Universidade Estadual Paulista

Câmpus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledets

Fabricio Fernando Alves

Orientador: Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Câmpus São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São José do Rio Preto

Fevereiro - 2010

FABRICIO FERNANDO ALVES

Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledets

Dissertação apresentada para a obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biologia, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, "Júlio de Mesquita Filho", Campus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Vanderlei Minori Horita
Professor Doutor - IBILCE - UNESP
Orientador

Daniel Smania Brandão
Professor Doutor - ICMC/USP - São Carlos
1º Examinador

Ali Messaoudi
Professor Doutor - IBILCE - UNESP
2º Examinador

São José do Rio Preto, 18 de fevereiro de 2010

Ao meus pais

e à Nayara

eu dedico.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço ao meu bom Deus, ao Senhor Jesus Cristo e ao Seu Santo Espírito. Não sabendo ao certo quais palavras dirigir-Lhe, tomo emprestadas as palavras do salmista: "*Bendize, ó minha alma, ao SENHOR, e tudo o que há em mim bendiga ao seu santo nome. Bendize, ó minha alma, ao SENHOR e não te esqueças de nem um só de seus benefícios.*"(Salmos 103:1-2)

Sou muito grato aos meus pais, José Aldinei Alves e Marilene Sapia Alves, por todo apoio, paciência, amor, carinho, amizade, por suas instruções sempre sensatas e pelo fato de se esforçarem sobremaneira para que eu fosse livre para sonhar e lutar por meus sonhos. Agradeço ainda aos meus irmãos, Weslley e Danielle, pelo apoio e pela amizade.

Expresso minha gratidão aos meus irmãos na fé, que sempre intercederam por mim com suas orações.

Também agradeço ao Professor Doutor Vanderlei Minori Horita pela orientação, que me proporcionou um pouco de conhecimento numa área muito bonita da Matemática, bem como aos Professores Daniel Smania Brandão e Ali Messaoudi, integrantes da banca examinadora.

Agradeço aos meus amigos, que próximos ou distantes, não deixaram de torcer por mim e me apoiar. Em particular, quero mencionar dois amigos meus: Fernando P. Micena, que me incentivou bastante para que eu retomasse meus estudos em Matemática e procurou-me ajudar indicando livros, ou mesmo por conversas via correio eletrônico e Leandro Tavares pelas conversas sempre proveitosas.

Aproveito para agradecer aos professores do curso de Licenciatura em Matemática da FCT/UNESP (Campus de Presidente Prudente), que contribuíram para minha formação durante meu período de graduação. Em especial, agradeço ao Professor Doutor José Carlos "Biroca" Rodrigues e ao Professor Doutor José Roberto Nogueira, por me incentivarem a tentar ingressar no Mestrado novamente e se dispuseram a me ajudar no que fosse possível.

De igual modo, agradeço ao professores Toninho, Gorete, Claudio, João Carlos e German, que contribuíram para minha formação através das disciplinas que ministraram.

Não posso deixar de mencionar o quanto sou grato aos Professores José Vicente e Nelson Galante, cujas aulas muito me influenciaram no meu gosto pela Matemática.

Aos colegas de Mestrado agradeço pela ajuda, pelo convívio bastante agradável e pelas muitas risadas.

À Nayara eu agradeço porque, mesmo havendo pouco tempo que a conheço, mostrou que seu amor e carinho por mim são imensos.

Por último, mas não menos importante, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Verdade, Amor, Razão, Merecimento,
qualquer alma farão segura e forte;
porém, Fortuna, Caso, Tempo e Sorte,
têm do confuso mundo o regimento.

Efeitos mil revolve o pensamento
e não sabe a que causa se reporte;
mas sabe o que é mais que vida e morte,
que não o alcança o humano entendimento.

Doctos varões darão razões subidas,
mas são experiências mais provadas,
e por isso é melhor ter muito visto.

Cousas há i que passam sem ser cridas
e cousas cridas há sem ser passadas,
mas o melhor de tudo é crer em Cristo.

Luís de Camões

Resumo

Este trabalho apresenta os conceitos de expoentes de Lyapounov e de espaços próprios e fornece um resultado devido a Oseledets, o qual trata da existência desses expoentes (e, consequentemente, dos espaços próprios) do ponto de vista da teoria da medida. A prova do teorema que nós fornecemos foi dada originalmente por Mañé e posteriormente melhorada por Viana.

Palavras-Chave: Sistemas dinâmicos, teoria ergódica, fibrados.

Abstract

This work presents the concepts of Lyapounov exponents and of proper spaces and provides a result due to Oseledets, which deals with the existence of these exponents (and, consequently, of the proper spaces) from a measure-theoretical point of view. The proof of the theorem which we provide was originally given by Mañé and later improved by Viana.

Keywords: Dynamical systems, ergodic theory, fiber bundles.

Sumário

Introdução

É sabido que os números reais conhecidos como expoentes de Lyapounov estão relacionados com a estabilidade de um dado sistema dinâmico. Entretanto, é natural questionar se tais números realmente existem. Um resultado publicado em 1968 e atualmente conhecido como Teorema de Oseledets, estabelece condições em que estes números existem.

No Capítulo 1, são expostas algumas definições e resultados da teoria da medida e integração, enquanto que o Capítulo 2 é uma breve introdução à Teoria Ergódica, trazendo importantes teoremas, tais como o Teorema da Recorrência de Poincaré e o Teorema Ergódico de Birkhoff. A maioria dos resultados contidos nestes dois capítulos é enunciada sem prova. Porém, indicamos as referências bibliográficas que demonstram esses resultados.

O Capítulo 3 é iniciado motivando a definição dos expoentes de Lyapounov para difeomorfismos definidos em subconjuntos abertos de espaços euclidianos. A seguir, são apresentadas a definição de pontos regulares, espaços próprios e expoentes de Lyapounov para difeomorfismos definidos em variedades riemannianas compactas de dimensão finita e, então, enunciamos um resultado que garante a existência dos pontos regulares do ponto de vista da teoria da medida, a saber: o Teorema de Oseledets. A prova deste teorema é obtida a partir de um resultado mais geral, cuja prova é obtida a partir de três lemas enunciados e demonstrados ao longo do capítulo.

Capítulo 1

Elementos de Teoria da Medida

Neste capítulo, apresentaremos definições e resultados da Teoria da Medida a serem utilizados neste texto. As demonstrações podem ser vistas, por exemplo, nas referências bibliográficas [1], [3] e [4].

1.1 Medidas

Definição 1.1 *Seja X um conjunto. Diz-se que uma família $\mathcal{O}$ de subconjuntos de X é uma* **álgebra** *se*

(i) $X \in \mathcal{O}$;

(ii) $A \in \mathcal{O} \Rightarrow A^c \in \mathcal{O}$;

(iii) $A, B \in \mathcal{O} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{O}$.

Observação 1.1 *Decorre imediatamente da definição acima que*

(i) $A, B \in \mathcal{O} \Rightarrow A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{O}$;

(ii) $A, B \in \mathcal{O} \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{O}$.

Definição 1.2 *A família $\mathcal{O}$ é denominada σ-***álgebra** *se é uma álgebra e satisfaz*

$$A_i \in \mathcal{O}, i = 1, 2, ... \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{O}.$$

Definição 1.3 *Seja $\mathcal{O}_0$ uma família de subconjuntos de X. A σ-álgebra gerada por $\mathcal{O}_0$ é a "menor"σ-álgebra contendo $\mathcal{O}_0$, ou seja, é a intersecção de todas as σ-álgebras que contêm $\mathcal{O}_0$.*

Definição 1.4 *Seja $\mathcal{O}$ uma álgebra de subconjuntos de X. Diz-se que uma função $\mu : \mathcal{O} \longrightarrow [0, +\infty]$ é uma* **medida** *em $\mathcal{O}$ se*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) *para toda coleção finita ou enumerável de subconjuntos disjuntos $A_i \in \mathcal{O}, i = 1, 2, ...,$ tais que $\bigcup_i A_i \in \mathcal{O}$, tem-se*

$$\mu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i).$$

*A medida será σ-***finita** *se X puder ser decomposto em uma união enumerável de conjuntos com medida finita.*

Uma pergunta que pode ocorrer é a seguinte: é possível estender uma medida em uma álgebra para uma σ-álgebra "maior"? O teorema de extensão abaixo fornece a resposta.

Teorema 1.1 (Hahn-Kolmogorov) *Se $\mathcal{O}_0$ é uma álgebra de subconjuntos de X e ν uma medida definida em $\mathcal{O}_0$, então existem uma σ-álgebra e uma medida μ em $\mathcal{O}$ tal que $\mathcal{O}_0 \subset \mathcal{O}$ e $\nu(A) = \mu(A)$ para cada $A \in \mathcal{O}_0$ (ou seja, μ é uma extensão de ν em $\mathcal{O}$). Se ν é σ-finita, a extensão sobre a σ-álgebra gerada por $\mathcal{O}_0$ é única.*

Definição 1.5 *Seja X um espaço topológico. A σ-***álgebra de Borel** *de X é a σ-álgebra gerada pelos subconjuntos fechados de X. Os conjuntos da σ-álgebra de Borel são chamados* **conjuntos de Borel** *ou* **borelianos**.

Observação 1.2 *A σ-álgebra gerada pelos subconjuntos abertos de X coincide com a σ-álgebra de Borel, pois os complementares de conjuntos abertos são fechados.*

Definição 1.6 *O par $(X, \mathcal{O})$, onde X é um conjunto e $\mathcal{O}$ é uma σ-álgebra de conjuntos, chama-se* **espaço mensurável**. *Os elementos de $\mathcal{O}$ são denominados* **conjuntos mensuráveis**.

Definição 1.7 *A terna $(X, \mathcal{O}, \mu)$, onde X é um conjuntos, $\mathcal{O}$ é uma σ-álgebra de conjuntos de X e $\mu : \mathcal{O} \longrightarrow [0, +\infty]$ é uma medida, é denominada* **espaço de medida**. *Se $\mu(X) = 1$, então $(X, \mathcal{O}, \mu)$ é um* **espaço de probabilidade** *e μ uma* **medida de probabilidade** *ou uma* **probabilidade**.

Definição 1.8 *Seja $(X, \mathcal{O}, \mu)$ um espaço de medida.*

(i) *Um subconjunto $A \subset X$ tem* **medida nula** *se existe $\widetilde{A} \in \mathcal{O}$, tal que $A \subset \widetilde{A}$ e $\mu(\widetilde{A}) = 0$.*

(ii) *Os conjuntos $A_1, A_2 \subset X$ são* **equivalentes** $(\mod 0)$ *se a diferença simétrica, $A_1 \triangle A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$ tem medida nula.*

(iii) *Se $\mathcal{S}$ é uma família de subconjuntos de X, diz-se que $A \in \mathcal{S}$ $(\mod 0)$ se existe $A_1 \in \mathcal{S}$ equivalente $(\mod 0)$ a A.*

(iv) *$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$ $(\mod 0)$ se para todo $A_1 \in \mathcal{S}_1$ e $A_2 \in \mathcal{S}_2$, tem-se $A_1 \in \mathcal{S}_2$ $(\mod 0)$ e $A_2 \in \mathcal{S}_1$ $(\mod 0)$.*

(v) *$\mathcal{S}$ gera $\mathcal{O}(\mod 0)$ se $\mathcal{O} = \overline{\mathcal{S}}$ $(\mod 0)$, onde $\overline{\mathcal{S}}$ é a σ-álgebra gerada por $\mathcal{S}$.*

Definição 1.9 *Diz-se que uma propriedade aplicável a pontos de um conjunto $S \subset X$ vale em* **quase todo ponto** *$x \in S$ (abreviadamente q.t.p) se o conjunto dos pontos de S onde a propriedade é falsa possui medida nula.*

Todo elemento A da σ-álgebra gerada por uma álgebra é aproximado por algum elemento A_0 da álgebra. Com isto, queremos dizer que a diferença simétrica $A \triangle A_0 = (A \setminus A_0) \cup (A_0 \setminus A)$ tem medida pequena.

Teorema 1.2 (de Aproximação) *Seja $(X, \mathcal{O}, \mu)$ um espaço de medida e $\mathcal{O}_0 \subset \mathcal{O}$ uma álgebra que gera $\mathcal{O}(mod0)$. Então, para todo $A \in \mathcal{O}$ e $\epsilon > 0$ existe $A_0 \in \mathcal{O}_0$ tal que $\mu(A \triangle A_0) \leq \epsilon$. A recíproca é verdadeira no caso em que $(X, \mathcal{O}, \mu)$ é um espaço de probabilidade.*

Teorema 1.3 *Seja X um espaço métrico separável, $\mathcal{O}$ a σ-álgebra de Borel de X e $\mu : \mathcal{O} \longrightarrow [0, 1]$ uma probabilidade. Então, para todo conjunto de Borel A e todo $\epsilon > 0$ existe um compacto $K \subset A$ tal que $\mu(A \setminus K) \leq \epsilon$.*

1.2 Funções Mensuráveis

Definição 1.10 *Sejam X, Y dois conjuntos e $\mathcal{O}$ e $\mathcal{S}$ suas respectivas σ-álgebras. A aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é* **mensurável** *com respeito a $\mathcal{O}$ e $\mathcal{S}$ se $f^{-1}(B) \in \mathcal{O}$ para todo $B \in \mathcal{S}$. Quando X e Y são espaços topológicos, diz-se que $f : X \longrightarrow Y$ é mensurável se o é para as σ-álgebras de Borel de X e Y.*

Proposição 1.1 *Se X e Y são espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação tal que $f^{-1}(A)$ é um subconjunto de Borel de X para cada subconjunto aberto de Y, então f é mensurável.*

Corolário 1.1 *Se X e Y são espaços topológicos, então toda aplicação contínua $f : X \longrightarrow Y$ é mensurável.*

Definição 1.11 *Seja X um conjunto e Y um espaço topológico. Uma sequência de funções $f_n : X \longrightarrow Y$, $n \geq 1$, converge (pontualmente) para uma função $f : X \longrightarrow Y$ se*

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$$

para todo $x \in X$.

Corolário 1.2 *Se X é um conjunto com uma σ-álgebra $\mathcal{O}$, Y um espaço métrico com uma σ-álgebra de Borel e $f_n : X \longrightarrow Y$, $n \geq 1$, uma sequência de funções mensuráveis que converge pontualmente para uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$, então f é mensurável.*

Proposição 1.2 *Sejam $(A, \mathcal{A})$ e $(B, \mathcal{B})$ espaços mensuráveis e f qualquer aplicação de A até B. Se existe uma cobertura enumerável $(A_n)_n$ de A por conjuntos mensuráveis tais que $f \mid A_n : A_n \longrightarrow B$ é uma aplicação mensurável para cada $n \geq 1$, então $f : A \longrightarrow B$ é uma aplicação mensurável.*

Definição 1.12 *Seja $(X, \mathcal{O}, \mu)$ um espaço de medida e Y um espaço topológico. Uma sequência de funções $f_n : X \longrightarrow Y$, $n \in \mathbb{N}$, converge em quase toda a parte para a função $f : X \longrightarrow Y$ se o conjunto dos pontos $x \in X$ para os quais a convergência $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ não se verifica tem medida nula.*

Definição 1.13 *Seja* $(X, \mathcal{O}, \mu)$ *um espaço de medida e consideremos a sequência de funções* $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$. *Diz-se que* f_n *converge uniformemente a* f *q.t.p se existe um conjunto* E_0 *de medida nula tal que, para todo* $\epsilon > 0$, *existe um natural* $n_0 = n_0(\epsilon)$ *de maneira que*

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \text{ se } n \geq n_0 \text{ e } x \notin E_0.$$

O resultado seguinte, relaciona a convergência q.t.p e a convergência uniforme.

Teorema 1.4 (Egorov) *Seja* $(X, \mathcal{O}, \mu)$ *um espaço de probabilidade,* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função e* $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, *uma sequência de funções mensuráveis tais que* $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ *em q.t.p* $x \in X$. *Nestas condições, a sequência* f_n *converge quase uniformemente a* f, *ou seja, dado* $\epsilon > 0$, *existe* $A \in \mathcal{O}$ *com* $\mu(A) \leq \epsilon$ *e tal que* $f_n \mid A^c$ *converge uniformemente a* $f \mid A^c$.

Definição 1.14 *Uma sequência de funções mensuráveis* $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *converge em medida à função mensurável* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *quando, para qualquer* $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mu(\{x; |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\}) = 0.$$

Teorema 1.5 *Se uma sequência converge em medida, então ela possui uma subsequência que converge em quase toda parte. Além disso, se* $\mu(X) < +\infty$, *a convergência em quase toda a parte acarreta a convergência em medida.*

1.3 Funções Integráveis

Seja $(X, \mathcal{O}, \mu)$ um espaço de medida. Se A é uma elemento da σ-álgebra $\mathcal{O}$,então definimos sua **função característica**, χ_A, por: $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$ e $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$. Diz-se que uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ é **simples** se ela pode ser escrita como $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i}$, onde A_i $(i = 1, 2, ..., n)$ pertence à σ-álgebra e $\mu(A_i) < +\infty$, sempre que $\lambda_i \neq 0$. Neste caso, define-se a integral de f por

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu(A_i).$$

Observação 1.3 *Prova-se que este número independe da forma de escrever f como uma combinação linear de funções características. Noutras palavras, se $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i}$ e $f = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$, então $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} \beta_i \mu(B_i)$.*

Agora, uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ é **integrável** se existe uma sequência de funções simples $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$, $n = 1, 2, ...$ tais que

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x) \;\; q.t.p \;\; x \in X$$

$$\lim_{n,m \to +\infty} \int_X |f_n - f_m| d\mu = 0.$$

Nestas condições, definimos a integral de f por

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu. \tag{1.1}$$

Observação 1.4 *Prova-se que o limite (1.1) existe e independe da sequência f_n.*

Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ é integrável sobre um conjunto $A \subset X$ se $f.\chi_A$ é integrável e pomos

$$\int_A f d\mu = \int_X f.\chi_A d\mu.$$

Observação 1.5 1. *Funções integráveis não são necessariamente mensuráveis, mas sempre coincidem com uma função mensurável em quase toda a parte.*

2. *Uma função f é integrável se, e somente se, $|f|$ o é.*

Frequentemente surge a questão de saber se uma dada função $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, que é limite q.t.p de uma sequência de funções integráveis $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$ é integrável e se sua integral é o limite das integrais de f_n quando $n \to +\infty$. Os três resultados seguintes são ferramentas úteis para resolver este problema.

Teorema 1.6 (Fatou) *Seja $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções integráveis positivas satisfazendo*

$$\liminf_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu < +\infty$$

e convergindo q.t.p para a função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$*. Então,* f *é integrável e*

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu.$$

Teorema 1.7 (Convergência Monótona) *Seja* $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma sequência de funções integráveis tais que, para quase todo ponto* $x \in X$ *a sequência* $f_n(x)$ *é monótona crescente e*

$$\sup_n \int_X f_n d\mu < +\infty.$$

Então, a função $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ *é integrável e*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

Teorema 1.8 (Convergência Dominada) *Seja* $f_n : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *uma sequência de funções integráveis dominada por uma função* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$*, ou seja,* $|f_n(x)| \leq f(x)$*, para todo* n *e quase todo* $x \in X$*. Se a sequência* $f_n(x)$ *converge para quase todo* x*, então a função limite* $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ *satisfaz*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Dado $p \geq 1$, indica-se por $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{O}, \mu)$ o conjunto das funções $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que $|f|^p$ é integrável, identificando as funções que coincidem q.t.p. Define-se em $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{O}, \mu)$ uma norma $\|.\|_p$ pondo

$$\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}.$$

Observação 1.6 *O fato de* $\|.\|_p$ *ser uma norma decorre da* **desigualdade de Minkowski***, a qual estabelece que se* f *e* g *pertencem a* $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{O}, \mu)$*, então* $f + g$ *também pertence e*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Denota-se por $\mathcal{L}^{+\infty}(X, \mathcal{O}, \mu)$ o conjunto das funções $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que existe uma constante positiva K satisfazendo $|f(x)| \leq K$ para quase todo ponto $x \in X$, identificando funções que coincidem em q.t.p. O ínfimo dos K com esta propriedade é denotado por $\|f\|_\infty$ e define uma norma em $\mathcal{L}^{+\infty}(X, \mathcal{O}, \mu)$. E prova-se ainda que $\mathcal{L}^{+\infty}(X, \mathcal{O}, \mu)$ dotado com a norma $\|.\|_\infty$ é um espaço de Banach.

Definição 1.15 *Seja* $(X, \mathcal{O})$ *uma espaço mensurável e sejam* $\mu : \mathcal{O} \longrightarrow [0, +\infty]$ *e* $\nu : \mathcal{O} \longrightarrow [0, +\infty]$ *medidas. Diz-se que* μ *é* **absolutamente contínua** *com respeito a* ν, *e denotamos* $\mu \ll \nu$, *se* $A \in \mathcal{O}$ *e* $\nu(A) = 0$ *implica* $\mu(A) = 0$.

Teorema 1.9 (Radon-Nikodym) *Seja* $(X, \mathcal{O}, \mu)$ *um espaço de medida e* $\nu : \mathcal{O} \longrightarrow [0, +\infty]$ *uma medida tal que* $\mu \ll \nu$. *Se* $(X, \mathcal{O}, \mu)$ *e* σ*-finito (ou seja, existe uma cobertura enumerável de* X *por conjuntos em* $\mathcal{O}$ *de medida finita segundo* μ*), então existe uma função integrável com respeito a* ν, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *de modo que para todo* $A \in \mathcal{O}$

$$\mu(A) = \int_X f d\nu.$$

Tal função é única. Além disso, uma função $g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *pertence a* $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{O}, \mu)$ *se, e somente se,* $gf \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{O}, \nu)$, *e então*

$$\int_X g d\mu = \int_X fg d\nu.$$

Observação 1.7 *A função* f *é chamada a* **derivada de Radon-Nikodym** *de* μ *com respeito a* ν *e é denotada por* $\frac{d\mu}{d\nu}$.

Capítulo 2

Ergodicidade

Neste capitulo, faz-se uma breve exposição da Teoria Ergódica. São apresentadas duas versões do *Teorema de Recorrência de Poincaré*: uma do ponto de vista mensurável e uma versão topológica. Apresentamos ainda o *Teorema Ergódico de Birkhoff*. O assunto aqui exposto pode ser encontrado nas referências bibliográficas [2],[8],[9].

2.1 Aplicações que Preservam Medida

Definição 2.1 *Sejam* $(X, \mathcal{O}, \mu)$ *e* $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ *espaços de medida. Uma aplicação* $T : X \longrightarrow Y$ **preserva medida** *quando*

$$B \in \mathcal{S} \Longrightarrow T^{-1}(B) \in \mathcal{O} \ \ e \ \ \mu(T^{-1}(B)) = \nu(B).$$

Se $(X, \mathcal{O}, \mu) = (Y, \mathcal{S}, \nu)$, *então* μ *é* **invariante** *sob* T *ou que* T *é um* **automorfismo** *de* $(X, \mathcal{O}, \mu)$.

A proposição seguinte fornece um critério para verificar se uma aplicação T preserva medida.

Proposição 2.1 *Sejam* $(X, \mathcal{O}, \mu)$ *e* $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ *espaços de medida* σ*-finitos e seja* $T : X \rightarrow Y$ *tal que* $B \in \mathcal{S}$ *implica* $T^{-1}(B) \in \mathcal{O}$. *Se existe uma álgebra* $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ *que gera* $\mathcal{S}$ *tal que* $\mu(T^{-1}(B)) = \nu(B)$, *para todo* $B \in \mathcal{S}_0$, *então* $T : X \longrightarrow Y$ *preserva medida.*

Demonstração:

Seja $\nu_0 : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ a medida definida como:

$$\nu_0(B) = \mu(T^{-1}(B)).$$

Se mostrarmos que $\nu_0 = \nu$, então a proposição estará provada. Ora, $\nu_0 \mid \mathcal{S}_0 = \nu \mid \mathcal{S}_0$; logo, ν_0 é uma extensão a $\mathcal{S}$ de $\nu \mid \mathcal{S}_0$. Pelo Teorema 1.1, página 13, tal extensão é única e, portanto, $\nu_0 = \nu$. □

Seja X uma espaço métrico compacto e $\mathcal{O}$ sua σ-álgebra de Borel. Denotemos por $\mathcal{M}(X)$ o conjunto das probabilidades $\mu : \mathcal{O} \longrightarrow [0,1]$. Se $T : X \longrightarrow X$ é uma aplicação contínua, seja $\mathcal{M}_T(X)$ o conjunto das probabilidades que são invariantes sob T.

O restante desta seção será dedicado a mostrar que as medidas invariantes existem de fato. Para isto, são necessários alguns conceitos e resultados preliminares.

Em primeiro lugar, vamos introduzir em $\mathcal{M}(X)$ a topologia definida pelas vizinhanças básicas

$$V_{\varphi,\epsilon} = \{\nu \in \mathcal{M}(X); \left|\int_X \varphi d\nu - \int_X \varphi d\mu\right| \leq \epsilon\}$$

onde $\epsilon > 0$ e $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Consideremos $\mathcal{C}^0(X)$ o espaço vetorial das funções contínuas $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dotado com a norma

$$\|f\|_0 = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Uma vez que X é um espaço métrico compacto, existe um subconjunto enumerável $\{g\}_{i>0}$ de $\mathcal{C}^0(X)$ denso na bola unitária $B = \{f \in \mathcal{C}^0(X); \|f\|_0 \leq 1\}$. Vamos considerar em $\mathcal{M}(X)$ a métrica

$$d(\mu,\nu) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \left|\int_X g_j d\mu - \int_X g_j d\nu\right|.$$

Lema 2.1 *Seja (μ_n) uma sequência de pontos de $\mathcal{M}(X)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) $\lim_{n\to+\infty} d(\mu_n,\mu) = 0.$

b) $\lim_{n\to+\infty} \int_X g_j d\mu_n = \int_X g_j d\mu$ *para todo* $j \geq 1.$

c) $\lim_{n\to+\infty}\int_X g d\mu_n = \int_X g d\mu$ *para todo* $g \in \mathcal{C}^0(X)$.

Lema 2.2 *O conjunto* $\mathcal{M}(X)$ *é um espaço métrico compacto.*

As demonstrações de ambos os lemas podem ser encontradas na referência bibliográfica [8].

Proposição 2.2 *O conjunto* $\mathcal{M}_T(X)$ *é não vazio.*

Demonstração:

Dada uma aplicação $T : X \longrightarrow X$, definamos uma aplicação $T^* : \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{M}(X)$ por $(T^*\mu)(A) = \mu(T^{-1}(A))$, para todo conjunto boreliano $A \subset X$. Esta aplicação é contínua. A proposição estará provada se obtivermos $\mu \in \mathcal{M}(X)$ tal que $T^*\mu = \mu$. Tomemos qualquer $\mu_0 \in \mathcal{M}(X)$ e consideremos a sequência

$$\mu_n = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}(T^*)^m\mu_0.$$

Como $\mathcal{M}(X)$ é compacto, podemos obter uma subsequência $(\mu_{n_j})_{j\geq 1}$ convergindo, digamos, para μ. Então

$$\begin{aligned} T^*\mu_{n_j} &= \frac{1}{n_j+1}\sum_{m=0}^{n_j}(T^*)^{m+1}\mu_0 = \\ &= \frac{1}{n_j+1}\sum_{m=0}^{n_j}(T^*)^m\mu_0 - \frac{1}{n_j+1}\mu_0 + \frac{1}{n_j+1}(T^*)^{n_j+1}\mu_0. \end{aligned}$$

Temos $\lim_{n_j\to+\infty}\frac{1}{n_j+1}\mu_0 = 0$ e $\lim_{n_j\to+\infty}\frac{1}{n_j+1}(T^*)^{n_j+1}\mu_0 = 0$. Enquanto que o primeiro limite é claro, o segundo decorre do seguinte fato:

$$0 \leq \frac{1}{n_j}(T^*)^{n_j}\mu(E) = \frac{1}{n_j}\mu(T^{-n_j}(E)) \leq \frac{1}{n_j}.$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} T^*\mu = T^*(\lim_{n_j\to+\infty}\mu_{n_j}) &= \lim_{n_j\to+\infty}T^*\mu_{n_j} = \\ &= \lim_{n_j\to+\infty}\frac{1}{n_j+1}\sum_{m=0}^{n_j}(T^*)^m\mu_0 = \lim_{j\to+\infty}\mu_{n_j} = \mu, \end{aligned}$$

ou seja, a medida μ é invariante por T. $\square$

2.2 Teorema de Recorrência de Poincaré

Diz-se que um ponto $x \in X$, onde X é um espaço métrico ou topológico, é **recorrente** quando sua trajetória pelo sistema dinâmico $f : X \longrightarrow X$ volta arbitrariamente perto de x à medida que o tempo avança. Falando de modo mais preciso, um ponto $x \in X$ é recorrente para uma transformação $f : X \longrightarrow X$ se, dada qualquer vizinhança V de x, existe algum iterado $f^n(x)$ que está em V.

Inicialmente, apresentamos uma versão mensurável do Teorema de Poincaré, a qual não faz referência à topologia de X.

Teorema 2.1 *Seja $f : X \longrightarrow X$ uma aplicação mensurável, μ uma medida invariante finita e $E \subset X$ qualquer conjunto mensurável com $\mu(E) > 0$. Então μ-quase todo ponto $x \in X$ tem algum iterado $f^n(x)$, $n \geq 1$, que também está em E.*

Demonstração: Seja $E^0 = \{x \in E; f^n(x) \notin E,\ \forall n > 0\}$. Provemos que E^0 tem medida nula. Antes, porém, afirmamos que as pré-imagens $f^{-n}(E^0)$ são duas a duas disjuntas. Com efeito, suponhamos que existam $m, n \geq 1$ tais que $f^{-m}(E^0) \cap f^{-n}(E^0) \neq \emptyset$.

Seja $x \in f^{-m}(E^0) \cap f^{-n}(E^0)$ e consideremos $y = f^n(x)$. Logo, $y \in E^0$ e $f^{m-n}(y) = f^m(x) \in E^0$, o qual está contido em E. Ora, isto significa que y volta pelo menos uma vez a E, o que contraria a definição de E^0. Portanto, as pré-imagens de E^0 são duas a duas disjuntas. Isto, por sua vez, implica que

$$\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(E^0)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(f^{-n}(E^0)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E^0),$$

onde na última igualdade empregamos a hipótese que μ é invariante. Uma vez que a medida é finita, temos $\mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(E^0)) < +\infty$. Assim, $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(E^0 < +\infty$. Mas isto é possível apenas se cada parcela for nula. Portanto, $\mu(E^0) = 0$. $\square$

Observação 2.1 *O Teorema 2.1 garante que quase todo ponto de E regressa a E no futuro.*

Corolário 2.1 *Ainda nas condições do Teorema 2.1, para μ-quase todo ponto $x \in E$ existem infinitos valores de $n \geq 1$ tais que $f^n(x)$ está em E.*

Demonstração: Para cada valor $k \geq 1$, seja E_k o conjunto dos pontos $x \in E$ que regressam a E exatamente k vezes, isto é, existem exatamente k valores de $n \geq 1$ tais que $f^n(x) \in E$. Notemos que o conjunto dos pontos que regressam a E somente um número finito de vezes é

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Como consequência, para provar o corolário, basta mostrar que $\mu(E_k) = 0$, para todo $k \geq 1$. Faremos isto por contradição.

Vamos supor que exista um $k \geq 1$ para o qual $\mu(E_k) > 0$. Logo, aplicando o Teorema 2.1, com E_k no lugar de E, resulta que quase todo ponto $x \in E_k$ possui algum iterado $f^n(x)$ que está em E_k. Fixemos um tal x e seja $y = f^n(x)$. Pela definição de E_k, y tem exatamente k iterados futuros que estão em E_k. Mas pelo fato de y ser um iterado de x, resulta que x tem $k+1$ iterados futuros em E_k, o que contradiz $x \in E_k$. Por conseguinte, E_k tem medida nula, relativamente a μ, o que conclui a demonstração. $\square$

Na sequência, vamos provar a versão topológica do teorema de recorrência, em cuja formulação suporemos que o espaço topológico X possui base enumerável de abertos, isto é, uma família $\{U_k; k \in \mathbb{N}\}$ de abertos de X tal que todo aberto de X pode ser escrito como uma reunião de elementos dessa família.

Teorema 2.2 *Seja X um espaço topológico que admite uma base enumerável de abertos, $f : X \longrightarrow X$ uma aplicação mensurável e μ uma medida invariante finita. Então, μ-quase todo ponto $x \in X$ é recorrente para f.*

Demonstração: Para cada k, U_k^0 denota o conjunto dos pontos $x \in U_k$ que nunca regressam a U_k. Pelo Teorema 2.1, para todo k, U_k^0 tem medida nula. Por conseguinte, a união enumerável

$$\widetilde{U} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k^0$$

tem medida nula. Portanto, basta provar que todo ponto x que não pertence a $\widetilde{U}$ é recorrente.

Seja $x \in X \setminus \widetilde{U}$ e U uma vizinhança qualquer de x. Pela definição de base, existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_k$ e $U_k \subset U$. Uma vez que $x \notin \widetilde{U}$, resulta que $x \notin U_k^0$. Isto quer dizer que x possui algum iterado $f^n(x)$, $n \geq 1$, que está em U_k. Então, segue que $f^n(x)$ também pertence a U. Lembrando que a vizinhança U é arbitrária, resulta que x é um ponto recorrente. $\square$

2.3 Teorema Ergódico de Birkhoff

Dado $x \in X$ e $E \subset X$ um conjunto mensurável, seja

$$\tau_n(E,x) = \frac{1}{n}\sharp\{j \in \{0,1,...,n-1\};\ f^j(x) \in E\}.$$

Notemos que isto é o mesmo que

$$\tau_n(E,x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\chi_E(f^j(x)),$$

onde χ_E denota a função característica do conjunto E.

Definimos o **tempo médio de permanência** da órbita de x em E por

$$\tau(E,x) = \lim_{n\to+\infty}\tau_n(E,x).$$

Observação 2.2 *Tal limite pode não existir. No entanto, o teorema seguinte, conhecido como teorema ergódico, fornece as condições em que este limite existe.*

Teorema 2.3 *Seja $f : X \longrightarrow X$ uma transformação mensurável e μ uma probabilidade invariante por f. Para qualquer conjunto mensurável $E \subset X$, o tempo médio de permanência $\tau(E,x)$ existe em μ-quase todo ponto $x \in X$. Além disso,*

$$\int \tau(E,x)d\mu(x) = \mu(E).$$

Observação 2.3 *Se para um certo ponto $x \in X$ existe $\tau(E,x)$, então $\tau(E,x) = \tau(E,f(x))$.*

De fato, pela definição,

$$\begin{aligned}\tau(E,f(x)) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\chi_E(f^j(x)) = \\ &= \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\chi_E(f^j(x)) - \frac{1}{n}[\chi_E(x) - \chi_E(f^n(x))]\Big) = \\ &= \tau(E,x) - \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}[\chi_E(x) - \chi_E(f^n(x))]).\end{aligned}$$

Notando que a função característica é limitada, o último limite é igual a zero.

Existe uma versão mais geral do teorema ergódico, cuja demonstração pode ser vista em [9].

Teorema 2.4 *Seja $f : X \longrightarrow X$ uma transformação mensurável, μ uma probabilidade invariante por f e $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável qualquer. Então o limite*

$$\widetilde{\varphi}(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$$

existe em μ-quase todo ponto $x \in X$. Além disso,

$$\int \widetilde{\varphi}(x) d\mu(x) = \int \varphi(x) d\mu(x).$$

Notemos que o Teorema 2.3 é o caso particular em que φ é a função característica χ_E do conjunto E.

Observação 2.4 *Dada qualquer função intergrável φ, a média temporal $\widetilde{\varphi}$ satisfaz $\widetilde{\varphi} \circ f = \widetilde{\varphi}$ em μ-quase todo ponto.*

De fato, para μ-quase todo ponto x,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}(f(x)) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^{j+1}(x)) = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^{j+1}(x)) - \frac{1}{n}\varphi(x) + \frac{1}{n}\varphi(x) \right] = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} \varphi(f^{j}(x)) - \frac{1}{n}\varphi(x) \right] = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} . \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \varphi(f^{j}(x)) - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\varphi(x) = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \varphi(f^{j}(x)) = \widetilde{\varphi}(x).
\end{aligned}$$

Observação 2.5 *Pela Proposição* 2.5 *da página* 133 *do livro de Ricardo Mañé (Referência bibliográfica [8]), T é ergódica se e só se $\tau(x, A) = \mu(A)$ q.t.p para todo $A \in \mathcal{A}$.*

2.4 Ergodicidade

Definição 2.2 *Diz-se que uma transformação $f : X \longrightarrow X$ é* **ergódica** *para uma probabilidade invariante μ (costuma-se dizer ainda que a medida μ é ergódica para f, ou que (f, μ) é ergódica) se as médias temporais dadas pelo Teorema 2.4 coincidem em quase todo ponto com as respectivas médias espaciais*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu,$$

para qualquer função integrável com relação a μ, $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e para μ-quase todo $x \in X$.

Definição 2.3 *Um conjunto mensurável $A \subset X$ é invariante se $f^{-1}(A) = A$.*

Definição 2.4 *Uma função mensurável $\psi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é invariante se $\psi \circ f = \psi$.*

A proposição abaixo fornece condições equivalentes àquela dada na definição de ergodicidade.

Proposição 2.3 *Seja $f : X \longrightarrow X$ uma transformação mensurável e μ uma probabilidade invariante por f. São equivalentes:*

1. *O sistema (f, μ) é ergódico.*

2. *Para qualquer subconjunto invariante A, tem-se $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.*

3. *Qualquer função invariante ψ é constante num conjunto de medida total.*

Demonstração: 1. $\Longrightarrow$ 2. Considere $\varphi = \chi_A$. A hipótese 1) significa por um lado que

$$\widetilde{\varphi}(x) = \int \varphi d\mu = \mu(A)$$

para quase todo $x \in X$. E como A é invariante, tem-se, por outro lado, que $x \in A$ se, e somente se, $f(x) \in A$. Isto acarreta $\varphi(f^j(x)) = \varphi(x)$ para todo $j \geq 0$ e para todo x. Logo,

$$\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x) = \chi_A(x)$$

para todo $x \in X$. Visto que a função característica só assume os valores 0 e 1, estas igualdades implicam $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

2. $\Longrightarrow$ 3. Seja ψ uma função invariante qualquer. Podemos supor ψ tomando valores reais, pois se tomasse valores complexos, poderíamos considerar as partes real e imaginária separadamente. Para $k \in \mathbb{Z}$ e $n > 0$, seja

$$X(k,n) = \left\{ x \in X : \frac{k}{2^n} \leq \psi(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\} = \psi^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right) \right).$$

Para qualquer intervalo $I \subset \mathbb{R}$, $\psi^{-1}(I)$ é um conjunto invariante, pois

$$\begin{aligned} \psi \;\; \textit{invariante} &\Rightarrow \psi \circ f = \psi \Rightarrow (\psi \circ f)^{-1} = \psi^{-1} \Rightarrow f^{-1} \circ \psi^{-1} = \psi^{-1} \\ &\Rightarrow f^{-1}(\psi^{-1}(I)) = \psi^{-1}(I). \end{aligned}$$

Logo, decorre da hipótese 2) que $\psi^{-1}(I)$ possui medida zero ou um. Em particular, $\mu\left(\psi^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right)\right) = 0$ ou $\mu\left(\psi^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right)\right) = 1$.

Para cada n fixo, $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} X(k,n) = X$ é uma união disjunta e, portanto, existe um único k_n com $\mu(X(k_n,n)) = 1$. Seja $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} X(k_n,n)$. Então $\mu(Y) = 1$ e ψ é constante num conjunto com probabilidade μ total.

3. $\Longrightarrow$ 1. Seja φ uma função integrável qualquer. Pela Observação 2.4, página 26, a média temporal $\widetilde{\varphi}$ é uma função invariante. Segue pela hipótese 3) que $\widetilde{\varphi}$ é constante em quase todo ponto. Então, pelo Teorema 2.4,

$$\widetilde{\varphi}(x) = \int \widetilde{\varphi} d\mu = \int \varphi d\mu$$

em quase todo ponto, ou seja, o sistema é ergódico. $\square$

Observação 2.6 *A pergunta que pode surgir neste momento é se uma medida ergódica realmente existe. Quando X é um espaço métrico compacto, $T : X \to X$ uma aplicação mensurável e $\mathcal{M}_T(X) \neq \emptyset$ a resposta é afirmativa como se pode constatar no parágrafo* 6 *do Capítulo II do livro de Ricardo Mañé (Referência bibliográfica [8]).*

Finalizamos a seção com um critério que nos permite verificar quando um conjunto $A \subset X$, onde X é um espaço métrico compacto, possui probabilidade total.

Proposição 2.4 *Seja X um espaço métrico compacto e $T : X \to X$ uma transformação mensurável. Então um conjunto $A \subset X$ é de probabilidade total se $\mu(A) = 1$ para toda $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$ ergódica.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrada na página 170 do livro de Ricardo Mañé (Referência bibliográfica [8]).

Capítulo 3

Teorema de Oseledets

3.1 Expoentes de Lyapounov

Seja p um ponto fixo de um difeomorfismo $f : A \longrightarrow A$, onde A é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^d$. Desejamos saber o comportamento de f^n, $n \in \mathbb{Z}$, em uma vizinhança de p. Para isto, consideremos a derivada de f em p, $Df_p : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$.

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r, \alpha_{r+1}, \tilde{\alpha}_{r+1}, ..., \alpha_s, \tilde{\alpha}_s$ todas as raízes distintas do polinômio característico de Df_p. Nesta sequência, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ representam todas as raízes reais e $\alpha_j, \tilde{\alpha}_j$, $r + 1 \leq j \leq s$, todos os pares conjugados de raízes complexas. Além disso, cada $\tilde{m}_j$, $1 \leq j \leq s$ denotará as respectivas multiplicidades. Pelo Teorema de Jordan (forma canônica real), as raízes, as quais são autovalores de Df_p, estão associadas a autoespaços generalizados $\widetilde{E}_j$, invariantes por Df_p, $1 \leq j \leq s$, cujas dimensões respectivas são iguais a $\tilde{m}_j$, para $1 \leq j \leq r$ e $2\tilde{m}_j$ para $r < j \leq s$ (no último caso, o espaço $\widetilde{E}_j$ está associado ao par $\alpha_j, \tilde{\alpha}_j$). Além disso, $\mathbb{R}^d = \bigoplus_{j=1}^{s} \widetilde{E}_j$. Observemos que como f é um difeomorfismo, temos $\det Df_p \neq 0$ e, assim, $\alpha_j \neq 0$, para todo j (se existisse j_0 tal que $\alpha_{j_0} = 0$, então $\det[Df_p - \alpha_{j_0} I] = 0$, donde $\det Df_p = 0$, o que é absurdo!).

Se v_i é um autovetor de $\widetilde{E}_j$, então $Df_p^n v_i = \alpha_i^n v_i$; logo,

$$\log \|Df_p^n v_i\| = n \log |\alpha_i| + \log \|v_i\|,$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Para qualquer $\vec{0} \neq v_i \in \widetilde{E}_i$ vale

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|Df_p^n v_i\| = \log |\alpha_i|. \tag{3.1}$$

Verifiquemos esta última afirmação supondo $\dim \widetilde{E}_i = 2$. Temos dois casos para considerar:

Primeiro: α_i é uma raiz real com multiplicidade 2. Então Df restrita a $\widetilde{E}_i$ é dada por uma matriz de Jordan $J = \begin{pmatrix} \alpha_i & 1 \\ 0 & \alpha_i \end{pmatrix}$. Por indução, mostra-se que $J^n = \begin{pmatrix} \alpha_i^n & n\alpha_i^{n-1} \\ 0 & \alpha_i^n \end{pmatrix}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e, a partir disto, conclui-se que $J^n = \begin{pmatrix} \alpha_i^n & n\alpha_i^{n-1} \\ 0 & \alpha_i^n \end{pmatrix}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Então,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|Df_p^n v_i\| &= \lim_{n\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|J_p^n v_i\| = \lim_{n\pm\infty} \frac{1}{n} \log \left\| \alpha_i^n \begin{pmatrix} 1 & n\alpha_i^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_i \right\| \\
&= \lim_{n\pm\infty} \frac{1}{n} \log |\alpha_i^n| \left\| \begin{pmatrix} 1 & n\alpha_i^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_i \right\| \\
&= \lim_{n\pm\infty} \frac{1}{n} \log |\alpha_i^n| + \lim_{n\pm\infty} \frac{1}{n} \left\| \begin{pmatrix} 1 & n\alpha_i^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_i \right\| \\
&= \lim_{n\pm\infty} \frac{1}{n} \log |\alpha_i|^n = \log |\alpha_i|.
\end{aligned}$$

Segundo: $\alpha_j = a + bi$, $b \neq 0$ (raiz complexa). Neste caso, a forma canônica de Jordan correspondente é $J = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Então, considerando-se a forma polar de α_j, mostra-se que $J^n = |\alpha_j|^n \begin{pmatrix} \cos n\phi & \sin n\phi \\ -\sin n\phi & \cos n\phi \end{pmatrix}$, para algum $\phi \in [0, 2\pi)$ e $n \in \mathbb{Z}$, donde

$$\begin{aligned}
\lim_{n\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|Df_p^n v_j\| &= \lim_{n\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|J_p^n v_j\| = \lim_{n\pm\infty} \frac{1}{n} \log |\alpha_j^n| \left\| \begin{pmatrix} \cos n\phi & \sin n\phi \\ -\sin n\phi & \cos n\phi \end{pmatrix} v_j \right\| \\
&= \log |\alpha_j|.
\end{aligned}$$

Isto justifica a afirmação feita acima para o caso em que $\dim \widetilde{E}_i = 2$. $\square$

A equação (3.1) sugere que devemos estudar os logaritmos dos módulos dos autovalores,

$$\lambda_i = \log |\alpha_i|$$

os quais são denominados **expoentes de Lyapounov** da aplicação f no ponto fixo p. Notemos que autovalores distintos $\alpha_i \neq \alpha_j$ correspondem ao mesmo expoente de Lyapounov se $|\alpha_i| = |\alpha_j|$. Neste caso, cada vetor não nulo da soma direta dos subespaços correspondentes $\widetilde{E}_i \bigoplus \widetilde{E}_j$ satisfaz (3.1).

Deste modo, temos uma decomposição de $\mathbb{R}^d$ como uma soma direta de subespaços $\widetilde{E}_1 \oplus ... \oplus \widetilde{E}_{m(p)}$ tais que se $\vec{0} \neq v_i \in E_i$, então

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|Df_p^n v_i\| = \lambda_i(p),$$

onde $\lambda_i(p)$ é o expoente de Lyapounov associado a E_i.

E se, além disso, suponhamos que todos os expoentes de Lyapounov no ponto fixo p são não nulos (diz-se neste caso que p é **hiperbólico**), podemos somar todos os subespaços com expoentes de Lyapounov negativos e todos os subespaços com expoentes de Lyapounov positivos para obter, respectivamente, subespaçoes E^s e E^u, tais que

i) $\mathbb{R}^d = E^s \oplus E^u$,

ii) $Df_p(E^s) = E^s$ e $Df_p(E^u) = E^u$.

O assunto exposto nos parágrafos anteriores pode ser estendido para qualquer difeomorfismo $f : A \longrightarrow A$, de um subconjunto aberto $A \subset M$ de uma variedade riemanniana M. Uma estrutura riemanniana em M é necessária para que a norma $\|.\|$ esteja bem definida.

Observação 3.1 *1. Se o ponto p é periódico com período k, podemos adaptar tudo o que foi descrito acima à aplicação $f^k : A \longrightarrow A$.*

2. Quando p não é um ponto periódico, pode-se ainda definir os expoentes de Lyapounov para este ponto de um modo semelhante:

Definição 3.1 *Seja f^n uma aplicação diferenciável em um ponto p da variedade riemanniana M, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Suponhamos que o espaço tangente T_pM é uma soma direta de subespaços $\widetilde{E}_1 \oplus ... \oplus \widetilde{E}_{m(p)}$ tais que se $\vec{0} \neq v_i \in E_i$, então*

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|Df_p^n v_i\| = \lambda_i(p) \tag{3.2}$$

Os valores $\lambda_i(p)$ são denominados **expoentes de Lyapounov** *no ponto p, cujas multiplicidades são* $\dim E_i$.

Observação 3.2

1. *Notemos que a existência do limite (3.2) não está garantida para qualquer ponto $p \in A$.*

2. *Se um ponto $p \in A$ tem expoentes de Lyapounov e nenhum deles é nulo, diz-se que p é um* **ponto hiperbólico**. *Para um ponto hiperbólico $p \in M$, tem-se $T_pM = E^s \oplus E^u$, onde*

$$E_p^s = \bigoplus_{\lambda_i(p)<0} E_i \quad e \quad E_p^u = \bigoplus_{\lambda_i(p)>0} E_i$$

3.2 Pontos Regulares. O Teorema de Oseledets

Definição 3.2 *Seja M uma variedade riemanniana compacta de dimensão finita e $f : M \longrightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^1. Diz-se que um ponto $p \in M$ é* **regular** *de f se existem números reais $\lambda_1 > ... > \lambda_l$ e uma decomposição $T_pM = E_1(p) \oplus ... \oplus E_l(p)$ do espaço tangente a M em p tais que*

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|Df_p^n u\| = \lambda_j(p)$$

para todo $u \in E_j(p) \setminus \{0\}$ e $1 \leq j \leq l$.

Observe que qualquer vetor não nulo u de T_pM pode ser escrito como $u = \sum_{i=1}^{l} u_i$, com $u_i \in E_i(p)$. Logo,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|Df_p^n u\| = \lambda_j(p)$$

onde j é dado por

$$j = \inf\{1 \leq i \leq l; u_i \neq 0\}.$$

De modo semelhante,

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{1}{n}\log\|Df_p^n u\| = \lambda_k(p)$$

onde k é dado por

$$k = \sup\{1 \le i \le l; u_i \ne 0\}.$$

Assim,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|Df_p^n u\| = \lim_{n\to-\infty}\frac{1}{n}\log\|Df_p^n u\|$$

se, e somente se, $j = k$, isto é, se e só se, u pertence a algum dos espaços $E_i(p)$, $1 \le i \le l$. Vejamos que isto acarreta a unicidade da decomposição de T_pM e dos números $\lambda_j(p)$. Suponhamos que exista uma outra decomposição $T_pM = \widetilde{E}_1(p) \oplus ... \oplus \widetilde{E}_m(p)$. Seja $u_j \in E_j(p) \setminus \{0\}$. Então, $u_j = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \widetilde{v}_i$, com $\widetilde{v}_i \in \widetilde{E}_i(p)$. Assim,

$$\lambda_j(p) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|Df_p^n u_j\| = \widetilde{\lambda}_{k_+}(p)$$

onde $k_+ = \inf\{1 \le i \le m; \widetilde{v}_i \ne 0\}$ e

$$\lambda_j(p) = \lim_{n\to-\infty}\frac{1}{n}\log\|Df_p^n u_j\| = \widetilde{\lambda}_{k_-}(p)$$

onde $k_+ = \sup\{1 \le i \le m; \widetilde{v}_i \ne 0\}$. Portanto, $\widetilde{\lambda}_{k_+}(p) = \widetilde{\lambda}_{k_-}(p)$ e, assim, $k = k_+ = k_-$. Logo, $u_j \in \widetilde{E}_k(p) \setminus \{0\}$ e $E_j(p) \subset \widetilde{E}_k(p)$. Analogamente, obtemos $\widetilde{E}_k(p) \subset E_j(p)$.

Como T_pM tem dimensão finita, concluímos que $l = m$. Da ordenação dos λ_i e $\widetilde{\lambda}_k$, segue que $\lambda_i = \widetilde{\lambda}_i$ e $E_i(p) = \widetilde{E}_i(p)$, para todo $1 \le i \le l$.

Os números $\lambda_i(p)$ e os espaços $E_i(p)$ são chamados respectivamente **expoentes de Lyapounov** e **espaços próprios** de f no ponto regular p.

Vamos denotar por $R(f)$ o conjunto dos pontos regulares de f. Vale $f(R(f)) = R(f)$, com $\lambda_j(f(x)) = \lambda_j(x)$ e $Df(x)E_j(x) = E_j(f(x))$, para todo j e todo $x \in R(f)$.

Justificativa: Provemos que $f(R(f)) \subset R(f)$. Seja $y \in f(R(f))$. Logo, existe um ponto regular de f, digamos x, tal que $y = f(x)$. Se provarmos que $\lambda_j(x) = \lambda_j(f(x))$ e que $T_{f(x)}M = \bigoplus_{j=1}^{l} E_j(f(x))$, então teremos $f(x)$ um valor regular de f, isto é, $y \in R(f)$. Inicialmente, observemos que pelo fato de a aplicação f ser um difeomorfismo, dado

$v \in E_j(f(x)) \setminus \{0\}$, existe $u \in E_j(x) \setminus \{0\}$ tal que $Df(x)u = v$. Logo,

$$\begin{aligned}
\lambda_j(x) &= \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n+1} \log \|Df^{n+1}(x)u\| = \\
&= \lim_{n\to\pm\infty} \frac{n}{n+1}\frac{1}{n} \log \|Df^{n}(f(x))Df(x)u\| = \\
&= \lim_{n\to\pm\infty} \frac{n}{n+1} \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^{n}(f(x))v\| = \\
&= \lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^{n}(f(x))v\| = \lambda_j(f(x)).
\end{aligned}$$

Portanto, $\lambda_j(x) = \lambda_j(f(x))$. Além disso, temos $Df(x) : T_xM \longrightarrow T_{f(x)}M$. Como x é um valor regular, o espaço tangente a M em x admite uma decomposição $T_xM = E_1(x) \oplus ... \oplus E_l(x)$ e, uma vez que $Df(x)$ é uma transformação linear, segue que $T_{f(x)}M = Df(x)T_xM = \bigoplus_{j=1}^{l} Df(x)E_j(x)$. Afirmamos que $E_j(f(x)) = Df(x)E_j(x)$, para cada j. Com efeito, dado $u \in E_j(x) \setminus \{0\}$ tem-se $Df(x)u \in E_j(f(x))$. Logo, $Df(x)E_j(x) \subset E_j(f(x))$. Por outro lado, dado $v \in E_j(f(x)) \setminus \{0\}$, como Df é um isomorfismo, existe $u \in E_j(x) \setminus \{0\}$ tal que $v = Df(x)u$. Assim, $E_j(f(x)) \subset Df(x)E_j(x)$.

Falta provar a inclusão contrária. Seja $x \in R(f)$. Se provarmos que $f^{-1}(x)$ também está em $R(f)$ então resultará que $x \in f(R(f))$. Observando que $\lambda_j(f^{-1}(x)) = \lambda_j(x)$ e que $Df^{-1}(x)E_j(x) = E_j(f^{-1}(x))$, para cada $j = 1, \ldots, l$, a afirmação segue. □

Do ponto de vista topológico, o conjunto $R(f)$ pode ser um subconjunto “pequeno”de M, podendo constituir um conjunto magro (primeira categoria de Baire) e até mesmo finito. No entanto, do ponto de vista da Teoria da Medida a situação é diferente, conforme afirma o resultado abaixo.

Antes, contudo, apresentamos um exemplo, retirado da referência bibliográfica [2], em que os expoentes de Lyapounov existem em apenas dois pontos fixos de um difeomorfismo em S^1.

Exemplo 3.1 *Seja $f : S^1 \to S^1$ o difeomorfismo do círculo dado por $f(x) = x + \frac{1}{3\pi}\sin(2\pi x)$, onde $0 \leq x < 1$ é a coordenada cíclica em S^1. Tem-se dois pontos fixos, $x_0 = 0$ e $x_1 = \frac{1}{2}$, cujos expoentes de Lyapounov são respectivamente:*

$$\lambda(x_0) = \log f'(x_0) = \log(\frac{5}{3}) > 0 \text{ e } \lambda(x_1) = \log f'(x_1) = \log(\frac{1}{3}) < 0.$$

Como $\lambda(x_0) > 0$, o ponto x_0 é instável (um repulsor), enquanto que x_1 é um ponto estável (um atrator). Para qualquer ponto $p \in (0, \frac{1}{2})$ temos $f^n(p) \to \frac{1}{2}$ e $f^{-n}(p) \to 0$ quando $n \to +\infty$. Logo, pela regra da cadeia, para qualquer vetor não nulo $v \in T_p(S^1)$ temos

$$\log(\frac{5}{3}) = \lim_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log \|(f^n)'(p)v\| \neq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|(f^n)'(p)v\| = \log(\frac{1}{3}) < 0.$$

Isto mostra que não existe o expoente de Lyapounov para qualquer ponto $p \in (0, \frac{1}{2})$. Do mesmo modo, vê-se que não existe expoente de Lyapounov para qualquer $p \in (\frac{1}{2}, 1)$. □

Teorema 3.1 (Oseledets) *Se M é uma variedade riemanniana compacta de dimensão finita, então o conjunto dos pontos regulares de um difeomorfismo de classe C^1, $f : M \longrightarrow M$, tem probabilidade total para cada medida de probabilidade boreliana em M invariante por f.*

Obteremos a prova deste teorema a partir de um resultado mais geral, enunciado na sequência. Antes, porém, estabeleçamos algumas notações. Seja M um espaço métrico compacto, $f : M \longrightarrow M$ um homeomorfismo, F um fibrado vetorial de dimensão finita sobre M dotado com uma métrica riemanniana contínua, $\pi : F \longrightarrow M$ a projeção e $L : F \longrightarrow F$ um isomorfismo de fibrados vetoriais contínuos cobrindo F (isto é, $\pi \circ L = f \circ \pi$), tal que ambos L e L^{-1} tenham normas limitadas. Denotemos por L_n o n-ésimo iterado de L:

$$L_n(x) = L(f^{n-1}(x)) \circ \cdots \circ L(f(x)) \circ L(x) \quad se \quad n > 0$$
$$L_{-n}(x) = L^{-1}(f^{-n+1}(x)) \circ \cdots \circ L^{-1}(f^{-1}(x)) \circ L^{-1}(x).$$

Agora, para $n_1, \cdots, n_l \geq 1$, definamos $\Lambda(n_1, \cdots, n_l)$ como o conjunto dos pontos $x \in M$ tais que a fibra F_x de F sobre x admite uma decomposição $F_x = E_1 \oplus \cdots \oplus E_l$ tal que $\dim E_j = n_j$, para $1 \leq j \leq l$ e existem números reais $\lambda_1 > \cdots > \lambda_l$ satisfazendo

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_j$$

para todo $u \in E_j \setminus \{0\}$ e $1 \leq j \leq l$. Diz-se, neste caso, que x é um **ponto regular** de L.

Teorema 3.2 a) *O conjunto $\Lambda(n_1, \cdots, n_l)$ é um subconjunto mensurável de M, para todo $n_1, \cdots, n_l \geq 1$. Além disso, para cada $1 \leq j \leq l$, E_j é um subfibrado mensurável da restrição de F a $\Lambda(n_1, \cdots, n_l)$ e a aplicação $\Lambda(n_1, \cdots, n_l) \ni x \longmapsto \lambda_j(x)$ é mensurável.*

b) *O conjunto dos pontos regulares de L, dado por $R(L) = \bigcup_{n_1, \cdots, n_l} \Lambda(n_1, \cdots, n_l)$ tem probabilidade total em M, para toda medida de probabilidade boreliana em M, invariante por f.*

Afirmamos que o Teorema 3.1 decorre do Teorema 3.2. De fato, seja F o fibrado tangente de M e $L = Df$, a derivada de f. Como f é um difeomorfismo de classe C^1, Df é um isomorfismo contínuo. Logo, pela parte *b*) do Teorema 3.2, o conjunto dos pontos regulares de Df, $R(Df)$, tem probabilidade total em M. Ora, se $x \in M$ é um ponto regular de Df, então x também é um ponto regular de f. Com efeito, notemos que $F_x = T_xM$, ou seja, a fibra de F sobre x é o espaço tangente a M em x; logo, se x é um ponto regular de Df então T_xM admite uma decomposição $T_xM = E_1 \oplus \cdots \oplus E_l$ tal que $\dim E_j = n_j$, para $1 \leq j \leq l$ e existem números reais $\lambda_1 > \cdots > \lambda_l$ satisfazendo

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(x)u\| = \lambda_j$$

para todo $u \in E_j \setminus \{0\}$ e $1 \leq j \leq l$, donde concluímos que x é um ponto regular de f, como havíamos afirmado. Por outro lado, se x é um ponto regular de f, segue imediatamente que também é um ponto regular de Df. Portanto, $R(f) = R(Df)$ e, consequentemente, $R(f)$ tem probabilidade total em M.

As seções que seguem têm como objetivo demonstrar o Teorema 3.2.

3.3 Crescimento Subexponencial

Definição 3.3 *Seja $f : M \to M$ uma aplicação e μ uma medida de probabilidade invariante por f. Diz-se que uma função $C : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tem* **crescimento subexponencial** *para uma medida μ em M se*

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log(C \circ f^n) = 0, \quad \mu - q.t.p.$$

Conforme veremos nesta seção, algumas funções relacionadas com os iterados de L e que desempenham papel fundamental na demonstração do Teorema 3.2 têm crescimento subexponencial para toda medida de probabilidade invariante por f.

Seja μ uma medida de probabilidade invariante por f, E um subfibrado mensurável de F invariante por L e $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| \leq \lambda$$

para todo $u \in E_x \setminus \{0\}$ e μ-quase todo ponto $x \in M$. Aqui, convém observar que tal λ sempre existe, pois supomos $\|L\|$ limitada. Dado $\epsilon > 0$, definamos

$$C_\epsilon(x) = \sup \left\{ \frac{\|L_n(x)u\|}{\exp(n(\lambda + \epsilon))\|u\|};\ n \geq 0 \ e\ u \in E_x \setminus \{0\} \right\}.$$

Proposição 3.1 *A função C_ϵ tem crescimento subexponencial para a medida μ.*

Para demonstrar esta proposição, usaremos o seguinte critério para crescimento subexponencial.

Lema 3.1 *Seja $f : M \longrightarrow M$ uma aplicação mensurável, μ uma medida de probabilidade em M invariante por f e $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável tal que $\varphi \circ f - \varphi$ é integrável. Então $\frac{1}{n}(\varphi \circ f^n) \to 0$ μ-quase toda parte quando $n \to +\infty$.*

Demonstração: Aplicando o Teorema Ergódico de Birkhoff à função $\varphi \circ f - \varphi$, segue que a sequência $\frac{1}{n}(\varphi \circ f^n)$ converge em quase toda parte para alguma função mensurável ψ. De fato,

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\varphi \circ f - \varphi)(f^j(x)) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\varphi(f^{j+1}(x)) - \varphi(f^j(x))\right) = \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{j=0}^{n-2} (\varphi(f^{j+1}(x)) + \varphi \circ f^n(x) - \sum_{j=1}^{n-1} \varphi(f^j(x)) - \varphi(x) \right) = \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} (\varphi \circ f^n(x) - \varphi(x)) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} (\varphi \circ f^n(x)).
\end{aligned}$$

Por outro lado, para cada $\delta > 0$ fixo,

$$\begin{aligned}
\mu(\{x : \frac{1}{n}|\varphi \circ f^n(x)| \geq \delta\}) &= \mu(\{x : |\varphi \circ f^n(x)| \geq n\delta\}) = \\
&= \mu(\{x : \varphi \circ f^n(x) \geq n\delta \ \ ou \ \ \varphi \circ f^n(x) \leq -n\delta\}) = \\
&= \mu(\{x : \varphi \circ f^n(x) \in (-\infty, -n\delta] \cup [n\delta, +\infty)\}) = \\
&= \mu(\{x : \varphi \circ f^n(x) \in (-n\delta, n\delta)^c\}) = \\
&= \mu(\{x : x \in f^{-n} \circ \varphi^{-1}(-n\delta, n\delta)^c\}) = \\
&= \mu(f^{-n} \circ \varphi^{-1}(-n\delta, n\delta)^c) = \mu(\varphi^{-1}(-n\delta, n\delta)^c) \to 0,
\end{aligned}$$

quando $n \to +\infty$, o que significa que $\frac{1}{n}(\varphi \circ f^n)$ converge para 0 em medida. Portanto, $\frac{1}{n_k}(\varphi \circ f^{n_k}) \to 0$ em quase toda parte, para alguma subsequência $n_k \to +\infty$ (Teorema 1.5). Isto prova que $\psi(x) = 0$ em μ-quase todo ponto $x \in M$. □

Demonstração da Proposição 3.1 Para $u \in E_x \setminus \{0\}$, seja

$$C_\epsilon(x, u) = \sup_{n \geq 0} \frac{\|L_n(x)u\|}{\exp(n(\lambda + \epsilon))\|u\|}.$$

Quando $n = 0$, tem-se $\frac{\|L_n(x)u\|}{\exp(n(\lambda+\epsilon))\|u\|} = 1$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{\|L_{n+1}(x)u\|}{\exp((n+1)(\lambda + \epsilon))\|u\|} &= \frac{\|L(x)u\|}{\exp(\lambda + \epsilon)\|u\|} \cdot \frac{\|L_{n+1}(x)u\|}{\exp(n(\lambda + \epsilon))\|L(x)u\|} = \\
&= \frac{\|L(x)u\|}{\exp(\lambda + \epsilon)\|u\|} \cdot \frac{\|L_n(f(x))L(x)u\|}{\exp(n(\lambda + \epsilon))\|L(x)u\|}.
\end{aligned}$$

Então,

$$C_\epsilon(x, u) = \max\left\{1, \ \frac{\|L(x)u\|}{\exp(\lambda + \epsilon)\|u\|} C_\epsilon(f(x), L(x)u)\right\}.$$

Sejam $a, b > 0$ tais que

$$a \leq \frac{\|L(x)u\|}{\exp(\lambda + \epsilon)\|u\|} \leq b.$$

(Isto é possível, pois $\|L\|$ é limitada). Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
C_\epsilon(x, u) &\geq \frac{\|L(x)u\|}{\exp(\lambda + \epsilon)\|u\|} C_\epsilon(f(x), L(x)u) \\
&\Rightarrow \frac{C_\epsilon(x, u)}{C_\epsilon(f(x), L(x)u)} \geq \frac{\|L(x)u\|}{\exp(\lambda + \epsilon)\|u\|} \geq a.
\end{aligned}$$

Caso $C_\epsilon(x,u) = 1$ então $\frac{C_\epsilon(x,u)}{C_\epsilon(f(x),L(x)u)} = \frac{1}{C_\epsilon(f(x),L(x)u)} \leq 1$ e se

$$C_\epsilon(x,u) = \frac{\|L(x)u\|}{\exp(\lambda+\epsilon)\|u\|} C_\epsilon(f(x),L(x)u)$$

então

$$\frac{C_\epsilon(x,u)}{C_\epsilon(f(x),L(x)u)} = \frac{\|L(x)u\|}{\exp(\lambda+\epsilon)\|u\|} \leq b,$$

ou seja,

$$a \leq \frac{C_\epsilon(x,u)}{C_\epsilon(f(x),L(x)u)} \leq \max\{1,b\},$$

para todo x e $u \in E_x \setminus \{0\}$. Isto assegura que $(\log(C_\epsilon \circ f) - \log C_\epsilon)$ é limitada e, em particular, integrável. Para o caso em que $n \to -\infty$, definimos

$$C_\epsilon(x,u) = \sup_{n\geq 0} \frac{\|L_{-n}(x)u\|}{\exp(-n(\lambda+\epsilon))\|u\|}.$$

De modo similar, verifica-se que $(\log(C_\epsilon \circ f^{-1}) - \log C_\epsilon)$ também é limitada e, em particular, integrável. Logo, pelo Lema 3.1,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log(C_\epsilon \circ f^n) = 0 \;\; e \;\; \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\log(C_\epsilon \circ f^{-n}) = 0$$

em μ-quase toda parte. Isto completa a prova da proposição. $\square$

O resultado seguinte será usado muitas vezes na demonstração do Teorema 3.2.

Proposição 3.2 *Seja E um subfibrado mensurável de F invariante por L, $\lambda \in \mathbb{R}$ e μ uma medida de probabilidade invariante por f em M. Então,*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| \leq \lambda$$

para μ-q.t.p. $x \in M$ e todo $u \in E_x \setminus \{0\}$ se, e somente se,

$$\limsup_{n\to-\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| \leq \lambda$$

para μ-q.t.p. $x \in M$ e todo $u \in E_x \setminus \{0\}$. Além disso, a afirmação permanece verdadeira quando $\limsup$ *e* $\leq$ *são substituídos por* $\liminf$ *e* $\geq$ *(ou por* $\lim$ *e* $=$*), respectivamente.*

Demonstração: Suponhamos

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| \le \lambda$$

para μ-q.t.p. $x \in M$ e todo $u \in E_x \setminus \{0\}$.

Seja

$$C_\epsilon(x) = \sup \left\{ \frac{\|L_n(x)u\|}{\exp(n(\lambda+\epsilon))\|u\|};\ \ n \ge 0\ \ e\ \ u \in E_x \setminus \{0\} \right\}$$

e observemos que

$$\begin{aligned} u &= L(x)\cdots L(f^{-n+1}(x))L^{-1}(f^{-n+1}(x))\cdots L^{-1}(x)u \\ &= L_n(f^{-n+1}(x))L_{-n}(x)u. \end{aligned}$$

Logo, escrevendo $v = L_{-n}(x)u$, temos

$$\begin{aligned} \|u\| = \|L_n(f^{-n+1}(x))v\| &= \frac{\|L_n(f^{-n+1}(x))v\|}{\exp(n(\lambda+\epsilon))\|v\|} \exp(n(\lambda+\epsilon))\|L_{-n}(x)u\| \\ &\le \sup_{n\ge 0} \left\{ \frac{\|L_n(f^{-n+1}(x))v\|}{\exp(n(\lambda+\epsilon))\|v\|} \right\} \exp(n(\lambda+\epsilon))\|L_{-n}(x)u\| \\ &= C_\epsilon(f^{-n+1}(x)) \exp(n(\lambda+\epsilon))\|L_{-n}(x)u\|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|u\| \le C_\epsilon(f^{-n+1}(x)) \exp(n(\lambda+\epsilon))\|L_{-n}(x)u\|$$

e, assim,

$$\frac{1}{n}\log\|u\| \le \frac{1}{n}\log C_\epsilon(f^{-n+1}(x)) + \lambda + \epsilon + \frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\| \tag{3.3}$$

para todo $n \ge 1$. Como C_ϵ tem crescimento subexponencial (Proposição 3.1), segue que

$$0 \le \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\| + \lambda + \epsilon.$$

Mas, uma vez que

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\| = -\limsup_{n\to-\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\|,$$

resulta

$$\limsup_{n\to-\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| \le \lambda + \epsilon$$

e visto que $\epsilon > 0$ é arbitrário, tem-se

$$\limsup_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| \leq \lambda.$$

Por outro lado, suponhamos

$$\limsup_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| \leq \lambda$$

para μ-quase todo ponto $x \in M$ e todo $u \in E_x \setminus \{0\}$ e seja C_ϵ definido como acima.

Segue de (3.3) e da Proposição 3.1 que

$$0 \leq \liminf_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log \|L_{-n}(x)u\| + \lambda + \epsilon$$

e, assim,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| \leq \lambda,$$

como foi afirmado. Analogamente, obtemos as outras afirmações. □

3.4 Demonstração do Teorema 3.2

3.4.1 Mensurabilidade

Sejam $n_1, \cdots, n_l$ inteiros positivos fixos. Para $k \geq 1$, denotemos por $\mathcal{A}_k$ o conjunto das $2l$-uplas de números racionais $\alpha_1 > \beta_1 > \cdots > \alpha_l > \beta_l$ com $(\alpha_j - \beta_j) < \frac{1}{k}$, para $1 \leq j \leq l$. Para $m \geq 1$ e $(\alpha_1, \cdots, \beta_l) \in \mathcal{A}_k$, vamos denotar por $\Lambda(m, \alpha_1, \cdots, \beta_l)$ o conjunto dos pontos $x \in M$ para os quais existe uma decomposição $F_x = F_1 \oplus \cdots \oplus F_l$ com $\dim F_j = n_j$ e

$$\exp(n\alpha_j)\|u\| \geq \|L_n(x)u\| \geq \exp(n\beta_j)\|u\| \tag{3.4}$$

$$\exp(-n\alpha_j)\|u\| \leq \|L_{-n}(x)u\| \leq \exp(-n\beta_j)\|u\| \tag{3.5}$$

para todo $n \geq m$, $1 \leq j \leq l$ e $u \in F_j \setminus \{0\}$. Observemos que tal decomposição $F_x = F_1 \oplus \cdots \oplus F_l$ é unicamente determinada, para cada $x \in \Lambda(m, \alpha_1, \cdots, \beta_l)$ por

$$\widetilde{F}_j = \left\{ u \in F_x; \frac{\|L_n(x)u\|}{\|u\|} \leq \exp(n\alpha_j) \text{ } e \text{ } \frac{\|L_{-n}(x)u\|}{\|u\|} \leq \exp(-n\beta_j) \text{ } se \text{ } n \geq m \right\}. \tag{3.6}$$

De fato, mostremos inicialmente que (3.6) caracteriza F_j. Dado $u \in F_x$, podemos escrever $u = \sum_{i=1}^{l} u_i$, com $u_i \in F_i$. Se u satisfaz (3.6) então de

$$\frac{\|L_n(x)u\|}{\|u\|} \leq \exp(n\alpha_j)$$

temos

$$j = \inf\{1 \leq i \leq l; u_i \neq 0\}$$

e de

$$\frac{\|L_{-n}(x)u\|}{\|u\|} \geq \exp(n\beta_j)$$

temos

$$j = \sup\{1 \leq i \leq l; u_i \neq 0\}.$$

Portanto, $u = u_i \in F_j$.

Suponhamos agora que exista decomposição $F_x = \tilde{F}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{F}_l$ satisfazendo (3.6). Então, dado $u \in F_j$, seja $u = \sum_{i=1}^{l} \widetilde{u}_i$. Repetindo o argumento acima, obtemos $u = \widetilde{u}_j \in \widetilde{F}_j$. Logo, $F_j \subset \widetilde{F}_j$. Analogamente, obtemos $\widetilde{F}_j \subset F_j$ e, portanto, $\widetilde{F}_j = F_j$, $j = 1, \cdots, l$.

A seguir, queremos provar que $\Lambda(m, \alpha_1, \cdots, \beta_l)$ é um conjunto fechado de M. Seja (x_t) uma sequência de pontos de $\Lambda(m, \alpha_1, \cdots, \beta_l)$ convergindo para um ponto $y \in M$. Seja ainda (u_t) uma sequência de vetores unitários tais que $u_t \in F_j(x_t)$. Usando o fato que F é um fibrado vetorial contínuo e (u_t) uma sequência limitada, existe uma subsequência (u_{t_k}) convergindo para um vetor não nulo $u \in F_j(y)$. Lembrando que as condições 3.4 e 3.5 são fechadas, temos

$$\exp(n\alpha_j)\|u\| \geq \|L_n(y)u\| \geq \exp(n\beta_j)\|u\|$$

$$\exp(-n\alpha_j)\|u\| \leq \|L_{-n}(y)u\| \leq \exp(-n\beta_j)\|u\|$$

e, pelo fato de cada $F_j(x_t)$ ter dimensão constante igual a n_j, resulta que a dimensão de $F_j(y)$ também é constante e, portanto, $y \in \Lambda(m, \alpha_1, \cdots, \beta_l)$. Isto significa que $\Lambda(m, \alpha_1, \cdots, \beta_l)$ é fechado. Além disso, a mesma argumentação acima permite concluir que a aplicação $\Lambda(m, \alpha_1, \cdots, \beta_l) \ni x \mapsto F_j(x)$ é contínua.

O próximo passo é provar que

$$\Lambda(n_1, \cdots, n_l) = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{(\alpha_1,\cdots,\beta_l)\in\mathcal{A}_k} \bigcup_{m\geq 1} \Lambda(m, \alpha_1, \cdots, \beta_l).$$

De fato, seja x um elemento qualquer de $\Lambda(n_1, \cdots, n_l)$. Então, a fibra F_x de F sobre x admite uma decomposição $F_x = F_1 \oplus \cdots \oplus F_l$ tal que $\dim E_j = n_j$, para $1 \leq j \leq l$, e existem números reais $\lambda_1 > \cdots > \lambda_l$ satisfazendo

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_j$$

para todo $u \in E_j \setminus \{0\}$ e $1 \leq j \leq l$. Em particular, vale para $\frac{u}{\|u\|} \in E_j \setminus \{0\}$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que para todo $n > n_0$,

$$-\epsilon < \frac{1}{n} \log \|L_n(x)\frac{u}{\|u\|}\| - \lambda_j < \epsilon.$$

Consequentemente,

$$n(\lambda_j - \epsilon) < \log \|L_n(x)\frac{u}{\|u\|}\| < n(\lambda_j + \epsilon) \Rightarrow \exp(n(\lambda_j - \epsilon)) < \|L_n(x)\frac{u}{\|u\|}\| < \exp(n(\lambda_j + \epsilon)).$$

Em particular, dado $0 < \frac{\epsilon}{2} < \frac{1}{2k}$, com k inteiro positivo, tem-se

$$\exp(n(\lambda_j - \frac{\epsilon}{2})) < \|L_n(x)\frac{u}{\|u\|}\| < \exp(n(\lambda_j + \frac{\epsilon}{2})).$$

Tomando $\alpha_j = \lambda_j + \frac{\epsilon}{2}$ e $\beta_j = \lambda_j - \frac{\epsilon}{2}$, segue que

$$\|u\| \exp(n\beta_j) < \|L_n(x)u\| < \exp(n\alpha_j)\|u\|,$$

para todo $n > n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}^*$. Note ainda que

$$\alpha_j = \beta_j + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \beta_j + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} \Rightarrow \alpha_j < \beta_j + \frac{1}{k} \Rightarrow \alpha_j - \beta_j < \frac{1}{k}.$$

De modo semelhante, mostra-se que

$$\|u\| \exp(-n\alpha_j) < \|L_{-n}(x)u\| < \exp(-n\beta_j)\|u\|,$$

para todo $n > n_1$, $n_1 \in \mathbb{N}^*$. Escolhendo $m = \max\{n_0, n_1\}$, concluímos que

$$\|u\| \exp(n\beta_j) < \|L_n(x)u\| < \exp(n\alpha_j)\|u\|$$

$$\|u\| \exp(-n\alpha_j) < \|L_{-n}(x)u\| < \exp(-n\beta_j)\|u\|$$

para todo $n \geq m$, $1 \leq j \leq l$ e $u \in E_j \setminus \{0\}$.

Portanto, $x \in \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{(\alpha_1,\cdots,\beta_l)\in\mathcal{A}_k} \bigcup_{m\geq 1} \Lambda(m, \alpha_1, \cdots, \beta_l)$.

Por outro lado, seja $y \in \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{(\alpha_1,\cdots,\beta_l)\in\mathcal{A}_k} \bigcup_{m\geq 1} \Lambda(m, \alpha_1, \cdots, \beta_l)$. Assim, para todo $k \geq 1$, existem $(\alpha_1, \cdots, \beta_l) \in \mathcal{A}_k$ e $m_0 \geq 1$ tais que $y \in \Lambda(m_0, \alpha_1, \cdots, \beta_l)$. Isto significa dizer que a fibra F_y admite uma decomposição $F_y = F_1 \oplus \cdots \oplus F_l$ com $\dim F_j = n_j$ e

$$\exp(n\alpha_j^k)\|u\| \geq \|L_n(y)u\| \geq \exp(n\beta_j^k)\|u\| \ \ e$$

$$exp(-n\alpha_j^k)\|u\| \leq \|L_{-n}(y)u\| \leq \exp(-n\beta_j^k)\|u\|,$$

para todo $n \geq m_0$.

Afirmamos que a sequência (α_j^k) é limitada. Com efeito, fixemos $n \geq m_0$; se fosse $\alpha_j^k \to +\infty$ então ter-se-ia $\beta_j^k \to +\infty$ e, assim,

$$\frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = +\infty,$$

o que é absurdo pois $\|L\|$ é limitada. Tampouco se tem $\alpha_j^k \to -\infty$, pois isto resultaria

$$\frac{1}{n} \log \|L_{-n}(x)u\| = +\infty,$$

o que também é absurdo, já que $\|L^{-1}\|$ é limitada. Logo, $|\alpha_j^k| < M$, para alguma constante $M > 0$. Por conseguinte, existe uma subsequência $\alpha_j^{k_t} \to \lambda_j$ e disto tem-se $\beta_j^{k_t} \to \lambda_j$, pois

$$\beta_j^{k_t} = (\beta_j^{k_t} - \alpha_j^{k_t}) + \alpha_j^{k_t}.$$

Então,

$$n\alpha_j^{k_t} \geq \log \|L_n(y)u\| \geq n\beta_j^{k_t}.$$

Ora, dado $\epsilon > 0$, existe um inteiro positivo t_0 tal que $\alpha_j^{k_t} < \lambda_j + \epsilon$ e $\beta_j^{k_t} > \lambda_j - \epsilon$, para todo $t \geq t_0$ e isto acarreta

$$\lambda_j + \epsilon \geq \frac{1}{n} \log \|L_n(y)u\| \geq \lambda_j - \epsilon.$$

Portanto, existe $\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(y)u\|$ e $y \in \Lambda(n_1, \cdots, n_l)$.

Segue, pois, que $\Lambda(n_1, \cdots, n_l)$ é um boreliano.

Provemos que os subfibrados E_j são mensuráveis em $\Lambda(n_1, \cdots, n_l)$. Para isto, basta mostrar que para todo $x \in \Lambda(n_1, \cdots, n_l) \cap \Lambda(m, \alpha_1, \cdots, \beta_l)$ tem-se $E_j(x) = F_j(x)$, para todo $1 \leq j \leq l$. Inicialmente, notemos que E_j deve estar contido em algum F_k, $1 \leq k \leq l$, pois todos os vetores em E_j geram o mesmo expoente de Lyapounov λ_j, tanto para $n \to +\infty$ quanto para $n \to -\infty$. Tendo em vista que $\alpha_k \geq \lambda_j \geq \beta_k$ e relembrando que $\lambda_1 > \cdots > \lambda_l$ e $\alpha_1 > \beta_1 > \cdots > \alpha_l > \beta_l$, segue que $j = k$. E uma vez que $\dim E_j = n_j = \dim F_j$, resulta $E_j = F_j$, como foi afirmado acima.

Para finalizar, sendo $E_j(x)$ mensurável, então $\|L_n(x)|E_j(x)\|$ também o é, assim como $\log\|L_n(x)|E_j(x)\|$, pois é uma composição de aplicações mensuráveis. Assim, temos uma sequência de funções mensuráveis, a saber, $\frac{1}{n}\log\|L_n(x)|E_j(x)\|$, a qual converge para $\lambda_j(x)$. Portanto, pelo Corolário 1.2 (página 15), $\lambda_j(x)$ é mensurável.

Com isto, finalizamos a demonstração da parte $a)$ do Teorema 3.2.

3.4.2 Probabilidade total

A fim de mostrar que $R(L)$ tem probabilidade total basta mostrar que $\mu(R(L)) = 1$ para toda medida de probabilidade ergódica, invariante por f em M. De fato, tal afirmação se justifica devido à Proposição 2.4 (página 29).

Doravante, vamos supor μ ergódica.

Seja

$$\lambda_1(L, x) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log\|L_n(x)\|.$$

Observemos que $\lambda_1(L, x) \leq \sup_{x\in M}\|L(x)\|$ e $\lambda_1(L, x) = \lambda_1(L, f(x))$ para μ-quase todo ponto $x \in M$.

Provemos primeiro que $\lambda_1(L, x) \leq \sup_{x\in M}\|L(x)\|$. Temos:

$$\|L_n(x)\| = \|L(f^{n-1}(x))\cdots L(x)\| \leq \|L(f^{n-1}(x))\|\cdots\|L(x)\| \leq \left(\sup_{x\in M}\|L(x)\|\right)^n.$$

Logo,

$$\frac{1}{n}\log\|L_n(x)\| \leq \log\sup_{x\in M}\|L(x)\| \Rightarrow \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|L_n(x)\| \leq \log\sup_{x\in M}\|L(x)\|$$

e como $\log \sup_{x\in M} \|L(x)\| < \sup_{x\in M} \|L(x)\|$ (pois $\log y < y$, para todo $y \in (0,+\infty)$), o resultado segue.

Agora, vamos provar que $\lambda_1(L,x) = \lambda_1(L,f(x))$ para μ-quase todo ponto $x \in M$. Para isto, mostremos que $\lambda_1(L,x) \le \lambda_1(L,f(x))$ e $\lambda_1(L,f(x)) \le \lambda_1(L,x)$.

$$\begin{aligned}
\lambda_1(L,x) &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(x)\| = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\log\|L_{n+1}(x)\| = \\
&= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\log\|L_n(f(x))L(x)\| \le \\
&\le \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\log\|L_n(f(x))\| + \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\log\|L(x)\| = \\
&= \limsup_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\log\|L_n(f(x))\| \le \\
&\le \limsup_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\cdot\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|L_n(f(x))\| = \\
&= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(f(x))\| = \lambda_1(L,f(x)),
\end{aligned}$$

ou seja, $\lambda_1(L,x) \le \lambda_1(L,f(x))$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\lambda_1(L,f(x)) &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(f(x))\| = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(f(x))L(x)L^{-1}(x)\| = \\
&= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|L_{n+1}(x)L^{-1}(x)\| \le \\
&\le \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|L_{n+1}(x)\| + \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|L^{-1}(x)\| = \\
&= \limsup_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}\log\|L_{n+1}(x)\| \le \\
&\le \limsup_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n}\cdot\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\log\|L_{n+1}(x)\| = \\
&= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\log\|L_{n+1}(x)\| = \lambda_1(L,x),
\end{aligned}$$

isto é, $\lambda_1(L,f(x)) \le \lambda_1(L,x)$.

Logo, λ_1 é uma aplicação invariante por f. Sendo μ ergódica, temos, pela Proposição 2.3, que λ_1 é constante em μ-quase todo ponto x de M. Assim, denotemos $\lambda_1(L,x)$ por $\lambda_1(L)$.

Seja G o subfibrado de F definido por

$$\begin{aligned} G_x &= \{u \in F_x;\ \liminf_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| \geq \lambda_1(L)\} \cup \{0\} = \\ &= \{u \in F_x;\ \liminf_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} \log \|L_{-n}(x)u\| \geq \lambda_1(L)\} \cup \{0\} = \\ &= \{u \in F_x;\ -\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_{-n}(x)u\| \geq \lambda_1(L)\} \cup \{0\} = \\ &= \{u \in F_x;\ \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_{-n}(x)u\| \leq -\lambda_1(L)\} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

O lema abaixo é importante na demonstração do item b) do Teorema 3.2. No entanto, sua prova será dada na próxima seção.

Lema 3.2 *G é um subfibrado mensurável invariante por L com dimensão estritamente positiva e*

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_1(L)$$

para μ-quase todo ponto $x \in M$ e todo $u \in G_x \setminus \{0\}$.

Denotemos por $\widehat{\Lambda}(j)$ o conjunto dos pontos x para os quais $\dim G_x = j$. Provaremos que estes subconjuntos de M são mensuráveis e que a restrição de G a cada $\widehat{\Lambda}(j)$ é um subfibrado mensurável da restrição de F a $\widehat{\Lambda}(j)$.

Sendo L um isomorfismo, segue que $\dim G_x = \dim L(G_x)$. Ora, $L(G_x) = G_{f(x)}$. De fato, vejamos, por exemplo, que $L(G_x) \subset G_{f(x)}$. Temos

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(f(x))L(x)u\| &= \liminf_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log \|L_{n+1}(x)u\| = \\ &= \liminf_{n\to-\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \log \|L_{n+1}(x)u\| \geq \\ &\geq \liminf_{n\to-\infty} \frac{1}{n+1} \log \|L_{n+1}(x)u\| \geq \lambda_1(L). \end{aligned}$$

Logo, $L(x)u \in G_{f(x)}$. A outra inclusão é provada de modo análogo. Assim, $f(x) \in \widehat{\Lambda}(j)$, donde $\widehat{\Lambda}(j)$ é um conjunto invariante por f e, como μ é ergódica, tem-se $\mu(\widehat{\Lambda}(j)) = 1$, para algum j. Verificaremos então que $j \geq 1$.

Caso seja $G_x = F_x$ para quase todo ponto $x \in M$, então escrevemos $G = F$ e, neste caso, a demonstração do Teorema 3.2 está completa. Com efeito, pondo $E_1 = G$, tem-se pelo Lema 3.2

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_1(L)$$

para quase todo ponto $x \in M$ e todo $u \in E_1 \setminus \{0\}$.

Agora, se $G \neq F$, seja $G^{\perp}$ o complemento ortogonal de G. Além disso, seja $p : F \to G^{\perp}$ a projeção ortogonal e escrevamos $\widehat{L} = p \circ L : G^{\perp} \to G^{\perp}$.

Lema 3.3 *Se $F \neq G$ então $\lambda_1(\widehat{L}) < \lambda_1(L)$.*

Demonstração: Afirmamos que $\widehat{L}_n(x) = p(L_n(x))$. De fato, a afirmação será provada por indução sobre n. Para $n = 1$ não há o que demonstrar. Suponhamos $\widehat{L}_k(x) = p(L_k(x))$. Então,

$$\widehat{L}_{k+1}(x)u = \widehat{L}(f^k(x))\widehat{L}_k(x)u$$

e

$$L_{k+1}(x)u = L(f^k(x))L_k(x)u$$

Escrevendo $L_k(x)u = p(L_k(x)u) + v$, $v \in G$, temos $L_k(x)u = \widehat{L}_k(x)u + v$. Assim,

$$L_{k+1}(x)u = L(f^k(x))\widehat{L}_k(x)u + L(f^k(x))v$$

e

$$p(L_{k+1}(x)u) = p(L(f^k(x))\widehat{L}_k(x)u) + p(L(f^k(x))v).$$

Da invariância de G, segue que

$$\begin{aligned} p(L_{k+1}(x)u) &= p(L(f^k(x))\widehat{L}_k(x)u) = p \circ L(f^k(x)) \circ \widehat{L}_k(x)u = \\ &= \widehat{L}(f^k(x))\widehat{L}_k(x)u = \widehat{L}_{k+1}(x)u \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\widehat{L}_n(x)\| = \|p(L_n(x)u)\| \leq \|L_n(x)u\|.$$

Suponhamos $\lambda_1(L) \leq \lambda_1(\widehat{L})$. Seja $\widehat{G}$ um subfibrado de $G^{\perp}$, invariante por $\widehat{L}$ tal que

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|\widehat{L}_n(x)u\| = \lambda_1(\widehat{L}),$$

para μ-quase todo ponto x e todo $u \in \widehat{G}_x \setminus \{0\}$. Então,

$$\begin{aligned} \lambda_1(\widehat{L}) &= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|\widehat{L}_n(x)u\| \leq \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| \leq \\ &\leq \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| \leq \lambda_1(L), \end{aligned}$$

donde $\lambda_1(\widehat{L}) \leq \lambda_1(L)$, o que implica $\lambda_1(L) = \lambda_1(\widehat{L})$. Deste modo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_1(L)$$

Pela Proposição 3.2, segue que

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_1(L),$$

o que permite concluir que $u \in G_x$, ou seja, $u \in \widehat{G}_x \cap G_x$. Mas isto é absurdo, visto que u é não nulo e $\widehat{G}_x \cap G_x = \{0\}$. Portanto, $\lambda_1(\widehat{L}) < \lambda_1(L)$. □

Faremos uso de mais um lema fundamental, cuja prova será dada mais adiante em uma seção específica após provarmos o Lema 3.2.

Lema 3.4 *Se $F \neq G$ então existe um subfibrado H de F, o qual é mensurável e invariante por L, tal que $G \oplus H = F$ e $\lambda_1(L|H) = \lambda_1(\widehat{L}) < \lambda_1(L)$.*

Agora, estamos aptos para concluir a demonstração da parte b) do Teorema 3.2. Escrevendo $E_1 = G$ e $H_1 = H$, tem-se pelo Lema 3.2

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_1$$

para todo $u \in E_1 \setminus \{0\}$ e, pelo Lema 3.4, existe uma decomposição $F = E_1 \oplus H_1$ tal que $\lambda_1 > \lambda_1(L|H_1)$. A seguir, definamos $\lambda_2 = \lambda_1(L|H_1)$ e apliquemos os Lemas 3.2 e 3.4, considerando a aplicação $L|H_1$. Assim, existem subfibrados invariantes por L, E_2 e H_2, tais que $H_1 = E_2 \oplus H_2$, para μ-q.t.p $x \in M$, $\lambda_1(L|H_2) < \lambda_2$ e

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)v\| = \lambda_2$$

para μ-q.t.p $x \in M$ e todo $v \in E_2 \setminus \{0\}$. Então, para qualquer $j \geq 1$, suponhamos que já obtivemos uma decomposição invariante por L, $F = E_1 \oplus \cdots \oplus E_i \oplus H_i$ com

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_i$$

para todo $u \in E_i \setminus \{0\}$ e $1 \leq i \leq j$, $\lambda_1 > \cdots > \lambda_j > \lambda_1(L|H_j)$. Do Lema 3.2 segue que existe um subfibrado E_{j+1} de H_j tal que

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_{i+1} = \lambda_1(L|H_j),\ \forall u \in E_i \setminus \{0\}$$

e do Lema 3.4, existe uma decomposição $H_j = E_{j+1} \oplus H_{j+1}$ tal que $\lambda_1(L|H_{j+1}) < \lambda_{j+1}$. Como F tem, por hipótese, dimensão finita este processo deve ser interrompido após um número finito de vezes. Resulta, assim, que em μ-quase todo ponto $x \in M$, tem-se

$$F = E_1 \oplus \cdots \oplus E_l$$

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{n} \log \|L_n(x)u\| = \lambda_j, \ 1 \leq j \leq l, \ u \in E_j \setminus \{0\},$$

isto é, μ-quase todo ponto $x \in M$ é regular, completando a demonstração do Teorema 3.2.

3.5 Demonstração do Lema 3.2

O resultado enunciado e provado logo abaixo será usado na prova do Lema 3.2.

Lema 3.5 (Pliss) *Dados $\lambda \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ e $A > 0$, existe $\delta = \delta(\lambda, \epsilon, A) > 0$ tal que se dada qualquer sequência $a_0, \cdots, a_{N-1}$ em $\mathbb{R}$, com $\sum_{k=0}^{N-1} a_k \leq N\lambda$ e $|a_k| \leq A$, para todo $0 \leq k \leq N-1$, então existem $l \geq N\delta$ e $0 \leq n_1 \leq \cdots \leq n_l \leq N-1$ tais que*

$$\sum_{j=n}^{n_i-1} a_j \leq (n_i - n)(\lambda + \epsilon),$$

para todo $0 \leq n < n_i$ e $1 \leq i \leq l$.

Demonstração: Seja $S(n) = \sum_{j=n}^{N-1}(a_j - (\lambda+\epsilon))$ e tomemos $n_1 < \cdots < n_l$ aqueles números inteiros do conjunto $\{0, \cdots, N-1\}$ que satisfazem

$$S(n) \leq S(n_i), \tag{3.7}$$

para todo $0 \leq n < n_i$. Então, para $0 \leq n < n_i$,

$$\begin{aligned} S(n) = \sum_{j=n}^{N-1}(a_j - (\lambda + \epsilon)) &= \sum_{j=n}^{n_i-1}(a_j - (\lambda + \epsilon)) + \sum_{j=n_i}^{N-1}(a_j - (\lambda + \epsilon)) = \\ &= \sum_{j=n}^{n_i-1}(a_j - (\lambda + \epsilon)) + S(n_i). \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{j=n}^{n_i-1}(a_j-(\lambda+\epsilon))=S(n)-S(n_i)\Rightarrow\sum_{j=n}^{n_i-1}a_j-\sum_{j=n}^{n_i-1}(\lambda+\epsilon)=S(n)-S(n_i)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sum_{j=n}^{n_i-1}a_j=S(n)-S(n_i)+\sum_{j=n}^{n_i-1}(\lambda+\epsilon)$$

e, assim,

$$\sum_{j=n}^{n_i-1}a_j=S(n)-S(n_i)+[(n_i-1)-n+1](\lambda+\epsilon)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sum_{j=n}^{n_i-1}a_j=S(n)-S(n_i)+(n_i-n)(\lambda+\epsilon)\leq(n_i-n)(\lambda+\epsilon),$$

pois $S(n)-S(n_i)\leq 0$.

Resta, portanto, estimar o valor de l. Antes, porém, observemos que $S(n_{i-1})\geq S(n_i-1)$ para todo $i>1$, porque, caso contrário, haveria $n_{i-1}<m<n_i$ tal que $S(n)\leq S(m)$, para todo $1\leq n<m$, contrariando a definição do conjunto $\{n_1,\cdots,n_l\}$. Logo, para todo $i>1$, tem-se

$$S(n_{i-1})\geq S(n_i-1)\Rightarrow S(n_{i-1})\geq\sum_{n_i-1}^{N-1}(a_j-(\lambda+\epsilon))=\sum_{n_i}^{N-1}(a_j-(\lambda+\epsilon))+a_{n_i-1}-(\lambda+\epsilon)$$
$$\Rightarrow S(n_{i-1})\geq S(n_i)+(a_{n_i-1}-(\lambda+\epsilon))\geq S(n_i)-(\lambda+\epsilon+A),$$

onde a última desigualdade se justifica porque $a_{n_i-1}\geq -A$. Em particular, temos

$$S(n_1)\geq S(n_2)-(\lambda+\epsilon+A)$$
$$S(n_2)\geq S(n_3)-(\lambda+\epsilon+A)\Rightarrow S(n_1)\geq S(n_3)-2(\lambda+\epsilon+A)$$

e, indutivamente, segue que

$$S(n_1)\geq S(n_l)-(l-1)(\lambda+\epsilon+A).$$

Como 0 é o menor elemento de $\{0,1,\cdots,N-1\}$ que satisfaz (3.7), então

$$S(n_1)=S(0)=\sum_{k=0}^{N-1}(a_k-(\lambda+\epsilon))=\sum_{k=0}^{N-1}a_k-N(\lambda+\epsilon)\leq$$
$$\leq N\lambda-N(\lambda+\epsilon)=-N\epsilon.$$

Além disso,

$$S(n_l) \geq S(N-1) = a_{N-1} - (\lambda + \epsilon)$$

(isto porque n_l é o maior elemento de $\{0, 1, \cdots, N-1\}$ que satisfaz (3.7)).

Deste modo,

$$-N\epsilon \geq S(n_1) \geq S(n_l) - (l-1)(\lambda + \epsilon + A) \geq a_{N-1} - (\lambda + \epsilon) - (l-1)(\lambda + \epsilon + A)$$
$$\Rightarrow -N\epsilon \geq a_{N-1} - (\lambda + \epsilon) - l(\lambda + \epsilon + A) + (\lambda + \epsilon + A)$$

Lembrando que $a_{N-1} \geq -A$, resulta:

$$-N\epsilon \geq -A - (\lambda + \epsilon) - l(\lambda + \epsilon + A) + (\lambda + \epsilon + A) = -l(\lambda + \epsilon + A) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow N\epsilon \leq l(\lambda + \epsilon + A).$$

Assim, basta tomar $\delta = \frac{\epsilon}{\lambda + \epsilon + A}$. □

Passemos, enfim, à demonstração do Lema 3.2. Em primeiro lugar, vamos provar que G é um subfibrado mensurável. Isto será feito em três passos.

Primeiro passo: Para $k \geq 1$ e $x \in M$ seja

$$G_x(k) = \left\{ u \in F_x;\ \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|L_{-n}(x)u\| \leq -\lambda_1 + \frac{1}{k} \right\} \cup \{0\}.$$

Notemos que $G_x(k)$ é subespaço vetorial de F_x, pois é não vazio ($0 \in G_x(k)$) e dados $u \in G_x(k)$ e α um escalar não nulo, temos:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|L_{-n}(x)(\alpha u)\| &= \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|\alpha L_{-n}(x)u\| = \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log |\alpha| \|L_{-n}(x)u\| \\
&= \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} (\log |\alpha| + \log \|L_{-n}(x)u\|) \leq \\
&\leq \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log |\alpha| + \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|L_{-n}(x)u\| \leq -\lambda_1 + \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\alpha u \in G_x(k)$ e, dados $u, v \in G_x(k)$, temos

$$
\begin{aligned}
\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)(u+v)\| &= \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u+L_{-n}(x)v)\| \leq\\
&\leq \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log(\|L_{-n}(x)u\|+\|L_{-n}(x)v)\|) \leq\\
&\leq \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log 2\max\{\|L_{-n}(x)u\|,\|L_{-n}(x)v)\|\} \leq\\
&\leq \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log 2+\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\max\{\|L_{-n}(x)u\|,\|L_{-n}(x)v)\|\}\\
&\leq -\lambda_1+\frac{1}{k},
\end{aligned}
$$

donde $u+v\in G_x(k)$. A seguir, definamos $M_k=\{x\in M;\ G_x(k)=G_x\}$. Afirmamos que $(M_k)_k$ cobre M. De fato, para qualquer $x\in M$ fixo, $(G_x(k))_k$ forma uma sequência decrescente de subespaços de F_x e, como $\dim F_x$ é finita, deve existir $k_x\geq 1$ tal que $G_x(k_x)=G_x$, para todo $k\geq k_x$. Por um lado, $\bigcap\limits_{k=k_x}^{+\infty} G_x(k)=G_x$ e, por outro lado, $\bigcap\limits_{k=k_x}^{+\infty} G_x(k)=G_x(k_x)$. Logo, existe $k_x\geq 1$ tal que $G_x(k_x)=G_x$. Afirmamos ainda que M_k é um conjunto mensurável. Para provar esta última afirmação, consideremos as funções

$$\lambda_1: M\longrightarrow\mathbb{R},\ \lambda_1(x)=\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|L_n(x)\|$$

$$\phi: F\longrightarrow\mathbb{R},\ \phi(x,u)=\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\|.$$

Estas funções são mensuráveis, porque $(\frac{1}{n}\log\|L_n(x)\|)$ e $(\frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\|)$ são sequências limitadas de funções mensuráveis. Consideremos ainda a projeção fibrada $\pi: F\longrightarrow M$.

Temos:

$$\begin{aligned}
x \notin M_k &\iff G_x(k) \neq G_x \\
&\iff \exists u \in F_x \textit{ com } u \notin G_x \textit{ tal que } \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\| \leq -\lambda_1 + \frac{1}{k} \\
&\iff \exists u \in F_x \textit{ com } u \notin G_x \textit{ tal que } \phi(x,u) \leq -\lambda_1(x) + \frac{1}{k} \\
&\iff \exists u \in F_x \textit{ com } u \notin G_x \textit{ tal que } \phi(x,u) \leq -\lambda_1 \circ \pi(x,u) + \frac{1}{k} \\
&\iff \exists u \in F_x \textit{ com } u \notin G_x \textit{ tal que } \phi(x,u) + \lambda_1 \circ \pi(x,u) \leq \frac{1}{k} \\
&\iff \exists u \in F_x \textit{ com } u \notin G_x \textit{ tal que } (\phi + \lambda_1 \circ \pi)(x,u) \leq \frac{1}{k} \\
&\iff \exists u \in F_x \textit{ com } u \notin G_x \textit{ tal que } (\phi + \lambda_1 \circ \pi)(x,u) \in (0, \frac{1}{k}] \\
&\iff \exists u \in F_x \textit{ com } u \notin G_x \textit{ tal que } (x,u) \in (\phi + \lambda_1 \circ \pi)^{-1}((0, \frac{1}{k}]) \\
&\iff \exists u \in F_x \textit{ com } u \notin G_x \textit{ tal que } \pi(x,u) \in \pi((\phi + \lambda_1 \circ \pi)^{-1}((0, \frac{1}{k}])) \\
&\iff x \in \pi((\phi + \lambda_1 \circ \pi)^{-1}((0, \frac{1}{k}])),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$M_k = M \setminus \pi((\phi + \lambda_1 \circ \pi)^{-1}((0, \frac{1}{k}])).$$

Uma vez que a projeção aplica conjuntos mensuráveis em conjuntos mensuráveis, então $\pi((\phi + \lambda_1 \circ \pi)^{-1}((0, \frac{1}{k}]))$ é mensurável, o que implica que $M \setminus \pi((\phi + \lambda_1 \circ \pi)^{-1}((0, \frac{1}{k}]))$ é mensurável, ou seja, M_k é mensurável.

Segundo passo: Fixemos $k \geq 1$ e, para cada $x \in M_k$ e $m \geq 1$, definamos

$$G_x(k,m) = \{u \in F_x;\ \|L_{-n}(x)u\| \leq m \exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\|u\|,\ \forall n\}.$$

Notemos que $G_x(k) = \bigcup_m G_x(k,m)$, para todo $x \in M_k$. Com efeito, provemos primeiro a inclusão "$\supset$". Seja $u \in \bigcup_m G_x(k,m)$. Então, $u \in G_x(k,m_1)$, para algum m_1, o que por sua vez implica

$$\|L_{-n}(x)u\| \leq m_1 \exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\|u\| \Rightarrow \log\|L_{-n}(x)u\| \leq \log m_1 - n(\lambda_1 - \frac{1}{k}) + \log\|u\|.$$

Assim,

$$-\frac{1}{n}\log m_1 + (\lambda_1 - \frac{1}{k}) - \frac{1}{n}\log\|u\| \leq -\frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\|$$

donde

$$\begin{aligned}\lambda_1 - \frac{1}{k} \leq \liminf_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\| &\Rightarrow \lambda_1 - \frac{1}{k} \leq -\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\|\\ &\Rightarrow \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\| \leq -\lambda_1 + \frac{1}{k}\\ &\Rightarrow u \in G_x(k),\end{aligned}$$

ou seja, $\bigcup_m G_x(k,m) \subset G_x(k)$.

Agora, provemos a inclusão "$\subset$". Antes, porém, observemos que $G_x(k) = G_x(k+1)$. De fato, temos $\bigcap_{\tilde{k}=1}^{\infty} G_x(\tilde{k}) = G_x$. Como $x \in M_k$, então $G_x = G_x(k)$. Logo, $\bigcap_{\tilde{k}=1}^{\infty} G_x(\tilde{k}) = G_x(k)$, donde $G_x(k+1) = G_x(k)$ (pois $(G_x(k))_k$ forma uma sequência decrescente). Seja $u \in G_x(k)\setminus\{0\}$. Então, $\frac{u}{\|u\|} \in G_x(k)$, acarretando $\frac{u}{\|u\|} \in G_x(k+1)$, ou seja,

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)\frac{u}{\|u\|}\| \leq -\lambda_1 + \frac{1}{k+1}.$$

Assim, dado $0 < \epsilon < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)\frac{u}{\|u\|}\| \leq -\lambda_1 + \frac{1}{k+1} + \epsilon \leq -\lambda_1 + \frac{1}{k},$$

isto é,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)\frac{u}{\|u\|}\| \leq -\lambda_1 + \frac{1}{k} &\Rightarrow \log\|L_{-n}(x)\frac{u}{\|u\|}\| \leq -n\left(\lambda_1 - \frac{1}{k}\right)\\ &\Rightarrow \|L_{-n}(x)\frac{u}{\|u\|}\| \leq \exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\\ &\Rightarrow \|L_{-n}(x)u\| \leq \exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\|u\|\end{aligned}$$

e, por conseguinte $\Rightarrow u \in G_x(k,1) \subset \bigcup_m G_x(k,m)$.

Na sequência, definamos $M_{k,m} = \{x \in M_k;\ G_x(k) = G_x(k,m)\} = \{x \in M_k;\ G_x(k,m) = G_x(k,l),\ \forall l \geq m\}$. Vejamos por que estes dois conjuntos são iguais. Ora, provamos que $G_x(k) = \bigcup_{\tilde{m}} G_x(k,\tilde{m})$. Como $x \in M_{k,m}$, temos $G_x(k) = G_x(k,m)$, o que implica $G_x(k,m) = \bigcup_{\tilde{m}} G_x(k,\tilde{m})$ e isto, por sua vez, resulta $G_x(k,m) = G_x(k,l)$, para todo $l \geq m$.

Por outro lado, se $G_x(k,m) = G_x(k,l)$, para todo $l \geq m$ então $\bigcup_{\tilde{m}} G_x(k,\tilde{m}) = G_x(k,m)$, donde $G_x(k) = G_x(k,m)$.

Consideremos a função

$$\psi_k : \pi^{-1}(M_k) \to \mathbb{R},\ \psi_k(x,u) = \sup_{n>0} \left\{ \frac{\|L_{-n}(x)u\|}{\|u\|} \exp(n(\lambda_1 - \frac{1}{k})) \right\}.$$

Esta função também é mensurável, pois $f_n(x,u) = \frac{\|L_{-n}(x)u\|}{\|u\|} \exp(n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))$ define uma sequência de funções contínuas e, portanto, mensuráveis (Veja Halmos (referência bibliográfica [4]), página 84).

Temos:

$$\begin{aligned}
x \notin M_{k,m} &\Leftrightarrow G_x(k,m) \neq G_x(k,l),\ \textit{para algum } l \geq m \\
&\Leftrightarrow \exists u \in G_x(k,l) \textit{ tal que } \|L_{-n}(x)u\| > m \exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\|u\|,\ \textit{para algum } n \\
&\Leftrightarrow \exists u \in G_x(k,l) \textit{ tal que } \frac{\|L_{-n}(x)u\|}{\|u\|} \exp(n(\lambda_1 - \frac{1}{k})) > m,\ \textit{para algum } n \\
&\Leftrightarrow \exists u \in G_x(k,l) \textit{ tal que } \sup_{n>0} \left\{ \frac{\|L_{-n}(x)u\|}{\|u\|} \exp(n(\lambda_1 - \frac{1}{k})) \right\} > m \\
&\Leftrightarrow \exists u \in F_x \textit{ e } l \geq m \textit{ tal que } m < \psi_k(x,u) \leq l \\
&\Leftrightarrow \exists u \in F_x \textit{ e } l \geq m \textit{ tal que } \psi_k(x,u) \in (m,l] \\
&\Leftrightarrow \exists u \in F_x \textit{ e } l \geq m \textit{ tal que } (x,u) \in \psi_k^{-1}((m,l]) \\
&\Leftrightarrow \exists u \in F_x \textit{ e } l \geq m \textit{ tal que } \pi(x,u) \in \pi(\psi_k^{-1}((m,l])) \\
&\Leftrightarrow \exists l \geq m \textit{ tal que } x \in \pi(\psi_k^{-1}((m,l])),
\end{aligned}$$

isto é, $M_{k,m} = M_k \setminus \bigcup_{l=m}^{\infty} \pi(\psi_k^{-1}((m,l]))$. Tendo em vista que $\bigcup_{l=m}^{\infty} \pi(\psi_k^{-1}((m,l]))$ é mensurável, resulta que $M_{k,m}$ também é mensurável. Queremos agora provar que $(M_{k,m})_m$ cobre M_k. Com esta finalidade, seja $x \in M_k$ e $\{u_1, \cdots, u_s\}$ uma base ortogonal de $G_x(k)$. Tomemos $m_1, \cdots, m_s \geq 1$ tais que $u_i \in G_x(k,m_i)$, para todo $1 \leq i \leq s$, e consideremos

$m = \max\{m_1, \cdots, m_s\}$. Para cada $u = \sum_{i=1}^{s} a_i u_i \in G_x(k)$ e para cada $n \geq 1$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|L_{-n}(x)u\| &= \|L_{-n}(x)\sum_{i=1}^{s} a_i u_i\| \leq \sum_{i=1}^{s} |a_i|\|L_{-n}(x)u_i\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{s} |a_i| m_i \exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\|u_i\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{s} |a_i| m \exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\|u_i\| \\
&= m\exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\sum_{i=1}^{s} |a_i|\|u_i\| \\
&= m\exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\|u\|_{soma},
\end{aligned}$$

ou seja, $\|L_{-n}(x)u\| \leq m\exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))C\|u\|$, onde C depende apenas da escolha da norma em F. Concluímos, assim, que $G_x(k) \subset G_x(k, Cm+1)$ e, portanto, $x \in M_{k,Cm+1}$.

Terceiro passo: Provemos agora que G_x é semicontínua inferiormente em cada $M_{k,m}$, ou seja, dada qualquer sequência $(x_i)_i$ em $M_{k,m}$, tem-se $\lim G_{x_i} \subset G_x$.

Dada uma sequência $u_i \in G_{x_i}$, $i \geq 1$, que converge para algum $u \in F_x$, temos

$$\|L_{-n}(x)u_i\| \leq m\exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\|u_i\|,$$

para todo $i \geq 1$ e $n \geq 1$. Passando para o limite, obtemos

$$\|L_{-n}(x)u\| \leq m\exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\|u\|,$$

o que implica $u \in G_x(k,m) \subset \bigcup G_x(k,m) = G_x(k)$. Como existe k_x tal que $G_x(k) = G_x$, para todo $k \geq k_x$, então $u \in G_x$ e isto conclui a prova da afirmação. Segue, pois, que cada conjunto $M_{k,m,j} = \{x \in M_{k,m};\ \dim G_x \geq j\}$ é fechado e que G_x varia continuamente com x em cada $M_{k,m,j} \setminus M_{k,m,j+1}$. Notemos que $(M_{k,m,j} \setminus M_{k,m,j+1})$ é uma cobertura de $\widehat{\Lambda}(j)$ por conjuntos mensuráveis e $\pi^{-1}|(M_{k,m,j} \setminus M_{k,m,j+1})$ é mensurável. Ora, $\pi^{-1}|(M_{k,m,j} \setminus M_{k,m,j+1}) = G|(M_{k,m,j} \setminus M_{k,m,j+1})$. Logo, pela Proposição 1.2 (página 15), segue que $G|\widehat{\Lambda}(j)$ é mensurável.

Enfim, passemos à segunda parte da demonstração. Vamos provar que $\dim G_x > 0$ para μ-quase todo ponto $x \in M$. Para isto, basta mostrar que, para todo $k \geq 1$, $G_x(k) \neq$

$\{0\}$ em μ-quase todo ponto $x \in M$. Seja $k \geq 1$ fixo e, para $m \geq 1$, definamos Y_m como o conjunto dos pontos $x \in M$ tais que existe $u \in F_x \setminus \{0\}$ satisfazendo

$$\|L_{-n}(x)u\| \leq \exp(-n(\lambda_1 - \frac{1}{k}))\|u\| \tag{3.8}$$

para $1 \leq n \leq m$. Afirmamos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\mu(Y_m) \geq \delta \tag{3.9}$$

para $m \geq 1$. Observemos que isto implica que o conjunto $Y = \bigcap_{m=1}^{\infty} Y_m$ tem medida positiva, porque $Y_1 \supset Y_2 \supset Y_3 \supset \cdots$ e cada Y_m tem medida positiva. Se $x \in Y$ então existe uma sequência de vetores unitários $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, com $v_i \in Y_i$, tais que vale (3.8). Tomando um vetor v que seja limite de alguma subsequência de (v_n) então vale (3.8) e $0 \neq v \in G_x(k)$. Mas

$$L_n(x)G_x(k) = G_{f^n(x)}(k)$$

e então tem-se $\dim G_x(k) > 0$ se $x \in \bigcup_{n\geq 0} f^n(\bigcap_{m\geq 1} Y_m)$. Como $\bigcup_{n\geq 0} f^n(\bigcap_{m\geq 1} Y_m)$ é invariante e tem medida positiva, pois contém Y, segue da ergodicidade de μ que $\dim G_x(k) > 0$ em μ-quase todo ponto. Como consequência, a prova do lema foi reduzida a verificar (3.9).

Seja $u \in F_x$, $N \geq 1$ tal que $\|L_N(x)u\| \geq \exp(N(\lambda_1 - \frac{1}{2k}))$ e definamos

$$a_i = \log\|L^{-1}(f^i(x))(\frac{L_{i+1}(x)u}{\|L_{i+1}(x)u\|})\|,$$

para $0 \leq i \leq N-1$.

Observemos que $a_i \leq \log\|L^{-1}\|$, pois

$$\log\|L^{-1}(f^i(x))(\frac{L_{i+1}(x)u}{\|L_{i+1}(x)u\|})\| \leq \log\|L^{-1}(f^i(x))\|\|\frac{L_{i+1}(x)u}{\|L_{i+1}(x)u\|}\| = \log\|L^{-1}(f^i(x))\|$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N-1} a_j &= \sum_{j=0}^{N-1} \log\frac{\|L^{-1}(f^j(x))L_{j+1}(x)u\|}{\|L_{j+1}(x)u\|} = \sum_{j=0}^{N-1} \log\frac{\|L^{-1}(f^j(x))L(f^j(x))L_j(x)u\|}{\|L_{j+1}(x)u\|} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \log\frac{\|L_j(x)u\|}{\|L_{j+1}(x)u\|} = \log\frac{\|u\|}{\|L(x)u\|} + \cdots + \log\frac{\|L_{N-1}(x)u\|}{\|L_N(x)u\|} \\
&= \log\|u\| - \log\|L(x)u\| + \cdots + \log\|L_{N-1}(x)u\| - \log\|L_N(x)u\| \\
&= \log\frac{\|u\|}{\|L_N(x)u\|}.
\end{aligned}$$

Como $\frac{\|u\|}{\|L_N(x)u\|} \leq \exp(N(\frac{1}{2k} - \lambda_1))$, temos $\log \frac{\|u\|}{\|L_N(x)u\|} \leq (N(\frac{1}{2k} - \lambda_1))$.

Pelo Lema 3.5, tomando $\lambda = -\lambda_1 + \frac{1}{2k}$, $\epsilon = \frac{1}{2k}$ e $A = \log \|L^{-1}\|$, obtemos números $n_1, \cdots n_l$ tais que $0 \leq n_1 < \cdots < n_l \leq N-1$, com $l \geq N\delta$ e satisfazendo

$$\log \frac{\|L_n(x)u\|}{\|L_{n_i}(x)u\|} = \sum_{j=n}^{n_i-1} a_j \leq (n_i - n)(-\lambda_1 + \frac{1}{k}) \tag{3.10}$$

para todo $0 \leq n < n_i$. Seja $v_i = \frac{L_{n_i}(x)u}{\|L_{n_i}(x)u\|}$. Então, tendo em vista que $L_n(x)u = L_{n-n_i}(f^{n_i}(x))L_{n_i}(x)u$, obtemos de (3.10)

$$\|L_{n-n_i}(f^{n_i}(x))v_i\| \leq \exp\left((n - n_i)(\lambda_1 - \frac{1}{k})\right),$$

para $1 \leq n_i - n < n_i$, e isto acarreta $f^{n_i}(x) \in Y_{n_i}$. Do fato que $Y_{n_i} \subset Y_m$ quando $n_i \geq m$, segue que

$$\frac{1}{N}\#\{0 \leq j < N;\ f^j(x) \in Y_m\} \geq \frac{l-m}{N} \geq \frac{N\delta - m}{N} = \delta - \frac{m}{N}.$$

Fazendo $N \to +\infty$, tem-se

$$\tau(x, Y_m) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N}\#\{0 \leq j < N;\ f^j(x) \in Y_m\} \geq \delta$$

Mas como μ é ergódica, resulta que $\mu(Y_m) = \tau(x, Y_m) \geq \delta$ (veja Observação 2.5 na página 26), provando nossa afirmação.

Finalmente, definamos

$$C_\epsilon(x) = \sup_{n \geq 0} \left\{ \frac{\|L_n(x)u\|}{\exp(n(\lambda_1 + \epsilon))\|u\|};\ u \in G_x \setminus \{0\} \right\}.$$

De

$$u = L_n(f^{-n+1}(x))L_{-n}(x)u$$

obtemos

$$\|u\| \leq C_\epsilon(f^{-n+1}(x)) \exp(n(\lambda_1 + \epsilon))\|L_{-n}(x)u\|$$

donde

$$\frac{1}{n}\log\|u\| \leq \frac{1}{n}\log C_\epsilon(f^{-n+1}(x)) + (\lambda_1 + \epsilon) + \frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\|$$

e, lembrando que C_ϵ tem crescimento subexponencial,

$$
\begin{aligned}
0 \leq \liminf_{n\to-\infty} \frac{1}{n}\log\|L_{-n}(x)u\| + \lambda_1 + \epsilon &= \liminf_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| + \lambda_1 + \epsilon \\
&= -\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| + \lambda_1 + \epsilon
\end{aligned}
$$

e, como $\epsilon > 0$ é arbitrário,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| \leq \lambda_1.$$

Pela Proposição 3.2, isto acarreta

$$\limsup_{n\to-\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| \leq \lambda_1.$$

Agora, definamos $C_\epsilon(x)$ como sendo

$$C_\epsilon(x) = \sup_{n\geq 0}\left\{\frac{\|L_{-n}(x)u\|}{\exp(-n(\lambda_1+\epsilon))\|u\|};\ u \in G_x \setminus \{0\}\right\}.$$

Visto que

$$u = L_{-n}(f^{n-1}(x))L_n(x)u$$

resulta

$$\|u\| \leq C_\epsilon(f^{n-1}(x))\exp(-n(\lambda_1+\epsilon))\|L_n(x)u\|$$

acarretando

$$0 \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| - \lambda_1 - \epsilon$$

e, assim,

$$\lambda_1 \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\|.$$

Novamente pela Proposição 3.2, obtemos

$$\lambda_1 \leq \liminf_{n\to-\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\|.$$

Ora, dada qualquer sequência limitada (x_n) de números reais vale

$$\limsup x_n \geq \liminf x_n.$$

Logo,

$$\limsup_{n\pm\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| = \liminf_{n\pm\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\|$$

e, portanto,

$$\lim_{n\pm\infty} \frac{1}{n}\log\|L_n(x)u\| = \lambda_1,$$

completando a prova do lema. □

3.6 Demonstração do Lema 3.4

Seja Σ o espaço dos morfismos de fibrados vetoriais mensuráveis $G^{\perp} \to G$. Obteremos um morfismo $A \in \Sigma$ tal que $H = graf(A) = \{u + Au;\ u \in G^{\perp}\}$ seja o subfibrado como o do enunciado do Lema.

Consideremos a transformação $\Phi : \Sigma \to \Sigma$, definido por

$$\Phi(A)(x) = L^{-1}(f(x))A(f(x))\widehat{L}(x)$$

e seja, $P = (L|G^{\perp} - \widehat{L}) : G^{\perp} \to G$. Dado $u \in G^{\perp}$,

$$\begin{aligned} L(u + Au) &= Lu + LAu = \widehat{L}u + Pu + LAu = \\ &= \widehat{L}u + A(\widehat{L}u) + L(L^{-1}Pu) + LAu - L(L^{-1}A\widehat{L}u) = \\ &= \widehat{L}u + A(\widehat{L}u) + L(L^{-1}P + A - L^{-1}A\widehat{L})u. \end{aligned}$$

Notemos que $\widehat{L}u \in G^{\perp}$ enquanto que as duas últimas parcelas pertencem a G.

Portanto, H é invariante por L se, e somente se, $L^{-1}P + A - \Phi(A) = 0$ (transformação nula), ou seja, se e apenas se,

$$A - \Phi(A) = -L^{-1}P \tag{3.11}$$

Façamos $B = -L^{-1}P$. Provemos que existem $\lambda < 0$ e uma função mensurável $C : M \to \mathbb{R}$ tais que $\|\Phi^n(B)x\| \leq C(x)\exp(\lambda n)$ para todo $n \geq 0$ e μ-quase toda parte. Isto assegura a convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} \Phi^n(B)$ em μ-quase toda parte. De fato, consideremos a série $\sum_{n=0}^{\infty} C(x)\exp(\lambda n)$. Temos:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{C(x)\exp(\lambda(n+1))}{C(x)\exp(\lambda n)} = \lim_{n\to+\infty} \exp(\lambda) = \exp(\lambda) < 1$$

e, pelo teste da razão, segue que a série $\sum_{n=0}^{\infty} C(x)\exp(\lambda n)$ converge. Agora, pelo teste da comparação, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \|\Phi^n(B)x\|$ converge e, portanto, $\sum_{n=0}^{\infty} \Phi^n(B)x$ também converge.

Vejamos ainda que $A = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^n(B)$ satisfaz (3.11), pois

$$\begin{aligned} A - \Phi(A) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^n(B) - \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{n+1}(B) \\ &= B + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi^n(B) - \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{n+1}(B) = B. \end{aligned}$$

Resta então obter λ e C. Com esta finalidade, tomemos $\epsilon > 0$ e definamos

$$K_\epsilon(x) = \sup_{n\geq 0} \frac{\|\widehat{L}_n(x)\|}{\exp(n(\lambda_1(\widehat{L}) + \epsilon))} \quad e \quad C_\epsilon(x) = \sup_{n\geq 0} \frac{\|(L^{-1}|G)_n(x)\|}{\exp(n(\lambda_1(L^{-1}|G) + \epsilon))}.$$

Então

$$\|\Phi^n(B)x\| = \|(L^{-1}|G)_n(f^n(x))B(f^n(x))\widehat{L}_n(x)\| \leq \|(L^{-1}|G)_n(f^n(x))\|\|B(f^n(x))\|\|\widehat{L}_n(x)\|$$

Como

$$\frac{\|(L^{-1}|G)_n(f^n(x))\|}{\exp(n(\lambda_1(L^{-1}|G) + \epsilon))} \leq \sup_{n\geq 0} \frac{\|(L^{-1}|G)_n(f^n(x))\|}{\exp(n(\lambda_1(L^{-1}|G) + \epsilon))}$$

e

$$\frac{\|\widehat{L}_n(x)\|}{\exp(n(\lambda_1(\widehat{L}) + \epsilon))} \leq \sup_{n\geq 0} \frac{\|\widehat{L}_n(x)\|}{\exp(n(\lambda_1(\widehat{L}) + \epsilon))}$$

segue que

$$\|\Phi^n(B)x\| \leq C_\epsilon(f^n(x))\|B(f^n(x))\|K_\epsilon(x)\exp(n(\lambda_1(\widehat{L}) + \lambda_1(L^{-1}|G) + 2\epsilon)).$$

Observemos que C_ϵ tem crescimento subexponencial.

Para $u \in G_x \setminus \{0\}$, seja

$$C_\epsilon(x,u) = \sup_{n\geq 0} \frac{\|(L^{-1}|G)_n(x)u\|}{\exp(-n(\lambda_1(L^{-1}|G) + \epsilon))\|u\|}$$

Temos:

$$n = 0 \Rightarrow \frac{\|(L^{-1}|G)_n(x)u\|}{\exp(-n(\lambda_1(L^{-1}|G) + \epsilon))\|u\|} = 1$$

e

$$\frac{\|(L^{-1}|G)_{n+1}(x)u\|}{\exp(-(n+1)(\lambda_1(L^{-1}|G) + \epsilon))\|u\|} = \frac{1}{\exp(-\lambda_1(L^{-1}|G) - \epsilon)} \cdot \frac{\|(L^{-1}|G)_{n+1}(x)u\|}{\exp(-n(\lambda_1(L^{-1}|G) + \epsilon))\|u\|}$$

e esta última expressão é igual a

$$\frac{\|(L^{-1}|G)(x)u\|}{\exp(-\lambda_1(L^{-1}|G)-\epsilon)\|u\|}\cdot\frac{\|(L^{-1}|G)_n(f^{-1}(x))(L^{-1}|G)(x)u\|}{\exp(-n(\lambda_1(L^{-1}|G)+\epsilon))\|(L^{-1}|G)(x)u\|}.$$

Logo,

$$C_\epsilon=\max\left\{1,\frac{\|(L^{-1}|G)(x)u\|}{\exp(-\lambda_1(L^{-1}|G)-\epsilon)\|u\|}\cdot C_\epsilon(f^{-1}(x),(L^{-1}|G)(x)u)\right\}.$$

Sejam $\alpha,\beta>0$ tais que

$$\alpha\leq\frac{\|(L^{-1}|G)(x)u\|}{\exp(-\lambda_1(L^{-1}|G)-\epsilon)\|u\|}\leq\beta.$$

(Observemos que isto é possível, pois L^{-1} tem possui norma limitada.)

Como consequência,

$$\begin{aligned}C_\epsilon(x,u)&\geq\frac{\|(L^{-1}|G)(x)u\|}{\exp(-\lambda_1(L^{-1}|G)-\epsilon)\|u\|}\cdot C_\epsilon(f^{-1}(x),(L^{-1}|G)(x)u)\\&\Rightarrow\frac{C_\epsilon(x,u)}{C_\epsilon(f^{-1}(x),(L^{-1}|G)(x)u)}\geq\alpha.\end{aligned}$$

E, se $C_\epsilon(x,u)=1$, então $\frac{C_\epsilon(x)}{C_\epsilon(f^{-1}(x))}\leq 1$. Mas, se $C_\epsilon(x,u)=\frac{\|(L^{-1}|G)(x)u\|}{\exp(-\lambda_1(L^{-1}|G)-\epsilon)\|u\|}\cdot C_\epsilon(f^{-1}(x),(L^{-1}|G)(x)u)$, segue que

$$\frac{C_\epsilon(x,u)}{C_\epsilon(f^{-1}(x),L(x)u)}=\frac{\|(L^{-1}|G)(x)u\|}{\exp(-\lambda_1(L^{-1}|G)-\epsilon)\|u\|}\leq\beta.$$

Assim,

$$\alpha\leq\frac{C_\epsilon(x)}{C_\epsilon(f^{-1}(x))}\leq\max\{1,\beta\},$$

para todo x. Vemos, pois que $(\log(C_\epsilon\circ f^{-1})-\log C_\epsilon)$ é limitada e, em particular, integrável. Agora, no caso em que $n\to+\infty$, definamos

$$C_\epsilon(x)=\sup_{n\geq 0}\frac{\|(L^{-1}|G)_{-n}(x)u\|}{\exp(n(\lambda_1(L^{-1}|G)+\epsilon))\|u\|}$$

e, analogamente, verificamos que $(\log(C_\epsilon\circ f)-\log C_\epsilon)$ é integrável. Portanto, pelo Lema 3.1,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log(C_\epsilon\circ f^n)=0\ \ e\ \ \lim_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}\log(C_\epsilon\circ f^{-n})=0,$$

justificando nossa afirmação.

A seguir, definamos

$$D_\epsilon(x)=\sup_{n\geq 0}\frac{C_\epsilon(f^n(x))}{\exp(n\epsilon)}.$$

Temos $D_\epsilon(x)$ finito, pois $C_\epsilon(f^n(x))$ é limitado e $\exp(-n\epsilon) \to 0$ quando $n \to +\infty$.

Deste modo,

$$\begin{aligned}
\|\Phi^n(B)x\| &\leq C_\epsilon(f^n(x))\|B(f^n(x))\|K_\epsilon(x)\exp(n(\lambda_1(\widehat{L}) + \lambda_1(L^{-1}|G) + 2\epsilon)) \\
&\leq \frac{C_\epsilon(f^n(x))}{\exp(n\epsilon)}\|B(f^n(x))\|K_\epsilon(x)\exp(n(\lambda_1(\widehat{L}) + \lambda_1(L^{-1}|G) + 3\epsilon)) \\
&\leq D_\epsilon(x)\|B(f^n(x))\|K_\epsilon(x)\exp(n(\lambda_1(\widehat{L}) + \lambda_1(L^{-1}|G) + 3\epsilon)).
\end{aligned}$$

Notemos que $\lambda_1(L^{-1}|G) = -\lambda_1(L)$; logo, basta tomar $\lambda = \lambda_1(\widehat{L}) - \lambda_1(L) + 3\epsilon$ e $C(x) = D_\epsilon(x)\|B(f^n(x))\|K_\epsilon(x)$, onde $\epsilon > 0$ é escolhido de modo que $\lambda < 0$.

Resta ainda provar que $\lambda_1(L|H) = \lambda_1(\widehat{L})$. Com este propósito, seja $\widetilde{A} : G^\perp \to H$ dada por $\widetilde{A}u = u + Au$. Por construção, tem-se $L \circ \widetilde{A} = \widetilde{A} \circ \widehat{L}$ ($L \circ \widetilde{A}u = L(u + Au) = Lu + LAu = \widehat{L}u + A(\widehat{L}u) = \widetilde{A} \circ \widehat{L}u$), ou seja,

$$(L|H)(x) = \widetilde{A}(f(x))\widehat{L}(x)(\widetilde{A})^{-1}(x)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lambda_1(L|H, x) &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|(L|H)_n(x)\| = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|\widetilde{A}(f^n(x))\widehat{L}_n(x)(\widetilde{A})^{-1}(x)\| \\
&\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|\widetilde{A}(f^n(x))\| + \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|\widehat{L}_n(x)\| + \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|(\widetilde{A})^{-1}(x)\|.
\end{aligned}$$

O segundo termo da última desigualdade acima é igual a $\lambda_1(\widehat{L})$ e o terceiro é nulo. Além disso,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log\|\widetilde{A}(f^n(x))\| = 0 \tag{3.12}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
1 \leq \|id\| \leq \|\widetilde{A}(f^n(x))\| &= \|id + A(f^n(x))\| \leq 1 + \|A(f^n(x))\| \\
&= 1 + \|\sum_{m=0}^{\infty}\Phi^m(B(f^n(x))\| \leq 1 + \sum_{m=0}^{\infty}\|\Phi^m(B(f^n(x))\| \\
&\leq 1 + C(f^n(x))\sum_{m=0}^{\infty}\exp(\lambda m) = 1 + \frac{C(f^n(x))}{1-\exp(\lambda)}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$1 \leq 1 + \|\widetilde{A}(f^n(x))\| \leq 1 + \frac{C(f^n(x))}{1-\exp(\lambda)} \Rightarrow 0 \leq \|\widetilde{A}(f^n(x))\| \leq \frac{C(f^n(x))}{1-\exp(\lambda)}.$$

Resulta então que

$$\frac{1}{n}\log\|\widetilde{A}(f^n(x))\| \leq \frac{1}{n}\log\frac{C(f^n(x))}{1-\exp(\lambda)},$$

ou seja,

$$\frac{1}{n}\log\|\widetilde{A}(f^n(x))\| \leq \frac{1}{n}\log C(f^n(x)) - \frac{1}{n}\log(1-\exp(\lambda))$$

e, assim,

$$0 \leq \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|\widetilde{A}(f^n(x))\| \leq \limsup_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log C(f^n(x)).$$

Afirmamos que $K_\epsilon(x)$ e $D_\epsilon(x)$ têm crescimento subexponencial.

Para $v \in G_x^\perp \setminus \{0\}$, seja

$$K_\epsilon(x,v) = \sup_{n\geq 0}\left\{\frac{\|\widehat{L}_n(x)v\|}{\exp(n(\lambda_1(\widehat{L})+\epsilon)\|v\|}\right\}.$$

Observemos que se $n=0$ então

$$\frac{\|\widehat{L}_n(x)v\|}{\exp(n(\lambda_1(\widehat{L})+\epsilon)\|v\|} = 1$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\|\widehat{L}_{n+1}(x)v\|}{\exp((n+1)(\lambda_1(\widehat{L})+\epsilon)\|v\|} &= \frac{1}{\exp(\lambda_1(\widehat{L})+\epsilon)}\cdot\frac{\|\widehat{L}_{n+1}(x)v\|}{\exp(n(\lambda_1(\widehat{L})+\epsilon)\|v\|} = \\ &= \frac{\|\widehat{L}(x)v\|}{\exp(\lambda_1(\widehat{L})+\epsilon)\|v\|}\cdot\frac{\|\widehat{L}_n(f(x))\widehat{L}(x)v\|}{\exp(n(\lambda_1(\widehat{L})+\epsilon))\|\widehat{L}(x)v\|}.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$K_\epsilon(x,v) = \max\left\{1, \frac{\|\widehat{L}(x)v\|}{\exp(\lambda_1(\widehat{L})+\epsilon)\|v\|}\cdot K_\epsilon(f(x),\widehat{L}(x)v)\right\}.$$

Sejam a_1 e b_1 reais positivos tais que $a_1 \leq \frac{\|\widehat{L}(x)v\|}{\exp(\lambda_1(\widehat{L})+\epsilon)\|v\|} \leq b_1$. Temos:

$$a_1 \leq \frac{K_\epsilon(x)}{K_\epsilon(f(x))} \leq \max\{1, b_1\}$$

Logo, $(\log(K_\epsilon \circ f) - \log K_\epsilon)$ é limitada e, em particular, integrável. Pelo Lema 3.1,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log(K_\epsilon\circ f^n) = 0.$$

Analogamente, mostra-se que

$$\lim_{n\to-\infty}\frac{1}{n}\log(K_\epsilon\circ f^n)=0.$$

Portanto, K_ϵ tem crescimento subexponencial.

Agora, notemos que

$$n=0\Rightarrow\frac{C_\epsilon(f^n(x))}{\exp(n\epsilon)}=C_\epsilon(x)=\max\left\{1,\frac{\|(L^{-1}|G)(x)u\|}{\exp(-\lambda_1(L^{-1}|G)-\epsilon)\|u\|}\cdot C_\epsilon(f^{-1}(x))\right\}$$

e

$$\begin{aligned}n\neq 0\Rightarrow\frac{C_\epsilon(f^n(x))}{\exp(n\epsilon)}&=\max\left\{\frac{1}{\exp(n\epsilon)},\frac{\|(L^{-1}|G)(f^n(x))u\|}{\exp(-\lambda_1(L^{-1}|G)+(n-1)\epsilon)\|u\|}\cdot C_\epsilon(f^{n-1}(x))\right\}\\&=\max\left\{\frac{1}{\exp(n\epsilon)},\frac{\|(L^{-1}|G)(f^n(x))u\|}{\exp(-\lambda_1(L^{-1}|G)-\epsilon)\|u\|}\cdot\frac{C_\epsilon(f^{n-1}(x))}{\exp(n\epsilon)}\right\}.\end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$D_\epsilon(x)=\max\left\{1,\frac{\|(L^{-1}|G)(f^n(x))u\|}{\exp(-\lambda_1(L^{-1}|G)-\epsilon)\|u\|}\cdot D_\epsilon(f^{-1}(x))\right\}.$$

Tomando constantes positivas α e β tais que $\alpha\leq\frac{\|(L^{-1}|G)(f^n(x))u\|}{\exp(-\lambda_1(L^{-1}|G)-\epsilon)\|u\|}\leq\beta$, temos

$$\alpha\leq\frac{D_\epsilon(x)}{D_\epsilon(f^{-1}(x))}\leq\max\{1,\beta\},$$

donde $(\log(D_\epsilon\circ f^{-1})-\log D_\epsilon)$ é limitada e, em particular, integrável. Uma vez mais, usando o Lema 3.1, concluímos que $\frac{1}{n}\log(D_\epsilon\circ f^{-n})\to 0$, quando $n\to+\infty$. De modo similar, prova-se que $\frac{1}{n}\log(D_\epsilon\circ f^n)\to 0$, quando $n\to+\infty$. Portanto, $D_\epsilon(x)$ tem crescimento subexponencial.

Lembrando que $C(x)=D_\epsilon(x)\|B(f^n(x))\|K_\epsilon(x)$ e que B tem norma limitada, segue que

$$\frac{1}{n}\log C(f^n(x))=\frac{1}{n}\log D_\epsilon(f^n(x))+\frac{1}{n}\log\|B(f^{2n}(x))\|+\frac{1}{n}\log K_\epsilon(f^n(x))$$

o que nos permite concluir que C tem crescimento subexponencial e, portanto,(3.12) se verifica. Isto, por sua vez, acarreta $\lambda_1(L|H)\leq\lambda_1(\widehat{L})$.

Para finalizar, tendo em vista que $\widehat{L}(x) = (\widetilde{A})^{-1}(f(x))(L|H)(x)\widetilde{A}(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\widehat{L}) &= \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|\widehat{L}_n(x)\| = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|(\widetilde{A})^{-1}(f^n(x))(L|H)_n(x)\widetilde{A}(x)\| \\
&\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|(\widetilde{A})^{-1}(f^n(x))\| + \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|(L|H)_n(x)\| \\
&+ \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|\widetilde{A}(x)\|.
\end{aligned}$$

O segundo termo à direita desta última desigualdade é $\lambda_1(L|H), x)$ e o terceiro é nulo. Uma vez que $\|(\widetilde{A})^{-1}\| \leq 1$ (pois $(\widetilde{A})^{-1} = \pi|H : H \to G^{\perp}$) em μ-quase toda parte, conclui-se que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \|(\widetilde{A})^{-1}(f^n(x))\| = 0.$$

Deste modo, $\lambda_1(\widehat{L}) \leq \lambda_1(L|H, x)$ e isto conclui a prova do lema.

Referências Bibliográficas

[1] CASTRO JUNIOR, A. A.; **Curso de Teoria da Medida**, Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[2] CHERNOV, N.; MARKARIAN, R.; **Introduction to the Ergodic Theory of Chaotic Billiards**, Monografías del IMCA. IMCA, Lima, 2001.

[3] FERNANDEZ, P. J.; **Medida e Integração**, Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 1976.

[4] HALMOS, P. R.; **Measure Theory**. Van Nostrand Reinhold Company, New York, thirteenth print, 1969. (First edition: 1950)

[5] HIRSCH, M. W.; **Differential Topology**, Graduate Texts in Mathematics, nº 33. Springer-Verlag, New York, 1976.

[6] ISNARD, C.; **Introdução à Medida e Integração**, Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 2007.

[7] LIMA, E. L; **Variedades Diferenciáveis**, Publicações Matemáticas. IMPA, Rio de Janeiro, 2008.

[8] MAÑÉ, R.; **Teoria Ergódica**, Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 1983.

[9] OLIVEIRA, K.; VIANA, M.; **Introdução à Teoria Ergódica**. (Não publicado)

[10] VIANA, M.; **Multiplicative Ergodic Theorem of Oseledets**. (Texto encontrado na página pessoal de Marcelo Viana em www.impa.br)

[11] WALTERS, P.; **An Introduction to Ergodic Theory**, Graduate Texts in Mathematics, nº 79. Springer-Verlag, New York, 1982.

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto,_______/_______/_______

Assinatura