

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de Ilha Solteira

LEONARDO LEANDRO DE MORAES

**PROJETO DE CONTROLE CHAVEADO CONSIDERANDO SATURAÇÃO NO
ATUADOR E MINIMIZAÇÃO DA NORMA H_∞ PARA O SISTEMA *ACTIVE MASS*
*DAMPER 1 + SHAKE TABLE II***

Ilha Solteira - SP

2021



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de Ilha Solteira

LEONARDO LEANDRO DE MORAES

**PROJETO DE CONTROLE CHAVEADO CONSIDERANDO SATURAÇÃO NO
ATUADOR E MINIMIZAÇÃO DA NORMA H_∞ PARA O SISTEMA *ACTIVE MASS*
*DAMPER I + SHAKE TABLE II***

Trabalho de Graduação apresentado à Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" câmpus de Ilha Solteira, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Engenheiro Eletricista.

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – UNESP

Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Ilha Solteira - SP

2021

FICHA CATALOGRÁFICA

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

M827p Moraes, Leonardo Leandro.
Projeto de controle chaveado considerando saturação no atuador e minimização da norma H^∞ para o sistema active mass damper 1 + shake table II / Leonardo Leandro Moraes. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2021
112 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Elétrica) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2021

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Inclui bibliografia

1. Controle chaveado. 2. Controle H^∞ . 3. Controle de sistemas lineares incertos. 4. Saturação do sinal de controle. 5. Desigualdade Matricial Linear (LMI).


Raiane da Silva Santos

Supervisora Técnica de Seção
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação
CRB/8 - 9999

FOLHA DE APROVAÇÃO**ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE GRADUAÇÃO**

Aos dois dias do mês de dezembro do ano de dois mil e vinte e um, o discente **LEONARDO LEANDRO DE MORAES**, matriculado sob o R.A 151052107, tendo como banca examinadora o seu orientador, o Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto, Prof. Dr. Diogo Ramalho de Oliveira e Me. Igor Thiago Minari Ramos, apresentou o Trabalho de Graduação intitulado "PROJETO DE CONTROLE CHAVEADO CONSIDERANDO SATURAÇÃO NO ATUADOR E MINIMIZAÇÃO DA NORMA H_∞ PARA O SISTEMA ACTIVE MASS DAMPER 1 + SHAKE TABLE II", obtendo a nota **10,0 (dez inteiros)** e conceito **APROVADO**.



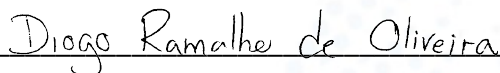
Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

- orientador -



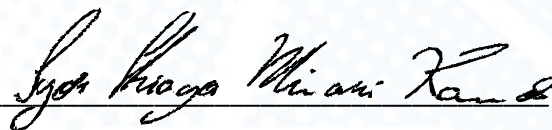
Leonardo Leandro de Moraes

- discente -



Prof. Dr. Diogo Ramalho de Oliveira

- Membro da Banca -



Me. Igor Thiago Minari Ramos

- Membro da Banca -

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem ele nada é possível, agradeço aos meus pais, Everaldo Leandro de Moraes e Edina Bonfim de Moraes, que sempre estiveram ao meu lado, me dando todo apoio, partilhando momentos difíceis e felizes ao longo da minha vida e me auxiliando em todas as decisões pessoais e profissionais, além de serem meus maiores exemplos de vida, de seres humanos e de família.

Aos meus falecidos avós, que infelizmente não estarão presente neste momento, mas sei que de onde estiverem olharam por mim ao longo de toda minha vida e sempre os levarei em meu coração.

Ao meu irmão, Eduardo Leandro de Moraes por todo incentivo e ajuda durante toda minha vida.

Ao Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira por me apresentar a área de controle, pela qual pretendo seguir minha carreira, por ter me proporcionado a oportunidade de aprender e melhorar como profissional, além trabalhar ao lado de profissionais talentosos e dedicados.

Agradeço em especial ao Prof. Me. Igor Thiago Minari Ramos, Renan Natali Suman por todo tempo que passamos juntos ao longo da realização deste trabalho, toda ajuda e suporte que me deram e aos companheiros do LPC pela ajuda prestada, pelos conselhos e, principalmente, pela amizade.

Ao grupo de estudos Sabidos, formado no ano de 2016 pelos amigos de turma do curso de Engenharia Elétrica 2015/1: Antonio Nossa, Bruno Garavelli, Giovane Carnio, Hugo Garofalo, Junio Ferrarezi, Mateus Filipe, Luan Vógas e Lucas Bertolossi pela amizade e companheirismo durante todos esses anos.

RESUMO

Neste trabalho são apresentados projetos, simulações e implementações de controladores para o sistema *Active Mass Damper I + Shake Table II*, equipamentos didáticos desenvolvido pela Quanser[®]. Será apresentada a descrição do sistema através de espaço de estados para o desenvolvimento do projeto dos controladores baseado na teoria de estabilidade de sistemas dinâmicos proposta por Aleksandr Lyapunov, no qual os controladores serão projetados com base em desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMIs). Será considerada a aplicação em tempo real em uma estrutura flexível, representando um prédio, objetivando a redução da vibração estrutural que um possível terremoto poderá causar, através do controle de uma massa móvel (*Active Mass Damper* - AMD) localizada no topo da estrutura. Em diversas aplicações práticas, em virtude das restrições operacionais dos equipamentos, no projeto de controle é necessário considerar que a lei de controle está sujeita à saturação do atuador. Primeiramente, utilizando uma metodologia encontrada na literatura para resolver o problema da saturação do atuador, apresenta-se uma lei de controle chaveada que escolhe um ganho do controlador de realimentação do vetor de estado, que pertence a um conjunto de ganhos conhecidos, que minimiza a derivada da função de Lyapunov do tipo quadrática. Desta forma, será proposto o modelo linear do sistema considerando a matriz de entrada do distúrbio. Como o sistema estará sujeito a distúrbios variantes no tempo, será garantido o índice de performance H_∞ e a garantia de que a trajetória de estado permaneça dentro da região de operação do sistema. Além disso, serão consideradas a saturação e uma possível falha estrutural no sinal de controle.

Palavras-chave: Controle chaveado, Controle H_∞ , Controle de sistemas lineares incertos, Saturação do sinal de controle, Desigualdade matricial linear (LMI).

ABSTRACT

In this work we present projects, simulations and implementations of controllers for the Active Mass Damper 1 + Shake Table II system, teaching equipment developed by Quanser[®]. State system description will be presented for the development of the controllers project based on the theory of stability of dynamic systems proposed by Aleksandr Lyapunov, in which the controllers will be designed based on linear matrix inequalities (LMIs). Considering the application in real time in a flexible structure, representing a building, aiming to reduce the structural vibration that a possible earthquake may cause, by controlling a (Active Mass Damper - AMD) located at the top of the structure. In a number of practical applications, due to the operating restrictions of equipment, in the control project it is necessary to consider that the control law is subject to actuator saturation. First, using a methodology found in the literature to solve the problem of actuator saturation, a control law is presented. A switched control law that chooses a gain from the state vector feedback controller, which belongs to a set of known gains, which minimizes the derivative of the quadratic type Lyapunov function. Thus, the system linear model will be proposed considering the input matrix of the disturbance. Since the system will be subject to time-varying disturbances, the H_∞ performance index will be guaranteed and ensure that the state trajectory remains within the system operating region. In addition, saturation and a possible structural failure in the control signal will be considered.

Keywords: Switched control, H_∞ control, Control of uncertain linear systems, Control signal saturation, Linear matrix inequality (LMI).

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – (a) Estado de Equilíbrio Estável; (b) Estado de Equilíbrio Assintoticamente Estável; (c) Estado de Equilíbrio Instável.	23
Figura 2 – Interpretação gráfica da função $sat(u_l(t))$	30
Figura 3 – Relações de inclusão entre os conjuntos $\mathcal{X}$, $\mathcal{L}(H_j)$ e $\mathcal{E}(P, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$ e a trajetória do vetor de estados $x(t)$ para $w(t) = 0$ e $t \geq 0$	37
Figura 4 – Relações de inclusão entre os conjuntos $\mathcal{X}$, $\mathcal{L}(H_j)$, $\mathcal{E}(P, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$ e $\mathcal{E}(P, \varepsilon_0)$, e a trajetória do vetor de estados $x(t)$ para $w(t) \in \mathcal{W}$ e $t \geq 0$	37
Figura 5 – Protótipo AMD - 1 + STII da Quanser pertencente ao LPC da FEIS - UNESP.	39
Figura 6 – Modelo esquemático do AMD-1.	40
Figura 7 – Sinal de distúrbio com amplitude de 1 centímetro e frequência de 2Hz.	44
Figura 8 – Deslocamento do carro e do piso superior em malha aberta.	45
Figura 9 – Velocidade do carro e do piso superior em malha aberta.	45
Figura 10 – Deslocamento do carro e do piso superior, sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada e ganhos (4.4).	48
Figura 11 – Velocidade do carro e do piso superior considerando lei de controle chaveada e ganhos (4.4).	48
Figura 12 – Deslocamento do carro e do piso superior, sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada e ganhos (4.7) com taxa de decaimento $\beta = 2$	50
Figura 13 – Velocidade do carro e do piso superior considerando lei de controle chaveada e ganhos (4.7) com taxa de decaimento $\beta = 2$	51
Figura 14 – Deslocamento do carro e do piso superior, sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada e ganhos (4.10), taxa de decaimento $\beta = 2$ e restrição na norma do controlador.	53
Figura 15 – Velocidade do carro e do piso superior considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.10), taxa de decaimento $\beta = 2$ e restrição na norma do controlador.	54
Figura 16 – Deslocamento do carro e do piso superior, sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.13), taxa de decaimento $\beta = 2$, considerado a região de operação e saturação.	56
Figura 17 – Velocidade do carro e do piso superior considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.13), taxa de decaimento $\beta = 2$, considerado a região de operação e saturação.	57
Figura 18 – Sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.13), taxa de decaimento $\beta = 2$, considerado a região de operação e saturação para o intervalo $t[9,5 \ 10,5]$ s.	58

Figura 19 – Deslocamento do carro e do piso superior, sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.16), taxa de decaimento $\beta = 2$, considerado a região de operação e saturação com restrição na norma do controlador.	60
Figura 20 – Velocidade do carro e do piso superior considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.16), taxa de decaimento $\beta = 2$, considerado a região de operação e saturação com restrição na norma do controlador.	61
Figura 21 – Deslocamento do carro e do piso superior, sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.19), taxa de decaimento $\beta = 2$, considerado a região de operação e saturação, restrição na norma do controlador e expansão do volume elipsoidal.	64
Figura 22 – Velocidade do carro e do piso superior considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.19), taxa de decaimento $\beta = 2$, considerado a região de operação e saturação, restrição na norma do controlador e expansão do volume elipsoidal.	64
Figura 23 – Parâmetros do sistema para modelagem da matriz H	65
Figura 24 – Deslocamento do carro e do piso superior, sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.39), considerado a minimização da norma H_∞	71
Figura 25 – Velocidade do carro e do piso superior considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.39), considerado a minimização da norma H_∞	71
Figura 26 – Falha no atuador x Custo Garantido H_∞	72
Figura 27 – Sinal de controle para o tempo de amostragem $t = 2 \times 10^{-3}$	74
Figura 28 – Transformada Rápida de Fourier do sinal de controle para o tempo de amostragem $t = 2 \times 10^{-3}$	75
Figura 29 – Sinal de controle para o tempo de amostragem $t = 1 \times 10^{-6}$	75
Figura 30 – Transformada Rápida de Fourier do sinal de controle para o tempo de amostragem $t = 1 \times 10^{-6}$	76
Figura 31 – Sinal de controle com restrição na norma do controlador, para o tempo de amostragem $t = 2 \times 10^{-3}$	76
Figura 32 – Transformada Rápida de Fourier do sinal de controle para o tempo de amostragem $t = 2 \times 10^{-3}$	77
Figura 33 – Sinal de controle com restrição na norma do controlador, para o tempo de amostragem $t = 1 \times 10^{-6}$	77
Figura 34 – Transforma Rápida de Fourier do sinal de controle para o tempo de amostragem $t = 1 \times 10^{-6}$	78
Figura 35 – Implementação - Deslocamento do carro e do piso superior, sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada e ganhos (4.7) com taxa de decaimento $\beta = 2$	79

Figura 36 – Implementação - Velocidade do carro e do piso superior considerando lei de controle chaveada e ganhos (4.7) com taxa de decaimento $\beta = 2$	80
Figura 37 – Implementação - Deslocamento do carro e do piso superior, sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada e ganhos (4.19) com taxa de decaimento $\beta = 2$	81
Figura 38 – Implementação - Velocidade do carro e do piso superior considerando lei de controle chaveada e ganhos (4.19) com taxa de decaimento $\beta = 2$	82
Figura 39 – Implementação - Deslocamento do carro e do piso superior, sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.39), considerando a minimização da norma H_∞	83
Figura 40 – Implementação - Velocidade do carro e do piso superior considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.39), considerando a minimização da norma H_∞	84
Figura 41 – Sinal de controle antes da saturação considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.39), considerando a minimização da norma H_∞	85
Figura 42 – Implementação - Deslocamento e velocidade do carro e do piso superior em modo passivo, sobre a ação do terremoto de Northridge.	86
Figura 43 – Implementação - Deslocamento do carro e do piso superior, sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.39) e considerando a minimização da norma H_∞	87
Figura 44 – Implementação - Velocidade do carro e do piso superior, considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.39) e considerando a minimização da norma H_∞	87
Figura 45 – Implementação - Deslocamento do carro e do piso superior, sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.39) e considerando a minimização da norma H_∞ , com falha de 40% no atuador.	88
Figura 46 – Implementação - Velocidade do carro e do piso superior, considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.39) e considerando a minimização da norma H_∞ , com falha de 40% no atuador.	88

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros do sistema AMD-1.	41
Tabela 2 – Comparação do índice de desempenho ϖ para o Projeto 6, considerando o projeto de controlador robusto de único ganho e controlador chaveado. . . .	65
Tabela 3 – Comparação do índice de desempenho Custo Garantido $H_{\infty}(\gamma)$ para o Projeto 7, considerando o projeto de controlador robusto de único ganho e controlador chaveado.	72

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AMD	<i>Active Mass Damper</i> - (Massa ativa amortecedora)
STII	<i>Shake Table II</i>
ATS	<i>Active Tendons Systems</i> - (Sistema de tendões ativos)
TMD	<i>Tuned Mass Dampers</i> - (Amortecedor de massa sintonizado)
AVS	<i>Active Variable Stiffness System</i> - (Sistema de rigidez variável ativa)
AVD	<i>Active Variable Damper Systems</i> - (Amortecedor variável ativo)
LMI	<i>Linear Matrix Inequalities</i> - (Desigualdades matricial linear)
BMI	<i>Bilinear Matrix Inequality</i> - (Desigualdade matricial bilinear)
PI	<i>Proportional and Integral</i> -(Proporcional e Integral)
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i> - (Transformada Rápida de Fourier)
DFT	<i>Discrete Fourier Transform</i> - (Transformada Discreta de Fourier)

LISTA DE SÍMBOLOS

I	Matriz Identidade com dimensão apropriada.
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
n	Número de incertezas do sistema.
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Conjunto das matrizes reais de dimensão $m \times n$.
$\mathbb{K}_r$	Conjunto $\{1, 2, \dots, r\}$, $r \in \mathbb{N}$.
M^T	Transposta da matriz real M .
$M \geq (>)0$	Matriz M simétrica e semi-definida (definida) positiva.
$M \leq (<)0$	Matriz M simétrica e semi-definida (definida) negativa.
$co\{\cdot\}$	Combinação convexa.
$*$	Bloco simétrico de uma matriz simétrica.
Λ_r	Simplex unitário $\Lambda_r = \{\alpha \in \mathbb{R}^r : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, i \in \mathbb{K}^r\}$.
M_z	$M_z = \sum_{i=1}^r \alpha_i M_i$, $\alpha \in \Lambda_r$.
$\ \xi\ _2^2$	Quadrado da norma de uma trajetória $\xi(t)$, igual a $\int_{t=0}^{\infty} \xi(t)^T \xi(t) dt$.
$\mathcal{L}_2$	Conjunto de todas as trajetórias $\xi(t)$ tais que $\ \xi\ _2^2 < \infty$.
$\det(M)$	Determinante da matriz M .
$\subset$	Está contido.
$\forall$	Para todo.
$\in$	Pertence.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Objetivo	18
1.2	Estrutura do trabalho	19
2	CONCEITOS FUNDAMENTAIS E PROPRIEDADES	21
2.1	Espaço de estados	21
2.2	Análise de estabilidade segundo Lyapunov	21
2.3	Sistemas Lineares Incertos com realimentação de estados	25
2.3.1	Controle chaveado para sistemas lineares incertos	25
2.4	Taxa de decaimento para sistemas com realimentação de estado	27
2.5	Restrição da norma do sinal de controle	28
2.6	Saturação do atuador	29
2.7	Controlador chaveado para sistemas incertos considerando saturação no atuador e limitação da região de operação	32
2.8	Expansão do volume do conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(P, 1)$	34
2.9	O controle H_∞ considerando a região de operação	35
3	ACTIVE MASS DAMPER 1 + SISTEMA SHAKE TABLE II	39
3.1	Descrição do equipamento	39
3.2	Modelo matemático do sistema	40
4	PROJETOS E SIMULAÇÕES DOS CONTROLADORES	43
4.1	Sistema incerto e descrição do distúrbio	43
4.1.1	Análise do sistema <i>Active Mass Damper 1 + Shake Table II</i> em malha aberta	45
4.1.2	Projeto 1: Controlador robusto chaveado	46
4.1.3	Projeto 2: Controlador robusto chaveado com restrição na taxa de decaimento	49
4.1.4	Projeto 3: Controlador robusto chaveado com restrição na taxa de decaimento e restrição na norma do controlador	51
4.1.5	Projeto 4: Controlador robusto chaveado com restrição na taxa de decaimento considerando região de operação e saturação do atuador	54
4.1.6	Projeto 5: Controlador chaveado com restrição na taxa de decaimento considerando a região de operação, saturação do atuador e restrição na norma do controlador	58
4.1.7	Projeto 6: Controlador robusto chaveado com restrição na taxa de decaimento considerando região de operação, saturação do atuador, restrição da norma do controlador e expansão do conjunto elipsoidal	61

4.1.8	Projeto 7: Controlador robusto chaveado considerando a minimização da norma H_∞ e região de operação	65
5	ANÁLISE DA FREQUÊNCIA DE AMOSTRAGEM NA RESPOSTA DINÂMICA DO SISTEMA	73
5.1	Teorema da amostragem de Nyquist-Shannon	73
5.2	Análise no domínio da frequência utilizando a Transformada Rápida de Fourier	74
5.3	Comentário	78
6	IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA DOS CONTROLADORES	79
6.1	Implementação 1: Controlador robusto chaveado com restrição na taxa de decaimento	79
6.2	Implementação 2: Controlador robusto chaveado com restrição na taxa de decaimento considerando a região de operação, saturação do atuador, restrição da norma do controlador e expansão do conjunto elipsoidal	81
6.3	Implementação 3: Controlador robusto chaveado considerando a minimização da norma H_∞ e região de operação	83
6.4	Implementação 4: Sistema <i>Active Mass Damper 1 + Shake Table II</i> sobre a ação do terremoto de Northridge, considerando o projeto de controle H_∞ realizado em 6.3.	85
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	89
7.1	Perspectivas futuras e contribuições	90
	Referências	91
	Anexos	94
ANEXO A	Projeto 1 - Controlador robusto chaveado	95
ANEXO B	Projeto 2: Controlador robusto chaveado com restrição na taxa de decaimento	97
ANEXO C	Projeto 3: Controlador robusto chaveado com restrição na taxa de decaimento e restrição na norma do controlador	99
ANEXO D	Projeto 4: Controlador robusto chaveado com restrição na taxa de decaimento considerando região de operação e saturação do atuador	101
ANEXO E	Projeto 5: Controlador chaveado com restrição na taxa de decaimento considerando a região de operação, saturação do atuador e restrição na norma do controlador	103

ANEXO F	Projeto 6: Controlador robusto chaveado com restrição na taxa de decaimento considerando região de operação, saturação do atuador, restrição da norma do controlador e expansão do conjunto elipsoidal .	106
ANEXO G	Projeto 7: Controlador robusto chaveado considerando a minimização da norma H_∞ e região de operação	109

1 INTRODUÇÃO

Em sistemas estruturais, é necessário garantir a segurança e a manutenção contra riscos naturais, como ventos fortes e terremotos. Essas cargas dinâmicas podem causar vibrações indesejadas nas estruturas e, para reduzi-las, sistemas de controle estruturais têm sido desenvolvidos (PARK; PARK, 2019).

De acordo com (HOUSNER et al., 1997), conforme citado por (HUO et al., 2008), os sistemas de controle estruturais geralmente são classificados de acordo com o tipo de dispositivo utilizado, sendo estes: passivo, ativo e semi-ativo ou híbrido. O sistema de controle ativo é aquele em que um atuador de controle de fonte externa aplica forças à estrutura de maneira prescrita, incluindo sistema de tendões ativos ATS e massa ativa amortecedora AMD. Um sistema de controle passivo não requer uma fonte de energia externa, como método de isolamento básico, e faz uso apenas de dispositivos de dissipação de energia, amortecedor de massa sintonizado TMD e amortecedor de líquido sintonizado. O controle semi-ativo ou híbrido implica o uso combinado de um sistema de controle ativo e sistemas de controle passivo. Os sistemas de controle híbridos são uma classe de sistemas ativos em que somente uma pequena magnitude de energia externa é necessária para alterar os parâmetros de controle do sistema, como o sistema AVS de rigidez variável ativa e o amortecedor variável ativo AVD (LI; HUO, 2010).

Devido à necessidade de adicionar grandes quantidades de massa para a implementação de controladores passivos surge o interesse na implementação de controladores ativos de vibração (HURLEBAUS; GAUL, 2006). Os sistemas de controle ativo possuem a capacidade de adaptar-se a diferentes condições de carga e controlar a vibração da estrutura.

Em (KOBORI et al., 1991), conforme citado por (HUO et al., 2008), grande parte dos dispositivos de controle ativo estudados são caracterizados como (AMD), que foram desenvolvidos com a inserção de um atuador controlado ativo em um amortecedor de massa sintonizado (TMD). Na atualidade existe um número considerável de estruturas que possuem dispositivos de controle ativo de vibrações. Países como Japão e a China são os que mais investem no desenvolvimento de controladores ativos para que as estruturas tenham um bom comportamento quando sujeitas a ações dinâmicas externas (RODRIGUES, 2011). Em 1989, o edifício Kyobashi Seiwa em Tóquio, Japão, foi construído utilizando um sistema do tipo (AMD), tornando-o o primeiro edifício no mundo a utilizar uma estrutura ativa.

Ao longo da história, diversos trabalhos vem sendo desenvolvidos sobre controladores chaveados. Isto se deve ao melhor desempenho destes controladores se comparados com os controladores de um único ganho, apresentando uma maior região de factibilidade (OLIVEIRA et al., 2017) e (SOUZA, 2013). Esses controladores são orientados por uma lei de chaveamento na qual para cada instante de tempo é possível obter um ganho pertencente a um conjunto de

ganhos.

Para projetos com problemas, envolvendo controladores ativos para vibração de estruturas flexíveis, um critério a ser utilizado é a minimização da norma H_∞ (HU; NG, 2005), que representa a atenuação do pico da resposta em frequência do sistema controlado, mantendo a estabilidade. Para o caso em particular de problemas de controle de vibração, é interessante a redução do valor de pico, que é associado à redução dos picos de ressonância.

Em particular a abordagem do controle H_∞ se torna interessante por aumentar a capacidade do sistema para rejeitar distúrbios externos, como também para aumentar a sua robustez, atenuando o efeito do distúrbio (*entrada exógena*) na saída do sistema e por consequência melhorar o desempenho do sistema controlado. Uma das metodologias empregadas na literatura para se resolver o problema de controle H_∞ se dá por meio de sua formulação como um problema de desigualdades matriciais lineares do inglês (*Linear Matrix Inequalities - LMI*) (BOYD et al., 1994).

Para projetos de controle envolvendo a abordagem do controle H_∞ é importante considerar os limites de saturação dos componentes do sistema de controle e as eventuais limitações do sistema físico. A desconsideração destes limites podem levar a uma perda de desempenho do sistema.

Inúmeros trabalhos como (JI Z.; XIE, 2006) e (DEAECTO G.; DAAFOUZ, 2010) se dedicaram ao estudo sobre a metodologia H_∞ para sistemas chaveados.

O sistema estudado neste trabalho é o *Active Mass Damper 1 + Shake Table II*, que é composto por uma estrutura que simula um edifício de um andar, tendo em seu piso superior um sistema de amortecimento com uma massa móvel (QUANSER, 2012a), na qual tem-se as seguintes variáveis de estados: $(x_c(t))$ deslocamento do carro, $(x_f(t))$ deslocamento do piso superior, $(\dot{x}_c(t))$ velocidade do carro e $(\dot{x}_f(t))$ velocidade do piso superior. A consideração do distúrbio no sistema é representada por meio da matriz H , que pode ser entendida como a matriz na qual os estados pertinentes serão influenciados pelo distúrbio aplicado.

1.1 Objetivo

O principal objetivo deste trabalho é apresentar projetos de controladores chaveados, nos quais serão considerados índices de desempenho, sendo o foco principal a atenuação do distúrbio no sistema por meio da minimização da norma H_∞ como em (OLIVEIRA et al., 2017). Neste trabalho também será apresentada uma comparação entre os projetos de controle robusto com único ganho, e o projeto de controle robusto chaveado para o sistema *Active Mass Damper 1 + Shake Table II*.

Para o projeto de controle considerando a atenuação do distúrbio por meio da minimização da norma H_∞ será necessária a obtenção da matriz H . Neste trabalho será utilizada a matriz

H apresentada em (SUMAN, 2020), considerado que a força provocada pelo distúrbio é igual à massa do sistema vezes a aceleração, que foi obtida de forma análoga com base na comparação entre as dinâmicas dos sistemas *Active Mass Damper 1 + Shake Table II*, com o sistema de suspensão ativa de bancada, fabricado pela QUANSER®. Como contribuição deste trabalho, será proposta uma modelagem analítica da matriz H do sistema estudado.

Por fim, será apresentada uma análise da influência da frequência de amostragem, baseado no teorema da amostragem de Nyquist-Shannon, utilizando como ferramenta para obtenção das frequências dos sinais a Transformada Rápida de Fourier (FFT).

As técnicas adotadas para o projeto dos controladores usadas neste trabalho são descritas por LMIs. Quando as LMIs são factíveis, uma solução para o problema pode ser obtida usando a interface YALMIP, (LÖFBERG, 2004) com o *solver* LMILab (GAHINET et al., 1994), utilizando o *software* *MatLab/Simulink*®.

1.2 Estrutura do trabalho

Neste trabalho serão apresentadas a teoria e metodologia para o projeto de um sistema de controle para o conjunto *Active Mass Damper 1 + Shake Table II* desenvolvido pela Quanser®, utilizando o *software* *MatLab/Simulink*®.

As implementações dos sistemas de controle projetados foram realizadas no Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) do Departamento de Engenharia Elétrica FEIS-UNESP. O sistema é descrito através de variáveis de estado e para o projeto do controlador serão considerados índices de desempenho, região de operação na qual as trajetórias do vetor de estado devem permanecer, garantindo assim a estabilidade do sistema, saturação do atuador, incertezas politópicas e a presença de distúrbio externo que afeta a saída do sistema.

Para uma apresentação adequada do tema e dos resultados obtidos, este trabalho está organizado da seguinte forma:

- Capítulo 1: É apresentada uma breve introdução a respeito do tema tratado neste trabalho, abordando a história da arte, citando os trabalhos desenvolvidos até o momento que abordam a temática. Apresenta os objetivos gerais do trabalho e a organização do texto.
- Capítulo 2: Apresenta os conceitos fundamentais e as teorias necessárias para a compreensão e desenvolvimento deste trabalho, como a representação de um sistema dinâmico através de espaço de estados. A seguir é apresentado o critério de estabilidade segundo Lyapunov, sendo as condições de estabilidade dadas em termos de LMIs. Aborda-se também, a teoria de LMIs, a resolução de LMIs usando o *software* *MatLab*® e a teoria de estabilidade quadrática para sistemas incertos usando LMIs. Além disso, também são apresentadas técnicas que melhoram o desempenho do sistema, como a restrição da taxa de decaimento para sistemas com realimentação de estado e a restrição de norma do vetor

de realimentação. E, para finalizar a parte teórica, são estudadas técnicas que permitem considerar no projeto do controlador a saturação no atuador e a influência de distúrbio na saída do sistema.

- Capítulo 3: É feita a descrição do equipamento *Active Mass Damper 1 + Shake Table II*, desenvolvido pela Quanser[®], a modelagem matemática do equipamento e sua descrição em espaço de estados.
- Capítulo 4: São apresentados os resultados da simulação dos projetos de controle considerando os conceitos fundamentais apresentados no Capítulo 2, para o sistema *Active Mass Damper 1 + Shake Table II*, descrito por variáveis de estado, considerando o sistema incerto e índices de desempenho com o objetivo de melhorar o desempenho do sistema.
- Capítulo 5: É apresentada uma análise da influência da frequência de amostragem na resposta dinâmica do sistema, baseado no teorema da amostragem de Nyquist-Shannon.
- Capítulo 6: Contém os resultados das implementações dos projetos de controle, bem como os comentários pertinentes de cada projeto.
- Capítulo 7: Apresenta uma conclusão geral sobre os resultados obtidos durante a realização deste trabalho e propostas de trabalhos futuros.

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS E PROPRIEDADES

Neste capítulo será apresentada toda a teoria utilizada para a elaboração dos projetos de controle, baseados em estudos já consolidados e disponíveis na literatura, que serão fundamentais no decorrer deste trabalho.

2.1 Espaço de estados

Os sistemas de controle são projetados com o intuito de realizar tarefas com alto grau de especificidade e precisão, sendo necessário modelar matematicamente a planta e, em seguida, projetar o controlador com o melhor custo-benefício para a atividade. Este trabalho tem como base a teoria de espaço de estados, que permite descrever a dinâmica de tais sistemas.

Sistemas de controle através de espaços de estados podem ser escritos, de maneira geral, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t),\end{aligned}\tag{2.1}$$

sendo $u(t)$ a entrada de controle, $y(t)$ a saída e $x(t)$ os estados do sistema.

Esses sistemas são descritos por equações diferenciais ordinárias e se apresentam conforme a equação abaixo:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t),\tag{2.2}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \end{bmatrix} u(t).\tag{2.3}$$

2.2 Análise de estabilidade segundo Lyapunov

No estudo de sistemas de controle, um dos critérios mais importantes é a estabilidade do sistema. Para sistemas lineares e invariantes no tempo existem uma gama de métodos para analisar sua estabilidade tais como o Critério de Estabilidade de Nyquist, Critério de Estabilidade de Routh e o Método de Lyapunov, que será apresentado a seguir dado a sua importância na realização deste trabalho.

Considerando um sistema dinâmico descrito por espaço de estados como em (2.1) e supondo $u(t) = 0$, tem-se:

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \quad (2.4)$$

Para realizar a análise de estabilidade segundo Lyapunov, é necessário definir alguns conceitos (OGATA, 2011).

Estado de Equilíbrio : um vetor constante x_e é dito estado de equilíbrio do sistema descrito em (2.4) se $\dot{x}(t) = Ax(t) = 0$. Quando as derivadas das variáveis de estado são nulas, tem-se que as variáveis de estado não estão variando no tempo e, portanto, o estado do sistema permanece em x_e e este é denominado estado de equilíbrio ou ponto de equilíbrio do sistema (ASSUNÇÃO E.; TEIXEIRA, 2016).

Estabilidade no Sentido de Lyapunov : considere uma região de raio definida em torno do estado de equilíbrio x_e . A mesma é representado por:

$$\|x - x_e\| \leq k, \quad (2.5)$$

sendo $\|x - x_e\|$ a norma euclidiana, que por sua vez, é definida como:

$$\|x - x_e\| = [(x_1 - x_{1e})^2 + (x_2 - x_{2e})^2 + \dots + (x_n - x_{ne})^2]^{1/2}. \quad (2.6)$$

Considere que $S(\xi)$ seja a região que consiste de todos os pontos tais que:

$$\|x - x_e\| \leq \xi, \quad (2.7)$$

sendo x_0 o estado inicial e $S(\vartheta)$ a região que consiste em todos os pontos para os quais:

$$\|x - x_e\| \leq \vartheta, \forall t > 0. \quad (2.8)$$

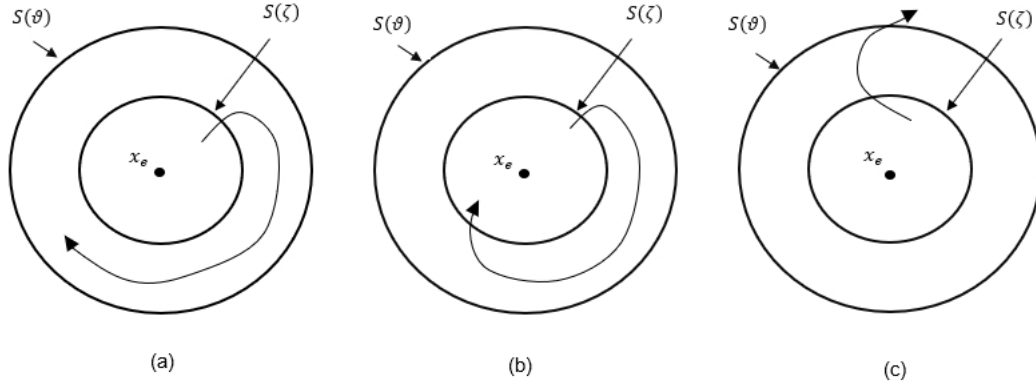
Um estado de equilíbrio x_e do sistema (2.4) é dito estável de acordo com Lyapunov se, correspondendo a cada $S(\vartheta)$, houver uma $S(\xi)$ tal que as trajetórias iniciadas em $S(\xi)$ não deixem $S(\vartheta)$ à medida que t aumenta indefinidamente.

A definição e interpretação geométrica de estabilidade assintótica e instabilidade são assimiladas como em (ASSUNÇÃO E.; TEIXEIRA, 2016).

Estabilidade Assintótica : um estado de equilíbrio x_e do sistema (2.4) é dito assintoticamente estável se for estável no sentido de Lyapunov e se toda solução começando em $S(\xi)$ converge para x_e sem deixar $S(\vartheta)$ à medida t que aumenta indefinidamente.

Instabilidade : um estado de equilíbrio x_e é dito instável se, para algum número real $\vartheta > 0$, não importando sua dimensão, sempre há um estado x_0 em $S(\xi)$ tal que a trajetória começando neste estado deixa a região $S(\vartheta)$.

Figura 1 – (a) Estado de Equilíbrio Estável; (b) Estado de Equilíbrio Assintoticamente Estável; (c) Estado de Equilíbrio Instável.



Fonte : Adaptado de (OGATA, 2011).

Na Figura 1 são apresentadas as regiões descritas anteriormente.

Função Escalar Definida Positiva : uma função escalar $V(x)$ é dita definida positiva em uma região Ω se $V(x) > 0$ para todos os estados não nulos x na região Ω e $V(0) = 0$.

Função Escalar Definida Negativa : uma função escalar $V(x)$ é dita definida negativa em uma região Ω se $-V(x)$ é dita positiva.

Função Escalar Semidefinida Positiva : uma função escalar $V(x)$ é dita semidefinida positiva se for positiva em quase todos os estados de uma região Ω , exceto na origem e em outros estados de Ω , onde seu valor é zero.

Função Escalar Semidefinida Negativa : uma função escalar $V(x)$ é dita semidefinida negativa em uma região Ω se $-V(x)$ é semidefinida positiva.

Função Escalar Indefinida : uma função escalar $V(x)$ é dita indefinida se na região Ω assume tanto valor positivo quanto negativo, independentemente da dimensão da região Ω .

Forma Quadrática de Funções Escalares : as formas quadráticas constituem uma classe de funções escalares que desempenham um papel importante na análise de estabilidade. Essa classe de funções pode ser descrita por:

$$V(x) = x^T P x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ é um vetor e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica.

Para verificar se a matriz P é ou não definida positiva emprega-se o Critério de Sylvester, estabelece que uma matriz real e simétrica A é definida positiva, se e somente se, todos os menores principais de A forem positivos, ou seja:

$$\det(A_k) > 0, \forall k = \{1, 2, \dots, n\}, \quad (2.10)$$

sendo A_k o menor principal de ordem k da matriz A . Logo, tem-se que a matriz P será definida positiva se as restrições abaixo forem verdadeiras.

$$P_{11} > 0, \det \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix} > 0, \det \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots & P_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (2.11)$$

A positividade da matriz P , também pode ser determinada por meio de seus autovalores, caso sejam positivos, pode-se afirmar que a matriz P é dita simétrica definida positiva.

Teorema 1. (BOYD et al., 1994) Considere o sistema descrito por $\dot{x}(t) = Ax(t)$, sendo $x(t)$ o vetor de estado e A uma matriz não-singular $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ constante e com elementos reais. Uma condição necessária e suficiente para que o estado de equilíbrio x_e seja assintoticamente estável é que exista uma matriz P simétrica definida positiva tal que:

$$A^T P + PA < 0. \quad (2.12)$$

Prova 1. Considere o sistema proposto em (2.4), sendo $x(t)$ o vetor de estados e A uma matriz constante e não-singular ($\det(A) \neq 0$), desta forma, seu único estado de equilíbrio é a origem $x_e = 0$. A estabilidade segundo Lyapunov considerando a seguinte função na forma quadrática:

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t), \quad (2.13)$$

sendo $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica e definida positiva. A derivada de $V(x(t))$ em relação ao tempo é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t), \\ \dot{V}(x(t)) &= (Ax(t))^T P x(t) + x(t)^T P (Ax(t)), \\ \dot{V}(x(t)) &= x(t)^T (A^T P + PA) x(t). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Considerando a função $V(x(t))$ definida positiva (sempre positiva para $x \neq 0$), para que o sistema seja assintoticamente estável é necessário que $\dot{V}(x(t))$ seja definida negativa.

$$\dot{V}(x(t)) = -x(t)^T Q x(t), \quad Q > 0, \quad (2.15)$$

Comparando as equações (2.15) e (2.14):

$$-Q = (A^T P + PA), \quad (2.16)$$

ou,

$$A^T P + PA = -Q, \text{ com } P = P^T > 0 \text{ e } Q > 0. \quad (2.17)$$

2.3 Sistemas Lineares Incertos com realimentação de estados

Certos sistemas de controle, podem apresentar parâmetros incertos (*incertezas politópicas*), que podem ser características resultantes de variação da massa do sistema, falhas apresentadas no atuador, causadas inclusive por desgastes dos componentes, entre outros motivos.

Considere um sistema sujeito a falhas, representado na equação abaixo por uma combinação convexa:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t), \quad (2.18)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o vetor de estado do sistema, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ o sinal de controle e

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i, B(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i B_i, e \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, \quad (2.19)$$

considerando $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

2.3.1 Controle chaveado para sistemas lineares incertos

Considere o sistema descrito por (2.1), um sistema linear e invariante no tempo. Admitindo que todas as variáveis de estado estão disponíveis para realimentação, considerando um sistema incerto como em (2.18), sujeito a lei de controle chaveada. A lei de controle chaveado $u_\sigma(t)$ possui uma regra de chaveamento σ que tem a finalidade de selecionar a cada instante de tempo um ganho de realimentação, que pertence a um conjunto de ganhos $K_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $j \in [1, 2, \dots, r]$. De modo que a lei de chaveamento é definida da seguinte forma:

$$u_\sigma(t) = -K_\sigma x(t), \quad \sigma = \arg^* \min \{x(t)^T Q_j x(t)\}, \text{ com } j \in \{1, 2, \dots, r\}, \quad (2.20)$$

sendo que $\arg^* \min \{x(t)^T Q_j x(t)\}$ denota o menor índice $\sigma \in \{1, 2, \dots, r\}$, tal que $\{x(t)^T Q_\sigma x(t)\} = \min \{x(t)^T Q_j x(t)\}$, com $j \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Substituindo (2.20) no sistema (2.18), tem-se:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) - B(\alpha)K_j x(t). \quad (2.21)$$

Simplificando a expressão em (2.21), obtém-se:

$$\dot{x}(t) = (A(\alpha) - B(\alpha)K_j)x(t). \quad (2.22)$$

Teorema 2. Adaptado de (ALVES et al., 2016a) Considere o sistema descrito por (2.18) sujeito à lei de controle dada em (2.20). Assumindo a existência de matrizes simétricas $X > 0$, Q_j e $Z_i \in \mathbb{R}^{n_n \times n_x}$ e uma matriz $M_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ tais que:

$$XA_i^T + A_i X + \bar{Z}_i + \bar{Q}_i + < 0, \quad (2.23)$$

$$-B_i M_j - M_j^T B_i^T - \bar{Z}_i - \bar{Q}_j < 0, \quad (2.24)$$

para todo $i = 1, \dots, r$, então a lei de controle (2.20), sendo que $P = X^{-1}$, $\bar{Q}_j = X^{-1} Q_j X^{-1}$ e os ganhos dos controladores dados por $K_j = M_j X^{-1}$, torna o sistema (2.18) localmente assintoticamente estável.

Prova 2. Considere como candidata à função de Lyapunov a equação (2.13) e sua derivada dada em (2.14), seja o sistema descrito por (2.18) com a lei de controle (2.20), obtêm-se:

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)^T \left(A(\alpha) - B(\alpha) K_j \right)^T P x(t) + x(t)^T P \left(A(\alpha) - B(\alpha) K_j \right) x(t) \quad (2.25)$$

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)^T \left((A(\alpha) - B(\alpha) K_j)^T P + P(A(\alpha) - B(\alpha) K_j) \right) x(t). \quad (2.26)$$

Analisando a parcela que não é função do controlador, tem-se:

$$\begin{aligned} x(t)^T (A(\alpha)^T P + P A(\alpha) + Z(\alpha) + Q(\alpha)) x(t) < 0 \\ A(\alpha)^T P + P A(\alpha) + Z(\alpha) + Q(\alpha) < 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

sendo $Z(\alpha)$ e $Q(\alpha)$, dados conforme (2.19)

Realizando uma transformação de congruência, multiplicando a esquerda e a direita por P^{-1} , tem-se:

$$P^{-1} (A(\alpha)^T P + P A(\alpha) + Z(\alpha) + Q(\alpha)) P^{-1} < 0, \quad (2.28)$$

$$P^{-1} A(\alpha)^T + A(\alpha) P^{-1} + P^{-1} Q(\alpha) P^{-1} + P^{-1} Z(\alpha) P^{-1} < 0. \quad (2.29)$$

Considerando os termos de (2.26) que são função do controlador:

$$x(t)^T (-K_j^T B(\alpha)^T P - P B(\alpha) K_j) x(t) \leq x(t)^T (Z(\alpha) + Q(\alpha)) x(t) \quad (2.30)$$

$$x(t)^T (-K_j^T B(\alpha)^T P - P B(\alpha) K_j - Z(\alpha) - Q(\alpha)) x(t) < 0. \quad (2.31)$$

Realizando uma transformação de congruência, multiplicando a esquerda e a direita por P^{-1} , tem-se:

$$P^{-1} (-K_j^T B(\alpha)^T P - P B(\alpha) K_j - Z(\alpha) - Q(\alpha)) P^{-1} < 0, \quad (2.32)$$

$$-K_j^T P^{-1} B(\alpha)^T - B(\alpha) K_j P^{-1} - P^{-1} Q(\alpha) P^{-1} - P^{-1} Z(\alpha) P^{-1} < 0. \quad (2.33)$$

Sendo $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$ e P uma matriz simétrica, logo a matriz X também será simétrica, desta forma tem-se que $P = P^T$ e $X = X^T$ e realizando as substituições $X = P^{-1}$, $P^{-1} Q(\alpha) P^{-1} = \bar{Q}_j$, $P^{-1} Z(\alpha) P^{-1} = \bar{Z}_i$, $M_j = K_j P^{-1}$ e $M_j^T = K_j^T P^{-1}$, nas equações (2.29) e (2.33), obtêm-se :

$$X A_i^T + A_i X + \bar{Z}_i + \bar{Q}_i < 0, \quad (2.34)$$

$$-B_i M_j - M_j^T B_i^T - \bar{Z}_i - \bar{Q}_j < 0. \quad (2.35)$$

2.4 Taxa de decaimento para sistemas com realimentação de estado

Em sistemas de controle, a velocidade de convergência das variáveis de estado do sistema é de grande importância. A restrição da taxa de decaimento β têm a finalidade de melhorar o desempenho do sistema, tornando o transitório mais rápido. A taxa de decaimento β , é um valor no qual restringe a proximidade dos polos do sistema em relação a origem do plano complexo, de modo que os polos estejam a esquerda de $-\beta$.

Entretanto, quanto maior o valor da taxa de decaimento maior será a norma do controlador associado. Contudo, controladores com norma muito elevada apresentam dificuldades em sua implementação, fazendo-se necessário ponderar esses parâmetros com os interesses do projetista (ALVES U. N. L. T.; DE OLIVEIRA, 2015).

Considerando o sistema controlado em (2.18), a taxa de decaimento é definida como a maior constante positiva β , tal que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\beta t} \|x(t)\| = 0, \quad (2.36)$$

e ainda, se mantenha para todas as trajetórias $x(t)$, $t > 0$ (BOYD et al., 1994).

Considere a função de Lyapunov dada em (2.13), pode-se determinar um limite inferior sobre a taxa de decaimento do sistema (2.18), com:

$$\dot{V}(x(t)) \leq -2\beta V(x(t)), \quad (2.37)$$

Considerando a restrição da taxa de decaimento (2.37) na equação (2.26) sendo $P > 0$ e realizando as simplificações apropriadas, obtém-se:

$$(A(\alpha) - B(\alpha)K_j)^T P + P(A(\alpha) - B(\alpha)K_j) < -2\beta P. \quad (2.38)$$

Teorema 3. *Adaptado de (ALVES et al., 2016a) Considere o sistema descrito por (2.21). Caso exista uma matriz $M_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, com $\beta > 0$, tal que as seguintes LMIs sejam obedecidas:*

$$A_i X + X A_i^T + \bar{Z}_i + \bar{Q}_i + 2\beta X < 0, \quad (2.39)$$

$$-M_j B_i - M_j^T B_i^T - \bar{Z}_i - \bar{Q}_j < 0, \quad (2.40)$$

então a lei de controle (2.20), sendo $K_j = M_j X^{-1}$, torna o sistema (2.18) estável e com taxa de decaimento maior ou igual a β .

Prova 3. Considere o limite representado pela equação (2.37) na equação (2.25), e considerando a lei de controle dada em (2.20), obtêm-se:

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)^T \left(A(\alpha) - B(\alpha)K_j \right)^T P x(t) + x(t)^T P \left(A(\alpha) - B(\alpha)K_j \right) x(t) < -2\beta V(x(t)), \quad (2.41)$$

substituindo a equação (2.13) em (2.40) :

$$x(t)^T \left((A(\alpha) - B(\alpha)K_j)^T P + P(A(\alpha) - B(\alpha)K_j) \right) x(t) < -2\beta x(t)^T P x(t). \quad (2.42)$$

Desenvolvendo a equação acima, tem-se:

$$x(t)^T \left((A(\alpha) - B(\alpha)K_j)^T P + P(A(\alpha) - B(\alpha)K_j) + 2\beta P \right) x(t) < 0. \quad (2.43)$$

A seguinte BMI Bilinear Matrix Inequality é obtida:

$$(A(\alpha) - B(\alpha)K_j)^T P + P(A(\alpha) - B(\alpha)K_j) + 2\beta P < 0, \quad (2.44)$$

Realizando a transformação de congruência, multiplicando por P^{-1} pela esquerda e pela direita, tem-se:

$$P^{-1}A(\alpha)^T - P^{-1}K_j^T B(\alpha)^T + A(\alpha)P^{-1} - B(\alpha)K_j P^{-1} + P^{-1}2\beta < 0. \quad (2.45)$$

Realizando as manipulações necessárias, semelhante ao que foi demonstrado na seção anterior, obtêm-se:

$$A_i X + X A_i^T + \bar{Z}_i + \bar{Q}_i + 2\beta X < 0, \quad (2.46)$$

$$-M_j B_i - M_j^T B_i^T - \bar{Z}_i - \bar{Q}_j < 0. \quad (2.47)$$

Sendo as LMIs (2.39) e (2.40) factíveis, um controlador que estabiliza o sistema realimentado é obtido por $K_j = M_j X^{-1}$.

2.5 Restrição da norma do sinal de controle

Como mencionado em seções anteriores existem determinadas situações na qual a norma do controlador K é elevada, dificultando sua implementação. Logo, se faz necessário limitar o valor da norma do controlador. A seguir é proposto um teorema com essa finalidade.

Teorema 4. (ASSUNÇÃO et al., 2007) Dada uma constante μ_0 , então a norma dos controladores K pode ser descrita utilizando a minimização de η , $\eta > 0$, tal que $KK^T < \eta I \mu_0^2$. O valor ótimo de η pode ser obtido por meio do seguinte problema de otimização:

$$\min(\eta) \begin{bmatrix} \eta I & M \\ M^T & I \end{bmatrix} > 0, \quad (2.48)$$

$$X > \mu_0 I. \quad (2.49)$$

Prova 4. Utilizando o complemento de Schur na LMI (2.48), tem-se:

$$MM^T < \eta I. \quad (2.50)$$

Pré e pós multiplicando (2.49) por $\sqrt{X}$ observe que:

$$\sqrt{X}\mu_0 I\sqrt{X} < \sqrt{X}X\sqrt{X} \Rightarrow \mu_0 X < XX \Rightarrow X < \frac{XX}{\mu_0}. \quad (2.51)$$

Agora pré e pós multiplicando (2.49) por K e K^T , respectivamente, observe que:

$$KXK^T > K\mu_0 K^T. \quad (2.52)$$

Comparando (2.52) com (2.49), sendo $M = KX$ note que:

$$K\mu_0 K^T < KXK^T < \frac{KXXK^T}{\mu_0} = \frac{MM^T}{\mu_0} < \frac{\eta I}{\mu_0}. \quad (2.53)$$

Observação 1. O teorema encontrado em (ASSUNÇÃO et al., 2007) foi criado para um controlador sem chaveamento. Para os projetos apresentados ao decorrer deste trabalho utilizando a lei de controle chaveado, será necessária uma adaptação para o Teorema 4.

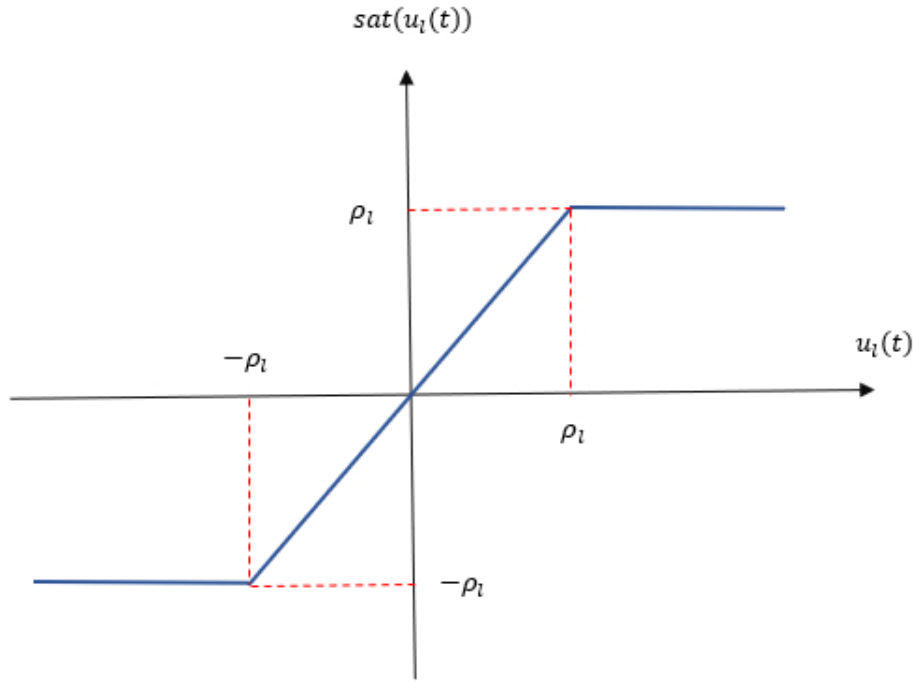
2.6 Saturação do atuador

Em sistemas de controle, um índice de desempenho importante a ser considerado é relacionado com as limitações do sistema. A limitação da região de operação de um sistema pode ser feita considerando uma falha no sinal de controle ou devido às limitações físicas dos equipamentos e componentes envolvidos. Dessa forma, um sistema linear sujeito a saturação no atuador é descrito por:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)sat(u(t)), \quad (2.54)$$

sendo $A(\alpha)$ e $B(\alpha)$ definidos em (2.19), $u(t)$ em (2.20) e,

$$sat(u(t)) = \begin{bmatrix} sat_1(u_1(t)) \\ \vdots \\ sat_m(u_m(t)) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad sat(u_l(t)) = \begin{cases} -\rho_l, & \text{se } u_l(t) < -\rho_l \\ u_l(t), & \text{se } |u_l(t)| \leq \rho_l \\ \rho_l, & \text{se } u_l(t) > \rho_l \end{cases}, \quad (2.55)$$

Figura 2 – Interpretação gráfica da função $\text{sat}(u_l(t))$.

Fonte : Elaborado pelo autor.

sendo, $\rho_l = [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m] \in \mathbb{R}^m$, são constantes com valores conhecidos. A interpretação gráfica de $\text{sat}(u_l(t))$, pode ser observada na Figura 2.

Para sistemas que possuem restrições físicas em sua operação, busca-se garantir que a operação ocorra de forma a respeitá-los. Com a finalidade de garantir que o sistema dado em (2.54) permaneça dentro da região de operação dado uma condição inicial, para $t \geq 0$, será considerada a seguinte região de operação:

$$\mathcal{X} \triangleq \{x(t) \in \mathbb{R}^n : |N_h x(t)| \leq \phi_h, h \in [1, 2, \dots, p]\}, \quad (2.56)$$

sendo $N = [N_1^T N_2^T \dots N_p^T]^T \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p]^T \in \mathbb{R}^p$ conhecidos.

A solução é obtida determinando uma região invariante, dita $\mathcal{E} \subset \mathcal{X}$, de tal forma que, para todo $x(0) \in \mathcal{E}$, o vetor de estado $x(t)$ permaneça na região de operação $\mathcal{X}$ para todo $t \geq 0$.

Considere uma matriz $H = [H_1^T H_2^T \dots H_m^T]^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$, e $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P > 0$, o vetor $\rho = [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m]^T \in \mathbb{R}^m$, $\rho_l > 0$ $l = [1, 2, \dots, m]$ e a constante positiva δ . Permitindo que $\mathcal{L}(H)$ e $\mathcal{E}(P, \delta)$, sejam os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{L}(H) \triangleq \{x(t) \in \mathbb{R}^n : |H_l x(t)| \leq \rho_l, l = [1, 2, \dots, p]\}, \quad (2.57)$$

$$\mathcal{E}(P, \delta) \triangleq \{x(t) \in \mathbb{R}^n : x(t)^T P x(t) \leq \delta\}, \quad (2.58)$$

Seja a função de Lyapunov $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$. O elipsoide $\mathcal{E}(P, \delta)$ é dito construtivamente invariante para o sistema (2.54) se $\dot{V}(x(t)) = 2x(t)^T P [Ax(t) + B \text{sat}(u(t))]\leq 0$ para todo $x(t) \in \mathcal{E}(P, \delta)$ (ALVES et al., 2016a).

Considere $\mathcal{D}$ um conjunto de matrizes de ordem $m \times m$ na qual os elementos das diagonais sejam 0 ou 1 e os demais elementos sejam 0. Assim, tem-se que o conjunto $\mathcal{D}$ apresenta 2^m matrizes, denominadas como $\mathcal{D}_s$, com $s = [1, 2, \dots, 2^m]$. Considerando $m = 2$, tem-se o seguinte conjunto:

$$\mathcal{D} \left\{ \mathcal{D}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{D}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{D}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{D}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (2.59)$$

Seja o lema apresentado abaixo uma condição suficiente para a limitação $\mathcal{E}(P, \delta) \subset \mathcal{L}(H)$.

Lema 1. (HU; LIN; CHEN, 2002) *Considere os conjuntos apresentados em (2.56), (2.57) e (2.58), as condições $\mathcal{E}(P, \delta) \subset \mathcal{X}$ e $\mathcal{E}(P, \delta) \subset \mathcal{L}(H)$ são satisfeitas se as LMIs abaixo forem factíveis:*

$$\begin{bmatrix} \rho_l^2 \delta^{-1} & * \\ G_l^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.60)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_h^2 \delta^{-1} & * \\ X N_{(h)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.61)$$

sendo $X = P^{-1}$ e $G_l = H_l X$, para todo $l = [1, 2, \dots, m]$.

Prova Lema 1. *Multiplicando a direita e a esquerda (2.60) por $\text{diag}(1, P)$, sendo $P = X^{-1}$, e aplicando o Complemento de Schur em relação à primeira linha e coluna, obtêm-se:*

$$\begin{aligned} P - H_l^T \rho_l^{-2} \delta H_l &\geq 0, \\ P &\geq H_l^T \rho_l^{-2} \delta H_l, \\ x(t)^T P x(t) &\geq x(t)^T H_l^T \rho_l^{-2} \delta H_l x(t). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Se $x(t) \in \mathcal{E}(P, \delta)$, então, $x(t)^T P x(t) \leq \delta$ e,

$$\begin{aligned} \delta &\geq x(t)^T P x(t) \geq \rho_l^{-2} \delta x(t)^T H_l^T H_l x(t), \\ \rho_l^{-2} &\geq x(t)^T H_l^T H_l x(t). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Portanto, $\mathcal{E}(P, \delta) \subset \mathcal{L}(H)$ e $x(t) \in \mathcal{L}(H)$. Pré e pós multiplicando (2.61) por $\text{diag}(1, P)$, sendo $P = X^{-1}$, e aplicando o complemento de Schur no resultado, para $x(t) \neq 0$, obtém-se:

$$\begin{aligned} P - N_{(h)}^T \phi_h^{-2} \delta N_{(h)} &\geq 0, \\ P &\geq N_{(h)}^T \phi_h^{-2} \delta N_{(h)}, \\ x(t)^T P x(t) &\geq x(t)^T N_{(h)}^T \phi_h^{-2} \delta N_{(h)} x(t). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Considerando que $x(t) \in \mathcal{E}(P, \delta)$, tem-se que $x(t)^T P x(t) \leq \delta$ e assim:

$$\begin{aligned} \delta &\geq x(t)^T P x(t) \geq x(t)^T N_{(h)}^T \phi_h^{-2} \delta N_{(h)} x(t), \\ \phi_h^{-2} &\geq x(t)^T N_{(h)}^T N_{(h)} x(t). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Logo, $x(t) \in \mathcal{X}$ e, conseqüentemente, tem-se que $\mathcal{E}(P, \delta) \subset \mathcal{X}$.

2.7 Controlador chaveado para sistemas incertos considerando saturação no atuador e limitação da região de operação

Considerando o exposto na seção anterior, se faz necessário limitar a região de operação para o sistema de controle de modo que o mesmo considere uma possível saturação no atuador.

Nesta seção será apresentada a lei de controle chaveado para realimentação do vetor de estados, considerando a saturação do atuador e limitação da região de operação, que são descritas pelo teorema a seguir.

Teorema 5. (ALVES et al., 2016a) Considere o sistema descrito por (2.54) sujeito a uma saturação no atuador em uma região de operação $\mathcal{X}$ como em (2.56), sendo $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\phi \in \mathbb{R}^{n_h}$ e $N \in \mathbb{R}^{n_h \times n_x}$ conhecidos, assim como as faixas de valores para seus parâmetros incertos. Assumindo a existência de matrizes simétricas $X > 0$, $\bar{Q}_i$ e $\bar{Z}_i \in \mathbb{R}^{n_n \times n_x}$, matrizes $G_j = [G_{j(1)}^T \ G_{j(2)}^T \ \dots \ G_{j(n_u)}^T]^T$ e $M_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, e um escalar $\beta > 0$ tais que:

$$A_i X + X A_i^T + \bar{Z}_i + \bar{Q}_i + 2\beta X < 0, \quad (2.66)$$

$$B_i [-D_s M_j + D_s^-] + [-D_s M_j + D_s^- G_j]^T B_i^T - \bar{Z}_i - \bar{Q}_j \leq 0, \quad (2.67)$$

$$\begin{bmatrix} \rho_l^2 \delta^{-1} & G_{j(l)} \\ G_{j(l)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.68)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_h^2 \delta^{-1} & N_{(h)} X \\ X N_{(h)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.69)$$

sejam satisfeitas para todo i e $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, $l \in \{1, 2, \dots, m\}$, $h \in \{1, 2, \dots, p\}$, $s \in \{1, 2, \dots, 2^m\}$, $D_s \in \mathcal{D}$ e $D_s^- = I_m - D_s$. Então, a lei de controle chaveada (2.20), sendo $K_j = M_j X^{-1}$ e $Q_j = X^{-1} \bar{Q}_j X^{-1}$, aplicado ao sistema (2.54) torna a origem um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual β para todo $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$, sendo $P = X^{-1}$ e $G_{j(l)} = H_{j(l)} X$. Além disso, $x(t) \in \mathcal{X}$, $t \geq 0$.

Prova 5. Considere como candidata a função de Lyapunov $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$, $P = P^T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $P > 0$. Então, a partir do sistema (2.54) e a lei de controle (2.20), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) \\ &= x(t)^T [A(\alpha)^T P + P A(\alpha)] x(t) \\ &\quad + \text{sat}(-K_\sigma x(t))^T B(\alpha)^T P x(t) + x(t)^T P B(\alpha) \text{sat}(-K_\sigma x(t)). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Considerando $x(t) \in \mathcal{L}(H)$, então $\text{sat}(-K_\sigma x(t))$ pode ser descrita pela combinação convexa:

$$\text{sat}(-K_\sigma x(t)) = \sum_{s=1}^{2^m} \lambda_s [D_s(K_\sigma x(t)) + D_s^-(H_\sigma x(t))], \quad (2.71)$$

sendo $D_s \in \mathcal{D}$, $D_s^- = I_m - D_s \in \mathcal{D}$, e $\lambda_s \geq 0$, $\sum_{s=1}^{2^m} \lambda_s = 1$. Assim, a partir de (2.71) e (2.70), tem-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= x(t)^T A(\alpha)P + PA(\alpha)x(t) \\ &\quad + \left\{ \sum_{s=1}^{2^m} \lambda_s [D_s(-K_\sigma x(t)) + D_s^-(H_\sigma x(t))]^T B(\alpha)^T P \right\} x(t) \\ &\quad + x(t)^T \{ PB(\alpha) \sum_{s=1}^{2^m} \lambda_s [D_s(-K_\sigma x(t)) + D_s^-(H_\sigma x(t))] \}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Realizando a transformação de congruência, multiplicando a esquerda e a direita por P^{-1} , sendo $P = X^{-1}$ e fazendo as mudanças de variáveis:

$$G_j X^{-1} = H_j, \quad M_j X^{-1} = K_j, \quad \bar{Z}_i = X^{-1} Z_i X^{-1} \text{ e } \bar{Q}_i = X^{-1} Q_i X^{-1}, \quad (2.73)$$

para $j = \sigma$, tem-se que:

$$[-D_s K_\sigma + D_s^- H_\sigma]^T B_i^T P + PB_i [-D_s K_\sigma + D_s^- H_\sigma] \leq Z_i + Q_\sigma. \quad (2.74)$$

Multiplicando (2.74) por $\alpha_i, \alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, e fazendo a soma de $i = 1$ até r , e multiplicando o resultado por $\lambda_s, \lambda_s \geq 0$, $\sum_{s=1}^{2^m} \lambda_s = 1$, e fazendo a soma para $s = 1$ até 2^m , considerando (2.54), obtêm-se:

$$\sum_{s=1}^{2^m} \lambda_s \{ [-D_s K_\sigma + D_s^- H_\sigma]^T B_\alpha^T P + PB_\alpha [-D_s K_\sigma + D_s^- H_\sigma] \} \leq Z_\alpha + Q_\sigma, \quad (2.75)$$

sendo $Z(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i Z_i$. Nota-se, que a partir da lei de controle (2.20):

$$x(t)^T Q_\sigma x(t) = \min \{ x(t)^T Q_j x(t) \} \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i x(t)^T Q_j x(t) = x(t)^T Q(\alpha) x(t). \quad (2.76)$$

Então, a partir de (2.75) e (2.72),

$$\dot{V}(x(t)) \leq x(t)^T \{ A(\alpha)P + PA(\alpha) + Z(\alpha) + Q(\alpha) \} x(t). \quad (2.77)$$

Multiplicando a esquerda e a direita por P^{-1} , sendo $P = X^{-1}$ e fazendo as mudanças de variáveis (2.73), multiplicando o resultado por $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, sendo $i = 1$ até r , tem-se:

$$PA(\alpha) + A(\alpha)^T P + Z(\alpha) + Q(\alpha) < 2\beta P. \quad (2.78)$$

Uma vez que para se obter uma taxa de decaimento maior ou igual a β é suficiente que $\dot{V}(x(t)) \leq -2\beta V(x(t))$ (BOYD et al., 1994), a partir de (2.78) e (2.77), esta condição é satisfeita.

Utilizando a teoria de conjuntos apresentada, é possível reduzir a norma dos ganhos de realimentação K_σ , através do aumento da região $\mathcal{L}(K_\sigma)$ na qual a saturação não ocorre. Isto pode ser feito selecionando um escalar $v_0 > 0$ tal que $\mathcal{E}(P, v_0) \subset \mathcal{L}(K_\sigma)$. Usando o resultado do Lema 1, tem-se a seguinte observação.

Observação 2. (OLIVEIRA et al., 2017) *Em projetos de controle, os controladores de realimentação do vetor de estado apresentam ganhos elevados. Principalmente em implementações práticas, estes ganhos resultam em elevados valores do sinal de controle que podem inviabilizar a sua implementação. Com tudo, estes controladores com ganhos elevados podem ser evitados inserindo, por exemplo, a restrição $\mathcal{E}(P, v_0) \subset \mathcal{L}(K_\sigma)$, que é imposta se a seguinte LMI for factível:*

$$\begin{bmatrix} \rho_l^2 v_0^{-1} & M_j \\ M_j^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.79)$$

para todo $j \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_{n_u}$. Observe que, $\mathcal{L}(K_\sigma)$ é um conjunto similar ao conjunto $\mathcal{L}(H_j)$ (HU; LIN; CHEN, 2002).

A diminuição na norma dos ganhos K_σ ocorre, sendo a matriz P fixa, quanto maior o valor v_0^{-1} maior será a norma de $x(0)$ admissível em $\mathcal{E}(P, v_0)$. Sendo satisfeita a LMI (2.79) tem-se $\mathcal{L}(K_\sigma) \supset \mathcal{E}(P, v_0)$, e portanto os estados $x(0)$ com maiores normas em $\mathcal{E}(P, v_0)$ também pertencem a $\mathcal{L}(K_\sigma)$. Maiores normas de $x(0) \in \mathcal{L}(K_\sigma)$ resultam em menores normas dos ganhos K_σ , uma vez que $|K_\sigma x(t)|$ é menor ou igual a um valor constante (ALVES et al., 2016a).

2.8 Expansão do volume do conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(P, 1)$

Considerando satisfeitas as condições do Teorema 5, fica garantida a estabilidade local, com taxa de decaimento β , do sistema (2.54) com lei de controle (2.20) para toda condição inicial $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$. Logo, é desejável que o conjunto elipsoidal possua o maior volume possível, de modo a permitir que a trajetória do vetor de estado opere em sua maior parte na região de operação $\mathcal{X}$. A seguir é apresentado uma das técnicas para expansão do volume elipsoidal.

Lema 2. (ALVES et al., 2016b) *Considere um conjunto de condições iniciais de interesse para o sistema linear, dado por $\chi = \varpi \text{co}\{w_1, \dots, w_n\}$, $\varpi > 0$. Então a condição $\chi \in \mathcal{E}(P, 1)$ é assegurado caso:*

$$\begin{bmatrix} \varpi^{-2} & w_\ell^T \\ w_\ell & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.80)$$

seja satisfeita $\forall \ell$. Note que qualquer elemento no conjunto χ pode ser escrito como $\varpi w(\theta) = \varpi \sum_{\ell=1}^n \theta_\ell w_\ell \in \chi$, $\theta \leq 0$ e $\sum_{\ell=1}^n \theta_\ell = 1$. Observe que em (2.80), ϖ é um fator de escala do conjunto $\text{co}w_1, \dots, w_n$ (BOYD et al., 1994), portanto, ϖ pode ser utilizado como uma variável a ser maximizada (minimização de ϖ^{-2}) de modo obter uma estimativa menos conservadora do conjunto de condições iniciais.

Prova Lema 2. Seja $w_\ell = \varpi \sum_{\ell=1}^n \theta_\ell w_\ell$ um vetor arbitrário em χ , sendo que $w_\ell \geq 0$ e $\sum_{\ell=1}^n \theta_\ell = 1$. Então, supondo (2.80) seja factível, para todo $\ell \in \mathbb{K}_n$. Aplicando o complemento de Schur em (2.80), sendo $P = X^{-1}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \varpi^{-2} - w_\ell^T P w_\ell &\geq 0 \\ \varpi^{-2} &\geq w_\ell^T P w_\ell \\ 1 &\geq (\varpi w_\ell)^T P (\varpi w_\ell). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Sendo a definição do conjunto $\mathcal{E}(P, 1)$, apresentado em (2.56), note que (2.81) implica que $\varpi w_\ell \in \mathcal{E}(P, 1)$ e portanto $\chi \subset \mathcal{E}(P, 1)$.

2.9 O controle H_∞ considerando a região de operação

Em sistemas de controle é importante que o controlador seja capaz de assegurar um bom desempenho do sistema além de garantir a estabilidade, comumente é definida uma medida ou norma para garantir a qualidade do projeto realizado. Um importante índice de desempenho é a norma H_∞ , que se relaciona com a capacidade do sistema em rejeitar distúrbios de energia limitada na saída do sistema (BOYD et al., 1994).

O projeto de controle H_∞ consiste em reduzir a norma infinito da função de transferência da saída de desempenho com respeito às entradas exógenas, o que representa a minimização do maior pico da resposta em frequência do sistema em malha fechada. Considere o sistema linear incerto sujeito à saturação do sinal de controle e distúrbio externo de energia limitada, descrito por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)\text{sat}(u_\sigma(t)) + H(\alpha)w(t), \\ y(t) &= C(\alpha)x(t) + D(\alpha)\text{sat}(u_\sigma(t)) + G(\alpha)w(t), \end{aligned} \quad (2.82)$$

Considere o distúrbio de energia limitada $w(t) \in \mathcal{L}_2$, sendo $\mathcal{L}_2$ um conjunto de todas as trajetórias e uma constante positiva ε , relacionada com a energia limitante do distúrbio, tal que:

$$\mathcal{W} := \left\{ w(t) \in \mathbb{R}^{n_u} : \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \leq \varepsilon \right\}. \quad (2.83)$$

Considerando a região de operação, será atribuído um valor ao limitante da energia do distúrbio ε , de modo que $w(t) \in \mathcal{W}$.

Baseado em (OLIVEIRA et al., 2017), considerando $\phi > 0$ a variável de relaxação e $\varepsilon_0 \geq 0$ uma constante que está relacionado com a condição inicial $x(0)$ e, consequentemente, com a energia inicial $V(x(0))$, sendo ε o limitante da energia do distúrbio.

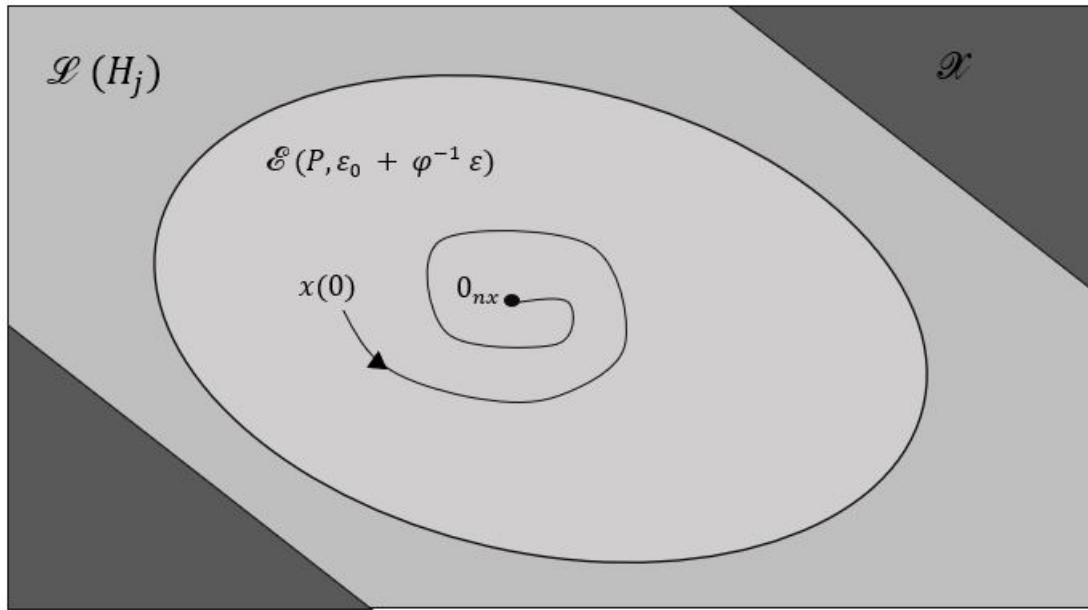
Sendo assim, o problema de controle H_∞ para um sistema linear, considerando uma região de operação, consiste em determinar uma lei de controle que satisfaça os seguintes requisitos:

1. Para $w(t) = 0, t \geq 0$, a origem é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema (2.82) e (2.20), e o conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(P, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon)$ é um conjunto positivamente invariante no domínio de atração (HU; LIN; CHEN, 2002) (ou seja $x(0)$ pertence ao conjunto $\mathcal{E}(P, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon)$, então todas as trajetórias de $x(t), t > 0$, também irão permanecer dentro deste conjunto). A Figura 3 ilustra esta propriedade.
2. Para $w(t) \in \mathcal{W}$, qualquer trajetória com condição inicial dentro $\mathcal{E}(P, \epsilon_0)$ (ou seja, $x(0)^T P x(0) \leq \epsilon_0$) não irá escapar do conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(P, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon)$, para todo $t \geq 0$. A Figura 4 ilustra esta propriedade.
3. Para $w(t) \in \mathcal{W}$ e $x(0) = 0$, o sistema realimentado (2.82) possui um custo garantido H_∞ igual a $\gamma > 0$, satisfazendo a seguinte desigualdade:

$$\|y(t)\|_2^2 \leq \gamma^2 \|w(t)\|_2^2, \forall \alpha \in \Lambda_r. \quad (2.84)$$

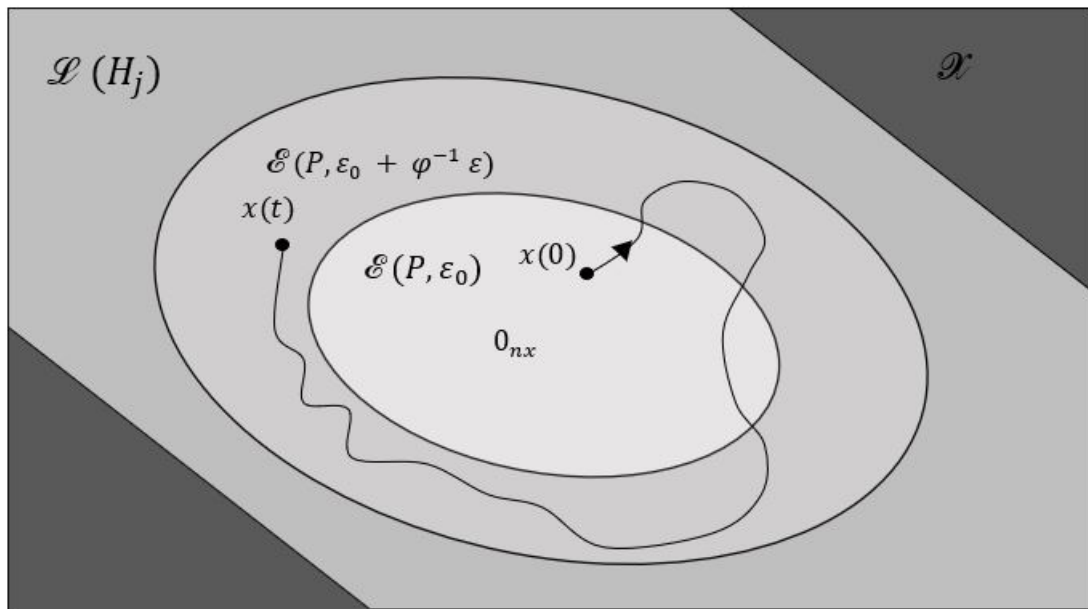
4. As seguintes relações de inclusão relacionadas aos conjuntos $\mathcal{X}, \mathcal{L}(H_j)$ e $\mathcal{E}(P, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon)$ devem ser garantidas:
 - $\mathcal{E}(P, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon) \in \mathcal{X}$: se o vetor de estado permanece dentro do conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(P, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon)$.
 - $\mathcal{E}(P, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon) \in \mathcal{L}(H_j)$: se o vetor de estado permanece dentro do conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(P, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon)$, esta restrição garante que o sinal de controle $\text{sat}(u_\sigma(t))$ pode ser representado por $\text{sat}(u_\sigma(t)) = (-D_\lambda K_\sigma + D_\lambda^- H_\sigma)x(t)$. Ou seja, o sistema realimentado é dado por (2.82).

Figura 3 – Relações de inclusão entre os conjuntos $\mathcal{X}$, $\mathcal{L}(H_j)$ e $\mathcal{E}(P, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$ e a trajetória do vetor de estados $x(t)$ para $w(t) = 0$ e $t \geq 0$.



Fonte : Elaborado pelo autor.

Figura 4 – Relações de inclusão entre os conjuntos $\mathcal{X}$, $\mathcal{L}(H_j)$, $\mathcal{E}(P, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$ e $\mathcal{E}(P, \varepsilon_0)$, e a trajetória do vetor de estados $x(t)$ para $w(t) \in \mathcal{W}$ e $t \geq 0$.



Fonte : Elaborado pelo autor.

Seja o problema de controle H_∞ , considerando a região de operação, o teorema a seguir apresenta condições para que o sistema realimentado (2.82) controlado pela lei de controle chaveado (2.20) seja estável.

Teorema 6. (OLIVEIRA et al., 2017) Considere a região de operação $\mathcal{X}$, dada em (2.56), na qual o sistema linear sujeito à saturação do atuador e distúrbio de energia limitada pode ser descrito por (2.82), sendo $\rho \in \mathbb{R}^{n_u}$, $N \in \mathbb{R}^{p \times n_x}$, $\phi \in \mathbb{R}^p$, $\varepsilon_0 \geq 0$, $\varepsilon > 0$ e $\varphi > 0$ são conhecidos. Suponha a existência de uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas Z_i , $Q_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes M_j , $G_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, e um escalar $\mu > 0$, tais que o seguinte problema de otimização seja factível:

$$\min(\mu) \quad \begin{bmatrix} B_i[-D_s M_j + D_s^- G_j] + [-D_s M_j + D_s^- G_j]^T B_i^T - Z_i - Q_j & * & * \\ H_i^T & -\varphi^{-1} I & * \\ C_i X + D_i[-D_s M_j + D_s^- G_j] & G_i & -\varphi \mu I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.85)$$

$$X A_i^T + A_i X + Z_i + Q_i < 0, \quad (2.86)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\phi_h^2}{\varepsilon_0 + \varphi^{-1} \varepsilon} & * \\ X N_{(h)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.87)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\rho_l^2}{\varepsilon_0 + \varphi^{-1} \varepsilon} & * \\ G_{j(l)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.88)$$

para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$ e $s \in \mathbb{K}_{2n_u}$, sendo $D_s \in \mathcal{D}$ e $D_s^- = I - D_s$. Então, $\mathcal{E}(P, \varepsilon_0 + \varphi^{-1} \varepsilon) \in \mathcal{X}$, $\mathcal{E}(P, \varepsilon_0 + \varphi^{-1} \varepsilon) \in \mathcal{L}(H_j)$ e lei de chaveamento (2.20), sendo $P = X^{-1}$, $\bar{Q}_i = X^{-1} Q_i X^{-1}$ e os ganhos dos controladores são obtidos por $K_j = M_j X^{-1}$, garantem que:

1. Para $w(t) = 0, t \geq 0$, a origem, é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema (2.82) e (2.20), e o conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(P, \varepsilon_0 + \varphi^{-1} \varepsilon)$ é um conjunto positivamente invariante no domínio de atração (ou seja, se $x(0)$ pertence ao conjunto $\mathcal{E}(P, \varepsilon_0 + \varphi^{-1} \varepsilon)$, então todas as trajetórias de $x(t), t > 0$, irão permanecer dentro deste conjunto);
2. Para $w(t) \in \mathcal{W}$, se $x(0) = 0 \in \mathcal{E}(P, \varepsilon_0)$, então $x(t) \in \mathcal{E}(P, \varepsilon_0 + \varphi^{-1} \varepsilon)$, para todo $t \geq 0$;
3. Para $w(t) \in \mathcal{W}$, se $x(0) = 0$, então o sistema linear (2.82) e (2.20) possui um custo garantido H_∞ igual a $\gamma = \sqrt{\mu} > 0$, como em (2.84) $x(t) \in \mathcal{E}(P, \varphi^{-1} \varepsilon)$, para todo $t \geq 0$.

A demonstração deste teorema pode ser observado em (OLIVEIRA et al., 2017), considerando uma adaptação para um sistema linear.

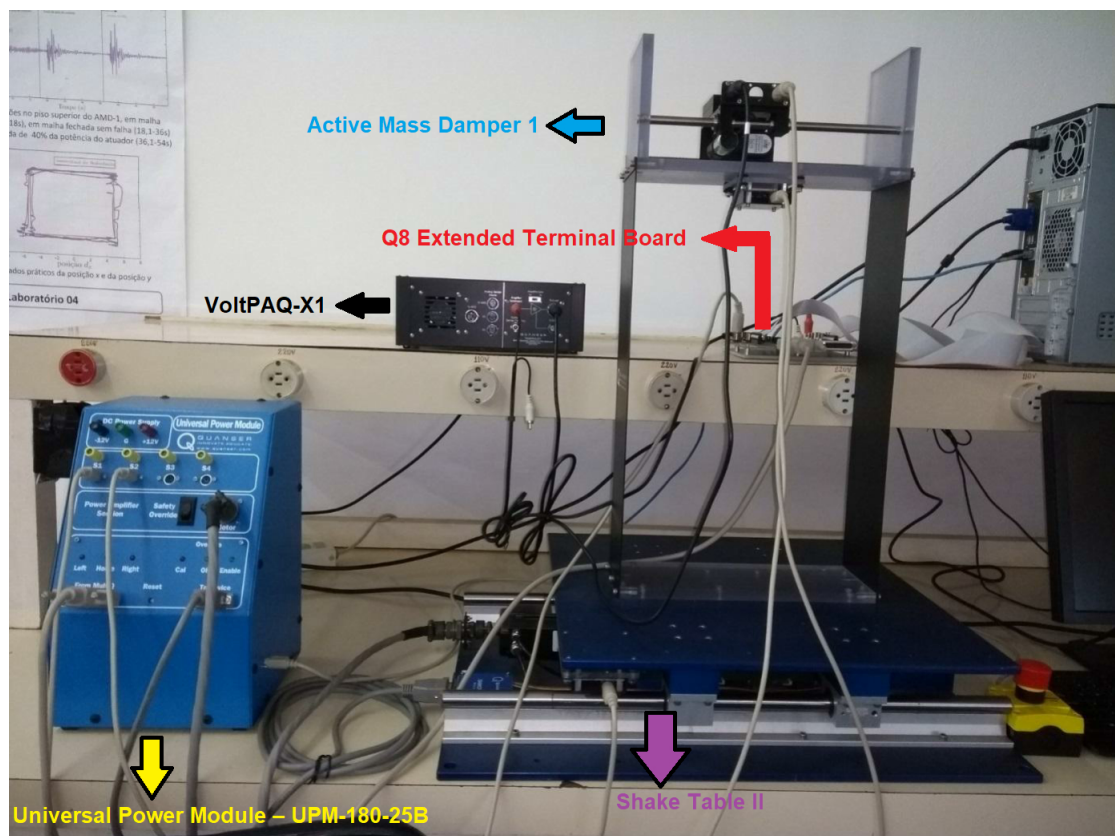
3 ACTIVE MASS DAMPER 1 + SISTEMA SHAKE TABLE II

Neste capítulo será apresentado a descrição do equipamento *Active Mass Damper 1* + *Shake Table II*, a ser utilizado na realização deste trabalho, bem como a modelagem matemática do sistema.

3.1 Descrição do equipamento

O *Active Mass Damper 1*, apresentado na Figura 5, possui uma estrutura que simula o comportamento de um edifício. A estrutura é composta tendo no piso superior um sistema de amortecimento ativo com uma massa móvel. Este protótipo tem como intuito o desenvolvimento de estudos para o projeto de sistemas de controle que amortecem vibrações causadas por terremotos ou por ventos fortes (QUANSER, 2012a).

Figura 5 – Protótipo AMD - 1 + STII da Quanser pertencente ao LPC da FEIS - UNESP.



Fonte : Elaborado pelo autor.

O princípio de funcionamento do protótipo é atuar na massa móvel por meio de um motor DC, reduzindo assim, as oscilações e vibrações indesejadas na estrutura. O sistema utilizado no deslocamento da base é chamado de *Shake Table II* - *STII* e foi originalmente desenvolvido com

o intuito de pesquisa ou ensino, envolvendo sistemas de vibração (QUANSER, 2012b). Além de permitir a utilização de distúrbios externos, o sistema *Shake Table II - STII* possui a possibilidade de utilizar terremotos reais em escala laboratorial.

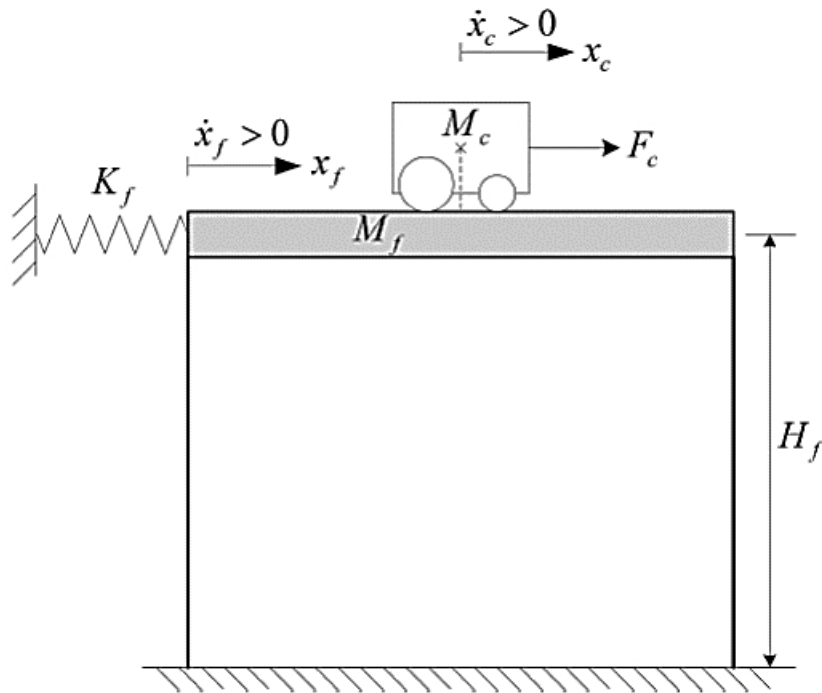
A *Shake Table - II* possui módulos periféricos de potência (*Universal Power Module – UPM-180-25B*), de amplificação (*VoltPAQ-X1*), de aquisição de dados (*Q8 Extended Terminal Board*), acelerômetros e três sensores de posição para o eixo. Já o *Active Mass Damper 1* possui uma massa móvel que desloca em reação ao movimento da *Shake Table II*, um acelerômetro e um encoder conectados à placa de aquisição de dados.

3.2 Modelo matemático do sistema

Considere o esquemático apresentado na Figura 6. Definindo os seguintes estados, o deslocamento do carro x_c que representa a massa móvel (M_c), cujo deslocamento é considerado positivo para a direita em relação a visão do leitor, assim como o deslocamento do piso superior x_f , que tem como massa M_f . Sendo $\dot{x}_c$ e $\dot{x}_f$ as respectivas velocidades.

Para pequenas vibrações do piso superior, o sistema *Active Mass Damper 1* pode ser aproximado para um sistema massa-mola padrão de constante K_f a uma altura H_f em relação ao solo, viabilizando assim uma aproximação coerente da modelagem do sistema.

Figura 6 – Modelo esquemático do AMD-1.



Fonte : (QUANSER, 2012a).

Os parâmetros utilizados neste exemplo para o sistema AMD-1 são fornecidos pela (QUANSER, 2012b) e estão apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros do sistema AMD-1.

Resistência de armadura do motor (ω)	R_m	2,6
Constante de torque do motor ($N.m/A$)	K_t	0,00767
Eficiência eletromecânica do motor	η_m	1
Constante de eficiência do motor ($V.s/rad$)	K_m	0,00767
Eficiência do redutor planetário	η_g	1
Altura do patamar superior (m)	H_f	0,5334
Massa do patamar superior (Kg)	M_f	1,38
Constante da mola para a modelagem (N/m)	K_f	500,9
Inércia do rotor ($K.g.m^2$)	J_m	$3,9 \times 10^{-7}$
Massa total do carro (Kg)	M_c	0,65
Relação da engrenagem	K_g	3,71
Raio do pinhão (engrenagem) (m)	r_{mp}	$6,35 \times 10^{-3}$
Coeficiente de amortecimento viscoso eq. ($N.s/m$)	B_{eq}	3

Fonte : (QUANSER, 2012a).

O modelo em espaço de estados que descreve o sistema AMD-1, considerando a matriz H como em (SUMAN, 2020) referente ao distúrbio, é descrito por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_f \\ \ddot{x}_c \\ \ddot{x}_f \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_c \\ x_f \\ \dot{x}_c \\ \dot{x}_f \end{bmatrix} + BF_c + Hw(t), \quad (3.1)$$

sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{M_c r_{mp}^2 K_f}{M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f} & -\frac{r_{mp}^2 B_{eq} (M_c + M_f)}{M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f} & 0 \\ 0 & -\frac{K_f (M_c r_{mp}^2 + J_m K_g^2)}{M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f} & \frac{M_c B_{eq} r_{mp}^2}{M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{r_{mp}^2 B_{eq} (M_c + M_f)}{M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f} \\ \frac{M_c r_{mp}^2}{M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f} \end{bmatrix} \text{ e } H = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \frac{B_{eq}}{(M_c + M_f)} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Para este caso, tem-se que a entrada de controle é igual a força impressa pelo carro no sistema massa-mola $u = F_c$. Assim, com o objetivo de se inserir uma incerteza na entrada do sinal de controle, optou-se por transformar a mesma na tensão aplicada no motor DC responsável pelo movimento do carro, ou seja, ($u = V_m$), logo, tem-se a seguinte relação entre F_c e V_m :

$$F_c = -\frac{\eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m \dot{x}_c(t)}{R_m r_{mp}^2} + \frac{\eta_g K_g \eta_m K_t V_m}{R_m r_{mp}^2}. \quad (3.4)$$

Assim, as matrizes A e B , considerando a entrada de controle do sistema como $u = V_m$, são dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{M_c r_{mp}^2 K_f}{M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f} & -\frac{M_c \eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m + M_c B_{eq} R_m r_{mp}^2 + M_f \eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m + M_f B_{eq} R_m r_{mp}^2}{R_m (M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f)} & 0 \\ 0 & -\frac{K_f (M_c r_{mp}^2 + J_m K_g^2)}{M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f} & \frac{M_c (\eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m + B_{eq} R_m r_{mp}^2)}{R_m (M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f)} & 0 \end{bmatrix} e \quad (3.5)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\eta_g K_g \eta_m K_t r_{mp} (M_c + M_f)}{R_m (M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f)} \\ -\frac{M_c \eta_g K_g \eta_m K_t r_{mp}}{R_m (M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f)} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Substituindo os valores apresentados na Tabela 1 nas equações (3.5), (3.6) e na matriz H da equação (3.3), obtém-se:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 278,9341 & -18,6497 & 0 \\ 0 & -336,0626 & 5,9716 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,9975 \\ -0,9598 \end{bmatrix} e H = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1,4778 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

4 PROJETOS E SIMULAÇÕES DOS CONTROLADORES

Neste capítulo serão apresentados os projetos de controle e as simulações, utilizando o software *MatLab/Simulink*[®], com o objetivo de analisar o comportamento do sistema *Active Mass Damper 1 + Shake Table II*.

No capítulo anterior foram apresentadas as teorias dos projetos de controladores. Para os projetos apresentados neste capítulo, será abordado o controlador robusto chaveado considerando índices de desempenho, sendo o foco principal a atenuação do distúrbio no sistema por meio da minimização da norma H_∞ . Será realizada uma comparação entre os índices de desempenho entre os projetos de controladores considerando único ganho, e o controlador chaveado.

4.1 Sistema incerto e descrição do distúrbio

Considerando uma incerteza na entrada de controle do sistema, representado por uma possível falha por desgaste ou queima de componentes no módulo amplificador que alimenta o sistema. Desta forma, a potência do sistema será reduzida em 40% e o sistema poderá ser representado como um politopo de incertezas. Apresenta-se na sequência, os vértices, que por meio de uma combinação convexa geram o politopo:

Vértice 1: 100% do ganho de amplificação:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 278,9341 & -18,6497 & 0 \\ 0 & -336,0626 & 5,9716 & 0 \end{bmatrix} e B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,9975 \\ -0,9598 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Vértice 2: 60% do ganho de amplificação:

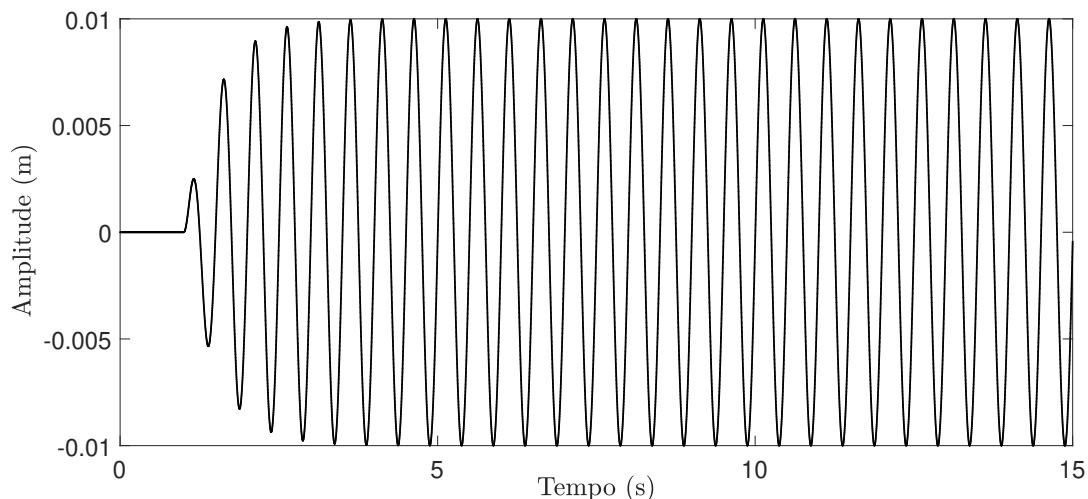
$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 278,9341 & -18,6497 & 0 \\ 0 & -336,0626 & 5,9716 & 0 \end{bmatrix} e B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,7985 \\ -0,5759 \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Para a realização dos projetos de controle apresentados neste capítulo, foi considerado o efeito da matriz H , que representa a influência de um distúrbio externo na saída do sistema. O sistema possui dois modos operantes, o ativo e o passivo. No modo passivo, a massa móvel é controlada por um controlador de modo a se manter no centro da estrutura, não influenciando na dinâmica do sistema. Enquanto que o modo ativo é utilizado para implementações dos projetos de

controladores, com o objetivo de controlar o deslocamento da massa móvel de modo a minimizar o efeito do distúrbio na estrutura.

A matriz H , que relaciona o efeito do distúrbio no sistema, foi obtida considerando a Segunda Lei de Newton, também conhecida como Lei da Superposição de Forças ou como Princípio Fundamental da Dinâmica. No qual a força provocada pelo distúrbio é igual à massa vezes a aceleração. O distúrbio, tanto no modo passivo quanto ativo, influenciará no deslocamento e velocidade do piso superior da estrutura, no qual foi considerado que o distúrbio influencia diretamente na velocidade do piso superior e a força do distúrbio influenciará a aceleração do piso superior da estrutura (SUMAN, 2020). Sendo a matriz H dada em (3.7), as simulações serão realizadas considerando o mesmo sinal de distúrbio utilizado na implementação do sistema, de forma a aproximar os resultados obtidos na simulação aos resultados práticos. A Figura 7 ilustra o sinal de distúrbio, que pode ser aproximado por uma senoide, o qual possui frequência de 2Hz e amplitude de 1 centímetro.

Figura 7 – Sinal de distúrbio com amplitude de 1 centímetro e frequência de 2Hz.



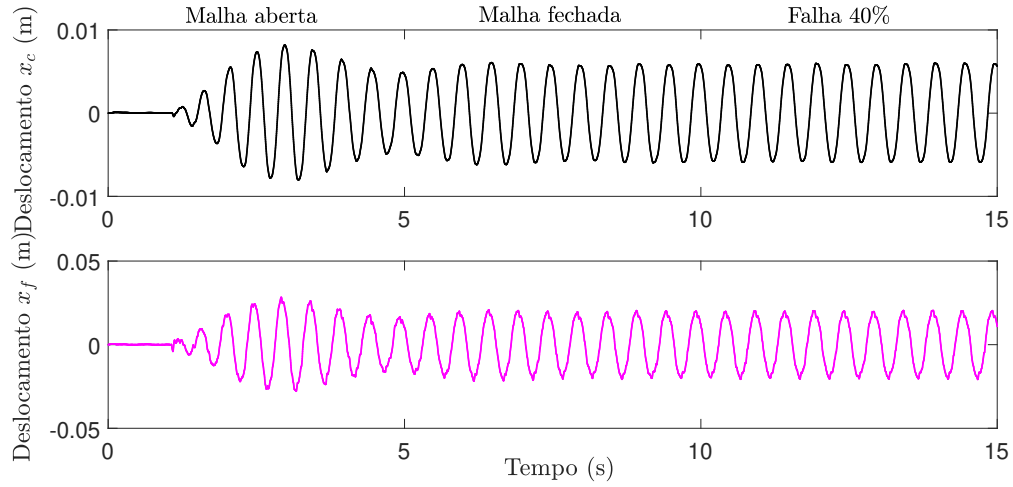
Fonte : Elaborado pelo autor.

Com o objetivo de verificar o efeito que o projeto dos controladores causaria no sistema *Active Mass Dsmper 1 + Shake Table II*, foi observado inicialmente o comportamento dinâmico das variáveis de estados $x_c(t)$, $x_f(t)$, $\dot{x}_c(t)$ e $\dot{x}_f(t)$ sendo apresentadas nas Figuras 8 e 9, na qual nota-se o deslocamento do carro e do piso superior, e a velocidade do carro e do piso superior respectivamente.

Na Figura 8 é possível notar que para o sistema em malha aberta sujeito a ação de uma entrada exógena, o deslocamento do piso superior apresenta oscilações que não ultrapassam os limites físicos do equipamento (5 centímetros). Nota-se que mesmo o sistema em malha aberta, ou seja, sem a ação do controle, o carro apresenta um deslocamento. Isto se deve ao fato de que mesmo em malha aberta, o sistema *Active Mass Damper 1* apresenta um controlador *PI* para evitar que a carro deslize sobre os trilhos da estrutura livremente, evitando eventuais impactos

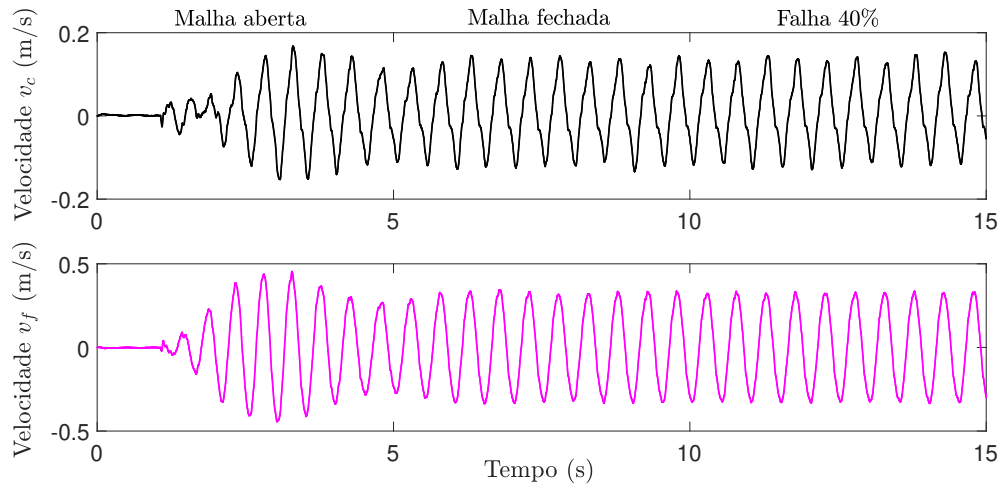
que poderiam danificar o equipamento.

Figura 8 – Deslocamento do carro e do piso superior em malha aberta.



Fonte : Elaborado pelo autor.

Figura 9 – Velocidade do carro e do piso superior em malha aberta.



Fonte : Elaborado pelo autor.

4.1.1 Análise do sistema *Active Mass Damper 1 + Shake Table II* em malha aberta

Inicialmente foi realizado uma análise da estabilidade da planta do sistema *Active Mass Damper 1 + Shake Table II* em malha aberta, ou seja, sem a ação do controlador. Mesmo em malha aberta o motor que atua na massa móvel será responsável apenas por não permitir que o carro deslize sobre o trilho, utilizando um controlador *PI* (*Proportional and Integral*), simulando assim como se o sistema estivesse travado. Considere o sistema descrito em espaço de estados como em (2.4). Utilizando a LMI (2.12) apresentada no Teorema 1, considerando $u(t) = 0$.

Seja uma candidata a função de Lyapunov na forma quadrática $V(x) = x(t)^T P x(t)$, para análise da estabilidade do sistema em malha aberta, no qual não se obteve uma matriz P definida

positiva, de modo que $V(x) > 0$ e $\dot{V}(x) < 0$, para $x \neq 0$. Desta forma o sistema em malha aberta é instável. A instabilidade do sistema em malha aberta se deve ao fato da planta do sistema apresentar um polo na origem, levando o sistema à instabilidade, o qual pode ser observado pelos autovalores do sistema em malha aberta:

$$\text{Autovalores}_{(A)} = \begin{bmatrix} 0 + j0 \\ -1,4214 + j17,0031 \\ -1,4214 - j17,0031 \\ -15,8069 + j0,0000 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

4.1.2 Projeto 1: Controlador robusto chaveado

Considere o sistema *Active Mass Damper 1 + Shake Table II* e o modelo incerto que o descreve dado em (2.21), o primeiro projeto visa garantir a estabilidade do sistema incerto com realimentação do vetor de estados, considerando a lei de controle chaveado dada em (2.20).

Resolvendo as LMIs (2.34) e (2.35) citadas no Teorema 2, sendo o sistema incerto dado pelos vértices do politopo em (4.1) e (4.2), foram obtidos os seguintes ganhos dos controladores K_j , as matrizes simétricas $\bar{Q}_j$, e a matriz simétrica definida positiva P :

$$K_1 = \begin{bmatrix} 2,4738 & -9,0292 & 0,5679 & -0,0081 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 4,0585 & -19,4152 & 1,6383 & 0,3058 \end{bmatrix},$$

$$\bar{Q}_1 = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0,0101 & -0,2520 & 0,0283 & 0,0114 \\ -0,2520 & 6,3143 & -0,7092 & -0,2861 \\ 0,0283 & -0,7092 & 0,0797 & 0,0321 \\ 0,0114 & -0,2861 & 0,0321 & 0,0130 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0,3997 & -3,6539 & 0,5146 & 0,2218 \\ -3,6539 & 90,9099 & -10,2410 & -4,1406 \\ 0,5146 & -10,2410 & 1,4022 & 0,5863 \\ 0,2218 & -4,1406 & 0,5863 & 0,3008 \end{bmatrix},$$

$$\bar{Q}_2 = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0,0101 & -0,2520 & 0,0283 & 0,0114 \\ -0,2520 & 6,3139 & -0,7091 & -0,2861 \\ 0,0283 & -0,7091 & 0,0796 & 0,0321 \\ 0,0114 & -0,2861 & 0,0321 & 0,0130 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Considerando os ganhos dos controladores dado em (4.4), têm-se as seguintes normas para os controladores $\|K_1\| = 9,3792$ e $\|K_2\| = 19,9047$, e o sistema em malha fechada com realimentação do vetor de estados apresentou os seguintes autovalores:

$$\begin{aligned}
\text{Autovalores}_{(A_1-B_1K_1)} &= \begin{bmatrix} -16,8030 + j0 \\ -0,3739 + j0 \\ -1,5913 + j16,9900 \\ -1,5913 - j16,9900 \end{bmatrix}, \text{Autovalores}_{(A_1-B_1K_2)} = \begin{bmatrix} -19,3951 + j0 \\ -0,5337 + j0 \\ -1,6692 + j16,9468 \\ -1,6692 - j16,9468 \end{bmatrix}, \\
\text{Autovalores}_{(A_2-B_2K_1)} &= \begin{bmatrix} -16,3965 + j0 \\ -0,2299 + j0 \\ -1,5247 + j16,9976 \\ -1,5247 - j16,9976 \end{bmatrix}, \text{Autovalores}_{(A_2-B_2K_2)} = \begin{bmatrix} -17,9180 + j0 \\ -0,3458 + j0 \\ -1,5782 + j16,9767 \\ -1,5782 - j16,9767 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

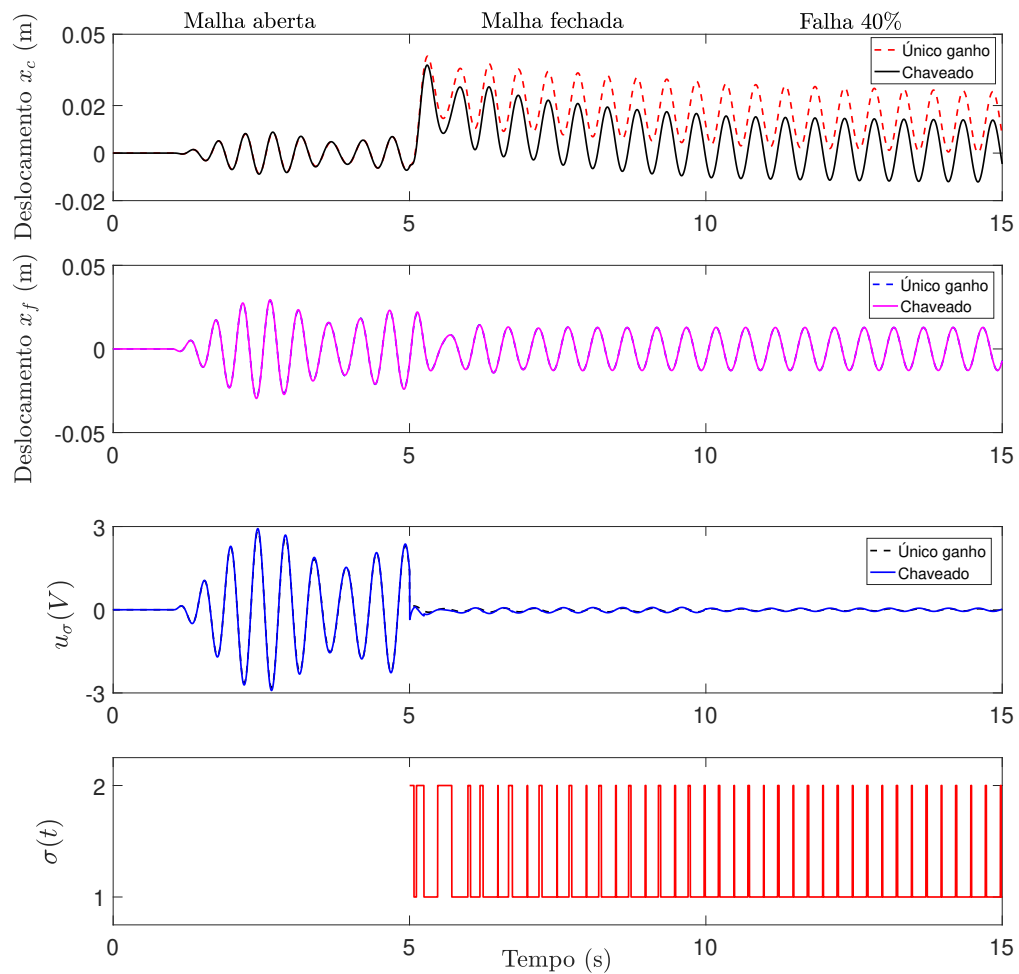
Desta forma, o sistema em malha fechada é estável uma vez que todos os autovalores apresentam parte real negativa, ou seja, a esquerda do plano complexo, sendo esta uma condição necessária para a estabilidade do sistema. A resposta dinâmica do sistema é apresentada nas Figuras 10 e 11. Na Figura 10 é apresentado o comportamento da dinâmica do carro e do piso superior, bem como o sinal de controle $u_\sigma(t)$ e o sinal de chaveamento $\sigma(t)$, por sua vez na Figura 11 é ilustrado o comportamento da velocidade do carro e do piso superior, considerando os ganhos apresentados em (4.4).

Na Figura 10, é possível observar um comportamento oscilatório no deslocamento do piso superior com o sistema em malha aberta, o qual apresentou um deslocamento máximo de 3 centímetros. Em malha fechada, nota-se que a ação do carro foi capaz de atenuar as oscilações no piso superior, porém o comportamento do deslocamento do carro apresentou um elevado *overshoot* no instante em que o sistema entra em operação, atingindo um deslocamento máximo de 4 centímetros, e se estabilizando em 1,7 centímetros. Além disso, verifica-se que em malha fechada, o carro apresentou cerca de 5 segundos para entrar em regime. Após a falha no sistema, se observa que tanto as oscilações do piso superior, quanto as oscilações do carro se mantiveram inalteradas.

Para o sinal de controle na Figura 10, tem-se que o sinal de controle existente no intervalo de 0 a 5 segundos é referente ao sistema em malha aberta, porém, devido à um controle próprio do módulo, o sinal é diferente de zero. Nota-se, que os valores obtidos para o sinal de controle em malha fechada foram baixos, na ordem de 130 mV, o qual se manteve aproximadamente sem alteração mesmo após a falha de 40%. Além disso, é possível notar o comportamento do chaveamento do sistema, no qual é ilustrado o chaveamento entre os ganhos K_1 e K_2 , em cada instante de tempo.

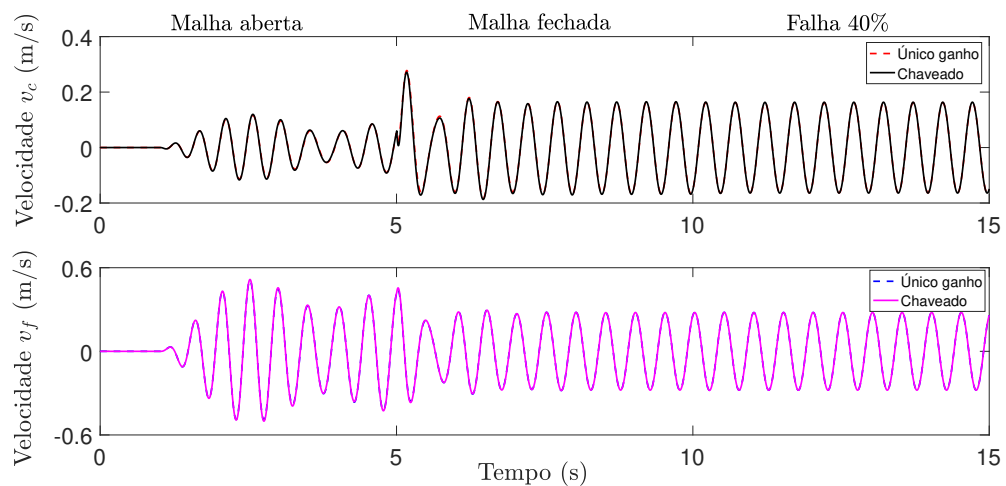
A Figura 11, que ilustra o comportamento das velocidades do carro e do piso superior respectivamente, se nota que em malha aberta a velocidade do piso superior apresentou um comportamento oscilatório, que foi atenuado pela ação do carro quando o sistema entrou em operação, e mesmo após a falha a oscilação não apresentou alteração.

Figura 10 – Deslocamento do carro e do piso superior, sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada e ganhos (4.4).



Fonte : Elaborado pelo autor.

Figura 11 – Velocidade do carro e do piso superior considerando lei de controle chaveada e ganhos (4.4).



Fonte : Elaborado pelo autor.

4.1.3 Projeto 2: Controlador robusto chaveado com restrição na taxa de decaimento

O segundo projeto de controle apresenta restrições com o intuito de aprimorar o desempenho do controlador do Projeto 1. Foi considerado como índice de desempenho a restrição na taxa de decaimento citada no Teorema 3. O parâmetro $\beta = 2$, limitante da taxa de decaimento foi escolhido por proporcionar ao sistema um melhor desempenho, de modo que o sistema apresente uma resposta dinâmica mais rápida, sem ocasionar um aumento significativo na norma dos controladores K_j e por consequência no sinal de controle, de modo que o sinal de controle não apresente saturação, uma vez que a saturação não foi considerada no projeto deste controlador.

Resolvendo as LMIs (2.39) e (2.40), sendo o sistema incerto dado pelo vértice do politopo em (4.1) e (4.2), foram obtidos os seguintes ganhos dos controladores K_j , as matrizes simétricas $\bar{Q}_j$, e a matriz simétrica definida positiva P :

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \begin{bmatrix} 42,9709 & -180,8607 & 5,9471 & -0,3181 \end{bmatrix}, \\
 K_2 &= \begin{bmatrix} 71,4493 & -308,5249 & 11,0884 & 0,7934 \end{bmatrix}, \\
 \bar{Q}_1 &= 10^5 \times \begin{bmatrix} -0,0273 & 0,1676 & -0,0081 & -0,0043 \\ 0,1676 & -1,0322 & 0,0498 & 0,0265 \\ -0,0081 & 0,0498 & -0,0024 & -0,0013 \\ -0,0043 & 0,0265 & -0,0013 & -0,0007 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1,0719 & -4,1655 & 0,2468 & 0,1593 \\ -4,1655 & 25,2848 & -1,2269 & -0,6573 \\ 0,2468 & -1,2269 & 0,0697 & 0,0410 \\ 0,1593 & -0,6573 & 0,0410 & 0,0375 \end{bmatrix}, \\
 \bar{Q}_2 &= 10^5 \times \begin{bmatrix} -0,0275 & 0,1689 & -0,0082 & -0,0043 \\ 0,1689 & -1,0381 & 0,0501 & 0,0266 \\ -0,0082 & 0,0501 & -0,0024 & -0,0013 \\ -0,0043 & 0,0266 & -0,0013 & -0,0007 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\tag{4.8}$$

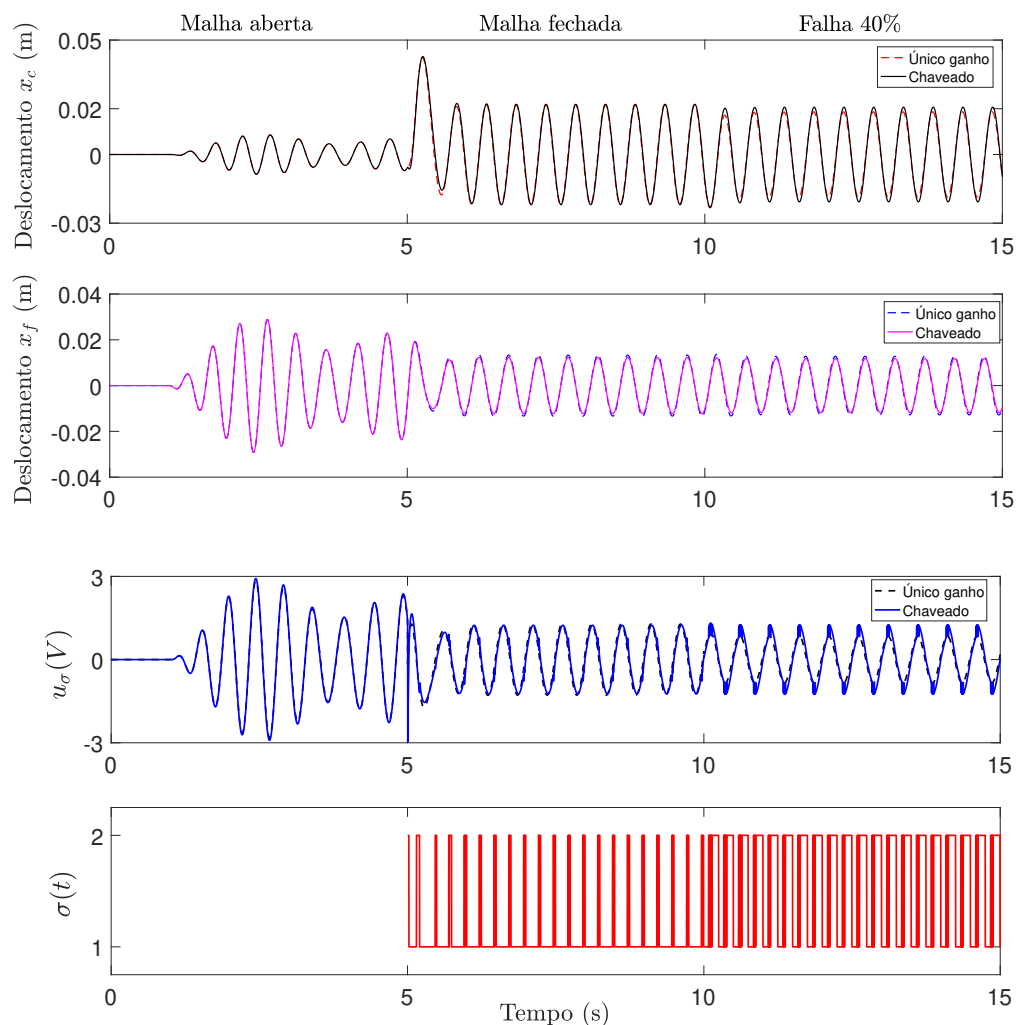
Com os ganhos dos controladores dado em (4.7), têm-se as seguintes normas para os controladores $\|K_1\| = 185,9908$ e $\|K_2\| = 316,8852$, e o sistema em malha fechada com realimentação do vetor de estados apresentou os seguintes autovalores:

$$\begin{aligned}
 \text{Autovalores}_{(A_1-B_1K_1)} &= \begin{bmatrix} -23,4583 + j0 \\ -4,7506 + j0 \\ -4,2862 + j16,3348 \\ -4,2862 - j16,3348 \end{bmatrix}, \text{Autovalores}_{(A_1-B_1K_2)} = \begin{bmatrix} -36,4514 + j0 \\ -5,5590 + j0 \\ -4,5574 + j15,4927 \\ -4,5574 - j15,4927 \end{bmatrix}, \\
 \text{Autovalores}_{(A_2-B_2K_1)} &= \begin{bmatrix} -19,4675 + j0 \\ -3,2715 + j0 \\ -3,3948 + j16,9675 \\ -3,3948 - j16,9675 \end{bmatrix}, \text{Autovalores}_{(A_2-B_2K_2)} = \begin{bmatrix} -25,6945 + j0 \\ -4,2906 + j0 \\ -4,0750 + j16,4622 \\ -4,0750 - j16,4622 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Analisando os autovalores do sistema em malha fechada, nota-se que o sistema se mantém estável uma vez que todos os autovalores apresentam parte real negativa. Além disso, se observa que a parte real dos autovalores aumentou em módulo se comparado aos autovalores do Projeto 1, isto se deve ao parâmetro $\beta = 2$, que faz com que os autovalores estejam mais a esquerda desse limitante, que por sua vez está relacionado com a velocidade de resposta do sistema.

A resposta dinâmica do sistema é apresentada nas Figuras 12 e 13. Na Figura 12 é apresentada a dinâmica do deslocamento do carro e do piso superior, assim como o sinal de controle $u_\sigma(t)$ e o sinal de chaveamento $\sigma(t)$, na Figura 13 é ilustrado o comportamento da velocidade do carro e do piso superior, considerando os ganhos apresentados em (4.7).

Figura 12 – Deslocamento do carro e do piso superior, sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada e ganhos (4.7) com taxa de decaimento $\beta = 2$.



Fonte : Elaborado pelo autor.

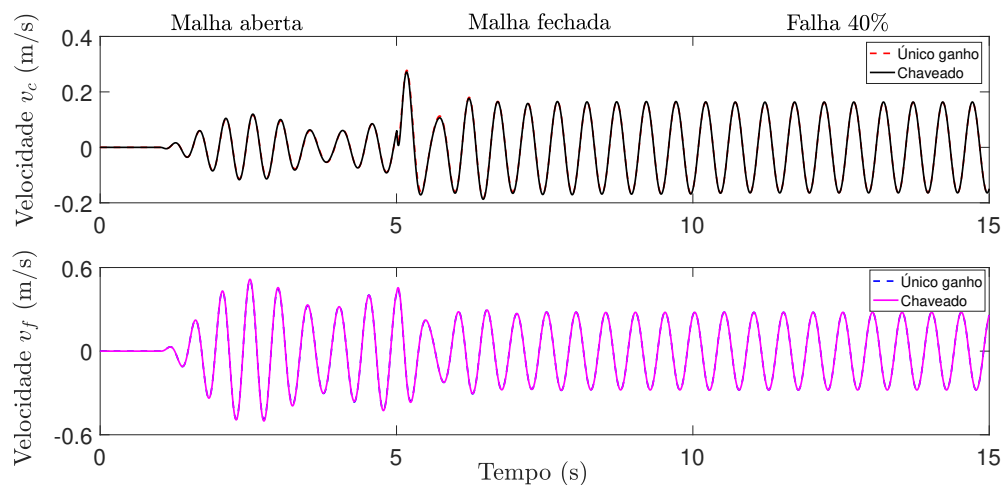
Na Figura 12, é possível observar o comportamento do deslocamento do piso superior, o qual assim como no projeto anterior apresentou um comportamento oscilatório. Considerando a taxa de decaimento neste projeto, nota-se que houve um aumento do *overshoot* no deslocamento do carro no instante em que o sistema entra em operação, de modo que o deslocamento

atingido foi de 4,5 centímetros, se estabilizando em seguida em 2,2 centímetros, de modo que o deslocamento do piso superior após o sistema entrar em operação foi de 1,2 centímetros.

É possível observar que o tempo decorrido para que o carro alcance o regime permanente diminuiu se comparado ao projeto anterior, o qual decorreu-se 1,1 segundos, porém as oscilações do carro apresentaram valores maiores em função da inserção da taxa de decaimento no projeto do controlador. Após o instante da falha, se observa que os deslocamentos do carro e do piso superior pouco se alteraram. Em comparação ao Projeto 1, este projeto apresentou uma significativa melhora em relação a velocidade transitória do sistema.

O sinal de controle apresentado na Figura 12 aumentou se comparado ao sinal de controle do projeto anterior, chegando a 1,3 V após o sistema entrar em operação. Mesmo com o aumento nos valores do sinal de controle, o mesmo se manteve em níveis adequados. Nota-se, que após a falha no sistema, o sinal de controle se manteve praticamente o mesmo, porém apresentou descontinuidades, isto se deve ao fato de que o chaveamento entre os ganhos do sistema ocorreu em alta frequência no período após a falha, o qual pode ser observado pelo sinal de chaveamento $\sigma(t)$.

Figura 13 – Velocidade do carro e do piso superior considerando lei de controle chaveada e ganhos (4.7) com taxa de decaimento $\beta = 2$.



Fonte : Elaborado pelo autor.

Na Figura 13, se observa um aumento na velocidade do carro para o sistema em malha fechada, o que já era esperado tendo em vista que o deslocamento do carro também aumentou.

4.1.4 Projeto 3: Controlador robusto chaveado com restrição na taxa de decaimento e restrição na norma do controlador

No Projeto 3 foram impostas restrições à norma do controlador apresentado no Projeto 2, pois ao se considerar uma restrição na taxa de decaimento, sendo β o limitante da taxa de decaimento, que por sua vez gera uma resposta dinâmica mais rápida, ocorre um aumento da

norma dos controladores, podendo fazer com que o sinal de controle e o *overshoot* da saída do sistema atinja os limites de especificação do equipamento.

Considerando o Teorema 4 e a Observação 1, resolvendo as LMIs (2.48) e (2.49), dada pela otimização do parâmetro η , que é calculado pelo *MatLab*[®], o qual se obteve $\eta = 6,1570 \times 10^3$, considerando a constante $\mu_0 = 1$ e mantendo a taxa de decaimento $\beta = 2$, foram obtidos os seguintes ganhos dos controladores K_j , as matrizes simétricas $\bar{Q}_j$, e a matriz simétrica definida positiva P :

$$K_1 = \begin{bmatrix} 28,2210 & -42,0051 & 2,6170 & 2,5049 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 24,1239 & -71,7148 & 2,6640 & 2,5257 \end{bmatrix},$$

$$\bar{Q}_1 = 10^4 \times \begin{bmatrix} -0,4109 & 2,5013 & -0,0598 & -0,0519 \\ 2,5013 & 8,3213 & 0,0983 & 0,1544 \\ -0,0598 & 0,0983 & -0,0057 & -0,0057 \\ -0,0519 & 0,1544 & -0,0057 & -0,0054 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0,9100 & 0,0250 & 0,0697 & 0,0768 \\ 0,0250 & 0,9926 & -0,0093 & -0,0047 \\ 0,0697 & -0,0093 & 0,0055 & 0,0065 \\ 0,0768 & -0,0047 & 0,0065 & 0,0097 \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$\bar{Q}_2 = 10^4 \times \begin{bmatrix} -0,4110 & 2,5017 & -0,0599 & -0,0519 \\ 2,5017 & 8,3212 & 0,0983 & 0,1544 \\ -0,0599 & 0,0983 & -0,0057 & -0,0057 \\ -0,0519 & 0,1544 & -0,0057 & -0,0054 \end{bmatrix}.$$

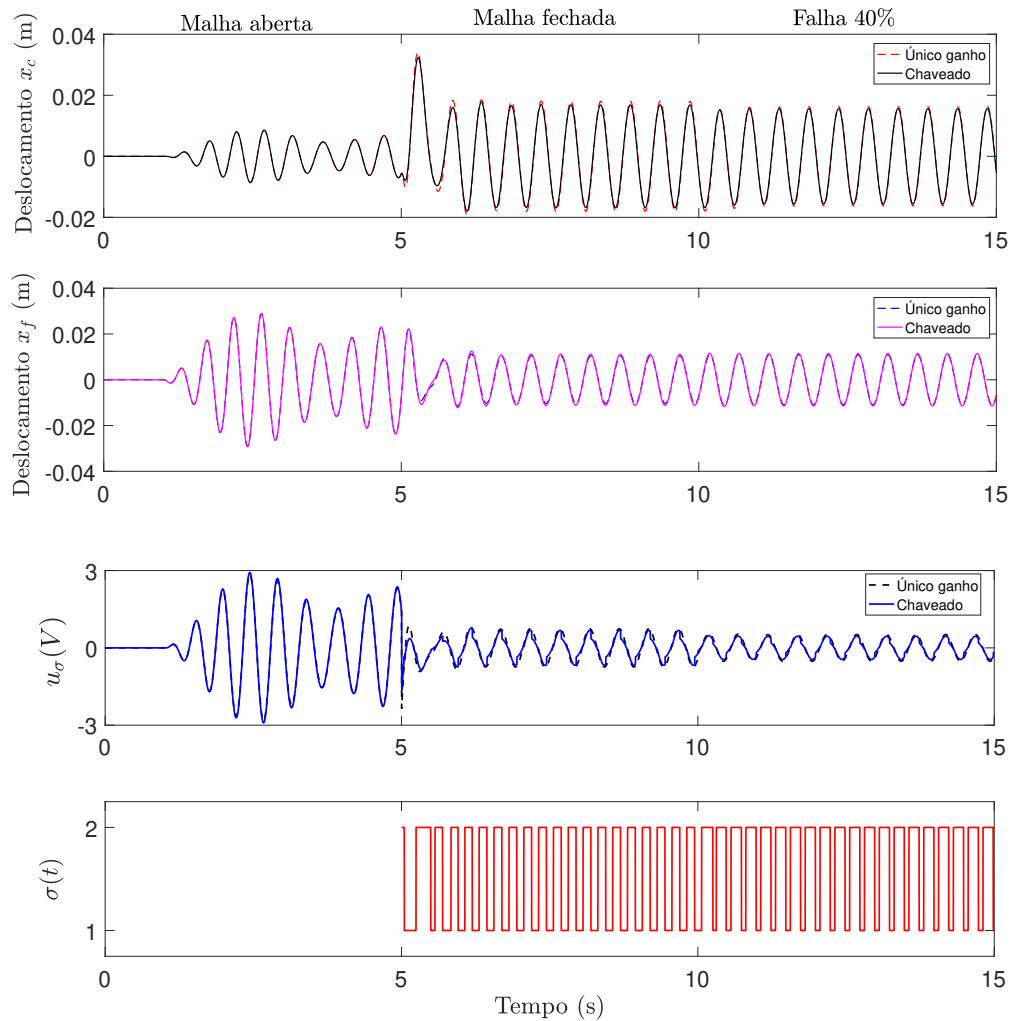
Com os ganhos dos controladores dado em (4.10), têm-se as seguintes normas para os controladores $\|K_1\| = 50,7344$ e $\|K_2\| = 75,7526$, e o sistema em malha fechada com realimentação do vetor de estados apresentou os seguintes autovalores:

$$\begin{aligned} \text{Autovalores}_{(A_1-B_1K_1)} &= \begin{bmatrix} -15,8069 + j0 \\ -4,2203 + j0 \\ -2,0314 + j17,5718 \\ -2,0314 - j17,5718 \end{bmatrix}, \text{Autovalores}_{(A_1-B_1K_2)} = \begin{bmatrix} -15,8069 + j0 \\ -3,4490 + j0 \\ -2,4774 + j17,9203 \\ -2,4774 - j17,9203 \end{bmatrix}, \\ \text{Autovalores}_{(A_2-B_2K_1)} &= \begin{bmatrix} -15,8069 + j0 \\ -2,5946 + j0 \\ -2,0145 + j17,3861 \\ -2,0145 - j17,3861 \end{bmatrix}, \text{Autovalores}_{(A_2-B_2K_2)} = \begin{bmatrix} -15,8069 + j0 \\ -2,1542 + j0 \\ -2,0126 + j17,6167 \\ -2,0126 - j17,6167 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Observando os autovalores do sistema em malha fechada, nota-se que o sistema se mantém estável uma vez que todos os autovalores apresentam parte real negativa. Considerando a restrição da norma dos controladores, nota-se que as normas obtidas neste projeto, apresentaram valores menores se comparadas as normas dos controladores do Projeto 2. A resposta dinâmica do sistema é apresentada nas Figuras 14 e 15.

Na Figura 14 é apresentada a dinâmica do deslocamento do carro e do piso superior, o sinal de controle $u_\sigma(t)$ e o sinal de chaveamento $\sigma(t)$, na Figura 15 é ilustrado o comportamento da velocidade do carro e do piso superior, considerando os ganhos apresentados em (4.10).

Figura 14 – Deslocamento do carro e do piso superior, sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada e ganhos (4.10), taxa de decaimento $\beta = 2$ e restrição na norma do controlador.



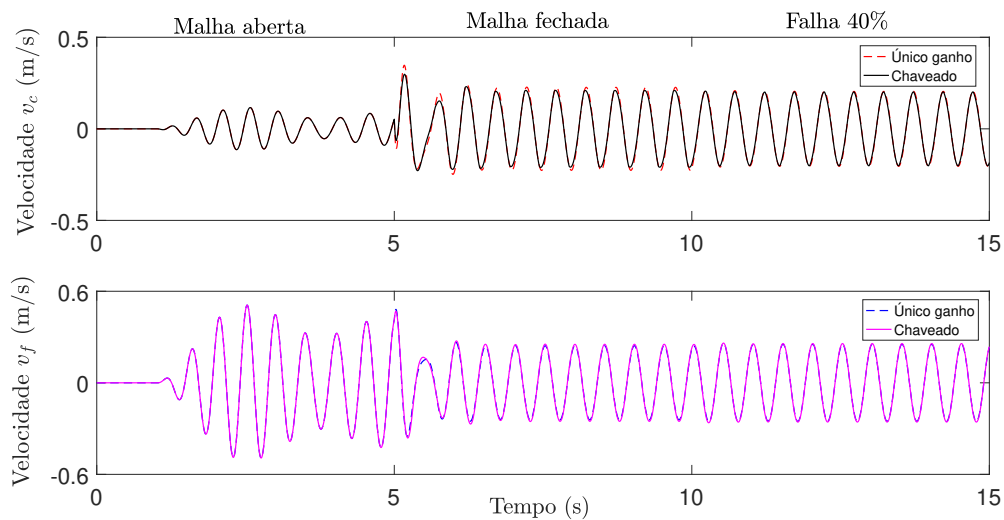
Fonte : Elaborado pelo autor.

Neste projeto é possível observar na Figura 14 o comportamento oscilatório do carro, o qual apresentou um *overshoot* no momento em que o sistema entra em operação no valor de 3,3 centímetros, e em seguida o deslocamento se estabiliza em 1,6 centímetros, e apresenta valores menores para o deslocamento do carro se comparado ao projeto anterior. Após a falha no sistema, pode-se observar que a oscilação do carro pouco se altera. As oscilações do piso superior que eram de 3 centímetros para o sistema em malha aberta, passaram a ser de 1,1 centímetros para o sistema em malha fechada. Como a taxa de decaimento não foi alterada, o tempo decorrido para o sistema entrar em regime permanente foi o mesmo em relação ao Projeto 2.

Analisando o sinal de controle da Figura 14, nota-se uma diminuição nos valores do

signal de controle em relação ao Projeto 2, no qual se obteve um valor de aproximadamente 610 mV para o sistema em malha fechada. Após a falha no sistema é possível verificar que as descontinuidades que ocorriam no sinal de controle do projeto anterior não ocorreram neste projeto, inclusive se observa uma diminuição do sinal de controle após a falha em relação ao período anterior, atingindo 400 mV. As descontinuidades apresentadas no projeto anterior, ocorreram devido ao chaveamento em alta frequência, nota-se que neste caso não ocorre a presença deste fenômeno.

Figura 15 – Velocidade do carro e do piso superior considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.10), taxa de decaimento $\beta = 2$ e restrição na norma do controlador.



Fonte : Elaborado pelo autor.

Na Figura 15, considerando que o deslocamento do carro diminuiu em relação ao Projeto 2, já era esperado que o comportamento da velocidade do carro também apresentasse valores menores, e mesmo após a falha, nota-se que a velocidade praticamente não se alterou.

4.1.5 Projeto 4: Controlador robusto chaveado com restrição na taxa de decaimento considerando região de operação e saturação do atuador

O Projeto 4 apresenta conceitos que abrangem a região de operação e uma possível saturação do sinal de controle. Ao se considerar a região de operação do sistema e uma possível saturação do sinal de controle, o projeto do controlador se aproxima de condições reais e práticas.

Os conceitos necessários neste projeto foram citados no Teorema 5, no qual resolvendo as LMIs (2.66), (2.67), (2.68) e (2.69), considerando os seguintes parâmetros para o projeto: taxa de decaimento $\beta = 2$, $\rho = 10V$ sendo este o valor limitante da saturação do atuador, mesmo que o módulo suportasse um sinal de controle até 24V, $\delta = 1$, $\phi_1 = \phi_2 = 0,05$, referente as restrições físicas no deslocamento da massa móvel e do piso superior no valor de 5 centímetros, $N_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ e $N_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$ referente as variáveis de estado correspondente aos deslocamentos,

no qual foram obtidos os seguintes ganhos dos controladores K_j , as matrizes simétricas $\bar{Q}_j$, e a matriz simétrica definida positiva P :

$$\begin{aligned}
 K_1 &= 10^8 \times \begin{bmatrix} 2,65692722 & -1,56411860 & 0,18094857 & 0,22182480 \end{bmatrix}, \\
 K_2 &= 10^8 \times \begin{bmatrix} 2,65692798 & -1,56411902 & 0,18094860 & 0,22182483 \end{bmatrix}, \\
 \bar{Q}_1 &= 10^{11} \times \begin{bmatrix} -0,702805138195194 & -1,447749880047728 & 0,007387398001307 & -0,029531754150230 \\ -1,447749880047728 & -2,571029830836713 & 0,003617703507381 & -0,066588405985987 \\ 0,007387398001307 & 0,003617703507381 & 0,000249525272627 & 0,000472724760435 \\ -0,029531754150230 & -0,066588405985987 & 0,000472724760435 & -0,001160490929264 \end{bmatrix}, \\
 \bar{Q}_2 &= 10^{11} \times \begin{bmatrix} -0,702805193457968 & -1,447749831762862 & 0,007387394222418 & -0,029531756421948 \\ -1,447749831762863 & -2,571029872070147 & 0,003617706893885 & -0,066588403776863 \\ 0,007387394222418 & 0,003617706893885 & 0,000249525042200 & 0,000472724658562 \\ -0,029531756421948 & -0,066588403776863 & 0,000472724658562 & -0,001160490914910 \end{bmatrix}, \\
 P &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 2,3204 & -0,1730 & 0,0991 & 0,1750 \\ -0,1730 & 1,3224 & -0,0351 & -0,0305 \\ 0,0991 & -0,0351 & 0,0058 & 0,0091 \\ 0,1750 & -0,0305 & 0,0091 & 0,0170 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

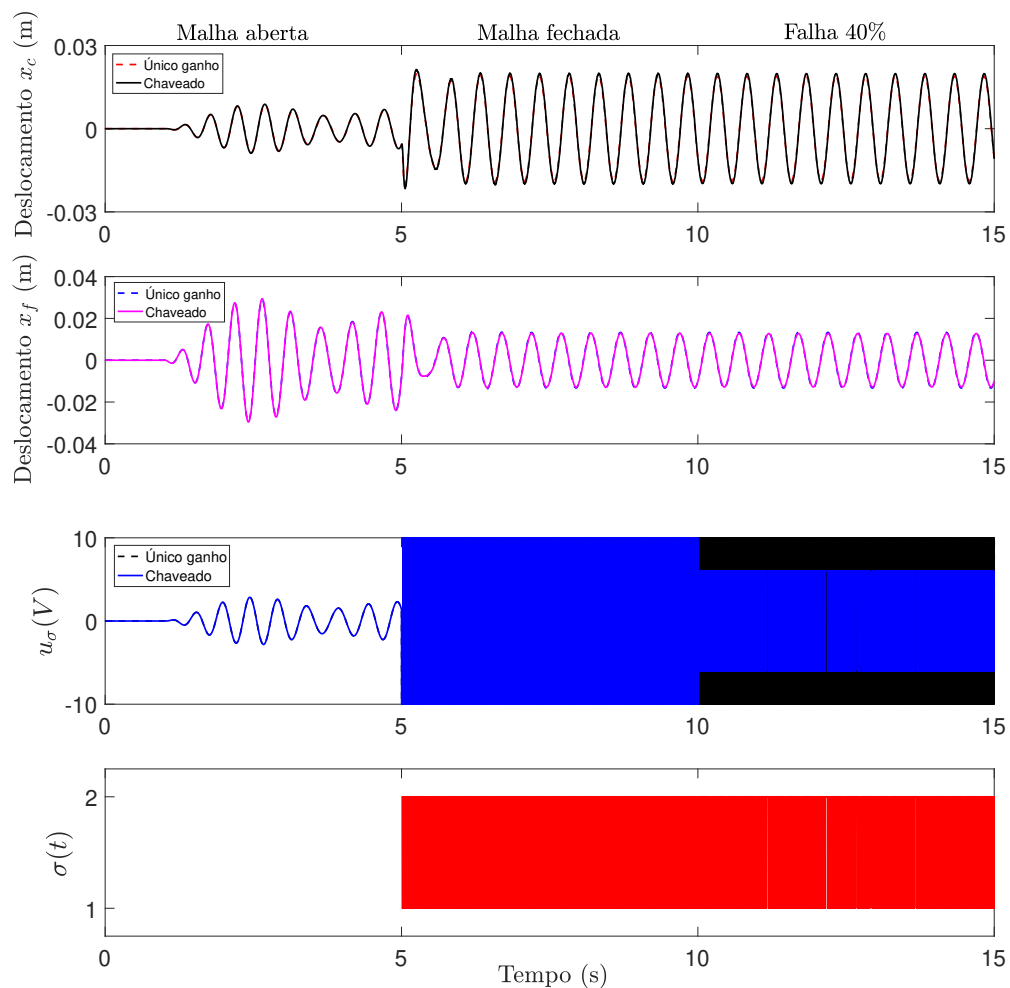
Considerando os ganhos dos controladores dado em (4.13), têm-se as seguintes normas para os controladores $\|K_1\| = 3,09639756 \times 10^8$ e $\|K_2\| = 3,09639843 \times 10^8$, e o sistema em malha fechada com realimentação do vetor de estados apresentou os seguintes autovalores:

$$\begin{aligned}
 \text{Autovalores}_{(A_1-B_1K_1)} &= 10^7 \times \begin{bmatrix} -3,294850380848380 + j0 \\ -0,000002246451769 + j0 \\ -0,000000313149400 + j0,000001599028817 \\ -0,000000313149400 - j0,000001599028817 \end{bmatrix}, \\
 \text{Autovalores}_{(A_1-B_1K_2)} &= 10^7 \times \begin{bmatrix} -3,294851121177117 + j0 \\ -0,000002246452003 + j0 \\ -0,000000313149367 + j0,000001599028800 \\ -0,000000313149367 - j0,000001599028800 \end{bmatrix}, \\
 \text{Autovalores}_{(A_2-B_2K_1)} &= 10^7 \times \begin{bmatrix} -1,976909825397282 + j0 \\ -0,000002246452109 + j0 \\ -0,000000313149452 + j0,000001599028869 \\ -0,000000313149452 - j0,000001599028869 \end{bmatrix}, \\
 \text{Autovalores}_{(A_2-B_2K_2)} &= 10^7 \times \begin{bmatrix} -1,976910269594457 + j0 \\ -0,000002246452350 + j0 \\ -0,000000313149415 + j0,000001599028839 \\ -0,000000313149415 - j0,000001599028839 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Note que os autovalores do sistema em malha fechada se mantêm no lado esquerdo do plano complexo, ou seja, o sistema ainda é estável, mesmo apresentando valores elevados.

A resposta dinâmica do sistema pode ser observada nas Figuras 16 e 17. Na Figura 16 é apresentada a dinâmica do deslocamento do carro e do piso superior, o sinal de controle $u_\sigma(t)$ e o sinal de chaveamento $\sigma(t)$, por sua vez na Figura 17 é ilustrado o comportamento da velocidade do carro e do piso superior, considerando os ganhos apresentados em (4.13).

Figura 16 – Deslocamento do carro e do piso superior, sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.13), taxa de decaimento $\beta = 2$, considerado a região de operação e saturação.



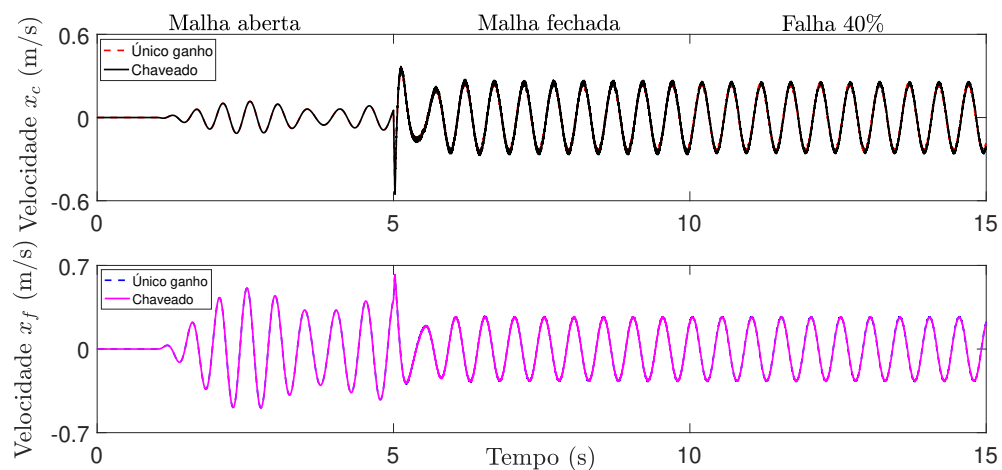
Fonte : Elaborado pelo autor.

Na Figura 16 é possível notar o comportamento oscilatório do carro, o qual apresentou um *overshoot* menor no instante em que o sistema entra em operação, atingindo um deslocamento máximo de 2,2 centímetros se comparado ao Projeto 3, mesmo apresentando valores elevados para as normas dos controladores. Porém, ao entrar em regime permanente os valores obtidos para o deslocamento do carro foram maiores em relação ao projeto anterior, atingindo 1,9 centímetros. Mesmo apresentando valores elevados, neste projeto em nenhum momento os limites físicos dos deslocamentos foram ultrapassados (5 centímetros). Após a falha no atuador foi observado que o controlador manteve o desempenho. O deslocamento do piso superior em malha aberta,

apresentava valor de aproximadamente 3,0 centímetros, e após o sistema entrar em operação os deslocamentos observados foram de 1,3 centímetros, e mesmo após a falha, o controlador manteve as oscilações do piso superior sem perda de desempenho.

Analizando o sinal de controle e o chaveamento na Figura 16, nota-se que o sinal de controle em malha fechada apresentou saturação, ou seja, excedeu o valor de 10 V estipulado em projeto como valor limite à saturação do atuador. Nota-se, que o projeto apresentou elevados valores para as normas dos controladores e o chaveamento entre os ganhos do controlador ocorrem em alta frequência, o que causou descontinuidades no sinal de controle, dificultando sua visualização, além de apresentar saturação no sinal de controle, o que por sua vez torna o projeto não implementável.

Figura 17 – Velocidade do carro e do piso superior considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.13), taxa de decaimento $\beta = 2$, considerado a região de operação e saturação.



Fonte : Elaborado pelo autor.

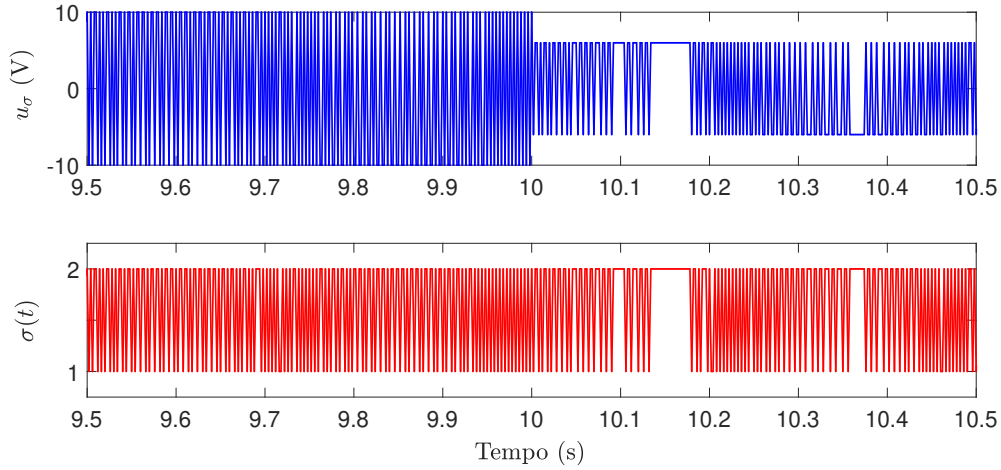
Na Figura 17, nota-se, que devido ao aumento no deslocamento do carro, a sua velocidade consequentemente aumentou em relação ao projeto anterior, e mesmo após a falha apresenta a mesma dinâmica.

Para facilitar a visualização do leitor, foi considerado na Figura 18 o sinal de controle e o sinal de chaveamento para um intervalo de tempo de 9,5 até 10,5 segundos.

O aumento na oscilação dos sinais de controle e chaveamento se deve a limitações físicas de *hardware*, uma vez que o tempo de amostragem das simulações foram de $t = 2 \times 10^{-3}$ segundos, sendo este o mesmo valor utilizado nas implementações no módulo.

Com os resultados obtidos neste projeto, não seria possível realizar a implementação do projeto de controle, uma vez que a mesma poderia causar danos no equipamento, sendo necessário aprimorar o *hardware*, acarretando custos elevados.

Figura 18 – Sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.13), taxa de decaimento $\beta = 2$, considerado a região de operação e saturação para o intervalo $t[9,5 \ 10,5]$ s.



Fonte : Elaborado pelo autor.

4.1.6 Projeto 5: Controlador chaveado com restrição na taxa de decaimento considerando a região de operação, saturação do atuador e restrição na norma do controlador

Com o objetivo de melhorar o desempenho apresentado no projeto anterior, no Projeto 5 será considerado a restrição na norma do controlador citada na Observação 2, devido às limitações físicas de *hardware*, uma vez que o Projeto 4 apresentou um sinal de controle com frequência elevada e valores superiores a 10 V, inviabilizando uma implementação prática do controlador projetado.

Considerando a restrição na norma do controlador, resolvendo a LMI (2.79) com $v_0 = 5$, e mantendo os demais parâmetros sem alteração em relação ao projeto anterior, foram obtidos os seguintes ganhos dos controladores K_j , as matrizes simétricas $\bar{Q}_j$, e a matriz simétrica definida positiva P :

$$K_1 = \begin{bmatrix} 119,1271 & -76,5693 & 7,3977 & 6,1097 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 115,1669 & -85,7947 & 6,6499 & 4,0403 \end{bmatrix},$$
(4.16)

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_1 &= 10^{11} \times \begin{bmatrix} -0,702805138195194 & -1,447749880047728 & 0,007387398001307 & -0,029531754150230 \\ -1,447749880047728 & -2,571029830836713 & 0,003617703507381 & -0,066588405985987 \\ 0,007387398001307 & 0,003617703507381 & 0,000249525272627 & 0,000472724760435 \\ -0,029531754150230 & -0,066588405985987 & 0,000472724760435 & -0,001160490929264 \end{bmatrix}, \\
\bar{Q}_2 &= 10^{11} \times \begin{bmatrix} -0,702805193457968 & -1,447749831762862 & 0,007387394222418 & -0,029531756421948 \\ -1,447749831762862 & -2,571029872070147 & 0,003617706893885 & -0,066588403776863 \\ 0,007387394222418 & 0,003617706893885 & 0,000249525042200 & 0,000472724658562 \\ -0,029531756421948 & -0,066588403776863 & 0,000472724658562 & -0,001160490914910 \end{bmatrix}, \\
P &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 1,8954 & -0,1505 & 0,0940 & 0,1377 \\ -0,1505 & 1,4904 & -0,0490 & -0,0322 \\ 0,0940 & -0,0490 & 0,0073 & 0,0087 \\ 0,1377 & -0,0322 & 0,0087 & 0,0140 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Com os ganhos dos controladores dado em (4.16), têm-se as seguintes normas para os controladores $\|K_1\| = 141,9373$ e $\|K_2\| = 143,8218$, e o sistema em malha fechada com realimentação do vetor de estados apresentou os seguintes autovalores:

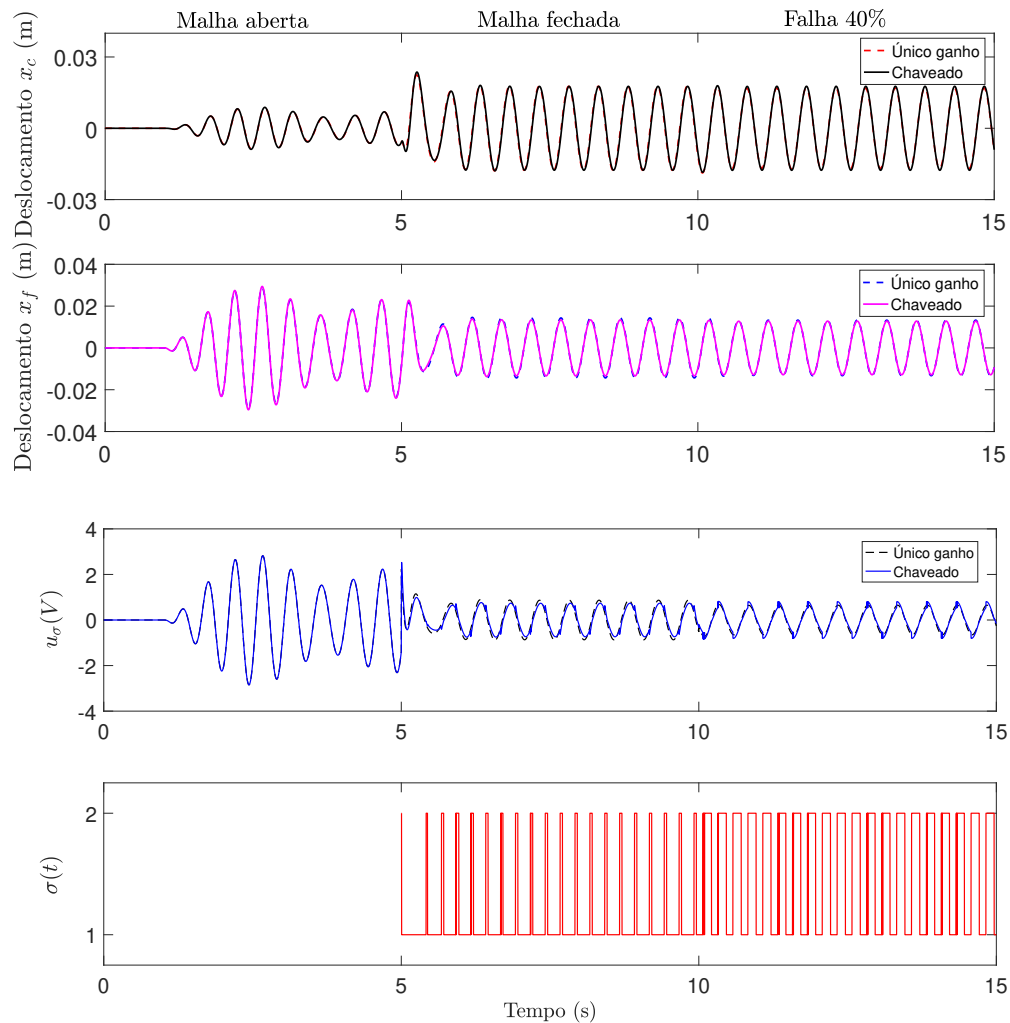
$$\begin{aligned}
\text{Autovalores}_{(A_1-B_1K_1)} &= \begin{bmatrix} -14,5108 + j10,0112 \\ -14,5108 - j10,0112 \\ -2,9692 + j16,5736 \\ -2,9692 - j16,5736 \end{bmatrix}, \text{Autovalores}_{(A_1-B_1K_2)} = \begin{bmatrix} -14,2485 + j10,9536 \\ -14,2485 - j10,9536 \\ -3,1039 + j15,9399 \\ -3,1039 - j15,9399 \end{bmatrix}, \\
\text{Autovalores}_{(A_2-B_2K_1)} &= \begin{bmatrix} -11,6807 + j6,3482 \\ -11,6807 - j6,3482 \\ -2,5373 + j17,1079 \\ -2,5373 - j17,1079 \end{bmatrix}, \text{Autovalores}_{(A_2-B_2K_2)} = \begin{bmatrix} -11,3521 + j6,9154 \\ -11,3521 - j6,9154 \\ -2,7892 + j16,7770 \\ -2,7892 - j16,7770 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Para o Projeto 5, tem-se que os autovalores do sistema em malha fechada se mantêm no lado esquerdo do plano complexo, ou seja, o sistema é estável. Ao se considerar a restrição na norma do controlador, observa-se a diminuição da norma dos controladores se comparado ao Projeto 4, no qual o valor da norma está relacionado com o sinal de controle. Logo, neste projeto se espera obter um sinal de controle menor.

A resposta dinâmica do sistema é apresentada nas Figuras 19 e 20. Na Figura 19 é apresentada a dinâmica do deslocamento do carro e do piso superior, o sinal de controle $u_\sigma(t)$ e o sinal de chaveamento $\sigma(t)$, por sua vez a Figura 20 apresenta o comportamento da velocidade do carro e do piso superior, considerando os ganhos apresentados em (4.16).

Na Figura 19, nota-se um comportamento oscilatório no deslocamento do carro, de modo que o *overshoot* no instante em que o sistema entra em operação praticamente não alterou em relação ao projeto anterior. Entretanto, é possível observar que as oscilações em regime permanente diminuíram se comparadas as oscilações do carro no Projeto 4, o qual se obteve um

Figura 19 – Deslocamento do carro e do piso superior, sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.16), taxa de decaimento $\beta = 2$, considerado a região de operação e saturação com restrição na norma do controlador.



Fonte : Elaborado pelo autor.

deslocamento de 1,7 centímetros, e mesmo após a falha o deslocamento do carro se manteve praticamente inalterado. O piso superior apresentou um deslocamento com valor máximo de 2,3 centímetros no instante que sistema entra em operação, estabilizando em 1,3 centímetros antes da falha. Após a falha, o deslocamento se manteve em 1,3 centímetros aproximadamente.

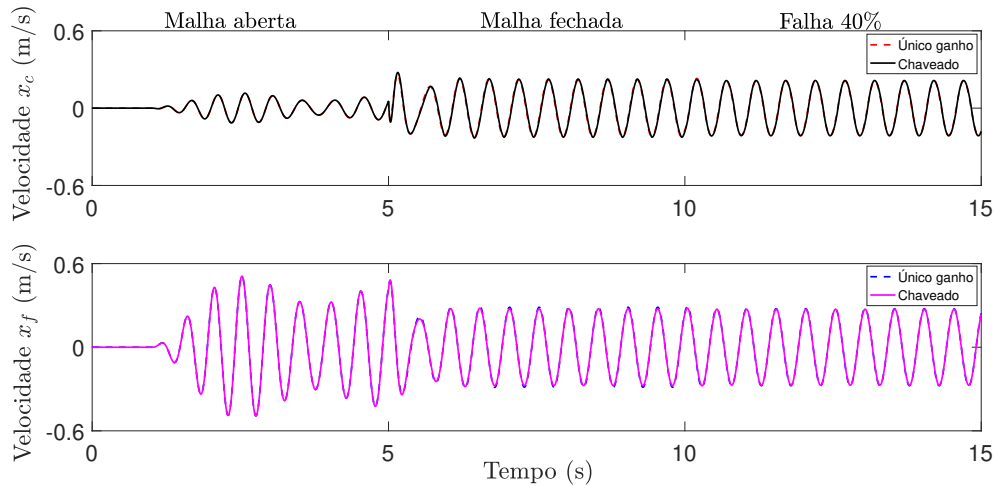
O sinal de controle na Figura 19, apresentou como valor máximo para o sinal de controle 2,3 V, exatamente no instante em que o sistema entra em operação, estabilizando em aproximadamente 650 mV. Após a falha no atuador o sinal de controle apresentou um pequeno aumento, chegando a 750 mV, de modo que os valores obtidos respeitam o limite de 10 V, imposto pela saturação do atuador.

Considerando a restrição da norma do controlador neste projeto, diferentemente do ocorrido no projeto anterior, o sinal de controle não apresentou saturação. É possível observar também que o chaveamento entre os ganhos dos controladores ocorreram de maneira mais

"suave", sem que ocorra frequências elevadas, o que poderia causar descontinuidades no sinal de controle.

Na Figura 20 é possível observar que a velocidade do carro foi ligeiramente menor se comparada a velocidade apresentada no projeto anterior.

Figura 20 – Velocidade do carro e do piso superior considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.16), taxa de decaimento $\beta = 2$, considerado a região de operação e saturação com restrição na norma do controlador.



Fonte : Elaborado pelo autor.

O Projeto 5 apresentou um bom desempenho se comparado aos projetos anteriores, uma vez que os sinais obtidos atendiam os limites físicos do equipamento, respeitando o limite de 10 V, imposto pela saturação do atuador, e os deslocamentos estipulados no projeto do controlador. Dessa forma, o Projeto 5 é passível de ser implementado.

Com base nos resultados obtidos nos Projetos 4 e 5, será apresentado no Capítulo seguinte uma abordagem referente a análise da frequência de amostragem para o conjunto *Active Mass Damper 1 + Shake Table II*.

4.1.7 Projeto 6: Controlador robusto chaveado com restrição na taxa de decaimento considerando região de operação, saturação do atuador, restrição da norma do controlador e expansão do conjunto elipsoidal

Os projetos de controladores apresentados até este momento garantiam a estabilidade local do sistema incerto *Active Mass Damper 1 + Shake Table II*. Com isso, é de interesse considerar que um conjunto de condições iniciais esteja contido na elipsoide $\mathcal{E}(P, \delta)$, de modo que para qualquer condição inicial $x(0)$, tenha-se $x(0) \in \mathcal{E}(P, \delta)$. O Projeto 6 foi realizado levando em conta o critério de estabilidade considerando um conjunto de condições iniciais de interesse como citado no Lema 2, inserindo a LMI (2.80) no Projeto 5.

Neste projeto é necessário realizar a expansão do conjunto elipsoidal, no qual o parâmetro ϖ é um fator de escala do conjunto $co\{w_1, \dots, w_l\}$, sendo ϖ utilizado como uma variável a ser

maximizada, sendo um parâmetro otimizado pelo *MatLab*[®], considerando o seguinte conjunto de fecho convexo de vetores conhecidos $w_1 = [0,05 \ 0,05 \ 0 \ 0]^T$, $w_2 = [0,05 \ -0,05 \ 0 \ 0]^T$, $w_3 = [-0,05 \ 0,05 \ 0 \ 0]^T$ e $w_4 = [-0,05 \ -0,05 \ 0 \ 0]^T$.

Os demais parâmetros utilizados neste projeto são: taxa de decaimento $\beta = 2$, $\rho = 10V$ sendo o valor limitante da saturação do atuador, $\delta = 1$, $\phi_1 = \phi_2 = 0,05$, referente as restrições físicas no deslocamento da massa móvel e do piso superior, no valor de 5 centímetros e $N_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ e $N_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$, referente as variáveis de estado correspondentes aos deslocamentos.

Foram obtidos os seguintes ganhos dos controladores K_j , as matrizes simétricas $\bar{Q}_j$, e a matriz simétrica definida positiva P :

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \begin{bmatrix} 106,2174 & -41,1853 & 5,0557 & 3,5373 \end{bmatrix}, \\
 K_2 &= \begin{bmatrix} 91,3216 & -23,2444 & 2,7378 & 0,3670 \end{bmatrix}, \\
 \bar{Q}_1 &= 10^{13} \times \begin{bmatrix} -5,810206147663688 & -0,564477245314981 & -0,177927432489824 & -0,305281028816502 \\ -0,564477245314981 & -7,076311839073951 & 0,182349156308612 & 0,052004891210199 \\ -0,177927432489824 & 0,182349156308612 & -0,011121313883744 & -0,011663941043064 \\ -0,305281028816502 & 0,052004891210199 & -0,011663941043064 & -0,016976678403362 \end{bmatrix}, \\
 \bar{Q}_2 &= 10^{13} \times \begin{bmatrix} -5,810206147760498 & -0,564477245222290 & -0,177927432498613 & -0,305281028816944 \\ -0,564477245222290 & -7,076311839061726 & 0,182349156306881 & 0,052004891203803 \\ -0,177927432498613 & 0,182349156306881 & -0,011121313883518 & -0,011663941042396 \\ -0,305281028816944 & 0,052004891203803 & -0,011663941042396 & -0,016976678402793 \end{bmatrix}, \\
 P &= 10^3 \times \begin{bmatrix} 789,3161 & 0,0161 & 26,5413 & 42,5851 \\ 0,0161 & 946,0280 & -26,3536 & -9,7822 \\ 26,5413 & -26,3536 & 3,1751 & 2,6857 \\ 42,5851 & -9,7822 & 2,6857 & 5,1397 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Para os ganhos dos controladores dado em (4.19), têm-se as seguintes normas dos controladores $\|K_1\| = 114,0896$ e $\|K_2\| = 94,2739$, e o sistema em malha fechada com realimentação do vetor de estados apresentou os seguintes autovalores:

$$\begin{aligned}
\text{Autovalores}_{(A_1-B_1K_1)} &= \begin{bmatrix} -12,5543 + j11,5011 \\ -12,5543 - j11,5011 \\ -2,6502 + j16,2476 \\ -2,6502 - j16,2476 \end{bmatrix}, \text{Autovalores}_{(A_1-B_1K_2)} = \begin{bmatrix} -10,6395 + j12,8253 \\ -10,6395 - j12,8253 \\ -2,6125 + j15,3757 \\ -2,6125 - j15,3757 \end{bmatrix}, \\
\text{Autovalores}_{(A_2-B_2K_1)} &= \begin{bmatrix} -10,5081 + j7,2436 \\ -10,5081 - j7,2436 \\ -2,3445 + j16,8487 \\ -2,3445 - j16,8487 \end{bmatrix}, \text{Autovalores}_{(A_2-B_2K_2)} = \begin{bmatrix} -9,2214 + j7,8523 \\ -9,2214 - j7,8523 \\ -2,4598 + j16,4382 \\ -2,4598 - j16,4382 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Assim como nos projetos anteriores, o Projeto 6 apresentou os autovalores do sistema em malha fechada no lado esquerdo do plano complexo. Com a expansão do volume elipsoidal, tem-se que o fecho convexo de condições iniciais estará contido dentro da elipsoide. De acordo com o Lema 2, as condições de projeto garantem que o conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(P, 1)$ é um conjunto positivamente invariante no domínio de atração, logo todas as trajetórias do vetor de estado expandido estão confinadas no conjunto elipsoidal e, por consequência, contidas na região de operação.

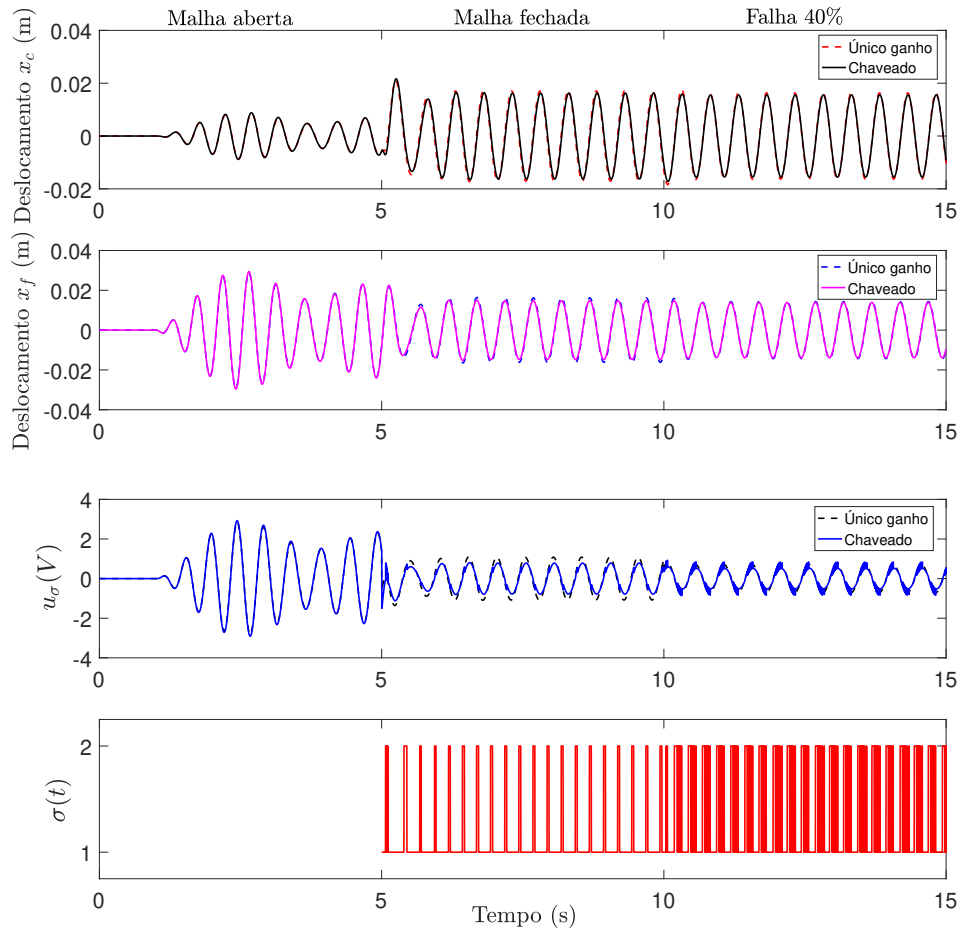
A resposta dinâmica do sistema é apresentada nas Figuras 21 e 22. Na Figura 21 é apresentada a dinâmica do deslocamento do carro e do piso superior, o sinal de controle $u_\sigma(t)$ e o sinal de chaveamento $\sigma(t)$, por sua vez na Figura 22 é ilustrado o comportamento da velocidade do carro e do piso superior, considerando os ganhos apresentados em (4.19).

Na Figura 21 é possível observar que o sistema em malha fechada apresenta um deslocamento para o carro similar ao comportamento apresentado no projeto anterior, cujo deslocamento máximo do carro foi de 2,2 centímetros. Entretanto, ao se estabilizar, o deslocamento do carro atingiu o valor de 1,5 centímetros, valor este, menor se comparado ao obtido no projeto anterior. Após a falha, nota-se que o deslocamento do carro praticamente não sofreu alteração. O deslocamento do piso superior apresentou valores similares ao projeto anterior, atingindo um deslocamento de 1,3 centímetros para o sistema em malha fechada, e mantendo sua dinâmica mesmo após a falha do atuador. O controlador projetado é capaz de manter o deslocamento do carro e do piso superior dentro dos limites do equipamento.

O sinal de controle obtido apresentou valores similares considerando o sistema em malha fechada se comparado ao Projeto 5, atingindo um valor de 700 mV. Após a falha no atuador, o sinal de controle apresentou uma diminuição do seu valor para 650 mV, sendo que os valores obtidos respeitam o limite de 10 V, imposto pela saturação do atuador.

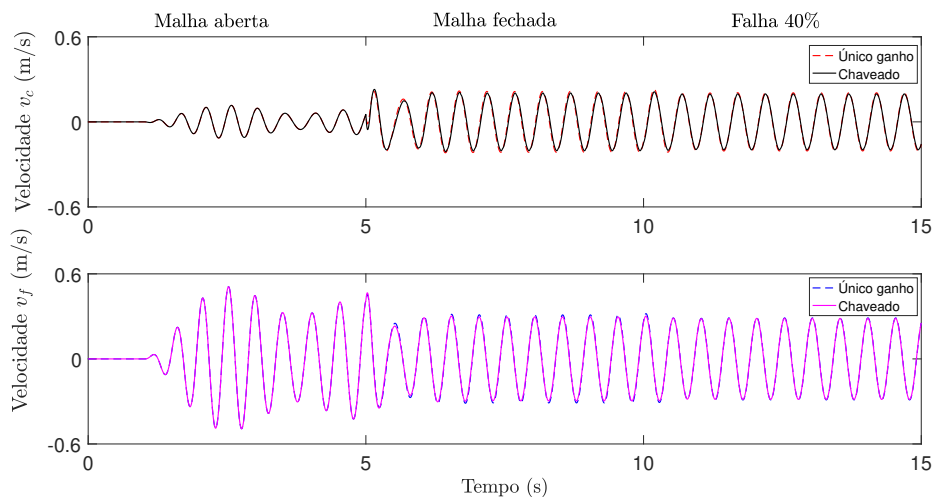
O Projeto 6 apresenta como índice de desempenho a expansão do conjunto elipsoidal, dado pela maximização do parâmetro ϖ . Na Tabela 2 é apresentado a comparação entre os índices de desempenho ϖ , considerando os projetos de controle robusto com único ganho e o controle chaveado.

Figura 21 – Deslocamento do carro e do piso superior, sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.19), taxa de decaimento $\beta = 2$, considerado a região de operação e saturação, restrição na norma do controlador e expansão do volume elipsoidal.



Fonte : Elaborado pelo autor.

Figura 22 – Velocidade do carro e do piso superior considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.19), taxa de decaimento $\beta = 2$, considerado a região de operação e saturação, restrição na norma do controlador e expansão do volume elipsoidal.



Fonte : Elaborado pelo autor.

Tabela 2 – Comparação do índice de desempenho ϖ para o Projeto 6, considerando o projeto de controlador robusto de único ganho e controlador chaveado.

Controlador	Índice de desempenho ϖ
Único ganho	0,4693
Chaveado	0,4801

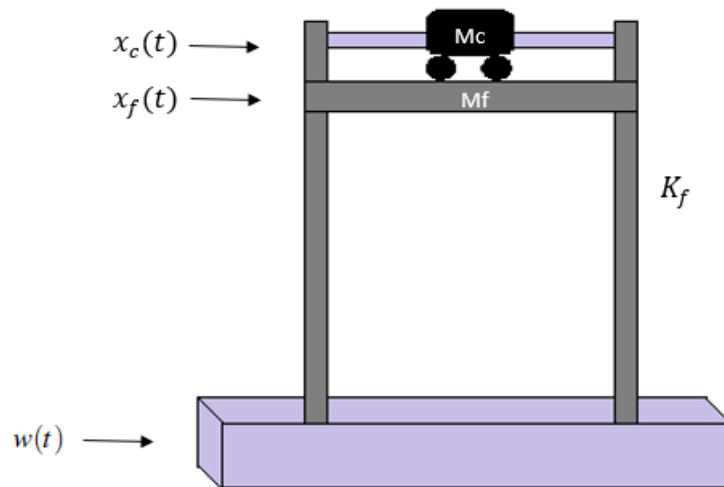
Fonte : Elaborado pelo autor.

Ao se considerar a expansão do volume elipsoidal, busca-se encontrar um conjunto de condições iniciais dado por $\chi = \varpi \text{co}\{w_1, \dots, w_n\}$, com $\varpi > 0$, de modo que $\chi \in \mathcal{E}(P, 1)$, tal que a minimização de ϖ^{-2} forneça uma estimativa menos conservadora. Para os valores obtidos neste projeto, nota-se que é verificado a desigualdade dada em (2.81), no qual para a simulação realizada obteve-se $(\varpi w_\ell)^T P(\varpi w_\ell) \leq 1$. Logo, o conjunto de condições iniciais de interesse está contido na elisoide $\mathcal{E}(P, 1)$.

4.1.8 Projeto 7: Controlador robusto chaveado considerando a minimização da norma H_∞ e região de operação

Nesta seção será proposta uma nova modelagem matemática para a matriz H utilizada até este momento, que é apresentada em (SUMAN, 2020). Na Figura 6, no Capítulo 3 foi apresentado a modelagem da estrutura em estudo, no qual o deslocamento do piso superior é dado por x_f com massa M_f e com material de rigidez flexível referente as vigas K_f . Enquanto a massa móvel tem seu deslocamento dado por x_c e massa M_c através de um eixo fixo e guiado por um motor elétrico. A mesa (*Shake Table II*) é responsável por aplicar um distúrbio $w(t)$ no sistema, provocando uma oscilação na estrutura, como ilustrado na Figura 23.

Figura 23 – Parâmetros do sistema para modelagem da matriz H .



Fonte : Elaborado pelo autor.

O equacionamento da matriz H foi desenvolvido com base nos trabalhos apresentados em (SANTOS, 2018) e (DUÓ; FELIX, 2016). A equação de Lagrange é utilizada para a obtenção das equações diferenciais do movimento, que são expressas em termos de duas variáveis generalizadas, a partir do cálculo total das energias cinética T e potencial V e das forças externas:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = Q_i, \quad (4.22)$$

sendo q_i as variáveis generalizadas, Q_i são as forças generalizadas e $L = T - V$.

A energia potencial do sistema advém da energia potencial elástica da estrutura, que pode ser comparada com um sistema massa-mola. Essa equação é função da deformação, ou deslocamento do piso superior e a constante elástica da mola.

$$V = \frac{1}{2} K_f [x_f]^2. \quad (4.23)$$

Já a energia cinética total é a soma das energias de translação e rotação do conjunto motor/carro, e da energia translacional da estrutura flexível.

Considerando uma força de excitação na base que provoca um deslocamento na estrutura representada por $w(t)$. A energia translacional da massa móvel e das estruturas flexíveis são funções da velocidade do carro e do piso superior, assim como da velocidade do distúrbio ($\dot{x}_c$, $\dot{x}_f$ e $\dot{w}$).

$$T_c = \frac{1}{2} M_c [\dot{x}_c + \dot{x}_f + \dot{w}]^2. \quad (4.24)$$

A energia rotacional do motor que controla o carro é calculada pelo momento de inércia do motor J_m , pela redução mecânica entre os eixos no carrinho K_g e pelo raio do motor que controla o carrinho r_{mp} .

$$T_{rc} = \frac{1}{2} \frac{J_m K_g^2 \dot{x}_c^2}{r_{mp}^2}. \quad (4.25)$$

Por fim, tem-se a energia translacional do piso superior, que é função das velocidades do piso superior e da velocidade do distúrbio ($\dot{x}_f$ e $\dot{w}$).

$$T_f = \frac{1}{2} M_f [\dot{x}_f + \dot{w}]^2. \quad (4.26)$$

Assim, temos que a energia cinética total e a energia potencial total são dados por:

$$T = \frac{1}{2}M_c[\dot{x}_c + \dot{x}_f + \dot{w}]^2 + \frac{1}{2}M_f[\dot{x}_f + \dot{w}]^2 + \frac{1}{2}\frac{J_m K_g^2 \dot{x}_c^2}{r_{mp}^2},$$

$$V = \frac{1}{2}K_f[x_f]^2.$$
(4.27)

Aplicando na formulação de Lagrange, tem-se:

$$L = \frac{1}{2}M_c[\dot{x}_c + \dot{x}_f + \dot{w}]^2 + \frac{1}{2}M_f[\dot{x}_f + \dot{w}]^2 + \frac{1}{2}\frac{J_m K_g^2 \dot{x}_c^2}{r_{mp}^2} - \frac{1}{2}K_f[x_f]^2.$$
(4.28)

Para sistemas não conservativos, as equações de Lagrange para cada posição x_c e x_f são dadas por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_c} \right) = Q_{x_c},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_f} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_f} \right) = Q_{x_f},$$
(4.29)

sendo $Q_{x_c} = F_c(t) - Beq\dot{x}_c(t)$, onde Beq é o coeficiente de amortecimento viscoso do motor e F_c é a força aplicada pela massa móvel, sendo $F_c = -\frac{\eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m \dot{x}_c}{R_m r_{mp}^2} + \frac{\eta_g K_g \eta_m K_t V_m}{R_m r_{mp}^2}$, e $Q_{x_f} = 0$.

Assim resolvendo as equações de Lagrange e a partir de simplificações, obtém-se as seguintes equações do movimento:

$$(M_c + M_f)\ddot{x}_f + M_c\ddot{x}_c = -K_f x_f - (M_c + M_f)\ddot{w},$$
(4.30)

$$M_c\ddot{x}_f + \frac{M_c r_{mp}^2 + J_m K_g^2}{r_{mp}^2} \ddot{x}_c = -\frac{\eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m \dot{x}_c}{R_m r_{mp}^2} + \frac{\eta_g K_g \eta_m K_t V_m}{R_m r_{mp}^2} - Beq\dot{x}_c - M_c\ddot{w}.$$
(4.31)

Associando as equações (4.31) e (4.30) na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} M_c + M_f & M_c \\ M_c & M_c + \frac{J_m K_g^2}{r_{mp}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_f \\ \ddot{x}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_f x_f - (M_c + M_f)\ddot{w} \\ -\frac{\eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m \dot{x}_c}{R_m r_{mp}^2} + \frac{\eta_g K_g \eta_m K_t V_m}{R_m r_{mp}^2} - Beq\dot{x}_c - M_c\ddot{w} \end{pmatrix}.$$
(4.32)

Considerando a matriz dos coeficientes da segunda derivada seja não nulo, e multiplicando por sua inversa e realizando as manipulações necessárias tem-se:

$$\ddot{x}_f = \left[\frac{\left[-r_{mp}^2 \left(M_c + \frac{J_m K_g^2}{r_{mp}^2} \right) \right] (K_f x_f + (M_c + M_f) \ddot{w})}{M_c M_f r_{mp}^2 + J_m K_g^2 M_f + J_m K_g^2 M_c} \right] + \left[\frac{-M_c r_{mp}^2 \left[-M_c \ddot{w} - \left(Beq + \frac{\eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m}{R_m r_{mp}} \right) \dot{x}_c + \frac{\eta_g K_g \eta_m K_t}{R_m r_{mp}} V_m \right]}{M_c M_f r_{mp}^2 + J_m K_g^2 M_f + J_m K_g^2 M_c} \right] \quad (4.33)$$

$$\ddot{x}_c = \left[\frac{-M_c r_{mp}^2 (K_f x_f + (M_c + M_f) \ddot{w})}{M_c M_f r_{mp}^2 + J_m K_g^2 M_f + J_m K_g^2 M_c} \right] + \left[\frac{-r_{mp}^2 (M_c + M_f) \left[-M_c \ddot{w} - \left(Beq + \frac{\eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m}{R_m r_{mp}} \right) \dot{x}_c + \frac{\eta_g K_g \eta_m K_t}{R_m r_{mp}} V_m \right]}{M_c M_f r_{mp}^2 + J_m K_g^2 M_f + J_m K_g^2 M_c} \right]. \quad (4.34)$$

Desenvolvendo as equações (4.33) e (4.34), obtêm-se:

$$\ddot{x}_f = -\frac{K_f (M_c r_{mp}^2 + J_m K_g^2)}{M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f} x_f + \frac{M_c (\eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m + Beq R_m r_{mp}^2)}{R_m (M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f)} \dot{x}_c + -\frac{M_c \eta_g K_g \eta_m K_t r_{mp}}{R_m (M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f)} V_m + \frac{M_c r_{mp}^2 - (M_c + M_f) (M_c r_{mp}^2 + J_m K_g^2)}{M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f} \ddot{w} \quad (4.35)$$

$$\ddot{x}_c = \frac{M_c r_{mp}^2 K_f}{M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f} x_f + -\frac{M_c \eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m + M_c Beq R_m r_{mp}^2 + M_f \eta_g K_g^2 \eta_m K_t K_m + M_f Beq R_m r_{mp}^2}{R_m (M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f)} \dot{x}_c + \frac{\eta_g K_g \eta_m K_t r_{mp} (M_c + M_f)}{R_m (M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f)} V_m + 0 \ddot{w}. \quad (4.36)$$

Analisando as equações (4.35) e (4.36), nota-se que o distúrbio influencia apenas o estado referente à aceleração do piso superior dada por $\ddot{x}_f$. Desta forma, tem-se que a matriz H é dada por:

$$H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{M_c r_{mp}^2 - (M_c + M_f) (M_c r_{mp}^2 + J_m K_g^2)}{M_c r_{mp}^2 M_f + J_m K_g^2 M_c + J_m K_g^2 M_f} \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

O Projeto 7 tem o objetivo de analisar o comportamento do conjunto *Active Mass Damper I + Shake Table II*, considerando a minimização da influência do distúrbio na saída do sistema, por meio da minimização da norma H_∞ . Seja o sistema dado em (2.82) sujeito a um distúrbio externo $w(t)$, com frequência de 2Hz e amplitude de 1 centímetro, que amplifique a saída do sistema e, por consequência, aumente a relação $\int_0^\infty y(t)^T y(t) dt / \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt$, na qual se apresenta as seguintes matrizes H_i , C_i , D_i e G_i , para o sistema incerto (2.82):

$$H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

$$D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, G_1 = G_2 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Considere uma condição inicial nula $\varepsilon_0 = 0$ e o distúrbio $w(t) \in \mathcal{W}$, definido em (2.83), tal que $\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt = 0,0005 \leq \varepsilon = 0,0005$.

Para a execução deste projeto foi necessário realizar a alteração de alguns parâmetros em relação aos projetos anteriores, sendo $\varphi = 0,01$, $v_0 = 0,2$ e fixando o parâmetro $\varpi = 1$.

Por fim, para $\rho = 10$, $\phi_1 = \phi_2 = 0,05$, $N_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ e $N_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$ referente as variáveis de estado correspondentes aos deslocamentos, sendo o seguinte conjunto de fecho convexo de vetores conhecidos $w_1 = [0,05 \ 0,05 \ 0 \ 0]^T$, $w_2 = [0,05 \ -0,05 \ 0 \ 0]^T$, $w_3 = [-0,05 \ 0,05 \ 0 \ 0]^T$ e $w_4 = [-0,05 \ -0,05 \ 0 \ 0]^T$. Utilizando o *software MatLab/Simulink*® para realizar as simulações, resolvendo o problema de otimização citado no Teorema 6, dado pelas LMIs (2.85), (2.86), (2.87) e (2.88). A solução deste problema de otimização resultou em um custo garantido H_∞ de $\gamma = 0,1421$. Além disso, a simulação apresentou os seguintes ganhos dos controladores K_j , as matrizes simétricas $\bar{Q}_j$, e a matriz simétrica definida positiva P :

$$K_1 = \begin{bmatrix} 70,0795 & -320,0316 & 5,3755 & 1,5909 \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 44,9611 & -362,6208 & 2,5757 & -3,5222 \end{bmatrix},$$

$$\bar{Q}_1 = 10^{10} \times \begin{bmatrix} 0,1867 & -7,7939 & 0,0788 & 0,0291 \\ -7,7939 & -4,2096 & -0,4001 & -0,9627 \\ 0,0788 & -0,4001 & 0,0079 & 0,0101 \\ 0,0291 & -0,9627 & 0,0101 & 0,0043 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 32,2911 & -0,0002 & 1,8113 & 4,0029 \\ -0,0002 & 367,6967 & -3,2610 & -0,3986 \\ 1,8113 & -3,2610 & 0,2963 & 0,5816 \\ 4,0029 & -0,3986 & 0,5816 & 1,6378 \end{bmatrix},$$

$$\bar{Q}_2 = 10^{10} \times \begin{bmatrix} 0,1867 & -7,7939 & 0,0788 & 0,0291 \\ -7,7939 & -4,2096 & -0,4001 & -0,9627 \\ 0,0788 & -0,4001 & 0,0079 & 0,0101 \\ 0,0291 & -0,9627 & 0,0101 & 0,0043 \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

Considerando os ganhos dos controladores dado em (4.39), têm-se as seguintes normas dos controladores $\|K_1\| = 327,6626$ e $\|K_2\| = 365,4236$, e o sistema em malha fechada com realimentação do vetor de estados apresentou os seguintes autovalores:

$$\begin{aligned}
 \text{Autovalores}_{(A_1-B_1K_1)} &= \begin{bmatrix} -9,9020 + j19,5204 \\ -9,9020 - j19,5204 \\ -6,7159 + j7,9426 \\ -6,7159 - j7,9426 \end{bmatrix}, \text{Autovalores}_{(A_1-B_1K_2)} = \begin{bmatrix} -10,2136 + j21,5815 \\ -10,2136 - j21,5815 \\ -4,6619 + j6,0498 \\ -4,6619 - j6,0498 \end{bmatrix}, \\
 \text{Autovalores}_{(A_2-B_2K_1)} &= \begin{bmatrix} -7,9169 + j4,3338 \\ -7,9169 - j4,3338 \\ -5,7837 + j18,6635 \\ -5,7837 - j18,6635 \end{bmatrix}, \text{Autovalores}_{(A_2-B_2K_2)} = \begin{bmatrix} -6,1259 + j3,1944 \\ -6,1259 - j3,1944 \\ -6,5293 + j19,3750 \\ -6,5293 - j19,3750 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

O Projeto 7, bem como os projetos anteriores, também apresenta todos os seus autovalores com parte real negativa, logo o sistema em malha fechada é estável. A resposta dinâmica do sistema é apresentada nas Figuras 24 e 25.

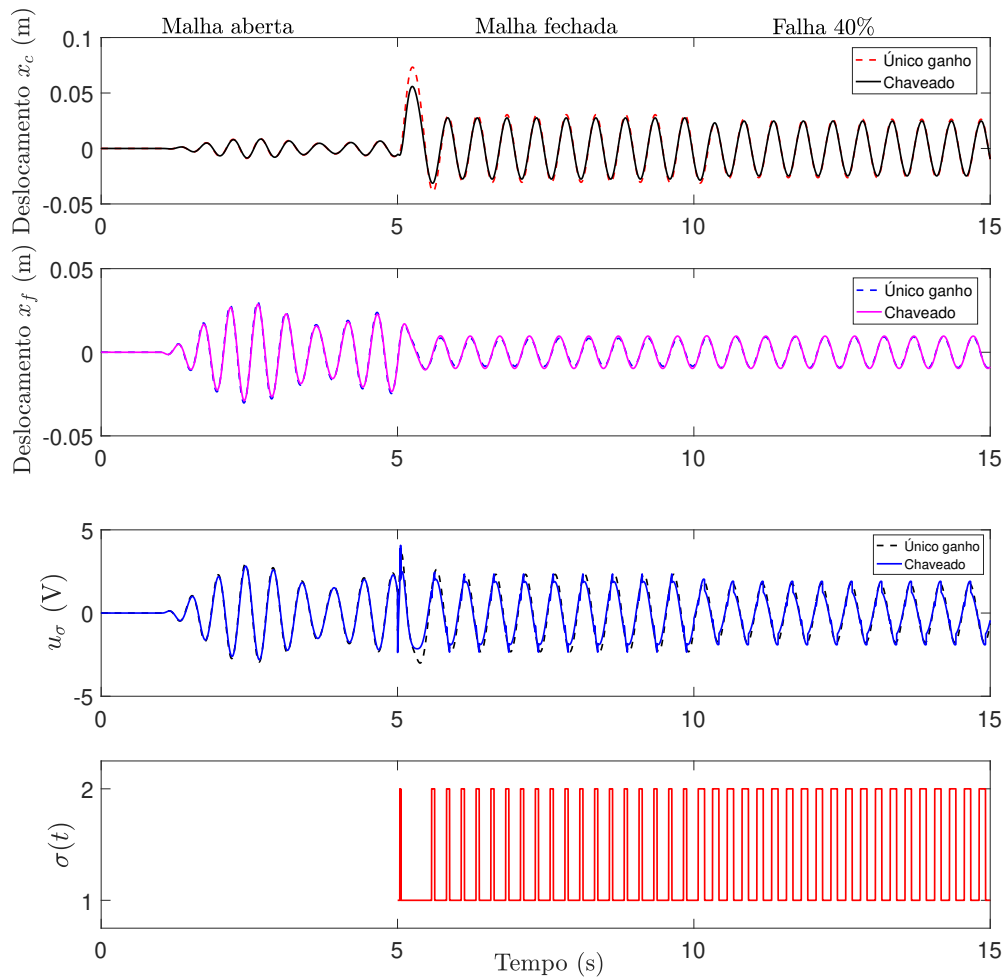
A partir da Figura 24, nota-se que para o sistema em malha aberta sem a ação do controlador o deslocamento do piso superior apresentou um comportamento oscilatório. Para o sistema em malha fechada, é observado que as oscilações no piso superior diminuem devido a ação do carro (*controlador*), no instante em que o sistema entra em operação (5 segundos), o deslocamento do carro atinge por alguns instantes os limites especificados no projeto (5 centímetros), atingindo um deslocamento de 5,5 centímetros, e se estabiliza em 2,7 centímetros. Após a falha, o deslocamento do carro passou a ser de aproximadamente 2,4 centímetros.

A atuação do carro foi eficaz, uma vez que as oscilações do piso superior em malha aberta atingiam aproximadamente 3 centímetros, e após o sistema entrar em operação passou a ser de 0,9 centímetros. Mesmo após a falha no sistema, as oscilações do piso superior são mantidas em valores aceitáveis, e não se observa uma grande mudança no deslocamento do piso superior, mostrando que mesmo com a falha do atuador, o projeto de controle é eficaz.

É possível observar na Figura 24, que no instante em que o sistema entra em malha fechada o sinal de controle não apresenta saturação, de modo que o valor máximo obtido para o sinal de controle foi de 4,7 V, no instante em que o sistema passa para malha fechada, respeitando as especificações de projeto, e posteriormente atinge o valor de 2,3 V. Pode-se observar ainda, que no instante em que o sistema passou a considerar a falha, o sinal de controle diminui, atingindo 1,9 V. Além disso, considerando a nova modelagem da matriz H , as oscilações em alta frequência do sinal de chaveamento entre os ganhos, é menor se comparada ao Projeto 6, quando ainda era considerado a matriz H apresentada em (SUMAN, 2020).

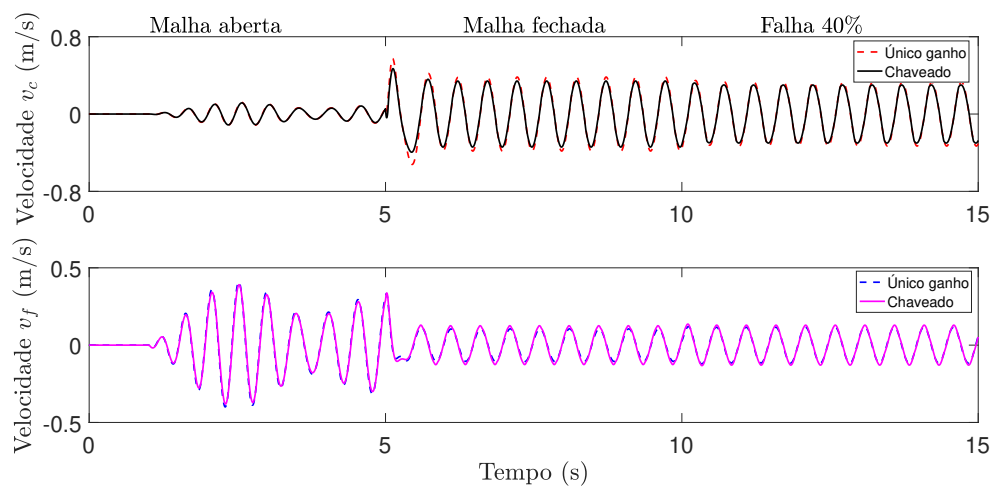
A Figura 25 apresenta o comportamento da dinâmica da velocidade do carro e do piso superior, na qual nota-se, que para o sistema em malha aberta o carro apresentou comportamento oscilatório em sua velocidade, sendo atenuado no instante em que o sistema passa para malha fechada. Além disso, após a falha, o carro diminui as oscilações no comportamento da velocidade do piso superior.

Figura 24 – Deslocamento do carro e do piso superior, sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.39), considerado a minimização da norma H_∞ .



Fonte : Elaborado pelo autor.

Figura 25 – Velocidade do carro e do piso superior considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.39), considerado a minimização da norma H_∞ .



Fonte : Elaborado pelo autor.

O Projeto 7 apresenta como índice de desempenho o custo garantido H_∞ dado pelo parâmetro γ . Considerando a relação dada em (2.84), de modo que quanto menor o valor de γ , menor será a influência do distúrbio na saída do sistema. Na Tabela 3 é apresentada a comparação entre os índices de desempenho para o custo garantido H_∞ para os projetos de controlador robusto com único ganho e controlador chaveado.

Tabela 3 – Comparação do índice de desempenho Custo Garantido H_∞ (γ) para o Projeto 7, considerando o projeto de controlador robusto de único ganho e controlador chaveado.

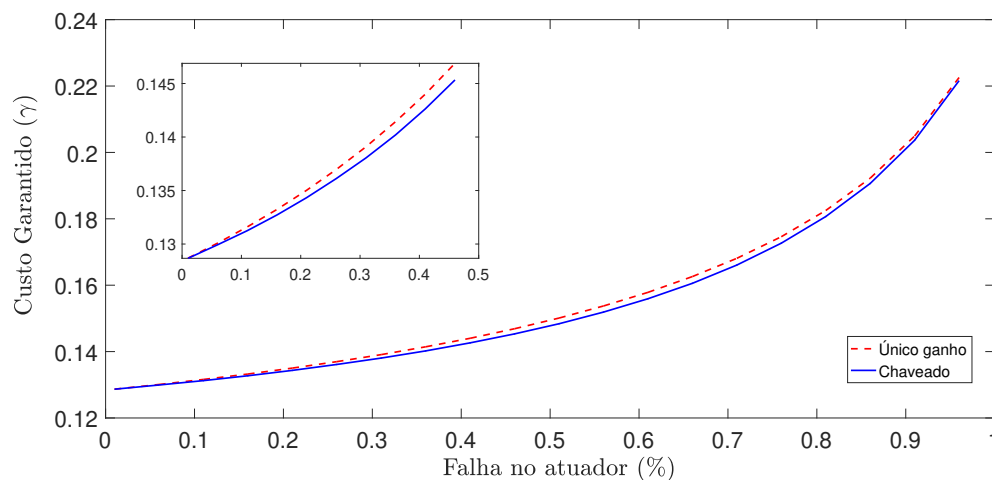
Controlador	Custo garantido H_∞ (γ)
Único ganho	0,1435
Chaveado	0,1421

Fonte : Elaborado pelo autor.

Ambos os projetos apresentaram índices satisfatórios. Desta forma, ao se considerar a minimização da norma H_∞ , busca-se atenuar a influência de uma entrada exógena na saída do sistema. Assim, uma vez que o projeto de controle utilizando o controlador chaveado, apresentou um menor valor para o custo garantido H_∞ dado por γ , em relação ao projeto utilizando o controlador robusto de único ganho, o projeto de controle chaveado apresentou uma menor influência do distúrbio, ou seja, a minimização do custo garantido H_∞ mitigou o efeito do distúrbio na saída do sistema.

Para uma melhor comparação entre os projetos de controle, na Figura 26 é apresentado o comportamento do custo garantido H_∞ dado por γ em relação ao percentual de falha no atuador.

Figura 26 – Falha no atuador x Custo Garantido H_∞ .



Fonte : Elaborado pelo autor.

Procurando validar a eficiência dos projetos de controle apresentados neste capítulo, no capítulo 6, será apresentada as implementações para alguns dos projetos de controle, buscando observar na prática o comportamento do sistema.

5 ANÁLISE DA FREQUÊNCIA DE AMOSTRAGEM NA RESPOSTA DINÂMICA DO SISTEMA

Neste capítulo será apresentada uma análise da frequência de amostragem na resposta do sistema. O estudo se baseia no teorema da amostragem de Nyquist-Shannon, no qual será utilizada a Transformada Rápida de Fourier (FFT - *Fast Fourier Transform*) para obtenção da frequência a ser analisada.

5.1 Teorema da amostragem de Nyquist-Shannon

Em certos sistemas dinâmicos, os sinais de entrada e de saída são sinais contínuos, funções de uma variável contínua, normalmente o tempo (t). Em certas condições, um sinal contínuo $x(t)$ pode ser representado por um sinal em tempo discreto, ou simplesmente, sinal discreto, $x(n)$, uma função de uma variável discreta, (n). O teorema da amostragem estabelece essas condições para o caso da amostragem periódica:

$$x(n) = x(n\Delta T), \quad (5.1)$$

em que ΔT é o período de amostragem, de modo que a frequência angular de amostragem seja $\Omega_s = 2\pi/\Delta T$.

O processo de amostragem pode ser entendido como a obtenção de amostras de um sinal contínuo em intervalos de tempo igualmente espaçados. Para a realização deste procedimento, deve-se atentar em relação a definição da frequência com a qual as amostras serão obtidas. Caso esta frequência seja muito pequena, a reconstrução do sinal pode não ser possível (FERNANDES; PANAZIO, 2009). Para que este processo seja bem sucedido é definido o Teorema da Amostragem de Nyquist-Shannon.

Teorema 7. (OPPENHEIM, 1999) *Seja um sinal $X(t)$ com banda limitada, ou seja $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_M$, onde ω_M representa a máxima frequência do sinal. Neste caso, $x(t)$ pode ser determinado por suas amostras $x(n\Delta T)$, onde ΔT é o período de amostragem e $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, se:*

$$\omega_s \geq 2\omega_M, \quad (5.2)$$

onde ω_s é a frequência de amostragem e ω_M é a frequência dominante do sinal original.

Caso a frequência de amostragem seja inferior a frequência de Nyquist, o sinal não poderá ser recuperado completamente a partir de suas amostras, pois haverá superposição espectral, resultando em distorção nas frequências mais altas. Esse fenômeno é conhecido como *aliasing*.

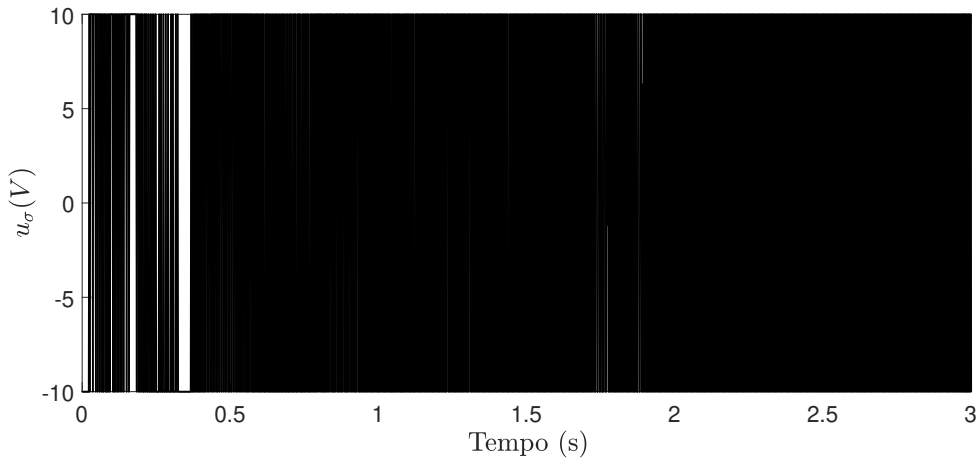
5.2 Análise no domínio da frequência utilizando a Transformada Rápida de Fourier

Para analisar a influência da frequência de amostragem na resposta do sistema, foram considerados os resultados obtidos em um projeto de controle robusto com restrição na taxa de decaimento, considerando a região de operação e saturação do atuador, conforme (SUMAN, 2020), no qual se obteve a seguinte norma para o controlador $\|K\| = 1,43171032 \times 10^7$. Sendo os resultados obtidos nessa análise expandidos para o projeto de controle robusto chaveado. A ideia consiste em aplicar a Transformada Rápida de Fourier no sinal de controle e observar sua resposta no domínio da frequência.

A Transformada Rápida de Fourier (FFT) é utilizada por ser uma boa alternativa de construção computacional, além de ser mais eficiente se comparada à Transformada Discreta de Fourier (DFT), pelo fato de apresentar um número menor de operações de multiplicação e soma em seu algoritmo (COOLEY; TUKEY, 1965).

As simulações dos projetos de controle apresentadas até este momento, foram realizadas considerando o tempo de amostragem $t = 2 \times 10^{-3}$ segundos, pois este é mesmo tempo de amostragem do módulo didático, que corresponde a uma frequência de amostragem de $F_s = 1/t = 500$ Hz. Na Figura 27, é apresentado o sinal de controle para o projeto citado anteriormente.

Figura 27 – Sinal de controle para o tempo de amostragem $t = 2 \times 10^{-3}$.

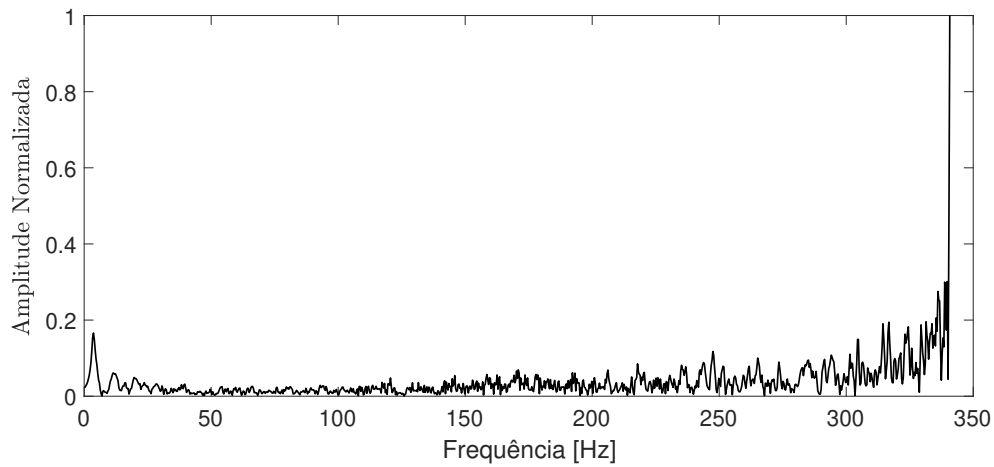


Fonte : Elaborado pelo autor.

Assim como no projeto de controle chaveado, o sinal de controle considerando o projeto de controle robusto apresenta saturação do sinal de controle, além de oscilar em alta frequência, inviabilizando sua implementação. A determinação da frequência do sinal de controle na Figura 27 se torna uma tarefa difícil, mas aplicando a Transformada Rápida de Fourier (FFT), é possível obter as frequências das componentes do sinal de controle, apresentadas na Figura 28.

Na Figura 28, nota-se que a frequência dominante para o sinal de controle apresenta um valor de aproximadamente $F_M = 340,8$ Hz. Deste modo, tem-se que não é obedecido o critério de Nyquist para a amostragem do sinal, uma vez que $500 \text{ Hz} \geq 2 \times 340,8 \text{ Hz}$ não é satisfeito.

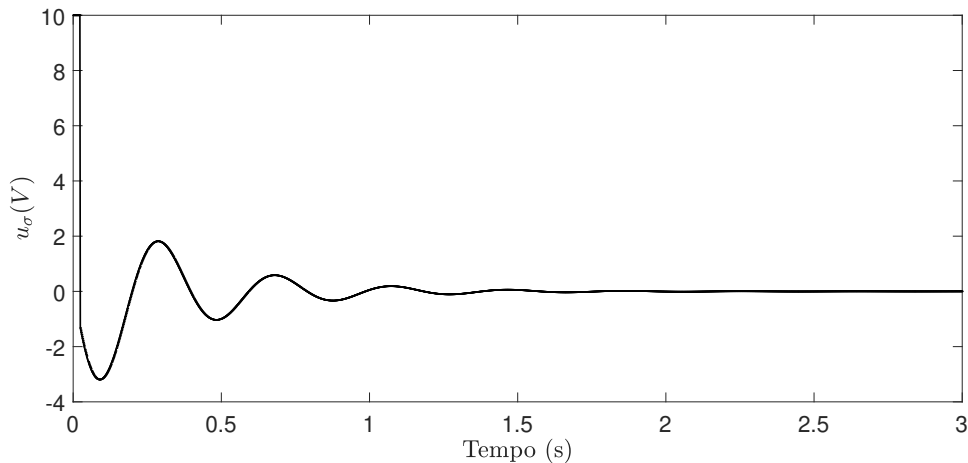
Figura 28 – Transformada Rápida de Fourier do sinal de controle para o tempo de amostragem $t = 2 \times 10^{-3}$.



Fonte : Elaborado pelo autor.

Ainda considerando o projeto de controle mencionado, mas agora utilizando um tempo de amostragem menor, sendo $t = 1 \times 10^{-6}$ segundos, que corresponde a uma frequência de amostragem de $F_s = 1/t = 1$ MHz. Na Figura 29 é ilustrado o comportamento do sinal de controle, considerando o novo tempo de amostragem.

Figura 29 – Sinal de controle para o tempo de amostragem $t = 1 \times 10^{-6}$.



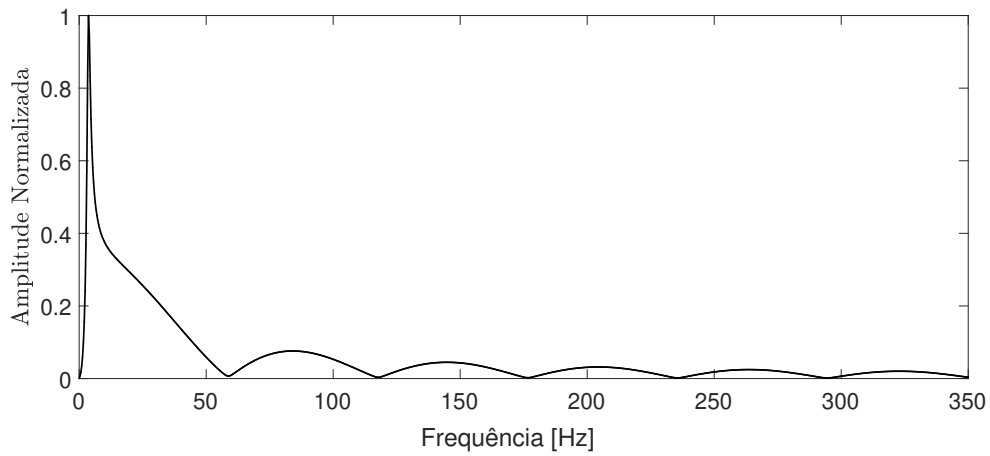
Fonte : Elaborado pelo autor.

Observa-se que neste caso, mesmo o projeto de controle apresentando os mesmos ganhos do caso anterior, porém com um tempo de amostragem menor, o sinal de controle do sistema satura apenas no instante inicial, o qual ao decorrer do tempo se mantém em valores aceitáveis.

Aplicando a Transformada Rápida de Fourier no sinal de controle da Figura 29, obtém-se a frequência dominante do sinal, apresentada na Figura 30.

Ao considerar a nova frequência de amostragem, observa-se que a frequência dominante

Figura 30 – Transformada Rápida de Fourier do sinal de controle para o tempo de amostragem $t = 1 \times 10^{-6}$.

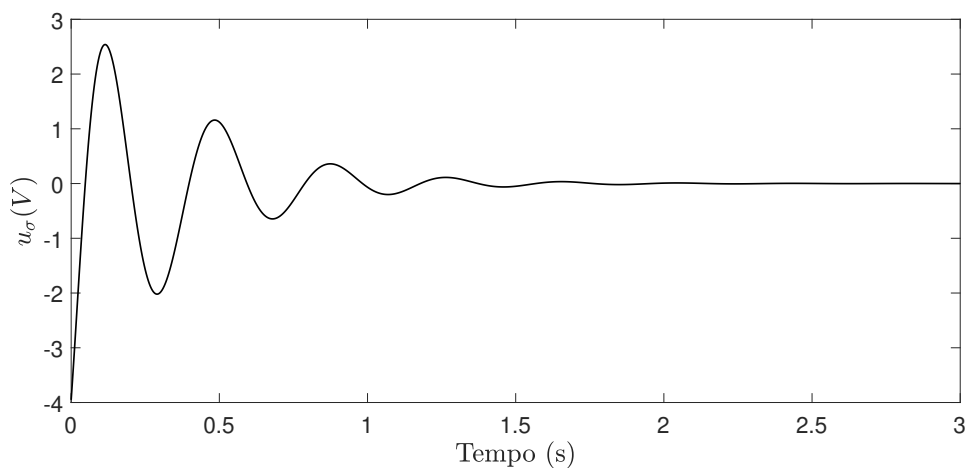


Fonte : Elaborado pelo autor.

presente no sinal de controle é aproximadamente de $F_M = 3,66$ Hz, no qual é verificado que o critério de Nyquist é satisfeito.

Inserindo uma restrição na norma do controlador para o projeto de controle robusto com restrição na taxa de decaimento, considerando a região de operação e saturação, obteve-se a seguinte norma para o controlador $\|K\| = 145,3721$. Na Figura 31 é apresentado o sinal de controle, para o tempo de amostragem $t = 2 \times 10^{-3}$ segundos.

Figura 31 – Sinal de controle com restrição na norma do controlador, para o tempo de amostragem $t = 2 \times 10^{-3}$.

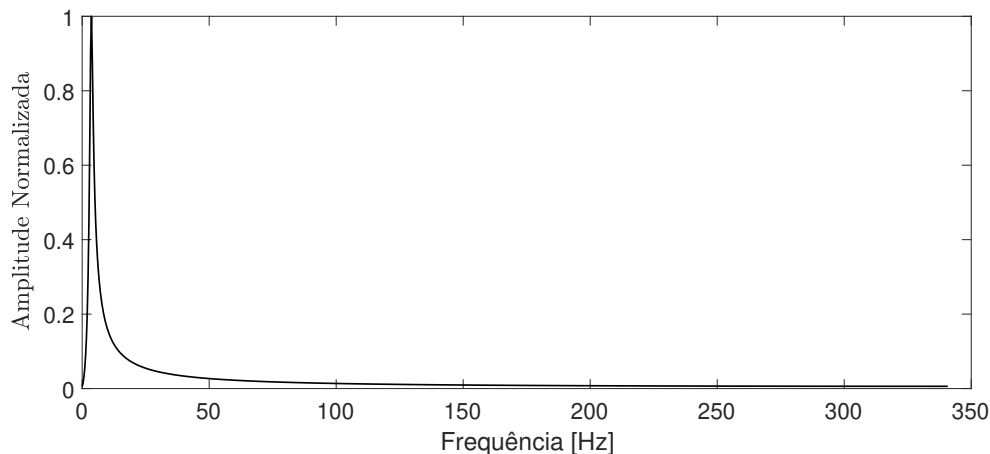


Fonte : Elaborado pelo autor.

Na Figura 31 é possível observar que mesmo com o tempo de amostragem de $t = 2 \times 10^{-3}$, o sinal de controle não apresenta saturação, como o observado na Figura 27, e devido a inserção da restrição na norma do controlador se obteve um projeto de controle com um menor valor para a norma do controlador. Deste modo, aplicando a Transformada Rápida de Fourier (FFT) na

Figura 31, obtém-se a frequência dominante do sinal de controle, apresentada na Figura 32.

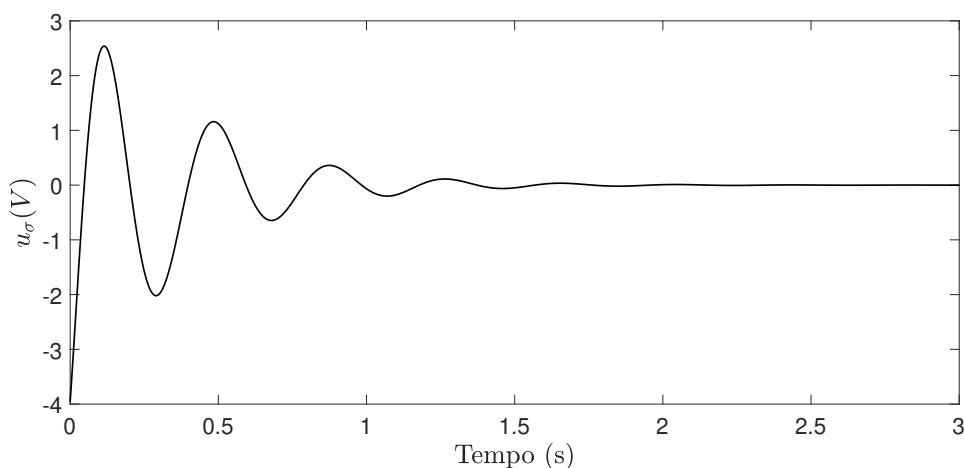
Figura 32 – Transformada Rápida de Fourier do sinal de controle para o tempo de amostragem $t = 2 \times 10^{-3}$.



Fonte : Elaborado pelo autor.

Na Figura 32, nota-se que a frequência dominante do sinal de controle é de aproximadamente $F_M = 3,66$ Hz, assim como a frequência obtida na Transformada Rápida de Fourier (FFT) do projeto anterior sem a restrição do sinal de controle para um tempo de amostragem $t = 1 \times 10^{-6}$, a qual já foi verificada que satisfaz o critério de Nyquist.

Figura 33 – Sinal de controle com restrição na norma do controlador, para o tempo de amostragem $t = 1 \times 10^{-6}$.



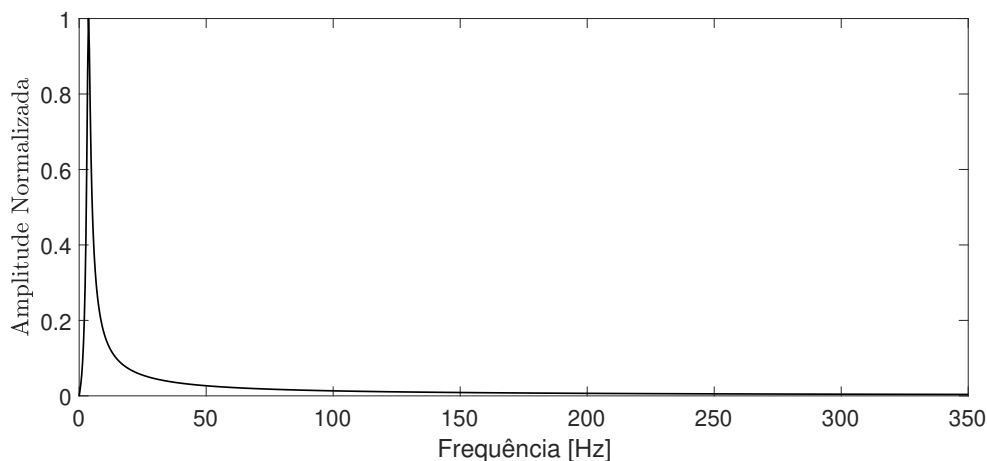
Fonte : Elaborado pelo autor.

Para validar os resultados obtidos, foi realizado mais uma simulação para o projeto de controle anterior, porém considerando um tempo de amostragem de $t = 1 \times 10^{-6}$. Na Figura 33 é ilustrado o sinal de controle obtido.

O sinal de controle apresentado na Figura 33 é idêntico, ao sinal apresentado na Figura 31, e assim como no caso anterior, aplicando a Transformada Rápida de Fourier (FFT) é possível

verificar a frequência dominante do sinal de controle, apresentada na Figura 34.

Figura 34 – Transforma Rápida de Fourier do sinal de controle para o tempo de amostragem $t = 1 \times 10^{-6}$.



Fonte : Elaborado pelo autor.

Assim como observado no espectro de frequência para o tempo de amostragem $t = 2 \times 10^{-3}$, na Figura 34, também foi verificado a frequência $F_M = 3,66$ Hz, que por sua vez também obedece o critério de Nyquist.

5.3 Comentário

A frequência dominante para um espectro de sinal pode ser determinada pelo maior valor absoluto do coeficiente da sua Transformada Rápida de Fourier (FFT) elevado ao quadrado, ou seja, são os picos do espectro que foi gerado à uma determinada taxa de amostragem constante, de modo que tais picos indicam a frequência dominante do sinal amostrado.

Nesta seção, foi verificada a importância do período de amostragem com o qual a simulação e implementação dos projetos de controle estão sendo realizadas, uma vez que caso a frequência de amostragem seja inferior a frequência de Nyquist, o sinal não poderá ser recuperado completamente a partir de suas amostras, pois haverá superposição espectral, resultando em distorção nas frequências mais altas gerando o fenômeno conhecido como *aliasing*. Contudo, na prática será utilizado o período de amostragem do módulo, de forma que diminuir o tempo de amostragem, implica em limitações de *hardware*. Desse modo, é necessário alterar o projeto de controle.

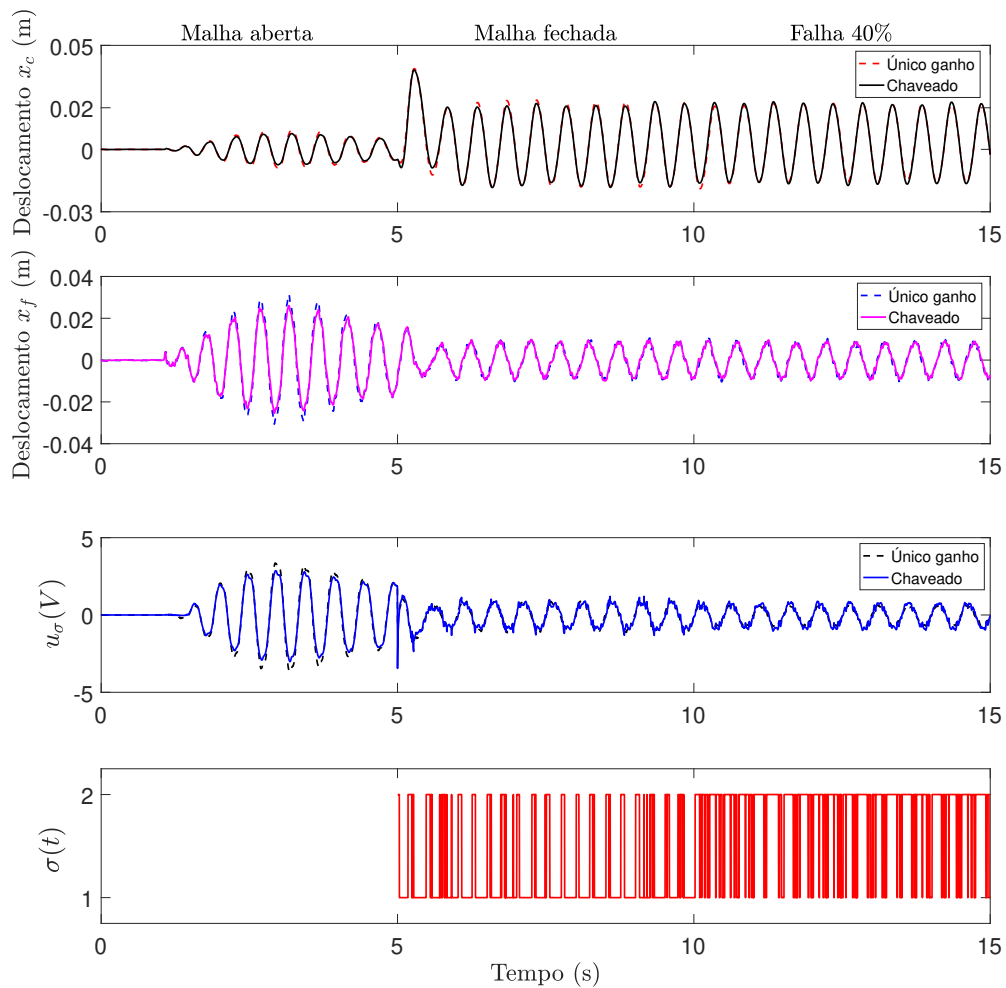
6 IMPLEMENTAÇÃO PRÁTICA DOS CONTROLADORES

Neste capítulo serão apresentados os resultados práticos das implementações considerando os projetos de controle 2, 6 e 7, apresentados nas subseções 4.1.3, 4.1.7 e 4.1.8, aplicados no sistema *Active Mass Damper 1 + Shake Table II* fornecidos pela Quanser[®], pertencentes ao Laboratório de Pesquisa em Controle da FEIS-UNESP.

6.1 Implementação 1: Controlador robusto chaveado com restrição na taxa de decaimento

A seguir será apresentado nas Figuras 35 e 36 os resultados obtidos com a implementação do Projeto 2, com ganho de realimentação, considerando a lei de controle chaveada (2.20).

Figura 35 – Implementação - Deslocamento do carro e do piso superior, sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada e ganhos (4.7) com taxa de decaimento $\beta = 2$.



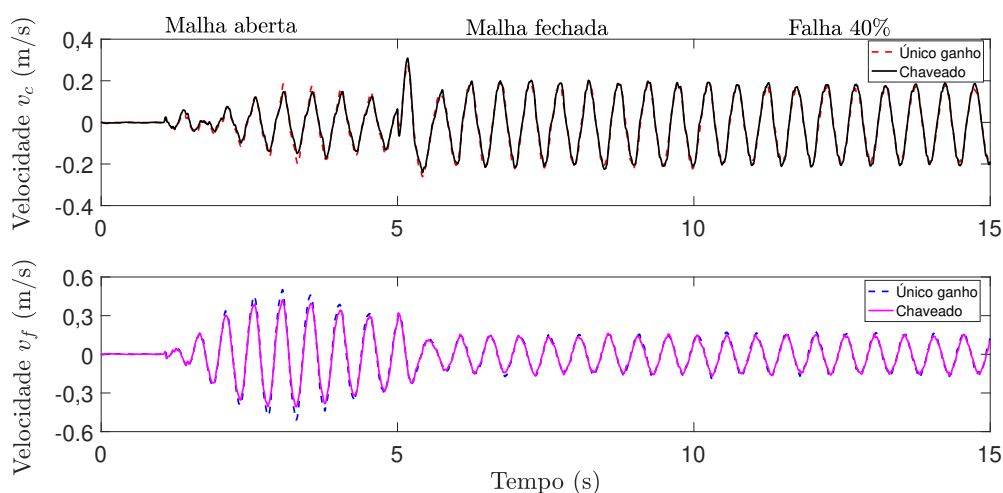
Fonte : Elaborado pelo autor.

Para o período correspondente ao intervalo de 0 à 5 segundos, note que o piso superior apresenta sua maior oscilação, no valor de 3 centímetros, que corresponde ao instante em que o sistema está em malha aberta. No instante em que o sistema passa para malha fechada, o deslocamento do carro apresentou como valor máximo 4,2 centímetros e em seguida atinge o regime permanente, se estabilizando em 2,1 centímetros. A ação do sistema em malha fechada foi responsável por atenuar as oscilações do piso superior de 3,0 centímetros para 1,5 centímetros, de modo que o tempo necessário para que o sistema atingisse o regime permanente foi de aproximadamente 1,2 segundos. Mesmo após a falha, o controlador manteve as oscilações do piso superior em níveis aceitáveis.

Comparando as Figuras 12 e 35, percebe-se que os deslocamentos do carro e do piso superior apresentaram um comportamento similar. O máximo valor atingido para o deslocamento do carro ocorre no mesmo instante em que o sistema passa de malha aberta para malha fechada e com valores praticamente idênticos aos resultados obtidos na simulação.

Mesmo para o sistema em malha aberta é apresentado um sinal de controle, o qual está relacionado com um controle interno do módulo, responsável apenas por manter o carro "travado", de modo que ele não possa deslizar livremente. O sinal de controle apresentado possui um comportamento semelhante ao resultado obtido na simulação, no qual o sinal não ultrapassa os limites do equipamento. Considerando o sistema em malha fechada os valores obtidos para o sinal de controle foi de aproximadamente 1,2 V, e após a falha no atuador o sinal de controle apresenta um valor de 1,1 V.

Figura 36 – Implementação - Velocidade do carro e do piso superior considerando lei de controle chaveada e ganhos (4.7) com taxa de decaimento $\beta = 2$.



Fonte : Elaborado pelo autor.

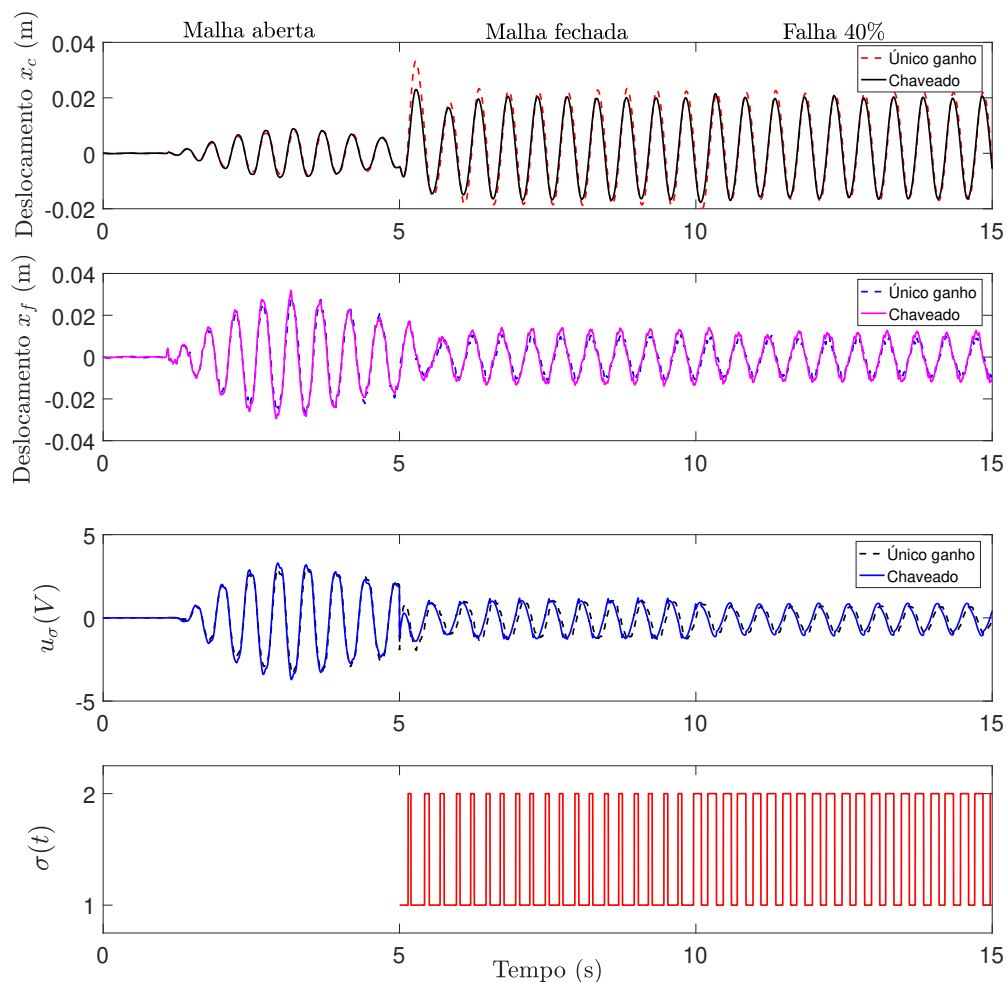
A Figura 36 ilustra o comportamento da velocidade do carro e do piso superior, o qual também se observa uma similaridade com os resultados obtidos na simulação.

6.2 Implementação 2: Controlador robusto chaveado com restrição na taxa de decaimento considerando a região de operação, saturação do atuador, restrição da norma do controlador e expansão do conjunto elipsoidal

Na sequência serão apresentados os resultados obtidos com a implementação do Projeto 6, com ganho de realimentação, considerando lei de controle chaveado (2.20), e seus comentários.

Como discutido nas Seções 2.6 e 2.7, em sistemas de controle é interessante restringir uma região de operação para o sistema, uma vez que a grande maioria dos sistemas de controle apresentam limitações físicas. Além disso, se faz necessário considerar também a possibilidade do sistema apresentar eventuais falhas, como por exemplo uma falha do atuador. Uma vez atendido as restrições consideradas anteriormente, um outro ponto a se exigir é que um conjunto de condições iniciais de interesse esteja contido em $\mathcal{E}(P, 1)$, de modo que para qualquer condição inicial $x(0)$, tenha-se $x(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$.

Figura 37 – Implementação - Deslocamento do carro e do piso superior, sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada e ganhos (4.19) com taxa de decaimento $\beta = 2$.



Fonte : Elaborado pelo autor.

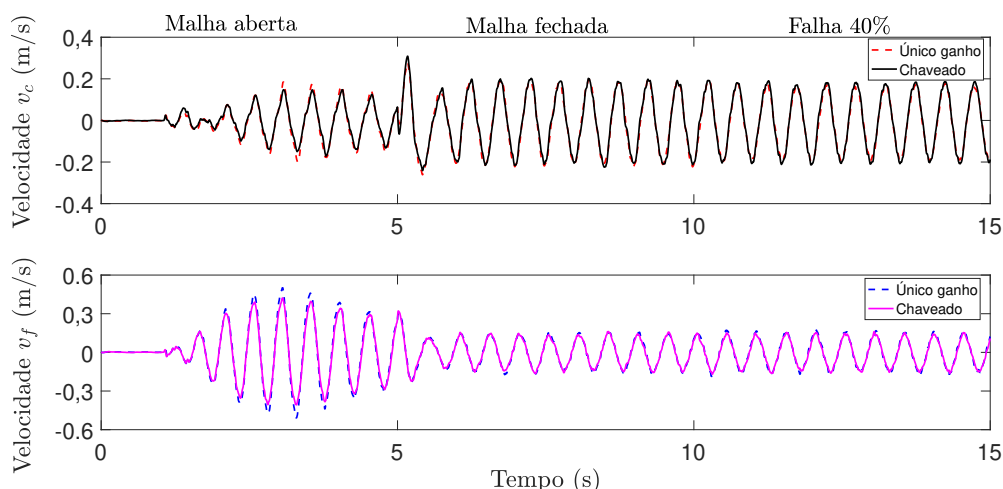
Na Figura 37, é apresentado o comportamento dos deslocamentos do carro e do piso superior considerando as situações do sistema em malha aberta, malha fechada e considerando a falha de 40% no atuador. Para o projeto em questão, foi considerado as restrições físicas para os deslocamentos do carro e do piso superior em 5 centímetros e a tensão de saturação do sinal de controle em 10 V.

Para o sistema em malha aberta é possível observar o comportamento oscilatório do deslocamento do piso superior, o qual após o sistema entrar em malha fechada foi atenuado pela ação do carro. Logo, como era esperado, o sistema em malha fechada garantiu um bom desempenho ao sistema, atenuando as oscilações do piso superior que apresentava como deslocamento máximo 1,8 centímetros para o sistema em malha fechada, e se estabiliza em 1,3 centímetros. Nota-se, que as oscilações do carro para o sistema em malha fechada apresentaram um valor máximo de 2,2 centímetros e em seguida se estabiliza em aproximadamente 1,8 centímetros. Mesmo após a falha o deslocamento do carro não apresentou alterações significativas.

Para o sistema em malha fechada, o sinal de controle apresenta valores aproximados de 1,1 V, e após a falha ocorre uma diminuição no sinal de controle, o qual se obteve valores de 850 mV. O sinal de controle apresentou valores ligeiramente maiores tanto em malha fechada quanto após a falha do atuador se comparados ao observado na Figura 21 da simulação, porém o comportamento do sinal é idêntico ao resultado esperado.

Ao se considerar as restrições da região de operação e saturação do atuador, se observa que em nenhum momento os valores limites estipulados em projeto foram ultrapassados. Deste modo, pode-se verificar que o projeto de controle foi eficaz em mitigar as oscilações no piso superior.

Figura 38 – Implementação - Velocidade do carro e do piso superior considerando lei de controle chaveada e ganhos (4.19) com taxa de decaimento $\beta = 2$.



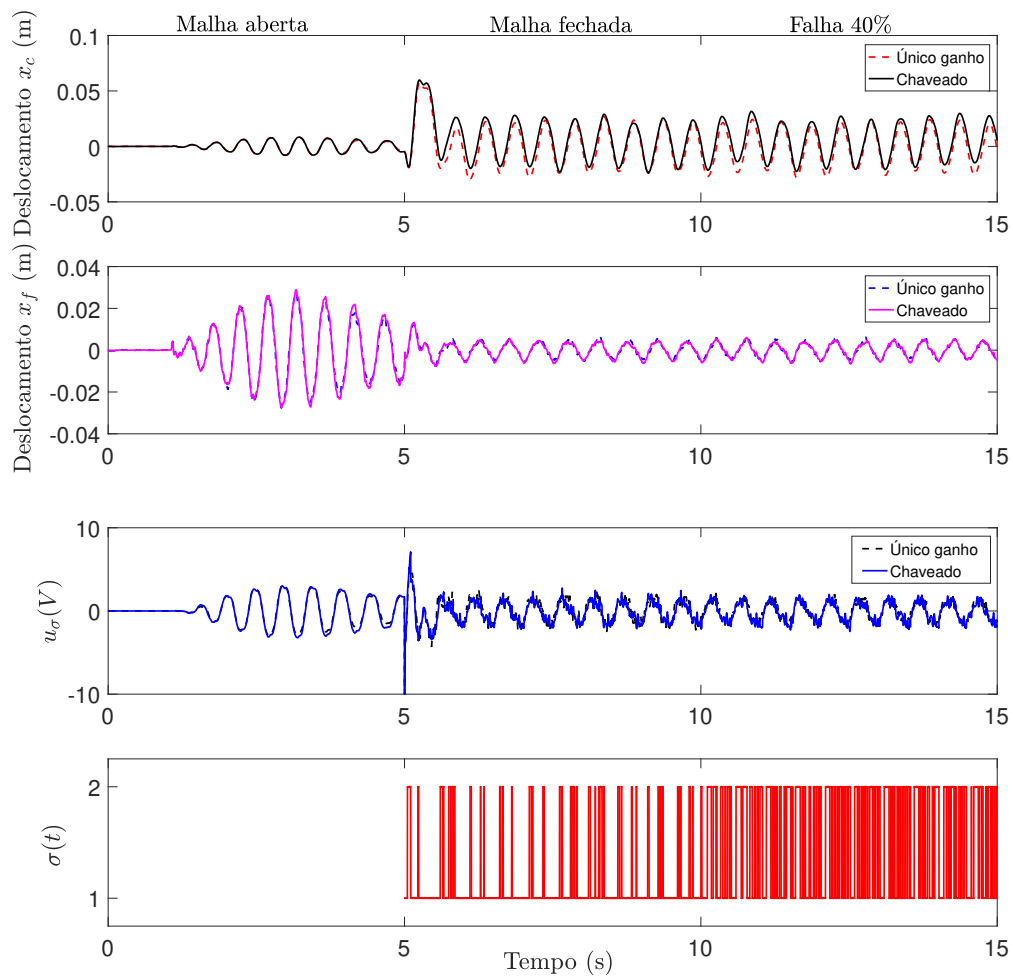
Fonte : Elaborado pelo autor.

Na Figura 38 é ilustrado o comportamento da velocidade tanto do carro quanto do piso superior, em que se observou um comportamento semelhante ao obtido na simulação.

6.3 Implementação 3: Controlador robusto chaveado considerando a minimização da norma H_∞ e região de operação

A terceira implementação, apresenta os resultados obtidos com o Projeto 7, com lei de controle chaveado (2.20) e considerando a minimização da norma H_∞ , com os ganhos apresentados em (4.39).

Figura 39 – Implementação - Deslocamento do carro e do piso superior, sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.39), considerando a minimização da norma H_∞ .



Fonte : Elaborado pelo autor.

Na Figura 39 é possível observar que o deslocamento obtido para o carro foi semelhante se comparado ao deslocamento observado na simulação, no qual o valor máximo para o deslocamento do carro foi de 6,0 centímetros no instante em que o sistema entra em malha fechada, se estabilizando em 2,6 centímetros. Ressalta-se, que neste instante os valores observados para o deslocamento do carro excederam os valores adotados no projeto por um curto intervalo de tempo.

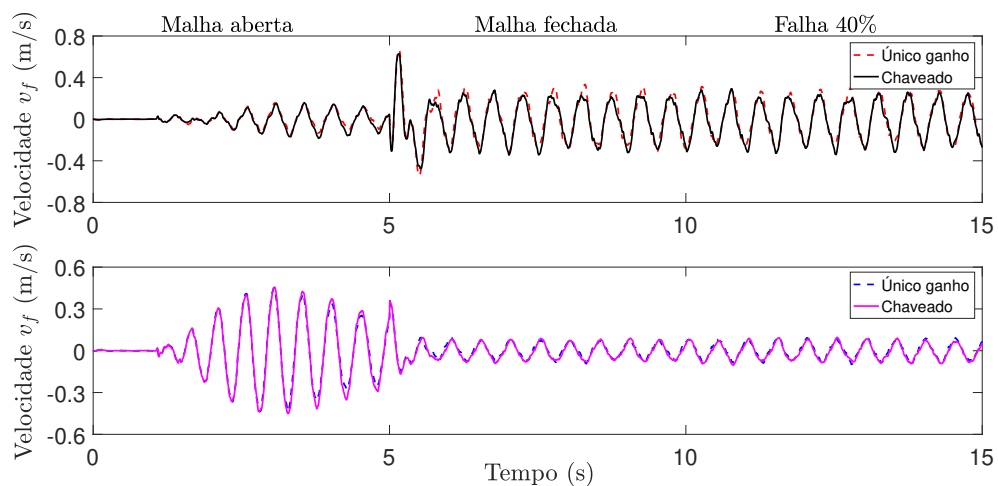
Considerando o sistema em malha aberta, observa-se que o piso superior apresentou um comportamento oscilatório, atingindo um deslocamento máximo de 3,0 centímetros e após o

sistema entrar em malha fechada as oscilações do piso superior foram atenuadas pela ação do carro, atingindo um deslocamento de 0,6 centímetros, apresentando os menores valores para o deslocamento do piso superior observados ao longo deste trabalho. Posteriormente a falha no atuador, nota-se que as oscilações do carro e do piso superior pouco se alteraram.

O sinal de controle observado na Figura 39, assim como na Figura 24, apresentou saturação no instante em que o sistema passa de malha aberta para malha fechada, diminuindo em seguida para 2,4 V, de modo que o valor obtido estivesse dentro dos limites estabelecidos no projeto de controle. Além disso, analisando o chaveamento entre os ganhos do controlador, nota-se, que a alta frequência de chaveamento entre os ganhos causou descontinuidades no sinal de controle $u_{\sigma}(t)$.

Na Figura 39 é apresentado o comportamento da velocidade do carro e do piso superior, o qual assim como nos resultados anteriores se assemelham aos resultados obtidos na simulação.

Figura 40 – Implementação - Velocidade do carro e do piso superior considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.39), considerando a minimização da norma H_{∞} .

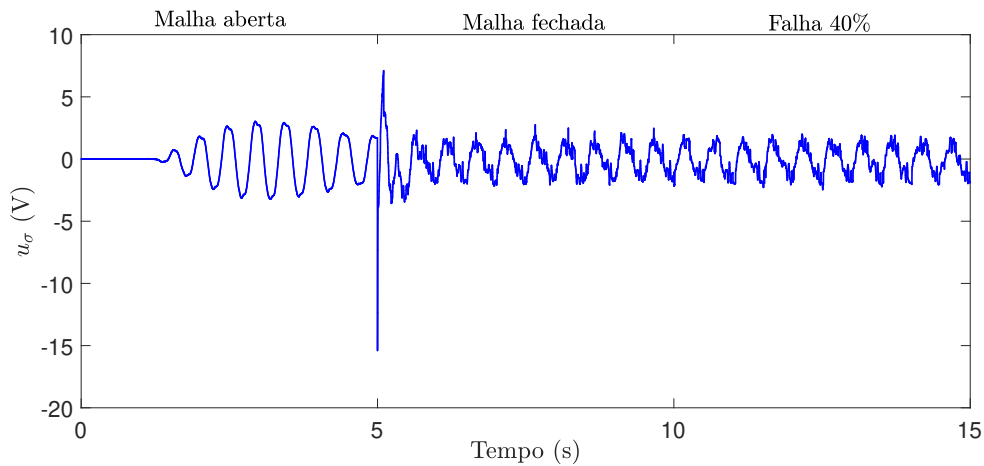


Fonte : Elaborado pelo autor.

Para ilustrar o que foi mencionado para o leitor, na Figura 41 é apresentado o sinal de controle antes da saturação do atuador, na qual se observa que no instante em que o sistema passa de malha aberta para malha fechada, o sinal de controle ultrapassa o valor de 10 V. Nota-se que, mesmo o sinal de controle $u_{\sigma}(t)$ ultrapassando o valor limite especificado em projeto, o sistema apresenta um bom desempenho. Após a falha de 40% no atuador, o controlador foi capaz de manter as oscilações do piso superior dentro dos limites físicos do equipamento.

Com os resultados obtidos na simulação e na implementação usando o sistema *Active Mass Damper 1 + Shake Table II*, ficou ilustrada a eficácia prática da metodologia apresentada, e mostrou que o controle chaveado considerando a minimização da norma H_{∞} é capaz de reduzir a ação de um distúrbio na saída do sistema, mesmo com uma possível falha no atuador.

Figura 41 – Sinal de controle antes da saturação considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.39), considerando a minimização da norma H_∞ .



Fonte : Elaborado pelo autor.

6.4 Implementação 4: Sistema *Active Mass Damper I + Shake Table II* sobre a ação do terremoto de Northridge, considerando o projeto de controle H_∞ realizado em 6.3.

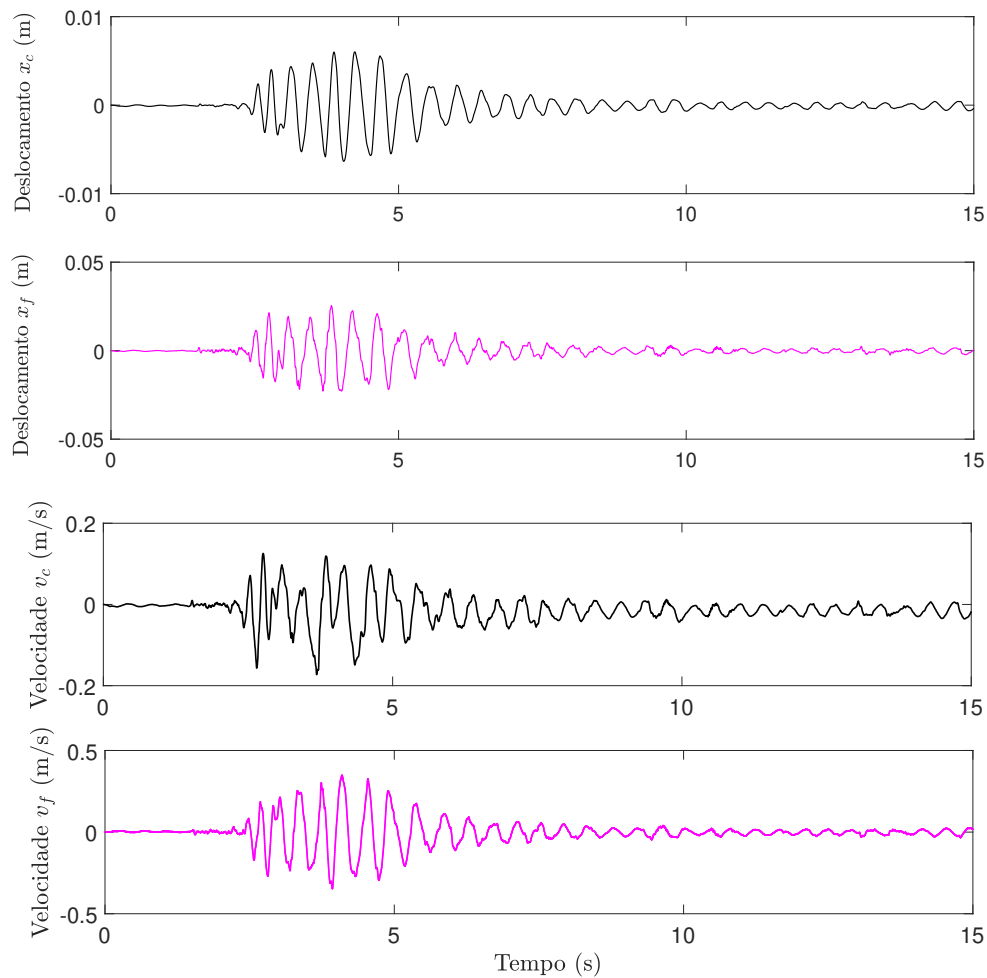
Buscando verificar os resultados apresentados neste trabalho, foi realizado uma implementação, considerando um sinal de terremoto real. Foi escolhido o terremoto de Northridge, de magnitude $6,7M_w$, que correu em 17 de janeiro de 1994 no Vale de São Fernando ao noroeste da cidade de Los Angeles, Califórnia, com duração entre 10 e 20 segundos. Na Figura 42 é ilustrado o comportamento do sistema operando em modo passivo (malha aberta) na presença do terremoto de Northridge.

A Figura 42, apresenta os sinais de deslocamento e velocidade para o sistema em modo passivo. Nota-se, que na presença de um terremoto real e sem a presença de um sinal de controle, os deslocamentos observados no sistema foram de 2,55 centímetros para o deslocamento do piso superior e uma velocidade de 0,34 (m/s). O sinal de deslocamento observado no carro, se deve ao fato de que mesmo em modo passivo, o sistema apresenta um pequeno sinal de controle, apenas para manter a posição do carro na estrutura.

Por sua vez a Figura 43 ilustra o comportamento do sistema operando em modo ativo considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.39) e considerado a minimização da norma H_∞ na saída do sistema. Em malha fechada, nota-se que o deslocamento obtido para a estrutura do piso superior, foi de 1,8 centímetros, enquanto o carro apresentou um deslocamento de 4,5 centímetros. Por sua vez, tem-se que o sinal de controle $u_\sigma(t)$ apresentou um valor máximo de 6,73 V, respeitando assim a saturação do sinal de controle projetada para 10 V. As velocidades obtidas para o piso superior e o carro, foram respectivamente de 0,27 e 0,75 (m/s) e podem ser observadas na Figura 44.

Assim como nas implementações anteriores, o projeto foi considerado com uma falha

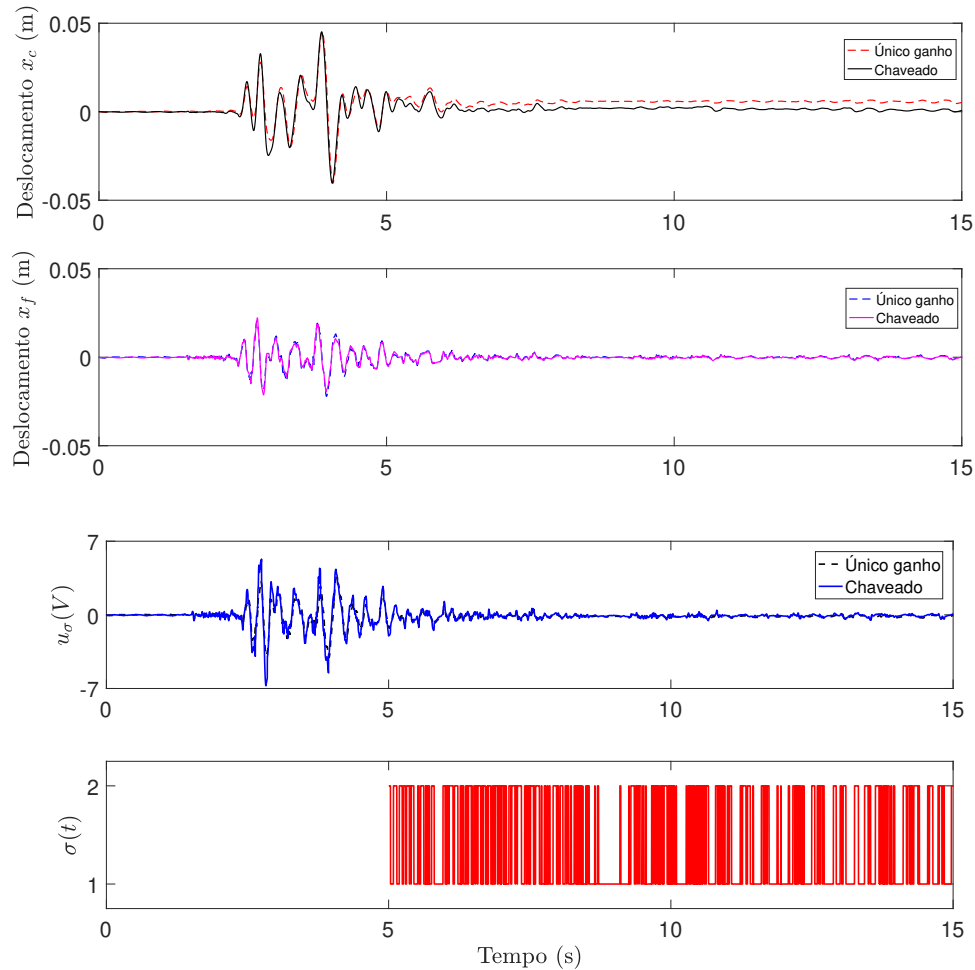
Figura 42 – Implementação - Deslocamento e velocidade do carro e do piso superior em modo passivo, sobre a ação do terremoto de Northridge.



Fonte : Elaborado pelo autor.

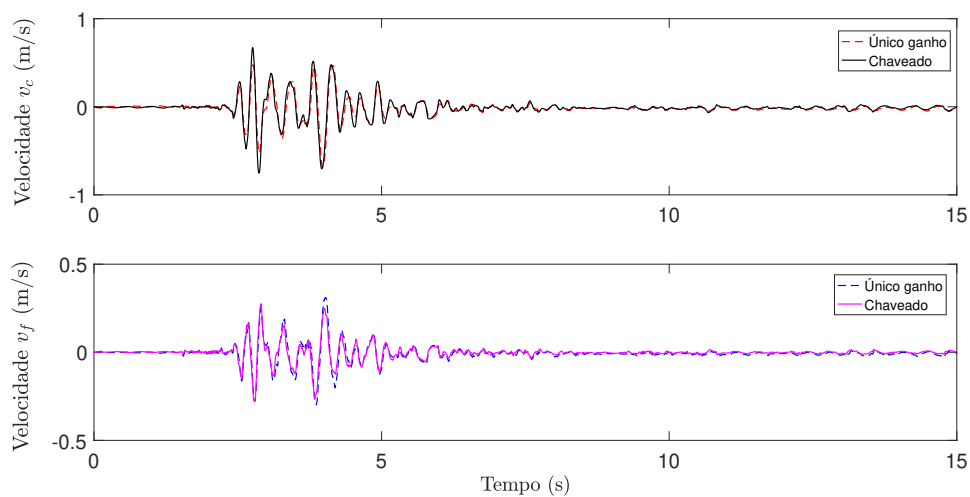
de 40% no atuador, de modo que os resultados obtidos são apresentados na Figura 45, que ilustra o comportamento dos deslocamentos do carro e do piso superior, bem como seu sinal de controle e lei de chaveamento. Nota-se, que mesmo após considerar uma falha no atuador, o sistema apresentou um desempenho satisfatório, apresentando deslocamentos máximos para o piso superior e o carro respectivamente de 2,19 e 4,5 centímetros. O sinal de controle também apresentou um desempenho satisfatório após a falha, obtendo um valor máximo de 4,18 V. Na Figura 46 por sua vez, obteve-se as velocidades do piso superior e do carro respectivamente nos valores de 0,31 e 0,71 (m/s).

Figura 43 – Implementação - Deslocamento do carro e do piso superior, sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.39) e considerando a minimização da norma H_∞ .



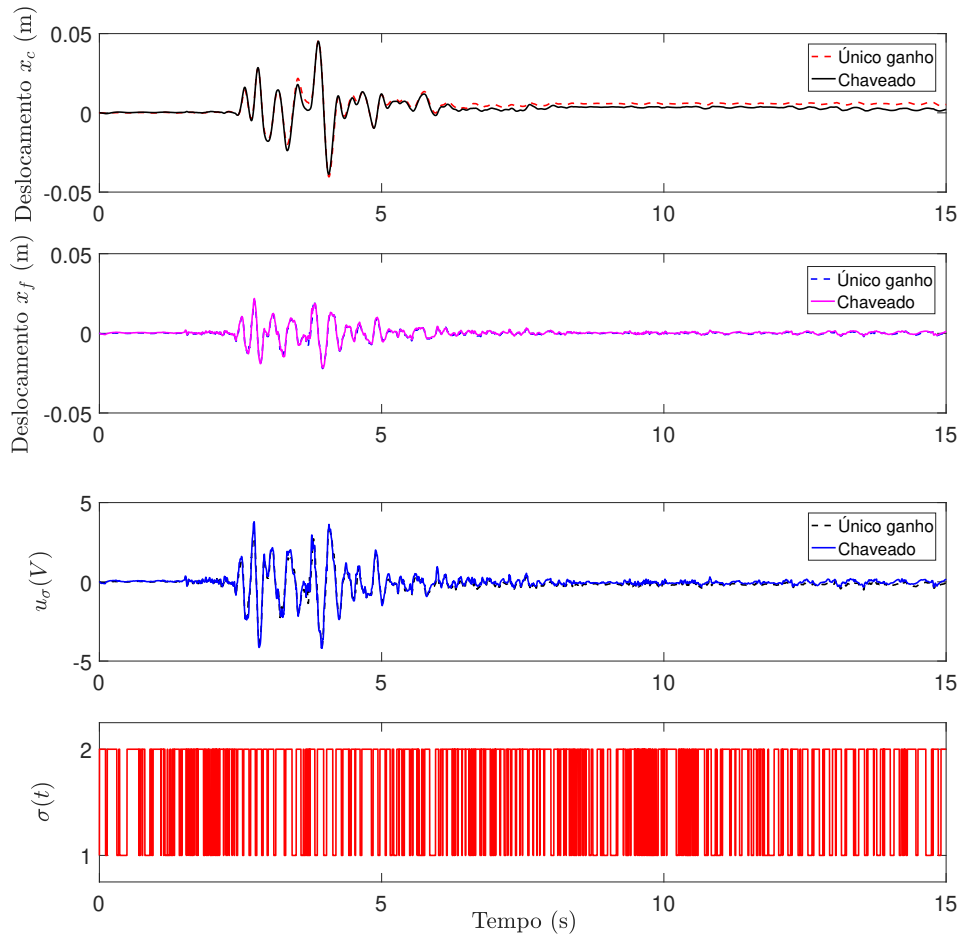
Fonte : Elaborado pelo autor.

Figura 44 – Implementação - Velocidade do carro e do piso superior, considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.39) e considerando a minimização da norma H_∞ .



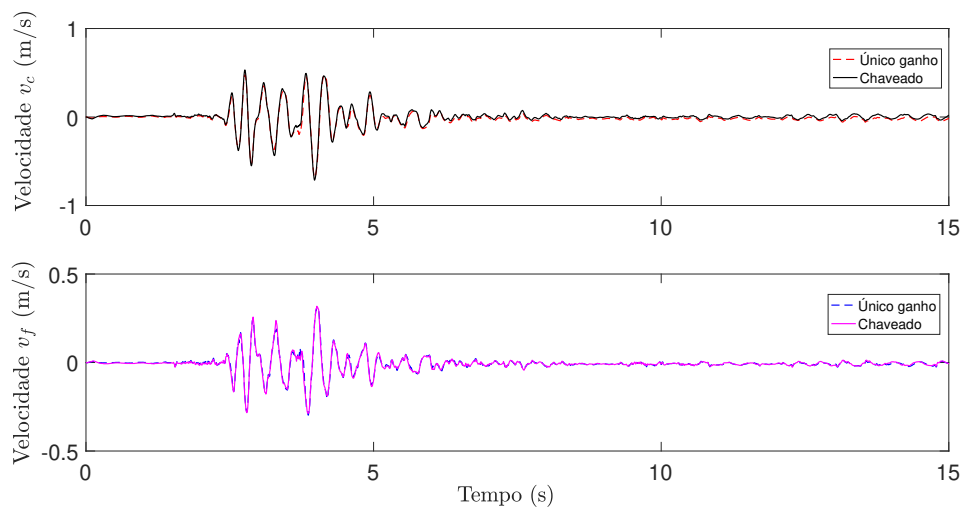
Fonte : Elaborado pelo autor.

Figura 45 – Implementação - Deslocamento do carro e do piso superior, sinal de controle e sinal de chaveamento considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.39) e considerando a minimização da norma H_∞ , com falha de 40% no atuador.



Fonte : Elaborado pelo autor.

Figura 46 – Implementação - Velocidade do carro e do piso superior, considerando lei de controle chaveada, ganhos (4.39) e considerando a minimização da norma H_∞ , com falha de 40% no atuador.



Fonte : Elaborado pelo autor.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram apresentados projetos de controle chaveado para uma classe de sistema linear incerto. Para sua realização foi necessário o estudo de ferramentas matemáticas, como a teoria de LMIs e a possibilidade de representar o sistema *Active Mass Damper I + Shake Table II*, por meio de variáveis de estado.

O objetivo deste trabalho foi reduzir os efeitos de vibrações indesejadas como ventos fortes e terremotos em edifícios através do desenvolvimento de projetos de controle e comparar o desempenho dos controladores na presença de uma entrada exógena no sistema.

Inicialmente foi verificado a estabilidade do sistema em malha aberta, no qual se observou que sem a presença de um sinal de controle o sistema *Active Mass Damper I + Shake Table II* era instável, pois apresentava um polo na origem. Com isso, se faz necessário um projeto de controle de forma a tornar o sistema estável. Para tal, no primeiro projeto de controle, foi considerado o sistema em malha fechada com realimentação do vetor de estados e lei de controle chaveada, em um primeiro momento sem considerar nenhum índice de desempenho. Observou-se que em malha fechada o sistema era estável, porém apresentou um desempenho razoável e, notou-se que a resposta dinâmica do sistema levou um tempo considerável para chegar em regime permanente.

A fim de melhorar a resposta dinâmica do sistema, diminuindo-se o tempo decorrido para que o sistema atinja o regime permanente, no segundo projeto de controle foi inserido a taxa de decaimento, no qual, notou-se que o aumento deste parâmetro tornava a resposta do sistema mais rápida, porém elevando a norma do controlador.

O problema relacionado ao aumento na norma do controlador foi solucionado no terceiro projeto de controle, no qual se inseriu uma restrição na norma do controlador, de modo que mesmo com a taxa de decaimento os valores para a norma do controlador fosse passível de implementação.

Para o quarto projeto de controle, foi considerado situações práticas para o sistema *Active Mass Damper I + Shake Table II*, considerando restrições físicas nos deslocamentos do carro e do piso superior e saturação no sinal de controle. As restrições físicas do conjunto *Active Mass Damper I + Shake Table II* estão presentes em $x_c(t)$ e $x_f(t)$ respectivamente. A saturação do sinal de controle é necessária tendo em vista que o módulo possui um valor máximo de tensão de 24 V, logo, se faz necessário limitar o valor do sinal de controle. Neste projeto, notou-se que o período de amostragem não era suficientemente pequeno para que os resultados obtidos atendessem as especificações de projeto. Com isso o quinto projeto de controle inseriu a restrição na norma do controlador, no qual os resultados obtidos atenderam os requisitos de projeto. Com os resultados desse projeto foi possível realizar uma análise da frequência de amostragem no sistema, obedecendo o teorema da amostragem de Nyquist-Shannon.

Para o sexto projeto de controle, foi considerado a expansão do volume elipsoidal, de modo que um conjunto de condições iniciais estivesse contido dentro da elipsoide $\mathcal{E}(P, 1)$. Neste projeto foi observado uma melhora na resposta dinâmica do sistema em relação aos projetos anteriores.

O sétimo projeto de controle apresentou uma abordagem considerando a influência do distúrbio (*entrada exógena*) na dinâmica do sistema, no qual o objetivo do projeto era obter um controlador que fosse capaz de mitigar a influência do distúrbio, o que foi observado por meio das análises gráficas. Desta forma, tem-se que o sétimo projeto apresentou o melhor desempenho em relação aos demais, de modo que os requisitos de projeto foram atendidos.

Por fim, a implementação prática utilizando o sistema *Active Mass Damper 1 + Shake Table II*, ilustrou a eficácia prática das metodologias apresentadas. A partir da resposta dinâmica do sistema, observou-se que o sistema em malha aberta era instável, e mesmo após considerar o sistema realimentado o sistema apresentava oscilações com grandes amplitudes, causando alto nível de esforço mecânico na estrutura, podendo causar danos aos componentes do equipamento. O sistema em malha fechada reduziu as amplitudes máximas de oscilação do piso superior, proporcionando maior estabilidade e segurança ao sistema. Portanto, pode-se dizer que a minimização do custo garantido H_∞ mitigou o efeito do distúrbio na saída do sistema.

7.1 Perspectivas futuras e contribuições

Como perspectivas futuras, pode-se listar os seguintes tópicos:

- Abordagem mais profunda em relação a influência da frequência de amostragem no sistema. Podendo vir a aplicar esta análise para os demais módulos didáticos do LPC da FEIS-UNESP.
- Com a nova modelagem da matriz H , proposta neste trabalho, os alunos poderão utilizar o módulo didático, considerando a matriz H em trabalhos futuros.
- É importante ressaltar que a realização desse Trabalho de Graduação contribuiu para o desenvolvimento científico do aluno na área de controle automático e poderá contribuir com o Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) em futuros trabalhos e para futuros alunos que venham trabalhar com o sistema *Active Mass Damper 1 + Shake Table II*.

REFERÊNCIAS

- ALVES, U. N. L. et al. **Smoothing switched control for uncertain TS fuzzy systems with unknown membership functions, actuator saturation and disturbance.** In: IEEE. *2016 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. [S.l.], 2016b. p. 2212–2219. Citado na página 34.
- ALVES, U. N. L. et al. **Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation.** *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Wiley Online Library, v. 30, n. 8-10, p. 1408–1433, 2016a. Citado 5 vezes nas páginas 25, 27, 31, 32 e 34.
- ALVES U. N. L. T.; DE OLIVEIRA, D. R. C. A. A. T. M. C. M. **Controle de um sistema Ball Balancer utilizando LMIs no projeto do controlador.** In: Mostra Científica, Cultural e Tecnológica - IFSP, 3. Presidente Epitácio. **Proceedings of ..** Ilha Solteira - Universidade Estadual Paulista., 2015. Citado na página 27.
- ASSUNÇÃO, E. et al. **Robust state-derivative feedback LMI-based designs for multivariable linear systems.** *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 80, n. 8, p. 1260–1270, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.
- ASSUNÇÃO E.; TEIXEIRA, M. C. M. **Apostila de Controle Linear I.** Ilha Solteira - DEE - FEIS - UNESP, 2016. Citado na página 22.
- BOYD, S. et al. **Linear matrix inequalities in system and control theory.** [S.l.]: Siam, 1994. v. 15. Citado 6 vezes nas páginas 18, 24, 27, 33, 34 e 35.
- COOLEY, J. W.; TUKEY, J. W. **An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series.** *Mathematics of computation*, JSTOR, v. 19, n. 90, p. 297–301, 1965. Citado na página 74.
- DEAECTO G., G. J.; DAAFOUZ, J. **On H_∞ control design of continuous-time switched linear systems, Decision and Control.** *49th IEEE Conference on*, p. 7345–7350, 2010. Citado na página 18.
- DUÓ, D.; FELIX, J. L. P. Influência do controle de vibrações em um pórtico simples usando um amortecedor de massa ativa (amd). *RECEN-Revista Ciências Exatas e Naturais*, v. 18, n. 2, p. 270–281, 2016. Citado na página 66.
- FERNANDES, T. G.; PANAZIO, A. N. **Do analógico ao digital: amostragem, quantização e codificação.** *II Simpósio de Iniciação Científica da Universidade Federal do ABC-SIC-UFABC*, p. 44, 2009. Citado na página 73.
- GAHINET, P. et al. **The LMI control toolbox.** In: IEEE. *Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.], 1994. v. 3, p. 2038–2041. Citado na página 19.
- HOUSNER, G. W. et al. **Structural control: past, present, and future.** *Journal of engineering mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 123, n. 9, p. 897–971, 1997. Citado na página 17.

- HU, T.; LIN, Z.; CHEN, B. M. **Analysis and design for discrete-time linear systems subject to actuator saturation**. *Systems & Control Letters*, Elsevier, v. 45, n. 2, p. 97–112, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 31, 34 e 36.
- HU, Y.-R.; NG, A. **Active robust vibration control of flexible structures**. *Journal of sound and vibration*, Elsevier, v. 288, n. 1-2, p. 43–56, 2005. Citado na página 18.
- HUO, L. et al. **H_∞ robust control design of active structural vibration suppression using an active mass damper**. *Struct*, v. 17, p. 15021–10, 02 2008. Citado na página 17.
- HURLEBAUS, S.; GAUL, L. **Smart structure dynamics**. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 20, n. 2, p. 255–281, 2006. Citado na página 17.
- JI Z., G. X. W. L.; XIE, G. **Robust H_∞ control and stabilization of uncertain switched linear systems: A multiple Lyapunov functions approach**. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, p. 696–700, 2006. Citado na página 18.
- KOBORI, T. et al. **Seismic-response-controlled structure with active mass driver system. Part 1: Design**. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Wiley Online Library, v. 20, n. 2, p. 133–149, 1991. Citado na página 17.
- LI, H.; HUO, L. **Advances in structural control in civil engineering in China**. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi, v. 2010, 2010. Citado na página 17.
- LÖFBERG, J. **YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB**. In: TAIPEI, TAIWAN. *Proceedings of the CACSD Conference*. [S.l.], 2004. v. 3. Citado na página 19.
- OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. Pearson, p. 824, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- OLIVEIRA, D. R. de et al. **On local H_∞ switched controller design for uncertain T-S fuzzy systems subject to actuator saturation with unknown membership functions**. *Fuzzy Sets and Systems*, Elsevier, v. 344, p. 1–26, 2017. Citado 5 vezes nas páginas 17, 18, 34, 35 e 38.
- OPPENHEIM, A. V. **Discrete-time signal processing**. [S.l.]: Pearson Education India, 1999. Citado na página 73.
- PARK, W.; PARK, K.-S. **Optimal Design of Hybrid Control System for the Wind and Earthquake Excited Buildings**. *KSCE Journal of Civil Engineering*, Springer, v. 23, n. 2, p. 744–753, 2019. Citado na página 17.
- QUANSER, E. I. **Active Mass Damper - One Floor (AMD-1)**. User Manual, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 18, 39, 40 e 41.
- QUANSER, E. I. **Specialty Plant: Shake Table II - Position Control and Earthquake Analysis**. User Manual, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.
- RODRIGUES, L. F. G. **Estudo de estratégias de controle ativo de vibrações para um edifício de dois andares**. Tese (Doutorado) — Faculdade de Ciências e Tecnologia, 2011. Citado na página 17.
- SANTOS, J. T. **Controle Robusto via LMI aplicado ao Amortecimento Ativo de Vibrações em um modelo de estrutura com dois andares**. *Trabalho de Graduação, UFCE, Fortaleza*, 2018. Citado na página 66.

SOUZA, W. A. d. **Projeto de controladores robustos chaveados para sistemas nao lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno**. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2013. Citado na página 17.

SUMAN, R. N. **Projeto de controle considerando saturação no atuador e a norma H_∞ para o Sistema Shake Table II + Active Mass Damper 1**. Trabalho de Graduação, FEIS-UNESP, Ilha Solteira – SP, 2020. Citado 6 vezes nas páginas 19, 41, 44, 65, 70 e 74.

Anexos

ANEXO A – PROJETO 1 - CONTROLADOR ROBUSTO CHAVEADO

```

1 %% Definicoes necessarias
2 m = 1; % numero de entradas de controle
3 nv = 2; % numero de vertices
4
5 % Criando matriz variavel X_4x4
6 X = sdpvar(4,4,'symmetric','real');
7
8 for i=1:nv
9     M{i} = sdpvar(1,4,'full','real');
10    Z{i} = sdpvar(4,4,'symmetric','real');
11    Q{i} = sdpvar(4,4,'symmetric','real');
12 end
13
14 %% LMI
15 LMIs = [];
16 LMIs = LMIs + (X > 0);
17
18 for i=1:nv
19     LMIs = LMIs + (A{i,1}*X+X*A{i,1}'+Z{i,1}+Q{i,1} < 0);
20     for j=1:nv
21         LMIs = LMIs + (B{i,1}*(-M{j,1})+(-M{j,1})'*B{i,1}'-Z{i,1}-Q{j,1} <
22         0);
23     end
24 end
25 %% Configurando o Solver
26 opts=sdpssettings('solver','lmilab');
27 opts.verbose=0;
28 solvesdp(LMIs,[],opts);
29 [p,r] = checkset(LMIs);
30
31 if min(p) > 0
32     disp('Sistema estavel')
33     X = double(X); % Extrai o valor numerico de X
34     P = inv(X); % Extrai o valor numerico de P
35
36 for i=1:nv
37     M{i,1} = double(M{i,1}); % Extrai o valor numerico de M
38     K{i,1} = M{i,1}*inv(X); % Extrai o valor dos controladores K
39     Q{i,1} = inv(X)*double(Q{i,1})*inv(X);
40 end
41
42 celldisp(K)

```

```
43
44 Norma_K1 = norm(K{1,1})    % Norma do controlador K1
45 Norma_K2 = norm(K{2,1})    % Norma do controlador K2
46
47 for i=1:nv
48
49     for j=1:nv
50         Autovalor_ABK = eig(A{i} - B{i}*K{j}) % Calcula os autovalores
51     end
52 end
53
54 else
55     disp('Sistema NAO E estavel')
56 end
```

ANEXO B – PROJETO 2: CONTROLADOR ROBUSTO CHAVEADO COM RESTRIÇÃO NA TAXA DE DECAIMENTO

```

1 %% Definicoes necessarias
2 m = 1;                                % numero de entradas de controle
3 nv = 2;                                % numero de vertices
4
5 % Taxa de decaimento
6 gamma = 2;
7 %% Definindo as dimensoes das matrizes a serem calculadas
8
9 X = sdpvar(4,4,'symmetric','real'); % Criando matriz variavel X_4x4
10
11 for i=1:nv
12     M{i} = sdpvar(1,4,'full','real');
13     Z{i} = sdpvar(4,4,'symmetric','real');
14     Q{i} = sdpvar(4,4,'symmetric','real');
15 end
16
17 %% LMI - Controle Chaveado considerando taxa de decaimento
18 LMIs = [];
19 LMIs = LMIs + (X > 0);
20
21
22 for i=1:nv
23     LMIs = LMIs + (A{i,1}*X+X*A{i,1}'+Z{i,1}+Q{i,1}+ 2*gamma*X < 0);
24     for j=1:nv
25         LMIs = LMIs + (B{i,1}*(-M{j,1})+(-M{j,1})'*B{i,1}'-Z{i,1}-Q{j,1} <
26             0);
27     end
28 end
29 %% Configurando o Solver
30 opts=sdpsettings('solver','lmilab');
31 opts.verbose=0;
32 solvesdp(LMIs,[],opts);
33 [p,r] = checkset(LMIs);
34
35 if min(p) > 0
36     disp('Sistema estavel')
37     X = double(X); % Extrai o valor numerico de X
38     P = inv(X)      % Extrai o valor numerico de P
39
40 for i=1:nv
41     M{i,1} = double(M{i,1}); % Extrai o valor numerico de M

```

```
42     K{i,1} = M{i,1}*inv(X); % Extrai o valor dos controladores K
43     Q{i,1} = inv(X)*double(Q{i,1})*inv(X);
44 end
45
46 celldisp(K)
47 Norma_K1 = norm(K{1,1}) % Norma controlador K1
48 Norma_K2 = norm(K{2,1}) % Norma controlador K2
49
50 for i=1:nv
51
52     for j=1:nv
53         Autovalor_ABK = eig(A{i} - B{i}*K{j}) % Determina os autovalores
54     end
55 end
56
57 else
58     disp('Sistema NAO e estavel')
59 end
```

ANEXO C – PROJETO 3: CONTROLADOR ROBUSTO CHAVEADO COM RESTRIÇÃO NA TAXA DE DECAIMENTO E RESTRIÇÃO NA NORMA DO CONTROLADOR

```

1 %% Definicoes necessarias
2 m = 1;                                % numero de entradas de controle
3 nv = 2;                                % numero de vertices
4
5 % Taxa de decaimento
6 gamma = 2;
7
8 %% Definindo as dimensoes das matrizes a serem calculadas
9
10 X = sdpvar(4,4,'symmetric','real'); % Criando matriz variavel X_4x4
11
12 % Criando as matrizes variaveis M,G,Z,Q
13 for i=1:nv
14     M{i} = sdpvar(1,4,'full','real');
15     Z{i} = sdpvar(4,4,'symmetric','real');
16     Q{i} = sdpvar(4,4,'symmetric','real');
17 end
18
19 LMIs = [];
20
21 for i=1:nv
22     LMIs = LMIs + (A{i,1}*X+X*A{i,1}'+Z{i,1}+Q{i,1}+ 2*gamma*X < 0);
23     for j=1:nv
24         LMIs = LMIs + (B{i,1}*(-M{j,1})+(-M{j,1})'*B{i,1}'-Z{i,1}-Q{j,1} <
25             0);
26     end
27 end
28 %% Considerando a Minimizacao na norma do controlador
29
30 % Criando a matriz variavel eta_1x1
31 eta = sdpvar(1,1,'full','real');
32
33 % Cria-se uma matriz identidade 4x4
34 I4 = eye(4,4) ;
35
36 I1 = 1;
37 mi0 = 1;
38 % Restricao da norma do controlador
39 for j=1:nv
40     LMIs = LMIs + ([eta M{j}; M{j}' I4] > 0);

```

```

41     end
42
43     LMIs = LMIs + ( X - mi0*I4 > 0 );
44
45     %% Configurando o Solver
46     opts=sdpsettings('solver','lmilab');
47     opts.verbose=0;
48     solvesdp(LMIs,[eta],opts);
49     [p,r] = checkset(LMIs);
50
51     if min(p) > 0
52         disp('Sistema estavel')
53         X = double(X); % Extrai o valor numerico de X
54         P = inv(X);    % Extrai o valor numerico de P
55         eta = double(eta); % Extrai o valor de eta
56
57         for i=1:nv
58             M{i,1} = double(M{i,1}); % Extrai o valor num eico de M
59             K{i,1} = M{i,1}*inv(X); % Extrai valor do controlador K
60             Q{i,1} = inv(X)*double(Q{i,1})*inv(X);
61         end
62
63         celldisp(K)
64
65         Norma_K1 = norm(K{1,1}) % Determina a norma do controlador K1
66         Norma_K2 = norm(K{2,1}) % Determina a norma do controlador K2
67
68         for i=1:nv
69
70             for j=1:nv
71                 Autovalor_ABK = eig(A{i} - B{i}*K{j})
72             end
73         end
74
75     else
76         disp('Sistema NAO e estavel')
77     end

```

ANEXO D – PROJETO 4: CONTROLADOR ROBUSTO CHAVEADO COM RESTRIÇÃO NA TAXA DE DECAIMENTO CONSIDERANDO REGIÃO DE OPERAÇÃO E SATURAÇÃO DO ATUADOR

```

1 %% Definicoes necessarias
2 m = 1; % numero de entradas de controle
3 nv = 2; % numero de vertices do politopo
4
5 % Taxa de decaimento gama
6 gama = 2;
7 delta = 1;
8 %% Definindo as regioes de operacao e de saturacao
9
10 ro = 10; % Definicao do limite de tensao do atuador (10 Volts)
11 phi1 = 0.05; % Limitante do deslocamento xc
12 phi2 = 0.05; % Limitante do deslocamento de xf
13 N1 = [1 0 0 0]; % Restricao fisica em xc(t) -> phi1
14 N2 = [0 1 0 0]; % Restricao fisica em xf(t) -> phi2
15
16 % Conjunto D e Dbarra para m =1 - D_mxm
17 Dsat{1} = 1; % Matriz D saturacao
18 Dsat{2} = 0; % Matriz D saturacao
19 Dbarra{1} = 0; % Matriz D^- saturacao
20 Dbarra{2} = 1; % Matriz D^- saturacao
21
22 %% Definindo as dimensoes das matrizes a serem calculadas
23
24 X = sdpvar(4,4,'symmetric','real'); % Criando matriz variavel X_4x4
25
26 % Criando as matrizes variaveis M,G,Z,Q _1x4
27 for i=1:nv
28     M{i} = sdpvar(1,4,'full','real');
29     G{i} = sdpvar(1,4,'full','real');
30     Z{i} = sdpvar(4,4,'symmetric','real');
31     Q{i} = sdpvar(4,4,'symmetric','real');
32 end
33
34 %% LMI regioao de operacao e saturacao
35 LMIs = [];
36 LMIs = LMIs + (X > 0) ;
37
38 for i=1:nv
39     LMIs = LMIs + (A{i}*X+X*A{i}'+Z{i}+Q{i}+2*gama*X < 0);
40     for j=1:nv
41         for s=1:2^m

```

```

42         LMIs = LMIs + (B{i}*(-Dsat{s}*M{j}+Dbarra{s}*G{j})+(-Dsat{s}*M{
           j}+Dbarra{s}*G{j})*B{i}'-Z{i}-Q{j} < 0);
43     end
44 end
45 end
46
47 %elipsoide contido na regio de saturacao
48 for j=1:nv
49     LMIs = LMIs + ([ro^2*(1/delta) G{j}; G{j}' X] > 0);
50 end
51
52 %elipsoide contido na regio de operacao E(P,delta)
53 LMIs = LMIs + ([phi1^2*(1/delta) N1*X; X*N1' X] > 0);
54 LMIs = LMIs + ([phi2^2*(1/delta) N2*X; X*N2' X] > 0);
55
56 %% Configurando o Solver
57 opts=sdpsettings('solver','lmilab');
58 opts.verbose=0;
59 solvesdp(LMIs,[], opts);
60 [p,d] = checkset(LMIs);
61
62 if min(p) > 0
63     disp('Sistema estavel')
64     X = double(X); % Extrai o valor numerico de X
65     P = inv(X)      % Extrai o valor numerico de P
66
67 for i=1:nv
68     M{i} = double(M{i}); % Extrai o valor numerico de M
69     K{i} = M{i}*inv(X); % Extrai o valor dos controladores K
70     Q{i} = inv(X)*double(Q{i})*inv(X);
71 end
72
73 for i=1:nv
74
75     for j=1:nv
76         Autovalor_ABK = eig(A{i} - B{i}*K{j}) % Calcula os autovalores
77     end
78 end
79
80 celldisp(K)
81 Norma_K1 = norm(K{1}) % Norma K1
82 Norma_K2 = norm(K{2}) % Norma K2
83
84 else
85     disp('Sistema NAO e estavel')
86 end

```

ANEXO E – PROJETO 5: CONTROLADOR CHAVEADO COM RESTRIÇÃO NA TAXA DE DECAIMENTO CONSIDERANDO A REGIÃO DE OPERAÇÃO, SATURAÇÃO DO ATUADOR E RESTRIÇÃO NA NORMA DO CONTROLADOR

```

1
2 %% Definicoes necessarias
3 m = 1; % numero de entradas de controle
4 nv = 2; % numero de vertices do politopo
5
6 % Taxa de decaimento
7 gama = 2;
8 delta = 1;
9 %% Definindo as regioes de operacao e de saturacao
10
11 ro = 10; % Definicao do limite de tensao do atuador (10 Volts)
12 phi1 = 0.05; % Limitante do deslocamento xc
13 phi2 = 0.05; % Limitante do deslocamento de xf
14 N1 = [1 0 0 0]; % Restricao fisica em xc(t) -> phi1
15 N2 = [0 1 0 0]; % Restricao fisica em xf(t) -> phi2
16
17 % Conjunto D e Dbarra para m =1 - D_mxm
18 Dsat{1} = 1; % Matriz D saturacao
19 Dsat{2} = 0; % Matriz D saturacao
20 Dbarra{1} = 0; % Matriz D^- saturacao
21 Dbarra{2} = 1; % Matriz D^- saturacao
22
23 %% Definindo as dimensoes das matrizes a serem calculadas
24
25 X = sdpvar(4,4,'symmetric','real'); % Criando matriz variavel X_4x4
26
27
28 % Criando as matrizes variaveis M,G,Z,Q _1x4
29 for i=1:nv
30     M{i} = sdpvar(1,4,'full','real');
31     G{i} = sdpvar(1,4,'full','real');
32     Z{i} = sdpvar(4,4,'symmetric','real');
33     Q{i} = sdpvar(4,4,'symmetric','real');
34 end
35
36 %% LMI Controle chaveado considerando a regio de operacao e saturacao
37
38 LMIs = [];
39 LMIs = LMIs + (X > 0) ;
40
41 for i=1:nv

```

```

42     LMIs = LMIs + (A{i}*X+X*A{i}'+Z{i}+Q{i}+2*gama*X < 0);
43     for j=1:nv
44         for s=1:2^m
45             LMIs = LMIs + (B{i}*(-Dsat{s}*M{j}+Dbarra{s}*G{j})+(-Dsat{s}*M{
j}+Dbarra{s}*G{j})*B{i}'-Z{i}-Q{j} < 0);
46         end
47     end
48 end
49
50 %elipsoide contido na regio de saturacao
51 for j=1:nv
52     LMIs = LMIs + ([ro^2*(1/delta) G{j}; G{j}' X] > 0);
53 end
54
55 %elipsoide contido na regio de operacao E(P,delta)
56 LMIs = LMIs + ([phi1^2*(1/delta) N1*X; X*N1' X] > 0);
57 LMIs = LMIs + ([phi2^2*(1/delta) N2*X; X*N2' X] > 0);
58
59 %% Restricao da norma do controlador
60 Vo = 5;
61
62 for j=1:nv
63     LMIs = LMIs + ([ (1/Vo)*(ro^2) M{j}; M{j}' X] > 0);
64 end
65
66 %% Configurando o Solver
67
68 opts=sdpsettings('solver','lmilab');
69 opts.verbose=0;
70 solvesdp(LMIs,[], opts);
71 [p,d] = checkset(LMIs);
72
73 if min(p) > 0
74     disp('Sistema estavel')
75     X = double(X); % Extrai o valor numerico de X
76     P = inv(X) % Extrai o valor numerico de P
77
78
79     for i=1:nv
80         M{i} = double(M{i}); % Extrai o valor numerico de M
81         K{i} = M{i}*inv(X); % Extrai o valor dos controladores K
82         Q{i} = inv(X)*double(Q{i})*inv(X);
83     end
84
85     for i=1:nv
86
87         for j=1:nv

```

```
88         Autovalor_ABK = eig(A{i} - B{i}*K{j}) % Calcula os autovalores
89     end
90 end
91
92 celldisp(K)
93 Norma_K1 = norm(K{1}) % Norma K1
94 Norma_K2 = norm(K{2}) % Norma K2
95
96 else
97     disp('Sistema NAO e estavel')
98 end
```

ANEXO F – PROJETO 6: CONTROLADOR ROBUSTO CHAVEADO COM RESTRIÇÃO NA TAXA DE DECAIMENTO CONSIDERANDO REGIÃO DE OPERAÇÃO, SATURAÇÃO DO ATUADOR, RESTRIÇÃO DA NORMA DO CONTROLADOR E EXPANSÃO DO CONJUNTO ELIPSOIDAL

```

1 %% Definicoes necessarias
2 m = 1; % numero de entradas de controle
3 nv = 2; % numero de vertices do politopo
4
5
6 % Taxa de decaimento
7 gama = 2;
8 delta = 1;
9 %% Definindo as regioes de operacao e de saturacao
10
11 ro = 10; % Definicao do limite de tensao do atuador (10 Volts)
12 phi1 = 0.05; % Limitante do deslocamento xc
13 phi2 = 0.05; % Limitante do deslocamento de xf
14 N1 = [1 0 0 0]; % Restricao fisica em xc(t) -> phi1
15 N2 = [0 1 0 0]; % Restricao fisica em xf(t) -> phi2
16
17 % Conjunto D e Dbarra para m =1 - D_mxm
18 Dsat{1} = 1; % Matriz D saturacao
19 Dsat{2} = 0; % Matriz D saturacao
20 Dbarra{1} = 0; % Matriz D^- saturacao
21 Dbarra{2} = 1; % Matriz D^- saturacao
22
23 %% Definindo as dimensoes das matrizes a serem calculadas
24
25 X = sdpvar(4,4,'symmetric','real'); % Declaracao da matriz X, que 4x4 e
    sim trica
26
27 % Criando as matrizes vari veis M,G,Z,Q
28 for i=1:nv
29     M{i} = sdpvar(1,4,'full','real');
30     G{i} = sdpvar(1,4,'full','real');
31     Z{i} = sdpvar(4,4,'symmetric','real');
32     Q{i} = sdpvar(4,4,'symmetric','real');
33 end
34
35
36 %% LMI - Controle Chaveado considerando regioao de saturacao e operacao
37 LMIs = [];
38 LMIs = LMIs + (X > 0) ;

```

```

39
40 for i=1:nv
41     LMIs = LMIs + (A{i}*X+X*A{i}'+Z{i}+Q{i}+2*gama*X < 0);
42     for j=1:nv
43         for s=1:2^m
44             LMIs = LMIs + (B{i}*(-Dsat{s}*M{j}+Dbarra{s}*G{j})+(-Dsat{s}*M{
45                 j}+Dbarra{s}*G{j}))*B{i}'-Z{i}-Q{j} < 0);
46         end
47     end
48
49 %elipsoide contido na regioao de saturacao
50 for j=1:nv
51     LMIs = LMIs + ([ro^2*(1/delta) G{j}; G{j}' X] > 0);
52 end
53
54 %elipsoide contido na regioao de operacao E(P,delta)
55 LMIs = LMIs + ([phi1^2*(1/delta) N1*X; X*N1' X] > 0);
56 LMIs = LMIs + ([phi2^2*(1/delta) N2*X; X*N2' X] > 0);
57
58 %% Restricao da norma do controlador
59 Vo = 5;
60
61 for j=1:nv
62     LMIs = LMIs + ([ (1/Vo)*(ro^2) M{j}; M{j}' X] > 0);
63 end
64
65 %% Expansão do Conjunto Elipsoidal
66
67 % Fecho convexo de vetores conhecidos
68 ww(1) = 0.05;
69 ww(2) = -0.05;
70 cont = 1;
71 for i=1:2
72     for j=1:2
73         w{cont} = [ww(i); ww(j); 0; 0];
74         cont = cont + 1;
75     end
76 end
77
78 wb = sdpvar(1,1,'full','real'); % wb = varpi^-2
79
80 % Restricao para que um conjunto de condicoes iniciais estejam contidos na
81 % Elipsoide (P,1)
82 for i=1:4
83     LMIs = LMIs + ([wb w{i}'; w{i} X] > 0);
84 end

```

```
85
86 %% Configurando o Solver
87
88 opts=sdpsettings('solver','lmilab');
89 opts.verbose=0;
90 solvesdp(LMIs,[wb], opts);
91 [p,d] = checkset(LMIs);
92
93 if min(p) > 0
94     disp('Sistema estavel')
95     X = double(X); % Extrai o valor numerico de X
96     P = inv(X)      % Extrai o valor numerico de P
97     wb = double(wb);
98     varpi = (1/wb)^(1/2)
99
100 for i=1:nv
101     M{i} = double(M{i}); % Extrai o valor numerico de M
102     K{i} = M{i}*inv(X); % Extrai o valor dos controladores K
103     Q{i} = inv(X)*double(Q{i})*inv(X);
104 end
105
106 for i=1:nv
107
108     for j=1:nv
109         Autovalor_ABK = eig(A{i} - B{i}*K{j}) % Calcula os autovalores
110     end
111 end
112
113 celldisp(K)
114 Norma_K1 = norm(K{1}) % Norma K1
115 Norma_K2 = norm(K{2}) % Norma K2
116
117 else
118     disp('Sistema NAO e estavel')
119 end
```

ANEXO G – PROJETO 7: CONTROLADOR ROBUSTO CHAVEADO CONSIDERANDO A MINIMIZAÇÃO DA NORMA H_∞ E REGIÃO DE OPERAÇÃO

```

1 %% Definicoes necessarias
2 m = 1;    % numero de entradas de controle
3 nv = 2;   % numero de vertices do politopo
4
5
6 %% Definindo as regioes de operacao e de saturacao
7
8 delta = 1;
9 ro = 10;           % Limite de tensao do atuador (10 Volts)
10 phi1 = 0.05;       % Limitante do deslocamento xc
11 phi2 = 0.05;       % Limitante do deslocamento de xf
12 N1 = [1 0 0 0];    % Restricao fisica em xc(t) -> phi1
13 N2 = [0 1 0 0];    % Restricao fisica em xf(t) -> phi2
14
15 % Conjunto D e Dbarra para m =1 - D_mxm
16 Dsat{1} = 1;       % Matriz D saturacao
17 Dsat{2} = 0;       % Matriz D saturacao
18 Dbarra{1} = 0;     % Matriz D^- saturacao
19 Dbarra{2} = 1;     % Matriz D^- saturacao
20
21 %% Definindo as dimensoes das matrizes a serem calculadas
22 X = sdpvar(4,4,'symmetric','real'); % Declaracao da matriz X, que 4x4 e
    % simetrica
23
24 % Criando as matrizes variaveis M,G,Z,Q
25 for i=1:nv
26     M{i} = sdpvar(1,4,'full','real');
27     G{i} = sdpvar(1,4,'full','real');
28     Z{i} = sdpvar(4,4,'symmetric','real');
29     Q{i} = sdpvar(4,4,'symmetric','real');
30 end
31
32
33
34 %% LMI Hinfinity
35
36 Epsilon0 = 0; % Sistema esta parado inicialmente (condicao inicial)
37 Epsilon = 0.0005; % Energia limitante do disturbio
38
39 mi = sdpvar(1,1,'full','real');
40 relax = 0.01; % Variavel de relaxacao
41

```

```

42 Gd = zeros (1,1);
43
44 I = eye(1);
45
46 LMIs = [];
47 LMIs = LMIs + (X > 0) ;
48
49 for i=1:nv
50     LMIs = LMIs + (X*A{i}' + A{i}*X + Z{i} + Q{i} < 0);
51     for j=1:nv
52         for s=1:2^m
53             LMIs = LMIs + ([B{i}*(-Dsat{s}*M{j} + Dbarra{s}*G{j}) + (-Dsat{s}
54             )*M{j} + Dbarra{s}*G{j})' * B{i}' - Z{i} - Q{j} H (C*X)';...
55             H' -relax^(-1)*I Gd';...
56             C*X Gd -relax*mi*I] < 0);
57         end
58     end
59 end
60
61 %% Restricao da norma do controlador
62 Vo = 0.2;
63
64 for j=1:nv
65     LMIs = LMIs + ([ (ro^2)*(Vo^-1) M{j}; M{j}' X] > 0);
66 end
67
68 %% LMI regioao de operacao e saturacao
69
70 %elipsoide contido na regioao de saturacao
71 for j=1:nv
72     LMIs = LMIs + ([ro^2/(Epsilon0 + relax^(-1)*Epsilon) G{j}; G{j}' X]
73     > 0);
74 end
75
76 %elipsoide contido na regioao de operacao E(P,delta)
77 LMIs = LMIs + ([phi1^2/(Epsilon0 + relax^(-1)*Epsilon) N1*X; X*N1' X] >
78 0);
79 LMIs = LMIs + ([phi2^2/(Epsilon0 + relax^(-1)*Epsilon) N2*X; X*N2' X] >
80 0);
81
82 %% Expansao do Conjunto Elipsoidal
83
84 %Fecho convexo de vetores conhecidos
85 ww(1) = 0.05;
86 ww(2) = -0.05;

```

```

85 cont = 1;
86 for i=1:2
87     for j=1:2
88         w{cont} = [ww(i); ww(j); 0; 0];
89         cont = cont + 1;
90     end
91 end
92
93 varpi = 1;
94 wb = varpi^-2;
95
96 %Restricao para que um conjunto de condicoes iniciais estejam contidos na
    Elipsoide (P,1)
97
98 for i=1:4
99     LMIs = LMIs + ([wb w{i}'; w{i} X] > 0);
100 end
101
102
103 %% Configurando o Solver
104 opts=sdpssettings('solver','lmilab');
105 opts.verbose=0;
106 solvesdp(LMIs,mi,opts);
107 [p,d] = checkset(LMIs);
108
109 if min(p) > 0
110     disp('Sistema estavel')
111     X = double(X); % Extrai o valor numerico de X
112     P = inv(X) % Extrai o valor numerico de P
113     mi = double(mi); % Determina o valor de mi
114     gamma = sqrt(mi); % Custo garantido H infinito
115
116
117     for i=1:nv
118         M{i} = double(M{i}); % Extrai o valor numerico de X
119         K{i} = M{i}*inv(X); % Extrai o valor dos controladores K
120         Q{i} = inv(X)*double(Q{i})*inv(X);
121     end
122
123     for i=1:nv
124         for j=1:nv
125             Autovalor_ABK = eig(A{i} - B{i}*K{j}) % Calcula os autovalores
126         end
127     end
128
129 celldisp(K)
130 Norma_K1 = norm(K{1}) %Norma K1

```

```
131 Norma_K2 = norm(K{2})    %Norma K2
132
133 else
134     disp('Sistema NAO E estavel')
135 end
```