Logo, por construção, $P_{n-q+1}(z)$ é um polinômio de grau menor ou igual a $q - 1$. Em outras palavras, ele deve se anular. ■

Teorema 2.9. *Se $0 < |a_0| < |a_n|$, $P(z)$ tem todos os seus zeros no disco unitário se, e somente se, $\Delta P^*(z)$ tem também todos os seus zeros em $|z| \leq 1$.*

Demonstração: Primeiro mostraremos o caso em que $|a_0| < |a_n|$, e os zeros de $P(z)$ e de $\Delta P^*(z)$ encontram-se todos em $|z| < 1$. Note que $\delta_1 = |a_0|^2 - |a_n|^2 < 0$. Assim, do Lema 2.3, segue que $p_{j+1} = n - j - p_j$. Como os zeros de $P(z)$ estão no interior do disco unitário, pelo Lema 2.3 temos $p_0 = n$, donde segue que $p_1 = 0$, ou seja, todos os zeros de $P_1(z)$ estão localizados fora do disco unitário. Portanto, os zeros de $\Delta P^*(z)$ encontram-se em $|z| < 1$.

Reciprocamente, se $\Delta P^*(z)$ tem todos seus zeros no interior do disco unitário, então $p_1 = 0$. Desta forma, do Lema 2.3, $p_0 = n$. Isso significa que $P(z)$ tem todos os seus zeros em $|z| < 1$, o que prova a validade deste teorema para este caso mais simples.

Agora, vamos considerar o caso em que $P(z)$ tem m zeros em $|z| < 1$ e q zeros no círculo unitário ($m + q = n$). Então, temos

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_q)R(z),$$

onde $z_i, i = 1, 2, \dots, q$, são os zeros de $P(z)$ tais que $|z_i| = 1$ e $R(z) = c_0 + \dots + c_m z^m$ é um polinômio que tem todos seus zeros em $|z| < 1$ (consequentemente, $R^*(z)$ tem todos seus em $|z| > 1$).

Observe que $c_m = 1$,

$$c_0 = \frac{(-1)^q a_0}{a_n z_1 z_2 \dots z_q} \quad (2.12)$$

e $0 < |c_0| < |c_m|$.

Como $P(z)$ e $P^*(z)$ têm os mesmos zeros no círculo unitário, podemos escrever

$$P^*(z) = z^n P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \frac{\bar{a}_0}{\bar{c}_0} (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_q) R^*(z)$$

e, assim, $P^*(z)$ tem todos os zeros em $|z| \geq 1$.

Do Lema 2.3, $P(z)$ tem os mesmos zeros que $\Delta P(z)$ em $|z| = 1$. Além disso, de (2.6), podemos escrever

$$\begin{aligned} \Delta P(z) &= \bar{a}_0 a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_q) R(z) - \frac{a_n \bar{a}_0}{\bar{c}_0} (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_q) R^*(z) \\ &= \frac{\bar{a}_0 a_n}{\bar{c}_0} (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_q) (\bar{c}_0 R(z) - c_m R^*(z)) \\ &= \frac{\bar{a}_0 a_n}{\bar{c}_0} (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_q) \Delta R(z). \end{aligned}$$

Deste modo, da equação (2.12), obtemos

$$\Delta P^*(z) = \left| \frac{a_0}{c_0} \right|^2 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_q) \Delta R^*(z).$$

Para concluir esta demonstração, precisamos aplicar o Lema 2.3 no polinômio $R(z)$. Note que, neste caso, $\delta_1 = |c_0|^2 - |c_m|^2 < 0$. Como, por construção, $R(z)$ tem todos seus zeros no interior do disco unitário, ou seja, $r_0 = m$, pelo Lema 2.3, $r_1 = 0$, para $j = 0$. Assim, os zeros de $\Delta R(z)$ estão localizados fora do disco unitário. Consequentemente, os

zeros de $\Delta R^*(z)$ encontram-se dentro do disco unitário e $\Delta P^*(z)$ tem todos os seus zeros em $|z| \leq 1$. Reciprocamente, se $\Delta R^*(z)$ tem todos os seus zeros no interior do disco unitário, então $r_1 = 0$. Assim, do Lema 2.3, segue que $r_0 = m$ e, portanto, é possível concluir que $P(z)$ tem todos os seus zeros em $|z| \leq 1$. ■

2.4 Polinômios ortogonais

Nesta seção apresentaremos alguns resultados relacionados à teoria de polinômios ortogonais. Esta teoria abrange uma rica fonte de pesquisa que resulta em aplicações nos mais diversos campos de diferentes áreas. Esses polinômios são ferramentas indispensáveis para a solução de muitos problemas, além de possuir uma importante contribuição para os estudos relacionados a equações diferenciais, frações contínuas e estabilidade numérica, por exemplo.

Dentre os polinômios ortogonais, destacam-se os polinômios ortogonais clássicos. De acordo com [8], são os chamados polinômios de Jacobi (incluindo os casos especiais de Legendre, de Chebyshev de 1ª e 2ª espécies e de Gegenbauer), de Laguerre e de Hermite. Neste contexto, a Subseção 2.4.3 traz uma pequena abordagem de resultados sobre os polinômios de Legendre, que serão utilizados para exemplificar o principal resultado estudado neste trabalho, que encontra-se no Capítulo 3.

2.4.1 Sequência de polinômios ortogonais

Esta subseção apresenta alguns resultados relacionados aos polinômios ortogonais, que podem ser encontrados de forma mais detalhada em [2].

A função definida a seguir assume um papel fundamental na teoria dos polinômios ortogonais.

Definição 2.6. *Sejam (a, b) um intervalo real, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, e $w(z)$ uma função definida e não-negativa em (a, b) . Vamos supor que*

$$\int_{\alpha}^{\beta} w(z) d(z) > 0$$

para qualquer subintervalo $[\alpha, \beta]$ de (a, b) . Toda função que satisfaz essa propriedade é chamada de função peso em (a, b) .

A integral a seguir define um produto interno entre duas funções f e g .

Definição 2.7. *Sejam f e g duas funções definidas em (a, b) . Consideramos o produto interno entre f e g dado por*

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(z)g(z)w(z)dz.$$

Definição 2.8. *As funções $f(z)$ e $g(z)$ são ortogonais em (a, b) com relação à função peso $w(z)$ se $\langle f, g \rangle = 0$.*

Definição 2.9 (Sequência de Polinômios Ortogonais). *Dizemos que a sequência de polinômios $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais (SPO) com relação à função peso $w(z)$ no intervalo (a, b) se*

(i) $P_n(z)$ é de grau exatamente n , $n \geq 0$;

$$(ii) \quad \langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(z)P_m(z)w(z)dz = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \rho_n \neq 0, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Note que, neste caso, $\rho_n > 0$, pois $\int_a^b P_n^2(z)w(z)dz \geq 0$ em (a, b) .

Todo sistema de polinômios ortogonais satisfaz a relação de recorrência dada pelo teorema a seguir. Para maiores detalhes vide [2].

Teorema 2.10 (Relação de recorrência de três termos). *Seja $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais em (a, b) relativamente à função peso $w(z)$. Então,*

$$P_{n+1}(z) = (\gamma_{n+1}z - \beta_{n+1})P_n(z) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(z), \quad n \geq 0,$$

com $P_0(z) = 1$, $P_{-1} = 0$, α_{n+1} , β_{n+1} , $\gamma_{n+1} \in \mathbb{R}$, onde

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle zP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle} \quad e \quad \alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \neq 0.$$

2.4.2 Zeros de polinômios ortogonais

A seguir serão apresentados dois importantes resultados relacionados aos zeros dos polinômios ortogonais. Utilizaremos a notação $z_{n,i}$, $i = 1, \dots, n$, para representar os zeros de $P_n(z)$.

Teorema 2.11. *Seja $P_n(z)$, $n \geq 1$, uma sequência de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) , em relação a função peso $w(z)$. Então, os zeros de $P_n(z)$ são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b) .*

Demonstração: Vamos supor que $P_n(z)$ não muda de sinal em (a, b) . Então ou $P_n(z) \geq 0$ (mas não identicamente nulo) em (a, b) o que implica em $\int_a^b P_n(z)w(z)dz > 0$, ou $P_n(z) \leq 0$ (mas não identicamente nulo) em (a, b) de onde segue que $\int_a^b P_n(z)w(z)dz < 0$. Mas, da relação de ortogonalidade, temos que

$$\int_a^b P_n(z)w(z)dz = \int_a^b 1 \cdot P_n(z)w(z)dz = 0.$$

Ora, isso é um absurdo. Assim, $P_n(z)$ deve mudar de sinal em (a, b) pelo menos uma vez, logo existe pelo menos uma raiz real de $P_n(z)$ de multiplicidade ímpar em (a, b) .

Suponhamos que $z_{n,1}, z_{n,2}, \dots, z_{n,r}$ ($r < n$) são as raízes distintas de multiplicidade ímpar de $P_n(z)$ em (a, b) . Então,

$$P_n(z) = (z - z_{n,1})(z - z_{n,2}) \dots (z - z_{n,r})Q(z) = R(z)Q(z),$$

onde $R(z)$ é um polinômio de grau $r < n$ com raízes $z_{n,1}, z_{n,2}, \dots, z_{n,r}$ e $Q(z)$ é um polinômio de grau $(n - r)$ que tem somente raízes complexas ou raízes de multiplicidade par em (a, b) ou raízes fora de (a, b) . Logo, $Q(z)$ não muda de sinal em (a, b) .

Porém, como $r < n$, pela relação de ortogonalidade,

$$\int_a^b R(z)P_n(z)w(z)dz = 0. \quad (2.13)$$

Mas,

$$\int_a^b R(z)P_n(z)w(z)dz = \int_a^b R^2(z)Q(z)w(z)dz \neq 0. \quad (2.14)$$

Por (2.13) e (2.14) temos um absurdo. Assim, $P_n(z)$ tem $r \geq n$ raízes de multiplicidade ímpar em (a, b) . Mas, como $P_n(z)$ é um polinômio de grau n , então $r = n$. Deste modo, $P_n(z)$ tem n raízes de multiplicidade ímpar em (a, b) , da seguinte forma

$$P_n(z) = (z - z_{n,1})^{i_1}(z - z_{n,2})^{i_2} \dots (z - z_{n,n})^{i_n}.$$

Como $i_1, i_2, \dots, i_n$ são índices positivos e ímpares e $i_1 + i_2 + \dots + i_n = n$, temos que $i_1 = i_2 = \dots = i_n = 1$. ■

O próximo resultado encontra-se demonstrado em [2].

Teorema 2.12. *Seja $\{P_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais. Então, entre dois zeros consecutivos do polinômio de grau $n-1$, $P_{n-1}(z)$, existe um único zero de $P_n(z)$, ou seja, os zeros dos polinômios ortogonais são entrelaçados.*

2.4.3 Polinômios de Legendre

Nesta subseção vamos definir os polinômios de Legendre, que é um caso especial dos polinômios de Jacobi, todos ortogonais em relação a uma determinada função peso $w(z)$. Esses polinômios serão utilizados na determinação dos coeficientes relacionados aos métodos de Radau, como veremos no próximo capítulo desta dissertação.

Em matemática, as funções de Legendre são soluções da equação diferencial de Legendre, dada por

$$\frac{d}{dz} \left[(1 - z^2) \frac{d}{dz} P_n(z) \right] + n(n + 1) P_n(z) = 0,$$

as quais recebem este nome em homenagem *Adrien-Marie Legendre*².

Definição 2.10. Os polinômios de Legendre, denotados por $P_n(z)$, são definidos pela fórmula de Rodrigues

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} [(z^2 - 1)^n]. \quad (2.15)$$

A seguir temos os cinco primeiros termos da sequência $P_n(z)$, cujos gráficos estão ilustrados na Figura 2.6.

$$\begin{aligned} P_0(z) &= 1 \\ P_1(z) &= z \\ P_2(z) &= \frac{1}{2}(3z^2 - 1) \\ P_3(z) &= \frac{1}{2}(5z^3 - 3z) \\ P_4(z) &= \frac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 3) \end{aligned}$$

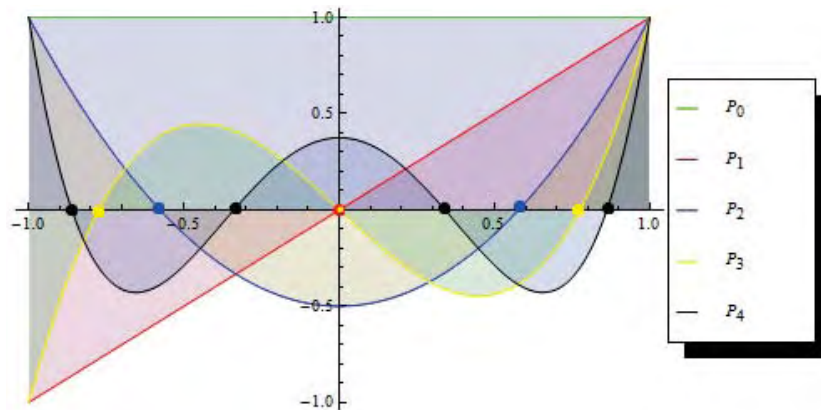


Figura 2.6: Polinômios de Legendre de grau n , $n = 0, 1, 2, \dots, 4$.

²Adrien-Marie Legendre nasceu em Paris, em 18 de setembro de 1752. Estudou no Collège Mazarin em Paris, elaborando sua tese em física e matemática em 1770. Legendre fez importantes contribuições à estatística, teoria dos números, álgebra abstrata e análise matemática. O matemático francês Legendre morreu em Paris em 9 de janeiro de 1833, após uma longa e dolorosa doença.

Na Figura 2.6, é possível observar que os zeros dos polinômios $P_n(z)$ encontram-se entrelaçados, conforme o Teorema 2.12.

A seguir, é apresentada uma importante propriedade dos polinômios de Legendre, que diz respeito à sua ortogonalidade em relação ao produto interno definido por 2.7, no intervalo $-1 \leq z \leq 1$.

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_{-1}^1 P_n(z) P_m(z) dz = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

2.4.4 Polinômios quase-ortogonais

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados relacionados a uma classe de polinômios, conhecidos na literatura como *polinômios quase-ortogonais*. Para maiores detalhes sobre os resultados a seguir, vide [8].

Definição 2.11. Um polinômio $Q(z)$, não identicamente nulo, é chamado polinômio quase-ortogonal de ordem $n+1$ se, e somente se, o grau do polinômio $Q(z)$ é no máximo $n+1$ e

$$\int_a^b z^k Q(z) w(z) dz = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Observe que os polinômios ortogonais $P_n(z)$ e $P_{n+1}(z)$ são polinômios quase-ortogonais de ordem $n+1$.

Teorema 2.13. (i) $Q(z)$ é um polinômio quase-ortogonal de ordem $n+1$ se, e somente se existem α e β constantes, ambas não nulas, tais que

$$Q(z) = \alpha P_{n+1}(z) + \beta P_n(z).$$

(ii) Para cada número z_0 , existe um polinômio quase ortogonal de ordem $n+1$, $Q(z)$, tal que $Q(z_0) = 0$. O polinômio $Q(z)$ é unicamente determinado a menos de um fator arbitrário não nulo, e seu grau é $n+1$ se, e somente se, $P_n(z_0) \neq 0$.

A demonstração do teorema anterior encontra-se em [8].

Teorema 2.14. Os zeros dos polinômios quase-ortogonais reais são todos reais e simples. No máximo um deles encontra-se fora do intervalo de ortogonalidade (a, b) .

Demonstração: De fato, note que se $Q(z)$ é um polinômio ortogonal, não há nada de novo para provar. Assim, vamos considerar $Q(z) = \alpha P_{n+1}(z) + \beta P_n(z)$, onde α e β são números reais diferentes de zero.

Seja $z_{n+1,k}$ zero do polinômio $P_{n+1}(z)$, onde $k = 1, \dots, n+1$. Observe que, como $Q(z) = \alpha P_{n+1}(z) + \beta P_n(z)$, então $Q(z_{n+1,i}) = \beta P_n(z_{n+1,i})$. Pelo Teorema 2.12, o sinal de $Q(z)$ nos pontos $z_{n,i}$, $i = 1, \dots, n+1$, se alterna. Em outras palavras, $Q(z)$ tem n zeros reais que separam os $n+1$ zeros de $P_{n+1}(z)$, ou seja, n zeros de tais polinômios encontram-se entrelaçados e no intervalo de ortogonalidade. ■

Os polinômios quase-ortogonais podem ser utilizados para obter uma simples generalização das fórmulas de quadratura gaussianas, que serão apresentadas na próxima seção deste capítulo.

2.5 Fórmulas de quadratura

Esta seção traz como uma das aplicações dos polinômios ortogonais, as fórmulas de Quadratura Gaussianas, cujos nós são os zeros de polinômios ortogonais. Com essa escolha dos nós, a precisão da fórmula é a maior possível.

Vamos considerar integrais da forma

$$I(f) = \int_a^b f(z)w(z)dz,$$

onde $w(z)$ é uma função peso em $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Sejam $a \leq z_{n,1} < z_{n,2} < \dots < z_{n,n} \leq b$, n pontos distintos em $[a, b]$. A partir da fórmula de Lagrange, construímos o polinômio de interpolação de $f(z)$ sobre os n pontos distintos $z_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Assim,

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b \left[\sum_{k=1}^n \frac{\pi(z)}{(z - z_{n,k})\pi'(z_{n,k})} f(z_{n,k}) + R_{n-1}(z) \right] w(z)dz \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \left[\frac{1}{\pi'(z_{n,k})} \int_a^b \frac{\pi(z)}{z - z_{n,k}} w(z)dz \right] f(z_{n,k}) \right\} + \int_a^b R_{n-1}(z)w(z)dz. \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever

$$I(f) = \int_a^b f(z)w(z)dz = \sum_{k=1}^n W_{n,k} f(z_{n,k}) + E_n(f), \quad (2.16)$$

cujos pesos $W_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, são dados por

$$W_{n,k} = \frac{1}{\pi'(z_{n,k})} \int_a^b \frac{\pi(z)}{z - z_{n,k}} w(z)dz, \quad (2.17)$$

e o erro por

$$E_n(f) = \int_a^b R_{n-1}(z)w(z)dz.$$

Se o erro é nulo, ou seja, $E_n(f) = 0$, dizemos que a fórmula de quadratura é exata para f .

2.5.1 Fórmulas de quadratura gaussianas

Nesta subseção, serão introduzidas fórmulas de quadratura nas quais não somente os pesos na fórmula genérica (2.16) poderão ser escolhidos, mas também as abcissas $z_{n,k}$ serão determinadas de tal forma que a quadratura resultante seja mais precisa. Esta ideia foi inicialmente introduzida por Johann Carl Friedrich Gauss³. Por esta razão, estas fórmulas são conhecidas como quadraturas gaussianas. Na sua formulação original, Gauss utilizou frações contínuas na obtenção de suas fórmulas. Em 1826, Jacobi derivou novamente as fórmulas gaussianas, agora utilizando polinômios ortogonais.

A ideia básica consiste em escrever a fórmula geral de quadratura (2.16) da seguinte maneira:

$$\int_a^b F(z)dz = \int_a^b W(z)f(z)dz \approx \sum_{k=1}^n W_{n,k}f(z_{n,k}),$$

onde o integrando é escrito da forma $F(z) = W(z)f(z)$, sendo que $W(z)$ passa a desempenhar o papel de função-peso na fórmula gaussiana. A escolha da forma de $W(z)$ pode ser feita de tal modo que o integrando restante, $f(z)$, resulte ser o mais suave possível, ou de forma a salientar possíveis singularidades em $F(z)$. Isto é necessário para que $f(z)$ possa ser satisfatoriamente aproximada por um polinômio.

Teorema 2.15. *A regra de quadratura (2.16), com pesos dados por (2.17), é exata para polinômios de grau no máximo $2n - 1$ se, e somente se,*

(i) *é interpolatória;*

(ii) *$\pi(z)$ é ortogonal em (a, b) , em relação à função peso $w(z)$, a todo polinômio de grau menor que n .*

Definição 2.12. *As fórmulas de quadratura com n pontos que têm precisão $2n - 1$ são conhecidas como fórmulas de quadratura gaussianas.*

³Johann Carl Friedrich Gauss (Braunschweig, 30 de Abril de 1777 - Göttingen, 23 de Fevereiro de 1855), foi um matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésia, geofísica, eletroestática, astronomia e óptica. Alguns referem-se a ele como “o príncipe da matemática”.

2.5.1.1 Fórmula de quadratura de Gauss-Legendre

A seguir, apresentaremos um dos exemplos de fórmulas de quadratura que podem ser encontrados com maiores detalhes em [2].

Vamos considerar a fórmula de quadratura dada por

$$\int_{-1}^1 f(z) dz = \sum_{k=1}^n w_{n,k} f(z_{n,k}) + E_n(f),$$

onde $z_{n,k}$ são os zeros do polinômio de Legendre $P_n(z)$, os pesos podem ser dados por

$$w_{n,k} = \frac{2}{(1 - z_{n,k}^2)[P'_n(z_{n,k})]^2}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.18)$$

e o erro de truncamento é

$$E_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1.$$

Sabemos que os polinômios de Legendre $P_n(z)$, definidos em (2.15), são ortogonais em relação à função peso $w(z) = 1$ no intervalo $[-1, 1]$.

Logo, para a construção das fórmulas de quadratura gaussianas para o caso acima, devemos utilizar os zeros desses polinômios como nós e calcular os pesos a partir dos polinômios de Legendre.

Como exemplo, vamos tomar $n = 3$ e, assim, calcular os pesos e os nós da fórmula de quadratura anterior. Sabemos que os nós $z_{3,1}$, $z_{3,2}$ e $z_{3,3}$ são os zeros do polinômio $P_3(z)$. Da relação de recorrência

$$P_{n+1}(z) = \frac{2n+1}{n+1} z P_n(z) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(z), \quad n \geq 1,$$

obtemos

$$P_2(z) = \frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad P_3(z) = \frac{5}{2}z^3 - \frac{3}{2}z.$$

Logo,

$$z_{3,1} = -\frac{\sqrt{15}}{5}, \quad z_{3,2} = 0, \quad \text{e} \quad z_{3,3} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

De (2.18) segue que os pesos são dados por

$$w_{3,k} = \frac{2}{(1 - z_{3,k}^2)[P'_3(z_{3,k})]^2}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Como $P'_3(z) = \frac{15}{2}z^2 - \frac{3}{2}$, obtemos

$$w_{3,1} = \frac{5}{9}, \quad w_{3,2} = \frac{8}{9} \quad \text{e} \quad w_{3,3} = \frac{5}{9}.$$

Portanto, a fórmula de quadratura

$$\int_{-1}^1 f(z)dz = \frac{5}{9}f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + E_3(f)$$

é exata para polinômios de grau no máximo 5, ou seja, $E_3(f) = 0$ se $f(z) \in \mathbb{P}_5$.

Zeros de Polinômios Perturbados

Este capítulo traz uma análise de um resultado relacionado a zeros de polinômios perturbados, publicado recentemente em [3]. A origem deste resultado provém de um problema que encontra-se em aberto em [15], o qual surgiu a partir de investigações relacionadas aos polinômios característicos associados aos métodos (K, L) de Brown.

Neste contexto, o principal objetivo deste capítulo é apresentar uma análise do resultado citado anteriormente, utilizando alguns dos principais resultados clássicos sobre zeros de polinômios estudados no Capítulo 2. Para esta análise, serão apresentados exemplos numéricos à partir dos métodos (K, L) de Brown e dos métodos de Radau (Radau I e Radau II).

3.1 Zeros de Polinômios Perturbados

Nesta seção apresentamos um dos principais resultados estudados neste trabalho e sua respectiva demonstração. Tal demonstração requer, além dos resultados clássicos sobre zeros de polinômios e da Conjectura 1.1 enunciada no Capítulo 1, o resultado a seguir.

Lema 3.1. *Seja a sequência $\{b_k^{(j)} : j = 1, 2, \dots, n-1; \ k = 0, 1, \dots, n-j\}$ definida por*

$$b_k^{(j+1)} = b_0^{(j)} b_k^{(j)} - b_{n-j}^{(j)} b_{n-j-k}^{(j)}, \quad b_k^{(0)} = b_k, \quad (3.1)$$

onde b_k , $k = 0, 1, \dots, n$, é uma sequência de números reais. Se

$$b_1^{(2)} > b_2^{(2)} > \dots > b_{n-2}^{(2)} > 0, \quad b_k^{(2)} < r b_{k-1}^{(2)}, \quad k = 2, 3, \dots, n-2, \quad e \quad b_0^{(2)} > r b_1^{(2)},$$

com $r \in (0, 1)$. Então, para $j = 2, 3, \dots, n-1$, temos

$$b_0^{(j)} > rb_1^{(j)} > 0, \quad (3.2)$$

$$b_1^{(j)} > b_2^{(j)} > \dots > b_{n-j}^{(j)} > 0, \quad (3.3)$$

$$b_k^{(j)} < rb_{k-1}^{(j)}, \quad k = 2, 3, \dots, n-j. \quad (3.4)$$

Demonstração: Usaremos indução sobre j para a demonstração deste resultado. Primeiro observe que a partir das suposições do lema, a hipótese de indução é verdadeira para $j = 2$. Vamos supor que a afirmação seja verdadeira para todo $j = 2, 3, \dots, \nu$ e, assim, mostraremos a validade para $j = \nu + 1$.

Para $i = 1, 2, \dots, n - \nu - 2$, de (3.1) e da hipótese de indução,

$$\begin{aligned} b_i^{(\nu+1)} - b_{i+1}^{(\nu+1)} &= b_0^{(\nu)} b_i^{(\nu)} - b_{n-\nu}^{(\nu)} b_{n-\nu-i}^{(\nu)} - b_0^{(\nu)} b_{i+1}^{(\nu)} + b_{n-\nu}^{(\nu)} b_{n-\nu-i-1}^{(\nu)} \\ &= b_0^{(\nu)} \left(b_i^{(\nu)} - b_{i+1}^{(\nu)} \right) + b_{n-\nu}^{(\nu)} \left(b_{n-\nu-i-1}^{(\nu)} - b_{n-\nu-i}^{(\nu)} \right) > 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$b_i^{(\nu+1)} > b_{i+1}^{(\nu+1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n - \nu - 2. \quad (3.5)$$

Agora,

$$\begin{aligned} b_{n-(\nu+1)}^{(\nu+1)} &= b_0^{(\nu)} b_{n-(\nu+1)}^{(\nu)} - b_{n-\nu}^{(\nu)} b_1^{(\nu)} \\ &> rb_1^{(\nu)} b_{n-(\nu+1)}^{(\nu)} - b_{n-\nu}^{(\nu)} b_1^{(\nu)}, \quad (\text{usando (3.2)}) \\ &> b_1^{(\nu)} \left(rb_{n-(\nu+1)}^{(\nu)} - b_{n-\nu}^{(\nu)} \right) > 0 \quad (\text{usando (3.4)}). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Então, de (3.5) e (3.6),

$$b_1^{(\nu+1)} > b_2^{(\nu+1)} > \dots > b_{n-(\nu+1)}^{(\nu+1)} > 0.$$

De (3.1) e da hipótese de indução, segue que

$$\begin{aligned} b_0^{(\nu+1)} - rb_1^{(\nu+1)} &= (b_0^{(\nu)})^2 - (b_{n-\nu}^{(\nu)})^2 - r(b_0^{(\nu)} b_1^{(\nu)} - b_{n-\nu}^{(\nu)} b_{n-\nu-1}^{(\nu)}) \\ &= b_0^{(\nu)} (b_0^{(\nu)} - rb_1^{(\nu)}) + b_{n-\nu}^{(\nu)} (rb_{n-\nu-1}^{(\nu)} - b_{n-\nu}^{(\nu)}) > 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

Assim, $b_0^{(\nu+1)} > rb_1^{(\nu+1)}$ e, como $b_1^{(\nu+1)} > 0$, temos

$$b_0^{(\nu+1)} > 0.$$

Entretanto, de (3.1), $b_0^{(\nu+1)} = (b_0^{(\nu)})^2 - (b_{n-\nu}^{(\nu+1)})^2$. Logo, $(b_0^{(\nu)})^2 - (b_{n-\nu}^{(\nu)})^2 > 0$.

Finalmente, de (3.1) e da hipótese de indução,

$$\begin{aligned}
b_i^{(\nu+1)} - rb_{i-1}^{(\nu+1)} &= b_0^{(\nu)}b_i^{(\nu)} - b_{n-\nu}^{(\nu)}b_{n-i-\nu}^{(\nu)} - r \left(b_0^{(\nu)}b_{i-1}^{(\nu)} - b_{n-\nu}^{(\nu)}b_{n-i-\nu+1}^{(\nu)} \right) \\
&= b_0^{(\nu)} \left(b_i^{(\nu)} - rb_{i-1}^{(\nu)} \right) + b_{n-\nu}^{(\nu)} \left(rb_{n-i-\nu+1}^{(\nu)} - b_{n-i-\nu}^{(\nu)} \right) \\
&< b_0^{(\nu)} \left(b_i^{(\nu)} - rb_{i-1}^{(\nu)} \right) + b_{n-\nu}^{(\nu)} \left(rb_{n-i-\nu}^{(\nu)} - b_{n-i-\nu}^{(\nu)} \right) \\
&= b_0^{(\nu)} \left(b_i^{(\nu)} - rb_{i-1}^{(\nu)} \right) + (r-1)b_{n-\nu}^{(\nu)}b_{n-i-\nu}^{(\nu)} < 0,
\end{aligned}$$

com $i = 2, 3, \dots, n - (\nu + 1)$. Além disso, de (3.7) segue que $b_0^{(\nu+1)} > rb_1^{(\nu+1)}$ para $i = 1, 2, \dots, n - (\nu + 1)$, o que completa a demonstração. ■

Um dos principais resultados estudados neste trabalho encontra-se enunciado e demonstrado a seguir.

Teorema 3.1. *Seja $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$, $a_i \in \mathbb{R}$, um polinômio cujos zeros encontram-se no disco unitário e os coeficientes satisfazem*

$$0 < a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} > a_n, \quad a_n > 0, \quad (3.8)$$

$$a_i < ra_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-2, \quad e \quad a_n > ra_{n-1}, \quad (3.9)$$

onde $r \in \mathbb{R}$, $0 < r < 1$. Então, o polinômio $S(z) = P(z) + \gamma z^n$, $\gamma > 0$, tem todos os seus zeros no interior do disco unitário.

Demonstração: Inicialmente, definiremos o polinômio $S(z)$ como

$$S(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0,$$

onde $b_n = a_n + \gamma$, $b_i = a_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, e a sequência de polinômios $S_j(z)$ como

$$S_j(z) = b_{n-j}^{(j)} z^{n-j} + b_{n-j-1}^{(j)} z^{n-j-1} + \dots + b_0^{(j)}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

com os coeficientes $b_k^{(j)}$, $k = 0, 1, \dots, n-j$, dados por

$$b_k^{(j+1)} = b_0^{(j)} b_k^{(j)} - b_{n-j}^{(j)} b_{n-j-k}^{(j)} \quad (3.10)$$

e

$$S_0(z) = S(z).$$

Note que, uma vez que os zeros de $P(z)$ encontram-se no disco unitário, do Lema 2.1 segue que $a_0 \leq a_n$. Consequentemente, como $0 < a_0$ e $a_0 = b_0$, temos $0 < b_0 \leq a_n < a_n + \gamma = b_n$. Deste modo, o Teorema 2.9 pode ser aplicado para concluir que os zeros de $S(z)$ estão no interior do disco unitário se, e somente se os zeros de $S_1^*(z)$ também estão.

A ideia desta demonstração é aplicar o Teorema 2.9 de maneira recursiva para mostrar que os zeros de $\Delta S(z) := S_1^*(z)$ estão no interior do disco unitário se, e somente se, os zeros de $S_2^*(z)$ também estão, e assim por diante até obtermos os polinômios

$$S_{n-1}^*(z) = b_1^{(n-1)} + b_0^{(n-1)}z,$$

para os quais podemos determinar os zeros e mostrar que estão localizados em $|z| < 1$.

Com este propósito, vamos dividir a demonstração em três partes:

1. Primeiro temos que mostrar, em cada etapa, que o polinômio que estamos trabalhando está relacionado a sequência definida por (2.6), já que, no Teorema 2.9, os zeros de $S(z)$ estão no interior do disco unitário se, e somente se, os zeros de $Q(z) = S_1^*(z)$ também estão. Assim, para aplicar o Teorema 2.9, devemos mostrar que o polinômio $\Delta Q^*(z)$ está relacionado à sequência (2.6). Mas, do Lema 2.2, $\Delta Q^*(z) = -S_2(z)$. Deste modo, esse polinômio possui os mesmos zeros que $S_2(z)$. Isto nos leva novamente à sequência (2.6) e o mesmo raciocínio pode ser utilizado.
2. Em seguida, temos que provar que, em cada passo do raciocínio seguinte, os coeficientes do polinômio satisfazem as hipóteses do Teorema 2.9, ou seja, precisamos mostrar que $|b_{n-j}^{(j)}| < |b_0^{(j)}|$.
3. Finalmente, no terceiro passo da demonstração, mostraremos que a aplicação sucessiva do Teorema 2.9 sempre gera um caso onde um polinômio não-nulo de primeiro grau $S_{n-1}^*(z) = b_1^{(n-1)} + b_0^{(n-1)}z$ é obtido. Será mostrado que os zeros desses polinômios estão no interior do disco unitário. Observamos que o mesmo argumento pode ser utilizado em todas as etapas desta demonstração até o primeiro grau, pois em cada fase, obtemos um polinômio não-nulo $S_j(z)$, conforme será demonstrado. Por outro lado, pelo Lema 2.4, segue que os zeros de $S(z)$ estão estritamente inseridos no interior do disco unitário, como apresentado no teorema.

Os passos dois e três, apresentados anteriormente, serão demonstrados a seguir. No entanto, iniciamos apresentando a prova de que $|b_{n-j}^{(j)}| < |b_0^{(j)}|$. De fato, a partir das hipóteses (3.8) e (3.10) para $j = 1$, facilmente verifica-se que

$$b_1^{(1)} < b_2^{(1)} < \dots < b_{n-1}^{(1)}. \quad (3.11)$$

Da definição de b_k , dada pelas igualdades (3.9) e (3.10), tem-se

$$\begin{aligned} b_{n-1}^{(1)} &= b_0 b_{n-1} - (a_n + \gamma) b_1 \\ &< r b_1 b_{n-1} - (a_n + \gamma) b_1 \\ &= b_1 (r b_{n-1} - a_n) - \gamma b_1 < 0. \end{aligned}$$

Então, de (3.11) segue que $b_k^{(1)} < 0$, para $k = 1, 2, \dots, n-1$, e, portanto,

$$|b_1^{(1)}| > |b_2^{(1)}| > \dots > |b_{n-1}^{(1)}|.$$

Agora, provaremos que os coeficientes de $S_1(z)$ satisfazem

$$|b_k^{(1)}| < r |b_{k-1}^{(1)}|, \text{ para } k = 2, 3, \dots, n-1 \text{ e } |b_0^{(1)}| > r |b_1^{(1)}|.$$

De fato, de (3.9) e (3.10),

$$\begin{aligned} b_0^{(1)} - r b_1^{(1)} &= b_0^2 - b_n^2 - r(b_0 b_1 - b_n b_{n-1}) \\ &= b_0(b_0 - r b_1) + b_n(r b_{n-1} - b_n) \\ &= a_0(a_0 - r a_1) + (a_n + \gamma)(r a_{n-1} - a_n) - \gamma(a_n + \gamma) < 0. \end{aligned}$$

Então, $b_0^{(1)} < r b_1^{(1)}$. Como $b_1^{(1)} < 0$ e $r > 0$, obtemos $b_0^{(1)} < 0$ e

$$|b_0^{(1)}| > r |b_1^{(1)}|. \quad (3.12)$$

Agora, para $k = 2, 3, \dots, n-1$ e $0 < r < 1$,

$$\begin{aligned} b_k^{(1)} - r b_{k-1}^{(1)} &= b_0 b_k - b_n b_{n-k} - r(b_0 b_{k-1} - b_n b_{n-k+1}) \\ &= b_0(b_k - r b_{k-1}) + b_n(r b_{n-k+1} - b_{n-k}). \end{aligned}$$

Observe que para $0 < r < 1$,

$$b_k - r b_{k-1} > \frac{1}{r} b_{k-1} - r b_{k-1} = \frac{1-r^2}{r} b_{k-1} > 0.$$

Então, $b_k^{(1)} - r b_{k-1}^{(1)} > 0$, para $k = 2, 3, \dots, n-1$ e $0 < r < 1$. Portanto, como

$$b_1^{(1)} < b_2^{(1)} < \dots < b_{n-1}^{(1)} < 0,$$

para $k = 2, 3, \dots, n-1$, temos

$$|b_k^{(1)}| < r|b_{k-1}^{(1)}|. \quad (3.13)$$

De (3.10) e (3.11), deduzimos facilmente que

$$b_1^{(2)} > b_2^{(2)} > \dots > b_{n-2}^{(2)}.$$

Agora, de (3.10), usando o fato de que $b_k^{(1)} < 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, e de (3.12), segue que

$$\begin{aligned} b_{n-2}^{(2)} &= b_0^{(1)}b_{n-2}^{(1)} - b_{n-1}^{(1)}b_1^{(1)} = |b_0^{(1)}||b_{n-2}^{(1)}| - |b_{n-1}^{(1)}||b_1^{(1)}| \\ &> r|b_1^{(1)}||b_{n-2}^{(1)}| - |b_{n-1}^{(1)}||b_1^{(1)}| = |b_1^{(1)}|(r|b_{n-2}^{(1)}| - |b_{n-1}^{(1)}|) > 0 \quad (\text{usando (3.13)}). \end{aligned}$$

Consequentemente, $b_{n-2}^{(2)} > 0$ e, de (3.1), $b_k^{(2)} > 0$ para $k = 1, 2, \dots, n-2$. Isto é,

$$b_1^{(2)} > b_2^{(2)} > \dots > b_{n-2}^{(2)} > 0.$$

Agora, precisamos mostrar que os coeficientes de $S_2(z)$ satisfazem

$$\begin{aligned} b_k^{(2)} &< rb_{k-1}^{(2)}, \quad \text{para } k = 2, 3, \dots, n-2, \\ b_0^{(2)} &> rb_1^{(2)}. \end{aligned}$$

De fato, de (3.10), (3.12), (3.13) e $b_i^{(1)} < 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, obtemos

$$\begin{aligned} b_0^{(2)} - rb_1^{(2)} &= (b_0^{(1)})^2 - (b_{n-1}^{(1)})^2 - r(b_0^{(1)}b_1^{(1)} - b_{n-2}^{(1)}b_{n-1}^{(1)}) \\ &= b_0^{(1)}(b_0^{(1)} - rb_1^{(1)}) + b_{n-1}^{(1)}(rb_{n-2}^{(1)} - b_{n-1}^{(1)}) > 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$b_0^{(2)} > rb_1^{(2)} \quad \text{e, como } b_1^{(2)} > 0, \quad \text{segue que } b_0^{(2)} > 0.$$

Visto que

$$b_0^{(2)} = (b_0^{(1)})^2 - (b_{n-1}^{(1)})^2 > 0, \quad \text{temos } |b_0^{(1)}| > |b_{n-1}^{(1)}|.$$

Finalmente, para $k = 2, 3, \dots, n-2$, temos

$$\begin{aligned} b_k^{(2)} - rb_{k-1}^{(2)} &= b_0^{(1)}b_k^{(1)} - b_{n-1}^{(1)}b_{n-k-1}^{(1)} - r(b_0^{(1)}b_{k-1}^{(1)} - b_{n-1}^{(1)}b_{n-k}^{(1)}) \\ &= b_0^{(1)}(b_k^{(1)} - rb_{k-1}^{(1)}) + b_{n-1}^{(1)}(rb_{n-k}^{(1)} - b_{n-k-1}^{(1)}) < 0. \end{aligned}$$

Em resumo, provamos que

$$\begin{aligned} b_1^{(2)} &> b_2^{(2)} > \dots > b_{n-2}^{(2)} > 0, \\ b_k^{(2)} &< r b_{k-1}^{(2)}, \quad k = 2, 3, \dots, n-j, \quad j = 2, 3, \dots, n-1, \quad \text{e} \\ b_0^{(2)} &> r b_1^{(2)}, \quad j = 2, 3, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Agora, utilizamos o Lema 3.1 para mostrar que

$$\begin{aligned} b_1^{(j)} &> b_2^{(j)} > \dots > b_{n-j}^{(j)} > 0, \quad j = 2, 3, \dots, n-1, \\ b_k^{(j)} &< r b_{k-1}^{(j)}, \quad k = 2, 3, \dots, n-j, \quad j = 2, 3, \dots, n-1, \quad \text{e} \\ b_0^{(j)} &> r b_1^{(j)}, \quad j = 2, 3, \dots, n-1, \end{aligned}$$

e isto completa a segunda parte da demonstração do Teorema 3.1.

Para finalizar esta demonstração, procederemos como segue.

Primeiro, observamos que, na segunda etapa da demonstração, provamos que os coeficientes b_k , $k = 0, 1, \dots, n-j$, são não nulos para todo j . De fato, ou os coeficientes b_k são números positivos ou negativos, de modo que $S_j(z)$ é um polinômio não nulo para todo j . Do Lema 2.4, segue que os zeros de $S(z)$ estão no interior do disco unitário se, e somente se, o zero do polinômio de primeiro grau $S_{n-1}^*(z) = b_1^{(n-1)} + b_0^{(n-1)}z$ também encontra-se localizado neste disco.

De fato, de (3.2) e (3.3), $b_1^{(n-1)} > 0$ e $b_0^{(n-1)} > 0$. De (3.10), temos

$$0 < b_0^{(j)} = (b_0^{(j-1)})^2 - (b_{n-(j-1)}^{(j-1)})^2 = (b_0^{(j-1)} - b_{n-(j-1)}^{(j-1)})(b_0^{(j-1)} + b_{n-(j-1)}^{(j-1)}), \quad j = 2, 3, \dots, n-1,$$

com

$$b_0^{(j-1)} - b_{n-(j-1)}^{(j-1)} > 0 \quad \text{e} \quad b_0^{(j-1)} + b_{n-(j-1)}^{(j-1)} > 0. \quad (3.14)$$

Note que

$$b_0^{(n-1)} = (b_0^{(n-2)})^2 - (b_2^{(n-2)})^2 = (b_0^{(n-2)} - b_2^{(n-2)})(b_0^{(n-2)} + b_2^{(n-2)})$$

e

$$b_1^{(n-1)} = b_0^{(n-2)}b_1^{(n-2)} - b_1^{(n-2)}b_2^{(n-2)} = b_1^{(n-2)}(b_0^{(n-2)} - b_2^{(n-2)}),$$

de modo que

$$b_0^{(n-1)} - b_1^{(n-1)} = (b_0^{(n-2)} - b_2^{(n-2)})(b_0^{(n-2)} - b_1^{(n-2)} + b_2^{(n-2)}). \quad (3.15)$$

Agora, vamos provar por indução sobre k que

$$\begin{aligned} b_0^{(n-1)} - b_1^{(n-1)} &= (b_0^{(n-2)} - b_2^{(n-2)})(b_0^{(n-3)} + b_3^{(n-3)})(b_0^{(n-4)} - b_4^{(n-4)}) \\ &\quad \times \dots (b_0^{(n-k)} + (-1)^{k+1} b_k^{(n-k)}) \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i b_i^{(n-k)} \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Note que (3.15) representa a hipótese de indução para $k = 2$. Primeiro vamos supor que a hipótese é verdadeira para $k = m$. Em seguida, mostraremos a validade dessa hipótese para $k = m + 1$.

Expandindo o último parenteses do lado direito da igualdade (3.16) para $k = m$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m (-1)^i b_i^{(n-m)} &= \sum_{i=0}^m (-1)^i [b_0^{(n-m-1)} b_i^{(n-m-1)} - b_{m+1}^{(n-m-1)} b_{m+1-i}^{(n-m-1)}] \\ &= \sum_{i=0}^m (-1)^i b_0^{(n-m-1)} b_i^{(n-m-1)} + \sum_{i=0}^m (-1)^{i+1} b_{m+1}^{(n-m-1)} b_{m+1-i}^{(n-m-1)} \\ &= b_0^{(n-m-1)} \sum_{i=0}^m (-1)^i b_i^{(n-m-1)} + b_{m+1}^{(n-m-1)} \sum_{i=0}^m (-1)^{m-i+1} b_{i+1}^{(n-m-1)}, \end{aligned}$$

onde a ordem do somatório foi invertida no segundo termo. Agora,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m (-1)^i b_i^{(n-m)} &= (b_0^{(n-m-1)})^2 + b_0^{(n-m-1)} \sum_{i=1}^m (-1)^i b_i^{(n-m-1)} \\ &\quad + b_{m+1}^{(n-m-1)} \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i+1} b_{i+1}^{(n-m-1)} - (b_{m+1}^{(n-m-1)})^2 \\ &= (b_0^{(n-m-1)} - b_{m+1}^{(n-m-1)})(b_0^{(n-m-1)} + b_{m+1}^{(n-m-1)}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m (-1)^i b_i^{(n-m-1)} (b_0^{(n-m-1)} + (-1)^m b_{m+1}^{(n-m-1)}) \\ &= \begin{cases} (b_0^{(n-m-1)} + b_{m+1}^{(n-m-1)}) \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i b_i^{(n-m-1)}, & m \text{ par}, \\ (b_0^{(n-m-1)} - b_{m+1}^{(n-m-1)}) \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i b_i^{(n-m-1)}, & m \text{ ímpar}, \end{cases} \end{aligned}$$

o que completa a indução.

Tomando $k = n$ em (3.16), obtemos

$$\begin{aligned} b_0^{(n-1)} - b_1^{(n-1)} &= (b_0^{(n-2)} - b_2^{(n-2)})(b_0^{(n-3)} + b_3^{(n-3)}) \dots (b_0^{(1)} + (-1)^n b_{n-1}^{(1)}) \\ &\quad \times (b_0 + (-1)^{n+1} b_n)((-1)^n \gamma + P(-1)). \end{aligned}$$

De (3.14), o sinal de $b_0^{(n-1)} - b_1^{(n-1)}$ depende do sinal do termo

$$(b_0^{(1)} + (-1)^n b_{n-1}^{(1)})(b_0 + (-1)^{n+1} b_n)((-1)^n \gamma + P(-1)),$$

uma vez que os demais termos são positivos.

Agora, como $P(z)$ tem todos os seus zeros em $|z| \leq 1$, então $P(-1) \geq 0$ para n par e $P(-1) \leq 0$ para n ímpar. Assim, para n par, temos

$$b_0^{(1)} + (-1)^n b_{n-1}^{(1)} < 0, \quad b_0 + (-1)^{n+1} b_n < 0 \quad \text{e} \quad (-1)^n \gamma + P(-1) > 0,$$

e, para n ímpar,

$$b_0^{(1)} + (-1)^n b_{n-1}^{(1)} < 0, \quad b_0 + (-1)^{n+1} b_n > 0 \quad \text{e} \quad (-1)^n \gamma + P(-1) < 0.$$

Consequentemente,

$$b_0^{(n-1)} - b_1^{(n-1)} > 0$$

e o zero de $S_1^*(z)$ é dado por

$$z_1 = -\frac{b_1^{(n-1)}}{b_0^{(n-1)}},$$

que encontra-se localizado no interior do disco unitário. Isto completa a prova de que $S(z)$ tem todos os seus zeros no interior do disco unitário. ■

3.2 Polinômios característicos relacionados a algumas classes de métodos numéricos

Esta seção tem por finalidade mostrar que alguns polinômios característicos relacionados aos métodos (K, L) de Brown e à família dos métodos de Radau (Radau I e Radau II), que são métodos numéricos para a solução de equações diferenciais ordinárias, satisfazem as condições do Teorema 3.1.

Portanto, no decorrer desta seção, além de um breve estudo teórico, analisaremos o comportamento dos zeros de alguns desses polinômios a partir do principal resultado estudado neste capítulo.

3.2.1 Métodos (K, L) de Brown

Os métodos (K, L) de Brown, introduzidos em [5], formam uma classe de métodos multiderivadas de passo múltiplo para a solução de equações diferenciais ordinárias. Foram introduzidos como métodos com menor número de passos e melhor precisão para a solução de problemas. Tais métodos possuem boas propriedades de estabilidade, como grandes regiões de estabilidade absoluta.

Os métodos (K, L) de Brown são definidos por

$$\sum_{i=0}^K \alpha_i y_{n+i} = \sum_{j=1}^L h^j \beta_j f_{n+K}^{(j-1)},$$

onde as constantes α_i e β_j são escolhidas de modo a obter a máxima precisão do método, h é o tamanho do passo, K é a quantidade de passos e L está relacionado à ordem da derivada. Mais detalhes a respeito dos métodos (K, L) de Brown encontram-se em [14]. A construção explícita desta classe de métodos pode ser encontrada em [9].

Os coeficientes α_i e β_j são dados por

$$\begin{aligned} \alpha_i &= (-1)^{K-i} \binom{K}{i} (K-i)^{-L}, \quad i = 0, 1, \dots, K-1, \\ \alpha_K &= -(\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{K-1}), \\ \beta_j &= \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{i=0}^{K-1} (-1)^{K-i} \binom{K}{i} (K-i)^{j-L}, \quad j = 1, 2, \dots, L. \end{aligned}$$

Quando $L = 1$, a classe de métodos $(K, 1)$ de Brown coincide com os conhecidos métodos BDF (Backward Difference Formulae).

Um resultado interessante, que pode ser encontrado em [14], mostra que existe uma relação entre A_0 -estabilidade dos métodos (K, L) de Brown e o polinômio

$$S(z) = P(z) + \gamma z^n,$$

sendo γ um parâmetro real, variando de 0 a ∞ , e $P_0(z)$ o polinômio característico dos métodos (K, L) que fornece a zero-estabilidade.

Para maiores detalhes sobre o resultado a seguir, vide [14].

Teorema 3.2. *Os coeficientes do primeiro polinômio característico $P(z) = \sum_{i=0}^k \alpha_i z^i$, relacionado ao método (K, L) de Brown, satisfazem:*

(i) Para $k = 1, 2, \dots, K_L$, temos $0 < |\alpha_0| \leq |\alpha_1| \leq \dots \leq |\alpha_{K-1}|$ e $|\alpha_k| < |\alpha_{k-1}|$, onde

$$K_L = \min \left\{ 2^{L+1} + 1, \frac{3^{L+1}}{2^L} + 2, \dots, \frac{(L+1)^{L+1}}{L^L} + L \right\}.$$

(ii) Para $k = 2, 3, \dots, K_L^*$, temos $2|\alpha_j| \leq |\alpha_{j+1}|$, $j = 0, 1, \dots, k-2$, e $2|\alpha_k| > |\alpha_{k-1}|$, onde

$$K_L^* = \min \left\{ 2^L + 1, \frac{3^{L+1}}{2^{L+1}} + 2, \dots, \frac{(L+1)^{L+1}}{2L^L} + L \right\}.$$

Como $K_L > K_L^*$, a primeira condição do Teorema 3.2 é satisfeita para cada $k = 1, 2, \dots, K_L^*$.

3.2.1.1 Coeficientes dos polinômios característicos dos métodos (K, L) de Brown

As Tabelas 3.1 e 3.2 apresentam, respectivamente, os coeficientes de alguns polinômios característicos relacionados aos métodos (K, L) de Brown.

Coeficientes	$K = 1$	$K = 2$	$K = 3$	$K = 4$	$K = 5$
α_0	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{5}$
α_1	1	-2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$
α_2		$\frac{3}{2}$	-3	3	$-\frac{10}{3}$
α_3			$\frac{11}{6}$	-4	5
α_4				$\frac{25}{12}$	-5
α_5					$\frac{137}{60}$

Tabela 3.1: Coeficientes dos polinômios relacionados aos métodos (K, L) de Brown, com $L = 1$ e $1 \leq K \leq 5$.

Coeficientes	$K = 1$	$K = 2$	$K = 3$
α_0	-1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{9}$
α_1	1	-2	$\frac{3}{4}$
α_2		$\frac{7}{4}$	-3
α_3			$\frac{85}{36}$

Tabela 3.2: Coeficientes dos polinômios relacionados aos métodos (K, L) de Brown, com $L = 2$ e $1 \leq K \leq 3$.

De acordo com a hipótese do Teorema 3.1, os coeficientes do polinômio $P(z)$ devem ser todos positivos. Deste modo, para os exemplos a seguir, será tomado o polinômio $P(-z)$ com o intuito de obtermos esta hipótese.

De fato, como visto no Capítulo 2, todo polinômio $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ pode ser escrito unicamente por $P(z) = a_n(z - z_1) \dots (z - z_n)$, onde $z_1, \dots, z_n$ são seus zeros.

Então,

$$\begin{aligned} P(-z) &= a_n(-z - z_1) \dots (-z - z_n) \\ &= a_n(-1)(z + z_1) \dots (-1)(z + z_n) \\ &= (-1)^n a_n(z + z_1) \dots (z + z_n). \end{aligned}$$

Observe que os zeros de $P(-z)$ são os opostos dos zeros de $P(z)$ e, como estamos interessados em analisar o comportamento de tais zeros em relação ao disco unitário, o sinal não será importante.

Para ilustrar o Teorema 3.1, serão apresentados a seguir dois exemplos de polinômios característicos relacionados aos métodos (K, L) de Brown, determinados pelos parâmetros $L = 1$, $K = 4$ no Exemplo 3.1 e $L = 2$, $K = 3$ no Exemplo 3.2.

Exemplo 3.1. O polinômio característico relacionado ao método (K, L) de Brown para $K = 4$ e $L = 1$ é dado por $W(z) = \frac{25}{12}z^4 - 4z^3 + 3z^2 - \frac{4}{3}z + \frac{1}{4}$. A partir da transformação $P(z) = W(-z)$, obtemos o polinômio $P(z) = \frac{25}{12}z^4 + 4z^3 + 3z^2 + \frac{4}{3}z + \frac{1}{4}$, cujos coeficientes satisfazem as hipóteses do Teorema 3.1 quando o termo real r pertence ao intervalo $(0.44, 0.52)$, e cujos zeros encontram-se em $|z| \leq 1$. Então, utilizando o Teorema 3.1 é possível concluir que o polinômio $S(z) = P(z) + \gamma z^4$, com $\gamma > 0$, possui seus zeros no interior do disco unitário, como é possível observar na figura a seguir.

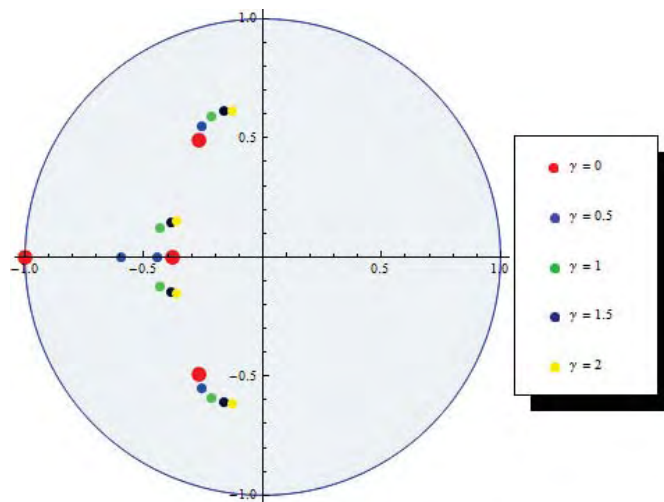


Figura 3.1: Localização dos zeros do polinômio $S(z) = P(z) + \gamma z^4$, $\gamma = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$.

Na Figura 3.1, os pontos vermelhos representam os zeros do polinômio $P(z)$, enquanto os demais pontos ilustram os zeros do polinômio perturbado $S(z) = P(z) + \gamma z^4$, com $\gamma = 0.5, 1, 1.5$ e $\gamma = 2$.

Exemplo 3.2. Considere o polinômio característico relacionado ao método (K, L) de Brown, com $K = 3$ e $L = 2$, $W(z) = \frac{85}{36}z^3 - 3z^2 + \frac{3}{4}z - \frac{1}{9}$. Com a transformação $P(z) = -W(-z)$, obtemos o polinômio $P(z) = \frac{85}{36}z^3 + 3z^2 + \frac{3}{4}z + \frac{1}{9}$. Note que as hipóteses do Teorema 3.1 são satisfeitas para $0.25 < r < 0.78$. Assim, os zeros do polinômio $S(z) = P(z) + \gamma z^3$ encontram-se em $|z| < 1$, como é possível observar na Figura 3.2.

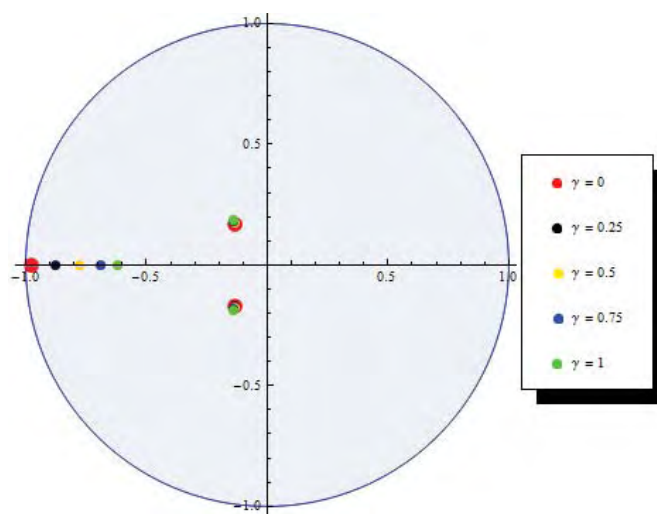


Figura 3.2: Localização dos zeros do polinômio $S(z) = P(z) + \gamma z^3$, $\gamma = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$.

A figura anterior ilustra a localização dos zeros do polinômio $P(z)$, representados pelos pontos em vermelho, que estão localizados em $|z| \leq 1$. Os demais pontos, ilustram os zeros do polinômio $S(z) = P(z) + \gamma z^3$, onde $\gamma = 0.25, 0.5, 0.75$ e $\gamma = 1$, o que condiz com o Teorema 3.1.

3.2.2 Métodos de Radau I e Radau II

A fórmula de quadratura de Radau, desenvolvida por *Jean Charles Rodolphe Radau*¹, foi utilizada no desenvolvimento de novas metodologias de integração numérica baseadas na teoria dos métodos de Runge-Kutta implícitos (para maiores detalhes, vide [6]).

¹Jean Charles Rodolphe Radau (22 de janeiro de 1835 - 21 de dezembro de 1911) foi um astrônomo e matemático. Radau nasceu em Angerburg, Província da Prússia, e depois de estudar em Königsberg e trabalhando no problema dos três corpos, se mudou para Paris para colaborar com outros cientistas. Em 1871 foi dada a Ph.D. em homenagem ao seu trabalho em matemática.

Esta subseção tem por principal objetivo, além de apresentar expressões gerais para os coeficientes dos polinômios relacionados aos métodos de Radau I e Radau II, analisar algumas propriedades desses polinômios, cujos coeficientes são obtidos a partir dos polinômios ortogonais de Legendre, apresentados no Capítulo 2.

Na subseção 2.4.3 do Capítulo 2, definimos os polinômios de Legendre, denotados por $P_n(z)$. Agora, vamos considerar o polinômio de grau n , $\bar{P}_n(z)$, relacionado a $P_n(z)$, definido no intervalo $[0, 1]$ por $\bar{P}_n(z) = P_n(2z - 1)$.

A seguir temos os cinco primeiros termos da sequência de polinômios $\bar{P}_n(z)$, $n = 0, 1, 2, 3, 4$, cujos gráficos encontram-se ilustrados na Figura 3.3.

$$\begin{aligned}\bar{P}_0(z) &= 1 \\ \bar{P}_1(z) &= 2z - 1 \\ \bar{P}_2(z) &= 6z^2 - 6z + 1 \\ \bar{P}_3(z) &= 20z^3 - 30z^2 + 12z - 1 \\ \bar{P}_4(z) &= 70z^4 - 140z^3 + 90z^2 - 20z + 1\end{aligned}$$

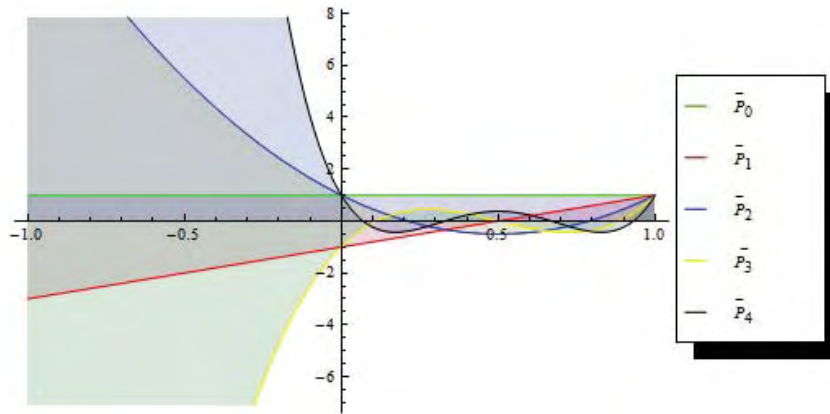


Figura 3.3: Polinômios $\bar{P}_n$, com $n = 0, 1, 2, \dots, 4$.

A ortogonalidade dos polinômios $\bar{P}_n(z)$ é dada pelo teorema a seguir, cuja demonstração encontra-se em [7].

Teorema 3.3. *A sequência de polinômios $\bar{P}_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, de grau n , para $n = 0, 1, 2, \dots$, satisfaz:*

$$\int_0^1 \bar{P}_n(z) \bar{P}_m(z) dz = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \frac{1}{2n+1}, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

Além disso, as seguintes propriedades são válidas:

- (i) $\bar{P}_n(1 - z) = (-1)^n \bar{P}_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \dots$;
- (ii) $\bar{P}_n(1) = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$;
- (iii) $\bar{P}_n(z) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} [(z^2 - z)^n]$, $n = 0, 1, 2, \dots$;
- (iv) $n\bar{P}_n(z) = (2z - 1)(2n - 1)\bar{P}_{n-1}(z) - (n - 1)\bar{P}_{n-2}(z)$, $n > 1$;
- (v) $\bar{P}_n(z)$ tem n zeros reais distintos no intervalo $[0, 1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Os métodos de Radau I e Radau II formam subclasses dos métodos de Runge-Kutta, cujos coeficientes são os nós das fórmulas de quadratura de Radau I e Radau II, respectivamente. No caso da fórmula de quadratura de Radau I, os coeficientes são os zeros dos polinômios $\bar{P}_n(z) + \bar{P}_{n-1}(z)$ e, no caso de Radau II, esses coeficientes são os zeros de $\bar{P}_n(z) - \bar{P}_{n-1}(z)$. Para maiores detalhes vide [7].

Teorema 3.4. *Sejam $c_1 < c_2 < \dots < c_n$ tomados como as abscissas das fórmulas de quadratura de Radau I e Radau II, respectivamente. Então,*

- (i) *Para a fórmula de Radau I, $c_1 = 0$.*
- (ii) *Para a fórmula de Radau II, $c_n = 1$.*

Ambas as fórmulas são exatas para polinômios de grau menor ou igual a $2n - 2$. Além disso, $c_i \in [0, 1]$, para $i = 1, 2, \dots, n$.

3.2.2.1 Determinação dos coeficientes

Uma expressão explícita para a sequência de polinômios $\bar{P}_n(z)$ é dada por

$$\begin{aligned} \bar{P}_n(z) &= (-1)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} (-z)^k \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} z^k. \end{aligned}$$

Desta forma, é possível determinar expressões gerais para os coeficientes dos polinômios que utilizaremos para exemplificar o Teorema 3.1.

1. Coeficientes dos polinômios relacionados aos métodos de Radau I

Considerando $H_n(z) = \bar{P}_n(z) + \bar{P}_{n-1}(z) = \sum_{j=0}^n h_{j,n} z^j$, $n = 1, \dots$ e $H_0(z) = 1$, determinaremos os coeficientes dos polinômios dessa sequência, que serão chamados de polinômios relacionados aos métodos de Radau I.

De $H_n(z) = \bar{P}_n(z) + \bar{P}_{n-1}(z)$, segue que

$$\begin{aligned}
H_n(z) &= (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} z^k \\
&\quad + (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \binom{n+k-1}{k} z^k \\
&= (-1)^n \left[(-1)^n \binom{n}{n} \binom{2n}{n} z^n + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} z^k \right] \\
&\quad + \left[(-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \binom{n+k-1}{k} z^k \right] \\
&= (-1)^{n-1} \left[(-1)^{n+1} \binom{2n}{n} z^n + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\binom{n-1}{k} \binom{n+k-1}{k} \right) \right. \\
&\quad \left. - \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \right) z^k \right].
\end{aligned}$$

Mas, visto que

$$\binom{n-1}{k} \binom{n+k-1}{k} - \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} = -\frac{2(2k-1)!}{k!(k-1)!} \binom{n+k-1}{n-k},$$

obtemos uma expressão explícita para o polinômio $H_n(z)$, dado por

$$H_n(z) = \binom{2n}{n} z^n + 2(-1)^n \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \frac{(2j-1)!}{j!(j-1)!} \binom{n+j-1}{n-j} z^j.$$

Portanto, as expressões gerais para os coeficientes dos polinômios relacionados aos métodos de Radau I são dadas por

$$\begin{aligned}
h_{n,n} &= \binom{2n}{n} = \frac{2n!}{(n!)^2}, \\
h_{j,n} &= 2(-1)^{n+j} \frac{(2j-1)!}{j!(j-1)!} \binom{n+j-1}{n-j}, \quad j = 1, \dots, n-1, \text{ e} \\
h_{0,n} &= 0.
\end{aligned}$$

A Tabela 3.3 mostra a sequência de polinômios $H_n(z)$ para $n = 1, 2, \dots, 9$.

n	Polinômio $H_n(z)$
1	$2z$
2	$6z^2 - 4z$
3	$20z^3 - 24z^2 + 6z$
4	$70z^4 - 120z^3 + 60z^2 - 8z$
5	$252z^5 - 560z^4 + 420z^3 - 120z^2 + 10z$
6	$924z^6 - 2520z^5 + 2520z^4 - 1120z^3 + 210z^2 - 12z$
7	$3432z^7 - 11088z^6 + 13860z^5 - 8400z^4 + 2520z^3 - 336z^2 + 14z$
8	$12870z^8 - 48048z^7 + 72072z^6 - 55440z^5 + 23100z^4 - 5040z^3 + 504z^2 - 16z$
9	$48620z^9 - 205920z^8 + 360360z^7 - 336336z^6 + 180180z^5 - 55440z^4 + 9240z^3 - 720z^2 + 18z$

Tabela 3.3: Polinômios relacionados aos métodos de Radau I para $n = 1, 2, \dots, 9$.

A seguir serão consideradas algumas condições adicionais sobre os coeficientes dos polinômios relacionados aos métodos de Radau I.

Seja $H_n(z) = \sum_{j=0}^n h_{j,n} z^j$, $n = 1, 2, \dots$, o polinômio cujos coeficientes são relacionados aos métodos de Radau I. Então,

(i) para $n = 1$ e $n = 2$, $|h_{n,n}| > |h_{n-1,n}|$;

(ii) para $n \geq 3$, $|h_{n,n}| < |h_{n-1,n}|$, pois

$$|h_{n,n}| - |h_{n-1,n}| = \frac{2(2n-2)!}{(n)!(n-1)!}(-n^2 + 3n - 1) < 0;$$

(iii) como, para $j = 1, \dots, n-2$,

$$|h_{j,n}| - |h_{j+1,n}| = \frac{2(n+j-1)!}{(j!)^2(j+1)(n-j)!}(-n^2 + 2j^2 + j),$$

para analisar o sinal de $|h_{j,n}| - |h_{j+1,n}|$, devemos analisar o sinal de $-n^2 + 2j^2 + j$.

Considerando $j = n - k$, $j = 1, \dots, n-2$, $k = 2, \dots, n-1$. Então,

$$-n^2 + 2j^2 + j = n^2 + (1 - 4k)n + 2k^2 - k.$$

Assim,

$$n^2 + (1 - 4k)n + 2k^2 - k = 0 \Leftrightarrow n = \frac{4k - 1 \pm \sqrt{8k^2 - 4k + 1}}{2}.$$

Portanto,

$$n_1 = \frac{4k - 1 - \sqrt{8k^2 - 4k + 1}}{2} > 0 \text{ e}$$

$$n_2 = \frac{4k - 1 + \sqrt{8k^2 - 4k + 1}}{2} > 0, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{R} \quad (\text{pois } 8k^2 - 4k + 1 > 0, \quad \forall k).$$

Deste modo, para n natural e $k = 2, \dots, n - 1$, temos

$$\begin{cases} |h_{n-k,n}| < |h_{n-k+1,n}|, & \text{se } n_1 < n < n_2, \\ |h_{n-k,n}| > |h_{n-k+1,n}|, & \text{se } n > n_2 \text{ ou } n < n_1. \end{cases}$$

Como exemplo das condições citadas anteriormente temos os seguintes casos, que podem ser claramente observados na Tabela 3.3.

Para $n = 1, 2 \Rightarrow |h_{n,n}| > \dots > |h_{0,n}|$.

Para $n = 3, 4, 5 \Rightarrow |h_{n,n}| < |h_{n-1,n}| > |h_{n-2,n}| > \dots > |h_{0,n}|$.

Para $n = 6 \Rightarrow |h_{n,n}| < |h_{n-1,n}| = |h_{n-2,n}| > |h_{n-3,n}| > \dots > |h_{0,n}|$.

Para $n = 7, 8, 9 \Rightarrow |h_{n,n}| < |h_{n-1,n}| < |h_{n-2,n}| > |h_{n-3,n}| > \dots > |h_{0,n}|$.

Note que, de acordo com o item (i) do Teorema 2.13, os polinômios $H_n(z)$ são polinômios quase-ortogonais, pois são dados por $H_n(z) = \alpha P_n(z) + \beta P_{n+1}(z)$, onde $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ e $P_n(z)$ e $P_{n+1}(z)$ são polinômios ortogonais. Deste modo, utilizando o Teorema 2.14, é possível concluir que n zeros de $H_n(z)$ são reais, distintos e localizam-se em $(0, 1)$. Além disso, como $h_{0,n} = 0$ e $z = 0$ é zero de $H_n(z)$, concluimos que os zeros de $H_n(z)$ encontram-se em $[0, 1]$, como mostra a Figura 3.4.

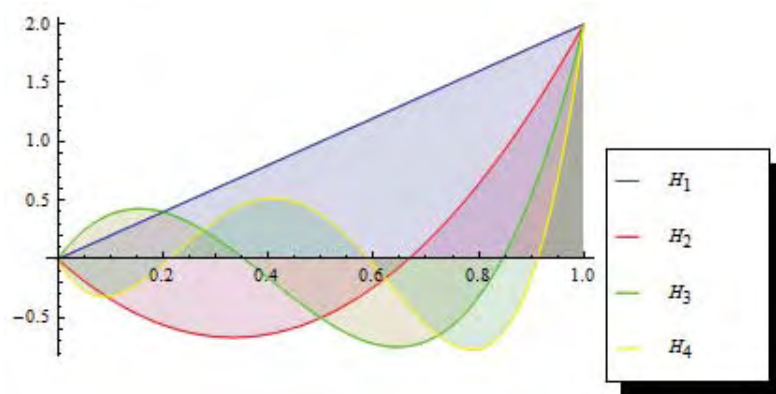


Figura 3.4: Imagens da função $H_n(z)$ para $n = 1, \dots, 4$.

Exemplo 3.3. Seja $H_5(z) = 252z^5 - 560z^4 + 420z^3 - 120z^2 + 10z$ o polinômio relacionado ao método de Radau I, para $n = 5$. Do Teorema 3.1, devemos ter $a_i > 0$, $i = 0, \dots, n$. Para tal hipótese, vamos tomar $P(z) = -H_5(-z)$ e observar que, como

$$H_5(z) = z(252z^4 - 560z^3 + 420z^2 - 120z + 10),$$

segue que $z_1 = 0$ é um zero de $H_5(z)$ que encontra-se em $|z| \leq 1$. Deste modo, analisaremos o comportamento dos zeros de $S(z)$, relacionado ao polinômio

$$P(z) = 252z^4 + 560z^3 + 420z^2 + 120z + 10,$$

cujos coeficientes satisfazem as hipóteses do Teorema 3.1 quando o parâmetro real $r = 0.4$ e os zeros encontram-se em $|z| \leq 1$. Logo, do resultado citado anteriormente, os zeros de $S(z) = P(z) + \gamma z^4$, onde $\gamma > 0$, estão em $|z| < 1$.

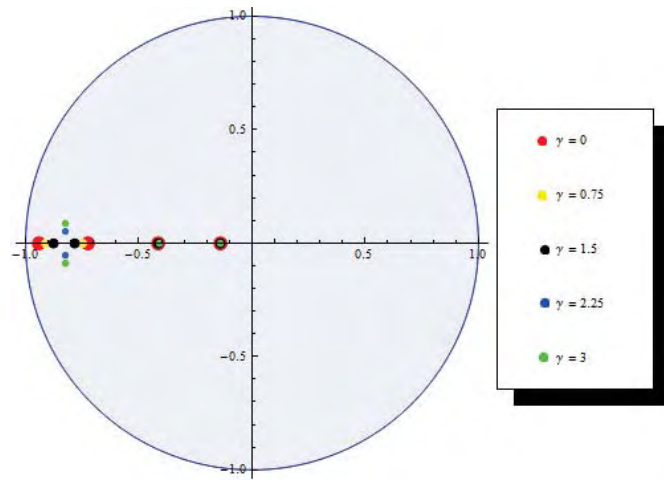


Figura 3.5: Localização dos zeros do polinômio $S(z) = P(z) + \gamma z^4$, $\gamma = 0, 0.75, 1.5, 2.25, 3$.

A Figura 3.5 mostra a localização dos zeros de $P(z)$, representados pelos pontos vermelhos. Note que os zeros de $S(z) = P(z) + \gamma z^4$ para $\gamma = 0.75, 1.5, 2.25$ e $\gamma = 3$, ilustrados pelos demais pontos, encontram-se localizados no interior do disco unitário.

2. Coeficientes dos polinômios relacionados aos métodos de Radau II

Seja $T_n(z) = \bar{P}_n(z) - \bar{P}_{n-1}(z)$, $n = 1, 2, \dots$, e $T_0 = 1$. Vamos determinar os coeficientes dos polinômios dessa sequência, os quais denominaremos polinômios relacionados aos métodos de Radau II.

De $T_n(z) = \bar{P}_n(z) - \bar{P}_{n-1}(z)$, segue que

$$\begin{aligned}
T_n(z) &= (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} z^k \\
&\quad - (-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \binom{n+k-1}{k} z^k \\
&= (-1)^n \left[(-1)^n \binom{n}{n} \binom{2n}{n} z^n + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} z^k \right] \\
&\quad - \left[(-1)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \binom{n+k-1}{k} z^k \right].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
T_n(z) &= (-1)^{n-1} \left[(-1)^{n+1} \binom{2n}{n} z^n + (-1) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} z^k \right. \\
&\quad \left. + (-1) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \binom{n+k-1}{k} z^k \right] \\
&= (-1)^{n-1} \left[(-1)^{n+1} \binom{2n}{n} z^n + (-1)^{k+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} \right. \\
&\quad \left. + \binom{n-1}{k} \binom{n+k-1}{k} z^k \right].
\end{aligned}$$

Mas, como

$$\binom{n}{k} \binom{n+k}{k} + \binom{n-1}{k} \binom{n+k-1}{k} = -\frac{2n(2k-1)!}{(k!)^2} \binom{n+k-1}{n-k},$$

segue que

$$T_n(z) = \binom{2n}{n} z^n + \sum_{j=1}^{n-1} 2(-1)^{n+j} \frac{n(2j-1)!}{(j!)^2} \binom{n+j-1}{n-j} z^j.$$

Portanto, as expressões gerais para os coeficientes dos polinômios relacionados aos métodos de Radau II são dadas por

$$\begin{aligned}
t_{n,n} &= \binom{2n}{n} = \frac{2n!}{(n!)^2}, \\
t_{j,n} &= 2(-1)^{n+j} \frac{n(2j-1)!}{(j!)^2} \binom{n+j-1}{n-j}, \quad j = 1, \dots, n-1, \text{ e} \\
t_{0,n} &= 2(-1)^n.
\end{aligned}$$

Na Tabela 3.4 são apresentados os polinômios da sequência $T_n(z)$ para $n = 1, 2, \dots, 9$.

n	Polinômio $T_n(z)$
1	$2z - 2$
2	$6z^2 - 8z + 2$
3	$20z^3 - 36z^2 + 18z - 2$
4	$70z^4 - 160z^3 + 120z^2 - 32z + 2$
5	$252z^5 - 700z^4 + 700z^3 - 300z^2 + 50z - 2$
6	$924z^6 - 3024z^5 + 3780z^4 - 2240z^3 + 630z^2 - 72z + 2$
7	$3432z^7 - 12936z^6 + 19404z^5 - 14700z^4 + 5880z^3 - 1176z^2 + 98z - 2$
8	$12870z^8 - 54912z^7 + 96096z^6 - 88704z^5 + 46200z^4 - 13440z^3 + 2016z^2 - 16z + 2$
9	$48620z^9 - 231660z^8 + 463320z^7 - 504504z^6 + 324324z^5 - 124740z^4 + 27720z^3 - 3240z^2 + 162z - 2$

Tabela 3.4: Polinômios relacionados aos métodos de Radau II para $n = 1, 2, \dots, 9$.

Para este caso, também apresentaremos algumas condições adicionais sobre os coeficientes dos polinômios relacionados aos métodos de Radau II.

Seja $T_n(z) = \sum_{j=0}^n t_{j,n} z^j$, $n = 1, 2, \dots$, o polinômio cujos coeficientes são relacionados aos métodos de Radau II. Logo,

(i) Para $n = 1$, $|t_{n,n}| = |t_{n-1,n}|$;

(ii) Para $n \geq 2$, $|t_{n,n}| < |t_{n-1,n}|$, pois

$$|t_{n,n}| - |t_{n-1,n}| = \frac{2(2n-2)!}{[(n-1)!]^2} (-n^2 + 2n - 1) < 0, \quad \text{para } n \geq 2;$$

(iii) Como, para $j = 1, \dots, n-2$,

$$|t_{j,n}| - |t_{j+1,n}| = \frac{2n(n+j-1)!}{(j!)^2(n-j-1)!} (2j^2 + 2j - n^2 + 1),$$

para analisar o sinal de $|t_{j,n}| - |t_{j+1,n}|$, devemos analisar o sinal de $2j^2 + 2j - n^2 + 1$.

Considerando $j = n - k$, $j = 1, \dots, n - 2$, $k = 2, \dots, n - 1$, temos

$$2j^2 + 2j - n^2 + 1 = n^2 + (2 - 4k)n + 2k^2 - 2k + 1.$$

Assim,

$$n^2 + (2 - 4k)n + 2k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{4k - 2 \pm \sqrt{8k^2 - 8k}}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{4k - 2 - \sqrt{8k^2 - 8k}}{2} > 0 \text{ e} \\ n_2 &= \frac{4k - 2 + \sqrt{8k^2 - 8k}}{2} > 0, \quad n_1, n_2 \in \mathbb{R} \text{ (pois } 8k^2 - 8k > 0, \forall k). \end{aligned}$$

Deste modo, para n natural e $k = 2, \dots, n - 1$, temos

$$\begin{cases} |t_{n-k,n}| < |t_{n-k+1,n}|, & \text{se } n_1 < n < n_2, \\ |t_{n-k,n}| > |t_{n-k+1,n}|, & \text{se } n > n_2 \text{ ou } n < n_1. \end{cases}$$

As condições descritas a seguir podem ser observadas na Tabela 3.4.

Para $n = 1 \Rightarrow |t_{n,n}| = \dots = |t_{0,n}|$.

Para $n = 2, 3, 4 \Rightarrow |t_{n,n}| < |t_{n-1,n}| > |t_{n-2,n}| > \dots > |t_{0,n}|$.

Para $n = 5 \Rightarrow |t_{n,n}| < |t_{n-1,n}| = |t_{n-2,n}| > \dots > |t_{0,n}|$.

Para $n = 6, 7, 8 \Rightarrow |t_{n,n}| < |t_{n-1,n}| < |t_{n-2,n}| > |t_{n-3,n}| > |t_{n-4,n}| > \dots > |t_{0,n}|$.

Para $n = 9 \Rightarrow |t_{n,n}| < |t_{n-1,n}| < |t_{n-2,n}| < |t_{n-3,n}| > |t_{n-4,n}| > |t_{n-5,n}| > \dots > |t_{0,n}|$.

Assim como para os polinômios cujos coeficientes são relacionados aos métodos de Radau I, os polinômios relacionados aos métodos de Radau II são polinômios quase-ortogonais pois, de acordo com o Teorema 2.13 podemos escrever $T_n(z)$ como $T_n = \alpha P_n(z) + \beta P_{n+1}(z)$, onde $\alpha = 1$ e $\beta = -1$ e, $P_n(z)$ e $P_{n+1}(z)$ são polinômios ortogonais. Deste modo, do Teorema 2.14 segue que os zeros do polinômio $T_n(z)$ são reais, distintos e pelo menos n deles localizam-se em $(0, 1)$. Como $z = 1$ é zero do polinômio $T_n(z)$, todos os seus zeros de $T_n(z)$ localizam-se em $[0, 1]$, como é possível observar na figura a seguir.

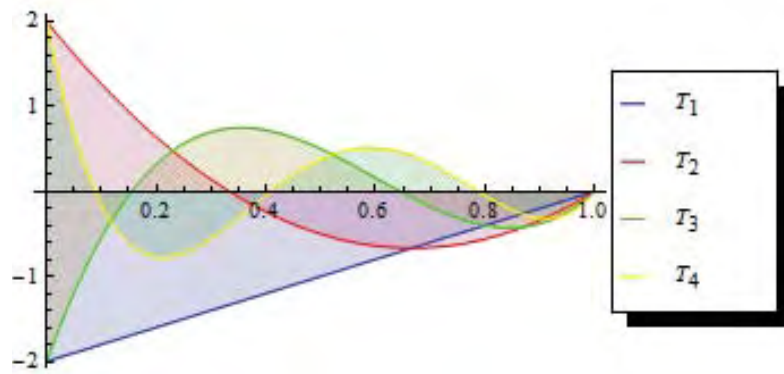


Figura 3.6: Sequência de Polinômios $T_n(z)$, $z \in [0, 1]$, com $n = 1, \dots, 4$.

Exemplo 3.4. Seja $T_4(z) = 70z^4 - 160z^3 + 120z^2 - 32z + 2$ o polinômio relacionado ao método de Radau II para $n = 4$. Do Teorema 3.1, $a_i > 0$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Tomando o polinômio $P(z) = S_4(-z)$, analisaremos o comportamento dos zeros do polinômio perturbado $S(z)$, relacionado ao polinômio $P(z) = 70z^4 + 160z^3 + 120z^2 + 32z + 2$, cujos coeficientes satisfazem as hipóteses do Teorema 3.1 quando $0.27 < r < 0.44$ e seus zeros encontram-se em $|z| \leq 1$. Utilizando o principal resultado estudado neste capítulo, é possível concluir que os zeros de $S(z) = P(z) + \gamma z^4$, $\gamma > 0$, encontram-se no interior do disco unitário.

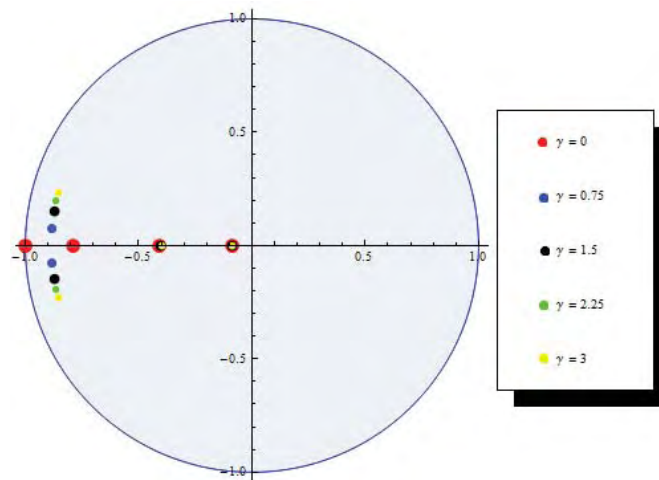


Figura 3.7: Localização dos zeros do polinômio $S(z) = P(z) + \gamma z^4$, $\gamma = 0, 0.75, 1.5, 2.25, 3$.

A Figura 3.7 mostra a localização dos zeros do polinômio $S(z) = P(z) + \gamma z^4$. Note que os zeros de $P(z)$, ilustrados pelos pontos vermelhos, estão localizados em $|z| \leq 1$. Por outro lado, os zeros de $S(z)$, para $\gamma = 0.75, 1.5, 2.25$ e $\gamma = 3$, representados pelos demais pontos, encontram-se no interior do disco unitário.

Polinômios Palindrômicos

Na Seção 2.3 do Capítulo 2, definimos uma classe especial de polinômios, chamados polinômios palindrômicos. O comportamento dos zeros de tais polinômios é um tópico bastante interessante que possui muitas aplicações em algumas áreas de Matemática. Sabemos que os zeros de polinômios palindrômicos são simétricos não apenas em relação à reta real, como também ao círculo unitário. Mas, nos últimos anos, matemáticos têm se preocupado em determinar condições para que essa classe de polinômios tenha apenas zeros no círculo unitário (ver, por exemplo [10], [11], [12]). Neste contexto, o Capítulo 4 apresenta um estudo de alguns resultados relacionados a esta classe de polinômios, a partir do qual foi possível obter novos resultados.

Neste capítulo, daremos condições necessárias e suficientes para que polinômios palindrômicos de grau n , $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} R(z) &= r_n + r_{n-1}z + r_{n-1}z^2 + \cdots + r_{n-1}z^{n-1} + r_nz^n \\ &= r_n + r_{n-1}(z + z^2 + \cdots + z^{n-1}) + r_nz^n, \end{aligned}$$

com $r_n > 0$ e $r_{n-1} > 0$, tenham todos os seus zeros no círculo unitário. Além disso, provaremos que o polinômio

$$S(z) = R(z) + \gamma z^n, \quad \gamma \in (0, \infty) \cap [r_{n-1} - 2r_n, \infty),$$

tem todos os seus zeros no disco unitário.

O estudo desse resultado foi motivado pela Conjectura 1.1, apresentada na introdução desta dissertação, relacionada à teoria de estabilidade de algumas classes de métodos numéricos para a solução de equações diferenciais ordinárias.

Usando a mesma notação apresentada em [10], consideramos

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1},$$

e a função $L : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$L(a) := \min_{y \in \mathbb{R}} \sum_{j=1}^{n-1} |a_j - y|. \quad (4.1)$$

Agora, seja σ uma permutação de $\{1, 2, \dots, n-1\}$, para a qual

$$a_{\sigma(1)} \leq a_{\sigma(2)} \leq \dots \leq a_{\sigma(n-1)}. \quad (4.2)$$

$$(i) \text{ Se } n \text{ é par, então } L(a) := \sum_{j=1}^{n-1} \left| a_j - a_{\sigma(\frac{n}{2})} \right|.$$

$$(ii) \text{ Se } n \text{ é ímpar, então } L(a) := \sum_{j=1}^{n-1} |a_j - y|, \text{ para qualquer } y \text{ no intervalo fechado } [a_{\sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)}, a_{\sigma(\lceil \frac{n}{2} \rceil)}], \text{ onde } \lfloor t \rfloor := \max(-\infty, t) \cap \mathbb{Z} \text{ e } \lceil t \rceil := \min(t, \infty) \cap \mathbb{Z}.$$

Definição 4.1. O número $\overline{m}(a)$ é definido por $\overline{m}(a) := a_{\sigma(\lceil \frac{n}{2} \rceil)}$ e o número $\underline{m}(a)$ é dado por $\underline{m}(a) := a_{\sigma(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)}$. Observe que $\overline{m}(a) = \underline{m}(a)$ quando n é par.

Para exemplificar as considerações apresentadas anteriormente, serão apresentados os seguintes exemplos:

Exemplo 4.1. Dado o polinômio $P(z) = 3z^6 + 4z^5 + 5z^4 + 6z^3 + 5z^2 + 4z + 3$, a sequência $a \in \mathbb{R}^{n-1}$ é dada por $a = (4, 5, 6, 5, 4)$. Assim, de (4.2),

$$a_{\sigma(1)} = 4 \leq a_{\sigma(2)} = 4 \leq a_{\sigma(3)} = 5 \leq a_{\sigma(4)} = 5 \leq a_{\sigma(5)} = 6.$$

Então, $\overline{m}(a) = \underline{m}(a) = a_{\sigma(3)} = 5$, e, portanto, de (4.1), $L(a) = 3$.

Exemplo 4.2. Considere o polinômio $P(z) = 4z^5 + 5z^4 + 6z^3 + 6z^2 + 5z + 4$. Note que a sequência formada pelos coeficientes a_1, a_2, a_3 e a_4 é dada por $a = (5, 6, 6, 5)$. De (4.2),

$$a_{\sigma(1)} = 5 \leq a_{\sigma(2)} = 5 \leq a_{\sigma(3)} = 6 \leq a_{\sigma(4)} = 6.$$

Assim, da Definição 4.1 segue que $\overline{m}(a) = a_{\sigma(3)} = 6$ e $\underline{m}(a) = a_{\sigma(2)} = 5$. Além disso, de (4.1), $L(a) = 2$.

Os Teoremas 4.1, 4.2 e 4.3, apresentados a seguir, são de suma importância para a demonstração dos três últimos resultados, considerados, juntamente com o Teorema 3.1, os principais resultados estudados nesta dissertação.

Teorema 4.1. *Seja $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ um polinômio palindrômico de grau n , $a_n > 0$, e seja $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$.*

1. *Suponha $\overline{m}(a) + L(a) \leq 2a_n$.*

- (i) *Se $P(1) \geq 0$, então todos os zeros de P estão no círculo unitário. Neste caso, existem pelo menos dois zeros da forma $e^{i\theta}$, com $\frac{-2\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n}$.*
- (ii) *Se $P(1) < 0$, então P tem zeros reais $\beta > 1$ e β^{-1} , e os demais estão no círculo unitário.*

2. *Considere $\overline{m}(a) \geq L(a) + 2a_n$. Então, uma das afirmações a seguir é válida.*

- (i) *Todos os zeros de P estão no círculo unitário. Quando n é ímpar, existem três ou cinco zeros da forma $e^{i\theta}$ com $\frac{(n-1)}{n}\pi \leq \theta \leq \frac{(n+1)}{n}\pi$. Quando n é par, -1 é um zero com multiplicidade 2 ou 4.*
- (ii) *P tem zeros reais $\beta < -1$ e β^{-1} , e os demais estão no círculo unitário.*

A prova deste resultado pode ser encontrada em [10].

Se n é ímpar, o polinômio $R(z)$ possui algumas propriedades interessantes, como é possível observar nos teoremas a seguir.

Teorema 4.2. *Seja $R(z) = r_n + r_{n-1}(z + z^2 + \dots + z^{n-1}) + r_n z^n$ um polinômio palindrômico de grau ímpar. Então, $z = -1$ é um zero de $R(z)$ e $R(z) = (z + 1)Q(z)$ onde*

$$Q(z) = \sum_{i=0}^{n-1} q_i z^i, \text{ com } q_i = \begin{cases} r_n, & i \text{ par}, \\ r_{n-1} - r_n, & i \text{ ímpar}. \end{cases}$$

Demonstração: Como $R(-1) = r_n - r_{n-1} + r_{n-1} - \dots + r_{n-1} - r_n = 0$, temos

$$\begin{aligned} R(z) &= (z + 1)Q(z) = (z + 1) \sum_{i=0}^{n-1} q_i z^i \\ &= q_0 + (q_0 + q_1)z + (q_1 + q_2)z^2 + \dots + (q_{n-2} - q_{n-1})z^{n-1} + q_{n-1}z^n. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes dos polinômios nos lados esquerdo e direito da igualdade anterior, segue que

$$q_i = \begin{cases} r_n, & i \text{ par}, \\ r_{n-1} - r_n, & i \text{ ímpar}. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Teorema 4.3. *Seja $R(z) = r_n + r_{n-1}(z + z^2 + \dots + z^{n-1}) + r_n z^n$ um polinômio palindrômico de grau ímpar. Se*

$$r_{n-1} = \frac{2n}{n-1} r_n, \quad n > 1,$$

então $z = -1$ é um zero de $R(z)$ de multiplicidade 3 e $R(z) = (z + 1)^3 U(z)$, onde

$$U(z) = \sum_{i=0}^{n-3} u_i z^i, \quad \text{com } u_i = \begin{cases} \frac{(i+2)(n-1-i)}{2(n-1)} r_n, & i \text{ par}, \\ \frac{(i+1)(n-1-(i+1))}{2(n-1)} r_n, & i \text{ ímpar}. \end{cases}$$

Demonstração: Do Teorema 4.2 temos $R(z) = (z + 1)Q(z)$, onde

$$Q(z) = \sum_{i=0}^{n-1} q_i z^i, \quad q_i = \begin{cases} r_n, & i \text{ par}, \\ r_{n-1} - r_n, & i \text{ ímpar}. \end{cases}$$

Se $r_{n-1} = \frac{2n}{n-1} r_n$, $r_{n-1} > 1$, através de cálculos diretos segue que $Q(-1) = 0$ e assim,

$$Q(z) = (z + 1)T(z), \tag{4.3}$$

com

$$T(z) = \sum_{i=0}^{n-2} t_i z^i, \quad t_i = t_{n-2-i} = \frac{n-1-i}{n-1} r_n, \quad i \text{ par}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} Q(z) &= (z + 1)T(z) = (z + 1) \sum_{i=0}^{n-2} t_i z^i \\ &= t_0 + (t_0 + t_1)z + (t_1 + t_2)z^2 + \dots + (t_{n-3} + t_{n-2})z^{n-2} + t_{n-2}z^{n-1}. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes do polinômio em ambos os lados da equação anterior, segue que

$$t_i = t_{n-2-i} = \frac{n-1-i}{n-1} r_n, \quad i \text{ par}.$$

Observe que $T(-1) = 0$ e, usando o argumento anterior,

$$T(z) = (z + 1)U(z), \quad (4.4)$$

onde

$$U(z) = \sum_{i=0}^{n-3} u_i z^i, \quad u_i = \begin{cases} \frac{(i+2)(n-1-i)}{2(n-1)} r_n, & i \text{ par}, \\ -\frac{(i+1)(n-1-(i+1))}{2(n-1)} r_n, & i \text{ ímpar}. \end{cases}$$

Deste modo, do Teorema 4.2 e das equações (4.3) e (4.4), obtemos

$$R(z) = (z + 1)Q(z) = (z + 1)^2 T(z) = (z + 1)^3 U(z). \quad \blacksquare$$

4.1 Resultados principais

O teorema a seguir garante a localização dos zeros de polinômios palindrômicos de grau par à partir de uma determinada condição.

Teorema 4.4. *Os zeros dos polinômios palindrômicos de grau par, $R(z) = r_n + r_{n-1}(z + z^2 + \dots + z^{n-1}) + r_n z^n$, com $r_n > 0$ e $r_{n-1} > 0$, estão no círculo unitário se, e somente se, $r_{n-1} \leq 2r_n$.*

Demonstração: Seja $a = (r_{n-1}, r_{n-1}, \dots, r_{n-1})$. Então, $\overline{m}(a) = \underline{m}(a) = r_{n-1}$ e $L(a) = 0$.

Se $\overline{m}(a) + L(a) \leq 2r_n$, ou seja, $r_{n-1} \leq 2r_n$, como $R(1) = 2r_n + (n-1)r_{n-1} \geq 0$, do item 1. do Teorema 4.1, segue que todos os zeros de $R(z)$ estão no círculo unitário.

Se $r_{n-1} > 2r_n$ ($\underline{m}(a) > L(a) + 2r_n$), $R(z)$ tem um zero real em $(-\infty, -1)$.

De fato, como

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) > 0 \text{ e } \lim_{z \rightarrow -1} R(z) = 2r_n - r_{n-1} < 0,$$

existe uma mudança de sinal de $R(z)$ em $(-\infty, -1)$. Observe que este é o caso do item 2. (ii) do Teorema 4.1. ■

Note que se $r_{n-1} = 2r_n$, $R(-1) = 0$ e $z = -1$ é um zero de multiplicidade 2 de $R(z)$, conforme o item 2. (i) do Teorema 4.1.

O resultado abaixo garante a localização dos zeros de polinômios palindrômicos de grau ímpar no círculo unitário.

Teorema 4.5. *Os zeros do polinômio palindrômico de grau n ímpar, $n > 1$, $R(z) = r_n + r_{n-1}(z + z^2 + \dots + z^{n-1}) + r_n z^n$, com $r_n > 0$ e $r_{n-1} > 0$, estão no círculo unitário se, e somente se,*

1. $r_{n-1} \leq 2r_n$ ou

2. $2r_n < r_{n-1} \leq \frac{2n}{n-1}r_n$.

Demonstração: Do Teorema 4.1, $a = (r_{n-1}, r_{n-1}, \dots, r_{n-1})$, $\overline{m}(a) = \underline{m}(a) = r_{n-1}$ e $L(a) = 0$.

Se $\overline{m}(a) + L(a) \leq 2r_n$, ou seja, $r_{n-1} \leq 2r_n$, como $R(1) = 2r_n + (n-1)r_{n-1} \geq 0$, do item 1. (i) do Teorema 4.1, todos os zeros de $R(z)$ estão no círculo unitário.

Por outro lado, se $r_{n-1} > 2r_n$ ($\underline{m}(a) > L(a) + 2r_n$), então:

- (i) Se $r_{n-1} > \frac{2n}{n-1}r_n$, $R(z)$ tem um zero real em $(-\infty, -1)$.

De fato, como $R(z) = (z+1)Q(z)$, temos

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} Q(z) > 0 \text{ e } \lim_{z \rightarrow -1} Q(z) = nr_n - \frac{n-1}{2}r_{n-1} < 0.$$

Isso significa que $Q(z)$ muda de sinal em $(-\infty, -1)$ e, conseqüentemente, $R(z)$ tem um zero real em $(-\infty, -1)$, como esperávamos do item 2. (ii) do Teorema 4.1.

- (ii) Se $r_{n-1} < \frac{2n}{n-1}r_n$, como $R(z) = (z+1)Q(z)$, temos

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} Q(z) > 0 \text{ e } \lim_{z \rightarrow -1} Q(z) = nr_n - \frac{n-1}{2}r_{n-1} > 0,$$

ou seja, não existe mudança de sinal de $Q(z)$ em $(-\infty, -1)$ e $R(z)$ não tem zeros em $(-\infty, -1)$ (todos os zeros de $R(z)$ estão no círculo unitário), como esperávamos do item 2. (i) do Teorema 4.1.

- (iii) Se $r_{n-1} = \frac{2n}{n-1}r_n$, $z = -1$ é um zero de multiplicidade 3 de $R(z)$ (do Teorema 4.4) e $R(z) = (z+1)^3 U(z)$. Além disso,

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} U(z) > 0 \text{ e } \lim_{z \rightarrow -1} U(z) > 0.$$

Dessa forma, não existe mudança de sinal de $U(z)$ em $(-\infty, -1)$ e $R(z)$ tem todos os seus zeros no círculo unitário, conforme o item 2. (i) do Teorema 4.1.

Assim, se $r_{n-1} > 2r_n$, os zeros de $R(z)$ estão no círculo unitário se, e somente se,

$$r_{n-1} \leq \frac{2n}{n-1}r_n. \quad \blacksquare$$

Observe que consideramos $n > 1$ nas condições do Teorema 4.5. Se $n = 1$, $z = -1$ é a única raiz de $R(z) = 0$.

A origem do Teorema 4.6 está relacionada ao Teorema 3.1, considerado o principal resultado estudado nesta dissertação.

Teorema 4.6. *Sejam $R(z) = r_n + r_{n-1}(z + z^2 + \cdots + z^{n-1}) + r_n z^n$, $r_{n-1}, r_n > 0$, e $S(z) = R(z) + \gamma z^n$, $\gamma > 0$.*

1. *Se $\gamma > r_{n-1} - 2r_n$, todos os zeros de $S(z)$ encontram-se no disco unitário.*
2. *Se $0 < \gamma \leq r_{n-1} - 2r_n$, $S(z)$ tem pelo menos um zero fora do disco unitário.*

Demonstração: Vamos escrever o polinômio $S(z)$ da forma $S(z) = s_n z^n + s_{n-1} z^{n-1} + \cdots + s_0$, onde $s_n = r_n + \gamma$, $s_i = r_{n-1}$, $i = 1, \dots, n-1$, e $s_0 = r_n$. Da equação (2.5), temos

$$S_1(z) = s_{n-1}^{(1)} z^{n-1} + s_{n-2}^{(1)} z^{n-2} + \cdots + s_0^{(1)},$$

onde os coeficientes $s_k^{(1)}$, $k = 0, \dots, n-1$, são definidos por (2.7). Tomando-se $j = 0$ temos

$$s_k^{(1)} = s_0 s_k - s_n s_{n-k}.$$

Substituindo os valores de s_k , $k = 0, 1, \dots, n$, obtemos

$$s_{n-1}^{(1)} = s_{n-2}^{(1)} = \cdots = s_1^{(1)} = -\gamma r_{n-1} < 0 \text{ e } s_0^{(1)} = -\gamma(\gamma + 2r_n) < 0.$$

Note que, como $\gamma > 0$, $0 < r_n < r_n + \gamma$, ou seja, $0 < s_0 < s_n$, o Teorema 2.9 pode ser aplicado para concluir que os zeros de $S(z)$ estão no disco unitário se, e somente se, os zeros de $S_1^*(z)$ também estão.

Observe que

$$-S_1^*(z) = |s_{n-1}^{(1)}| + |s_{n-2}^{(1)}|z + \cdots + |s_1^{(1)}|z^{n-2} + |s_0^{(1)}|z^{n-1}.$$

Se $|s_0^{(1)}| \geq |s_1^{(1)}|$, os coeficientes de $-S_1^*(z)$ estão ordenados e, pelo teorema de Eneström-akeya, os zeros de $-S_1^*(z)$ estão em $|z| \leq 1$. Como os zeros de $S_1^*(z)$ e $-S_1^*(z)$ são os mesmos, os zeros de $S_1^*(z)$ também estão em $|z| \leq 1$. Mas,

$$|s_0^{(1)}| - |s_1^{(1)}| = \gamma(\gamma + 2r_n - r_{n-1}) \geq 0.$$

Logo, $|s_0^{(1)}| \geq |s_1^{(1)}|$ é equivalente a $\gamma \geq r_{n-1} - 2r_n$.

Portanto, para $\gamma \geq r_{n-1} - 2r_n$, o polinômio $S(z)$ tem todos seus zeros em $|z| \leq 1$, o que demonstra o item 1.. Precisamos mostrar agora que, se $0 < \gamma < r_{n-1} - 2r_n$, $S(z)$ tem pelo menos um zero fora do disco unitário.

De fato, como

$$|s_0^{(1)}| - |s_{n-1}^{(1)}| = \gamma(\gamma + 2r_n - r_1) = \gamma(\gamma + 2r_n - r_{n-1}).$$

Assim, $|s_0^{(1)}| < |s_{n-1}^{(1)}|$ é equivalente a $\gamma < r_{n-1} - 2r_n$. Pela fórmula de Viète, temos

$$\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{s_{n-1}^{(1)}}{s_0^{(1)}},$$

onde ζ_i , $i = 1, \dots, n-1$, são os zeros de $S_1^*(z)$.

Logo, se $\gamma < r_{n-1} - 2r_n$, então

$$|\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_{n-1}| = \left| \frac{s_{n-1}^{(1)}}{s_0^{(1)}} \right| > 1.$$

Portanto, pelo menos um zero de $S_1^*(z)$ está fora do disco unitário. Consequentemente, $S(z)$ tem pelo menos um zero fora do disco unitário, o que demonstra a validade do item 2.. ■

Note que para $\gamma = 0$, temos $S(z) = R(z)$ e os zeros de $S(z)$ estão no disco unitário sob as condições dos Teoremas 4.4 e 4.5.

4.1.1 Exemplos numéricos

Os resultados apresentados nesta seção encontram-se ilustrados nos exemplos a seguir.

Exemplo 4.3. *Vamos considerar os polinômios $R(z) = 3z^4 + 5z^3 + 5z^2 + 5z + 3$ e $S(z) = R(z) + \gamma z^4$. Note que, como as condições do Teorema 4.4 são satisfeitas, os zeros do polinômio $R(z)$ (representados pelos pontos vermelhos) estão no círculo unitário. Além disso, do item 2. do Teorema 4.6, os zeros do polinômio perturbado $S(z)$, para todo $\gamma > 0$ (representados pelos pontos pretos), encontram-se localizados no disco unitário, como é possível observar na figura a seguir.*

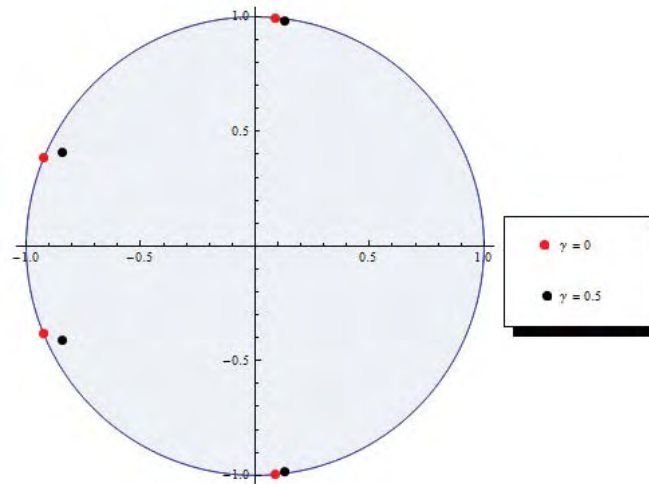


Figura 4.1: Localização dos zeros do polinômio palindrômico $R(z)$ e do polinômio perturbado $S(z) = R(z) + \gamma z^4$, para $\gamma = 0.5$.

Exemplo 4.4. Considere o polinômio palindrômico $R(z) = 1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + 2z^4 + 2z^5 + z^6$. Observe que, como as condições do Teorema 4.4 são satisfeitas, os zeros de $R(z)$ (representados pelos pontos vermelhos) localizam-se no círculo unitário (note $z = -1$ é um zero de multiplicidade 2 de $R(z)$). Do item 2. do Teorema 4.6, segue que os zeros do polinômio perturbado $S(z)$, para todo $\gamma > 0$ (representados pelos pontos pretos), encontram-se no disco unitário.

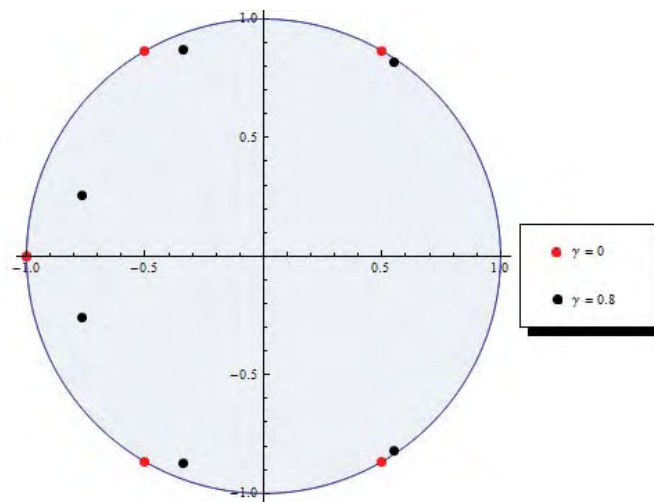


Figura 4.2: Localização dos zeros do polinômio palindrômico $R(z)$ e do polinômio perturbado $S(z) = R(z) + \gamma z^6$, para $\gamma = 0.8$.

Exemplo 4.5. Seja $R(z) = 2 + 8z + 8z^2 + 8z^3 + 2z^4$ um polinômio palindrômico de grau 4. Como $r_{n-1} - 2r_n > 0$, do Teorema 4.4 $R(z)$ tem um zero real em $(-\infty, -1)$. Além disso,

do item 1. do Teorema 4.6, os zeros do polinômio $S(z)$ estão no disco unitário quando $\gamma \geq 4$ e, para $0 < \gamma < 4$, $S(z)$ tem pelo menos um zero fora do disco unitário.

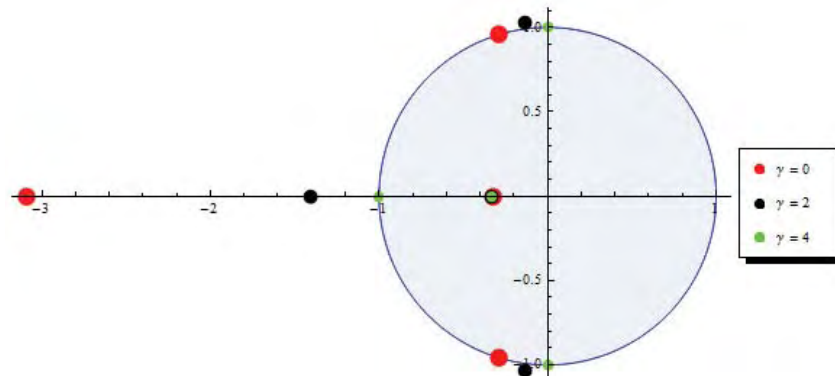


Figura 4.3: Localização dos zeros do polinômio palindrômico $R(z)$ e do polinômio perturbado $S(z) = R(z) + \gamma z^5$, para $\gamma = 2$ e $\gamma = 4$.

Na figura anterior, os pontos em vermelho representam os zeros do polinômio palindrômico $R(z)$. Os zeros do polinômio perturbado $S(z) = R(z) + \gamma z^5$ encontram-se ilustrados na cor preta e verde para $\gamma = 2$ e $\gamma = 4$, respectivamente.

Exemplo 4.6. Seja $S(z) = 2 + 3z + 3z^2 + 3z^3 + 3z^3 + 3z^4 + 2z^5$. Note que a primeira condição do Teorema 4.5 é satisfeita e os zeros de $R(z)$ (representados pelos pontos vermelhos) estão no círculo unitário. Do Teorema 4.6, os zeros do polinômio perturbado $S(z)$, para todo $\gamma > 0$ (representados pelos pontos pretos), estão em $|z| \leq 1$, como podemos observar na Figura 4.4.

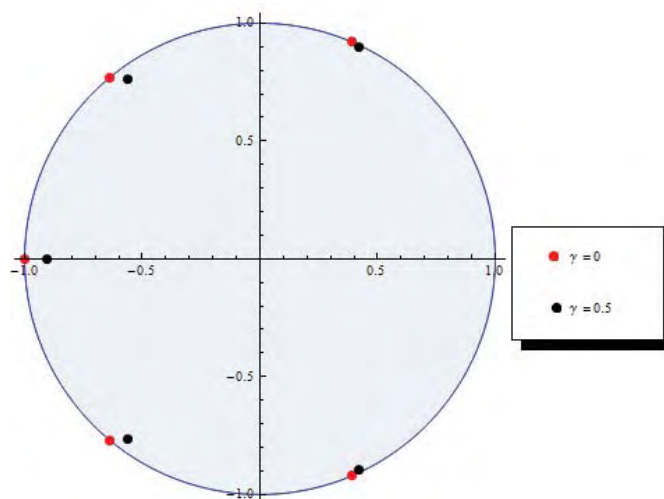


Figura 4.4: Localização dos zeros do polinômio palindrômico $R(z)$ e do polinômio perturbado $S(z) = R(z) + \gamma z^5$, para $\gamma = 0, 5$.

Exemplo 4.7. Vamos considerar o polinômio $R(z) = 1 + 3z + 3z^2 + z^3$. Como $r_{n-1} = \frac{2n}{n-1}r_n$, do Teorema 4.3, $z = -1$ é um zero de multiplicidade 3 de $R(z)$. Do item 1. do Teorema 4.6, os zeros do polinômio perturbado $S(z)$ encontram-se em $|z| \leq 1$ se, e somente se, $\gamma \geq 1$ e, para $0 < \gamma < 1$, pelo menos um zero de $S(z)$ encontra-se localizado fora do disco unitário.

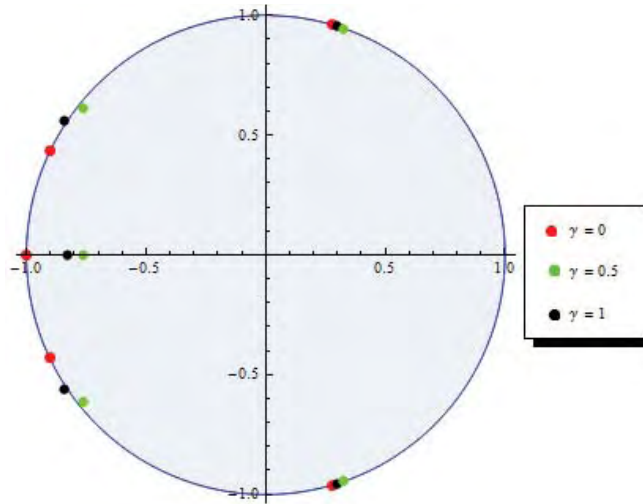


Figura 4.5: Localização dos zeros do polinômio palindrômico $R(z)$ e do polinômio perturbado $S(z) = R(z) + \gamma z^3$, para $\gamma = 0.5$ e para $\gamma = 1$.

Na Figura 4.5, o ponto $z = -1$, ilustrado em vermelho, representa o zero de multiplicidade 3 do polinômio palindrômico $R(z)$. Por outro lado, os pontos ilustrados na cor verde, localizados em $|z| \leq 1$, representam os zeros de $S(z) = R(z) + z^3$ e os pontos pretos são os zeros do polinômio perturbado $S(z) = R(z) + \gamma z^3$ para $\gamma = 0, 5$.

Exemplo 4.8. Vamos considerar o polinômio $R(z) = 3 + 8z + 8z^2 + 8z^3 + 8z^4 + 8z^5 + 8z^6 + 3z^7$. Como $r_{n-1} > \frac{2n}{n-1}r_n$, do Teorema 4.5, $R(z)$ tem um zero real em $(-\infty, -1)$. Do item 1. do Teorema 4.6, os zeros do polinômio perturbado $S(z)$ estão no disco unitário quando $\gamma \geq 2$ e, para $0 < \gamma < 2$, o polinômio perturbado $S(z)$ tem pelo menos um zero fora do disco unitário.

Na Figura 4.6, é possível observar que, dentre os pontos ilustrados em vermelho (zeros do polinômio palindrômico $R(z)$), existe um zero real em $(-\infty, -1)$. Por outro lado, os zeros do polinômio $S(z) = R(z) + \gamma z^7$, para $\gamma = 2$ (pontos ilustrados na cor verde), encontram-se em $|z| \leq 1$. Quando $\gamma = 1$ (pontos pretos), é possível verificar que existe pelo menos um zero de $S(z) = R(z) + \gamma z^7$ fora do disco unitário. Para este caso, nota-se que existem dois zeros de $S(z)$ em $|z| > 1$.

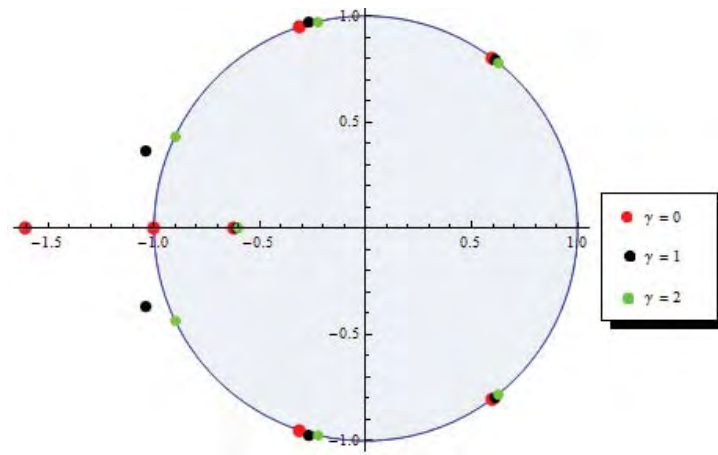


Figura 4.6: Localização dos zeros do polinômio palindrômico $R(z)$ e do polinômio perturbado $S(z) = R(z) + \gamma z^7$, para $\gamma = 1$ e $\gamma = 2$.

Considerações Finais

Neste trabalho, estudamos um teorema importante no que diz respeito à localização de zeros de polinômios. Este resultado, que foi publicado recentemente em [3], originou-se de um problema relacionado a polinômios característicos associados aos métodos (K, L) de Brown, que encontra-se em aberto em [15]. Nessa pesquisa, investigamos o resultado citado anteriormente com o intuito de obtermos novos resultados. Essa investigação se deu a partir do seguinte estudo: primeiro, realizamos uma análise dos principais resultados clássicos sobre zeros de polinômios, que podem ser encontrados, principalmente nos textos [13] e [16]; na sequência, apresentamos uma ideia geral sobre polinômios ortogonais e fórmulas de quadratura, cujos resultados encontram-se em [2] e [8]; além disso, consideramos uma apresentação concisa de algumas classes de métodos numéricos para solução de equações diferenciais ordinárias, sendo eles os métodos (K, L) de Brown e os métodos de Radau I e Radau II, que podem ser vistos, de forma mais detalhada, em [7] e [14].

Inicialmente, partimos da hipótese de que o polinômio perturbado $S(z)$ do teorema investigado está relacionado aos polinômios característicos dos métodos (K, L) de Brown. Até então, não escrevemos nada de novo, pois este resultado encontra-se em [14], mas apresentamos alguns exemplos interessantes utilizando tais polinômios. Em seguida, iniciamos um estudo direcionado à família de métodos de Radau, especificamente para os métodos de Radau I e Radau II. A partir desses métodos, determinamos expressões gerais para os coeficientes dos polinômios que satisfazem as hipóteses do teorema em análise. Além desse avanço, no final desta dissertação exploramos uma classe especial de polinômios, conhecidos na literatura como polinômios palindrômicos. Utilizando esses polinômios, conseguimos novos resultados que deram origem ao artigo “Palindromic and perturbed polynomials: zeros location”, submetido para publicação em uma importante revista da área de Análise Numérica.

Referências Bibliográficas

- [1] ANDERSON, N.; SAFF E. B.; VARGA R. S. On the Eneström-Kakeya theorem and its sharpness. *Linear Algebra App.*, v. 28, p. 5–16, 1979.
- [2] ANDRADE, E. X. L.; BRACCIALI, C. F.; RAFAELI, F. R. *Introdução aos Polinômios Ortogonais*. SBMAC, v. 64, 2012.
- [3] BOTTA, V. A.; MENEGUETTE, M.; CUMINATO, J. A.; MCKEE, S. On the zeros of polynomials: An extension of the Eneström-Kakeya theorem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 385, p. 1151–1161, 2012.
- [4] BOTTA, V. A.; MENEGUETTE, M.; MARQUES, L. F. Palindromic and perturbed polynomials: zeros location. *Submetido para publicação, 2013*.
- [5] BROWN, R. L. Some characteristics of implicit multistep-multiderivative integration formulas. *SIAM Journal Num. Anal.*, v. 20, p. 982–993, 1977.
- [6] BUTCHER, J. C. Integration process based on Radau quadrature formulas. *Math. Comp.*, v. 18, p. 233–244, 1964.
- [7] BUTCHER, J. C. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. John Wiley Sons, 2003.
- [8] CHIHARA, T. S. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1978.
- [9] JELTSCH, R.; KRATZ, L. On the stability properties of Brownt’s multistep multi-derivative methods. *Numer. Math.*, v. 30, p. 25–38, 1978.
- [10] KWON, D. Reciprocal polynomials with all but two zeros on the unit circle. *Acta Math. Hung.* 134 (4), p. 472–480, 2011.
- [11] KWON, D. Reciprocal polynomials with all zeros on the unit circle. *Acta Math. Hung.*, 131 (3), p. 285–294, 2011.

-
- [12] LAKATOS, P.; LOSCONCZI L.: Polynomials with all zeros on the unit circle. *Acta Math. Hung.* 125 (4), 341–356, 2009.
 - [13] MARDEN, M. *Geometry of Polynomials*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966.
 - [14] MENEGUETTE, M. *Multistep multiderivative methods and related topics*. Tese de doutoramento, Linacre College, NAGroup-OUCL, Oxford University, 1987.
 - [15] MENEGUETTE, M. Zeros in the unit disk. *SIAM Rev.*, v. 36, p. 656–657, 1994.
 - [16] MILOVANÓVIC, G. V.; MITRINOVIC, D. S. and RASSIAS, Th. M. *Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*. World Scientific, Singapore, 1994.
 - [17] NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar: polinômios*. SBM, Coleção do professor de matemática, v. 6, Rio de Janeiro, 2012.
 - [18] RADAU, R. *Étude sur les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur numérique d'une intégrale définie*. Math. Pures. Appl. p. 283–336, 1880.