



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"



Programa de Pós-Graduação em Ciência e Tecnologia de Materiais

Daví Filenga

**RELAÇÕES MONOGÂMICAS ENTRE ESTADOS MULTIPARTIDOS  
E EFEITOS DE MEMÓRIA EM COMPUTAÇÃO QUÂNTICA  
BASEADA EM MEDIDAS PROJETIVAS**

**BAURU**

**2020**

Daví Filenga

RELAÇÕES MONOGÂMICAS ENTRE ESTADOS MULTIPARTIDOS E  
EFEITOS DE MEMÓRIA EM COMPUTAÇÃO QUÂNTICA BASEADA EM  
MEDIDAS PROJETIVAS

Tese apresentada como requisito à obtenção do título de Doutor à Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - Programa de Pós-Graduação em Ciência e Tecnologia de Materiais, área de concentração em Modelagem e Simulação de Materiais, sob a orientação do Prof. Dr. Felipe Fernandes Fanchini.

BAURU

2020

Filenga, Daví.

Relações monogâmicas entre estados multipartidos e efeitos de memória em computação quântica baseada em medidas projetivas / Daví Filenga, 2020  
203 f. : il.

Orientador: Felipe Fernandes Fanchini

Tese (Doutorado)-Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências, Bauru, 2020

1. Computação quântica baseada em medidas projetivas. 2. Relações monogâmicas. 3. Estados multipartidos. 4. Sistemas quânticos abertos. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências. II. Título.

**ATA DA DEFESA PÚBLICA DA TESE DE DOUTORADO DE DAVÍ FILENGA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MATERIAIS, DA FACULDADE DE CIÊNCIAS - CÂMPUS DE BAURU.**

Aos 03 dias do mês de março do ano de 2020, às 14:00 horas, no(a) Anfiteatro do Departamento de Química/FC - Bauru, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. FELIPE FERNANDES FANCHINI - Orientador(a) do(a) Departamento de Física / UNESP/ Câmpus de Bauru, Prof. Dr. REGINALDO DE JESUS NAPOLITANO do(a) Instituto de Física de São Carlos / Universidade de São Paulo, Prof. Dr. CELSO JORGE VILLAS-BÔAS do(a) Departamento de Física / Universidade Federal de São Carlos, Prof.Dr. LEONARDO KLEBER CASTELANO do(a) Departamento de Física / Universidade Federal de São Carlos, Prof. Dr. EDSON SARDELLA do(a) Departamento de Física / Faculdade de Ciências de Bauru, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da TESE DE DOUTORADO de DAVÍ FILENGA, intitulada **Relações monogâmicas entre estados multipartidos e efeitos de memória em computação quântica baseada em medidas projetivas**. Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final:      APROVADO     . Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.

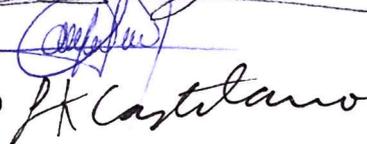
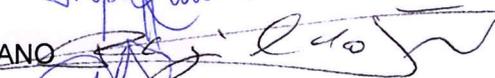
Prof. Dr. FELIPE FERNANDES FANCHINI

Prof. Dr. REGINALDO DE JESUS NAPOLITANO

Prof. Dr. CELSO JORGE VILLAS-BÔAS

Prof.Dr. LEONARDO KLEBER CASTELANO

Prof. Dr. EDSON SARDELLA



*Dedico este trabalho à minha amada avó  
Nilza Sebastiana Ferrão Filenga (in memoriam),  
cuja presença foi essencial em minha vida.*

# AGRADECIMENTOS

À Deus, por tudo.

Ao meu orientador Prof. Dr. Felipe Fernandes Fanchini, pela oportunidade de trabalho, confiança em mim depositada e orientação ao longo desses últimos anos. Agradeço também por ter sido uma pessoa acessível e sincera, bem como pela amizade e compreensividade, com quem muito pude aprender.

Aos professores Dr. Reginaldo de Jesus Napolitano, Dr. Celso Jorge Villas-Bôas, Dr. Leonardo Kleber Castelano e Dr. Edson Sardella pelas frutíferas discussões, informações e orientações que puderam contribuir para o aprimoramento do presente trabalho.

Aos professores Dr. Luiz Carlos da Silva Filho e Dr. Tit. Luis Vicente de Andrade Scalvi, pelo bom trabalho de coordenação do POSMAT durante esse período. Agradeço também aos professores Dr. Jose Bras Barreto de Oliveira pela amizade e Dr<sup>a</sup>. Dayse Iara dos Santos pelo auxílio durante o início de meu período de doutoramento.

À Caroline, Letícia, Thamires e ao pessoal da seção de pós-graduação pela atenção, acessibilidade e boa recepção nas vezes que precisei. Agradeço também ao Eduardo, Fabrícia e Márcio do departamento de Física por terem me ajudado várias vezes.

À CAPES, pelo auxílio financeiro destinado à execução deste projeto.

E é claro, aos familiares que me apoiaram durante todos esses anos, os quais são dignos de todo o meu amor e gratidão por estarem presentes em minha vida.

*“E ainda que tivesse o dom de profecia,  
e conhecesse todos os mistérios e toda a ciência,  
e ainda que tivesse toda fé,  
de maneira tal que transportasse os montes,  
e não tivesse amor,  
nada seria.”*

— São Paulo

FILENGA, D. **Relações monogâmicas entre estados multipartidos e efeitos de memória em computação quântica baseada em medidas projetivas**. 2020. 203f. Tese (Doutorado em Ciência e Tecnologia de Materiais) - UNESP, Faculdade de Ciências, Bauru, 2020.

## RESUMO

Na presente Tese realizou-se um estudo acerca das relações monogâmicas entre emaranhamento de formação (EF) e discórdia quântica (DQ) para sistemas quânticos multipartidos, bem como um estudo acerca da dinâmica dissipativa de operações lógicas de 1 (portas NOT e  $Z$ ) e 2 (porta CNOT) qubits para uma computação quântica baseada em medidas projetivas (MBQC). Como resultado, expressões as quais generalizam relações de conservação entre EF e DQ puderam ser deduzidas, bem como relações de distribuição de DQ para sistemas de  $n$  partes. Ademais, ampliando os estudos referentes a sistemas multipartidos, uma pesquisa a respeito da influência dos canais *amplitude damping* (AD) e *phase damping* (PD) em uma MBQC considerando ambientes altamente não-Markovianos pôde ser desenvolvida. Nesse sentido, uma medida denominada *fidelidade média* ( $F_m$ ) foi então proposta, a partir da qual expressões analíticas puderam ser deduzidas para os canais em questão, e sendo demonstrado que  $F_m$  resulta em valores idênticos para as portas  $X$  e  $Z$ . Além do mais, também foi possível realizar um estudo acerca dos tempos ótimos das medidas, segundo o qual pôde-se concluir que sua rápida execução não necessariamente implica em melhores resultados, tampouco sua lenta execução não necessariamente implica em piores. Nesse contexto, pôde-se também demonstrar que para o canal AD o conhecimento do mapa dissipativo já é o suficiente para intuitivamente determinar os melhores tempos de medidas, sendo que o mesmo não necessariamente é verdade para o canal PD, onde uma combinação de medidas em instantes de tempo específicos pode levar a melhores resultados devido ao erro existente em um qubit corrigir o erro existente em outro. Por fim, realizou-se um estudo acerca da indução de ruídos Markovianos em sistemas não-Markovianos e vice-versa, a partir do qual pôde-se observar que, para o canal PD, a indução de ruídos Markovianos em posições específicas de um *cluster* com qubits não-Markovianos pode resultar em valores de fidelidade média expressivamente mais elevados.

**Palavras-chave:** *Computação quântica baseada em medidas projetivas. Monogamia de estados. Estados multipartidos. Sistemas quânticos abertos.*

FILENGA, D. **Monogamous relations for multipartite states and memory effects in measurement-based quantum computation.** 2020. 203p. Thesis (Doctoral in Ciência e Tecnologia de Materiais) - UNESP, Faculdade de Ciências, Bauru, 2020.

## ABSTRACT

In this work a study about the monogamous relations between entanglement of formation (EF) and quantum discord (QD) for multipartite quantum systems, as well the dissipative dynamics of 1 (NOT and  $Z$  gates) and 2 (CNOT gate) qubits for a measurement-based quantum computation (MBQC) could be developed. As a result, expressions which generalize conservation laws between EF and DQ could be deduced, as well as DQ distribution laws for  $n$  part quantum systems. In addition, expanding the multipartite systems studies, a research about the influence of the amplitude damping (AD) and phase damping (PD) channels in an MBQC considering highly non-Markovian environments also could be developed. In this sense, a measure called *average gate fidelity* ( $F_m$ ) was proposed, from which we deduce analytical expressions for the channels and show that it is identical for the  $X$  and  $Z$  gates. In addition, we conducted a study of the optimal measurement times, where we conclude that neither fast application of the projective measurements necessarily implies better results, nor slow application necessarily implies worse results. Furthermore, it was also possible to demonstrate that while for the AD the knowledge of the dissipative map is sufficient to determine the best measurement times, the same is not necessarily true for the PD, where the time of the set of measures becomes crucial since a phase error in one qubit can fix the phase error that takes place in another. Finally, a study was carried out on the induction of Markovian noises in non-Markovian systems and vice versa, from which it was observed that, for the PD channel, the induction of Markovian noises in specific positions of a cluster with non-Markovian qubits can result in significantly higher average gate fidelity values.

**Palavras-chave:** *Measurement-based quantum computation. State monogamy. Multipartite states. Open quantum systems.*

# LISTA DE FIGURAS

2.1	Experimento de dupla fenda de Young, onde os fótons emitidos atravessam as fendas e exibem um padrão de interferência ondulatório (YANOFSKY; MANNUCCI; MANNUCCI, 2008).	25
2.2	Imagens de <b>a</b> ) processador quântico (D-WAVE, 2020) e <b>b</b> ) circuito quântico supercondutor (adaptado de (CLARKE; WILHELM, 2008)).	31
2.3	Imagem obtida por microscopia eletrônica de varredura de um dispositivo semicondutor o qual utiliza qubits na forma de elétrons (círculos vermelhos) em pontos quânticos (SHULMAN et al., 2012).	31
2.4	Representação dos possíveis estados $ \psi\rangle$ de um único qubit através da esfera de Bloch (Adaptado de (KOCKUM, 2014)).	32
3.1	<b>a</b> ) Claude Elwood Shannon (1916-2001) (YORKER, 2020), considerado o pai da Teoria de Informação; <b>b</b> ) John von Neumann (1903-1957) (WIKIPEDIA, 2020), um dos grandes expoentes da Teoria de Informação, bem como um dos mais importantes matemáticos do século XX.	42
3.2	Diagrama de Venn onde é representado em vermelho <b>a</b> ) a entropia $H(X)$ da fonte de informação $A$ e <b>b</b> ) a entropia $H(Y)$ da fonte de informação $B$ .	43
3.3	Entropia em função das probabilidades $p$ de resultados para o lançamento de uma moeda viciada ( $p \neq 0,5$ ) e não viciada ( $p = 0,5$ ).	45
3.4	Entropia conjunta (região destacada em vermelho) entre as fontes de informação $A$ e $B$ .	49
3.5	Regiões destacadas em vermelho: em <b>a</b> ) entropia condicional $H(X Y)$ da fonte de informação $A$ , uma vez que se conhece $H(Y)$ ; em <b>b</b> ) entropia condicional $H(Y X)$ da fonte de informação $B$ , uma vez que se conhece $H(X)$ .	52

3.6	Informação mútua $I(X : Y)$ entre duas fontes de informação $A$ e $B$ . . . . .	53
3.7	Representação gráfica através de um diagrama de Venn da correlação clássica $J_{AB}^{\leftarrow}$ (região em roxo) e da correlação quântica $\delta_{AB}^{\leftarrow}$ (região em amarelo), as quais somadas constituem a informação mútua entre os subsistemas quânticos $A$ e $B$ (FANCHINI et al., 2012). . . . .	66
3.8	Representação do ciclo de IIL no sentido horário (setas vermelhas) e anti-horário (setas azuis) em um sistema quântico puro tripartido $abc$ (FANCHINI et al., 2012). . . . .	71
4.1	<b>a)</b> Informações inacessíveis da parte 1 dada uma observação sobre as partes restantes do sistema com exceção da parte imediatamente à direita (parte 2). <b>b)</b> Informações inacessíveis da parte 1 dada uma observação sobre as partes restantes do sistema com exceção da parte imediatamente à esquerda (parte $n$ ). A igualdade monogâmica é alcançada repetindo o mesmo procedimento para todas as $n$ partes do sistema (FERREIRA et al., 2018). . . . .	96
5.1	<b>a)</b> Robert Raussendorf (COLUMBIA, 2020) e <b>b)</b> Hans Jürgen Briegel (VIENNA, 2020). Idealizadores da técnica de computação quântica baseada em medidas projetivas. . . . .	102
5.2	Estado inicial para a formação de um <i>cluster</i> com 5 qubits. . . . .	104
5.3	Medidas realizadas nos 4 primeiros qubits a fim de se efetuar uma operação de rotação $XZX$ arbitrária no estado $ \psi_{in}\rangle$ do primeiro qubit, obtendo ao final do processo a operação desejada no estado $ \psi_{out}\rangle$ do quinto qubit, geralmente em uma base diferente da computacional. . . . .	105
5.4	Estado inicial para a formação de um <i>cluster</i> com 4 qubits, sendo $ i_A\rangle$ o estado do qubit alvo e $ i_C\rangle$ o estado do qubit de controle. . . . .	108
5.5	Medidas nos 2 primeiros qubits a fim de se efetuar a operação CNOT. Ao final do processo, o qubit alvo será o qubit 3 com estado $ f_A\rangle$ , bem como o qubit de controle será o qubit 4 com estado $ f_C\rangle$ . . . . .	109
5.6	Efeito do canal <i>amplitude damping</i> na esfera de Bloch, onde uma convergência dos estados para um dos extremos verticais ( $ 0\rangle$ ) é induzida (NIELSEN; CHUANG, 2000). . . . .	119

5.7	Efeito do canal PD na esfera de Bloch, onde uma convergência majoritária dos estados das laterais da esfera para o seu centro é induzida (NIELSEN; CHUANG, 2000). . . . .	120
6.1	Fidelidade média em função do tempo e desvio padrão para a dinâmica dissipativa do estado de <i>cluster</i> com 5 qubits para os canais Markovianos <b>a)</b> AD e <b>b)</b> PD. . . . .	126
6.2	Fidelidade média em função do tempo e desvio padrão para a dinâmica dissipativa do estado de <i>cluster</i> com 5 qubits para os canais não-Markovianos <b>a)</b> AD e <b>b)</b> PD. . . . .	128
6.3	Fidelidade média versus tempo e desvio padrão da operação de rotação $\pm\pi$ no eixo $X$ ou $Z$ para os canais Markovianos <b>a)</b> AD e <b>b)</b> PD, considerando medidas no mesmo instante para cada $t$ . . . . .	129
6.4	Fidelidade média versus tempo e desvio padrão da operação de rotação $\pm\pi$ no eixo $X$ ou $Z$ para os canais não-Markovianos <b>a)</b> AD e <b>b)</b> PD, considerando medidas no mesmo instante para cada $t$ . . . . .	131
6.5	Gráficos de $F_p \times \theta \times \phi$ para o canal PD referente aos instantes de tempo nos vales de $F_m$ para <b>a)</b> $t = \pi/2$ e <b>b)</b> $t = 7\pi/2$ . . . . .	132
6.6	$F_c \times t$ (em azul) e $F_m \times t$ (em vermelho) para a operação de rotação $\pm\pi$ no eixo $X$ ou $Z$ para os canais não-Markovianos <b>a)</b> AD e <b>b)</b> PD. . . . .	134
6.7	Fidelidade média da dinâmica dissipativa do estado de <i>cluster</i> com 5 qubits em função do tempo para os canais <b>a)</b> AD e <b>b)</b> PD. Os pontos vermelhos $P_1$ , $V$ e $P_2$ definem um conjunto de tempos pré-selecionados em que as medidas serão executadas. . . . .	136
6.8	<b>a)</b> Fidelidade média ( $F_m$ ) e <b>b)</b> fidelidade de porta ( $F_g$ ) em função da sequência de medidas para os canais AD e PD. . . . .	136
6.9	Gráfico de $L \times t$ (Equação 5.37). Em <b>a)</b> a curva azul representa $L(t)$ quando $\tau = 30$ , enquanto que as curvas em vermelho, amarelo, roxo e verde representam, respectivamente, os casos para o qual $\tau = 10$ , $\tau = 5$ , $\tau = 2$ e $\tau = 1$ . Em <b>b)</b> as curvas em azul, vermelho, amarelo, roxo e verde representam, respectivamente, os casos para o qual $\tau = 0,4$ , $\tau = 0,3$ , $\tau = 0,2$ , $\tau = 0,1$ e $\tau = 0,01$ . . . . .	140
6.10	Desvio padrão para a fidelidade média em função dos estados iniciais para o canal PD com os tempos de medida dados por $P_1$ - $V$ - $V$ - $V$ . . . . .	142

6.11	<b>a)</b> Fidelidade média $F_c$ do estado de <i>cluster</i> (sem medidas) em função do tempo $t$ ; <b>b)</b> gráfico de curva de nível de $F_m \times t_2 \times t_3$ para a operação de rotação $\pm\pi$ em $X$ ou $Z$ , para $t_1 = 0$ e $t_4 = 2\pi/d$ . O canal em questão é o AD com ruídos não-Markovianos em todos os 5 qubits. . . . .	144
6.12	<b>a)</b> Fidelidade média $F_c$ do estado de <i>cluster</i> (sem medidas) em função do tempo $t$ ; <b>b)</b> gráfico de curva de nível de $F_m \times t_2 \times t_3$ para a operação de rotação $\pm\pi$ em $X$ ou $Z$ , para $t_1 = \pi/d$ e $t_4 = 2\pi/d$ . O canal em questão é o AD com ruídos não-Markovianos em todos os 5 qubits. . . . .	145
6.13	<b>a)</b> Fidelidade média $F_c$ do estado de <i>cluster</i> (sem medidas) em função do tempo $t$ com os tempos das medidas nos picos; <b>b)</b> gráfico de curva de nível de $F_m \times t_2 \times t_3$ para a operação de rotação $\pm\pi$ em $X$ ou $Z$ para $t_1 = 0$ e $t_4 = \pi$ ; <b>c)</b> Fidelidade média $F_c$ do estado de <i>cluster</i> em função do tempo com os tempos das medidas no vale e no pico; <b>d)</b> gráfico de curva de nível de $F_m \times t_2 \times t_3$ para a operação de rotação $\pm\pi$ em $X$ ou $Z$ para $t_1 = \pi/2$ e $t_4 = 2\pi$ . O canal em questão é o AD com ruídos não-Markovianos em todos os 5 qubits. . . . .	147
6.14	<b>a)</b> Fidelidade média $F_c$ do estado de <i>cluster</i> (sem medidas) em função do tempo $t$ com os tempos das medidas no pico e no vale; <b>b)</b> gráfico de curva de nível de $F_m \times t_2 \times t_3$ para a operação de rotação $\pm\pi$ em $X$ ou $Z$ para $t_1 = 0$ e $t_4 = \pi/2$ ; <b>c)</b> Fidelidade média $F_c$ do estado de <i>cluster</i> em função do tempo com os tempos das medidas nos vales; <b>d)</b> gráfico de curva de nível de $F_m \times t_2 \times t_3$ para a operação de rotação $\pm\pi$ em $X$ ou $Z$ para $t_1 = \pi/2$ e $t_4 = 3\pi/2$ . O canal em questão é o AD com ruídos não-Markovianos em todos os 5 qubits. . . . .	150
6.15	Fidelidade média em função do tempo e desvio padrão para a dinâmica dissipativa do estado de <i>cluster</i> com 4 qubits para os canais não-Markovianos <b>a)</b> AD e <b>b)</b> PD. . . . .	156
6.16	Fidelidade média versus tempo e desvio padrão da operação CNOT para os canais não-Markovianos <b>a)</b> AD e <b>b)</b> PD, considerando medidas no mesmo instante para cada $t$ . . . . .	158
6.17	Valores de $F_p \times t$ (canal AD) para $\{\theta_1 = 0$ ou $\pi, \phi_1 = \phi_2 = 0\}$ (linha tracejada azul), $\{\theta_1 = \pi/4$ ou $3\pi/4, \phi_1 = \phi_2 = 0\}$ (linha tracejada vermelha), e $\{\theta_1 = \pi/2, \phi_1 = \phi_2 = 0\}$ (linha tracejada verde) para <b>a)</b> $\theta_2 = 0$ e <b>b)</b> $\theta_2 = \pi$ . . . . .	159

6.18	Gráfico de $F_p \times \theta_1 \times \theta_2$ (canal AD) para $\phi_1 = \phi_2 = 0$ no instante $t = \pi/d$ . . . . .	160
6.19	$F_p \times t$ (canal PD) para <b>a)</b> $\{\theta_1 = \phi_1 = \theta_2 = \phi_2 = 0\}$ (linhas pretas tracejadas), <b>b)</b> $\{\theta_1 = \phi_1 = 0, \theta_2 = \pi/2, \phi_2 = 0\}$ (linhas em roxo tracejadas), <b>c)</b> $\{\theta_1 = \pi/2, \phi_1 = \theta_2 = \phi_2 = 0\}$ (linhas azuis tracejadas) e <b>d)</b> $\{\theta_1 = \pi/2, \phi_1 = 0, \theta_2 = \pi/2, \phi_2 = 0\}$ (linhas verdes tracejadas). . . . .	161
6.20	Gráfico de $F_p \times \theta_1 \times \phi_1$ (canal PD) no instante $t = \pi/2$ para $\{\theta_2 = 0, \phi_2 = 0\}$ . . . . .	162
6.21	Fidelidade média da dinâmica dissipativa do estado de <i>cluster</i> com 4 qubits em função do tempo para os canais <b>a)</b> AD e <b>b)</b> PD. Os pontos vermelhos $P_1, V$ e $P_2$ definem um conjunto de tempos pré-selecionados em que as medidas serão executadas. . . . .	163
6.22	Fidelidade média ( $F_m$ ) para a porta CNOT em função da sequência de medidas para os canais AD e PD. . . . .	163
6.23	Fidelidade média versus tempo e desvio padrão para a dinâmica dissipativa do estado de <i>cluster</i> com 4 qubits inicialmente emaranhados para os canais não-Markovianos <b>a)</b> AD e <b>b)</b> PD. . . . .	168
6.24	$F_m \times t$ e desvio padrão da operação CNOT com qubits inicialmente emaranhados para os canais não-Markovianos <b>a)</b> AD e <b>b)</b> PD, considerando medidas no mesmo instante para cada $t$ . . . . .	170
6.25	Fidelidade média versus tempo para uma operação lógica de rotação $\pm\pi$ em $X$ ou $Z$ para o canal AD com ruídos do tipo Markoviano ( $M$ ) e não-Markoviano ( $N_m$ ). As linhas azuis mostram os resultados utilizando nosso método de cálculo da fidelidade média ( $F_m$ ) e as linhas vermelhas utilizando o método de fidelidade de porta ( $F_g$ ). . . . .	173
6.26	Fidelidade média versus tempo para uma operação lógica de rotação $\pm\pi$ em $X$ ou $Z$ para o canal PD com ruídos do tipo Markoviano ( $M$ ) e não-Markoviano ( $N_m$ ). As linhas azuis mostram os resultados utilizando nosso método de cálculo da fidelidade média ( $F_m$ ) e as linhas vermelhas utilizando o método de fidelidade de porta ( $F_g$ ). . . . .	174

# LISTA DE TABELAS

2.1	Tabela verdade para a porta l3gica qu4ntica CNOT. . . . .	35
3.1	Entropia da Frase 1. . . . .	46
3.2	Entropia da Frase 2. . . . .	46
6.1	Fidelidade m3dia em fun3o de todos os 32 poss3veis arranjos de $I$ e $\sigma_z$ para $U_0$ (Equa- o3o 6.14) para cada qubit. . . . .	151
6.2	Fidelidade m3dia em fun3o de todos os 16 poss3veis arranjos de $I$ e $\sigma_z$ para $U_0$ (Equa- o3o 6.19) para cada qubit na porta CNOT. . . . .	165
6.3	Fidelidade m3dia em fun3o de todos os 32 poss3veis arranjos de $\mathcal{L}_M$ e $\sigma_z$ para cada qubit. . . . .	176
6.4	Arranjos da Tabela C.1, quando h4 pelo menos um qubit Markoviano, para os quais a fidelidade m3dia atinge o mais alto valor ( $F_m \approx 0,75$ ). . . . .	178
6.5	Fidelidade m3dia para a opera3o CNOT, quando h4 pelo menos um qubit Markoviano, para todos os 19 poss3veis arranjos de $I$ , $\sigma_z$ e $\mathcal{L}_M$ em cada qubit tal que $L_4 = L_3$ . . . . .	180
C.1	Fidelidade m3dia para a opera3o de rota3o $\pm\pi$ em $X$ ou $Z$ para todos os 243 poss3veis arranjos de $I$ , $\sigma_z$ e $\mathcal{L}_M$ em cada qubit. . . . .	202

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>19</b>
1.1	Motivação . . . . .	19
1.2	Estrutura da tese . . . . .	22
<b>2</b>	<b>CONCEITOS DE MECÂNICA QUÂNTICA</b>	<b>24</b>
2.1	Contexto histórico . . . . .	24
2.2	Estado quântico . . . . .	26
2.2.1	Estado puro e estado misto . . . . .	27
2.3	Operador densidade . . . . .	27
2.3.1	Dinâmica e projeção do operador densidade . . . . .	28
2.4	Traço parcial . . . . .	29
2.5	Qubit . . . . .	30
2.6	Esfera de Bloch . . . . .	31
2.7	Portas lógicas . . . . .	33
2.8	Postulados da mecânica quântica . . . . .	36
2.8.1	Postulado 1 . . . . .	37
2.8.2	Postulado 2 . . . . .	37
2.8.3	Postulado 3 . . . . .	37
2.8.4	Postulado 4 . . . . .	38
<b>3</b>	<b>TEORIA DE INFORMAÇÃO</b>	<b>40</b>
3.1	Teoria de informação clássica . . . . .	41
3.1.1	Entropia de Shannon . . . . .	41

3.1.2	Entropia conjunta . . . . .	48
3.1.3	Entropia condicionada e entropia condicional . . . . .	50
3.1.4	Informação mútua . . . . .	53
3.2	Teoria de informação quântica . . . . .	55
3.2.1	Entropia de von Neumann . . . . .	55
3.2.2	Análogos quânticos das entropias clássicas . . . . .	59
3.2.3	Correlação clássica e discórdia quântica . . . . .	63
3.2.4	Emaranhamento de formação, monogamia de emaranhamento e relação de Koashi-Winter . . . . .	67
3.3	Emaranhamento e discórdia para sistemas tripartidos . . . . .	68
3.3.1	Informação Inacessível Localmente para sistemas tripartidos . . . . .	70
3.3.2	Derivação alternativa das relações cíclicas para sistemas tripartidos . . . . .	72
<b>4</b>	<b>RESULTADOS: GENERALIZAÇÃO DAS RELAÇÕES MONOGÂMICAS PARA SISTEMAS MULTIPARTIDOS</b>	<b>74</b>
4.1	Desigualdades em sistemas de quatro partes . . . . .	76
4.1.1	Desigualdades com uma partícula central . . . . .	76
4.1.2	Desigualdades de ciclo . . . . .	81
4.2	Igualdades em sistemas de cinco partes . . . . .	83
4.2.1	Igualdades com uma partícula central . . . . .	83
4.2.2	Igualdades de ciclo . . . . .	83
4.3	Generalização das leis de conservação para sistemas multipartidos . . . . .	85
4.3.1	Generalização das leis de conservação de ciclo . . . . .	85
4.3.2	Generalização da lei de conservação para a discórdia . . . . .	90
4.3.3	Lei de conservação com medidas em uma das partes . . . . .	96
<b>5</b>	<b>COMPUTAÇÃO QUÂNTICA BASEADA EM MEDIDAS PROJETIVAS</b>	<b>99</b>
5.1	Introdução ao conceito de MBQC . . . . .	100
5.2	Operações lógicas através de medidas projetivas . . . . .	101
5.2.1	Rotação $XZX$ arbitrária no vetor de Bloch . . . . .	103

5.2.2	Porta lógica CNOT . . . . .	107
5.3	Cálculo da fidelidade . . . . .	109
5.3.1	Fidelidade de porta . . . . .	110
5.3.2	Fidelidade média . . . . .	113
5.4	Processos Markovianos e não-Markovianos . . . . .	115
5.5	Operadores de Kraus . . . . .	116
5.6	Ruídos quânticos: <i>amplitude damping</i> e <i>phase damping</i> . . . . .	117
5.6.1	<i>Amplitude damping</i> . . . . .	118
5.6.2	<i>Phase damping</i> . . . . .	119
<b>6</b>	<b>RESULTADOS: FIDELIDADE MÉDIA, TEMPOS DAS MEDIDAS E INDUÇÃO DE CANAIS NÃO-MARKOVIANOS</b>	<b>121</b>
6.1	Expressões analíticas para a fidelidade média . . . . .	122
6.2	Rotação $\pm\pi$ no eixo $X$ ou $Z$ (portas NOT e $Z$ ) . . . . .	123
6.2.1	Dinâmica dissipativa do estado de <i>cluster</i> com 5 qubits . . . . .	125
6.2.2	Dinâmica dissipativa com medidas no mesmo instante . . . . .	127
6.2.3	Comparação da dinâmica dissipativa com e sem projeções . . . . .	133
6.2.4	Fidelidade média com medidas em picos e vales de $F_c$ . . . . .	135
6.2.5	Fidelidade média com medidas em tempos diversos . . . . .	143
6.3	Porta CNOT . . . . .	152
6.3.1	Porta CNOT para um estado inicial separado . . . . .	153
6.3.2	Porta CNOT para qubits controle e alvo inicialmente emaranhados . . . . .	166
6.4	Indução de canais não-Markovianos . . . . .	171
6.4.1	Resultados para o canal <i>amplitude damping</i> . . . . .	172
6.4.2	Resultados para o canal <i>phase damping</i> . . . . .	173
6.4.3	Indução de canais não-Markovianos em picos e vales de $F_c$ para o canal PD . . . . .	177
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>181</b>

<b>A</b>	<b>EXPRESSÕES ANALÍTICAS PARA A FIDELIDADE MÉDIA</b>	<b>189</b>
A.1	Canal <i>amplitude damping</i> . . . . .	190
A.1.1	Sem medidas (estado de <i>cluster</i> ) com 5 qubits . . . . .	190
A.1.2	Sem medidas (estado de <i>cluster</i> ) com 4 qubits . . . . .	191
A.1.3	Sem Medidas (estado de <i>cluster</i> ) com 4 qubits (qubits controle e alvo inicialmente emaranhados) . . . . .	192
A.1.4	Rotação $\pm\pi$ sobre os eixos $X$ ou $Z$ . . . . .	192
A.1.5	Porta CNOT . . . . .	193
A.1.6	Porta CNOT (qubits controle e alvo inicialmente emaranhados) . . . . .	193
A.2	Canal <i>phase damping</i> . . . . .	194
A.2.1	Sem medidas (estado de <i>cluster</i> ) com 5 qubits . . . . .	194
A.2.2	Sem medidas (estado de <i>cluster</i> ) com 4 qubits . . . . .	194
A.2.3	Sem Medidas (estado de <i>cluster</i> ) com 4 qubits (qubits controle e alvo inicialmente emaranhados) . . . . .	194
A.2.4	Rotação $\pm\pi$ sobre os eixo $X$ ou $Z$ . . . . .	195
A.2.5	Porta CNOT . . . . .	195
A.2.6	Porta CNOT (qubits controle e alvo inicialmente emaranhados) . . . . .	195
<b>B</b>	<b>DEDUÇÃO DE ALGUMAS EXPRESSÕES</b>	<b>196</b>
B.1	Expressões do Capítulo 3 . . . . .	196
B.1.1	Expressão 1 . . . . .	196
B.1.2	Expressão 2 . . . . .	197
B.2	Expressão do Capítulo 6 . . . . .	199
<b>C</b>	<b>TABELA PARA A INDUÇÃO DE CANAIS MARKOVIANOS</b>	<b>201</b>
<b>D</b>	<b>ARTIGOS PRODUZIDOS</b>	<b>203</b>

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 MOTIVAÇÃO

As teorias de computação e informação quântica são áreas de pesquisa que trazem grande impacto à sociedade. Tais teorias constituem tópicos de grande interesse tanto do ponto de vista acadêmico quanto tecnológico, uma vez que possuem propriedades peculiares e permitem o processamento de grande quantidade de informação simultaneamente, as quais seriam, para determinadas tarefas como fatoração de números inteiros grandes (SHOR, 1999), simulação de sistemas quânticos, determinados problemas de otimização, criptografia quântica, entre outras, inviáveis ou impossíveis de serem executadas através da tecnologia de computação e informação clássica (WOLF, 2017).

Ao decorrer dos últimos anos, importantes avanços tecnológicos foram desenvolvidos e novas estratégias, como a computação quântica baseada em medidas projetivas ou MBQC (*measurement-based quantum computation*) (RAUSSENDORF; BRIEGEL, 2001; BRIEGEL et al., 2009; BRIEGEL; RAUSSENDORF, 2001; GROSS; EISERT, 2007; GROSS et al., 2007; GROSS; EISERT, 2010; CAI et al., 2009; RAUSSENDORF; BROWNE; BRIEGEL, 2003) puderam contribuir para o desenvolvimento de um computador quântico mais robusto. Desde sua primeira realização experimental (WALTHER et al., 2005) até os dias atuais, diversos avanços puderam ser obtidos a fim de demonstrar a viabilidade de uma MBQC. Mais especificamente, importantes progressos experimentais puderam ser recentemente obtidos (LODAHL, 2018; NEGNEVITSKY et al., 2018; KUMAR et al., 2018; REIMER et al., 2018; KUES et al.,

2019; PANT et al., 2019; ADCOCK et al., 2019), tornando sua aplicabilidade cada vez mais viável através de dispositivos mais sofisticados e abrindo caminho para o desenvolvimento de pesquisas futuras potencialmente inovadoras.

Ao contrário do esquema de computação quântica padrão, a MBQC utiliza medidas projetivas em estados emaranhados especiais denominados estados de *cluster* ao invés de operações unitárias. Nesse sentido, o estudo de medidas de correlação quântica para sistemas multipartidos como o emaranhamento de formação (EF) (BENNETT et al., 1996; HORODECKI et al., 2009; CORNELIO; OLIVEIRA; FANCHINI, 2011) e a discórdia quântica (DQ) (OLLIVIER; ZUREK, 2001; MODI et al., 2012), tornam-se altamente relevantes para a compreensão do modo como a informação pode ser distribuída entre partículas como fótons, elétrons e átomos. Apesar de suas diferenças conceituais, sabe-se que, tal como o emaranhamento, a DQ não pode ser livremente compartilhada (MODI et al., 2012), não podendo portanto ser maximamente correlacionada com duas ou mais partes simultaneamente, surgindo assim uma relação monogâmica. Nesse sentido, a monogamia de emaranhamento possui implicações fundamentais em diversos campos da física quântica, como por exemplo para a criptografia quântica, onde a ausência de monogamia é considerada um enorme obstáculo à sua implementação (RENES; GRASSL, 2006; MASANES, 2009), para a segurança da distribuição de chaves quânticas (BAE; ACÍN, 2006; SCARANI et al., 2005) e até mesmo para o estudo do comportamento misterioso dos buracos negros (ausência de monogamia), que surge ao tentarmos combinar a mecânica quântica com a relatividade geral (ALMHEIRI et al., 2013).

Elucidar o modo como a correlação quântica é distribuída em sistemas multipartidos é, de fato, altamente relevante para o processamento de informação e tecnologias de comunicação em cenários multiusuários. No entanto, apesar do enorme esforço da comunidade científica para entender como a correlação quântica é de modo geral distribuída em sistemas multipartidos, esse ainda permanece um importante problema em aberto até mesmo para o caso de um pequeno número de partes e dimensões espaciais. É exatamente nesse sentido que desenvolvemos a primeira parte de nosso trabalho, apresentando igualdades monogâmicas para discórdia quântica e emaranhamento de formação em sistemas multipartidos arbitrários. Como iremos demonstrar, estendendo relações conservativas entre EF e DQ (FANCHINI et al., 2011) para

sistemas multipartidos, uma regra geral de como a discórdia quântica é distribuída pode ser obtida. Além disso, o modo como o EF e a DQ são distribuídos mostra-se profundamente relacionado nos estados multipartidos gerais, onde pudemos demonstrar que a quantidade de comunicação quântica necessária em cada bipartição é igual à soma da informação obtida em correlações não-locais como as medidas pela discórdia quântica.

Já na segunda parte de nosso trabalho, realizamos um estudo acerca da dinâmica de sistemas quânticos abertos para uma MBQC. De fato, um dos grandes desafios para o desenvolvimento de computadores quânticos é lidar com o ruído proveniente do ambiente externo, cujas interações são inevitáveis e diminuem a fidelidade da computação devido ao processo de decoerência (BREUER; PETRUCCIONE et al., 2002), fazendo com que as propriedades quânticas sejam dessa forma perdidas. Neste sentido, o estudo da dinâmica de sistemas quânticos abertos, a fim de melhor compreender os processos dissipativos, torna-se fundamental para a obtenção de maiores fidelidades computacionais. Em especial, para processos não-Markovianos, a coerência do estado quântico apresenta uma dinâmica não monotônica, a qual constitui um assunto de amplo interesse bem como um recurso especialmente relevante para a MBQC (WOLF et al., 2008; BREUER; LAINE; PILO, 2009; LAINE; PILO; BREUER, 2010; VACCHINI; BREUER, 2010). Nesse contexto, para um sistema quântico que interage com ambientes não-Markovianos, a coerência pode ser reestabelecida em determinados momentos (BELLOMO; FRANCO; COMPAGNO, 2007), e conseqüentemente uma medida feita no tempo certo pode resultar em valores mais elevados de fidelidade. Em nossos estudos, consideramos dois diferentes e bem conhecidos processos dissipativos: o *amplitude damping* (AD) (BREUER; PETRUCCIONE et al., 2002) e o *phase damping* (PD) (DAFFER et al., 2004). Como resultados, pudemos obter uma solução analítica para as fidelidades médias, considerando para tanto as condições iniciais e os tempos de medidas da MBQC, bem como pudemos demonstrar como cada medida pode interferir de maneira altamente significativa nesse tipo de computação quântica. Apesar de atualmente existir uma comunidade científica dedicada ao estudo da MBQC, a quantidade de trabalhos existentes na literatura para esse tipo de computação e que abordam sistemas quânticos abertos ainda é relativamente pequena, havendo portanto muitas questões em aberto e nos motivando à escolha deste tema. É justamente nesse sentido, entendendo como

um ambiente não-Markoviano pode influenciar um computador quântico baseado em medidas projetivas, que desenvolvemos os nossos estudos nessa segunda parte de nosso trabalho.

## 1.2 ESTRUTURA DA TESE

O presente trabalho está dividido em 7 capítulos, os quais estão brevemente descritos a seguir.

O Capítulo 2 apresenta os conceitos fundamentais de mecânica quântica utilizados ao longo deste trabalho, partindo dos princípios básicos de estado quântico (puro e misto), operador densidade, traço parcial, de qubit e sua representação através da esfera de Bloch, bem como de portas lógicas e dos postulados da mecânica quântica.

No Capítulo 3 inicialmente foram discutidos os conceitos referentes à teoria de informação clássica, tais como entropia de Shannon, entropia conjunta, entropia condicionada e condicional e informação mútua. Em seguida, realizou-se uma discussão acerca da teoria de informação quântica referente à entropia de von Neumann, dos análogos quânticos das entropias clássicas e do surgimento da correlação clássica e da discórdia quântica. Na sequência, foram apresentados os conceitos de emaranhamento de formação, monogamia de emaranhamento e relação de Koashi-Winter. Logo após, foram abordadas as relações de emaranhamento de formação e discórdia quântica para sistemas tripartidos.

No Capítulo 4 foram apresentados os primeiros resultados focando na distribuição das correlações de EF e DQ, inicialmente partindo do estudo de sistemas de 4 partes apresentando desigualdades com uma partícula central e de ciclo. Em seguida, estendemos nossos estudos para sistemas de 5 partes, apresentando igualdades com uma partícula central e de ciclo. Por fim, apresentamos nossos resultados que consistem na generalização das leis de conservação cíclicas para sistemas multipartidos, bem como uma generalização da lei de conservação para a DQ e para a lei de conservação cíclica com medidas em uma das partes apenas.

No Capítulo 5, ampliando os estudos sobre sistemas multipartidos, foram discutidos os conceitos de computação quântica baseada em medidas projetivas, sendo descritos os procedimentos de operações lógicas através de medidas projetivas para uma rotação arbitrária do vetor de Bloch e porta CNOT. Em seguida, foram abordados os conceitos de fidelidade de porta e

uma forma de medida de fidelidade média, por nós proposta, a fim de melhor compreender os processos dissipativos de um computador quântico baseado em medidas projetivas. Na sequência, foram discutidos os conceitos de ruídos quânticos Markovianos e não-Markovianos, dos operadores de Kraus e dos canais quânticos *amplitude damping* e *phase damping*.

No Capítulo 6 apresentamos nossos resultados para o estudo da MBQC, inicialmente mostrando as expressões analíticas para a fidelidade média e em seguida os resultados para a operação de rotação  $\pm\pi$  nos eixos  $X$  ou  $Z$  (portas NOT e  $Z$ ) e porta CNOT. Logo após, foi realizado um estudo acerca da indução de canais Markovianos nas operações lógicas.

Por fim, no Capítulo 7, foram apresentadas as conclusões deste trabalho e propostas de trabalhos futuros.

## CAPÍTULO 2

# CONCEITOS DE MECÂNICA QUÂNTICA

### 2.1 CONTEXTO HISTÓRICO

Até o século XX, a física clássica dominou o cenário científico com sua abordagem de partículas e ondas como conceitos distintos. Considerava-se que a matéria era composta de partículas microscópicas, e a luz era pensada como ondas eletromagnéticas contínuas que se propagavam no espaço. No entanto, experimentos inovadores levaram à conclusão de que um comportamento dualístico de onda e partícula poderia ser observado na matéria. No início do século XIX, o experimento de dupla fenda de Thomas Young pôde demonstrar tal natureza dualística tanto para fótons quanto para partículas subatômicas (EISBERG, 1979). Neste experimento, observou-se que um feixe de fótons propagava-se como onda através de duas fendas até chegar a uma tela e nesta gerava um padrão de interferência. As duas fendas abertas faziam com que a onda se dividisse em duas ondas independentes, as quais interferiam umas nas outras até chegar ao anteparo. Nas regiões onde havia interferência construtiva, a luz era mais intensa; já nas regiões onde havia interferência destrutiva, a intensidade da luz era menor (Figura 2.1). Apesar disso, tal comportamento não era observado quando apenas uma das fendas estava aberta, analogamente neste caso ao que ocorre para partículas. Dessa forma, formulou-se o conceito da dualidade onda-partícula, onde ambos os aspectos de onda e partícula da luz eram

inseparáveis. Vale enfatizar que o experimento de dupla fenda não se restringe apenas à luz: pode-se executá-lo com elétrons, prótons e até mesmo núcleos atômicos, e todos eles exibirão exatamente o mesmo comportamento de interferência. Mais uma vez, isso indica claramente que a rígida distinção entre ondas e partículas é insustentável a nível quântico.

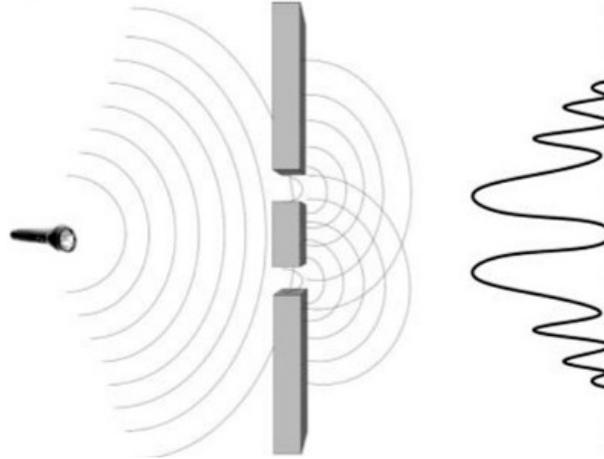


Figura 2.1: Experimento de dupla fenda de Young, onde os fótons emitidos atravessam as fendas e exibem um padrão de interferência ondulatório (YANOFSKY; MANNUCCI; MANNUCCI, 2008).

Com o passar do tempo, novas evidências foram surgindo e uma nova base conceitual passou então a ser desenvolvida. Com base na sugestão de Ludwig Boltzmann de que os níveis de energia de uma molécula poderiam ser discretos, Max Planck publicou, em 1901, seus estudos sobre a radiação de corpo negro partindo do princípio de que a energia  $E$  emitida por um corpo negro era quantizada, sendo emitida em unidades inteiras, indivisíveis e iguais ao produto da frequência de emissão  $\nu$  pela constante de Planck  $h \approx 6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$  (PLANK, 1901). Em 1913, Niels Bohr propôs, baseado na teoria de Planck, um modelo capaz de descrever a estrutura de um átomo com elétrons descrevendo órbitas com níveis de energia quantizados ao redor do núcleo atômico, não apresentando, portanto, valores contínuos de energia (BOHR, 1913).

Outro fator de grande destaque foi o efeito fotoelétrico, confirmado por Heinrich Hertz em 1887, o qual mostrou que elétrons poderiam ser emitidos de um material condutor quando este era exposto a uma radiação eletromagnética de frequência suficientemente alta. A explicação para tal fenômeno foi proposta pelo físico alemão Albert Einstein em 1905, segundo o qual as interações entre luz e matéria sempre ocorriam através de pacotes de energia discretos denominados fótons, que agiam como partículas genuínas as quais poderiam ser absorvidas e

emitidas individualmente (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOE, 1977).

Em meados de 1920, os físicos começaram a associar ondas a todas as partículas conhecidas, as chamadas “ondas de matéria”. A primeira proposta foi feita pelo físico francês Louis de Broglie, em 1924, em sua tese de doutorado. Com base na teoria da relatividade de Einstein, de Broglie desenvolveu a teoria das ondas de matéria, que postulava que uma partícula poderia exibir características de onda e vice-versa (EISBERG, 1979). Vale enfatizar que outras evidências e teorias também foram surgindo ao longo do tempo, sugerindo fortemente que a antiga teoria clássica fosse substituída por uma nova capaz de descrever o mundo microscópico. Passou a ser desenvolvida então a estrutura conceitual da mecânica quântica.

A fim de melhor elucidar algumas propriedades fundamentais da mecânica quântica, as quais serão de grande importância para a compreensão de nossos estudos, iremos na sequência introduzir os conceitos referentes ao estado quântico (puros e mistos), ao operador densidade e sua dinâmica, os conceitos de traço parcial, de bit quântico e sua representação através da esfera de Bloch, das portas lógicas e, finalmente, dos postulados da mecânica quântica. Como veremos adiante, esses serão os conteúdos fundamentais para o desenvolvimento de nosso trabalho.

## 2.2 ESTADO QUÂNTICO

Denomina-se estado quântico qualquer estado possível no qual um sistema quântico possa se encontrar. A descrição de um determinado estado quântico pode ser feita através de um vetor de estado, de uma função de onda, de uma matriz densidade ou através de um conjunto completo de números quânticos. Enquanto que em um sistema clássico as medidas de uma partícula são determinísticas e representadas por um único valor possível, em um sistema quântico podem ser representadas por um conjunto de possíveis resultados, cada qual com uma probabilidade associada. Dessa forma, a qualquer sistema físico quântico é associado um espaço vetorial complexo com produto interno, conhecido como Espaço de Hilbert (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOE, 1977). Para sistemas com estados contínuos, faz-se necessário apenas o uso de funções específicas para a sua descrição. Já para sistemas com estados discretos, estes também podem ser completamente descritos através da utilização de vetores e matrizes, levando muitas vezes a cálculos mais simples e menos custosos do ponto de vista computacional.

Uma das peculiaridades dos estados quânticos, a qual desempenha um papel de destaque nas teorias de informação e computação quântica, é o denominado *princípio da superposição*. Sejam  $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, \dots, |\phi_n\rangle$  vetores de estado quaisquer pertencentes ao espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ , então o estado  $|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n c_i |\phi_i\rangle$  também é um vetor de estado pertencente ao espaço  $\mathcal{H}$ , onde os coeficientes  $c_i$  são números complexos denominados *amplitudes de probabilidade*. Dessa forma, qualquer estado quântico pode ser escrito como uma combinação linear de outros estados quânticos (YANOFSKY; MANNUCCI; MANNUCCI, 2008).

### 2.2.1 ESTADO PURO E ESTADO MISTO

Os estados quânticos de um determinado sistema também podem ser classificados como sendo puros ou mistos. Denomina-se *estado puro* qualquer estado quântico formado por um conjunto de estados idênticos, podendo ser descrito através de uma única função de onda. Desse modo, a dinâmica do sistema como um todo será idêntica à dinâmica de um único elemento do conjunto. No entanto, muito frequentemente tem-se sistemas formados por conjuntos de diferentes estados. Denomina-se então *estado misto* qualquer estado quântico formado através de uma mistura estatística de estados puros, não podendo, dessa forma, ser descrito por uma única função de onda. Desse modo, torna-se necessário a representação do sistema através de uma matriz, a qual é denominada *matriz densidade* (YANOFSKY; MANNUCCI; MANNUCCI, 2008).

## 2.3 OPERADOR DENSIDADE

Em mecânica quântica, um operador densidade ou matriz densidade é um operador que consiste em uma matriz Hermitiana, com dimensões possivelmente infinitas e de traço um, sendo capaz de descrever o estado estatístico de um sistema quântico. Do ponto de vista matemático, a formulação de operador densidade é análoga à formulação de Dirac de vetores de estados utilizando bras e kets.

A definição de uma matriz densidade pode ser expressa na forma  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  para um estado puro, visto que  $|\psi\rangle$  é conhecido. Já para um estado não bem definido, composto por

um conjunto de estados  $|\psi_i\rangle$  cada qual com uma probabilidade  $p_i$  associada, tem-se então um *ensemble* com  $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ . Dessa forma, o espaço vetorial associado aos operadores densidade também é um espaço de Hilbert, de forma que um estado misto de um determinado sistema não pode ser caracterizado por um único vetor  $|\psi_i\rangle$ , mas sim por uma mistura estatística de vários estados puros. Por outro lado, um estado puro pode ser representado como uma mistura estatística. Nesse caso, para um dos estados, a probabilidade de ocorrência seria  $p_i = 1$ , e para os demais estados  $p_i = 0$  (NIELSEN; CHUANG, 2000; FANCHINI, 2008).

### 2.3.1 DINÂMICA E PROJEÇÃO DO OPERADOR DENSIDADE

Como toda descrição formulada através de vetores de estado possui análogo na notação de operador densidade, a evolução temporal de  $\rho$  pode ser descrita através de um operador unitário  $U(t)$  relacionado ao hamiltoniano  $H$ , ao tempo  $t$  e à constante reduzida de Planck  $\hbar$ , de modo que, para um hamiltoniano independente do tempo,  $U(t) = e^{-iHt/\hbar}$ , atuando no operador densidade da seguinte maneira:

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t). \quad (2.1)$$

Por meio do operador densidade, também é possível descrever uma medida através de um operador  $P_i$  em um determinado estado  $|\psi\rangle$ . Seja  $P_i$  o projetor definido por  $P_i = |v_i\rangle\langle v_i|$ , onde  $|v_i\rangle$  é um autovetor de uma matriz Hermitiana referente a um observável, tem-se então, após uma medida ser efetuada, o seguinte estado  $\rho_i$  para o sistema (NIELSEN; CHUANG, 2000):

$$\rho_i = \frac{P_i\rho P_i}{\langle\psi|P_i|\psi\rangle}. \quad (2.2)$$

A descrição do estado quântico em termos do operador densidade torna-se imprescindível para o estudo de sistemas quânticos constituídos por dois ou mais subsistemas, tal como qubits (subsistema 1) e reservatórios externos (subsistema 2). Isso porque tal descrição permite realizar de forma simples o cálculo das probabilidades parciais através da operação de *traço parcial*, como será discutido adiante. Dessa forma, a matriz densidade nos permite obter as probabilidades do sistema de interesse desconsiderando os demais subsistemas, o que pode ser

de grande valia para uma maior clareza e compreensão de um problema.

## 2.4 TRAÇO PARCIAL

Como anteriormente mencionado, a descrição dos estados através do operador densidade nos permite obter as probabilidades individuais de cada subsistema. Para exemplificar, vejamos o caso de um sistema  $AB$  composto por dois subsistemas  $A$  e  $B$  com estados  $|\psi_A\rangle$  e  $|\psi_B\rangle$  de 2 níveis, tal que  $|\psi_A\rangle = \alpha_A|0\rangle_A + \beta_A|1\rangle_A$  e  $|\psi_B\rangle = \alpha_B|0\rangle_B + \beta_B|1\rangle_B$ . Nesse caso, o espaço de estados total  $|\psi_{AB}\rangle$  é dado pelo produto tensorial dos espaços de Hilbert  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , e a operação de traço parcial para se obter o subsistema  $\rho_A = |\psi_A\rangle\langle\psi_A|$  de uma matriz densidade total  $\rho_{AB} = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|$  pode ser definida como sendo a soma dos “sanduíches” dos autovetores do subsistema  $B$  com a matriz densidade total  $\rho_{AB}$ :

$$\rho_A = Tr_B(\rho_{AB}) = \langle 0|_B \rho_{AB} |0\rangle_B + \langle 1|_B \rho_{AB} |1\rangle_B, \quad (2.3)$$

sendo  $Tr_B$  o traço parcial tomado sobre o subsistema  $B$ . De maneira análoga, a operação de traço parcial para se obter o subsistema  $\rho_B = |\psi_B\rangle\langle\psi_B|$  a partir de uma matriz densidade total  $\rho_{AB}$  pode ser definida como:

$$\rho_B = Tr_A(\rho_{AB}) = \langle 0|_A \rho_{AB} |0\rangle_A + \langle 1|_A \rho_{AB} |1\rangle_A, \quad (2.4)$$

sendo  $Tr_A$  o traço parcial tomado sobre o subsistema  $A$ .

Vale enfatizar que nos exemplos acima mencionados considerou-se um sistema formado pela matriz  $\rho_{AB}$  de dimensões  $4 \times 4$  com 2 subsistemas de dimensões  $2 \times 2$ . Todavia, a operação de traço parcial pode ser estendida para matrizes com quaisquer dimensões compostas por  $n$  subsistemas.

## 2.5 QUBIT

Um qubit (ou bit quântico) é um conceito abstrato que consiste na unidade de informação quântica, podendo ser descrito através de um vetor de estados em um sistema quântico de dois níveis. Assim como na teoria de informação clássica o bit corresponde à unidade de informação elementar, na teoria de informação quântica o qubit representa, de maneira análoga, a unidade de informação básica de um sistema quântico. O grande diferencial entre a computação clássica e a computação quântica consiste de fato na unidade básica de informação: enquanto que na computação clássica esta é representada pelo bit e pode assumir apenas os estados 0 ou 1, na computação quântica tem-se o bit quântico cuja representação matemática pode ser feita através de uma função de onda utilizando a notação de Dirac da seguinte maneira:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (2.5)$$

onde

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

sendo  $\alpha$  e  $\beta$  números complexos que satisfazem a condição de normalização ( $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ). Dessa forma, existem teoricamente infinitos possíveis valores para  $|\psi\rangle$ . Também é importante ressaltar que, ao se efetuar uma medida em um qubit, ele automaticamente se torna um bit. Como exemplo, um qubit pode estar no estado  $|\psi\rangle = \sqrt{0,7}|0\rangle + \sqrt{0,3}|1\rangle$  que, ao ser medido na base computacional, possui 70% de probabilidade de colapsar em  $|0\rangle$  e 30% de probabilidade de colapsar em  $|1\rangle$ .

Os bits clássicos como conhecemos podem ser implementados em diversas plataformas. Alguns exemplos são a presença ou ausência de passagem de corrente elétrica em um transistor, assim como pólos magnéticos em um disco rígido. Já para a informação quântica, algumas formas de implementação são através de técnicas que utilizam, por exemplo, a polarização de um fóton, o alinhamento de um spin nuclear em um campo magnético uniforme e um átomo em um estado fundamental e excitado. Outras técnicas incluem também a manipulação do spin de um elétron em dispositivos supercondutores (Figura 2.2), bem como poços quânticos com

elétrons (Figura 2.3) ou fótons em dispositivos semicondutores.

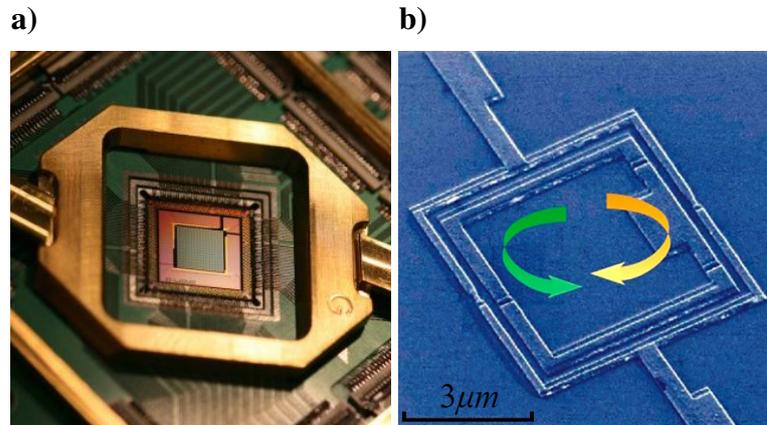


Figura 2.2: Imagens de **a)** processador quântico (D-WAVE, 2020) e **b)** circuito quântico supercondutor (adaptado de (CLARKE; WILHELM, 2008)).

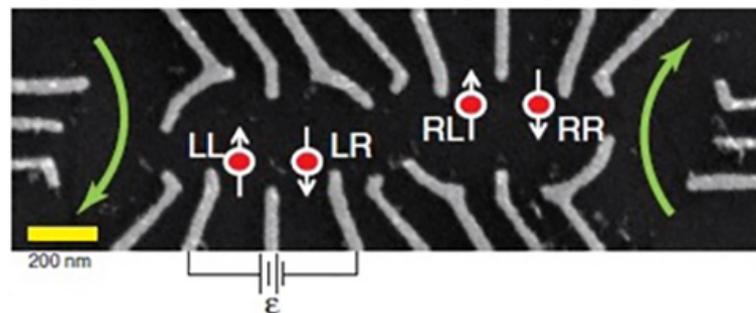


Figura 2.3: Imagem obtida por microscopia eletrônica de varredura de um dispositivo semiconductor o qual utiliza qubits na forma de elétrons (círculos vermelhos) em pontos quânticos (SHULMAN et al., 2012).

## 2.6 ESFERA DE BLOCH

A Esfera de Bloch consiste em um método de representação gráfica dos possíveis estados de um único qubit, sendo de grande utilidade para a análise e desenvolvimento de ideias intuitivas sobre informação e computação quântica, visto que muitas das operações com um único qubit podem ser convenientemente descritas através desse método. Para se fazer essa

representação, torna-se necessário reescrever a Equação 2.5 da seguinte maneira:

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left( \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right), \quad (2.7)$$

onde  $\theta$ ,  $\phi$  e  $\gamma$  são ângulos e portanto números reais. Por não possuir efeitos observáveis, o fator  $e^{i\gamma}$  pode ser ignorado, o que leva à seguinte expressão:

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle. \quad (2.8)$$

Dessa forma, os ângulos  $\theta$  e  $\phi$  definem um ponto na esfera, sendo que  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \phi < 2\pi$ , tal como mostra a Figura 2.4. No entanto, deve-se ressaltar que essa forma de representação é limitada, visto que não possibilita uma generalização para múltiplos qubits.

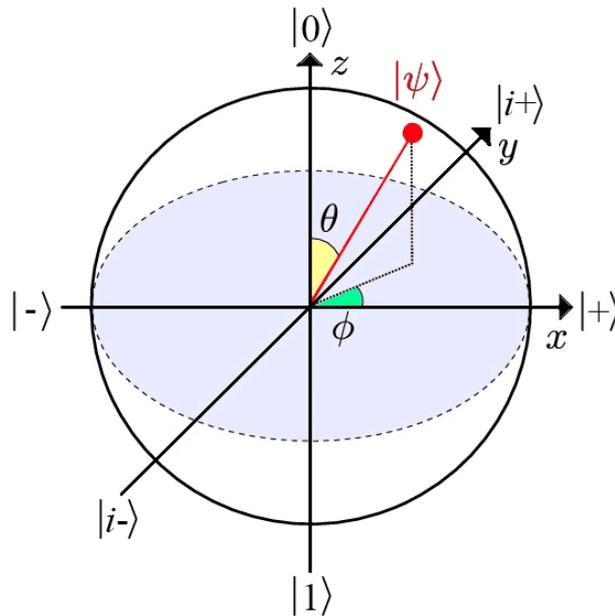


Figura 2.4: Representação dos possíveis estados  $|\psi\rangle$  de um único qubit através da esfera de Bloch (Adaptado de (KOCKUM, 2014)).

Já os estados nas extremidades dos eixos mostrados na Figura 2.4 são:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle); \quad (2.9)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle); \quad (2.10)$$

$$|i+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + i|1\rangle); \quad (2.11)$$

$$|i-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - i|1\rangle). \quad (2.12)$$

É possível também observar que há um número infinito de pontos na esfera, ou seja, teoricamente há uma quantidade infinita de estados que poderiam ser utilizados para se representar um bit quântico.

## 2.7 PORTAS LÓGICAS

Uma porta lógica consiste basicamente em um modo de manipular informação, atuando em unidades informativas como bits ou qubits, por exemplo, e as modificando, sendo a informação dessa forma processada. Como anteriormente mencionado, em se tratando de sistemas clássicos como computadores e circuitos elétricos convencionais, tem-se apenas duas formas de representação de informação: 0 e 1. No entanto, para sistemas quânticos como qubits, há teoricamente infinitas formas de representação de informação através de uma função de onda  $|\psi\rangle$ , bem como a possibilidade de efetuar o processamento de uma grande quantidade de informação simultaneamente (YANOFSKY; MANNUCCI; MANNUCCI, 2008).

Os circuitos de computadores clássicos consistem basicamente em fios e portas lógicas. Enquanto que os fios são utilizados para transportar informação através do circuito, as portas lógicas manipulam a informação, convertendo-as de uma forma para outra. Como exemplo, é possível mencionar a porta lógica clássica NOT, cuja operação troca os papéis de 0 e 1, ou seja, altera o estado 0 para 1 e o estado 1 para 0. Uma porta quântica análoga para qubits pode ser definida através de um processo que troca os papéis de  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , ou seja, leva o estado  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  para o estado  $\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$ .

Pode-se convenientemente representar a porta quântica NOT (também chamada de  $X$  ou matriz  $\sigma_x$  de Pauli) em forma matricial. Para tanto, basta definir uma matriz que represente a operação em questão, a partir do qual teremos:

$$\text{NOT} \equiv X \equiv \sigma_x \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Já a Equação 2.5, que representa o estado geral de um qubit, pode ser escrita em forma matricial da seguinte maneira:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

e então a operação referente à porta quântica NOT ( $\text{NOT}[\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle] = \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$ ) será

$$\text{NOT}|\psi\rangle = \text{NOT} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Vale enfatizar que para que a condição de normalização  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  de um determinado estado quântico  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  seja satisfeita, a matriz  $U$  que representa a porta lógica em questão deverá ser Hermitiana, ou seja, deverá satisfazer  $U = U^\dagger$ , sendo  $U^\dagger$  o adjunto de  $U$ . Como é possível observar, para operações lógicas que envolvem um único qubit, a representação pode ser feita através de matrizes  $2 \times 2$ . Para mais de um qubit, tais propriedades também devem ser mantidas, porém as dimensões da matriz, conseqüentemente, serão maiores quanto maior for o sistema na proporção de  $2^n$ , sendo  $n$  o número de qubits existentes no sistema (NIELSEN; CHUANG, 2000).

Vale frisar que existem diversas portas lógicas para sistemas quânticos (CNOT, CCNOT,  $\sqrt{\text{NOT}}$ ,  $H$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , SWAP,  $\sqrt{\text{SWAP}}$ , etc.), das quais muitas não possuem um análogo clássico. Um importante exemplo de porta lógica quântica para o qual não há um análogo clássico — e que será posteriormente foco de estudo na presente Tese — é a porta quântica  $Z$  (matriz  $\sigma_z$  de Pauli), que altera o estado de  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  para  $\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$ . Sua matriz pode ser definida da seguinte maneira:

$$Z \equiv \sigma_z \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Existem também portas lógicas que utilizam dois ou mais qubits para manipular informação. Nesse sentido, um importante exemplo de porta lógica (e que também será foco de estudo no presente trabalho) é a porta lógica quântica *controlled*-NOT ou simplesmente CNOT, utilizada para o processamento de informação envolvendo dois qubits. A porta em questão opera

Tabela 2.1: Tabela verdade para a porta lógica quântica CNOT.

Antes da operação		Após a operação	
Qubit controle	Qubit alvo	Qubit controle	Qubit alvo
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$
$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$

invertendo o segundo qubit, denominado *qubit alvo*, se e somente se o estado do primeiro qubit, denominado *qubit de controle*, for  $|1\rangle$ . A tabela verdade que descreve as operações da porta lógica em questão corresponde à Tabela 2.1.

Como exemplo de uma operação CNOT, vamos supor dois qubits, sendo um deles o qubit de controle expresso por  $|\psi_C\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , e o outro o qubit alvo, expresso por  $|\psi_A\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$ . Apesar da operação ser válida tanto para estados separados quanto emaranhados, vamos neste exemplo supor estados separados para os qubits controle e alvo. Ao considerarmos portanto a operação CNOT aplicada ao produto tensorial  $|\psi_C\rangle \otimes |\psi_A\rangle$ , por exemplo, teremos então:

$$\begin{aligned}
 \text{CNOT}(|\psi_C\rangle \otimes |\psi_A\rangle) &= \\
 \text{CNOT}(\alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle) &= \\
 \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\delta|10\rangle + \beta\gamma|11\rangle. &
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Já em termos de matrizes, a porta CNOT pode ser expressa como:

$$\text{CNOT} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.18}$$

a qual possui dimensão  $4 \times 4$  justamente por envolver os estados de dois qubits. A operação em

questão então se torna

$$\text{CNOT}(|\psi_C\rangle \otimes |\psi_A\rangle) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha\gamma \\ \alpha\delta \\ \beta\gamma \\ \beta\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\gamma \\ \alpha\delta \\ \beta\delta \\ \beta\gamma \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

De maneira análoga, se considerarmos a operação CNOT aplicada ao produto tensorial  $|\psi_A\rangle \otimes |\psi_C\rangle$  ao invés do produto tensorial  $|\psi_C\rangle \otimes |\psi_A\rangle$ , onde neste caso tomamos o primeiro qubit como alvo e o segundo como controle, teremos então:

$$\begin{aligned} \text{CNOT}(|\psi_A\rangle \otimes |\psi_C\rangle) &= \\ \text{CNOT}(\gamma\alpha|00\rangle + \gamma\beta|01\rangle + \delta\alpha|10\rangle + \delta\beta|11\rangle) &= \\ \gamma\alpha|00\rangle + \delta\beta|01\rangle + \delta\alpha|10\rangle + \gamma\beta|11\rangle, \end{aligned} \quad (2.20)$$

e a porta CNOT pode ser então definida como:

$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

para que a operação possa ser realizada:

$$\text{CNOT}(|\psi_A\rangle \otimes |\psi_C\rangle) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma\alpha \\ \gamma\beta \\ \delta\alpha \\ \delta\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma\alpha \\ \delta\beta \\ \delta\alpha \\ \gamma\beta \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

## 2.8 POSTULADOS DA MECÂNICA QUÂNTICA

A seguir serão descritos brevemente os postulados básicos da mecânica quântica, que de acordo com Michael A. Nielsen e Isaac L. Chuang ([NIELSEN; CHUANG, 2000](#)) podem ser

classificados em quatro postulados fundamentais, os quais tratam do espaço vetorial do sistema, de sua evolução temporal, dos efeitos das medições e do espaço de estados de um sistema físico composto.

### 2.8.1 POSTULADO 1

Existe um espaço vetorial complexo com produto interno (espaço de Hilbert) associado a qualquer sistema físico isolado, sendo denominado espaço de estados do sistema. O sistema pode assim ser completamente descrito pelo seu vetor de estado, o qual é um vetor unitário no espaço de estados do sistema.

### 2.8.2 POSTULADO 2

A evolução temporal de um sistema quântico fechado é descrita através de uma transformação unitária. Dessa forma, um estado futuro  $|\psi(t + \Delta t)\rangle$  pode ser relacionado ao seu estado presente  $|\psi(t)\rangle$  através de um operador unitário  $U(t + \Delta t, t)$  da seguinte maneira:

$$|\psi(t + \Delta t)\rangle = U(t + \Delta t, t) |\psi(t)\rangle. \quad (2.23)$$

### 2.8.3 POSTULADO 3

O 3º postulado da mecânica quântica fornece um meio de descrever os efeitos das medições em sistemas quânticos. Segundo este postulado, pode-se afirmar que as medições quânticas são descritas através de operadores de medida  $P_i$  que operam no espaço de estados do sistema a ser medido. Seja  $|v_i\rangle$  um dos autovetores da matriz (Hermitiana) referente a um observável, o projetor  $P_i$  pode ser definido como  $P_i = |v_i\rangle\langle v_i|$ . Tal processo possui natureza probabilística, ou seja, existe uma densidade de probabilidade de se obter determinados resultados, sendo que o índice  $i$  indica qual é o resultado da medida no sistema. A probabilidade  $p_i$  de um resultado da medida  $i$  ocorrer em um determinado estado  $|\psi\rangle$  pode ser descrita por:

$$p_i = \langle \psi | P_i | \psi \rangle, \quad (2.24)$$

sendo que o estado do sistema após a medida ( $|\psi_i\rangle$ ) será:

$$|\psi_i\rangle = \frac{P_i|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_i|\psi\rangle}}. \quad (2.25)$$

Além disso, a soma de todas as probabilidades  $p_i$  deverá ser 1, o que significa que um dos resultados sempre irá ocorrer:

$$\sum_i p_i = \sum_i \langle\psi|P_i|\psi\rangle = 1. \quad (2.26)$$

A fim de melhor elucidar o postulado da medida, o qual é crucial para o desenvolvimento do presente trabalho, iremos expor um simples exemplo. Supondo uma matriz  $\sigma_x$  de Pauli (Equação 2.13) como observável, seus autovetores  $|v_1\rangle$  e  $|v_2\rangle$  serão dados por:

$$|v_1\rangle = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle, \quad (2.27)$$

$$|v_2\rangle = |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle. \quad (2.28)$$

Dessa forma, os projetores serão então expressos por  $P_1 = |+\rangle\langle+|$  e  $P_2 = |-\rangle\langle-|$ , bem como os possíveis estados após a medida ser realizada ( $|\phi_1\rangle$  e  $|\phi_2\rangle$ ) em um determinado estado  $|\psi\rangle$  serão expressos por:

$$|\phi_1\rangle = \frac{P_1|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_1|\psi\rangle}} = \frac{|+\rangle\langle+|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi||+\rangle\langle+|\psi\rangle}}, \quad (2.29)$$

$$|\phi_2\rangle = \frac{P_2|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_2|\psi\rangle}} = \frac{|-\rangle\langle-|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi||-\rangle\langle-|\psi\rangle}}. \quad (2.30)$$

Além disso, a probabilidade do colapso ocorrer em  $|\phi_1\rangle$  será dada por  $p_1 = \langle\psi|P_1|\psi\rangle$  e a probabilidade do colapso ocorrer em  $|\phi_2\rangle$  será dada por  $p_2 = \langle\psi|P_2|\psi\rangle$ .

#### 2.8.4 POSTULADO 4

O espaço de estados de um sistema físico composto corresponde ao produto tensorial dos espaços de estados de cada sistema físico que compõe o sistema. Dessa forma, para sistemas

numerados de 1 a  $n$ , o estado conjunto total do sistema  $|\psi\rangle$  será expresso por:

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle . \quad (2.31)$$

Os 4 postulados acima mencionados fornecem, portanto, as ferramentas matemáticas necessárias para se trabalhar com sistemas quânticos (NIELSEN; CHUANG, 2000).

## CAPÍTULO 3

# TEORIA DE INFORMAÇÃO

Neste capítulo apresentaremos os conceitos fundamentais referentes à Teoria de Informação, os quais constituem a base conceitual necessária para o desenvolvimento dos cálculos das relações monogâmicas entre emaranhamento de formação e discórdia quântica para sistemas multipartidos, cujos resultados serão apresentados no Capítulo 4. Iniciaremos este capítulo discutindo a Teoria de Informação Clássica e as diferentes medidas de entropia para esse tipo de sistema, chegando até o conceito de informação mútua. Em seguida, serão discutidos os conceitos de entropia para sistemas quânticos, os quais serão necessários para a compreensão do conceito de discórdia quântica. Por fim, serão apresentados os formalismos do emaranhamento de formação e das relações de Koashi-Winter, as quais constituem relações monogâmicas para sistemas quânticos de três partes. De posse desses princípios, no Capítulo 4 deduziremos expressões as quais generalizam relações monogâmicas entre emaranhamento de formação e discórdia quântica de sistemas de três partes para sistemas de  $n$  partes.

Ao decorrer deste capítulo, serão apresentados os conceitos referentes à entropia sob a perspectiva de dois diferentes contextos: o primeiro referente ao caso clássico, o qual pode ser descrito através da Entropia de Shannon, e o segundo referente ao caso quântico, o qual pode ser descrito através da Entropia de von Neumann. Para ambos os casos, a entropia é calculada sobre uma distribuição de probabilidades em processos nos quais diferentes resultados aleatórios podem ser obtidos, sendo que cada possível resultado ocorre com uma certa probabilidade associada. A descrição matemática dos possíveis eventos pode então ser feita através de uma variável  $X$  que consiste em um *ensemble*  $X = \{x, A_X, P_X\}$ , onde  $x$  representa os

índices dos  $n$  possíveis eventos  $A_X = \{a_1, a_2, \dots, a_x, \dots, a_n\}$ , cada qual com uma probabilidade  $P_X = \{p_1, p_2, \dots, p_x, \dots, p_n\}$  associada. Para fins de economia de notação, denotaremos  $P(i = a_i) \equiv p_i$ , sendo que, tal como ocorre para qualquer valor de probabilidade,  $p_i$  deve ser positivo ( $p_i \geq 0$ ) e a soma das probabilidades de todos os possíveis eventos deve ser igual a 1:

$$\sum_{x \in A_X} p(x = a_i) = 1.$$

### 3.1 TEORIA DE INFORMAÇÃO CLÁSSICA

A comunicação é um processo imprescindível para a sociedade. Seja através de diálogos, livros, revistas, palestras, e-mails, dispositivos eletrônicos, etc., a transmissão da informação é o meio pelo qual nos possibilita levantar questionamentos, expressar nossas opiniões, direcionar nossas ações e transmitir conhecimentos adquiridos. Durante o século XX, as tecnologias de informação como o rádio, a telefonia e o aparelho televisor passaram a ter uma relevância muito grande na sociedade, revolucionando a comunicação e despertando a necessidade da realização de estudos acerca dos conceitos científicos que tornaram possíveis tais realizações.

Foi através do desenvolvimento de dispositivos que utilizam conceitos de eletromagnetismo que os problemas ligados a esse tipo de comunicação tornaram-se objeto de estudo de físicos e engenheiros. Em processos de comunicação semelhantes ao do telefone, eram observados problemas no envio da mensagem, onde não raramente ocorriam ruídos no sinal enviado e danos eram causados à informação, comprometendo o entendimento da mensagem por parte do receptor. Com base nesse cenário, diversos conceitos científicos, como os de entropia de informação, foram desenvolvidos a fim de melhor compreender os processos de comunicação (FERREIRA, 2015).

#### 3.1.1 ENTROPIA DE SHANNON

Em Teoria de Informação Clássica, a medida de informação é conhecida como entropia de Shannon ( $H(X)$ ), a qual pode ser interpretada de duas maneiras distintas: uma antes da obtenção do resultado de um experimento que gera símbolos aleatórios (fonte de informação) e outra após a sua obtenção. Antes da obtenção do resultado, a entropia pode ser entendida

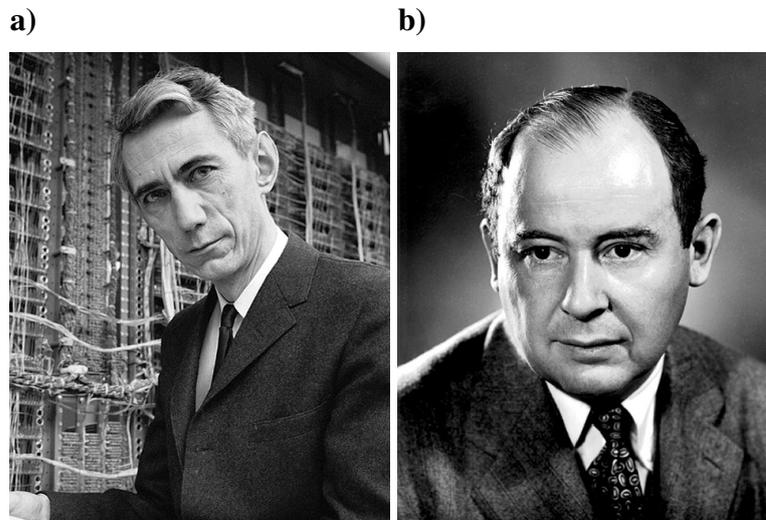


Figura 3.1: **a)** Claude Elwood Shannon (1916-2001) (YORKER, 2020), considerado o pai da Teoria de Informação; **b)** John von Neumann (1903-1957) (WIKIPEDIA, 2020), um dos grandes expoentes da Teoria de Informação, bem como um dos mais importantes matemáticos do século XX.

como uma maneira de medir o grau médio de incerteza da fonte de informação, sendo maior o valor da entropia quanto maior for o grau médio de incerteza acerca do resultado. Por outro lado, após o resultado ser obtido, a entropia pode ser entendida como o conteúdo informativo médio obtido a partir da fonte de informação, sendo maior o valor da entropia quanto maior for o conteúdo informativo médio obtido. Em outras palavras, o conceito de entropia está atrelado à ideia de que quanto mais incerto for o resultado de um experimento aleatório, maior será a informação que se irá obter ao observar sua ocorrência, permitindo dessa forma a quantificação da informação existente no sistema.

O engenheiro e matemático americano Claude Shannon é considerado o pai da Teoria de Informação, introduzindo em 1948 conceitos inovadores que deram origem a essa teoria (SHANNON, 1948). A informação contida em uma mensagem passou então a ser tratada como um fenômeno matemático sob a óptica da estatística e probabilidade. Dessa forma, seria possível associar valores probabilísticos a números binários bem como uma unidade de medida para a quantidade desses valores, surgindo assim a Teoria Matemática da Comunicação.

Segundo Shannon, a informação contida em uma mensagem, ou seja, o menor número de bits necessários para conter todos os valores ou significados desta mensagem, pode ser medida pela quantidade de entropia que, por sua vez, está relacionada à frequência do grupo de

símbolos que são transmitidos. A transmissão da informação é portanto feita através desses símbolos, sendo que a cada símbolo de uma fonte de informação  $X$  é possível associar uma variável probabilística. Matematicamente, a medida da entropia pode ser expressa por (NIELSEN; CHUANG, 2000):

$$H(X) \equiv - \sum_x p(x) \log p(x). \quad (3.1)$$

Podemos representar graficamente a entropia de um sistema através de um diagrama de Venn. Na Figura 3.2a, estão representados dois conjuntos numéricos:  $A$  e  $B$ , referentes a duas fontes de informação distintas. Caso queiramos representar a entropia  $H(X)$  da fonte de informação  $A$  (lembrando que  $X$  é o *ensemble*  $X = \{x, A_X, P_X\}$ ), devemos considerar todos os valores contidos apenas nesse conjunto, tal como mostra a região destacada em vermelho. Por outro lado, caso queiramos representar a entropia  $H(Y)$  da fonte de informação  $B$  (sendo  $Y = \{y, A_Y, P_Y\}$ ), devemos considerar apenas o conteúdo informativo do conjunto  $B$ , tal como mostra a região destacada em vermelho na Figura 3.2b. Vale frisar que nas figuras citadas também existem outras grandezas em cinza as quais serão posteriormente discutidas.

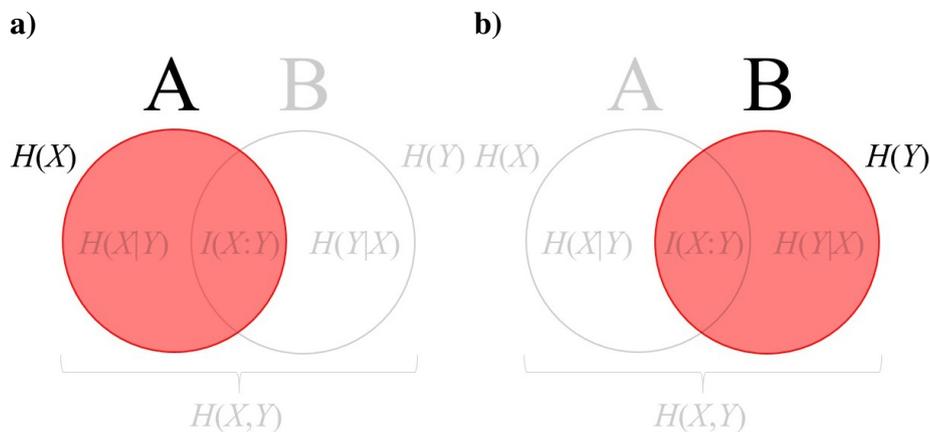


Figura 3.2: Diagrama de Venn onde é representado em vermelho **a)** a entropia  $H(X)$  da fonte de informação  $A$  e **b)** a entropia  $H(Y)$  da fonte de informação  $B$ .

## EXEMPLOS

Como simples exemplo de cálculo da entropia de um sistema, podemos supor uma moeda viciada cuja probabilidade de se obter o resultado “cara” após seu lançamento seja  $p_0 = 3/4$ .

A probabilidade de se obter o resultado “coroa” será portanto  $p_1 = 1/4$ . Ao calcularmos a entropia desse sistema (que consiste em uma fonte de informação  $X$ ), utilizando a Equação 3.1 com base 2 no logaritmo (por haver apenas 2 estados possíveis), teremos o seguinte resultado (MIRANDA, 2015):

$$H(X) = -\frac{3}{4}\log_2\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0,811. \quad (3.2)$$

Agora vamos supor uma moeda não viciada cujas probabilidades de se obter os resultados “cara” ou “coroa” sejam  $p_0 = p_1 = 1/2$ . Ao calcularmos a entropia desse sistema, teremos então:

$$H(X) = -\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \quad (3.3)$$

É possível notar que para o caso da moeda não viciada a entropia é máxima, visto que a incerteza sobre o resultado do lançamento também será máxima, não havendo portanto uma expectativa sobre qual resultado será mais provável. Por outro lado, para o exemplo da moeda viciada a entropia possui um menor valor, visto que há menor incerteza sobre o resultado que poderá ser obtido, uma vez que a expectativa de se obter o resultado “cara” é maior (3/4) do que o resultado “coroa” (1/4). Com isso, podemos concluir que a entropia está relacionada à equidade das probabilidades de cada resultado, sendo  $H(X)$  maior quanto mais próximas entre si forem as probabilidades  $p_i$ .

Essa característica pode ser melhor observada ao construirmos um gráfico da entropia em função das probabilidades. Para o exemplo da moeda, vamos supor uma probabilidade arbitrária do resultado ser “cara” ( $p_0 = p$ ) ou “coroa” ( $p_1 = 1 - p$ ) (PINTO, 2014). A equação da entropia torna-se então

$$H(X) = -p\log_2 p - (1 - p)\log_2 (1 - p). \quad (3.4)$$

Através da análise do gráfico da Figura (3.3), o qual mostra  $H(X) \times p$  de acordo com a Equação 3.4, é possível observar que de fato o valor de entropia torna-se máximo quando  $p_0 = p_1$ . Vale também frisar que para os casos extremos onde  $p = 0$  ou  $p = 1$ , já existe uma certeza absoluta acerca dos resultados que serão obtidos (0% ou 100% de probabilidade de ser “cara”, respectivamente). Dessa forma, a entropia (incerteza sobre o resultado) para esses casos

será nula (COVER; THOMAS, 2012).

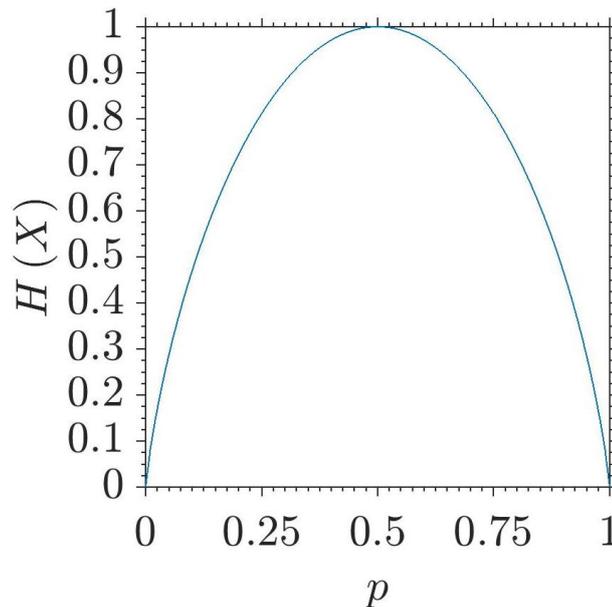


Figura 3.3: Entropia em função das probabilidades  $p$  de resultados para o lançamento de uma moeda viciada ( $p \neq 0,5$ ) e não viciada ( $p = 0,5$ ).

A entropia também pode ser de grande utilidade para o estudo do conteúdo informativo de textos. Neste exemplo, ficará mais evidente a interpretação da entropia como quantidade de conteúdo informativo médio que se obtém após uma medida ser efetuada em uma fonte de informação.

Inicialmente, vamos supor duas fontes de informação  $A$  e  $B$ , dadas pelas Frases 1 e 2, respectivamente, sendo que a Frase 2 é redundante e portanto transmite menos informação:

**Frase 1:** “A casa é azul. O chão é roxo”.

**Frase 2:** “A casa é azul. A casa é azul”.

Aqui desconsideraremos a acentuação e a pontuação das frases, bem como o fato das letras serem maiúsculas ou minúsculas. Apesar de cada frase possuir a mesma quantidade de letras  $N = 20$ , a quantidade de letras diferentes (símbolos na fonte), bem como a frequência com que as letras aparecem, é diferente para cada caso. Com base nessas características, podemos calcular o valor de entropia de cada conteúdo informativo.

As Tabelas 3.1 e 3.2 mostram, para as fontes de informação  $A$  e  $B$  respectivamente, os índices  $i$  de cada letra, os símbolos  $A_i$  existentes nas fontes (as letras), a quantidade de vezes  $n_i$  em que cada letra aparece, a probabilidade  $p_i$  do surgimento de cada letra ( $p_i = n_i/N$ ) e a

Tabela 3.1: Entropia da Frase 1.

$i$	$A_i$	$n_i$	$p_i$	$-p_i \log(p_i)$
1	A	5	0,25	0,34657
2	C	2	0,1	0,23026
3	E	2	0,1	0,23026
4	H	1	0,05	0,14979
5	L	1	0,05	0,14979
6	O	4	0,2	0,32189
7	R	1	0,05	0,14979
8	S	1	0,05	0,14979
9	U	1	0,05	0,14979
10	X	1	0,05	0,14979
11	Z	1	0,05	0,14979
				<b>SOMA = 2,17749</b>

Tabela 3.2: Entropia da Frase 2.

$i$	$A_i$	$n_i$	$p_i$	$-p_i \log(p_i)$
1	A	8	0,4	0,36652
2	C	2	0,1	0,23026
3	E	2	0,1	0,23026
4	L	2	0,1	0,23026
5	S	2	0,1	0,23026
6	U	2	0,1	0,23026
7	Z	2	0,1	0,23026
				<b>SOMA = 1,74807</b>

entropia individual  $-p_i \log(p_i)$  de cada símbolo. Dessa forma, a entropia total de cada fonte de informação pode ser calculada através da soma das entropias individuais de cada símbolo da fonte (Equação 3.1), ou seja, através da soma dos elementos da coluna de  $-p_i \log(p_i)$  (MIRANDA, 2015).

Podemos assim observar que o valor da entropia da fonte de informação  $A$  é maior do que o da fonte de informação  $B$ , ou seja, temos que o conteúdo informativo médio de  $A$  é maior do que o de  $B$ . De fato, a Frase 1 contém mais informação do que a Frase 2, uma vez que esta é redundante.

## PROPRIEDADES

Existem determinadas propriedades que são características da entropia (SHANNON, 1948).

A seguir discutiremos as principais:

1.  $H(X)$  será contínuo para todo  $p_i$ . Apesar da Equação 3.1 possuir descontinuidade apenas em  $x = 0$ , considera-se que  $0 \log(0) \equiv 0$ , tornando-a contínua. Tal suposição de fato é razoável, uma vez que  $\lim_{p(x) \rightarrow 0^+} -p(x) \log p(x) = 0$ .
2. Para uma fonte que gera  $N$  símbolos com a mesma probabilidade, como no exemplo da moeda não viciada anteriormente mencionado, tem-se que

$$H(X) = \log N, \quad (3.5)$$

sendo esta uma função monotonicamente crescente de  $N$ . Isso porque, para símbolos equiprováveis,  $p_1 = p_2 = \dots = p_N = \frac{1}{N}$ . A Equação 3.5 pode ser demonstrada a partir da Equação 3.1 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 H(X) &= -\sum_{i=1}^N p_i \log(p_i), \\
 H(X) &= -\sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \log\left(\frac{1}{N}\right), \\
 H(X) &= -N \frac{1}{N} \log\left(\frac{1}{N}\right), \\
 H(X) &= -\log\left(\frac{1}{N}\right), \\
 H(X) &= \log N.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Desse modo, para símbolos equiprováveis, a entropia aumenta com a quantidade de símbolos da fonte de maneira monotônica. Por exemplo, se considerarmos um dado não viciado de 6 faces, cujas probabilidades de cada uma das faces cair virada para cima será portanto de  $1/6$ , teremos então (utilizando para efeitos de comparação a mesma base 2 para o logaritmo do exemplo da moeda não viciada):

$$\begin{aligned}
 H(X) &= -\frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6}, \\
 H(X) &= -6\frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6} = -\log_2\frac{1}{6} = \log_2 6, \\
 H(X) &\approx 2,585.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Dessa forma, a entropia para o dado não viciado será maior do que para a moeda não viciada pois, apesar da ocorrência dos eventos serem equiprováveis, para o caso do dado existem mais símbolos na fonte (6 símbolos) do que para a moeda (2 símbolos). De fato, como existem mais símbolos na fonte, a incerteza sobre qual resultado será obtido também será maior (COVER; THOMAS, 2012).

3. A entropia sempre será positiva, isto é,

$$H(X) = H(p_1, \dots, p_N) = -\sum_{i=1}^N p_i \log(p_i) \geq 0. \tag{3.8}$$

Isso pode ser facilmente verificado, uma vez que  $0 \leq p_i \leq 1$  e portanto  $\log p_i \leq 0$ . Dessa forma, devido ao fato do conteúdo informativo ser positivo ( $-\log p_i \geq 0$ ), a sua média

também será.

Podemos desta seção concluir que a entropia de Shannon constitui uma poderosa ferramenta para a compreensão das propriedades de sistemas que geram símbolos aleatoriamente, sendo de grande utilidade para o estudo de sistemas em diversas áreas de conhecimento, uma vez que a teoria em questão possui aplicações diretas em uma vasta gama de tecnologias que envolvem armazenamento e processamento de informação, tais como na ciência da informação, biologia, economia etc., tornando-se portanto um método interdisciplinar.

### 3.1.2 ENTROPIA CONJUNTA

O conceito de entropia também pode ser estendido para duas ou mais variáveis aleatórias. Nesse sentido, a probabilidade conjunta quantifica a possibilidade de dois (ou mais) eventos independentes ocorrerem simultaneamente. Mais especificamente, para duas fontes de informação  $X = \{x, A_X, P_X\}$  e  $Y = \{y, A_Y, P_Y\}$ , por exemplo, a probabilidade conjunta quantifica a possibilidade de ocorrerem dois eventos independentes  $x \in X$  e  $y \in Y$  simultaneamente. Além disso, a probabilidade conjunta  $\{p(x, y), x \in A_X, y \in A_Y\}$  também satisfaz as propriedades da probabilidade do resultado estar entre 0 e 1 ( $0 \leq p(x, y) \leq 1, \forall (x, y) \in X \times Y$ ) e também de completudeza:  $\sum_{x,y} p(x, y) = 1$ .

Como exemplo, podemos supor duas fontes de informação  $A$  e  $B$  as quais possuem como eventos os símbolos do alfabeto, podendo desse modo interpretarmos como distribuição de probabilidade conjunta a possibilidade do surgimento de pares de letras como “ $aa$ ”, “ $ab$ ”, “ $ba$ ”, etc. Para a língua portuguesa, a probabilidade de surgir em uma palavra as letras “ $w$ ” e “ $a$ ” possui um baixo valor, o que pode indicar, por exemplo, um ruído na mensagem, um nome próprio ou possível erro de digitação (FERREIRA, 2015).

A entropia conjunta  $H(X, Y)$  pode ser expressa conforme a Equação 3.1 ao substituirmos  $p(x)$  por  $p(x, y)$  (NIELSEN; CHUANG, 2000):

$$H(X, Y) \equiv - \sum_{x,y} p(x, y) \log p(x, y). \quad (3.9)$$

Vale destacar que a entropia conjunta possui como uma de suas propriedades a simetria, isto

é,  $H(X, Y) = H(Y, X)$ , uma vez que a interseção de probabilidades entre os conjuntos é a mesma:  $P(A \cap B) = P(B \cap A)$ . Já para um sistema com  $n$  variáveis aleatórias, a equação da entropia conjunta pode ser generalizada da seguinte maneira:

$$H(X_1, X_2, \dots, X_n) \equiv - \sum_{x_1} \sum_{x_2} \dots \sum_{x_n} p(x_1, x_2, \dots, x_n) \log p(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3.10)$$

Outra propriedade que merece destaque é a de que para variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  independentes, ou seja, com símbolos com probabilidades conjuntas independentes ( $p(x, y) = p(x) \cdot p(y)$ ), a entropia passa a ser aditiva, isto é:  $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$ . Tal propriedade pode ser demonstrada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= - \sum_{x,y} p(x, y) \log p(x, y), \\ H(X, Y) &= - \sum_{x,y} p(x)p(y) \log[p(x)p(y)], \\ H(X, Y) &= - \sum_{x,y} p(x)p(y) [\log p(x) + \log p(y)], \\ H(X, Y) &= - \sum_{x,y} p(x)p(y) \log p(x) - \sum_{x,y} p(x)p(y) \log p(y), \\ H(X, Y) &= - \sum_x p(x) \log p(x) - \sum_y p(y) \log p(y), \\ H(X, Y) &= H(X) + H(Y). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Podemos também representar graficamente a entropia conjunta em um diagrama de Venn, tal como mostra a região destacada em vermelho na Figura 3.4.

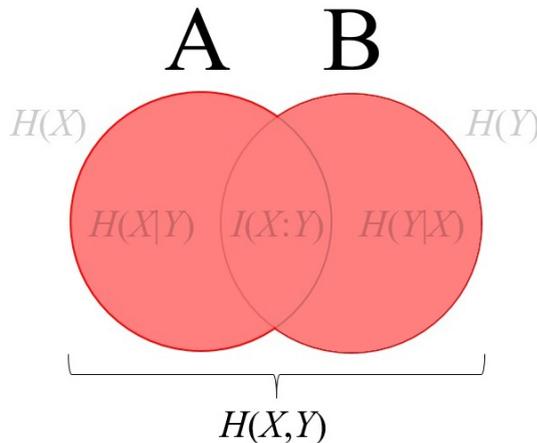


Figura 3.4: Entropia conjunta (região destacada em vermelho) entre as fontes de informação  $A$  e  $B$ .

### 3.1.3 ENTROPIA CONDICIONADA E ENTROPIA CONDICIONAL

Outra grandeza de grande importância na Teoria de Informação Clássica é a denominada entropia condicional. Aqui, iremos definir uma outra entropia considerando ainda variáveis aleatórias com eventos nos quais  $x \in X$  e  $y \in Y$ , porém não mais independentes. Mais especificamente, definiremos uma grandeza que mede a incerteza de  $X$  quando conhecemos  $Y$  ou vice-versa.

#### ENTROPIA CONDICIONADA

A entropia condicionada quantifica a entropia dos valores de  $X$  condicionada a um único valor específico de  $Y$ , ou seja,  $Y = y$ . Como exemplo, utilizando o alfabeto da língua portuguesa como fontes  $X$  e  $Y$  de informação, se  $X = \zeta$ , a variável  $Y$  fica condicionada ao surgimento das vogais “a”, “o” e “u”. Do contrário, caso outra letra apareça, este pode ser considerado um evento de alto interesse, indicando por exemplo um possível ruído na mensagem ou um possível erro de digitação (FERREIRA, 2015).

Já a probabilidade de ocorrência de um determinado valor  $x$  condicionado à ocorrência de um determinado valor  $y$  pode ser expressa como  $p(x|y)$ . Dessa forma,  $H(X|Y = y)$  (a entropia de  $X$  condicionada a um único valor  $Y = y$ ) pode ser obtida a partir da Equação 3.1 substituindo  $p(x)$  por  $p(x|y)$ , o que leva à seguinte expressão (NIELSEN; CHUANG, 2000):

$$H(X|Y = y) \equiv - \sum_x p(x|y) \log p(x|y). \quad (3.12)$$

Vale frisar que as probabilidades condicionadas  $\{p(x|y), x \in A_x\}$  satisfazem a definição original de entropia, uma vez que verificam as propriedades básicas de probabilidade ( $0 \leq p(x|y) \leq 1$ ) e completudeza ( $\sum_x p(x|y) = 1$ ) para qualquer  $y \in A_Y$ .

## ENTROPIA CONDICIONAL

A entropia condicional  $H(X|Y)$  é obtida através da média da entropia condicionada sobre todos os valores de  $y$ . Assim sendo, temos a seguinte expressão (NIELSEN; CHUANG, 2000):

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= \sum_y p(y) H(X|Y = y), \\ H(X|Y) &= - \sum_{x,y} p(y) p(x|y) \log p(x|y). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Além disso, como  $p(x|y)$  pode ser definido como

$$p(x|y) = \frac{p(y, x)}{p(x)} = \frac{p(x, y)}{p(y)}, \quad (3.14)$$

tem-se então

$$\begin{aligned} p(y, x) &= p(x) p(x|y); \\ p(x, y) &= p(y) p(x|y), \end{aligned} \quad (3.15)$$

e substituindo portanto 3.15 em 3.13, a expressão para  $H(X|Y)$  assume a seguinte forma:

$$H(X|Y) = - \sum_{x,y} p(x, y) \log p(x|y). \quad (3.16)$$

Substituindo desta vez 3.14 em 3.16, chegamos ao seguinte resultado (NETO, 2018):

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= - \sum_{x,y} p(x, y) \log \left[ \frac{p(x,y)}{p(y)} \right], \\ H(X|Y) &= - \sum_{x,y} p(x, y) [\log p(x, y) - \log p(y)], \\ H(X|Y) &= - \sum_{x,y} p(x, y) \log p(x, y) + \sum_{x,y} p(x, y) \log p(y), \\ H(X|Y) &= - \sum_{x,y} p(x, y) \log p(x, y) + \sum_y p(y) \log p(y), \\ H(X|Y) &= H(X, Y) - H(Y). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Podemos novamente representar de maneira gráfica a entropia condicional de uma fonte de informação através de um diagrama de Venn. Na Figura 3.5a, está representada em vermelho a entropia condicional  $H(X|Y)$  da fonte de informação  $A$  quando se conhece  $H(Y)$ . De maneira análoga, na Figura 3.5b está representada em vermelho a entropia condicional  $H(Y|X)$

da fonte de informação  $B$  quando se conhece  $H(X)$ .

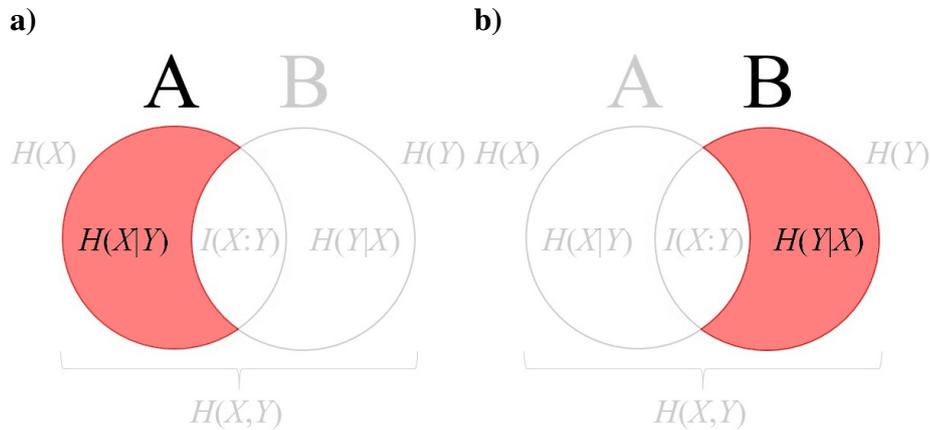


Figura 3.5: Regiões destacadas em vermelho: em **a)** entropia condicional  $H(X|Y)$  da fonte de informação  $A$ , uma vez que se conhece  $H(Y)$ ; em **b)** entropia condicional  $H(Y|X)$  da fonte de informação  $B$ , uma vez que se conhece  $H(X)$ .

Vale salientar que uma das propriedades da entropia condicional é a positividade, ou seja,  $H(X|Y) \geq 0$ . Isso significa que o fato da entropia de  $X$  estar condicionada aos valores de  $Y$  não perde o sentido de ganho de informação. Tal propriedade pode ser facilmente verificada através da Equação 3.13. Isso porque como  $0 \leq p(x|y) \leq 1$ ,  $\log p(x|y) \leq 0$  e então a Equação 3.13 torna-se maior ou igual a zero.

Outra importante propriedade consiste no fato de que geralmente  $H(X|Y) \neq H(Y|X)$ , uma vez que a entropia condicional de  $X$  a  $Y$  depende das probabilidades  $p(y)$ , bem como a entropia condicional de  $Y$  a  $X$  depende das probabilidades  $p(x)$ , sendo que essas são arbitrárias entre si, ou seja, geralmente tem-se que  $p(x) \neq p(y)$ .

Uma importante relação para a entropia conjunta também pode ser definida com base na entropia condicional através da seguinte relação (NIELSEN; CHUANG, 2000):

$$H(X, Y) = H(X|Y) + H(Y) = H(Y|X) + H(X). \quad (3.18)$$

A Equação 3.18 pode ser demonstrada substituindo o  $p(x, y)$  da Equação 3.9 pela expressão da

Equação 3.15. Dessa forma teremos então:

$$\begin{aligned}
 H(X, Y) &= - \sum_{x,y} p(y)p(x|y) \log [p(y) p(x|y)], \\
 H(X, Y) &= - \sum_{x,y} p(y)p(x|y) [\log p(y) + \log p(x|y)], \\
 H(X, Y) &= - \sum_{x,y} p(y)p(x|y) \log p(y) - \sum_{x,y} p(y)p(x|y) \log p(x|y), \\
 H(X, Y) &= - \sum_{x,y} p(y) \frac{p(x,y)}{p(y)} \log p(y) - \sum_{x,y} p(y)p(x|y) \log p(x|y), \quad (3.19) \\
 H(X, Y) &= - \sum_{x,y} p(x,y) \log p(y) - \sum_{x,y} p(y)p(x|y) \log p(x|y), \\
 H(X, Y) &= - \sum_y p(y) \log p(y) - \sum_{x,y} p(x,y) \log p(x|y), \\
 H(X, Y) &= H(Y) + H(X|Y).
 \end{aligned}$$

### 3.1.4 INFORMAÇÃO MÚTUA

A informação mútua  $I(X : Y)$  é outra grandeza da Teoria de Informação a qual é capaz de medir a quantidade de informação em comum entre duas variáveis aleatórias de  $X$  e  $Y$ , referentes a duas fontes de informação distintas  $A$  e  $B$ , por exemplo, sendo que este conceito também pode ser estendido para mais de duas variáveis. Ao se observar o diagrama de Venn da Figura 3.6, por exemplo, é possível notar que a informação mútua entre  $X$  e  $Y$  (região destacada em vermelho), consiste na interseção das entropias das variáveis aleatórias de cada fonte de informação.

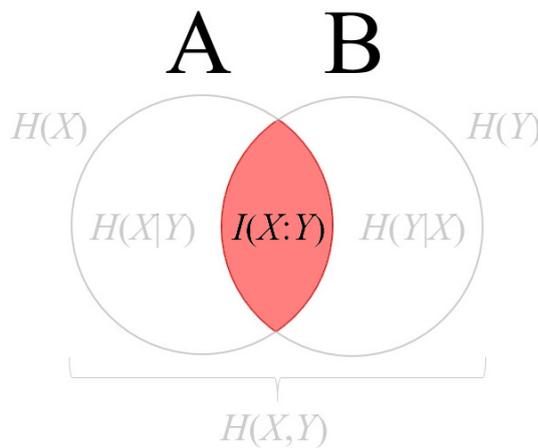


Figura 3.6: Informação mútua  $I(X : Y)$  entre duas fontes de informação  $A$  e  $B$ .

Através da análise do diagrama de Venn, também podemos definir  $I(X : Y)$  de duas

maneiras diferentes e com expressões equivalentes: a primeira delas consiste em subtrair a entropia condicional de  $X$  quando se conhece  $Y$  da entropia de  $X$ , ou então subtrair a entropia condicional de  $Y$  quando se conhece  $X$  da entropia de  $Y$ . Assim teremos:

$$I(X : Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X). \quad (3.20)$$

A segunda maneira de definir  $I(X : Y)$  consiste na soma das entropias de  $X$  e de  $Y$  (perceba que aqui a informação em comum será somada duas vezes) e posteriormente na subtração da entropia conjunta de  $X$  e  $Y$ , restando apenas a entropia em comum entre essas variáveis. Partindo deste raciocínio, teremos então a seguinte expressão (COVER; THOMAS, 2012):

$$I(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y). \quad (3.21)$$

A informação mútua também mede o quanto duas ou mais variáveis aleatórias estão correlacionadas, sendo que essa correlação pode ser interpretada como a redução de incerteza de  $X$  devido o conhecimento de  $Y$ , ou vice-versa. Tal fato pode ser verificado reescrevendo a Equação 3.21 como (PINTO, 2014):

$$\begin{aligned} I(X : Y) &= H(X) + H(Y) - H(X, Y), \\ I(X : Y) &= \underbrace{-p(x)}_{\equiv -p(x,y)} \log p(x) - \underbrace{p(y)}_{\equiv -p(x,y)} \log p(y) + p(x, y) \log p(x, y), \\ I(X : Y) &= -p(x, y) \log p(x) - p(x, y) \log p(y) + p(x, y) \log p(x, y), \\ I(X : Y) &= -p(x, y) [\log p(x) + \log p(y)] + p(x, y) \log p(x, y), \\ I(X : Y) &= p(x, y) \log p(x, y) - p(x, y) \log p(x) p(y), \\ I(X : Y) &= p(x, y) [\log p(x, y) - \log p(x) p(y)], \\ I(X : Y) &= p(x, y) \log \left[ \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} \right], \end{aligned} \quad (3.22)$$

tal que  $p(x, y) \in U$  e  $U \equiv \{p_i\} \cup \{p_i\}$ . Caso não haja correlação entre as variáveis,  $p(x, y) = p(x)p(y)$  e então  $I(X : Y)$  torna-se nulo. Por outro lado, caso haja correlação entre as variáveis,  $p(x, y) \neq p(x)p(y)$  e então  $I(X : Y) \neq 0$ .

## 3.2 TEORIA DE INFORMAÇÃO QUÂNTICA

Até o momento foram discutidos os principais conceitos referentes à Teoria da Informação Clássica. Estes serão de suma importância para que possamos fazer uma discussão concisa acerca da Teoria da Informação Quântica, uma vez que os conceitos clássicos possuem análogos quânticos que serão objeto de estudo nesta primeira parte da Tese. Na seção anterior, demonstramos que a entropia de Shannon é capaz de quantificar, para sistemas clássicos, a incerteza ou conteúdo informativo médio, associado à distribuição de probabilidades, de experimentos com resultados aleatórios. Para o caso da entropia de von Neumann, a entropia adquire um papel muito semelhante, uma vez que esta é capaz de estimar a incerteza acerca dos possíveis resultados para o caso de sistemas quânticos. Para tanto, substituem-se as distribuições de probabilidade e valores clássicos por operadores densidade. Para o caso clássico, temos um conjunto de *valores bem definidos*  $\{x_i\}_{i=1}^n$  associados às suas respectivas probabilidades  $\{p_i\}_{i=1}^n$ . Já para o caso quântico, temos um conjunto de *estados quânticos*  $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^n$  associados às suas respectivas probabilidades (autovalores)  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ , ou seja, a matriz densidade  $\rho = \sum_i \lambda_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$  é análoga a um *ensemble* clássico, porém com estados quânticos ao invés de valores clássicos bem definidos. A peculiaridade para o caso quântico, no entanto, consiste no fato dos estados não necessariamente serem ortogonais. Desse modo, além de incerteza clássica, existe também uma incerteza quântica associada à capacidade de distinção dos estados não-ortogonais. Dessa forma, o estudo de sistemas quânticos torna-se muito mais complexo, e fenômenos característicos como por exemplo o fato da entropia condicional ser negativa e parte da informação mútua ser inacessível, como será discutido posteriormente, podem ocorrer.

### 3.2.1 ENTROPIA DE VON NEUMANN

A equação da entropia de von Neumann surgiu em 1927 como uma extensão da entropia clássica de Boltzmann e Gibbs para a mecânica quântica. Existem basicamente duas expressões equivalentes na qual a entropia de von Neumann  $S(\rho)$  pode ser descrita, sendo a primeira delas através de operadores densidade e a segunda através da soma de autovalores em uma base

ortogonal. Para o primeiro caso, temos a seguinte expressão (NIELSEN; CHUANG, 2000):

$$S(\rho) = -Tr(\rho \log \rho), \quad (3.23)$$

sendo frequentemente o logaritmo calculado na base 2. Já a segunda expressão pode ser definida da seguinte maneira (NIELSEN; CHUANG, 2000):

$$S(\rho) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i. \quad (3.24)$$

Em 3.24, temos  $S(\rho)$  expressa em termos de seus autovalores em uma base ortogonal, tal que  $\lambda_i$  representa a probabilidade de ocorrência de cada estado  $|i\rangle \langle i|$  possível. Essa expressão da entropia geralmente é mais utilizada que a primeira em virtude de sua praticidade, visto que a dificuldade em obter seu resultado se resume em descobrir os autovalores do operador densidade em sua representação ortogonal.

A Equação 3.24 pode ser deduzida a partir da Equação 3.23. Seja  $\rho = \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|$  e sabendo que  $\log\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right) = \sum_i \log(\lambda_i) |i\rangle \langle i|$ , tal como pode ser visto na Equação B.2 do Apêndice B, teremos então:

$$\begin{aligned} S(\rho) &= -Tr\left[\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right) \log\left(\sum_j \lambda_j |j\rangle \langle j|\right)\right], \\ S(\rho) &= -\sum_k \langle k| \left[ \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| \log\left(\sum_j \lambda_j |j\rangle \langle j|\right) \right] |k\rangle, \\ S(\rho) &= -\sum_k \langle k| \left[ \sum_{i,j} \lambda_i |i\rangle \langle i| \log(\lambda_j |j\rangle \langle j|) \right] |k\rangle, \\ S(\rho) &= -\sum_k \langle k| \left[ \sum_{i,j} \lambda_i \log(\lambda_j) |i\rangle \langle i| |j\rangle \langle j| \right] |k\rangle, \\ S(\rho) &= -\sum_k \langle k| \left[ \sum_{i,j} \lambda_i \log(\lambda_j) |i\rangle \delta_{i,j} \langle j| \right] |k\rangle, \\ S(\rho) &= -\sum_k \langle k| \left[ \sum_i \lambda_i \log(\lambda_i) |i\rangle \langle i| \right] |k\rangle, \\ S(\rho) &= -\sum_{i,k} \lambda_i \log(\lambda_i) \delta_{k,i} \delta_{i,k}, \\ S(\rho) &= -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Não obstante, a Equação 3.23 também pode ser deduzida a partir da Equação 3.24. Sabendo que uma matriz densidade pode ser escrita em função de seus autovalores como uma

matriz diagonal da seguinte maneira

$$\rho = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

partindo da Equação 3.24 teremos então:

$$\begin{aligned} S(\rho) &= -\sum_i \lambda_i \log \lambda_j, \\ -S(\rho) &= \lambda_1 \log \lambda_1 + \lambda_2 \log \lambda_2 + \dots + \lambda_n \log \lambda_n, \\ -S(\rho) &= Tr \left[ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \log \lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \log \lambda_n \end{pmatrix} \right], \\ -S(\rho) &= Tr \left[ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \log \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \right], \\ S(\rho) &= -Tr(\rho \log \rho). \end{aligned} \quad (3.27)$$

## EXEMPLOS

A fim de melhor elucidar as características peculiares da entropia de von Neumann, propomos a análise de alguns exemplos comparando-os com a entropia de Shannon (MIRANDA, 2015):

1. Seja  $\rho = |0\rangle\langle 0| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , tendo portanto autovalores 1 e 0, a entropia de von Neumann  $S(\rho)$  (Equação 3.24) e de Shannon  $H(p)$  (Equação 3.1) terão os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} S(\rho) &= -1\log_2 1 - 0\log_2 0 = 0. \\ H(p) &= -1\log_2 1 - 0\log_2 0 = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Neste primeiro exemplo, a entropia nula de  $S(\rho)$  indica que o sistema está no estado  $|0\rangle$  com probabilidade 1 e em outros possíveis estados com probabilidade 0, analogamente ao caso clássico de entropia  $H(p)$  nula, onde um dos símbolos tem probabilidade 1 e os demais 0. Nesse caso  $\rho$  representa um estado puro, ou seja, não há uma mistura estatística, e portanto nenhuma incerteza acerca do resultado.

2. Seja  $\rho = \frac{1}{2} |0\rangle \langle 0| + \frac{1}{2} |1\rangle \langle 1| = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ , a entropia de von Neumann  $S(\rho)$  e de Shannon  $H(p)$  terão os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} S(\rho) &= -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} = 1. \\ H(p) &= -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} = 1. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Como será posteriormente discutido, este é um caso de máxima entropia denominado *estado maximamente misto*.

3. Seja  $\rho = \frac{1}{2} |0\rangle \langle 0| + \frac{1}{2} |+\rangle \langle +| = \frac{1}{2} |0\rangle \langle 0| + \frac{1}{2} \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \frac{\langle 0| + \langle 1|}{\sqrt{2}} \right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ . Neste caso, podemos perceber que  $\rho$  não é uma matriz ortogonal, o que impossibilita a perfeita distinção entre seus estados. Desse modo, precisamos determinar seus autovalores ( $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$  e  $\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$ ), e então calcular as entropias, utilizando para o caso clássico as probabilidades de mistura  $p_1 = p_2 = 1/2$ . A entropia de von Neumann  $S(\rho)$  e de Shannon  $H(p)$  terão então os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} S(\rho) &= -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \log_2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \log_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \approx 0.41. \\ H(p) &= -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} = 1. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Nesse caso a diferença entre as entropias fica evidente.

## PROPRIEDADES

Algumas propriedades análogas ao caso clássico também podem ser verificadas para o caso quântico (MIRANDA, 2015):

1. Convenciona-se também que  $0 \log 0 \equiv 0$ , tornando  $S(\rho)$  uma função contínua;

2. Assim como ocorre para o caso clássico, o máximo valor possível para a entropia de um sistema ocorre quando há a mesma probabilidade para os possíveis estados resultados, bem como também depende da dimensão do espaço de estados desse sistema. Nesse sentido, um sistema com distribuição equiprovável entre os possíveis estados resultados terá igual probabilidade de ocorrência e seus autovalores serão  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N = 1/N$ , tal que  $N$  é a dimensão do espaço de estados. A equação 3.24 fica então da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S(\rho) &= -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i = -\sum_i \frac{1}{N} \log \left( \frac{1}{N} \right), \\ S(\rho) &= -N \frac{1}{N} \log \left( \frac{1}{N} \right) = -\log \left( \frac{1}{N} \right) = \log(N). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Nesse caso dizemos que o estado é *maximamente misto*. Dessa forma, a entropia será maior quanto maior for a equidade entre seus autovalores, bem como será maior também quanto maior for o espaço de estados do sistema (mais possíveis resultados houverem).

### 3.2.2 ANÁLOGOS QUÂNTICOS DAS ENTROPIAS CLÁSSICAS

Nesta seção discutiremos os análogos quânticos da entropia conjunta, entropia condicional e informação mútua. Veremos aqui que há similaridades entre os casos clássico e quântico.

#### ENTROPIA CONJUNTA

A entropia conjunta dentro de um contexto quântico  $S(\rho_{AB})$  pode ser calculada sobre um sistema composto por dois ou mais subsistemas. Para o caso de dois subsistemas  $A$  e  $B$ , por exemplo, podemos substituir  $\rho$  por  $\rho_{AB}$  na Equação 3.23 e então teremos a seguinte equação (NIELSEN; CHUANG, 2000):

$$S(\rho_{AB}) = -Tr(\rho_{AB} \log \rho_{AB}), \quad (3.32)$$

onde  $S(\rho_{AB}) \equiv S(A, B) \equiv S_{AB}$ . Ao lidarmos com subsistemas, utilizaremos também a seguinte notação:  $S(\rho_A) \equiv S(A) \equiv S_A$  e  $S(\rho_B) \equiv S(B) \equiv S_B$ .

Uma importante relação que pode ser obtida a partir da Equação 3.32 para estados sepa-

ráveis é a seguinte:

$$S(\rho_A \otimes \rho_B) = S(A, B) = S(A) + S(B), \quad (3.33)$$

onde a soma está relacionada à propriedade da função logarítmica. Sabendo que  $\rho_A = \sum_i \lambda_i^a |i_a\rangle \langle i_a|$ ,  $\rho_B = \sum_j \lambda_j^b |j_b\rangle \langle j_b|$  e portanto o produto tensorial torna-se  $\rho_A \otimes \rho_B = \rho_{AB} = \sum_{i,j} |i_a j_b\rangle \lambda_i^a \lambda_j^b \langle i_a j_b|$ , bem como que  $\log \left( \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| \right) = \sum_{i,j} \log \left( \lambda_i^a \lambda_j^b \right) |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b|$ , tal como pode ser visto nas Equações B.3 e B.4 do Apêndice B, a dedução da Equação 3.33 pode ser feita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} S(\rho_A \otimes \rho_B) &= -Tr[\rho_{AB} \log \rho_{AB}], \\ S(\rho_A \otimes \rho_B) &= -Tr \left[ \sum_{i,j} |i_a j_b\rangle \lambda_i^a \lambda_j^b \langle i_a j_b| \log \left( \sum_{i,j} |i_a j_b\rangle \lambda_i^a \lambda_j^b \langle i_a j_b| \right) \right], \\ S(\rho_A \otimes \rho_B) &= -Tr \left[ \sum_{i,j} |i_a j_b\rangle \lambda_i^a \lambda_j^b \langle i_a j_b| \sum_{i,j} |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| \log \left( \lambda_i^a \lambda_j^b \right) \right], \\ S(\rho_A \otimes \rho_B) &= -Tr \left[ \sum_{i,j} |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| \lambda_i^a \lambda_j^b \log \left( \lambda_i^a \lambda_j^b \right) \right], \\ S(\rho_A \otimes \rho_B) &= \sum_{k,l} \sum_{i,j} \langle k_a l_b | |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b | |k_a l_b\rangle \lambda_i^a \lambda_j^b \log \left( \lambda_i^a \lambda_j^b \right), \\ S(\rho_A \otimes \rho_B) &= \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b \left[ \log \left( \lambda_i^a \right) + \log \left( \lambda_j^b \right) \right], \\ S(\rho_A \otimes \rho_B) &= \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b \log \left( \lambda_i^a \right) + \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b \log \left( \lambda_j^b \right), \\ S(\rho_A \otimes \rho_B) &= \underbrace{\sum_j \lambda_j^b \sum_i \lambda_i^a \log \left( \lambda_i^a \right)}_1 + \underbrace{\sum_i \lambda_i^a \sum_j \lambda_j^b \log \left( \lambda_j^b \right)}_1, \\ S(\rho_A \otimes \rho_B) &= \sum_j \lambda_j^b \log \left( \lambda_j^b \right) + \sum_i \lambda_i^a \log \left( \lambda_i^a \right), \\ S(\rho_A \otimes \rho_B) &= S(A) + S(B). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Vale também frisar que uma importante propriedade da entropia conjunta — e que será explorada em nossos cálculos ao decorrer do Capítulo 4 — é a de que, para sistemas puros, a entropia conjunta de um ou mais subsistemas (independentemente da ordem dos subsistemas) é igual à entropia conjunta dos demais subsistemas (independentemente da ordem dos subsistemas). Dessa forma, para um sistema puro composto por quatro subsistemas  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , e  $d$ , por

exemplo, tem-se que:

$$\begin{aligned}
S_a &= S_{bcd}; \\
S_{abc} &= S_d; \\
S_{ab} &= S_{cd}; \\
S_{ba} &= S_{dc}; \\
S_{db} &= S_{ac},
\end{aligned} \tag{3.35}$$

bem como todas as demais possíveis combinações, desde que todos os subsistemas estejam incluídos na expressão.

## ENTROPIA CONDICIONAL

Através de uma analogia com a entropia de Shannon, podemos definir a entropia condicional quântica para sistemas quânticos compostos. Assim como também ocorre para o caso clássico (Equação 3.17), para o caso quântico a entropia condicional  $S(A|B)$  de um subsistema  $A$  com relação a um subsistema  $B$  pode ser definida como sendo a entropia conjunta entre ambos os subsistemas  $S(A, B)$  menos a entropia  $S(B)$  do subsistema  $B$  (NIELSEN; CHUANG, 2000):

$$S(A|B) \equiv S(A, B) - S(B), \tag{3.36}$$

sendo  $S(A|B) \equiv S(\rho_{A|B}) \equiv S_{A|B}$ .

Apesar das Equações 3.17 e 3.36 serem semelhantes, dada a particularidade da mecânica quântica no que se refere a medidas, algumas das propriedades da entropia de Shannon não são satisfeitas pela entropia de von Neumann. Sejam duas fontes de informação as quais geram valores aleatórios  $X$  e  $Y$ , por exemplo, a desigualdade  $H(X) \leq H(X, Y)$  é uma propriedade satisfeita para sistemas clássicos, visto que a quantidade de símbolos em  $X$  será sempre menor ou igual a de  $X + Y$ . Já para o caso quântico no entanto, esta propriedade não necessariamente é satisfeita. Para estados emaranhados como o estado de Bell  $|\Phi_{A,B}^+\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$  por exemplo, teremos resultados exóticos de entropia condicional negativa ao utilizarmos a Equação 3.36. Seja  $\rho_{AB} = |\Phi_{A,B}^+\rangle\langle\Phi_{A,B}^+|$  e portanto  $\rho_B = Tr_A(\rho_{AB}) = I/2$ , conseqüentemente

teremos (MIRANDA, 2015):

$$\begin{aligned}
 S(A, B) &= S(\rho_{AB}) = -Tr(\rho_{AB} \log_2 \rho_{AB}) = 0; \\
 S(B) &= S(\rho_B) = -Tr(\rho_B \log_2 \rho_B) = -Tr\left(\frac{I}{2} \log_2 \frac{I}{2}\right) = 1; \\
 S(A|B) &= S(A, B) - S(B) = 0 - 1 = -1.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Segundo Michał Horodecki, Jonathan Oppenheim e Andreas Winter (HORODECKI; OPPENHEIM; WINTER, 2005), o valor negativo para a entropia condicional pode ser interpretado como a capacidade de um receptor — que já possui conhecimento sobre um subsistema  $A$  — obter a informação restante referente ao subsistema  $B$  utilizando para tanto apenas comunicação clássica.

#### INFORMAÇÃO MÚTUA

Para sistemas clássicos, a informação mútua consiste em uma medida de quanto dois ou mais sistemas estão classicamente correlacionados, havendo duas maneiras diferentes e equivalentes desta medida ser obtida. A primeira forma de calcular a informação mútua é através da Equação 3.21, onde levamos em conta as entropias de cada subsistema bem como a entropia conjunta. A segunda maneira é através da Equação 3.20, onde consideramos a entropia e a entropia condicional dos subsistemas.

Em se tratando de sistemas quânticos, podemos obter expressões análogas às equações para o caso clássico. A primeira expressão da informação mútua para sistemas quânticos  $S(A : B)$  pode ser obtida através de uma analogia à Equação 3.21 utilizando a entropia de von Neumann ao invés da entropia de Shannon, onde  $S(A : B)$  é igual à soma das entropias dos subsistemas  $A$  e  $B$  menos a entropia conjunta  $S(A, B)$  de ambos os subsistemas (NIELSEN; CHUANG, 2000):

$$S(A : B) \equiv S(A) + S(B) - S(A, B), \tag{3.38}$$

sendo  $S(A : B) \equiv S(\rho_{A:B}) \equiv S_{A:B}$ .

A segunda expressão da informação mútua para sistemas quânticos é análoga à Equação

3.20, sendo portanto expressa da seguinte maneira (NIELSEN; CHUANG, 2000):

$$S(A : B) \equiv S(A) - S(A|B) = S(B) - S(B|A). \quad (3.39)$$

É importante observar que a Equação 3.39 depende da entropia condicional do sistema, ou seja, depende do conhecimento de uma de suas partes. Em termos experimentais, uma série de medidas feitas em laboratório são necessárias para se estimar a entropia condicional de um sistema quântico, as quais incluem características peculiares da mecânica quântica como por exemplo as bases necessárias para se efetuar as medidas. A seguir serão discutidas as particularidades inerentes à obtenção da entropia condicional em procedimentos laboratoriais e o surgimento de duas novas grandezas neste processo.

### 3.2.3 CORRELAÇÃO CLÁSSICA E DISCÓRDIA QUÂNTICA

Ao lidar com sistemas quânticos, duas novas características podem ser observadas na formação mútua entre dois ou mais subsistemas: a *discórdia quântica* e a *correlação clássica*. Trataremos desses assuntos nesta seção partindo do princípio de entropia condicional e informação mútua através de medidas projetivas, sendo que para sistemas quânticos a informação mútua, quando existir, é composta tanto de correlações clássicas quanto quânticas.

#### ENTROPIA CONDICIONAL BASEADA EM MEDIDAS

É possível definir uma expressão da informação mútua para sistemas quânticos levando em consideração o conhecimento de uma das partes de um sistema composto  $A + B$  através de um conjunto de medidas locais feitas em uma das partes do sistema. Mais especificamente, vamos considerar medidas locais em uma das partes de um sistema composto, bem como a perturbação no estado do sistema provocada pelo processo de medida. Neste caso, os resultados obtidos geralmente são diferentes dos da Equação 3.36. Isso ocorre devido ao fato do processo de medida quântico ser diferente do clássico por dois motivos: o primeiro pelo fato do resultado de uma medida variar conforme a base utilizada em sua representação, e o segundo devido ao fato de uma medida ser capaz de alterar o estado do sistema.

Para definirmos a expressão da entropia condicional através de medidas, vamos considerar um sistema quântico composto  $A + B$  bem como um aparato medidor que age localmente em  $B$ , sendo que o aparato em questão pode ser representado através de medidas projetivas de operadores  $\Pi_B$ . Dessa forma, tem-se que o conjunto de todas as possíveis medidas poderá ser expresso por  $\{\Pi_B^i\}$ . Assim sendo, logo após uma medida ser efetuada, o estado total  $A + B$  do sistema poderá ser expresso da seguinte maneira:

$$\rho_{AB}^i = \frac{(I \otimes \Pi_B^i) \rho_{AB} (I \otimes \Pi_B^i)}{\text{Tr} [(I \otimes \Pi_B^i) \rho_{AB} (I \otimes \Pi_B^i)]}, \quad (3.40)$$

onde o fator de normalização  $\text{Tr} [(I \otimes \Pi_B^i) \rho_{AB} (I \otimes \Pi_B^i)]$  é a probabilidade de ocorrência do estado  $\rho_{AB}^i$ , ou seja:  $p_i \equiv \text{Tr} [(I \otimes \Pi_B^i) \rho_{AB} (I \otimes \Pi_B^i)]$ . Dessa forma, o análogo quântico à entropia condicional de um subsistema  $A$  condicionado ao conhecimento de um subsistema  $B$ , obtido através de medidas, pode ser calculado através do somatório dos produtos de  $p_i$  com as entropias conjuntas de von Neumann do sistema  $A + B$  após as medidas  $\Pi_B^i$  serem efetuadas de acordo com a seguinte expressão (BENNETT; DIVINCENZO, 2000):

$$S(A|\Pi_B^i) = \sum_i p_i S(\rho_{AB}^i). \quad (3.41)$$

Desse modo, temos uma expressão a qual permite a obtenção da entropia condicional através de medições feitas em laboratório, bem como que possibilita o cálculo das correlações clássicas em sistemas quânticos, tal como será posteriormente discutido.

#### INFORMAÇÃO MÚTUA BASEADA EM MEDIDAS

Através da utilização da Equação 3.41, a informação mútua da Equação 3.20 pode ser generalizada para sistemas quânticos. Neste caso, a informação mútua baseada em medidas  $J(A : B)$  pode ser expressa como:

$$J(A : B) = S(A) - S(A|\Pi_B^i). \quad (3.42)$$

Vale frisar que o resultado da Equação 3.42 depende de qual projetor  $\Pi_B^i$  será utilizado, ou seja, de qual medida será feita. Desse modo, uma pergunta que pode ser feita é qual operador deveremos utilizar.

Como será discutido a seguir, o cálculo da informação mútua baseada em medidas permitirá estimar uma grandeza denominada *correlação clássica*, a qual é capaz de determinar o quanto dois subsistemas quânticos estão classicamente correlacionados, sendo de grande importância para o desenvolvimento dos estudos que serão apresentados no próximo capítulo desta Tese.

### CORRELAÇÃO CLÁSSICA

Henderson e Vedral (**HENDERSON; VEDRAL, 2001**) propuseram que a Equação 3.42 deve ser maximizada considerando o conjunto de projetores dos quais resulte o maior valor possível para  $J(A : B)$ . Dessa forma,  $J$  pode ser interpretado como uma medida das correlações clássicas entre os dois subsistemas quânticos, ou seja, o quanto os dois subsistemas  $A$  e  $B$  estão classicamente correlacionados é dado pelo máximo de informação acessível no subsistema  $A$  através de medidas locais no subsistema  $B$ . Partindo da maximização da Equação 3.42, a correlação clássica  $J_{AB}^{\leftarrow}$  para o sistema  $\rho_{AB}$  pode ser expressa por

$$J_{AB}^{\leftarrow} = \max_{\Pi_B^i} \left\{ S(A) - S(A|\Pi_B^i) \right\}, \quad (3.43)$$

sendo que geralmente esta equação não é simétrica, ou seja,  $J_{AB}^{\leftarrow} \neq J_{BA}^{\leftarrow}$ .

A correlação clássica será de suma importância no decorrer do presente trabalho, uma vez que nos permitirá obter outra grandeza denominada *discórdia quântica*. Como será discutido a seguir, ao se tentar calcular a informação mútua existente entre dois subsistemas quânticos através de medidas, nem toda a informação mútua existente no sistema poderá ser obtida, havendo portanto informações que não são localmente acessíveis.

### DISCÓRDIA QUÂNTICA

Como anteriormente mencionado, a informação mútua para sistemas clássicos mede o quanto dois (ou mais) sistemas estão classicamente correlacionados, bem como pode ser calcu-

lada através de duas expressões equivalentes (Equações 3.21 e 3.20). Já para sistemas quânticos, temos uma situação peculiar onde a informação mútua também mede o quanto dois sistemas estão correlacionados, porém tal correlação não é apenas clássica, havendo tanto correlações clássicas quanto quânticas, não sendo portanto as Equações 3.38 e 3.43 equivalentes entre si ( $J_{AB}^{\leftarrow} \leq S(A : B)$ ). Mais especificamente, a Equação 3.38 mede a informação mútua total do sistema, que consiste na soma das correlações clássicas e quânticas. Dessa forma, temos a seguinte expressão:

$$S(A : B) = J_{AB}^{\leftarrow} + \delta_{AB}^{\leftarrow}, \quad (3.44)$$

onde  $\delta_{AB}^{\leftarrow}$  mede as correlações quânticas totais entre os sistemas. Esta grandeza é denominada *discórdia quântica* ou simplesmente *discórdia*. Isolando  $\delta_{AB}^{\leftarrow}$  na Equação 3.44, definimos então a equação para a discórdia quântica, a qual é expressa da seguinte maneira (OLLIVIER; ZUREK, 2001):

$$\delta_{AB}^{\leftarrow} = S(A : B) - J_{AB}^{\leftarrow}. \quad (3.45)$$

Através de um diagrama de Venn (Figura 3.7), podemos representar graficamente a relação existente entre a informação mútua, a correlação clássica e a discórdia quântica, onde a soma de  $J_{AB}^{\leftarrow}$  com  $\delta_{AB}^{\leftarrow}$  resulta na informação mútua total do sistema.

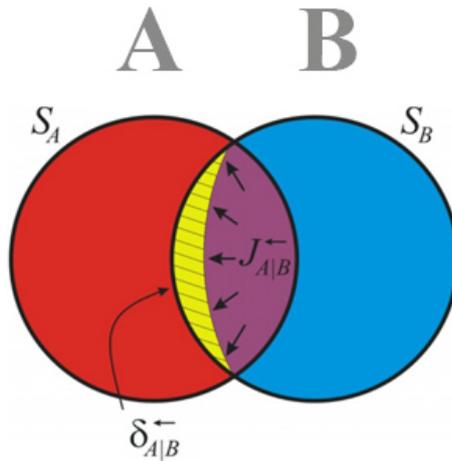


Figura 3.7: Representação gráfica através de um diagrama de Venn da correlação clássica  $J_{AB}^{\leftarrow}$  (região em roxo) e da correlação quântica  $\delta_{AB}^{\leftarrow}$  (região em amarelo), as quais somadas constituem a informação mútua entre os subsistemas quânticos  $A$  e  $B$  (FANCHINI et al., 2012).

### 3.2.4 EMARANHAMENTO DE FORMAÇÃO, MONOGAMIA DE EMARANHAMENTO E RELAÇÃO DE KOASHI-WINTER

As medidas gerais de emaranhamento ainda são uma questão em aberto, sendo a mais comum para estados mistos o denominado emaranhamento de formação (EF). Esta medida consiste em uma maneira de quantificar a comunicação quântica necessária para se construir um estado bipartido, sendo proposta por Charles H. Bennett et al. (BENNETT et al., 1996) e podendo ser expressa da seguinte maneira:

$$E_f(\rho_{ab}) = \min_{\{p_i, |\Psi_i\rangle\}} \sum_i p_i S(\rho_{\Psi_i}), \quad (3.46)$$

onde o mínimo é tomado sobre todas as possíveis misturas de estados puros  $p_i, \psi_i$  que geram o estado  $\rho$ . Isso porque uma matriz densidade pode ter muitas decomposições diferentes, e dentre elas há o menor emaranhamento médio. Para estados puros, a entropia de von Neumann é um bom quantificador para uma das partes, sendo que a quantidade de emaranhamento para estados puros varia de 0 a  $\log_2 D$ , onde  $D$  é a dimensão do sistema em questão.

Uma importante propriedade do emaranhamento de formação — e que será explorada em nossos cálculos ao decorrer do Capítulo 4 — é a de que o EF entre dois ou mais subsistemas é o mesmo independentemente da ordem dos subsistemas, ou seja

$$\begin{aligned} E_{ab} &= E_{ba}; \\ E_{abc} &= E_{acb} = E_{bac} = E_{bca} = E_{cab} = E_{cba}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

e assim por diante. O emaranhamento possui ainda outra característica importante, denominada *monogamia de emaranhamento* (BENNETT et al., 1996; TERHAL, 2004; KIM; GOUR; SANDERS, 2012; CORNELIO; OLIVEIRA, 2010). Essa característica mostra que para dois subsistemas puros  $a$  e  $b$  maximamente emaranhados, tanto  $a$  como  $b$  não podem ter nenhum emaranhamento com um terceiro subsistema  $c$ . Já para um sistema puro tripartido  $abc$ , temos uma relação denominada relação de Koashi-Winter (KOASHI; WINTER, 2004), que mostra que a soma das correlações quânticas entre os subsistemas  $a$  e  $b$  (emaranhamento de formação  $E_{ab}$  do subsistema  $ab$ ) com as correlações clássicas entre os subsistemas  $a$  e  $c$  (informação

mútua por medida  $J_{ac}^{\leftarrow}$  do subsistema  $ac$ ) é igual à entropia do subsistema  $a$  ( $S_a$ ):

$$E_{ab} + J_{ac}^{\leftarrow} = S_a. \quad (3.48)$$

A monogamia de emaranhamento possui importantes implicações em diversos segmentos da física quântica. A ausência de monogamia é considerada, por exemplo, um grande obstáculo à implementação da criptografia quântica, onde a segurança depende do fato do espião não ter as habilidades necessárias para se correlacionar com as partes confiáveis do sistema (RENES; GRASSL, 2006; MASANES, 2009). Por outro lado, a falta de monogamia também fornece informações que podem nos ajudar a compreender o complexo comportamento dos buracos negros, que surge da combinação da mecânica quântica com a relatividade geral (ALMHEIRI et al., 2013). Além disso, a monogamia das correlações quânticas também foi essencial para tornar segura a distribuição de chaves quânticas (BAE; ACÍN, 2006; SCARANI et al., 2005).

### 3.3 EMARANHAMENTO E DISCÓRDIA PARA SISTEMAS TRIPARTIDOS

Tanto o emaranhamento de formação (EF) quanto a discórdia quântica (DQ) constituem medidas de correlações quânticas, sendo que para sistemas puros de duas partes  $E_{ab} = \delta_{a|b}^{\leftarrow}$ . Já para estados puros tripartidos, o EF e a DQ obedecem uma relação fundamental entre emaranhamento e discórdia, a qual iremos deduzir nesta seção.

Para um sistema puro  $abc$ , partiremos da relação monogâmica de Koashi-Winter (Equação 3.48):

$$\begin{aligned} E_{ab} + J_{ac}^{\leftarrow} &= S_a, \\ J_{ac}^{\leftarrow} &= S_a - E_{ab}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Sabendo que  $S_{a:c} = S_a - S_{a|c}$  (Equação 3.39) e que  $S_{a|c} = S_{ac} - S_c$  (Equação 3.36), da definição

de discórdia quântica (Equação 3.45) temos que:

$$\begin{aligned}
\delta_{a|c}^{\leftarrow} &= S_{a:c} - J_{ac}^{\leftarrow}, \\
\delta_{a|c}^{\leftarrow} &= S_a - S_{a|c} - J_{ac}^{\leftarrow}, \\
\delta_{a|c}^{\leftarrow} &= S_a - (S_{ac} - S_c) - J_{ac}^{\leftarrow}, \\
\delta_{a|c}^{\leftarrow} &= S_a - S_{ac} + S_c - J_{ac}^{\leftarrow}.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Substituindo 3.49 em 3.50 temos:

$$\begin{aligned}
\delta_{a|c}^{\leftarrow} &= S_a - S_{ac} + S_c - (S_a - E_{ab}), \\
\delta_{a|c}^{\leftarrow} &= S_a - S_{ac} + S_c - S_a + E_{ab}, \\
\delta_{a|c}^{\leftarrow} &= -S_{ac} + S_c + E_{ab}, \\
E_{ab} &= \delta_{a|c}^{\leftarrow} + S_{ac} - S_c, \\
E_{ab} &= \delta_{a|c}^{\leftarrow} + S_{a|c},
\end{aligned} \tag{3.51}$$

que denominamos *relação fundamental entre EF e DQ para sistemas puros tripartidos* (FANCHINI et al., 2012). Além disso, ao substituir  $b$  por  $c$  um resultado análogo pode ser obtido, e então teremos as duas expressões a seguir:

$$\begin{aligned}
E_{ab} &= \delta_{a|c}^{\leftarrow} + S_{a|c}; \\
E_{ac} &= \delta_{a|b}^{\leftarrow} + S_{a|b}.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Somando as equações anteriores de 3.52 obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
E_{ab} + E_{ac} &= \delta_{a|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|c}^{\leftarrow} + S_{a|b} + S_{a|c}, \\
E_{ab} + E_{ac} &= \delta_{a|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|c}^{\leftarrow} + S_{ab} - S_b + S_{ac} - S_c.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Sabendo que  $S_{ab} = S_c$  e  $S_{ac} = S_b$ , as entropias irão se cancelar. Assim chegamos na seguinte equação da *lei de conservação para sistemas de 3 partes* (FANCHINI et al., 2012):

$$E_{ab} + E_{ac} = \delta_{a|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|c}^{\leftarrow}. \tag{3.54}$$

Obtemos aqui uma importante relação entre EF e DQ, a qual mostra que a soma das bipartições

dos EF de um determinado subsistema (no caso  $a$ ) com as demais partes é igual a soma das bipartições das DQs desse mesmo subsistema com as demais partes.

### 3.3.1 INFORMAÇÃO INACESSÍVEL LOCALMENTE PARA SISTEMAS TRIPARTIDOS

Deduziremos aqui mais duas importantes relações: a primeira referente à *lei de conservação para um ciclo de medidas*, a qual relaciona a soma das bipartições dos EF e DQs para um ciclo de medidas, e a segunda referente à *soma das DQs para ciclos de medidas* no sentido horário e anti-horário.

Seja um sistema quântico puro tripartido  $abc$ , um ciclo de Informação Inacessível Localmente (IIL) no sentido horário  $\mathcal{L}_{\odot}$  pode ser calculado por meio da soma das discórdias quânticas obtidas através de medidas (projetivas ou POVM) sequenciais fechadas na direção  $c \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow c$ , tal como mostram as setas vermelhas na Figura 3.8. Desse modo, tem-se que:

$$\mathcal{L}_{\odot} \equiv \delta_{b|c}^{\leftarrow} + \delta_{a|b}^{\leftarrow} + \delta_{c|a}^{\leftarrow}. \quad (3.55)$$

De maneira análoga, o fluxo de medidas no sentido anti-horário  $\mathcal{L}_{\ominus}$  pode ser obtido através da sequência de medidas em  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$ , tal como mostram as setas azuis na Figura 3.8. Dessa forma, temos então o conjunto das seguintes somas de DQs:

$$\mathcal{L}_{\ominus} \equiv \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|c}^{\leftarrow}. \quad (3.56)$$

Analogamente à Equação 3.54, também é possível obter uma lei de conservação para sistemas de 3 partes considerando todo o ciclo de medidas no sentido horário ou anti-horário. Tal expressão pode ser obtida partindo de 3.54, de onde podemos escrever as seguintes permutações:

$$\begin{aligned} E_{ab} + E_{ac} &= \delta_{a|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|c}^{\leftarrow}; \\ E_{ba} + E_{bc} &= \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{b|c}^{\leftarrow}; \\ E_{ca} + E_{cb} &= \delta_{c|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

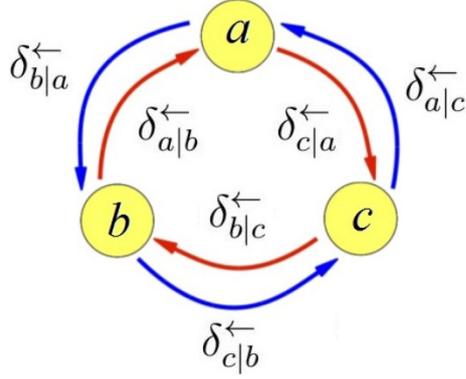


Figura 3.8: Representação do ciclo de ILL no sentido horário (setas vermelhas) e anti-horário (setas azuis) em um sistema quântico puro tripartido  $abc$  (FANCHINI et al., 2012).

Somando as Equações de 3.57 e sabendo que para sistemas puros  $E_{xy} = E_{yx}$ , obtemos uma média de ILL no sentido horário e anti-horário:

$$\begin{aligned}
E_{ab} + E_{ac} + E_{ba} + E_{bc} + E_{ca} + E_{cb} &= \delta_{b|c}^{\leftarrow} + \delta_{a|b}^{\leftarrow} + \delta_{c|a}^{\leftarrow} + \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|c}^{\leftarrow}, \\
E_{ab} + E_{ac} + E_{ab} + E_{bc} + E_{ac} + E_{bc} &= \delta_{b|c}^{\leftarrow} + \delta_{a|b}^{\leftarrow} + \delta_{c|a}^{\leftarrow} + \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|c}^{\leftarrow}, \\
2E_{ab} + 2E_{bc} + 2E_{ca} &= \mathcal{L}_{\odot} + \mathcal{L}_{\ominus}, \\
E_{ab} + E_{bc} + E_{ca} &= \frac{\mathcal{L}_{\odot} + \mathcal{L}_{\ominus}}{2}.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Por outro lado, calculando a diferença entre 3.55 e 3.56, obtemos a seguinte relação:

$$\mathcal{L}_{\odot} - \mathcal{L}_{\ominus} = \delta_{b|c}^{\leftarrow} + \delta_{a|b}^{\leftarrow} + \delta_{c|a}^{\leftarrow} - \delta_{b|a}^{\leftarrow} - \delta_{c|b}^{\leftarrow} - \delta_{a|c}^{\leftarrow}. \tag{3.59}$$

Somando as Equações de 3.57 obtemos também

$$\delta_{b|c}^{\leftarrow} + \delta_{a|b}^{\leftarrow} + \delta_{c|a}^{\leftarrow} = -\delta_{b|a}^{\leftarrow} - \delta_{c|b}^{\leftarrow} - \delta_{a|c}^{\leftarrow} + 2(E_{ab} + E_{bc} + E_{ca}). \tag{3.60}$$

Substituindo 3.60 em 3.59 obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\odot} - \mathcal{L}_{\ominus} &= 2(E_{ab} + E_{bc} + E_{ca}) + 2(-\delta_{b|a}^{\leftarrow} - \delta_{c|b}^{\leftarrow} - \delta_{a|c}^{\leftarrow}), \\
\frac{\mathcal{L}_{\odot} + \mathcal{L}_{\ominus}}{2} &= E_{ab} - \delta_{a|c}^{\leftarrow} + E_{ca} - \delta_{c|b}^{\leftarrow} + E_{bc} - \delta_{b|a}^{\leftarrow}, \\
\frac{\mathcal{L}_{\odot} + \mathcal{L}_{\ominus}}{2} &= S_{a|c} + S_{c|b} + S_{b|a}, \\
\frac{\mathcal{L}_{\odot} + \mathcal{L}_{\ominus}}{2} &= S_{ac} - S_c + S_{cb} - S_b + S_{ba} - S_a.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Como,  $S_{ac} = S_b$ ,  $S_{cb} = S_a$  e  $S_{ba} = S_c$ , a soma das entropias é nula, e então teremos:

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{L}_\odot + \mathcal{L}_\ominus}{2} &= 0, \\ \mathcal{L}_\odot &= \mathcal{L}_\ominus.\end{aligned}\tag{3.62}$$

Uma implicação direta da Equação 3.62 é o fato das somas das DQs resultar no mesmo valor para medidas de ciclo independentemente do sentido em que as medidas são feitas. Isso pode ser visto igualando 3.55 e 3.56, de onde obtemos:

$$\delta_{a|b}^{\leftarrow} + \delta_{b|c}^{\leftarrow} + \delta_{c|a}^{\leftarrow} = \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|c}^{\leftarrow}.\tag{3.63}$$

Comparando as Equações 3.62, 3.58 e 3.55, obtemos então a lei de conservação para um ciclo de medidas no sentido horário para sistemas quânticos puros de 3 partes:

$$E_{ac} + E_{cb} + E_{ba} = \mathcal{L}_\odot = \delta_{c|a}^{\leftarrow} + \delta_{b|c}^{\leftarrow} + \delta_{a|b}^{\leftarrow}.\tag{3.64}$$

Já a lei de conservação para um ciclo de medidas no sentido anti-horário pode ser obtida através da diferença entre as Equações 3.56 e 3.55. Ao repetirmos o mesmo procedimento adotado anteriormente, chegaremos a um resultado análogo expresso por (FANCHINI et al., 2012):

$$E_{ab} + E_{bc} + E_{ca} = \mathcal{L}_\ominus = \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|c}^{\leftarrow}.\tag{3.65}$$

De acordo com as Equações 3.64 e 3.65, a soma dos EFs pode então ser interpretada como a aquisição de informação inacessível localmente por meio de medidas quânticas em um sistema quântico puro tripartido.

### 3.3.2 DERIVAÇÃO ALTERNATIVA DAS RELAÇÕES CÍCLICAS PARA SISTEMAS TRIPARTIDOS

Aqui mostraremos uma maneira alternativa e mais direta de se obter as Equações 3.64 e 3.65. Partindo de 3.54, podemos derivar as seguintes relações para um sistema quântico puro

tripartido  $abc$ :

$$\begin{aligned} E_{ab} &= \delta_{a|c}^{\leftarrow} + S_{a|c}; \\ E_{bc} &= \delta_{b|a}^{\leftarrow} + S_{b|a}; \\ E_{ca} &= \delta_{c|b}^{\leftarrow} + S_{c|b}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Somando as equações anteriores de 3.66 e sabendo que as entropias irão se cancelar ( $S_{ac} = S_b$ ,  $S_{ba} = S_c$  e  $S_{cb} = S_a$ ), teremos então (FANCHINI et al., 2012):

$$\begin{aligned} E_{ab} + E_{bc} + E_{ca} &= \delta_{a|c}^{\leftarrow} + \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + S_{a|c} + S_{b|a} + S_{c|b}, \\ E_{ab} + E_{bc} + E_{ca} &= \delta_{a|c}^{\leftarrow} + \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + S_{ac} - S_c + S_{ba} - S_a + S_{cb} - S_b, \\ E_{ab} + E_{bc} + E_{ca} &= \delta_{a|c}^{\leftarrow} + \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

sendo esta a relação de conservação entre EF e DQ para um ciclo de medidas no sentido anti-horário (Equação 3.65).

Podemos também obter a Equação 3.64 através de um procedimento análogo. Partindo novamente de 3.54, podemos escrever as seguintes relações:

$$\begin{aligned} E_{ba} &= \delta_{b|c}^{\leftarrow} + S_{b|c}; \\ E_{cb} &= \delta_{c|a}^{\leftarrow} + S_{c|a}; \\ E_{ac} &= \delta_{a|b}^{\leftarrow} + S_{a|b}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Somando as equações anteriores de 3.68, sabendo que  $E_{xy} = E_{yx}$  e que as entropias irão se cancelar, teremos então a relação de conservação entre EF e DQ para um ciclo de medidas no sentido horário (FANCHINI et al., 2012):

$$\begin{aligned} E_{ba} + E_{cb} + E_{ac} &= \delta_{b|c}^{\leftarrow} + \delta_{c|a}^{\leftarrow} + \delta_{a|b}^{\leftarrow} + S_{b|c} + S_{c|a} + S_{a|b}, \\ E_{ba} + E_{cb} + E_{ac} &= \delta_{b|c}^{\leftarrow} + \delta_{c|a}^{\leftarrow} + \delta_{a|b}^{\leftarrow} + S_{bc} - S_c + S_{ca} - S_a + S_{ab} - S_b, \\ E_{ab} + E_{bc} + E_{ca} &= \delta_{b|c}^{\leftarrow} + \delta_{c|a}^{\leftarrow} + \delta_{a|b}^{\leftarrow}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Por fim, podemos igualar as Equações 3.67 e 3.69 e obter a expressão da Equação 3.63:

$$\delta_{a|c}^{\leftarrow} + \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} = \delta_{b|c}^{\leftarrow} + \delta_{c|a}^{\leftarrow} + \delta_{a|b}^{\leftarrow}. \quad (3.70)$$

## CAPÍTULO 4

# RESULTADOS: GENERALIZAÇÃO DAS RELAÇÕES MONOGÂMICAS PARA SISTEMAS MULTIPARTIDOS

A distribuição de correlações quânticas em sistemas multipartidos desempenha um papel significativo em diversos aspectos da Teoria de Informação Quântica. Embora saiba-se que tais correlações não podem ser livremente distribuídas, a maneira como elas são compartilhadas em sistemas multipartidos é um problema em aberto até mesmo para um pequeno conjunto de qubits, havendo portanto um enorme esforço da comunidade científica para entender como a correlação quântica é distribuída mesmo para o caso de um pequeno número de partes e dimensões espaciais. Nesse sentido, esclarecer como a correlação quântica é distribuída em sistemas multipartidos é uma tarefa altamente relevante para o processamento de informação e tecnologias de comunicação em cenários multiusuários (FERREIRA et al., 2018). É exatamente nesse sentido que desenvolvemos esta parte de nosso trabalho, apresentando igualdades monogâmicas para discórdia quântica (DQ) e emaranhamento de formação (EF) em sistemas multipartidos arbitrários. Como será demonstrado neste capítulo, estendendo determinadas relações conservativas entre EF e DQ para sistemas multipartidos, surge uma regra geral de como a discórdia quântica é distribuída. Desse modo, como o EF é uma maneira de quantificar a comunicação quântica necessária para se construir um estado bipartido e a DQ é uma maneira de quantifi-

car a informação inacessível através de operações locais, nossos resultados mostram que, em um sistema multipartido, a quantidade de comunicação quântica necessária em cada bipartição é igual à soma das informações obtidas em correlações não-locais como as medidas pela discórdia quântica.

Com base nas relações de monogamia entre emaranhamento e discórdia para sistemas de 3 partes, mostraremos neste capítulo como essas correlações podem ser de modo geral distribuídas, determinando igualdades distintas entre EF e DQ para estados puros multipartidos arbitrários. Vale aqui ressaltar que tais relações podem ser consideradas de grande importância no sentido de que são capazes de testar a própria mecânica quântica.

## EMARANHAMENTO E DISCÓRDIA EM SISTEMAS DE QUATRO E CINCO PARTES

Nesta seção discutiremos a generalização das equações referentes às leis de conservação de ciclo entre EF e DQ mostradas anteriormente, de sistemas tripartidos para sistemas de  $n$  partes. Inicialmente mostraremos alguns resultados já existentes na literatura obtidos por Jonhy S. dos Santos Ferreira (FERREIRA et al., 2018), os quais fornecem relações de desigualdade entre EF e DQ para sistemas de quatro partes, bem como relações de igualdade entre EF e DQ para sistemas de cinco partes. Esses resultados foram o ponto de partida de nossa pesquisa e são importantes para a compreensão do método que utilizamos para obter a generalização das expressões, abrindo caminho, dessa forma, para os nossos estudos. Inicialmente partiremos da análise de um sistema de quatro partes, onde mostraremos que a generalização direta das equações de sistemas de três partes (Equação 3.54 e Equação 3.65) nos fornecem desigualdades ao invés de igualdades para esse tipo de sistema, o que apesar de também constituir um interessante resultado, ainda não fornece as leis de conservação. Todavia, mostraremos também que a generalização para sistemas de cinco partes resulta em igualdades e diferentes leis de conservação. Esses resultados lançam luz sobre como generalizar as leis de conservação para dimensões arbitrárias. Como discutiremos a seguir, surge uma dificuldade no processo de generalização das expressões devido ao fato de existir uma diferença entre expressões com números pares e ímpares de partes, onde para um número par de partes a soma direta das entropias é diferente de zero. No entanto, ao avançar deste capítulo, será apresentado um método para a obtenção

das leis de conservação para sistemas com número par de partes, sendo necessário para tanto a utilização de um conjunto específico de equações.

## 4.1 DESIGUALDADES EM SISTEMAS DE QUATRO PARTES

Como anteriormente mencionado, de sistemas de três partes para sistemas de quatro partes, pode-se esperar encontrar igualdades entre as somas de EF e DQ. No entanto, o que surgem são desigualdades que estão intimamente relacionadas à subaditividade forte da entropia de von Neumann. Esta consiste em relações de desigualdade entre as entropias considerando diferentes quantidades de partições (NIELSEN; CHUANG, 2000):

$$\begin{aligned} S_a + S_b &\leq S_{ac} + S_{bc}; \\ S_{abc} + S_b &\leq S_{ab} + S_{bc}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Mostraremos a seguir como obter as relações de conservação para uma partícula central, bem como para um ciclo de medidas.

### 4.1.1 DESIGUALDADES COM UMA PARTÍCULA CENTRAL

Iremos aqui definir relações de desigualdade entre emaranhamento de formação e discórdia quântica em sistemas de 4 partes havendo sempre uma determinada partícula  $a$  envolvida. Faremos isso através de dois métodos diferentes que levarão cada qual a uma diferente relação. Como será mostrado a seguir, a **Relação 1** relaciona duas expressões de EF entre três partículas com duas expressões de DQ entre duas partículas quaisquer do sistema, contendo sempre uma determinada partícula  $a$ . De maneira análoga, a **Relação 2** relaciona duas expressões de EF entre duas partículas com duas expressões de DQ entre três partículas quaisquer do sistema, contendo sempre uma determinada partícula  $a$ .

#### RELAÇÃO 1: EF ENTRE 3 PARTÍCULAS E DQ ENTRE 2 PARTÍCULAS

Partindo da Equação  $E_{ab} = \delta_{a|c}^{\leftarrow} + S_{a|c}$  que relaciona emaranhamento e discórdia para sistemas tripartidos (Equação 3.51), podemos derivar relações para sistemas de 4 partes substituindo

$b$  por  $bc$  e  $c$  por  $d$  (ou outra permutação semelhante). Isso nos leva às seguintes expressões:

$$\begin{aligned} E_{a|bc} &= \delta_{a|d}^{\leftarrow} + S_{a|d}; \\ E_{a|cd} &= \delta_{a|b}^{\leftarrow} + S_{a|b}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Somando as 2 equações anteriores de 4.2 obtemos:

$$\begin{aligned} E_{a|bc} + E_{a|cd} &= \delta_{a|d}^{\leftarrow} + \delta_{a|b}^{\leftarrow} + S_{a|d} + S_{a|b}, \\ S_{a|b} + S_{a|d} &= E_{a|bc} + E_{a|cd} - \delta_{a|d}^{\leftarrow} - \delta_{a|b}^{\leftarrow}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Além disso, da desigualdade de subaditividade forte (Equação 4.1) temos também a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} S_a + S_b &\leq S_{ac} + S_{bc} \equiv S_b + S_d \leq S_{ab} + S_{ad}, \\ S_b + S_d &\leq S_{ab} + S_{ad}, \\ S_{ab} + S_{ad} &\geq S_b + S_d, \\ S_{ab} - S_b + S_{ad} - S_d &\geq 0, \\ S_{a|b} + S_{a|d} &\geq 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Substituindo 4.3 em 4.4, obteremos a primeira equação da relação de desigualdade entre emaranhamento de formação e discórdia quântica para sistemas de 4 partes:

$$\begin{aligned} E_{a|bc} + E_{a|cd} - \delta_{a|d}^{\leftarrow} - \delta_{a|b}^{\leftarrow} &\geq 0, \\ E_{a|bc} + E_{a|cd} &\geq \delta_{a|d}^{\leftarrow} + \delta_{a|b}^{\leftarrow}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dessa forma podemos concluir que, para sistemas de 4 partes onde consideramos o emaranhamento máximo de uma partícula central com outras duas partículas, a soma dos emaranhamentos é maior do que a soma das discórdias com a mesma partícula central e a outra partícula não incluída na bipartição do EF.

## RELAÇÃO 2: EF ENTRE 2 PARTÍCULAS E DQ ENTRE 3 PARTÍCULAS

A **Relação 2** também pode ser deduzida a partir da Equação 3.51, de onde podemos escrever expressões diferentes das da Equação 4.2 para o emaranhamento de sistemas de 4 partes associados a uma partícula  $a$ . Para isso, podemos substituir  $c$  por  $cd$  (ou outra permutação

semelhante), levando às seguintes relações:

$$\begin{aligned} E_{ab} &= \delta_{a|cd}^{\leftarrow} + S_{a|cd}; \\ E_{ad} &= \delta_{a|bc}^{\leftarrow} + S_{a|bc}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Somando as equações anteriores de 4.6 temos:

$$\begin{aligned} E_{ab} + E_{ad} &= \delta_{a|bc}^{\leftarrow} + \delta_{a|cd}^{\leftarrow} + S_{a|bc} + S_{a|cd}, \\ S_{a|bc} + S_{a|cd} &= E_{ab} + E_{ad} - \delta_{a|bc}^{\leftarrow} - \delta_{a|cd}^{\leftarrow}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Da desigualdade de subaditividade forte, temos também que:

$$\begin{aligned} S_{abc} + S_b &\leq S_{ab} + S_{bc}, \\ S_{abc} - S_{bc} + S_b - S_{ab} &\leq 0, \\ \text{como } S_b &= S_{acd} \text{ e } S_{ab} = S_{cd}, \text{ temos então:} \\ S_{abc} - S_{bc} + S_{acd} - S_{cd} &\leq 0, \\ S_{a|bc} + S_{a|cd} &\leq 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Substituindo 4.7 em 4.8, obtemos a segunda equação da relação de desigualdade entre emaranhamento de formação e discórdia quântica para sistemas de 4 partes:

$$\begin{aligned} E_{ab} + E_{ad} - \delta_{a|bc}^{\leftarrow} - \delta_{a|cd}^{\leftarrow} &\leq 0, \\ E_{ab} + E_{ad} &\leq \delta_{a|bc}^{\leftarrow} + \delta_{a|cd}^{\leftarrow}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Da Equação 4.9 podemos concluir que, dependendo da configuração das partes envolvidas no sistema, a soma dos emaranhamentos é menor do que a soma das discórdias.

#### RELAÇÃO 1 COM TODAS AS PARTES EMARANHADAS COM $a$

Analogamente à Equação 4.2, também é possível obter as relações de desigualdade utilizando todas as possíveis partes do sistema emaranhadas com a partícula  $a$ . Como estamos tratando de um sistemas de 4 partes, podemos ao todo relacionar três expressões de EF entre três partículas com três expressões de DQ entre duas partículas quaisquer do sistema, havendo sempre uma determinada partícula  $a$  associada. Para tanto, partimos novamente da Equação

3.51, da qual podemos derivar as seguintes equações para sistemas de 4 partes:

$$\begin{aligned}
E_{a|bc} &= \delta_{a|d}^{\leftarrow} + S_{a|d}; \\
E_{a|bd} &= \delta_{a|c}^{\leftarrow} + S_{a|c}; \\
E_{a|cd} &= \delta_{a|b}^{\leftarrow} + S_{a|b}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Em seguida, somamos as equações anteriores de 4.10, e então obtemos:

$$\begin{aligned}
E_{a|bc} + E_{a|cd} + E_{a|bd} &= \delta_{a|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|c}^{\leftarrow} + \delta_{a|d}^{\leftarrow} + S_{a|b} + S_{a|c} + S_{a|d}, \\
S_{a|b} + S_{a|c} + S_{a|d} &= E_{a|bc} + E_{a|cd} + E_{a|bd} - \delta_{a|b}^{\leftarrow} - \delta_{a|c}^{\leftarrow} - \delta_{a|d}^{\leftarrow}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Da equação de desigualdade de subaditividade forte  $S_b + S_d \leq S_{ab} + S_{ad}$  (Equação 4.1), podemos derivar as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
S_{ab} - S_b + S_{ad} - S_d &\geq 0; \\
S_{ac} - S_c + S_{ad} - S_d &\geq 0; \\
S_{ab} - S_b + S_{ac} - S_c &\geq 0.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Somando as equações anteriores de 4.12 temos:

$$\begin{aligned}
2(S_{ab} - S_b + S_{ad} - S_d - S_c + S_{ac}) &\geq 0, \\
S_{ab} - S_b + S_{ac} - S_c + S_{ad} - S_d &\geq 0, \\
S_{a|b} + S_{a|c} + S_{a|d} &\geq 0.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Por fim, substituindo 4.11 em 4.13, obtemos a primeira relação da equação de desigualdade entre EF e DQ para sistemas de 4 partes considerando todas as partes emaranhadas com  $a$  existentes no sistema:

$$\begin{aligned}
E_{a|bc} + E_{a|cd} + E_{a|bd} - \delta_{a|b}^{\leftarrow} - \delta_{a|c}^{\leftarrow} - \delta_{a|d}^{\leftarrow} &\geq 0, \\
E_{a|bc} + E_{a|cd} + E_{a|bd} &\geq \delta_{a|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|c}^{\leftarrow} + \delta_{a|d}^{\leftarrow}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

RELAÇÃO 2 COM TODAS AS PARTES EMARANHADAS COM  $a$

Analogamente à Equação 4.6, também é possível obter outras relações de desigualdade utilizando todas as possíveis partes emaranhadas com a partícula  $a$ . Aqui relacionamos três expressões de EF com duas partículas com três expressões de DQ com três partículas quaisquer do sistema, havendo sempre uma determinada partícula  $a$  associada. Para tanto, partimos novamente da Equação 3.51, da qual podemos derivar as seguintes equações:

$$\begin{aligned} E_{ab} &= \delta_{a|cd}^{\leftarrow} + S_{a|cd}; \\ E_{ad} &= \delta_{a|bc}^{\leftarrow} + S_{a|bc}; \\ E_{ac} &= \delta_{a|bd}^{\leftarrow} + S_{a|bd}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

somando as equações anteriores de 4.15 obtemos:

$$\begin{aligned} E_{ab} + E_{ac} + E_{ad} &= \delta_{a|cd}^{\leftarrow} + \delta_{a|bd}^{\leftarrow} + \delta_{a|bc}^{\leftarrow} + S_{a|cd} + S_{a|bd} + S_{a|bc}; \\ S_{a|bc} + S_{a|bd} + S_{a|cd} &= E_{ab} + E_{ac} + E_{ad} - \delta_{a|bc}^{\leftarrow} - \delta_{a|bd}^{\leftarrow} - \delta_{a|cd}^{\leftarrow}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Da equação de desigualdade de subaditividade forte podemos derivar a seguintes expressão (NIELSEN; CHUANG, 2000):

$$S_{a|bc} + S_{a|bd} + S_{a|cd} \leq 0. \quad (4.17)$$

Por fim, substituindo 4.16 em 4.17, obtemos a segunda relação da equação de desigualdade entre EF e DQ para sistemas de 4 partes considerando todas as partes emaranhadas com  $a$  existentes no sistema:

$$\begin{aligned} E_{ab} + E_{ac} + E_{ad} - \delta_{a|bc}^{\leftarrow} - \delta_{a|bd}^{\leftarrow} - \delta_{a|cd}^{\leftarrow} &\leq 0, \\ E_{ab} + E_{ac} + E_{ad} &\leq \delta_{a|bc}^{\leftarrow} + \delta_{a|bd}^{\leftarrow} + \delta_{a|cd}^{\leftarrow}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Esses resultados mostram como as desigualdades entre EF e DQ surgem ao tratarmos uma das partículas como sendo a central.

#### 4.1.2 DESIGUALDADES DE CICLO

Através das relações entre EF e DQ, também é possível deduzir desigualdades em ciclos de medidas para sistemas de 4 partes. Novamente deduziremos duas relações diferentes, sendo que a **Relação 1** associa EF de 3 partículas com DQ de 2 partículas, e a **Relação 2** associa EF de 2 partículas com DQ de 3 partículas.

##### RELAÇÃO 1: CICLO DE EF COM 3 PARTÍCULAS E DQ COM 2 PARTÍCULAS

Aqui podemos obter relações de desigualdade para um ciclo de informações locais inacessíveis com quatro partes:  $a \rightarrow b$ ,  $b \rightarrow c$ ,  $c \rightarrow d$  e  $d \rightarrow a$ . Isso pode ser feito partindo das equações fundamentais de 3.51, de onde podemos derivar as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 E_{a|bc} &= \delta_{a|d}^{\leftarrow} + S_{a|d}; \\
 E_{b|cd} &= \delta_{b|a}^{\leftarrow} + S_{b|a}; \\
 E_{c|da} &= \delta_{c|b}^{\leftarrow} + S_{c|b}; \\
 E_{d|ab} &= \delta_{d|c}^{\leftarrow} + S_{d|c}.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Somando as quatro equações anteriores de 4.19 temos:

$$\begin{aligned}
 E_{a|bc} + E_{b|cd} + E_{c|da} + E_{d|ab} &= \delta_{a|d}^{\leftarrow} + \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + \delta_{d|c}^{\leftarrow} + S_{a|d} + S_{b|a} + S_{c|b} + S_{d|c}, \\
 S_{a|d} + S_{b|a} + S_{c|b} + S_{d|c} &= E_{a|bc} + E_{b|cd} + E_{c|da} + E_{d|ab} - \delta_{a|d}^{\leftarrow} - \delta_{b|a}^{\leftarrow} - \delta_{c|b}^{\leftarrow} - \delta_{d|c}^{\leftarrow}.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

A soma das entropias condicionais sempre será positiva devido à desigualdade de subaditividade forte. Isso pode ser observado após algumas manipulações da entropia. Dessa forma, obtemos a primeira relação de ciclo entre emaranhamento e discórdia para sistemas de 4 partes:

$$\begin{aligned}
 S_{a|d} + S_{b|a} + S_{c|b} + S_{d|c} &= E_{a|bc} + E_{b|cd} + E_{c|da} + E_{d|ab} - \delta_{a|d}^{\leftarrow} - \delta_{b|a}^{\leftarrow} - \delta_{c|b}^{\leftarrow} - \delta_{d|c}^{\leftarrow} \geq 0, \\
 E_{a|bc} + E_{b|cd} + E_{c|da} + E_{d|ab} - \delta_{a|d}^{\leftarrow} - \delta_{b|a}^{\leftarrow} - \delta_{c|b}^{\leftarrow} - \delta_{d|c}^{\leftarrow} &\geq 0, \\
 E_{a|bc} + E_{b|cd} + E_{c|da} + E_{d|ab} &\geq \delta_{a|d}^{\leftarrow} + \delta_{d|c}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + \delta_{b|a}^{\leftarrow}.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

## RELAÇÃO 2: CICLO DE EF COM 2 PARTÍCULAS E DQ COM 3 PARTÍCULAS

Pudemos também construir um ciclo de informação localmente inacessível (ILI) utilizando um diferente conjunto de partes. Seja o ciclo definido por  $ab \rightarrow c$ ,  $cb \rightarrow d$ ,  $cd \rightarrow a$  e  $da \rightarrow b$ , partindo das equações fundamentais de 3.51 temos as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 E_{ab} &= \delta_{a|cd}^{\leftarrow} + S_{a|cd}; \\
 E_{bc} &= \delta_{b|ad}^{\leftarrow} + S_{b|ad}; \\
 E_{cd} &= \delta_{c|ab}^{\leftarrow} + S_{c|ab}; \\
 E_{da} &= \delta_{d|bc}^{\leftarrow} + S_{d|bc}.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Somando as quatro equações anteriores de 4.22 temos:

$$\begin{aligned}
 E_{ab} + E_{bc} + E_{cd} + E_{da} &= \delta_{a|cd}^{\leftarrow} + \delta_{b|ad}^{\leftarrow} + \delta_{c|ab}^{\leftarrow} + \delta_{d|bc}^{\leftarrow} + S_{a|cd} + S_{b|ad} + S_{c|ab} + S_{d|bc}, \\
 S_{a|cd} + S_{b|ad} + S_{c|ab} + S_{d|bc} &= E_{ab} + E_{bc} + E_{cd} + E_{da} - \delta_{a|cd}^{\leftarrow} - \delta_{b|ad}^{\leftarrow} - \delta_{c|ab}^{\leftarrow} - \delta_{d|bc}^{\leftarrow}.
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Analogamente a 4.8, a soma das entropias condicionais será negativa devido à desigualdade de subaditividade forte. Desse modo, obtemos a segunda relação de ciclo para sistemas de 4 partes:

$$\begin{aligned}
 S_{a|cd} + S_{b|ad} + S_{c|ab} + S_{d|bc} &= E_{ab} + E_{bc} + E_{cd} + E_{da} - \delta_{a|cd}^{\leftarrow} - \delta_{b|ad}^{\leftarrow} - \delta_{c|ab}^{\leftarrow} - \delta_{d|bc}^{\leftarrow} \leq 0, \\
 E_{ab} + E_{bc} + E_{cd} + E_{da} - \delta_{a|cd}^{\leftarrow} - \delta_{b|ad}^{\leftarrow} - \delta_{c|ab}^{\leftarrow} - \delta_{d|bc}^{\leftarrow} &\leq 0, \\
 E_{ab} + E_{bc} + E_{cd} + E_{da} &\leq \delta_{a|cd}^{\leftarrow} + \delta_{b|ad}^{\leftarrow} + \delta_{c|ab}^{\leftarrow} + \delta_{d|bc}^{\leftarrow}.
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Pudemos nesta seção deduzir, para sistemas de 4 partes, relações de desigualdade entre EF e DQ particionados de diferentes maneiras. Na sequência, iremos deduzir relações de igualdade entre EF e DQ para sistemas de 5 partes, a qual nos abrirá caminho para uma generalização para sistemas de  $n$  partes ímpares.

## 4.2 IGUALDADES EM SISTEMAS DE CINCO PARTES

Para sistemas puros de cinco partes, de maneira muito semelhante ao que ocorre para o caso de sistemas de três partes, é possível encontrar igualdades ao invés de desigualdades.

### 4.2.1 IGUALDADES COM UMA PARTÍCULA CENTRAL

Partindo da lei de conservação para sistemas tripartidos  $E_{ab} + E_{ac} = \delta_{a|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|c}^{\leftarrow}$  (Equação 3.54), podemos escrever as seguintes relações de entropia para sistemas de 5 partes:

$$\begin{aligned} E_{a|bc} + E_{a|de} &= \delta_{a|bc}^{\leftarrow} + \delta_{a|de}^{\leftarrow}; \\ E_{a|bd} + E_{a|ce} &= \delta_{a|bd}^{\leftarrow} + \delta_{a|ce}^{\leftarrow}; \\ E_{a|be} + E_{a|cd} &= \delta_{a|be}^{\leftarrow} + \delta_{a|cd}^{\leftarrow}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Somando as 3 equações anteriores de 4.25 temos:

$$E_{a|bc} + E_{a|de} + E_{a|bd} + E_{a|ce} + E_{a|be} + E_{a|cd} = \delta_{a|bc}^{\leftarrow} + \delta_{a|de}^{\leftarrow} + \delta_{a|bd}^{\leftarrow} + \delta_{a|ce}^{\leftarrow} + \delta_{a|be}^{\leftarrow} + \delta_{a|cd}^{\leftarrow}. \quad (4.26)$$

Na Equação 4.26, podemos observar que temos todas as combinações de EF e DQ da partícula  $a$  com todas as outras combinações possíveis de duas partículas. Portanto, semelhante ao que acontece no caso tripartido, a soma dos emaranhamentos que uma partícula central  $a$  compartilha com todas as outras combinações possíveis de duas partículas é igual à soma de todas as discórdias entre as mesmas bipartições, estabelecendo assim uma lei monogâmica de conservação de correlações quânticas.

### 4.2.2 IGUALDADES DE CICLO

Aqui iremos estender a equação de ciclo de um sistema de 3 partes dada por  $E_{ab} + E_{bc} + E_{ca} = \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|c}^{\leftarrow}$  (Equação 3.65), para um sistema de 5 partes. Partindo da equação fundamental  $E_{ab} = \delta_{a|c}^{\leftarrow} + S_{a|c}$  (Equação 3.51), podemos escrever as seguintes relações de

entropia para sistemas de 5 partes:

$$\begin{aligned}
E_{a|bc} &= \delta_{a|ed}^{\leftarrow} + S_{a|ed} \Rightarrow E_{a|bc} = \delta_{a|ed}^{\leftarrow} + S_{aed} - S_{ed}; \\
E_{c|de} &= \delta_{c|ba}^{\leftarrow} + S_{c|ba} \Rightarrow E_{c|de} = \delta_{c|ba}^{\leftarrow} + S_{cba} - S_{ba}; \\
E_{e|ab} &= \delta_{e|dc}^{\leftarrow} + S_{e|dc} \Rightarrow E_{e|ab} = \delta_{e|dc}^{\leftarrow} + S_{edc} - S_{dc}; \\
E_{b|cd} &= \delta_{b|ae}^{\leftarrow} + S_{b|ae} \Rightarrow E_{b|cd} = \delta_{b|ae}^{\leftarrow} + S_{bae} - S_{ae}; \\
E_{d|ea} &= \delta_{d|cb}^{\leftarrow} + S_{d|cb} \Rightarrow E_{d|ea} = \delta_{d|cb}^{\leftarrow} + S_{dcb} - S_{cb}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Somando as 5 equações anteriores de 4.27 temos:

$$\begin{aligned}
E_{a|bc} + E_{b|cd} + E_{c|de} + E_{d|ea} + E_{e|ab} &= \delta_{a|ed}^{\leftarrow} + \delta_{b|ae}^{\leftarrow} + \delta_{c|ba}^{\leftarrow} + \delta_{d|cb}^{\leftarrow} + \delta_{e|dc}^{\leftarrow} + \\
S_{aed} - S_{ed} + S_{cba} - S_{ba} + S_{edc} - S_{dc} + S_{bae} - S_{ae} + S_{dcb} - S_{cb}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Como para sistemas puros

$$\begin{aligned}
S_{aed} &= S_{bc}; \\
S_{cba} &= S_{ed}; \\
S_{edc} &= S_{ba}; \\
S_{bae} &= S_{cd}; \\
S_{dcb} &= S_{ae},
\end{aligned} \tag{4.29}$$

as entropias irão se cancelar. Assim obteremos a seguinte equação:

$$E_{a|bc} + E_{b|cd} + E_{c|de} + E_{d|ea} + E_{e|ab} = \delta_{a|ed}^{\leftarrow} + \delta_{b|ae}^{\leftarrow} + \delta_{c|ba}^{\leftarrow} + \delta_{d|cb}^{\leftarrow} + \delta_{e|dc}^{\leftarrow}, \tag{4.30}$$

que consiste em uma relação com medidas cíclicas no sentido horário. De maneira análoga, podemos construir uma relação para o ciclo no sentido anti-horário, levando ao seguinte resultado:

$$E_{a|de} + E_{b|ea} + E_{c|ab} + E_{d|bc} + E_{e|cd} = \delta_{a|cb}^{\leftarrow} + \delta_{b|dc}^{\leftarrow} + \delta_{c|ed}^{\leftarrow} + \delta_{d|ae}^{\leftarrow} + \delta_{e|ba}^{\leftarrow}. \tag{4.31}$$

Pudemos nesta seção deduzir expressões de igualdades com uma partícula central e de ciclo para sistemas com 5 partes. Tais resultados são importantes e abrem caminho para uma generalização das relações para sistemas com um número ímpar de partes, tal como será discutido na próxima seção.

## 4.3 GENERALIZAÇÃO DAS LEIS DE CONSERVAÇÃO PARA SISTEMAS MULTIPARTIDOS

Nesta seção apresentaremos nossos resultados para esta primeira parte da Tese, que consiste inicialmente na dedução das relações de conservação entre EF e DQ para medidas de ciclo em sistemas de quatro partes, e em seguida expressões as quais generalizam tais relações de conservação cíclicas entre EF e DQ para sistemas com um número arbitrário (par e ímpar) de partes. Em seguida, apresentaremos também as relações de conservação entre as DQs para medidas de ciclo bem como relações de conservação cíclicas entre EF e DQ para medidas em uma única partícula, novamente para sistemas arbitrários com  $n$  partes. Dessa forma, o procedimento utilizado para a obtenção das expressões é semelhante ao utilizado na obtenção dos resultados apresentados anteriormente, sendo que desta vez estenderemos nossos cálculos para sistemas multipartidos incluindo, em determinados casos, algumas peculiaridades como por exemplo a utilização de conjuntos de equações com diferentes quantidades de partições para a mesma variável.

### 4.3.1 GENERALIZAÇÃO DAS LEIS DE CONSERVAÇÃO DE CICLO

Mostraremos aqui a generalização das leis de conservação de ciclo para um número par e para um número ímpar de partes. Iniciaremos através da generalização das expressões para um sistema de quatro partes, sendo este o primeiro importante resultado que obtivemos em nossos estudos sobre relações monogâmicas entre estados multipartidos.

#### SISTEMAS COM NÚMERO PAR DE PARTES

À primeira vista, tem-se a impressão de que a ideia por trás da derivação da lei de conservação 4.39 funciona apenas para sistemas com número ímpar de partes, uma vez que somente nesses casos as entropias possuem o número certo de partes para cancelar umas às outras e podem resultar em igualdades ao invés de desigualdades. No entanto, para sistemas com número par de partes, ainda é possível fazer as entropias cancelarem umas às outras variando o número de subsistemas nas equações.

SISTEMAS COM 4 PARTES:

Voltemos ao caso de sistemas com quatro partes, por exemplo. Escreveremos a seguir um conjunto específico de equações, alternando o número de partes (partículas) nos emaranhamentos e discórdias. Para tanto, partiremos de  $E_{a|bc} = \delta_{a|d}^{\leftarrow} + S_{a|d}$  (Equação 3.51), de onde podemos derivar as seguintes relações para sistemas de 4 partes:

$$\begin{aligned}
 E_{a|bc} &= \delta_{a|d}^{\leftarrow} + S_{a|d}; \\
 E_{c|d} &= \delta_{c|ba}^{\leftarrow} + S_{c|ba}; \\
 E_{d|ab} &= \delta_{d|c}^{\leftarrow} + S_{d|c}; \\
 E_{b|c} &= \delta_{b|ad}^{\leftarrow} + S_{b|ad}.
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Como  $S_{x|y} = S_{xy} - S_y$  e  $S_{x|yz} = S_{xyz} - S_{yz}$ , temos então:

$$\begin{aligned}
 E_{a|bc} &= \delta_{a|d}^{\leftarrow} + S_{ad} - S_d; \\
 E_{c|d} &= \delta_{c|ba}^{\leftarrow} + S_{cba} - S_{ba}; \\
 E_{d|ab} &= \delta_{d|c}^{\leftarrow} + S_{dc} - S_c; \\
 E_{b|c} &= \delta_{b|ad}^{\leftarrow} + S_{bad} - S_{ad}.
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Pode-se aqui verificar novamente que a soma das entropias será nula, uma vez que a segunda entropia de uma equação cancela a primeira entropia da próxima equação até o ciclo se fechar. Somando as equações anteriores de 4.33, teremos então:

$$E_{a|bc} + E_{b|c} + E_{c|d} + E_{d|ab} = \delta_{a|d}^{\leftarrow} + \delta_{b|ad}^{\leftarrow} + \delta_{c|ba}^{\leftarrow} + \delta_{d|c}^{\leftarrow}. \tag{4.34}$$

Essa equação é uma lei de conservação para emaranhamento e discórdia para sistemas de quatro partes em que o número de partes existentes no EF e na DQ é alterado. Portanto, vemos que é possível derivar leis de conservação para sistemas multipartidos compostos por um número par de partes, porém o número de partículas nas bipartições do EF e DQ deve variar de acordo com a Equação 4.34.

SISTEMAS COM 6 PARTES:

Apesar de um bom exemplo elucidativo, a Equação 4.34 ainda não deixa explícita uma regra geral completa para se obter uma lei geral de conservação para um número par de partes. Esta regra geral fica evidente quando escrevemos as equações para um sistema de 6 partes. Isso pode ser feito de maneira análoga ao sistema de 4 partes, de onde teremos para 6 partes, substituindo letras por números, as seguintes expressões para a entropia:

$$\begin{aligned}
 E_{1|23} &= \delta_{1|654}^{\leftarrow} + S_{1654} - S_{654}; \\
 E_{3|456} &= \delta_{3|21}^{\leftarrow} + S_{321} - S_{21}; \\
 E_{6|12} &= \delta_{6|543}^{\leftarrow} + S_{6543} - S_{543}; \\
 E_{2|345} &= \delta_{2|16}^{\leftarrow} + S_{216} - S_{16}; \\
 E_{5|61} &= \delta_{5|432}^{\leftarrow} + S_{5432} - S_{432}; \\
 E_{1|234} &= \delta_{1|65}^{\leftarrow} + S_{165} - S_{65}; \\
 E_{4|56} &= \delta_{4|321}^{\leftarrow} + S_{4321} - S_{321}; \\
 E_{6|123} &= \delta_{6|54}^{\leftarrow} + S_{654} - S_{54}; \\
 E_{3|45} &= \delta_{3|216}^{\leftarrow} + S_{3216} - S_{216}; \\
 E_{5|612} &= \delta_{5|43}^{\leftarrow} + S_{543} - S_{43}; \\
 E_{2|34} &= \delta_{2|165}^{\leftarrow} + S_{2165} - S_{165}; \\
 E_{4|561} &= \delta_{4|32}^{\leftarrow} + S_{432} - S_{32}.
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Semelhante ao que ocorre nos casos anteriores, quando todas as equações de 4.35 são somadas, a entropia negativa de uma equação cancela a entropia positiva da próxima equação. O ciclo se fecha quando a entropia negativa da última equação cancela a entropia positiva da primeira equação. O número de partículas nas bipartições também se alterna entre  $N/2$  e  $N/2 - 1$ , sendo  $N$  o número total de partículas que compõem o sistema. O resultado portanto é a

seguinte lei de conservação, a qual é obtida somando as 12 equações de 4.35:

$$\begin{aligned}
& E_{1|234} + E_{2|345} + E_{3|456} + E_{4|561} + E_{5|612} + E_{6|123} + \\
& E_{1|23} + E_{2|34} + E_{3|45} + E_{4|56} + E_{5|61} + E_{6|12} = \\
& \delta_{1|56}^{\leftarrow} + \delta_{2|61}^{\leftarrow} + \delta_{3|12}^{\leftarrow} + \delta_{4|23}^{\leftarrow} + \delta_{5|34}^{\leftarrow} + \delta_{6|45}^{\leftarrow} + \\
& \delta_{1|456}^{\leftarrow} + \delta_{2|156}^{\leftarrow} + \delta_{3|126}^{\leftarrow} + \delta_{4|123}^{\leftarrow} + \delta_{5|234}^{\leftarrow} + \delta_{6|345}^{\leftarrow}.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Das Equações 4.34 e 4.36, podemos determinar uma lei geral de conservação para sistemas multipartidos com um número  $N$  par de partes. Seja  $n = N/2$ , teremos então:

$$\begin{aligned}
& E_{1|23,\dots,n} + E_{1|23,\dots,n+1} + E_{2|34,\dots,n+1} + \\
& E_{2|34,\dots,n+2} + \dots + E_{N|12,\dots,n-1} + E_{N|12,\dots,n} = \\
& \delta_{1|N,N-1,\dots,n+1}^{\leftarrow} + \delta_{1|N,N-1,\dots,n+2}^{\leftarrow} + \delta_{2|1,N,\dots,n+2}^{\leftarrow} + \\
& \delta_{2|1,N,\dots,n+3}^{\leftarrow} + \dots + \delta_{N|N-1,N-2,\dots,n+1}^{\leftarrow} + \delta_{N|N-1,N-2,\dots,n}^{\leftarrow}.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Este é um dos mais importantes resultados desta primeira parte da Tese, a partir do qual pudemos generalizar as leis de conservação para um ciclo de medidas (Equações 3.64 e 3.65) de um sistema de três partes para um sistema arbitrário com número par de partes.

#### SISTEMAS COM NÚMERO ÍMPAR DE PARTES

Ao considerarmos sistemas com número ímpar de partes, a Equação 4.28 é a ideia chave para obtermos uma equação geral para sistemas multipartidos. Seja um sistema de  $N$  partes tal que  $n = (N - 1) / 2$ , temos a seguinte generalização para as expressões do EF:

$$\begin{aligned}
E_{1|2,3,\dots,n+1} &= \delta_{1|N,N-1,\dots,n+2}^{\leftarrow} + S_{1,N,N-1,\dots,n+2} - S_{N,N-1,\dots,n+2}; \\
E_{n+1|n+2,n+3,\dots,N} &= \delta_{n+1|n,n-1,\dots,1}^{\leftarrow} + S_{n+1,n,\dots,1} - S_{n,n-1,\dots,1}; \\
E_{N|1,2,\dots,n} &= \delta_{N|N-1,N-2,\dots,n+1}^{\leftarrow} + S_{N,N-1,\dots,n+1} - S_{N-1,N-2,\dots,n+1}; \\
E_{n|n+1,n+2,\dots,N-1} &= \delta_{n|n-1,n-2,\dots,N}^{\leftarrow} + S_{n,n-1,\dots,N} - S_{n-1,n-2,\dots,1,N}; \\
&\vdots \\
E_{n+2|n+3,n+4,\dots,1} &= \delta_{n+2|n+1,n,\dots,2}^{\leftarrow} + S_{n+2,n+1,n,\dots,2} - S_{n+1,n,\dots,2}.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Ao somarmos as equações de 4.38, as entropias irão se cancelar. Isso porque cada equação está sempre baseada nos  $n$  subsistemas à direita da equação anterior. Desse modo, podemos verificar que, quando as equações são somadas, a segunda entropia de qualquer equação cancela a primeira entropia da próxima equação até o ciclo ser fechado. Essa característica pode ser mais facilmente observada através da análise das equações de 4.27, onde  $-S_{ed}$  cancela  $S_{cba}$ ,  $-S_{ba}$  cancela  $S_{edc}$ , e assim por diante. O resultado é então a seguinte lei de conservação:

$$\begin{aligned}
 & E_{1|2,3,\dots,n+1} + E_{2|3,4,\dots,n+2} + \dots + E_{N|1,2,\dots,n} = \\
 & \delta_{1|N,N-1,\dots,n+2}^{\leftarrow} + \delta_{2|1,N,N-1,\dots,n+3}^{\leftarrow} + \dots + \delta_{N|N-1,N-2,\dots,n+1}^{\leftarrow}.
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

A Equação 4.39 é a generalização da Equação 3.65 para um número  $N$  ímpar de partes. Ela mostra como a quantidade de comunicação quântica necessária em cada bipartição é igual à soma das informações obtidas nas correlações não-locais, conforme medido pela discórdia quântica. Dessa forma, para se obter uma igualdade dessas duas quantidades (quando o número de subsistemas for ímpar), devemos organizar a soma dos emaranhamentos formando um ciclo que inclua todas as bipartições em uma direção ( $i|1, 2, \dots, n$ ) e a soma das discórdias com todas as bipartições na direção oposta ( $i|N-1, N-2, \dots, n+1$ ), tal que  $i$  é um número inteiro de 1 a  $N$ .

As Equações 4.37 e 4.39 são a generalização da Equação 3.65 para um número par e ímpar de partes, respectivamente. A organização da soma dos termos na Equação 4.37 é mais complexa do que na Equação 4.39, pois a quantidade de partículas envolvidas nos EF e DQ é alternada. Apesar disso, a mesma interpretação se aplica. Em todos os casos, ao lado esquerdo temos uma soma de emaranhamentos que representa a quantidade de comunicação quântica necessária para formar a correlação em cada bipartição, enquanto que no lado direito, as discórdias representam a quantidade de informação que não é acessível localmente. Essas duas equações mostram, para estados puros multipartidos gerais, como o EF e a DQ são distribuídas em uma expressão mais simples e intuitiva, associando a quantidade de comunicação quântica necessária para formar as correlações em bipartições com o número de correlações inacessíveis pelas operações locais.

### 4.3.2 GENERALIZAÇÃO DA LEI DE CONSERVAÇÃO PARA A DISCÓRDIA

Nesta seção iremos focar em como a DQ é distribuída, estendendo a relação  $\delta_{a|b}^{\leftarrow} + \delta_{b|c}^{\leftarrow} + \delta_{c|a}^{\leftarrow} = \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + \delta_{a|c}^{\leftarrow}$  (Equação 3.63) de um sistema de três partes para um sistema de  $n$  partes. Aqui será deduzida uma expressão fechada baseada apenas em DQs, a qual demonstra o modo como as correlações quânticas são distribuídas para estados puros gerais.

#### SISTEMAS DE 4 PARTES

A fim de determinar uma lei geral para a distribuição de discórdia em um ciclo fechado para sistemas multipartidos, começaremos considerando um sistema de quatro partes. Primeiramente, partiremos das Equações 4.19 e 4.20, de onde temos:

$$\begin{aligned}
 E_{a|bc} &= \delta_{a|d}^{\leftarrow} + S_{a|d}; \\
 E_{b|cd} &= \delta_{b|a}^{\leftarrow} + S_{b|a}; \\
 E_{c|da} &= \delta_{c|b}^{\leftarrow} + S_{c|b}; \\
 E_{d|ab} &= \delta_{d|c}^{\leftarrow} + S_{d|c}; \\
 \therefore E_{a|bc} + E_{b|cd} + E_{c|da} + E_{d|ab} &= \\
 &= \delta_{a|d}^{\leftarrow} + \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + \delta_{d|c}^{\leftarrow} + S_{a|d}^{\leftarrow} + S_{b|a}^{\leftarrow} + S_{c|b}^{\leftarrow} + S_{d|c}^{\leftarrow}.
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Das Equações 4.22 e 4.23 temos:

$$\begin{aligned}
 E_{ab} &= \delta_{a|cd}^{\leftarrow} + S_{a|cd}; \\
 E_{bc} &= \delta_{b|ad}^{\leftarrow} + S_{b|ad}; \\
 E_{cd} &= \delta_{c|ab}^{\leftarrow} + S_{c|ab}; \\
 E_{da} &= \delta_{d|bc}^{\leftarrow} + S_{d|bc}; \\
 \therefore E_{ab} + E_{bc} + E_{cd} + E_{da} &= \\
 &= \delta_{a|cd}^{\leftarrow} + \delta_{b|ad}^{\leftarrow} + \delta_{c|ab}^{\leftarrow} + \delta_{d|bc}^{\leftarrow} + S_{a|cd}^{\leftarrow} + S_{b|ad}^{\leftarrow} + S_{c|ab}^{\leftarrow} + S_{d|bc}^{\leftarrow}.
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

O aspecto interessante dado pela Equação 4.40 é a possibilidade de organizá-la com a Equação 4.41 a fim de se obter uma igualdade entre emaranhamento e discórdia, mesmo para sistemas

de quatro partes. De fato, somando as equações 4.40 e 4.41 temos:

$$\begin{aligned}
& E_{a|bc} + E_{b|cd} + E_{c|da} + E_{d|ab} + E_{ab} + E_{bc} + E_{cd} + E_{da} = \\
& \delta_{a|d}^{\leftarrow} + \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + \delta_{d|c}^{\leftarrow} + \delta_{a|cd}^{\leftarrow} + \delta_{b|ad}^{\leftarrow} + \delta_{c|ab}^{\leftarrow} + \delta_{d|bc}^{\leftarrow} + \\
& S_{a|cd} + S_{b|ad} + S_{c|ab} + S_{d|bc} + S_{a|d} + S_{b|a} + S_{c|b} + S_{d|c}.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Aqui novamente as entropias irão se cancelar. Isso pode ser visto através das equações de 4.43 a seguir, onde a entropia negativa de uma equação cancela a entropia positiva da equação seguinte:

$$\begin{aligned}
S_{a|cd} &= S_{acd} - S_{cd}; \\
S_{b|a} &= S_{ba} - S_a; \\
S_{d|bc} &= S_{dbc} - S_{bc}; \\
S_{a|d} &= S_{ad} - S_d; \\
S_{c|ab} &= S_{cab} - S_{ab}; \\
S_{d|c} &= S_{dc} - S_c; \\
S_{b|ad} &= S_{bad} - S_{ad}; \\
S_{c|b} &= S_{cb} - S_b.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Dessa forma teremos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
& E_{a|bc} + E_{b|cd} + E_{c|da} + E_{d|ab} + E_{ab} + E_{bc} + E_{cd} + E_{da} = \\
& \delta_{a|d}^{\leftarrow} + \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + \delta_{d|c}^{\leftarrow} + \delta_{a|cd}^{\leftarrow} + \delta_{b|ad}^{\leftarrow} + \delta_{c|ab}^{\leftarrow} + \delta_{d|bc}^{\leftarrow}.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

A Equação 4.44 é uma equação conservativa entre EF e DQ para sistemas de quatro partes, e mostra dois aspectos curiosos: primeiro, observamos que bipartições de tamanhos diferentes devem ser consideradas, uma vez que termos de três e duas partes aparecem na equação. Segundo, notamos que, ao contrário da relação conservativa de um estado puro tripartido ou de cinco partes, não há simetria entre os lados esquerdo e direito da equação. Certamente é um aspecto curioso que nos induz a buscar outra relação conservativa simétrica. Para esse propósito, consideramos um conjunto diferente de equações focando novamente no emaranhamento entre duas partes, porém ao contrário do conjunto de equações dadas em 4.41, escrevemos as relações de Koashi-Winter para  $E_{ba}$ ,  $E_{cb}$ ,  $E_{dc}$  e  $E_{ad}$ . Uma vez que o emaranhamento é uma entidade si-

métrica, essas quantidades de emaranhamento são equivalentes às fornecidas na Equação 4.41.

Com isso, podemos derivar um outro diferente conjunto de equações:

$$\begin{aligned}
E_{ab} &= \delta_{a|cd}^{\leftarrow} + S_{a|cd} \Rightarrow E_{ba} = \delta_{b|cd}^{\leftarrow} + S_{b|cd}; \\
E_{bc} &= \delta_{b|ad}^{\leftarrow} + S_{b|ad} \Rightarrow E_{cb} = \delta_{c|ad}^{\leftarrow} + S_{c|ad}; \\
E_{cd} &= \delta_{c|ab}^{\leftarrow} + S_{c|ab} \Rightarrow E_{dc} = \delta_{d|ab}^{\leftarrow} + S_{d|ab}; \\
E_{da} &= \delta_{d|bc}^{\leftarrow} + S_{d|bc} \Rightarrow E_{ad} = \delta_{a|bc}^{\leftarrow} + S_{a|bc}.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Somando as equações anteriores de 4.45 temos:

$$E_{ba} + E_{cb} + E_{dc} + E_{ad} = \delta_{b|cd}^{\leftarrow} + \delta_{c|ad}^{\leftarrow} + \delta_{d|ab}^{\leftarrow} + \delta_{a|bc}^{\leftarrow} + S_{b|cd} + S_{c|ad} + S_{d|ab} + S_{a|bc}. \tag{4.46}$$

Novamente, combinando o conjunto de equações de 4.46 acima com os de 4.40 e sabendo que as entropias se anulam, derivamos outra relação conservativa:

$$\begin{aligned}
E_{a|bc} + E_{b|cd} + E_{c|da} + E_{d|ab} + E_{ba} + E_{cb} + E_{dc} + E_{ad} = \\
\delta_{a|d}^{\leftarrow} + \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + \delta_{d|c}^{\leftarrow} + \delta_{b|cd}^{\leftarrow} + \delta_{c|ad}^{\leftarrow} + \delta_{d|ab}^{\leftarrow} + \delta_{a|bc}^{\leftarrow}.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Como  $E_{xy} = E_{yx}$ , as equações 4.44 e 4.47 são iguais. Dessa forma, igualando 4.44 com 4.47 teremos o seguinte resultado:

$$\delta_{a|bc}^{\leftarrow} + \delta_{b|cd}^{\leftarrow} + \delta_{c|ad}^{\leftarrow} + \delta_{d|ab}^{\leftarrow} = \delta_{a|cd}^{\leftarrow} + \delta_{b|ad}^{\leftarrow} + \delta_{c|ab}^{\leftarrow} + \delta_{d|bc}^{\leftarrow}. \tag{4.48}$$

A Equação 4.48 elucida uma propriedade interessante sobre a maneira como as correlações quânticas são compartilhadas em sistemas de quatro partes. A equação em questão mostra que a informação inacessível total sobre partes individuais após medições cíclicas bipartidas (ou seja,  $\delta_{a|bc}^{\leftarrow} + \delta_{b|cd}^{\leftarrow} + \delta_{c|ad}^{\leftarrow} + \delta_{d|ab}^{\leftarrow}$ ) é equivalente à informação inacessível total após medições contracíclicas. Além disso, é importante observar que a Equação 4.48 poderia ser obtida diretamente reorganizando o conjunto de equações dadas em 4.41 e em 4.46, porém escolhemos essa maneira uma vez que as equações conservativas entre EF e QD também são deduzidas.

## SISTEMAS DE 5 PARTES

Continuando nossos esforços para generalizar a lei de conservação da discórdia para sistemas multipartidos, exploramos os sistemas de cinco partes. Como sempre, começamos com três conjuntos de equações: De 3.51 podemos derivar as seguintes relações para sistemas de 5 partes:

$$\begin{aligned}
 E_{a|bcd} &= \delta_{a|e}^{\leftarrow} + S_{a|e}; \\
 E_{b|cde} &= \delta_{b|a}^{\leftarrow} + S_{b|a}; \\
 E_{c|dea} &= \delta_{c|b}^{\leftarrow} + S_{c|b}; \\
 E_{d|eab} &= \delta_{d|c}^{\leftarrow} + S_{d|c}; \\
 E_{e|abc} &= \delta_{e|d}^{\leftarrow} + S_{e|d}.
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Somando as equações anteriores de 4.49 obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
 E_{a|bcd} + E_{b|cde} + E_{c|dea} + E_{d|eab} + E_{e|abc} = \\
 \delta_{a|e}^{\leftarrow} + \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + \delta_{d|c}^{\leftarrow} + \delta_{e|d}^{\leftarrow} + S_{a|e} + S_{b|a} + S_{c|b} + S_{d|c} + S_{e|d}.
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

De 3.51 também podemos derivar as seguintes relações para sistemas de 5 partes:

$$\begin{aligned}
 E_{ab} &= \delta_{a|cde}^{\leftarrow} + S_{a|cde}; \\
 E_{bc} &= \delta_{b|ade}^{\leftarrow} + S_{b|ade}; \\
 E_{cd} &= \delta_{c|abe}^{\leftarrow} + S_{ca|be}; \\
 E_{de} &= \delta_{d|abc}^{\leftarrow} + S_{d|abc}; \\
 E_{ea} &= \delta_{e|bcd}^{\leftarrow} + S_{e|bcd}.
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Somando as equações anteriores de 4.51 obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
 E_{ab} + E_{bc} + E_{cd} + E_{de} + E_{ea} = \\
 \delta_{a|cde}^{\leftarrow} + \delta_{b|ade}^{\leftarrow} + \delta_{c|abe}^{\leftarrow} + \delta_{d|abc}^{\leftarrow} + \delta_{e|bcd}^{\leftarrow} + S_{a|cde} + S_{b|ade} + S_{ca|be} + S_{d|abc} + S_{e|bcd}.
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

As equações de 4.51 também podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
E_{ba} &= \delta_{b|cde}^{\leftarrow} + S_{b|cde}; \\
E_{cb} &= \delta_{c|ade}^{\leftarrow} + S_{c|ade}; \\
E_{dc} &= \delta_{d|abe}^{\leftarrow} + S_{d|abe}; \\
E_{ed} &= \delta_{e|abc}^{\leftarrow} + S_{e|abc}; \\
E_{ae} &= \delta_{a|bcd}^{\leftarrow} + S_{a|bcd}.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Somando as equações anteriores de 4.53 obtemos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
E_{ba} + E_{cb} + E_{dc} + E_{ed} + E_{ae} = \\
\delta_{b|cde}^{\leftarrow} + \delta_{c|ade}^{\leftarrow} + \delta_{d|abe}^{\leftarrow} + \delta_{e|abc}^{\leftarrow} + \delta_{a|bcd}^{\leftarrow} + S_{b|cde} + S_{c|ade} + S_{d|abe} + S_{e|abc} + S_{a|bcd}.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Somando 4.50 com 4.52 e sabendo que as entropias se cancelam, obtemos diretamente a seguinte relação conservativa:

$$\begin{aligned}
E_{a|bcd} + E_{b|cde} + E_{c|dea} + E_{d|eab} + E_{e|abc} + E_{ab} + E_{bc} + E_{cd} + E_{de} + E_{ea} = \\
\delta_{a|e}^{\leftarrow} + \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + \delta_{d|c}^{\leftarrow} + \delta_{e|d}^{\leftarrow} + \delta_{a|cde}^{\leftarrow} + \delta_{b|ade}^{\leftarrow} + \delta_{c|abe}^{\leftarrow} + \delta_{d|abc}^{\leftarrow} + \delta_{e|bcd}^{\leftarrow}.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Agora somando 4.50 com 4.54 e sabendo que as entropias se cancelam, obtemos outra relação conservativa:

$$\begin{aligned}
E_{a|bcd} + E_{b|cde} + E_{c|dea} + E_{d|eab} + E_{e|abc} + E_{ba} + E_{cb} + E_{dc} + E_{ed} + E_{ae} = \\
\delta_{a|e}^{\leftarrow} + \delta_{b|a}^{\leftarrow} + \delta_{c|b}^{\leftarrow} + \delta_{d|c}^{\leftarrow} + \delta_{e|d}^{\leftarrow} + \delta_{b|cde}^{\leftarrow} + \delta_{c|ade}^{\leftarrow} + \delta_{d|abe}^{\leftarrow} + \delta_{e|abc}^{\leftarrow} + \delta_{a|bcd}^{\leftarrow}.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Sabendo que  $E_{xy} = E_{yx}$ , as equações 4.55 e 4.56 se igualam. Dessa forma, igualando 4.55 com 4.56, obtemos a lei de conservação para discórdia em sistemas de cinco partes:

$$\delta_{a|cde}^{\leftarrow} + \delta_{b|ade}^{\leftarrow} + \delta_{c|abe}^{\leftarrow} + \delta_{d|abc}^{\leftarrow} + \delta_{e|bcd}^{\leftarrow} = \delta_{a|bcd}^{\leftarrow} + \delta_{b|cde}^{\leftarrow} + \delta_{c|ade}^{\leftarrow} + \delta_{d|abe}^{\leftarrow} + \delta_{e|abc}^{\leftarrow}. \tag{4.57}$$

## LEI GERAL

Com os resultados apresentados nas Equações 4.48 e 4.57, podemos deduzir outro de nossos principais resultados, o qual consiste em uma lei para a distribuição de DQ em estados

puros multipartidos arbitrários. Para um sistema de  $N$  partes arbitrário, podemos escrever:

$$\delta_{1|L_1}^{\leftarrow} + \delta_{2|L_2}^{\leftarrow} + \dots + \delta_{N|L_N}^{\leftarrow} = \delta_{1|R_1}^{\leftarrow} + \delta_{2|R_2}^{\leftarrow} + \dots + \delta_{N|R_N}^{\leftarrow}, \quad (4.58)$$

onde  $L_i$  representa todas as  $(N - 2)$  partes de  $i$  ao lado esquerdo da equação 4.58, tal que  $L_i = \{i - 1, i - 2, i - 3, \dots, N, N - 1, N - 2, \dots, i + 2\}$ , considerando os  $(N - 2)$  primeiros valores entre 1 e  $N$  que podem ser obtidos. Desse modo,  $L_2$  representa, por exemplo, todos os subsistemas  $\{1, N, N - 1, N - 2, \dots, 3\}$  ao lado esquerdo, sendo que para sistemas puros o valor da discórdia independe da ordem dos subsistemas ( $\delta_{1|234}^{\leftarrow} = \delta_{1|432}^{\leftarrow}$ , por exemplo). Partindo do mesmo princípio,  $R_i$  representa todas as  $(N - 2)$  partes ao lado direito da equação para  $i$ , de modo que cada subsistema particionado com  $i$  ao lado direito corresponde ao mesmo subsistema particionado com  $i$  ao lado esquerdo em uma posição anterior do ciclo ( $\delta_{5|123}^{\leftarrow}$  ao lado direito corresponde a  $\delta_{5|234}^{\leftarrow}$  ao lado esquerdo, por exemplo).

Como podemos observar, para um determinado sistema com  $N$  partes, a soma das informações inacessíveis de cada  $i$ -ésima parte, dada uma observação sobre as partes restantes do sistema com exceção da parte imediatamente à direita de  $i$ , é igual à soma das informações inacessíveis de cada  $i$ -ésima parte com uma observação sobre as partes restante, com exceção da parte imediatamente à esquerda de  $i$ . Um esquema ilustrativo e intuitivo é mostrado na Figura 4.1, onde mostramos como exemplo esta ideia para uma parte apenas. Na Figura 4.1a, mostramos as informações inacessíveis para a parte 1, dada uma observação sobre as partes restantes com exceção daquela imediatamente à sua direita, ou seja, a parte 2. Já na Figura 4.1b, mostramos novamente as informações inacessíveis para a parte 1, mas agora é feita uma observação sobre as partes restantes com exceção daquela imediatamente à esquerda, isto é, a parte  $n$ . A igualdade monogâmica é alcançada fazendo o mesmo procedimento para todas as  $n$  partes. Estes resultados generalizam a lei de conservação para a DQ considerando sistemas multipartidos.

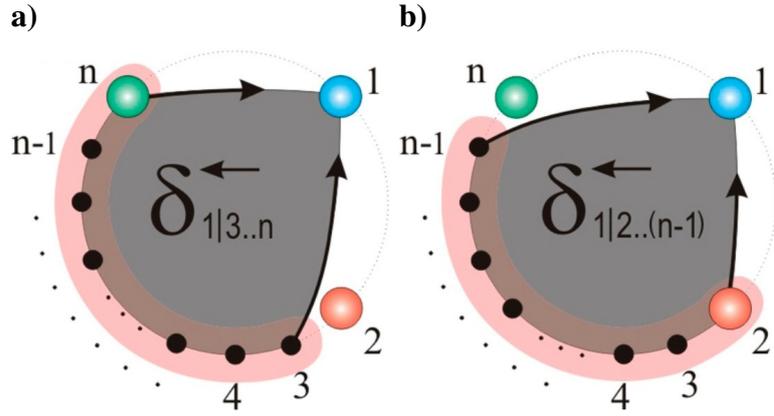


Figura 4.1: **a)** Informações inacessíveis da parte 1 dada uma observação sobre as partes restantes do sistema com exceção da parte imediatamente à direita (parte 2). **b)** Informações inacessíveis da parte 1 dada uma observação sobre as partes restantes do sistema com exceção da parte imediatamente à esquerda (parte  $n$ ). A igualdade monogâmica é alcançada repetindo o mesmo procedimento para todas as  $n$  partes do sistema (FERREIRA et al., 2018).

### 4.3.3 LEI DE CONSERVAÇÃO COM MEDIDAS EM UMA DAS PARTES

Como resultado final, apresentamos outra lei de conservação monogâmica considerando medidas feitas apenas em uma das partes do sistema. O aspecto importante desta lei consiste no fato de sua expressão geral ser válida tanto para sistemas com número par de partes quanto para sistemas com número ímpar de partes. Para deduzi-la, inicialmente partiremos de sistemas de quatro partes (Equação 3.51), de onde podemos derivar as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 E_{bc|a} &= \delta_{bc|d}^{\leftarrow} + S_{bc|d}; \\
 E_{cd|b} &= \delta_{cd|a}^{\leftarrow} + S_{cd|a}; \\
 E_{da|c} &= \delta_{da|b}^{\leftarrow} + S_{da|b}; \\
 E_{ab|d} &= \delta_{ab|c}^{\leftarrow} + S_{ab|c}.
 \end{aligned}
 \tag{4.59}$$

Ao somarmos as equações anteriores de 4.59, as entropias irão se cancelar tal como mostra a Equação 4.60 abaixo, onde a entropia positiva de cada equação cancela a entropia negativa da

equação seguinte:

$$\begin{aligned}
S_{bc|d} &= S_{bcd} - S_d = S_a - S_d; \\
S_{cd|a} &= S_{cda} - S_a = S_b - S_a; \\
S_{da|b} &= S_{dab} - S_b = S_c - S_b; \\
S_{ab|c} &= S_{abc} - S_c = S_d - S_c.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Desse modo teremos então o seguinte resultado:

$$E_{bc|a} + E_{cd|b} + E_{da|c} + E_{ab|d} = \delta_{bc|d}^{\leftarrow} + \delta_{cd|a}^{\leftarrow} + \delta_{da|b}^{\leftarrow} + \delta_{ab|c}^{\leftarrow}. \tag{4.61}$$

Dessa forma, a Equação 4.61 consiste em uma lei de conservação com a propriedade de que todas as medidas nas discórdias são feitas apenas em um subsistema.

A Equação 4.61 pode ser facilmente generalizada para um número arbitrário de partes. Para isso, vamos considerar um sistema de  $N$  partes e nomeá-las com números de 1 a  $N$  ao invés de letras. Podemos então escrever o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned}
E_{2:N-1|1} &= \delta_{2:N-1|N}^{\leftarrow} + S_{2:N-1|N}; \\
E_{3:N|2} &= \delta_{3:N|1}^{\leftarrow} + S_{3:N|1}; \\
E_{4:1|3} &= \delta_{4:1|2}^{\leftarrow} + S_{4:1|2}; \\
&\vdots = \vdots + \vdots \\
E_{1:N-2|N} &= \delta_{1:N-2|N-1}^{\leftarrow} + S_{1:N-2|N-1},
\end{aligned} \tag{4.62}$$

onde a notação  $X : Y$  significa todos os subsistemas entre os números  $X$  e  $Y$ , tal que  $X < Y$ . Quando  $X > Y$ , significa todos os subsistemas de  $X$  a  $N$  e 1 a  $Y$ . Somando as equações de 4.62, todas as entropias são canceladas e o resultado final é a seguinte lei de conservação entre emaranhamento e discórdia:

$$\begin{aligned}
&E_{2:N-1|1} + E_{3:N|2} + E_{4:1|3} + \dots + E_{1:N-2|N} = \\
&\delta_{2:N-1|N}^{\leftarrow} + \delta_{3:N|1}^{\leftarrow} + \delta_{4:1|2}^{\leftarrow} + \dots + \delta_{1:N-2|N-1}^{\leftarrow}.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

Esta lei de conservação generalizada mostra uma relação entre EF e DQ quando apenas uma parte é medida, como podemos observar no lado direito da Equação 4.63. Embora as bipartições

em 4.63 se sobreponham, a equação também mostra que a soma das comunicações quânticas necessárias para formar as correlações nas respectivas bipartições é igual à soma das informações localmente inacessíveis.

Como anteriormente mencionado, a maneira como as correlações quânticas são distribuídas em um sistema quântico multipartido é um aspecto de grande interesse para a comunidade científica. Embora saiba-se que a distribuição de correlações não pode ser feita livremente, a compreensão de como esse mecanismo funciona possui implicações para o estudo da monogamia das correlações quânticas, bem como para a compreensão de protocolos e outros aspectos fundamentais de informação quântica. Aqui, apresentamos um conjunto de leis de conservação monogâmicas que regem como o EF e a QD são distribuídos em sistemas multipartidos. Essas igualdades vinculam as restrições na distribuição do emaranhamento com a discórdia e vice-versa, mostrando que as propriedades monogâmicas dessas duas medidas estão profundamente conectadas. Inicialmente, focamos em sistemas de quatro e cinco partes e depois ampliamos nossos resultados para sistemas multipartidos. Mostramos não apenas uma forma geral de como a DQ e o EF são distribuídos, mas também uma expressão fechada que governa como a DQ é distribuída em sistemas multipartidos. Ademais, o estudo das relações obtidas pode corroborar com a teoria desenvolvida a partir dos princípios fundamentais, servindo portanto como uma ferramenta para que as teorias de monogamia de estados possam ser comprovadas. De fato, um contraexemplo dessas equações resultaria em problemas na teoria em questão. Dessa forma, nossos resultados elucidam aspectos importantes na distribuição da correlação quântica em sistemas com muitas partes e podem, em um futuro próximo, ter várias implicações para a compreensão da teoria da informação quântica.

## CAPÍTULO 5

# COMPUTAÇÃO QUÂNTICA BASEADA EM MEDIDAS PROJETIVAS

Dado o estudo prévio das correlações quânticas em sistemas multipartidos, pudemos estender nosso trabalho para o estudo de uma técnica a qual utiliza sistemas multipartidos para o processamento de informação quântica. Mais especificamente, iniciamos nossos estudos sobre a técnica de computação quântica baseada em medidas projetivas, a qual utiliza um conjunto especial de estados maximamente correlacionados para a realização de operações lógicas.

No presente capítulo apresentaremos os conceitos referentes à técnica de computação quântica baseada em medidas projetivas, bem como descreveremos os procedimentos necessários à realização de uma operação de rotação  $XZX$  arbitrária no vetor de Bloch, além da execução da porta lógica CNOT para sistemas quânticos. Em seguida, apresentamos os conceitos de fidelidade e fidelidade de porta, bem como o conceito de fidelidade média por nós proposto a fim de melhor avaliar a dinâmica dissipativa das operações lógicas, o qual consiste na determinação de um valor médio para a fidelidade considerando todos os possíveis resultados de medidas e diferentes estados iniciais. Em seguida, apresentaremos os princípios de Markovianidade e não-Markovianidade, os quais estão atrelados aos processos de ruído, bem como os operadores de Kraus, os quais foram utilizados para modelar os canais dissipativos *amplitude*

*damping* e *phase damping*, utilizados em nossos cálculos e discutidos em detalhes ao final do capítulo.

## 5.1 INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE MBQC

As teorias de computação e informação quântica são áreas de pesquisa que constituem tópicos de grande interesse tanto do ponto de vista acadêmico quanto tecnológico, uma vez que possuem propriedades características as quais permitem o processamento de grande quantidade de informação simultaneamente, permitindo a realização de determinadas tarefas as quais seriam inviáveis ou impossíveis de serem executadas através da tecnologia de computação e informação clássica (SHOR, 1999; WOLF, 2017), trazendo conseqüentemente um grande impacto à sociedade.

Nos últimos anos, diversos avanços tecnológicos e novas estratégias de processamento de informação foram desenvolvidas, contribuindo dessa forma para a elaboração de um computador quântico mais eficiente. Um dos grandes avanços foi o desenvolvimento da técnica de computação quântica baseada em medidas projetivas (em inglês MBQC: *measurement-based quantum computing*) ou *one-way quantum computing* (RAUSSENDORF; BRIEGEL, 2001; BRIEGEL et al., 2009; BRIEGEL; RAUSSENDORF, 2001; GROSS; EISERT, 2007; GROSS et al., 2007; GROSS; EISERT, 2010; CAI et al., 2009; RAUSSENDORF; BROWNE; BRIEGEL, 2003), inicialmente proposta por Robert Raussendorf e Hans Jürgen Briegel, que consiste em um método de computação o qual utiliza apenas medidas projetivas em qubits ao invés das operações propriamente ditas para o processamento de informação. A técnica em questão primeiramente prepara um estado de qubits emaranhados e então executa medições nos qubits individualmente, sendo tal processamento dito “unidirecional” (*one-way*) uma vez que o estado de *cluster*, como será discutido adiante, é destruído pelas medições, sendo portanto um processo irreversível. Vale também frisar que ao término do procedimento de medidas, o estado resultante geralmente estará em uma base diferente da computacional. Apesar do resultado de cada medição individual ser aleatório, o sistema está relacionado de tal maneira que a computação sempre ocorre de maneira bem-sucedida ao final do processo.

Com relação à sua aplicabilidade, desde a primeira realização experimental de um com-

putador quântico baseado em medidas projetivas feita por Philip Walther et al. (WALTHER et al., 2005) até os dias atuais, diversos avanços importantes puderam ser obtidos, tais como o desenvolvimento de nanoestruturas fotônicas artificiais para a criação de estados de *cluster* (LODAHL, 2018), avanços com relação à medidas sequenciais de correlação entre qubits (NEGNEVITSKY et al., 2018), criação de redes ópticas tridimensionais com emaranhamento em larga escala (KUMAR et al., 2018), geração de estados de cluster com base em subsistemas com mais de duas dimensões – os quais possibilitam novos algoritmos e são mais robustos à ação de ruídos (REIMER et al., 2018), aumento da escalabilidade de sistemas quânticos (KUES et al., 2019), criação de estados de *cluster* de longa extensão (PANT et al., 2019), bem como na produção de *graph states* fotônicos (ADCOCK et al., 2019). Dessa forma, os recentes trabalhos nesta área vêm demonstrado avanços expressivos através da elaboração de dispositivos cada vez mais eficientes e viáveis do ponto vista experimental, motivando o desenvolvimento de novas pesquisas nesta área cujas expectativas de progresso mostram-se promissoras para futuros projetos. No entanto, apesar dos importantes avanços obtidos ao longo dos últimos anos, um dos grandes desafios para o desenvolvimento de computadores quânticos é lidar com o ruído proveniente do ambiente externo. Desse modo, apesar de existir atualmente uma comunidade científica dedicada ao estudo da MBQC, a quantidade de trabalhos existentes na literatura para esse tipo de computação, os quais abordam sistemas quânticos abertos, ainda é escassa. É justamente nesse sentido, explorando uma linha de pesquisa onde ainda há muitas questões em aberto, que desenvolvemos os nossos estudos.

## 5.2 OPERAÇÕES LÓGICAS ATRAVÉS DE MEDIDAS PROJATIVAS

Como anteriormente mencionado, a MBQC consiste em um modelo de computação quântica universal realizada através de medidas em um único qubit por vez (medidas projetivas locais), em uma classe particular de estados maximamente emaranhados: os estados de *cluster*. Desse modo, as medições são utilizadas para alterar o estado presente do sistema de modo a obter uma operação lógica ao final do processo, destruindo assim o emaranhamento de cada

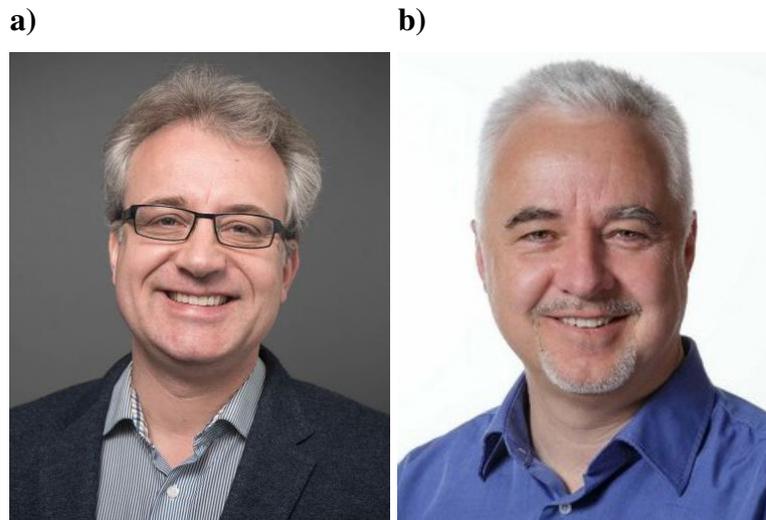


Figura 5.1: a) Robert Raussendorf (COLUMBIA, 2020) e b) Hans Jürgen Briegel (VIENNA, 2020). Idealizadores da técnica de computação quântica baseada em medidas projetivas.

qubit conforme as medidas forem sendo efetuadas, podendo cada qubit ser utilizado, portanto, uma única vez. Com relação aos estados de *cluster*, estes consistem em um conjunto de qubits emaranhados e portanto muito fortemente correlacionados, podendo ser criados em sistemas de dois níveis a baixas temperaturas através de interações do tipo Ising apenas com spins inteiros entre si e com um campo magnético externo, tanto para cadeias lineares quanto para redes bidimensionais e também tridimensionais. Tal interação pode ser ligada durante um determinado intervalo de tempo e depois desligada. Inicialmente, antes da interação ser ligada, o estado do sistema é separável e todos os qubits que farão parte do *cluster* encontram-se no estado  $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$ . Para se criar, por exemplo, um estado de *cluster* linear de cinco qubits  $|\Psi_C\rangle$ , primeiramente criamos o seguinte estado  $|\Psi\rangle$  ao qual posteriormente aplicaremos as interações do tipo Ising:

$$|\Psi\rangle = |+\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 \otimes |+\rangle_3 \otimes |+\rangle_4 \otimes |+\rangle_5. \quad (5.1)$$

Uma vez que o Hamiltoniano do tipo Ising age uniformemente na cadeia (ou rede) de qubits, um *cluster* inteiro de partículas vizinhas emaranhadas passa imediatamente a ser formado (AR-RUDA, 2011). O Hamiltoniano em questão pode ser definido como

$$H_{\text{int}} = \sum_{j=1}^4 \frac{1 + \sigma_z^j}{2} \frac{1 - \sigma_z^{j+1}}{2}, \quad (5.2)$$

sendo  $j$  o índice dos qubits e  $\sigma_z$  a Matriz  $z$  de Pauli (2.16). O estado de *cluster*  $|\Psi_C\rangle$  é assim criado através da aplicação do operador  $U$  em  $|\Psi\rangle$ , ou seja,  $|\Psi_C\rangle = U|\Psi\rangle$ , tal que  $U = e^{-i\pi H_{\text{int}}}$ .

Em um sistema de *cluster* de qubits, o estado de um qubit específico também pode ser teletransportado para outro qubit através de um “fio de qubits”. Seja um número ímpar de qubits inicialmente preparados no estado  $|\psi_{in}\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 \otimes \cdots \otimes |+\rangle_n$  e em seguida emaranhados, o estado do primeiro qubit  $|\psi_{in}\rangle$ , para determinadas operações, pode ser teletransportado para o último qubit  $|\psi_{out}\rangle_n$  com a informação já processada através de uma sequência de medidas. Um procedimento análogo também pode ser feito para um número par de qubits, utilizado em determinados tipos de portas lógicas como por exemplo a CNOT. A fim de elucidarmos tais processos computacionais, a seguir mostraremos os procedimentos adotados para uma rotação  $XZX$  arbitrária no vetor de Bloch, o qual inclui as portas NOT e  $Z$ , bem como mostraremos também o procedimento necessário para efetuar a porta CNOT.

### 5.2.1 ROTAÇÃO $XZX$ ARBITRÁRIA NO VETOR DE BLOCH

Apenas através de medidas projetivas é possível executar uma operação  $U_R(\xi, \eta, \zeta) = U_x(\zeta) U_z(\eta) U_x(\xi)$  no estado inicial de um qubit, onde de acordo com a representação de Euler  $U_x(\alpha) = e^{(-i\alpha \frac{\sigma_x}{2})}$  e  $U_z(\alpha) = e^{(-i\alpha \frac{\sigma_z}{2})}$ , resultando, ao final do processo, em uma rotação arbitrária  $XZX$  do estado inicial em questão, geralmente em uma base diferente da computacional. Como será posteriormente discutido, caso queiramos obter o resultado na base computacional propriamente dita, uma operação de correção  $B_m$  pode ser necessária.

Uma rotação  $XZX$  arbitrária de fato consiste em uma importante operação visto que esta permite deslocar o vetor de Bloch para qualquer ponto da esfera. Com relação às portas NOT e  $Z$ , estas são casos particulares desse procedimento, e ocorrem para  $U_R(\pi, 0, 0)$  ou  $U_R(0, 0, \pi)$  (porta NOT) e  $U_R(0, \pi, 0)$  (porta  $Z$ ). O foco de nossos estudos será posteriormente a implementação de uma rotação  $\pm\pi$  nas direções  $X$  ou  $Z$ , onde demonstraremos que para esses casos a fidelidade média será idêntica. A seguir será ilustrado o procedimento de criação do estado de *cluster*, do qual partiremos a fim de executar as medidas projetivas.

## CRIAÇÃO DO ESTADO DE *cluster* COM 5 QUBITS

A fim de se criar um estado de *cluster* para a realização das operações  $XZX$ , partimos inicialmente de um estado

$$|\Psi(\psi_{in})\rangle = |\psi_{in}\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 \otimes |+\rangle_3 \otimes |+\rangle_4 \otimes |+\rangle_5, \quad (5.3)$$

onde

$$|\psi_{in}\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle. \quad (5.4)$$

Como anteriormente mencionado, a criação do estado de *cluster* é feita via interações do tipo Ising, onde o operador de criação é dado por  $U = e^{-i\pi H_{int}}$ , e sendo o hamiltoniano descrito pela Equação 5.2. A operação é feita em pares de forma sequencial, introduzindo interações entre os qubits 12, 23, 34 e 45, de forma que, ao final do processo, o estado de *cluster* estará formado.

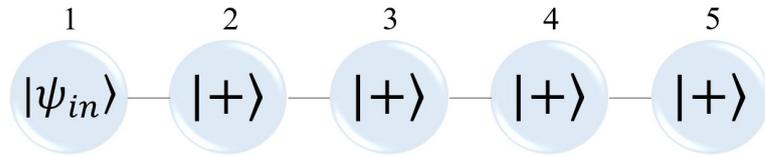


Figura 5.2: Estado inicial para a formação de um *cluster* com 5 qubits.

Com o estado de *cluster* criado, o recurso necessário para a computação quântica baseada em medidas estará pronto, de forma que as medidas projetivas serão então executadas a fim de implementar a operação lógica desejada.

## MEDIDAS PROJETIVAS

Após o estado de *cluster* ter sido criado, as medidas projetivas são efetuadas nos qubits 1 ao 4, sequencialmente. Em seguida, é tomado o traço parcial nos qubits 1, 2, 3 e 4, restando apenas o estado do último qubit  $|\psi_{out}\rangle$ , que deverá ser o equivalente ao estado de  $|\psi_{in}\rangle$  com a operação lógica aplicada, geralmente em uma base diferente da computacional:  $|\psi_{out}\rangle = U_R(\xi, \eta, \zeta) |\psi_{in}\rangle$ . As bases utilizadas para a medida de cada qubit podem ser expressas da

seguinte maneira (RAUSSENDORF; BRIEGEL, 2001):

$$B_j(\alpha_j) = \left\{ \frac{|0\rangle_j + e^{i\alpha_j}|1\rangle_j}{\sqrt{2}}, \frac{|0\rangle_j - e^{i\alpha_j}|1\rangle_j}{\sqrt{2}} \right\}, \quad (5.5)$$

sendo que para o:

$$\begin{aligned} \text{qubit 1: } \alpha_1 &= 0; \\ \text{qubit 2: } \alpha_2 &= (-1)^{s_1+1}\xi; \\ \text{qubit 3: } \alpha_3 &= (-1)^{s_2}\eta; \\ \text{qubit 4: } \alpha_4 &= (-1)^{s_1+s_3}\zeta. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Aqui,  $s_i$  está relacionado aos resultados das medidas dos qubits 1 a 4, respectivamente, sendo  $i$  o índice do qubit e  $s_i = 0$  caso o colapso ocorra no primeiro estado da Equação 5.5, bem como  $s_i = 1$  caso o colapso ocorra no segundo estado da Equação 5.5.

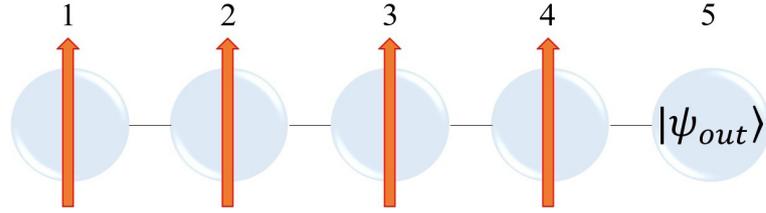


Figura 5.3: Medidas realizadas nos 4 primeiros qubits a fim de se efetuar uma operação de rotação  $XZX$  arbitrária no estado  $|\psi_{in}\rangle$  do primeiro qubit, obtendo ao final do processo a operação desejada no estado  $|\psi_{out}\rangle$  do quinto qubit, geralmente em uma base diferente da computacional.

Como anteriormente mencionado, a operação  $XZX$  pode ser obtida ao final do processo em uma base diferente da computacional, sendo que o estado final depende dos resultados das medidas. Caso se deseje no entanto escrevê-la na base computacional, torna-se então necessário efetuar uma operação unitária  $B_m$  a fim de que se obtenha o resultado na base desejada. Mais especificamente, ao término da computação, o estado final em uma base diferente da computacional  $|\psi_{out}\rangle$  pode ser relacionado ao mesmo estado na base computacional  $|\phi_{out}\rangle$  de acordo com a seguinte expressão:

$$|\phi_{out}\rangle = Z^{s_1+s_3} X^{s_2+s_4} |\psi_{out}\rangle. \quad (5.7)$$

Precisamos então definir uma operação  $B_m$  que torne  $|\phi_{out}\rangle = |\psi_{out}\rangle$ , ou seja, que elimine  $Z^{s_1+s_3} X^{s_2+s_4}$ . A operação  $B_m$  em questão pode apenas então ser expressa por:

$$B_m = X^{s_2+s_4} Z^{s_1+s_3}, \quad (5.8)$$

sendo as matrizes  $X$  e  $Z$  as matrizes 2.13 e 2.16, respectivamente, e  $s_j \in \{0, 1\}$  para  $j = 1, \dots, 4$  dependente dos resultados da medição. Dessa forma, a operação  $U_R$  é aquela propriamente dita se a correção for levada em conta, ou seja,  $U_R|\psi_{in}\rangle = B_m|\psi_{out}\rangle = |\phi_{out}\rangle$ . Vale frisar também que quando todos os resultados de medida colapsam em  $|0\rangle$ ,  $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0$ , e portanto  $B_m = 1$ , ou seja, a operação de correção não é necessária, visto que a igualdade  $|\psi_{out}\rangle = |\phi_{out}\rangle$  já é atingida.

De modo geral, a rotação extra obtida ao final do processo pode ser entendida como uma alteração de base, não podendo portanto ser considerado um problema para o processo de computação, uma vez que a resposta final é apenas expressa em termos de uma base diferente daquela definida inicialmente. De fato, essa operação adicional não depende da condição inicial do sistema, sendo desenvolvida apenas com base nos resultados das medições, não limitando dessa forma em nenhuma circunstância o poder computacional da MBQC e não trazendo portanto deficiências ou problemas para a computação em si.

## PORTA NOT

Como anteriormente mencionado, a operação NOT pode ser obtida ao final do processo se  $\xi = \pi$ ,  $\eta = 0$  e  $\zeta = 0$  ou  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$  e  $\zeta = \pi$ . Nesse caso, substituindo esses valores em 5.6, as bases da Equação 5.5 tornam-se  $B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = \pm \{|+\rangle, |-\rangle\}$ . Além disso, novamente o estado do último qubit será  $|\psi_{in}\rangle$  rotacionado  $\pi$  graus em  $X$ , geralmente a menos de uma correção, ou seja, o resultado final geralmente ficará expresso em uma base diferente da computacional de forma que uma operação unitária  $B_m$  pode ser aplicada a fim de que se obtenha o resultado final  $|\phi_{out}\rangle$  da operação NOT na base computacional:  $\text{NOT}|\psi_{in}\rangle = B_m|\psi_{out}\rangle = |\phi_{out}\rangle$ .

## PORTA Z

De maneira análoga, a operação  $Z$  pode ser obtida ao final do processo se  $\xi = 0$ ,  $\eta = \pi$  e  $\zeta = 0$ . Nesse caso, substituindo esses valores em 5.6, as bases da Equação 5.5 tornam-se novamente  $B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = \pm \{|+\rangle, |-\rangle\}$ , porém em ordens diferentes das da porta NOT para cada colapso. Aqui novamente o estado do último qubit será  $|\psi_{in}\rangle$  rotacionado  $\pi$  graus em  $Z$ , geralmente a menos de uma correção, de forma que uma operação unitária  $B_m$  pode ser aplicada a fim de que se obtenha o resultado final  $|\phi_{out}\rangle$  da operação  $Z$  na base computacional:  $Z|\psi_{in}\rangle = B_m|\psi_{out}\rangle = |\phi_{out}\rangle$ .

### 5.2.2 PORTA LÓGICA CNOT

Ao contrário das operações discutidas anteriormente, para a execução da porta lógica quântica CNOT serão necessários 4 qubits ao invés de 5, porém a sequência de processos para sua realização é análoga à dos processos anteriores.

#### CRIAÇÃO DO ESTADO DE *cluster* COM 4 QUBITS

Para a criação do estado de *cluster*, partimos de um estado inicial

$$|\Psi(i_A, i_C)\rangle = |i_A\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 \otimes |+\rangle_3 \otimes |i_C\rangle_4, \quad (5.9)$$

onde o qubit alvo inicialmente é expresso por  $|i_A\rangle$  e o qubit de controle por  $|i_C\rangle$ , de acordo com a Equação 2.5. Como usual, é feita a criação do estado de *cluster* via interação de Ising. O operador, portanto, é expresso por  $U = e^{i\pi H}$ , sendo o Hamiltoniano descrito da seguinte maneira:

$$H_{\text{int}} = \frac{1 + \sigma_z^1}{2} \frac{1 - \sigma_z^2}{2} + \frac{1 + \sigma_z^2}{2} \frac{1 - \sigma_z^4}{2} + \frac{1 + \sigma_z^2}{2} \frac{1 - \sigma_z^3}{2}. \quad (5.10)$$

Aqui as operações são feitas conforme o esquema da Figura 5.4, sendo que a interação do tipo Ising é aplicada sequencialmente nos pares 12, 24 e 23. Após esse procedimento, o estado de *cluster* estará então formado.

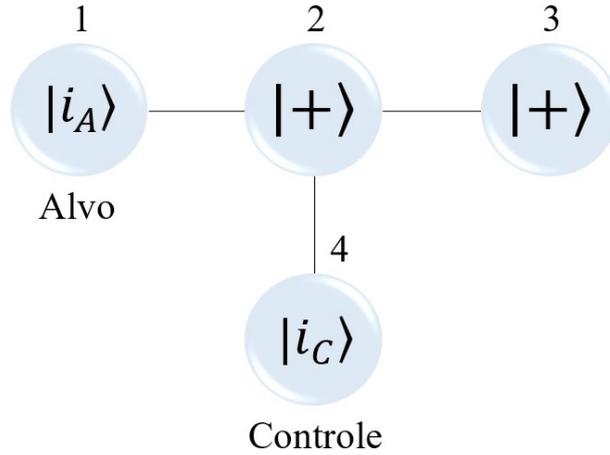


Figura 5.4: Estado inicial para a formação de um *cluster* com 4 qubits, sendo  $|i_A\rangle$  o estado do qubit alvo e  $|i_C\rangle$  o estado do qubit de controle.

#### MEDIDAS PROJATIVAS

Após o estado de *cluster* ser criado, medidas projetivas são feitas nos qubits 1 e 2, sequencialmente. Em seguida, é tomado o traço parcial nos qubits 1 e 2, restando apenas o estado dos dois últimos qubits. Seja portanto, ao final do processo, o estado do qubit alvo denotado por  $|f_A\rangle$  (qubit 3) e o estado do qubit de controle por  $|f_C\rangle$  (qubit 4), temos que o estado final total  $|\psi_{out}\rangle$  obtido após tomarmos o traço parcial nos dois primeiros qubits, será dado por  $|\psi_{out}\rangle = |f_{AC}\rangle$ . Aqui  $|f_{AC}\rangle$  pode ser tanto um estado separado quanto emaranhado, sendo que para estados separados  $|\psi_{out}\rangle = |f_A\rangle \otimes |f_C\rangle$ , analogamente ao exemplo mostrado em 2.20. Aqui novamente, assim como ocorre para a rotação arbitrária  $XZX$ , tal resultado deverá ser o mesmo de uma operação CNOT propriamente dita a menos de uma correção  $B_c$ , expressa por:

$$B_c^{(34)} = \sigma_z^{(3)s_1+1} \sigma_x^{(3)s_2+1} \sigma_z^{(4)s_1+1}. \quad (5.11)$$

Dessa forma, para que o resultado esteja na base computacional, tem-se que  $B_c(|f_{AC}\rangle) = \text{CNOT}(|i_{AC}\rangle)$ . Já as bases utilizadas para as medidas dos qubits 1 e 2, serão as base do operador  $\sigma_x$  de Pauli:  $B_1 = B_2 = \{|+\rangle, |-\rangle\}$ .

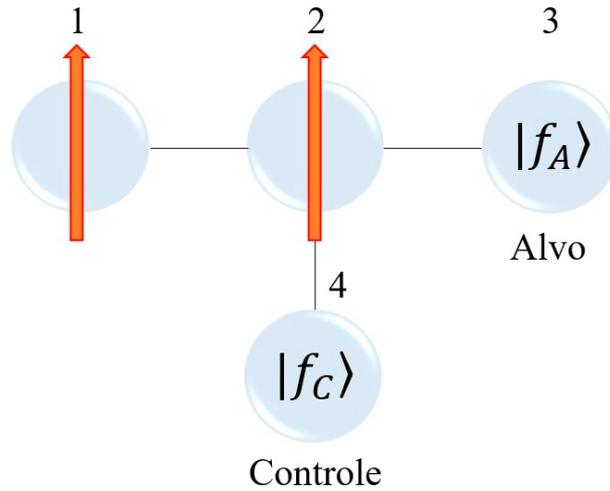


Figura 5.5: Medidas nos 2 primeiros qubits a fim de se efetuar a operação CNOT. Ao final do processo, o qubit alvo será o qubit 3 com estado  $|f_A\rangle$ , bem como o qubit de controle será o qubit 4 com estado  $|f_C\rangle$ .

### 5.3 CÁLCULO DA FIDELIDADE

A fidelidade consiste em uma medida muito utilizada em Teoria de Informação Quântica, sendo capaz de medir a distância entre os estados quânticos. De versátil aplicabilidade, a fidelidade geralmente é empregada com o intuito de responder questões centrais como o quanto de informação é preservada em um processo ou se dois conjuntos de informação são similares ou discrepantes. Sejam dois operadores densidade  $\rho_1$  e  $\rho_2$  onde pelo menos um deles deve representar um estado puro, podemos definir a fidelidade  $F$  da seguinte maneira:

$$F(\rho_1, \rho_2) = \text{Tr}(\rho_1 \rho_2), \quad (5.12)$$

Em se tratando de computação quântica, podemos utilizar a fidelidade para mensurar os efeitos deletérios provenientes de um meio externo que interage com um sistema de qubits. Ao considerarmos um estado inicial puro  $\rho_i$ , podemos portanto saber quão precisa é a nossa computação tomando por base a distância ao final de uma evolução temporal de  $\rho_i$ , a qual denominaremos  $\rho_f$ . Nesse caso, haverá precisão máxima da computação quando a fidelidade for igual a 1 (ambos os estados são iguais e portanto  $\rho_f$  não foi afetado pelo ruído proveniente do ambiente) e precisão mínima quando a fidelidade for 0 (ambos os estados são totalmente discrepantes, e portanto  $\rho_f$  foi intensamente afetado pelo ruído proveniente do ambiente).

A fim de melhor estudar a eficiência de um computador quântico baseado em medidas projetivas, iremos aqui considerar duas medidas de fidelidade distintas: a fidelidade da porta (WANG et al., 2014), a qual mede a capacidade de teletransporte de uma porta lógica, considerando para tanto os possíveis resultados de medidas dos qubits com exceção do qubit inicial, e uma segunda forma de medida por nós proposta denominada fidelidade média, a qual fornece a fidelidade média da computação considerando tanto os possíveis resultados de medidas dos qubits quanto os possíveis estados do qubit inicial. Dessa forma, a fidelidade média por nós proposta possui uma interpretação operacional direta, uma vez que representa a fidelidade média do cálculo, dada uma condição inicial arbitrária. Abaixo, descrevemos em detalhes os procedimentos para se realizar ambas as medidas em MBQC.

### 5.3.1 FIDELIDADE DE PORTA

Uma importante técnica que pode ser utilizada para o teletransporte de qubits é o denominado *teletransporte de porta* (GOTTESMAN; CHUANG, 1999). Este é um outro processo de teletransporte que possui uma peculiaridade com relação ao processo de teletransporte padrão, o qual consiste em inicialmente aplicar operações unitárias em um par EPR e então utilizá-lo para o teletransporte de qubits. Dessa forma, ao invés de se obter a informação original do qubit teletransportado, será recebido o qubit com a informação já transformada. Em outras palavras, ao invés de teletransportar o qubit e ao final nele aplicar uma operação lógica, é possível aplicar primeiro uma operação lógica adequada ao par EPR e em seguida teletransportar o qubit, já o obtendo transformado ao final do processo.

A fidelidade da porta pode ser utilizada para definir quão bem uma porta quântica pode ser implementada em processos de teletransporte de porta, bem como em processos semelhantes. Apesar da facilidade de sua implementação, uma vez que uma média é calculada apenas sobre todos os possíveis resultados de medidas com exceção do qubit inicial, para aplicações em MBQC tal técnica sofre de uma falta de interpretação. De fato, em se tratando de MBQC a fidelidade para operações de porta não representa a fidelidade média obtida em um experimento real e, como será posteriormente demonstrado, pode levar a resultados muito diferentes em comparação ao método por nós proposto.

A fidelidade de porta é baseada no teletransporte de porta, ou seja, no teletransporte de um qubit por meio de um par EPR rotacionado, onde a rotação define uma determinada operação unitária. Tal estado é denominado *estado de recurso* e é definido como  $(I \otimes U)(|00\rangle + |11\rangle)$ , onde  $U$  consiste na operação unitária desejada (WANG et al., 2014). Dessa forma, se quisermos por exemplo ter um qubit com a porta Hadamard ( $H$ ) aplicada, ao invés de teletransportá-lo por um par EPR regular ( $|00\rangle + |11\rangle$ ), o teletransportamos por  $(I \otimes H)(|00\rangle + |11\rangle)$ . Dessa forma, o esquema de fidelidade de porta se baseia no fato de que um estado de *cluster* pode ser utilizado para preparar estados de recurso, oferecendo portanto uma maneira simples de definir uma medida de fidelidade. No presente trabalho, focaremos nossos estudos no cálculo da fidelidade de porta considerando duas operações diferentes — e que como será posteriormente discutido resultam no mesmo valor — que são as portas  $X$  e  $Z$ , definidas pelas expressões 2.13 e 2.16, respectivamente.

Para preparar o estado de recurso  $X$  ou  $Z$  por meio de um estado de *cluster* linear de cinco qubit, utilizamos uma sequência de três medidas aplicadas na base do operador de Pauli  $\sigma_x$  nos qubits 2, 3 e 4, respectivamente. Para um estado de recurso  $Z$ , o estado resultante será expresso por

$$X_5^{r_4} Z_5^{r_3} X_5^{r_2} \underbrace{[I \otimes Z(|00\rangle + |11\rangle)]_{15}}_{\text{estado de recurso } Z}, \quad (5.13)$$

onde  $r_2, r_3, r_4 = 0$  ou  $r_2, r_3, r_4 = 1$  se o segundo, terceiro e quarto qubits colapsarem, respectivamente, nos estados  $|+\rangle$  ou  $|-\rangle$ . Dessa forma, como de costume em um computador quântico baseado em medidas projetivas, após efetuar uma correção no estado resultante por meio da operação

$$B_{\mathbf{r}} = X_5^{r_2} Z_5^{r_3} X_5^{r_4}, \quad (5.14)$$

em que  $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, r_3\}$  é o conjunto de todos os resultados possíveis para  $r_1, r_2$  e  $r_3$ , obtemos o estado de recurso desejado para a operação  $Z$ . Por outro lado, com a mesma sequência de medidas na base  $\sigma_x$  nos qubits 2, 3 e 4, o estado resultante também pode ser obtido para uma

operação de rotação em  $X$ :

$$Z_5^{r_2+r_3+r_4} X_5^{r_2+r_4+1} Z_5^{r_2+r_4} \underbrace{[I \otimes X(|00\rangle + |11\rangle)_{15}]_{15}}_{\text{estado de recurso } X}, \quad (5.15)$$

onde novamente  $r_2, r_3, r_4 = 0$  ou  $r_2, r_3, r_4 = 1$  se o segundo, terceiro e quarto qubits colapsarem, respectivamente, nos estados  $|+\rangle$  ou  $|-\rangle$ . Novamente, após a correção do estado resultante por meio da operação

$$B_{\mathbf{r}} = Z_5^{r_2+r_4} X_5^{r_2+r_4+1} Z_5^{r_2+r_3+r_4} \quad (5.16)$$

ser efetuada, obtemos o estado de recurso desejado para a operação  $X$ .

Com base nesses conceitos, podemos definir a fidelidade de porta (*gate fidelity*)  $F_g$  através da seguinte expressão:

$$F_g = \text{Tr} \rho_r |\Psi_{res}\rangle \langle \Psi_{res}|, \quad (5.17)$$

onde  $|\Psi_{res}\rangle$  é o estado de recurso, e  $\rho_r$  o estado resultante do primeiro e último qubits após os processos de decoerência, sequência de medidas e a respectiva correção  $B_{\mathbf{r}}$  serem efetuadas. Em outras palavras, temos que

$$\rho_r = \frac{1}{8} \text{Tr}_{234} \sum_{\mathbf{r}} B_{\mathbf{r}} P_{\mathbf{r}} \mathcal{L}[\rho_C(+)] P_{\mathbf{r}} B_{\mathbf{r}}^\dagger, \quad (5.18)$$

onde a soma é feita sobre os 8 possíveis resultados de medição,  $\rho_C(+)$  é o estado de *cluster* com  $|\psi_{in}\rangle = |+\rangle$ , (ou seja,  $\rho_C(+)=|\Psi_C(+)\rangle\langle\Psi_C(+)|$ ),  $\mathcal{L}$  é o superoperador de decoerência,  $P_{\mathbf{r}}$  é o operador de projeção e  $B_{\mathbf{r}}$  é o operador de correção de base. Aqui, a operação de traço parcial traça os qubits diferentes dos do estado de recurso (ou seja, os qubits 2, 3 e 4),  $P_{\mathbf{r}}$  leva em consideração todas as possíveis medidas nos qubit 2, 3 e 4, e  $B_{\mathbf{r}}$  introduz a correção de base necessária para as portas  $X$  ou  $Z$ . Por fim, a soma apresenta uma média sobre todos os possíveis resultados de medição. Através da análise das expressões 5.17 e 5.18, é fácil demonstrar que, caso não ocorra nenhum processo de decoerência no sistema, ou seja,  $\mathcal{L}[\rho_C(+)] = \rho_C(+)$ , teremos então  $\rho_r = |\Psi_{res}\rangle\langle\Psi_{res}|$ , e a fidelidade nesse caso torna-se 1.

Em suma, podemos concluir que a fidelidade de porta  $F_g$  é um método de cálculo de fidelidade média de projeções utilizado em processos de teletransporte de porta, e que também

pode ser utilizado para mensurar a eficiência de portas lógicas em uma MBQC para o caso de sistemas quânticos abertos, apesar de não considerar os possíveis estados iniciais do primeiro qubit. Em nossos cálculos, este procedimento será utilizado como forma de comparação com a *fidelidade média*, a qual foi por nós proposta e que será na sequência discutida.

### 5.3.2 FIDELIDADE MÉDIA

Embora a fidelidade de porta forneça uma estimativa acerca da viabilidade das operações de teletransporte de porta, seu resultado final não fornece uma interpretação operacional quando se trata de um cálculo quântico baseado em medidas projetivas. De fato, a definição mais natural seria uma medida de fidelidade a qual levasse em consideração tanto a média sobre todos os possíveis resultados de medidas quanto a média sobre todas as possíveis condições iniciais. Nesse sentido, propomos uma maneira alternativa de se medir a fidelidade em uma MBQC, propondo uma medida de fidelidade a qual denominamos *fidelidade média* ( $F_m$ ). Isso porque ao se considerar um conjunto estatístico com diferentes possíveis resultados, um valor médio da fidelidade pode ser obtido a fim de que possamos fazer uma análise acerca do comportamento médio desse conjunto. Dessa forma, para uma operação de rotação  $XZX$  arbitrária no vetor de Bloch, o método que propomos para calcular a fidelidade das portas lógicas sob a ação de canais com ruído pode ser definido da seguinte maneira:

$$F_m = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{\{\psi_{in}\}} F_p, \quad (5.19)$$

tal que  $F_p$  é a fidelidade média de todas as possíveis projeções para um determinado estado inicial apenas, o qual pode ser definido como

$$F_p = \text{Tr} [\rho_{out}(\psi_{in})\rho_m(\psi_{in})], \quad (5.20)$$

sendo  $\rho_{out}(\psi_{in}) = U|\psi_{in}\rangle\langle\psi_{in}|U^\dagger$  a operação lógica desejada não submetida a nenhum ruído (tal que  $U$  é a porta lógica desejada),  $\mathcal{N}$  o fator de normalização  $\mathcal{N} = \sum_{\{\psi_{in}\}} \text{Tr} [\rho_{out}(\psi_{in})]$ , e

$$\rho_m(\psi_{in}) = \frac{1}{16} \text{Tr}_{1234} \sum_{\mathbf{m}} B_{\mathbf{m}} P_{\mathbf{m}} \mathcal{L}[\rho_C(\psi_{in})] P_{\mathbf{m}} B_{\mathbf{m}}^\dagger \quad (5.21)$$

a média dos 16 possíveis resultados de medidas da operação lógica desejada submetida a canais dissipativos. Além disso, temos que  $\rho_C(\psi_{in}) = |\Psi_C(\psi_{in})\rangle\langle\Psi_C(\psi_{in})|$  é um estado de *cluster* em função de um estado inicial arbitrário para o primeiro qubit,  $\mathcal{L}$  é o superoperador de decoerência,  $P_m$  é o operador de projeção e  $B_m$  é o operador de correção de base. Aqui, a operação de traço parcial traça todos os qubits com exceção do último (o estado de saída), e  $P_m$  leva em consideração toda a sequência dos 16 possíveis resultados de medidas nos qubit 1, 2, 3 e 4. Finalmente, vale frisar que a soma em  $m$  na Equação 5.21 introduz uma média sobre todos os resultados de medidas possíveis, bem como a soma em  $\psi_{in}$ , na Equação 5.19, introduz uma média sobre todos os estados iniciais possíveis. Essa definição fornece uma estimativa para a fidelidade média alcançada em um experimento real para qubits com estados iniciais arbitrários. Um procedimento análogo também pode ser adotado para as demais operações lógicas, onde para a porta CNOT, por exemplo, a média das medidas é tomada sobre os 4 possíveis resultados e o traço parcial é tomado nos dois primeiros qubits.

Também é importante frisar que apesar de termos incluído  $B_m$  nas equações anteriores, a fidelidade média independe da correção de base. Isso porque a fidelidade (distância entre dois estados) não muda se uma operação qualquer for aplicada em ambos os estados simultaneamente e, conseqüentemente, a média das fidelidades também não será alterada. Em outras palavras, seja  $U_q$  uma operação unitária qualquer, da Equação 5.12 temos que

$$F(\rho_1, \rho_2) = Tr(\rho_1\rho_2) = Tr(U_q\rho_1U_q^\dagger U_q\rho_2U_q^\dagger). \quad (5.22)$$

Em suma, para um dado estado inicial  $|\psi_{in}\rangle$ , é possível obter os valores da fidelidade do sistema em função do tempo das medidas considerando a média aritmética de todas as possibilidades de colapsos efetuadas em um determinado instante de tempo  $t$  no protocolo de MBQC, bem como considerando as possíveis condições iniciais. Vale também destacar que uma importante propriedade da fidelidade média (e também da fidelidade de porta) consiste no fato de seus valores serem os mesmos para uma operação de rotação  $\pm\pi$  nos eixos  $X$  (porta NOT) ou  $Z$  (porta Z). Isso porque, como anteriormente mencionado, caso uma das variáveis  $\xi$ ,  $\eta$  ou  $\zeta$  seja igual a  $\pm\pi$  e as demais zero (Equação 5.6), todo o conjunto de bases  $B_j(\alpha_j)$  (Equação 5.5) torna-se  $B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = \pm\{|+\rangle, |-\rangle\}$ , porém em ordens diferentes para cada colapso

em  $X$  e  $Z$ . Ao somarmos todos os resultados para efetuar a média aritmética, o valor médio portanto torna-se o mesmo.

## 5.4 PROCESSOS MARKOVIANOS E NÃO-MARKOVIANOS

Seja um conjunto de variáveis as quais representam a evolução de um sistema de valores ao longo do tempo, tal processo pode ser denominado Markoviano caso a distribuição de probabilidades do próximo estado dependa apenas do estado atual, e não da sequência de eventos precedentes. Tal propriedade é assim chamada em homenagem ao matemático Andrei Andreyevich Markov. Dessa forma, desde que o estado atual seja conhecido, os estados anteriores serão irrelevantes para a predição dos estados posteriores. Todavia, caso o contrário ocorra, ou seja, os estados anteriores exerçam influência sobre os estados futuros, o processo passa a ser denominado não-Markoviano. Dessa forma, uma possível interpretação para esses processos pode ser feita com base no conceito de “memória”. Em outras palavras, em processos para o qual não há uma memória atrelada ao sistema a qual influencie a formação de estados futuros, tal processo pode ser considerado Markoviano. No entanto, caso os estados futuros dependam de uma certa memória de estados predecessores, o processo pode então ser considerado não-Markoviano (BREUER; LAINE; PILO, 2009).

O conceito de não-Markovianidade constitui um tópico de grande interesse em pesquisas que envolvem computação e informação quântica, uma vez que a presença de memória nas dinâmicas dissipativas pode ajudar a proteger a coerência e as correlações quânticas em sistemas sujeitos a ruídos por apreciáveis intervalos de tempo. Nesse sentido, uma importante propriedade existente em processos não-Markovianos consiste no fato da coerência do estado quântico apresentar uma dinâmica não monotônica, podendo ser reestabelecida em determinados instantes de tempo (BELLOMO; FRANCO; COMPAGNO, 2007). Isso porque uma medição feita no instante correto pode resultar em valores de fidelidade mais elevados, constituindo dessa forma um recurso especialmente relevante para a MBQC (WOLF et al., 2008; BREUER; LAINE; PILO, 2009; LAINE; PILO; BREUER, 2010; VACCHINI; BREUER, 2010). Nesse contexto, compreender o modo como um ambiente não-Markoviano pode influenciar o funcionamento de um computador quântico baseado em medidas é um dos objetivos de nosso estudo.

## 5.5 OPERADORES DE KRAUS

Os operadores de Kraus constituem uma metodologia simples, eficiente e de certa forma poderosa de se estudar sistemas quânticos abertos, sendo capazes de descrever diversas classes de ruídos através de operações envolvendo matrizes. Seja um sistema composto por dois subsistemas referente aos qubits e ao meio-ambiente (*environment*) os quais interagem entre si, a fidelidade da dinâmica do sistema de interesse (composto pelos qubits) é afetada devido à perturbação causada pelo meio-ambiente, sendo este um dos grandes problemas existentes em computação quântica. Utilizando os operadores de Kraus, podemos descrever a dinâmica dissipativa de um determinado subsistema através de uma operação unitária que modela a interação entre o sistema e o ambiente (NIELSEN; CHUANG, 2000).

Seja  $\rho_T$  a matriz densidade do sistema como um todo,  $\rho_S$  a matriz densidade do sistema de interesse constituído pelos qubits e  $\rho_E$  a matriz densidade do ambiente, temos em um tempo inicial  $t = 0$  a seguinte relação:

$$\rho_T(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_E(0). \quad (5.23)$$

A dinâmica do sistema como um todo pode então ser expressa por:

$$\rho_T(t) = U_{SE}(t, 0) \rho_S(0) \otimes \rho_E(0) U_{SE}^\dagger(t, 0), \quad (5.24)$$

sendo  $U_{SE}(t, 0)$  o operador que evolui o sistema do tempo  $t = 0$  até um determinado tempo  $t$ . Como estamos interessados apenas no subsistema referente aos qubits, tomamos então o traço parcial no subsistema referente ao ambiente:

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_E \left\{ U_{SE}(t, 0) \rho_S(0) \otimes \rho_E(0) U_{SE}^\dagger(t, 0) \right\}. \quad (5.25)$$

A fim de realizarmos manipulações algébricas, podemos reescrever a matriz densidade referente ao ambiente através de seus autovalores ( $p_i$ ) e autovetores ( $|v_i\rangle$ ) da seguinte maneira:

$$\rho_E(0) = \sum_i p_i |v_i\rangle \langle v_i|. \quad (5.26)$$

Substituindo (5.26) em (5.25), temos que:

$$\rho_S(t) = Tr_E \left\{ U_{SE}(t,0) \rho_S(0) \otimes \sum_i p_i |v_i\rangle \langle v_i| U_{SE}^\dagger(t,0) \right\}. \quad (5.27)$$

Na sequência, colocamos o somatório no início da expressão, substituímos  $p_i$  por  $\sqrt{p_i}\sqrt{p_i}$  e rearranjamos  $\sqrt{p_i}$  e  $|v_i\rangle$ . Assim obtemos:

$$\rho_S(t) = \sum_i Tr_E \left\{ U_{SE}(t,0) \sqrt{p_i} |v_i\rangle \rho_S(0) \otimes \sqrt{p_i} \langle v_i| U_{SE}^\dagger(t,0) \right\}. \quad (5.28)$$

Finalmente efetuamos o traço parcial, o qual consiste em um somatório dos “sanduíches” dos autovetores do ambiente ( $|v_e\rangle$ ) com  $\rho_S(t)$ , tal como descrito na seção 2.4:

$$\rho_S(t) = \sum_i \sum_e \langle v_e | U_{SE}(t,0) \sqrt{p_i} |v_i\rangle \rho_S(0) \otimes \sqrt{p_i} \langle v_i| U_{SE}^\dagger(t,0) |v_e\rangle. \quad (5.29)$$

Por fim, é possível substituir os dois índices ( $i$  e  $e$ ) por um único ( $j$ ), o que nos leva à seguinte expressão:

$$\rho_S(t) = \sum_j M_j \rho_S(0) M_j^\dagger, \quad (5.30)$$

onde

$$M_j = U_{SE}(t,0) \sqrt{p_i} |v_i\rangle, \quad (5.31)$$

sendo este denominado *operador de Kraus*. Temos então o formalismo da soma de operadores, o qual é capaz de descrever uma dinâmica não unitária através da soma de produto de matrizes apenas.

Através da utilização dos operadores de Kraus, é possível descrever a ação de diferentes tipos de ruídos, tais como os canais *amplitude damping* e *phase damping*, os quais serão objeto de estudo no presente trabalho.

## 5.6 RUÍDOS QUÂNTICOS: *amplitude damping* E *phase damping*

Uma importante aplicação das operações quânticas é a descrição dos efeitos de dissipação de energia em ambientes quânticos. Nesta seção, descreveremos o modelo dissipativo utilizado

para investigar as propriedades incomuns dos efeitos de memória que ocorrem em ambientes Markovianos e não-Markovianos. Nesse contexto, realizamos o estudo de dois tipos de canais: o *amplitude damping* e o *phase damping* (ou *dephasing*). Em nosso modelo, ambos os ruídos consistem em processos dissipativos os quais ocorrem independentemente em cada qubit, cada qual acoplado ao seu respectivo reservatório, e cujo efeito pode ser visualmente observado através da esfera de Bloch. Para a modelagem dos ruídos e cálculo da dinâmica dissipativa, utilizamos os operadores Kraus, que em virtude de sua praticidade nos permitiu obter as expressões analíticas para a fidelidade média, tal como será discutido na seção 6.1.

### 5.6.1 *Amplitude damping*

O canal *amplitude damping* (AD) é capaz de descrever o comportamento geral de dissipação de energia de diferentes sistemas quânticos. Como exemplo, o canal em questão pode descrever o estado de um fóton em uma cavidade sujeito à dispersão, bem como a dinâmica de um átomo que emite um fóton espontaneamente (NIELSEN; CHUANG, 2000). Nesse caso, o ambiente pode ser representado por um banho de osciladores harmônicos com densidade espectral definida por (BREUER, 2007)

$$J(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma_0 \lambda^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \lambda^2}, \quad (5.32)$$

tal que  $\lambda \approx 1/\tau_B$ , onde  $\tau_B$  é o tempo de correlação do reservatório e  $\gamma_0$  é dado por  $\gamma_0 \approx 1/\tau_R$ , sendo  $\tau_R$  uma típica escala de tempo do sistema. Fortes correlações ocorrem quando  $\tau_R < 2\tau_B$ .

Com relação aos operadores de Kraus, o conjunto de operadores utilizado para descrever a dinâmica de um qubit sob efeito do canal AD pode ser definido como (NIELSEN; CHUANG, 2000):

$$E_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{p(t)} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad E_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1-p(t)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.33)$$

onde

$$p(t) = e^{-\lambda t} \left[ \frac{\lambda}{d} \sin\left(\frac{dt}{2}\right) + \cos\left(\frac{dt}{2}\right) \right]^2. \quad (5.34)$$

Aqui também

$$d = \sqrt{2\gamma_0\lambda - \lambda^2}, \quad (5.35)$$

sendo  $t$  a variável de tempo e  $\lambda$  e  $\gamma_0$  os parâmetros dos ruídos.

O efeito do canal *amplitude damping* pode ser visualmente observado através da esfera de Bloch, onde ocorre uma deformação que induz os estados ao extremo superior  $|0\rangle$ , tal como mostra a Figura 5.6.

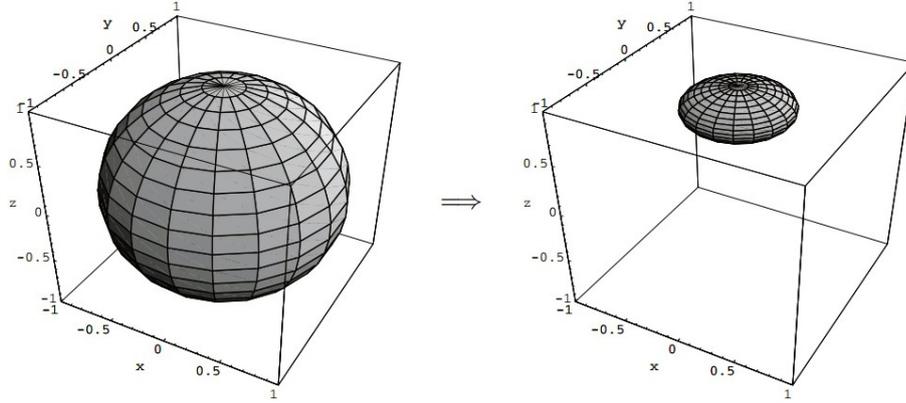


Figura 5.6: Efeito do canal *amplitude damping* na esfera de Bloch, onde uma convergência dos estados para um dos extremos verticais ( $|0\rangle$ ) é induzida (NIELSEN; CHUANG, 2000).

### 5.6.2 Phase damping

O comportamento de um fóton aleatoriamente disperso ou a perturbação dos estados eletrônicos em um átomo que interage com cargas elétricas distantes são alguns dos exemplos que podem ser descritos através do canal *phase damping* (PD) ou *dephasing* (NIELSEN; CHUANG, 2000). O conjunto de operadores de Kraus utilizado para descrever a dinâmica de um qubit sob efeito do canal PD pode ser definido como (DAFFER et al., 2004):

$$E_1(t) = \sqrt{\frac{L(t)+1}{2}}I \quad \text{e} \quad E_2(t) = \sqrt{\frac{1-L(t)}{2}}\sigma_z, \quad (5.36)$$

sendo

$$L(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}} \left[ \frac{1}{u} \sin\left(u\frac{t}{2\tau}\right) + \cos\left(u\frac{t}{2\tau}\right) \right], \quad (5.37)$$

onde

$$u = \sqrt{16a^2\tau^2 - 1}, \quad (5.38)$$

$t$  é a variável de tempo,  $\sigma_z$  a bem conhecida matriz de Pauli  $z$  (Equação 2.16), e  $a$  e  $\tau$  são parâmetros para o ruído.

Este modelo descreve um “ruído colorido”, no qual o sistema é acoplado a algumas frequências preferíveis. Nesse sentido, o acoplamento com o sistema externo é expresso por  $a$ , enquanto que  $\tau$  determina quais frequências o sistema prefere (DAFFER et al., 2004). Vale também frisar que o PD é um tipo de canal dito *unital*, uma vez que  $E_j = E_j^\dagger$ .

O efeito do canal PD também pode ser visualmente observado através da esfera de Bloch, onde uma convergência majoritariamente dos estados nas laterais é induzida para o centro da esfera.

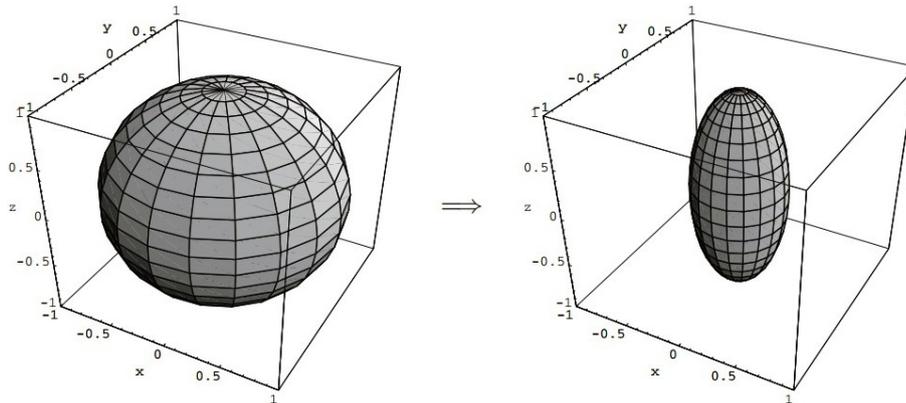


Figura 5.7: Efeito do canal PD na esfera de Bloch, onde uma convergência majoritária dos estados das laterais da esfera para o seu centro é induzida (NIELSEN; CHUANG, 2000).

## CAPÍTULO 6

# RESULTADOS: FIDELIDADE MÉDIA, TEMPOS DAS MEDIDAS E INDUÇÃO DE CANAIS NÃO-MARKOVIANOS

No presente capítulo, pudemos desenvolver um estudo referente à dinâmica dissipativa de sistemas quânticos abertos para uma operação de rotação  $\pm\pi$  nos eixos  $X$  ou  $Z$  da esfera de Bloch, a qual inclui a execução das portas lógicas NOT e  $Z$ , bem como sobre a dinâmica dissipativa da porta CNOT para uma computação quântica baseada em medidas projetivas, considerando para isso tanto ambientes Markovianos quanto não-Markovianos. Para esse propósito, obtivemos a solução analítica das fidelidades médias, considerando as condições iniciais e os tempos de medida, e as analisamos para os canais *amplitude damping* (AD) e *phase damping* (PD).

Para as operações  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$  e CNOT (esta última com qubits inicialmente separados e emaranhados), apresentamos os resultados obtidos para a dinâmica dissipativa dos estados de *cluster*, bem como para as operações em questão considerando medidas realizadas no mesmo instante para cada valor de tempo  $t$ . Dessa forma, para  $t = 0$  por exemplo, consideramos todas as medidas feitas ao mesmo tempo em  $t = 0$ ; para  $t = 0, 1$ , consideramos todas as medidas feitas ao mesmo tempo em  $t = 0, 1$ , e assim sucessivamente. Em seguida, pudemos calcular o desvio padrão para cada caso e efetuamos uma análise acerca da dispersão dos valores de

fidelidade média com relação aos estados iniciais. Além disso, fizemos também uma análise comparativa acerca dos gráficos da fidelidade média dos estados de *cluster* versus tempo ( $F_c \times t$ ) e de fidelidade média das operações lógicas de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$  e CNOT versus tempo ( $F_m \times t$ ).

Além disso, para as operações de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$  e CNOT, fizemos um estudo acerca dos tempos ótimos em que as medidas projetivas devem ser realizadas, analisando para tanto os picos de fidelidade média e, para  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$ , também a fidelidade de porta, a partir do qual pudemos efetuar comparações. Além disso, também mostramos que, para o canal AD, o conhecimento de seu mapa dissipativo já é o suficiente para intuitivamente determinar os melhores tempos de medição, sendo que o mesmo não necessariamente é verdade para o canal PD, uma vez que para este, como será posteriormente discutido, para altos valores de  $\tau$  (Equação 5.37) e baixos valores de  $t$ , os operadores de Kraus (5.36) podem atuar aproximadamente como operadores identidade ou de mudança de fase em determinados instantes de tempo, e uma combinação dessas operações nos qubits pode resultar, aproximadamente, em uma operação identidade. Feito isso, realizamos em seguida uma análise dos tempos das medidas intermediárias  $t_2$  e  $t_3$ , a qual pudemos obter o gráfico de curva de nível que indica os melhores resultados para a fidelidade média.

Por fim, para a operação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$ , realizamos um estudo acerca da indução de canais não-Markovianos nos *clusters* de 5 qubits, a partir do qual pudemos obter os gráficos da fidelidade média e fidelidade de porta em função do tempo, considerando medidas feitas ao mesmo tempo para cada  $t$  em toda a dinâmica. Como mostraremos ao final do capítulo, alguns comportamentos contraintuitivos puderam ser observados para o canal PD, onde a indução de ruídos Markovianos em determinados qubits de um *cluster* composto por qubits não-Markovianos pode aumentar significativamente a fidelidade média da dinâmica dissipativa.

## 6.1 EXPRESSÕES ANALÍTICAS PARA A FIDELIDADE MÉDIA

Tal como discutido na subseção 5.3.2, a fim de melhor investigar a dinâmica dissipativa das operações lógicas, propomos uma medida a qual denominamos fidelidade média ( $F_m$ ), que consiste na determinação de um valor médio para a fidelidade considerando todos os possíveis

resultados de medidas bem como os diferentes possíveis estados iniciais. Nesse sentido, pudemos obter soluções analíticas para as fidelidades médias e as analisamos para os canais AD e PD.

Com o objetivo de simplificar significativamente os cálculos a serem realizados — bem como otimizar o tempo necessário à sua execução, buscamos obter expressões analíticas para a fidelidade média, sendo este o primeiro importante resultado em nosso trabalho com MBQC. A fim de se obter tais expressões, utilizamos o software Wolfram Mathematica 11, o qual é capaz de manipular expressões matemáticas de um modo geral. Nesse sentido, os resultados puderam ser obtidos através do desenvolvimento de um algoritmo o qual permitia que algumas expressões fossem deixadas em aberto, sendo estas as variáveis  $\alpha$  e  $\beta$  da Equação 2.8 para o estado inicial de um qubit, bem como as variáveis  $p(t)$  (Equação 5.33) e  $L(t)$  (Equação 5.36) dos operadores de Kraus para os canais AD e PD, respectivamente. Dessa forma, através da manipulação das equações, o software Wolfram Mathematica pôde obter as expressões analíticas desejadas para a fidelidade média.

Por se tratar de uma grande quantidade de equações, as expressões analíticas obtidas estão expressas no apêndice A. Mais especificamente, os resultados obtidos consistem em expressões analíticas para a dinâmica dissipativa do estado de *cluster*, para uma rotação arbitrária  $\pm\pi$  nos eixos  $X$  ou  $Z$  e também para a porta CNOT considerando qubits com estados iniciais emaranhados e separados, tanto para o canal AD quanto PD. Vale frisar que todas as expressões analíticas foram testadas através de comparação com cálculos numéricos, com *scripts* desenvolvidos em linguagem Fortran 90 e MATLAB, a partir do qual obtivemos resultados totalmente idênticos.

## 6.2 ROTAÇÃO $\pm\pi$ NO EIXO $X$ OU $Z$ (PORTAS NOT E $Z$ )

Nesta seção serão discutidos os resultados referentes à dinâmica dissipativa do estado de *cluster* (e portanto sem medidas) para um sistema com 5 qubits (necessário à operação de rotação  $\pm\pi$  nos eixos  $X$  ou  $Z$ ), bem como os resultados referentes à dinâmica dissipativa da operação de rotação  $\pm\pi$  no eixo  $X$  ou  $Z$  considerando medidas realizadas no mesmo instante para cada valor de tempo  $t$  (isto é, para  $t = 0$  todas as 4 medidas feitas ao mesmo tempo em  $t = 0$ , para  $t = 1$  todas as 4 medidas feitas ao mesmo tempo em  $t = 1$ , etc.), comparando

em seguida os resultados da dinâmica do *cluster* com a dinâmica da rotação  $\pm\pi$ . Nesse sentido, buscando melhor compreender a relação existente entre os tempos em que as medidas são efetuadas, o valor final da fidelidade média e o processo de decoerência, supomos ruídos não-Markovianos e Markovianos para os 5 qubits, tanto para os canais AD quanto PD. Após os gráficos serem construídos, buscamos encontrar uma relação destes com os gráficos da dinâmica dissipativa da fidelidade média sem projeções em função do tempo. Para todos os casos, consideramos ambientes idênticos e independentes para cada qubit, possuindo cada qual seu próprio reservatório. Além disso, consideramos ambientes altamente não-Markovianos e Markovianos para os canais AD (Equação 5.34) e PD (Equação 5.37). Como parâmetros, para os ambientes não-Markovianos foram utilizados  $\lambda = 10^{-3}$  e  $\gamma_0 = 10$  (AD), bem como  $a = 1$  e  $\tau = 30$  (PD). Já para os ambientes Markovianos, foram utilizados  $\lambda = 30$  e  $\gamma_0 = 10$  (AD), bem como  $a = 1$  e  $\tau = 0,3$  (PD). Tais parâmetros foram escolhidos por representarem claramente o comportamento de cada ambiente.

A fim de se obter os valores de fidelidade média, para todos os casos consideramos uma média sobre as condições iniciais, tomando o vetor de Bloch em toda sua extensão de  $0 \leq \theta \leq \pi$  e  $0 \leq \phi < 2\pi$ , variando em intervalos fixos de  $\Delta\theta = \pi/100$  e  $\Delta\phi = 2\pi/100$ , totalizando dessa forma 10100 iterações (101 iterações para  $\theta$  e 100 iterações para  $\phi$ ), a partir do qual pudemos obter uma boa convergência. A fim de melhor compreender a dependência das condições iniciais para com os resultados de fidelidade média, também realizamos o cálculo do desvio padrão  $\sigma$  da fidelidade média para cada intervalo de tempo. Seja  $F_p$  a fidelidade média das projeções e  $n$  a quantidade total de iterações, o desvio padrão pôde ser obtido através da equação

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{\theta=0}^{\pi} \sum_{\phi=0}^{2\pi-\Delta\phi} [F_p(\theta, \phi) - F_m]^2}{n}}, \quad (6.1)$$

sendo que para sistemas discretizados

$$F_m = \frac{\sum_{\theta=0}^{\pi} \sum_{\phi=0}^{2\pi-\Delta\phi} F_p(\theta, \phi)}{n}, \quad (6.2)$$

de forma que pudemos, desse modo, ter acesso à dispersão dos valores de  $F_m$  com relação aos

possíveis estados iniciais.

### 6.2.1 DINÂMICA DISSIPATIVA DO ESTADO DE *cluster* COM 5 QUBITS

Para analisarmos a dinâmica dissipativa de uma MBQC, primeiramente estudamos a dinâmica dissipativa do estado de *cluster*, sem considerar portanto nenhuma medição. Calculamos a fidelidade média considerando diferentes condições iniciais, ou seja, diferentes  $|\psi_{in}\rangle$  sem considerarmos portanto as projeções necessárias para a implementação da operação lógica. Como anteriormente mencionado, o propósito desta dinâmica sem projeções consiste na possibilidade de analisar o comportamento do sistema, bem como na possibilidade de posteriormente efetuar comparações com a dinâmica dissipativa com as devidas medidas projetivas, a fim de estabelecermos possíveis relações.

As expressões analíticas para se obter a fidelidade média  $F_c$  da dinâmica dissipativa do estado de *cluster* com 5 qubits para os canais AD e PD correspondem às Equações A.2 e A.8 do Apêndice A, respectivamente, tal que  $F_c \equiv F_m$ . Dessa forma, utilizando as expressões analíticas pudemos calcular a fidelidade média do estado de *cluster*  $F_c$  sobre um conjunto de 10100 condições iniciais  $\{\psi_{in}\}$  igualmente distribuídas na esfera de Bloch. Por outro lado, o mesmo resultado pode ser obtido numericamente da seguinte maneira: seja um estado de *cluster* inicial  $\rho_C(\psi_{in})$  tal que  $|\psi_{in}\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\sin(\theta/2)|1\rangle$ , podemos obter  $F_c$  de acordo com a seguinte expressão:

$$F_c(t) = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{\{\psi_{in}\}} \text{Tr} \mathcal{L}_t[\rho_C(\psi_{in})] \rho_C(\psi_{in}), \quad (6.3)$$

onde o fator de normalização é dado por  $\mathcal{N} = \sum_{\{\psi_{in}\}} \text{Tr} [\rho_C(\psi_{in})]$ , bem como

$$\mathcal{L}_t[\rho_C(\psi_{in})] = \sum_{i,j,k,l,m=1}^2 M_{ijklm}(t) \rho_C(\psi_{in}) M_{ijklm}^\dagger(t), \quad (6.4)$$

onde  $M_{ijklm}(t) = E_i^{(1)}(t)E_j^{(2)}(t)E_k^{(3)}(t)E_l^{(4)}(t)E_m^{(5)}(t)$ , sendo  $E_q^{(n)}$  o  $q$ -ésimo operador de Kraus que atua no  $n$ -ésimo qubit. Vale ressaltar que, dependendo do processo de decoerência a ser considerado (AD ou PD), o conjunto de operadores Kraus será fornecido pelas Equações 5.33 ou 5.36, respectivamente.

Para ambientes Markovianos, as Figuras 6.1a e 6.1b mostram a fidelidade média do estado

de *cluster*  $F_c$  em função do tempo para os canais AD e PD, respectivamente. Através da análise dos gráficos, é possível observar um decréscimo monotônico nos valores de  $F_c$  para ambos os casos, sendo que para o canal AD os valores mínimos (ou próximos) de fidelidade média, tal que  $\min(F_c) \approx 0,03132$ , já são rapidamente atingidos anteriormente a  $t = \pi/100d$  (aqui  $d$  é um parâmetro do reservatório, tal como mostra a Equação 5.35), e para o canal PD, são atingidos aproximadamente a  $t = \pi/2$ , tal que  $\min(F_c) \approx 0,04658$ . Com relação ao desvio padrão, para ambos os casos também é possível observar valores relativamente baixos para ambos os casos.

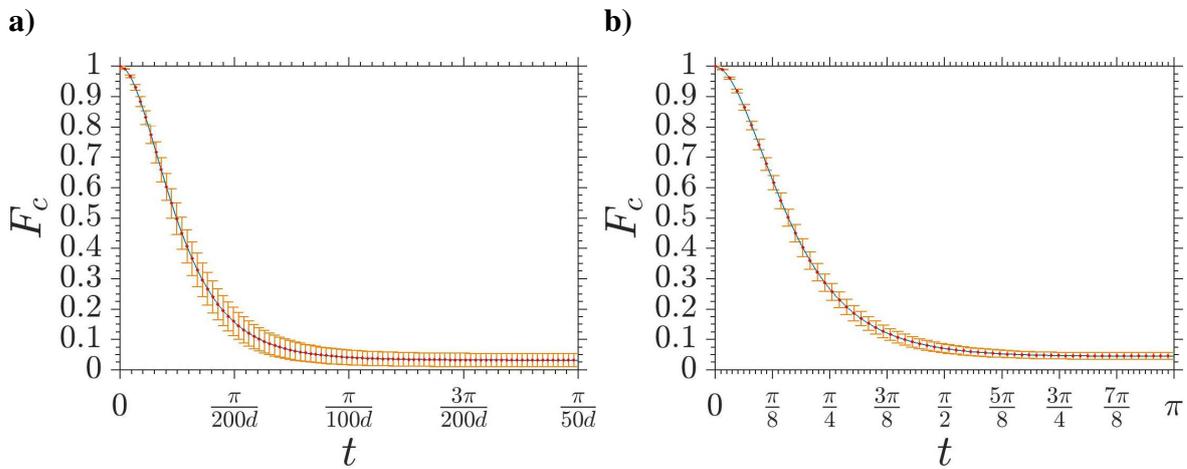


Figura 6.1: Fidelidade média em função do tempo e desvio padrão para a dinâmica dissipativa do estado de *cluster* com 5 qubits para os canais Markovianos **a)** AD e **b)** PD.

Com relação a ambientes não-Markovianos, a Figura 6.2a mostra a fidelidade média do estado de *cluster*  $F_c$  em função do tempo para o canal AD, e a Figura 6.2b para o canal PD. Através da análise dos gráficos, é possível observar que para o canal AD a fidelidade média apresenta oscilações com período de  $2\pi/d$ , tendo vales em  $F_c$  com valores fixos de  $\min(F_c) \approx 0,03125$  em períodos de tempo múltiplos ímpares de  $\pi/d$ , e picos de  $F_c$  em períodos de tempo múltiplos pares de  $\pi/d$  com valores decrescentes que tendem a  $\min(F_c)$  com o passar do tempo. Já para o canal PD, é possível observar oscilações com período de tempo de  $\pi$ , com vales em  $F_c$  de valores aproximadamente nulos em períodos que são múltiplos ímpares de  $\pi/2$ , bem como picos de  $F_c$  em  $n\pi$ , tal que  $n \in \mathbb{N}$ , com valores decrescentes que tendem a  $\min(F_c)$  com o passar do tempo. Com relação ao desvio padrão, através da análise das figuras é possível observar que, para o canal AD, os valores de  $\sigma$  são menos acentuados nos picos de  $F_c$ , relativamente pequenos

nos vales e mais acentuados nos tempos intermediários aos picos e vales de  $F_c$ . Já para o canal PD, os valores de  $\sigma$  são pouco acentuados nos picos de  $F_c$ , aproximadamente nulos nos vales de  $F_c$  e mais acentuados nos tempos intermediários aos picos e vales. Dessa forma, ambos os gráficos indicam que há uma baixa variação da fidelidade média do estado de *cluster* com relação aos possíveis estados iniciais.

De modo geral vale frisar que, com relação aos parâmetros utilizados, para o canal AD um aumento ou diminuição em  $\gamma_0$  implica em um aumento ou diminuição nas frequências das oscilações, respectivamente. Já um aumento em  $\lambda$ , implica em uma perda das propriedades de não-Markovianidade do sistema, fazendo com que não mais ocorram oscilações. Por outro lado, uma diminuição nos valores de  $\lambda$  implica em uma diminuição da frequência nos gráficos de  $F_c \times t$ . Com relação ao canal PD, um aumento ou diminuição em  $a$  implica em um aumento ou diminuição nas frequências das oscilações, respectivamente. Já um aumento ou diminuição em  $\tau$ , implica em um aumento ou diminuição nas amplitudes das oscilações e propriedades de não-Markovianidade do sistema, respectivamente.

A dinâmica do estado de *cluster* sem projeções será de suma importância para realizarmos comparações com as operações de rotação  $\pm\pi$  nos eixos  $X$  ou  $Z$ , a partir da qual poderemos obter importantes relações que nos permitirão, em muitos casos, estimar quais serão os melhores tempos para se realizar as medidas tomando por base apenas o gráfico da fidelidade média para a dinâmica dissipativa de seu respectivo estado de *cluster*.

## 6.2.2 DINÂMICA DISSIPATIVA COM MEDIDAS NO MESMO INSTANTE

Nesta subseção serão discutidos os resultados referentes à dinâmica dissipativa da computação quântica baseada em medidas projetivas para uma operação de rotação  $\pm\pi$  no eixo  $X$  ou  $Z$  considerando todas as quatro medidas projetivas efetuadas no tempo presente em que a dinâmica foi realizada, ou seja, considerando medidas realizadas no mesmo instante para cada valor de tempo  $t$ . Dessa forma, como anteriormente mencionado, em  $t = 0$  supomos que todas as quatro medidas foram feitas em  $t = 0$ ; em  $t = 0, 1$ , supomos que todas as quatro medidas foram feitas em  $t = 0, 1$ , e assim sucessivamente. O propósito desta dinâmica com projeções consiste na possibilidade de realizar um estudo acerca do comportamento do sistema, bem como

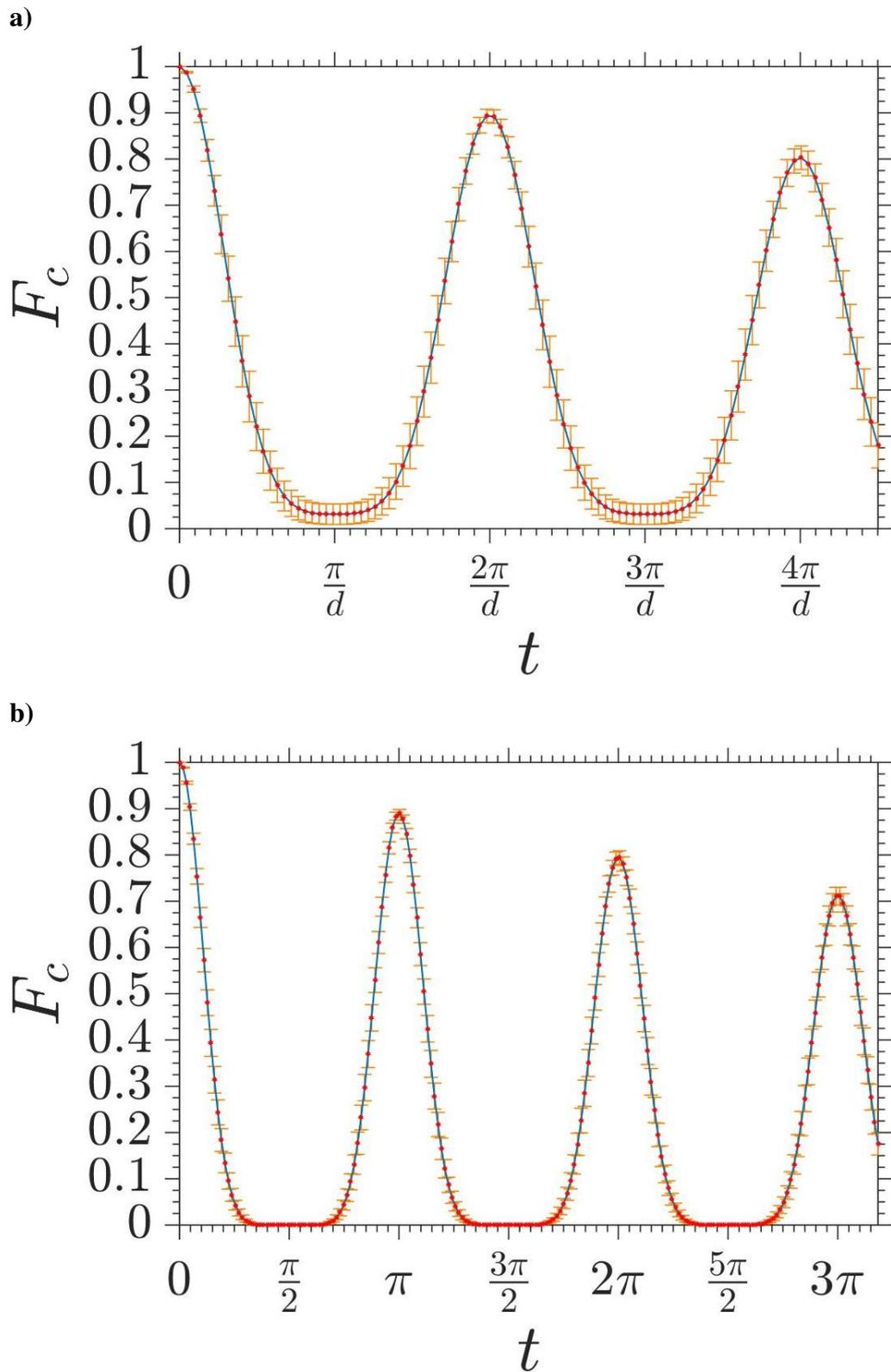


Figura 6.2: Fidelidade média em função do tempo e desvio padrão para a dinâmica dissipativa do estado de *cluster* com 5 qubits para os canais não-Markovianos a) AD e b) PD.

efetuar comparações com a dinâmica dissipativa do estado de *cluster* (sem medidas projetivas) e estabelecer possíveis relações. As expressões para a fidelidade média aqui utilizadas foram as Equações A.5 (canal AD) e A.11 (canal PD) do Apêndice A. Vale também frisar que para todos os casos consideramos o valor de fidelidade média obtido imediatamente após a quarta medida ser executada, ou seja, para todos os casos consideramos  $p_5 = p_4$  e  $L_5 = L_4$  para os canais AD e PD, respectivamente.

Para ambientes Markovianos, as Figuras 6.3a e 6.3b mostram a fidelidade média  $F_m$  da operação de rotação  $\pm\pi$  no eixo  $X$  ou  $Z$  versus tempo  $t$  para os canais AD e PD, respectivamente. Através da análise dos gráficos, é possível novamente observar um decréscimo monotônico nos valores de  $F_m$  para ambos os casos, sendo que para o canal AD os valores mínimos (ou próximos) de fidelidade média, tal que  $\min(F_m) \approx 0,5$ , já são rapidamente atingidos a aproximadamente  $t = \pi/150d$ , e para o canal PD, onde também  $\min(F_m) \approx 0,5$ , são atingidos anteriormente a  $t = 3\pi/8$ . Com relação ao desvio padrão, para ambos os casos também é possível observar valores relativamente baixos, apesar de, para o canal PD, serem um pouco mais acentuados até que  $\min(F_m)$  seja atingido.

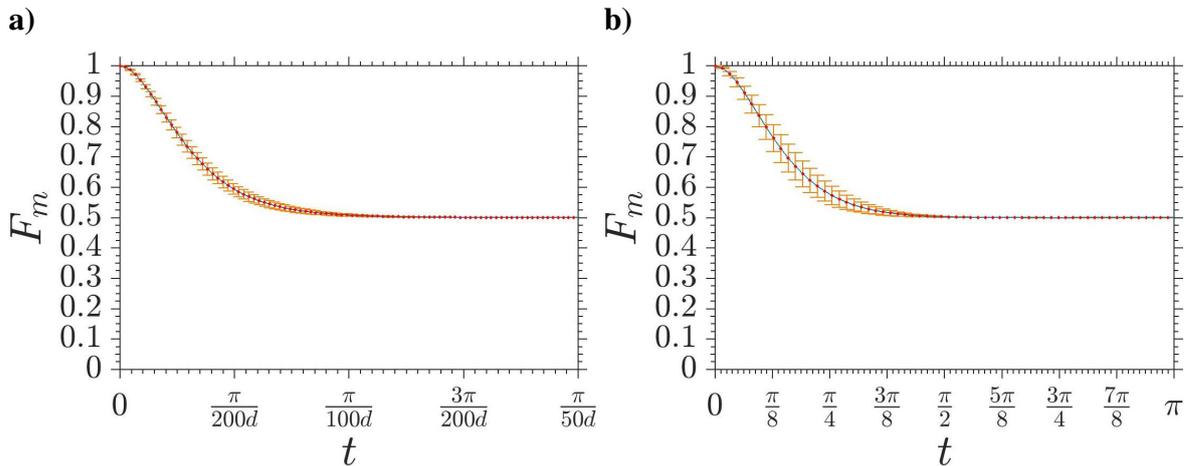


Figura 6.3: Fidelidade média versus tempo e desvio padrão da operação de rotação  $\pm\pi$  no eixo  $X$  ou  $Z$  para os canais Markovianos **a)** AD e **b)** PD, considerando medidas no mesmo instante para cada  $t$ .

Já as Figuras 6.4a e 6.4b mostram a fidelidade média  $F_m$  da operação de rotação  $\pm\pi$  no eixo  $X$  ou  $Z$  versus tempo  $t$  para os canais AD e PD, respectivamente, considerando ambientes não-Markovianos. De modo geral também vale frisar que, com relação aos parâmetros utili-

zados, assim como ocorre para a dinâmica do estado de *cluster*, para o canal AD um aumento ou diminuição em  $\gamma_0$  implica em um aumento ou diminuição nas frequências das oscilações, respectivamente. Já um aumento em  $\lambda$  até  $\lambda \approx 2\gamma_0$  implica em uma perda das propriedades de não-Markovianidade do sistema, fazendo com que não mais ocorram oscilações. Por outro lado, uma diminuição nos valores de  $\lambda$  implica em uma diminuição da frequência nos gráficos de  $F_m \times t$ . Com relação ao canal PD, um aumento ou diminuição em  $a$  implica em um aumento ou diminuição nas frequências das oscilações, respectivamente. Já um aumento ou diminuição em  $\tau$  implica em um aumento ou diminuição nas amplitudes das oscilações e propriedades de não-Markovianidade do sistema, respectivamente.

Através da análise dos gráficos da Figura 6.4, é possível observar que para o canal AD temos um comportamento análogo ao do estado de *cluster* para ambientes não-Markovianos, onde a fidelidade média apresenta oscilações com períodos de  $2\pi/d$ , tendo vales de  $F_m$  com valores fixos de  $\min(F_m) \approx 0,5$  em períodos de tempo múltiplos ímpares de  $\pi/d$  e picos de  $F_m$  com valores decrescentes que tendem a  $\min(F_m)$  em períodos de tempo múltiplos pares de  $\pi/d$ . Já para o canal PD, um resultado apreciavelmente discrepante com relação à dinâmica dissipativa do estado de *cluster* pode ser observado. Embora existam oscilações para períodos de tempo múltiplos de  $\pi$  para os picos de  $F_m$  com valores decrescentes que tendem a  $\min(F_m)$ , onde anteriormente havia vales na dinâmica dissipativa sem medidas, agora existem picos menores, os quais tendem a se unir e se igualar aos picos maiores com o passar do tempo, sendo que agora também  $\min(F_m) \approx 0,5$ .

Com relação ao desvio padrão, através da análise das figuras é possível observar que, para o canal AD, os valores de  $\sigma$  são de modo geral pequenos, sendo pouco acentuados nos picos de  $F_m$ , aproximadamente nulos nos vales e ligeiramente mais acentuados nos tempos intermediários aos picos e vales de  $F_m$ . Dessa forma, para o canal AD em uma operação de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$ , considerando as medidas feitas no tempo presente em que a dinâmica é realizada, os resultados indicam que há uma baixa variação da fidelidade média com relação aos possíveis estados iniciais. Já para o canal PD, os valores de  $\sigma$  são menores nos picos de  $F_m$ , extremamente elevados para intervalos de tempo múltiplos ímpares de  $\pi/2$  e regiões próximas, e razoavelmente acentuados nos demais intervalos de tempo. A fim de melhor compreender

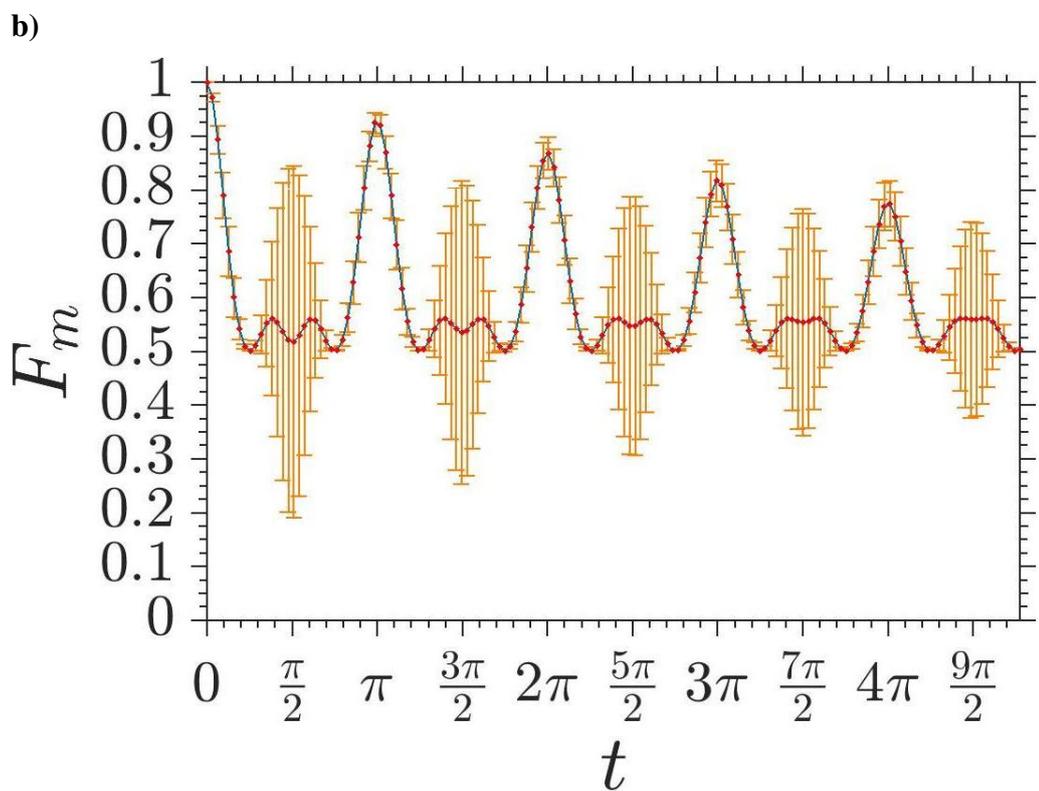
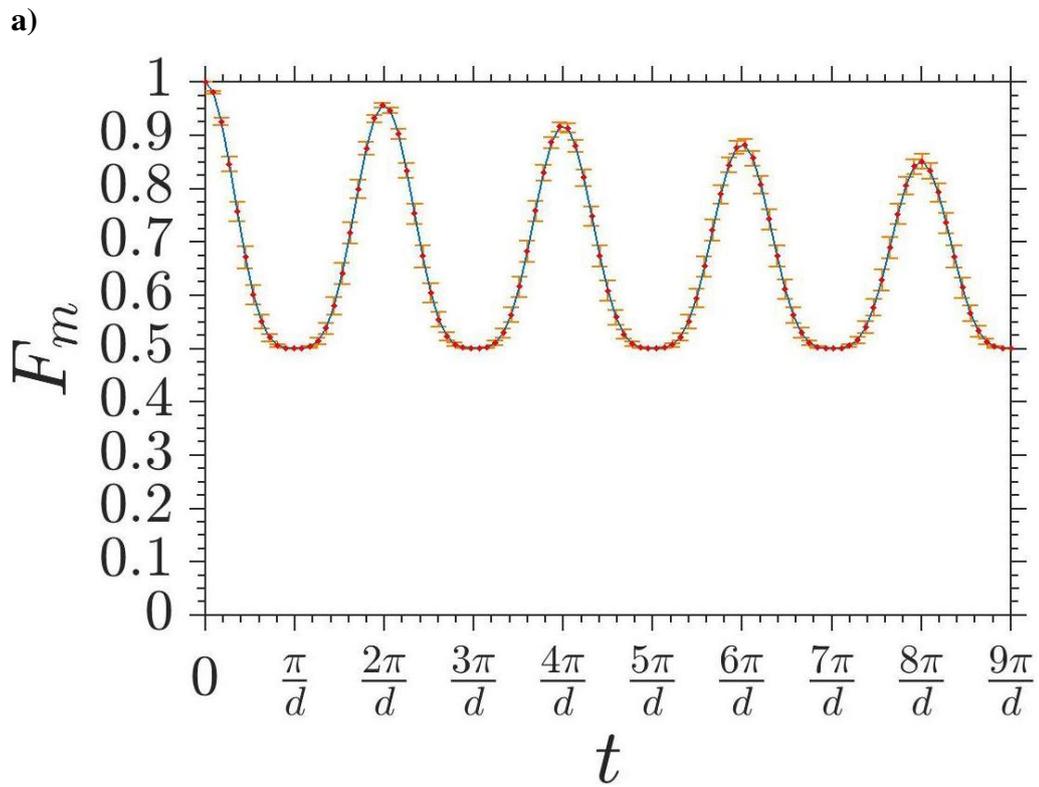


Figura 6.4: Fidelidade média versus tempo e desvio padrão da operação de rotação  $\pm\pi$  no eixo  $X$  ou  $Z$  para os canais não-Markovianos a) AD e b) PD, considerando medidas no mesmo instante para cada  $t$ .

o elevado desvio padrão obtido para o canal PD nos vales da dinâmica, fizemos o gráfico da fidelidade média das projeções  $F_p$  (Equação 5.20) em função das condições iniciais  $\theta$  e  $\phi$ .

As Figuras 6.5a e 6.5b mostram os gráficos de  $F_p \times \theta \times \phi$  para os tempos  $t = \pi/2$  e  $t = 7\pi/2$ , respectivamente, os quais correspondem ao primeiro e quarto vales de  $F_m$  na Figura 6.4b. Através da análise de 6.5a, podemos observar que, para  $t = \pi/2$ , os valores nas extremidades de  $\theta$  (0 e  $\pi$ ) levam aos mais altos valores de fidelidade, onde  $\max(F_p) \approx 0,9745$ , sendo que a partir das extremidades  $F_p$  tende a diminuir até chegar ao seu mínimo ( $\min(F_p) \approx 0,0378$ ) em  $\pi/2$ . É possível observar também que  $\phi$  possui uma influência muito inexpressiva no sistema, sendo quase desprezível. Através da análise de 6.5b, também é possível observar que os comportamentos observados em  $t = \pi/2$  tendem a desaparecer nos demais vales com o passar do tempo. Isso porque, ao observarmos  $F_p \times \theta \times \phi$  em  $t = 7\pi/2$ , podemos notar que os valores de  $F_p$  nas extremidades de  $\theta$  tornam-se menores, os valores de  $F_p$  em  $\theta = \pi/2$  e proximidades tornam-se mais elevados, bem como a influência de  $\phi$  no sistema torna-se mais significativa.

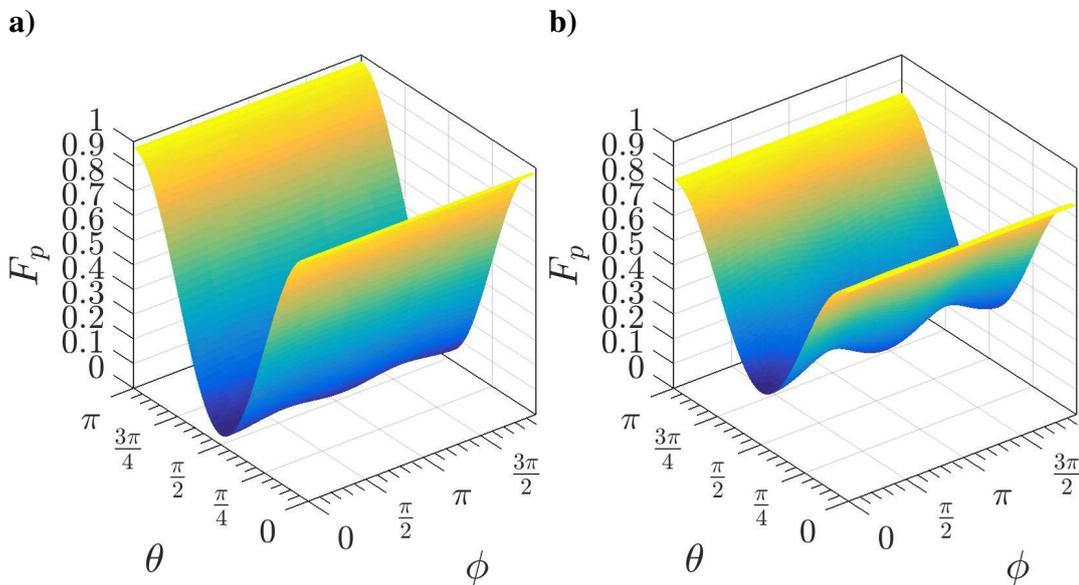


Figura 6.5: Gráficos de  $F_p \times \theta \times \phi$  para o canal PD referente aos instantes de tempo nos vales de  $F_m$  para **a)**  $t = \pi/2$  e **b)**  $t = 7\pi/2$ .

Como será posteriormente discutido com mais detalhes, analisando o conjunto de operadores de Kraus para o canal PD (Equações 5.36), podemos observar que para instantes de tempo

múltiplos ímpares de  $\pi/2$ ,  $L(t) \rightarrow -1$ , e conseqüentemente  $E_1(t) \rightarrow 0$  e  $E_2(t) \rightarrow \sigma_z$ . Isso significa que, para esses instantes de tempo, o canal tende a atuar como um operador de mudança de fase para altos valores de  $\tau$  (mais especificamente algo muito próximo disso para  $\tau = 30$ ) e quão menores forem os valores de  $t$ . Com base nos resultados obtidos, podemos observar que  $F_m$  em intervalos de tempo múltiplos ímpares de  $\pi/2$  possui uma grande dependência para com  $\theta$ , ou seja, para com as distâncias dos estados nos extremos do eixo  $Z$  na esfera de Bloch. Tal fato sugere que, em razão de nesses instantes de tempo os operadores de Kraus atuarem aproximadamente como um operador de mudança de fase, para o estado  $|\psi_{in}\rangle$  do primeiro qubit (Equação 5.4), quanto mais próximo dos estados extremos  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  o vetor de Bloch estiver (mais próximo de 0 ou  $\pi$  o  $\theta$  estiver), menos afetado pela mudança de fase será, ou seja, menor será a distância percorrida pelo vetor em  $\phi$ . Já quando  $\theta$  estiver em  $\pi/2$ , maior será a distância percorrida pelo vetor de Bloch em  $\phi$  e, conseqüentemente, menor será a fidelidade média.

Uma análise comparativa acerca dos resultados obtidos para a dinâmica dissipativa do estado de *cluster* com 5 qubits e para a operação de rotação  $\pm\pi$  nos eixos  $X$  ou  $Z$  será feita na próxima subseção.

### 6.2.3 COMPARAÇÃO DA DINÂMICA DISSIPATIVA COM E SEM PROJEÇÕES

De posse dos resultados referentes à dinâmica dissipativa sem medidas projetivas e com medidas projetivas, foi possível comparar os resultados a fim de estabelecer possíveis relações. A Figura 6.6a mostra, em azul, o gráfico da fidelidade média do estado de *cluster*  $F_c$  em função do tempo  $t$ , e em vermelho o gráfico da fidelidade média  $F_m$  para a operação de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$  em função do tempo  $t$  para o canal AD. Através da análise dos gráficos, é possível observar que para o canal em questão existe uma correspondência entre ambos os resultados, de modo que os picos e vales de  $F_c \times t$  correspondem a medidas com maior e menor fidelidade média em  $F_m \times t$ , respectivamente. Já na Figura 6.6b, estão representados os gráficos de  $F_c \times t$  em azul e de  $F_m \times t$  em vermelho para o canal PD. Através da análise dos gráficos, é possível observar que para o canal em questão existe uma correspondência entre ambos os resultados, de modo que os picos de  $F_c \times t$  correspondem a medidas com maior fidelidade média em  $F_m \times t$ . O mesmo entretanto não ocorre para os vales, onde ocorrem discrepâncias, havendo inicialmente

o surgimento de dois pequenos picos em  $F_m$  nas regiões próximas dos vales de  $F_c$ , que com o passar do tempo tornam-se um único pico nos vales de  $F_c$  e tendem a se igualar aos outros picos maiores.

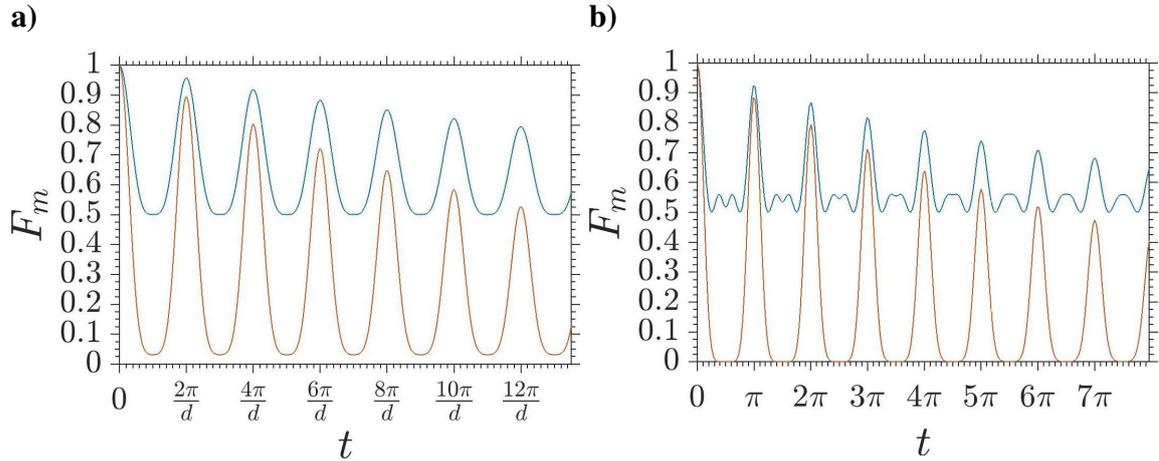


Figura 6.6:  $F_c \times t$  (em azul) e  $F_m \times t$  (em vermelho) para a operação de rotação  $\pm\pi$  no eixo  $X$  ou  $Z$  para os canais não-Markovianos **a)** AD e **b)** PD.

Os resultados para o canal AD são de fato intuitivos, uma vez que medidas efetuadas em tempos para o qual a fidelidade média do *cluster* seja maior ou menor proporcionará também uma computação com maior ou menor fidelidade, haja vista que os efeitos de decoerência nos estados dos qubits será mais acentuado ou menos acentuado, respectivamente. Já para o canal PD, o mesmo pode ser observado com relação aos picos de  $F_c$  serem correspondentes aos picos de  $F_m$ , porém há agora a aparição de pequenos picos de  $F_m$  nos tempos referentes aos vales de  $F_c$ , levando dessa forma a uma análise mais complexa. Como anteriormente mencionado, isso sugere que tal comportamento apresentado nos vales esteja relacionado ao fato dos operadores de Kraus atuarem aproximadamente como operadores de mudança de fase em instantes de tempo múltiplos ímpares de  $\pi/2$ , levando a altos valores de  $F_p$  apenas para estados iniciais próximos de  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ , e a baixos valores de  $F_p$  para estados próximos de  $\theta = \pi/2$ , resultando em um valor médio de fidelidade próximo a  $F_m = 0,5$ .

#### 6.2.4 FIDELIDADE MÉDIA COM MEDIDAS EM PICOS E VALES DE $F_c$

Após realizarmos o estudo das operações com medidas realizadas ao mesmo tempo durante toda a dinâmica dissipativa, demos início ao estudo do comportamento da fidelidade média ao considerarmos medidas realizadas em diferentes instantes de tempo, a partir do qual pudemos obter o primeiro dos dois mais importantes resultados de nosso estudo sobre MBQC.

Nesta subseção, realizamos um estudo acerca dos valores de fidelidade média considerando os tempos das medidas realizados nos picos e vales da dinâmica do estado de *cluster*, tanto para o canal AD quanto PD. As expressões para a fidelidade média aqui utilizadas foram as Equações A.5 (canal AD) e A.11 (canal PD) do Apêndice A. Vale frisar que para todos os casos novamente consideramos o valor de fidelidade média obtido imediatamente após a quarta medida ser executada, ou seja, para todos os casos consideramos  $p_5 = p_4$  e  $L_5 = L_4$  para os canais AD e PD, respectivamente. Desse modo, considerando o comportamento oscilatório da fidelidade do estado de *cluster* em um reservatório altamente não-Markoviano, buscamos investigar alguns aspectos como, por exemplo, o fato das medidas serem feitas com atraso poderem resultar em maiores valores de fidelidade, uma vez que intuitivamente espera-se que quanto mais rapidamente a computação seja feita, maior será a fidelidade, bem como saber qual conhecimento prévio é necessário para se determinar os melhores tempos de medidas e qual a diferença conceitual existente entre canais não-unitais (como o AD) e unitais (como o PD) nos resultados das medidas.

Consideramos aqui três conjuntos distintos de tempos para as medições:  $2\pi/d$ ,  $3\pi/d$ , e  $4\pi/d$  para o canal AD (pontos vermelhos na Figura 6.7a) e  $\pi$ ,  $3\pi/2$ , e  $2\pi$  para o canal PD (pontos vermelhos na Figura 6.7b). Como podemos observar na Figura 6.7, esses tempos estão relacionados a um pico ( $P_1$ ), um vale ( $V$ ) e outro pico ( $P_2$ ) da fidelidade média do estado de *cluster*. As fidelidades resultantes são apresentadas nos gráficos de barra da Figura 6.8a para a fidelidade média ( $F_m$ ), e na Tabela 6.8b para a fidelidade de porta ( $F_g$ ).

Na Figura 6.8a, a sequência de letras representa a sequência de medidas em seu respectivo tempo. Por exemplo, para o canal AD, a sequência  $P_1-P_1-P_1-P_1$  significa que todas as quatro medidas necessárias para se realizar a rotação  $\pm\pi$  ocorrem no primeiro pico pré-estabelecido de 6.7a (em  $t = 2\pi/d$ ). Já para o caso  $P_1-P_1-P_1-V$ , as primeiras três medidas (nos qubits 1,

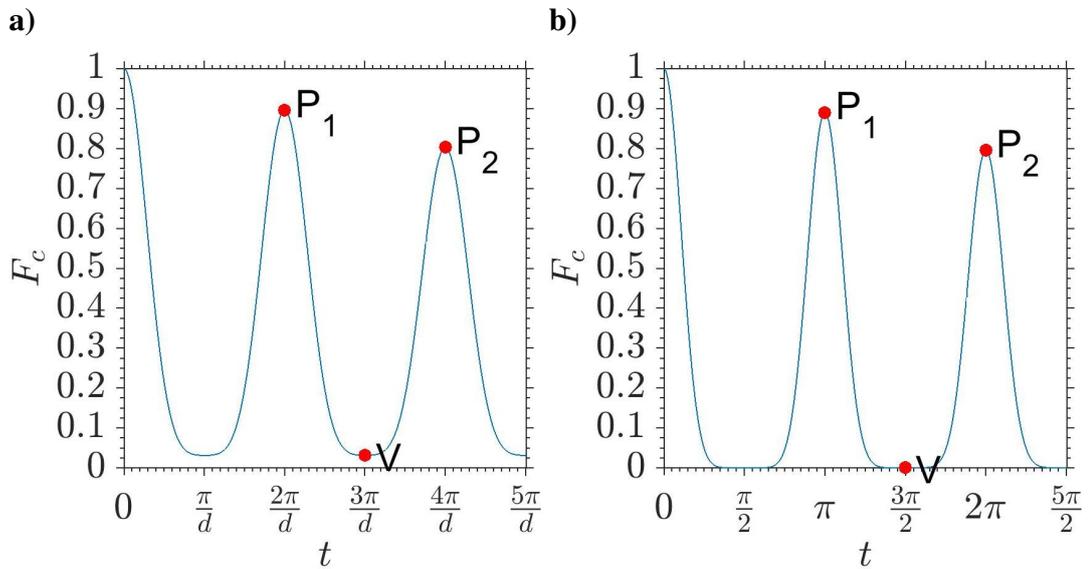


Figura 6.7: Fidelidade média da dinâmica dissipativa do estado de *cluster* com 5 qubits em função do tempo para os canais **a)** AD e **b)** PD. Os pontos vermelhos  $P_1$ ,  $V$  e  $P_2$  definem um conjunto de tempos pré-selecionados em que as medidas serão executadas.

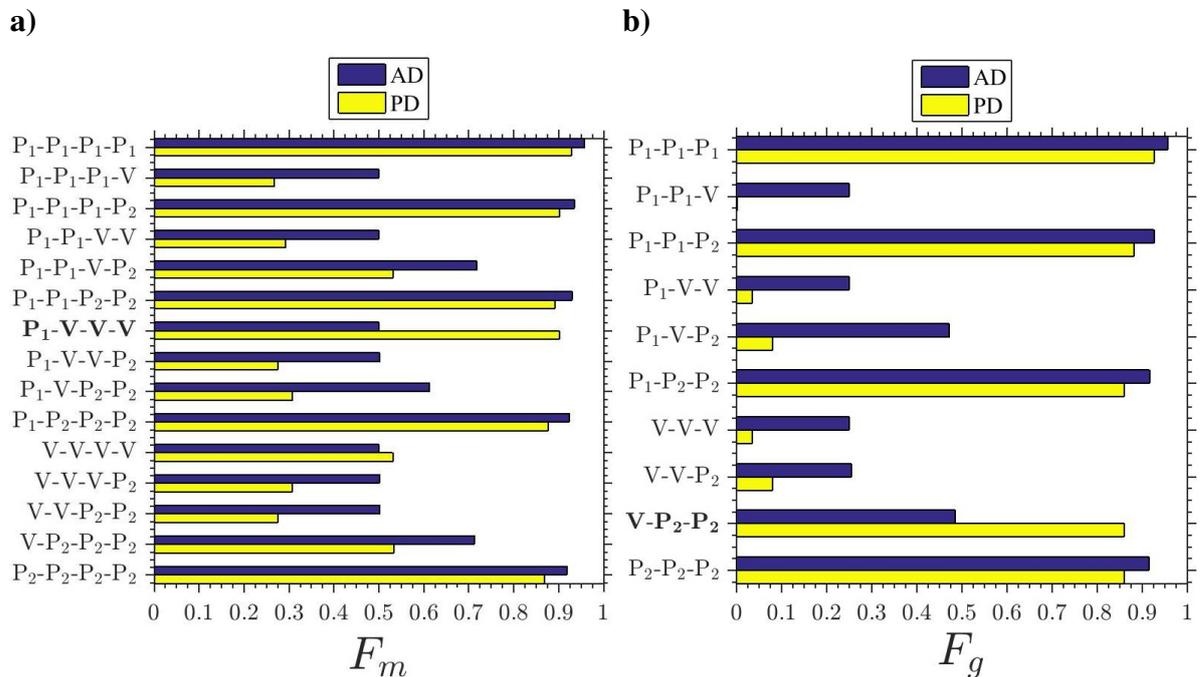


Figura 6.8: **a)** Fidelidade média ( $F_m$ ) e **b)** fidelidade de porta ( $F_g$ ) em função da sequência de medidas para os canais AD e PD.

2 e 3) ocorrem em  $t = 2\pi/d$  e a quarta medida ocorre em  $t = 3\pi/d$  (no vale pré-estabelecido de 6.7a). Da mesma forma, para o caso  $P_1$ -V-V-P<sub>2</sub>, a primeira medida no qubit 1 ocorre

quando  $t = 2\pi/d$ , a segunda e terceira medidas subsequentes (nos qubits 2 e 3) ocorrem quando  $t = 3\pi/d$ , e a quarta medida (no qubit 4) ocorre quando  $t = 4\pi/d$ . Tal procedimento assim ocorre para as demais possíveis combinações de medidas restantes. Já para o caso do canal PD a ideia é a mesma, onde alteram-se apenas os tempos das medidas que são representados pelas letras  $P_1$ ,  $V$  e  $P_2$ , tornando-se agora  $t = \pi$ ,  $t = 3\pi/2$  e  $t = 2\pi$ , respectivamente. Vale frisar que para todos os casos o número subsequente da medida é sempre maior que o anterior, uma vez que as medidas são feitas em sequência do qubit 1 ao qubit 4, ou seja, não é possível, por exemplo, fazer a segunda medida antes da primeira, bem como a terceira medida antes da segunda e da primeira, e assim por diante.

Para o caso da Figura 6.8b a ideia é análoga, porém agora apenas três medidas (nos qubits 2, 3 e 4) são necessárias para se criar o estado de recurso. Dessa forma, cada conjunto de medidas possui apenas 3 letras. A primeira letra na sequência indica o tempo em que o qubit 2 é medido, a segunda letra indica o tempo em que o qubit 3 é medido, e a terceira letra indica o tempo em que o qubit 4 é medido. Com relação aos tempos de medida, para o canal AD novamente  $P_1$  é equivalente a  $t = 2\pi/d$ ,  $V$  é equivalente a  $t = 3\pi/d$  e  $P_2$  é equivalente a  $t = 4\pi/d$ . Para o canal PD, novamente  $P_1$  é equivalente a  $t = \pi$ ,  $V$  é equivalente a  $t = 3\pi/2$  e  $P_2$  é equivalente a  $t = 2\pi$ . Dessa forma, as letras dizem os tempos em que as medidas são efetuadas e a ordem das letras (1 ao 3) correspondem à ordem dos qubits (2 ao 4).

#### AÇÃO DO CANAL *amplitude damping*

Analisando as Figuras 6.8a e 6.8b, observamos que os melhores resultados ocorrem quando o arranjo dos tempos das medidas é o denotado por  $P_1-P_1-P_1-P_1$  (ou  $P_1-P_1-P_1$  para o caso da fidelidade da porta), ou seja, quando todas as medidas são realizadas no primeiro pico da fidelidade média do estado do *cluster*. Por outro lado, o arranjo denotado por  $V-V-V-V$  (ou  $V-V-V$  para o caso da fidelidade da porta), onde todas as medidas são realizadas no vale da fidelidade média do estado de *cluster*, revela o pior resultado. De fato, para o canal AD, para qualquer medida realizada no vale da fidelidade média do estado de *cluster*, a fidelidade média e a fidelidade de porta da operação de rotação  $\pm\pi$  nos eixos  $X$  ou  $Z$  diminuem significativamente. Além disso, notamos que a fidelidade tende a ser menor se o número de medidas efetuadas no tempo

que coincide com o vale da fidelidade média do *cluster* aumentar, bem como que o tempo das últimas medidas, no terceiro ou quarto qubit, são mais cruciais do que os primeiros.

Por outro lado, analisando novamente as figuras em questão, observamos que medidas atrasadas podem realmente resultar em melhores valores de fidelidades média. O arranjo dado por  $P_2-P_2-P_2-P_2$  (ou  $P_2-P_2-P_2$ ), por exemplo, quando todas as medidas são feitas no momento que coincide com o segundo pico, é substancialmente maior do que qualquer outro arranjo onde há pelo menos uma das medidas realizadas em um vale. Esses resultados nos mostram que, para o caso de um canal AD altamente não-Markoviano, a melhor disposição dos tempos de medição pode ser identificada exclusivamente por meio da dinâmica dissipativa do estado de *cluster*. Observando a expressão de  $p(t)$  na Equação 5.34, vemos que os picos da fidelidade média do *cluster* ocorrem quando  $t = 2n\pi/d$ , em que  $n$  define a ordem do pico. Em outras palavras, uma vez que o canal é conhecido, a posição do pico e do vale é bem caracterizada e, conseqüentemente, melhor organizada para as medições.

De fato, os resultados da fidelidade média são intuitivos ao considerarmos um ambiente descrito pelo canal AD. Todavia, como mostramos a seguir, o mesmo não necessariamente é verdade ao se considerar um ambiente descrito pelo canal PD. Nesse caso, como se trata de um canal unital, há o surgimento de resultados contraintuitivos.

#### AÇÃO DO CANAL *phase damping*

Como anteriormente mencionado, analisando as Figuras 6.8a e 6.8b para o caso em que a MBQC está sob a ação de um canal AD, observamos que os melhores resultados ocorrem quando os arranjos de tempo das medidas correspondem aos picos de  $F_c$ . No entanto, resultados muito contraintuitivos surgem quando examinamos cuidadosamente a fidelidade média e a fidelidade de porta para o canal PD: dependendo do número de medidas no tempo que coincide com o vale da fidelidade média do estado do *cluster*  $F_c$ , a fidelidade média  $F_m$  e de porta  $F_g$  podem resultar em altos valores. De fato, para o caso da fidelidade média, com exceção do arranjo  $P_1-P_1-P_1-P_1$ , um dos melhores resultados é o obtido pelo arranjo  $P_1-V-V-V$ , onde três medidas de tempo coincidem com o vale da fidelidade média do estado de *cluster*. Além disso, para o caso da fidelidade de porta, o arranjo definido por  $V-P_2-P_2$  fornece resultados equivalentes

aos definidos por  $P_1-P_2-P_2$  ou  $P_2-P_2-P_2$ . Com base nesses resultados inesperados, buscamos melhor analisar o sistema em questão.

A principal diferença entre os canais AD e PD é que este último se trata de um canal unital e que, sob algumas circunstâncias, pode atuar como um operador unitário ou ainda como um operador de rotação em  $Z$  (ou, pelo menos, algo muito próximo). Inspeccionando o conjunto de operadores de Kraus fornecido pelas Equações 5.36, é fácil observar que quando  $L(t) \rightarrow -1$ , temos que  $E_1(t) \rightarrow 0$  e  $E_2(t) \rightarrow \sigma_z$ . Isso significa que, nessa situação, o canal atua como uma mudança de fase e, no caso em que  $L(t) = 1$ ,  $E_1(t) \rightarrow I$  e  $E_2(t) \rightarrow 0$ , atuando como um operador identidade. Naturalmente, mesmo nesta situação, ou seja, se o canal atua como um operador identidade ou como um porta  $Z$  de inversão de fase, isso por si só não é o suficiente para manter a fidelidade aproximadamente igual a 1. Entretanto, como mostraremos a seguir, é uma combinação de erros que corrige a operação final. Vamos primeiro examinar a função  $L(t)$ .

As Figuras 6.9a e 6.9b mostram os gráficos de  $L$  (Equação 5.37) em função do tempo para um conjunto de diferentes parâmetros  $\tau$ , com valores altos e baixos. Como podemos observar em 6.9a, à medida que  $\tau$  aumenta, ou seja, o grau de não-Markovianidade cresce,  $L(t)$  tende a 1 ou  $-1$  em alguns instantes específicos. Por um lado, para  $t = \pi$  e  $t = 2\pi$ , dois dos tempos pré-selecionados em que a medição é realizada,  $L(t) \approx 1$  e os operadores Kraus do canal PD tendem a resultar em um operador identidade. Por outro lado, para  $t = 3\pi/2$ ,  $L(t) \approx -0.92$ , e os operadores de Kraus para o canal PD tendem a resultar em uma operação de rotação  $Z$ :

$$E_1(t) \approx \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix} \text{ e } E_2(t) \approx \begin{pmatrix} 0.98 & 0 \\ 0 & -0.98 \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Em suma, para instantes de tempos múltiplos de  $\pi$  e múltiplos ímpares de  $\pi/2$ , o canal PD torna-se aproximadamente um operador identidade e de mudança de fase, respectivamente, sendo que tal comportamento é mais acentuado para altos valores de  $\tau$  e baixos valores de  $t$ . Portanto, seja  $N$  um número inteiro positivo e  $n$  um número inteiro positivo e ímpar, em termos matemáticos

temos as seguintes expressões para os operadores de Kraus dadas pela Equação 6.6:

$$\begin{aligned}
 t = N\pi & \begin{cases} E_1(N\pi) = \sqrt{\frac{L(N\pi)+1}{2}} I \approx \sqrt{\frac{1+1}{2}} I \approx I; \\ E_2(N\pi) = \sqrt{\frac{1-L(N\pi)}{2}} \sigma_z \approx \sqrt{\frac{1-1}{2}} \sigma_z \approx 0. \end{cases} \\
 t = n\frac{\pi}{2} & \begin{cases} E_1\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{L\left(n\frac{\pi}{2}\right)+1}{2}} I \approx \sqrt{\frac{-1+1}{2}} I \approx 0; \\ E_2\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-L\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{2}} \sigma_z \approx \sqrt{\frac{1+1}{2}} \sigma_z \approx \sigma_z. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

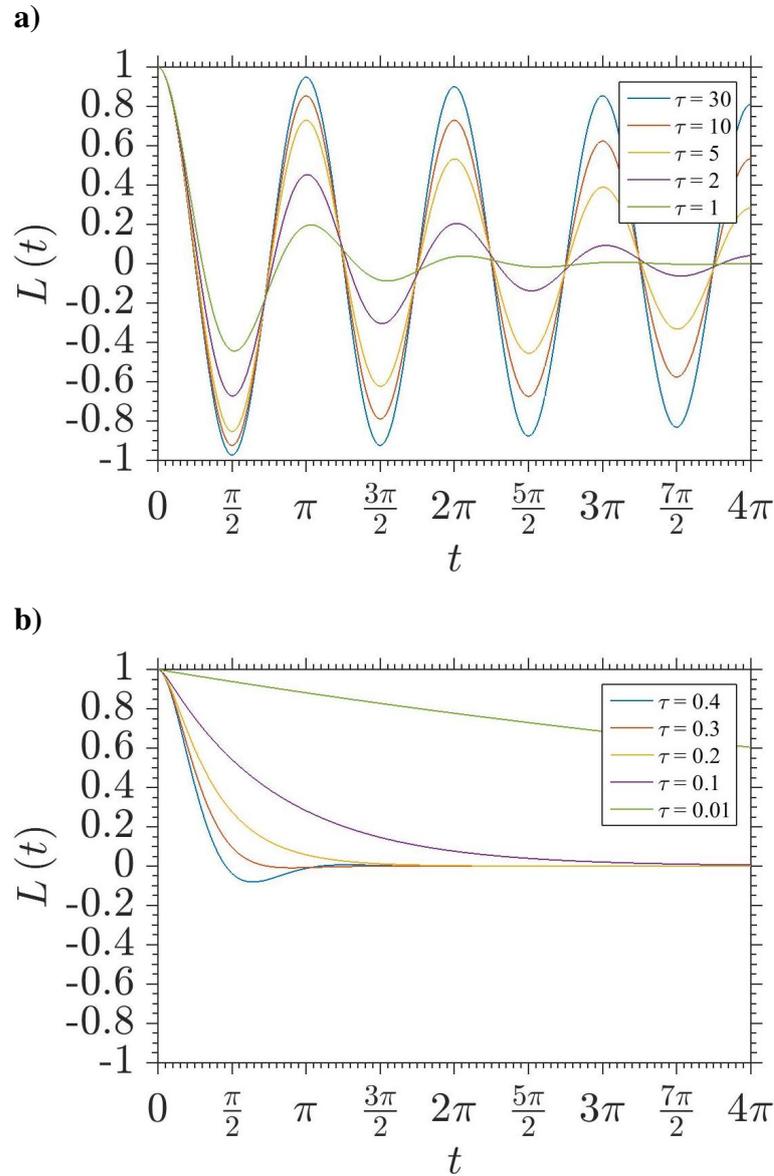


Figura 6.9: Gráfico de  $L \times t$  (Equação 5.37). Em **a**) a curva azul representa  $L(t)$  quando  $\tau = 30$ , enquanto que as curvas em vermelho, amarelo, roxo e verde representam, respectivamente, os casos para o qual  $\tau = 10$ ,  $\tau = 5$ ,  $\tau = 2$  e  $\tau = 1$ . Em **b**) as curvas em azul, vermelho, amarelo, roxo e verde representam, respectivamente, os casos para o qual  $\tau = 0, 4$ ,  $\tau = 0, 3$ ,  $\tau = 0, 2$ ,  $\tau = 0, 1$  e  $\tau = 0, 01$ .

Entretanto, tal comportamento tende a se tornar menos acentuado conforme se diminui o valor de  $\tau$  e se aumenta o valor de  $t$ . Nesse sentido, é natural imaginar que um conjunto de medidas realizadas em  $t = \pi$  e  $t = 2\pi$  poderia resultar em melhores valores de fidelidade média. Todavia, uma sequência de operadores  $\sigma_z$  também pode, de fato, resultar em uma identidade. Desse modo, o motivo pelo qual uma alta fidelidade média é alcançada em P<sub>1</sub>-V-V-V deve-se ao fato de que uma sequência específica de inversões de fase, juntamente com uma sequência de medidas de projeção  $P_s$  na base de  $\sigma_x$  para implementar a porta lógica, resultam em uma igualdade dada por

$$P_s[\rho_C(\psi_{in})]P_s = P_s[U_0\rho_C(\psi_{in})U_0^\dagger]P_s, \quad (6.7)$$

onde

$$U_0 = I^{(1)}\sigma_z^{(2)}\sigma_z^{(3)}\sigma_z^{(4)}\sigma_z^{(5)}, \quad (6.8)$$

tal que  $\rho_C(\psi_{in}) = |\Psi_C(\psi_{in})\rangle\langle\Psi_C(\psi_{in})|$  é a matriz densidade do estado de *cluster*. Dessa forma, uma sequência de medidas dada por P<sub>1</sub>-V-V-V resulta em um estado similar ao original, uma vez que em P<sub>1</sub> tem-se uma medida no instante de tempo  $\pi$  (onde os operadores de Kraus do canal PD tendem a resultar em um operador identidade) e em V tem-se três medidas feitas no tempo  $3\pi/2$  (onde os operadores do Kraus do canal PD tendem a resultar em um operador  $\sigma_z$ ). Como após o término da operação o estado final é instantaneamente gravado no quinto qubit, o tempo do quinto qubit é igual ao do quarto qubit, ou seja, os operadores do Kraus também tendem a atuar como um operador  $\sigma_z$  no quinto qubit, tal como mostra a Equação 6.8. Em termos matemáticos, a ação do superoperador de decoerência pode ser expressa de acordo com a Equação 6.9:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t[\rho_C(\psi_{in})] &= \sum_{i,j,k,l,m=1}^2 E_i^{(1)}E_j^{(2)}E_k^{(3)}E_l^{(4)}E_m^{(5)}\rho_C(\psi_{in})E_m^{\dagger(5)}E_l^{\dagger(4)}E_k^{\dagger(3)}E_j^{\dagger(2)}E_i^{\dagger(1)}; \\ \mathcal{L}_t[\rho_C(\psi_{in})] &\approx I^{(1)}\sigma_z^{(2)}\sigma_z^{(3)}\sigma_z^{(4)}\sigma_z^{(5)}\rho_C(\psi_{in})\sigma_z^{(5)}\sigma_z^{(4)}\sigma_z^{(3)}\sigma_z^{(2)}I^{(1)}; \\ \mathcal{L}_t[\rho_C(\psi_{in})] &\approx U_0\rho_C(\psi_{in})U_0^\dagger. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Dessa forma, quando a computação é submetida ao canal PD e o tempo de medida é dado pela sequência P<sub>1</sub>-V-V-V,  $P_s[\rho_C(\psi_{in})]P_s \approx P_s\mathcal{L}_t[\rho_C(\psi_{in})]P_s \approx P_s[U_0\rho_C(\psi_{in})U_0^\dagger]P_s$ , com uma fidelidade média de 0,902.

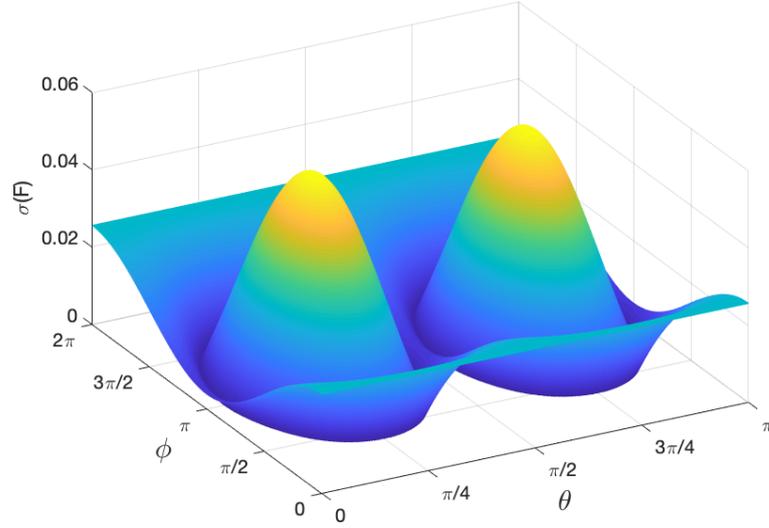


Figura 6.10: Desvio padrão para a fidelidade média em função dos estados iniciais para o canal PD com os tempos de medida dados por  $P_1$ -V-V-V.

A seguir, mostraremos a expressão analítica para a fidelidade média em função do tempo da segunda medida ( $F_{msm}$ ) para o canal PD com  $\tau = 30$  (Equação 6.10). Aqui consideramos o tempo da primeira medida como sendo  $\pi$  e o tempo da terceira e quarta medidas como sendo  $3\pi/4$ :

$$F_{msm} \approx \frac{1}{4} + \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{8} e^{-\frac{2\pi}{\tau}} \right) \left[ 1 - \cos(2t_2) e^{-\frac{2t_2+3\pi}{4\tau}} \right]. \quad (6.10)$$

É importante observar que o tempo da segunda medida deve ser  $\pi \leq t_2 \leq 3\pi/2$ , já que o tempo da primeira medida é  $t_1 = \pi$  e o tempo da terceira medida é  $t_2 = 3\pi/2$ . Isso elucidava o fato de que a fidelidade média é de 0,293 quando os tempos de medidas ocorrem para  $P_1$ - $P_1$ -V-V, com a segunda medida feita portanto no tempo  $\pi$ , e aumenta para 0,902 quando os tempos de medidas ocorrem para  $P_1$ -V-V-V, com a segunda medida portanto feita no tempo  $3\pi/2$ .

Por fim, outro aspecto importante a ser enfatizado é o desvio padrão da fidelidade média. Como estamos considerando um valor médio, uma questão relevante é o nível de dispersão da fidelidade em função do estado inicial. Para ilustrar esse fato, na Figura 6.10 fizemos o gráfico do desvio padrão  $\sigma(F)$  da fidelidade média das projeções em função de  $\theta$  e  $\phi$  para o arranjo  $P_1$ -V-V-V da Figura 6.8a, visto que para os instantes de tempo em questão a Equação A.11 passa a ficar em função de dois ângulos os quais definem um estado inicial arbitrário de um qubit ( $|\psi_{in}\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|1\rangle$ ). Como podemos observar, o desvio padrão é de fato pequeno, com um valor máximo aproximadamente igual a 0,055, e desvio médio

aproximadamente igual a 0,019.

Como resultado desse estudo, pudemos concluir que não necessariamente a rápida execução de medidas projetivas implica em altos valores de fidelidade, bem como a lenta execução de medidas também não necessariamente implica em baixos valores de fidelidade. De fato, para ambientes altamente não-Markovianos, é de extrema relevância o conhecimento dos melhores instantes para que as medições sejam realizadas, uma vez que nesses ambientes uma grande variação na fidelidade pode ocorrer em curtos intervalos de tempo.

### 6.2.5 FIDELIDADE MÉDIA COM MEDIDAS EM TEMPOS DIVERSOS

Buscando melhor compreender a relação existente entre os tempos em que as medidas são efetuadas e o valor final da fidelidade média, construímos os gráficos de  $F_m$  em função dos tempos em que as medidas são realizadas para valores além dos picos de  $F_c$ . Mais especificamente, estabelecemos diferentes tempos  $t_1$  e  $t_4$  para a primeira e quarta medidas e construímos para cada caso os gráfico de  $F_m \times t_2 \times t_3$ , o qual nos permitiu investigar mais detalhadamente a influência dos valores dos tempos das medidas no resultado final da fidelidade média. Dessa forma, os gráficos desta subseção mostram os resultados para a operação de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$ , supondo ruídos não-Markovianos para os 5 qubits, tanto para os canais AD quanto PD. Para todos os casos, os parâmetros utilizados foram novamente  $\lambda = 10^{-3}$  e  $\gamma_0 = 10$  para o canal AD, e  $a = 1$  e  $\tau = 30$  para o canal PD. Após os gráficos serem construídos, buscamos encontrar uma relação destes com os gráficos da dinâmica dissipativa da fidelidade média do estado de *cluster*  $F_c$  em função do tempo.

A seguir serão mostrados os resultados obtidos para o canal AD, sendo que para o cálculo da dinâmica dissipativa do estado de *cluster* utilizamos a Equação A.2, e para o cálculo da dinâmica dissipativa da operação de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$  utilizamos a Equação A.5. Aqui novamente consideramos o valor de fidelidade média obtido imediatamente após a quarta medida ser executada, ou seja, para todos os casos consideramos  $p_5 = p_4$  e  $L_5 = L_4$  para os canais AD e PD, respectivamente.

### Amplitude damping

Inicialmente realizamos os cálculos para o canal AD considerando a 1ª e 4ª medidas em um pico de  $F_c$ , o qual supomos resultar em maiores valores de  $F_m$ . Os tempos escolhidos foram  $t_1 = 0$  e  $t_4 = 2\pi/d$ , os quais representam picos nos valores da fidelidade média do estado de *cluster*  $F_c$ , tal como pode ser observado na Figura 6.11a (linhas verticais e pontos vermelhos). Já a Figura 6.11b mostra o gráfico de curva de nível da fidelidade média  $F_m$  para a operação de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$  versus o tempo da segunda medida  $t_2$  versus o tempo da terceira medida  $t_3$ . Para os valores de  $t_1$  e  $t_4$  em questão, os tempos da segunda e terceira medidas foram plotados com intervalos variando de  $t_1 \leq t_2 \leq t_3$  e  $t_2 \leq t_3 \leq t_4$ . Os valores mínimo e máximo de  $F_m$  encontrados foram, respectivamente,  $\min(F_m) \approx 0,50037$  (para  $t_2 = \pi/d$  e  $t_3 = \pi/d$ ) e  $\max(F_m) \approx 0,97562$  (para  $t_2 = 0$  e  $t_3 = 0$ ). De fato, através da análise do gráfico de  $F_m \times t_2 \times t_3$ , podemos observar que os maiores (ou menores) valores de  $F_m$  correspondem aos tempos em que os valores de  $F_c$  são também maiores (ou menores) no gráfico de  $F_c \times t$ .

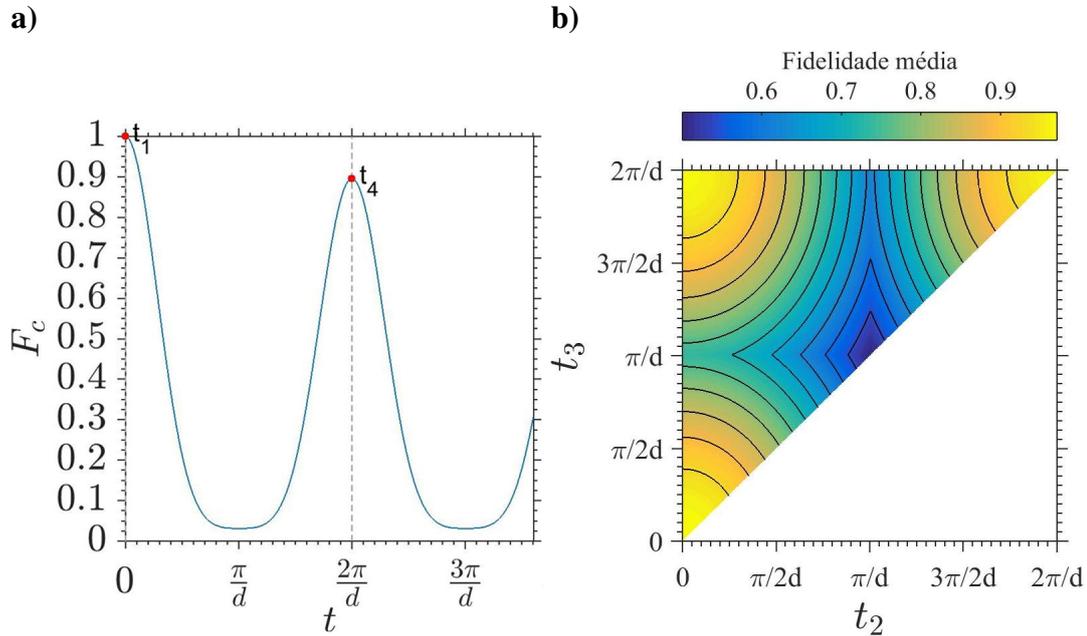


Figura 6.11: **a)** Fidelidade média  $F_c$  do estado de *cluster* (sem medidas) em função do tempo  $t$ ; **b)** gráfico de curva de nível de  $F_m \times t_2 \times t_3$  para a operação de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$ , para  $t_1 = 0$  e  $t_4 = 2\pi/d$ . O canal em questão é o AD com ruídos não-Markovianos em todos os 5 qubits.

Em seguida, repetimos o procedimento para diferentes valores de  $t_1$  e com um valor fixo

de  $t_4 = 2\pi/d$ . A Figura 6.12b mostra, por exemplo, o resultado de  $F_m \times t_2 \times t_3$  para quando  $t_1 = \pi/d$ , estando  $t_1$  em um vale e  $t_4$  em um pico no gráfico de  $F_c \times t$  (Figura 6.12a). Nesse caso, observa-se uma estabilidade no valor mínimo e uma diminuição no valor máximo da fidelidade média, com  $\min(F_m) = 0,50025$  (para  $t_2 = \pi/d$  e  $t_3 = \pi/d$ ) e  $\max(F_m) \approx 0,73125$  (para  $t_2 = 2\pi/d$  e  $t_3 = 2\pi/d$ ). Observamos em seguida que este comportamento de diminuição da fidelidade média máxima também ocorre para valores nos quais  $t_1$  possui baixa  $F_c$ , o qual nos permitiu concluir que, para o sistema em questão, quando a primeira medida é efetuada em um baixo valor de  $F_c$ , toda a operação terá sua fidelidade média reduzida. Intuitivamente, pode-se dizer que tal comportamento de fato faz sentido, uma vez que medidas realizadas em estados com menor coerência levam a resultados com menor fidelidade.

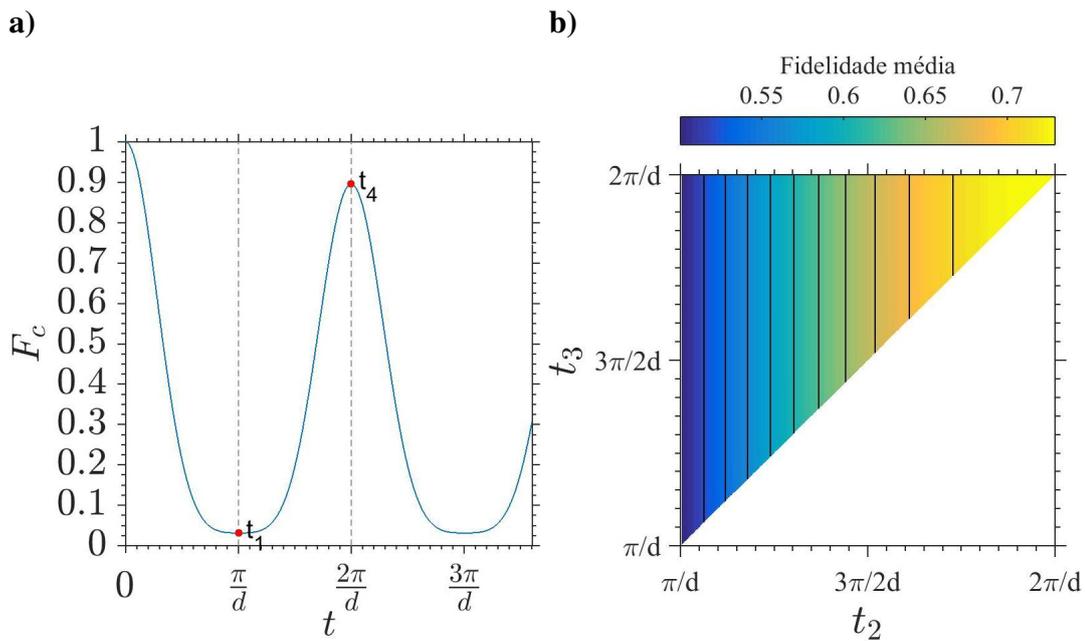


Figura 6.12: **a)** Fidelidade média  $F_c$  do estado de *cluster* (sem medidas) em função do tempo  $t$ ; **b)** gráfico de curva de nível de  $F_m \times t_2 \times t_3$  para a operação de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$ , para  $t_1 = \pi/d$  e  $t_4 = 2\pi/d$ . O canal em questão é o AD com ruídos não-Markovianos em todos os 5 qubits.

Feito isso, alteramos o tempo da última medida para um valor fixo de  $t_4 = \pi/d$  e posteriormente  $t_4 = 3\pi/d$  (os quais correspondem a vales nos gráficos de  $F_c \times t$ ), variando  $t_1$  em diferentes valores. Para todos os casos, os valores máximo e mínimo da fidelidade média foram de  $F_m \approx 0,5$ . A partir disso, pudemos concluir que a quarta medida é a mais relevante no sistema. Isso sugere que tal fenômeno ocorra devido ao fato da medida no quarto qubit ser a res-

ponsável pelo resultado final, cujo resultado consiste na operação lógica completa (mesmo que possivelmente em uma base diferente da computacional) a qual será gravada no quinto qubit.

Tomando por base os resultados obtidos para esta etapa dos cálculos, pudemos chegar, para este tipo de sistema, às seguintes conclusões:

1. A quarta medida é a mais relevante. Caso esta seja feita em um vale de um gráfico de  $F_c \times t$ , os valores de  $F_m$  tornam-se expressivamente menores, chegando a aproximadamente 0,5. Todavia, caso  $t_4$  seja feita em um pico, os resultados de  $F_m$  poderão atingir altos valores.
2. Os valores mínimo e máximo de  $F_m$  aumentam ou diminuem conforme  $t_1$  no gráfico de  $F_c \times t$  aumenta ou diminui.
3. Os altos e baixos valores de  $F_m$  em  $t_2$  e  $t_3$  no gráfico de curva de nível sempre estão em acordo com os altos e baixos valores de  $F_c$  no gráfico da fidelidade média sem medidas.
4. De modo geral, qualquer uma das medidas leva a maiores valores de  $F_m$  quando são feitas nos picos do gráfico de  $F_c \times t$ . No entanto, quando são feitas nos vales, levam a valores menores.

### *Phase damping*

Para o canal PD, o mesmo procedimento foi adotado, levando a uma análise mais complexa. As equações utilizadas para os cálculos de  $F_c$  e  $F_m$  sob ação do canal em questão foram as Equações A.8 e A.11, respectivamente. Assim como foi feito para os casos anteriores, novamente consideramos o valor de fidelidade média obtido imediatamente após a quarta medida ser executada.

A princípio, buscamos fazer uma análise para um tempo  $t_4$  fixo em um pico de  $F_c$ , e  $t_1$  tendo valores variados. Nesse sentido, a Figura 6.13b mostra o gráfico de curva de nível de  $F_m \times t_2 \times t_3$  para  $t_1 = 0$  e  $t_4 = \pi$  (os quais correspondem a picos de  $F_c$ , tal como pode ser visto na Figura 6.13a), e a Figura 6.13d mostra o gráfico de curva de nível para  $t_1 = \pi/2$  e  $t_4 = \pi$ , os quais correspondem a, respectivamente, um vale e um pico de  $F_c$ , tal como pode ser visto na Figura 6.13c.

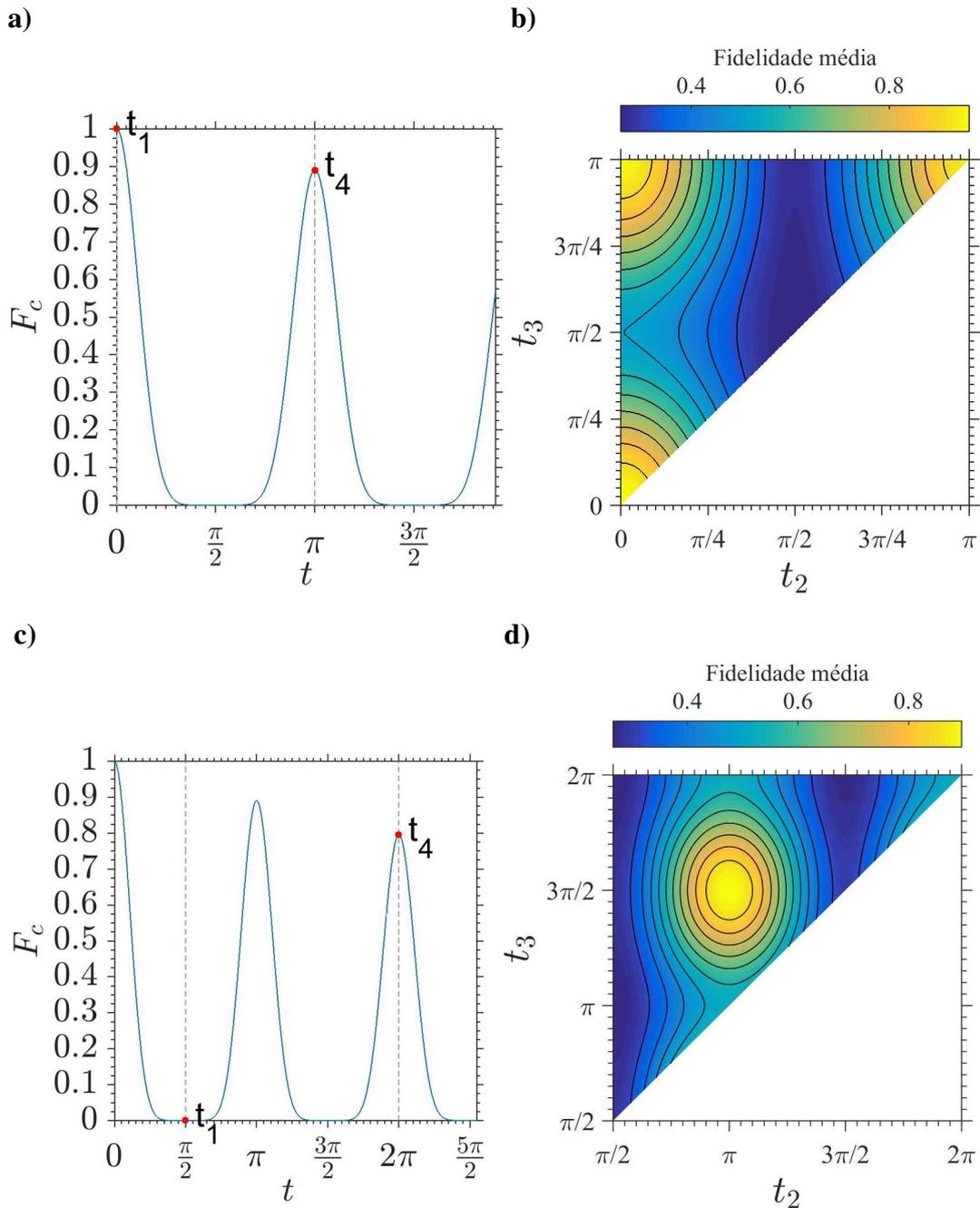


Figura 6.13: **a)** Fidelidade média  $F_c$  do estado de *cluster* (sem medidas) em função do tempo  $t$  com os tempos das medidas nos picos; **b)** gráfico de curva de nível de  $F_m \times t_2 \times t_3$  para a operação de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$  para  $t_1 = 0$  e  $t_4 = \pi$ ; **c)** Fidelidade média  $F_c$  do estado de *cluster* em função do tempo com os tempos das medidas no vale e no pico; **d)** gráfico de curva de nível de  $F_m \times t_2 \times t_3$  para a operação de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$  para  $t_1 = \pi/2$  e  $t_4 = 2\pi$ . O canal em questão é o AD com ruídos não-Markovianos em todos os 5 qubits.

Para o gráfico 6.13b é possível observar que, tanto para  $t_2$  quanto para  $t_3$ , os maiores valores de  $F_m$  ocorrem para tempos de medidas próximos a 0 ou  $\pi$ , bem como os menores

valores de  $F_m$  ocorrem para tempos de medidas próximos a  $\pi/2$ , os quais correspondem a picos e vales de  $F_c$ , respectivamente. Mais especificamente, para  $t_1 = 0$  e  $t_4 = \pi$  os valores de mínimo e máximo de  $F_m$  encontrados foram  $\min(F_m) \approx 0,258$  (para  $t_2 = \pi/2$  e  $t_3 = \pi/2$ ) e  $\max(F_m) \approx 0,9685$  (para  $t_2 = 0$  e  $t_3 = 0$ ). Esse primeiro resultado para  $t_1$  e  $t_4$  em picos de  $F_c$  é trivial no sentido de que medidas feitas em estados de *cluster* com menor e maior coerência levariam, intuitivamente, a resultados com menor e maior coerência, respectivamente. Com base nos resultados obtidos, podemos concluir que, de maneira análoga à Equação 6.8, para a 1ª e 4ª medidas nos picos de  $F_c$ , a seguinte relação pode ser estabelecida:

$$U_0 = I^{(1)}I^{(2)}I^{(3)}I^{(4)}I^{(5)}. \quad (6.11)$$

De fato, para instantes de tempo múltiplos de  $\pi$  e múltiplos ímpares de  $\pi/2$ , os operadores de Kraus — para altos valores de  $\tau$  e baixos valores de  $t$  — atuam aproximadamente como operadores identidade e de mudança de fase, respectivamente. Nesse sentido, de acordo com a Equação 6.11, para  $t_1$  e  $t_4$  múltiplos de  $\pi$ , os valores de  $F_m$  mais elevados ocorrem para valores de  $t_2$  e  $t_3$  também múltiplos de  $\pi$ .

Já para o gráfico 6.13d, é possível observar que os maiores valores de  $F_m$  ocorrem para tempos de medidas próximos a  $(t_2 = \pi, t_3 = 3\pi/2)$ , bem como os baixos valores ocorrem para tempos de medidas em  $t_2$  múltiplos ímpares de  $\pi/2$  e, desta vez, também para valores de  $t_3$  múltiplos de  $\pi$ . Mais especificamente, os valores de mínimo e máximo encontrados foram  $\min(F_m) \approx 0,26586$  (para  $t_2 = \pi/2$  e  $t_3 = \pi$ ) e  $\max(F_m) \approx 0,9019$  (para  $t_2 = \pi$  e  $t_3 = 3\pi/2$ ). Podemos assim concluir que como efeito da primeira medida em um vale, há agora uma inversão de fase nos picos de  $F_m$  para  $t_3$ . Este segundo resultado, em comparação ao primeiro, não é trivial no sentido de que há agora essa mudança de fase para os valores de  $t_3$ , o qual corresponde aos vales de  $F_c$ , e portanto a estados de *cluster* com menor coerência, o que levaria, intuitivamente, a resultados com menor fidelidade. Todavia, aqui novamente percebemos uma relação onde o erro de fase de um qubit corrige o erro existente em outro. Com base nos resultados obtidos, podemos concluir que para a 1ª medida em um vale e a 4ª

medida em um pico de  $F_c$ , a seguinte relação pode ser estabelecida:

$$U_0 = \sigma_z^{(1)} I^{(2)} \sigma_z^{(3)} I^{(4)} I^{(5)}. \quad (6.12)$$

Nesse sentido, de acordo com a Equação 6.12, para  $t_1$  múltiplo ímpar de  $\pi/2$  e  $t_4$  múltiplo de  $\pi$ , os valores de  $F_m$  mais elevados ocorrem para valores de  $t_2$  múltiplos de  $\pi$  e valores de  $t_3$  múltiplos ímpares de  $\pi/2$ .

No procedimento adotado anteriormente, em todos os casos consideramos o tempo da quarta medida em um pico de  $F_c$ . Desta vez, buscamos realizar uma análise para o tempo da quarta medida  $t_4$  fixo em um vale de  $F_c$ , e  $t_1$  tendo valores variados. Nesse contexto, a Figura 6.14b mostra o gráfico de curva de nível de  $F_m \times t_2 \times t_3$  para  $t_1 = 0$  e  $t_4 = \pi/2$  (os quais correspondem a um pico e um vale de  $F_c$ , respectivamente, tal como pode ser visto na Figura 6.14a), e a Figura 6.14d mostra o gráfico de curva de nível para  $t_1 = \pi/2$  e  $t_4 = 3\pi/2$ , os quais correspondem a dois vales de  $F_c$ , tal como pode ser visto na Figura 6.14c.

Para o gráfico 6.14b, ao contrário dos resultados observados para  $t_4$  em um pico de  $F_c$ , é possível agora observar que os maiores valores de  $F_m$  ocorrem para tempos de medidas próximos a  $(t_2 = \pi/2, t_3 = \pi/2)$ , bem como os menores valores ocorrem para quaisquer tempos de medidas próximos a  $t_2 = 0$ , inclusive para  $(t_2 = 0, t_3 = \pi/2)$ , não mais havendo, portanto, correspondência com os picos e vales de  $F_c$ . Mais especificamente, os valores de mínimo e máximo encontrados foram  $\min(F_m) \approx 0,251$  (para  $t_2 = 0$  e  $t_3 = 0$ ) e  $\max(F_m) \approx 0,9685$  (para  $t_2 = \pi/2$  e  $t_3 = \pi/2$ ). Com base nos resultados obtidos, podemos concluir que para a 1ª medida em um pico e a 4ª medida em um vale de  $F_c$ , a relação dada pela Equação 6.8 pode ser estabelecida. Nesse sentido, para  $t_1$  múltiplo de  $\pi$  e  $t_4$  múltiplo ímpar de  $\pi/2$ , os valores de  $F_m$  mais elevados ocorrem para valores de  $t_2$  e  $t_3$  múltiplos ímpares de  $\pi/2$ .

Por fim, para o gráfico 6.14d, é possível observar que os maiores valores de  $F_m$  ocorrem para tempos de medidas próximos de  $(t_2 = \pi/2, t_3 = \pi)$ , bem como os menores valores ocorrem para tempos de medidas próximos a  $t_2 = \pi$ . Mais especificamente, os valores de mínimo e máximo obtidos foram de  $\min(F_m) = 0,2659$  (para  $t_2 = \pi$  e  $t_3 = 3\pi/2$ ) e  $\max(F_m) = 0,9284$  (para  $t_2 = \pi/2$  e  $t_3 = \pi$ ). Podemos dessa forma concluir que, como efeito da primeira e quarta medidas feitas em um vale de  $F_c$ ,  $t_2$  agora apresenta um vale em  $\pi$  e um pico em  $\pi/2$  para  $F_m$ .

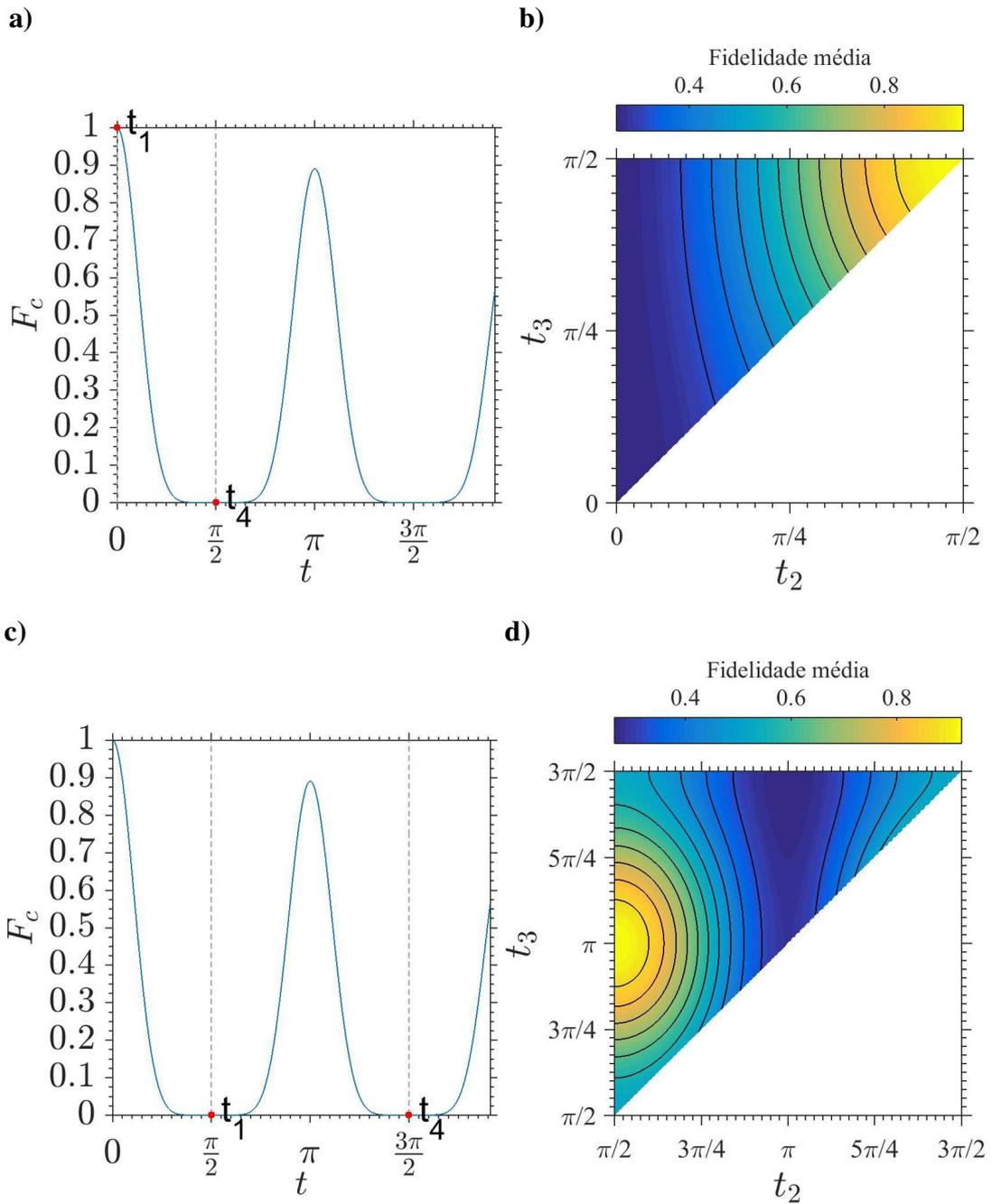


Figura 6.14: **a)** Fidelidade média  $F_c$  do estado de *cluster* (sem medidas) em função do tempo  $t$  com os tempos das medidas no pico e no vale; **b)** gráfico de curva de nível de  $F_m \times t_2 \times t_3$  para a operação de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$  para  $t_1 = 0$  e  $t_4 = \pi/2$ ; **c)** Fidelidade média  $F_c$  do estado de *cluster* em função do tempo com os tempos das medidas nos vales; **d)** gráfico de curva de nível de  $F_m \times t_2 \times t_3$  para a operação de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$  para  $t_1 = \pi/2$  e  $t_4 = 3\pi/2$ . O canal em questão é o AD com ruídos não-Markovianos em todos os 5 qubits.

Com base nos resultados obtidos, podemos concluir que para a 1ª e 4ª medidas em um vale de

Tabela 6.1: Fidelidade média em função de todos os 32 possíveis arranjos de  $I$  e  $\sigma_z$  para  $U_0$  (Equação 6.14) para cada qubit.

Arranjo	$U_0$	$F_m$	Arranjo	$U_0$	$F_m$
1	$I^{(1)}I^{(2)}I^{(3)}I^{(4)}I^{(5)}$	1	17	$\sigma_z^{(1)}I^{(2)}I^{(3)}I^{(4)}I^{(5)}$	0,50495
2	$I^{(1)}I^{(2)}I^{(3)}I^{(4)}\sigma_z^{(5)}$	0,50495	18	$\sigma_z^{(1)}I^{(2)}I^{(3)}I^{(4)}\sigma_z^{(5)}$	1
3	$I^{(1)}I^{(2)}I^{(3)}\sigma_z^{(4)}I^{(5)}$	0,24752	19	$\sigma_z^{(1)}I^{(2)}I^{(3)}\sigma_z^{(4)}I^{(5)}$	0,24752
4	$I^{(1)}I^{(2)}I^{(3)}\sigma_z^{(4)}\sigma_z^{(5)}$	0,24752	20	$\sigma_z^{(1)}I^{(2)}I^{(3)}\sigma_z^{(4)}\sigma_z^{(5)}$	0,24752
5	$I^{(1)}I^{(2)}\sigma_z^{(3)}I^{(4)}I^{(5)}$	0,50495	21	$\sigma_z^{(1)}I^{(2)}\sigma_z^{(3)}I^{(4)}I^{(5)}$	1
6	$I^{(1)}I^{(2)}\sigma_z^{(3)}I^{(4)}\sigma_z^{(5)}$	1	22	$\sigma_z^{(1)}I^{(2)}\sigma_z^{(3)}I^{(4)}\sigma_z^{(5)}$	0,50495
7	$I^{(1)}I^{(2)}\sigma_z^{(3)}\sigma_z^{(4)}I^{(5)}$	0,24752	23	$\sigma_z^{(1)}I^{(2)}\sigma_z^{(3)}\sigma_z^{(4)}I^{(5)}$	0,24752
8	$I^{(1)}I^{(2)}\sigma_z^{(3)}\sigma_z^{(4)}\sigma_z^{(5)}$	0,24752	24	$\sigma_z^{(1)}I^{(2)}\sigma_z^{(3)}\sigma_z^{(4)}\sigma_z^{(5)}$	0,24752
9	$I^{(1)}\sigma_z^{(2)}I^{(3)}I^{(4)}I^{(5)}$	0,24752	25	$\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}I^{(3)}I^{(4)}I^{(5)}$	0,24752
10	$I^{(1)}\sigma_z^{(2)}I^{(3)}I^{(4)}\sigma_z^{(5)}$	0,24752	26	$\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}I^{(3)}I^{(4)}\sigma_z^{(5)}$	0,24752
11	$I^{(1)}\sigma_z^{(2)}I^{(3)}\sigma_z^{(4)}I^{(5)}$	1	27	$\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}I^{(3)}\sigma_z^{(4)}I^{(5)}$	0,50495
12	$I^{(1)}\sigma_z^{(2)}I^{(3)}\sigma_z^{(4)}\sigma_z^{(5)}$	0,50495	28	$\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}I^{(3)}\sigma_z^{(4)}\sigma_z^{(5)}$	1
13	$I^{(1)}\sigma_z^{(2)}\sigma_z^{(3)}I^{(4)}I^{(5)}$	0,24752	29	$\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}\sigma_z^{(3)}I^{(4)}I^{(5)}$	0,24752
14	$I^{(1)}\sigma_z^{(2)}\sigma_z^{(3)}I^{(4)}\sigma_z^{(5)}$	0,24752	30	$\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}\sigma_z^{(3)}I^{(4)}\sigma_z^{(5)}$	0,24752
15	$I^{(1)}\sigma_z^{(2)}\sigma_z^{(3)}\sigma_z^{(4)}I^{(5)}$	0,50495	31	$\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}\sigma_z^{(3)}\sigma_z^{(4)}I^{(5)}$	1
16	$I^{(1)}\sigma_z^{(2)}\sigma_z^{(3)}\sigma_z^{(4)}\sigma_z^{(5)}$	1	32	$\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}\sigma_z^{(3)}\sigma_z^{(4)}\sigma_z^{(5)}$	0,50495

$F_c$ , a seguinte relação pode ser estabelecida:

$$U_0 = \sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}I^{(3)}\sigma_z^{(4)}\sigma_z^{(5)}. \quad (6.13)$$

Nesse sentido, de acordo com a Equação 6.13, para  $t_1$  e  $t_4$  múltiplos ímpares de  $\pi/2$ , os valores de  $F_m$  mais elevados ocorrem para valores de  $t_2$  múltiplos ímpares de  $\pi/2$  e valores de  $t_3$  múltiplos de  $\pi$ .

A fim de melhor compreender as propriedades existentes entre as combinações de medidas e os valores de  $F_m$  resultantes, testamos todas as possíveis combinações de medidas em  $U_0$  para  $I$  ( $L = 1$ ) e  $\sigma_z$  ( $L = -1$ ) em cada um dos qubits, que correspondem a instantes de tempo múltiplos de  $\pi$  e múltiplos ímpares de  $\pi/2$  (picos e vales de  $F_c$ ), respectivamente. Em outras palavras, testamos a relação

$$U_0 = U_1^{(1)}U_2^{(2)}U_3^{(3)}U_4^{(4)}U_5^{(5)}, \quad (6.14)$$

onde  $U_i = I$  ou  $U_i = \sigma_z$ . Nesse sentido, a Tabela 6.1 mostra os valores de fidelidade média encontrados para cada um dos 32 possíveis arranjos.

Além dos arranjos dados pelas Equações 6.8, 6.11, 6.12 e 6.13, também pudemos observar em nossos cálculos que para mais quatro casos dados pelos arranjos 6, 11, 18 e 31 da Tabela 6.1, onde o tempo do quarto qubit é diferente do tempo do quinto qubit, a fidelidade média também atinge o seu máximo valor. Tal fato sugere que para esses casos, após a última medida ser feita no quarto qubit, o estado do quinto qubit poderá ter fidelidade (aproximadamente) máxima após se passar algum tempo.

Com base nos resultados da Tabela 6.1, podemos comprovar que de fato os melhores valores de fidelidade média ocorrem para determinados arranjos de tempos de medida, sendo que para os demais arranjos os valores de  $F_m$  são expressivamente menores ou muito baixos. De modo geral, como resultado do estudo dos tempos de medidas para uma operação de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$ , pudemos concluir que para o canal PD não necessariamente medidas feitas em picos de fidelidade média para a dinâmica dissipativa do estado de *cluster*  $F_c$  levam a maiores valores de fidelidade média  $F_m$ , bem como não necessariamente medidas feitas em vales de  $F_c$  levam a menores valores de  $F_m$ . De fato, dependendo dos tempos em que as medidas são efetuadas, os vales e picos de  $F_m$  apresentam diferentes fases, e os melhores valores de fidelidade média são obtidos para combinações de medidas específicas. Nesse contexto, através do conhecimento do mapa dissipativo do estado de cluster, podemos também, para o canal PD, determinar o melhor tempo para o conjunto de medidas em cada qubit. Isso porque, dependendo de determinadas combinações de tempo para cada medida em  $F_c$  — arranjos 1, 6, 11, 16, 18, 21, 28 e 31 da Tabela 6.1 — o erro existente em um qubit é capaz de corrigir o erro existente em outro.

### 6.3 PORTA CNOT

Após realizarmos um estudo acerca da fidelidade média para uma operação de rotação  $\pm\pi$  nos eixos  $X$  ou  $Z$  da esfera de Bloch, partimos para o estudo da operação CNOT, a qual resulta em relações muito mais complexas visto que agora estamos lidando com uma operação que envolve dois qubits (controle e alvo) de modo que os estados do qubit alvo estão condicionados aos estados do qubit de controle. Nesta seção serão discutidos os resultados referentes à dinâmica dissipativa do estado de *cluster* para um sistema com 4 qubits (necessário à execução da porta lógica CNOT), bem como os resultados referentes à dinâmica dissipativa da operação

CNOT considerando as medidas projetivas feitas ao mesmo tempo em toda a dinâmica. Em ambos os casos, buscando melhor compreender a relação existente entre os estados iniciais e o valor final da fidelidade média, construímos os gráficos de fidelidade média incluindo o desvio padrão para cada instante de tempo, bem como realizamos um estudo acerca dos estados iniciais ótimos para a porta CNOT os quais maximizam  $F_m$  através da análise da fidelidade média das projeções  $F_p$  (Equação 5.20) considerando os possíveis estados iniciais. Além disso, para estados iniciais com os qubits controle e alvo separados, fizemos um estudo acerca dos tempos ótimos em que as medidas projetivas devem ser realizadas, analisando para tanto os vales e picos de fidelidade média do estado de *cluster*  $F_c$ . Para todos os casos, consideramos também ambientes idênticos e independentes para cada qubit, cada qual possuindo seu próprio reservatório. Além disso, consideramos novamente ambientes altamente não-Markovianos com  $\lambda = 10^{-3}$  e  $\gamma_0 = 10$  (Equação 5.34) para o canal AD, e  $a = 1$  e  $\tau = 30$  (Equação 5.37) para o canal PD. Tais parâmetros foram escolhidos por permitir observar de maneira clara os vales e picos para posterior análise.

Nesta seção, também realizamos o estudo da operação CNOT considerando dois casos distintos: o primeiro para um estado inicial com os qubits controle e alvo inicialmente separados, e o segundo para um estado inicial geral com os qubits controle e alvo inicialmente emaranhados. O propósito de estudarmos condições iniciais diferentes para os qubits foi justamente possibilitar uma análise comparativa acerca da dinâmica dissipativa de tais sistemas e verificar se há uma discrepância expressiva entre os efeitos de memória para cada situação.

### 6.3.1 PORTA CNOT PARA UM ESTADO INICIAL SEPARADO

Nesta subseção consideramos os qubits alvo e controle inicialmente separados, com estados expressos por  $|i_A\rangle$  e  $|i_C\rangle$ , respectivamente, de modo que

$$\begin{aligned} |i_A\rangle &= \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle; \\ |i_C\rangle &= \gamma |0\rangle + \delta |1\rangle, \end{aligned} \tag{6.15}$$

onde

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos(\theta_1/2); \\
\beta &= e^{i\phi_1} \sin(\theta_1/2); \\
\gamma &= \cos(\theta_2/2); \\
\delta &= e^{i\phi_2} \sin(\theta_2/2),
\end{aligned} \tag{6.16}$$

de acordo com a Equação 2.8, a qual descreve o vetor de Bloch. Aqui também

$$\begin{aligned}
|\alpha|^2 + |\beta|^2 &= 1; \\
|\gamma|^2 + |\delta|^2 &= 1,
\end{aligned} \tag{6.17}$$

satisfazendo a condição de normalização.

Em todos os casos, para se realizar o cálculo de fidelidade média, calculamos a dinâmica dissipativa sobre uma gama de diferentes condições iniciais para ambos os qubits alvo e controle, considerando o vetor de Bloch em toda sua extensão de  $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi_1 < 2\pi$ ,  $0 \leq \theta_2 \leq \pi$  e  $0 \leq \phi_2 < 2\pi$ , variando em intervalos de  $\Delta\theta_1 = \pi/100$ ,  $\Delta\phi_1 = 2\pi/100$ ,  $\Delta\theta_2 = \pi/100$  e  $\Delta\phi_2 = 2\pi/100$ , totalizando dessa forma uma média sobre 102010000 diferentes valores de condições iniciais.

#### DINÂMICA DO ESTADO DE *cluster*

A seguir serão mostrados os resultados obtidos para a dinâmica dissipativa do estado de *cluster* — e portanto sem medidas projetivas — com 4 qubits, considerando para tanto os qubits alvo e controle inicialmente separados. Para o cálculo da fidelidade média do estado de *cluster* em função do tempo, utilizamos a Equação A.3 para o canal AD, bem como a Equação A.9 para o canal PD.

A Figura 6.15a mostra a fidelidade média do estado de *cluster*  $F_c$  em função do tempo  $t$  para o canal AD, e a Figura 6.15b mostra  $F_c \times t$  para o canal PD. Através da análise dos gráficos, é possível observar que, para o canal AD, há uma oscilação da fidelidade média com valores fixos para os vales de  $\min(F_c) = 0,0625$ . Já os picos, ao contrário dos vales, não possuem um valor fixo, tendo seu valor máximo de  $\max(F_c) = 1$  em  $t = 0$  (visto que o processo de decoerência oriundo da dinâmica dissipativa se inicia a partir desse ponto), e havendo, em

intervalos de tempo múltiplos de  $2\pi/d$ , uma diminuição dos valores de  $F_c$  nos picos, o qual tende a  $\min(F_c)$  com o passar do tempo. Já para o canal PD, novamente  $\max(F_c) = 1$  em  $t = 0$ , porém a cada intervalo  $\Delta t = \pi$  há uma diminuição nos valores dos picos que tende a  $\min(F_c) \approx 0$  com o passar do tempo. Além disso, para todos os instantes de tempo múltiplos ímpares de  $\pi/2$ , tem-se  $\min(F_c) \approx 0$ .

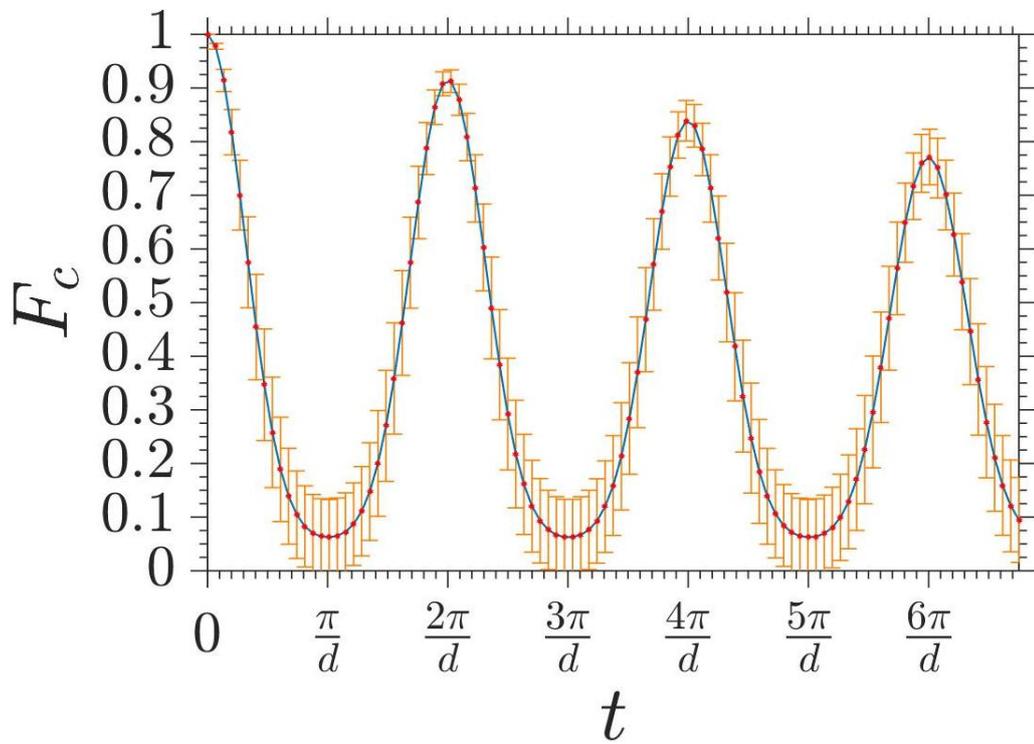
Com relação ao desvio padrão, através da análise das figuras é possível observar que, para o canal AD, os valores de  $\sigma$  são menos acentuados nos picos de  $F_c$  e aumentam em direção aos vales, onde são mais acentuados. Já para o canal PD, os valores de  $\sigma$  são pouco acentuados nos picos de  $F_c$ , aproximadamente nulos nos vales de  $F_c$  e mais acentuados nos tempos intermediários aos picos e vales. Dessa forma, ambos os gráficos indicam que há uma variação relativamente baixa da fidelidade média do estado de *cluster* com relação aos possíveis estados iniciais.

## OPERAÇÃO CNOT

A seguir serão mostrados os resultados obtidos para a dinâmica dissipativa da operação CNOT, considerando para tanto os qubits alvo e controle inicialmente separados, bem como medidas projetivas efetuadas ao mesmo tempo em toda a dinâmica, ou seja, para  $t = 0$  as 2 medidas eram feitas em  $t = 0$ ; para  $t = 0, 1$  as 2 medidas eram feitas em  $t = 0, 1$ , a assim por diante. Para o cálculo da fidelidade média em função do tempo, utilizamos a Equação A.6 para o canal AD, bem como a Equação A.12 para o canal PD. Vale frisar que para todos os casos consideramos o valor de  $F_m$  obtido imediatamente após a segunda medida ser executada, ou seja,  $p_2 = p_3 = p_4$  e  $L_2 = L_3 = L_4$  para os canais AD e PD, respectivamente.

A Figura 6.16a mostra a fidelidade média  $F_m$  da operação CNOT em função do tempo  $t$  para o canal AD, e a Figura 6.16b mostra  $F_m \times t$  para o canal PD. Através da análise dos gráficos, é possível observar que, para o canal AD, há uma oscilação da fidelidade média com valores fixos para os vales de  $\min(F_m) = 0, 25$ . Já os picos, ao contrário dos vales, não possuem um valor fixo, tendo seu valor máximo de  $\max(F_m) = 1$  em  $t = 0$ , e havendo em intervalos fixos  $\Delta t = 2\pi/d$  uma diminuição dos valores de  $F_m$  nos picos, o qual tende a  $\min(F_m)$  com o passar do tempo. Já para o canal PD, novamente  $\max(F_m) = 1$  em  $t = 0$ , porém a cada

a)



b)

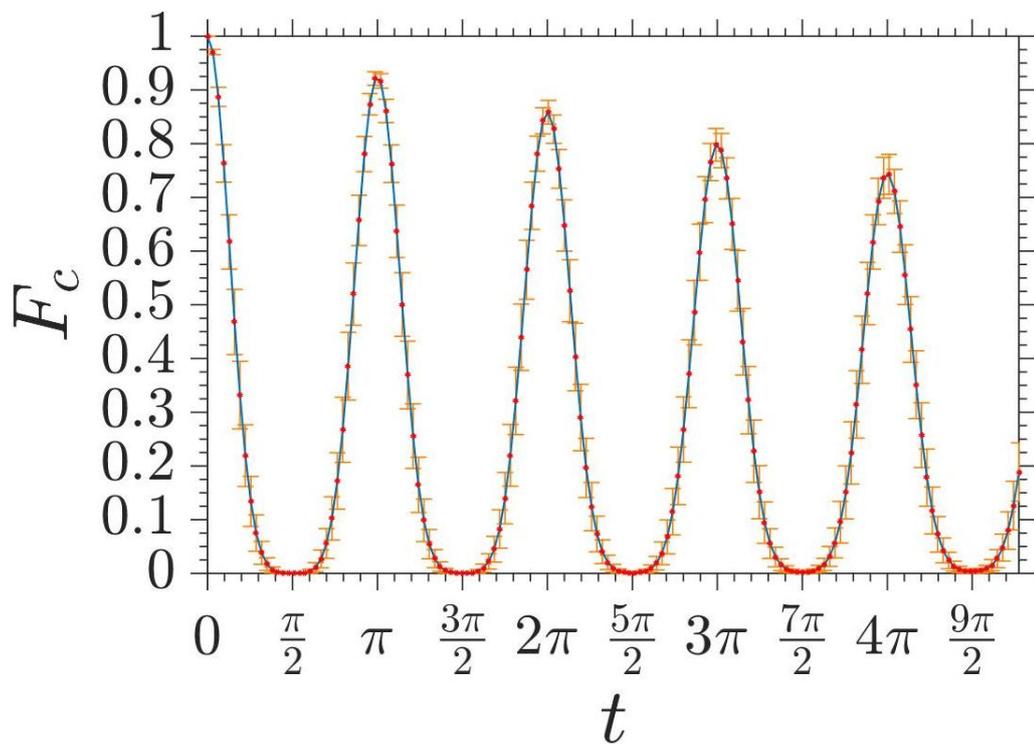


Figura 6.15: Fidelidade média em função do tempo e desvio padrão para a dinâmica dissipativa do estado de *cluster* com 4 qubits para os canais não-Markovianos a) AD e b) PD.

intervalo  $\Delta t = \pi$  há uma diminuição nos valores dos picos que tende a  $\min(F_m) = 0,254$  com o passar do tempo. Além disso, para todos os instantes de tempo múltiplos ímpares de  $\pi/2$ , tem-se  $F_m = \min(F_m)$ .

Com relação ao desvio padrão, através da análise das figuras é possível observar que, para o canal AD, os valores de  $\sigma$  são muito pouco acentuados nos picos de  $F_m$ , porém aumentam em direção aos vales, onde atingem valores muito elevados. Já para o canal PD, analogamente ao resultado obtido para a operação de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$ , os valores de  $\sigma$  são menores nos picos de  $F_m$ , extremamente elevados para intervalos de tempo múltiplos ímpares de  $\pi/2$  e regiões próximas, e razoavelmente acentuados nos demais intervalos de tempo.

A fim de melhor investigar o alto desvio padrão encontrado nos vales para ambos os canais, realizamos uma série de testes com diferentes valores de  $F_p(\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2)$ , explorando dessa forma os diferentes resultados de fidelidade para diferentes valores de condições iniciais. A Figura 6.17 mostra alguns resultados obtidos que maximizam e minimizam os valores de fidelidade média das projeções ( $F_p$ ). Em 6.17a, são mostrados os maiores valores de  $F_p$  encontrados para determinados valores de condições iniciais. Mais especificamente, o gráfico mostra os valores de  $F_p \times t$  para  $\theta_2 = 0$  e  $\{\theta_1 = 0 \text{ ou } \pi, \phi_1 = \phi_2 = 0\}$  (linha tracejada azul),  $\{\theta_1 = \pi/4 \text{ ou } 3\pi/4, \phi_1 = \phi_2 = 0\}$  (linha tracejada vermelha), e  $\{\theta_1 = \pi/2, \phi_1 = \phi_2 = 0\}$  (linha tracejada verde). Através da análise dos resultados, pudemos observar que os valores que otimizam  $F_p$  sempre ocorrem para valores de  $\theta_2 = 0$ , bem como que os valores de  $\theta_1$  podem de maneira muito sutil elevar os valores de fidelidade média das projeções nas regiões entre picos e vales conforme os valores de  $\theta_1$  vão se aproximando de seus extremos (0 ou  $\pi$ ) em direção ao centro ( $\pi/2$ ) da esfera de Bloch. Aqui também vale frisar que os valores de  $\phi$  possuem uma influência desprezível nos resultados para os valores de  $\theta$  em questão, visto que nestes casos o vetor de Bloch se encontra nos extremos  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$ , respectivamente. Já em 6.17b, são mostrados os menores valores de  $F_p$  encontrados, os quais possuem os mesmos parâmetros anteriormente utilizados em 6.17a com exceção de que desta vez  $\theta_2 = \pi$ . Neste caso, todas as três curvas tracejadas azul, vermelha e verde praticamente se sobrepõem, convergindo para um mesmo valor.

A fim de se fazer uma análise mais detalhada, a Figura 6.18 mostra, para  $t = \pi/d$ , o

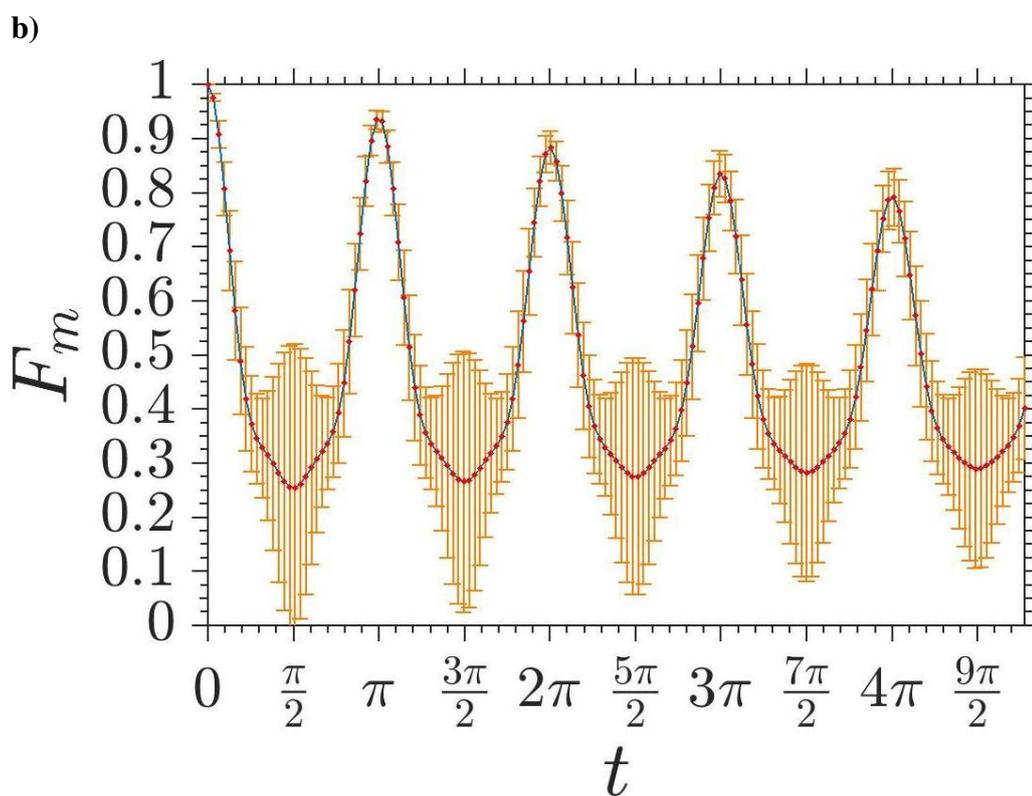
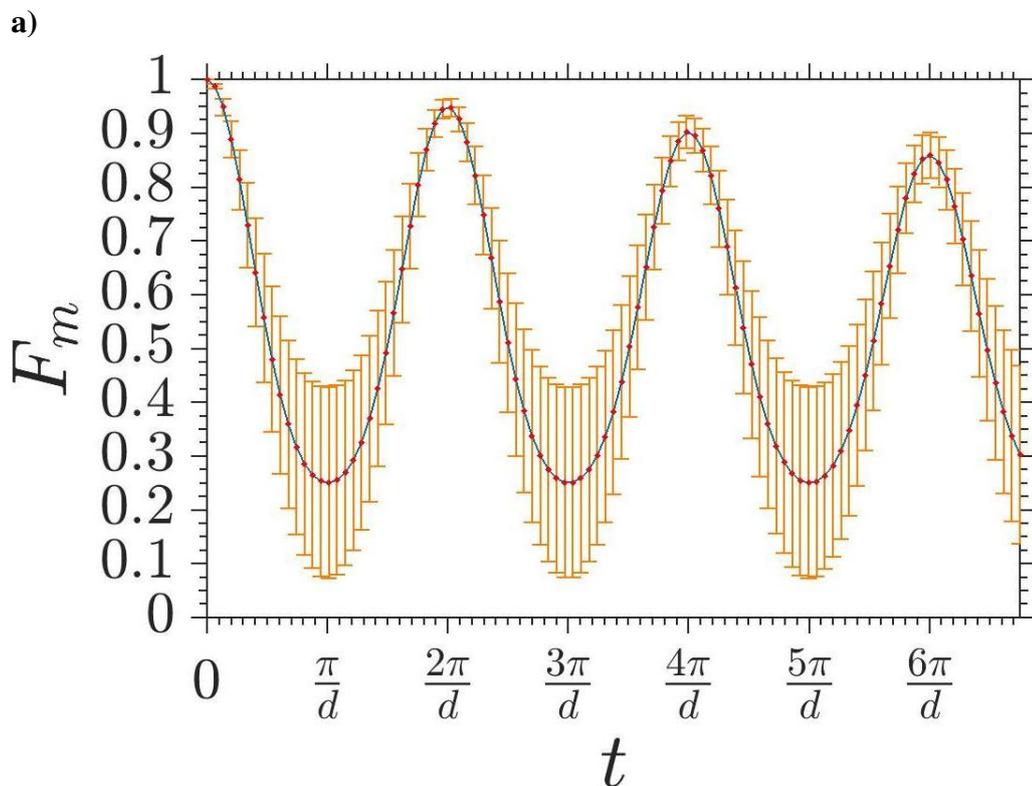


Figura 6.16: Fidelidade média versus tempo e desvio padrão da operação CNOT para os canais não-Markovianos a) AD e b) PD, considerando medidas no mesmo instante para cada  $t$ .

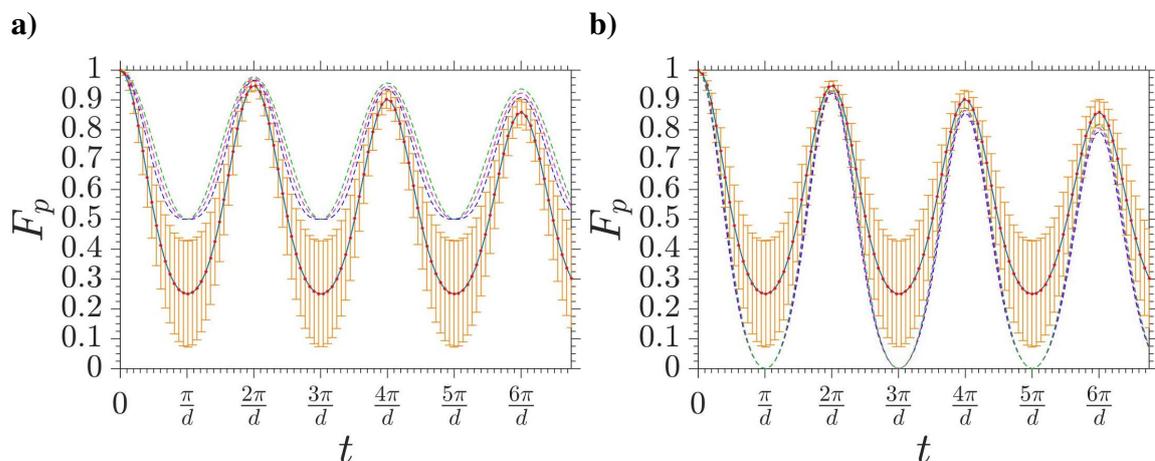


Figura 6.17: Valores de  $F_p \times t$  (canal AD) para  $\{\theta_1 = 0 \text{ ou } \pi, \phi_1 = \phi_2 = 0\}$  (linha tracejada azul),  $\{\theta_1 = \pi/4 \text{ ou } 3\pi/4, \phi_1 = \phi_2 = 0\}$  (linha tracejada vermelha), e  $\{\theta_1 = \pi/2, \phi_1 = \phi_2 = 0\}$  (linha tracejada verde) para **a)**  $\theta_2 = 0$  e **b)**  $\theta_2 = \pi$ .

gráfico de  $F_p \times \theta_1 \times \theta_2$  para  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ , sendo que resultados análogos foram obtidos para diferentes valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , a partir do qual podemos observar que de fato o parâmetro que exerce uma influência expressiva no valor final da fidelidade média das projeções é o  $\theta_2$ . A possível explicação para  $\theta_2$  ser o parâmetro crucial na obtenção dos altos valores de  $F_p$  consiste no fato deste ser o parâmetro responsável pela inclinação vertical do vetor de Bloch para o qubit de controle. Dessa forma, como a ação do canal AD consiste em levar os estados dos qubits para  $|0\rangle$ , a função do qubit de controle que consiste em permitir ou não que o qubit alvo execute uma operação NOT é intensamente afetada quando seu estado é  $|1\rangle$  ( $\theta_2 = \pi$ ) ou valores próximos, resultando consequentemente nos menores valores de  $F_p$  ao final do processo.

Com relação ao canal PD, pudemos testar diversos parâmetros e alguns resultados que levam a baixos valores de  $F_p$  são dados por  $\{\theta_1 = 0, \phi_1 = 0, \theta_2 = 0, \phi_2 = 0\}$  (linhas pretas tracejadas na Figura 6.19a) e  $\{\theta_1 = 0, \phi_1 = 0, \theta_2 = \pi/2, \phi_2 = 0\}$  (linhas em roxo tracejadas na Figura 6.19b), sendo que para 6.19b os vales apresentam bases mais largas. Por outro lado, elevados valores de  $F_p$  puderam ser encontrados para  $\{\theta_1 = \pi/2, \phi_1 = 0, \theta_2 = 0, \phi_2 = 0\}$  (linhas azuis tracejadas na Figura 6.19c) e  $\{\theta_1 = \pi/2, \phi_1 = 0, \theta_2 = \pi/2, \phi_2 = 0\}$  (linhas verdes tracejadas na Figura 6.19d), sendo que para estes casos agora é possível encontrar picos de  $F_p$  para instantes de tempo múltiplos ímpares de  $\pi/2$ , apesar de que para 6.19d valores mais baixos de  $F_p$  podem ser encontrados em instantes de tempo múltiplos ímpares de  $\pi/4$ .

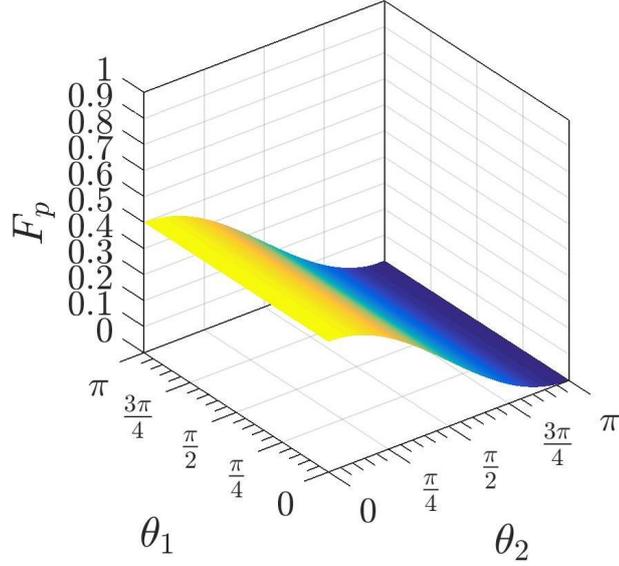


Figura 6.18: Gráfico de  $F_p \times \theta_1 \times \theta_2$  (canal AD) para  $\phi_1 = \phi_2 = 0$  no instante  $t = \pi/d$ .

Buscando uma compreensão mais aprofundada acerca da influência dos parâmetros em questão, a Figura 6.20 mostra, para  $t = \pi/2$ , o gráfico de  $F_p \times \theta_1 \times \phi_1$  para  $\{\theta_2 = 0, \phi_2 = 0\}$ , sendo que resultados semelhantes foram obtidos para diferentes valores de  $\theta_2$  e  $\phi_2$ . Através da análise do gráfico, é possível observar que os altos valores de  $F_p$  ocorrem para  $\theta_1 = \pi/2$  (e diminuem conforme  $\theta_1$  se aproxima das extremidades 0 e  $\pi$ ), bem como para valores de  $\phi_1$  múltiplos de  $\pi$ , e apresentando também vales em instantes de tempos múltiplos ímpares de  $\pi/2$ .

Através da análise dos resultados pudemos concluir que, para uma operação CNOT sob ação do canal PD e com duas medidas ao mesmo tempo em instantes de tempo múltiplos ímpares de  $\pi/2$ , novamente a relação dada pela Equação 6.7 é satisfeita (ou pelo menos resultados muito próximos considerando altos valores de  $\tau$  e baixos valores de tempo), de modo que

$$U_0 = \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \sigma_z^{(3)} \sigma_z^{(4)}, \quad (6.18)$$

sendo  $\psi_{in} \equiv \Psi(i_A, i_C)$  (Equação 5.9), e  $|i_1\rangle, |i_4\rangle$  dados por 6.15, com  $\theta_1 = \pi/2$  e  $\phi_1$  múltiplo de  $\pi$ . Além disso, os resultados obtidos também mostram que diferentes valores de  $\theta_2$  e  $\phi_2$  (ou seja,  $|i_4\rangle$ ) interferem de maneira pouco significativa no resultado final de  $F_p$ . A possível explicação para esse comportamento deve-se ao fato de que o canal PD apreciavelmente leva os estados das laterais da Esfera de Bloch em direção ao seu centro, e portanto muito pouco interfere na

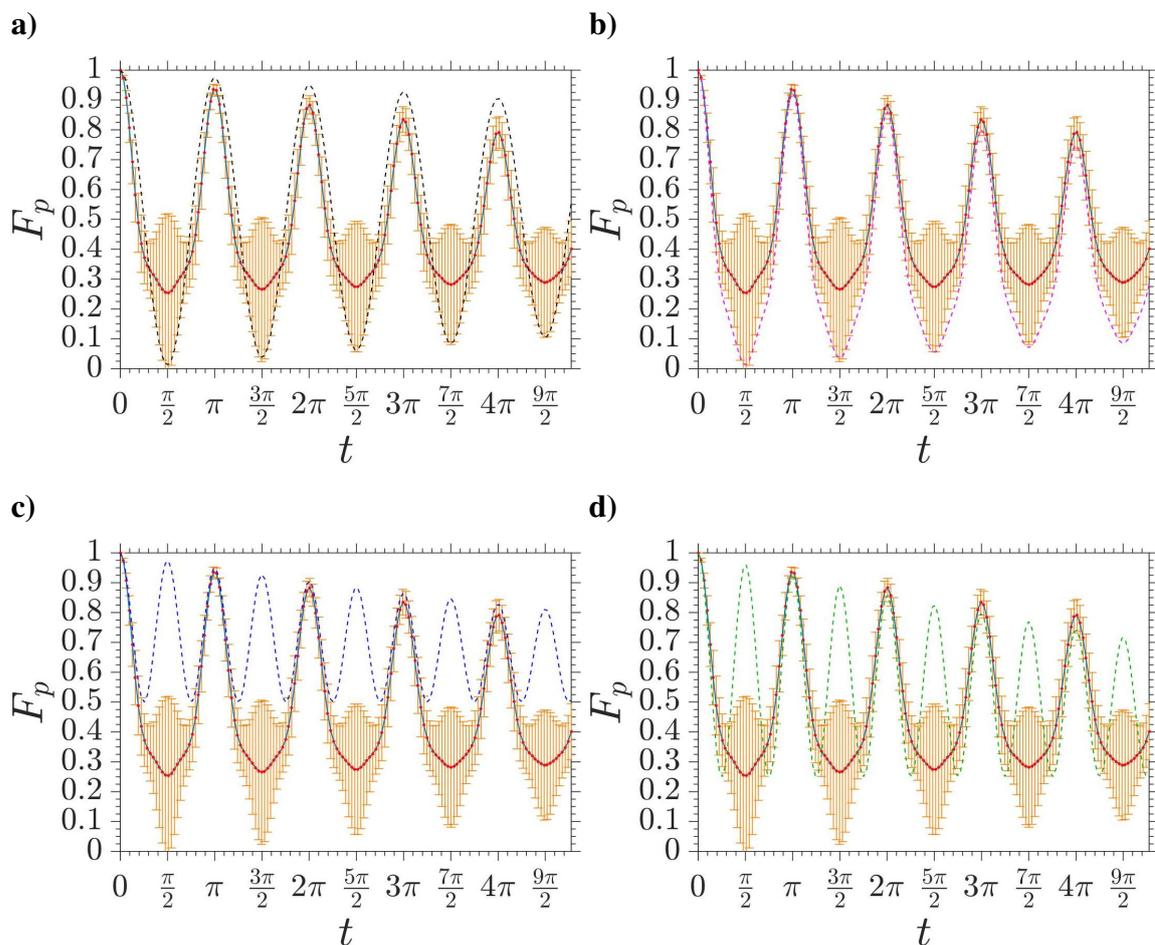


Figura 6.19:  $F_p \times t$  (canal PD) para **a)**  $\{\theta_1 = \phi_1 = \theta_2 = \phi_2 = 0\}$  (linhas pretas tracejadas), **b)**  $\{\theta_1 = \phi_1 = 0, \theta_2 = \pi/2, \phi_2 = 0\}$  (linhas em roxo tracejadas), **c)**  $\{\theta_1 = \pi/2, \phi_1 = \theta_2 = \phi_2 = 0\}$  (linhas azuis tracejadas) e **d)**  $\{\theta_1 = \pi/2, \phi_1 = 0, \theta_2 = \pi/2, \phi_2 = 0\}$  (linhas verdes tracejadas).

inclinação vertical do vetor de Bloch, o que para o qubit de controle pouca influência exerce ao final da operação lógica.

#### FIDELIDADE MÉDIA COM MEDIDAS EM PICOS E VALES DE $F_c$ PARA A OPERAÇÃO CNOT

Analogamente ao procedimento adotado para a operação de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$ , realizamos aqui, para os canais AD e PD, um estudo acerca dos valores de fidelidade média considerando os tempos das medidas realizados nos picos e vales da dinâmica do estado de *cluster*. As expressões para a fidelidade média aqui utilizadas foram as Equações A.6 (canal AD) e A.12 (canal PD) do Apêndice A. Vale frisar que para todos os casos novamente consideramos o valor de  $F_m$  obtido imediatamente após a segunda medida ser executada, ou seja,

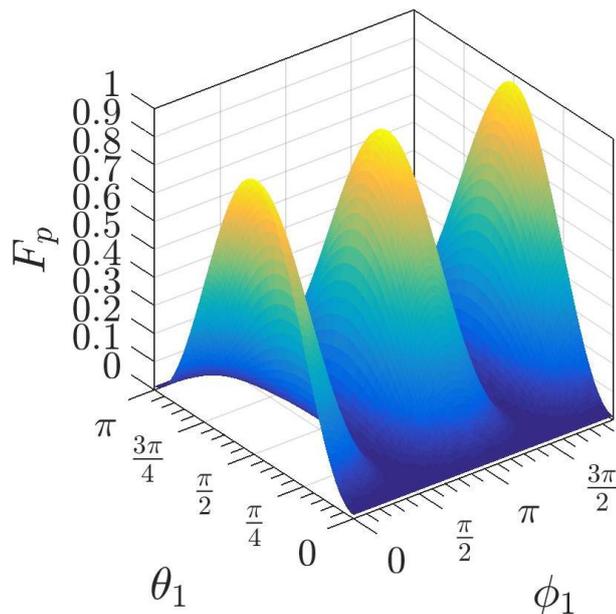


Figura 6.20: Gráfico de  $F_p \times \theta_1 \times \phi_1$  (canal PD) no instante  $t = \pi/2$  para  $\{\theta_2 = 0, \phi_2 = 0\}$ .

$p_2 = p_3 = p_4$  e  $L_2 = L_3 = L_4$  para os canais AD e PD, respectivamente. Aqui também consideramos novamente três conjuntos distintos de tempos para as medições:  $2\pi/d$ ,  $3\pi/d$  e  $4\pi/d$  para o canal AD (pontos vermelhos na Figura 6.21a) e  $\pi$ ,  $3\pi/2$  e  $2\pi$  para o canal PD (pontos vermelhos na Figura 6.21b). Como podemos observar nas figuras em questão, esses tempos estão relacionados a um pico ( $P_1$ ), um vale ( $V$ ) e outro pico ( $P_2$ ) da fidelidade média do estado de *cluster* ( $F_c$ ), sendo que necessariamente  $t_2 \geq t_1$ . Os valores de fidelidade média encontrados são apresentados no gráfico de barras da Figura 6.22 para ambos os canais.

Através da análise da Figura 6.22, é possível observar que para o canal AD os melhores resultados ocorrem quando o arranjo dos tempos das medidas são os denotados por  $P_1$ - $P_1$ ,  $P_1$ - $P_2$  e  $P_2$ - $P_2$  respectivamente, ou seja, quando todas as medidas são realizadas nos picos da fidelidade média do estado do *cluster* e quando os tempos dos qubits 3 e 4 também correspondem a um pico de  $F_c$ . Por outro lado, para os arranjos denotados por  $P_1$ - $V$  e  $V$ - $V$ , onde pelo menos uma das medidas é realizada no vale da fidelidade média do estado de *cluster* e quando os tempos dos qubits 3 e 4 também correspondem a um vale de  $F_c$ , os resultados com menor fidelidade média  $F_m$  para a operação CNOT em questão são obtidos. Por fim, para o tempo de medida  $V$ - $P_2$ ,  $F_m$  ainda apresenta um valor relativamente alto. Isso porque, apesar da primeira medida ter sido feita em um vale de  $F_c$ , a segunda medida foi feita em um pico e,

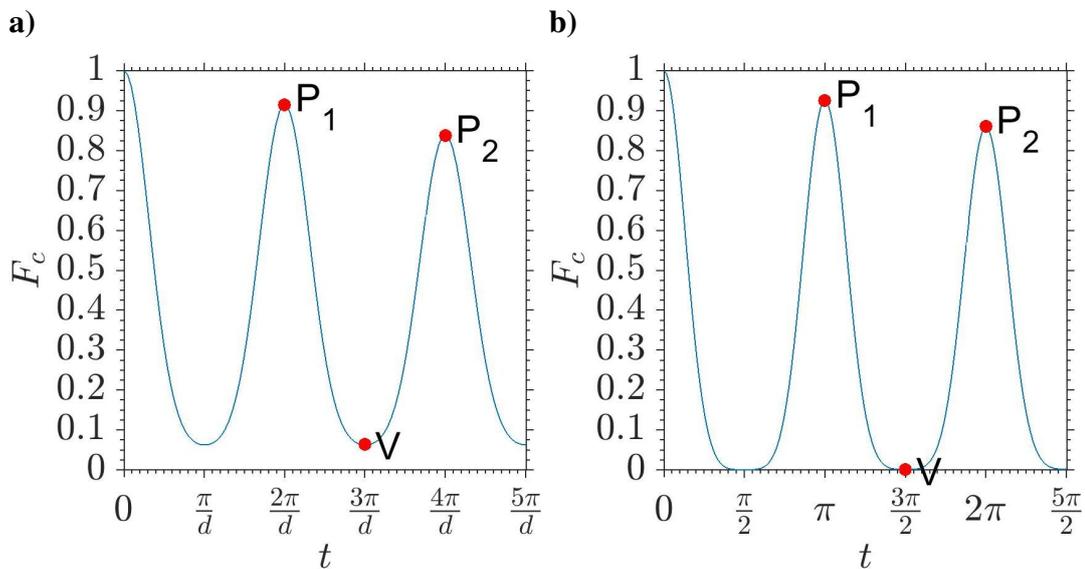


Figura 6.21: Fidelidade média da dinâmica dissipativa do estado de *cluster* com 4 qubits em função do tempo para os canais a) AD e b) PD. Os pontos vermelhos  $P_1$ ,  $V$  e  $P_2$  definem um conjunto de tempos pré-selecionados em que as medidas serão executadas.

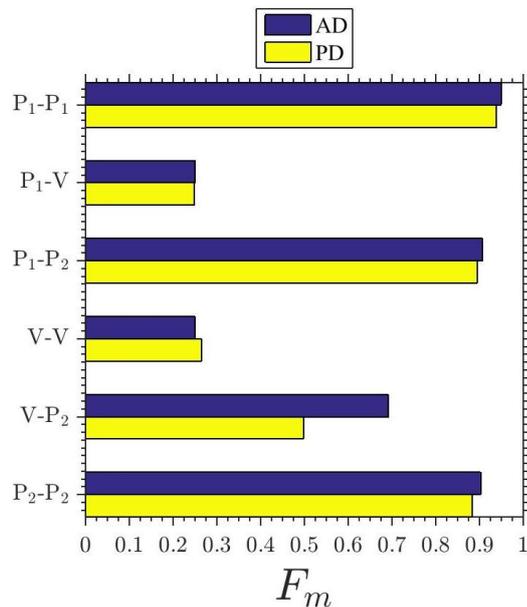


Figura 6.22: Fidelidade média ( $F_m$ ) para a porta CNOT em função da sequência de medidas para os canais AD e PD.

como os tempos do terceiro e quarto qubit são os mesmos do segundo qubit (que corresponde ao segundo pico de  $F_c$ ), há aqui três qubits em um instante de tempo que corresponde a um pico em  $F_c$ , e apenas um qubit em um instante de tempo que corresponde a um vale de  $F_c$ . De fato, podemos observar que para o canal AD em uma operação CNOT com os qubits controle e alvo

inicialmente separados, qualquer medida realizada nos qubits 1 ou 2 — ou instante de tempo para os qubits 3 ou 4 — pertencente ao vale da fidelidade média do estado de *cluster*, é capaz de diminuir significativamente a fidelidade média da operação CNOT. Além disso, notamos também que a fidelidade média tende a ser menor conforme aumentamos o número de medidas ou instantes de tempo dos qubits que coincidem com o vale de  $F_c$ .

Já para o canal PD, os melhores resultados também ocorrem quando o arranjo dos tempos das medidas são os denotados por  $P_1$ - $P_1$ ,  $P_1$ - $P_2$  e  $P_2$ - $P_2$ , respectivamente, onde as medidas e tempos dos qubits ocorrem nos picos de  $F_c$ , bem como os resultados com menor  $F_m$  ocorrem para os arranjos denotados por  $P_1$ -V e V-V, onde as medidas e tempos dos qubits estão de modo geral relacionados aos vales de  $F_c$ . Aqui novamente, para o tempo de medida V- $P_2$ ,  $F_m$  ainda apresenta um valor relativamente alto, uma vez que há três qubits em um instante de tempo que corresponde a um pico em  $F_c$  (os operadores de Kraus atuam aproximadamente como um operador identidade), e apenas um qubit em um instante de tempo que corresponde a um vale de  $F_c$  (os operadores de Kraus atuam aproximadamente como um operador de mudança de fase). Além disso, para uma operação CNOT com os qubits controle e alvo inicialmente separados, pudemos também observar que, analogamente ao que ocorre no canal AD, para o canal PD qualquer medida realizada nos qubits 1 ou 2 — ou instante de tempo para os qubits 3 ou 4 — pertencente ao vale de  $F_c$ , resulta em uma significativa diminuição de  $F_m$ . Ademais, a fidelidade média também tende a ser menor conforme aumentamos o número de medidas ou instantes de tempo que coincidem com o vale de  $F_c$ .

Ao contrário dos resultados obtidos para a operação de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$ , não pudemos observar nesse conjunto de medidas uma situação onde o erro existente em um qubit corrige o erro existente em outro. A fim de verificar a existência da propriedade  $P_s[\rho_C(\psi_{in})]P_s = P_s[U_0\rho_C(\psi_{in})U_0^\dagger]P_s$  (Equação 6.7) para o caso de 4 qubits, testamos todas as possíveis combinações de  $U_0$  para  $I$  ( $L = 1$ ) e  $\sigma_z$  ( $L = -1$ ), que correspondem a instantes de tempo múltiplos de  $\pi$  e múltiplos ímpares de  $\pi/2$  (picos e vales de  $F_c$ ), respectivamente, para cada um dos bits quânticos e sendo os tempos do terceiro e quarto qubit os mesmos, uma vez que a porta CNOT se trata de uma operação de 2 qubits (o resultado engloba ambos os qubits controle e alvo). Em

Tabela 6.2: Fidelidade média em função de todos os 16 possíveis arranjos de  $I$  e  $\sigma_z$  para  $U_0$  (Equação 6.19) para cada qubit na porta CNOT.

Arranjo	$U_0$	$F_m$
1	$I^{(1)}I^{(2)}I^{(3)}I^{(4)}$	1
2	$I^{(1)}I^{(2)}\sigma_z^{(3)}\sigma_z^{(4)}$	0,50495
3	$I^{(1)}\sigma_z^{(2)}I^{(3)}I^{(4)}$	0,24752
4	$I^{(1)}\sigma_z^{(2)}\sigma_z^{(3)}\sigma_z^{(4)}$	0,24752
5	$\sigma_z^{(1)}I^{(2)}I^{(3)}I^{(4)}$	0,50495
6	$\sigma_z^{(1)}I^{(2)}\sigma_z^{(3)}\sigma_z^{(4)}$	1
7	$\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}I^{(3)}I^{(4)}$	0,24752
8	$\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}\sigma_z^{(3)}\sigma_z^{(4)}$	0,24752

outras palavras, testamos a relação

$$U_0 = U_1^{(1)}U_2^{(2)}U_3^{(3)}U_4^{(4)}, \quad (6.19)$$

onde  $U_i = I$  ou  $U_i = \sigma_z$  e  $U_3^{(3)} = U_4^{(4)}$ . Nesse sentido, a Tabela 6.2 mostra os valores de fidelidade média encontrados para cada um dos 16 possíveis arranjos.

Com base nos resultados da Tabela 6.2, pudemos observar que, além do caso onde todos os operadores de Kraus atuam como uma matriz identidade (arranjo 1), para mais 1 caso, dado pelo arranjo 12, onde  $\sigma_z$  atua nos qubits 1, 3 e 4 e  $I$  atua no qubit 2, a propriedade dada pela Equação 6.7, onde o erro existente em um qubit corrige o erro existente em outro, é novamente satisfeita. Tal fato sugere que para esse caso, após a última medida ser feita no segundo qubit, a computação poderá ter fidelidade (aproximadamente) máxima após se passar algum tempo.

Como resultado desse estudo, pudemos concluir que, também para o caso da operação CNOT com qubits controle e alvo inicialmente em estados separados, não necessariamente a rápida execução de medidas projetivas implica em altos valores de fidelidade, bem como a lenta execução de medidas também não necessariamente implica em baixos valores de fidelidade. Isso porque os melhores valores de  $F_m$  encontrados ocorrem para determinados arranjos de tempos de medida, os quais podem ser conhecidos através do mapa dissipativo do estado de *cluster*. Dessa forma, para ambientes altamente não-Markovianos, é possível descobrir os melhores instantes de tempo para se fazer as medidas, os quais são extremamente importantes para a obtenção de altos valores de fidelidade.

### 6.3.2 PORTA CNOT PARA QUBITS CONTROLE E ALVO INICIALMENTE EMARANHADOS

Nesta subseção consideramos ambos os qubits controle e alvo inicialmente emaranhados, de forma que o estado inicial do *cluster* com 4 qubits  $|\psi_{in}\rangle$  pôde então ser expresso por:

$$|\psi_{in}\rangle = \alpha |0 + +0\rangle + \beta |0 + +1\rangle + \gamma |1 + +0\rangle + \delta |1 + +1\rangle, \quad (6.20)$$

sendo  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $\delta$  números complexos gerados aleatoriamente, proporcionalmente distribuídos (MAZIERO, 2016) e que satisfazem a condição de normalização:  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$ . Assim como feito para o caso de estados iniciais com qubits alvo e controle separados, também realizamos aqui uma média sobre 102010000 diferentes valores de condições iniciais gerados aleatoriamente.

#### DINÂMICA DO ESTADO DE *cluster* PARA QUBITS CONTROLE E ALVO INICIALMENTE EMARANHADOS

A seguir serão mostrados os resultados obtidos para a dinâmica dissipativa do estado de *cluster* com 4 qubits, considerando para tanto os qubits alvo e controle inicialmente emaranhados. Para o cálculo da fidelidade média do estado de *cluster* em função do tempo, utilizamos a Equação A.4 para o canal AD, bem como a Equação A.10 para o canal PD.

A Figura 6.23a mostra a fidelidade média do estado de *cluster*  $F_c$  em função do tempo  $t$  para o canal AD, e a Figura 6.23b mostra  $F_c \times t$  para o canal PD. Através da análise dos gráficos, é possível observar que, para o canal AD, há uma oscilação da fidelidade média com valores fixos para os vales de  $\min(F_c) = 0,06253$ , sendo ligeiramente maior do que para o caso anterior com qubits controle e alvo inicialmente separados. Já os picos, ao contrário dos vales, não possuem um valor fixo, tendo seu valor máximo de  $\max(F_c) = 1$  em  $t = 0$  (visto que o processo de decoerência oriundo da dinâmica dissipativa se inicia a partir desse ponto), e havendo novamente em intervalos fixos de  $\Delta t = 2\pi/d$  uma diminuição dos valores de  $F_c$  nos picos, o qual tende a  $\min(F_c)$  com o passar do tempo. Já para o canal PD, novamente  $\max(F_c) = 1$  em  $t = 0$ , porém a cada intervalo  $\Delta t = \pi$  há uma diminuição nos valores dos

picos que tende a  $\min(F_c) = 0$ . Além disso, para todos os instantes de tempo múltiplos ímpares de  $\pi/2$ , tem-se  $\min(F_c) = 0$ .

Com relação ao desvio padrão, através da análise das figuras é possível observar que, para o canal AD, novamente os valores de  $\sigma$  são menos acentuados nos picos de  $F_c$  e aumentam em direção aos vales, onde são mais acentuados, porém desta vez menores do que para o primeiro caso com qubits controle e alvo inicialmente separados. Já para o canal PD, novamente os valores de  $\sigma$  são pouco acentuados nos picos de  $F_c$ , aproximadamente nulos nos vales de  $F_c$  e mais acentuados nos tempos intermediários aos picos e vales. Dessa forma, ambos os gráficos indicam que há uma variação relativamente baixa da fidelidade média do estado de *cluster* com relação aos possíveis estados iniciais.

Através da análise dos resultados podemos concluir que, para o caso de um estado inicial geral, os valores de  $F_m$  mostram-se ligeiramente mais estáveis, com valores de desvio padrão um pouco menores do que para o caso de estados iniciais separáveis. Como será discutido a seguir, menores valores de desvio padrão também ocorrem para uma operação CNOT.

#### OPERAÇÃO CNOT PARA QUBITS CONTROLE E ALVO INICIALMENTE EMARANHADOS

A seguir serão mostrados os resultados obtidos para a dinâmica dissipativa da operação CNOT, considerando para tanto os qubits alvo e controle inicialmente emaranhados, bem como medidas projetivas efetuadas ao mesmo tempo durante toda a dinâmica. Para o cálculo da fidelidade média em função do tempo, utilizamos a Equação A.7 para o canal AD, bem como a Equação A.13 para o canal PD.

A Figura 6.24a mostra a fidelidade média  $F_m$  da operação CNOT em função do tempo  $t$  para o canal AD, e a Figura 6.24b mostra  $F_m \times t$  para o canal PD. Através da análise dos gráficos, é possível observar que, para o canal AD, há uma oscilação da fidelidade média com valores fixos para os vales de  $\min(F_c) = 0, 25$ . Já os picos, ao contrário dos vales, não possuem um valor fixo, tendo seu valor máximo de  $\max(F_c) = 1$  em  $t = 0$ , e havendo em intervalos fixos  $\Delta t = 2\pi/d$  uma diminuição dos valores de  $F_c$  nos picos, o qual tende a  $\min(F_c)$  com o passar do tempo. Já para o canal PD, novamente  $\max(F_c) = 1$  em  $t = 0$ , porém a cada intervalo  $\Delta t = \pi$  há uma diminuição nos valores dos picos que tende a  $\min(F_c) = 0, 21$  com o passar

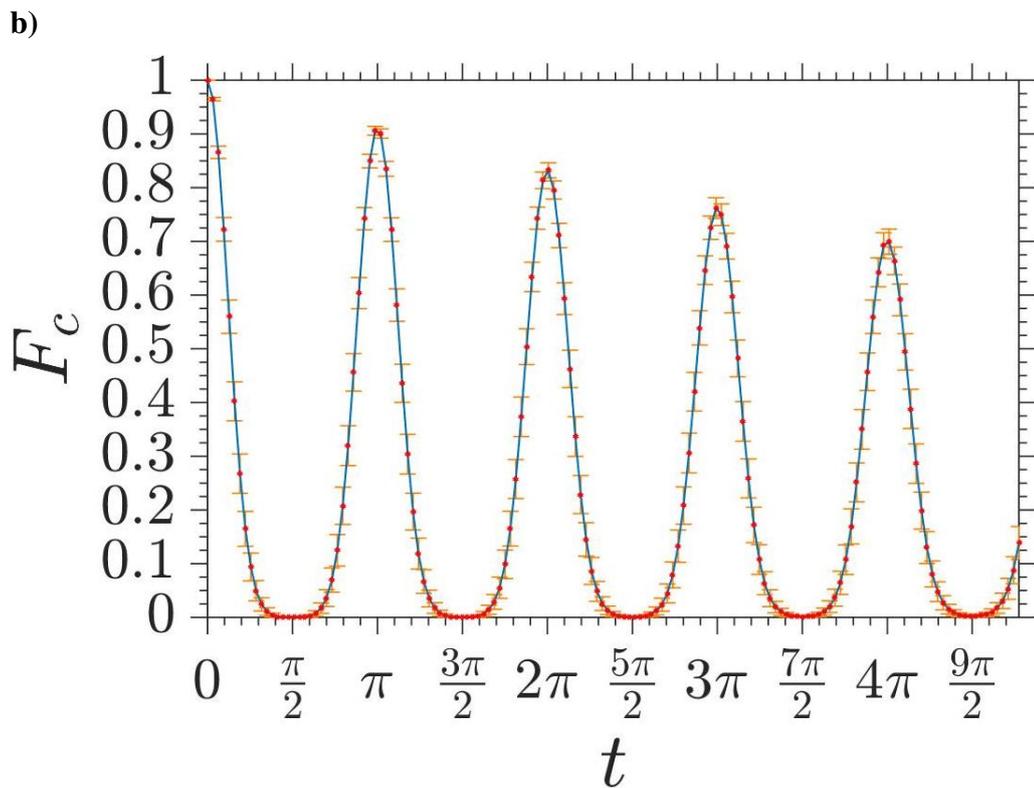
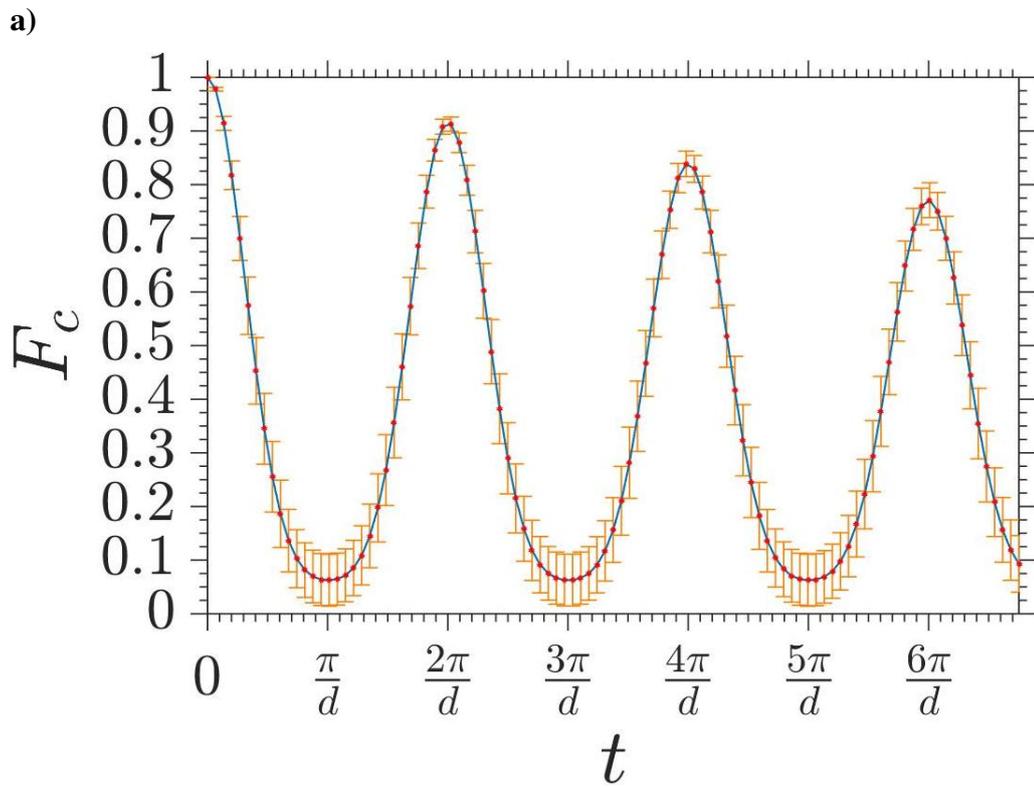


Figura 6.23: Fidelidade média versus tempo e desvio padrão para a dinâmica dissipativa do estado de *cluster* com 4 qubits inicialmente emaranhados para os canais não-Markovianos a) AD e b) PD.

do tempo, sendo este um valor um pouco menor do que para o caso em que os qubits controle e alvo estão inicialmente separados. Além disso, para todos os instantes de tempo múltiplos ímpares de  $\pi/2$ , tem-se  $F_c = \min(F_c)$ .

Com relação ao desvio padrão, através da análise das figuras é possível observar que, para o canal AD, novamente os valores de  $\sigma$  são muito pouco acentuados nos picos de  $F_m$ , porém aumentam em direção aos vales, onde atingem valores elevados, porém desta vez significativamente menores do que para o caso em que os qubits controle e alvo estão inicialmente separados. Já para o canal PD, analogamente ao resultado obtido para a operação de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$ , novamente os valores de  $\sigma$  são menores nos picos de  $F_m$ , bastante elevados para intervalos de tempo múltiplos ímpares de  $\pi/2$  e regiões próximas, e razoavelmente acentuados nos demais intervalos de tempo. Todavia, desta vez os valores de  $\sigma$  também são menores do que para o caso em que os qubits controle e alvo estão inicialmente separados.

Uma possível explicação para os menores valores de desvio padrão para o caso dos qubits alvo e controle inicialmente emaranhados ao invés de separados pode ser dada através da análise das matrizes dos estados iniciais dos quatro qubits para cada caso. Seja  $\Psi_1(i_A, i_C)$  o estado inicial do sistema com os qubits alvo e controle inicialmente separados (Equação 5.9) e  $\Psi_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \equiv |\psi_{in}\rangle$  o estado inicial do sistema com os qubits alvo e controle inicialmente emaranhados (Equação 6.20), ao compararmos os estados iniciais para cada situação iremos encontrar as seguintes matrizes dadas pela Equação 6.21:

$$\begin{aligned} \Psi_1(i_A, i_C) &= \\ \frac{1}{2} \left[ \alpha\gamma \ \alpha\delta \ \alpha\gamma \ \alpha\delta \ \alpha\gamma \ \alpha\delta \ \alpha\gamma \ \alpha\delta \ \beta\gamma \ \beta\delta \ \beta\gamma \ \beta\delta \ \beta\gamma \ \beta\delta \ \beta\gamma \ \beta\delta \right]^T; \\ \Psi_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \\ \frac{1}{2} \left[ \alpha \ \beta \ \alpha \ \beta \ \alpha \ \beta \ \alpha \ \beta \ \gamma \ \delta \ \gamma \ \delta \ \gamma \ \delta \ \gamma \ \delta \right]^T. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Através da análise dos elementos das matrizes, podemos observar que para  $\Psi_1$  cada elemento  $a_{ij}$  consiste no produto de duas amplitudes de probabilidade. Por outro lado, para  $\Psi_2$  as amplitudes aparecem individualmente como elementos da matriz, ou seja, isso sugere que neste caso há uma maior equidade com relação aos estados iniciais gerados.

Com base nos resultados obtidos podemos concluir que, para o caso de um estado inicial

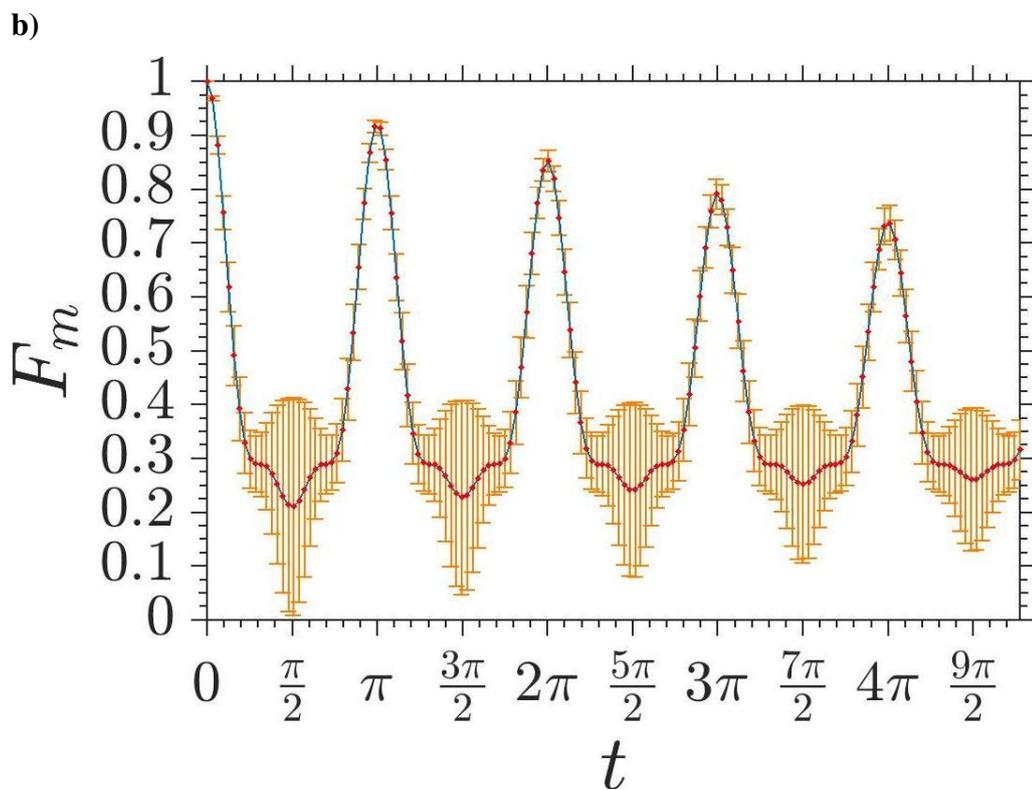
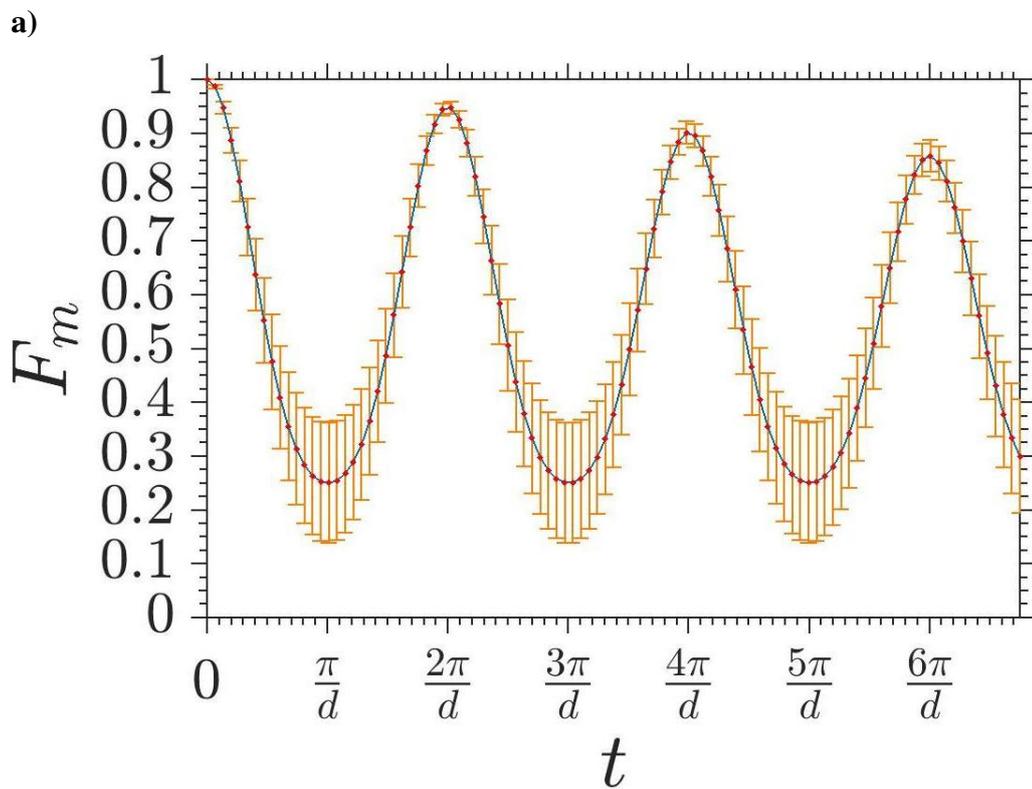


Figura 6.24:  $F_m \times t$  e desvio padrão da operação CNOT com qubits inicialmente emaranhados para os canais não-Markovianos a) AD e b) PD, considerando medidas no mesmo instante para cada  $t$ .

geral com os qubits alvo e controle inicialmente emaranhados, os valores de  $F_m$  mostram-se ligeiramente menores porém mais estáveis, com menores valores de desvio padrão em relação ao caso em que  $|i_A\rangle$  e  $|i_C\rangle$  encontram-se inicialmente separados. Tais resultados tornam-se razoáveis ao tomarmos por base o fato de que, para o sistema em questão, a matriz do estado inicial do sistema possui elementos com amplitudes de probabilidade individuais, o que sugere maior equidade entre os estados de  $\Psi_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ , resultando conseqüentemente em uma maior equidade nos valores de  $F_c$  e  $F_m$ .

## 6.4 INDUÇÃO DE CANAIS NÃO-MARKOVIANOS

Nesta seção mostraremos os resultados de nossos estudos acerca da introdução de canais Markovianos em meio a qubits com canais não-Markovianos — bem como sobre a introdução de canais não-Markovianos em meio a qubits Markovianos — na dinâmica dissipativa de uma operação de rotação  $\pm\pi$  no eixo  $X$  ou  $Z$ , onde pudemos obter o segundo dos dois mais importantes resultados de nosso trabalho com MBQC, a partir do qual pudemos observar que, para o canal PD em determinados instantes de tempo, a indução de ruídos Markovianos em posições específicas de um *cluster* com qubits não-Markovianos pode resultar em valores de fidelidade média expressivamente mais elevados. O propósito do estudo da introdução de canais não-Markovianos em sistemas com qubits Markovianos consiste na possibilidade de induzir efeitos de memória que podem auxiliar na recuperação da fidelidade durante uma dinâmica dissipativa; já o propósito do estudo da introdução de canais Markovianos em sistemas com qubits não-Markovianos, consiste na possibilidade de realizarmos uma análise sobre o modo como a markovianidade do sistema pode afetar os efeitos de memória.

Para o estudo da dinâmica dissipativa de  $F_m$  (Figuras 6.25 e 6.25), novamente utilizamos as expressões analíticas do Apêndice A, considerando medidas realizadas no mesmo instante para cada valor de tempo  $t$  (isto é, para  $t = 0$  todas as 4 medidas feitas ao mesmo tempo em  $t = 0$ , para  $t = 0, 1$  todas as 4 medidas feitas ao mesmo tempo em  $t = 0, 1$ , etc.). No entanto, desta vez consideramos todas as possibilidades de um dos qubits do *cluster* possuir ruído não-Markoviano e os demais ruídos Markovianos, e vice-versa, bem como as possibilidades de todos os qubits possuírem ruído Markoviano e não-Markoviano. Para todos os casos, tam-

bém comparamos nosso método de cálculo de fidelidade média com o método de cálculo de fidelidade de porta, a fim de estabelecermos possíveis relações entre os dois métodos para os diferentes tipos de sistemas.

Para todos os casos, utilizamos como parâmetros para os ruídos não-Markovianos  $\lambda = 10^{-3}$  e  $\gamma_0 = 10$  para o canal AD, e  $a = 1$  e  $\tau = 30$  para o canal PD. Já para os ruídos Markovianos, utilizamos  $\lambda_M = 20,1$  e  $\gamma_{0M} = 10$  para o canal AD, bem como  $a_M = 1$  e  $\tau_M = 0,1$  para o canal PD. Tais valores foram escolhidos por representarem ambientes altamente Markovianos.

As Figuras 6.25 e 6.26 mostram os gráficos de fidelidade média ( $F_m$ ) das operações de rotação  $\pm\pi$  no eixo  $X$  ou  $Z$  versus tempo ( $t$ ) para ruídos Markovianos (M) e não-Markovianos ( $N_m$ ) considerando as quatro medidas realizadas ao mesmo tempo  $t$  durante toda a dinâmica. As linhas azuis mostram os resultados obtidos utilizando nosso método para calcular a fidelidade média, e as linhas vermelhas utilizando o método de fidelidade de porta. A Figura 6.25 mostra os resultados obtidos para o canal AD (Equação A.5) e a Figura 6.26 para o canal PD (Equação A.11). Vale frisar que aqui novamente consideramos o valor de fidelidade média obtido imediatamente após a quarta medida ser executada, ou seja, para todos os casos  $p_5 = p_4$  e  $L_5 = L_4$  para os canais AD e PD, respectivamente.

#### 6.4.1 RESULTADOS PARA O CANAL *amplitude damping*

Através da análise da Figura 6.25, é possível observar que há uma semelhança entre os resultados obtidos utilizando nosso método de cálculo da fidelidade média ( $F_m$ ) e o método de fidelidade de porta ( $F_g$ ), apesar de que, enquanto o primeiro método possui seus menores valores em aproximadamente  $F_m = 0,5$ , o segundo método pode atingir valores menores de até  $F_g = 0,25$ , aproximadamente.

Além disso, para ambos os casos, também é possível observar que, para o conjunto de parâmetros utilizados, um qubit com ruído não-Markoviano em meio a quatro qubits com ruídos Markovianos praticamente não exerce nenhuma influência significativa sobre o sistema. Contudo, um qubit com ruído Markoviano em meio a quatro qubits não-Markovianos pode influenciar significativamente a fidelidade média da operação lógica, principalmente quando o

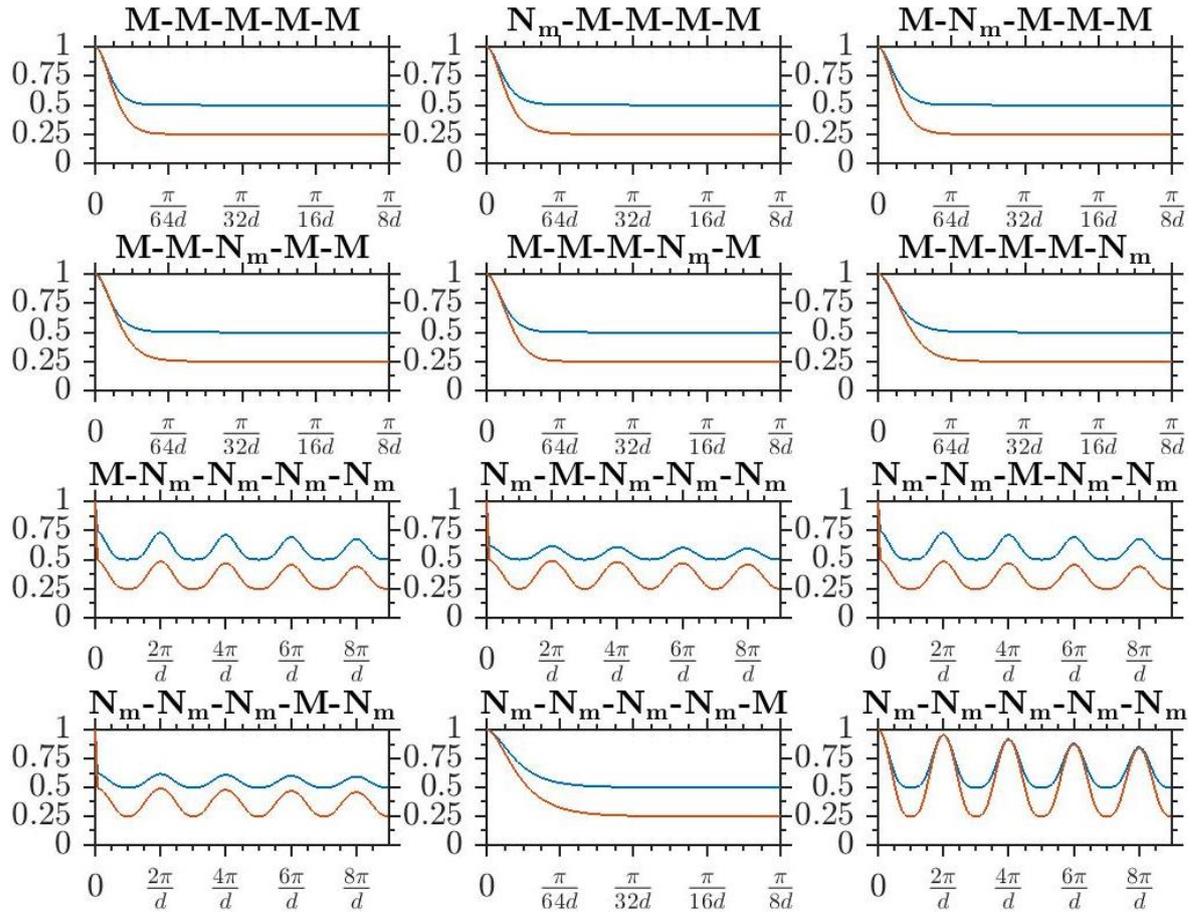


Figura 6.25: Fidelidade média versus tempo para uma operação lógica de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$  para o canal AD com ruídos do tipo Markoviano (M) e não-Markoviano ( $N_m$ ). As linhas azuis mostram os resultados utilizando nosso método de cálculo da fidelidade média ( $F_m$ ) e as linhas vermelhas utilizando o método de fidelidade de porta ( $F_g$ ).

último qubit for Markoviano, eliminando completamente, nesse caso, o comportamento oscilatório do gráfico. Isso sugere o fato do último qubit ser o mais crucial para a operação, uma vez que este serve como base para a impressão do resultado final.

#### 6.4.2 RESULTADOS PARA O CANAL *phase damping*

Ao contrário do canal AD, para o canal PD (Figura 6.26) é possível observar discrepâncias entre os resultados obtidos utilizando nosso método de cálculo da fidelidade média e o método de fidelidade de porta. Aqui também, em ambos os casos para os parâmetros utilizados, 1 qubit com ruído não-Markoviano em meio a 4 qubits com ruídos Markovianos agora pode exercer uma pequena influência sobre o sistema e, para  $F_g$ , uma influência significativa quando o 4º qubit for o não-Markoviano. Discrepâncias entre os resultados obtidos utilizando

$F_m$  e  $F_g$  também ocorrem quando há um qubit com ruído Markoviano em meio a quatro qubits não-Markovianos. Nesse caso, resultados muito contraintuitivos surgem quando o qubit Markoviano ocupa posições ímpares no *cluster* (1<sup>o</sup>, 2<sup>o</sup> e 3<sup>o</sup> qubits), onde nosso método de cálculo de fidelidade média indica o surgimento de picos de  $F_m$  para instantes de tempo múltiplos ímpares de  $\pi/2$ , sendo que tal comportamento não é identificado pelo método de fidelidade de porta. De fato, tais resultados mostram que ao inserirmos um qubit com canal Markoviano em determinadas posições de um *cluster* de canais não-Markovianos, o resultado final da fidelidade média pode ser expressivamente melhorado, resultando em altos valores para instantes de tempo múltiplos ímpares de  $\pi/2$ , com  $F_m \approx 0,75$ .

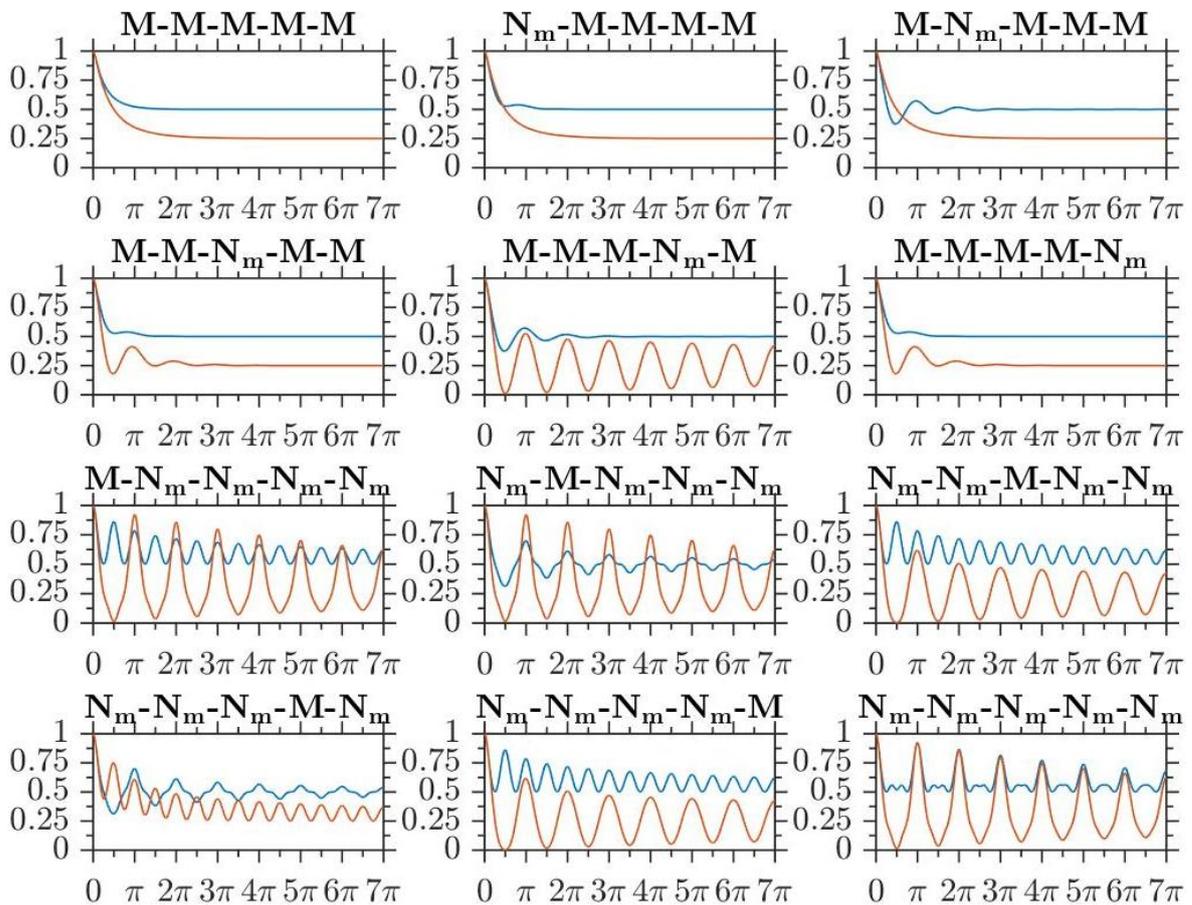


Figura 6.26: Fidelidade média versus tempo para uma operação lógica de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$  para o canal PD com ruídos do tipo Markoviano (M) e não-Markoviano ( $N_m$ ). As linhas azuis mostram os resultados utilizando nosso método de cálculo da fidelidade média ( $F_m$ ) e as linhas vermelhas utilizando o método de fidelidade de porta ( $F_g$ ).

A fim de melhor investigar a causa desses resultados não-triviais, fizemos uma análise partindo do estudo dos operadores de Kraus. Para ruídos Markovianos, a variável  $\tau$  da Equação

5.37 assume baixos valores, sendo que para  $\tau$  próximo de zero  $L(t)$  tenderá rapidamente a zero, tal como pode ser visto na Figura 6.9b, e então os operadores de Kraus (Equação 5.36) tenderão à seguinte forma:

$$L(t) = 0 \begin{cases} E_1(t) = \sqrt{\frac{L(t)+1}{2}}I \approx \sqrt{\frac{0+1}{2}}I \approx \sqrt{\frac{1}{2}}I; \\ E_2(t) = \sqrt{\frac{1-L(t)}{2}}\sigma_z \approx \sqrt{\frac{1-0}{2}}\sigma_z \approx \sqrt{\frac{1}{2}}\sigma_z, \end{cases} \quad (6.22)$$

onde  $t$  é um valor de tempo alto o suficiente para que  $L = 0$ . Dessa forma, sejam  $U_{16}$  e  $U_{32}$  os valores de  $U_0$  na Tabela 6.1 dados pelos arranjos de número 16 e 32, os quais resultam em  $F_m = 1$  e  $F_m \approx 0,50495$ , respectivamente, para instantes de tempo múltiplos ímpares de  $\pi/2$  a ação do superoperador de decoerência nos qubits do estado de *cluster* para o sistema M-N<sub>m</sub>-N<sub>m</sub>-N<sub>m</sub>-N<sub>m</sub>, por exemplo, tomará a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t[\rho_C(\psi_{in})] &= \sum_{i,j,k,l,m=1}^2 E_i^{(1)} E_j^{(2)} E_k^{(3)} E_l^{(4)} E_m^{(5)} \rho_C(\psi_{in}) E_m^{\dagger(5)} E_l^{\dagger(4)} E_k^{\dagger(3)} E_j^{\dagger(2)} E_i^{\dagger(1)}; \\ \mathcal{L}_t[\rho_C(\psi_{in})] &= \\ &\sum_{i=1}^2 \sum_{j=2}^2 \sum_{k=2}^2 \sum_{l=2}^2 \sum_{m=2}^2 E_i^{(1)} E_j^{(2)} E_k^{(3)} E_l^{(4)} E_m^{(5)} \rho_C(\psi_{in}) E_m^{\dagger(5)} E_l^{\dagger(4)} E_k^{\dagger(3)} E_j^{\dagger(2)} E_i^{\dagger(1)}; \\ \mathcal{L}_M[\rho_C(\psi_{in})] &\approx \frac{1}{2} \underbrace{I^{(1)} \sigma_z^{(2)} \sigma_z^{(3)} \sigma_z^{(4)} \sigma_z^{(5)}}_{U_{16}} \rho_C(\psi_{in}) \underbrace{\sigma_z^{(5)} \sigma_z^{(4)} \sigma_z^{(3)} \sigma_z^{(2)} I^{(1)}}_{U_{16}^\dagger} + \\ &\frac{1}{2} \underbrace{\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \sigma_z^{(3)} \sigma_z^{(4)} \sigma_z^{(5)}}_{U_{32}} \rho_C(\psi_{in}) \underbrace{\sigma_z^{(5)} \sigma_z^{(4)} \sigma_z^{(3)} \sigma_z^{(2)} \sigma_z^{(1)}}_{U_{32}^\dagger}; \\ \mathcal{L}_M[\rho_C(\psi_{in})] &\approx \frac{1}{2} U_{16} \rho_C(\psi_{in}) U_{16}^\dagger + \frac{1}{2} U_{32} \rho_C(\psi_{in}) U_{32}^\dagger, \end{aligned} \quad (6.23)$$

ou seja, um estado misto que consiste na superposição dos estados de uma operação identidade e de uma operação de inversão de fase. Sejam  $F_{m16}$  e  $F_{m32}$  as fidelidades médias dos arranjos 16 e 32 (Tabela 6.1), respectivamente, ao substituirmos a Equação 6.23 nas Equações 5.19 a 5.21, obtemos a seguinte igualdade onde o resultado final da fidelidade média é aproximadamente 0,75248:

$$\begin{aligned} F_m &= \frac{1}{2} F_{m16} + \frac{1}{2} F_{m32}, \\ F_m &= \frac{1}{2} 1 + \frac{1}{2} 0,50495, \\ F_m &= 0,75248, \end{aligned} \quad (6.24)$$

tal como é demonstrado em B.5 no apêndice B.

Tabela 6.3: Fidelidade média em função de todos os 32 possíveis arranjos de  $\mathcal{L}_M$  e  $\sigma_z$  para cada qubit.

Arranjo	Sequência	$F_m$	Arranjo	Sequência	$F_m$
1	$\mathcal{L}_M^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$	0,5	17	$\sigma_z^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$	0,5
2	$\mathcal{L}_M^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)} \sigma_z^{(5)}$	0,5	18	$\sigma_z^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)} \sigma_z^{(5)}$	0,5
3	$\mathcal{L}_M^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \sigma_z^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$	0,5	19	$\sigma_z^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \sigma_z^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$	0,5
4	$\mathcal{L}_M^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \sigma_z^{(4)} \sigma_z^{(5)}$	0,5	20	$\sigma_z^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \sigma_z^{(4)} \sigma_z^{(5)}$	0,5
5	$\mathcal{L}_M^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} \sigma_z^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$	0,5	21	$\sigma_z^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} \sigma_z^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$	0,5
6	$\mathcal{L}_M^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} \sigma_z^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)} \sigma_z^{(5)}$	0,5	22	$\sigma_z^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} \sigma_z^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)} \sigma_z^{(5)}$	0,37624
7	$\mathcal{L}_M^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} \sigma_z^{(3)} \sigma_z^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$	0,5	23	$\sigma_z^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} \sigma_z^{(3)} \sigma_z^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$	0,5
8	$\mathcal{L}_M^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} \sigma_z^{(3)} \sigma_z^{(4)} \sigma_z^{(5)}$	0,5	24	$\sigma_z^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} \sigma_z^{(3)} \sigma_z^{(4)} \sigma_z^{(5)}$	0,37624
9	$\mathcal{L}_M^{(1)} \sigma_z^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$	0,5	25	$\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$	0,5
10	$\mathcal{L}_M^{(1)} \sigma_z^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)} \sigma_z^{(5)}$	0,5	26	$\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)} \sigma_z^{(5)}$	0,5
11	$\mathcal{L}_M^{(1)} \sigma_z^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \sigma_z^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$	0,75248	27	$\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \sigma_z^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$	0,75248
12	$\mathcal{L}_M^{(1)} \sigma_z^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \sigma_z^{(4)} \sigma_z^{(5)}$	0,75248	28	$\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \sigma_z^{(4)} \sigma_z^{(5)}$	0,75248
13	$\mathcal{L}_M^{(1)} \sigma_z^{(2)} \sigma_z^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$	0,5	29	$\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \sigma_z^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$	0,5
14	$\mathcal{L}_M^{(1)} \sigma_z^{(2)} \sigma_z^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)} \sigma_z^{(5)}$	0,5	30	$\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \sigma_z^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)} \sigma_z^{(5)}$	0,37624
15	$\mathcal{L}_M^{(1)} \sigma_z^{(2)} \sigma_z^{(3)} \sigma_z^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$	0,75248	31	$\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \sigma_z^{(3)} \sigma_z^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$	0,75248
16	$\mathcal{L}_M^{(1)} \sigma_z^{(2)} \sigma_z^{(3)} \sigma_z^{(4)} \sigma_z^{(5)}$	0,75248	32	$\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \sigma_z^{(3)} \sigma_z^{(4)} \sigma_z^{(5)}$	0,50495

Analogamente ao sistema com ruídos M-N<sub>m</sub>-N<sub>m</sub>-N<sub>m</sub>-N<sub>m</sub>, para os sistemas N<sub>m</sub>-N<sub>m</sub>-M-N<sub>m</sub>-N<sub>m</sub> e N<sub>m</sub>-N<sub>m</sub>-N<sub>m</sub>-N<sub>m</sub>-M os superoperadores atuam como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M [\rho_C (\psi_{in})] &\approx \frac{1}{2} U_{28} \rho_C (\psi_{in}) U_{28}^\dagger + \frac{1}{2} U_{32} \rho_C (\psi_{in}) U_{32}^\dagger \text{ e} \\ \mathcal{L}_M [\rho_C (\psi_{in})] &\approx \frac{1}{2} U_{31} \rho_C (\psi_{in}) U_{31}^\dagger + \frac{1}{2} U_{32} \rho_C (\psi_{in}) U_{32}^\dagger, \end{aligned} \quad (6.25)$$

respectivamente, onde  $U_{28}$  e  $U_{31}$  correspondem aos arranjos 28 e 31 para  $U_0$  na Tabela 6.1, onde a fidelidade média também atinge seu máximo valor, sendo que após a aplicação do superoperador de decoerência tem-se portanto  $F_m \approx 0,75$  como resultado final.

Em seguida, sabendo que para  $t = n\pi/2$  altos valores de  $\tau$  tendem a  $L(t) = -1$  e, conseqüentemente, os operadores de Kraus tendem a uma operação de inversão de fase  $\sigma_z$ , bem como que valores de  $\tau$  próximos de zero tendem a  $L(t) = 0$ , o que resulta em uma dinâmica análoga à imposta pela Equação 6.23, montamos a Tabela 6.3 (semelhante à Tabela 6.1) que mostra uma relação análoga à dada pela Equação 6.14 considerando todas as possíveis combinações entre  $\sigma_z$  (que ocorre quando  $L = -1$ ) e  $\mathcal{L}_M^{(i)}(\rho) = \frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}\sigma_z^{(i)}\rho\sigma_z^{(i)}$  (que ocorre quando  $L = 0$ ) em cada um dos 5 qubits existentes no sistema.

Através da análise dos resultados da Tabela 6.3, pudemos observar que, além dos arranjos

16, 28 e 31 — analogamente aos arranjos 16, 28 e 31 da Tabela 6.1 — elevados valores de fidelidade média também puderam ser encontrados para os arranjos 11, 12, 15 e 27, os quais (com exceção do arranjo 11) representam combinações diferentes dos resultados com máxima fidelidade encontrados na Tabela 6.1.

Podemos desse modo concluir que a introdução de canais Markovianos em *clusters* com canais não-Markovianos pode resultar em maiores valores de Fidelidade média para instantes de tempo múltiplos ímpares de  $\pi/2$ . Isso porque, para  $L \approx 0$ , os operadores de Kraus resultam aproximadamente em uma superposição de uma operação identidade e de uma operação de mudança de fase, a qual possui elevado valor de fidelidade média ( $F_m \approx 0,75$ ). Dessa forma, para os instantes de tempo em questão e determinadas sequências de medidas (arranjos 11, 12, 15, 16, 27, 28 e 31 da Tabela 6.3), altos valores de fidelidade média podem ser obtidos.

### 6.4.3 INDUÇÃO DE CANAIS NÃO-MARKOVIANOS EM PICOS E VALES DE $F_c$ PARA O CANAL PD

Com base nos resultados inesperados obtidos para o canal PD onde a indução de ruídos Markovianos em determinados qubits nos vales de  $F_c$  resultam em valores de fidelidade média significativamente mais elevados, resolvemos então testar a indução de ruídos Markovianos considerando todas as possíveis combinações de tempos nos vales e também nos picos de  $F_c$ . Dessa forma, montamos uma tabela análoga à 6.3 porém considerando desta vez casos para os quais os operadores de Kraus nos qubits podem atuar como  $\sigma_z$  ( $L = -1$ ),  $\mathcal{L}_M$  ( $L = 0$ ) e também  $I$  ( $L = 1$ ), os quais para um dado qubit correspondem (aproximadamente) a um instante de tempo em um vale de  $F_c$  (para um ruído não-Markoviano), um instante de tempo longo qualquer até  $L$  atingir zero (para um ruído Markoviano) e um instante de tempo em um pico de  $F_c$  (para um ruído não-Markoviano), respectivamente.

#### RESULTADOS PARA A OPERAÇÃO DE ROTAÇÃO $\pm\pi$ EM $X$ OU $Z$

Para o caso de uma operação de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$ , temos um sistema de 5 qubits e 3 possíveis valores para cada um ( $L = -1$ ,  $L = 0$  ou  $L = 1$ ), totalizando dessa forma 243 possíveis arranjos. A Tabela C.1 no Apêndice C mostra todos os resultados obtidos para todas

Tabela 6.4: Arranjos da Tabela C.1, quando há pelo menos um qubit Markoviano, para os quais a fidelidade média atinge o mais alto valor ( $F_m \approx 0,75$ ).

Arranjo	Sequência	Arranjo	Sequência
12	$\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \sigma_z^{(4)} I^{(5)}$	152	$\mathcal{L}_M^{(1)} I^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} I^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$
20	$\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} I^{(3)} \sigma_z^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$	153	$\mathcal{L}_M^{(1)} I^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} I^{(4)} I^{(5)}$
62	$\sigma_z^{(1)} I^{(2)} \sigma_z^{(3)} I^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$	160	$\mathcal{L}_M^{(1)} I^{(2)} I^{(3)} I^{(4)} \sigma_z^{(5)}$
70	$\sigma_z^{(1)} I^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} I^{(4)} \sigma_z^{(5)}$	161	$\mathcal{L}_M^{(1)} I^{(2)} I^{(3)} I^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$
71	$\sigma_z^{(1)} I^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} I^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$	162	$\mathcal{L}_M^{(1)} I^{(2)} I^{(3)} I^{(4)} I^{(5)}$
72	$\sigma_z^{(1)} I^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} I^{(4)} I^{(5)}$	164	$I^{(1)} \sigma_z^{(2)} \sigma_z^{(3)} \sigma_z^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$
80	$\sigma_z^{(1)} I^{(2)} I^{(3)} I^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$	172	$I^{(1)} \sigma_z^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \sigma_z^{(4)} \sigma_z^{(5)}$
84	$\mathcal{L}_M^{(1)} \sigma_z^{(2)} \sigma_z^{(3)} \sigma_z^{(4)} I^{(5)}$	173	$I^{(1)} \sigma_z^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \sigma_z^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$
93	$\mathcal{L}_M^{(1)} \sigma_z^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \sigma_z^{(4)} I^{(5)}$	174	$I^{(1)} \sigma_z^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \sigma_z^{(4)} I^{(5)}$
100	$\mathcal{L}_M^{(1)} \sigma_z^{(2)} I^{(3)} \sigma_z^{(4)} \sigma_z^{(5)}$	182	$I^{(1)} \sigma_z^{(2)} I^{(3)} \sigma_z^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$
101	$\mathcal{L}_M^{(1)} \sigma_z^{(2)} I^{(3)} \sigma_z^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$	224	$I^{(1)} I^{(2)} \sigma_z^{(3)} I^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$
102	$\mathcal{L}_M^{(1)} \sigma_z^{(2)} I^{(3)} \sigma_z^{(4)} I^{(5)}$	232	$I^{(1)} I^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} I^{(4)} \sigma_z^{(5)}$
142	$\mathcal{L}_M^{(1)} I^{(2)} \sigma_z^{(3)} I^{(4)} \sigma_z^{(5)}$	233	$I^{(1)} I^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} I^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$
143	$\mathcal{L}_M^{(1)} I^{(2)} \sigma_z^{(3)} I^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$	234	$I^{(1)} I^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} I^{(4)} I^{(5)}$
144	$\mathcal{L}_M^{(1)} I^{(2)} \sigma_z^{(3)} I^{(4)} I^{(5)}$	242	$I^{(1)} I^{(2)} I^{(3)} I^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$
151	$\mathcal{L}_M^{(1)} I^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} I^{(4)} \sigma_z^{(5)}$		

as possíveis combinações, e a Tabela 6.4 mostra os arranjos da Tabela C.1 para os quais há pelo menos um qubit com ruído Markoviano e cujas fidelidades médias resultam no valor mais elevado ( $F_m \approx 0,75$ ) para esse caso (quando há pelo menos um qubit com ruído Markoviano).

Na Tabela 6.4, o arranjo 100 ( $\mathcal{L}_M^{(1)} \sigma_z^{(2)} I^{(3)} \sigma_z^{(4)} \sigma_z^{(5)}$ ), por exemplo, significa que o primeiro qubit possui ruído Markoviano e que a primeira medida foi feita em um tempo qualquer após  $L(t)$  atingir zero (Figura 6.9b), que a segunda medida foi feita em um vale de  $F_c$ , que a terceira medida foi feita em um pico de  $F_c$ , que a quarta medida foi feita em um vale de  $F_c$  e que o tempo do quinto qubit também corresponde a um vale de  $F_c$ , podendo nesse caso ser inclusive o mesmo tempo do quarto qubit (resultado obtido imediatamente após a quarta medida ser efetuada).

Através da análise dos resultados é possível observar que, apesar de ser totalmente contraintuitivo, determinadas combinações com tempos em picos e vales de  $F_c$  e com qubits Markovianos podem levar a melhores resultados do que sem qubits Markovianos. De fato, os arranjos 12 ( $\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \sigma_z^{(4)} I^{(5)}$ ), 100 ( $\mathcal{L}_M^{(1)} \sigma_z^{(2)} I^{(3)} \sigma_z^{(4)} \sigma_z^{(5)}$ ) e 143 ( $\mathcal{L}_M^{(1)} I^{(2)} \sigma_z^{(3)} I^{(4)} \mathcal{L}_M^{(5)}$ ) da Tabela 6.4 (ou Tabela C.1), por exemplo, resultam em maiores valores de fidelidade média ( $F_m \approx 0,75$ ) do que os arranjos 27 ( $\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} I^{(3)} \sigma_z^{(4)} I^{(5)}$ ), 12 ( $I^{(1)} \sigma_z^{(2)} I^{(3)} \sigma_z^{(4)} \sigma_z^{(5)}$ )

e 5 ( $I^{(1)}I^{(2)}\sigma_z^{(3)}I^{(4)}I^{(5)}$ ) ou 22 ( $\sigma_z^{(1)}I^{(2)}\sigma_z^{(3)}I^{(4)}\sigma_z^{(5)}$ ) da Tabela 6.1, respectivamente, estes os quais possuem os mesmos arranjos que os primeiros porém com  $\sigma_z$  ou  $I$  no lugar de  $\mathcal{L}_M$ , resultando dessa forma em um menor valor de fidelidade média ( $F_m \approx 0,5$ ). Vale frisar que além dos arranjos mostrados na Tabela 6.4 que resultam em  $F_m \approx 0,75$ , também é possível observar na Tabela C.1 outros arranjos para os quais a fidelidade média também resulta em melhores valores ( $F_m \approx 0,62$ ) quando há indução de um ruído Markoviano em pelo menos um dos qubits.

Podemos do presente estudo concluir que não apenas determinadas combinações de tempos de medidas em vales e com qubits Markovianos podem levar a valores de fidelidade média expressivamente mais elevados, mas também determinadas combinações de tempos com qubits Markovianos as quais incluem medidas em vales e também em picos de  $F_c$ .

## RESULTADOS PARA A OPERAÇÃO CNOT

Por fim, realizamos um estudo para o caso da operação CNOT, onde temos um sistema de 4 qubits e 3 possíveis valores para cada um, sendo que os tempos do terceiro e quarto qubit devem ser os mesmos, uma vez que a porta CNOT se trata de uma operação de 2 qubits (o resultado engloba ambos os qubits controle e alvo), totalizando dessa forma 27 possíveis arranjos. A Tabela 6.5 mostra todos os 19 possíveis resultados os quais incluem pelo menos um qubit Markoviano (os resultados para os 8 arranjos que não incluem pelo menos um qubit Markoviano já estão expressos na Tabela 6.2).

Na Tabela 6.5, o arranjo 8 ( $\mathcal{L}_M^{(1)} I^{(2)} \sigma_z^{(3)} \sigma_z^{(4)}$ ), por exemplo, significa que o primeiro qubit possui ruído Markoviano e que a primeira medida foi feita em um tempo qualquer após  $L(t)$  atingir zero, que a segunda medida foi feita em um pico de  $F_c$  e que o tempo do terceiro e quarto qubits correspondem a um vale de  $F_c$ . Caso o tempo do segundo, terceiro e quarto qubit coincidam ( $L_2 = L_3 = L_4$ ), o resultado poderá ser o valor obtido imediatamente após a segunda medida ser efetuada.

Apesar de totalmente contraintuitivo, através da análise dos resultados é possível novamente observar que determinadas combinações com tempos em picos e/ou vales de  $F_c$  e com qubits Markovianos podem levar a melhores resultados do que sem qubits Markovianos. Os

Tabela 6.5: Fidelidade média para a operação CNOT, quando há pelo menos um qubit Markoviano, para todos os 19 possíveis arranjos de  $I$ ,  $\sigma_z$  e  $\mathcal{L}_M$  em cada qubit tal que  $L_4 = L_3$ .

Arranjo	Sequência	$F_m$	Arranjo	Sequência	$F_m$
1	$I^{(1)} I^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)}$	0,56622	11	$\mathcal{L}_M^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} \sigma_z^{(3)} \sigma_z^{(4)}$	0,5
2	$I^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} I^{(3)} I^{(4)}$	0,62376	12	$\mathcal{L}_M^{(1)} \sigma_z^{(2)} I^{(3)} I^{(4)}$	0,24752
3	$I^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)}$	0,37624	13	$\mathcal{L}_M^{(1)} \sigma_z^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)}$	0,18626
4	$I^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} \sigma_z^{(3)} \sigma_z^{(4)}$	0,37624	14	$\mathcal{L}_M^{(1)} \sigma_z^{(2)} \sigma_z^{(3)} \sigma_z^{(4)}$	0,24752
5	$I^{(1)} \sigma_z^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)}$	0,18626	15	$\sigma_z^{(1)} I^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)}$	0,56622
6	$\mathcal{L}_M^{(1)} I^{(2)} I^{(3)} I^{(4)}$	0,75248	16	$\sigma_z^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} I^{(3)} I^{(4)}$	0,37624
7	$\mathcal{L}_M^{(1)} I^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)}$	0,56622	17	$\sigma_z^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)}$	0,37624
8	$\mathcal{L}_M^{(1)} I^{(2)} \sigma_z^{(3)} \sigma_z^{(4)}$	0,75248	18	$\sigma_z^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} \sigma_z^{(3)} \sigma_z^{(4)}$	0,62376
9	$\mathcal{L}_M^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} I^{(3)} I^{(4)}$	0,5	19	$\sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)}$	0,18626
10	$\mathcal{L}_M^{(1)} \mathcal{L}_M^{(2)} \mathcal{L}_M^{(3)} \mathcal{L}_M^{(4)}$	0,37624			

arranjos 6 ( $\mathcal{L}_M^{(1)} I^{(2)} I^{(3)} I^{(4)}$ ) e 8 ( $\mathcal{L}_M^{(1)} I^{(2)} \sigma_z^{(3)} \sigma_z^{(4)}$ ) da Tabela 6.5, por exemplo, resultam em maiores valores de fidelidade média ( $F_m \approx 0,75$ ) do que os arranjos 5 ( $\sigma_z^{(1)} I^{(2)} I^{(3)} I^{(4)}$ ) e 2 ( $I^{(1)} I^{(2)} \sigma_z^{(3)} \sigma_z^{(4)}$ ) da Tabela 6.2, respectivamente, estes os quais possuem aos mesmos arranjos que os primeiros porém com  $\sigma_z$  e  $I$  no lugar de  $\mathcal{L}_M$ , resultando dessa forma em um menor valor de fidelidade média ( $F_m \approx 0,5$ ). Vale frisar que além dos arranjos 6 e 8, também é possível observar na Tabela 6.5 outros arranjos para os quais a fidelidade média também resulta em melhores valores ( $F_m \approx 0,62$  ou  $F_m \approx 0,57$ ) quando há a indução de um ruído Markoviano em pelo menos um dos qubits.

Através do presente estudo, pudemos concluir que, assim como para a operação de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$ , para a operação CNOT também determinadas combinações de tempos e medidas em picos e/ou vales de  $F_c$  podem levar a valores de fidelidade média expressivamente mais elevados quando há a introdução de qubits com canais Markovianos em *clusters* de qubits com canais não-Markovianos.

## CAPÍTULO 7

# CONCLUSÃO

Na presente Tese realizou-se o estudo teórico das relações monogâmicas entre estados de sistemas quânticos multipartidos, bem como o estudo da dinâmica dissipativa de determinados tipos de ruídos nas operações de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$  e CNOT para uma computação quântica baseada em medidas projetivas (MBQC). A seguir serão descritos os principais resultados obtidos em cada tema abordado a fim de que se possam ressaltar as contribuições do presente trabalho.

O primeiro tema abordado trata do estudo das relações monogâmicas entre emaranhamento de formação (EF) e discórdia quântica (DQ) para sistemas quânticos multipartidos. Dentre as principais contribuições do presente trabalho com relação a este tema estão: i) a generalização das leis de conservação de medidas em ciclo para sistemas com um número par arbitrário de partes, ii) a generalização das leis de conservação de ciclo para sistemas com um número ímpar arbitrário de partes, iii) a generalização das leis de conservação para a discórdia quântica para sistemas com um número arbitrário (par ou ímpar) de partes, e iv) a generalização das leis de conservação de medidas em ciclo com medidas em uma das partes, para sistemas arbitrários tanto com número par ou ímpar de partes.

Os resultados obtidos nesta primeira etapa da Tese permitem estabelecer relações entre emaranhamento de formação e discórdia quântica para medidas de ciclo em sistemas quânticos com quaisquer número de partes, onde pudemos demonstrar que a quantidade de comunicação quântica necessária em cada bipartição é igual à soma da informação obtida através de correlações não-locais. Mais especificamente, pudemos apresentar um conjunto de leis de conser-

vação monogâmicas que regem como o EF e a DQ são distribuídos em sistemas multipartidos, sendo que tais igualdades vinculam restrições na distribuição de emaranhamento e discórdia, mostrando que as propriedades monogâmicas dessas duas medidas estão profundamente conectadas. O modo como tais correlações são distribuídas em sistemas quânticos multipartidos é um aspecto de grande interesse em teoria de informação quântica, e embora se saiba que a distribuição de correlações não pode ser feita livremente, a compreensão de como esse mecanismo funciona possui implicações para o estudo da monogamia das correlações quânticas, para a compreensão de protocolos e outros aspectos fundamentais da teoria em questão. Nesse contexto, pudemos mostrar não apenas um modo geral de como o EF e a DQ são distribuídos, mas também uma expressão fechada que governa como a DQ é distribuída em sistemas multipartidos. Os resultados aqui apresentados elucidam aspectos importantes na distribuição da correlação quântica em sistemas com muitas partes e podem, em um futuro breve, ter várias implicações para a compreensão da teoria de informação quântica.

O segundo tema apresentado diz respeito ao estudo da dinâmica dissipativa dos canais *amplitude damping* (AD) e *phase damping* (PD) em ambientes altamente não-Markovianos nas operações de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$  e CNOT para uma computação quântica baseada em medidas projetivas (MBQC), bem como acerca da indução de ruídos Markovianos em *clusters* com qubits não-Markovianos e vice-versa. As principais contribuições relacionadas a este tema foram: i) a proposta de uma grandeza (fidelidade média  $F_m$ ) para a medição dos processos de decoerência em uma MBQC e obtenção das expressões analíticas para tal, ii) o estudo acerca da dinâmica dissipativa da fidelidade média do estado de *cluster* e de  $F_m$  incluindo o desvio padrão, iii) a obtenção dos tempos ótimos nos quais as medidas devem ser realizadas, iv) a descoberta de determinadas combinações de medidas para o canal PD as quais resultam aproximadamente em uma operação identidade, v) a obtenção dos estados iniciais ótimos para a porta CNOT, vi) a obtenção de um menor desvio padrão para a porta CNOT ao considerarmos estados iniciais emaranhados entre os qubits controle e alvo, e vii) um aumento significativo no valor de  $F_m$  através da indução de ruídos Markovianos em determinados casos para o canal PD.

No que tange ao estudo acerca da MBQC, introduzimos o conceito de fidelidade média e mostramos que esta fornece uma interpretação mais completa do que a fidelidade de porta

para a dinâmica dissipativa dos sistemas, bem como ser ela idêntica para uma operação de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$ . Para ambientes altamente não-Markovianos, a fidelidade média torna-se extremamente dependente dos tempos de medida, sendo que sua rápida execução não necessariamente implica em melhores resultados, tampouco sua lenta execução não necessariamente implica em piores. Nesse contexto, para o canal AD mostramos que o conhecimento do mapa dissipativo já é o suficiente para intuitivamente determinar os melhores tempos de medidas, o que não necessariamente é verdade para o canal PD. Nesse caso, para qubits com reservatórios individuais que introduzem erros de fase, mostramos também que o erro existente em um qubit pode corrigir o erro existente em outro. Isso sugere que a construção de computadores quânticos baseados em medidas com qubits idênticos pode ser importante para a obtenção de cálculos com alta fidelidade. Além disso, para a operação CNOT, pudemos observar altos valores de desvio padrão para  $F_m$ , a partir do qual foi possível determinar os estados iniciais os quais maximizam a fidelidade do sistema. Ademais, observamos também que a utilização de estados iniciais com qubits controle e alvo inicialmente emaranhados apresenta um desvio padrão ligeiramente menor, o que sugere que, neste caso, há uma maior equidade entre os possíveis estados iniciais de *cluster*. Por fim, pudemos também identificar um aumento significativo nos valores de  $F_m$  através da indução de ruídos Markovianos em determinados instantes de tempo para o canal PD, uma vez que para ambientes altamente Markovianos a ação dos operadores de Kraus tende a um estado misto entre uma operação identidade e de inversão de fase, resultando, para determinadas sequências de operações, em maiores valores de  $F_m$ .

Esperamos com este trabalho abrir caminho para futuras pesquisas envolvendo MBQC. Algumas possíveis sugestões de trabalhos futuros seriam a implementação experimental das relações monogâmicas entre emaranhamento de formação e discórdia quântica, bem como a utilização de outros tipos de canais além do *amplitude damping* e do *phase damping*. Sugerimos também a simulação de outras portas lógicas, tais como a Hadamard, rotação  $\pm\pi$  no eixo  $Y$  e rotação  $\pm\pi/4$  nos eixos  $X$  ou  $Z$ , bem como um maior aprofundamento no estudo da indução de ruídos Markovianos em sistemas não-Markovianos a fim de se obter maiores valores de fidelidade média.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADCOCK, J. C. et al. Programmable four-photon graph states on a silicon chip. *Nature Communications*, Springer Science and Business Media LLC, v. 10, n. 1, aug 2019.
- ALMHEIRI, A. et al. Black holes: complementarity or firewalls? *Journal of High Energy Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 2013, n. 2, feb 2013.
- ARRUDA, L. G. E. *Computação quântica baseada em medidas projetivas em sistemas quânticos abertos*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2011.
- BAE, J.; ACÍN, A. Asymptotic quantum cloning is state estimation. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 97, n. 3, jul 2006.
- BELLOMO, B.; FRANCO, R. L.; COMPAGNO, G. Non-markovian effects on the dynamics of entanglement. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 99, n. 16, oct 2007.
- BENNETT, C. H. et al. Concentrating partial entanglement by local operations. *Physical Review A*, American Physical Society (APS), v. 53, n. 4, p. 2046–2052, apr 1996.
- BENNETT, C. H.; DIVINCENZO, D. P. Quantum information and computation. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 404, n. 6775, p. 247–255, mar 2000.
- BENNETT, C. H. et al. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Physical Review A*, American Physical Society (APS), v. 54, n. 5, p. 3824–3851, nov 1996.
- BOHR, N. I. on the constitution of atoms and molecules. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Informa UK Limited, v. 26, n. 151, p. 1–25, jul 1913.
- BREUER, F. P. H.-P. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford University Press, 2007. ISBN 0199213909. Disponível em: <[https://www.ebook.de/de/product/6212122/heinz\\_peter\\_breuer\\_francesco\\_petrucione\\_the\\_theory\\_of\\_open\\_quantum\\_systems.html](https://www.ebook.de/de/product/6212122/heinz_peter_breuer_francesco_petrucione_the_theory_of_open_quantum_systems.html)>.
- BREUER, H.-P.; LAINE, E.-M.; PIILO, J. Measure for the degree of non-markovian behavior of quantum processes in open systems. *Physical review letters*, APS, v. 103, n. 21, p. 210401, 2009.
- BREUER, H.-P.; PETRUCCIONE, F. et al. *The theory of open quantum systems*. [S.l.]: Oxford University Press on Demand, 2002.
- BRIEGEL, H. J. et al. Measurement-based quantum computation. *Nature Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 5, n. 1, p. 19–26, jan 2009.

- BRIEGEL, H. J.; RAUSSENDORF, R. Persistent entanglement in arrays of interacting particles. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 86, n. 5, p. 910–913, jan 2001.
- CAI, J.-M. et al. Quantum computation in correlation space and extremal entanglement. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 103, n. 5, jul 2009.
- CLARKE, J.; WILHELM, F. K. Superconducting quantum bits. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 453, n. 7198, p. 1031, 2008.
- COHEN-TANNOUDJI, C.; DIU, B.; LALOE, F. *Quantum Mechanics, Volume 1*. [S.l.]: John Wiley & Sons Inc, 1977. ISBN 047116433X.
- COLUMBIA, U. of B. 2020. Disponível em: <<https://qmi.ubc.ca/about/directory/robert-raussendorf>>.
- CORNELIO, M. F.; OLIVEIRA, M. C. de. Strong superadditivity and monogamy of the rényi measure of entanglement. *Physical Review A*, American Physical Society (APS), v. 81, n. 3, mar 2010.
- CORNELIO, M. F.; OLIVEIRA, M. C. de; FANCHINI, F. F. Entanglement irreversibility from quantum discord and quantum deficit. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 107, n. 2, jul 2011.
- COVER, T. M.; THOMAS, J. A. *Elements of information theory*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012.
- D-WAVE. 2020. Disponível em: <<https://www.dwavesys.com/media-coverage/techpublic-d-wave-announces-5000-qubit-fifth-generation-quantum-annealer>>.
- DAFFER, S. et al. Depolarizing channel as a completely positive map with memory. *Physical Review A*, American Physical Society (APS), v. 70, n. 1, jul 2004.
- EISBERG, R. *Física Quântica*. [S.l.]: Elsevier, 1979. ISBN 978-8570013095.
- FANCHINI, F. et al. Locally inaccessible information as a fundamental ingredient to quantum information. *New Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 14, n. 1, p. 013027, 2012.
- FANCHINI, F. F. *Desacoplamento dinâmico de estados quânticos via campos contínuos de alta frequência*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2008.
- FANCHINI, F. F. et al. Conservation law for distributed entanglement of formation and quantum discord. *Physical Review A*, American Physical Society (APS), v. 84, n. 1, jul 2011.
- FERREIRA, J. S. d. S. *Emaranhamento e Discórdia em sistemas puros multipartidos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Mato Grosso, 2015.
- FERREIRA, J. S. S. et al. Multipartite monogamous relations for entanglement and discord. *Physical Review A*, American Physical Society (APS), v. 97, n. 1, jan 2018.
- GOTTESMAN, D.; CHUANG, I. L. Demonstrating the viability of universal quantum computation using teleportation and single-qubit operations. *Nature*, Springer Nature, v. 402, n. 6760, p. 390–393, nov 1999.

- GROSS, D.; EISERT, J. Novel schemes for measurement-based quantum computation. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 98, n. 22, may 2007.
- GROSS, D.; EISERT, J. Quantum computational webs. *Physical Review A*, American Physical Society (APS), v. 82, n. 4, oct 2010.
- GROSS, D. et al. Measurement-based quantum computation beyond the one-way model. *Physical Review A*, American Physical Society (APS), v. 76, n. 5, nov 2007.
- HENDERSON, L.; VEDRAL, V. Classical, quantum and total correlations. *Journal of physics A: mathematical and general*, IOP Publishing, v. 34, n. 35, p. 6899, 2001.
- HORODECKI, M.; OPPENHEIM, J.; WINTER, A. Partial quantum information. *Nature*, Nature Publishing Group, v. 436, n. 7051, p. 673, 2005.
- HORODECKI, R. et al. Quantum entanglement. *Reviews of Modern Physics*, American Physical Society (APS), v. 81, n. 2, p. 865–942, jun 2009.
- KIM, J. S.; GOUR, G.; SANDERS, B. C. Limitations to sharing entanglement. *Contemporary Physics*, Informa UK Limited, v. 53, n. 5, p. 417–432, sep 2012.
- KOASHI, M.; WINTER, A. Monogamy of quantum entanglement and other correlations. *Physical Review A*, APS, v. 69, n. 2, p. 022309, 2004.
- KOCKUM, A. F. *Quantum optics with artificial atoms*. Tese (Doutorado), 12 2014.
- KUES, M. et al. Quantum optical microcombs. *Nature Photonics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 13, n. 3, p. 170–179, feb 2019.
- KUMAR, A. et al. Sorting ultracold atoms in a three-dimensional optical lattice in a realization of maxwell’s demon. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 561, n. 7721, p. 83–87, sep 2018.
- LAINE, E.-M.; PILO, J.; BREUER, H.-P. Measure for the non-markovianity of quantum processes. *Physical Review A*, American Physical Society (APS), v. 81, n. 6, jun 2010.
- LODAHL, P. Scaling up solid-state quantum photonics. *Science*, American Association for the Advancement of Science (AAAS), v. 362, n. 6415, p. 646–646, nov 2018.
- MASANES, L. Universally composable privacy amplification from causality constraints. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 102, n. 14, apr 2009.
- MAZIERO, J. Fortran code for generating random probability vectors, unitaries, and quantum states. *Frontiers in ICT*, Frontiers, v. 3, p. 4, 2016.
- MIRANDA, C. C. d. *Violação da Superaditividade Forte do Emaranhamento Quântico*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Mato Grosso, 2015.
- MODI, K. et al. The classical-quantum boundary for correlations: Discord and related measures. *Reviews of Modern Physics*, American Physical Society (APS), v. 84, n. 4, p. 1655–1707, nov 2012.
- NEGNEVITSKY, V. et al. Repeated multi-qubit readout and feedback with a mixed-species trapped-ion register. *Nature*, Springer Science and Business Media LLC, v. 563, n. 7732, p. 527–531, nov 2018.

- NETO, A. C. *Teoria de controle ótimo em sistemas abertos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, 2018.
- NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. *Quantum computation and quantum information*. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- OLLIVIER, H.; ZUREK, W. H. Quantum discord: a measure of the quantumness of correlations. *Physical review letters*, APS, v. 88, n. 1, p. 017901, 2001.
- PANT, M. et al. Percolation thresholds for photonic quantum computing. *Nature Communications*, Springer Science and Business Media LLC, v. 10, n. 1, mar 2019.
- PINTO, J. P. G. *Estudo da dinâmica dissipativa da discórdia quântica: Análise da mudança súbita na taxa de decaimento da discórdia quântica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Ouro Preto, 2014.
- PLANK, M. Über das gesetz der energieverteilung im normalspektrum. *Annalen der Physik*, v. 4, n. 553, p. 43, 1901.
- RAUSSENDORF, R.; BRIEGEL, H. J. A one-way quantum computer. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 86, n. 22, p. 5188–5191, may 2001.
- RAUSSENDORF, R.; BROWNE, D. E.; BRIEGEL, H. J. Measurement-based quantum computation on cluster states. *Physical Review A*, American Physical Society (APS), v. 68, n. 2, aug 2003.
- REIMER, C. et al. High-dimensional one-way quantum processing implemented on d-level cluster states. *Nature Physics*, Springer Science and Business Media LLC, v. 15, n. 2, p. 148–153, dec 2018.
- RENES, J. M.; GRASSL, M. Generalized decoding, effective channels, and simplified security proofs in quantum key distribution. *Physical Review A*, American Physical Society (APS), v. 74, n. 2, aug 2006.
- SCARANI, V. et al. Quantum cloning. *Reviews of Modern Physics*, American Physical Society (APS), v. 77, n. 4, p. 1225–1256, nov 2005.
- SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. *Bell system technical journal*, Wiley Online Library, v. 27, n. 3, p. 379–423, 1948.
- SHOR, P. W. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM review*, SIAM, v. 41, n. 2, p. 303–332, 1999.
- SHULMAN, M. D. et al. Demonstration of entanglement of electrostatically coupled singlet-triplet qubits. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 336, n. 6078, p. 202–205, 2012.
- TERHAL, B. M. Is entanglement monogamous? *IBM Journal of Research and Development*, IBM, v. 48, n. 1, p. 71–78, jan 2004.
- VACCHINI, B.; BREUER, H.-P. Exact master equations for the non-markovian decay of a qubit. *Physical Review A*, American Physical Society (APS), v. 81, n. 4, apr 2010.

VIENNA, U. of. 2020. Disponível em: <<https://prieview.univie.ac.at/research-groups/hans-briegel/>>.

WALTHER, P. et al. Experimental one-way quantum computing. *Nature*, Springer Nature, v. 434, n. 7030, p. 169–176, mar 2005.

WANG, J. et al. Fidelity of measurement-based quantum computation in a bosonic environment. *Physical Review A*, APS, v. 90, n. 5, p. 052306, 2014.

WIKIPEDIA. 2020. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/John\\_von\\_Neumann](https://pt.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann)>.

WOLF, M. M. et al. Assessing non-markovian quantum dynamics. *Physical Review Letters*, American Physical Society (APS), v. 101, n. 15, oct 2008.

WOLF, R. de. The potential impact of quantum computers on society. *Ethics and Information Technology*, Springer Science and Business Media LLC, v. 19, n. 4, p. 271–276, sep 2017.

YANOFSKY, N. S.; MANNUCCI, M. A.; MANNUCCI, M. A. *Quantum computing for computer scientists*. [S.l.]: Cambridge University Press Cambridge, 2008. v. 20.

YORKER, T. N. 2020. Disponível em: <<https://www.newyorker.com/tech/annals-of-technology/claude-shannon-the-father-of-the-information-age-turns-1100100>>.

## APÊNDICE A

# EXPRESSÕES ANALÍTICAS PARA A FIDELIDADE MÉDIA

A seguir mostraremos as expressões analíticas para a fidelidade média, referentes à dinâmica dissipativa dos estados de *cluster* com 4 qubits (tanto para os qubits controle e alvo inicialmente emaranhados quanto separados) e com 5 qubits, bem como às operações de rotação  $\pm\pi$  sobre os eixos  $X$  ou  $Z$  e porta CNOT (qubits controle e alvo inicialmente emaranhados e separados), tanto para os canais *amplitude damping* quanto *phase damping*.

A fidelidade média em função dos tempos da dinâmica para cada qubit pode ser definida como

$$F_m \equiv F_m(t_i, \dots, t_n) = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{|\psi_{in}\rangle} F_p(|\psi_{in}\rangle, t_i, \dots, t_n), \quad (\text{A.1})$$

sendo  $i$  o índice de cada qubit,  $n$  a quantidade de qubits,  $|\psi_{in}\rangle$  o estado inicial do sistema e  $F_p(|\psi_{in}\rangle, t_i, \dots, t_n)$  a fidelidade média das projeções, sendo esta expressa em função do estado inicial e dos tempos da dinâmica para cada qubit considerando uma média sobre os possíveis resultados das projeções. Aqui  $\mathcal{N}$  é o fator de normalização, e pode ser definido como  $\mathcal{N} = \sum \langle \psi_{in} | \psi_{in} \rangle$ . Vale frisar que para a operação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$  os tempos  $t_1$  a  $t_4$  dos quatro primeiros qubits representam os tempos das 4 primeiras medidas, respectivamente, enquanto que  $t_5$  representa o estado do quinto qubit (neste não há portanto nenhuma medida) no referido tempo apenas. Se considerarmos o resultado da operação lógica imediatamente após a 4ª medida ser realizada, teremos então que  $t_4 = t_5$ . Já para a operação CNOT, os tempos  $t_1$  e

$t_2$  dos dois primeiros qubits representam os tempos das 2 primeiras medidas, respectivamente, enquanto que  $t_3$  e  $t_4$  representam os estados do terceiro e quarto qubit (alvo e controle ao final do processo, sem nenhuma medida), respectivamente, no referido tempo apenas. Se considerarmos o resultado da operação lógica imediatamente após a 2ª medida ser realizada, teremos então que  $t_2 = t_3 = t_4$ .

A seguir mostraremos as expressões de  $F_p \equiv F_p(|\psi_{in}\rangle, t_i, \dots, t_n)$  para os canais *amplitude damping* e *phase damping*.

## A.1 CANAL *amplitude damping*

Nesta seção apresentaremos os resultados obtidos para o canal *amplitude damping*, onde utilizamos a Equação 5.33 para modelar o canal em questão, sendo que  $p_i \equiv p_i(t_i)$  corresponde ao ruído em cada qubit de índice  $i$ .

### A.1.1 SEM MEDIDAS (ESTADO DE *cluster*) COM 5 QUBITS

Seja o estado inicial do primeiro qubit  $|\psi_{in}\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  (Equação 5.4), tem-se que:

$$\begin{aligned}
F_p = \text{Re} \left\{ \frac{1}{16} (\alpha^2 \beta \beta^* (\sqrt{p_4} p_5 (2\sqrt{p_1} (p_2 p_3 + \sqrt{p_3}) - (p_1 - 1) p_2 \sqrt{p_3} + \right. \\
(p_1 + 2\sqrt{p_1} - 1) \sqrt{p_2} (\sqrt{p_3} + 1) - p_1 p_3 + p_3) + \sqrt{p_5} (p_4 ((p_1 + 2\sqrt{p_1} - 1) \sqrt{p_2} p_3 + \\
2\sqrt{p_1} p_2 - p_1 + 1) + \sqrt{p_4} (2\sqrt{p_1} (p_2 p_3 + \sqrt{p_3}) - (p_1 - 1) p_2 \sqrt{p_3} + (p_1 + \\
2\sqrt{p_1} - 1) \sqrt{p_2} (\sqrt{p_3} + 1) - p_1 p_3 + p_3) + \sqrt{p_3} (-p_1 p_2 + (p_1 + 2\sqrt{p_1} - 1) \sqrt{p_2} + \\
2\sqrt{p_1} + p_2)) + \sqrt{p_3} p_4 (-p_1 p_2 + 2\sqrt{p_1} + p_2) + (p_1 + 2\sqrt{p_1} - 1) p_4 \sqrt{p_2} p_3 + (p_1 + \\
2\sqrt{p_1} - 1) \sqrt{p_2} p_3 + 2\sqrt{p_1} p_2 - p_1 + 1) + (|\alpha|^4 + p_1 |\beta|^4) (\sqrt{p_4} p_5 (p_2 \sqrt{p_3} + \\
\sqrt{p_2} (\sqrt{p_3} + 1) + p_3) + \sqrt{p_5} (\sqrt{p_2} (p_3 p_4 + \sqrt{p_3} (\sqrt{p_4} + 1) + \sqrt{p_4}) + \\
p_2 \sqrt{p_3} (\sqrt{p_4} + 1) + p_3 \sqrt{p_4} + p_4) + (p_2 + \sqrt{p_2}) \sqrt{p_3} p_4 + \sqrt{p_2} p_3 + 1)) \left. \right\}. \tag{A.2}
\end{aligned}$$

### A.1.2 SEM MEDIDAS (ESTADO DE *cluster*) COM 4 QUBITS

Seja o estado inicial do qubit alvo  $|i_A\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  e do qubit controle  $|i_C\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$  (Equação 6.15), tem-se que

$$\begin{aligned}
 F_p = \text{Re} \left\{ \frac{1}{4} (\alpha^2 \beta \beta^* & ((p_1 + 2\sqrt{p_1} - 1)\sqrt{p_2 p_3} + \sqrt{p_3}(-p_1 p_2 + \\
 & (p_1 + 2\sqrt{p_1} - 1)\sqrt{p_2} + 2\sqrt{p_1} + p_2) + 2\sqrt{p_1} p_2 - p_1 + 1)(p_4 |\delta|^4 + |\gamma|^4) + \\
 & \gamma^2 \delta \delta^* (p_1 ((\sqrt{p_3} + 1)(p_4 + 2\sqrt{p_4} - 1)\sqrt{p_2 p_3} + p_2 (\sqrt{p_3}(p_4 - 1) - 2\sqrt{p_4}) - \\
 & 2\sqrt{p_3 p_4} + p_4 - 1) + 2\sqrt{p_1} ((\sqrt{p_3} + 1)(p_4 + 2\sqrt{p_4} - 1)\sqrt{p_2 p_3} + p_2 (2\sqrt{p_3 p_4} - \\
 & p_4 + 1) + (-\sqrt{p_3})(p_4 - 1) + 2\sqrt{p_4}) - (\sqrt{p_3} + 1)(p_4 + 2\sqrt{p_4} - 1)\sqrt{p_2 p_3} + \\
 & p_2 (2\sqrt{p_4} - \sqrt{p_3}(p_4 - 1)) + 2\sqrt{p_3 p_4} - p_4 + 1)) + (|\alpha|^4 + p_1 |\beta|^4) ((\sqrt{p_2}(p_3 + \\
 & \sqrt{p_3}) + p_2 \sqrt{p_3} + 1)(p_4 |\delta|^4 + |\gamma|^4) + \gamma^2 \delta \delta^* ((\sqrt{p_3} + 1)(p_4 + \\
 & 2\sqrt{p_4} - 1)\sqrt{p_2 p_3} + p_2 (2\sqrt{p_4} - \sqrt{p_3}(p_4 - 1)) + 2\sqrt{p_3 p_4} - p_4 + 1))) \right\}. \tag{A.3}
 \end{aligned}$$

### A.1.3 SEM MEDIDAS (ESTADO DE *cluster*) COM 4 QUBITS (QUBITS CONTROLADOS E ALVO INICIALMENTE EMARANHADOS)

Seja o estado inicial do sistema  $|\psi_{in}\rangle = \alpha |0 + +0\rangle + \beta |0 + +1\rangle + \gamma |1 + +0\rangle + \delta |1 + +1\rangle$

(Equação 6.20), tem-se que:

$$\begin{aligned}
 F_p = \text{Re} \left\{ \frac{1}{4} (\beta^* (\gamma^* (2\beta\gamma\sqrt{p_1 p_4} (\sqrt{p_2} (p_3 + \sqrt{p_3}) + p_2\sqrt{p_3} + 1) - \right. \\
 \alpha\delta(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_4})(\sqrt{p_1 p_4} - 1)(-\sqrt{p_2}(p_3 + \sqrt{p_3}) + p_2 + \sqrt{p_3})) + \\
 \beta\delta p_4 \delta^* ((p_1 + 2\sqrt{p_1} - 1)\sqrt{p_2 p_3} + \sqrt{p_3}(-p_1 p_2 + (p_1 + 2\sqrt{p_1} - 1)\sqrt{p_2} + \\
 2\sqrt{p_1} + p_2) + 2\sqrt{p_1} p_2 - p_1 + 1)) + \alpha^* (\delta^* (\alpha\delta(p_1(p_4 - 1) + \\
 2\sqrt{p_1 p_4} - p_4 + 1)(\sqrt{p_2}(p_3 + \sqrt{p_3}) + p_2\sqrt{p_3} + 1) - \beta\gamma(\sqrt{p_1} + \\
 \sqrt{p_4})(\sqrt{p_1 p_4} - 1)(-\sqrt{p_2}(p_3 + \sqrt{p_3}) + p_2 + \sqrt{p_3})) + \alpha\beta\beta^* ((\sqrt{p_3} + 1)(p_4 + \\
 2\sqrt{p_4} - 1)\sqrt{p_2 p_3} + p_2(2\sqrt{p_4} - \sqrt{p_3}(p_4 - 1)) + 2\sqrt{p_3 p_4} - p_4 + 1) + \\
 \alpha\gamma\gamma^* ((p_1 + 2\sqrt{p_1} - 1)\sqrt{p_2 p_3} + \sqrt{p_3}(-p_1 p_2 + (p_1 + 2\sqrt{p_1} - 1)\sqrt{p_2} + \\
 2\sqrt{p_1} + p_2) + 2\sqrt{p_1} p_2 - p_1 + 1)) + (\sqrt{p_2}(p_3 + \sqrt{p_3}) + p_2\sqrt{p_3} + 1)(|\alpha|^4 + \\
 p_4|\beta|^4) + p_1((\sqrt{p_2}(p_3 + \sqrt{p_3}) + p_2\sqrt{p_3} + 1)(|\gamma|^4 + p_4|\delta|^4) + \\
 \gamma\delta\gamma^*\delta^* ((\sqrt{p_3} + 1)(p_4 + 2\sqrt{p_4} - 1)\sqrt{p_2 p_3} + p_2(2\sqrt{p_4} - \sqrt{p_3}(p_4 - 1)) + \\
 \left. 2\sqrt{p_3 p_4} - p_4 + 1))) \right\}. \tag{A.4}
 \end{aligned}$$

### A.1.4 ROTAÇÃO $\pm\pi$ SOBRE OS EIXOS $X$ OU $Z$

Seja o estado inicial do primeiro qubit  $|\psi_{in}\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$  (Equação 5.4), tem-se que:

$$\begin{aligned}
 F_p = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} (\alpha^2 (\alpha^2 (p_5\sqrt{p_2 p_4} + 1) - \beta^2 (\sqrt{p_2 p_4} - 1)\sqrt{p_1 p_3 p_5} - \right. \\
 (\beta^*)^2 (\sqrt{p_2 p_4} - 1)\sqrt{p_1 p_3 p_5} + 2\beta\beta^* (\sqrt{p_2 p_4} (\sqrt{p_1 p_3 p_5} - p_5) + \sqrt{p_1 p_3 p_5} + 1)) + \\
 \left. |\beta|^4 (p_5\sqrt{p_2 p_4} + 1)) \right\}. \tag{A.5}
 \end{aligned}$$

### A.1.5 PORTA CNOT

Seja o estado inicial do qubit alvo  $|i_A\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$  e do qubit controle  $|i_C\rangle = \gamma |0\rangle + \delta |1\rangle$  (Equação 6.15), tem-se que

$$\begin{aligned}
F_p = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} (|\gamma|^4 ((\sqrt{p_2 p_3} + 1)(|\alpha|^4 + |\beta|^4) - \alpha^2 (\sqrt{p_2} - 1)(\beta^2 + (\beta^*)^2) \sqrt{p_1 p_3}) + \right. \\
\gamma^2 (\delta \delta^* (\alpha^2 (\alpha^2 (\sqrt{p_2} (p_3 (p_4 - 1) + 2\sqrt{p_3 p_4}) + 2\sqrt{p_3 p_4} - p_4 + 1) + \\
\beta \sqrt{p_1} (4\text{Re}(\beta) ((\sqrt{p_2} - 1)\sqrt{p_3 p_4} + 2p_3 \sqrt{p_2 p_4} + 2\sqrt{p_4}) + \beta (\sqrt{p_3} (\sqrt{p_2} (1 - \\
3p_4) + p_4 + 1) - 6p_3 \sqrt{p_2 p_4} - 2\sqrt{p_4}))) + |\beta|^4 (\sqrt{p_2} (p_3 (p_4 - 1) + 2\sqrt{p_3 p_4}) + \\
2\sqrt{p_3 p_4} - p_4 + 1)) + 2\alpha^2 \beta \beta^* (\gamma^2 ((\sqrt{p_2} + 1)\sqrt{p_1 p_3} + \sqrt{p_2} (-p_3) + 1) - \\
\delta \delta^* ((\sqrt{p_2} - 1)\sqrt{p_1 p_3} + \sqrt{p_2} (p_3 (p_4 - 1) + 2\sqrt{p_3 p_4}) - 2\sqrt{p_3 p_4} + p_4 - 1)) + \\
\alpha^2 \sqrt{p_1} \delta (\beta^*)^2 \delta^* ((-\sqrt{p_2} - 1)\sqrt{p_3} (p_4 - 1) + 2\sqrt{p_4} (1 - \sqrt{p_2 p_3}))) + \\
p_4 |\delta|^4 (\alpha^2 (-\sqrt{p_2} - 1) (\beta^*)^2 \sqrt{p_1 p_3} + 2\beta \beta^* (\sqrt{p_1 p_3} + \sqrt{p_2} (-p_3) + 1) + \\
\left. \beta \sqrt{p_1 p_3} (\sqrt{p_2} (4\text{Re}(\beta) - 3\beta) + \beta)) + (\sqrt{p_2 p_3} + 1)(|\alpha|^4 + |\beta|^4) \right\}. \tag{A.6}
\end{aligned}$$

### A.1.6 PORTA CNOT (QUBITS CONTROLE E ALVO INICIALMENTE EMARANHADOS)

Seja o estado inicial do sistema  $|\psi_{in}\rangle = \alpha |0 + +0\rangle + \beta |0 + +1\rangle + \gamma |1 + +0\rangle + \delta |1 + +1\rangle$  (Equação 6.20), tem-se que:

$$\begin{aligned}
F_p = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} (-\sqrt{p_2} - 1) \sqrt{p_1 p_3} (\alpha^2 (\gamma^*)^2 + \gamma^2 (\alpha^*)^2 + \beta^2 p_4 (\delta^*)^2 + \right. \\
\delta^2 p_4 (\beta^*)^2) + (\sqrt{p_2 p_3} + 1) (|\alpha|^4 + p_4 (|\beta|^4 + |\delta|^4) + |\gamma|^4) + \\
\beta^* (\gamma^* (\alpha \delta (\sqrt{p_2} - 1) \sqrt{p_3} (\sqrt{p_1} (p_4 - 1) - 2\sqrt{p_4}) + \\
\beta \gamma (2\sqrt{p_1 p_4} - p_4 + 1) (\sqrt{p_2 p_3} + 1)) + 2\beta \delta p_4 \delta^* ((\sqrt{p_2} + 1) \sqrt{p_1 p_3} + \\
\sqrt{p_2} (-p_3) + 1)) + \alpha^* (\delta^* (\alpha \delta (2\sqrt{p_1 p_4} - p_4 + 1) (\sqrt{p_2 p_3} + 1) + \\
\beta \gamma (\sqrt{p_2} - 1) \sqrt{p_3} (\sqrt{p_1} (p_4 - 1) - 2\sqrt{p_4})) + \beta^* (\alpha \beta (\sqrt{p_2} (p_3 (p_4 - 1) + \\
2\sqrt{p_3 p_4}) + 2\sqrt{p_3 p_4} - p_4 + 1) + \gamma \delta \sqrt{p_1} ((-\sqrt{p_2} - 1) \sqrt{p_3} (p_4 - 1) - \\
2\sqrt{p_4} (\sqrt{p_2 p_3} - 1))) + 2\alpha \gamma \gamma^* ((\sqrt{p_2} + 1) \sqrt{p_1 p_3} + \sqrt{p_2} (-p_3) + 1)) + \\
\gamma^* \delta^* (\alpha \beta \sqrt{p_1} ((-\sqrt{p_2} - 1) \sqrt{p_3} (p_4 - 1) - 2\sqrt{p_4} (\sqrt{p_2 p_3} - 1)) + \\
\left. \gamma \delta (\sqrt{p_2} (p_3 (p_4 - 1) + 2\sqrt{p_3 p_4}) + 2\sqrt{p_3 p_4} - p_4 + 1)) \right\}. \tag{A.7}
\end{aligned}$$

## A.2 CANAL *phase damping*

Nesta seção apresentaremos os resultados obtidos para o canal *phase damping*, onde utilizamos a Equação 5.36 para modelar o canal em questão, sendo que  $L_i \equiv L_i(t_i)$  corresponde ao ruído em cada qubit de índice  $i$ .

### A.2.1 SEM MEDIDAS (ESTADO DE *cluster*) COM 5 QUBITS

Seja o estado inicial do primeiro qubit  $|\psi_{in}\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$  (Equação 5.4), tem-se que:

$$F_p = \text{Re} \left\{ \frac{1}{16} (L_2 + 1)(L_3 + 1)(L_4 + 1)(L_5 + 1) \left( |\alpha|^4 + 2\alpha\beta L_1 \alpha^* \beta^* + |\beta|^4 \right) \right\}. \quad (\text{A.8})$$

### A.2.2 SEM MEDIDAS (ESTADO DE *cluster*) COM 4 QUBITS

Seja o estado inicial do qubit alvo  $|i_A\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$  e do qubit controle  $|i_C\rangle = \gamma |0\rangle + \delta |1\rangle$  (Equação 6.15), tem-se que

$$F_p = \text{Re} \left\{ \frac{1}{4} (L_2 + 1)(L_3 + 1) \left( 2\alpha^2 \beta L_1 \beta^* + |\alpha|^4 + |\beta|^4 \right) \left( |\gamma|^4 + |\delta|^4 + 2L_4 \gamma^2 \delta \delta^* \right) \right\}. \quad (\text{A.9})$$

### A.2.3 SEM MEDIDAS (ESTADO DE *cluster*) COM 4 QUBITS (QUBITS CONTROLADO E ALVO INICIALMENTE EMARANHADOS)

Seja o estado inicial do sistema  $|\psi_{in}\rangle = \alpha |0 + +0\rangle + \beta |0 + +1\rangle + \gamma |1 + +0\rangle + \delta |1 + +1\rangle$  (Equação 6.20), tem-se que:

$$F_p = \text{Re} \left\{ \frac{1}{4} (L_2 + 1)(L_3 + 1) \left( 2(\alpha\alpha^*(\beta L_4 \beta^* + \gamma L_1 \gamma^* + \delta L_1 L_4 \delta^*) + \beta L_1 \beta^*(\gamma L_4 \gamma^* + |\delta|^2) + \gamma \delta L_4 \gamma^* \delta^*) + |\alpha|^4 + |\beta|^4 + |\gamma|^4 + |\delta|^4 \right) \right\}. \quad (\text{A.10})$$

#### A.2.4 ROTAÇÃO $\pm\pi$ SOBRE OS EIXO $X$ OU $Z$

Seja o estado inicial do primeiro qubit  $|\psi_{in}\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$  (Equação 5.4), tem-se que:

$$F_p = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} (\alpha^2 (\alpha^2 (L_2 L_4 + 1) + \beta^2 L_1 L_3 L_5 (1 - L_2 L_4) + L_1 L_3 L_5 (\beta^*)^2 (1 - L_2 L_4) + 2\beta\beta^* (L_2 L_4 (L_1 L_3 L_5 - 1) + L_1 L_3 L_5 + 1)) + |\beta|^4 (L_2 L_4 + 1)) \right\}. \quad (\text{A.11})$$

#### A.2.5 PORTA CNOT

Seja o estado inicial do qubit alvo  $|i_A\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$  e do qubit controle  $|i_C\rangle = \gamma |0\rangle + \delta |1\rangle$  (Equação 6.15), tem-se que

$$F_p = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} (\alpha^2 (|\gamma|^4 + |\delta|^4) (-\beta^2 L_1 (L_2 - 1) L_3 + 2\beta\beta^* (L_1 (L_2 + 1) L_3 - L_2 + 1) - L_1 (L_2 - 1) L_3 (\beta^*)^2) - 2\alpha^2 L_4 \gamma^2 \delta \delta^* (\beta^2 L_1 (3L_2 + 1) + (L_2 - 1) \beta^* (L_1 \beta^* + 2\beta L_3) - 4\beta L_1 (L_2 + 1) \text{Re}(\beta)) + (L_2 + 1) (|\alpha|^4 + |\beta|^4) (|\gamma|^4 + |\delta|^4 + 2L_3 L_4 \gamma^2 \delta \delta^*)) \right\}. \quad (\text{A.12})$$

#### A.2.6 PORTA CNOT (QUBITS CONTROLE E ALVO INICIALMENTE EMARANHADOS)

Seja o estado inicial do sistema  $|\psi_{in}\rangle = \alpha |0 + +0\rangle + \beta |0 + +1\rangle + \gamma |1 + +0\rangle + \delta |1 + +1\rangle$  (Equação 6.20), tem-se que:

$$F_p = \text{Re} \left\{ \frac{1}{2} (L_1 L_3 (\alpha^2 (\gamma^*)^2 + (1 - L_2) (\gamma^2 (\alpha^*)^2 + \delta^2 (\beta^*)^2) + \beta^2 (\delta^*)^2) - L_1 L_2 L_3 (\alpha^2 (\gamma^*)^2 + \beta^2 (\delta^*)^2) + (L_2 + 1) (|\alpha|^4 + |\beta|^4 + |\gamma|^4 + |\delta|^4) + 2L_4 \gamma^* \delta^* (\gamma \delta (L_2 + 1) L_3 - \alpha \beta L_1 (L_2 - 1)) + 2\beta^* (L_4 \gamma^* (\beta \gamma L_1 (L_2 + 1) - \alpha \delta (L_2 - 1) L_3) + \beta \delta \delta^* (L_1 (L_2 + 1) L_3 - L_2 + 1)) + 2\alpha^* (L_4 \beta^* (\alpha \beta (L_2 + 1) L_3 - \gamma \delta L_1 (L_2 - 1)) + L_4 \delta^* (\alpha \delta L_1 (L_2 + 1) - \beta \gamma (L_2 - 1) L_3) + \alpha \gamma \gamma^* (L_1 (L_2 + 1) L_3 - L_2 + 1))) \right\}. \quad (\text{A.13})$$

# APÊNDICE B

## DEDUÇÃO DE ALGUMAS EXPRESSÕES

Neste apêndice demonstraremos a dedução de algumas expressões apresentadas durante o texto principal da Tese.

### B.1 EXPRESSÕES DO CAPÍTULO 3

#### B.1.1 EXPRESSÃO 1

A igualdade  $\log \left( \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| \right) = \sum_i \log (\lambda_i) |i\rangle \langle i|$  pode ser demonstrada através de uma expansão em série de Taylor. Seja  $f(A)$  uma função qualquer, como por exemplo uma função logarítmica, temos a seguinte relação:

$$f(A) = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \quad (\text{B.1})$$

Supondo  $A = \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|$ , a série de Taylor se torna:

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right) &= 1 + \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| + \frac{\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right)^2}{2!} + \frac{\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right)^3}{3!} + \dots, \\
f\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right) &= 1 + \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| + \frac{\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right)\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right)}{2!} + \frac{\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right)\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right)^2}{3!} + \dots, \\
f\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right) &= 1 + \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| + \frac{\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right)\left(\sum_j \lambda_j |j\rangle \langle j|\right)}{2!} + \frac{\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right)\left(\sum_j \lambda_j |j\rangle \langle j|\right)^2}{3!} + \dots, \\
f\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right) &= 1 + \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| + \frac{\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| \sum_j \lambda_j |j\rangle \langle j|}{2!} + \frac{\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right)\left(\sum_j \lambda_j |j\rangle \langle j| \sum_j \lambda_j |j\rangle \langle j|\right)}{3!} + \dots, \\
f\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right) &= 1 + \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| + \frac{\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j |i\rangle \langle i| |j\rangle \langle j|}{2!} + \frac{\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right)\left(\sum_j \lambda_j^2 |j\rangle \langle j| |j\rangle \langle j|\right)}{3!} + \dots, \\
f\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right) &= 1 + \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| + \frac{\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \delta_{i,j} |i\rangle \langle j|}{2!} + \frac{\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right)\left(\sum_j \lambda_j^2 |j\rangle \langle j|\right)}{3!} + \dots, \\
f\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right) &= 1 + \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| + \frac{\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \delta_{i,j} |i\rangle \langle j|}{2!} + \frac{\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j^2 |i\rangle \langle i| |j\rangle \langle j|}{3!} + \dots, \\
f\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right) &= 1 + \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| + \frac{\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \delta_{i,j} |i\rangle \langle j|}{2!} + \frac{\sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j^2 \delta_{i,j} |i\rangle \langle j|}{3!} + \dots, \\
f\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right) &= 1 + \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| + \frac{\sum_i \lambda_i \lambda_i \delta_{i,i} |i\rangle \langle i|}{2!} + \frac{\sum_i \lambda_i \lambda_i^2 \delta_{i,i} |i\rangle \langle i|}{3!} + \dots, \\
f\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right) &= 1 + \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| + \frac{\sum_i \lambda_i^2 |i\rangle \langle i|}{2!} + \frac{\sum_i \lambda_i^3 |i\rangle \langle i|}{3!} + \dots, \\
f\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right) &= \sum_i |i\rangle \langle i| + \sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i| + \frac{\sum_i \lambda_i^2 |i\rangle \langle i|}{2!} + \frac{\sum_i \lambda_i^3 |i\rangle \langle i|}{3!} + \dots, \\
f\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right) &= \sum_i |i\rangle \langle i| + \lambda_i \sum_i |i\rangle \langle i| + \frac{\lambda_i^2}{2!} \sum_i |i\rangle \langle i| + \frac{\lambda_i^3}{3!} \sum_i |i\rangle \langle i| + \dots, \\
f\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right) &= \underbrace{\left(1 + \lambda_i + \frac{\lambda_i^2}{2!} + \frac{\lambda_i^3}{3!} + \dots\right)}_{f(\lambda_i)} \sum_i |i\rangle \langle i|, \\
\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right) &= f(\lambda_i) \sum_i |i\rangle \langle i|, \\
\therefore f\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle \langle i|\right) &= \sum_i f(\lambda_i) |i\rangle \langle i|.
\end{aligned}$$

(B.2)

### B.1.2 EXPRESSÃO 2

Analogamente à Expressão 1, podemos demonstrar através de uma expansão em série de Taylor a igualdade  $\log\left(\sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b|\right) = \sum_{i,j} \log\left(\lambda_i^a \lambda_j^b\right) |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b|$ . Seja  $f(A)$  uma função qualquer (como uma função logarítmica), tal que  $A = \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b|$ , ao substituímos

A na Equação B.1 teremos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
f \left( \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| \right) &= 1 + \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| + \frac{\left( \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| \right)^2}{2!} + \\
&\frac{\left( \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| \right)^3}{3!} + \dots, \\
f \left( \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| \right) &= 1 + \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| + \frac{\left( \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| \right) \left( \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| \right)}{2!} + \\
&\frac{\left( \sum_{i,j} |i_a j_b\rangle \lambda_i^a \lambda_j^b \langle i_a j_b| \right) \left( \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| \right)^2}{3!} + \dots, \\
f \left( \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| \right) &= 1 + \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| + \frac{\left( \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| \right) \left( \sum_{k,l} \lambda_k^a \lambda_l^b |k_a l_b\rangle \langle k_a l_b| \right)}{2!} + \\
&\frac{\left( \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| \right) \left( \sum_{k,l} \lambda_k^a \lambda_l^b |k_a l_b\rangle \langle k_a l_b| \right)^2}{3!} + \dots, \\
f \left( \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| \right) &= 1 + \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| + \frac{\sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| \sum_{k,l} \lambda_k^a \lambda_l^b |k_a l_b\rangle \langle k_a l_b|}{2!} + \\
&\frac{\left( \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| \right) \left( \sum_{k,l} \lambda_k^a \lambda_l^b |k_a l_b\rangle \langle k_a l_b| \sum_{k,l} \lambda_k^a \lambda_l^b |k_a l_b\rangle \langle k_a l_b| \right)}{3!} + \dots, \\
f \left( \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| \right) &= 1 + \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| + \frac{\sum_{i,j,k,l} \lambda_i^a \lambda_j^b \lambda_k^a \lambda_l^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| |k_a l_b\rangle \langle k_a l_b|}{2!} + \\
&\frac{\left( \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| \right) \left( \sum_{k,l} (\lambda_k^a \lambda_l^b)^2 |k_a l_b\rangle \langle k_a l_b| |k_a l_b\rangle \langle k_a l_b| \right)}{3!} + \dots, \\
f \left( \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| \right) &= 1 + \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| + \frac{\sum_{i,j,k,l} \lambda_i^a \lambda_j^b \lambda_k^a \lambda_l^b \delta_{i_a j_b k_a l_b} |i_a j_b\rangle \langle k_a l_b|}{2!} + \\
&\frac{\left( \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| \right) \left( \sum_{k,l} (\lambda_k^a \lambda_l^b)^2 |k_a l_b\rangle \langle k_a l_b| \right)}{3!} + \dots, \\
f \left( \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| \right) &= 1 + \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| + \frac{\sum_{i,j,k,l} \lambda_i^a \lambda_j^b \lambda_k^a \lambda_l^b \delta_{i_a j_b k_a l_b} |i_a j_b\rangle \langle k_a l_b|}{2!} + \\
&\frac{\sum_{i,j,k,l} \lambda_i^a \lambda_j^b (\lambda_k^a \lambda_l^b)^2 |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| |k_a l_b\rangle \langle k_a l_b|}{3!} + \dots, \\
f \left( \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| \right) &= 1 + \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| + \frac{\sum_{i,j,k,l} \lambda_i^a \lambda_j^b \lambda_k^a \lambda_l^b \delta_{i_a j_b k_a l_b} |i_a j_b\rangle \langle k_a l_b|}{2!} + \\
&\frac{\sum_{i,j,k,l} \lambda_i^a \lambda_j^b (\lambda_k^a \lambda_l^b)^2 \delta_{i_a j_b k_a l_b} |i_a j_b\rangle \langle k_a l_b|}{3!} + \dots,
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Considerando novamente  $i = k$  e  $j = l$ ,  $\delta_{i_a j_b k_a l_b}$  se torna  $\delta_{i_a j_b i_a j_b}$ , e então teremos:

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b|\right) &= 1 + \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| + \frac{\sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b|}{2!} + \\
&\frac{\sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b (\lambda_i^a \lambda_j^b)^2 |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b|}{3!} + \dots, \\
f\left(\sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b|\right) &= 1 + \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| + \frac{\sum_{i,j} (\lambda_i^a \lambda_j^b)^2 |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b|}{2!} + \\
&\frac{\sum_{i,j} (\lambda_i^a \lambda_j^b)^3 |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b|}{3!} + \dots, \\
f\left(\sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b|\right) &= \sum_{i,j} |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| + \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| + \frac{\sum_{i,j} (\lambda_i^a \lambda_j^b)^2 |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b|}{2!} + \\
&\frac{\sum_{i,j} (\lambda_i^a \lambda_j^b)^3 |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b|}{3!} + \dots, \\
f\left(\sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b|\right) &= \sum_{i,j} |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| + \sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| + \frac{(\lambda_i^a \lambda_j^b)^2}{2!} \sum_{i,j} |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| + \\
&\frac{(\lambda_i^a \lambda_j^b)^3}{3!} \sum_{i,j} |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b| + \dots, \\
f\left(\sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b|\right) &= \underbrace{\left(1 + \lambda_i^a \lambda_j^b + \frac{(\lambda_i^a \lambda_j^b)^2}{2!} + \frac{(\lambda_i^a \lambda_j^b)^3}{3!} + \dots\right)}_{f(\lambda_i^a \lambda_j^b)} \sum_{i,j} |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b|, \\
f\left(\sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b|\right) &= f(\lambda_i^a \lambda_j^b) \sum_{i,j} |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b|, \\
\therefore f\left(\sum_{i,j} \lambda_i^a \lambda_j^b |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b|\right) &= \sum_{i,j} f(\lambda_i^a \lambda_j^b) |i_a j_b\rangle \langle i_a j_b|.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

## B.2 EXPRESSÃO DO CAPÍTULO 6

Aqui demonstraremos a propriedade  $F_m = \frac{1}{2}F_{m16} + \frac{1}{2}F_{m32}$ , tomando por base as Equações 5.19 a 5.21 e Tabela 6.1:

$$\begin{aligned}
F_m &= \frac{1}{N} \sum_{\{\psi_{in}\}} \text{Tr} \left[ \rho_{out}(\psi_{in}) \frac{1}{16} \text{Tr}_{1234} \sum_{\mathbf{m}} B_{\mathbf{m}} P_{\mathbf{s}} \mathcal{L}[\rho_C(\psi_{in})] P_{\mathbf{s}} B_{\mathbf{m}}^\dagger \right], \\
F_m &= \\
&\frac{1}{N} \sum_{\{\psi_{in}\}} \text{Tr} \left[ \rho_{out}(\psi_{in}) \frac{1}{16} \text{Tr}_{1234} \sum_{\mathbf{m}} B_{\mathbf{m}} P_{\mathbf{s}} \left( \frac{1}{2} U_{16} \rho_C(\psi_{in}) U_{16}^\dagger + \frac{1}{2} U_{32} \rho_C(\psi_{in}) U_{32}^\dagger \right) P_{\mathbf{s}} B_{\mathbf{m}}^\dagger \right], \\
F_m &= \frac{1}{N} \sum_{\{\psi_{in}\}} \text{Tr} \left\{ \rho_{out}(\psi_{in}) \frac{1}{16} \text{Tr}_{1234} \sum_{\mathbf{m}} B_{\mathbf{m}} \left[ \frac{1}{2} P_{\mathbf{s}} \left( U_{16} \rho_C(\psi_{in}) U_{16}^\dagger \right) P_{\mathbf{s}} + \right. \right. \\
&\left. \left. \frac{1}{2} P_{\mathbf{s}} \left( U_{32} \rho_C(\psi_{in}) U_{32}^\dagger \right) P_{\mathbf{s}} \right] B_{\mathbf{m}}^\dagger \right\}, \\
F_m &= \frac{1}{N} \sum_{\{\psi_{in}\}} \text{Tr} \left\{ \rho_{out}(\psi_{in}) \frac{1}{16} \text{Tr}_{1234} \left[ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{m}} B_{\mathbf{m}} P_{\mathbf{s}} \left( U_{16} \rho_C(\psi_{in}) U_{16}^\dagger \right) P_{\mathbf{s}} B_{\mathbf{m}}^\dagger + \right. \right. \\
&\left. \left. \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{m}} B_{\mathbf{m}} P_{\mathbf{s}} \left( U_{32} \rho_C(\psi_{in}) U_{32}^\dagger \right) P_{\mathbf{s}} B_{\mathbf{m}}^\dagger \right] \right\}, \\
F_m &= \frac{1}{N} \sum_{\{\psi_{in}\}} \text{Tr} \left\{ \rho_{out}(\psi_{in}) \frac{1}{16} \text{Tr}_{1234} \left[ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{m}} B_{\mathbf{m}} P_{\mathbf{s}} \left( U_{16} \rho_C(\psi_{in}) U_{16}^\dagger \right) P_{\mathbf{s}} B_{\mathbf{m}}^\dagger \right] + \right. \\
&\left. \rho_{out}(\psi_{in}) \frac{1}{16} \text{Tr}_{1234} \left[ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{m}} B_{\mathbf{m}} P_{\mathbf{s}} \left( U_{32} \rho_C(\psi_{in}) U_{32}^\dagger \right) P_{\mathbf{s}} B_{\mathbf{m}}^\dagger \right] \right\}, \\
F_m &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{\{\psi_{in}\}} \text{Tr} \left\{ \rho_{out}(\psi_{in}) \frac{1}{16} \text{Tr}_{1234} \left[ \sum_{\mathbf{m}} B_{\mathbf{m}} P_{\mathbf{s}} \left( U_{16} \rho_C(\psi_{in}) U_{16}^\dagger \right) P_{\mathbf{s}} B_{\mathbf{m}} \right] \right\} \right\} + \\
&\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{\{\psi_{in}\}} \text{Tr} \left\{ \rho_{out}(\psi_{in}) \frac{1}{16} \text{Tr}_{1234} \left[ \sum_{\mathbf{m}} B_{\mathbf{m}} P_{\mathbf{s}} \left( U_{32} \rho_C(\psi_{in}) U_{32}^\dagger \right) P_{\mathbf{s}} B_{\mathbf{m}} \right] \right\} \right\}, \\
\therefore F_m &= \frac{1}{2} F_{m16} + \frac{1}{2} F_{m32}.
\end{aligned} \tag{B.5}$$

## APÊNDICE C

# TABELA PARA A INDUÇÃO DE CANALIS MARKOVIANOS

A Tabela C.1 (semelhante à Tabela 6.1) mostra, para uma operação de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$ , uma relação análoga à dada pela Equação 6.14 considerando todas as  $n$  possíveis combinações entre  $\sigma_z$  (que ocorre quando  $L = -1$ ),  $I$  (que ocorre quando  $L = 1$ ) e  $\mathcal{L}_M^{(i)}(\rho) = \frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}\sigma_z^{(i)}\rho\sigma_z^{(i)}$  (que ocorre quando  $L = 0$ ) em cada um dos 5 qubits existentes no sistema, totalizando dessa forma  $n = 243$  possíveis arranjos. Para economia de notação e espaço na tabela, iremos considerar aqui  $I \equiv I^{(i)}$ ,  $Z \equiv \sigma_z^{(i)}$  e  $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_M^{(i)}$ , sendo  $i$  o índice de cada qubit. Aqui também a posição de cada elemento corresponde à posição de cada qubit. Dessa forma, a sequência  $IZLZI$  (arranjo de número 174), por exemplo, equivale a  $I^{(1)}\sigma_z^{(2)}\mathcal{L}_M^{(3)}\sigma_z^{(4)}I^{(5)}$ .

Tabela C.1: Fidelidade média para a operação de rotação  $\pm\pi$  em  $X$  ou  $Z$  para todos os 243 possíveis arranjos de  $I$ ,  $\sigma_z$  e  $\mathcal{L}_M$  em cada qubit.

$n$	Seq.	$F_m$	$n$	Seq.	$F_m$	$n$	Seq.	$F_m$	$n$	Seq.	$F_m$	$n$	Seq.	$F_m$
1	ZZZZZ	0,505	51	ZLICI	0,376	101	LZIZL	0,752	151	LILIZ	0,752	201	ILCZI	0,5
2	ZZZZL	0,752	52	ZLIHZ	0,624	102	LZIZI	0,752	152	LILIC	0,752	202	ILCLZ	0,5
3	ZZZZI	1	53	ZLILC	0,5	103	LZIZZ	0,5	153	LILII	0,752	203	ILCLL	0,5
4	ZZZLZ	0,376	54	ZLIII	0,376	104	LZILC	0,5	154	LIIZZ	0,248	204	ILLLI	0,5
5	ZZZLL	0,5	55	ZLIZZ	0,248	105	LZILI	0,5	155	LIIZL	0,248	205	ILLIZ	0,5
6	ZZZLI	0,624	56	ZLIZL	0,248	106	LZIHZ	0,248	156	LIIZI	0,248	206	ILLIC	0,5
7	ZZZIZ	0,248	57	ZLIZI	0,248	107	LZILC	0,248	157	LII LZ	0,5	207	ILCII	0,5
8	ZZZIL	0,248	58	ZLIZZ	0,376	108	LZIII	0,248	158	LII LC	0,5	208	ILIZZ	0,376
9	ZZZII	0,248	59	ZLIZL	0,5	109	LZIZZ	0,5	159	LII LI	0,5	209	ILIZL	0,5
10	ZZLZZ	0,752	60	ZLIZI	0,624	110	LZLZZ	0,5	160	LIIHZ	0,752	210	ILIZI	0,624
11	ZZLZL	0,752	61	ZLIZZ	0,505	111	LZLZI	0,5	161	LII LC	0,752	211	ILICZ	0,376
12	ZZLZI	0,752	62	ZLIZL	0,752	112	LZLZL	0,5	162	LIIII	0,752	212	ILICL	0,5
13	ZZLZL	0,5	63	ZLIZI	1	113	LZLZL	0,5	163	IZZZZ	1	213	ILILI	0,624
14	ZZLZL	0,5	64	ZLIZZ	0,248	114	LZLZI	0,5	164	IZZZL	0,752	214	ILIZZ	0,376
15	ZZLZI	0,5	65	ZLIZL	0,248	115	LZLIZ	0,5	165	IZZZI	0,505	215	ILILC	0,5
16	ZZLIZ	0,248	66	ZLIZI	0,248	116	LZLIL	0,5	166	IZZLZ	0,624	216	ILIII	0,624
17	ZZLIL	0,248	67	ZLIZL	0,5	117	LZLII	0,5	167	IZZLL	0,5	217	ILZZZ	0,248
18	ZZLII	0,248	68	ZLIZL	0,5	118	LZLIZ	0,5	168	IZZLI	0,376	218	ILZZL	0,248
19	ZZLIZ	1	69	ZLIZI	0,5	119	LZLZL	0,5	169	IZZIZ	0,248	219	ILZZI	0,248
20	ZZLIZ	0,752	70	ZLIZZ	0,752	120	LZLZI	0,5	170	IZZIL	0,248	220	ILZZZ	0,624
21	ZZLIZ	0,505	71	ZLIZL	0,752	121	LZLZL	0,5	171	IZZII	0,248	221	ILZLL	0,5
22	ZZLIZ	0,624	72	ZLIZI	0,752	122	LZLZL	0,5	172	IZZZZ	0,752	222	ILZLI	0,376
23	ZZLIL	0,5	73	ZLIZZ	0,248	123	LZLZI	0,5	173	IZZZL	0,752	223	ILZIZ	1
24	ZZLIL	0,376	74	ZLIZL	0,248	124	LZLIZ	0,5	174	IZZZI	0,752	224	ILZIL	0,752
25	ZZLIZ	0,248	75	ZLIZI	0,248	125	LZLIL	0,5	175	IZZLZ	0,5	225	ILZII	0,505
26	ZZLIL	0,248	76	ZLIZZ	0,624	126	LZLII	0,5	176	IZZLL	0,5	226	ILZZZ	0,248
27	ZZLII	0,248	77	ZLIZL	0,5	127	LZLIZ	0,5	177	IZZLI	0,5	227	ILZZL	0,248
28	ZZLIZ	0,376	78	ZLIZI	0,376	128	LZLZL	0,5	178	IZZIZ	0,248	228	ILZZI	0,248
29	ZLZZL	0,5	79	ZLIZZ	1	129	LZLZI	0,5	179	IZZIL	0,248	229	ILZZZ	0,5
30	ZLZZI	0,624	80	ZLIZL	0,752	130	LZLZL	0,5	180	IZZII	0,248	230	ILZLL	0,5
31	ZLZZL	0,376	81	ZLIZI	0,505	131	LZLZL	0,5	181	IZZIZ	0,505	231	ILZLI	0,5
32	ZLZZL	0,5	82	LZLZZ	0,752	132	LZLZI	0,5	182	IZZZL	0,752	232	ILZIZ	0,752
33	ZLZZI	0,624	83	LZLZL	0,752	133	LZLIZ	0,5	183	IZZZI	1	233	ILZIL	0,752
34	ZLZZZ	0,376	84	LZLZI	0,752	134	LZLIL	0,5	184	IZZLZ	0,376	234	ILZII	0,752
35	ZLZZL	0,5	85	LZLIZ	0,5	135	LZLII	0,5	185	IZZLL	0,5	235	ILZZZ	0,248
36	ZLZZI	0,624	86	LZLIZ	0,5	136	LZLIZ	0,248	186	IZZLI	0,624	236	ILZZL	0,248
37	ZLZZZ	0,5	87	LZLZI	0,5	137	LZLZL	0,248	187	IZZIZ	0,248	237	ILZZI	0,248
38	ZLZZL	0,5	88	LZLIZ	0,248	138	LZLZI	0,248	188	IZZIL	0,248	238	ILZZZ	0,376
39	ZLZZI	0,5	89	LZLIL	0,248	139	LZLIZ	0,5	189	IZZII	0,248	239	ILZZL	0,5
40	ZLZZL	0,5	90	LZLIZ	0,248	140	LZLIZ	0,5	190	ILZZZ	0,624	240	ILZLI	0,624
41	ZLZZL	0,5	91	LZLZL	0,752	141	LZLZI	0,5	191	ILZZL	0,5	241	ILZIZ	0,505
42	ZLZZI	0,5	92	LZLZL	0,752	142	LZLIZ	0,752	192	ILZZI	0,376	242	ILZIL	0,752
43	ZLZZZ	0,5	93	LZLZI	0,752	143	LZLIL	0,752	193	ILZZZ	0,624	243	IIIII	1
44	ZLZZL	0,5	94	LZLZL	0,5	144	LZLIZ	0,752	194	ILZZL	0,5			
45	ZLZZI	0,5	95	LZLIZ	0,5	145	LZLIZ	0,248	195	ILZZI	0,376			
46	ZLZZZ	0,624	96	LZLZI	0,5	146	LZLZL	0,248	196	ILZZZ	0,624			
47	ZLZZL	0,5	97	LZLIZ	0,248	147	LZLZI	0,248	197	ILZZL	0,5			
48	ZLZZI	0,376	98	LZLIL	0,248	148	LZLIZ	0,5	198	ILZZI	0,376			
49	ZLZZZ	0,624	99	LZLII	0,248	149	LZLIL	0,5	199	ILZZZ	0,5			
50	ZLZZL	0,5	100	LZLIZ	0,752	150	LZLZI	0,5	200	ILZZL	0,5			

## APÊNDICE D

### ARTIGOS PRODUZIDOS

FERREIRA, J. S. S. et al. Multipartite monogamous relations for entanglement and discord. *Physical Review A*, American Physical Society (APS), v. 97, n. 1, jan 2018.

FILENGA, D.; MAHLOW, F; FANCHINI, F., F. Non-Markovian memory in a measurement-based quantum computer. Submetido para publicação.