UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Mateus Pereira Araujo

Um estudo da geometria de superfícies via projeção ortogonal: Teorema de Koenderink e extensões

São José do Rio Preto
2022

Mateus Pereira Araujo

Um estudo da geometria de superfícies via projeção ortogonal: Teorema de Koenderink e extensões

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profa. Dra. Luciana de Fátima Martins

Financiadora: FAPESP 2019/19714-0

São José do Rio Preto
2022

A663e

Araujo, Mateus Pereira

Um estudo da geometria de superfícies via projeção ortogonal: Teorema de Koenderink e extensões / Mateus Pereira Araujo. -- São José do Rio Preto, 2022

111 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientadora: Luciana de Fátima Martins

1. Projeção Ortogonal. 2. Gerador de Contorno. 3. Contorno Aparente. 4. Teorema de Koenderink. 5. Superfícies Singulares. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Mateus Pereira Araujo

Um estudo da geometria de superfícies via projeção ortogonal: Teorema de Koenderink e extensões

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: FAPESP 2019/19714-0

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Luciana de Fátima Martins
Orientadora

Prof. Dr. Juan José Nuño Ballesteros
Departament de Matemàtiques
Universitat de València

Prof. Dr. Farid Tari
Departamento de Matemática - ICMC/USP

São José do Rio Preto
18 de janeiro de 2022

Aos meus pais, Irene e Reginaldo,
e ao meu irmão, Márcio,
dedico.

AGRADECIMENTOS

Finalizar este trabalho é uma vitória e muitas pessoas contribuíram para que ela fosse possível. Agradeço a todas aquelas que, de alguma maneira, foram essenciais para que ele pudesse ser realizado. Em especial, agradeço:

A Deus, pela vida, pela saúde e força em todos os momentos e por me permitir realizar esse trabalho.

À minha família, pelo carinho e incentivo de sempre, em especial aos meus pais, Irene e Reginaldo, pelo amor de todos os dias, pelos valores ensinados a mim e ao meu irmão, por incentivarem meus estudos e estarem presentes em todos os momentos. Meu irmão, Márcio, obrigado pela parceria de todos os dias, pelo incentivo e pelos momentos de carinho e companheirismo que vivemos e ainda viveremos juntos. Sara, obrigado pelo apoio e por todos os momentos que vivemos juntos – da pré-escola à graduação, passando pelos churrascos de família e calmarias de um domingo a tarde – e pelos que ainda viveremos. Os motivos para agradecer são muitos e não cabem em poucas palavras, mas registro meu amor e gratidão por vocês.

À professora Luciana que aceitou me orientar ainda na graduação, contribuindo com minha formação profissional, meu crescimento pessoal e possibilitando o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço o carinho e a confiança em todos esses anos e a amizade que levarei para sempre.

Aos grandes amigos que o Ibilce me deu. Pedro, Mariele, Murillo, Vinícius, Yuri, Eliani, Linara e tantos outros, obrigado pela parceria e pelos muitos momentos de alegria que vivemos. Pedro e Mariele, obrigado por estarem sempre presentes, jogando conversa fora, estudando, ouvindo reclamações e compartilhando bons momentos e boas histórias.

Ao Programa de Educação Tutorial, PET, por me proporcionar viver momentos e conhecer pessoas incríveis, além de contribuir grandemente com minha formação e crescimento pessoal.

A todos os professores, da pré-escola ao mestrado, que contribuíram com minha

formação. Aos professores do Departamento de Matemática e aos funcionários do Ibilce, obrigado pelos ensinamentos, incentivos e ajuda em todos os momentos.

Aos professores Juan e Farid por aceitarem fazer parte da banca e pelas correções e sugestões que contribuíram para a melhoria deste trabalho.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, FAPESP, pela concessão da bolsa de pesquisa, sob o processo nº 2019/19714-0.

"O estudo e, em geral, a busca da verdade e da beleza,
constituem uma área na qual podemos continuar
sendo crianças por toda a vida"
(Albert Einstein, [9])

RESUMO

Seja M uma superfície em $\mathbb{R}^3$ e considere a projeção ortogonal de seus pontos em um plano, ao longo de uma direção $\mathbf{v}$. Essa aplicação é singular quando $\mathbf{v}$ é uma direção tangente a M e é importante na classificação do tipo de contato entre M e retas paralelas a direção $\mathbf{v}$. O conjunto singular da projeção ortogonal restrita a M é chamado de gerador de contorno e sua projeção é chamada de contorno aparente. Reunimos neste trabalho resultados sobre a projeção ortogonal de superfícies regulares e singulares em $\mathbb{R}^3$. Estudamos a classificação de suas singularidades, relacionando as classes de singularidades com a geometria de M, nos casos em que M é uma superfície regular ou uma cuspidal edge. O Teorema de Koenderink é um resultado que relaciona a curvatura Gaussiana de M com as curvaturas da seção normal de M na direção $\mathbf{v}$ e do contorno aparente, quando esse é regular. Apresentamos sua demonstração e também estudamos extensões desse resultado considerando contorno aparente com (2,3)-cúspide. Estudamos ainda uma versão desse resultado quando M é superfície singular, sendo sua singularidade uma cuspidal edge.

Palavras-chave: Projeção Ortogonal. Gerador de Contorno. Contorno Aparente. Teorema de Koenderink. Superfícies Singulares.

ABSTRACT

Let M be a surface in $\mathbb{R}^3$ and consider the orthogonal projection of its points on a plane along a direction $\mathbf{v}$. This map is singular when $\mathbf{v}$ is a tangent direction to M and is important to classify the type of contact between M and lines parallel to $\mathbf{v}$. The singular set of the orthogonal projection restricted to M is called contour generator and its projection is called apparent contour. We gather in this work results about orthogonal projections of regular and singular surfaces in $\mathbb{R}^3$. We study the classification of its singularities and we relate the singularity classes to differential geometry of M, when M is a regular surface or a cuspidal edge. Koenderink's Theorem is a result that relates the Gaussian curvature of M with the curvatures of the normal section of M along the direction $\mathbf{v}$ and of the apparent contour, when this is regular. We present the proof of this theorem and also study extensions of this result considering apparent contours with (2,3)-cusps. We also studied a version of this result when M is a singular surface, namely a cuspidal edge.

Keywords: *Orthogonal Projection. Contour generator. Apparent Contour. Koenderink's Theorem. Singular Surfaces.*

LISTA DE FIGURAS

1.1 Em preto, gerador de contorno e em vermelho, contorno aparente de uma superfície regular em uma direção $\mathbf{v}$. 22
1.2 Cuspidal edge à esquerda e rabo de andorinha à direita 23

2.1 Curvas com curvatura negativa à esquerda e positiva à direita. 33
2.2 Comportamento de uma superfície regular com relação ao plano tangente T_pM na vizinhança de um ponto p elíptico e hiperbólico, respectivamente. . 40
2.3 Superfície dada no Exemplo 2.34, $T_{\mathbf{0}}M$ e suas direções assintóticas em $\mathbf{0}$. 41
2.4 Imagem da frente $f(u,v) = (u, v^2, v^3)$ dada no Exemplo 2.40 44
2.5 Imagem da frente $f(u,v) = (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v)$ dada no Exemplo 2.41 44
2.6 Superfícies dadas no Exemplo 2.43 45
2.7 Reta tangente e plano normal à uma cuspidal edge M 46
2.8 Cuspidal edge com curvatura normal limitante negativa à esqueda, e positiva à direita. 51
2.9 Cuspidal edge com curvatura singular negativa à esqueda, e positiva à direita. 52

4.1 Gerador de contorno e contorno aparente para esfera na direção $\mathbf{v} = (0,0,1)$. 72
4.2 Superfície M, gerador de contorno em preto e contorno aparente em vermelho para a superfície do Exemplo 4.2. 73
4.3 Gerador de contorno e contorno aparente para a superfície dada no Exemplo 4.3 nas direções $(1,0,0)$ à esquerda e $(0,0,1)$ à direita. 73
4.4 De cima para baixo, da esquerda para a direita: superfície M, conjunto singular de $P_{\mathbf{v}}$, gerador de contorno e contorno aparente dados nos itens (a), (b), (c), (d), (e) e (f) do Exemplo 4.5. 76
4.5 Ilustração da Proposição 4.7. 77
4.6 Orientação do contorno aparente para a superfície e direção $\mathbf{v}$ dadas no Exemplo 4.14. 80
4.7 Superfície M do Exemplo 4.15, seu contorno aparente (em preto) e gerador de contorno, formado por pontos elípticos em vermelho, e pontos hiperbólicos em azul. 81

5.1 Superfície M e as curvas dadas no Exemplo 5.8. 89

5.2 Gerador de contorno e contorno aparente (à esquerda) e gerador de contorno e contorno aparente próprios (à direita) para a cuspidal edge dada no Exemplo 5.12. O plano $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ foi deslocado para uma melhor visualização do contorno aparente próprio. 91
5.3 Cuspidal edge dada no item (b) juntamente com seu gerador de contorno e a direção de projeção. 96
5.4 À esquerda, conjunto singular de $P_{\mathbf{v}_{tg}}$ dada no item (c), e à direta gerador de contorno, formado pela união do gerador de contorno na parte regular, em preto, e de $\hat{\gamma}$, em laranja, e a projeção ortogonal de $\hat{\gamma}$, em vermelho. . 96
5.5 À esquerda, conjunto singular de $P_{\mathbf{v}_{tg}}$ dada no item (d), e à direita, gerador de contorno formado pela união do gerador de contorno na parte regular, em preto, e de $\hat{\gamma}$, em laranja, e a projeção ortogonal de $\hat{\gamma}$, em vermelho. . . 97
5.6 Conjunto singular de $P_{\mathbf{v}_{tg}}$ dada no item (e) e sua imagem por f, formando o gerador de contorno. 97
5.7 Curvas envolvidas no Teorema de Koenderink para superfície regular e na versão para cuspidal edges. 98
5.8 Curvas e vetores usados na versão do Teorema de Koenderink para cuspidal edges. 101
5.9 Cuspidal edge dada no Exemplo 5.26. 104
5.10 Guarda-chuvas de Whitney 107

LISTA DE TABELAS

2.1 Classificação das singularidades de $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ em $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ com $\mathcal{A}_e$-codimensão $\leqslant 2$. 30

3.1 Condições algébricas e significados geométricos para as singularidades locais de $P_{\mathbf{v}}$. 64
3.2 Condições para a família de projeções ortogonais ser um desdobramento versal. 64

5.1 Germes ${}_X\mathcal{A}$-finitamente determinados com ${}_X\mathcal{A}_e - \text{cod} \leqslant 2$. 90

SUMÁRIO

1 Introdução **21**

2 Preliminares **25**
2.1 Teoria de Singularidades . . . 25
2.1.1 Germes e jatos . . . 25
2.1.2 Grupos de Mather e determinação finita . . . 26
2.1.3 Desdobramentos versais e genericidade . . . 30
2.2 Geometria Diferencial . . . 32
2.2.1 Curvas regulares . . . 33
2.2.2 Superfícies regulares . . . 35
2.3 Frentes de onda . . . 43
2.3.1 Forma normal especial e invariantes geométricos para a cuspidal edge 49
2.4 Formas Diferenciais . . . 53

3 Projeção ortogonal de superfícies em $\mathbb{R}^3$ **55**
3.1 Contato entre subvariedades de $\mathbb{R}^3$ . . . 55
3.2 Função altura e contato com planos . . . 57
3.3 Projeção ortogonal e contato com retas . . . 58

4 Contorno aparente e Teorema de Koenderink para superfícies regulares **71**
4.1 Gerador de contorno e contorno aparente regulares . . . 71
4.2 Teorema de Koenderink . . . 78

5 Projeção ortogonal e extensões do Teorema de Koenderink **83**
5.1 Extensão do Teorema de Koenderink para contorno aparente singular . . . 83
5.1.1 Contorno aparente singular . . . 84
5.1.2 Extensão do Teorema de Koenderink para (2,3)-cúspide . . . 85
5.2 Projeção ortogonal da cuspidal edge . . . 89
5.3 Extensão do Teorema de Koenderink para cuspidal edges . . . 98
5.4 Sobre outras extensões . . . 107

Referências **109**

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é estudar a geometria diferencial de superfícies no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ a partir de sua projeção ortogonal em um plano. Estudaremos primeiramente a projeção ortogonal de superfícies regulares, suas propriedades e resultados que fornecem informações sobre a superfície a partir de sua projeção. Em seguida, veremos extensões de alguns desses resultados para superfícies singulares. Para isso, utilizaremos ferramentas de Geometria Diferencial e de Teoria de Singularidades.

A forma de curvas e superfícies pode ser estudada usando ferramentas de Geometria Diferencial e Teoria de Singularidades. Juntas, essas áreas enriquecem uma a outra, propondo maneiras alternativas de obter resultados e propriedades sobre curvas e superfícies.

A Teoria de Singularidades trata do estudo de variedades e aplicações singulares e teve início em 1955 com o trabalho pioneiro de H. Whitney, onde é mostrado que aplicações do plano do plano têm, em geral, apenas singularidades do tipo dobra ou cúspide. As ferramentas da Teoria de Singularidades podem ser aplicadas em outros ramos da ciência como, por exemplo, computação gráfica, processamento de visão e imagens, animação e multimídia, dentre outros. Além disso, essas áreas também enriquecem a teoria propondo novos problemas.

A teoria de contato entre subvariedades de $\mathbb{R}^n$ é uma ferramenta da Teoria de Singularidades para o estudo das subvariedades de $\mathbb{R}^n$. Neste trabalho iremos estudar a projeção ortogonal de superfícies em $\mathbb{R}^3$ sobre um plano. A projeção ortogonal ao londo de uma direção $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^3$ sobre um plano ortogonal a $\mathbf{v}$ é a aplicação $\mathcal{P}_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ dada por $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(X) = X - \langle X, \mathbf{v}\rangle \mathbf{v}$. Essa aplicação é usada para classificar o tipo de contato que uma superfície M tem com retas paralelas a $\mathbf{v}$ e, a partir desse contato, é possível obter informações geométricas sobre a superfície projetada.

Se uma reta ℓ, paralela a $\mathbf{v}$, e a superfície M são transversais em um ponto, então a aplicação de contato entre elas é regular, e a recíproca também é verdadeira. O estudo do contato torna-se mais rico quando consideramos os pontos da superfície onde ℓ é uma reta tangente pois, dessa forma, a aplicação de contato é singular e a $\mathcal{A}$-classe de sua singularidade fornece informações sobre a superfície. Assim, nosso enfoque será o estudo das singularidades de $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ restrita a M.

O conjunto singular de $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ restrita a M, formado pelos pontos $p \in M$ tal que $\mathbf{v}$ é uma direção tangente à M em p, é chamado de gerador de contorno de M na direção $\mathbf{v}$ e denotado por $\Sigma_{\mathbf{v}}$. A projeção ortogonal de $\Sigma_{\mathbf{v}}$ é chamada de contorno aparente de M na direção $\mathbf{v}$, e denotada por $\Delta_{\mathbf{v}}$ (Figura 1.1). Geometricamente, $\Sigma_{\mathbf{v}}$ é o conjunto

de pontos em que, quando vista na direção $\mathbf{v}$, a superfície parece se dobrar. Quando a direção de projeção $\mathbf{v}$ é não assintótica, então $\Sigma_{\mathbf{v}}$ e $\Delta_{\mathbf{v}}$ são curvas regulares. Ao longo dos anos, resultados sobre projeção ortogonal de superfícies vêm sendo buscados por diversos autores, sendo alguns desses resultados sintetizados em [6, 7, 13], por exemplo. Um desses resultados, que daremos enfoque neste trabalho, é o Teorema de Koenderink, enunciado e provado em [15] por J. J. Koenderink em 1984. A partir deste teorema, podemos escrever a curvatura Gaussiana da superfície nos pontos de $\Sigma_{\mathbf{v}}$ como produto de duas curvaturas: a curvatura normal na direção de projeção e a curvatura do contorno aparente $\Delta_{\mathbf{v}}$ e, como consequência, podemos obter informações sobre a forma local da superfície projetada. Vale ressaltar que este resultado também foi obtido em 1895 por M. D'Ocagne em [8].

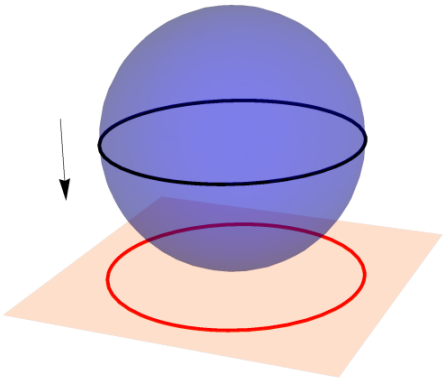


Figura 1.1: Em preto, gerador de contorno e em vermelho, contorno aparente de uma superfície regular em uma direção $\mathbf{v}$.

A prova do Teorema de Koenderink dada em [15] por Koenderink usa como hipótese o fato de a superfície e seu contorno aparente serem regulares. No entanto, dependendo da direção de projeção $\mathbf{v}$, o contorno aparente pode ser uma curva singular. Em 2012, S. Shiba e M. Umehara definiram em [26] curvatura para uma singularidade especial de curvas planas: as (2,3)-cúspides, e a chamaram de curvatura cuspidal. Em 2016, T. Fukui, M. Hasegawa e K. Saji provaram em [10] uma versão do Teorema de Koenderink quando o contorno aparente tem essa singularidade usando a curvatura cuspidal.

O Teorema de Koenderink é um resultado recente com várias aplicações que vêm sendo estudadas por diversos matemáticos. Alguns desses estudos buscam estender esse resultado para superfícies singulares.

Uma categoria de superfícies singulares que vem sendo muito estudadas recentemente são as frentes de onda. Essas superfícies são aplicações que têm bem definidas um campo suave normal de vetores unitários. Um trabalho muito relevante no estudo da geometria diferencial de frentes de onda é o artigo [24], publicado por K. Saji, M. Umehara e K. Yamada em 2009. Uma frente de onda particular que iremos abordar neste trabalho é a cuspidal edge, que são germes $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ $\mathcal{A}$-equivalentes a $g(u, v) = (u, v^2, v^3)$. A cuspidal edge g é chamada de cuspidal edge usual e sua imagem é dada na Figura 1.2 à esquerda. Estudar as propriedades dessas aplicações e de suas imagens é importante pois cuspidal edges e rabos de andorinha, que são aplicações de $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ $\mathcal{A}$-equivalentes a $h(u, v) = (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v)$, são as singularidades genéricas de germes de frentes de onda de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$.

Para frentes $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto, em particular para cuspidal edges, a curvatura Gaussiana é não limitada perto de pontos singulares. No entanto, existe

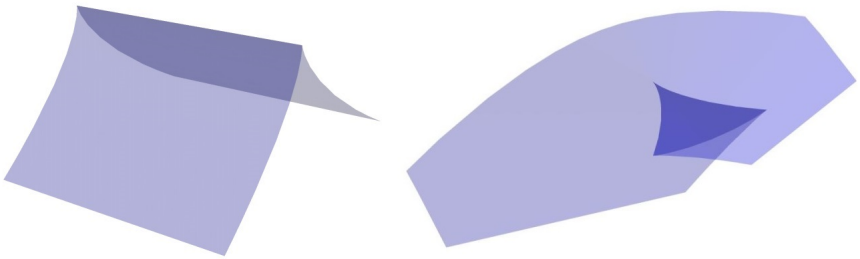


Figura 1.2: Cuspidal edge à esquerda e rabo de andorinha à direita

uma 2-forma, chamada forma curvatura Gaussiana, $Kd\hat{A}$, que pode ser continuamente estendida em todo domínio de f. Usando essa 2-forma K. Saji mostrou no trabalho [25] em 2014 uma extensão do Teorema de Koenderink para cuspidal edges, onde obtém $Kd\hat{A}$ como produto exterior de 1-formas que envolvem algumas curvaturas conhecidas para cuspidal edges.

Em 2016, L. Martins e K. Saji obtiveram em [17] uma parametrização especial para cuspidal edges e definiram alguns invariantes para essas superfícies, como a curvatura cuspidal, a curvatura normal limitante e a torção cuspidal, além de estudar as propriedades dessas curvaturas e suas interpretações geométricas.

Em 2018, F. Tari e R. Oset Sinha estudaram em [22] o contato de cuspidal edges com planos e retas. De maneira análoga ao que é feito para superfícies regulares, para analisar o contato de uma cuspidal edge f com retas paralelas a uma direção $\mathbf{v}$ basta estudar as singularidades de sua projeção ortogonal. Considerando um subgrupo especial de $\mathcal{A}$, o grupo ${}_X\mathcal{A} = \mathcal{R}(X) \times \mathcal{L}$, onde $\mathcal{R}(X)$ é formado pelos germes de difeomorfismos $h : (\mathbb{R}^3, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ que preservam a cuspidal edge usual X, genericamente as singularidades da projeção ortogonal têm ${}_X\mathcal{A}_e$-codimensão $\leqslant 2$. Em posse dessas informações, os autores obtêm uma maneira de reconhecer essas singularidades usando os invariantes definidos em [17] e a posição relativa entre a direção de projeção e o plano tangente limitante da cuspidal edge.

O objetivo deste trabalho é estudar os resultados que citamos anteriormente. Sua organização é feita da seguinte forma:

No Capítulo 2 apresentaremos alguns conceitos essenciais para o desenvolvimento dos próximos capítulos: na Seção 2.1 abordaremos definições e resultados da Teoria de Singularidades, como o conceito de germes, que permite trabalhar localmente com conjuntos e aplicações, os grupos de Mather e a classificação de germes de $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ via $\mathcal{A}$-equivalência. Enunciaremos também resultados de determinação finita de germes que nos auxiliarão no reconhecimento das singularidades da projeção ortogonal. Apresentaremos ainda, de maneira breve, definições e resultados sobre desdobramentos versais e genericidade que auxiliarão na compreensão de alguns resultados futuros. Na Seção 2.2 serão abordados resultados de Geometria Diferencial que usaremos ao longo do trabalho, como a teoria local de curvas planas e espaciais, dando destaque a função curvatura dessas curvas, que será essencial para o estudo do Teorema de Koenderink. Para superfícies regulares, desenvolveremos a seção com o objetivo de destacar resultados sobre direções assintóticas e conjugadas, e sobre a classificação de pontos sobre a superfície em função de sua curvatura Gaussiana. Na Seção 2.3 abordaremos algumas definições e resultados envolvendo frentes de onda, dando destaque para a cuspidal edge, discutindo sua forma normal e alguns de seus invariantes, como a curvatura normal limitante, a torção cuspidal e a curvatura singular. Por fim, na Seção 2.4 apresentaremos alguns conceitos e resultados

de 1 e 2-formas diferenciais que serão úteis quando estivermos estudando as extensões do Teorema de Koenderink para superfícies singulares, mais precisamente para a cuspidal edge.

No Capítulo 3 estudaremos os conceitos da teoria de contato entre subvariedades de $\mathbb{R}^n$. Na Seção 3.1 enunciaremos os principais resultados da teoria de contato que serão utilizados nas demais seções como, por exemplo, o teorema que possibilita o estudo do contato entre duas subvariedades analisando as $\mathcal{K}$-singularidades da aplicação de contato. Na Seção 3.2 aplicaremos esses resultados estudando brevemente o contato de superfícies com planos, que são medidos pelas singularidades da função altura e estudando, com mais detalhes, na Seção 3.3 o contato de superfícies com retas, que pode ser medido pelas $\mathcal{A}$-singularidades da projeção ortogonal, pois o grupo $\mathcal{A}$ fornece mais informações geométricas sobre a superfície. Definiremos ponto flecnodal, que está relacionado com este contato e estudaremos a demonstração do teorema que fornece condições algébricas e informações geométricas para cada uma das singularidades que podem ocorrer para a projeção ortogonal de superfícies genéricas.

No Capítulo 4 estudaremos a geometria do conjunto singular da projeção ortogonal $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ restrita a M, $\Sigma_{\mathbf{v}}$, e de sua projeção $\Delta_{\mathbf{v}}$. Na Seção 4.1 veremos resultados que fornecem condições necessárias e suficientes para que $\Sigma_{\mathbf{v}}$ e $\Delta_{\mathbf{v}}$ sejam curvas regulares, e suas relações com a geometria da superfície. Na Seção 4.2 estudaremos o Teorema de Koenderink e utilizaremos esse resultado para obter informações sobre a geometria da superfície a partir de sua projeção.

No Capítulo 5 estudaremos a projeção ortogonal de cuspidal edges e extensões do Teorema de Koenderink. Na Seção 5.1 veremos as relações que existem entre as singularidades da projeção ortogonal de superfícies regulares e de $\Delta_{\mathbf{v}}$ em alguns casos, e estudaremos uma extensão do Teorema de Koenderink quando $\Delta_{\mathbf{v}}$ é uma (2,3)-cúspide. Na Seção 5.2 estudaremos as singularidades da projeção ortogonal de cuspidal edges, suas características geométricas e uma maneira de reconhecê-las a partir dos invariantes definidos para essas superfícies. Na Seção 5.3 estudaremos uma versão do Teorema de Koenderink para cuspidal edges, que relaciona a 2-forma curvatura Gaussiana como produto exterior de 1-formas envolvendo curvaturas de curvas na superfície e suas projeções.

Acreditamos que nossa maior contribuição na elaboração deste trabalho é apresentar um texto em português, com detalhes e exemplos que ilustram o enunciado dos resultados abordados, além de reunir, em um único texto, trabalhos recentes que vêm sendo desenvolvidos no estudo de projeção ortogonal de superfícies em $\mathbb{R}^3$.

CAPÍTULO 2

PRELIMINARES

Neste capítulo, enunciaremos algumas definições e resultados que serão úteis para o desenvolvimento deste trabalho. Apresentaremos conceitos sobre Teoria de Singularidades, Geometria Diferencial, frentes de onda e formas diferenciais que são fundamentias para a compreensão dos demais capítulos do trabalho.

2.1 Teoria de Singularidades

A Teoria de Singularidades nasce com a publicação de um trabalho de Whitney que estuda as singularidades de aplicações do plano no plano. Alguns anos depois, em uma série de artigos publicados a partir de 1968 por J. Mather é introduzido grupos que agem no conjunto de germes de aplicações. Estes trabalhos fornecem a base para o estudo de determinação finita de germes de aplicações, um conceito relacionado à existência de deformações e desdobramentos versais. São alguns desses conceitos que serão apresentados nesta seção.

As principais referências utilizadas nesta seção são [13, 21].

2.1.1 Germes e jatos

O conceito de germes é importante para o estudo das propriedades locais de variedades e aplicações. Um germe contém toda a informação do que pode ocorrer para uma variedade ou aplicação em uma vizinhança de um ponto.

Definição 2.1. Sejam X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ contendo $p \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que X é **equivalente** a Y se existe um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, com $p \in U$, tal que $X \cap U = Y \cap U$.

A definição acima gera uma relação de equivalência nos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que contém p. A classe de equivalência de um subconjunto X é chamada **germe** de X em p e é denotada por (X, p).

Definição 2.2. Sejam U, V abertos em $\mathbb{R}^n$ contendo $p \in \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ e $g : V \to \mathbb{R}^m$ aplicações suaves. Dizemos que f é **equivalente** a g, e denotamos por $f \sim g$, se existe um aberto $W \subset U \cap V$, tal que $f|_W = g|_W$.

A relação $\sim$ definida acima é de equivalência no conjunto das aplicações de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. A classe de equivalência de uma aplicação f é chamada de **germe** da aplicação f

e é denotada por $f : (\mathbb{R}^n, p) \to \mathbb{R}^m$. Quando queremos explicitar a imagem de p por f, digamos $f(p) = q$, escrevemos $f : (\mathbb{R}^n, p) \to (\mathbb{R}^m, q)$. O germe f é chamado **suave** (resp. **germe de difeomorfismo**) se um dos seus representantes, e portanto todos, é suave em p (resp. um difeomorfismo local em p).

Em todo este trabalho, a origem de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, será denotada por $\mathbf{0}$. Denotaremos por $\mathcal{E}(n, m)$ o conjunto dos germes de aplicações suaves definidos numa vizinhança da origem de $\mathbb{R}^n$, ou seja,

$$\mathcal{E}(n, m) = \{f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \to \mathbb{R}^m \mid f \text{ é germe de aplicação suave}\}.$$

Quando $m = 1$ (germes de funções), denotaremos $\mathcal{E}(n, 1)$ por $\mathcal{E}_n$. Com as operações usuais de adição e multiplicação para funções, $\mathcal{E}_n$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra local comutativa com unidade. Seu ideal maximal, denotado por $\mathcal{M}_n$, é formado pelos germes f que se anulam na origem e, considerando $(u_1, \ldots, u_n)$ as coordenadas de $\mathbb{R}^n$, então $\mathcal{M}_n$ é gerado pelos germes de projeção, ou seja, pelos germes de funções $u_i, i = 1, \ldots, n$. Assim,

$$\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{E}_n \mid f(\mathbf{0}) = 0\} = \mathcal{E}_n \cdot \{u_1, \ldots, u_n\}.$$

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação suave, onde U é aberto em $\mathbb{R}^n$ e consideremos sua diferencial em p, $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Dizemos que f é singular em $p \in U$, ou que p é ponto singular de f, se o rank da aplicação linear df_p não é máximo, ou seja se $\operatorname{rank}(df_p) < \min\{m, n\}$. O conjunto crítico de f, denotado por $\Sigma(f)$, é o conjunto de pontos singulares de f, ou seja,

$$\Sigma(f) = \{p \in U; \operatorname{rank}(df_p) < \min\{m, n\}\}.$$

O conjunto $f(\Sigma(f))$ é chamado de conjunto de valores críticos de f. O conjunto criminante de f é definido por $Cr(f) = \{p \in U; \operatorname{rank}(df_p) < m\}$, e o discriminante de f, denotado por $\Delta(f)$ é a imagem de $Cr(f)$ por f, isto é, $\Delta(f) = f(Cr(f))$. Notemos que, quando $n \geqslant m$, $Cr(f) = \Sigma(f)$.

Um germe $f : (\mathbb{R}^n, p) \to \mathbb{R}^m$ é **singular** em p se um dos seus representantes for singular em p. O **conjunto crítico**, o **conjunto de valores críticos**, o **criminante** e o **discriminante** do germe f são definidos como o conjunto crítico, o conjunto de valores críticos, o criminante e o discriminante de algum representante de f, respectivamente. Observamos que os conceitos definidos acima para germes não dependem do representante escolhido de f, uma vez que todos os representantes coincidem em uma vizinhança de p.

Nas definições que daremos a seguir, e em todo este trabalho, $(u_1, \ldots, u_n)$ e $(x_1, \ldots, x_m)$ denotarão o sistema de coodenadas na fonte e na meta, respectivamente, de germes e aplicações.

Definição 2.3. Seja $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \to \mathbb{R}^m$. Dado $k \in \mathbb{N}$, o k-**jato** de f, denotado por $j^k f$, é o polinômio de Taylor de ordem k de um representante de f sem o termo constante.

Denotaremos por $J^k(n, m)$ o espaço dos k-jatos dos germes de aplicações $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \to \mathbb{R}^m$.

2.1.2 Grupos de Mather e determinação finita

Os grupos de Mather possibilitam a definição de certas equivalências entre germes e, a partir delas, a classificação de singularidades. A partir dessas equivalências, definiremos

o conceito de determinação finita, que é uma ferramenta poderosa para o reconhecimento e classificação de singularidades e que será utilizada nos próximos capítulos.

Seja $\mathcal{R}$ o grupo de $\mathcal{E}(n,m)$, com relação a composição, formado pelos germes de difeomorfimos de $\mathbb{R}^n$ que se anulam na origem, isto é,

$$\mathcal{R} = \{h : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \,|\, h \text{ é germe de difeomorfismo}\}.$$

O grupo $\mathcal{R}$ também é chamado de grupo de **mudanças de coordenadas na fonte**. A aplicação $\phi : \mathcal{R} \times \mathcal{E}(n,m) \to \mathcal{E}(n,m)$ definida por $\phi(h,f) = f \circ h^{-1}$ é uma ação de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{E}(n,m)$, ou seja, satisfaz:
(1) $\phi(Id, f) = f, \forall f \in \mathcal{E}(n,m)$,
(2) $\phi(h_1 \circ h_2, f) = \phi(h_1, \phi(h_2, f)), \forall\, f \in \mathcal{E}(n,m)$ e $\forall\, h_1, h_2 \in \mathcal{E}(n,m)$.

A ação definida acima induz a noção de $\mathcal{R}$-equivalência da seguinte maneira.

Definição 2.4. Dois germes $f, g \in \mathcal{E}(n,m)$ são **$\mathcal{R}$-equivalentes** se pertencem a mesma $\mathcal{R}$-órbita, ou seja, se existe $h \in \mathcal{R}$ tal que $g = f \circ h^{-1}$.

O grupo de **mudanças de coordenadas na meta**, denotado por $\mathcal{L}$, é formado pelos germes de difeomorfismos de $\mathbb{R}^m$ que se anulam na origem, isto é,

$$\mathcal{L} = \{k : (\mathbb{R}^m, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^m, \mathbf{0}) \,|\, k \text{ é germe de difeomorfismo}\}.$$

Denotando por $\mathcal{M}_n\mathcal{E}(n,m)$ o subconjunto de $\mathcal{E}(n,m)$ formado pela aplicações suaves f tal que $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, definimos a ação de $\mathcal{L}$ em $\mathcal{M}_n\mathcal{E}(n,m)$ como sendo a aplicação $\varphi : \mathcal{L} \times \mathcal{M}_n\mathcal{E}(n,m) \to \mathcal{M}_n\mathcal{E}(n,m)$ dada por $\varphi : (k,f) = k \circ f$. De maneira análoga a $\mathcal{R}$-equivalência, dois germes $f, g \in \mathcal{M}_n\mathcal{E}(n,m)$ são **$\mathcal{L}$-equivalentes** se eles pertencem a mesma $\mathcal{L}$-órbita, ou seja, se existe $k \in \mathcal{L}$ tal que $g = k \circ f$.

A partir dos grupos $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$, construímos o grupo de **mudanças de coordenadas na fonte e na meta**, denotado por $\mathcal{A}$, que é definido como sendo o produto direto de $\mathcal{R}$ com $\mathcal{L}$, ou seja,

$$\mathcal{A} = \mathcal{R} \times \mathcal{L} = \{(h,k) \,|\, h \in \mathcal{R} \text{ e } k \in \mathcal{L}\}.$$

A aplicação $\psi : \mathcal{A} \times \mathcal{M}_n\mathcal{E}(n,m) \to \mathcal{M}_n\mathcal{E}(n,m)$ definida por $\psi((h,k),f) = k \circ f \circ h^{-1}$ é uma ação de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{M}_n\mathcal{E}(n,m)$ e induz a definição de $\mathcal{A}$-equivalência da seguinte forma.

Definição 2.5. Dois germes $f, g : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$ são **$\mathcal{A}$-equivalentes** se pertencem a mesma $\mathcal{A}$-órbita, ou seja, se existe $(h,k) \in \mathcal{A}$ tal que $g = k \circ f \circ h^{-1}$.

Existe ainda outra equivalência no conjunto de germes muito importante quando se quer estudar o contato entre subvariedades, assunto que veremos no próximo capítulo. Para defini-la, consideremos o **grupo de contato** $\mathcal{K}$, formado pelos germes de difeomorfismos de $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, (\mathbf{0}, \mathbf{0}))$ que podem ser escritos da forma $(h(u), H_1(u,v))$, onde $h \in \mathcal{R}$ e $H_1(u, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ para u em uma vizinhança de $\mathbf{0}$. A relação de equivalência em $\mathcal{M}_n\mathcal{E}(n,m)$ é dada da seguinte forma: dois germes $f, g \in \mathcal{M}_n\mathcal{E}(n,m)$ são **$\mathcal{K}$-equivalentes** se existir um germe $(h, H) \in \mathcal{K}$ tal que

$$(u, g(u)) = H(h^{-1}(u), f(h^{-1}(u))).$$

Observação 2.6. Usualmente, o grupo $\mathcal{K}$ é utilizado quando se busca estudar as singularidades do conjunto de nível zero de germes de aplicações em $\mathcal{M}_n\mathcal{E}(n,m)$. Se dois germes $f, g : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$ são $\mathcal{K}$-equivalentes, então $f^{-1}(\mathbf{0})$ e $g^{-1}(\mathbf{0})$ são difeomorfos. A ação do grupo $\mathcal{A}$ é mais fina do que a do grupo $\mathcal{K}$. Se f e g são $\mathcal{A}$-equivalentes, isto é, se $g = k \circ f \circ h^{-1}$, com $(h,k) \in \mathcal{A}$, então $g^{-1}(c)$ e $f^{-1}(k^{-1}(c))$ são difeomorfos para todo c em uma vizinhança de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$. Portanto, o grupo $\mathcal{A}$ preserva também a estrutura suave dos conjuntos de níveis próximos ao conjunto de nível zero (conforme [13], p.52). $\diamondsuit$

Os grupos $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{K}$ e $\mathcal{A}$ são chamados de **grupos de Mather**. Nas definições e resultados que enunciaremos a seguir, quando não for preciso especificar com qual grupo estamos trabalhando, usaremos a notação $\mathcal{G}$ para nos referir a um desses grupos de Mather. Em alguns momentos, a fim de facilitar a escrita, denotaremos dois germes f, g $\mathcal{G}$-equivalentes por $f \sim_{\mathcal{G}} g$.

Observação 2.7. De maneira análoga ao que é feito para germes de aplicações, podemos definir $\mathcal{G}$-equivalência para aplicações, tomando difeomorfismos locais ao invés de germes de difeomorfismos. ♢

Usando a linguagem de germes, podemos reescrever os teoremas clássicos do cálculo diferencial da seguinte maneira.

Teorema 2.8. (Forma Local das Submersões) ([16], p. 293) *Seja* $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$, *com* $n \geqslant m$ *um germe de submersão. Existe um germe de difeomorfismo* $\varphi : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ *tal que* $f \circ \varphi^{-1}(u_1, \ldots, u_m, \ldots, u_n) = (u_1, \ldots, u_m)$.

Teorema 2.9. (Forma Local das Imersões) ([16], p. 289) *Seja* $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$, *com* $n \leqslant m$ *um germe de imersão. Existe um germe de difeomorfismo* $\omega : (\mathbb{R}^m, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$ *tal que* $\omega \circ f(u_1, \ldots, u_n) = (u_1, \ldots, u_n, \ldots, 0, \ldots, 0)$.

Podemos ainda reescrever os resultados enunciados acima usando a linguagem de $\mathcal{G}$-equivalência.

Observação 2.10. A partir dos Teoremas 2.8 e 2.9 concluímos que dado um germe de aplicação regular $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$, se $n \geqslant m$, então f é $\mathcal{R}$-equivalente a projeção π, onde $\pi(x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$ e se $n \leqslant m$ obtemos f é $\mathcal{L}$-equivalente a inclusão i, onde $i(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$. ♢

Um dos objetivos desta seção é apresentar a classificação de singularidades de $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ em $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ de $\mathcal{A}_e$-codimensão $\leqslant 2$ via $\mathcal{A}$-equivalência. Classificar germes significa listar representantes das órbitas da ação de um grupo $\mathcal{G}$ em $\mathcal{M}_n\mathcal{E}(n, m)$. Cada representante de uma $\mathcal{G}$-órbita é chamado de **forma normal**.

Para a classificação da singularidade de um germe $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$ via $\mathcal{G}$-equivalência é importante conhecer alguns invariantes de f: a $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}_e$ codimensão de f. A $\mathcal{G}$-codimensão (resp. $\mathcal{G}_e$-codimensão) do germe f é definida levando-se em consideração o espaço tangente (resp. espaço tangente estendido) a $\mathcal{G}$-órbita de f. A seguir, veremos apenas a expressão desses espaços tangentes para cada grupo de Mather $\mathcal{G}$, omitindo os detalhes e resultados necessários para se chegar a elas, que podem ser consultados em [13, 29], por exemplo. O espaço tangente (resp. espaço tangente estendido) à $\mathcal{G}$-órbita de f é denotado por $L\mathcal{G} \cdot f$ (resp. $L_e\mathcal{G} \cdot f$). Esses espaços são:

$$
\begin{aligned}
L\mathcal{R} \cdot f &= \mathcal{M}_n \left\{ \tfrac{\partial f}{\partial u_1}, \ldots, \tfrac{\partial f}{\partial u_n} \right\}, & L_e\mathcal{R} \cdot f &= \mathcal{E}_n \left\{ \tfrac{\partial f}{\partial u_1}, \ldots, \tfrac{\partial f}{\partial u_n} \right\}, \\
L\mathcal{L} \cdot f &= f^*(\mathcal{M}_n)\{e_1, \ldots, e_m\}, & L_e\mathcal{L} \cdot f &= f^*(\mathcal{E}_m)\{e_1, \ldots, e_m\}, \\
L\mathcal{A} \cdot f &= L\mathcal{R} \cdot f + L\mathcal{L} \cdot f, & L_e\mathcal{A} \cdot f &= L_e\mathcal{R} \cdot f + L_e\mathcal{L} \cdot f,
\end{aligned}
$$

onde $f^* : \mathcal{E}_m \to \mathcal{E}_n$ é definida por $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$ e $\{e_1, \ldots, e_m\}$ é base canônica de $\mathbb{R}^m$.

A $\mathcal{G}$-codimensão de um germe $f \in \mathcal{E}(n, m)$ é definida por

$$\mathcal{G}\text{-cod}(f) = \dim \tfrac{\mathcal{M}_n.\mathcal{E}(n,m)}{L\mathcal{G}\cdot f}$$

e a $\mathcal{G}_e$-codimensão de f é definida por

$$\mathcal{G}\text{-cod}_e(f) = \dim \frac{\mathcal{E}(n,m)}{L_e\mathcal{G}\cdot f}.$$

O conceito de determinação finita de germes, que definiremos a seguir, é um importante conceito da Teoria se Singularidades que permite passar o problema de classificação e reconhecimento de singularidades para o espaço de jatos, que é formado por polinômios. A importância de conhecer a codimensão de um germe reside no fato de que apenas germes de codimensão finita são finitamente determinados e, assim, a redução da classificação para o espaço de jatos só é possível para esses germes.

Definição 2.11. Um germe $f \in \mathcal{E}(n,m)$ é dito k-$\mathcal{G}$-determinado se, para qualquer $g \in \mathcal{E}(n,m)$ tal que $j^k g = j^k f$ tem-se que f é $\mathcal{G}$-equivalente a g. O germe f é dito $\mathcal{G}$-**finitamente determinado** se f é k-$\mathcal{G}$-determinado para algum $k \in \mathbb{N}$.

Notemos que se $f \in \mathcal{E}(n,m)$ é k-$\mathcal{G}$-determinado, então f é k'-$\mathcal{G}$-determinado para todo $k' \geqslant k$. O menor inteiro k tal que f é k-$\mathcal{G}$-determinado é chamado **grau de determinação** de f.

Dizer que um germe $f \in \mathcal{E}(n,m)$ é $\mathcal{G}$-finitamente determinado significa dizer que ele é $\mathcal{G}$-equivalente $j^k f$ para algum $k \in \mathbb{N}$. De fato, suponha que $f \in \mathcal{E}(n,m)$ é k_0-$\mathcal{G}$-determinado. Assim, para qualquer $g \in \mathcal{E}(n,p)$ com $j^{k_0}g = j^{k_0}f$ obtemos $f \sim_{\mathcal{G}} g$. Em particular para $g = j^{k_0}f$. Logo, $j^{k_0}f \sim_{\mathcal{G}} f$. Assim, o problema de classificação de germes finitamente determinados se reduz ao espaço de jatos pois, para verificar se dois germes f, g são $\mathcal{G}$-equivalentes, basta verificar se seus k-jatos, que são polinômios, são $\mathcal{G}$-equivalentes, onde k é o máximo entre o grau de determinação de f e g.

O teorema abaixo apresenta condições para que um germe seja finitamente determinado.

Teorema 2.12. ([13], p. 55) *Seja $f \in \mathcal{E}(n,m)$. As afirmações abaixo são equivalentes:*
(a) *f é $\mathcal{G}$-finitamente determinado,*
(b) *para algum k, $\mathcal{M}_n^k \cdot \mathcal{E}(n,m) \subset L\mathcal{G}\cdot f$,*
(c) *$\mathcal{G}$-cod$(f) < \infty$,*
(d) *$\mathcal{G}$-cod$_e(f) < \infty$.*

Para facilitar o trabalho de encontrar o grau de determinação de um germe são necessários alguns resultados que, por fugirem do objetivo desta seção, não serão apresentados. Algumas referências podem ser consultadas para se obter mais detalhes sobre esses resultados como, por exemplo, [13] que reúne alguns resultados apresentados em [29].

Iremos estudar nos próximos capítulos o reconhecimento das singularidades via $\mathcal{A}$-equivalência de uma aplicação especial: a projeção ortogonal. Para isso vamos definir uma relação de equivalência no espaço de jatos que irá facilitar esse trabalho de reconhecimento.

Definição 2.13. Seja $\mathcal{A}_k$ o subgrupo de $\mathcal{A}$ formado pelos elementos cujo k-jato é a identidade, o qual é um subgrupo normal de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^{(k)} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}_k}$. Os elementos de $\mathcal{A}^{(k)}$ são os k-jatos dos elementos de $\mathcal{A}$. A ação de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{M}_n\mathcal{E}(n,m)$, ψ, induz uma ação de $\mathcal{A}^{(k)}$ em $J^k(n,m)$, "$\cdot$", da seguinte maneira: para $j^k f \in J^k(n,m)$ e $j^k(h_1,h_2) \in \mathcal{A}^{(k)}$, $j^k(h_1,h_2)\cdot j^k f = j^k(\psi((h_1,h_2),f))$. Dois germes $f, g \in \mathcal{E}(n,m)$ são $\mathcal{A}^{(k)}$-**equivalentes** se pertencem a mesma $\mathcal{A}^{(k)}$-órbita.

Notemos que se dois germes f e g são $\mathcal{A}$-equivalentes, então eles são $\mathcal{A}^{(k)}$-equivalentes para todo $k > 0$. O resultado a seguir diz que se um dos germes é finitamente determinado, então a recíproca é verdadeira.

Observação 2.14. Se $f, g \in \mathcal{E}(n,m)$ são $\mathcal{A}^{(k)}$-equivalentes e f é k-$\mathcal{A}$-determinado, então f e g são $\mathcal{A}$-equivalentes (ver [7], p. 74). ♢

Observação 2.15. O resultado acima permite passar o problema de reconhecimento de germes finitamente determinados para o espaço de jatos. De fato, seja $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$ um germe k-$\mathcal{A}$-determinado. Dado um germe $g : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$, para verificar se f e g são $\mathcal{A}$-equivalentes, basta verificar se f e g são $\mathcal{A}^{(k)}$-equivalentes, uma vez que se isso ocorre, pela proposição acima f e g são $\mathcal{A}$-equivalentes. ♢

Para estudar o reconhecimento das singularidades da projeção ortogonal precisaremos conhecer a classificação de singularidades de $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ em $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ via $\mathcal{A}$-equivalência, além de saber o grau de determinação e a $\mathcal{A}_e$-codimensão de cada uma das formas normais.

A classificação de singularidades do plano no plano com $\mathcal{A}_e$-codimensão $\leqslant 2$ pode ser encontrada em [11, 23] e está apresentada na Tabela 2.1 a seguir.

Nome	**Forma Normal**	**Grau de Determinação**	**$\mathcal{A}_e$-cod**
Dobra	(u, v^2)	2	0
Cúspide	$(u, uv + v^3)$	3	0
Lábios/Bicos	$(u, v^3 \pm u^2 v)$	3	1
Ganso	$(u, v^3 \pm u^3 v)$	4	2
Rabo de Andorinha	$(u, uv + v^4)$	4	1
Borboleta	$(u, uv + v^5 \pm v^7)$	7	2
Gaivota	$(u, uv^2 + v^4 + v^5)$	5	2

Tabela 2.1: Classificação das singularidades de $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ em $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ com $\mathcal{A}_e$-codimensão $\leqslant 2$.

Para o desenvolvimento dos próximos capítulos é importante conhecer uma $\mathcal{R}$-classe que se obtém ao classificar singularidades de germes de $(\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ em $(\mathbb{R}, 0)$. Essa singularidade é chamada **singularidade A_k**, com $k \geqslant 0$, tem $\mathcal{R}$-codimensão igual a k e sua forma normal é $\pm u_1^{k+1} \pm u_2^2 \pm \ldots \pm u_n^2$.

Em alguns momentos, será necessário saber quando um germe $f : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ tem uma singularidade A_k. O seguinte lema fornece uma maneira de fazer esse reconhecimento.

Lema 2.16. ([3], p. 42) *Se $f : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ é tal que $f^{(p)}(0) = 0$, para todo $1 \leqslant p \leqslant k$ e $f^{(k+1)}(0) \neq 0$, então f é $\mathcal{R}$-equivalente a $g(x) = \pm x^{k+1}$, onde o sinal de g coincide com o sinal de $f^{(k+1)}(0)$, ou seja, f tem uma singularidade A_k.*

Muitas vezes ao longo deste trabalho, quando estiver claro com qual grupo de Mather $\mathcal{G}$ estivermos trabalhando, ao invés de falar que um germe f é $\mathcal{G}$-equivalente a uma das formas normais dadas nas Tabelas 2.1 vamos simplesmente dizer que f é (ou tem) uma singularidade "nome da forma normal". Além disso, por simplicidade, e com abuso de linguagem, iremos dizer também que uma aplicação f é (ou tem) um determinado tipo de singularidade. Quando dizemos isso, queremos dizer que o germe de f tem o respectivo tipo de singularidade.

2.1.3 Desdobramentos versais e genericidade

Abordaremos de maneira breve nesta seção dois conceitos importantes que serão utilizados neste trabalho. Apesar de não entrarmos nos detalhes sobre os resultados relativos a eles, as vezes será necessário recorrer a esses resultados para justificar algumas afirmações.

Desdobramentos versais

Definição 2.17. Seja $f \in \mathcal{M}_n\mathcal{E}(n,m)$. Um **desdobramento** a s parâmetros (s,F) de f é um germe de aplicação

$$F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, (\mathbf{0},\mathbf{0})) \to (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s, (\mathbf{0},\mathbf{0}))$$

da forma $F(x,u) = (\bar{f}(x,u),u)$, com $\bar{f}(x,\mathbf{0}) = f(x)$. A família

$$\bar{f} : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s, (\mathbf{0},\mathbf{0})) \to (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$$

é chamada **deformação** a s parâmetros de f.

É importante observar o seguinte sobre a deformação $\bar{f}$ na Definição 2.17. Seja $\bar{f} : U \times W \to V$ um representante do germe $\bar{f}$ onde $U \times W$ é uma vizinhança de $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ e V é uma vizinhança de $\mathbf{0}$ em $\mathbb{R}^m$. Denotemos por $\bar{f}_u : U \to V$ a aplicação suave dada por $\bar{f}_u(x) = \overline{f}(x,u)$. Então $\bar{f}_{\mathbf{0}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ mas $\overline{f}_u(\mathbf{0})$ não é necessariamente a origem em $\mathbb{R}^m$ para $u \neq \mathbf{0}$. Isso significa que a fibra $\mathbf{0} \times \mathbb{R}^s$ não é necessariamente preservada por $\overline{f}_u$. Por isso, é importante considerar os grupos de Mather estendidos, denotados por $\mathcal{G}_e$, e formados pelos germes de difeomorfismos que não necessariamente fixam a origem. Mais detalhes sobre a importância de se considerar esses grupos estendidos porem ser consultados em [13, 29].

Definição 2.18. (a) Um **morfismo** entre dois desdobramentos (a,F) e (b,G) é um par $(\alpha,\psi) : (a,F) \to (b,G)$ com $\alpha : (\mathbb{R}^a,\mathbf{0}) \to (\mathcal{G},I)$, onde I é a identidade em $\mathcal{G}$ e $\psi : (\mathbb{R}^a,\mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^b,\mathbf{0})$ tal que

$$\bar{f}_u = \alpha(u) \cdot \overline{g}_{\psi(u)},$$

onde "$\cdot$" denota a ação de $\mathcal{G}$ em $\mathcal{M}_n\mathcal{E}(n,m)$. O desdobramento (a,F) é chamado **induzido** de (b,G) por (α,ψ).

(b) Dois desdobramentos (a,F) e (b,G) são ditos **$\mathcal{G}$-equivalentes** se existir um morfismo $(\alpha,\psi) : (a,F) \to (b,G)$, onde ψ é invertível.

(c) Um desdobramento (a,F) de um germe $f \in \mathcal{M}_n\mathcal{E}(n,m)$ é dito **$\mathcal{G}$-versal** se todo desdobramento (b,G) de f pode ser induzido de (a,F)

A definição acima pode ser reescrita substituindo o grupo $\mathcal{G}$ pelo respectivo grupo estendido $\mathcal{G}_e$.

O teorema que enunciaremos a seguir fornece alguns resultados importantes que relacionam a codimensão de um germe, a existência de desdobramentos versais e o menor número de parâmetros de um desdobramento versal.

Teorema 2.19. ([29]) (1) *Seja $f \in \mathcal{M}_n\mathcal{E}(n,m)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) *$\mathcal{G}$-cod$f < \infty$;*
(b) *f tem um desdobramento $\mathcal{G}$-versal;*
(b) *f tem um desdobramento $\mathcal{G}_e$-versal.*

(2) *O menor número de parâmetros s_0 para um desdobramento $\mathcal{G}$-versal (resp. $\mathcal{G}_e$-versal) é igual a $\mathcal{G}$-cod f (resp. $\mathcal{G}_e$-cod f). O desdobramento versal (s_0,F) é chamado* ***miniversal****.*

Existem ainda outros resultados importantes sobre desdobramentos versais, mas como não os utilizaremos no decorrer deste trabalho não iremos enunciá-los. Alguns desses resultados podem ser consultados em [13].

Genericidade

Um conceito que iremos utilizar nos próximos capítulos é o de genericidade. Intuitivamente, dizer que uma propriedade de um conjunto de objetos é genérica significa dizer que quase todos os objetos desse conjunto satisfazem essa propriedade, daí a importância de se formalizar esse conceito, o que faremos a seguir de maneira breve. Mais detalhes sobre genericidade podem ser encontrados em [13].

Seja $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ o espaço das aplicações suaves de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Veremos agora uma topologia para esse espaço, chamada topologia C^∞ de Whitney, a qual usaremos para definir propriedades genéricas.

Dados $p \in \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{R}^m$ e um inteiro não negativo k, denotemos por $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)_{p,q}$ o conjunto dos k-jatos de germes de aplicações de $(\mathbb{R}^n, p)$ em $(\mathbb{R}^m, q)$. O espaço dos k-jatos das aplicações de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ é definido como $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \bigcup_{p\in\mathbb{R}^n, q\in\mathbb{R}^m} J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)_{p,q}$. O conjunto $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é uma variedade diferenciável e a topologia de $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é usada para definir uma topologia de $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ da seguinte maneira. Seja U um aberto em $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e denotemos por

$$M(U) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \mid j^k f \subset U\}.$$

A família de conjuntos $\{M(U)\}$, onde U é um aberto de $J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ forma uma base para uma topologia em $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Essa topologia é chamada de **topologia C^k de Whitney.**

Denotando por W_k o conjunto dos subconjuntos abertos de $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ com a topologia C^k de Whitney, a **topologia C^∞ de Whitney** é a topologia cuja base é $W = \cup_{k=0}^{\infty} W_k$.

Com essa topologia, dizemos que uma propriedade P no espaço $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é **genérica** se ela é satisfeita por um conjunto aberto e denso de $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Um resultado importante que, de certa maneira, envolve genericidade é o Teorema de Sard, enunciado a seguir.

Teorema 2.20. (Teorema de Sard)([3], p.61) *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação suave, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^n$. O conjunto de valores não regulares de f tem medida nula em $\mathbb{R}^m$.*

O complementar de um conjunto de medida nula em $\mathbb{R}^m$ é denso em $\mathbb{R}^m$, isto é, todo ponto de $\mathbb{R}^m$ está arbitrariamente próximo de um valor regular de f. Nesse sentido, "quase todos" os valores são regulares e, para uma dada f, "quase todos" os conjuntos $f^{-1}(c)$ serão variedades parametrizadas em uma vizinhança de cada ponto.

Ainda do Teorema de Sard obtemos a seguinte afirmação, que será útil nos próximos capítulos.

Observação 2.21. Dado um sistema de m equações $f_1(u) = \ldots = f_m(u) = 0$ em n variáveis $u = (u_1, \ldots, u_n)$, temos definida uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por $f(u) = (f_1(u), \ldots, f_m(u))$. Pelo Teorema de Sard, quase todos os pontos $c \in \mathbb{R}^m$ são valores regulares de f. Assim, esperamos que $\mathbf{0}$ seja um valor regular e, se $m > n$, isso implica que $f^{-1}(\mathbf{0}) = \emptyset$. Logo, genericamente um sistema de m equações com $n < m$ incógnitas não tem solução. ♢

2.2 Geometria Diferencial

Nesta seção iremos abordar alguns fatos sobre a geometria diferencial local clássica de curvas e superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$. As demonstrações aqui omitidas podem ser encontradas em [4], por exemplo.

2.2.1 Curvas regulares

Daremos destaque nesta seção ao estudo da curvatura com sinal de curvas planas em $\mathbb{R}^3$, uma vez que para os resultados que veremos nos próximos capítulos é fundamental conhecer esse sinal.

Uma **curva parametrizada** diferenciável é uma aplicação $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞, onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$. O **traço** de α, denotado também por α, é o conjunto de pontos $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^n$. A curva α é chamada **regular** se $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$, para todo $t \in I$. Se existir $t_0 \in I$ tal que $\alpha'(t_0) = \mathbf{0}$, dizemos que α é **singular** em t_0. A **orientação** de α é o sentido do percurso do traço de α.

Se $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ é uma curva regular, podemos supor que $\|\alpha'(t)\| = 1$, para todo $t \in I$, uma vez que é possível reparametrizar α por um difeomorfismo h que preserva sua orientação e tal que $\alpha \circ h$ tenha essa propriedade. Quando isso acontece, dizemos que α está parametrizada por **comprimento de arco** e usualmente usa-se o parâmetro s no lugar de t, o qual é chamado de comprimento de arco.

Suponhamos que $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ seja uma curva regular parametrizada por comprimento de arco. Denotemos por $n(s)$ o vetor obtido ao rotacionar $\alpha'(s)$ em $90°$ no sentido anti-horário, que chamaremos de **vetor normal** à α em s e por $\kappa(s)$ sua função curvatura, isto é, $\kappa(s) = \langle \alpha''(s), n(s) \rangle$. Se $\kappa(s_0) = 0$, dizemos que s_0 é um **ponto de inflexão** de α.

Como $n(s)$ e $\alpha''(s)$ são vetores ortogonais à $\alpha'(s)$, então $\cos\theta = \pm 1$, onde θ denota o ângulo entre $n(s)$ e $\alpha''(s)$. Assim, $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\| \cos\theta$ é negativa se $n(s)$ e $\alpha''(s)$ apontam para semiplanos opostos determinados pela reta tangente à α em s e positiva se apontam para o mesmo semiplano, como ilustra a Figura 2.1.

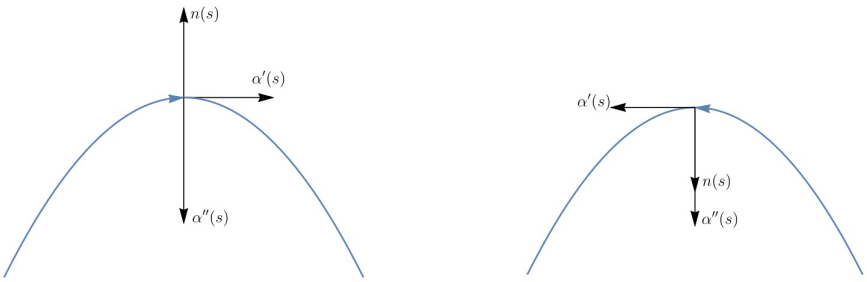


Figura 2.1: Curvas com curvatura negativa à esquerda e positiva à direita.

Se α está parametrizada por um parâmetro t, que não é necessariamente o comprimento de arco, então

$$\kappa(t) = \frac{\det[\alpha'(t), \alpha''(t)]}{\|\alpha'(t)\|^3}. \tag{2.1}$$

Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. A **curvatura** de α em $s \in I$, denotada por $\kappa(s)$, é definida por

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|.$$

Se $\kappa(s) > 0$, o vetor $n(s) = \dfrac{\alpha''(s)}{\kappa(s)}$ é chamado **vetor normal** à α em s. Se $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ está parametrizada por um parâmetro t, que não é necessariamente o comprimento de arco, então é possível mostrar que

$$n(t) = \frac{\alpha''(t)\|\alpha'(t)\|^2 - \alpha'(t)\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|},$$

e

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}. \tag{2.2}$$

Notemos que, ao contrário do que ocorre para curvas planas, a curvatura de uma curva espacial é positiva ou nula.

Observação 2.22. Dizemos que $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ é uma **curva plana** se existe um plano Π de $\mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(I)$ está contido em Π. Neste caso, Π é o plano osculador de α, isto é, o plano gerado por $\alpha'(t)$ e $n(t)$, o qual também contém $\alpha''(t)$. Se $\mathbf{v}$ é um vetor unitário ortogonal a Π, segue de (2.2) que

$$\kappa(t) = \frac{|\det[\alpha'(t), \alpha''(t), \mathbf{v}]|}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

♢

Um dos objetivos deste trabalho é estudar o Teorema de Koenderink, que possui em seu enunciado o produto das curvaturas de duas curvas, sendo uma delas uma curva plana em $\mathbb{R}^3$. Para estudar esse resultado vamos precisar considerar a curvatura de curvas planas em $\mathbb{R}^3$ com sinal. Para "colocar" o sinal primeiramente orientamos o plano que contém a curva da seguinte maneira.

Sejam Π um plano em $\mathbb{R}^3$ passando pela origem e $\mathbf{v}$ um vetor unitário ortogonal à Π, que chamamos de *vetor normal* à Π. Dizemos que um conjunto linearmente independente $\mathfrak{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{w}\} \subset \Pi$ é uma base positiva para Π se $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle > 0$, ou seja, se os vetores $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$ e $\mathbf{v}$ têm o mesmo sentido. Notemos que, quando isso acontece, ou seja, quando $\mathfrak{B}$ é uma base positiva para Π, então olhando para Π a partir do semiespaço de $\mathbb{R}^3$ que contém $\mathbf{v}$ vemos que a rotação de $\mathbf{u}$ para $\mathbf{w}$ é no sentido anti-horário e, além disso, $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}\}$ é uma base positiva para $\mathbb{R}^3$. Pode-se mostrar que o conjunto de todas as bases positivas para Π dá uma orientação para esse plano. Logo, para orientar Π devemos fixar primeiramente um vetor normal à Π.

Ao longo deste trabalho, vamos simplesmente falar que $\mathfrak{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ é uma base positiva para um plano Π, ficando implícito que o vetor normal à Π é no sentido de $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$ e a rotação de vetores em Π no sentido anti-horário é feita olhando para Π a partir do semiespaço de $\mathbb{R}^3$ que contém $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Uma vez orientado o plano Π, podemos considerar um sinal para a curvatura de curvas planas em $\mathbb{R}^3$ dado pela seguinte observação.

Observação 2.23. Sejam $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular, Π um plano passando pela origem de $\mathbb{R}^3$ tal que $\alpha(I) \subset \Pi$, $\mathbf{v}$ um vetor unitário normal à Π e $\mathfrak{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$ uma base ortonormal positiva para Π.

Denotemos por $\alpha'(t)^\perp$ o vetor obtido rotacionando $\alpha'(t)$ em 90° no sentido anti-horário e por $\theta \in [0, \pi]$ o ângulo entre $\alpha'(t)^\perp$ e $\alpha''(t)$. A **curvatura com sinal** de α em t, que denotaremos por $\kappa_\pm(t)$, é definida por

$$\kappa_\pm(t) = \begin{cases} \kappa(t), & \text{se } 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \\ -\kappa(t), & \text{se } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases}$$

ou seja, $\kappa_\pm(t)$ é positiva se $\alpha'(t)^\perp$ e $\alpha''(t)$ apontam para o mesmo semiplano de Π determinado pela reta tangente à α em t e negativa caso contrário.

Vamos obter agora uma fórmula para a curvatura com sinal de α análoga à (2.1).

Como α é uma curva cujo traço está contido em Π, existem funções diferenciáveis $a, b : I \to \mathbb{R}$ tal que $\alpha(t) = a(t)\mathbf{u} + b(t)\mathbf{w} = (a(t), b(t))_{\mathfrak{B}}$. Assim, $\alpha'(t)^{\perp} = (-b'(t), a'(t))_{\mathfrak{B}}$ e

$$\operatorname{sgn}(\kappa_{\pm}(t)) = \operatorname{sgn}(\cos\theta) = \operatorname{sgn}(\langle \alpha'(t)^{\perp}, \alpha''(t)\rangle) = \operatorname{sgn}(a'(t)b''(t) - b'(t)a''(t)). \tag{2.3}$$

Notemos agora que

$$\begin{aligned} \det[\alpha'(t), \alpha''(t), \mathbf{v}] &= \det[a'(t)\mathbf{u} + b'(t)\mathbf{w}, a''(t)\mathbf{u} + b''(t)\mathbf{w}, \mathbf{v}] \\ &= a'(t)b''(t) - b'(t)a''(t), \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde na última igualdade usamos o fato de $\{\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}\}$ ser uma base ortonormal positiva para $\mathbb{R}^3$. De (2.3) e (2.4) obtemos:

(a) Se $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, então $\kappa_{\pm}(t) = \kappa(t) = \frac{\det[\alpha'(t), \alpha''(t), \mathbf{w}]}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{a'(t)b''(t) - b'(t)a''(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}$;

(b) Se $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, então $\kappa_{\pm}(t) = -\kappa(t) = -\left(-\frac{\det[\alpha'(t), \alpha''(t), \mathbf{w}]}{\|\alpha'(t)\|^3}\right) = \frac{a'(t)b''(t) - b'(t)a''(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}$.

Portanto, se $\alpha(t) = (a(t), b(t))_{\mathfrak{B}}$, então

$$\kappa_{\pm}(t) = \frac{\langle \alpha'(t)^{\perp}, \alpha''(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\det[\alpha'(t), \alpha''(t)]_{\mathfrak{B}}}{\|\alpha'(t)\|^3}, \tag{2.5}$$

onde $\det[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2]_{\mathfrak{B}}$ denota o determinante da matriz cujas linhas são as coordenadas dos vetores $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$ na base $\mathfrak{B}$.

No que segue, quando não houver perigo de confusão e com abuso de notação, denotaremos $\kappa_{\pm}$ simplesmente por κ. ♢

Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\kappa(s) > 0$. O vetor **binormal** à α em s é definido por

$$b(s) = t(s) \times n(s),$$

onde $t(s) = \alpha'(s)$. O referencial ortonormal $\{t(s), n(s), b(s)\}$ é chamado de **triedro de Frenet** da curva α em s.

Derivando $b(s)$, obtemos $b'(s) = \tau(s)n(s)$, onde a função $\tau : I \to \mathbb{R}$ é chamada **torção** de α em s. Quando α está parametrizada por um parâmetro t, que não é necessariamente o comprimento de arco, pode ser mostrado que

$$\tau(t) = \frac{\langle \alpha' \times \alpha''', \alpha''\rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}(t)\,. \tag{2.6}$$

Diversas propriedades locais de curvas em $\mathbb{R}^3$ podem ser obtidas ao se estudar a curvatura, a torção e o triedro de Frenet. Mais detalhes sobre o estudo local de curvas regulares podem ser consultados em [28].

2.2.2 Superfícies regulares

Um dos objetivos desta seção é definir a curvatura Gaussiana de superfícies e, a partir dela, entender o comportamento local da superfície com relação a seu plano tangente. A principal referência para a construção dessa seção é [4], mas aprensentaremos também alguns resultados de [13].

Definição 2.24. Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^3$ é uma **superfície regular** se, para cada $p \in M$, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}^3$, com $p \in V$, e uma aplicação $\mathtt{x} : U \to V \cap M$ definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que

(a) $\mathtt{x} : U \to V \cap M$ é suave, ou seja, se

$$\mathtt{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),\ (u, v) \in U$$

então as funções $x, y, z : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U.

(b) $\mathtt{x} : U \to V \cap M$ é um homeomorfismo.

(c) $d\mathtt{x}_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é injetora para todo $q \in U$.

A aplicação $\mathtt{x}$ é chamada **parametrização** ou **sistema de coordenadas** em p, e $V \cap M$ é chamada de **vizinhança coordenada** de M em p.

Observação 2.25. Podemos definir curvas de maneira análoga ao que fizemos para superfícies regulares. Dessa forma, uma **curva regular** em $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$) é um subconjunto $C \subset \mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$) tal que para cada $p \in C$ existem um aberto V de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$), com $p \in V$, um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e um homeomorfismo diferenciável $\alpha : I \to V \cap C$, com $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) \neq \mathbf{0}$, para algum $t_0 \in I$. ♢

A condição (3) na Definição 2.24 garante a existência de um **plano tangente** em todos os pontos de M. Como os vetores $d\mathtt{x}_q(e_1) = \mathtt{x}_u(q) = (x_u(q), y_u(q), z_u(q))$ e $d\mathtt{x}_q(e_2) = \mathtt{x}_v(q) = (x_v(q), y_v(q), z_v(q))$ são linearmente independentes, definimos o plano tangente à M em p, denotado por T_pM, como sendo o plano que tem como base os vetores $\mathtt{x}_u(q)$ e $\mathtt{x}_v(q)$. Em alguns momentos, com abuso de notação e linguagem, denotaremos por T_pM o plano tangente gerado por $\mathtt{x}_u(q)$ e $\mathtt{x}_v(q)$ passando por p e em outros momentos passando pela origem. O contexto em que estivermos inseridos deixará claro com qual plano estamos trabalhando. Temos bem definido um vetor unitário ortogonal à T_pM, dado por

$$N(p) = \frac{\mathtt{x}_u(q) \times \mathtt{x}_v(q)}{\|\mathtt{x}_u(q) \times \mathtt{x}_v(q)\|}, \tag{2.7}$$

chamado **vetor normal** à M em p. Notemos que se N é um vetor normal à M em p, o mesmo acontece com $-N$.

Os campos normais são importantes quando se quer estudar orientação de superfícies. Para não fugir do objetivo deste capítulo, não entraremos em detalhes sobre isso. Um resultado importante e bem conhecido sobre essa teoria diz que uma superfície regular $M \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se, e somente se, existe um campo diferenciável $N : M \to \mathbb{R}^3$ de vetores normais em M (ver Proposição 1, p.124 de [4]). Além disso, localmente toda superfície regular é orientável e, como nosso estudo é local, todas as superfícies regulares que iremos trabalhar são orientáveis. Precisaremos apenas deixar claro qual a orientação de M, se compatível com N dada em (2.7) ou $-N$. A aplicação suave $N : M \to \mathbb{S}^2$ é chamada de **aplicação normal de Gauss** de M.

Iremos trabalhar agora com algumas funções definidas sobre superfícies que serão utilizadas para obter alguns conceitos importantes na teoria de superfícies regulares.

Considerando o produto interno usual $\langle\ ,\ \rangle$ em $\mathbb{R}^3$ é possível induzir naturalmente um produto interno em T_pM, que denotaremos por $\langle\ ,\ \rangle_p$, da seguinte forma: se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in T_pM \subset \mathbb{R}^3$, então $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle_p = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$. Assim, temos definida uma aplicação bilinear simétrica

$$\mathrm{I}_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

dada por $\mathrm{I}_p(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle_p$. Essa aplicação é chamada **primeira forma fundamental** de M em p. A primeira forma fundamental é meramente a expressão de como M herda o produto interno natural de $\mathbb{R}^3$. Geometricamente, é ela que possibilita fazer medidas sobre a superfície sem fazer menção ao espaço $\mathbb{R}^3$, onde M está contida.

Em algumas referências a forma quadrática de T_pM em $\mathbb{R}$ dada por $\mathbf{w} \mapsto \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_p$ é chamada de primeira forma fundamental de M em p. Com abuso de notação, vamos denotar ambas as aplicações por I_p e denotaremos $\langle\ ,\ \rangle_p$ por $\langle\ ,\ \rangle$. Notemos que $\mathrm{I}_p(\mathbf{w}) = \|\mathbf{w}\|^2 \geqslant 0$.

Se $\mathbf{w}_1 = a_1 \mathtt{x}_u(q) + b_1 \mathtt{x}_v(q)$ e $\mathbf{w}_2 = a_2 \mathtt{x}_u(q) + b_2 \mathtt{x}_v(q)$ são vetores em T_pM, com $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, obtemos

$$\mathrm{I}_p(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

onde $E(q) = \langle \mathtt{x}_u(q), \mathtt{x}_u(q) \rangle, F(q) = \langle \mathtt{x}_u(q), \mathtt{x}_v(q) \rangle$ e $G(q) = \langle \mathtt{x}_v(q), \mathtt{x}_v(q) \rangle$. As funções $E, F, G : U \to \mathbb{R}$ são chamadas de **coeficientes da primeira forma fundamental** de M em p, e a matriz acima é chamada é matriz da primeira forma fundamental de M em p. Assim, se $\mathbf{w} = a\mathtt{x}_u(q) + b\mathtt{x}_v(q)$, então

$$\mathrm{I}_p(\mathbf{w}) = a^2 E(q) + 2abF(q) + b^2 G(q).$$

Notemos que $EG - F^2 = \|\mathtt{x}_u \times \mathtt{x}_v\|^2 > 0$.

Seja $N : M \to \mathbb{S}^2$ a aplicação normal de Gauss de M. A diferencial de N em $p \in M$, dN_p, é uma aplicação linear de T_pM em $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$. Como T_pM e $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ são espaços vetoriais isomorfos, dN_p pode ser vista como uma aplicação linear em T_pM. É possível mostrar ainda que a diferencial $dN_p : T_pM \to T_pM$ é uma aplicação linear autoadjunta.

Uma curva em M é uma aplicação $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$ dada por $\alpha(t) = \mathtt{x}(u(t), v(t))$, onde $(u(t), v(t))$ é uma curva parametrizada diferenciável em U. Assim $\alpha'(t) = u'(t)\mathtt{x}_u(u(t), v(t)) + v'(t)\mathtt{x}_v(u(t), v(t)) \in T_{\alpha(t)}M$. Com abuso de notação, denotaremos $(N \circ \alpha)(t)$ por $N(t)$, ou seja,

$$N(t) = N(\alpha(t)) = N(\mathtt{x}(u(t), v(t)))\,.$$

Assim,

$$N'(t) = (N \circ \alpha(t))' = dN_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) \in T_{\alpha(t)}M\,.$$

Logo, $\langle N(t), N'(t) \rangle = 0$ para todo $t \in I$. Notemos que isso ocorre para qualquer curva α em M.

Consideremos então $p = \mathtt{x}(q) \in M$, $\alpha : I \to M$ uma curva parametrizada, dada por $\alpha(t) = \mathtt{x}(u(t), v(t))$, com $\alpha(0) = p$, $\mathbf{w} = \alpha'(0) = u'(0)\mathtt{x}_u(q) + v'(0)\mathtt{x}_v(q) \in T_pM$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} N'(0) &= dN_p(\mathbf{w}) = (N \circ \alpha)'(0) = \frac{d}{dt}[(N \circ \mathtt{x}(u(t), v(t)))]_{t=0} \\ &= u'(0)(N \circ \mathtt{x})_u(q) + v'(0)(N \circ \mathtt{x})_v(q). \end{aligned}$$

Escrevendo, com abuso de notação $N(u, v) = (N \circ \mathtt{x})(u, v)$, obtemos

$$N_u(q) = (N \circ \mathtt{x})_u(q) = dN_p(\mathtt{x}_u(q))$$

e

$$N_v(q) = (N \circ \mathtt{x})_v(q) = dN_p(\mathtt{x}_v(q))\,.$$

Logo, $N_u(u,v)$ e $N_v(u,v)$ pertencem a $T_{\mathtt{x}(u,v)}M$ e podem ser escritos como

$$\begin{aligned} N_u(u,v) &= a_{11}\mathtt{x}_u(u,v) + a_{21}\mathtt{x}_v(u,v) \\ N_v(u,v) &= a_{12}\mathtt{x}_u(u,v) + a_{22}\mathtt{x}_v(u,v), \end{aligned} \tag{2.8}$$

com $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Além disso, podemos escrever $N'(t) = u'(t)N_u(u,v) + v'(t)N_v(u,v)$.

A forma bilinear simétrica $\mathrm{II}_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathrm{II}_p(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = -\langle dN_p(\mathbf{w}_1), \mathbf{w}_2 \rangle$$

é chamada **segunda forma fundamental** de M em p.

Em alguns livros a segunda forma fundamental de M em p é a forma quadrática de T_pM em $\mathbb{R}$, dada por $\mathbf{w} \mapsto -\langle dN_p(\mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle$. Com abuso de notação, denotaremos ambas as aplicações por II_p.

Se $\mathbf{w}_1 = a_1\mathtt{x}_u(q) + b_1\mathtt{x}_v(q)$ e $\mathbf{w}_2 = a_2\mathtt{x}_u(q) + b_2\mathtt{x}_v(q)$ são vetores em T_pM, com $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\mathrm{II}_p(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = -\langle dN_p(\mathbf{w}_1), \mathbf{w}_2 \rangle = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l(q) & m(q) \\ m(q) & n(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

onde

$$\begin{aligned} l(q) &= \langle -N_u(q), \mathtt{x}_u(q) \rangle = \langle N(q), \mathtt{x}_{uu}(q) \rangle, \\ m(q) &= \langle -N_u(q), \mathtt{x}_v(q) \rangle = \langle -N_v(q), \mathtt{x}_u(q) \rangle = \langle N(q), \mathtt{x}_{uv}(q) \rangle \\ n(q) &= \langle -N_v(q), \mathtt{x}_v(q) \rangle = \langle N(q), \mathtt{x}_{vv}(q). \rangle \end{aligned}$$

As funções $l, m, n : U \to \mathbb{R}$ são chamadas de **coeficientes da segunda forma fundamental** de M em p, e a matriz quadrade de (2.9) é chamada de matriz da segunda forma fundamental de M em p. Com essas notações, se $\mathbf{w} = a\mathtt{x}_u(q) + b\mathtt{x}_v(q)$, então

$$\mathrm{II}_p(\mathbf{w}) = a^2 l(q) + 2abm(q) + b^2 n(q).$$

Definição 2.26. Sejam C uma curva regular em M passando por $p \in M$, κ a curvatura de C em p e $\cos\theta = \langle N, n \rangle$, onde N é o vetor normal à M em p e n o vetor normal à C em p. O número $\kappa_n = \kappa\cos\theta$ é chamado **curvatura normal** de $C \subset M$ em p.

Notemos que $\kappa_n(p) = \kappa(p)\langle n(p), N(p) \rangle$ é o comprimento da projeção do vetor $\kappa(p)n(p)$ sobre o vetor $N(p)$ com o sinal dado pela orientação N de M em p. Notemos também que a curvatura normal $\kappa_n(p)$ de C em p não depende da orientação de C, pois $\kappa(p)$ e $n(p)$ não se alteram quando mudamos a orientação de C, mas muda de sinal quando mudamos a orientação N da superfície para $-N$.

É possível mostrar que dada uma curva regular $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$, parametrizada pelo comprimento de arco, com $p = \alpha(0)$ e $\alpha'(0) = \mathbf{v}$, então $\mathrm{II}_p(\mathbf{v}) = \kappa_n(p)$, ou seja, o valor de II_p em um vetor unitário $\mathbf{v} \in T_pM$ é igual a curvatura normal de qualquer curva em M que passa por p e é tangente à $\mathbf{v}$ em p. Assim, todas as curvas regulares de uma superfície M que passam por $p \in M$ e têm a mesma reta tangente neste ponto, possuem a mesma curvatura normal em p, isto é, a curvatura normal depende apenas da direção tangente $\mathbf{v}$ e não da curva α. Por esse motivo, a partir de agora a denotaremos por $\kappa_n(\mathbf{v})$. Denotando por $\pi(N(p), \mathbf{v})$ o plano que passa por p e é paralelo aos vetores $N(p)$ e $\mathbf{v}$, a curva regular obtida pela interseção de M com $\pi(N(p), \mathbf{v})$ é chamada de **seção normal** de M em p ao longo de $\mathbf{v}$ e sua curvatura coincide com o valor absoluto de $\kappa_n(\mathbf{v})$.

Se $\mathbf{v} = a\mathtt{x}_u(q) + b\mathtt{x}_v(q) \neq \mathbf{0}$ é um vetor não necessariamente unitário, então

$$\kappa_n(\mathbf{v}) = \frac{\mathrm{II}_p(\mathbf{v})}{\mathrm{I}_p(\mathbf{v})} = \frac{a^2l + 2abm + b^2n}{a^2E + 2abF + b^2G}, \tag{2.10}$$

onde E, F, G, l, m, n são avaliadas em q.

Definição 2.27. Uma direção $\mathbf{v} \in T_pM$ é chamada de **direção assintótica** se $\kappa_n(\mathbf{v}) = 0$.

Segue de (2.10) que $\mathbf{v} = a\mathtt{x}_u + b\mathtt{x}_v \in T_pM$ é direção assintótica se, e somente se,

$$a^2l + 2abm + b^2n = 0\,. \tag{2.11}$$

Definiremos e enunciaremos a seguir um resultado envolvendo o conceito de direções conjugadas, que será útil para o estudo do Teorema de Koenderink para superfícies regulares, assunto que trataremos nos próximos capítulos.

Definição 2.28. Dois vetores tangentes $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_pM$ são **conjugados** se $\mathrm{II}_p(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$. Duas direções r_1 e r_2 são conjugadas se um par de vetores não nulos $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ paralelos a r_1 e r_2, respectivamente, são conjugados.

Proposição 2.29. ([13], p. 144) *Dado $p \in M$ e $\mathbf{v} = a\mathtt{x}_u(q) + b\mathtt{x}_v(q) \in T_pM$ as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) *Uma direção conjugada à $\mathbf{v}$ é $\overline{\mathbf{v}} = -(am + bn)\mathtt{x}_u(q) + (al + bm)\mathtt{x}_v(q)$.*

(b) $\mathrm{II}(\overline{\mathbf{v}}) = (nl - m^2)(q)\mathrm{II}(\mathbf{v})$.

(c) $\kappa_n(\overline{\mathbf{v}}) = \kappa_n(\mathbf{v})(nl - m^2)(q)\dfrac{\|\mathbf{v}\|^2}{\|\overline{\mathbf{v}}\|^2}$.

(d) $\|\mathbf{v}\|^2\|\overline{\mathbf{v}}\|^2 - \langle\overline{\mathbf{v}}, \mathbf{v}\rangle^2 = (EG - F^2)(q)\mathrm{II}(\mathbf{v})^2\,.$

Observação 2.30. Sejam p um ponto hiperbólico de uma superfície regular M e r uma direção de T_pM. Se r é uma direção assintótica e $\overline{r}$ é uma direção conjugada a r, então $r /\!/ \overline{r}$. ♢

Voltemos ao estudo da diferencial da aplicação normal de Gauss, dN_p. Uma vez que $dN_p : T_pM \to T_pM$ é uma aplicação linear autoadjunta, existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_pM tal que $dN_p(e_1) = -\kappa_1 e_1$ e $dN_p(e_2) = -\kappa_2 e_2$ (ver Proposição 1, p. 165 de [4]). Além disso, κ_1 e κ_2 ($\kappa_1 \geqslant \kappa_2$) são o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental II_p restrita ao círculo unitário de T_pM, isto é, são os valores extremos da curvatura normal em p.

O máximo da curvatura normal κ_1 e o mínimo da curvatura normal κ_2 são chamados **curvaturas principais** em p, e as direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos autovetores e_1 e e_2 são **chamadas direções principais** em p. Quando $\kappa_1 = \kappa_2$, dizemos que p é um ponto **umbílico**.

O determinante de dN_p é chamado **curvatura Gaussiana** de M em p, que denotaremos por $K(p)$, e o negativo da metade do traço de dN_p é chamado de **curvatura média** de M em p, que denotaremos por $H(p)$.

Se considerarmos em T_pM a base $\{e_1, e_2\}$, então a matriz de dN_p é diagonal, composta pelos autovalores κ_1 e κ_2. Assim,

$$K(p) = \kappa_1\kappa_2 \quad \text{e} \quad H(p) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Agora, se considerarmos $\{\mathtt{x}_u(q), \mathtt{x}_v(q)\}$ como base para T_pM, a matriz de dN_p nesta base é dada por

$$-\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}.$$

Assim, os coeficientes (a_{ij}) em (2.8) são dados por

$$a_{11} = \frac{mF - lG}{EG - F^2} \qquad a_{12} = \frac{nF - mG}{EG - F^2}$$
$$a_{21} = \frac{lF - mE}{EG - F^2} \qquad a_{22} = \frac{mF - nG}{EG - F^2}.$$

e

$$K(p) = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}(q) \qquad \text{e} \qquad H(p) = \frac{En - 2Fm + Gl}{2(EG - F^2)}(q)\,. \tag{2.12}$$

As equações (2.8) com os coeficientes encontrados acima são conhecidas como **equações de Weingarten**.

Observação 2.31. O sinal de da curvatura Gaussiana não se altera se trocarmos a orientação da superfície, enquanto a curvatura média muda de sinal ao mudarmos a orientação. ♢

Vamos agora classificar os pontos de uma superfície de acordo com a sua curvatura Gaussiana. A seguir, veremos que essa classificação tem relação com a geometria local da superfície.

Definição 2.32. Um ponto p de uma superfície regular M é chamado
(a) **Hiperbólico**, se $K(p) < 0$.
(b) **Parabólico**, se $K(p) = 0$.
(c) **Elíptico**, se $K(p) > 0$.

É possível mostrar que, se p é um ponto elíptico de M, então existe um aberto $V \subset M$, tal que $V\backslash\{p\}$ está contido em um dos semiespaços abertos determinados por T_pM. Se p é hiperbólico, então em qualquer vizinhança de p existem pontos de M em ambos os lados de T_pM (Figura 2.2). Quando p é um ponto parabólico, nada podemos afirmar.

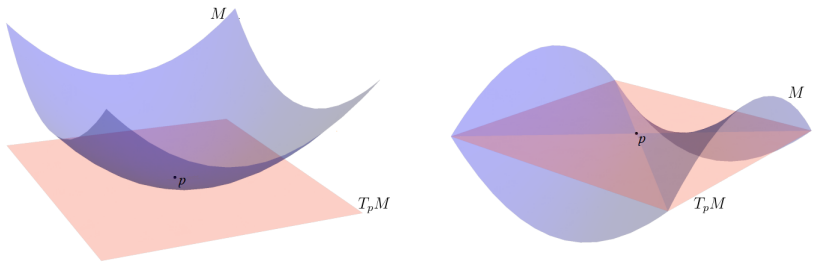


Figura 2.2: Comportamento de uma superfície regular com relação ao plano tangente T_pM na vizinhança de um ponto p elíptico e hiperbólico, respectivamente.

Observação 2.33. Um ponto parabólico umbílico $p = \mathtt{x}(u, v)$, ou seja, que satisfaz $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ é também chamado de ponto **parabólico planar** ou **umbílico chato**. Notemos que para p ser parabólico planar, devemos ter $l(u, v) = m(u, v) = n(u, v) = 0$. No entanto, pela Observação 2.21, genericamente o conjunto solução desse sistema é vazio. Assim, genericamente pontos parabólicos de uma superfície regular são não planares. ♢

A seguir, iremos calcular a curvatura Gaussiana de uma superfície e encontrar suas direções assintóticas em $\mathbf{0}$. Essa superfície será usada para ilustrar alguns resultados que apresentaremos nos próximos capítulos.

Exemplo 2.34. A superfície $M = \mathtt{x}(\mathbb{R}^2)$, onde $\mathtt{x}(u,v) = (u, v, -uv - v^3)$, cuja imagem é dada na Figura 2.3, não tem pontos parabólicos ou elípticos, ou seja, todos os pontos de M são hiperbólicos. Além disso, em $p = \mathbf{0}$, as direções $\mathbf{u} = (1,0,0)$ e $\mathbf{v} = (0,1,0)$ são assintóticas.

De fato, como $\mathtt{x}_u(u,v) = (1,0,-v)$ e $\mathtt{x}_v(u,v) = (0,1,-u-3v^2)$, obtemos que a aplicação de Gauss de M é $N(u,v) = \frac{(v,u+3v^2,1)}{\sqrt{1+v^2+(u+3v^2)^2}}$. Os coeficientes da segunda forma fundamental de M são

$$l(u,v) = 0, \quad m(u,v) = \frac{-1}{\sqrt{1+v^2+(u+3v^2)^2}} \text{ e } n(u,v) = \frac{-6v}{\sqrt{1+v^2+(u+3v^2)^2}},$$

e

$$K(u,v) = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}(u,v) = \frac{-1}{(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}}(u,v).$$

Como $K(u,v) < 0$, para todo $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, obtemos que todos os pontos de M são hiperbólicos.

Se $\mathbf{w} = a\mathtt{x}_u(\mathbf{0}) + b\mathtt{x}_v(\mathbf{0})$, então, por (2.11), obtemos $\kappa_n(\mathbf{w}) = -2ab$. Assim as direções assintóticas à M em $\mathbf{0}$ são $\mathtt{x}_v(0,0) = (0,1,0)$, quando $a = 0$ e $\mathtt{x}_u(0,0) = (1,0,0)$, quando $b = 0$. ♢

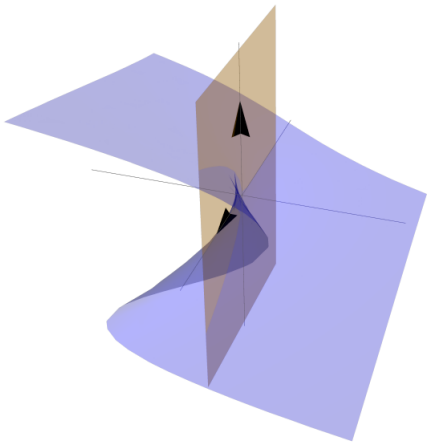


Figura 2.3: Superfície dada no Exemplo 2.34, $T_{\mathbf{0}}M$ e suas direções assintóticas em $\mathbf{0}$

Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$ uma curva regular, parametrizada por comprimento de arco, com I um intervalo aberto da reta. Como o vetor $\alpha''(s)$ é ortogonal a $\alpha'(s) \in T_pM$, então $\alpha''(s)$ pertence ao plano gerado pelos vetores $N(s) \times \alpha'(s)$ e $N(s)$, onde $N(s) = N(\alpha(s))$ é o vetor normal à M restito a curva α.

Assim,

$$\alpha''(s) = a(s)\,(N(s) \times \alpha'(s)) + \kappa_n(s)N(s). \tag{2.13}$$

O número $a(s) = \langle \alpha''(s), N(s) \times \alpha'(s) \rangle$ dado na equação (2.13) recebe o nome de **curvatura geodésica** de C em p e é denotado por $\kappa_g(s)$. Quando $\kappa_g(s) = 0$, dizemos que a curva α tem uma **inflexão geodésica** em s.

Observemos que, como α é uma curva parametrizada por comprimento de arco, então, de (2.13), obtemos

$$\kappa(s)^2 = \|\alpha''(s)\|^2 = \kappa_g(s)^2 + \kappa_n(s)^2. \tag{2.14}$$

Em resumo, temos as expressões $\kappa_n(s) = \langle \alpha''(s), N(s)\rangle$ e $\kappa_g(s) = \langle \alpha''(s), N(s)\times\alpha'(s)\rangle$. Se α não estiver parametrizada por comprimento de arco, é possível mostrar que

$$\kappa_n(t) = \frac{\langle \alpha''(t), N(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|^2} \quad \text{e} \quad \kappa_g(t) = \frac{\langle \alpha''(t), N(t)\times\alpha'(t)\rangle}{\|\alpha'(t)\|^3}. \tag{2.15}$$

Forma de Monge

Existe uma parametrização especial para superfícies regulares, chamada forma de Monge. Essa parametrização considera a superfície como sendo gráfico de função e será útil em algumas demonstrações que faremos ao longo deste trabalho.

Sejam M uma superfície regular e $p \in M$. Podemos escolher um sistema de coordenadas (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tal que p é a origem de $\mathbb{R}^3$, T_pM é o plano $\{z = 0\}$ e a superfície M é, localmente, o gráfico de uma função $z = f(u, v)$, com (u, v) pertencente a um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, com $(0, 0) \in U$ e $p = f(0, 0)$. Assim, obtemos a seguinte parametrização de M em p

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

chamada parametrização na **forma de Monge**. Neste caso, dizemos que M está parametrizada localmente na forma de Monge $z = f(u, v)$ em p. Notemos que neste caso o polinômio de Taylor de f na origem não contém termos contantes ou lineares.

A seguinte proposição fornece a direção normal e os coeficientes das formas fundamentais de uma superfície dada na forma de Monge.

Proposição 2.35. *Seja M uma superfície parametrizada localmente na forma de Monge $z = f(x, y)$ em p. Então:*

(a) $E = 1 + f_u^2$, $F = f_u f_v$, $G = 1 + f_v^2$;

(b) $N = \frac{1}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}(-f_u, -f_v, 1)$;

(c) $l = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}$, $m = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}$, $n = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1+f_u^2+f_v^2}}$.

Dessa forma, quando M está na forma de Monge, todas as propriedades que vimos para superfícies regulares que dependem apenas dos coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental passam a depender apenas das derivadas de f. Por exemplo, segue da equação (2.11) que uma direção tangente $\mathbf{v} = a\mathbf{x}_u(\mathbf{0}) + b\mathbf{x}_v(\mathbf{0}) \in T_pM$, é assintótica se, e somente se,

$$a^2 f_{uu}(\mathbf{0}) + 2ab f_{uv}(\mathbf{0}) + b^2 f_{vv}(\mathbf{0}) = 0. \tag{2.16}$$

Proposição 2.36. ([13], p. 148) *Sejam M uma superfície dada na forma de Monge $z = f(u, v)$, onde*

$$f(u, v) = a_{20}u^2 + a_{21}uv + a_{22}v^2 + a_{30}u^3 + a_{31}u^2v + a_{32}uv^2 + a_{33}v^3 + \ldots,$$

$p = \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

(a) $K(p) = 4a_{20}a_{22} - a_{21}^2 = 0$,

(b) *a direção $\mathbf{v}$ é assintótica em p se, e somente se, $a_{22} = 0$,*

(c) *se $\mathbf{v}$ é uma direção assintótica e p é um ponto parabólico não planar, então o conjunto parabólico é uma curva regular em p se, e somente se, $a_{32} \neq 0$ ou $a_{33} \neq 0$.*

(d) *p é parabólico planar se, e somente se, $a_{20} = a_{21} = a_{22} = 0$.*

Dada uma superfície M na forma de Monge, as vezes é conveniente considerar uma rotação de M de tal forma que as direções principais sejam as direções $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$. A seguir, faremos uma breve descrição deste processo.

Seja M uma superfície dada na forma de Monge $z = f(u,v)$ e consideremos a expansão de Taylor de f que, com abuso de notação, também denotaremos por $f(u,v)$. Temos $f(u,v) = \frac{1}{2}(a_{20}u^2 + a_{21}uv + a_{22}v^2) + \mathcal{O}(3)$, onde $\mathcal{O}(3)$ denota os termos de ordem maior ou igual a 3.

Fazendo uma rotação em torno do eixo-z por um ângulo θ, o coeficiente de xy torna-se $\frac{1}{2}(a_{22} - a_{20})\operatorname{sen} 2\theta + a_{21}\cos 2\theta$. Dessa forma, existe um valor $\theta \in [0,\pi)$ tal que a rotação de M em torno do eixo z zera o coeficiente do termo xy na expressão de f. Quando isso acontece, todos os outros coeficientes a_{ij} de f podem mudar, mas os termos de um determinado grau permanecem no mesmo grau, ou seja, os novos termos de grau k dependerão apenas do termos de grau k original e de θ. Assim, toda superfície regular M pode ser escrita como $z = \tilde{f}(u,v) = \frac{1}{2}(au^2+bv^2)+\mathcal{O}(3)$. Quando M é escrita como gráfico da função $\tilde{f}$, pela Proposição 2.35 obtemos que os coeficientes das formas fundamentais em $p = \mathbf{0}$ são $E(\mathbf{0}) = G(\mathbf{0}) = 1$, $l(\mathbf{0}) = a, n(\mathbf{0}) = b$, $F(\mathbf{0}) = m(\mathbf{0}) = 0$. Assim, por (2.12), a curvatura Gaussiana em p é $K(\mathbf{0}) = ab$. Logo, as curvaturas principais κ_1 e κ_2 em $\mathbf{0}$ são dadas pelos valores a e b e, por (2.10), obtemos $\kappa_n(e_1) = a$ e $\kappa_n(e_2) = b$. Logo, quando M está na forma $z = \tilde{f}(u,v)$, obtemos que as direções principais são os eixos x e y e M pode ser escrita como gráfico da função

$$\tilde{f}(u,v) = \frac{1}{2}(\kappa_1 u^2 + \kappa_2 v^2) + \mathcal{O}(3). \tag{2.17}$$

2.3 Frentes de onda

Os conceitos que estudaremos nesta seção são importantes para o desenvolvimento do Capítulo 5. Usamos [17, 24] como principais referências para essa seção.

Nesta seção U denotará um aberto em $\mathbb{R}^2$.

Definição 2.37. Uma aplicação suave $f : U \to \mathbb{R}^3$ é uma **frontal** se existe um campo unitário suave $\nu : U \to \mathbb{R}^3$ de vetores normais à f, isto é, $\|\nu(p)\| = 1$ e $\langle df_p(X), \nu(p)\rangle = 0$, para todo $X \in \mathbb{R}^2$ e $p \in U$. Quando $(f,\nu) : U \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ é uma imersão, dizemos que f é uma **frente de onda** (ou simplesmente **frente**) e ν é a **aplicação de Gauss** de f.

Observação 2.38. Nos pontos regulares da frente f, a aplicação ν coincide, a menos de sinal, com a aplicação normal de Gauss N. Dessa forma, ν pode ser considerada uma generalização da aplicação normal de Gauss e, por isso, recebe o nome de aplicação de Gauss. ♢

Exemplo 2.39. Toda parametrização de superfícies regulares é uma frente de onda, basta tomar ν como sendo a aplicação normal de Gauss da parametrização. Assim, toda superfície regular é localmente imagem de uma frente de onda. No entanto, uma frente de onda não é necessariamente regular, como veremos nos próximos exemplos. ♢

Recordemos que o conjunto singular de $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é dado por

$$\Sigma_f = \{q \in U : \operatorname{rank} df_q < 2\},$$

e denotado por por Σ_f.

Exemplo 2.40. Seja $f(u,v) = (u, v^2, v^3)$, cuja imagem é dada na Figura 2.4.

Temos $f_u(u,v) = (1,0,0)$, $f_v(u,v) = (0,2v,3v^2)$ e $f_u \times f_v(u,v) = v(0,-3v,2)$. Logo, Σ_f coincide com o eixo-u .

Seja

$$\nu(u,v) = \frac{1}{\sqrt{4+9v^2}}(0,-3v,2).$$

Então ν é um campo unitário de vetores normais à f. Além disso, como $f_u(u,0) = (1,0,0)$, $f_v(u,0) = \mathbf{0}$ e $\nu_v(u,0) = (0,-\frac{3}{2},0)$, então (f,ν) é uma imersão e, portanto, f é uma frente. ♢

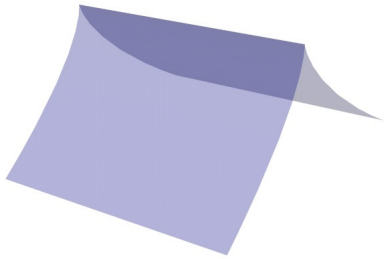


Figura 2.4: Imagem da frente $f(u,v) = (u, v^2, v^3)$ dada no Exemplo 2.40

Exemplo 2.41. Consideremos $f(u,v) = (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v)$, cuja imagem é dada na Figura 2.5. Temos $f_u(u,v) = (12u^3 + 2uv, 12u^2 + 2v, 0)$, $f_v(u,v) = (u^2, 2u, 1)$ e $f_u \times f_v(u,v) = (12u^2 + 2v)(1,-u,u^2)$, de onde seque que o conjunto singular de f é $\Sigma_f = \{(u,-6u^2);\, u \in \mathbb{R}\}$. Assim,

$$\nu(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+u^4}}(1,-u,u^2).$$

é um campo unitário de vetores normais à f e, como $f_u(u,-6u^2) = \nu_v(u,-6u^2) = \mathbf{0}$, $f_v(u,-6u^2) \neq \mathbf{0}$ e $\nu_u(u,-6u^2) \neq \mathbf{0}$, segue que (f,ν) é uma imersão e, portanto, f é uma frente. ♢

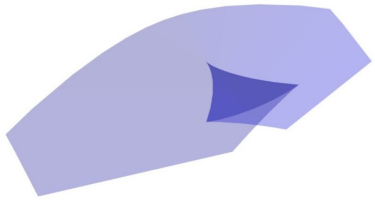


Figura 2.5: Imagem da frente $f(u,v) = (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v)$ dada no Exemplo 2.41

As aplicações apresentadas nos Exemplos 2.40 e 2.41 são formas normais de frentes que recebem nomes especiais, como segue.

Definição 2.42. Uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^3$ é uma

(a) **cuspidal edge** se é $\mathcal{A}$-equivalente a $f(u,v) = (u, v^2, v^3)$,

(b) **rabo de andorinha** se é $\mathcal{A}$-equivalente a $g(u,v) = (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v)$.

As formas normais definidas acima são chamadas de cuspidal edge e rabo de andorinha *usuais*. O exemplo a seguir apresenta frentes que veremos serem cuspidal edges.

Exemplo 2.43. Seja $f(u,v) = (au^2 + v^2, bv^2 + v^3, u)$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Temos $f_u(u,v) = (2au, 0, 1)$, $f_v(u,v) = (2v, 2bv+3v^2, 0)$ e $f_u \times f_v(u,v) = v(-3v-2b, 2, 2au(3v+2b))$. Logo, o conjunto singular de f é $\Sigma_f = \{(u,0);\, u \in \mathbb{R}\}$, e o campo unitário de vetores normais à f é

$$\nu(u,v) = \frac{1}{\delta(u,v)}(-3v - 2b, 2, 2au(3v + 2b)),$$

onde $\delta(u,v) = \sqrt{4 + (1 + 4a^2u^2)(4b^2 + 12bv + 9v^2)}$.

Como $f_u(u,0) \neq 0$, $f_v(u,0) = \mathbf{0}$, $\nu_u(u,0) \neq \mathbf{0}$ e $\nu_v(u,0) \neq \mathbf{0}$, então (f,ν) é uma imersão e, portanto, f é uma frente.

A superfície $f(U)$ é dada na Figura 2.6 para $a = b = 1$ à esquerda, e $a = -1$ e $b = 1$ à direita. ♢

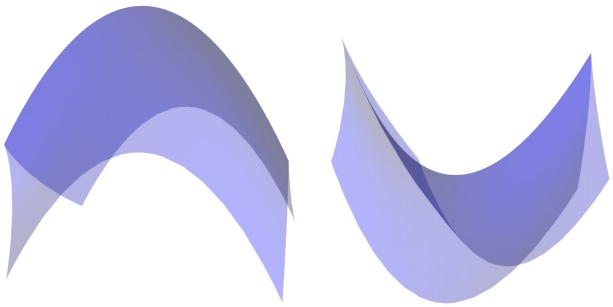


Figura 2.6: Superfícies dadas no Exemplo 2.43

Observação 2.44. Podemos definir também frentes de onda para aplicações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$. Uma aplicação $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, onde I é um aberto em $\mathbb{R}$, é chamada de **frente de onda** (ou frente) se existe um campo unitário suave $\nu_\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ de vetores normais à γ, ou seja, $\langle \gamma'(t), \nu_\gamma(t)\rangle = 0$, e tal que $(\gamma, \nu_\gamma) : I \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ é uma imersão.

Claramente toda curva plana regular é uma frente. Consideremos agora $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a aplicação dada por $\gamma(t) = (t^2, t^3)$. Como $\gamma'(t) = t(2, 3t)$, a curva γ é singular apenas em $t = 0$. Tomando $\nu_\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{4+9t^2}}(-3t, 2)$, obtemos $\langle \gamma'(t), \nu_\gamma(t)\rangle = 0$, para todo $t \in I$, e $(\gamma'(0), \nu_\gamma'(0)) = (0, 0, 0, 1)$. Portanto, γ é uma frente. ♢

A partir de agora, nesta seção, $f : U \to \mathbb{R}^3$ será uma frente, com $f(U) = M$ e ν a aplicação de Gauss de f. Notemos que nos pontos regulares de f, ν é paralelo a $f_u \times f_v$ e M é localmente uma superfície regular.

Definição 2.45. A função $\lambda : U \to \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(q) = \langle f_u(q) \times f_v(q), \nu(q)\rangle = \det(f_u, f_v, \nu)(q)$$

é chamada **função densidade de área** de f.

Como

$$\lambda(q) = 0 \Leftrightarrow f_u(q) \times f_v(q) = \mathbf{0} \Leftrightarrow q \in \Sigma_f,$$

então $\Sigma_f = \lambda^{-1}(0)$. Se $q \notin \Sigma_f$, então $\lambda(q) \neq 0$. Assim, $\lambda(q) > 0$ quando $f_u(q) \times f_v(q)$ e $\nu(q)$ apontam para o mesmo semiespaço determinado por $T_{f(q)}M$, e $\lambda(q) < 0$ quando

$f_u(q) \times f_v(q)$ e $\nu(q)$ apontam para semiespaços opostos de $T_{f(q)}M$. Denotaremos por U_+ (resp. U_-) o aberto de $\mathbb{R}^2$ formado pelos pontos (u, v) tais que $\lambda(u, v) > 0$ (resp. $\lambda(u, v) < 0$).

Definição 2.46. Seja $q \in \Sigma_f$. Dizemos que q é um **ponto singular não degenerado** de f se q é um ponto regular de λ, ou seja, se $\lambda_u(q)$ e $\lambda_v(q)$ não se anulam simultaneamente.

Como $\Sigma_f = \lambda^{-1}(0)$ segue, pelo Teorema da Função Implícita, que Σ_f é localmente uma curva regular nos pontos singulares não degenerados de f, a qual chamaremos de **curva singular** de f. Cada direção tangente à curva singular é chamada **direção singular**.

A partir de agora, dado q um ponto singular não degenerado de f, denotaremos por $\gamma : (\varepsilon, \varepsilon) \to U$ $(\varepsilon > 0)$ uma parametrização para a curva singular, com $\gamma(0) = q$ e vamos supor que $\gamma(t)$ é um ponto singular não degenerado para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Observamos que o núcleo da aplicação df_q tem dimensão 1. De fato, suponha que $\dim(\ker df_q) = 2$. Então $f_u(q) = f_v(q) = 0$, de onde segue que

$$\lambda_u(q) = \det(f_{uu}, f_v, \nu)(q) + \det(f_u, f_{uv}, \nu)(q) + \det(f_u, f_v, \nu_u)(q) = 0$$

e, analogamente, $\lambda_v(q) = 0$, o que é um absurdo, pois q é um ponto singular não degenerado de f. Portanto, $\dim(\ker df_q) = 1$.

Definição 2.47. Seja $q \in \Sigma_f$ um ponto singular não degenerado. Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ existe um subespaço vetorial de dimensão 1 em $\mathbb{R}^2$, chamado de **direção nula**, que é o núcleo da aplicação linear $df_{\gamma(t)}$. Podemos escolher um campo suave de vetores $\eta(t)$ ao longo de γ tal que $\eta(t)$ pertença a direção nula para todo t, ou seja, $df_{\gamma(t)}(\eta(t)) = \mathbf{0}$, chamado de **campo anulador de vetores** ao longo de γ.

Com abuso de linguagem, chamaremos um vetor pertencente a direção nula de direção nula.

Se $q \in \Sigma_f$ é não degenerado, então $df_q(\mathbb{R}^2)$ é uma reta. Definimos a **direção tangente** à M em q como sendo a direção paralela à $df_q(\mathbb{R}^2)$ e a **reta tangente** à M em $f(q)$, denotada por $\mathbf{v}_{tg}$, como sendo a reta que passa por $f(q)$ e é paralela direção tangente. O **plano normal** à M em $f(q)$, denotado por $N_{f(q)}M$, é definido como o plano perpendicular a $df_q(\mathbb{R}^2)$ passando por $f(q)$. Além disso, dizemos que um vetor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ é **normal** à M em $f(q)$ quando $\mathbf{w}$ for ortogonal a $df_q(\mathbb{R}^2)$. Na Figura 2.7 esboçamos o plano normal e a reta tangente para a cuspidal edge usual.

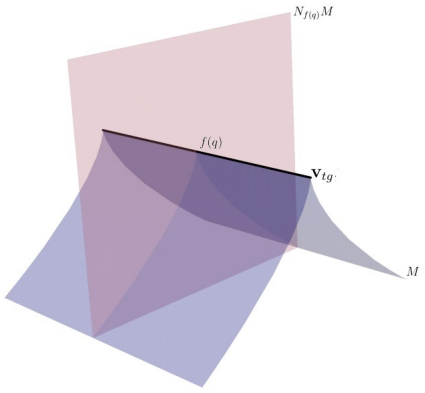


Figura 2.7: Reta tangente e plano normal à uma cuspidal edge M

Como ν é um campo de vetores normais a f, podemos definir o "plano tangente limitante" à M em pontos singulares da seguinte forma.

Definição 2.48. Dado $q \in U$, o **plano tangente limitante** à M em $f(q)$ é o plano ortogonal a $\nu(q)$ passando por $f(q)$ e o denotaremos também por $T_{f(q)}M$.

O resultado que enunciaremos a seguir fornece critérios para que um ponto singular de uma frente seja uma cuspidal edge.

Teorema 2.49. ([24]) *Um ponto singular não degenerado $q = \gamma(t)$ de uma frente de onda f é uma cuspidal edge se, e somente se, a direção nula e a direção singular são transversais em q, isto é,* $\det(\gamma'(t), \eta(t)) \neq 0$.

Exemplo 2.50. Consideremos a cuspidal edge $f(u,v) = (u, v^2, v^3)$. Pelo Exemplo 2.40 temos que Σ_f coincide com o eixo-u e $\nu(u,v) = \dfrac{1}{\sqrt{9v^2+4}}(0, -3v, 2)$ é um campo unitário de vetores normais à f.

Uma vez que $f_v(u,0) = \mathbf{0}$, dado $(u,0) \in \Sigma_f$, obtemos $\lambda_v(u,0) = \det(f_u, f_{vv}, \nu)(u,0) = 2$. Logo, todo ponto singular de f é não degenerado. Se $\gamma(t) = (u(t), 0)$ é uma parametrização para a curva singular, com $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, então $\eta(t) = (0,1)$ é um campo anulador de vetores ao longo de γ, pois $df_{\gamma(t)}(0,1) = f_v(\gamma(t)) = \mathbf{0}$, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Como em todo ponto de Σ_f a direção singular é paralela ao vetor $(1,0)$ e a direção nula é o vetor $(0,1)$, as direções singulares e nulas são transversais, o que está de acordo como o teorema anterior.

Além disso, os pontos singulares de $f(U)$ estão sobre o eixo-x, pois $f(u,0) = (u,0,0)$. Como $\nu(u,0) = (0,0,1)$, o plano tangente limitante em um ponto $(u,0,0)$ é o plano-xy. O plano normal em $(u,0,0)$ é paralelo ao plano $\{x = 0\}$ passando por $(u,0,0)$, uma vez que a reta tangente a cuspidal edge é paralela a $f_u(u,0) = (1,0,0)$. ♢

Exemplo 2.51. Vamos mostrar que $f(u,v) = (au^2 + v^2, bv^2 + v^3, u)$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, dada no Exemplo 2.43 é uma cuspidal edge.

Vimos que o conjunto singular de f é o eixo-u. Como $f_v(u,0) = \mathbf{0}$, então $\lambda_v(u,0) = \det(f_u, f_{vv}, \nu)(u,0) = \dfrac{4b^2}{\delta(u,0)} + 16a^2b^2u^2 + 4 \neq 0$. Logo, todos os pontos singulares de f são não degenerados.

A direção singular em todo ponto de Σ_f é paralela ao vetor $(1,0)$ e, como $f_v(u,0) = \mathbf{0}$ o campo anulador de vetores $\eta(t)$ é paralelo ao vetor $(0,1)$. Assim, como as direções singular e nula são transversais em cada ponto de Σ_f, concluímos que o conjunto singular de f é formado por cuspidal edges. ♢

Muitas vezes, para estudar propriedades de uma frente $f : U \to \mathbb{R}^2$ é interessante considerar um sistema de coordenadas especial para $\mathbb{R}^2$. Dado um ponto singular não degenerado $q \in U$, esse sistema de coordenadas (u,v) está centrado no ponto q e satisfaz:

(a) é compatível com a orientação de $\mathbb{R}^2$,

(b) a curva singular é o eixo-u, e

(c) não existem pontos singulares de f fora do eixo-u.

O sistema de coordenadas (u,v) que satisfaz as condições definidas acima é chamado de **sistema de coordenadas adaptado** com respeito a q.

A seguir, enunciamos um lema que auxilia na obtenção de algumas propriedades de frentes.

Lema 2.52. ([3], p. 86) *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função suave definida em uma vizinhança U de $\mathbf{0}$. Suponha que $f(u,0) = 0$, para u suficientemente próximo de 0. Então, existe uma função suave $f_1(u,v)$ definida em uma vizinhança de $\mathbf{0}$ tal que*

$$f(u,v) = v f_1(u,v).$$

Observação 2.53. No sistema de coordenadas adaptado (u, v) as funções λ e λ_u se anulam sobre o eixo-u, e λ_v não se anula sobre o eixo-u. De fato, como o eixo u é formado por pontos singulares, então $\lambda(u, 0) = 0$. Assim, pelo Lema 2.52, existe uma função suave $\lambda_1(u, v)$ tal que $\lambda(u, v) = v\lambda_1(u, v)$, de onde concluímos que $\lambda_u(u, 0) = 0$. Como a curva singular é formada por pontos singulares não degenerados, concluímos que λ_v nunca se anula sobre o eixo-u. Como $\lambda_v(u, 0) = \lambda_1(u, 0)$, então λ_1 não muda de sinal em U e, assim, $\lambda = v\lambda_1$ muda de sinal quando cruza o eixo-u. Podemos concluir então que a curva singular separa U em duas regiões U_+ e U_-, onde $\lambda > 0$ e $\lambda < 0$, respectivamente. ♢

Dada uma frente $f : U \to \mathbb{R}^3$ e sua aplicação de Gauss ν, sabemos que $f(U)$ não é necessariamente uma superfície regular, logo a primeira e a segunda formas fundamentais não estão definidas. A seguir, de forma análoga ao que é feito para superfícies regulares, iremos definir as formas fundamentais para f.

Dado $q \in U$, o produto interno em $\mathbb{R}^3$ induz uma aplicação $\mathrm{I}_q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathrm{I}_q(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle df_q(\mathbf{v}), df_q(\mathbf{w})\rangle,$$

chamada de **primeira forma fundamental** de f em q, e seus **coeficientes** são definidos por

$$\begin{aligned} E_f(q) &= \mathrm{I}_q(e_1, e_1) = \langle f_u(q), f_u(q)\rangle \\ F_f(q) &= \mathrm{I}_q(e_1, e_2) = \langle f_u(q), f_v(q)\rangle \\ G_f(q) &= \mathrm{I}_q(e_2, e_2) = \langle f_v(q), f_v(q)\rangle, \end{aligned}$$

onde $\{e_1, e_2\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Se $\mathbf{w} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, então

$$\mathrm{I}_q(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = a^2E_f(q) + 2abF_f(q) + b^2G_f(q).$$

Para definir a segunda forma fundamental para superfícies regulares consideramos a aplicação normal de Gauss N. Para a frente de onda f vamos considerar a aplicação de Gauss ν, que é um campo de vetores normais unitários à f.

A **segunda forma fundamental** de f em q é a aplicação $\mathrm{II}_q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mathrm{II}_q(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\langle d\nu_q(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle.$$

Se $\mathbf{v} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, então

$$\mathrm{II}_q(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = a^2l_f(q) + 2abm_f(q) + b^2n_f(q),$$

onde

$$\begin{aligned} l_f(q) &= \langle -\nu_u(q), f_u(q)\rangle = \langle f_{uu}(q), \nu(q)\rangle \\ m_f(q) &= \langle -\nu_u(q), f_v(q)\rangle = \langle -\nu_v(q), f_u(q)\rangle = \langle f_{uv}(q), \nu(q)\rangle \\ n_f(q) &= \langle -\nu_v(q), f_v(q)\rangle = \langle f_{vv}(q), \nu(q)\rangle \end{aligned}$$

são chamados de **coeficientes** da segunda forma fundamental de f em q.

Observemos que em pontos regulares de f os coeficientes da primeira forma fundamental coincidem com aqueles obtidos para superfícies regulares, enquanto os coeficientes da segunda forma fundamental coincidem a menos de sinal, pois $\nu(q) = \pm N(q)$.

2.3.1 Forma normal especial e invariantes geométricos para a cuspidal edge

Recordemos que dada uma superfície regular, é possível, através de movimentos rígidos, isto é, que não alteram a forma da superfície, obtê-la como gráfico de uma função suave $f(u,v)$ (forma de Monge). De forma análoga, iremos apresentar agora a forma normal especial para cuspidal edges e alguns de seus invariantes que usaremos nos próximos capítulos.

Dada uma cuspidal edge é possível fazer mudanças de coordenadas por difeomorfismos na fonte e isometrias na meta tal que a aplicação original seja $\mathcal{A}$-equivalente a

$$f(u,v) = \left(u, a(u) + \tfrac{1}{2}v^2, b_1(u) + v^2 b_2(u) + v^3 b_3(u,v)\right), \tag{2.18}$$

onde (u,v) pertence a uma vizinhança U da origem, $a(0) = a'(0) = b_1(0) = b_1'(0) = b_2(0) = 0$ e $b_3(\mathbf{0}) \neq 0$. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} a(u) &= \tfrac{1}{2}a_{20}u^2 + \tfrac{1}{6}a_{30}u^3 + \tfrac{1}{24}a_{40}u^4 + \mathcal{O}(5), \\ b_1(u) &= \tfrac{1}{2}b_{20}u^2 + \tfrac{1}{6}b_{30}u^3 + \tfrac{1}{24}b_{40}u^4 + \mathcal{O}(5), \\ b_2(u) &= \tfrac{1}{2}b_{12}u + \tfrac{1}{6}b_{22}u^2 + \mathcal{O}(3), \\ b_3(u,v) &= \tfrac{1}{6}b_{03} + \tfrac{1}{6}b_{13}u + \mathcal{O}(2). \end{aligned}$$

A parametrização (2.18) é chamada de **forma normal especial** da cuspidal edge e foi obtida no Teorema 3.1 de [17]. Os coeficientes das funções a, b_1, b_2, b_3 são unicamente determinados, logo podem ser considerados invariantes geométricos. Como as mudanças de coordenadas na meta são feitas usando apenas isometrias, a forma da cuspidal edge não se altera, o que é importante quando queremos estudar suas propriedades geométricas.

De (2.18) obtemos

$$f_u(u,v) = (1, a'(u), b_1'(u) + b_2'(u)v^2 + (b_3)_u(u,v)v^3)$$

e

$$f_v(u,v) = (0, v, 2vb_2(u) + 3v^2 b_3(u,v) + v^3(b_3)_v(u,v)).$$

Logo,

$$f_u \times f_v = v(a'(2b_2 + 3vb_3 + v^2(b_3)_v) - b_1' - v^2 b_2' - v^3(b_3)_u, -2b_2 - 3vb_3 - v^2(b_3)_v, 1),$$

onde $f_u \times f_v$ e b_3 e suas derivadas são avaliadas em (u,v) e as demais funções avaliadas em u. Concluímos então que o conjunto singular de f está contido no eixo-u, a reta tangente a $M = f(U)$ em $\mathbf{0}$ é paralela a $(1,0,0)$ e

$$\nu(u,v) = \frac{1}{\delta(u,v)}(a'(2b_2 + 3vb_3 + v^2(b_3)_v) - b_1' - v^2 b_2' - v^3(b_3)_u, -2b_2 - 3vb_3 - v^2(b_3)_v, 1), \tag{2.19}$$

onde

$$\delta(u,v) = \sqrt{1 + (2b_2 + 3vb_3 + v^2(b_3)_v)^2 + (a'(2b_2 + 3vb_3 + v^2(b_3)_v) - b_1' - v^2 b_2' - v^3(b_3)_u)^2}$$

é a aplicação de Gauss de f. Logo, $\nu(\mathbf{0}) = (0,0,1)$.

Considerando $\gamma(t) = (t, 0)$ uma parametrização para o conjunto singular de f, obtemos $\hat{\gamma}(t) = f \circ \gamma(t) = (t, a(t), b(t))$. Uma vez que $\hat{\gamma}'(0) = (1, 0, 0), \hat{\gamma}''(0) = (0, a_{20}, b_{20})$ e $\hat{\gamma}'''(0) = (0, a_{30}, b_{30})$, por (2.6) a torção de $\hat{\gamma}$ em $t = 0$ é

$$\tau_{\hat{\gamma}}(0) = \frac{a_{20}b_{30} - b_{20}a_{30}}{b_{20}^2 + a_{20}^2}, \tag{2.20}$$

e, por (2.2), a curvatura de $\hat{\gamma}$ em $t = 0$ é

$$\kappa_{\hat{\gamma}}(0) = \sqrt{a_{20}^2 + b_{20}^2}. \tag{2.21}$$

A seguir iremos apresentar alguns invariantes para cuspidal edge e calcular seus valores para a forma normal (2.18) em $\mathbf{0}$. Para detalhes, ver [17]

No que segue, $f : U \to \mathbb{R}^3$, denotará uma cuspidal edge, com $\mathbf{0} \in U$, $\gamma(t)$ uma parametrização para a curva singular de f com $\gamma(0) = \mathbf{0}$, η o campo anulador de vetores ao longo de γ tal que $\{\xi, \eta\}$ é uma base positiva para $\mathbb{R}^2$, onde ξ é a direção tangente a $\gamma(t)$, e $\hat{\gamma} = f \circ \gamma(t)$.

Denotaremos, quando não houver perigo de confusão e com abuso de notação, $\nu \circ \gamma(t)$ apenas por $\nu(t)$ e por f_{η^i} a i-ésima derivada direcional de f na direção do vetor η. Assim, $f_\eta = df(\eta)$, $f_{\eta^2} = f_{\eta\eta} = f_\eta(\eta)$, e assim sucessivamente.

Curvatura normal limitante e torção cuspidal

Definição 2.54. Com as notações acima, definimos:

(a) A **curvatura normal limitante** em $\gamma(t)$ é

$$\kappa_\nu(t) = \frac{\langle \hat{\gamma}'', \nu \rangle}{\|\hat{\gamma}'\|^2}(t).$$

Denotaremos por κ_n o módulo de κ_ν, isto é, $\kappa_n(t) = |\kappa_\nu(t)|$.

(b) A **torção cuspidal** em $\gamma(t)$ é

$$\kappa_t(t) = \frac{\det[f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\eta\eta\xi}]}{\|f_\xi \times f_{\eta\eta}\|^2}(t) - \frac{\det[f_\xi, f_{\eta\eta}, f_{\xi\xi}]\langle f_\xi, f_{\eta\eta}\rangle}{\|f_\xi\|^2\|f_\xi \times f_{\eta\eta}\|^2}(t).$$

Para não fugir do objetivo desta seção, que é apenas apresentar a forma normal e alguns invariantes para cuspidal edges para, no Capítulo 5, relacioná-los às classes de singularidades da projeção ortogonal dessas superfícies, não entraremos em detalhes sobre as definições e resultados dos invariantes que definimos. Destacamos apenas que esses invariantes possuem interpretações geométricas, por exemplo, se a curvatura normal limitante é positiva em $q = \gamma(t)$ (resp. negativa) então $\hat{\gamma}$ está contida localmente no semiespaço de $\mathbb{R}^3$ determinado pelo plano tangente limitante que aponta $\nu(q)$ (resp. $-\nu(q)$) (Figura 2.8) (Ver [24], p. 515). Já a torção cuspidal mede a rotação da direção de cúspide ao longo da curva singular da cuspidal edge (mais detalhes em [17], p. 457).

Notemos que, de (2.15), se calcularmos $\kappa_\nu(t)$ em uma curva regular α contida na parte regular da cuspidal edge M, então κ_ν coincide com a curvatura normal κ_n. Por isso, κ_ν recebe o norme de curvatura normal limitante.

Exemplo 2.55. Encontremos os valores dos invariantes da Definição 2.54 para a forma normal (2.18) em $\mathbf{0}$. Para essa parametrização, temos $\gamma(t) = (t, 0)$ e, então, $\hat{\gamma}(t) =$

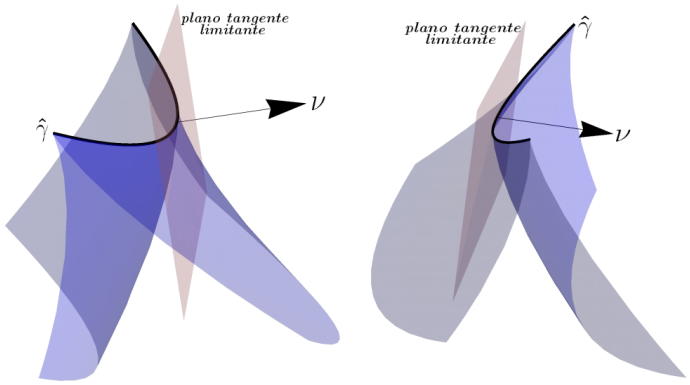


Figura 2.8: Cuspidal edge com curvatura normal limitante negativa à esqueda, e positiva à direita.

$(t, a(t), b(t))$ e $\eta = (0, 1)$ é uma direção nula em todo ponto de γ com $\{\gamma'(t), \eta\}$ formando base positiva para $\mathbb{R}^2$.

(a) Como $\hat{\gamma}'(0) = (1, 0, 0)$, $\hat{\gamma}''(0) = (0, a''(0), b_1''(0))$ e $\nu(\mathbf{0}) = (0, 0, 1)$, obtemos que a curvatura normal limitante em $\mathbf{0}$ é $\kappa_\nu(0) = b_1''(0) = b_{20}$.

(b) Como $f_u(\mathbf{0}) = (1, 0, 0)$ e $f_{uvv}(\mathbf{0}) = (0, 0, b_{12})$ obtemos o valor da torção cuspidal $\kappa_t(0) = b_{12}$. ♢

Curvatura singular

Como a curvatura singular será usada na extensão do Teorema de Koenderink para cuspidal edges, iremos trabalhar um pouco mais suas propriedades.

Definição 2.56. A **curvatura singular** ao longo de γ é dada por

$$\kappa_s(t) = \operatorname{sgn}\left(d\lambda_{\gamma(t)}(\eta(t))\right)\frac{\det(\hat{\gamma}'(t), \hat{\gamma}''(t), \nu(t))}{\|\hat{\gamma}'(t)\|^3},$$

onde $\hat{\gamma}(t) = f \circ \gamma(t)$ e λ é a função densidade de área de f.

É possível mostrar que a curvatura singular não depende do parâmetro escolhido para parametrizar γ, nem da orientação de γ nem da escolha da aplicação de Gauss ν. Para detalhes sobre a curvatura singular, ver, por exemplo, [24].

Para dar um interpretação geométrica da curvatura singular, denotemos por n e T o vetor normal e o plano retificante a $\hat{\gamma}$ em t, respectivamente. Se $\kappa_s(t)$ é positiva então, localmente a cuspidal edge M está contida no semiespaço determinado por T que contém $n(t)$, caso contrário, há pontos da cuspidal edge em ambos os semiespaços determinado por T (Figura 2.9) (para detalhes ver [24]).

Notemos que, se calcularmos o valor absoluto de κ_s para uma curva regular α definida na parte regular de M, iremos obter, por (2.15) e a menos de sinal, a curvatura geodésica de α.

Observação 2.57. Uma vez que $d\lambda_{\gamma(t)}(\eta(t)) = \langle \nabla\lambda(\gamma(t)), \eta(t)\rangle$, obtemos $\operatorname{sgn}\left(d\lambda_{\gamma(t)}(\eta(t))\right)$ $= \operatorname{sgn}(\cos\theta)$, onde θ é o ângulo entre $\nabla\lambda(\gamma(t))$ e $\eta(t)$. Sabemos que o vetor $\nabla\lambda(\gamma(t))$ é ortogonal a $\gamma(t)$ e aponta para U_+. Como $\{\gamma'(t), \eta(t)\}$ é uma base positiva para $\mathbb{R}^2$, então $\eta(t)$ aponta para o lado esquerdo de γ. Assim, supondo que o lado esquerdo de γ

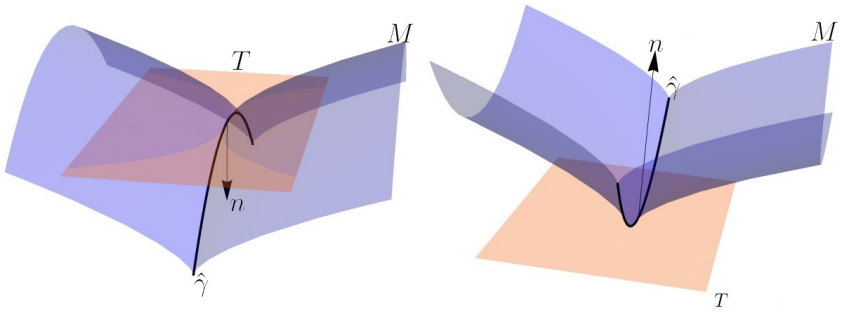


Figura 2.9: Cuspidal edge com curvatura singular negativa à esqueda, e positiva à direita.

é U_+, então $0 \leqslant \cos\theta < \frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{sgn}(d\lambda_{\gamma(t)}(\eta(t))) = +1$. Se o lado esquerdo de γ é U_-, então $\operatorname{sgn}(d\lambda_{\gamma(t)}(\eta(t))) = -1$. Concluímos então, que

$$\operatorname{sgn}(d\lambda_{\gamma(t)}(\eta(t))) = \begin{cases} +1, & \text{se o lado esquerdo de } \gamma \text{ é } U_+ \\ -1, & \text{se o lado esquerdo de } \gamma \text{ é } U_- \end{cases}.$$

♢

Consideremos o sistema de coordenadas adaptado (u, v) e $\gamma(u) = (u, 0)$ uma parametrização para a curva singular. Seja $\eta(u) = (a(u), e(u))$ o campo anulador de vetores ao longo de γ, onde a e e são funções suaves. Como $\{\gamma'(u), \eta(u)\}$ é uma base positiva para $\mathbb{R}^2$, então $\det(\gamma'(u), \eta(u)) > 0$ e, como $\gamma'(u) = (1, 0)$, concluímos que $e(u) > 0$. Pela Observação 2.53, $\lambda_u(u, 0) = 0$. Logo, neste sistema de coordenadas $\operatorname{sgn}(d\lambda_{\gamma(u)}(\eta(u))) = \operatorname{sgn}(\langle\nabla\lambda(\gamma(u)), \eta(u)\rangle) = \operatorname{sgn}(\lambda_v(\gamma(u)))$ e, portanto, a curvatura singular em $(u, 0)$ é dada por

$$\kappa_s(u) = \operatorname{sgn}(\lambda_v(u, 0))\frac{\det(f_u, f_{uu}, \nu)}{\|f_u\|^3}(u, 0), \tag{2.22}$$

onde, pela Observação 2.57,

$$\operatorname{sgn}(\lambda_v) = \begin{cases} +1, & \text{se o lado esquerdo de } \gamma \text{ é } U_+ \\ -1, & \text{se o lado esquerdo de } \gamma \text{ é } U_- \end{cases}. \tag{2.23}$$

Exemplo 2.58. Consideremos a cuspidal edge $f(u, v) = (u, v^2, v^3)$. Pelo Exemplo 2.40 a curva singular de f está contida no eixo-u e o sistema de coordenadas em que f está definida é um sistema de coordenadas adaptado em $\mathbf{0}$. Assim, podemos aplicar (2.22) para calcular a curvatura singular de f. Como $f_{uu}(u, 0) = (0, 0, 0)$, então $\kappa_s(u) = 0$, para todo ponto singular de f. ♢

Exemplo 2.59. Seja $f(u, v) = (au^2 + v^2, bv^2 + v^3, u)$, com $a, b \in \mathbb{R}$, a cuspidal edge do Exemplo 2.43, que tem a curva singular contida no eixo-u.

Pelo Exemplo 2.51, obtemos $\lambda_v(u, 0) > 0$ e, assim, por (2.22),

$$\kappa_s(u) = \frac{2a}{(4a^2u^2 + 1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1 + b^2(1 + 4a^2u^2)}}. \tag{2.24}$$

Exemplo 2.60. Seja f uma cuspidal edge na forma normal (2.18). Como $f_u(\mathbf{0}) = (1,0,0)$, $f_{vv}(\mathbf{0}) = (0,1,0)$ e $\nu(\mathbf{0}) = (0,0,1)$, obtemos $\lambda_v(\mathbf{0}) = 1$. Logo, como $f_{uu}(\mathbf{0}) = (0, a''(0), b_1''(0))$, por (2.22) obtemos

$$\kappa_s(0) = a''(0) = a_{20}.$$

♢

Notemos que dos valores de $\kappa_s(0)$ e de $\kappa_\nu(0)$ (encontrado no Exemplo 2.55(a)) para a forma normal (2.18) e de (2.21), obtemos que $\kappa_{\hat{\gamma}}(0)^2 = \kappa_s(0)^2 + \kappa_\nu(0)^2$. Por (2.14), essa identidade já era conhecida para curvas regulares na parte regular de M e, como vimos, se estende para $\hat{\gamma}$ com as curvaturas normal limitante e singular.

2.4 Formas Diferenciais

O estudo de formas diferenciais se faz necessário neste trabalho pois, ao estudar uma extensão do Teorema de Koenderink para superfícies singulares, iremos trabalhar com a 1-forma curvatura e a 2-forma curvatura Gaussiana de aplicações em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. A referência usada nesta seção é [5].

Seja E um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{R}$. Denotamos por $E^* = L(E, \mathbb{R})$ o espaço vetorial dos funcionais lineares $F : E \to \mathbb{R}$, o qual chamaremos de **espaço dual** de E, e que tem a mesma dimensão de E.

Dada uma base $\mathfrak{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de E, existe uma base $\mathfrak{B}^* = \{F_1, \ldots, F_n\}$ de E^* chamada **base dual** de $\mathfrak{B}$ satisfazendo:

$$F_i(v_j) = \delta_{ij}, \quad \text{onde } \delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{se } i \neq j \\ 1, \text{se } i = j \end{cases}.$$

Assim, dado $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in E$, obtemos $F_i(v) = \alpha_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Consequentemente, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} F_i(v) v_i$. Além disso, dado um funcional linear $F \in E^*$, supondo $F = \sum_{i=1}^{n} \beta_i F_i$, então $F(v_i) = \beta_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Assim, $F = \sum_{i=1}^{n} F(v_i) F_i$.

Seja $\mathfrak{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ a base canônia de $\mathbb{R}^n$. Uma base para o espaço dual de $\mathbb{R}^n$, $(\mathbb{R}^n)^*$, é obtida tomando $\{dx_i \,|\, i = 1, \ldots, n\}$, onde $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a projeção na $i-$ésima coordenada, pois

$$dx_i(e_j) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \begin{cases} 0, \text{se } i \neq j \\ 1, \text{se } i = j \end{cases}.$$

Definição 2.61. Uma **1-forma** em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação ω que para cada $p \in \mathbb{R}^n$ um elemento $\omega(p) \in (\mathbb{R}^3)^*$. A 1-forma ω pode ser escrita como

$$\omega(p) = a_1(p)dx_1 + \ldots a_n(p)dx_n$$

ou

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i dx_i,$$

onde a_i são funções em $\mathbb{R}^n$. Se as funções a_i são diferenciaveis, então ω é chamada de **1-forma diferenciável**.

Seja $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das aplicações $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ que são bilineares e alternadas, isto é, são lineares em cada coordenada e satisfazem $\varphi(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = -\varphi(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1)$. Com as operações usuais funções, $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial.

Quando $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathbb{R}^n)^*$, então $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$, onde

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \det(\varphi_i(\mathbf{v}_j)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(\mathbf{v}_1) & \varphi_1(\mathbf{v}_2) \\ \varphi_2(\mathbf{v}_1) & \varphi_2(\mathbf{v}_2) \end{vmatrix}.$$

O conjunto $\{dx_i \wedge dx_j \,|\, i < j\}$ é uma base para $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$. Além disso, valem as seguintes igualdades:

$$dx_i \wedge dx_j = -(dx_j \wedge dx_i), i \neq j$$

e

$$dx_i \wedge dx_i = 0$$

Definição 2.62. Uma **2-forma** em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação ω que para cada $p \in \mathbb{R}^n$ associa um elemento $\omega(p) \in \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$. A 2-forma ω pode ser escrita da forma

$$\omega(p) = \sum_{i<j} a_{ij} dx_i \wedge dx_j, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

onde a_{ij} são funções reais em $\mathbb{R}^n$. Quando as funções a_{ij} são diferenciáveis, ω é chamada de **2-forma diferenciável**.

CAPÍTULO 3

PROJEÇÃO ORTOGONAL DE SUPERFÍCIES EM $\mathbb{R}^3$

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados sobre a teoria de contato entre subvariedades diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$. Para evitar deixar o capítulo por demais extenso, vamos priorizar os resultados referentes ao estudo do contato de superfícies com retas.

A principal referência para este capítulo é o livro [13], que apresenta em seu Capítulo 4 alguns dos resultados da teoria geral de contato entre subvariedades desenvolvida por J. Montaldi em sua tese de doutorado [20] e reune alguns resultados de [1, 12, 14] sobre a projeção ortogonal em planos de superfícies em $\mathbb{R}^3$.

3.1 Contato entre subvariedades de $\mathbb{R}^3$

Definição 3.1. Sejam M_i, N_i, $i = 1, 2$ germes de subvariedades de $\mathbb{R}^n$ com $\dim(M_1) = \dim(M_2) = m$ e $\dim(N_1) = \dim(N_2) = d$. Dizemos que o contato entre M_1 e N_1 em y_1 é do **mesmo tipo** que o **contato** entre M_2 e N_2 em y_2 se existe um germe de difeomorfismo $\Phi : (\mathbb{R}^n, y_1) \to (\mathbb{R}^n, y_2)$ tal que $\Phi(M_1) = M_2$ e $\Phi(N_1) = N_2$. Neste caso, escrevemos $K(M_1, N_1; y_1) = K(M_2, N_2; y_2)$.

A definição acima gera uma relação de equivalência entre os pares de subvariedades de $\mathbb{R}^n$.

Se M é dado como imagem de um germe de imersão $g : (\tilde{M}, x) \to (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$, isto é, $g(\tilde{M}) = M$, onde $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^l$ é uma subvariedade m-dimensional e N é dado localmente como conjunto de zeros de um germe de submersão $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^k, \mathbf{0})$, isto é, $N = f^{-1}(\mathbf{0})$, o germe de composição $f \circ g$ é chamado de germe de **aplicação de contato** entre M e N.

Sabemos que dadas as subvariedades em $\mathbb{R}^n$ podemos fazer diferentes escolhas de germes de imersões e submersões para obtê-las e, assim, existem diferentes germes de aplicação de contato entre essas subvariedades. No entanto, vale o seguinte lema.

Lema 3.2. ([13], p. 76) *Para qualquer par de germes da subvariedades em $\mathbb{R}^n$, a $\mathcal{K}$-classe da aplicação de contato depende apenas dos germes das subvariedades e não da aplicação de contato.*

O teorema enunciado a seguir possibilita saber quando dois pares de subvariedades têm o mesmo tipo de contato analisando as singularidades das aplicações de contato entre elas. Mais precisamente, vale o seguinte resultado.

Teorema 3.3. ([13], p. 76) *Sejam $g_i : (M_i, x_i) \to (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ germes de imersão e $f_i : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^k, \mathbf{0})$ germes de submersão com $N_i = f^{-1}(\mathbf{0})$, $i = 1, 2$. Os pares (M_1, N_1) e (M_2, N_2) têm o mesmo tipo de contato se, e somente se, $f_1 \circ g_1$ e $f_2 \circ g_2$ são $\mathcal{K}$-equivalentes.*

Segue do teorema acima que podemos classificar o tipo de contato entre duas subvariedades de acordo com a $\mathcal{K}$-classe de singularidade do germe de aplicação de contato.

Exemplo 3.4. Sejam C_1 um germe de curva regular em $\mathbb{R}^2$, parametrizada localmente em $p \in C_1$ por $\alpha : (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}^2$ e C_2 um germe de curva regular em $\mathbb{R}^2$ dada como imagem inversa do zero por $F : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \to \mathbb{R}$. O germe de aplicação de contato entre C_1 e C_2 é dado por $h = F \circ \alpha : (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}$. Dizemos que as curvas C_1 e C_2 têm **contato de ordem** $k + 1$ em 0 quando h tem uma singularidade A_k em 0, a qual pode ser caracterizada usando a Observação 2.16.

Tomando, por exemplo, $C_1 = \alpha(\mathbb{R}, 0)$, onde α é dada por $\alpha(t) = (t, 0)$ e $C_2 = F^{-1}(0)$, onde F é dada por $F(u, v) = 2u^k + 3v$, obtemos $h(t) = F \circ \alpha(t) = 2t^k$. Assim, pela Observação 2.16, concluímos que C_1 e C_2 têm contato de ordem k em 0. ♢

Iremos definir a seguir o conceito de transversalidade entre subvariedades e depois provaremos uma relação entre este conceito com o estudo de contato entre subvariedades.

veremos uma relação entre este conceito e o contato entre subvariedades transversais.

Definição 3.5. Sejam M uma variedade diferenciável, $f : (M, x) \to (\mathbb{R}^n, y)$ um germe de aplicação diferenciável, e N uma subvariedade de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que f é **transversal** a N em x quando $f(x) \notin N$ ou $f(x) \in N$ e $T_{f(x)}N + df_x(T_xM) = \mathbb{R}^n$. Dizemos que duas subvariedades diferenciáveis M e N em $\mathbb{R}^n$ são transversais em x quando tomamos f como sendo a inclusão $i : (M, x) \to (\mathbb{R}^n, x)$, isto é, quando $x \in M \cap N$ implicar $T_xM + T_xN = \mathbb{R}^n$.

Proposição 3.6. *Sejam M e N subvariedades de $\mathbb{R}^n$, tal que M é m-dimensional, dado por um germe de imersão $g : (\tilde{M}, x) \to (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$, e N é a imagem inversa de $\mathbf{0}$ por um germe de submersão $f : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^{n-d}, \mathbf{0})$, onde $\mathbf{0}$ é valor regular de f. Então M e N são transversais em $\mathbf{0}$ se, e somente se, $m + d \geqslant n$ e a aplicação de contato $F = f \circ g$ é regular em x.*

Demonstração: Sabemos que

$$\dim(T_{\mathbf{0}}M + T_{\mathbf{0}}N) = \dim T_{\mathbf{0}}M + \dim T_{\mathbf{0}}N - \dim(T_{\mathbf{0}}M \cap T_{\mathbf{0}}N) = m + d - l,$$

onde $l = \dim(T_{\mathbf{0}}M \cap T_{\mathbf{0}}N)$.

Suponhamos que M e N são transversais em $\mathbf{0}$. Assim $T_{\mathbf{0}}M + T_{\mathbf{0}}N = \mathbb{R}^n$, e então $m + d - l \geqslant n$. Logo $m + d \geqslant n$. Notemos que aplicação de contato dada por $F = f \circ g : (\tilde{M}, x) \to (\mathbb{R}^{n-d}, \mathbf{0})$ é regular se F é um germe de submersão. Mostremos então que $dF_x = df_{\mathbf{0}} \circ dg_x : T_x\tilde{M} \to \mathbb{R}^{n-d}$ é sobrejetora.

Como g é um germe de imersão obtemos que $dg_x(T_x\tilde{M}) = T_{\mathbf{0}}M$. Assim $\ker(dF_x) = \ker(df_{\mathbf{0}}|_{T_{\mathbf{0}}M}) = \ker(df_{\mathbf{0}}) \cap T_{\mathbf{0}}M = T_{\mathbf{0}}N \cap T_{\mathbf{0}}M$. Logo, $\dim\ker(dF_x) = l$, e

$$\dim(T_x\tilde{M}) = \dim\ker(dF_x) + \dim(\operatorname{Im} F_x),$$

e então, $\dim \operatorname{Im} dF_x = m - l \geqslant n - d$. Assim, como $\dim(\operatorname{Im} dF_x) \geqslant n - d$, segue que $\operatorname{Im} dF_x = \mathbb{R}^{n-d}$, e F é um germe de submersão.

Reciprocamente, suponhamos que $m+d \geqslant n$ e $F = f \circ g$ é regular, isto é que F é um germe de submersão. Então, temos que $dF_x : T_x\tilde{M} \to \mathbb{R}^{n-d}$ é sobrejetora. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, $m = l+n-d$, ou seja, $m+d-l = n$. Logo, $\dim T_{\mathbf{0}}M + T_{\mathbf{0}}N = n$ e, então, $T_{\mathbf{0}}M + T_{\mathbf{0}}N = \mathbb{R}^n$, e concluímos que M e N são subvariedades transversais em $\mathbf{0}$, como queríamos. □

3.2 Função altura e contato com planos

Nosso objetivo nesta seção é definir o conceito de *cúspide de Gauss*. Para isso, vamos estudar brevemente o contato de superfícies com planos, omitindo a justificativa das afirmações feitas ao longo do texto, que podem ser consultadas com detalhes nas Seções 4.4 e 6.3 de [13].

Nesta seção, U e V denotarão abertos em $\mathbb{R}^2$, M denotará uma superfície regular, parametrizada localmente em $p \in M$ por $\mathtt{x} : U \to \mathbb{R}^3$, com $q \in U$ e $p = \mathtt{x}(q)$.

Queremos estudar o contato entre a superfície M e planos. Um plano passando por um ponto $P \in \mathbb{R}^3$ e ortogonal a um vetor $\mathbf{v}$ é formado pelos pontos X de $\mathbb{R}^3$ tal que $\langle X - P, \mathbf{v}\rangle = 0$, ou seja, $\langle X, \mathbf{v}\rangle = \langle P, \mathbf{v}\rangle$. Assim, planos em $\mathbb{R}^3$ são completamente determinados por um vetor e um escalar. Por razões que se tornarão claras mais adiantes, vamos considerar P como sendo a origem de $\mathbb{R}^3$.

Dado um vetor unitário $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, o plano $\Pi = \{X \in \mathbb{R}^3 \,|\, \langle X, \mathbf{v}\rangle = 0\}$ pode ser escrito como $H_{\mathbf{v}}^{-1}(0)$, onde $H_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é a submersão dada por $H_{\mathbf{v}}(X) = \langle X, \mathbf{v}\rangle$, chamada de **função altura** em $\mathbb{R}^3$.

A função altura em M é a função $\tilde{h}_{\mathbf{v}} : M \to \mathbb{R}$ dada por $\tilde{h}_{\mathbf{v}}(p) = \langle p, \mathbf{v}\rangle$, que é singular em $p \in M$ se, e somente se, $h_{\mathbf{v}} = \tilde{h}_{\mathbf{v}} \circ \mathtt{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é singular em q. Notemos que $h_{\mathbf{v}}$ é a aplicação de contato entre M e Π.

Como queremos estudar o contato ente M e Π, pelo Teorema 3.3 podemos estudar a $\mathcal{K}$-classe de singularidade do germe de função $h_{\mathbf{v}}$. Esse é o motivo de considerarmos o plano passando pela origem: como vamos analisar a classe de singularidade da aplicação de contato, se queremos estudar o contato de M com um plano $\tilde{\Pi}$ em p, podemos tomar o plano paralelo a $\tilde{\Pi}$ passando pela origem, denotado por Π, pois, dessa forma, as aplicações de contato entre M e $\tilde{\Pi}$ em p e entre M e Π diferem por constante, de forma que seus germes pertencem a mesma $\mathcal{K}$-classe. Por isso, para estudar contato com planos basta estudar as singularidades de $h_{\mathbf{v}}$.

Existem alguns resultados que fornecem as singularidades podem acontecer para a função altura $h_{\mathbf{v}}$ para superfícies genéricas e algumas propriedades da superfície que podem ser obtidas a partir deste contato. Mais precisamente, é possível mostrar que existe um conjunto aberto e denso $\mathcal{O}_1$ de imersões próprias $\mathtt{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que, para todo $\mathtt{x} \in \mathcal{O}_1$ a função altura na direção normal $\mathbf{v}$ da superfície $M = \mathtt{x}(U)$ tem somente singularidades A_k, com $k = 1, 2$ ou 3. Uma superfície é chamada (localmente) de **genérica para a função altura** se uma de suas parametrizações locais pertencer ao conjunto $\mathcal{O}_1$.

O resultado que enunciamos a seguir relaciona informações sobre a geometria da superfície M com as singularidades de $h_{\mathbf{v}}$.

Proposição 3.7. ([13], p. 147) *A função altura $\tilde{h}_{\mathbf{v}}$ é singular em $p = \mathtt{x}(q)$ se, e somente se, $\mathbf{v}$ é uma direção normal à M em p. A singularidade de $h_{\mathbf{v}}$ em q é do tipo A_1^+ se, e somente se, p é um ponto elíptico, A_1^- se, e somente se p é um ponto hiperbólico a $A_{\geqslant 2}$ se, e somente se, p é um ponto parabólico.*

O resultado anterior mostra a importância de estudar o contato entre subvariedades. Nele, informações geométricas de uma superfície foram obtidas ao estudar as singularidades de $h_{\mathbf{v}}$, isto é, o contato de superfícies com planos.

Observação 3.8. Quando a superfície M é dada na forma de Monge $z = f(u, v)$, com $p = \mathbf{0}$ e T_pM sendo o plano $\{z = 0\}$, as condições para que a função altura h_{N_0} na direção normal $N_0 = (0, 0, 1)$ tenha uma singularidade em $q = (0, 0)$ podem ser expressas em termos dos coeficientes do polinômio de Taylor de f. Observemos que $h_{N_0}(u, v) = \langle \mathtt{x}(u, v), N_0\rangle = \langle (u, v, f(u, v)), (0, 0, 1)\rangle = f(u, v)$, onde $\mathtt{x}(u, v)$ é a parametrização natural de M dada por $\mathtt{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$. Com abuso de notação, vamos denotar também por $f(u, v)$ o polinômio de Taylor de f, dado por

$$f(u, v) = a_{20}u^2 + a_{21}uv + a_{22}v^2 + a_{30}u^3 + a_{31}u^2v + a_{32}uv^2 + a_{33}v^3 + \dots . \tag{3.1}$$

Se p é um ponto parabólico (não umbílico). A função altura h_{N_0} tem uma singularidade do tipo A_2 em p se, e somente se, $a_{22} = 0$ e $a_{33} \neq 0$, e tem uma singularidade do tipo A_3 em p se, e somente se, $a_{22} = a_{33} = 0$ e $a_{32}^2 - 4a_{20}a_{44} \neq 0$. Para mais detalhes deste resultado ver o Teorema 6.2, p. 149 de [13]. ♢

As singularidades da função altura em uma superfície M estão relacionadas com as singularidades da aplicação normal de Gauss $N : M \to \mathbb{S}^2$. Se $\mathtt{y} : V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$ é parametrização local de $\mathbb{S}^2$ em $N(p)$, então $N : M \to \mathbb{S}^2$ é singular em p se, e somente se, $\mathtt{y}^{-1} \circ N \circ \mathtt{x} : U \to V$ é singular em q, ou seja, para conhecer as $\mathcal{A}$-singularidades da aplicação de Gauss basta conhecer as $\mathcal{A}$-singularidades de aplicações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. A proposição a seguir diz quais singularidades ocorrem para a aplicação de Gauss de uma superfície genérica para a função altura, relacionando-as com as singularidades da função altura.

Proposição 3.9. ([13], p. 154) *A aplicação de Gauss $N : M \to \mathbb{S}^2$ de uma superfície genérica para a função altura é um difeomorfismo local ou tem somente singularidades do tipo dobra ou cúspide. Além disso, N é singular em p se, e somente se, p é um ponto parabólico. A singularidade do tipo dobra ocorre nas singularidades A_2 da função altura e a singularidade do tipo cúspide ocorre nas singularidades A_3 da função altura.*

A proposição anterior motiva a definição de cúspide de Gauss, como segue.

Definição 3.10. Um ponto p no conjunto parabólico de uma superfície M onde a função altura na direção normal à M em p tem uma singularidade A_3 é chamado de **cúspide de Gauss**.

Interpretações geométricas e resultados envolvendo a geometria de M e cúspides de Gauss podem ser encontradas em [13], p. 155 e 186.

Observação 3.11. Segue da Observação 3.8 que se consideramos M dada na forma de Monge $z = f(u, v)$, $N_0 = (0, 0, 1)$ e $p = \mathbf{0}$ um ponto parabólico não planar de M, então p é uma cúspide de Gauss se, e somente se, $a_{22} = a_{33} = 0$ e $a_{32}^2 - 4a_{20}a_{44} \neq 0$. ♢

3.3 Projeção ortogonal e contato com retas

Estudaremos nesta seção o contato de superfícies com retas. As $\mathcal{A}$-classes de contato de uma superfície $M \subset \mathbb{R}^3$ e uma reta ℓ em uma direção $\mathbf{v}$ são obtidas pelas $\mathcal{A}$-classes de

singularidade da projeção ortogonal sobre planos na direção $\mathbf{v}$. Assim, nosso objetivo nesta seção é estudar quais tipos de $\mathcal{A}$-singularidades ocorrem para o germe de contato entre M e a reta ℓ, dado pela projeção ortogonal da direção $\mathbf{v}$ restrita a superfície M. Além disso, se considerarmos M na forma de Monge $z = f(u, v)$, queremos obter condições sobre os coeficientes da expansão de Taylor de f para que determinado tipo de singularidade ocorra para a projeção ortogonal de M e, a partir dessas condições algébricas, é possível obter informações geométricas sobre a superfície projetada.

Nesta seção M denotará uma superfície regular, $p \in M$ e $\mathtt{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização local de M em p, onde U é subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, $q_0 \in U$ e $\mathtt{x}(q_0) = p$. As vezes, será interessante considerar M na forma de Monge $z = f(u, v)$ em uma vizinhança de $p = \mathbf{0}$. Com abuso de notação, denotaremos o polinômio de Taylor de f também por $f(u, v)$, dado em (3.1).

Uma reta $\ell \subset \mathbb{R}^3$ passando por um ponto P em uma direção unitária $\mathbf{v}$ é formada pelos pontos $X \in \mathbb{R}^3$ tal que $X - P = \lambda\mathbf{v}$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Dado $X \in \ell$, obtemos que $\lambda = \langle X, \mathbf{v}\rangle - \langle P, \mathbf{v}\rangle$. Logo, a reta ℓ é o conjunto dos pontos $X \in \mathbb{R}^3$ que satisfazem $X - \langle X, \mathbf{v}\rangle\mathbf{v} + Q = \mathbf{0}$, onde $Q = -P + \langle P, \mathbf{v}\rangle\mathbf{v}$, e pode ser escrita como $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathbf{v}}^{-1}(\mathbf{0})$, onde $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2 + Q$ é a submersão dada por $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathbf{v}}(X) = X - \langle X, \mathbf{v}\rangle\mathbf{v} + Q$, onde $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ é o plano tangente a esfera unitária em $\mathbf{v}$.

Sabemos, pelo Teorema 3.3, que o tipo de contato de M com a reta $\ell = \tilde{\mathcal{P}}_{\mathbf{v}}^{-1}(\mathbf{0})$ em p é dado pela $\mathcal{K}$-classe de singularidade da aplicação de contato $\tilde{\mathcal{P}}_{\mathbf{v}} \circ \mathtt{x} : U \to T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2 + Q$, dada por

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\mathbf{v}} \circ \mathtt{x}(q) = \mathtt{x}(q) - \langle \mathtt{x}(q), \mathbf{v}\rangle\mathbf{v} + Q. \tag{3.2}$$

Notemos que a classe de singularidade de $\tilde{\mathcal{P}} \circ \mathtt{x}$ independe da constante Q. Assim, no estudo que faremos, iremos considerar a aplicação

$$\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(X) = X - \langle X, \mathbf{v}\rangle\mathbf{v}, \tag{3.3}$$

a qual é uma submersão e $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}^{-1}(0)$ é a reta paralela a $\mathbf{v}$ passando pela origem. Notemos que, dado $X \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(X)$ é o ponto de $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ obtido ao projetar ortogonalmente, isto é, na direção $\mathbf{v}$, o vetor X em $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$. Por esse motivo, chamaremos $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ de **projeção ortogonal** de $\mathbb{R}^3$ em $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$.

Variando $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^2$, obtemos a **família de projeções ortogonais** $\mathcal{P} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \to T\mathbb{S}^2$, dada por

$$\mathcal{P}(X, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, X - \langle X, \mathbf{v}\rangle\mathbf{v}).$$

A **família de projeções ortogonais em** M é a aplicação $P : U \times \mathbb{S}^2 \to T\mathbb{S}^2$ dada por

$$P(q, \mathbf{v}) = \mathcal{P}(\mathtt{x}(q), \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathtt{x}(q) - \langle \mathtt{x}(q), \mathbf{v}\rangle\mathbf{v}). \tag{3.4}$$

Denotemos por $P_{\mathbf{v}}$ a segunda componente da aplicação (3.4), ou seja, $P_{\mathbf{v}} : U \to T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ é dada por

$$P_{\mathbf{v}}(q) = \mathtt{x}(q) - \langle \mathtt{x}(q), \mathbf{v}\rangle\mathbf{v}. \tag{3.5}$$

Observemos que $P_{\mathbf{v}}$ coincide com a aplicação $\mathcal{P}_{\mathbf{v}} \circ \mathtt{x}$, que pertence a mesma $\mathcal{A}$-classe da aplicação dada em (3.2). Portanto, para estudar o tipo de contato de uma superfície M e uma reta paralela a uma direção $\mathbf{v}$, basta estudar as singularidades da projeção ortogonal $P_{\mathbf{v}}$.

Observação 3.12. Pelo Teorema 3.3, o contato entre a superfície M e uma reta paralela a $\mathbf{v}$ é medido pelas $\mathcal{K}$-singularidades de $P_{\mathbf{v}}$. No entanto, para obter informações sobre

a geometria da superfície M a partir de seu contato com retas é necessário considerar uma relação de equivalência mais fina que a equivalência de contato. Neste caso, como a dimensão da fonte é maior que 1, usaremos o grupo $\mathcal{A}$ para estudar o contato com retas pois, pode ser mostrado que, neste caso se dois germes de aplicação de contato $\mathcal{P}_{\mathbf{v}} \circ \mathtt{x}$ e $\mathcal{P}_{\mathbf{v}'} \circ \mathtt{x}'$ são $\mathcal{A}$-equivalentes, além de seus conjuntos de zeros serem difeomorfos, seus conjuntos singular e discriminante também são difeomorfos. Maiores detalhes sobre o motivo de se trocar o grupo $\mathcal{K}$ por $\mathcal{A}$ podem ser encontrado em [13]. ♢

Para a definição de ponto flecnodal que veremos a seguir, é conveniente considerar a superfície M dada como imagem inversa um valor regular por uma função, e a reta ℓ, paralela à direção $\mathbf{v}$, como imagem de uma imersão, uma vez que dessa maneira obtemos a aplicação de contato como sendo uma função real e podemos definir ordem de contato entre M e ℓ. A partir da ordem de contato também é possível obter algumas informações sobre a direção $\mathbf{v}$, como saber se ela é tangente e assintótica em um ponto da superfície.

Sejam M uma superfície dada localmente em $p \in M$ por $F^{-1}(0)$, onde 0 é valor regular de $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, e ℓ uma reta em $\mathbb{R}^3$ passando por um ponto $p = (x_0, y_0, z_0)$ paralela a uma direção $\mathbf{v}$, que pode ser obtida como imagem da parametrização $\alpha(t) = p + t\mathbf{v}$.

Consideremos a aplicação de contato $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = F \circ \alpha(t)$. Pelo Teorema 3.3 o tipo de contato de M com ℓ pode ser obtido pela de $\mathcal{K}$-classe de singularidade da aplicação de contato g. Como g é uma função real, podemos definir ordem de contato de M com ℓ da seguinte forma.

Definição 3.13. Dizemos que a reta ℓ tem **contato de ordem k**, para algum $k \geqslant 1$, com a superfície M em $p = \alpha(0)$ quando:

$$g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(k-1)}(0) = 0 \qquad \text{e } g^{(k)}(0) \neq 0 \tag{3.6}$$

onde $g^{(i)}$ denota a i-ésima derivada de g.

Dizemos que o contato é de **ordem pelo menos k**, ou ainda que é $\geqslant k$ se $g(0) = g'(0) = \ldots = g^{(k-1)}(0) = 0$.

Observemos que $g(0) = 0$ significa que $p = \alpha(0) \in M$. Além disso, afirmar que a reta ℓ e M tem contato de ordem k em p equivale a afirmar que a aplicação de contato g é uma singularidade A_{k-1}.

Exemplo 3.14. Seja M a superfície dada por $f(u, v) = uv + v^4$, que pode ser escrita como $F^{-1}(0)$, onde $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, e $p = \mathbf{0}$.

Considerando ℓ como o eixo-y, que pode ser parametrizado por $\alpha(t) = (0, t, 0)$, obtemos $g(t) = F \circ \alpha(t) = t^4$ e, então, $g'(0) = g''(0) = g'''(0) = 0$ e $g^{(4)}(0) \neq 0$. Logo, o eixo-y tem contato de ordem 4 com M em $\mathbf{0}$. ♢

Observação 3.15. Consideremos uma superfície na forma de Monge $z = f(u, v)$, de modo que $M = F^{-1}(0)$, onde $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, $p = (x_0, y_0, z_0) \in M$, e $\mathbf{v} = (a, b, c)$. As duas primeiras derivadas da aplicação de contato $g(t) = (F \circ \alpha)(t)$ são

$$g'(t) = af_u + bf_v - c, \qquad g''(t) = a^2 f_{uu} + 2abf_{uv} + b^2 f_{vv},$$

onde as derivadas são avaliadas em $(u_0 + ta, v_0 + tb)$.

Assim, as seguintes condições são necessárias para que M e a reta $\ell = p + t\mathbf{v}$ tenham contato de ordem $\geqslant 3$ em $p = \alpha(0) = (u_0, v_0, z_0)$:

$$c = af_u + bf_v \tag{3.7}$$

e

$$a^2 f_{uu} + 2abf_{vv} + b^2 f_{vv} = 0 \tag{3.8}$$

onde as derivadas de f são calculadas em (u_0, v_0).

Notemos que como $M = F^{-1}(0)$, o vetor $\nabla F(p) = (f_u(u_0, v_0), f_v(u_0, v_0), -1)$ é um vetor perpendicular a T_pM. Então, o vetor $\mathbf{v} = (a, b, c) = (a, b, af_u(u_0, v_0) + bf_v(u_0, v_0))$ é um vetor tangente à M em p. Assim, a condição (3.7) é equivalente a $\mathbf{v}$ ser um vetor tangente à M em p. Por (2.16), a condição (3.8) é equivalente a $\mathbf{v}$ ser uma direção assintótica em p.

Com as contas feitas acima, concluímos que direções assintóticas em um ponto são as direções de retas com contato de ordem maior ou igual a 3 com a superfície naquele ponto. Reciprocamente, se $\ell = p + t\mathbf{v}$ tem contato de ordem $\geqslant 3$ em M em p, então $\mathbf{v}$ é uma direção assintótica à M em p. Observe que, neste caso, p não é um ponto elíptico de M, uma vez que não há direções assintóticas em pontos elípticos. ♢

Um conceito importante relacionado ao contato de uma superfície M com retas é de ponto flecnodal, definido a seguir.

Definição 3.16. Um ponto $p \in M$ é chamado de **ponto flecnodal** se existe uma reta tangente à M em p com contato de ordem $\geqslant 4$ com M em p. O **conjunto flecnodal** em M é o conjunto de pontos flecnodais de M.

Notemos que, pela Observação 3.15, pontos flecnodais ocorrem apenas na parte não elíptica de M. Existem diversos resultados envolvendo pontos flecnodais. Por exemplo, genericamente, o conjunto flecnodal de uma superfície, quando não vazio, é uma curva regular. Além disso, pontos flecnodais coincidem com as inflexões geodésicas das curvas assintóticas. Para não fugirmos do objetivo desta seção, não iremos enunciar estes resultados, que podem ser consultados no livro base deste capítulo.

Exemplo 3.17. Se M é a superfície dada no Exemplo 3.14, obtemos que $p = \mathbf{0} \in M$ é ponto flenodal de M e $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ direção assintótica à M em p. ♢

Teorema 3.18. ([13], p. 166) *Seja M uma superfície na forma de Monge $z = f(u, v)$, com f dada em (3.1) e $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$. Então*

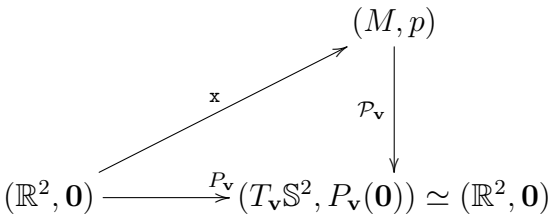
(a) *O ponto $p = \mathbf{0}$ é flecnodal se, e somente se, $f_v = f_{vv} = f_{vvv} = 0, f_{uv}f_{vvvv} \neq 0$, isto é, $a_{22} = a_{33} = 0$ e $a_{21}a_{44} \neq 0$.*

(b) *Se p é um ponto flecnodal, então o 1-jato da equação do conjunto flecnodal (no espaço de parâmetros) é dado por*

$$6\left(a_{43} - \frac{a_{32}^2}{a_{21}}\right)u + 24a_{44}v\,.$$

Na demonstração do teorema acima é usada uma uma definição equivalente para pontos flecndoais, envolvendo o fecho do conjunto de pontos onde a projeção ortogonal ao longo de uma direção assintótica tem uma singularidade rabo de andorinhas. Por esse motivo, considera-se $\mathbf{v}$ no enunciado do resultado.

Voltemos ao estudo do contato de superfícies com retas analisando as $\mathcal{A}$-singularidades da projeção ortogonal. Dado um ponto $p \in M$, podemos escolher uma parametrização local $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de M em p com $\mathbf{x}(\mathbf{0}) = p$. Fazendo a identificação de $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ com $\mathbb{R}^2$ e supondo que $P_{\mathbf{v}}(p) = \mathbf{0}$, o germe de composição $\mathcal{P}_{\mathbf{v}} \circ \mathbf{x}$ é um germe de $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$, como ilustra o seguinte diagrama.



A projeção ortogonal $\mathcal{P}_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ é uma submersão e, portanto, uma aplicação regular. No entanto, sua restrição à superfície M, $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}|_M : M \to T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ pode apresentar singularidades. No restante deste trabalho, com abuso de linguagem, iremos dizer que $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ é singular em $p \in M$ significando que sua restrição à M é singular em p. Os pontos de M onde $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ é singular são caracterizados pela seguinte proposição.

Proposição 3.19. *Seja $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^2$. A aplicação $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ é singular em $p \in M$ se, e somente se, $\mathbf{v}$ é tangente à M em p.*

Demonstração: Notemos que $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ é singular em p se, e somente se, $P_{\mathbf{v}}$ é singular em $\mathbf{0}$, isto é, se, e somente se, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial P_{\mathbf{v}}}{\partial u}(\mathbf{0}) = \alpha \frac{\partial P_{\mathbf{v}}}{\partial v}(\mathbf{0})$.

Por simplicidade, vamos omitir o ponto $\mathbf{0}$ onde as funções serão avaliadas e denotaremos por $\mathtt{x}_u$ e $\mathtt{x}_v$ as derivadas parciais de $\mathtt{x}$ com relação a u e v, respectivamente.

($\Rightarrow$) Suponha que $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ é singular em p. Então, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\mathtt{x}_u - \langle \mathtt{x}_u, \mathbf{v}\rangle \mathbf{v} = \alpha(\mathtt{x}_v - \langle \mathtt{x}_v, \mathbf{v}\rangle \mathbf{v})$, de onde segue que $\langle \alpha \mathtt{x}_v - \mathtt{x}_u, \mathbf{v}\rangle \mathbf{v} = \alpha \mathtt{x}_v - \mathtt{x}_u$ e, como $\mathtt{x}_u$ e $\mathtt{x}_v$ são vetores linearmente independentes, então $\langle \alpha \mathtt{x}_v - \mathtt{x}_u, \mathbf{v}\rangle \neq 0$. Logo, $\mathbf{v}$ é um vetor tangente à M em p.

($\Leftarrow$) Seja $\mathbf{v} = a\mathtt{x}_u + b\mathtt{x}_v$ um vetor tangente unitário à M em p. Então, como $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = a^2E + 2abF + b^2G = 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{\mathbf{v}}}{\partial u} &= \mathtt{x}_u - \langle \mathtt{x}_u, \mathbf{v}\rangle \mathbf{v} = (1 - a^2E - abF)\mathtt{x}_u + (-abE - b^2F)\mathtt{x}_v \\ &= b((aF + bG)\mathtt{x}_u - (aE + bF)\mathtt{x}_v). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{\mathbf{v}}}{\partial v} &= \mathtt{x}_v - \langle \mathtt{x}_v, \mathbf{v}\rangle \mathbf{v} = (-a^2F - abG)\mathtt{x}_u + (1 - b^2G - abF)\mathtt{x}_v \\ &= -a((aF + bG)\mathtt{x}_u - (aE + bF)\mathtt{x}_v). \end{aligned}$$

Logo, como $\frac{\partial P_{\mathbf{v}}}{\partial u}$ e $\frac{\partial P_{\mathbf{v}}}{\partial v}$ são paralelos, então $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ é singular em p. □

A Proposição 3.19 dá uma condição para que a projeção ortogonal $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ seja singular. A partir dela, obtemos também o conjunto singular de $P_{\mathbf{v}}$, dado por

$$\{(u, v) \in U \mid \mathbf{v} \text{ é um vetor tangente à } M \text{ em } \mathtt{x}(u, v)\}.$$

O próximo resultado complementa informações sobre as singularidades de $P_{\mathbf{v}}$.

Teorema 3.20. ([13], p. 165) *Existe um conjunto aberto e denso $\mathcal{O}_2$ de imersões $\mathtt{x} : V \to \mathbb{R}^3$, onde V é um aberto em $\mathbb{R}^2$, tal que para todo $\mathtt{x} \in \mathcal{O}_2$, a superfície $M = \mathtt{x}(V)$ tem a seguinte propriedade: para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^2$, a projeção ortogonal $P_{\mathbf{v}}$ tem apenas $\mathcal{A}$-singularidades com $\mathcal{A}_e$-codimensão $\leqslant 2$ em todo ponto $p \in M$. Além disso, as singularidades são $\mathcal{A}_e$-versalmente desdobradas pela família P.*

Definição 3.21. Uma superfície é chamada **genérica para a projeção ortogonal** se alguma de suas parametrizações locais pertencer ao conjunto $\mathcal{O}_2$ dado no Teorema 3.20.

Dada uma superfície M na forma de Monge $z = f(u, v)$, genérica para a projeção ortogonal, estudaremos agora um teorema que dá informações algébricas para as singularidades de $P_{\mathbf{v}}$ em função dos coeficientes a_{ij} da expansão de Taylor de f, além de dar informações geométricas para cada tipo de singularidade. Antes de estudá-lo, enunciaremos uma proposição que será útil na demonstração desse resultado.

Proposição 3.22. ([13], p. 157) *Sejam M uma superfície dada na forma de Monge $z = f(u, v)$, $p = (0, 0, 0)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 0) \in T_pM$. Se $\mathbf{v}$ é uma direção assintótica no ponto parabólico p, que não é uma cúspide de Gauss, então a curvatura geodésica em $N(p)$ da imagem da curva parabólica pela aplicação de Gauss é*

$$\kappa_g = -\frac{3a_{31}a_{33} - a_{32}^2}{24a_{20}^3 a_{33}}.$$

Pela Proposição 3.19, se $\mathbf{v}$ não é um vetor tangente à M em p, então $P_{\mathbf{v}}$ é regular em $\mathbf{0}$. Logo, pela Observação 2.10 obtemos que $P_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{A}} (u, v)$.

Analisemos então os casos em que $\mathbf{v}$ é um vetor tangente à M em p, ou seja, os casos em que $P_{\mathbf{v}}$ é singular em $\mathbf{0}$. Conhecemos a classificação dos germes de $(\mathbb{R}^2, 0)$ em $(\mathbb{R}^2, 0)$ com $\mathcal{A}_e$-codimensão $\leqslant 2$, dada na Tabela 2.1. Assim, pelo Teorema 3.20, considerando superfícies genéricas para a projeção ortogonal, concluímos que as singularidades de $P_{\mathbf{v}}$ são aquelas apresentadas na Tabela 2.1 (ou seja, do tipo dobra, cúspide, lábios/bicos, ganso, rabo de andorinha, borboleta ou gaivota). Nosso problema é de reconhecimento dessas singularidades, isto é, queremos encontrar condições sobre os coeficientes a_{ij} de f para que $P_{\mathbf{v}}$ seja $\mathcal{A}$-equivalente a uma das singularidades dadas na Tabela 2.1. Para fazer isso vamos usar o fato que essas singularidades são k-$\mathcal{A}$-determinadas e, então, podemos trabalhar com o k-jato de $P_{\mathbf{v}}$.

Teorema 3.23. ([13], p. 167) *Suponha que M é dada na forma de Monge $z = f(u, v)$ e $p = \mathbf{0}$. Seja $\mathbf{v} = (0, 1, 0) \in T_pM$ e considere a expansão de Taylor de f em torno da origem dada em (3.1) Então, a condição para $P_{\mathbf{v}}$ ter uma das singularidades dadas na Tabela 2.1 em p é dada na Tabela 3.1 em função dos coeficientes a_{ij}, bem como o significado geométrico para essas singularidades.*

Na demonstração do teorema acima iremos usar o resultado a seguir, que fornece condições algébricas e informações geométricas para que a família P seja um desdobramento $\mathcal{A}_e$-versal de $P_{\mathbf{v}}$. Ele será importante para obter as informações geométricas das singularidades borboleta e gaivota no Teorema 3.23.

Teorema 3.24. ([13], p. 173) *Sejam M uma superfície dada na forma de Monge $z = f(u, v)$ em $p = \mathbf{0}$, com f dada em (3.1) e $\mathbf{v} = (0, 1, 0) \in T_pM$. Então, as condições para a família de projeções ortogonais ser um desdobramento $\mathcal{A}_e$-versal das singularidades dadas na Tabela 3.1 são dadas na Tabela 3.2 (onde assumimos que as condições algébricas dadas na Tabela 3.1 são satisfeitas para cada tipo de singularidade). Para as singularidades que não aparecem na Tabela 3.2, P é sempre um desdobramento versal de $P_{\mathbf{v}}$.*

Demonstração do Teorema 3.23: Como M é dada na forma de Monge $z = f(u, v)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$, obtemos, fazendo a identificação de $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ com $\mathbb{R}^2$, que

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{v}}(u, v) &= (u, f(u, v)) \\ &= (u, a_{20}u^2 + a_{21}uv + a_{22}v^2 + a_{30}u^3 + a_{31}u^2v + a_{32}uv^2 + a_{33}v^3 + \mathcal{O}(4)). \end{aligned}$$

Nome	**Condições Algébricas**	**Significados Geométricos**
Dobra	$a_{22} \neq 0$	**v** não é direção assintótica
Cúspide	$a_{22} = 0, a_{21} \neq 0, a_{33} \neq 0$	p ponto hiperbólico e **v** direção assintótica em p
Lábios/Bicos	$a_{22} = 0, a_{21} = 0, a_{33} \neq 0, a_{32}^2 - 3a_{31}a_{33} \neq 0$	p ponto parabólico e **v** direção assintótica em p
Ganso	$a_{22} = 0, a_{21} = 0, a_{33} \neq 0, a_{32}^2 - 3a_{31}a_{33} = 0, 27a_{41}a_{33}^3 - 18a_{42}a_{32}a_{33}^2 + 9a_{43}a_{32}^2a_{33} - 4a_{44}a_{32}^2 \neq 0$	p ponto parabólico, **v** direção assintótica em p e a imagem de Gauss do conjunto parabólico tem uma inflexão geodésica
Rabo de Andorinha	$a_{22} = 0, a_{21} \neq 0, a_{33} = 0, a_{44} \neq 0$	p ponto hiperbólico flecnodal e **v** direção assintótica em p
Borboleta	$a_{22} = 0, a_{21} \neq 0, a_{33} = 0, a_{44} = 0, a_{55} \neq 0, (8a_{55}a_{77} - 5a_{66}^2)a_{21}^2 + 2a_{55}(a_{32}a_{66} - 20a_{43}a_{55})a_{21} + 35a_{32}^2a_{55}^2 \neq 0$	p ponto hiperbólico flecnodal, **v** direção assintótica em p e tangente à curva flecnodal em p
Gaivota	$a_{22} = 0, a_{21} = 0, a_{33} = 0, a_{32} \neq 0, a_{44} \neq 0, a_{55}a_{32}^2 - 2a_{43}a_{44}a_{32} + 4a_{31}a_{44}^2 \neq 0$	p cúspide de Gauss (parabólico) e **v** direção assintótica em p

Tabela 3.1: Condições algébricas e significados geométricos para as singularidades locais de $P_{\mathbf{v}}$.

Nome	**Condição Algébrica**	**Interpretação Geométrica**
Ganso	$a_{20} \neq 0$	p não é um ponto umbílico chato
Gaivota	$a_{32}^2 - 4a_{20}a_{44} \neq 0$	A imagem da curva parabólica pela aplicação de Gauss é uma curva com uma $(2,3)$-cúspide em $N(p)$
Borboleta	$a_{32}^2 - a_{21}a_{43} \neq 0$	A curva flecnodal é não singular

Tabela 3.2: Condições para a família de projeções ortogonais ser um desdobramento versal.

Observemos primeiramente que todos os monômios da forma $(0, a_{i0}u^i)$ podem ser eliminados do k-jato de $P_{\mathbf{v}}$. Para fazer isso, basta considerar a mudança de coordenadas $h(u,v) = (u, v - a_{i0}u^i)$ na meta. Assim, obtemos $j^kP_{\mathbf{v}}(u,v) \sim_{\mathcal{A}} (u, j^kf(u,v) - j^kf(u,0))$.

Analisemos agora como reconhecer as singularidades de $P_{\mathbf{v}}$ em função dos coeficientes a_{ij} de f.

- **Dobra**

Sabemos que a singularidade $f(u,v) = (u, v^2)$ é 2-$\mathcal{A}$-determinada. Então, vamos

trabalhar com $j^2P_{\mathbf{v}}$ que é $\mathcal{A}$-equivalente a $g(u,v) = (u, a_{21}uv + a_{22}v^2)$.

Se $a_{22} \neq 0$, considerando a mudança de coordenadas $h(u,v) = (u, v - \frac{a_{21}}{2a_{22}}u)$ na fonte, obtemos $g \circ h(u,v) = (u, a_{22}v^2 + \lambda u^2)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, ou seja, a mudança de coordenadas h elimina o termo uv da segunda coordenada de g. Assim, obtemos $j^2P_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{A}} g \sim_{\mathcal{A}} (u, a_{22}v^2 + \lambda u^2) \sim_{\mathcal{A}} (u, a_{22}v^2) \sim_{\mathcal{A}} (u, v^2)$, que é 2-$\mathcal{A}$-determinada. Logo, $j^2P_{\mathbf{v}}$ também é 2-$\mathcal{A}$-determinado e, portanto, $P_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{A}} (u, v^2)$.

Se $a_{22} = 0$, então $j^2P_{\mathbf{v}}$ é $\mathcal{A}$-equivalente a (u, uv), se $a_{21} \neq 0$ e a $(u, 0)$ se $a_{21} = 0$. Em ambos os casos, $j^2P_{\mathbf{v}}$ tem $\mathcal{A}$-codimensão infinita e, portanto, não é $\mathcal{A}$-equivalente a (u, v^2).

- **Cúspide**

Primeiramente, observemos que se $P_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{A}} (u, uv + v^3)$, então $j^2P_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{A}} (u, uv)$, o que acontece se, e somente se, $a_{22} = 0$ e $a_{21} \neq 0$.

Busquemos condições para os outros coeficientes a_{ij} de f de tal forma que $P_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{A}} (u, uv + v^3)$.

Usando o fato que a singularidade do tipo cúspide é 3-$\mathcal{A}$-determinada, vamos trabalhar com o 3-jato de $P_{\mathbf{v}}$. Temos

$$\begin{aligned} j^3P_{\mathbf{v}}(u,v) &\sim_{\mathcal{A}} (u, a_{21}uv + a_{31}u^2v + a_{32}uv^2 + a_{33}v^3) \\ &= (u, u(a_{21}v + a_{31}uv + a_{32}v^2) + a_{33}v^3) \\ &= (u, u(a_{21}v + g(u,v)) + a_{33}v^3), \end{aligned}$$

onde $g(u,v) = a_{31}uv + a_{32}v^2$.

Tomando a mudança de coordenadas na fonte dada por $h(u,v) = \left(u, v - \frac{g(u,v)}{a_{21}}\right)$, obtemos que $j^3P_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{A}^{(3)}} (u, a_{21}uv + a_{33}v^3)$, que por sua vez é $\mathcal{A}$-equivalente à $(x, xy + y^3)$ se $a_{33} \neq 0$. Sabendo que a singularidade $f(x,y) = (x, xy + y^3)$ 3-$\mathcal{A}$-determinada, concluímos que se $a_{33} \neq 0$, então $P_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{A}} (x, xy + y^3)$.

Para informações geométricas desta singularidade, observemos que, pela Proposição 2.36, obtemos que $a_{22} = 0$ e $a_{21} \neq 0$ se, e somente se, $\mathbf{v}$ é uma direção assintótica no ponto não parabólico (portanto, hiperbólico) p.

Assim como neste caso, nas demais singularidades teremos $a_{22} = 0$ e, portanto, $\mathbf{v}$ é uma direção assintótica.

- **Rabo de Andorinha**

Inicialmente, observemos que se $P_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{A}} (u, uv + v^4)$, então $j^2P_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{A}^{(2)}} (u, uv)$, e isso acontece se, e somente se, $a_{22} = 0$ e $a_{21} \neq 0$. Além disso, devemos ter $a_{33} = 0$, pois caso contrário, $P_{\mathbf{v}}$ seria $\mathcal{A}$-equivalente a singularidade do tipo cúspide. Vamos usar o fato que $(u, uv + v^4)$ é 4-$\mathcal{A}$-determinada e trabalhar com o 4-jato de $P_{\mathbf{v}}$. Algumas contas necessárias para obter esse reconhecimento são extensas, por isso usamos o software Wolfram Mathematica em alguns momentos.

Como $a_{22} = a_{33} = 0$ e $a_{21} \neq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} j^4P_{\mathbf{v}} &\sim_{\mathcal{A}} (u, a_{21}uv + a_{31}u^2v + a_{32}uv^2 + a_{41}u^3v + a_{42}u^2v^2 + a_{43}uv^3 + a_{44}v^4) \\ &= (u, u(a_{21}v + a_{31}uv + a_{32}v^2 + a_{41}u^2v + a_{42}uv^2 + a_{43}v^3) + a_{44}v^4) \\ &= (u, u(a_{21}v + g_1(u,v)) + a_{44}v^4), \end{aligned}$$

onde $g_1(u,v) = a_{31}uv + a_{32}v^2 + a_{41}u^2v + a_{42}uv^2 + a_{43}v^3$.

Seja $F_1(u,v) = (u, u(a_{21}v + g_1(u,v)) + a_{44}v^4)$. Considerando a mudança de coordenadas $h_1(u,v) = \left(u, v - \frac{g_1(u,v)}{a_{21}}\right)$ na fonte, obtemos que $F_1 \sim_{\mathcal{A}^{(4)}} F_2$, onde

$$\begin{aligned} F_2(u,v) &= \left(u, a_{21}uv - \frac{3a_{31}a_{32}}{a_{21}}u^2v^2 - \frac{a_{31}^2}{a_{21}}u^3v - \frac{2a_{32}^2}{a_{21}}uv^3 + a_{44}v^4\right) \\ &= (u, u(a_{21}v + g_2(u,v)) + a_{44}v^4), \end{aligned}$$

onde $g_2(u,v) = -\frac{3a_{31}a_{32}}{a_{21}}uv^2 - \frac{a_{31}^2}{a_{21}}u^2v - \frac{2a_{32}^2}{a_{21}}v^3$.

Considerando a mudança de coordenadas $h_2(u,v) = \left(u, v - \frac{g_2(u,v)}{a_{21}}\right)$ na fonte, obtemos que $F_2 \sim_{\mathcal{A}^{(4)}} F_3$, onde $F_3(u,v) = (u, a_{21}uv + a_{44}v^4)$. Observemos que $F_3 \sim_{\mathcal{A}} (u, uv + v^4)$ se $a_{44} \neq 0$. Assim, se $a_{44} \neq 0$, então $j^4P_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{A}^{(4)}} (u, uv + v^4)$ e, portanto, $P_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{A}} (u, uv + v^4)$.

Para as informações geométricas desta singularidade, notemos que pelo Teorema 3.18, as condições $a_{22} = a_{33} = 0$, $a_{21} \neq 0$ e $a_{44} \neq 0$ acontecem se, e somente se, p é um ponto flecnodal. Além disso, pela Proposição 2.36, como $a_{21} \neq 0$, obtemos que p é um ponto hiperbólico.

- **Borboleta**

Como a singularidade do tipo borboleta é 7-$\mathcal{A}$-determinada, vamos trabalhar com o 7-jato de $P_{\mathbf{v}}$. Primeiramente, observemos que se $P_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{A}} (u, uv + v^5 + v^7)$, então $j^2P_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{A}^{(2)}} (u, uv)$, e isso acontece se, e somente se, $a_{22} = 0$ e $a_{21} \neq 0$. Além disso, $a_{33} = 0$ e $a_{44} = 0$, pois caso contrário $P_{\mathbf{v}}$ seria $\mathcal{A}$-equivalente a singularidade cúspide ou rabo de andorinha, respectivamente. Assim, com essas condições para os coeficientes a_{21}, a_{22}, a_{33} e a_{44}, obtemos que $j^7P_{\mathbf{v}}$ é $\mathcal{A}$-equivalente ao germe

$$F_1(u,v) = (u, a_{21}u(v + g(u,v)) + a_{55}v^5 + a_{66}v^6 + a_{77}v^7),$$

onde $g(u,v)$ é um polinômio sem termos constantes ou lineares.

As contas necessárias para eliminar os termos $(0, a_{21}ug(u,v))$, e posteriormente para eliminar $(0, a_{66}v^6)$ em F_1 são extensas e novamente utilizamos o Software Wolfram Mathematica para fazer esses cálculos. Omitiremos os detalhes do algoritmo executado no Software, apresentando apenas a descrição do processo realizado e o resultado final obtido.

Primeiramente, vamos eliminar o termo $(0, a_{21}ug(u,v))$ em F_1. Para fazer isso, consideramos a mudança de coordenadas na fonte dada por $H(u,v) = (u, v + h(u,v))$, onde $h(u,v)$ é um polinômio de grau 6 sem termos lineares. Para obter o polinômio h realizamos o seguinte processo.

Escrevendo $h(u,v) = h_2(u,v) + \ldots + h_6(u,v)$, onde $h_i(u,v) = \sum_{j=0}^{i} h_{ij}u^{i-j}v^j$, e calculando o 3-jato de $F_1 \circ H$, obtemos

$$j^3(F_1 \circ H) = (u, a_{21}h_{20}u^3 + (a_{21}h_{21} + a_{31})u^2v + (a_{21}h_{22} + a_{32})uv^2).$$

Igualando os coeficientes de $(0,u^3), (0,u^2v)$ e $(0,uv^2)$ a zero, obtemos $h_{20} = 0$, $h_{21} = -\frac{a_{31}}{a_{21}}$ e $h_{22} = -\frac{a_{32}}{a_{21}}$. Assim, determinamos a parte quadrática do polinômio $h(u,v)$, e com esses valores de h_{20}, h_{21} e h_{22} eliminamos os termos de grau 3 em $j^7(F_1 \circ H)$.

Repetindo esse processo para os k-jatos, com $k = 4, \ldots 7$, determinamos o polinômio $h_{k-1}(u,v)$ e eliminamos alguns termos de grau k em $j^7(F_1 \circ H)$. Com isso, obtemos que F_1 é $\mathcal{A}^{(7)}$-equivalente a

$$F_2(u,v) = (u, a_{21}uv + a_{55}v^5 + \alpha_1v^6 + \beta_1v^7),$$

onde $\alpha_1 = \dfrac{1}{a_{21}}(a_{21}a_{66} - 5a_{55}a_{32})$ e $\beta_1 = \dfrac{1}{a_{21}^2}(a_{77}a_{21}^2 - 6a_{66}a_{32}a_{21} - 5a_{21}a_{55}a_{43} + 20a_{55}a_{32}^2)$.

Suponhamos que $a_{55} \neq 0$. Vamos eliminar agora o termo $(0, \alpha_1 v^6)$ em F_2. Para fazer isso, consideramos a mudança de coordenadas $k(u, v) = (u - \lambda v, v)$ na meta, onde λ é um número real a ser determinado. Escrevendo $\tilde{u} = u - \lambda(a_{21}uv + a_{55}v^5 + \alpha_1 v^6 + \beta_1 v^7)$, obtemos $u = \dfrac{\tilde{u} + \lambda(a_{55}v^5 + \alpha_1 v^6 + \beta_1 v^7)}{1 - \lambda a_{21} v}$, e

$$k \circ F_2(u, v) = \left(\tilde{u}, a_{21}\left(\frac{\tilde{u} + \lambda(a_{55}v^5 + \alpha_1 v^6 + \beta_1 v^7)}{1 - \lambda a_{21} v}\right) v + a_{55}v^5 + \alpha_1 v^6 + \beta_1 v^7\right).$$

Assim, obtemos que F_2 é $\mathcal{A}^{(7)}$-equivalente à

$$F_3(\tilde{u}, v) = (\tilde{u}, a_{21}\tilde{u}(v + G(v)) + a_{55}v^5 + \alpha_2 v^6 + \beta_2 v^7),$$

onde $G(v)$ é uma função de v de grau 6, e α_2 e β_2 dependem de a_{ij} e λ.

Consideremos agora a mudança de coordenadas $\tilde{H}(\tilde{u}, v) = (\tilde{u}, v + \tilde{h}_2 v^2 + \ldots \tilde{h}_6 v^6)$ na fonte. Para encontrar os valores de λ e $\tilde{h}_i$, $i = 1 \ldots 6$, fazemos um processo análogo ao que foi feito anteriormente, ou seja, encontramos os coeficientes de $(0, y^6)$ e $(0, \tilde{u}v^i)$ em $j^7(F_3 \circ \tilde{H})$ e igualamos a zero. Com isso, obtemos os valores de $\tilde{h}_i$ (e consequentemente a mudança de coordenadas $\tilde{H}$) e o valor de λ, a saber $\lambda = \dfrac{a_{21}a_{66} - 5a_{55}a_{32}}{4a_{55}a_{21}^2}$.

Com essa mudança de coordenadas $\tilde{H}$, obtemos que F_3 é $\mathcal{A}^{(7)}$-equivalente a $F_4(u, v) = (u, a_{21}uv + a_{55}v^5 + \Lambda v^7)$, onde

$$\Lambda = \frac{(8a_{55}a_{77} - 5a_{66}^2)a_{21}^2 + 2a_{55}(a_{32}a_{66} - 20a_{43}a_{55})a_{21} + 35a_{32}^2a_{55}^2}{8a_{21}^2 a_{55}}, \tag{3.9}$$

Logo, $j^7 P_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{A}^{(7)}} (u, a_{21}uv + a_{55}v^5 + \Lambda v^7)$. Se $\Lambda \neq 0$, então $P_{\mathbf{v}}$ é $\mathcal{A}$-equivalente a singularidade do tipo borboleta.

Para informações geométricas da singularidade borboleta, observemos que, como $a_{22} = 0$, pela Proposição 2.36 obtemos que $\mathbf{v}$ é uma direção assintótica em p. Observemos também que, como M é uma superfície genérica para a projeção ortogonal, então pelo Teorema 3.24 obtemos que $a_{32}^2 - a_{21}a_{43} \neq 0$. Usando agora o fato que $a_{44} = 0$, concluímos pelo Teorema 3.18(b) que a equação do 1-jato do conjunto flecnodal é dado por $4\left(a_{43} - \frac{a_{32}^2}{a_{21}}\right)u$ e, uma vez que $a_{32}^2 - a_{21}a_{43} \neq 0$, o conjunto flecnodal, no espaço de parâmetros, é dado por $\{(u, v); u = 0\}$. Assim, a curva flecnodal em M é dada por $\phi(0, v) = (0, v, f(0, v))$, cuja direção tangente em $p = (0, 0, 0)$ é dada por $(0, 1, 0)$, isto é, $\mathbf{v}$ é um vetor tangente à curva flecnodal em p.

- **Lábios/Bicos**

Sabemos que a singularidade lábios/bicos é 3-$\mathcal{A}$-determinada. Então, vamos trabalhar com $j^3 P_{\mathbf{v}}$.

Suponhamos que $a_{21} = a_{22} = 0$ e $a_{33} \neq 0$. Então $j^3 P_{\mathbf{v}}$ é $\mathcal{A}$-equivalente a $F_1(u, v) = (u, a_{31}u^2 v + a_{32}uv^2 + a_{33}v^3)$. Considerando a mudança de coordenadas $h(u, v) = (u, v - \frac{a_{32}}{3a_{33}}u)$, obtemos que F_1 é $\mathcal{A}$-equivalente a

$$F_2(u, v) = \left(u, a_{33}v^3 + \frac{3a_{33}a_{31} - a_{32}^2}{a_{33}}u^2 v\right).$$

Se $3a_{33}a_{31} - a_{32}^2 \neq 0$, obtemos que $P_{\mathbf{v}}$ é $\mathcal{A}$-equivalente à $(x, y^3 \pm x^2 y)$.

Observemos que pela Proposição 2.36, obtemos que p é um ponto parabólico, uma vez que $a_{22} = a_{21} = 0$.

- **Ganso**

Vamos trabalhar com $j^4P_{\mathbf{v}}$, uma vez a singularidade do tipo ganso é 4-$\mathcal{A}$-determinada.

Suponhamos que que $a_{21} = a_{22} = 0$ e $a_{33} \neq 0$. Além disso, $3a_{33}a_{31} - a_{32}^2 = 0$, pois caso contrário $P_{\mathbf{v}}$ seria uma singularidade Lábios/Bicos. Assim, $j^4P_{\mathbf{v}}$ é $\mathcal{A}$-equivalente a

$$F_1(u,v) = (u, a_{31}u^2v + a_{32}uv^2 + a_{33}v^3 + a_{41}u^3v + a_{42}u^2v^2 + a_{43}uv^3 + a_{44}v^4).$$

Considerando a mudança de coordenadas $h_1(u,v) = \left(u, v - \frac{a_{32}}{3a_{33}}u\right)$ na fonte, obtemos que F_1 é $\mathcal{A}^{(4)}$-equivalente a F_2, onde

$$F_2(u,v) = (u, a_{33}v^3 + \alpha_1u^3v + \alpha_2u^2v^2 + \alpha_3uv^3 + a_{44}v^4),$$

onde $\alpha_1 = \dfrac{1}{27a_{33}^3}(27a_{41}a_{33}^3 - 18a_{42}a_{32}a_{33}^2 + 9a_{43}a_{32}^2a_{33} - 4a_{44}a_{32}^2)$, α_2 e α_3 dependem de a_{ij}.

Vamos eliminar o termo $(0, \alpha_2u^2v^2 + \alpha_3uv^3 + a_{44}v^4)$ de F_2. Para fazer isso, usaremos um argumento análogo ao que fizemos no reconhecimento da singularidade borboleta. Escrevemos $h_2(u,v) = (u, v - \tilde{h}(u,v))$, onde $\tilde{h}(u,v)$ é um polinômio homogêneo de grau 2. Escrevendo $\tilde{h}(u,v) = h_{20}u^2 + h_{21}uv + h_{22}v^2$, obtemos

$$\begin{aligned} j^4(F_2 \circ h_2) &= (u, a_{33}v^3 + \alpha_1u^3v + (\alpha_2 - 3h_{20}a_{33})u^2v^2 + (\alpha_3 - 3h_{21}a_{33})uv^3 \\ &\quad + (a_{44} - 3h_{22}a_{33})v^4). \end{aligned}$$

Como queremos eliminar o termo $(0, \alpha_2x^2y^2 + \alpha_3xy^3 + a_{44}y^4)$ de F_2, basta tomarmos $h_{20} = \frac{\alpha_2}{3a_{33}}, h_{21} = \frac{\alpha_3}{3a_{33}}$, e $h_{22} = \frac{a_{44}}{3a_{33}}$. Logo, tomando $\tilde{h}(x,y)$ com os coeficientes h_{20}, h_{21} e h_{22} encontrados anteriormente, obtemos que $F_2 \sim_{\mathcal{A}^{(4)}} (u, a_{33}v^3 + \alpha_1u^3v)$ e, se $\alpha_1 \neq 0$, então o germe dado por $(u, a_{33}v^3 + \alpha_1u^3v)$ e, portanto $P_{\mathbf{v}}$, é $\mathcal{A}$-equivalente a $(u, v^3 + u^3v)$.

Para informações geométricas, observemos que pela Proposição 2.36, obtemos que p é parabólico, pois $a_{21} = a_{22} = 0$. Notemos que, pela Observação 2.33, genericamente p é não planar e, assim, pela Proposição 2.36 obtemos $a_{20} \neq 0$. Como $a_{33} \neq 0$, segue pela Observação 3.11 que p não é uma cúspide de Gauss. Assim, as hipóteses da Proposição 3.22 são satisfeitas e, como $3a_{31}a_{33} - a_{32}^2 = 0$, concluímos que a curvatura geodésica da imagem da curva parabólica pela aplicação de Gauss é zero em $N(p)$.

- **Gaivota**

Uma vez que a singularidade do tipo gaivota é 5-$\mathcal{A}$-determinada, vamos trabalhar com o 5-jato de $P_{\mathbf{v}}$. Supondo que $a_{21} = a_{22} = a_{33} = 0$ e $a_{32} \neq 0$, obtemos que $j^5P_{\mathbf{v}}$ é $\mathcal{A}$-equivalente a

$$\begin{aligned} F_1(u,v) &= (u, a_{31}u^2v + a_{32}uv^2 + a_{41}u^3v + a_{42}u^2v^2 + a_{43}uv^3 + a_{44}v^4 + a_{51}u^4v \\ &\quad + a_{52}u^3v^2 + a_{53}u^2v^3 + a_{54}uv^4 + a_{55}v^5). \end{aligned}$$

Nos próximos passos recorremos novamente ao Wolfram Mathematica para fazer as contas.

Considerando a mudança de coordenadas $h_1(u,v) = \left(u, v - \frac{a_{31}}{2a_{32}}u\right)$, obtemos que F_1 é $\mathcal{A}^{(5)}$-equivalente a

$$\begin{aligned} F_2(u,v) &= (u, a_{32}uv^2 + \alpha_1u^3v + \alpha_2u^2v^2 + \alpha_3uv^3 + ug_1(u,v) + a_{44}v^4 + a_{55}v^5) \\ &= (u, u(a_{32}v^2 + v(\alpha_1u^2 + \alpha_2uv + \alpha_3v^2)) + ug_1(u,v) + a_{44}v^4 + a_{55}v^5), \end{aligned}$$

onde os coeficientes α_k, com $k = 1, 2, 3$, dependem de a_{ij} e $g_1(x, y)$ é um polinômio homogêneo de grau 4.

Considerando agora a mudança de coordenadas $h_2(u, v) = \left(u, v - \frac{\alpha_1 u^2 + \alpha_2 uv + \alpha_3 v^2}{2a_{32}}\right)$, obtemos que F_2 é $\mathcal{A}^{(5)}$-equivalente a

$$F_3(u, v) = (u, a_{32}uv^2 + a_{44}v^4 + \beta_1 v^5 + ug_2(u, v)),$$

onde $\beta_1 = \frac{1}{a_{32}^2}(a_{55}a_{32}^2 - 2a_{43}a_{44}a_{32} + 4a_{31}a_{44}^2)$ e $g_2(u, v) = \theta_2 u^2 v + \theta_3 u^2 v^2 + \theta_4 uv^3 + \theta_5 v^4$, com θ_i, $i = 2, 3, 4, 5$, dependendo de a_{ij}.

Seja $p(u, v) = \theta_2 u^3 + \theta_3 u^2 v + \theta_4 uv^2 + \theta_5 v^3$ e $h_3(u, v) = (u, v - \frac{p(u,v)}{2a_{32}})$. Com essa mudança de coordenadas obtemos que F_3 é $\mathcal{A}^{(5)}$-equivalente a F_4, onde

$$F_4(u, v) = (u, a_{32}uv^2 + a_{44}v^4 + \beta_1 v^5). \tag{3.10}$$

Se $a_{44} \neq 0$ e $\beta_1 \neq 0$, então $F_4 \sim_{\mathcal{A}} (u, uv^2 + v^4 + v^5)$, o que implica que $P_{\mathbf{v}} \sim_{\mathcal{A}} (u, uv^2 + v^4 + v^5)$.

Para informações geométricas dessa singularidade, observemos que como $a_{21} = a_{22} = 0$, obtemos que p é ponto parabólico. Pelo Teorema 3.24 obtemos $a_{32}^2 - 4a_{20}a_{44} \neq 0$ e como $a_{33} = 0$, pela Observação 3.11 segue que p é uma cúspide de Gauss.

Notemos que como a superfície M é genérica para a projeção ortogonal, as condições algébricas encontradas são também suficientes para que $P_{\mathbf{v}}$ tenha alguma dessas singularidades. □

Nos próximos capítulos, veremos exemplos do Teorema 3.23 e as implicações que ele tem no estudo do contorno aparente, conceito que estudaremos no capítulo seguinte.

CAPÍTULO 4

CONTORNO APARENTE E TEOREMA DE KOENDERINK PARA SUPERFÍCIES REGULARES

Apresentaremos neste capítulo o Teorema de Koenderink para superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$ e sua demonstração. O enunciado desse resultado envolve o contorno aparente da superfície e o gerador de contorno, os quais estão relacionados com as singularidades da projeção ortogonal da superfície. Estudaremos as propriedades geométricas que esses conjuntos possuem e suas relações com a geometria da superfície projetada. Como aplicação do Teorema de Koenderink, iremos obter a forma local da superfície nos pontos do gerador de contorno a partir do contorno aparente.

As principais referências usadas neste capítulo são os livros [6, 13] e os artigos [8, 15].

4.1 Gerador de contorno e contorno aparente regulares

Nesta seção, $\mathbf{v}$ denotará um vetor unitário, M uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$, $p \in M$ e $\mathtt{x} : U \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização local de M em p, onde U é um aberto em $\mathbb{R}^2$ e $q \in U$, com $\mathtt{x}(q) = p$.

Pela Proposição 3.19, o conjunto singular da projeção ortogonal $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ é

$$\Sigma_{\mathbf{v}} = \{p \in M \mid \mathbf{v} \text{ é um vetor tangente à } M \text{ em } p\},$$

o qual chamaremos de **gerador de contorno** de M ao longo da direção $\mathbf{v}$ e, sua projeção,

$$\Delta_{\mathbf{v}} = \mathcal{P}_{\mathbf{v}}(\Sigma_{\mathbf{v}}),$$

será chamada de **contorno aparente** de M ao longo da direção $\mathbf{v}$.

Notemos que $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ é singular em $p = \mathtt{x}(q)$ se, e somente se, $P_{\mathbf{v}} = \mathcal{P}_{\mathbf{v}} \circ \mathtt{x} : U \to T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ dada por $P_{\mathbf{v}}(u, v) = \mathtt{x}(u, v) - \langle \mathtt{x}(u, v), \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$ é singular em q. Assim, o contorno aparente é o conjunto discriminante de $P_{\mathbf{v}}$, ou seja, a imagem por $P_{\mathbf{v}}$ de seu conjunto singular.

A seguir, veremos alguns exemplos sobre os conceitos definidos acima. Nas figuras que ilustram esses exemplos, o plano $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ foi deslocado para uma melhor visualização do contorno aparente.

Exemplo 4.1. Sejam M uma esfera de raio r centrada em $p = (a, b, c)$, que pode ser escrita como $f^{-1}(0)$, onde $f(x, y, z) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2$, e $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$. Como $\nabla f(x, y, z) = (2(x-a), 2(y-b), 2(z-c))$ é um vetor normal a esfera, então $\mathbf{v}$ é um vetor tangente à M em (x, y, z) se, e somente se, $z = c$. Assim, o gerador de contorno de M na direção $\mathbf{v}$ é $\{(x, y, c) \,|\, (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}$, ou seja, é o círculo máximo obtido pela interseção de M com o plano ortogonal a $\mathbf{v}$ passando por p. O contorno aparente na direção $\mathbf{v}$ é a projeção desse círculo no plano $\{z = 0\}$.

Por exemplo, no caso em que $p = \mathbf{0}$ e $r = 1$, o gerador de contorno e o contorno aparente na direção $\mathbf{v}$ coincidem com o círculo $\{(x, y, 0)\,, x^2 + y^2 = 1\}$. ♢

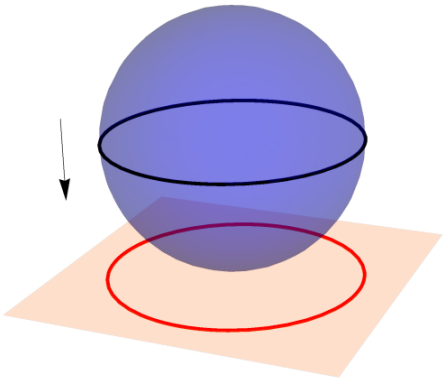


Figura 4.1: Gerador de contorno e contorno aparente para esfera na direção $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$.

Exemplo 4.2. Sejam M a superfície parametrizada por $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, v^3 + uv)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ (Figura 4.2). Note que $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{0}}M$. Vamos encontrar o gerador de contorno e o contorno aparente para essa superfície ao longo da direção $\mathbf{v}$.

Como

$$P_{\mathbf{v}}(u, v) = \mathbf{x}(u, v) - \langle \mathbf{x}(u, v), \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} = (u, uv + v^3),$$

obtemos $\frac{\partial P_{\mathbf{v}}}{\partial u}(u, v) = (1, 0, v)$ e $\frac{\partial P_{\mathbf{v}}}{\partial v}(u, v) = (0, 0, u + 3v^2)$. Logo, o conjunto singular de $P_{\mathbf{v}}$ é $\{(u, v) | u + 3v^2 = 0\}$, que pode ser parametrizado por $\alpha(t) = (-3t^2, t)$. Assim, o gerador de contorno é a curva

$$\beta(t) = \mathbf{x}(\alpha(t)) = \mathbf{x}(-3t^2, t) = (-3t^2, t, -2t^3)$$

e o contorno aparente é a curva

$$\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(\beta(t)) = \mathcal{P}_{\mathbf{v}}(-3t^2, t, -2t^3) = (-3t^2, 2t^3).$$

Observemos que, neste caso o gerador de contorno é uma curva regular e o contorno aparente é uma curva singular em $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(\mathbf{0})$, com singularidade cúspide.

Notemos que M é o gráfico da função $f(u, v) = uv + v^3$, com f na forma (3.1). Como $a_{22} = 0, a_{21} \neq 0$ e $a_{33} \neq 0$, obtemos, pelo Teorema 3.23, que $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade do tipo cúspide e, então, $\mathbf{v}$ é uma direção assintótica à M no ponto hiperbólico $\mathbf{0}$, o que está de acordo com o Exemplo 2.34. ♢

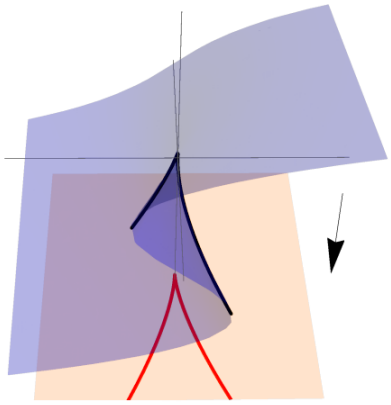


Figura 4.2: Superfície M, gerador de contorno em preto e contorno aparente em vermelho para a superfície do Exemplo 4.2.

Exemplo 4.3. Seja M o cilindro parametrizado por $\mathtt{x}(u,v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$, que tem $(\cos u, \operatorname{sen} u, 0)$ como vetor normal em (u,v).

Se considerarmos $\mathbf{v} = (1,0,0)$, então o gerador de contorno de M será formado pelas retas $(0,1,t)$ e $(0,-1,t)$ e o contorno aparente é formado pela projeção dessas retas no plano $\{x = 0\}$. Assim, gerador de contorno e contorno aparente são curvas regulares.

Tomando $\mathbf{v} = (0,0,1)$, obtemos que $P_{\mathbf{v}}(u,v) = \mathcal{P}_{\mathbf{v}} \circ \mathtt{x}(u,v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0)$ é singular para qualquer (u,v). Assim, o gerador de contorno de M é toda a superfície M (geometricamente, $\mathbf{v} \in T_pM$, para todo $p \in M$) e o contorno aparente é o círculo de raio 1 centrado na origem. Concluímos então que o cilindro não é uma superfície genérica para a projeção ortogonal, pois $P_{\mathbf{v}}(u,v)$ não é $\mathcal{A}$-equivalente a nenhuma aplicação da Tabela 2.1, uma vez que é função apenas de u. ♢

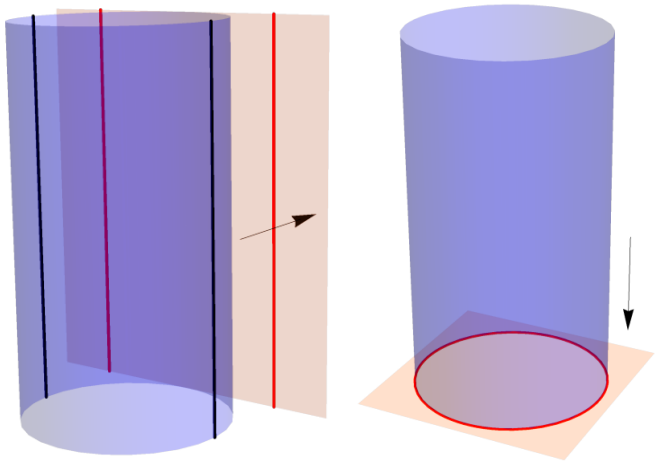


Figura 4.3: Gerador de contorno e contorno aparente para a superfície dada no Exemplo 4.3 nas direções $(1,0,0)$ à esquerda e $(0,0,1)$ à direita.

Os exemplos acima mostram casos onde o gerador de contorno $\Sigma_{\mathbf{v}}$ é curva regular, um exemplo onde $\Sigma_{\mathbf{v}}$ não é uma curva e contornos aparentes sendo curvas regulares e singulares. A proposição a seguir fornece condições suficientes para que o gerador de contorno e o contorno aparente sejam curvas regulares.

Proposição 4.4. *Sejam M uma superfície regular, $p \in M$ e $\mathbf{v} \in T_pM$.*

(a) *Se $\mathbf{v}$ não é uma direção assintótica em p, então $\Sigma_\mathbf{v}$ e $\Delta_\mathbf{v}$ são curvas regulares em p e $\mathcal{P}_\mathbf{v}(p)$, respectivamente.*

(b) *Se p é não parabólico, então $\Sigma_\mathbf{v}$ é uma curva regular em p.*

Demonstração: Suponhamos, sem perda de generalidade, que M é dada na forma de Monge $z = f(u,v)$ com f dada em (3.1), $p = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = (0,1,0)$ e $\mathtt{x}(u,v) = (u,v,f(u,v))$ uma parametrização local de M em p.

(a) Como $\mathbf{v}$ não é direção assintótica, pela Proposição 2.36(b), obtemos $a_{22} \neq 0$.

O conjunto singular de $P_\mathbf{v}$ é o dado por $f_v^{-1}(0)$, ou seja, é o conjunto de zeros do polinômio

$$f_v(u,v) = a_{21}u + 2a_{22}v + \mathcal{O}(2) \tag{4.1}$$

e, como $f_{vv}(\mathbf{0}) = 2a_{22} \neq 0$, então, pelo Teorema da Função Implícita, segue que $f_v^{-1}(0) = \{(u,\varphi(u))\}$, para alguma função suave φ definida em uma vizinhança de 0 satisfazendo $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(u) = -\frac{f_{uv}(u,\varphi(u))}{f_{vv}(u,\varphi(u))}$.

Assim,

$$\alpha(u) = \mathtt{x}(u,\varphi(u)) = (u,\varphi(u),f(u,\varphi(u)))$$

e

$$\beta(u) = P_\mathbf{v}((u,\varphi(u))) = (u,0,f(u,\varphi(u)))$$

são parametrizações para $\Sigma_\mathbf{v}$ e $\Delta_\mathbf{v}$ em p e $\mathcal{P}_\mathbf{v}(p)$, respectivamente, com $\alpha(0) = p$ e $\beta(0) = \mathcal{P}_\mathbf{v}(p)$.

Como $\alpha'(0) = (1, -\frac{a_{21}}{2a_{22}}, 0)$ e $\beta'(0) = (1,0,0)$, obtemos que $\Sigma_\mathbf{v}$ e $\Delta_\mathbf{v}$ são curvas regulares em p e $\mathcal{P}_\mathbf{v}(p)$, respectivamente.

(b) Se $\mathbf{v}$ é uma direção assintótica e p um ponto não parabólico, então, pela Proposição 2.36 obtemos $a_{21} \neq 0$. Assim, $f_{uv}(\mathbf{0}) = a_{21} \neq 0$ e, pelo Teorema da Função Implícita obtemos $f_v^{-1}(0) = \{(\xi(v),v)\}$, para alguma função suave ξ definida em uma vizinhança de 0, com $\xi(0) = 0$ e $\xi'(v) = \frac{f_{vv}(\xi(v),v)}{f_{uv}(\xi(v),v)}$. Assim, $\psi(v) = \mathtt{x}(\xi(v),v)$ é uma parametrização para $\Sigma_\mathbf{v}$ em p, com $\psi(0) = p$. Como $\psi'(0) = (0,1,0)$, obtemos que $\Sigma_\mathbf{v}$ é uma curva regular em p, como queríamos. □

O exemplo a seguir ilustra os conjuntos $\Sigma_\mathbf{v}$ e $\Delta_\mathbf{v}$ para superfícies genéricas para $P_\mathbf{v}$. Considerando as informações geométricas obtidas para M a partir da singularidade de $P_\mathbf{v}$ dadas no Teorema 3.23 e a Proposição 4.4 concluímos que, dada uma superfície genérica para a projeção ortogonal, se $P_\mathbf{v}$ é do tipo dobra, então o contorno aparente $\Delta_\mathbf{v}$ é uma curva regular. Além disso, se $P_\mathbf{v}$ é uma singularidade do tipo dobra, cúspide, rabo de andorinha ou borboleta, então o gerador de contorno $\Sigma_\mathbf{v}$ é uma curva regular.

Exemplo 4.5. Neste exemplo vamos encontrar o conjunto singular da projeção ortogonal $P_\mathbf{v}$, o gerador de contorno $\Sigma_\mathbf{v}$ e o contorno aparente $\Delta_\mathbf{v}$ para algumas superfícies. A Figura 4.4 apresenta o traço de M, o conjunto singular de $P_\mathbf{v}$, $\Sigma_\mathbf{v}$ e $\Delta_\mathbf{v}$ para cada item.

Vamos considerar M na forma de Monge $z = f(u,v)$, parametrizada por $\mathtt{x}(u,v) = (u,v,f(u,v))$, onde f é dada em (3.1), e $\mathbf{v} = (0,1,0)$. Assim, $\mathbf{v}$ é uma direção tangente à M em $p = (u,v,f(u,v))$ se, e somente se, $f_v(u,v) = 0$. Logo, o conjunto singular de $P_\mathbf{v}$, denotado por $\Sigma(P_\mathbf{v})$ é $f_v^{-1}(0)$, o gerador de contorno é $\mathtt{x}(f_v^{-1}(0))$ e o contorno aparente é $P_\mathbf{v}(f_y^{-1}(0))$, onde, $P_\mathbf{v}(u,v) = \mathtt{x}(u,v) - \langle \mathtt{x}(u,v), \mathbf{v}\rangle \mathbf{v} = (u,0,f(u,v))$. Vamos concluir o tipo de singularidade de $P_\mathbf{v}$ de acordo com os coeficientes de f em (3.1) usando o Teorema 3.23 e, a partir das informações geométricas de M obtidas por esse resultado e

da Proposição 4.4, analisar as singularidades de $\Sigma_{\mathbf{v}}$ e $\Delta_{\mathbf{v}}$ em $\mathbf{0}$ e $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(\mathbf{0})$, respectivamente, em alguns casos.

(a) Se $f(u,v) = v^2$, obtemos $a_{22} \neq 0$ em (3.1) e, assim, $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade do tipo dobra, de onde segue que $\mathbf{v}$ não é direção assintótica. Como $f_v(u,v) = 2v$, obtemos que $\Sigma(P_{\mathbf{v}})$ pode ser parametrizado por $\alpha(t) = (t,0)$. Assim, o gerador de contorno de M é dado por $\mathtt{x} \circ \alpha(t) = (t,0,f(t,0)) = (t,0,0)$ e o contorno aparente é a reta parametrizada por $P_{\mathbf{v}} \circ \alpha(t) = (t,0,0)$. Notemos que $\Sigma_{\mathbf{v}}$ e $\Delta_{\mathbf{v}}$ são curvas regulares, o que está de acordo com a Proposição 4.4.

(b) Seja $f(u,v) = v^3 - u^2 v$. Como $a_{22} = a_{21} = 0, a_{33} \neq 0$ e $a_{32}^2 - 3a_{31}a_{33} \neq 0$, obtemos que $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade do tipo bicos. Logo, p é um ponto parabólico e $\mathbf{v}$ direção assintótica em p.

Uma vez que $f_v(u,v) = 3v^2 - u^2$, obtemos $\Sigma(P_{\mathbf{v}}) = \{(\pm\sqrt{3}v, v) \,|\, v \in \mathbb{R}\}$. Assim, o gerador de contorno de M é o conjunto $\{(\pm\sqrt{3}v, v, -2v^3) \,|\, v \in \mathbb{R}\}$ e contorno aparente é $\{(\pm\sqrt{3}v, 0, -2v^3) \,|\, v \in \mathbb{R}\}$.

(c) Tomando $f(u,v) = v^3 + u^3 v$, obtemos $P_{\mathbf{v}}$ uma singularidade do tipo ganso, p é um ponto parabólico, $\mathbf{v}$ uma direção assintótica em p e a imagem do conjunto parabólico de M pela aplicação de Gauss tem uma inflexão geodésica.

O conjunto singular de $P_{\mathbf{v}}$, dado por $f_v^{-1}(0)$, onde $f_v(u,v) = 3v^2 + u^3$, é $\{(u,v) \,|\, u^3 = -3v^2\}$ e, assim, o gerador de contorno de M é $\{(\sqrt[3]{-3v^2}, v, -2v^3) \,|\, v \in \mathbb{R}\}$ e contorno aparente é $\{(\sqrt[3]{-3v^2}, 0, -2v^3) \,|\, v \in \mathbb{R}\}$.

(d) Considerando $f(u,v) = uv + v^4$, obtemos $P_{\mathbf{v}}$ uma singularidade do tipo rabo de andorinha. Assim, $\mathbf{v}$ é uma direção assintótica e p um ponto flecnodal (hiperbólico), o que vimos no Exemplo 3.17.

Como $f_v(u,v) = 4v^3 + u$, obtemos que $\Sigma(P_{\mathbf{v}})$ é dado por $\{(-4v^3, v) \,|\, v \in \mathbb{R}\}$. Logo, o gerador de contorno é o conjunto $\{(-4v^3, v, -3v^4) \,|\, v \in \mathbb{R}\}$ e contorno aparente é o conjunto $\{(-4v^3, 0, -3v^4) \,|\, v \in \mathbb{R}\}$. Notemos que, em $v = 0$, $\Sigma_{\mathbf{v}}$ é curva regular (o que está de acordo com a Proposição 4.4) e $\Delta_{\mathbf{v}}$ curva singular, com singularidade do tipo (3,4)-cúspide.

(e) Seja $f(u,v) = uv + v^5 + v^7$. Então, $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade do tipo borboleta. Assim, obtemos que p é um ponto flecnodal hiperbólico e $\mathbf{v}$ uma direção assintótica tangente à curva flecnodal em p.

Como $f_v(u,v) = u + 5v^4 + 7v^6$, obtemos $\Sigma(P_{\mathbf{v}}) = \{(-5v^4 - 7v^6, v) | v \in \mathbb{R}\}$. Assim, o gerador de contorno de M é $\{(-5v^4 - 7v^6, v, -4v^5 - 6v^7) \,|\, v \in \mathbb{R}\}$, que é uma curva regular e contorno aparente é $\{(-5v^4 - 7v^6, 0, -4v^5 - 6v^7) \,|\, v \in \mathbb{R}\}$.

(f) Se $f(u,v) = uv^2 + v^4 + v^5$, então $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade do tipo gaivota, p uma cúspide de Gauss (parabólico) e $\mathbf{v}$ direção assintótica em p.

Como $f_v(u,v) = 2uv + 4v^3 + 5v^4 = v(2u + 4v^2 + 5v^3)$, $\Sigma(P_{\mathbf{v}})$ é $\{(u,0) \,|\, u \in \mathbb{R}\} \cup \{(-2v^2 - \frac{5}{2}v^3, v) \,|\, v \in \mathbb{R}\}$. Assim, o gerador de contorno de M é $\{(u,0,0) \,|\, u \in \mathbb{R}\} \cup \{(-2v^2 - \frac{5}{2}v^3, v, -v^4 - \frac{3}{2}v^5) \,|\, v \in \mathbb{R}\}$ e contorno aparente é o conjunto $\{(u,0,0) \,|\, u \in \mathbb{R}\} \cup \{(-2v^2 - \frac{5}{2}v^3, 0, -v^4 - \frac{3}{2}v^5) \,|\, v \in \mathbb{R}\}$. ♢

O conjunto singular, o gerador de contorno e o contorno aparente para uma superfície com singularidade do tipo cúspide estão dados no Exemplo 4.2.

Na Proposição 5.3, que estudaremos no próximo capítulo, será dada uma relação entre as singularidades do contorno aparente com o tipo de singularidade de $P_{\mathbf{v}}$. Mais

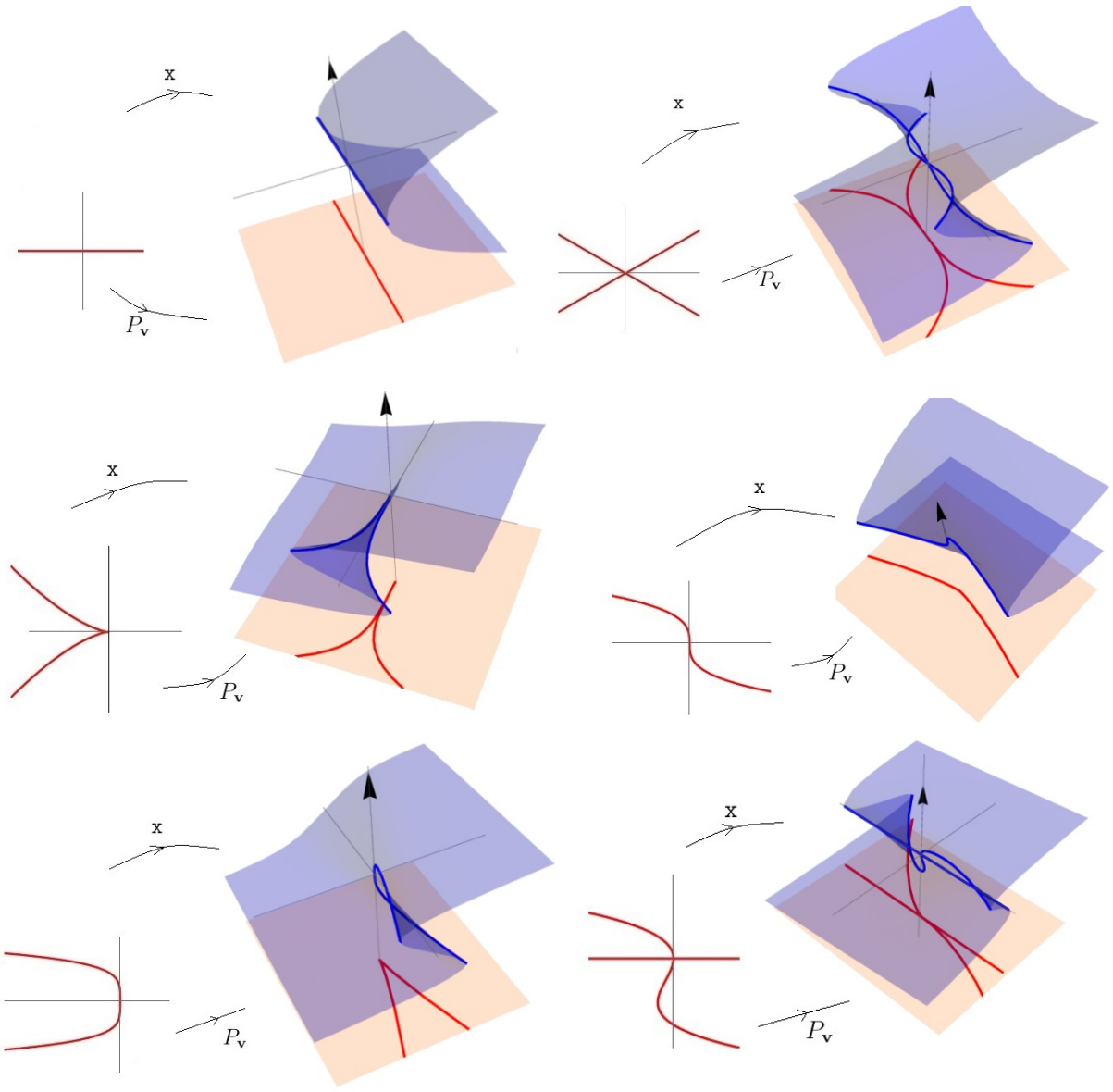


Figura 4.4: De cima para baixo, da esquerda para a direita: superfície M, conjunto singular de $P_{\mathbf{v}}$, gerador de contorno e contorno aparente dados nos itens (a), (b), (c), (d), (e) e (f) do Exemplo 4.5.

precisamente, se $P_{\mathbf{v}}$ é do tipo cúspide (resp. rabo de andorinha), então $\Delta_{\mathbf{v}}$ é uma (2,3)-cúspide (resp. (3,4)-cúspide).

Os resultados que estudaremos a seguir relacionam a geometria da superfície M com seu gerador de contorno e contorno aparente em uma direção tangente e serão usados na demostração do Teorema de Koenderink.

Proposição 4.6. ([13], p. 163) *Seja* $\mathbf{v}$ *tangente à* M *em* p. *Se* p *não é um ponto parabólico ou* $\mathbf{v}$ *não é direção assintótica, então o vetor tangente à* $\Sigma_{\mathbf{v}}$ *em* p *é conjugado à* $\mathbf{v}$.

Demonstração: Seja $\mathbf{v} = a\mathbf{x}_u(q) + b\mathbf{x}_v(q)$. Como $p \in \Sigma_{\mathbf{v}}$ se, e somente se, $\mathbf{v}$ é um vetor tangente a M em p, então $\Sigma_{\mathbf{v}} = \mathbf{x}(h^{-1}(0))$, onde $h(u,v) = \det[\mathbf{v}, \mathbf{x}_u(u,v), \mathbf{x}_v(u,v)]$.

O vetor tangente à curva $h^{-1}(0)$ é paralelo ao vetor $(-h_v(u,v), h_u(u,v))$, então o vetor tangente à $\Sigma_{\mathbf{v}}$ em p é paralelo ao vetor

$$-h_v(q)\mathtt{x}_u(q) + h_u(q)\mathtt{x}_v(q) = [(am+bn)\det[\mathtt{x}_u, \mathtt{x}_v, N]\mathtt{x}_u + (al+bm)\det[\mathtt{x}_u, \mathtt{x}_v, N]\mathtt{x}_v](q)$$

que é paralelo ao vetor $\mathbf{w} = (-(am+bn)\mathtt{x}_u + (al+bm)\mathtt{x}_v)(q)$ o qual, pela Proposição 2.29 (a), é conjugado à $\mathbf{v}$. □

Proposição 4.7. ([6], p. 61) *Seja $p \in \Sigma_{\mathbf{v}}$, com $\mathbf{v}$ uma direção tangente não assintótica em p. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) *O vetor normal à superfície M em p é paralelo ao vetor normal ao contorno aparente em $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$.*

(b) *O plano tangente à M em p intersecciona o plano de projeção $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ na reta tangente ao contorno aparente em $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$.*

Demonstração: (a) Como $\mathbf{v}$ é uma direção tangente não assintótica em p, então o gerador de contorno $\Sigma_{\mathbf{v}}$ e o contorno aparente $\Delta_{\mathbf{v}}$ são curvas regulares em p e $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$, respectivamente. Sejam $\alpha(t)$ uma parametrização local para $\Sigma_{\mathbf{v}}$ em p, com $\alpha(0) = p$, e $\beta(t) = \mathcal{P}_{\mathbf{v}}(\alpha(t))$ a parametrização para $\Delta_{\mathbf{v}}$ dada por $\beta(t) = \alpha(t) - \langle \alpha(t), \mathbf{v}\rangle \mathbf{v}$, com $\beta(0) = \mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$.

Sejam $N(p)$ o vetor normal à M em p, $\beta'(0)$ e $n(0)$ os vetores tangente e normal à $\Delta_{\mathbf{v}}$ em $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$, respectivamente.

Temos $\beta'(t) = \alpha'(t) - \langle \alpha'(t), \mathbf{v}\rangle \mathbf{v}$, de onde segue que

$$\langle \beta'(0), N(p)\rangle = \langle \alpha'(0), N(p)\rangle - \langle \alpha'(0), \mathbf{v}\rangle \langle N(p), \mathbf{v}\rangle = 0,$$

pois $\mathbf{v}, \alpha'(0) \in T_pM$. Logo, $N(p)$ é perpendicular a $\beta'(0)$ e, sendo também perpendicular a $\mathbf{v}$, segue que $N(p)$ é paralelo a $n(0)$, como queríamos.

(b) Como $\mathbf{v} \in T_pM$ é perpendicular ao plano de projeção $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$, segue que esses planos se intersectam em uma reta ℓ. Logo, $N(p)$ é ortogonal à ℓ e, portanto, pelo item (a), $n(0)$ é ortogonal à ℓ, de onde conluímos que ℓ é a reta tangente a $\Delta_{\mathbf{v}}$ em $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$, uma vez que $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p) \in T_pM \cap T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$. □

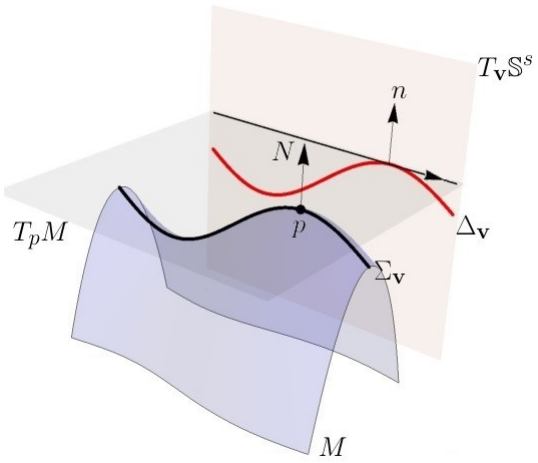


Figura 4.5: Ilustração da Proposição 4.7.

4.2 Teorema de Koenderink

O contorno aparente vem sendo utilizado para o estudo de "reconhecimento de formas", ou seja, para obter informações sobre a geometria de um objeto a partir de sua projeção ortogonal. Um dos resultados que permitem reconhecer a forma de uma superfície M é o Teorema de Koenderink, que relaciona a curvatura Gaussiana de M com a curvatura do contorno aparente em uma direção tangente não assintótica.

Seja M uma superfície orientada. Dado $p \in M$ e $\mathbf{v}$ um vetor unitário tangente à M em p, suponhamos que $\mathbf{v}$ não é uma direção assintótica em p, então $\Delta_{\mathbf{v}}$ uma curva regular em $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$). A orientação de M induz uma orientação para o contorno aparente e para o plano $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ dada pela seguinte observação.

Observação 4.8. Sejam N a orientação da superfície M e consideremos uma direção T tangente ao contorno aparente em $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$. Sabemos, pela Proposição 4.7, que $N(p)$ e T são ortogonais. Como $\mathbf{v} \in T_pM$, os vetores $N(p)$ e $\mathbf{v}$ também são ortogonais. Além disso, T e $\mathbf{v}$ são ortogonais, pois $\Delta_{\mathbf{v}} \subset T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ e $\mathbf{v}$ é ortogonal a $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$. Tomemos T de forma que $\{T, N(p), \mathbf{v}\}$ seja uma base positiva para $\mathbb{R}^3$. Essa orientação para $\Delta_{\mathbf{v}}$ induz uma orientação para $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ tomando $\mathbf{v}$ como vetor normal a $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ e, assim, $\{T, N(p)\}$ é uma base positiva para esse plano (ver Seção 2.2.1). Logo, $N(p)$ é o rotacionado de T em $\frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário (quando olhamos para $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ a partir do semiespaço de $\mathbb{R}^3$ que aponta $\mathbf{v}$). ♢

A orientação definida acima é importante para o Teorema de Koenderink, cuja a demonstração apresentaremos a seguir.

Teorema 4.9. (Teorema de Koenderink) *Sejam M uma superfície regular, $p \in M$, $\mathbf{v} \in T_pM$ um vetor unitário. Se $\mathbf{v}$ não é uma direção assintótica em p, então*

$$K(p) = \kappa_n(\mathbf{v})\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}(\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)), \tag{4.2}$$

onde K é a curvatura Gaussiana de M em p, $\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}(\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p))$ é a curvatura do contorno aparente em $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$ com sinal determinado pela orientação induzida pela orientação de M e $\kappa_n(\mathbf{v})$ é a curvatura normal de M em p na direção $\mathbf{v}$.

Demonstração: Como $\mathbf{v}$ não é uma direção assintótica em p, pela Proposição 4.4 obtemos que $\Sigma_{\mathbf{v}}$ e $\Delta_{\mathbf{v}}$ são curvas regulares em p e $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$, respectivamente. Seja $\alpha(s)$ uma parametrização local de $\Sigma_{\mathbf{v}}$ em p, por comprimento de arco, com $\alpha(0) = p$ de maneira que $\beta(s) = \mathcal{P}_{\mathbf{v}}(\alpha(s))$ seja uma parametrização para $\Delta_{\mathbf{v}}$ com $\{\beta'(0), N(p), \mathbf{v}\}$ uma base positiva para $\mathbb{R}^3$. Pela Proposição 4.6, o vetor tangente à $\Sigma_{\mathbf{v}}$ em p é conjugado à $\mathbf{v}$. Assim, $\alpha'(0) = \pm\frac{\overline{\mathbf{v}}}{\|\overline{\mathbf{v}}\|}$. Sem perda de generalidade, vamos supor $\alpha'(0) = \frac{\overline{\mathbf{v}}}{\|\overline{\mathbf{v}}\|}$, onde $\overline{\mathbf{v}}$ denota o vetor conjugado a $\mathbf{v}$. Como $\beta(s) = \mathcal{P}_{\mathbf{v}}(\alpha(s)) = \alpha(s) - \langle\alpha(s), \mathbf{v}\rangle\mathbf{v}$, obtemos que

$$\beta'(s) = \alpha'(s) - \langle\alpha'(s), \mathbf{v}\rangle\mathbf{v} \quad \text{e} \quad \beta''(s) = \alpha''(s) - \langle\alpha''(s), \mathbf{v}\rangle\mathbf{v}\,.$$

Pela Observação 4.8, $\mathfrak{B} = \{\beta'(0), N(p)\}$ é uma base ortogonal positiva para $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ e, portanto, denotando por $\beta'^{\perp}$ o vetor obtido rotacionando β' em $\frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário obtemos $\frac{\beta'^{\perp}}{\|\beta'\|} = N$. Logo, por (2.5), a curvatura (com sinal) de $\Delta_{\mathbf{v}}$ é dada por:

$$\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}(s) = \frac{\langle\beta'^{\perp}, \beta''\rangle}{\|\beta'\|^3}(s) = \frac{\langle\|\beta'\|N, \beta''\rangle}{\|\beta'\|^3}(s) = \frac{\langle N, \alpha''\rangle}{\|\beta'\|^2}(s) = \frac{\kappa_n(\alpha')}{\|\beta'\|^2}(s).$$

Assim, a curvatura de $\Delta_{\mathbf{v}}$ em $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p) = \beta(0)$ é

$$\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}(0) = \frac{\kappa_n(\overline{\mathbf{v}})}{\|\beta'(0)\|^2}. \tag{4.3}$$

Como $\beta'(0) = \alpha'(0) - \langle \alpha'(0), \mathbf{v}\rangle \mathbf{v} = \dfrac{\overline{\mathbf{v}}}{\|\overline{\mathbf{v}}\|} - \left\langle \dfrac{\overline{\mathbf{v}}}{\|\overline{\mathbf{v}}\|}, \mathbf{v} \right\rangle \mathbf{v} = \dfrac{\overline{\mathbf{v}} - \langle \overline{\mathbf{v}}, \mathbf{v}\rangle \mathbf{v}}{\|\overline{\mathbf{v}}\|}$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|\beta'(0)\|^2 &= \frac{1}{\|\overline{\mathbf{v}}\|^2}\|(\overline{\mathbf{v}} - \langle \overline{\mathbf{v}}, \mathbf{v}\rangle \mathbf{v})\|^2 = \frac{1}{\|\overline{\mathbf{v}}\|^2}(\|\overline{\mathbf{v}}\|^2 - \langle \overline{\mathbf{v}}, \mathbf{v}\rangle^2) \\ &= \frac{1}{\|\overline{\mathbf{v}}\|^2}(EG - F^2)(p)\mathrm{II}(\mathbf{v})^2 = \frac{1}{\|\overline{\mathbf{v}}\|^2}(EG - F^2)(p)(\kappa_n(\mathbf{v}))^2, \end{aligned}$$

onde na terceira igualdade usamo a Proposição 2.29 (d). Substituindo a igualdade acima em (4.3) e usando a Proposição 2.29 (c), obtemos:

$$\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}(0) = \frac{\|\overline{\mathbf{v}}\|^2 \kappa_n(\overline{\mathbf{v}})}{\kappa_n(\mathbf{v})^2(EG - F^2)(p)} = \frac{(nl - m^2)(p)}{\kappa_n(\mathbf{v})(EG - F^2)(p)} = \frac{K(p)}{\kappa_n(\mathbf{v})}.$$

Consequentemente, $K(p) = \kappa_n(\mathbf{v})\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}(0)$, como queríamos. □

Observação 4.10. Se mudarmos a orientação de M, mudamos o sinal da curvatura $\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}$ em (4.3) e o sinal de κ_n, permanecendo inalterado o sinal de K em (4.2), o que está de acordo com o que sabemos sobre a curvatura Gaussiana. ♢

Como consequência do Teorema de Koenderink, temos o seguinte corolário.

Corolário 4.11. ([13], p. 164) *Sejam M uma superfície regular, $p \in M$ e $\mathbf{v} \in T_pM$.*

(a) *Se a direção de projeção $\mathbf{v}$ é não assintótica, então $\mathbf{v}$ é uma direção principal se, e somente se, a curvatura do contorno aparente é igual a curvatura principal associada a outra direção principal.*

(b) *O contorno aparente $\Delta_{\mathbf{v}}$ tem uma inflexão se, e somente se, o ponto correspondente na superfície é um ponto parabólico e $\mathbf{v}$ não é uma direção assintótica.*

Observação 4.12. Se o contorno aparente $\Delta_{\mathbf{v}}$ é uma curva regular, então o Teorema de Koenderink possibilita classificar os pontos da superfície sobre o gerador de contorno $\Sigma_{\mathbf{v}}$ conhecendo o sinal de κ_n em um ponto $p \in \Sigma_{\mathbf{v}}$ e $\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}$. De fato, a Observação 3.12 afirma que, se dois germes $\mathcal{P}_{\mathbf{v}} \circ \mathbf{x}$ e $\mathcal{P}_{\mathbf{v}'} \circ \mathbf{x}'$ são $\mathcal{A}$-equivalentes, então seus conjuntos discriminantes, que são os contornos aparentes nas respectivas direções, são difeormofos. Assim, a partir do Exemplo 4.5 concluímos que $P_{\mathbf{v}}$ será uma singularidade do tipo dobra em todos os pontos de $\Sigma_{\mathbf{v}}$. Logo, pelo Teorema 3.23, obtemos que $\mathbf{v}$ não é uma direção assintótica em todo ponto de $\Sigma_{\mathbf{v}}$. Assim, uma vez que κ_n é uma função contínua segue que $\kappa_n(\mathbf{v})$ não troca de sinal sobre $\Sigma_{\mathbf{v}}$. Portanto, conhecendo o sinal de $\kappa_n(\mathbf{v})$ em um ponto $p \in \Sigma_{\mathbf{v}}$ e $\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}$ podemos classificar os pontos de $\Sigma_{\mathbf{v}}$ em elípticos, parabólicos ou hiperbólicos. ♢

Exemplo 4.13. Considere o cilindro dado no Exemplo 4.3 e $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$. Como vimos, o gerador de contorno e o contorno aparente na direção $\mathbf{v}$ são formado pelos pontos $\{(0, \pm 1, t) \,|t \in \mathbb{R}\}$. Como $\Sigma_{\mathbf{v}}$ e $\Delta_{\mathbf{v}}$ são curvas, com $\Delta_{\mathbf{v}}$ sendo um par de retas, então $\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}(P_{\mathbf{v}}(p)) = 0$, para todo $p \in \Sigma_{\mathbf{v}}$. Assim, pelo Teorema de Koenderink, $K(p) = 0$, para todo $p \in \Sigma_{\mathbf{v}}$ e, portanto, $\Sigma_{\mathbf{v}}$ é formado por pontos parabólicos. ♢

Exemplo 4.14. Sejam M a esfera de raio r centrada em $(0,0,c)$ e $\mathbf{v}=(0,0,1)$. Como M pode ser obtida por $f^{-1}(0)$, onde $f(x,y,z)=x^2+y^2+(z-c)^2-r^2$, então $N(x,y,z)=\frac{\nabla f(x,y,z)}{\|\nabla f(x,y,z)\|}$ é uma direção normal a M em $p=(x,y,z)\in M$. Vamos classificar os pontos de $\Sigma_{\mathbf{v}}$ em M usando a Observação 4.12.

Como vimos no Exemplo 4.1, $\Sigma_{\mathbf{v}}=\{(x,y,c); x^2+y^2=r^2\}$ e $\Delta_{\mathbf{v}}=\{(x,y,0); x^2+y^2=r^2\}$.

Para verificar o sinal da curvatura normal na direção $\mathbf{v}$ nos pontos de $\Sigma_{\mathbf{v}}$ vamos considerar a seção normal C na direção $\mathbf{v}$ parametrizada por $\gamma(s)=(r\cos\frac{s}{r},0,r\operatorname{sen}\frac{s}{r}+c)$. Como $\gamma'(0)=\mathbf{v}$ então, por definição, a curvatura normal de C em $p_0=\gamma(0)\in\Sigma_{\mathbf{v}}$, que coincide com a curvatura normal na direção $\mathbf{v}$, é dada por $\kappa_n=k\langle N,n\rangle$, onde k é a curvatura de C em p_0, N e n os vetores normais a M e C em p_0, respectivamente. Como $n(p_0)=\gamma''(0)=(-\frac{1}{r},0,0)$ e $N(p_0)=(1,0,0)$, segue que $\langle n,N(p_0)\rangle<0$. Logo, $\kappa_n(\mathbf{v})<0$, para todo $p\in\Sigma_{\mathbf{v}}$. Sabemos que o valor absoluto da curvatura normal de C em p é igual a curvatura de C em p. Como neste caso C é uma circunferência de raio r, concluímos que $\kappa_n(\mathbf{v})=-\frac{1}{r}$, para todo $p\in\Sigma_{\mathbf{v}}$.

Vamos calcular agora a curvatura do contorno aparente. Como $\Delta_{\mathbf{v}}$ é um círculo de raio r, sua curvatura em valor absoluto é $\frac{1}{r}$. Precisamos apenas determinar o sinal dessa curvatura. Para isso, vamos considerar $\alpha(t)=(r\operatorname{sen}t,r\cos t,0)$ uma parametrização para $\Delta_{\mathbf{v}}$. Essa parametrização é tal que $\{T,N(p),\mathbf{v}\}$ é uma base positivamente orientada para $\mathbb{R}^3$, onde $T=\alpha'(t)$ (Figura 4.6). Assim, a curvatura de $\Delta_{\mathbf{v}}$ é dada por $k_{\Delta_{\mathbf{v}}}(t)=-\frac{1}{r}<0$. Como $K(p)=\kappa_n(\mathbf{v})k_{\Delta_{\mathbf{v}}}(\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p))$, então $K(p)=\frac{1}{r^2}$, para todo $p\in\Sigma_{\mathbf{v}}$ e, portanto, todo os pontos no gerador de contorno são elípticos. ♢

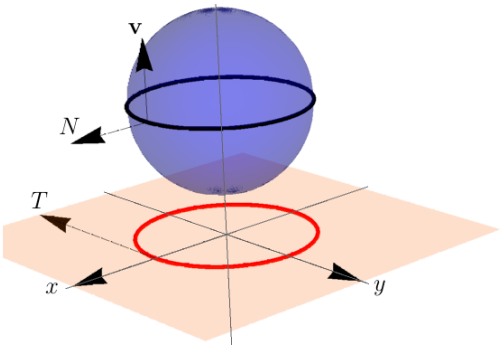


Figura 4.6: Orientação do contorno aparente para a superfície e direção $\mathbf{v}$ dadas no Exemplo 4.14.

Exemplo 4.15. Sejam M a superfície parametrizada por $\mathbf{x}(u,v)=(u,v+1,f(u,v))$, onde $f(u,v)=3u^3-v^2$ e $\mathbf{v}=(0,1,0)$. Vamos considerar $N(u,v)=\frac{(-f_u(u,v),-f_v(u,v),1)}{\sqrt{f_u(u,v)^2+f_v(u,v)^2+1}}$ (Figura 4.7).

O gerador de contorno de M na direção $\mathbf{v}$ é dado por $\Sigma_{\mathbf{v}}=\mathbf{x}(h^{-1}(0))$, onde $h(u,v)=\det[\mathbf{x}_u(u,v),\mathbf{x}_v(u,v),\mathbf{v}]=v^2$. Logo, $\Sigma_{\mathbf{v}}=\mathbf{x}(u,0)=\{(u,1,3u^3)\,|\,u\in\mathbb{R}\}$ e, com isso, $\Delta_{\mathbf{v}}=\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(\Sigma_{\mathbf{v}})=\{(u,0,3u^3)\,|\,u\in\mathbb{R}\}$. Classifiquemos os pontos de M em uma vizinhança de $p_0=\mathbf{x}(0,0)=(0,1,0)$ de acordo com a Observação 4.12.

Para verificar o sinal da curvatura normal de M na direção $\mathbf{v}$ nos pontos do gerador de contorno, consideremos C a curva parametrizada por $\gamma(t)=(0,t+1,-t^2)$. Essa curva é tal que $\gamma(0)=p_0$ e $\gamma'(0)=\mathbf{v}$. A curvatura normal de C em $p_0=\gamma(0)=(0,1,0)$, que coincide com a curvatura normal na direção $\mathbf{v}$, é dada por $\kappa_n=k\langle N,n\rangle$, onde k é

a curvatura de γ em $t = 0$, N o vetor normal a M em p_0 e n o vetor normal normal a C em p_0. Logo, o sinal de κ_n coincide com o sinal de $\langle N, n\rangle$. Como $n(p_0) = (0, 0, -1)$ e $N(p_0) = (0, 0, 1)$, segue que, $\kappa_n < 0$ e, portanto, $\kappa_n(\mathbf{v}) < 0$, para todo $p \in \Sigma_{\mathbf{v}}$ em uma vizinhança de p_0.

Encontremos agora a curvatura de $\Delta_{\mathbf{v}}$. Seja $\alpha(t) = (-t, 0, -3t^3)$ uma parametrização de $\Delta_{\mathbf{v}}$. Observamos que esta parametrização é tal que $\{T, N(p_0), \mathbf{v}\}$ forma uma base positiva para $\mathbb{R}^3$, onde $T = \alpha'(0)$. Como $\mathfrak{B} = \{\alpha'(0), N(p_0)\} = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base ortonormal positiva para $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$, então $\alpha(t) = a(t)\alpha'(0) + b(t)N(p_0)$, de onde segue que $a(t) = \langle \alpha'(0), \alpha(t)\rangle = t$ e $b(t) = \langle \alpha(t), N(p_0)\rangle = -3t^3$. Logo, $\alpha(t) = (t, -3t^3)_{\mathfrak{B}}$ e, portanto,

$$\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}(t) = \frac{\det[\alpha'(t), \alpha''(t)]_{\mathfrak{B}}}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{-18t}{(1 + 81t^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Logo, os pontos $p = (t, 1, 3t^3) \in \Sigma_{\mathbf{v}}$ são classificados da seguinte forma:

- Se $t < 0$, então p é um ponto hiperbólico.
- Se $t = 0$, então p é um ponto parabólico.
- Se $t > 0$, então p é um ponto elíptico.

♢

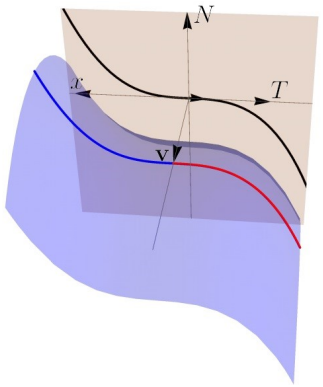


Figura 4.7: Superfície M do Exemplo 4.15, seu contorno aparente (em preto) e gerador de contorno, formado por pontos elípticos em vermelho, e pontos hiperbólicos em azul.

CAPÍTULO 5

PROJEÇÃO ORTOGONAL E EXTENSÕES DO TEOREMA DE KOENDERINK

Os resultados dos capítulos anteriores envolvem projeções ortogonais para superfícies regulares. Estudamos propriedades do contorno aparente $\Delta_{\mathbf{v}}$ e o Teorema de Koenderink, o qual está associado a contornos aparentes regulares, o que significa que, para superfícies genéricas, $\mathbf{v}$ não é direção assintótica da superfície.

Neste capítulo estudaremos algumas extensões dos resultados vistos anteriormente. Estudaremos as singularidades de $\Delta_{\mathbf{v}}$ a partir das singularidades cúspide e rabo de andorinha de $P_{\mathbf{v}}$ e uma versão do Teorema de Koenderink considerando superfície regular e contorno aparente com cúspide ordinária.

Estudaremos o contato de cuspidal edges com retas que, assim como para superfícies regulares, é medido pelas singularidades da projeção ortogonal dessas superfícies e como relacionar as classes de singularidades que genericamente ocorrem para essa aplicação com as informações geométricas da cuspidal edge. Estudaremos ainda uma versão do Teorema de Konederink para cuspidal edges.

As principais referências utilizadas neste capítulo são: [10] para a versão do Teorema de Koenderink para contorno aparente com (2,3)-cúspide; [22] para a projeção ortogonal de cuspidal edges e [25] para uma extensão do Teorema de Koenderink para essas superfícies.

5.1 Extensão do Teorema de Koenderink para contorno aparente singular

O Teorema de Koenderink relaciona a curvatura Gaussiana K de uma superfície regular, em pontos do gerador de contorno $\Sigma_{\mathbf{v}}$, com a curvatura do contorno aparente $\Delta_{\mathbf{v}}$ quando este é uma curva regular. Considerando superfícies genéricas para a projeção ortogonal, o contorno aparente é uma curva regular apenas para a singularidade do tipo dobra para $P_{\mathbf{v}}$. Nosso objetivo nesta seção é apresentar uma extensão do Teorema de Koenderink para o caso em que $\Delta_{\mathbf{v}}$ é uma (2,3)-cúspide, o que ocorre se, e somente se, $P_{\mathbf{v}}$ é do tipo cúspide.

5.1.1 Contorno aparente singular

Estudaremos a seguir a classificação de algumas singularidades do contorno aparente e sua relação com as singularidades de $P_{\mathbf{v}}$.

Definição 5.1. Um germe de aplicação $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ é chamado de
(a) **(2,3)-cúspide** (ou **cúspide ordinária**) se é $\mathcal{A}$-equivalente a $\alpha(t) = (t^2, t^3)$.
(b) **(3,4)-cúspide** se é $\mathcal{A}$-equivalente a $\beta(t) = (t^3, t^4)$.

Os germes α e β definidos acima são dois tipos de singularidades que podem ocorrer para curvas planas. Um estudo detalhado sobre as singularidades de curvas planas pode ser encontrado em [2]. Enunciaremos a seguir um resultado conhecido (ver, por exemplo, [19], p. 4) para o reconhecimento das singularidades que definimos acima.

Lema 5.2. *Um germe de curva plana $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ é uma $(2,3)$-cúspide (resp. $(3,4)$-cúspide) em 0 se, e somente se, $\gamma'(0) = \mathbf{0}$ e $\det[\gamma''(0), \gamma'''(0)] \neq 0$, equivalentemente $\gamma''(0)$ e $\gamma'''(0)$ são vetores linearmente independentes (resp. $\gamma'(0) = \gamma''(0) = \mathbf{0}$ e $\det[\gamma'''(0), \gamma^{(4)}(0)] \neq 0$, equivalentemente $\gamma'''(0)$ e $\gamma^{(4)}(0)$ são vetores linearmente independentes).*

A Observação 3.12 afirma que, se dois germes $\mathcal{P}_{\mathbf{v}} \circ \mathtt{x}$ e $\mathcal{P}_{\mathbf{v}'} \circ \mathtt{x}'$ são $\mathcal{A}$-equivalentes, então seus conjuntos discriminantes, que são os contornos aparentes nas respectivas direções, são difeormofos. Assim, pelo Exemplo 4.2 (resp. Exemplo 4.5(d)), se $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade do tipo cúspide (resp. rabo de andorinha), então o contorno aparente $\Delta_{\mathbf{v}}$ é uma (2,3)-cúspide (resp. (3,4)-cúspide). A seguir, iremos apresentar uma maneira de justificar essas afirmações usando o lema enunciado anteriormente e o Teorema 3.23.

Proposição 5.3. *Sejam M uma superfície regular, genérica para a projeção ortogonal e $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^2$.*
(a) *Se $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade do tipo cúspide, então o contorno aparente $\Delta_{\mathbf{v}}$ é uma $(2,3)$-cúspide.*
(b) *Se $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade do tipo rabo de andorinha, então o contorno aparente $\Delta_{\mathbf{v}}$ é uma $(3,4)$-cúspide.*

Demonstração: Suponhamos, sem perda de generalidade, que M é dada na forma de Monge $z = f(u, v)$, onde

$$f(u,v) = a_{20}u^2 + a_{21}uv + a_{22}v^2 + a_{30}u^3 + a_{31}u^2v + a_{32}uv^2 + a_{33}v^3 + \mathcal{O}(4), \tag{5.1}$$

com $\mathcal{O}(4)$ denotando os termos de grau maior ou igual a 4, e $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$. Pela Proposição 3.19, a projeção ortogonal $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ é singular em $q = (u, v, f(u, v))$ se, e somente se, $\mathbf{v} \in T_qM$, ou seja, $f_v(u, v) = 0$. Logo, $\Delta_{\mathbf{v}} = P_{\mathbf{v}}(f_v^{-1}(0))$, com $f_v(u, v) = a_{21}u + 2a_{22}v + a_{31}u^2 + 2a_{32}uv + 3a_{33}v^2 + \mathcal{O}(3)$. Observemos que $p = \mathbf{0}$ é um ponto singular de $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ e $f_v^{-1}(0)$ é uma curva regular em $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ se, e somente se, $a_{21} \neq 0$ ou $a_{22} \neq 0$.

(a) Suponhamos que $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade do tipo cúspide em $\mathbf{0}$. Então, pelo Teorema 3.23, $f_{uv}(0, 0) = a_{21} \neq 0$. Assim, pelo Teorema da Função Implícita, existem uma vizinhança V de $(0, 0)$ e uma função $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to J$, com $\varepsilon > 0$ e J um intervalo de $\mathbb{R}$, tal que os pontos $(u, v) \in f_v^{-1}(0) \cap V$ podem ser escritos da forma $\alpha(v) = (\varphi(v), v)$, e $\varphi'(v) = -\frac{f_{vv}(\varphi(v),v)}{f_{uv}(\varphi(v),v)}$. Logo, $\hat{\alpha}(v) = P_{\mathbf{v}} \circ \alpha(v)$ é uma parametrização local para $\Delta_{\mathbf{v}}$ em $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$. Tomando a parametrização $\mathtt{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ para M, uma vez que $P_{\mathbf{v}}(u, v) = (u, 0, f(u, v))$, obtemos

$$\hat{\alpha}(v) = (\varphi(v), 0, f(\varphi(v), v)). \tag{5.2}$$

Assim,

$$\hat{\alpha}'(0) = \mathbf{0}, \quad \hat{\alpha}''(0) = \left(-\frac{6a_{33}}{a_{21}}, 0, 0\right) \quad \text{e} \quad \hat{\alpha}'''(0) = \left(\frac{36a_{32}a_{33}}{a_{21}^2} + c(4), 0, -12a_{33}\right),$$

onde $c(4)$ denota os coeficientes dos termos de ordem maior ou igual a 4 em (5.1).

Logo, pelo Teorema 3.23, que garante que $a_{33} \neq 0$, e o Lema 5.2, concluímos que $\hat{\alpha}$ é uma (2,3)-cúspide.

(b) Suponhamos que $P_{\mathbf{v}}$ seja uma singularidade do tipo rabo de andorinha em $p = \mathbf{0}$. Então, pelo Teorema 3.23, obtemos que $a_{22} = a_{33} = 0$, $a_{21} \neq 0$ e $a_{44} \neq 0$.

Usando a parametrização $\hat{\alpha}$ para o contorno aparente dada em (5.2) obtemos $\hat{\alpha}'(0) = \hat{\alpha}''(0) = \mathbf{0}$ e

$$\hat{\alpha}'''(0) = \left(-\frac{24a_{44}}{a_{21}}, 0, 0\right) \quad \text{e} \quad \hat{\alpha}^{(4)}(0) = \left(-\frac{192a_{32}a_{44}}{a_{21}^2} + c(5), 0, -72a_{44}\right), \tag{5.3}$$

de onde segue que $\Delta_{\mathbf{v}}$ é uma (3,4)-cúspide em $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$. □

5.1.2 Extensão do Teorema de Koenderink para (2,3)-cúspide

Na Proposição 5.3 a superfície M é regular, logo a curvatura Gaussiana está bem definida em todos os seus pontos e vale o Teorema de Koenderink na parte regular de $\Delta_{\mathbf{v}}$. Uma vez conhecidas algumas singularidades de $\Delta_{\mathbf{v}}$, pode-se perguntar se o limite do produto $\kappa_n(\mathbf{v})\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}(\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(\tilde{p}))$ converge para $K(p)$ quando $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(\tilde{p})$ converge para o ponto singular $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$. Mais ainda, pode-se questionar também se existe um invariante definido para as singularidades (2,3) e (3,4)-cúspides tal que a curvatura Gaussiana em p pode ser escrita em função desse invariante em $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(p)$.

Essas perguntas foram respondidas em [10] quando $\Delta_{\mathbf{v}}$ tem uma singularidade do tipo (2,3)-cúspide. Para isso, os autores utilizaram a curvatura cuspidal, definida para cúspides ordinárias em [26]. A seguir, iremos apenas definir essa curvatura e enunciar um resultado usado na extensão do Teorema de Koenderink para (2,3)-cúspides. Mais detalhes sobre a curvatura cuspidal podem ser encontrados no artigo [26].

Definição 5.4. Dada uma (2,3)-cúspide $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$, a **curvatura cuspidal** de γ é definida por

$$\mu_\gamma = \left.\frac{\det[\gamma''(t), \gamma'''(t)]}{\|\gamma''(t)\|^{\frac{5}{2}}}\right|_{t=0}. \tag{5.4}$$

Exemplo 5.5. Seja $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ a curva dada por $\gamma(t) = (-3t^2, -2t^3)$. Como $\gamma'(0) = \mathbf{0}$ e $\det[\gamma''(0), \gamma'''(0)] = \det[(-6, 0), (0, -12)] = 72$, então γ é uma (2,3)-cúspide e sua curvatura cuspidal é dada por $\mu_\gamma = \frac{72}{36\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. ♢

O lema abaixo auxilia na prova da extensão do Teorema de Koenderink quando o contorno aparente for uma $(2, 3)$-cúspide.

Lema 5.6. (Proposição 2.2 de [10]) *Seja $\gamma(t) : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ uma $(2, 3)$-cúspide. Então*

$$|\mu_\gamma| = 2\sqrt{\|\gamma''(0)\|} \lim_{t\to 0} |t\kappa_\gamma(t)|,$$

onde κ_γ denota a curvatura usual de γ.

Fixemos algumas notações.

Sejam M uma superfície regular e $\mathtt{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma parametrização local para M em $\mathbf{0} \in M$. Suponhamos que a projeção ortogonal $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade cúspide. Então, pelo Teorema 3.23, $\mathbf{v}$ é uma direção assintótica e, pela demonstração da Proposição 5.3, o conjunto singular de $P_{\mathbf{v}}$ é uma curva regular. Seja $\alpha(t_c)$ uma parametrização para o conjunto singular de $P_{\mathbf{v}}$ e $\beta(t_s)$ uma parametrização para o conjunto $\{(u,v); \det[\mathtt{x}(u,v), \mathbf{v}, N(\mathbf{0})] = 0\}$, com $\alpha(0) = \beta(0) = \mathbf{0}$. Então $\hat{\alpha}(t_c) = P_{\mathbf{v}} \circ \alpha(t_c)$ é uma parametrização para o contorno aparente na direção $\mathbf{v}$ e $\hat{\beta}(t_s) = \mathtt{x} \circ \beta(t_s)$ é uma parametrização para a seção normal de M na direção $\mathbf{v}$.

As curvas $\alpha(t_c)$ e $\beta(t_s)$ são tangentes em 0. De fato, como $\alpha(t_c)$ é uma parametrização para o conjunto singular de $P_{\mathbf{v}}$, então $\overline{\alpha}(t_c) = \mathtt{x} \circ \alpha(t_c)$ é uma parametrização para o gerador de contorno na direção $\mathbf{v}$. Observamos que, como $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade cúspide, pelo Teorema 3.23 obtemos que $\mathbf{0}$ é um ponto hiperbólico. Assim, pela Proposição 4.4 a curva $\overline{\alpha}(t_c)$ é regular. Logo, o vetor $\frac{d}{dt_c}\overline{\alpha}(0) = d\mathtt{x}_{\mathbf{0}}(\frac{d}{dt_c}\alpha(0))$ é não nulo e, pela Proposição 4.6, é conjugado a $\mathbf{v}$. A curva $\hat{\beta}(t_s) = \mathtt{x} \circ \beta(t_s)$ é uma parametrização para a seção normal na direção $\mathbf{v}$, logo $\frac{d}{dt_s}\hat{\beta}(0) = d\mathtt{x}_{\mathbf{0}}(\frac{d}{dt_s}\beta(0))$ é paralelo a $\mathbf{v}$. Como p é um ponto hiperbólico e $\mathbf{v}$ direção assintótica, pela Observação 2.30 obtemos que os vetores $\frac{d}{dt_c}\overline{\alpha}(0)$ e $\frac{d}{dt_s}\hat{\beta}(0)$ são paralelos. Assim, existe $l \in \mathbb{R}^*$ tal que $\frac{d}{dt_s}\hat{\beta}(0) = d\mathtt{x}_{\mathbf{0}}(\frac{d}{dt_s}\beta(0)) = l\,\frac{d}{dt_c}\overline{\alpha}(0) = d\mathtt{x}_{\mathbf{0}}(l\,\frac{d}{dt_c}\alpha(0))$ e, como $\mathtt{x}$ é uma imersão, concluímos que $\frac{d}{dt_s}\beta(0) = l\frac{d}{dt_c}\alpha(0)$, ou seja, as curvas $\alpha(t_c)$ e $\beta(t_s)$ são tangentes em 0. Denotaremos por $\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}(t_c)$ e $\kappa_{sn}(t_s)$ as curvaturas de $\hat{\alpha}(t_c)$ e $\hat{\beta}(t_s)$, respectivamente. Com essas notações, temos o seguinte resultado.

Teorema 5.7. ([10]) *Se a projeção ortogonal $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade cúspide, então*

$$\lim_{(t_c,t_s)\to(0,0)} \left|\frac{\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}(t_c)\kappa_{sn}(t_s)}{l}\right| = \left|\frac{1}{l}\frac{\mu_{\hat{\alpha}}}{2\sqrt{\|\hat{\alpha}''(0)\|}}\frac{d\kappa_{sn}}{dt_s}(0)\right| = |K(0,0)|.$$

Demonstração: Suponhamos, sem perda de generalidade, que M está na forma de Monge $z = f(u,v)$ e $\mathtt{x}$ é dado por

$$\mathtt{x}(u,v) = \left(u, v, \frac{1}{2}(k_1^2u^2 - k_2^2v^2) + \sum_{m=3}^{k} c_m(u,v) + \mathcal{O}(u,v)^{k+1}\right), \tag{5.5}$$

onde $k_1 > 0, k_2 > 0$, $c_m(u,v) = \sum_{j=0}^{m} \frac{a_{mj}}{(m-j)!j!}u^{m-j}v^j$ e $\mathcal{O}(u,v)^{k+1}$ denota os termos de grau maior ou igual a $k+1$ nas variáveis u e v.

Dessa forma, obtemos $N(0,0) = (0,0,1)$, $K(0,0) = -k_1^2k_2^2 < 0$. Seja $\mathbf{v} = \frac{1}{a^2+b^2}\,(a\mathtt{x}_u(\mathbf{0}) + b\mathtt{x}_v(\mathbf{0}))$. Como $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade cúspide, então $\mathbf{v}$ é uma direção assintótica. Assim, por (2.16) obtemos $a^2k_1^2 - b^2k_2^2 = 0$. Logo, podemos tomar $a = k_2$ e $b = \varepsilon k_1$, onde $\varepsilon = \pm 1$ e, assim, $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}(k_2, \varepsilon k_1, 0)$.

Pela Proposição 3.19, o conjunto singular de $P_{\mathbf{v}}$ é dado por $h^{-1}(0)$, onde $h(u,v) = \det[\mathtt{x}_u(u,v), \mathtt{x}_v(u,v), \mathbf{v}]$. Como $\mathbf{v} \in T_pM$ se, e somente se, $\tilde{\mathbf{v}} = (k_2, \varepsilon k_1, 0) \in T_pM$, o conjunto singular de $P_{\mathbf{v}}$ também é dado por $\tilde{h}^{-1}(0)$, onde

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(u,v) &= \det[\mathtt{x}_u(u,v), \mathtt{x}_v(u,v), \tilde{\mathbf{v}}] \\
&= -k_1^2k_2u + \varepsilon k_1k_2^2v - \left(\tfrac{a_{30}}{2}k_2 + \tfrac{a_{31}}{2}\varepsilon k_1\right)u^2 - (a_{31}k_2 + a_{32}\varepsilon k_1)uv \\
&- \left(\tfrac{a_{32}}{2}k_2 + \tfrac{a_{33}}{2}\varepsilon k_1\right)v^2 + \mathcal{O}(u,v)^3.
\end{aligned}$$

Uma vez que $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial v}(0,0) = \varepsilon k_1 k_2^2 \neq 0$ segue do Teorema da Função Implícita que existem uma vizinhança V de $(0,0)$ e uma função $\phi : (-\delta, \delta) \to J$, tal que os pontos $(u,v) \in \tilde{h}^{-1}(0) \cap V$ podem ser escritos como $(u, \phi(u))$ e, uma vez que $\alpha(t_c) = \tilde{h}^{-1}(0)$, então $\alpha(t_c)$ pode ser parametrizada por $\alpha(t_c) = (t_c, \phi(t_c))$.

Como vamos trabalhar com curvaturas, iremos precisar apenas das derivadas de $\hat{\alpha}$ e, assim, é suficiente determinar o k-jato de α que, por simplicidade, também denotaremos por $\alpha(t_c)$. Temos $\alpha(t_c) = (t_c, \phi'(0)\, t_c + \frac{1}{2}\phi''(0)\, t_c^2 + \mathcal{O}(t_c^3))$, onde $\mathcal{O}(t_c^3)$ denota os termos de grau maior ou igual a 3 na variável t_c.

Como $\phi'(t_c) = -\frac{\tilde{h}_u(t_c, \phi(t_c))}{\tilde{h}_v(t_c, \phi(t_c))}$, obtemos

$$\phi'(0) = \frac{k_1}{\varepsilon k_2}$$

e

$$\phi''(0) = \frac{a_{30}\varepsilon k_2^3 + 3a_{31}k_1 k_2^2 + 3a_{32}\varepsilon k_1^2 k_2 + a_{33}k_1^3}{k_1 k_2^4} = \frac{6\varepsilon c_3(k_2, \varepsilon k_1)}{k_1 k_2^4}.$$

Logo,

$$\alpha(t_c) = \left(t_c, \frac{k_1}{\varepsilon k_2}\, t_c + \frac{3\varepsilon c_3(k_2, \varepsilon k_1)}{k_1 k_2^4}\, t_c^2 + \mathcal{O}(t_c^3) \right). \tag{5.6}$$

Como a projeção ortogonal de M na direção $\mathbf{v}$ é dada por

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{v}}(u,v) &= (u,v,f(u,v)) - \langle (u,v,f(u,v)), \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} \\ &= \left(u - \frac{k_2(k_2 u + \varepsilon k_1 v)}{k_1^2 + k_2^2}, v - \frac{\varepsilon k_1 (k_2 u + \varepsilon k_1 v)}{k_1^2 + k_2^2}, f(u,v) \right), \end{aligned}$$

obtemos

$$\hat{\alpha}(t_c) = \left(\frac{-3c_3(k_2, \varepsilon k_1)}{k_2^3(k_1^2 + k_2^2)}\, t_c^2 + \mathcal{O}(t_c^3), \frac{3\varepsilon c_3(k_2, \varepsilon k_1)}{k_1 k_2^2 (k_1^2 + k_2^2)}\, t_c^2 + \mathcal{O}(t_c^3), \frac{-2c_3(k_2, \varepsilon k_1)}{k_2^3}\, t_c^3 + \mathcal{O}(t_c^4) \right).$$

A curva $\hat{\alpha}$ está contida em $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ e $\mathbf{v}$ é um vetor unitário ortogonal a $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$. Assim, pela Observação 2.22, $\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}(t_c) = \pm \frac{\det[\hat{\alpha}'(t_c), \hat{\alpha}''(t_c), \mathbf{v}]}{\|\alpha'(t_c)\|^3}$.

Temos,

$$\hat{\alpha}'(t_c) = \left(\frac{-6c_3(k_2, \varepsilon k_1)}{k_2^3(k_1^2 + k_2^2)}\, t_c + \mathcal{O}(t_c^2), \frac{6\varepsilon c_3(k_2, \varepsilon k_1)}{k_1 k_2^2 (k_1^2 + k_2^2)}\, t_c + \mathcal{O}(t_c^2), \frac{-6c_3(k_2, \varepsilon k_1)}{k_2^3}\, t_c^2 + \mathcal{O}(t_c^3) \right),$$

e

$$\hat{\alpha}''(t_c) = \left(\frac{-6c_3(k_2, \varepsilon k_1)}{k_2^3(k_1^2 + k_2^2)} + \mathcal{O}(t_c), \frac{6\varepsilon c_3(k_2, \varepsilon k_1)}{k_1 k_2^2 (k_1^2 + k_2^2)} + \mathcal{O}(t_c), \frac{-12c_3(k_2, \varepsilon k_1)}{k_2^3}\, t_c + \mathcal{O}(t_c^2)) \right).$$

Logo,

$$\kappa_{\Delta_{\mathbf{v}}}(t_c) = \pm \frac{-\varepsilon k_1^2 k_2^3 (k_1^2 + k_2^2)(t_c^2 + \mathcal{O}(t_c^3))}{6|c_3(k_2, \varepsilon k_1)|(t_c^2 + \mathcal{O}(t_c^3))^{\frac{3}{2}}}.$$

A seção normal de M na direção $\mathbf{v}$ é a imagem por $\mathbf{x}$ da curva $\beta(t_s)$, obtida como conjunto de zeros da função $g(u,v) = \det[\mathbf{x}(u,v), \tilde{\mathbf{v}}, N(\mathbf{0})] = \varepsilon k_1 u - k_2 v$.

Como $\beta(t_s) = g^{-1}(0)$ e $\beta'(0) = l\alpha'(0) = \left(l, l\frac{\varepsilon k_1}{k_2}\right)$, então $\beta(t_s) = \left(l t_s, l\frac{\varepsilon k_1}{k_2} t_s\right)$. Assim,

$$\hat{\beta}(t_s) = \mathbf{x} \circ \beta(t_s) = \left(l t_s, l\frac{\varepsilon k_1}{k_2} t_s, \frac{c_3(k_2, \varepsilon k_1)}{k_2^3} l^3 t_s^3 + \mathcal{O}(t_s^4) \right).$$

A curva $\hat{\beta}(t_s)$ está contida no plano gerado pelos vetores $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}(k_2, \varepsilon k_1, 0)$ e $N(\mathbf{0}) = (0,0,1)$, que tem $\mathbf{v} \times N(\mathbf{0}) = \left(\frac{\varepsilon k_1}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}, \frac{-k_2}{\sqrt{k_1^2+k_2^2}}, 0\right)$ como vetor normal unitário. Logo,

$$\kappa_{sn}(t_s) = \pm\frac{\det[\hat{\beta}'(t_s), \hat{\beta}''(t_s), \mathbf{v}\times N(\mathbf{0})]}{\|\hat{\beta}'(t_s)\|^3} = \pm\frac{6c_3(k_2,\varepsilon k_1)lt_s + \mathcal{O}(t_s^2)}{k_2(k_1^2+k_2^2)^{-\frac{1}{2}}(k_1^2+k_2^2+\mathcal{O}(t_s^4))^{\frac{3}{2}}}.$$

Como $\frac{d\alpha}{dt_c}(0) = \frac{1}{l}\frac{d\beta}{dt_s}(0)$, então $t_s = \pm t_c + \mathcal{O}(t_c^2)$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{t_c\to 0\\ t_s\to 0}}\left|\frac{\kappa_{\Delta_\mathbf{v}}(t_c)\kappa_{sn}(t_s)}{l}\right| &= \lim_{\substack{t_c\to 0\\ t_s\to 0}}\left|\frac{\frac{-\varepsilon k_1^2k_2^3(k_1^2+k_2^2)(t_c^2+\mathcal{O}(t_c^3))}{6|c_3(k_2,\varepsilon k_1)|(t_c^2+\mathcal{O}(t_c^3))^{\frac{3}{2}}}\ \frac{6c_3(k_2,\varepsilon k_1)lt_s+\mathcal{O}(t_s^2)}{k_2(k_1^2+k_2^2)^{-\frac{1}{2}}(k_1^2+k_2^2+\mathcal{O}(t_s^4))^{\frac{3}{2}}}}{l}\right| \\
&= \lim_{t_c\to 0}\left|k_1^2k_2^2\ \frac{(k_1^2+k_2^2)(t_c^2+\mathcal{O}(t_c^3))}{(t_c^2+\mathcal{O}(t_c^3))^{\frac{3}{2}}}\ \frac{\pm t_c+\mathcal{O}(t_c^2)}{(k_1^2+k_2^2)^{-\frac{1}{2}}(k_1^2+k_2^2+\mathcal{O}(t_c^4))^{\frac{3}{2}}}\right| \\
&= \lim_{t_c\to 0}\left|k_1^2k_2^2\ \frac{(k_1^2+k_2^2)(t_c^3+\mathcal{O}(t_c^4))}{(t_c^2+\mathcal{O}(t_c^3))^{\frac{3}{2}}(k_1^2+k_2^2)^{-\frac{1}{2}}(k_1^2+k_2^2+\mathcal{O}(t_c^4))^{\frac{3}{2}}}\right| \\
&= \lim_{t_c\to 0}\left|k_1^2k_2^2\ \frac{(k_1^2+k_2^2)t_c^3(1+\mathcal{O}(t_c))}{t_c^3(1+\mathcal{O}(t_c))^{\frac{3}{2}}(k_1^2+k_2^2)^{-\frac{1}{2}}(k_1^2+k_2^2+\mathcal{O}(t_c^4))^{\frac{3}{2}}}\right| \\
&= |k_1^2k_2^2| = |K(0,0)|.
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando o Lema 5.6 e o fato que $t_s = \pm t_c + \mathcal{O}(t_c^2)$, obtemos:

$$\lim_{\substack{t_c\to 0\\ t_s\to 0}}\left|\frac{\kappa_{\Delta_\mathbf{v}}(t_c)\kappa_{sn}(t_s)}{l}\right| = \lim_{\substack{t_c\to 0\\ t_s\to 0}}\left|\frac{1}{l}\,t_c\kappa_{\Delta_\mathbf{v}}(t_c)\,\frac{\kappa_{sn}(t_s)}{t_s}\,\frac{t_s}{t_c}\right| = \left|\frac{1}{l}\frac{\mu_{\hat{\alpha}}}{2\sqrt{\|d^2\hat{\alpha}/dt_c^2(0)\|}}\,\frac{d\kappa_{sn}}{dt_s}(0)\right|,$$

o que finaliza a demonstração. □

O exemplo a seguir ilustra o teorema cuja demonstração acabamos de estudar.

Exemplo 5.8. Consideremos M a superfície do Exemplo 4.2, dada por $z = f(u,v)$, onde $f(u,v) = uv + v^3$, parametrizada por $\mathbf{x}(u,v) = (u, v, f(u,v))$ e $\mathbf{v} = (0,1,0)$. Vimos que $P_\mathbf{v}$ é uma singularidade do tipo cúspide em $\mathbf{0}$, o conjunto singular de $P_\mathbf{v}$ é parametrizado por $\alpha(t_c) = (-3t_c^2, t_c)$ e, assim, o contorno aparente $\Delta_\mathbf{v}$, dado por $\hat{\alpha}(t_c)\{(-3t_c^2, 0, -2t_c^3)\}$, é uma (2,3)-cúspide.

A curva $\beta(t_s)$ é obtida como conjunto de zeros da função $g(u,v) = \det[\mathbf{x}(u,v), \mathbf{v}, N(\mathbf{0})] = u$. Logo, $\beta(t_s) = (0, t_s)$ e a seção normal na direção $\mathbf{v}$ é dada por $\hat{\beta}(t_s) = \mathbf{x}\circ\beta(t_s) = (0, t_s, t_s^3)$.

A curvatura de $\hat{\beta}(t_s)$ é

$$\kappa_{sn}(t_s) = \pm\frac{\det[\hat{\beta}'(t_s), \hat{\beta}''(t_s), (1,0,0)]}{\|\hat{\beta}'(t_s)\|^3} = \pm\frac{6t_s}{(1+9t_s^4)^{\frac{3}{2}}},$$

de onde segue que $\frac{d\kappa_{sn}}{dt_s}(0) = \pm 6$. Como $\frac{d\alpha}{dt_c}(0) = \frac{d\beta}{dt_s}(0) = (0,1)$, então $l = 1$.

A curvatura cuspidal de $\hat{\alpha}$ é, em valor absoluto, dada por $\mu_{\hat{\alpha}}(0) = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Logo, pelo Teorema 5.7, obtemos

$$|K(0,0)| = \left|\frac{1}{l}\frac{\mu_{\hat{\alpha}}}{2\sqrt{\|d^2\hat{\alpha}/dt_c^2(0)\|}}\,\frac{d\kappa_{sn}}{dt_s}(0)\right| = \left|\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{2\sqrt{6}}\,6\right| = 1.$$

Portanto, $K(0,0) = -1$.
A figura a seguir apresenta o traço de M e as curvas deste exemplo. ♢

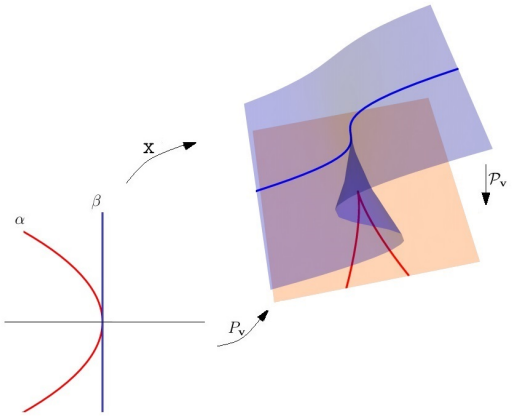


Figura 5.1: Superfície M e as curvas dadas no Exemplo 5.8.

5.2 Projeção ortogonal da cuspidal edge

Os resultados que apresentaremos a seguir têm com referência o artigo [22]. Iremos considerar novamente a família de projeções ortogonais dada por $\mathcal{P} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 \to T\mathbb{S}^2$, com

$$\mathcal{P}(X, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathcal{P}_{\mathbf{v}}(X)),$$

onde $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(X) = X - \langle X, \mathbf{v}\rangle \mathbf{v}$. Dada uma superfície M, parametrizada localmente por $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto em $\mathbb{R}^2$, $P : U \times \mathbb{S}^2 \to T\mathbb{S}^2$ é a família de projeções ortogonais em M dada por

$$P((u,v), \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, P_{\mathbf{v}}(u,v)), \tag{5.7}$$

onde $P_{\mathbf{v}}(u,v) = \mathcal{P}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}(u,v)) = \mathbf{x}(u,v) - \langle \mathbf{x}(u,v), \mathbf{v}\rangle \mathbf{v}$. Como vimos na Seção 3.3, $P_{\mathbf{v}}$ é uma aplicação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e mede o contato de M com retas paralelas à $\mathbf{v}$. Vimos no Teorema 3.20 que, para um conjunto aberto e denso de imersões $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^3$, a projeção ortogonal $P_{\mathbf{v}}$ tem apenas $\mathcal{A}$-singularidades com $\mathcal{A}_e$-codimensão $\leqslant 2$ que são $\mathcal{A}_e$-versalmente desdobradas pela família P.

Quando M é uma cuspidal edge dada em sua forma normal especial $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$, com

$$f(u,v) = \left(u, a(u) + \tfrac{1}{2}v^2, b_1(u) + v^2 b_2(u) + v^3 b_3(u,v)\right), \tag{5.8}$$

onde

$$\begin{aligned} a(u) &= \tfrac{1}{2}a_{20}u^2 + \tfrac{1}{6}a_{30}u^3 + \tfrac{1}{24}a_{40}u^4 + \mathcal{O}(5), \\ b_1(u) &= \tfrac{1}{2}b_{20}u^2 + \tfrac{1}{6}b_{30}u^3 + \tfrac{1}{24}b_{40}u^4 + \mathcal{O}(5), \\ b_2(u) &= \tfrac{1}{2}b_{12}u + \tfrac{1}{6}b_{22}u^2 + \mathcal{O}(3), \\ b_3(u,v) &= \tfrac{1}{6}b_{03} + \tfrac{1}{6}b_{13}u + \mathcal{O}(2), \text{ com } b_{03} \neq 0, \end{aligned}$$

se $\mathbf{v} = (0,1,0)$, então $P_{\mathbf{v}} = \mathcal{P}_{\mathbf{v}} \circ f(u,v) = (u, b_1(u) + y^2 b_2(u) + y^3 b_3(u,v))$ e, se $b_{12} = 0$ e $b_{22} \neq 0$, é possível mostrar que $P_{\mathbf{v}}$ é $\mathcal{A}$-equivalente a $(x, y^3 - x^4 y)$, que tem $\mathcal{A}_e$-codimensão

igual a 3 ([22], p. 403). Assim, a família P não pode ser um desdobramento $\mathcal{A}_e$-versal de $P_{\mathbf{v}}$, uma vez que pelo Teorema 2.19 um desdobramento $\mathcal{A}_e$-versal deste germe é uma aplicação com domínio $U \times \mathbb{R}^3$. Dessa forma, o grupo $\mathcal{A}$ não é muito útil para descrever as singularidades da projeção ortogonal de M e a maneira que elas se bifurcam conforme a direção de projeção muda em $\mathbb{S}^2$. Ao considerar a ${}_X\mathcal{A}_e$-equivalência, a família de projeções ortogonais é um ${}_X\mathcal{A}_e$-desdobramento versal das singularidades genéricas de submersões em X, onde X é a imagem da cuspidal edge usual $(u, v) \mapsto (u, v^2, v^3)$ (para detalhes, ver [22]).

Estudaremos as singularidades da projeção ortogonal de cuspidal edges a partir do grupo ${}_X\mathcal{A}$, cuja a construção descrevemos a seguir.

Dizemos que um germe de difeomorfismo $\phi : (\mathbb{R}^3, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ **preserva** X se $(\phi(X), \mathbf{0}) = (X, \mathbf{0})$. O grupo dos germes de difeomorfismos que preservam X é um subgrupo de $\mathcal{R} = \{h : (\mathbb{R}^3, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^3, \mathbf{0}) \mid h \text{ é um germe de difeomorfismo}\}$ e é denotado por $\mathcal{R}(X)$.

A partir de $\mathcal{R}(X)$, obtemos o grupo ${}_X\mathcal{A} = \mathcal{R}(X) \times \mathcal{L}$ e a ação de ${}_X\mathcal{A}$ em $\mathcal{M}_3 \cdot \mathcal{E}(3, 2)$ é dada por $(h, k) \cdot f = k \circ f \circ h^{-1}$, onde $(h, k) \in {}_X\mathcal{A}$. De maneira análoga ao feito para o grupo $\mathcal{A}$, a ${}_X\mathcal{A}$-equivalência é definida da seguinte maneira.

Definição 5.9. Dois germes $g_1, g_2 : (\mathbb{R}^3, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ são **${}_X\mathcal{A}$-equivalentes** se existe $(h, k) \in {}_X\mathcal{A}$ tal que $g_2 = k \circ g_1 \circ h^{-1}$.

O teorema a seguir apresenta a classificação de germes de submersões $g \in \mathcal{M}_3 \cdot \mathcal{E}(3, 2)$ com ${}_X\mathcal{A}_e$-codimensão $\leqslant 2$. A ${}_X\mathcal{A}_e$-codimensão de g, denotada por ${}_X\mathcal{A}_e\text{-cod}\, g$, é definida por ${}_X\mathcal{A}_e\text{-cod}\, g = \dim \frac{\mathcal{E}(3,2)}{L_X\mathcal{A}_e \cdot f}$ (para mais detalhes sobre $L_X\mathcal{A}_e \cdot f$, ver Seção 4 de [22]).

Teorema 5.10. (Teorema 4.3 de [22]) *Seja $X = f(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$, onde f é a cuspidal edge usual $f(u, v) = (u, v^2, v^3)$. Qualquer germe de submersão em $\mathcal{M}_3.\mathcal{E}(3, 2)$ de ${}_X\mathcal{A}_e$-codimensão $\leqslant$ 2 é ${}_X\mathcal{A}_e$-equivalente a um dos germes dado na Tabela 5.1, onde (x, y, z) são as coordenadas de $\mathbb{R}^3$.*

Nome	**Forma Normal**	${}_X\mathcal{A}_e - \text{cod}$
Tipo 1	(x, y)	0
Tipo 2	$(x, z + xy)$	0
Tipo 3	$(x, z + x^2y)$	1
Tipo 4	$(x, z + x^3y)$	2
Tipo 5	$(y + x^3, z + x^2)$	1
Tipo 6	$(y + x^5, z + x^2)$	2
Tipo 7	$g_7 = (y+ax^2 \pm x^4, z+xy+bx^3+P), P = cx^4 + dx^5 + ex^6$	2^*

Tabela 5.1: Germes ${}_X\mathcal{A}$-finitamente determinados com ${}_X\mathcal{A}_e - \text{cod} \leqslant 2$.
* A codimensão é a do estrato, ([22], Tabela 2 para detalhes).

Notemos do teorema acima que restringir as mudanças de coordenadas a um subgrupo de $\mathcal{A}$ pode mudar a classificação de germes. De fato, se $g \in \mathcal{M}_3 \cdot \mathcal{E}(3, 2)$ é um germe de submersão, sabemos pela Observação 2.10 que g é $\mathcal{A}$-equivalente ao germe (x, y). No entanto, fazendo mudanças de coordenadas na fonte apenas por germes de difeomorfismos que preservam X aparecem diversas outras classes de singularidades.

Estudaremos agora as singularidades da projeção ortogonal de cuspidal edges. Seguindo a notação de [22], quando necessário distinguir, chamaremos de cuspidal edge *geométrica* um germe $(\mathbb{R}^2,\mathbf{0})\to(\mathbb{R}^3,\mathbf{0})$ de cuspidal edge, assim como sua imagem.

Sabemos que o conjunto singular da projeção ortogonal de uma superfície regular em $\mathbb{R}^3$ ao longo de uma direção $\mathbf{v}$ é o conjunto de pontos onde $\mathbf{v}$ é tangente à superfície (o gerador de contorno) e sua imagem pela projeção é o contorno aparente da superfície. Considerando agora uma cuspidal edge geométrica $f:(\mathbb{R}^2,\mathbf{0})\to(\mathbb{R}^3,\mathbf{0})$, obtemos que $P_\mathbf{v}=\mathcal{P}_\mathbf{v}\circ f$ é singular ao londo da curva singular de f, denotada por γ. Assim, $\hat{\gamma}=f\circ\gamma$ é parte do gerador de contorno de $M=f(\mathbb{R}^2,\mathbf{0})$ e $\mathcal{P}_\mathbf{v}(\hat{\gamma})$ é parte do contorno aparente de M.

Definição 5.11. Dado $\mathbf{v}\in\mathbb{S}^2$, o **gerador de contorno próprio** de M na direção $\mathbf{v}$ é o fecho do conjunto de pontos regulares de M onde $\mathbf{v}$ é um vetor tangente, ou seja é o fecho do gerador de contorno de M restrito aos pontos regulares de M. O **contorno aparente próprio** de M na direção $\mathbf{v}$ é a projeção ortogonal do gerador de contorno próprio.

Exemplo 5.12. Consideremos M a cuspidal edge em sua forma normal f dada em (5.8) e $\mathbf{v}=(0,1,0)$. Vamos encontrar o gerador de contorno e o contorno aparente próprios de M na direção $\mathbf{v}$.

Seja $p=f(u,v)$ um ponto regular de M. Então, como a curva singular de f é o eixo-u, obtemos $v\neq 0$. A partir da aplicação de Gauss de f dada em (2.19), obtemos que $\mathbf{v}\in T_pM$ se, e somente se, $2b_2+3vb_3+v^2(b_3)_v=0$. Assim, o gerador de contorno nos pontos regulares de M é $\tilde{\Sigma}_\mathbf{v}=\{f(u,v)\,|\,(2b_2+3vb_3+v^2(b_3)_v)(u,v)=0 \text{ e } v\neq 0\}$ e o gerador de contorno próprio de M é o fecho de $\tilde{\Sigma}_\mathbf{v}$.

Tomando, por exemplo, $a(u)=b_1(u)=0$, $b_2(u)=u$ e $b_3(u,v)=1$ em (5.8), obtemos $f(u,v)=(u,\frac{1}{2}v^2,uv^2+v^3)$ e o gerador de contorno na parte regular de M é $\tilde{\Sigma}_\mathbf{v}=\{f(u,v)\,|\,2u+3v=0 \text{ e } v\neq 0\}=\{(\frac{-3}{2}v,\frac{1}{2}v^2,\frac{-1}{2}v^3)\,|\,v\neq 0\}$. Assim, o gerador de contorno próprio é o conjunto $\{(\frac{-3}{2}v,\frac{1}{2}v^2,\frac{-1}{2}v^3)\}$ e o contorno aparente próprio é $\{(\frac{-3}{2}v,0,\frac{-1}{2}v^3)\}$. A Figura 5.2 da esquerda apresenta o traço do gerador de contorno e do contorno aparente na direção $\mathbf{v}$ e, na direita, temos o traço do gerador de contorno próprio próprio, formado pela união do gerador de contorno na parte regular (representado em preto) com a origem (ponto verde), e o traço do contorno aparente próprio, formado pela união do contorno aparente (em vermelho) com a origem (em azul). ♢

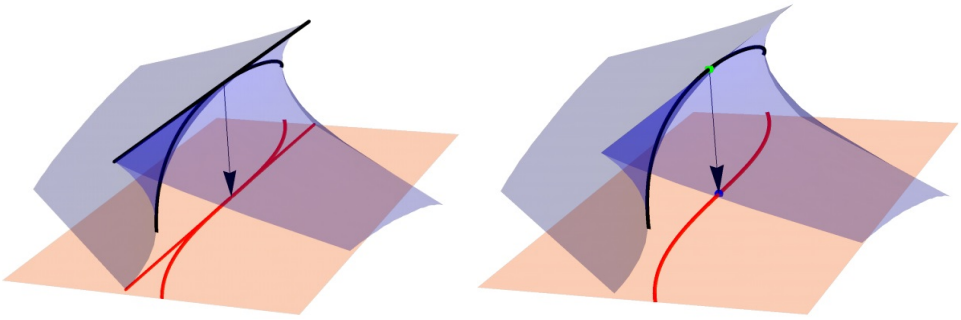


Figura 5.2: Gerador de contorno e contorno aparente (à esquerda) e gerador de contorno e contorno aparente próprios (à direita) para a cuspidal edge dada no Exemplo 5.12. O plano $T_\mathbf{v}\mathbb{S}^2$ foi deslocado para uma melhor visualização do contorno aparente próprio.

Antes de iniciar o estudo do contato de cuspidal edges com retas, vamos definir uma singularidade de curvas planas que será importante no estudo das características geométricas das singularidades de $P_\mathbf{v}$.

Definição 5.13. Um germe $\sigma : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ é chamado de **cúspide ramphoid** se é $\mathcal{A}$-equivalente a $\alpha(t) = (t^2, t^5)$.

Recordemos que para obter a classificação do contato entre duas subvariedades regulares basta estudar a classe de singularidade de sua aplicação de contato (Teorema 3.3). Quando uma das subvariedades é singular a classificação do contato pode ser feita da mesma maneira. Por exemplo, para estudar o contato de uma cuspidal edge $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ com retas paralelas a um vetor $\mathbf{v}$, basta obter a classificação das singularidades de $\mathcal{P}_\mathbf{v} \circ f$. No Teorema 3.23 vimos condições algébricas e informações geométricas para o reconhecimento das singularidades da projeção ortogonal de superfícies regulares via $\mathcal{A}$-equivalência. O próximo resultado que iremos estudar é o análogo para cuspidal edges, onde iremos relacionar as ${}_X\mathcal{A}_e$-singularidades de sua projeção ortogonal com seus invariantes geométricos. Para estudar este resultado precisamos de algumas considerações iniciais.

Seja $g : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ uma cuspidal edge geométrica. Existem germes de difeomorfismos $h : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ e $k : (\mathbb{R}^3, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ tal que $g \circ h = k \circ f$, onde $f(u, v) = (u, v^2, v^3)$ é a cuspidal edge usual. Considerando $X = f(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$, o germe k leva a cuspidal edge usual na cuspidal edge geométrica $k(X)$.

Queremos estudar o contato da cuspidal edge geométrica $k(X)$ com a reta $\mathcal{P}_\mathbf{v}^{-1}(\mathbf{0})$, o qual é dado pelas singularidades do germe $\mathcal{P}_\mathbf{v} \circ g : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ que, a menos de difeomorfismos, coincidem com as singularidades de $\mathcal{P}_\mathbf{v} \circ g \circ h = \mathcal{P}_\mathbf{v} \circ k \circ f$, que por sua vez classifica o contato da cuspidal edge usual com a reta $(\mathcal{P}_\mathbf{v} \circ k)^{-1}(\mathbf{0})$.

Usando resultados de transversalidade, pode ser mostrado que é válido um resultado análogo ao Teorema 3.20 para cuspidal edges, considerando a ${}_X\mathcal{A}_e$-codimensão (ver [22], p. 413). Chamaremos de cuspidal edge **genérica** toda cuspidal edge com singularidade de ${}_X\mathcal{A}_e$-codimensão $\leqslant 2$ para a projeção ortogonal.

Como a projeção ortogonal $\mathcal{P}_\mathbf{v} : (\mathbb{R}^3, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ é um germe de submersão, então $\mathcal{P}_\mathbf{v} \circ k$ também é um germe de submersão. Portanto, $\mathcal{P}_\mathbf{v} \circ k$ é ${}_X\mathcal{A}_e$-equivalente a uma dos germes dados na Tabela 5.1, ou seja, existem $\tilde{h}_1 : (\mathbb{R}^3, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ e $\tilde{h}_2 : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \to (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ germes de difeomorfismos, com $\tilde{h}_1$ preservando X, tal que $\mathcal{P}_\mathbf{v} \circ k = \tilde{h}_2 \circ \hat{g} \circ \tilde{h}_1^{-1}$, onde $\hat{g}$ é uma das formas normais dadas na Tabela 5.1.

Assim, para obter o contato entre a cuspidal edge geométrica $k(X)$ e a reta $\mathcal{P}_\mathbf{v}^{-1}(0)$ podemos estudar as singularidades do germe $\mathcal{P}_\mathbf{v} \circ k(X) = \tilde{h}_2 \circ \hat{g} \circ \tilde{h}_1^{-1}(X) = \tilde{h}_2 \circ \hat{g} \circ f(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$, que coincidem com as singularidades de $\hat{g} \circ f$, que por sua vez é o estudo do contato entre a cuspidal edge usual X e a fibra $\hat{g}^{-1}(\mathbf{0})$.

A partir da composição $\varphi = \hat{g} \circ f$ podemos também obter algumas informações sobre a projeção ortogonal da cuspidal edge geométrica, como veremos a seguir.

Considerando, por exemplo, $\hat{g}(x, y, z) = (x, y)$ obtemos $\varphi(u, v) = (u, v^2)$, cujo conjunto singular $\{v = 0\}$ coincide com o conjunto singular de f, e o contorno aparente de f, dado por $\varphi(u, 0) = (u, 0)$, é uma curva regular.

Tomando agora $\hat{g}(x, y, z) = (x, z + x^m y)$ com $m = 1, 2, 3$, obtemos $\varphi(u, v) = (u, v^3 + u^m v^2)$. O conjunto singular de φ é dado por $\{v(3v + 2u^m) = 0\}$, que tem duas componentes transversais, uma dada por $\{v = 0\}$, que coincide com a curva singular de f, e a outra dada por $\{3v + 2u^m = 0\}$ e, pelo Exemplo 3.4, essas curvas têm contato de ordem m na origem. Notemos que a imagem desse último conjunto por f é o gerador de contorno próprio.

Se $\hat{g}(x, y, z) = (y + x^3, z + x^2)$ (resp. $\hat{g}(x, y, z) = (y + x^5, z + x^2)$) obtemos $\varphi(u, v) = (v^2 + u^3, v^3 + u^2)$ (resp. $\varphi(u, v) = (v^2 + u^5, v^3 + u^2)$). O conjunto singular de φ é dado por $\{u = 0\}$, $\{v = 0\}$ e $\{uv = \frac{4}{9}\}$ (resp. $\{u = 0\}$, $\{v = 0\}$ e $\{u^3 v = \frac{4}{15}\}$). Notemos que $\{v = 0\}$

é também o conjunto singular de f e sua imagem por φ, dada por $\varphi(u,0)=(u^3,u^2)$ (resp. $\varphi(u,0)=(u^5,u^2)$), é uma (2,3)-cúspide (resp. cúspide ramphoid).

Considerando $\hat{g}(x,y,z)=(y+ax^2\pm x^4, z+xy+bx^3+cx^4+dx^5+ex^6)$ obtemos $\varphi(u,v)=(v^2+au^2\pm u^4, v^3+uv^2+bu^3+cu^4+du^5+eu^6)$, cujo conjunto singular é dado por duas componentes: $\{v=0\}$ e $\{(-3b-2a)u^2-3auv+v^2+4cu^3+(5d\mp 4)u^4\mp 6u^3v+6eu^5=0\}$. Notemos que a segunda componente do conjunto singular de φ, quando não degenerada, é uma curva singular.

Sintetizamos essas informações no seguinte lema, que é parte da demonstração do Teorema 4.5 de [22].

Lema 5.14. *Sejam $g:(\mathbb{R}^2,\mathbf{0})\to(\mathbb{R}^3,\mathbf{0})$ uma cuspidal edge genérica, $M=g(\mathbb{R}^2,\mathbf{0})$, $\mathbf{v}$ um vetor unitário e $P_{\mathbf{v}}=\mathcal{P}_{\mathbf{v}}\circ g$. O gerador de contorno próprio de M, juntamente com a curva singular de g, γ, e da projeção ortogonal de sua imagem por g, $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}\circ g\circ\gamma=\mathcal{P}_{\mathbf{v}}\circ\hat{\gamma}$, satisfazem as seguintes propriedades, onde dizemos que $P_{\mathbf{v}}$ é do tipo i, $i=1\ldots,7$, se $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}\circ k$ é do tipo i dada na Tabela 5.1, onde $k:(\mathbb{R}^3,\mathbf{0})\to(\mathbb{R}^3,\mathbf{0})$ é o germe de difeomorfismo tal que $g=k\circ f\circ h^{-1}$, com f a cuspidal edge usual.*

(a) *Se $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade do tipo 1, então o gerador de contorno próprio é vazio e a projeção do conjunto singular de $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ é uma curva regular.*

(b) *Se $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade do tipo $m+1$, com $m=1,2,3$, então a pré-imagem do gerador de contorno próprio por g é uma curva regular e tem contato de ordem m com γ.*

(c) *Se $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade do tipo 5 (resp. tipo 6), então o conjunto singular de $P_{\mathbf{v}}$ tem quatro componentes, todas curvas regulares, e $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}\circ\hat{\gamma}$ é uma (2,3)-cúspide (resp. cúspide ramphoid).*

(d) *Se $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade do tipo 7, então o conjunto singular de $P_{\mathbf{v}}$ é formado por duas componentes sendo uma delas uma curva regular e a outra uma curva singular.*

Vamos apresentar agora a Proposição 4.7 de [22] que é um resultado que possibilita reconhecer as singularidades da projeção ortogonal de uma cuspidal edge M a partir de seus invariantes geométricos. Recordemos que, dado um ponto $p=\hat{\gamma}(t)$, $\mathbf{v}_{tg}$ denota a direção tangente à M em p e T_pM o plano tangente limitante a M em p. Com essas notações e as do Lema 5.14, temos:

Proposição 5.15. ([22]) *Sejam $g:(\mathbb{R}^2,\mathbf{0})\to(\mathbb{R}^3,\mathbf{0})$ uma cuspidal edge genérica, $M=g(\mathbb{R}^2,\mathbf{0})$, $\mathbf{v}$ um vetor unitário e $P_{\mathbf{v}}=\mathcal{P}_{\mathbf{v}}\circ g$. Então, as condições para $P_{\mathbf{v}}$ ser do tipo i (dado na Tabela 5.1) são as seguintes:*

(a) *Se $\mathbf{v}$ é transversal ao plano tangente limitante T_pM, então $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade do tipo 1.*

(b) *Se $\mathbf{v}\in T_pM\backslash\{\mathbf{v}_{tg}\}$, então $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade do tipo 2,3 ou 4 e essas singularidades podem ser reconhecidas da seguinte forma:*

(i) *Se $\kappa_n(p)\neq 0$, então $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade do tipo 2, exceto para uma direção $\mathbf{v}_0$. A singularidade de $P_{\mathbf{v}_0}$ é genericamente do tipo 3 em pontos da curva singular γ e do tipo 4 em pontos isolados de γ. Essas singularidades, tipo 3 e tipo 4, se diferenciam pela ordem de contato da pré imagem do gerador de contorno próprio por g com γ (ordem dois para o tipo 3 e ordem três para o tipo 4).*

(ii) *Se $\kappa_n(p)=0$ e $\kappa_t(p)\neq 0$, a singularidade de $P_{\mathbf{v}}$ é do tipo 2.*

(iii) Se $\kappa_n(p)=\kappa_t(p)=0$, então a singularidade de $P_{\mathbf{v}}$ é do tipo 3, exceto para uma direção, onde ela muda para o tipo 4.

(c) Se $\mathbf{v}=\mathbf{v}_{tg}$, então $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade do tipo 5,6 ou 7 e podemos reconhecê-las da seguinte maneira:

(i) Se $\tau_{\hat{\gamma}}(p)\kappa_n(p) \neq 0$, então $P_{\mathbf{v}_{tg}}$ é do tipo 5.
(ii) Se $\kappa_n(p) \neq 0$ e $\tau_{\hat{\gamma}}(p) = 0$, então $P_{\mathbf{v}_{tg}}$ é genericamente do tipo 6.
(iii) Se $\kappa_n(p) = 0$, então $P_{\mathbf{v}_{tg}}$ é genericamente do tipo 7.

Demonstração: Sabemos que para cuspidal edges genéricas apenas singularidades de ${}_X\mathcal{A}_e$-codimensão $\leqslant 2$ ocorrem para a projeção $P_{\mathbf{v}}$.

O núcleo de $(d\mathcal{P}_{\mathbf{v}})_{\mathbf{0}}$ é uma reta paralela à direção de projeção $\mathbf{v}$. Primeiramente, vamos obter as posições relativas entre $\mathbf{v}, \mathbf{v}_{tg}$ e T_pM em função do tipo de singularidade de $P_{\mathbf{v}}$.

Seguindo o que fizemos anteriormente, as singularidades de $P_{\mathbf{v}}$ coincidem, a menos de difeomorfismos, com as singularidades de $\hat{g} \circ f$, onde f é a cuspidal edge usual e $\hat{g}$ é uma das formas normais da Tabela 5.1. Uma vez que difeomorfismos levam o núcleo de $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ no núcleo de $\hat{g}$ e levam a direção tangente e o plano tangente limitante da cuspidal edge geométrica na direção tangente e no plano tangente limitante da cuspidal edge usual, respectivamente, vamos estudar a posição relativa entre $\mathbf{v}, \mathbf{v}_{tg}$ e T_pM usando as formas normais dadas na Tabela 5.1 e a cuspidal edge usual X, a qual sabemos ter em $p = \mathbf{0}$ o plano tangente limitante dado por $\{z = 0\}$ e a direção tangente $(1, 0, 0)$.

(a) Se $\hat{g}$ é do tipo 1, isto é, dado por $\hat{g}(x, y, z) = (x, y)$, então o núcleo de $d\hat{g}_p$ é a direção $(0, 0, 1)$, que é transversal a T_pX.

(b) Se $\hat{g}(x, y, z) = (x, z + x^k y)$, com $k = 1, 2, 3$ (tipo $k + 1$), então $\ker d\hat{g}_p$ é paralelo ao vetor $(0, 1, 0)$, que pertence a T_pX e não é a direção tangente.

(c) Se $\hat{g}(x, y, z) = (y + x^3, z + x^2)$ (tipo 5), ou $\hat{g}(x, y, z) = (y + x^5, z + x^2)$ (tipo 6), ou $\hat{g}(x, y, z) = (y + ax^2 \pm x^4, z + xy + bx^3 + P)$ (tipo 7), então o kernel de $d\hat{g}_p$ é a direção $(1, 0, 0)$, que é a direção tangente à X em p.

Busquemos agora reconhecer as singularidades do tipo k, com $k = 2, \ldots, 7$ usando os invariantes geométricos da cuspidal edge.

Consideremos a cuspidal edge M parametrizada em sua forma normal f dada em (5.8), $\mathbf{v} = (\alpha, \beta, 0) \in T_pM$ com $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ e $p = \mathbf{0}$. No que segue, usaremos os valores dos invariantes geométricos para a forma normal encontrados nos Exemplos 2.55 e 2.60 e a torção de $\hat{\gamma}$ dada em (2.20).

A projeção ortogonal $\mathcal{P}_{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \to T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ na direção $\mathbf{v}$ é dada por

$$\mathcal{P}_{\mathbf{v}}(x, y, z) = ((1 - \alpha^2)x - \alpha\beta y, (1 - \beta^2)y - \alpha\beta x, z). \tag{5.9}$$

Encontremos agora o conjunto singular de $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ restrito a cuspidal edge M. Recordemos que $\mathcal{P}_{\mathbf{v}}$ é singular no conjunto singular de f, dado por $\{v = 0\}$ e, na parte regular de f, nos pontos (u, v) tal que $\langle \nu(u, v), \mathbf{v} \rangle = 0$ (Proposição 3.19). Da aplicação de Gauss de f obtida em (2.19), obtemos que o conjunto singular de $P_{\mathbf{v}} = \mathcal{P}_{\mathbf{v}} \circ f$ é $\{(u, v) \mid vS^{\beta}_{\alpha}(u, v) = 0\}$, onde

$$\begin{aligned} S^{\beta}_{\alpha}(u, v) &= (-\beta b_{12} - \alpha b_{20})u - \tfrac{1}{2}\beta b_{03}v + (\alpha a_{20}b_{12} - \tfrac{1}{2}\alpha b_{30} - \tfrac{1}{3}\beta b_{22})u^2 \\ &+ \tfrac{1}{2}(\alpha b_{03}a_{20} - \beta b_{13})uv - \tfrac{1}{2}\alpha b_{12}v^2 + \alpha(\tfrac{1}{3}a_{20}b_{22} + \tfrac{1}{2}a_{30}b_{12} - \tfrac{1}{6}b_{40})u^3 \\ &+ \alpha(\tfrac{1}{2}b_{13}a_{20} + \tfrac{1}{4}a_{30}b_{03})u^2v - \tfrac{1}{3}\alpha b_{22}uv^2 - \tfrac{1}{6}\alpha b_{13}v^3\,. \end{aligned} \tag{5.10}$$

(b) Se $\mathbf{v} \in T_pM \backslash \{\mathbf{v}_{tg}\}$, então $\beta \neq 0$ e as singularidades de $P_{\mathbf{v}}$ são do tipo 2,3 ou 4. Pelo Lema 5.14 podemos reconhecer o tipo de singularidade de $P_{\mathbf{v}}$ pela ordem de contato entre as duas componentes do conjunto singular de $P_{\mathbf{v}}$, dadas pela curva singular de f e pela pré-imagem do gerador de contorno próprio por f, que serão denotadas por γ e S^{β}_{α}, respectivamente.

O germe de contato entre γ e S^{β}_{α} é dado por

$$\begin{aligned} F(t) = S^{\beta}_{\alpha}(t, 0) &= (-\beta b_{12} - \alpha b_{20})t + (\alpha a_{20}b_{12} - \tfrac{1}{2}\alpha b_{30} - \tfrac{1}{3}\beta b_{22})t^2 \\ &+ \alpha(\tfrac{1}{3}a_{20}b_{22} + \tfrac{1}{2}a_{30}b_{12} - \tfrac{1}{6}b_{40})t^3, \end{aligned}$$

de onde obtemos que $F(0) = 0$.

Pelo Lema 5.14, a singularidade de $P_{\mathbf{v}}$ é do tipo 2 se, e somente se, o contato de γ e S^β_α é de ordem 1 e isso acontece se, e somente se, $F'(0) \neq 0$ (Exemplo 3.4).

(i) Se $\kappa_n(0) = b_{20} \neq 0$, então $F'(0) = -\beta b_{12} - \alpha b_{20} = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\beta\frac{b_{12}}{b_{20}}$. Assim, existe um único vetor unitário $\mathbf{v}_0$, paralelo a direção $(-b_{12}, b_{20}, 0)$, onde $P_{\mathbf{v}}$ não é uma singularidade do tipo 2. Considerando agora o conjunto S^β_α, com $\alpha = -\beta\frac{b_{12}}{b_{20}}$ obtemos $F'(0) = 0$. Pelo Teorema de Sard, genericamente 0 é valor regular de F', ou seja, $F''(0) \neq 0$. Portanto, quando $F(0) = F'(0) = 0$, genericamente $F''(0) \neq 0$, ou seja, $P_{\mathbf{v}_0}$ é uma singularidade do tipo 3. Assim, $F''(0) = 0$ ocorre em pontos isolados e, portanto, $P_{\mathbf{v}_0}$ é uma singularidade do tipo 4 em pontos isolados de γ.

(ii) Se $\kappa_n(0) = b_{20} = 0$ e $\kappa_t(0) = b_{12} \neq 0$, então $F'(0) = -\beta b_{12} \neq 0$, ou seja, $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade do tipo 2.

(iii) Se $\kappa_n(p) = \kappa_t(0) = 0$, então $b_{30} \neq 0$, pois pelo Lema 5.14(b) S^β_α é uma curva regular. A singularidade de $P_{\mathbf{v}}$ é do tipo 3 a menos que $F''(0) = -\frac{\alpha}{2}b_{30} - \frac{\beta}{3}b_{22} = 0$, e quando isso acontece obtemos $\alpha = -\frac{2\beta b_{22}}{3b_{30}}$, ou seja, $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade do tipo 3, exceto para a direção paralela a $(-2b_{22}, 3b_{30}, 0)$, onde ela muda para o tipo 4.

(c) Consideremos agora $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{tg} = (1, 0, 0)$. Então $P_{\mathbf{v}_{tg}}$ é uma singularidade do tipo 5,6 ou 7 e o conjunto singular de $P_{\mathbf{v}_{tg}}$ é dado por $\{vS^0_1(u, v) = 0\}$, onde

$$\begin{aligned} S^0_1(u,v) &= -b_{20}u + (a_{20}b_{12} - \tfrac{1}{2}b_{30})u^2 + \tfrac{1}{2}b_{03}a_{20}uv - \tfrac{1}{2}b_{12}v^2 \\ &+ (\tfrac{1}{3}a_{20}b_{22} + \tfrac{1}{2}a_{30}b_{12} - \tfrac{1}{6}b_{40})u^3 + (\tfrac{1}{2}b_{13}a_{20} + \tfrac{1}{4}a_{30}b_{03})u^2v \\ &- \tfrac{1}{3}b_{22}uv^2 - \tfrac{1}{6}b_{13}v^3\,. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Supondo $\kappa_n(0) = b_{20} \neq 0$, obtemos que S^0_1 é uma curva regular e, assim, pelo Lema 5.14, $P_{\mathbf{v}_{tg}}$ é uma singularidade do tipo 5 ou 6 e essas singularidades podem ser reconhecidas pelo tipo de singularidade da imagem de $\hat{\gamma}$ por $\mathcal{P}_{\mathbf{v}_{tg}}$: uma $(2, 3)$-cúspide para o tipo 5 e uma cúspide ramphoid para o tipo 6.

De (5.9) obtemos $\mathcal{P}_{\mathbf{v}_{tg}}(x, y, z) = (0, y, z)$. Fazendo uma identificação de $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ com $\mathbb{R}^2$ e escrevendo, com abuso de notação, $\mathcal{P}_{\mathbf{v}_{tg}}(x, y, z) = (y, z)$, obtemos

$$P_{\mathbf{v}_{tg}}(u, v) = \mathcal{P}_{\mathbf{v}_{tg}} \circ f(u, v) = (a(u) + \tfrac{1}{2}v^2, b_1(u) + v^2b_2(u) + v^3b_3(u, v)).$$

Assim, $\phi(u) = P_{\mathbf{v}_{tg}} \circ \gamma(u) = P_{\mathbf{v}_{tg}}(u, 0) = (a(u), b_1(u))$ e obtemos $\phi'(0) = \mathbf{0}$.

(i) Pelos critérios de reconhecimento dados no Lema 5.2, obtemos que $P_{\mathbf{v}_{tg}}$ é uma singularidade do tipo 5 se $\det[\phi''(0), \phi'''(0)] = b_{30}a_{20} - a_{30}b_{20} \neq 0$, o que é equivalente, por (2.20), a $\tau_{\hat{\gamma}}(0) \neq 0$.

(ii) Quando $\tau_{\hat{\gamma}}(0) = 0$, obtemos que, genericamente, ϕ é uma cúspide ramphoid e, portanto, $P_{\mathbf{v}_{tg}}$ uma singularidade do tipo 6.

(iii) Considerando agora $\kappa_n(0) = b_{20} = 0$, obtemos que S^0_1 é uma curva singular (quando não degenerado) e, portanto, genericamente $P_{\mathbf{v}_{tg}}$ uma singularidade do tipo 7. □

Exemplo 5.16. Nos exemplos a seguir ilustraremos os resultados estudados no Lema 5.14 e na Proposição 5.15 sobre a projeção ortogonal de cuspidal edges. Para isso, vamos tomar a cuspidal edge em sua forma normal (5.8), e usaremos os valores de seus invariantes obtidos nos Exemplos 2.55 e 2.60. Recordemos que, para a forma normal (5.8), obtemos $\mathbf{v}_{tg} = (1, 0, 0)$ e T_pM é o plano $\{z = 0\}$.

(a) Consideremos a cuspidal edge do Exemplo 5.12 dada por $f(u, v) = (u, \frac{1}{2}v^2, uv^2 + v^3)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, 0) \in TpM \backslash \{\mathbf{v}_{tg}\}$. Como $\kappa_n(0) = 0$ e $\kappa_t(0) = 2 \neq 0$, obtemos pela Proposição

5.15(b)(i) que $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade do tipo 2. Pelo Exemplo 5.12(a) o conjunto singular de $P_{\mathbf{v}}$ é $\{(u,v)|v(2u+3v)=0\}$, ou seja, é formado por duas curvas regulares e a aplicação de contato entre elas é dada por $F(t)=2t$, que é uma singularidade A_0 em 0. Assim, o contato entre o conjunto singular de f, dado por $\{v=0\}$, e a pré-imagem do gerador de contorno próprio por f, dado por $\{2u+3v=0\}$, é de ordem 1, o que está de acordo com o Lema 5.14(b).

(b) Para exemplificar uma cuspidal edge que tem uma singularidade do tipo 1, consideremos $f(u,v)=(u,\frac{1}{2}v^2,uv^2+v^3)$ e $\mathbf{v}=(0,0,1)$ (Figura 5.3). Como $\mathbf{v}$ é transversal a T_pM, então $P_{\mathbf{v}}$ é uma singularidade do tipo 1. Sabemos que o conjunto singular de $P_{\mathbf{v}}$ é $\{(u,v)\,|\,v\langle\nu(u,v),\mathbf{v}\rangle=0\}$ e, como $\langle\nu(u,v),\mathbf{v}\rangle=1$, então esse conjunto coincide com o conjunto singular de f, o que está de acordo com o Lema 5.14(a).

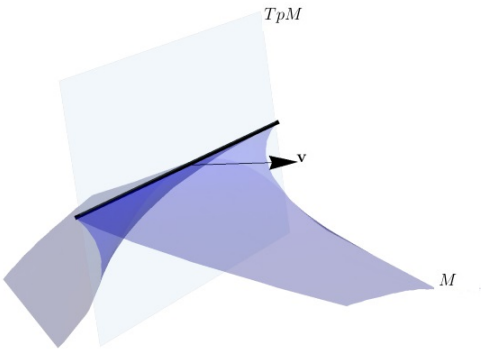


Figura 5.3: Cuspidal edge dada no item (b) juntamente com seu gerador de contorno e a direção de projeção.

(c) Sejam $f(u,v)=(u,u^2+u^3+\frac{1}{2}v^2,-u^2+u^3+v^3)$ e $\mathbf{v}=\mathbf{v}_{tg}=(1,0,0)$ (Figura 5.4). Por (2.20) obtemos $\tau_{\hat{\gamma}}(0)\neq 0$. Assim, como $\kappa_n(0)\neq 0$, então $P_{\mathbf{v}_{tg}}$ é uma singularidade do tipo 5. O conjunto singular de $P_{\mathbf{v}_{tg}}=\mathcal{P}_{\mathbf{v}_{tg}}\circ f=(0,u^2+u^3+\frac{1}{2}v^2,-u^2+u^3+v^3)$ é formado por $\{(u,v)\,|\,uv(-4u-6v^2-3uv+9u^3)=0\}$ e todas suas componentes são curvas regulares. Além disso, a projeção do conjunto singular de f, dada por $P_{\mathbf{v}_{tg}}=(0,u^2+u^3,-u^2+u^3)$ é uma (2,3)-cúspide, e esses fatos estão de acordo com o Lema 5.14(c).

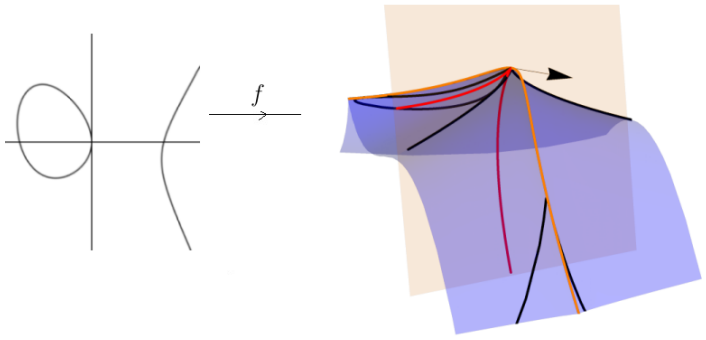


Figura 5.4: À esquerda, conjunto singular de $P_{\mathbf{v}_{tg}}$ dada no item (c), e à direta gerador de contorno, formado pela união do gerador de contorno na parte regular, em preto, e de $\hat{\gamma}$, em laranja, e a projeção ortogonal de $\hat{\gamma}$, em vermelho.

(d) Considerando a cuspidal edge $f(u,v)=(u,u^5+\frac{1}{2}v^2,u^2+v^3)$ e $\mathbf{v}=\mathbf{v}_{tg}=(1,0,0)$ (Figura 5.5), obtemos que $P_{\mathbf{v}_{tg}}(u,v)=(0,u^5+\frac{1}{2}v^2,u^2+v^3)$ é uma singularidade do

tipo 6, uma vez que $\kappa_n(0) \neq 0$ e $\tau_{\hat{\gamma}}(0) = 0$. O conjunto singular de $P_{\mathbf{v}_{tg}}$ dado por $\{(u,v) \,|\, uv(u^3v - \frac{2}{15}) = 0\}$ tem quatro componentes, sendo todas curvas regulares e a projeção ortogonal de $\hat{\gamma}$, dada por $P_{\mathbf{v}}(u,0) = (0, u^5, u^2)$ é uma cúspide ramphoid, o que está de acordo com o Lema 5.14(c).

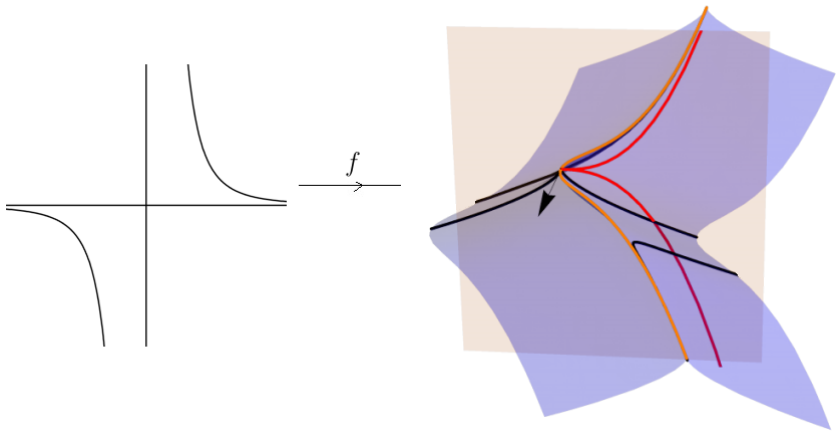


Figura 5.5: À esquerda, conjunto singular de $P_{\mathbf{v}_{tg}}$ dada no item (d), e à direita, gerador de contorno formado pela união do gerador de contorno na parte regular, em preto, e de $\hat{\gamma}$, em laranja, e a projeção ortogonal de $\hat{\gamma}$, em vermelho.

(e) Sejam $f(u,v) = (u, u^2 + \frac{1}{2}v^2, uv^2 + v^3)$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{tg} = (1,0,0)$ (Figura 5.6). Como $\kappa_n(0) = 0$, então $P_{\mathbf{v}_{tg}}$ é uma singularidade do tipo 7. Uma vez que $P_{\mathbf{v}_{tg}}(u,v) = (0, u^2 + \frac{1}{2}v^2, uv^2 + v^3)$, obtemos que seu conjunto singular é dado pela união dos conjuntos $\{v = 0\}$ e $\{4u^2 + 6uv - v^2 = 0\}$. Notemos que o segundo conjunto é uma curva singular (um par de retas transversais) em $\mathbf{0}$, o que está de acordo com o que obtemos no Lema 5.14(d).

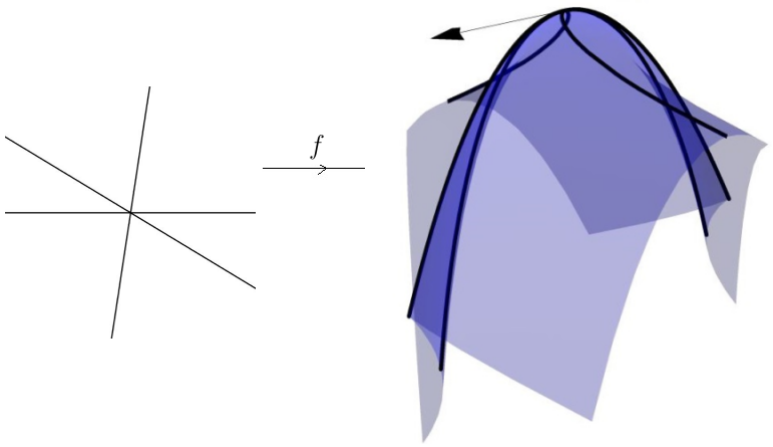


Figura 5.6: Conjunto singular de $P_{\mathbf{v}_{tg}}$ dada no item (e) e sua imagem por f, formando o gerador de contorno.

♢

5.3 Extensão do Teorema de Koenderink para cuspidal edges

Recordemos que o Teorema de Koenderink para superfícies regulares em $\mathbb{R}^3$ afirma que, dado um vetor $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^3$ e uma superfície regular M, se o gerador de contorno $\Sigma_{\mathbf{v}}$, formado pelos pontos p de M em que $\mathbf{v}$ é um vetor tangente em p, é uma curva e o contorno aparente $\Delta_{\mathbf{v}}$ é uma curva regular, então a curvatura Gaussiana de M em $p \in \Sigma_{\mathbf{v}}$ se escreve como produto de duas curvaturas: a curvatura de $\Delta_{\mathbf{v}}$, que é a projeção ortogonal em $T_{\mathbf{v}}\mathbb{S}^2$ do gerador de contorno, e a curvatura normal na direção de projeção que, em valor absoluto, coincide com a curvatura da seção normal obtida pela interseção de M com o plano gerado por $N(p)$ e $\mathbf{v}$ em p, onde $N(p)$ denota o vetor normal à M em p (Figura 5.7). Quando $M = f(U)$ é uma cuspidal edge, a versão desse teorema, provada em [25], apresenta uma fórmula que relaciona a forma curvatura Gaussiana em um ponto singular $q \in U$ com as curvaturas de 3 curvas: da curva obtida pela projeção ortogonal de $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$ em uma direção $\mathbf{v} \in N_{f(q)}M$, onde γ é a curva singular de f; da (2,3)-cúspide obtida pela interseção de f com seu plano normal em $f(q)$ e da curvatura singular de $\hat{\gamma}$.

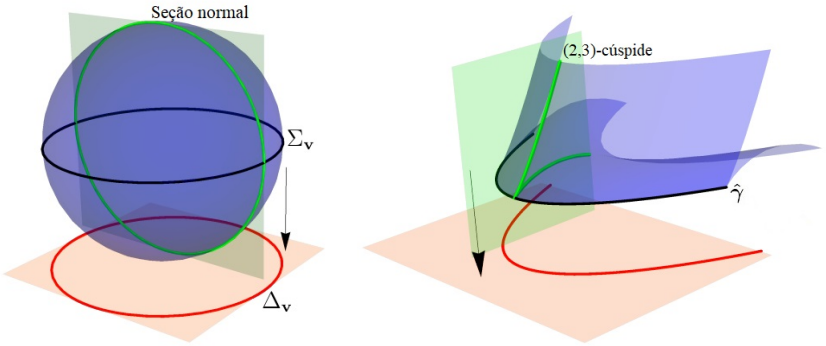


Figura 5.7: Curvas envolvidas no Teorema de Koenderink para superfície regular e na versão para cuspidal edges.

Antes de enunciar este resultado, precisamos conhecer o comportamento da curvatura Gaussiana próximo a pontos singulares, além de algumas definições, o que faremos a seguir.

Teorema 5.17. (Teorema 3.1 de [24]). *Sejam $f : U \to \mathbb{R}^3$ uma frente, $q \in U$ um ponto singular não degenerado e $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ a curva singular de f, consistindo de pontos singulares não degenerados. A curvatura Gaussiana K é limitada próximo a q se, e somente se, a segunda forma fundamental se anula em $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon)$.*

Podemos concluir do teorema acima sobre o comportamento genérico da curvatura Gaussiana próximo a uma cuspidal edge. De fato, segue do teorema que a curvatura Gaussiana de uma cuspidal edge f é limitada próximo de um ponto singular q se, e somente se, $l \circ \gamma(t) = m \circ \gamma(t) = n \circ \gamma(t) = 0$, onde l, m, n são os coeficientes da segunda forma fundamental de f. Pela Observação 2.21, genericamente, essas três equações não se anulam simultaneamente. Assim, genericamente, *cuspidal edges têm curvatura Gaussiana não limitada perto de pontos singulares.*

Exemplo 5.18. Consideremos a cuspidal edge $f(u, v) = (u, v^2, v^3)$ com a aplicação de

Gauss dada por $\nu(u,v) = \frac{1}{\sqrt{4+9v^2}}(0,-3v,2)$. Então,

$$l(u,v) = \langle f_{uu}, \nu\rangle = 0, \quad m(u,v) = \langle f_{uv}, \nu\rangle = 0, \quad n(u,v) = \langle f_{vv}, \nu\rangle = \frac{6v}{\sqrt{4+9v^2}}.$$

Quando $v = 0$, ou seja, nos pontos singulares de f, temos $l(u,0) = m(u,0) = n(u,0) = 0$. Concluímos então, pelo Teorema 5.17, que a curvatura Gaussiana de f é limitada perto dos pontos singulares. ♢

Exemplo 5.19. Seja $f(u,v) = (au^2+v^2, bv^2+v^3, u)$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $\nu(u,v) = \frac{1}{\delta(u,v)}(-3v-2b, 2, 2au(3v+2b))$, com $\delta(u,v) = \sqrt{4+(1+4a^2u^2)(4b^2+12bv+9v^2)}$.

Temos

$$l(u,v) = \frac{2a(-3v-2b)}{\delta(u,v)}, \quad m(u,v) = 0, \quad n(u,v) = \frac{6v}{\delta(u,v)}.$$

Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então a segunda forma fundamental não se anula sobre a curva singular, que está sobre o eixo-u. Assim, para essa cuspidal edge, a cuvatura Gaussiana é não limitada perto dos pontos singulares. ♢

A 2-forma que definiremos a seguir está relacionada com a definição da 2-forma curvatura Gaussiana, presente na extensão do Teorema de Koenderink para cuspidal edges.

Definição 5.20. Dada a frente f, a 2-forma

$$d\hat{A} = \lambda(u,v)du \wedge dv$$

é chamada de **forma de área com sinal**, onde λ é a função densidade de área de f, dada por $\lambda(u,v) = \det(f_u, f_v, \nu)(u,v)$.

Notemos que $d\hat{A}$ se anula em todo ponto singular de f. Apesar da função curvatura Gaussiana ser definida apenas nos pontos regulares de f, a 2-forma $Kd\hat{A}$ pode ser estendida em todo domínio de f, como garante o seguinte teorema.

Teorema 5.21. ([24]) *Sejam $f : U \to \mathbb{R}^3$ uma frente e K a curvatura Gaussiana de f definida nos pontos regulares de f. Então, $Kd\hat{A}$ pode ser continuamente estendida como uma 2-forma definida em U.*

Demonstração: Na parte regular de f, isto é, em $U\backslash\Sigma_f$, valem as equações de Weingarten, definidas em (2.8) e dadas por

$$\nu_u = a_{11}f_u + a_{21}f_v \quad \text{e} \quad \nu_v = a_{12}f_u + a_{22}f_v,$$

onde as funções são avaliadas em (u,v).

Notemos que

$$\det[\nu_u, \nu_v, \nu] = \langle \nu_u \times \nu_v, \nu\rangle = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\det[f_u, f_v, \nu] = K\lambda.$$

Logo,

$$Kd\hat{A} = K\lambda\, du \wedge dv = \det[\nu_u, \nu_v, \nu]\, du \wedge dv$$

é uma 2-forma definida globalmente em U. □

A 2-forma $Kd\hat{A}$ é chamada de **forma curvatura Gaussiana** de f. Uma das aplicações dessa 2-forma é sua utilização na generalização da fórmula de Gauss-Bonnet para superfícies singulares que satisfazem algumas propriedades. Alguns desses resultados podem ser encontrados em [24], por exemplo.

Exemplo 5.22. Consideremos a cuspidal edge $f(u,v) = (au^2 + v^2, bv^2 + v^3, u)$, com $a, b \in \mathbb{R}$, dada no Exemplo 5.19

Com cálculos diretos, mostramos que

$$K(u,v) = \frac{12a(-3v-2b)}{v\delta(u,v)^2(4a^2u^2+1)(4+4b^2+12bv+9v^2)}$$

e $\lambda(u,v) = v\delta(u,v)$. Assim,

$$Kd\hat{A} = \frac{-12a(3v+2b)}{\delta(u,v)(4a^2u^2+1)(4+4b^2+12bv+9v^2)}du \wedge dv,$$

que é uma 2-forma definida em todo domínio de f. ♢

Observação 5.23. De maneira análoga ao Teorema 5.21 é possível mostrar que se $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ é uma frente e κ_γ é sua curvatura definida nos pontos regulares, então $\kappa_\gamma ds$ pode ser continuamente estendida como uma 1-forma definida globalmente em I, onde $ds = \|\gamma'(t)\|\, dt$. ♢

Para a demonstração do resultado que estamos interessados, consideramos um especial sistema de coordenadas, cuja a existência foi provada em [24], dado pelo seguinte resultado.

Proposição 5.24. (Lema 3.2 de [24]). *Seja $f : U \to \mathbb{R}^3$ uma cuspidal edge no ponto singular q. Existe um sistema de coordenadas (u,v) satisfazendo as seguintes propriedades:*

(a) $q = \mathbf{0}$ *e a curva singular está contida no eixo-u.*

(b) $\eta(t) = (0, e(t))$ *é um campo de vetores anulador sobre o eixo-u (ou, equivalentemente, f_v se anula sobre o eixo-u).*

(c) $\lambda_v(\mathbf{0}) > 0$.

(d) $\|f_u\| = 1$ *sobre o eixo-u.*

(e) $\{f_u, f_{vv}, \nu\}$ *é uma base ortonormal positiva ao longo do eixo-u.*

O sistema de coordenadas dado na proposição acima é chamado de **sistema de coordenadas adaptado especial**.

Finalmente, estudaremos agora a versão do Teorema de Koenderink para cuspidal edges. Antes de enunciá-lo, fixemos algumas notações. A Figura 5.8 ilustra curvas e vetores que definiremos a seguir.

Sejam $f : U \to \mathbb{R}^3$ uma cuspidal edge, $q \in U$ um ponto singular de f, $M = f(U)$, γ a curva singular de f, com $\gamma(0) = q$, $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$, $\xi_q = \nu(q) \times \frac{\hat{\gamma}'(0)}{\|\hat{\gamma}'(0)\|}$ e $\mathbf{v}_\theta = \cos\theta\xi_q + \operatorname{sen}\theta\nu(q)$ um vetor em $N_{f(q)}M$, para algum $\theta \in \mathbb{R}$. Consideremos $\mathcal{P}_\theta : \mathbb{R}^3 \to T_\theta\mathbb{S}^2$ a projeção ortogonal na direção $\mathbf{v}_\theta$ dada por

$$\mathcal{P}_\theta(X) = X - \langle X, \mathbf{v}_\theta\rangle\mathbf{v}_\theta. \tag{5.12}$$

Seja γ_1 a projeção ortogonal de $\hat{\gamma}$ na direção $\mathbf{v}_\theta$, isto é, $\gamma_1(t) = \mathcal{P}_\theta \circ \hat{\gamma}(t) = \hat{\gamma}(t) - \langle\hat{\gamma}(t), \mathbf{v}_\theta\rangle\mathbf{v}_\theta$. Assim, $\gamma_1'(t) = \hat{\gamma}'(t) - \langle\hat{\gamma}'(t), \mathbf{v}_\theta\rangle\mathbf{v}_\theta$ e $\gamma_1'(0) = \hat{\gamma}'(0) \neq \mathbf{0}$, ou seja, γ_1 é uma curva regular em $t = 0$. Denotemos por κ_1 a curvatura de γ_1.

Seja γ_2 a curva obtida pela interseção de M com o plano normal a M em $f(q)$, a qual é uma (2,3)-cúspide em $f(q)$ (ver Proposição 3.1 de [18]). Como γ_2 é uma frente, se denotarmos por κ_2 sua curvatura nos pontos regulares, pela Observação 5.23 $\kappa_2 ds$ pode ser calculada em todo domínio de γ_2.

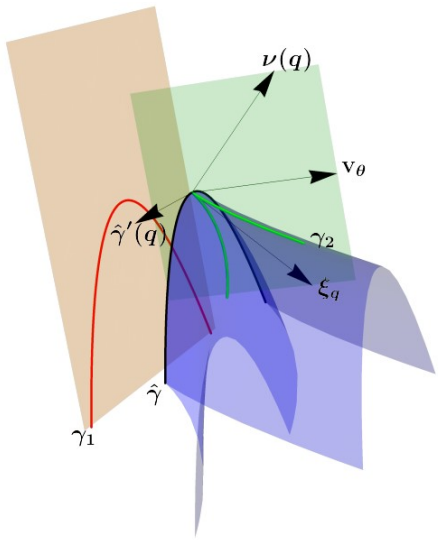


Figura 5.8: Curvas e vetores usados na versão do Teorema de Koenderink para cuspidal edges.

Recordemos que $U_+ = \{(u,v) \in U \,|\lambda(u,v) > 0\}$ e $U_- = \{(u,v) \in U \,|\lambda(u,v) < 0\}$.

No que segue, se uma curva $\alpha : I \to M$ é tal que $\alpha(t_0) = f(q)$, com abuso de notação podemos escrever $\kappa_\alpha(q)$ para denotar a curvatura de α em t_0.

Com as notações acima temos o seguinte teorema (Teorema 2.2 de [25]).

Teorema 5.25. ([25]) *Se $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, então*

$$K d\hat{A} = \frac{1}{\cos\theta}(\operatorname{sen}\theta\kappa_s - \kappa_1)dt \wedge \kappa_2 ds$$

em q, onde κ_s é a curvatura singular ao longo de γ. A curva γ_2 é orientada de tal forma que γ_2 passa de U_- para U_+ e os planos $T_\theta\mathbb{S}^2$ e $N_f(q)M$ são orientados de forma que $\{-\operatorname{sen}\theta\xi_q + \cos\theta\nu(q), \gamma_1'(0)\}$ e $\{\xi_q, \nu(q)\}$ são bases positivas, respectivamente.

Demonstração: Consideremos o sistema de coordenadas adaptado especial para f dado na Proposição 5.24. Como a curva singular está contida no eixo-u vamos parametrizá-la por $\gamma(u) = (u, 0)$. Assim, $\hat{\gamma}(u) = f \circ \gamma(u) = f(u, 0)$ e $\hat{\gamma}'(0) = f_u(q)$ é um vetor unitário. Obtemos então que $\{\nu(q), \frac{\hat{\gamma}'(0)}{\|\hat{\gamma}'(0)\|}, \xi_q\} = \{\nu(q), f_u(q), \xi_q\}$ é uma base ortonormal positiva para $\mathbb{R}^3$.

Como $\lambda_v(\mathbf{0}) > 0$ e $\|f_u(u,0)\| = 1$ então, por (2.22), a curvatura singular ao longo de γ é dada por

$$\kappa_s(u) = \det[f_u, f_{uu}, \nu](u,0) = \langle \nu \times f_u, f_{uu}\rangle(u,0)$$

e, em $u = 0$,

$$\kappa_s(0) = \langle \xi_q, f_{uu}(q)\rangle. \tag{5.13}$$

Notemos que como $f_v(u,0) = \mathbf{0}$, pelo Lema 2.52 existe uma função suave φ definida em uma vizinhança de $\mathbf{0}$ tal que

$$f_v(u,v) = v\varphi(u,v) \tag{5.14}$$

Logo, $\varphi(u,0) = f_{vv}(u,0) \neq \mathbf{0}$ e $\{f_u, \varphi, \nu\}$ é uma base ortonormal positiva ao longo do eixo-u, pela Proposição 5.24(e).

Vamos agora encontrar a expressão de $Kd\hat{A}$.

Por (2.12), usando (5.14), obtemos que a curvatura Gaussiana de f nos pontos regulares é dada por

$$K(u,v) = \frac{-\langle f_{uu},\nu\rangle\langle\nu_v,\varphi\rangle - v\langle\nu_u,\varphi\rangle^2}{v(\langle f_u,f_u\rangle\langle\varphi,\varphi\rangle - \langle f_u,\varphi\rangle^2)}(u,v)\,. \tag{5.15}$$

A função densidade de área nos pontos regulares de f é dada por

$$\lambda(u,v) = \det[f_u,f_v,\nu](u,v) = \langle f_u\times f_v,\nu\rangle(u,v) = \pm\|f_u\times f_v\|(u,v),$$

onde o sinal é positivo se $(u,v)\in U_+$ e negativo se $(u,v)\in U_-$. Notemos que, novamente usando o fato que $f_v(u,v) = v\varphi(u,v)$, obtemos

$$\begin{aligned}\lambda &= \pm\|f_u\times f_v\| = \pm\sqrt{EG-F^2} = \pm\sqrt{\langle f_u,f_u\rangle\langle f_v,f_v\rangle - \langle f_u,f_v\rangle^2}\\ &= \pm|v|\sqrt{\langle f_u,f_u\rangle\langle\varphi,\varphi\rangle - \langle f_u,\varphi\rangle^2}.\end{aligned}$$

Como $\lambda_v(\mathbf{0}) > 0$, por (2.23) concluímos que o lado esquerdo da curva singular é U_+ e, como a curva singular é o eixo-u, então $U_+ = \{(u,v)|\, v>0\}$ e $U_- = \{(u,v)|\, v<0\}$. Portanto,

$$\lambda(u,v) = v\sqrt{\langle f_u,f_u\rangle\langle\varphi,\varphi\rangle - \langle f_u,\varphi\rangle^2}(u,v).$$

Logo, a 2-forma curvatura Gaussiana de f, que pelo Teorema 5.21 pode ser continuamente estendida em todo domínio de f, é dada por

$$Kd\hat{A} = K\lambda\,du\wedge dv = \frac{-\langle f_{uu},\nu\rangle\langle\nu_v,\varphi\rangle - v\langle\nu_u,\varphi\rangle^2}{\langle f_u,f_u\rangle\langle\varphi,\varphi\rangle - \langle f_u,\varphi\rangle^2}\sqrt{\langle f_u,f_u\rangle\langle\varphi,\varphi\rangle - \langle f_u,\varphi\rangle^2}\,du\wedge dv.$$

em (u,v). Em $q=\mathbf{0}$, obtemos

$$Kd\hat{A} = -\langle f_{uu},\nu\rangle\langle\nu_v,\varphi\rangle\,du\wedge dv. \tag{5.16}$$

Vamos calcular a curvatura κ_1 da curva $\gamma_1 = \mathcal{P}_\theta\circ\hat{\gamma}$.

Como $\hat{\gamma}(u) = f(u,0)$, então

$$\gamma_1(u) = \mathcal{P}_\theta(f(u,0)) = f(u,0) - \langle f(u,0),\mathbf{v}_\theta\rangle\mathbf{v}_\theta.$$

Denotemos por $\mathbf{v}_\theta^\perp$ o vetor $-\operatorname{sen}\theta\xi_q + \cos\theta\nu(q)$. Como, por hipótese, $\mathfrak{B}_1 = \{\mathbf{v}_\theta^\perp,\gamma_1'(0)\} = \{\mathbf{v}_\theta^\perp, f_u(q)\}$ é uma base positiva para $T_\theta\mathbb{S}^2$ podemos escrever $\gamma_1(u) = (a_1(u),b_1(u))_{\mathfrak{B}_1}$, onde $(a_1(u),b_1(u))_{\mathfrak{B}_1}$ denota o vetor $a_1(u)\mathbf{v}_\theta^\perp + b_1(u)f_u(q)$. Assim, $a_1(u) = \langle\gamma_1(u),\mathbf{v}_\theta^\perp\rangle = \langle f(u,0),\mathbf{v}_\theta^\perp\rangle$ e $b_1(u) = \langle\gamma_1(u),f_u(q)\rangle = \langle f(u,0),f_u(q)\rangle$. Logo,

$$\gamma_1(u) = (\langle f(u,0),\mathbf{v}_\theta^\perp\rangle,\langle f(u,0),f_u(q)\rangle)_{\mathfrak{B}_1}.$$

Assim, $\gamma_1'(u) = (\langle f_u(u,0),\mathbf{v}_\theta^\perp\rangle,\langle f_u(u,0),f_u(q)\rangle)_{\mathfrak{B}_1}$, e

$$\begin{aligned}\gamma_1'(0) &= (\langle f_u(q),\mathbf{v}_\theta^\perp\rangle,\langle f_u(q),f_u(q)\rangle)_{\mathfrak{B}_1} = (0,1)_{\mathfrak{B}_1}\\ \gamma_1''(0) &= (\langle f_{uu}(q),\mathbf{v}_\theta^\perp\rangle,\langle f_{uu}(q),f_u(q)\rangle)_{\mathfrak{B}_1} = (\langle f_{uu}(q),\mathbf{v}_\theta^\perp\rangle,0)_{\mathfrak{B}_1}.\end{aligned}$$

Pela Observação 2.23, obtemos

$$\begin{aligned}\kappa_1(q) &= \frac{\det[\gamma_1'(0),\gamma_1''(0)]_{\mathfrak{B}_1}}{\|\gamma_1'(0)\|^3} = \det[(0,1),(\langle f_{uu}(q),\mathbf{v}_\theta^\perp\rangle,0)]\\ &= -\langle f_{uu}(q),-\operatorname{sen}\theta\xi_q + \cos\theta\nu(q)\rangle\\ &= \operatorname{sen}\theta\langle f_{uu}(q),\xi_q\rangle - \cos\theta\langle f_{uu}(q),\nu(q)\rangle.\end{aligned} \tag{5.17}$$

Calculemos agora a 1-forma $\kappa_2 ds$.

A curva γ_2 é obtida pela interseção de M com $N_{f(q)}M$. Como $f_u(q)$ é um vetor ortogonal a $N_{f(q)}M$, então $\mathrm{Im}(\gamma_2) = f(h^{-1}(0))$, onde $h(u,v) = \langle f(u,v), f_u(q)\rangle$ e, uma vez que $h_u(q) = \langle f_u(q), f_u(q)\rangle = 1$, pelo Teorema da Função Implícita, $h^{-1}(0) = \{(u(v), v)\,|v \in (-\delta, \delta)\}$ para alguma função suave $u(v)$ definida em uma vizinhança de q, satisfazendo

$$u'(v) = -\frac{\langle f_v(u(v),v), f_u(q)\rangle}{\langle f_u(u(v),v), f_u(q)\rangle} = -\frac{v\langle \varphi(u(v),v), f_u(q)\rangle}{\langle f_u(u(v),v), f_u(q)\rangle}. \tag{5.18}$$

Logo, $\gamma_2(v) = f(u(v), v)$ é uma parametrização para γ_2 em uma vizinhança de $f(q)$.

Como $\mathfrak{B}_2 = \{\xi_q, \nu(q)\}$ é uma base ortonormal positiva para $N_{f(q)}M$, podemos escrever $\gamma_2(v) = f(u(v), v) = (a_2(v), b_2(v))_{\mathfrak{B}_2}$, de onde segue que $a_2(v) = \langle f(u(v),v), \xi_q\rangle$ e $b_2(v) = \langle f(u(v),v), \nu(q)\rangle$. Logo,

$$\gamma_2(v) = (\langle f(u(v),v), \xi_q\rangle, \langle f(u(v),v), \nu(q)\rangle)_{\mathfrak{B}_2}. \tag{5.19}$$

Usando (5.14), obtemos, em v,

$$\begin{aligned} \gamma_2' &= u'\mathbf{w}_1 + v\mathbf{w}_2 \\ \gamma_2'' &= u''\mathbf{w}_1 + u'\mathbf{z}_1 + \mathbf{w}_2 + v\mathbf{z}_2, \end{aligned}$$

onde $\mathbf{w}_1 = (\langle f_u, \xi_q\rangle, \langle f_u, \nu(q)\rangle)_{\mathfrak{B}_2}$, $\mathbf{w}_2 = (\langle \varphi, \xi_q\rangle, \langle \varphi, \nu(q)\rangle)_{\mathfrak{B}_2}$, $\mathbf{z}_1 = (\langle u' f_{uu} + 2f_{uv} + v\varphi_u, \xi_q\rangle, \langle u' f_{uu} + 2f_{uv} + v\varphi_u, \nu(q)\rangle)_{\mathfrak{B}_2}$ e $\mathbf{z}_2 = (\langle \varphi_v, \xi_q\rangle, \langle \varphi_v, \nu(q)\rangle)_{\mathfrak{B}_2}$ e f, φ e suas derivadas avaliadas em $(u(v), v)$.

Assim, omitindo o ponto onde as funções são avaliadas, obtemos

$$\begin{aligned} \det[\gamma_2', \gamma_2'']_{\mathfrak{B}_2} &= u'^2 \det[\mathbf{w}_1, \mathbf{z}_1] + (u' - vu'')\det[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2] + vu'(\det[\mathbf{w}_1, \mathbf{z}_2] + \det[\mathbf{w}_2, \mathbf{z}_1]) \\ &\quad + v^2 \det[\mathbf{w}_2, \mathbf{z}_2] \\ &= v^2 \left(\frac{\langle \varphi, f_u(q)\rangle^2}{\langle f_u, f_u(q)\rangle^2} \det[\mathbf{w}_1, \mathbf{z}_1] - \frac{\langle \varphi, f_u(q)\rangle}{\langle f_u, f_u(q)\rangle}(\det[\mathbf{w}_1, \mathbf{z}_2] - \det[\mathbf{w}_2, \mathbf{z}_1]) \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\langle \varphi, f_u(q)\rangle}{\langle f_u, f_u(q)\rangle}\right]_v \det[\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2] + \det[\mathbf{w}_2, \mathbf{z}_2] \right) \end{aligned}$$

e

$$\|\gamma_2'\|^2 = v^2 \left(\frac{\langle \varphi, f_u(q)\rangle^2}{\langle f_u, f_u(q)\rangle^2}\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1\rangle - 2\frac{\langle \varphi, f_u(q)\rangle}{\langle f_u, f_u(q)\rangle}\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\rangle + \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2\rangle \right).$$

Como $\mathbf{w}_1(0) = \mathbf{0}$ e $\langle f_u, \varphi\rangle(q) = \langle \varphi, \nu\rangle(q) = 0$, então, em $q = \mathbf{0}$, obtemos

$$\begin{aligned} k_2 ds &= \frac{\det[\gamma_2', \gamma_2'']_{\mathfrak{B}_2}}{\|\gamma_2'\|^3}\|\gamma_2'\| dv = \frac{\det[\mathbf{w}_2, \mathbf{z}_2]}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2\rangle} dv \\ &= \frac{\langle \varphi, \xi_q\rangle\langle \varphi_v, \nu(q)\rangle - \langle \varphi, \nu(q)\rangle\langle \varphi_v, \xi_q\rangle}{\langle \varphi, \xi_q\rangle^2} dv. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Usando $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \mathbf{u} + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle \mathbf{v}$, para $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, de (5.20) obtemos:

$$\begin{aligned} k_2 ds &= \frac{\langle -\langle \nu(q), \varphi\rangle \xi_q + \langle \xi_q, \varphi\rangle \nu(q), \varphi_v\rangle}{\langle \varphi, \nu \times f_u\rangle^2} dv = \langle (\xi_q \times \nu(q)) \times \varphi, \varphi_v\rangle dv \\ &= \langle f_u \times \varphi, \varphi_v\rangle dv. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Como $\nu = \frac{f_u \times \varphi}{\|f_u \times \varphi\|}$ (pois $\nu = \frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|}$, $f_v = v\varphi$, $U_+ = \{(u,v) | \, v > 0\}$ e $U_- = \{(u,v) | \, v < 0\}$), então $\nu_v = \frac{f_{uv} \times \varphi + f_u \times \varphi_v}{\|f_u \times \varphi\|} - \frac{\|f_u \times \varphi_v\|_v}{\|f_u \times \varphi\|^2} f_u \times \varphi$.

Assim, $(f_u \times \varphi_v)(q) = (\nu_v - (f_{uv} \times \varphi) + \|f_u \times \varphi\|_v f_u \times \varphi)(q)$ e, de (5.21), obtemos

$$\kappa_2 ds \;=\; -\langle f_u \times \varphi_v, \varphi \rangle dv = -\langle \nu_v, f_{vv} \rangle dv \tag{5.22}$$

De (5.13), (5.16), (5.17) e (5.22) obtemos em $q = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos\theta}(\text{sen}\ \theta\kappa_s - \kappa_1) dt \wedge \kappa_2 ds &= -\frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta \langle f_{uu}, \nu(q) \rangle) \langle \nu_v, f_{vv} \rangle du \wedge dv \\ &= -\langle f_{uu}, \nu(q) \rangle \langle \nu_v, f_{vv} \rangle du \wedge dv = K d\hat{A}, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Exemplo 5.26. Seja M a cuspidal edge usual dada por $f(u,v) = (u, v^2, v^3)$ e sua aplicação de Gauss dada por $\nu(u,v) = \frac{1}{\sqrt{4+9v^2}}(0, -3v, 2)$, cuja imagem é dada na Figura 5.9. Pelo Exemplo 2.40 a curva singular de f está contida no eixo-u. Assim, $\hat{\gamma}(u) = f(u,0) = (u,0,0)$ é uma reta e, pelo Exemplo 2.50, o plano normal nesses pontos é paralelo ao plano $\{x = 0\}$. Para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$, a curva γ_1 obtida como projeção ortogonal de $\hat{\gamma}$ na direção $\mathbf{v}_\theta = (0, \cos\theta, \text{sen}\ \theta)$ é uma reta e, portanto, $\kappa_1(u) = 0$, para todo $u \in \mathbb{R}$. Pelo Exemplo 2.58, temos $\kappa_s(u) = 0$, para todo $u \in \mathbb{R}$. Assim, para qualquer $q \in \hat{\gamma}$, obtemos

$$K d\hat{A} = \frac{1}{\cos\theta}(\text{sen}\,\theta\kappa_s - \kappa_1) dt \wedge \kappa_2 ds = 0.$$

♢

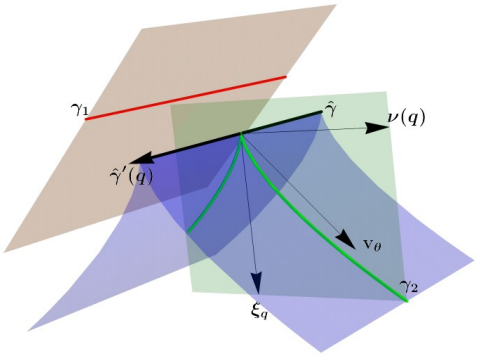


Figura 5.9: Cuspidal edge dada no Exemplo 5.26.

Exemplo 5.27. Consideremos a cuspidal parábola $f(u,v) = (au^2 + v^2, bv^2 + v^3, u)$. Pelo Exemplo 2.43 podemos parametrizar a curva singular de f por $\gamma(u) = (u,0)$ e obtemos $\hat{\gamma}(u) = (au^2, 0, u)$ (ver Figura 5.8, onde tomamos $a = b = 1$). Vamos encontrar $K d\hat{A}$ em $q = \mathbf{0}$.

Temos

$$\xi_q = \nu(q) \times \hat{\gamma}'(0) = \tfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}(-b, 1, 0) \times (0, 0, 1) = \tfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}(1, b, 0).$$

Tomando $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, obtemos $\mathbf{v}_\theta = \cos\theta\xi_q + \operatorname{sen}\theta\nu(q) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+b^2}}(1-b, 1+b, 0)$, $\mathbf{v}_\theta^\perp = -\operatorname{sen}\theta\xi_q + \cos\theta\nu(q) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+b^2}}(-1-b, 1-b, 0)$ e a projeção ortogonal na direção $\mathbf{v}_\theta$ é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\theta(x,y,z) &= (x,y,z) - \langle (x,y,z), \mathbf{v}_\theta\rangle \mathbf{v}_\theta \\ &= (x,y,z) - \tfrac{1}{2(1+b^2)}((1-b)^2x + (1-b^2)y, (1-b^2)x + (b+1)^2y, 0).\end{aligned}$$

Logo,

$$\gamma_1(u) = \mathcal{P}_\theta(\hat{\gamma}(u)) = \mathcal{P}_\theta(au^2, 0, u) = (au^2, 0, u) - \frac{1}{2(1+b^2)}(au^2(1-b)^2, au^2(1-b^2), 0),$$

de onde segue que

$$\gamma_1'(u) = (2au, 0, 1) - \tfrac{1}{2(1+b^2)}(2au(1-b)^2, 2au(1-b^2), 0) \Rightarrow \gamma_1'(0) = (0,0,1).$$

Como $\mathfrak{B}_1 = \{\mathbf{v}_\theta^\perp, \gamma_1'(0)\}$ é uma base positiva para $T_\theta\mathbb{S}^2$, obtemos

$$\gamma_1''(0) = \tfrac{1}{1+b^2}(2a(1+b^2) - a(1-b)^2, -a(1-b^2), 0) = -\tfrac{\sqrt{2}a(1+b)}{\sqrt{1+b^2}}\mathbf{v}_\theta^\perp$$

e

$$\kappa_1(0) = \tfrac{\det[\gamma_1'(0), \gamma_1''(0)]_{\mathfrak{B}_1}}{\|\gamma_1'(0)\|^3} = \tfrac{\sqrt{2}a(1+b)}{\sqrt{1+b^2}}. \tag{5.23}$$

Para encontrar a curva γ_2, notemos que $f_u(q) = (0,0,1)$ é um vetor ortogonal à $N_{\mathbf{0}}M$ e, então, $\operatorname{Imm}(\gamma_2) = \{f(u,v) \,|\, \langle f(u,v), f_u(q)\rangle = 0\} = \{f(u,v) \,|\, u = 0\}$. Logo, $\gamma_2(v) = (v^2, bv^2 + v^3, 0)$ e, uma vez que $\mathfrak{B}_2 = \{\xi_q, \nu(q)\}$ é uma base ortonormal positiva para $N_{\mathbf{0}}M$, obtemos

$$\gamma_2'(v) = \tfrac{v(2+2b^2+3bv)}{\sqrt{1+b^2}}\xi_q + \tfrac{3v^2}{\sqrt{1+b^2}}\nu(q).$$

e

$$\gamma_2''(v) = \tfrac{2(1+b^2+3bv)}{\sqrt{1+b^2}}\xi_q + \tfrac{6v}{\sqrt{1+b^2}}\nu(q).$$

Assim,

$$\kappa_2 ds = \tfrac{\det[\gamma_2', \gamma_2'']_{\mathfrak{B}_2}}{\|\gamma_2'\|^2}dv = \tfrac{6}{4+4b^2+12bv+9v^2}dv,$$

e, em $v = 0$, obtemos $\kappa_2 ds = \frac{3}{2+2b^2}dv$.

De (2.24) obtemos $\kappa_s(0) = \frac{2a}{\sqrt{1+b^2}}$ e, pelo Teorema 5.25, obtemos, em $q = \mathbf{0}$,

$$\begin{aligned}Kd\hat{A} &= \tfrac{1}{\cos\theta}(\operatorname{sen}\theta\kappa_s - \kappa_1)dt \wedge \kappa_2 ds = \tfrac{2}{\sqrt{2}}\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\tfrac{2a}{\sqrt{1+b^2}} - \tfrac{\sqrt{2}a(1+b)}{\sqrt{1+b^2}}\right)\tfrac{3}{2+2b^2}du \wedge dv \\ &= -\tfrac{3ab}{(1+b^2)^{\frac{3}{2}}}du \wedge dv,\end{aligned}$$

o que coincide com a expressão de $Kd\hat{A}$, avaliada em $q = \mathbf{0}$, obtida no Exemplo 5.22. ♢

Estudamos acima a demonstração do Teorema 5.25 apresentada em [25], que utiliza o sistema de coordenadas adptado especial para cuspidal edges.

Vamos apresentar aqui uma demonstração alternativa para esse teorema, em que usamos a forma normal (2.18) para cuspidal edges. A vantagem de considerar a expressão para f dada em (2.18) para essa demonstração é que o valor de $Kd\hat{A}$ é obtido em função dos coeficientes das funções que compõem f e, assim, obtemos outras relações para a 2-forma curvatura Gaussiana.

Demonstração alternativa do Teorema 5.25: Suponhamos que a cuspidal edge f é dada por (2.18). Assim, $p = q = \mathbf{0}$.

Calculemos $Kd\hat{A}$ em $\mathbf{0}$. Para isso, calculamos a função densidade de área λ de f e a curvatura Gaussiana nos pontos regulares de f. Essas contas são extensas e, por isso, utilizamos o software Wolfram Mathematica. Obtemos:

$$\lambda(u,v) = \det[f_u, f_v, \nu](u,v) = v\frac{m_1(u,v)}{\delta(u,v)}$$

e

$$K(u,v) = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}(u,v) = \frac{m_2(u,v)}{vm_3(u,v)},$$

onde m_1, m_2 e m_3 são funções que dependem de a, b_1, b_2, b_3 e suas derivadas.

Assim, obtemos:

$$Kd\hat{A} = 3b_3(\mathbf{0})b_1''(0)du \wedge dv = \tfrac{1}{2}b_{03}b_{20}\, du \wedge dv. \tag{5.24}$$

Calculemos agora a curvatura κ_1 de $\gamma_1 = \mathcal{P}_\theta \circ \hat{\gamma}$ em q, onde $\mathcal{P}_\theta(X) = X - \langle X, \mathbf{v}_\theta\rangle \mathbf{v}_\theta$. Como a curva singular de f é o eixo-u, então $\hat{\gamma}'(0) = (1,0,0)$ e, como $\nu(\mathbf{0}) = (0,0,1)$, obtemos $\xi_q = (0,1,0)$. Assim, $\mathbf{v}_\theta = (0, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e $\gamma_1(u) = \mathcal{P}_\theta(f(u,0))$. Logo, $\gamma_1'(0) = \mathcal{P}_\theta(f_u(\mathbf{0})) = (1,0,0) = f_u(\mathbf{0})$ e $\gamma_1''(0) = [-\operatorname{sen}\theta(a_{20} - (a_{20}\cos\theta + b_{20}\operatorname{sen}\theta)\cos\theta) + \cos\theta(b_{20} - (a_{20}\cos\theta + b_{20}\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta)]\mathbf{v}_\theta^\perp$. Logo, por (2.5), obtemos:

$$\kappa_1(0) = a_{20}\operatorname{sen}\theta - b_{20}\cos\theta. \tag{5.25}$$

Calculemos agora a 1-forma curvatura e a curvatura cuspidal de γ_2, obtida pela interseção de M com $N_{\mathbf{0}}M$. O traço de γ_2 é dado por $\operatorname{Im}(\gamma_2) = f(h^{-1}(0))$, onde $h(u,v) = \langle f(u,v), f_u(\mathbf{0})\rangle$ e, uma vez que $h_u(\mathbf{0}) = \langle f_u(\mathbf{0}), f_u(\mathbf{0})\rangle = 1$, pelo Teorema da Função Implícita obtemos $h^{-1}(0) = \{(u(v), v) \,|\, v \in (-\delta, \delta)\}$ para alguma função suave $u(v)$ definida em uma vizinhança de $\mathbf{0}$, satisfazendo $u'(v) = -\frac{\langle f_v(u(v),v), f_u(\mathbf{0})\rangle}{\langle f_u(u(v),v), f_u(\mathbf{0})\rangle}$. Logo, $\gamma_2(v) = f(u(v), v)$. Como $\mathfrak{B} = \{\xi_q, \nu(\mathbf{0})\} = \{(0,1,0), (0,0,1)\}$ é base positiva para $N_{\mathbf{0}}M$, obtemos $\gamma_2(v) = (\frac{v^2}{2} + a(u(v)), b_1(u(v)) + y^2 b_2(u(v)) + v^3 b_3(u(v), v))_{\mathfrak{B}}$. A 1-forma curvatura de γ_2 é

$$\kappa_2(v)ds = \frac{\det[\gamma_2', \gamma_2'']_{\mathfrak{B}}}{\|\gamma_2'\|^2}(v)dv = \frac{3b_3 + 5y(b_3)_v + y^2(b_3)_{vv}}{1 + (2b_2 + 3yb_3 + y^2(b_3)_v)^2}dv,$$

onde b_3 e suas derivadas são avaliadas em $(u(v), v)$ e b_2 avaliada em v. Assim, em $v = 0$, obtemos

$$\kappa_2 ds = 3b_3(\mathbf{0})dv = \frac{b_{03}}{2}dv. \tag{5.26}$$

De (5.24), (5.25) e (5.26), e usando os valores de $\kappa_\nu(0) = b_{20}$ e $\kappa_s(0) = a_{20}$ encontrados nos Exemplos 2.55 e 2.60, respectivamente, obtemos $Kd\hat{A} = \frac{1}{\cos\theta}(\operatorname{sen}\theta\kappa_s - \kappa_1)dt \wedge \kappa_2 ds$. □

A curva γ_2, obtida da interseção da cuspidal edge M com seu plano normal em $p = f(q)$ é uma (2,3)-cúspide. Denotemos por μ_{γ_2} a curvatura cuspidal de γ_2.

Como $\gamma_2''(0) = (1,0)_{\mathfrak{B}}$ e $\gamma_2'''(0) = (0, 6b_3(\mathbf{0}))_{\mathfrak{B}}$, obtemos, por (5.4),

$$\mu_{\gamma_2}(0) = 6b_3(\mathbf{0}) = b_{03}. \tag{5.27}$$

Como consequência das equações acima, obtemos que as seguintes relações são válidas.

Corolário 5.28.

$$Kd\hat{A} = \frac{1}{2\cos\theta}(\operatorname{sen}\theta\kappa_s - \kappa_1)dt \wedge \mu_{\gamma_2}dv \tag{5.28}$$

e

$$Kd\hat{A} = \kappa_\nu du \wedge \kappa_2 ds = \frac{1}{2}\kappa_\nu\mu_{\gamma_2}du \wedge dv. \tag{5.29}$$

5.4 Sobre outras extensões

Para finalizar este capítulo, gostaríamos de fazer o seguinte comentário. Vimos o Teorema de Koenderink para superfícies regulares e contornos aparentes regulares ([15], 1984). Vimos também resultados do tipo de Koenderink para o caso em que o contorno aparente é uma (2,3)-cúspide ([10], 2016) e o caso em que a superfície é uma cuspidal edge ([25], 2014). Podemos perguntar se há outros resultados do tipo de Koenderink para superfícies singulares no espaço Euclidiano.

No artigo [10] de 2016, os autores provaram os resultados do tipo de Koenderink para superfícies parametrizadas por aplicações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ com singularidades estáveis: os guarda-chuvas de Whitney (ou cross-caps), que são aplicações $\mathcal{A}$-equivalentes a $(u, v) \mapsto (u, v^2, uv)$. Note que a origem é um ponto singular isolado da aplicação acima. A Figura 5.10 apresenta imagens de cross-caps.

Cross-caps não são frentes de onda, ou seja, não possuem um campo suave de vetores normais unitários bem definido, e a curvatura Gaussiana é não limitada na vizinhança do ponto singular. Na Seção 4 de [10] os autores provam dois teoremas do tipo de Koenderink (Teoremas 4.4 e 4.6) que se verificam ao longo de curvas especiais que se aproximam do ponto singular.

Em 2019, M. Sichacá e Y. Kabata estudaram em [27] a projeção ortogonal de cross-caps. Neste trabalho, utilizando, com as devidas adaptações, as técnicas estudadas na Seção 5.2 para a projeção ortogonal de cuspidal edges, os autores classificam as singularidades genéricas da projeção ortogonal de cross-caps e apresentam os diagramas de bifurcação dos contornos aparentes dessas superfícies.

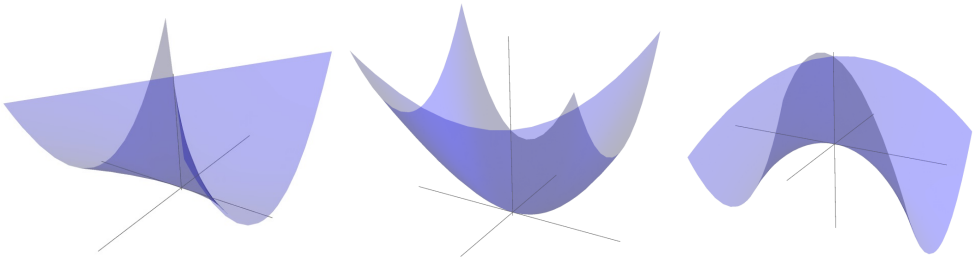


Figura 5.10: Guarda-chuvas de Whitney

REFERÊNCIAS

[1] ARNOL'D, V. I. Indices of singular points of 1-forms on a manifold with boundary, convolution of invariants of reflection groups, and singularities of projections of smooth surfaces. *Uspekhi Mat. Nauk*, v.34-2, p. 3-38.

[2] BRUCE, J. W.; GAFFNEY, T. Simple singularities of mappings $\mathbb{C}^2, 0 \to \mathbb{C}^2, 0$. *Journal of the London Mathematical Society*, v. 26, p. 465–474, 1982.

[3] BRUCE, J.W.; GIBLIN, P. *Curves and singularities: a geometrical introduction to singularity theory*. 1 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.

[4] CARMO, M. P. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

[5] CARMO, M. P. *Differential forms and applications*. 2. ed. Springer Science & Business Media, 1998.

[6] CIPOLLA, R.; GIBLIN, P. *Visual motion of curves and surfaces*. 1. ed. Estados Unidos: Cambridge University Press, 2009.

[7] DAMON, J.; GIBLIN, P.; HASLINGER, G. *Local features in natural images via singularity theory*. 1. ed. [S.l.]: Springer International Publishing, 2016.

[8] D'OCAGNE, M. Sur la courbure du contour apparent d'une surface projetée orthogonalement. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, v. 14, p. 262–264, 1895.

[9] DUKAS, H.; HOFFMANN, B. *Albert Einstein: O lado humano - rápidas visões colhidas em seus arquivos*. 1. ed. Brasília: UNB Universidade de Brasília, 1979.

[10] FUKUI, T.; HASEGAWA, M.; SAJI, K. Extensions of Koenderink's formula. *Journal of Gökova Geometry Topology*, v. 10, p. 42–59, 2016.

[11] GAFFNEY, T. The structure of $T\mathcal{A}(f)$, classification and an application to differential geometry. *Singularities, Part 1 (Arcata, Calif., 1981)*, Proc. Sympos. Pure Math, v. 40, p. 409–427, 1983.

[12] GAFFNEY, T.; RUAS, M. A. S. Singularities of mappings and orthogonal projections of spaces. *Notices Am. Math. Soc.*, v. 26-1, 1979.

[13] IZUMIYA, S.; ROMERO FUSTER M. C.; RUAS, M. A. S.; TARI, F. *Differential geometry from a singularity theory viewpoint*. 1. ed. Singapura: World Scientific, 2016.

[14] KOENDERINK, J.; VAN DOORN, A. J. The singularities of the visual mapping *Biological Cybernetics*, v. 24, p. 51-59, 1976.

[15] KOENDERINK, J. What does the occluding contour tell us about solid shape? *Perception*, v. 13, p. 321-330, 1984.

[16] LIMA, E. L. *Curso de análise vol 2*. 11. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2018.

[17] MARTINS, L. F.; SAJI, K. Geometric invariants of cuspidal edges. *Canadian Journal of Mathematics*, v. 68, p. 445–462, 2016.

[18] MARTINS, L. F.; SAJI, K.; UMEHARA, M.; YAMADA, K. Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non degenerate singular points on wave fronts. *In: Futaki A., Miyaoka R., Tang Z., Zhang W. (eds) Geometry and Topology of Manifolds. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, v. 154, p. 247–281, 2016.

[19] MARTINS, L. F.; SAJI, K.; SANTOS, S. P.; TERAMOTO, K. Singular surfaces of revolution with prescribed unbounded mean curvature. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, v. 91, p. 1–10, 2019.

[20] MONTALDI, J. *Contact with applications to submanifolds of* $\mathbb{R}^n$. Tese (Doutorado) — The University of Liverpool, 1983.

[21] MOND, D.; NUÑO-BALLESTEROS, J. *Singularities of Mappings: The local behaviour of smooth and complex analytic mappings*. 1. ed. Springer, 2020.

[22] OSET SINHA, R.; TARI, F. On the flat geometry of the cuspidal edge. *Osaka Journal of Mathematics*, v. 55, p. 393–421, 2018.

[23] RIEGER, J. H. Families of maps from the plane to the plane. *Journal of the London Mathematical Society*, v. 36-2, p. 351–369, 1987.

[24] SAJI, K.; UMEHARA, M.; YAMADA, K. The geometry of fronts. *Annals of Mathematics*, v. 169, p. 491–529, 2009.

[25] SAJI, K. Koenderink type theorems for fronts. *Journal of Singularities*, v. 10, p. 264–270, 2014.

[26] SHIBA, S.; UMEHARA, M. The behavior of curvature functions at cusps and inflection points. *Differential Geometry and its Applications*, v. 30, p. 285–299, 2012.

[27] SICHACÁ, M. B.; KABATA, Y. Projection of crosscap. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, v. 16, p. 1–18, 2019

[28] TENENBLAT, K. *Introdução à geometria diferencial*. 2. ed. São Paulo: Edigar Blücher, 2008.

[29] WALL, C. T. C. Finite determinacy of smooth map-germs. *Bulletin of the London Mathematical Society*, v. 13, p. 481–539, 1981.