

UNESP

Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá

**Modelos não-lineares com campos
escalares: ladrilhamento e
mundos-brana**

Luis Enrique Arroyo Meza

Modelos não-lineares com campos escalares: ladrilhamento e mundos-brana

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do Título de Mestre em Física na área de Partículas e Campos

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Batista Hott.

Co-orientador: Prof. Dr. Alvaro de Souza Dutra.

Guaratinguetá

2011

DADOS CURRICULARES

LUIS ENRIQUE ARROYO MEZA

NASCIMENTO	26 / 06 / 1976 - LIMA, PERÚ
FILIAÇÃO	Julio Máximo Arroyo Gutierrez Juana Lucia Meza Yauli.
1994 / 2003	Curso de Graduação - Bacharelado em Física Facultad de Ciencias Naturales y Matemática Universidad Nacional del Callao - UNAC Lima-Perú.
2009 / 2011	Curso de Pós-Graduação em Física, nível Mestrado, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá Universidade Estadual Paulista - UNESP São Paulo-Brasil.

DEDICATÓRIA

*Esta dissertação é dedicada aos meus pais **Julio e Juana**, por me ensinar o amor ao estudo.*

AGRADECIMENTOS

Quero começar por agradecer aos meus pais **Julio** e **Juana**, por seus ensinamentos para enfrentar a vida. Aos meus irmãos, pelo apoio constante. Amigos, professores, que sempre confiaram em mim. Todos eles me ajudaram nesta parte da minha vida.

Agradeço de todo coração aos professores Marcelo Batista Hott e Álvaro de Souza Dutra, por terem me orientado neste trabalho de mestrado e pela formação que me deram.

Agradeço aos professores do grupo de partículas e campos da Unesp-Campus de Guaratinguetá: Professores Drs.: Antonio S. de Castro, Alvaro de Souza Dutra, Denis Dalmazi, Julio Marny Hoff da Silva e Marcelo B. Hott, todos eles professores formadores e amigos, os quais me aconselharam e me orientaram nesta etapa do mestrado.

Aos funcionários do curso de pós-graduação, pela convivência durante o tempo de trabalho: Christina, Regina, Sidney e Juliana.

Agradeço a meus amigos da república Amoribunda: Conan, Xuxa, Bituca, Coió, Kapivara, Cumpadi, Quase, Crips, Carinha, Baby, Coxo, Sebola, Cérebro, Rural, Marmita, B1, B3, Tubão e Celina, com quem compartilho uma boa amizade; a meus conterrâneos peruanos, Angel, Benito, Freddy, Augusto, Elver, Andres, Cristian, Carlos e Gretta, pela confiança e amizade.

Quero agradecer em especial a meu amigo Luis Benito, aluno do curso de doutorado na área de física de partículas elementares e campos nesta pós-graduação, pela colaboração no tema de localização de férmions e pelas tertúlias dos sábados.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - **CAPES**.

*“... o maior triunfo do poder do gênio humano é
que o homem é capaz de apreender as coisas além
dos limites de sua imaginação.”*

L. D. Landau

Meza, L. E. A (**Modelos não-lineares com campos escalares: ladrilhamento e mundos-brana**) 2011. 99 f. (Dissertação de Mestrado em Física), Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, SP 2011

Resumo

Nesta dissertação começamos estudando modelos não-lineares com campos escalares reais em $(1+1)$ dimensões do espaço-tempo plano no âmbito da teoria supersimétrica. Analisamos as implicações da preservação da simetria Z_3 no âmbito de uma teoria que preserva a supersimetria. Procuramos por um possível ladrilhamento no plano das configurações, plano (ϕ, χ) , ainda com supersimetria mas com uma maior riqueza em simetrias discretas. Para isso, propusemos o superpotencial W , cuja configuração dos mínimos do potencial e os setores topológicos BPS e não-BPS, no plano (ϕ, χ) , apresentam uma estrutura com simetria discreta complexa, na qual está contida a simetria discreta $Z_2 \otimes Z_2$. Além disso, estudamos o comportamento das soluções topológicas através da variação dos valores de um parâmetro c_0 associado à equação da órbita.

Também estudamos modelos não-lineares com campos escalares reais acoplados à gravidade em $(4+1)$ dimensões do espaço-tempo deformado. Consideramos alguns modelos que geram branas espessas (defeitos topológicos) onde a gravidade pode ser localizada. Nós achamos o valor da energia do campo escalar para todo modelo que gera brana espessa. Também estudamos a energia do sistema e sua relação com as equações de Bogomol'nyi e as Equações de Einstein. Finalmente, ampliamos a análise de um modelo com dinâmica não-canônica no cenário de mundos-brana. Neste caso, constatamos que, embora o modelo possua uma dinâmica não-canônica, ele admite branas espessas que suportam localização de férmions sem massa.

PALAVRAS - CHAVE: Junção de defeitos, Ladrilhamento, Equação de órbita, Branas espessas, Mundos-brana com dinâmica não-canônica.

Meza, L. E. A (**Nonlinear models with scalar fields: Tiling and braneworlds**)
 2011. 99 f. Dissertation (Master in Physics), Faculdade de Engenharia do Campus de
 Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, SP 2011

Abstract

In this dissertation we begin by studying non-linear models with real scalar fields in (1+1) dimensions of a space-time. Such models can be seen as the bosonic sector of a supersymmetric theory. We analyze the implications of the Z_3 symmetry under a theory that preserves supersymmetry. We look for the necessary conditions to tile the configuration plane (ϕ, χ) , by keeping the supersymmetry together with a great wealth of discrete symmetries. For this, we propose a superpotential W , whose configuration of minima of the potential and topological BPS and non-BPS solutions have a complex structure with discrete symmetry, as the $Z_2 \otimes Z_2$ symmetry. Furthermore, we study the behavior of solutions of the equations by means of the orbit equation.

Moreover, we study non-linear models with real scalar fields coupled to gravity in (4+1) dimensions. We consider some models that generate thick branes (topological defects) where gravity can be localized. We analyze the implications of the metric AdS_5 and the minimum of the energy associated to the scalar fields, particularly in the region of the extra space coordinate where the energy density of matter is negative. We also study the energy of the system and its relationship to Bogomol'nyi and Einstein equations. Finally, we finish the analysis of thick branes in warped space-time by introducing a model which engenders a generalized dynamics for the scalar field. We show that despite the non-canonical dynamics, such models engenders thick branes which can support localized massless fermions.

PALAVRAS - CHAVE: Stability of solitonic solution, Junctions of defects, Tiling of defects, Thick branes, World brane.

Lista de Figuras

3.1	Junção Tripla.	15
3.2	Rede hexagonal.	18
4.1	Triângulo Equilátero, Simetria Z_3	20
4.2	Configuração dos mínimos do potencial no plano (ϕ, χ) , para $\nu = 1, \mu = -1$ e $\lambda = 4$	22
4.3	Configuração dos setores topológicos. Os setores com energia E_1 (linhas tracejadas) e E_2 (linhas contínuas). Os setores topológicos apresentam simetria Z_2	23
4.4	Configuração dos mínimos e dos setores topológicos no plano (ϕ, χ) , mostrando simetria discreta Z_4 , para $\nu = 1, \mu = -1$	24
4.5	Órbita no plano (ϕ, χ) , para $\nu = 1, \mu = -1$ e $c_0 = 1$	25
4.6	Órbita no plano (ϕ, χ) , para $\nu = 1, \mu = -1$	26
4.7	Órbita no plano (ϕ, χ) , para $\nu = -1, \mu = 4$ e $c_0 = -0.01$	26
4.8	Órbita no plano (ϕ, χ) , para $\nu = 1, \mu = -1$ e $c_0 = 2.01$	26
4.9	Órbita no plano (ϕ, χ) , para $\nu = 1, \mu = -1$ e $c_0 = 0$	27
4.10	Órbita no plano (ϕ, χ) , para $\nu = 1, \mu = -1$ e $c_0 = 2$	27
4.11	Soluções $\phi^+(x)$ e $\chi^+(x)$, para $\nu = 1, \mu = -1$	28
4.12	Soluções $\phi^-(x)$ e $\chi^-(x)$, para $\nu = 1, \mu = -1$	28
4.13	Densidade de energia cinética $k(x)$, potencial $p(x)$ (linha contínua), e total $\varepsilon(x)$ (linha tracejada), para $\nu = 1, \mu = -1$	29
4.14	Órbitas no plano (ϕ, χ) para $c_0 = 0$, com $\nu = 1, \mu = -1$	30
4.15	Soluções $\phi^+(x)$ (linha tracejada) e $\chi^+(x)$ (linha contínua), para $\nu = 1$, $\mu = -1$	31
4.16	Soluções $\phi^-(x)$ (linha tracejada) e $\chi^-(x)$ (linha contínua), para $\nu = 1$, $\mu = -1$	31
4.17	Densidade de energia cinética $k(x)$, potencial $p(x)$ (linha contínua), e total $\varepsilon(x)$ (linha tracejada), para $\nu = 1, \mu = -1$	32
4.18	Órbitas no plano (ϕ, χ) , para $\nu = 1, \mu = -1$	33
4.19	Perfis dos campos ϕ (linha tracejada) e χ (linha contínua), para $\nu = 1$, $\mu = -1$ e $c_0 = -5$	34

4.20	Perfis dos campos ϕ (linha tracejada) e χ (linha contínua), para $\nu = 1$, $\mu = -1$ e $c_0 = -0.00001$	34
4.21	Perfis dos campos ϕ (linha tracejada) e χ (linha contínua), para $\nu = 1$, $\mu = -1$ e $c_0 = 2.00001$	35
4.22	Perfis dos campos ϕ (linha tracejada) e χ (linha contínua), para $\nu = 1$, $\mu = -1$ e $c_0 = -5$	35
4.23	Perfis dos campos ϕ (linha tracejada) e χ (linha contínua), para $\nu = 1$, $\mu = -1$ e $c_0 = -0.00001$	36
4.24	Perfis dos campos ϕ (linha tracejada) e χ (linha contínua), para $\nu = 1$, $\mu = -1$ e $c_0 = 2.00001$	36
4.25	Órbitas no plano (ϕ, χ) , para $\nu = -1$, $\mu = 1$ e $c_0 = 4$	37
4.26	Órbitas no plano (ϕ, χ) , para $\nu = -1$, $\mu = 1$ e $c_0 = -0.01$	37
4.27	Órbitas no plano (ϕ, χ) , para $\nu = -1$, $\mu = 1$ e $c_0 = 2.01$	37
4.28	Soluções não-BPS ϕ^+ (linha contínua) e ϕ^- (linha tracejada), para $\nu = 1$, $\mu = -1$	38
4.29	Densidade de energia cinética $k(x)$, potencial $p(x)$ (linha contínua) e total $\varepsilon(x)$ (linha tracejada). Para $\nu = 1$ e $\mu = -1$	39
5.1	Comportamento do fator de deformação $a(y)$ de uma brana fina(linha tracejada) e de uma brana espessa(linha contínua).	43
5.2	Configuração do potencial V . Para $c = 1$ (linha contínua), $c = 1.2$ (linha trace- jada) e $c = 1.4$ (linha pontilhada), com $b = 1$	45
5.3	Configuração do campo escalar ϕ . Para $c = 1$ (linha contínua), $c = 1.2$ (linha tracejada) e $c = 1.4$ (linha pontilhada) com $b = 1$	45
5.4	Configuração do fator de deformação $e^{2A(r)}$. Para $c = 1$ (linha contínua), $c = 1.2$ (linha tracejada) e $c = 1.4$ (linha pontilhada) com $b = 1$	46
5.5	Configuração da densidade de energia do campo escalar T_{00} . Para $c = 1$ (linha contínua), $c = 1.2$ (linha tracejada) e $c = 1.4$ (linha pontilhada) com $b = 1$	46
5.6	Comportamento no limite de brana fina do ϕ (esquerda) e e^{2A} (direita). Para $c = 100$ e $b = 1$	51
5.7	Configuração da densidade de energia própria da brana. Para $c = 1$ (linha contínua), $c = 1.2$ (linha tracejada) e $c = 1.4$ (linha pontilhada) com $b = 1$	51
5.8	Comportamento do V_{eff} . Para $c = 1$ (linha contínua), $c = 1.2$ (linha tracejada) e $c = 1.4$ (linha pontilhada), com $b = 1$	54
5.9	Comportamento do potencial. Para $g = 0.00001$ (linha contínua), $g = 0.5$ (linha tracejada) e $g = 0.99999$ (linha pontilhada).	54
5.10	Comportamento do potencial no espaço-tempo deformado. Para $g = 0.00001$ (linha contínua), $g = 0.5$ (linha tracejada) e $g = 0.99999$ (linha pontilhada). . . .	55

5.11	Comportamento do perfil do campo ϕ . Para $g = 0.00001$ (linha contínua), $g = 0.003$ (linha tracejada) e $g = 0.99999$ (linha pontilhada).	56
5.12	Comportamento do fator de deformação. Para $g = 0.00001$ (linha contínua), $g = 0.003$ (linha tracejada) e $g = 0.99999$ (linha pontilhada).	56
5.13	Comportamento da Densidade de energia do campo escalar. Para $g = 0.00001$ (linha contínua), $g = 0.05$ (linha tracejada) e $g = 0.99999$ (linha pontilhada). . .	57
5.14	Comportamento do campo ϕ (esquerda) e χ (direita). Para $c_0 = 1/16.00001$ (linha contínua), $c_0 = 1/16.3$ (linha tracejada) e $c_0 = 1/100$ (linha pontilhada), com $a = 1$ e $\mu = 1$	59
5.15	Comportamento do fator de deformação. Para $c_0 = 1/16.00001$ (linha contínua), $c_0 = 1/16.3$ (linha tracejada) e $c_0 = 1/100$ (linha pontilhada), com $a = 1$ e $\mu = 1$	59
5.16	Configuração da densidade de energia do campo escalar T_{00} . Para $c_0 = 1/16.00001$ (linha contínua), $c_0 = 1/16.3$ (linha tracejada) e $c_0 = 1/100$ (linha pontilhada), com $a = 1$ e $\mu = 1$	60
5.17	Comportamento do Potencial Efetivo. Para $c_0 = 1/16.01$ (linha contínua), $c_0 = 1/19$ (linha tracejada) e $c_0 = 1/500$ (linha pontilhada), com $a = 1$ e $\mu = 1$	61
5.18	Comportamento dos campos ϕ_+ e χ_+ . Para $c_0 = -0.00001$ (linha contínua), $c_0 = -0.01$ (linha tracejada pontilhada), $c_0 = -0.25$ (linha tracejada), e $c_0 = -5$ (linha pontilhada) com $\mu = -1$ e $\nu = 1$	63
5.19	Comportamento dos campos ϕ_- e χ_- . Para $c_0 = 2.00001$ (linha contínua), $c_0 = 2.01$ (linha tracejada) e $c_0 = 5$ (linha pontilhada) com $\mu = -1$ e $\nu = 1$	63
5.20	Comportamento do fator do deformação. Esquerda: $c_0 = -5$ (linha tracejada), $c_0 = -0.00001$ (linha tracejada). Direita: $c_0 = 5$ (linha tracejada) e $c_0 = 2.00001$ (linha contínua). Para $\mu = -1$ e $\nu = 1$	64
5.21	Configuração da densidade de energia do campo escalar T_{00} . Esquerda: $c_0 = -5$ (linha tracejada), $c_0 = -0.00001$ (linha tracejada). Direita: $c_0 = 5$ (linha tracejada) e $c_0 = 2.00001$ (linha contínua). Para $\mu = -1$ e $\nu = 1$	64
6.1	Perfis de $\phi(r)$ e T_{00} . Para, para $a = 1$, $b = \sqrt{2/3}$, $\alpha = 0.1$ (linha pontilhada), $\alpha = 1$ (linha tracejada) e $\alpha = 10$ (linha contínua).	71
6.2	Perfis do fator do deformação para $a = 1$, $b = \sqrt{2/3}$, $\alpha = 0.1$ (linha pontilhada), $\alpha = 1$ (linha tracejada) and $\alpha = 10$ (linha contínua).	71
6.3	Perfis no limite de brana fina do campo escalar (esquerda) e da função de deformação (direita). Para $a = 1000$ e $b = \sqrt{\frac{2}{3}}$	72
6.4	Perfis da função $z = z(r)$. Para $a = 1000$ e $b = \sqrt{\frac{2}{3}}$	74
6.5	Perfis dos potenciais: (a) $(V_L(r))_A$ (esquerda) e (b) $(V_R(r))_A$ (direita) para $\eta = 1$, $a = 1$, $b = \sqrt{2/3}$, $\alpha = 0.1$ (linha pontilhada), $\alpha = 1$ (linha tracejada) e $\alpha = 10$ (linha contínua)	77

6.6	Perfis de T_{00} (linha contínua), $(V_L)_A$ (linha espessa) e modo zero (linha espessa tracejada) para $\eta = 1$ and $\alpha = 0.1$	77
-----	---	----

Sumário

Lista de figuras	4
1 Introdução	7
2 Teoria Fundamental de Defeitos Topológicos	10
2.1 Equações de Bogomol'nyi	11
2.2 Energia BPS	12
2.3 Setores Topológicos	13
2.4 Corrente Topológica	14
3 Noção de Rede de Defeitos Topológicos	15
3.1 Interseção de Defeitos Topológicos	15
3.2 Rede de Defeitos Topológicos	18
4 Modelo Supersimétrico Proposto	19
4.1 Modelos Estudados	19
4.2 Simetria Z_3 e SUSY	20
4.3 Um Superpotencial Alternativo	21
4.4 Mínimos do potencial e Setores Topológicos	22
4.5 Equações de Bogomol'nyi e Equação de Órbita	23
4.6 Constante de Integração c_0	25
4.7 Estados BPS para o caso $c_0 = 0$	27
4.8 Estados BPS para o caso $c_0 = -\frac{2\nu}{\mu}$	30
4.9 Estados BPS para c_0 arbitrário	33
4.10 Estados não-BPS	38
5 Cénarios Mundos-Branas	41
5.1 Branas Espessas	43
5.2 Modelos Estudados	43
5.2.1 Primeiro modelo	44
5.2.2 Segundo modelo	54
5.2.3 Terceiro modelo	58

5.2.4	Quarto modelo	62
6	Modelo mundos-brana com dinâmica não-canônica	66
6.1	O modelo: $K(X) = X + \alpha X X$	67
6.2	Localização de Fermiões	72
6.2.1	Modos zeros e localização de férmions	76
7	Conclusões e comentários	79
A	Escalar de Curvatura	85
B	Tensor de Energia-Momento da matéria	87
C	Equações de Movimento	89

Capítulo 1

Introdução

Os defeitos topológicos estão intimamente associados com algum tipo de quebra de simetria no sistema físico. Denomina-se defeito porque aparece em lugares onde a simetria sofre alteração, e topológico, pois uma descrição exata dele está nas ideias de simetria consagradas na topologia, principalmente porque perturbações no sistema não os afetam, ou seja, eles não são robustos. Eles são encontrados em diferentes escalas de energia, tais como em sistemas de matéria condensada com propriedades ferroelétricas e ferromagnéticas, na cosmologia, na física de partículas, etc. Os defeitos topológicos geralmente aparecem como soluções das equações de movimento, equações diferenciais não-lineares, que descrevem um sistema dinâmico com interações não-lineares. No século passado, por volta da década dos setenta, Bogomol'nyi e também Prasad e Sommerfield (BPS) [1], desenvolveram, independentemente, um método para encontrar soluções topológicas que saturam a menor energia do sistema, estas soluções são chamadas soluções BPS. Além de isso, existe soluções topológicos não-BPS, as quais são soluções das equações de movimento mas não necessariamente saturam a menor energia do sistema. As soluções BPS desempenham um papel importante no desenvolvimento da Física de partículas elementares moderna.

No estudo de modelos supersimétricos com supercampos quirais, a presença de simetria discreta produz defeitos topológicos de tipo BPS e não-BPS. Os defeitos topológicos BPS preservam parcialmente a supersimetria, aparecendo como junções de defeitos. A possibilidade de junção de defeitos topológicos BPS e sua estabilidade são amplamente estudadas nas referências [2]-[5]. D. Bazeia e F. A. Brito observaram que alguns defeitos topológicos não-BPS podem se interseccionar para formar junções de defeitos [6].

Uma possibilidade interessante da existência de junções de defeitos topológicos, é a construção de uma rede de defeitos topológicos no plano e estudar suas propriedades, semelhante a como foi estudado por Ashoke Sen para uma rede de cordas [7]. Esta rede de defeitos encontra uma ampla aplicação, como por exemplo no estudo da formação de padrões em sistemas de matéria condensada [8], na mecânica de fluidos [9], na física de superfícies granulares [10], etc. A geração de redes de defeitos no plano com vários

modelos supersimétricos é estudada por D. Bazeia e F. A. Brito em [11].

Por outro lado, de acordo com a idéia atual, o nosso universo observável pode ser localizado em uma superfície de quatro dimensões, chamada brana, incrustada em uma variedade de dimensão mais alta, chamada *bulk*.

As branas finas, como no famoso cenário de Randall e Sundrum (RS2) [12] podem, no entanto, ser apenas tratadas como uma aproximação, já que uma possível objeção ao modelo é que sua densidade de energia apresenta uma singularidade. É, portanto, mais consistente considerar estruturas suaves, branas espessas, que são obtidas como soluções de equações de campos de matéria acopladas ao campo gravitacional. Essas configurações são então obrigadas a serem globalmente regulares, estáveis e devidamente concentradas em torno de uma superfície $3D$. Os defeitos topológicos, emergentes em transições de fase com quebra espontânea de simetria, são provavelmente os melhores candidatos para desempenhar esse papel.

Em uma teoria de mundos-brana, um problema muito interessante e importante é a localização da matéria e de campos de gauge nas branas, ou seja, a realização estável do universo observável. Sabemos que a localização de férmions em branas espessas requer interações adicionais, além da gravidade: um acoplamento férmion-campo escalar tem que ser incluído. As interações comuns incluem o acoplamento de Yukawa generalizada $\eta \bar{\Psi} F(\phi) \Psi$ entre os férmions e o campo escalar *background*. Para algumas modelos que geram branas espessas, com o acoplamento de Yukawa, pode existir um estado ligado (o modo sem massa) [13].

Em contrapartida, as observações recentes, apresentadas em [14]-[15], levaram-nos ao fato intrigante de que o universo está presentemente realizando uma expansão acelerada. Essas informações contribuíram diretamente para estabelecer alguns avanços importantes na cosmologia, sendo um deles a presença de energia escura. A presença da energia escura abriu algumas rotas distintas de investigações. Nos últimos anos, surgiram alguns modelos interessantes com dinâmica não-canônica, com foco na inflação primordial ou energia escura [16]-[19]. Esses tipos de modelos, com dinâmica não-canônica, também têm sido discutidos nas investigações de defeitos topológicos, como em [20]-[21]. Nesse contexto, nós completamos a análise do modelo no cenário de mundos-brana com dinâmica não-canônica desenvolvido por D. Bazeia et. al. [16] e estudamos o problema de localização de férmions nesse modelo.

Organizamos esta dissertação da seguinte maneira. Nos capítulos 2, 3 e 4 nós consideramos o espaço-tempo de $(1+1)$ dimensões e plano. No capítulo 2 descrevemos os aspectos gerais da teoria de defeitos topológicos, para ser utilizado em diferentes partes desta dissertação. No capítulo 3 descrevemos o processo de intersecção de defeitos através de dois modelos diferentes, no primeiro estudamos o modelo da referência [2], no qual os autores apresentam um estudo genérico sobre a possibilidade de duas soluções topológicas se intersectarem para juntarem-se numa terceira solução topológica. Com o segundo

modelo estudamos a intersecção de defeitos fora do âmbito da teoria supersimétrica [6]. Além disso estudamos o arranjo das junções de defeitos para formar diferentes redes de defeitos.

No capítulo 4 nós analisamos as implicações da preservação da simetria Z_3 no âmbito de uma teoria que preserva a supersimetria. Para isso buscamos um superpotential com dois campos escalares reais, de modo que seus mínimos e as tensões dos setores topológicos formem um triângulo equilátero, ou seja, que a simetria Z_3 seja realizada não só para os mínimos do potencial, mas também para as tensões dos setores topológicos. Em seguida, propomos um modelo supersimétrico, cujo superpotential polinomial W , envolve dois campos escalares interagentes, ϕ e χ , e analisamos o comportamento das soluções BPS através da equação de órbita. Uma constante de integração, designada por c_0 , aparece naturalmente devido à integração da equação diferencial da órbita que relaciona os dois campos. Estudamos as diferentes soluções para as equações BPS de acordo com os mínimos da energia potencial do modelo e com os possíveis valores que a constante de integração c_0 pode assumir.

No capítulo 5, estudamos diversos modelos que produzem branas espessas. Esses modelos descrevem sistemas compostos de campos escalares reais acoplados à gravidade cujas soluções tenham uma configuração tipo *kink* simples (brana). Alguns desses *kinks* podem ser continuamente deformados em configurações do tipo *kink* duplo. Nós acrescentamos uma análise da densidade de energia da matéria, a configuração desta densidade tem duas regiões, uma região positiva associada com a tensão da brana e uma região negativa. Em seguida, analisamos o funcional de energia, definida por P. K. Townsend e K. Shenderis na referência [22], e sua relação com as equações de Bogomol'nyi. Tudo que foi descrito acima é desenvolvido dentro da dinâmica canônica.

No capítulo 6, nós ampliamos a análise do modelo no cenário de mundos-brana com dinâmica não-canônica desenvolvido por D. Bazeia et. al. [16], que envolve termos de grau maiores do quadrado, na derivada de primeira ordem do campo, na densidade de lagrangiana para o campo de matéria. Em seguida, estudamos o problema de localização de férmions sob as soluções (branas) geradas no modelo de mundos-brana com dinâmica não-canônica.

Finalmente no Capítulo 7 encerramos com as conclusões e as perspectivas desta dissertação.

Capítulo 2

Teoria Fundamental de Defeitos Topológicos

Como foi mencionado acima, os defeitos estão intimamente associados com algum tipo de alteração da simetria. Vejamos um exemplo. Na Teoria Quântica dos Campos é estudado o modelo $\lambda\phi^4$, este modelo apresenta quebra espontânea da simetria. Analisemos este modelo do ponto de vista clássico em $(1+1)$ dimensões do espaço-tempo. A densidade de lagrangiana do modelo é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - V(\phi), \quad (2.1)$$

onde o potencial $V(\phi)$ tem a forma

$$V(\phi) = \frac{\lambda^2}{2} (a^2 - \phi^2)^2. \quad (2.2)$$

Este potencial apresenta dois mínimos, $\phi_1 = a$ e $\phi_2 = -a$. Na configuração estática do campo, ou seja $\phi = \phi(x)$, a equação de movimento é dada por

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 2\lambda^2\phi(\phi^2 - a^2). \quad (2.3)$$

Uma solução desta equação diferencial e que conecta os mínimos do potencial assintoticamente é dada por

$$\phi_\pm(x) = \pm a \tanh(\lambda ax), \quad (2.4)$$

onde o sinal $+$ e $-$ nos indica que a solução tem uma configuração *kink* e *antikink* respectivamente. A densidade de energia cinética e potencial das soluções, é dada por

$$k(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_\pm}{dx} \right)^2 = \frac{1}{2} a^4 \lambda^2 \operatorname{sech}^4(\lambda ax), \quad (2.5)$$

$$p(x) = V(\phi_{\pm}) = \frac{1}{2}a^4\lambda^2\text{sech}^4(\lambda ax). \quad (2.6)$$

As propriedades desta solução, nos proporcionam o comportamento dos defeitos no processo de quebra espontânea da simetria. Como por exemplo, as soluções $\phi_{\pm}(x)$ se dirigem de um mínimo a outro mínimo então o defeito se encontra na região que une os vácuos. A densidade de energia, $\varepsilon(x) = k(x) + p(x) = a^4\lambda^2\text{sech}^4(\lambda ax)$, apresenta um máximo no meio dos vácuos, $x = 0$, e se anula nos vácuos, $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow -\infty$, então o defeito pode encontrar-se, com maior probabilidade, no meio do setor que une os vácuos. As densidades da energia das soluções obedecem a relação $k(x) = p(x)$.

Ora, para dar uma descrição mais exata dos defeitos, nós estudamos os mesmos no contexto da Teoria Supersimétrica dos Campos. Para isso, em seguida, passamos a estudar o setor bosônico de uma teoria supersimétrica composta por dois campos escalares reais.

Nós considerarmos modelos de dois campos escalares ϕ e χ , definido através da densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_{\alpha}\phi\partial^{\alpha}\phi + \frac{1}{2}\partial_{\alpha}\chi\partial^{\alpha}\chi - V, \quad (2.7)$$

em (1+1) dimensões do espaço-tempo. O potencial $V(\phi, \chi)$ tem a forma geral

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial \phi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial \chi}\right)^2. \quad (2.8)$$

Na teoria supersimétrica a função W é chamada superpotencial.

Na Teoria dos Campos os vácuos do sistema encontram-se nos mínimos do potencial V . Para campos supersimétricos, os mínimos do potencial são encontrados com

$$W_{\phi} = \frac{\partial W}{\partial \phi} = 0 \quad e \quad W_{\chi} = \frac{\partial W}{\partial \chi} = 0. \quad (2.9)$$

2.1 Equações de Bogomol'nyi

Para campos independentes do tempo, campos estáticos, em (1+1) dimensões do espaço-tempo, ou seja, $\phi = \phi(x)$ e $\chi = \chi(x)$, as equações de movimento são da forma

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = W_{\phi}W_{\phi\phi} + W_{\chi}W_{\chi\phi}, \quad (2.10)$$

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = W_{\phi}W_{\phi\chi} + W_{\chi}W_{\chi\chi}. \quad (2.11)$$

É possível mostrar que as soluções das equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = W_\phi, \quad (2.12)$$

$$\frac{d\chi}{dx} = W_\chi, \quad (2.13)$$

são soluções das equações de movimento. Estas equações de primeira ordem são as chamadas, Equações de Bogomol'nyi, [1]. As soluções destas equações são soluções topológicas de Bogomol'nyi - Prasad e Sommerfield (BPS) ou simplesmente soluções BPS. Estas soluções topológicas BPS nos proporcionam o comportamento dos defeitos topológicos.

Para achar as soluções destas equações empregamos o método desenvolvido por de Souza Dutra, [23]. As equações (2.12) e (2.13) podem ser relacionadas como segue

$$\frac{d\phi}{W_\phi} = dx = \frac{d\chi}{W_\chi}, \quad (2.14)$$

onde o elemento diferencial espacial é invariante. Assim, obtemos

$$\frac{d\phi}{W_\phi} = \frac{d\chi}{W_\chi}, \quad (2.15)$$

esta equação é conhecida como equação diferencial de órbita. Em geral, esta equação é uma equação diferencial não linear que relaciona os campos $\phi(x)$ e $\chi(x)$. Ora, se nós podemos achar as soluções completas da equação (2.15), a função $\phi(\chi)$ pode ser usada para eliminar um dos campos, desacoplando as equações (2.12) e (2.13). Finalmente, estas equações não lineares de primeira ordem desacopladas podem ser resolvidas analítica ou numericamente.

2.2 Energia BPS

A energia do sistema para configurações estáticas é dada por

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 + W_\phi^2 + W_\chi^2 \right], \quad (2.16)$$

que pode ser reescrita na forma

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \pm W_\phi \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \pm W_\chi \right)^2 \right] \mp \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(W_\phi \frac{d\phi}{dx} + W_\chi \frac{d\chi}{dx} \right), \quad (2.17)$$

e finalmente, a energia E é mínima se ϕ e χ obedecem as equações de Bogomol'nyi com valores assintóticos nos mínimos do potencial $W(\phi, \chi)$. Então

$$E = |W(\phi(\infty), \chi(\infty)) - W(\phi(-\infty), \chi(-\infty))|. \quad (2.18)$$

Assim, vemos que a energia E é mínima, para campos estáticos que obedecem as equações Bogomol'nyi. Esta energia chama-se energia BPS (E_{BPS}).

A energia BPS pode ser escrita como

$$E_{BPS} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 \right], \quad (2.19)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx [W_{\phi}^2 + W_{\chi}^2]. \quad (2.20)$$

Os resultados acima mostram que a parte potencial (P) e a parte cinética (K) da energia

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2} (W_{\phi}^2 + W_{\chi}^2), \quad (2.21)$$

$$K = \int_{-\infty}^{\infty} dx k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dx} \right)^2 \right]. \quad (2.22)$$

contribuem igualmente na energia BPS. Ainda que isto seja verdade para todas as soluções BPS, não é peculiar a eles, uma vez que existem estados não-BPS que também têm uma distribuição de energia igual.

2.3 Setores Topológicos

Defina-se

$$t_{ij} = |W(\phi_i, \chi_i) - W(\phi_j, \chi_j)|, \quad (2.23)$$

onde t_{ij} indica a tensão do setor topológico entre o i -ésimo e o j -ésimo mínimo. Se $t_{ij} = 0$, temos o chamado setor de vácuo. Neste setor não se pode encontrar soluções BPS mas pode-se encontrar soluções não-BPS. Se $t_{ij} \neq 0$ se chama setor BPS. Neste setor se podem encontrar soluções BPS. Para estes setores BPS a relação

$$t_{ij}^{BPS} = E_{BPS}, \quad (2.24)$$

é cumprida.

2.4 Corrente Topológica

Define-se uma densidade de corrente topológica J^α , que identifica todos os setores, na forma:

$$J^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} \partial_\beta \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

onde $\varepsilon^{\alpha\beta}$ é o tensor Levi-Civita, com $\varepsilon^{01} = 1$.

Ela obedece $\partial_\alpha J^\alpha = 0$, e é também um vetor no plano (ϕ, χ) . Para configurações estáticas

$$J_\alpha^t J^\alpha = \rho^t \rho = 2k(x), \quad (2.26)$$

onde $k(x)$ é a parte gradiente da densidade de energia das soluções. Para as configurações que apresentam densidade de energia igualmente distribuídas em $k(x)$ e $p(x)$, ou seja $k(x) = p(x)$, obtemos $\rho^t \rho = 2k(x) = k(x) + p(x)$ dá a densidade de energia total. Esta propriedade é muito útil para inferir a estabilidade das junções.

Finalmente, define-se a carga topológica $\mathcal{T}$ através da relação

$$\mathcal{T} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx J_0. \quad (2.27)$$

Capítulo 3

Noção de Rede de Defeitos Topológicos

3.1 Interseção de Defeitos Topológicos

O processo de interseção de defeitos na teoria supersimétrica em $(d+1)$ dimensões do espaço-tempo, foi estudado por Abraham e Townsend na referência [2]. Neste artigo os autores apresentam um estudo genérico, na teoria de campos supersimétrica, sobre a possibilidade de duas soluções topológicas se intersectarem para se juntar numa terceira solução topológica, concluindo que aquilo somente é admissível se a tensão ou energia da solução recém formada for menor do que a soma das tensões das soluções originais, ou seja quando o processo é uma reação exotérmica, e apenas se a terceira solução realmente existir. Isso se traduz em

$$t_3 < t_1 + t_2, \quad (3.1)$$

onde t_i , $i = 1, 2, 3$, é a tensão ou energia de cada defeito. Eles desenvolvem, como

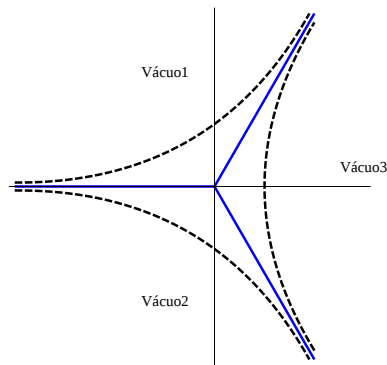


Figura 3.1: Junção Tripla.

exemplo do método, a parte bosônica do modelo de Wess-Zumino, em $(1+1)$ dimensões do espaço-tempo com um superpotencial polinomial de quarta ordem, $W = \Phi^4 - 4\Phi$, onde Φ é um campo escalar complexo. Este superpotencial tem três mínimos, $\Phi_1 = e^{\left(\frac{2\pi i}{3}\right)}$, $\Phi_2 = e^{\left(-\frac{2\pi i}{3}\right)}$ e $\Phi_3 = 1$, os quais formam um triângulo equilátero, ou seja, tem-se uma simetria Z_3 . Portanto existem três setores topológicos que podem resultar em defeitos.

Cada setor topológico possui uma carga topológica $\mathcal{T}$, dada pela equação (2.27), ou seja $|\mathcal{T}| = 6\sqrt{3}$. Na configuração estática, Φ é solução da equação Bogomol'nyi e garante-se que $|\mathcal{T}| = t$. Assim, as tensões t_i possuem simetria Z_3 e a relação (3.1) é cumprida rigorosamente. Então, os três defeitos podem se interseccionar num ponto formando uma junção tripla, como se mostra na figura 3.1.

Bazeia e Brito apresentam um estudo sobre intersecção de defeitos sem teoria supersimétrica, [6]. Eles iniciam estudando a parte bosônica de um modelo supersimétrico, cujo superpotencial envolve dois campos escalares reais interagentes

$$W(\phi, \chi) = \lambda\phi^3 - 3\lambda\phi + \lambda\phi \left(\chi + \sqrt{\frac{1}{3}} \right)^2 + \lambda\sqrt{\frac{4}{27}} \left(\chi + \sqrt{\frac{1}{3}} \right)^3 - \lambda \left(\chi + \sqrt{\frac{1}{3}} \right)^2. \quad (3.2)$$

Este modelo apresenta três mínimos formando um triângulo equilátero, simetria Z_3 . Portanto existem três setores topológicos. Na configuração estática pode-se achar defeitos BPS. Assim as tensões dos três setores topológicos são $t_{12} = 3|\lambda|$, $t_{23} = 4|\lambda|$ e $t_{31} = |\lambda|$, elas não possuem simetria Z_3 . Além disso, as tensões não cumprem rigorosamente a relação (3.1), já que $t_{23} = t_{12} + t_{31}$. Portanto não é um processo exotérmico, ou seja a estabilidade da junção neste modelo não está garantida. Em seguida, renunciam à supersimetria, voltando sua atenção a potenciais polinomiais que apresentam simetria Z_3 . O potencial do modelo considerado por eles é dado por

$$V(\phi, \chi) = \lambda^2\phi^2 \left(\phi^2 - \frac{9}{4} \right) + \lambda^2\chi^2 \left(\chi^2 - \frac{9}{4} \right) + 2\lambda^2\phi^2\chi^2 - \lambda^2\phi(\phi^2 - 3\chi^2) + \frac{27}{8}\lambda^2. \quad (3.3)$$

Este potencial não pode ser escrito por meio de um superpotencial. Além disso, o potencial possui três mínimos, $v_1 = (\frac{3}{2}, 0)$, $v_2 = (-\frac{3}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$ e $v_3 = (-\frac{3}{4}, -\frac{3\sqrt{3}}{4})$, formando um triângulo equilátero, simetria Z_3 . Na caso estático encontra-se soluções não-BPS.

As soluções no setor conectando os mínimos v_2 e v_3 , são da forma

$$\phi_{(2,3)}^{(\pm)} = -\frac{3}{4}, \quad \chi_{(2,3)}^{(\pm)} = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4} \tanh \left(\sqrt{\frac{27}{8}} \lambda x \right), \quad (3.4)$$

onde o índice $(\pm)$, nas soluções, é usado para identificar soluções tipo *kink* (+), e *antikink* (-). Para obter as soluções nos outros setores, os autores fazem uso da simetria Z_3 , *se um certo par $(\phi(x), \chi(x))$ representa uma solução de um determinado setor não topológico, todas as outras soluções podem ser obtidas através da rotação das soluções.* Então a transformação de rotação podemos escrever-la da forma

$$\begin{pmatrix} \phi_{ij}(x) \\ \chi_{ij}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_{ij}) & \sin(\alpha_{ij}) \\ -\sin(\alpha_{ij}) & \cos(\alpha_{ij}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

onde α_{ij} é o ângulo entre os dois setores não topológicos e $(\phi(x), \chi(x))$ são as soluções

num setor, $(\phi_{ij}(x), \chi_{ij}(x))$ são as soluções que se deseja achar. Neste caso α_{ij} pode tomar os valores 120° ou 240° .

Assim, as soluções no setor conectando os mínimos v_1 e v_2 são da forma

$$\phi_{(1,2)}^{(\pm)} = \frac{3}{8} \pm \frac{9}{8} \tanh\left(\sqrt{\frac{27}{8}}\lambda x\right), \quad \chi_{(1,2)}^{(\pm)} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \mp \frac{3\sqrt{3}}{8} \tanh\left(\sqrt{\frac{27}{8}}\lambda x\right), \quad (3.6)$$

e no setor conectando os mínimos v_1 e v_3

$$\phi_{(1,3)}^{(\pm)} = \frac{3}{8} \mp \frac{9}{8} \tanh\left(\sqrt{\frac{27}{8}}\lambda x\right), \quad \chi_{(1,3)}^{(\pm)} = -\frac{3\sqrt{3}}{8} \mp \frac{3\sqrt{3}}{8} \tanh\left(\sqrt{\frac{27}{8}}\lambda x\right). \quad (3.7)$$

Estas soluções, equações (3.4), (3.6) e (3.7), apresentam uma distribuição equitativa de sua energia, ou seja $k(x) = p(x)$. Essa propriedade é característica dos estados BPS.

$$k(x) = p(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{27}{8}\right)^2 \lambda^2 \text{sech}^4\left(\sqrt{\frac{27}{8}}\lambda x\right). \quad (3.8)$$

Usando a equação (2.26) vemos que, $\rho^t \rho = 2k(x) = k(x) + p(x) = \varepsilon(x)$. Então a tensão é dada por

$$t = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho^t \rho = E. \quad (3.9)$$

Portanto empregando a equação (3.9) e a transformação de rotação para as equações de primeira ordem

$$\begin{pmatrix} \phi'_{ij}(x) \\ \chi'_{ij}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_{ij}) & \sin(\alpha_{ij}) \\ -\sin(\alpha_{ij}) & \cos(\alpha_{ij}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi'(x) \\ \chi'(x) \end{pmatrix},$$

na seguinte relação

$$(\rho_{ij} + \rho_{jk})^t (\rho_{ij} + \rho_{jk}) = \rho_{ij}^t \rho_{ij} + \rho_{jk}^t \rho_{jk} + \rho_{ij}^t \rho_{jk} + \rho_{jk}^t \rho_{ij}, \quad (3.10)$$

os autores obtiveram finalmente

$$t_{ik} < t_{ij} + t_{jk}, \quad (3.11)$$

ou seja, é estritamente cumprida a desigualdade triangular entre os setores. Isso indica que o processo é exotérmico e a junção é estável. Assim os defeitos não-BPS formam uma junção tripla.

3.2 Rede de Defeitos Topológicos

Uma rede de defeitos é um arranjo simétrico das junções de defeitos. Isto é semelhante a redes de cordas estudadas por Ashoke Sen na refer encia [7]. A formação e as propriedades que apresentam é bastante estudada nas áreas de matéria condensada, física de partículas e cosmologia, mecânica de fluidos, etc. Dependendo da simetria Z_N do modelo, podem existir redes de defeitos quadradas, hexagonais, dodecagonais. A estabilidade destas redes foi estudada em [4].

Dentro das formas das redes de defeitos as mais notáveis são as hexagonais, devido a sua facilidade de formação e a sua forma parecida com a do grafeno. Estas redes hexagonais podem ser construídas a partir de modelos que possuem simetria Z_3 . Como é mencionado acima, com esta simetria tem-se lugar uma junção tripla. A partir desta junção pode-se formar uma rede hexagonal: "Os vértices formam uma junção tripla e podemos indexar os hexagonos do arranjo com os vácuos do sistema (1, 2, 3) de modo que dois vácuos com uma mesma borda comum do hexágono, não tenham o mesmo índice", [3].

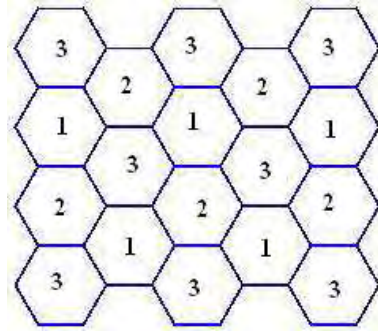


Figura 3.2: Rede hexagonal.

É importante notar que a simetria Z_3 é muito estudada, porque ela pode ser aplicada a diferentes áreas da física, matéria condensada, física de partículas, química quântica, etc. Por exemplo, no modelo "Next-to-minimal supersymmetric extension of the Standard Model (NMSSM)" a simetria Z_3 é a única conservada em seu superpotencial [24], também a simetria Z_3 é o centro do grupo $SU(3)$, esta relação nos pode guiar a aplicar um modelo com simetria Z_3 dentro das interações fortes [25].

Capítulo 4

Modelo Supersimétrico Proposto

4.1 Modelos Estudados

Iniciamos este capítulo descrevendo alguns modelos supersimétricos, com dois campos escalares reais, estudados, nos quais os mínimos do potencial possuem simetria Z_3 .

No artigo [11], os autores consideram o superpotencial polinomial

$$W^{(4)}(\phi, \chi) = \bar{\lambda}\phi + \bar{\mu}\chi - \frac{1}{4}\lambda\phi^4 - \frac{1}{4}\lambda\chi^4 + \frac{3}{2}\lambda\phi^2\chi^2. \quad (4.1)$$

Usando (2.8), o superpotencial gera um potencial V de sexta ordem nos campos. O potencial V apresenta três mínimos, que para o caso $\bar{\mu} = 0$ e $\bar{\lambda} = \lambda$ são da forma

$$v_1 = (1, 0), \quad v_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad e \quad v_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Esses mínimos formam um triângulo equilátero, simetria Z_3 . As tensões dos setores topológicos formados pelos mínimos são, $t_{12} = t_{31} = \frac{81}{64}$ e $t_{23} = 0$. Observe-se que $t_{12} = t_{23} + t_{31}$, então as tensões não cumprem estritamente a relação (3.1), portanto as junções geradas, entre as soluções BPS, não são estáveis.

No mesmo artigo outro superpotencial polinomial estudado é dado por

$$\widetilde{W}^{(5)}(\phi, \chi) = \bar{\lambda}\chi - \lambda\phi^3\chi + \lambda\phi\chi^3. \quad (4.2)$$

Este superpotencial gera um potencial V de sexta ordem nos campos. O potencial V apresenta três mínimos, que para o caso $\bar{\lambda} = \lambda$ são da forma

$$v_1 = (1, 0), \quad v_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad e \quad v_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Esses mínimos formam um triângulo equilátero, simetria Z_3 . As tensões dos setores

topológicos formados pelos mínimos são, $t_{12} = t_{31} = \frac{3\sqrt{3}\lambda}{8}$ e $t_{23} = \frac{3\sqrt{3}\lambda}{4}$. Para este modelo, as tensões não obedecem estritamente a relação (3.1), portanto as junções geradas entre as soluções BPS não são estáveis.

4.2 Simetria Z_3 e SUSY

Como foi mencionado na secção 3.1, Bazeia e Brito abandonaram modelos supersimétricos, porque as tensões não cumprem estritamente a relação (3.1), a fim de manter a simetria Z_3 . Também vimos outros modelos supersimétricos que possuem a mesma característica. Nos perguntamos, quais são as implicações de preservar a simetria Z_3 em uma teoria supersimétrica com campos escalares reais? Nesse sentido, buscamos um superpotential com dois campos escalares reais, de modo que seus mínimos e as tensões dos setores topológicos formem um triângulo equilátero, ou seja, que a simetria Z_3 seja realizada não só para os mínimos do potencial, mas também para as tensões dos setores topológicos.

Seja ϕ e χ os campos escalares reais. Então, por condição, os três mínimos formam um triângulo equilátero no plano (ϕ, χ) . Nós temos a liberdade de colocar esses mínimos em qualquer lugar do plano (ϕ, χ) . Portanto, sem perda de generalidade, podemos colocar um mínimo, v_1 , no centro do plano (ϕ, χ) e os outros dois mínimos, v_2 e v_3 , simetricamente dispostos em relação a um dos eixos ϕ ou χ .

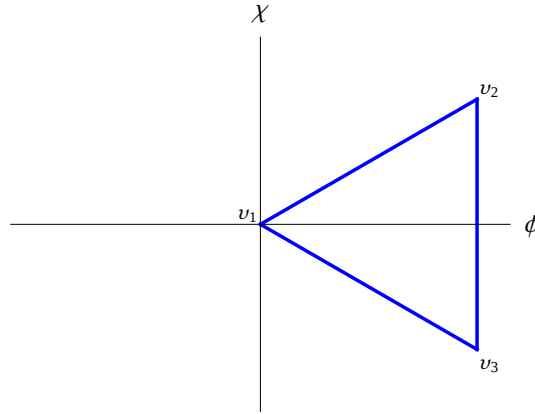


Figura 4.1: Triângulo Equilátero, Simetria Z_3 .

Então,

$$v_1 = (0, 0), v_2 = (\phi_0, \chi_0), v_3 = (\phi_0, -\chi_0). \quad (4.3)$$

Como os mínimos devem formar um triângulo equilátero, vale que

$$\phi_0 = \sqrt{3}\chi_0. \quad (4.4)$$

Ora, a tensão ou energia dos setores topológicos BPS devem ser iguais, para que se cumpra

a relação (3.1) e se mantenha a simetria Z_3 , ou seja deve-se garantir que

$$t = |W(v_1) - W(v_2)| = |W(v_2) - W(v_3)| = |W(v_3) - W(v_1)|. \quad (4.5)$$

Como $v_1 = (0, 0)$, então $W(v_1)$ é uma constante, uma vez que todos os campos são nulos. Sem perda de generalidade, considerarmos $W(v_1) = 0$. Então, a equação (4.5) toma a forma

$$t = |-W(v_2)| = |W(v_2) - W(v_3)| = |W(v_3)|. \quad (4.6)$$

Para qualquer situação encontra-se: $W(v_2) = W(v_3) = 0$.

Assim, concluímos que, para preservar a simetria Z_3 na teoria supersimétrica com dois campos escalares reais, o valor do superpotential nos três mínimos é zero, o que gera uma tensão nula nos setores topológicos. Nos setores topológicos com tensão nula, setores vácuos, não existe soluções BPS mas pode-se encontrar soluções não-BPS, como foi mencionado na secção 2.3. Portanto a simetria Z_3 não é preservada para estados BPS na teoria supersimétrica com dois campos escalares reais.

Então nós saímos da simetria Z_3 e tentamos trabalhar com outras simetrias discretas mas ainda com setores topológicos de uma teoria supersimétrica com dois campos escalares reais.

4.3 Um Superpotencial Alternativo

Guiados pelos modelos estudados em [11], nos quais os mínimos apresentam simetria Z_3 , construímos um potencial de sexta ordem nos campos, mas agora, com a particularidade de que os mínimos deste novo potencial geram uma simetria discreta diferente da simetria Z_3 . Assim, propomos um superpotencial, que envolve dois campos escalares reais, ϕ e χ

$$W(\phi, \chi) = \lambda\chi^3\phi + \mu\phi^3\chi + \nu\phi\chi. \quad (4.7)$$

onde λ, μ e $\nu \in \mathbb{R}$.

A partir da equação (2.8), verifica-se que este superpotencial resulta no seguinte potencial

$$V = \frac{1}{2}\chi^2(\lambda\chi^2 + 3\mu\phi^2 + \nu)^2 + \frac{1}{2}\phi^2(3\lambda\chi^2 + \mu\phi^2 + \nu)^2. \quad (4.8)$$

Este potencial é de sexta ordem nos campos.

As equações de movimento, para configurações estáticas dos campos, são da forma

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \phi(6\mu\chi^2(\nu + 3\mu\phi^2 + \lambda\chi^2) + (\nu + \mu\phi^2 + 3\lambda\chi^2)(\nu + 3\mu\phi^2 + 3\lambda\chi^2)). \quad (4.9)$$

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = \chi(6\lambda\phi^2(\nu + \mu\phi^2 + 3\lambda\chi^2) + (\nu + 3\mu\phi^2 + \lambda\chi^2)(\nu + 3\mu\phi^2 + 3\lambda\chi^2)). \quad (4.10)$$

4.4 Mínimos do potencial e Setores Topológicos

Os mínimos do potencial V , $v_i = (\phi_i, \chi_i)$, são encontrados por meio das equações (2.9) e eles são

$$\begin{aligned} v_1 &= (0, 0), & v_2 &= \left(\sqrt{-\frac{\nu}{\mu}}, 0 \right), & v_3 &= \left(0, -\sqrt{-\frac{\nu}{\lambda}} \right), \\ v_4 &= \left(-\sqrt{-\frac{\nu}{\mu}}, 0 \right), & v_5 &= \left(0, \sqrt{-\frac{\nu}{\lambda}} \right), & v_6 &= \left(\sqrt{-\frac{\nu}{4\mu}}, \sqrt{-\frac{\nu}{4\lambda}} \right), \\ v_7 &= \left(-\sqrt{-\frac{\nu}{4\mu}}, \sqrt{-\frac{\nu}{4\lambda}} \right), & v_8 &= \left(-\sqrt{-\frac{\nu}{4\mu}}, -\sqrt{-\frac{\nu}{4\lambda}} \right), & v_9 &= \left(\sqrt{-\frac{\nu}{4\mu}}, -\sqrt{-\frac{\nu}{4\lambda}} \right). \end{aligned}$$

Onde $\frac{\nu}{\lambda} < 0$ e $\frac{\nu}{\mu} < 0$. Nota-se que a configuração dos mínimos do potencial no plano

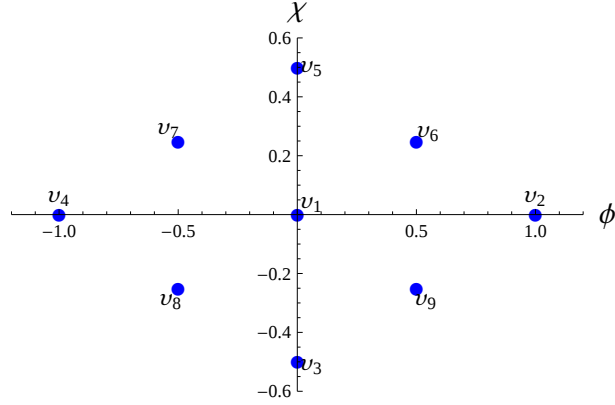


Figura 4.2: Configuração dos mínimos do potencial no plano (ϕ, χ) , para $\nu = 1$, $\mu = -1$ e $\lambda = 4$.

(ϕ, χ) , apresenta uma simetria discreta $Z_2 \otimes Z_2$, ou seja, a configuração dos mínimos é exatamente igual quando o plano (ϕ, χ) gira 180° graus.

Com ajuda destes mínimos, podemos encontrar a tensão ou energia dos setores BPS, para os quais se pode encontrar soluções BPS analíticas ou numéricas. Usando a equação (2.23) obtemos

$$t_{61} = t_{62} = t_{65} = t_{71} = t_{74} = t_{75} = t_{81} = t_{83} = t_{84} = t_{91} = t_{92} = t_{93} = E_1 = \frac{\nu^2}{8\sqrt{\lambda\mu}}. \quad (4.11)$$

$$t_{67} = t_{69} = t_{87} = t_{89} = E_2 = \frac{\nu^2}{4\sqrt{\lambda\mu}}. \quad (4.12)$$

Note que a relação entre energias BPS, E_1 e E_2 , é dada por: $E_2 = 2E_1$. Os demais setores topológicos têm tensões nulas.

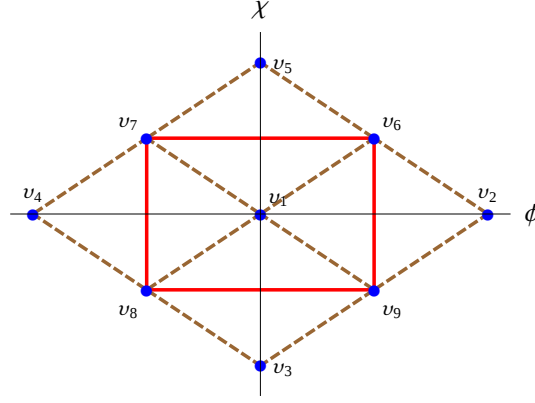


Figura 4.3: Configuração dos setores topológicos. Os setores com energia E_1 (linhas tracejadas) e E_2 (linhas contínuas). Os setores topológicos apresentam simetria Z_2 .

4.5 Equações de Bogomol'nyi e Equação de Órbita

Ora, no caso da configuração estática dos campos em $(1+1)$ dimensões do espaço-tempo, as equações de Bogomol'nyi para o modelo são

$$\frac{d\phi}{dx} = \chi (\lambda \chi^2 + 3\mu \phi^2 + \nu). \quad (4.13)$$

$$\frac{d\chi}{dx} = \phi (3\lambda \chi^2 + \mu \phi^2 + \nu). \quad (4.14)$$

Dessas equações devemos encontrar as soluções BPS. Para achar as soluções das equações Bogomol'nyi, estados BPS, nós empregamos o método mencionado na seção 2.1, ou seja, por meio da equação diferencial da órbita

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{\chi (\lambda \chi^2 + 3\mu \phi^2 + \nu)}{\phi (3\lambda \chi^2 + \mu \phi^2 + \nu)}. \quad (4.15)$$

A solução geral desta equação diferencial tem a forma

$$\begin{aligned} & \left(\chi^2 + \frac{\nu}{4\lambda} \right)^{2\sqrt{9\alpha^2 - 14\alpha + 9}} \left(2\varphi - \sqrt{9\alpha^2 - 14\alpha + 9} \right)^{3(\alpha+1) + \sqrt{9\alpha^2 - 14\alpha + 9}} \\ & = c_0 \left(2\varphi + \sqrt{9\alpha^2 - 14\alpha + 9} \right)^{3(\alpha+1) - \sqrt{9\alpha^2 - 14\alpha + 9}}, \end{aligned}$$

onde c_0 é uma constante de integração, $\alpha = \frac{\lambda}{\mu}$ e $\varphi = \frac{\phi^2 + \frac{\nu}{4\mu}}{\chi^2 + \frac{\nu}{4\lambda}} - \frac{3}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu} - 1 \right)$.

Esta equação se reduz a uma forma mais manejável algebricamente, preservando todo os mínimos do potencial, para o caso $\lambda = \mu$. Para este caso a solução geral da equação diferencial (4.15), acima escrita, tem a forma

$$\phi^2 (\phi^2 - c_0) + \chi^2 (\chi^2 - c_0) - 2\phi^2 \chi^2 - c_0 \frac{\nu}{2\mu} = 0. \quad (4.16)$$

Esta é a equação da órbita com a qual iremos trabalhar daqui para frente.

Para este caso, $\lambda = \mu$, ganhamos mais simetrias discretas entre os mínimos e os setores topológicos. Observe-se que as expressões encontradas até agora têm a seguinte forma

Superpotencial. Da equação (4.7) obtemos

$$W(\phi, \chi) = \mu\chi^3\phi + \mu\phi^3\chi + \nu\phi\chi.$$

Potencial. Da equação (4.8) obtemos

$$V = \frac{1}{2}\chi^2(\mu\chi^2 + 3\mu\phi^2 + \nu)^2 + \frac{1}{2}\phi^2(3\mu\chi^2 + \mu\phi^2 + \nu)^2. \quad (4.17)$$

Este potencial apresenta simetria reflexiva, $V(\phi, \chi) = V(\pm\phi, \pm\chi)$

Mínimos do potencial

$$\begin{aligned} v_1 &= (0, 0), & v_2 &= \sqrt{-\frac{\nu}{\mu}}(1, 0), & v_3 &= \sqrt{-\frac{\nu}{\mu}}(0, -1), \\ v_4 &= \sqrt{-\frac{\nu}{\mu}}(-1, 0), & v_5 &= \sqrt{-\frac{\nu}{\mu}}(0, 1), & v_6 &= \sqrt{-\frac{\nu}{4\mu}}(1, 1), \\ v_7 &= \sqrt{-\frac{\nu}{4\mu}}(-1, 1), & v_8 &= \sqrt{-\frac{\nu}{4\mu}}(-1, -1), & v_9 &= \sqrt{-\frac{\nu}{4\mu}}(1, -1). \end{aligned} \quad (4.18)$$

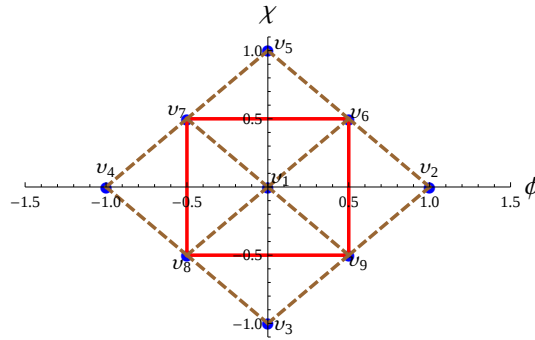


Figura 4.4: Configuração dos mínimos e dos setores topológicos no plano (ϕ, χ) , mostrando simetria discreta Z_4 , para $\nu = 1$, $\mu = -1$.

As Tensões ou Energias BPS. De (4.11) e (4.12) obtemos

$$t_{61} = t_{62} = t_{65} = t_{71} = t_{74} = t_{75} = t_{81} = t_{83} = t_{84} = t_{91} = t_{92} = t_{93} = E_1 = \frac{\nu^2}{8|\mu|}. \quad (4.19)$$

$$t_{67} = t_{69} = t_{87} = t_{89} = E_2 = \frac{\nu^2}{4|\mu|}. \quad (4.20)$$

Nota-se agora os mínimos do potencial e as tensões dos setores topológicos apresentam uma simetria discreta Z_4 , ou seja, a configuração dos mínimos e os setores topológicos é exatamente igual quando o plano (ϕ, χ) gira 90° graus, como é mostra na figura 4.4.

4.6 Constante de Integração c_0

Em geral, os valores da constante de integração c_0 , da equação da órbita (4.16), é arbitrária, mas podemos encontrar alguns valores de c_0 , para os quais a equação da órbita passa pelos mínimos do potencial (4.17) e deduzir algumas propriedades das soluções BPS nos setores topológicos que estão conectados pela equação da órbita. Procedendo como é sugerido por de Souza Dutra em [23]: *Substituímos cada um dos valores dos mínimos do potencial na equação da órbita e achamos os valores de c_0 que satisfaz dita equação. Os valores de c_0 encontrados denominam-se valores críticos.* Para nosso modelo encontramos que c_0 possui dois valores críticos:

$$c_0 = 0 \quad e \quad c_0 = -\frac{2\nu}{\mu}. \quad (4.21)$$

Em seguida, analisamos a configuração da órbita e deduzimos algumas propriedades das soluções BPS, para diferentes valores de c_0 .

Para o intervalo de valores da constante de integração c_0 , $0 < c_0 < -\frac{2\nu}{\mu}$, a órbita não conecta os mínimos, como é mostrado na figura 4.5. Para esses valores de c_0 o modelo não possui soluções.

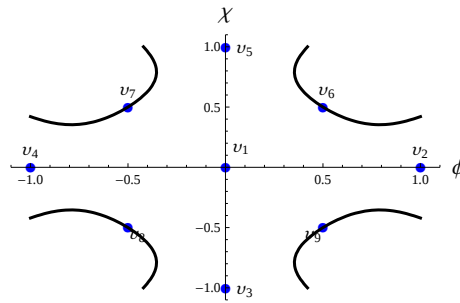


Figura 4.5: Órbita no plano (ϕ, χ) , para $\nu = 1$, $\mu = -1$ e $c_0 = 1$.

Para valores da constante de integração c_0 menores que o valor crítico 0 e maiores que o valor crítico $-\frac{2\nu}{\mu}$, os mínimos v_6 , v_7 , v_8 e v_9 sempre estão conectados, como é mostrado na figura 4.6. Neste caso, sempre se pode encontrar soluções BPS, de forma analítica ou numérica, conectando estes mínimos. Os perfis das soluções BPS são tipo *kink* e *lump* para os campos.

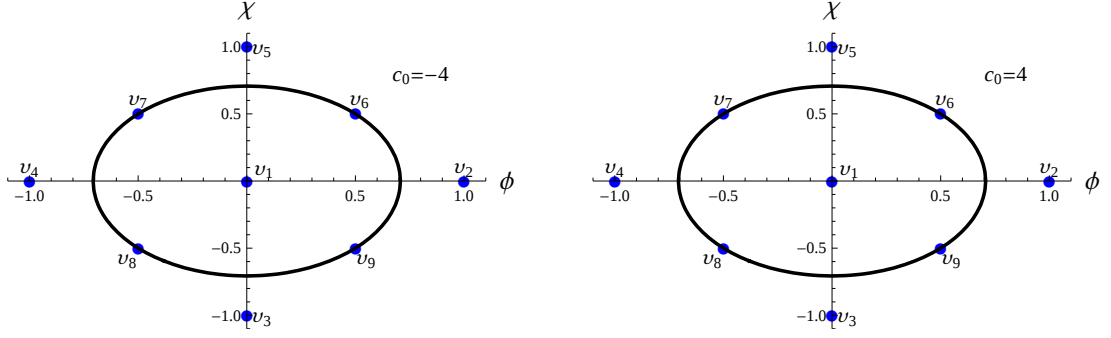


Figura 4.6: Órbita no plano (ϕ, χ) , para $\nu = 1$, $\mu = -1$.

Quando o valor da constante de integração c_0 está se aproximando ao valor crítico zero, a órbita irá deformar continuamente conectando os mínimos v_6 , v_7 , v_8 e v_9 , passando próximo do mínimo v_1 , como é mostrado na figura 4.7. Esse comportamento da órbita se manifesta nos perfis das soluções BPS. A solução BPS com perfil tipo *kink* se deforma continuamente passando a ter um perfil tipo *kink* duplo e a solução BPS com perfil tipo *lump* se alarga formando um longo planalto.

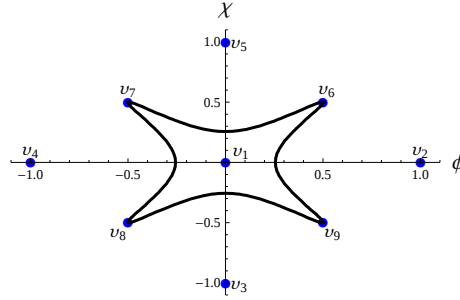


Figura 4.7: Órbita no plano (ϕ, χ) , para $\nu = -1$, $\mu = 4$ e $c_0 = -0.01$.

Se o valor da constante de integração c_0 está se aproximando ao valor crítico $\frac{-2\nu}{\mu}$, irá deformar continuamente conectando os mínimos v_6 , v_7 , v_8 e v_9 , passando próximo dos mínimos v_5 , v_4 , v_3 e v_2 , como é mostrado na figura 4.8. Da mesma maneira que acima, as soluções BPS apresentam perfis tipo *kink* duplo e *lump* alargado com longo planalto.

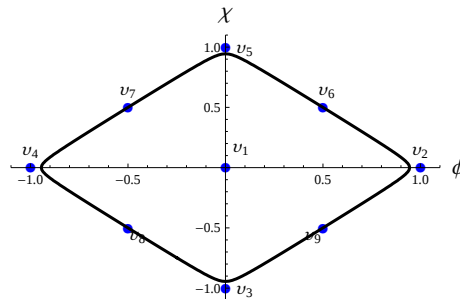


Figura 4.8: Órbita no plano (ϕ, χ) , para $\nu = 1$, $\mu = -1$ e $c_0 = 2.01$.

O mínimo v_1 está conectado aos mínimos v_6 , v_7 , v_8 e v_9 quando o valor da constante de integração c_0 é igual ao valor crítico zero, como é mostrado na figura 4.9. Neste caso, as soluções BPS apresentam perfis tipo *kink*.

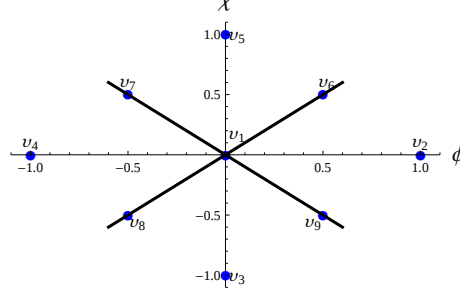


Figura 4.9: Órbita no plano (ϕ, χ) , para $\nu = 1$, $\mu = -1$ e $c_0 = 0$.

Os mínimos v_6 , v_7 , v_8 e v_9 são conectados aos mínimos v_2 , v_3 , v_4 e v_5 quando o valor da constante de integração é igual a $\frac{-2\nu}{\mu}$, como é mostrado na figura 4.10. As soluções BPS apresentam perfis tipo *kink*.

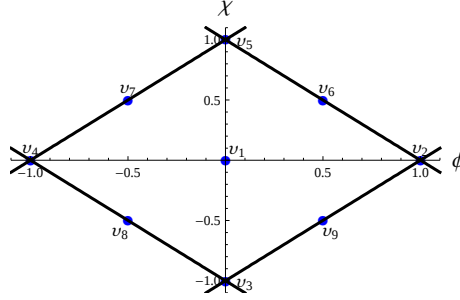


Figura 4.10: Órbita no plano (ϕ, χ) , para $\nu = 1$, $\mu = -1$ e $c_0 = 2$.

Agora, vamos encontrar as soluções BPS explicitamente, com suas respectivas densidades de energias BPS, para todos os setores topológicos do modelo proposto e construiremos suas órbitas a partir dessas soluções BPS. Vamos usar o sinal (+) para indicar aquela solução que apresenta um perfil tipo *kink*, e o sinal (−) para indicar aquela solução que apresenta um perfil tipo *antikink*.

4.7 Estados BPS para o caso $c_0 = 0$

Começamos com o valor da constante c_0 igual a zero. Substituindo este valor na equação de órbita (4.16), obtemos as relações

$$\phi(x) = \chi(x) \quad e \quad \phi(x) = -\chi(x). \quad (4.22)$$

Estas relações são equações de linhas retas que passam pela origem do plano (ϕ, χ) . A linha cuja equação é $\phi(x) = \chi(x)$ passa pelos mínimos v_1 , v_6 e v_8 ; e a linha cuja equação

é $\phi(x) = -\chi(x)$ passa pelos mínimos v_1 , v_7 e v_9 , como foi mostrado na figura 4.9

Sustituindo a relação $\phi(x) = \chi(x)$ na equação de Bogomol'nyi, (4.13) com $\lambda = \mu$, obtemos as seguintes soluções

$$\chi^+(x) = \phi^+(x) = \sqrt{-\frac{\nu}{4\mu}} \sqrt{\frac{e^{\nu x}}{e^{\nu x} - \frac{A}{4\mu} e^{-\nu x}}}. \quad (4.23)$$

$$\chi^-(x) = \phi^-(x) = -\sqrt{-\frac{\nu}{4\mu}} \sqrt{\frac{e^{\nu x}}{e^{\nu x} - \frac{A}{4\mu} e^{-\nu x}}}. \quad (4.24)$$

Nestas soluções, a constante A surge da integração da equação de primeira ordem de Bogomol'nyi. Nós escolhemos a constante de integração A de forma que as soluções (4.23) e (4.24), sejam simétricas em torno do eixo $x = 0$, como é mostrada nas figuras 4.11 e 4.12.

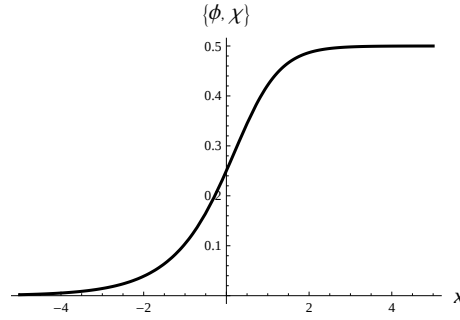


Figura 4.11: Soluções $\phi^+(x)$ e $\chi^+(x)$, para $\nu = 1$, $\mu = -1$.

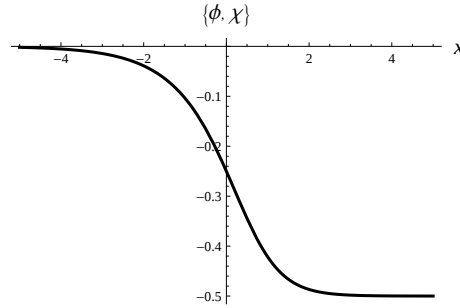


Figura 4.12: Soluções $\phi^-(x)$ e $\chi^-(x)$, para $\nu = 1$, $\mu = -1$.

Observa-se que as soluções têm o seguinte comportamento assintótico $(\phi^+(\infty), \chi^+(\infty)) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $(\phi^+(-\infty), \chi^+(-\infty)) = (0, 0)$. Isto indica que as soluções *kinks* $\phi^+(x)$ e $\chi^+(x)$ conectam os mínimos v_6 e v_1 , ou seja, as soluções $\phi^+(x)$ e $\chi^+(x)$ são soluções BPS do setor topológico BPS t_{16} . As soluções *antikinks*, por sua vez conectam os mínimos v_8 e v_1 , ou seja, as soluções $\phi^-(x)$ e $\chi^-(x)$ são soluções BPS do setor topológico BPS t_{18} .

A densidade de energia para ambos setores, t_{16} e t_{18} , é dada por

$$k(x) = p(x) = -\frac{A^2\nu^3}{64\mu^3} \frac{e^{-\nu x}}{\left(e^{\nu x} - \frac{A}{4\mu}e^{-\nu x}\right)^3}. \quad (4.25)$$

$$\varepsilon(x) = k(x) + p(x) = -\frac{A^2\nu^3}{32\mu^3} \frac{e^{-\nu x}}{\left(e^{\nu x} - \frac{A}{4\mu}e^{-\nu x}\right)^3}. \quad (4.26)$$

Para achar a energia BPS a partir da equação (4.30), empregamos a equação (2.19) e encontramos que $E_{BPS} = t_{16} = t_{18} = \frac{\nu^2}{8|\mu|}$. Este resultado está de acordo com a equação (4.19). O perfil das densidades de energia são mostradas na figura 4.13.

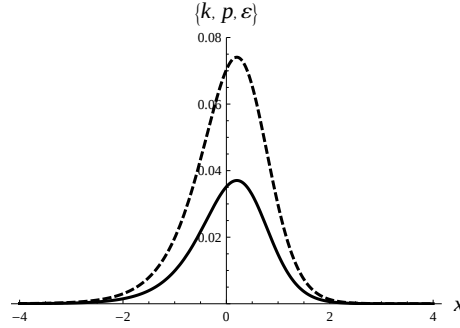


Figura 4.13: Densidade de energia cinética $k(x)$, potencial $p(x)$ (linha contínua), e total $\varepsilon(x)$ (linha tracejada), para $\nu = 1$, $\mu = -1$.

Agora, substituindo a relação $\phi(x) = -\chi(x)$ na equação de Bogomol'nyi, (4.13), obtemos as seguintes soluções BPS

$$\chi^+(x) = -\phi^-(x) = -\sqrt{-\frac{\nu}{4\mu}} \sqrt{\frac{e^{-\nu x}}{e^{-\nu x} - \frac{A}{4\mu}e^{\nu x}}}. \quad (4.27)$$

Estas soluções conectam os mínimos v_1 e v_9 , então são soluções do setor topológico BPS t_{19} . Além disto temos que as soluções

$$\chi^-(x) = -\phi^+(x) = \sqrt{-\frac{\nu}{4\mu}} \sqrt{\frac{e^{-\nu x}}{e^{-\nu x} - \frac{A}{4\mu}e^{\nu x}}}, \quad (4.28)$$

as quais conectam os mínimos v_1 e v_7 . Então são soluções do setor topológico BPS t_{17} . A densidade de energia para ambos setores, t_{17} e t_{19} , é dada por

$$k(x) = p(x) = -\frac{A^2\nu^3}{64\mu^3} \frac{e^{\nu x}}{\left(e^{-\nu x} - \frac{A}{4\mu}e^{\nu x}\right)^3}. \quad (4.29)$$

$$\varepsilon(x) = k(x) + p(x) = -\frac{A^2\nu^3}{32\mu^3} \frac{e^{\nu x}}{\left(e^{-\nu x} - \frac{A}{4\mu}e^{\nu x}\right)^3}. \quad (4.30)$$

Finalmente, as órbitas obtidas a partir das soluções de cada um dos setores, são mostradas na figura 4.14.

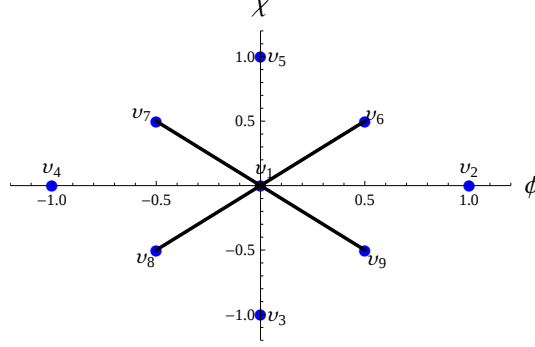


Figura 4.14: Órbitas no plano (ϕ, χ) para $c_0 = 0$, com $\nu = 1$, $\mu = -1$.

A configuração da órbita y os perfis das soluções obtidas estão de acordo com as afirmações expressadas na secção 4.6, figura 4.9.

4.8 Estados BPS para o caso $c_0 = -\frac{2\nu}{\mu}$

Agora apresentamos as soluções BPS, e suas respectivas densidades de energia, para o caso quando a constante de integração $c_0 = -\frac{2\nu}{\mu}$. Então, substituindo este valor na equação de órbita (4.16), obtemos as seguintes relações

$$\phi(x) = \left(\chi(x) + \sqrt{-\frac{\nu}{\mu}} \right), \quad \phi(x) = \left(\chi(x) - \sqrt{-\frac{\nu}{\mu}} \right), \quad (4.31)$$

$$\phi(x) = -\left(\chi(x) + \sqrt{-\frac{\nu}{\mu}} \right) \quad e \quad \phi(x) = -\left(\chi(x) - \sqrt{-\frac{\nu}{\mu}} \right). \quad (4.32)$$

Estas são equações de linhas retas que conectam os mínimos do potencial (4.17) no plano (ϕ, χ) , da seguinte maneira:

$$\phi(x) = \left(\chi(x) + \sqrt{-\frac{\nu}{\mu}} \right) \text{ passa pelos mínimos } v_2, v_3 \text{ e } v_9,$$

$$\phi(x) = \left(\chi(x) - \sqrt{-\frac{\nu}{\mu}} \right) \text{ passa pelos mínimos } v_4, v_5 \text{ e } v_7,$$

$$\phi(x) = -\left(\chi(x) + \sqrt{-\frac{\nu}{\mu}} \right) \text{ passa pelos mínimos } v_3, v_4 \text{ e } v_8,$$

$$\phi(x) = -\left(\chi(x) - \sqrt{-\frac{\nu}{\mu}} \right) \text{ passa pelos mínimos } v_2, v_5 \text{ e } v_6.$$

As órbitas são mostradas na figura 4.10.

Substituindo a relação $\phi(x) = \left(\chi(x) + \sqrt{-\frac{\nu}{\mu}} \right)$ na equação de Bogomol'nyi (4.14), com $\lambda = \mu$, obtemos as seguintes soluções

$$\chi^+(x) = \phi^+(x) - \sqrt{-\frac{\nu}{\mu}} = \sqrt{-\frac{\nu}{4\mu}} \left(-1 + \sqrt{\frac{e^{\nu x}}{e^{\nu x} - 4Ae^{-\nu x}}} \right). \quad (4.33)$$

$$\chi^-(x) = \phi^-(x) - \sqrt{-\frac{\nu}{\mu}} = -\sqrt{-\frac{\nu}{4\mu}} \left(1 + \sqrt{\frac{e^{\nu x}}{e^{\nu x} - 4Ae^{-\nu x}}} \right). \quad (4.34)$$

Da mesma forma como na seção anterior, escolhemos a constante de integração A de forma que as soluções obtidas acima sejam simétricas com respeito ao eixo vertical.

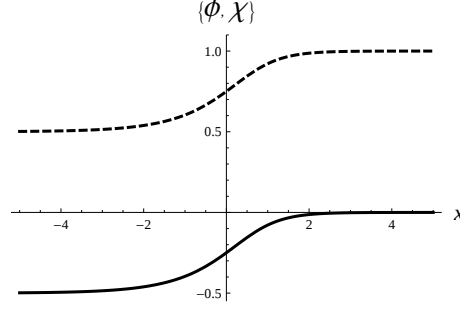


Figura 4.15: Soluções $\phi^+(x)$ (linha tracejada) e $\chi^+(x)$ (linha contínua), para $\nu = 1$, $\mu = -1$.

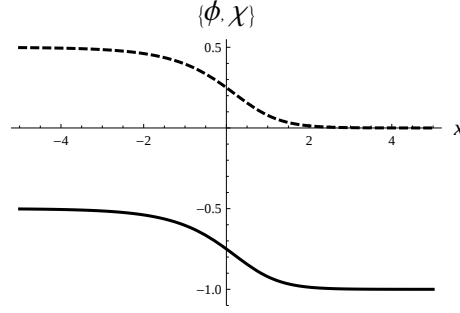


Figura 4.16: Soluções $\phi^-(x)$ (linha tracejada) e $\chi^-(x)$ (linha contínua), para $\nu = 1$, $\mu = -1$.

Da figura 4.15, podemos observar que as soluções têm o seguinte comportamento assintótico $(\phi^+(\infty), \chi^+(\infty)) = (1, 0)$ e $(\phi^+(-\infty), \chi^+(-\infty)) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Isto indica que as soluções *kinks* $\phi^+(x)$ e $\chi^+(x)$ conectam os mínimos v_2 e v_9 , ou seja, as soluções $\phi^+(x)$ e $\chi^+(x)$ são soluções BPS do setor topológico BPS t_{29} . Da mesma maneira, da figura 4.16 as soluções *antikinks* $(\phi^-(\infty), \chi^-(\infty)) = (0, -1)$ e $(\phi^-(-\infty), \chi^-(-\infty)) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, então as soluções *antikinks* $\phi^-(x)$ e $\chi^-(x)$ conectam os mínimos v_3 e v_9 , ou seja, as soluções $\phi^-(x)$ e $\chi^-(x)$ são soluções BPS do setor topológico BPS t_{39} .

Agora, substituindo a relação $\phi(x) = \left(\chi(x) - \sqrt{-\frac{\nu}{\mu}} \right)$ na equação de Bogomol'nyi (4.14), com $\lambda = \mu$, obtemos as seguintes soluções BPS

$$\chi^-(x) = \phi^+(x) + \sqrt{-\frac{\nu}{\mu}} = \sqrt{-\frac{\nu}{4\mu}} \left(1 - \sqrt{\frac{e^{\nu x}}{e^{\nu x} - 4Ae^{-\nu x}}} \right), \quad (4.35)$$

estas soluções conectam os mínimos v_4 e v_7 , então são soluções do setor topológico BPS

t_{47} .

$$\chi^+(x) = \phi^+(x) + \sqrt{-\frac{\nu}{\mu}} = \sqrt{-\frac{\nu}{4\mu}} \left(1 + \sqrt{\frac{e^{\nu x}}{e^{\nu x} - 4Ae^{-\nu x}}} \right), \quad (4.36)$$

estas soluções conectam os mínimos v_5 e v_7 , então são soluções do setor topológico BPS t_{57} .

A densidade de energia para os setores, t_{29} , t_{39} , t_{47} e t_{57} , é dada por

$$k(x) = p(x) = -\frac{4A^2\nu^3}{\mu} \frac{e^{-\nu x}}{(e^{\nu x} - 4Ae^{-\nu x})^3}. \quad (4.37)$$

Para achar a energia BPS, E_{BPS} , destes setores usamos (2.19) e obtemos $E_{BPS} = t_{47} = t_{57} = t_{29} = t_{39} = \frac{\nu^2}{8|\mu|}$

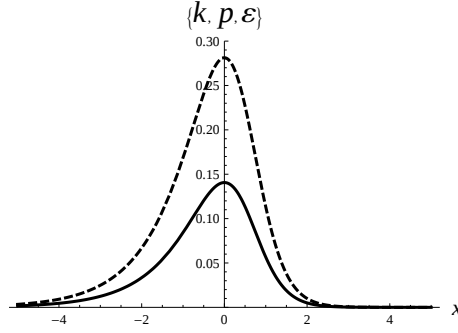


Figura 4.17: Densidade de energia cinética $k(x)$, potencial $p(x)$ (linha contínua), e total $\varepsilon(x)$ (linha tracejada), para $\nu = 1$, $\mu = -1$.

Substituindo a relação $\phi(x) = -\left(\chi(x) + \sqrt{-\frac{\nu}{\mu}}\right)$ na equação de Bogomol'nyi (4.14), com $\lambda = \mu$, obtemos as seguintes soluções BPS

$$\chi^+(x) = -\phi^-(x) - \sqrt{-\frac{\nu}{\mu}} = -\sqrt{-\frac{\nu}{4\mu}} \left(1 + \sqrt{\frac{e^{-\nu x}}{e^{-\nu x} - 4Ae^{\nu x}}} \right). \quad (4.38)$$

Estas soluções conectam os mínimos v_8 e v_3 , então são soluções do setor topológico BPS t_{38} . Temos também

$$\chi^-(x) = -\phi^+(x) - \sqrt{-\frac{\nu}{\mu}} = \sqrt{-\frac{\nu}{4\mu}} \left(-1 + \sqrt{\frac{e^{-\nu x}}{e^{-\nu x} - 4Ae^{\nu x}}} \right), \quad (4.39)$$

que soluções conectam os mínimos v_8 e v_4 . Então são soluções do setor topológico BPS t_{48} .

Substituindo a relação $\phi(x) = -\left(\chi(x) + \sqrt{-\frac{\nu}{\mu}}\right)$ na equação de Bogomol'nyi

(4.14), com $\lambda = \mu$, obtemos as seguintes soluções BPS

$$\chi^+(x) = -\phi^-(x) + \sqrt{-\frac{\nu}{\mu}} = \sqrt{-\frac{\nu}{4\mu}} \left(1 - \sqrt{\frac{e^{-\nu x}}{e^{-\nu x} - 4Ae^{\nu x}}} \right), \quad (4.40)$$

que soluções conectam os mínimos v_6 e v_2 , então são soluções do setor topológico BPS t_{62} . Além destes temos

$$\chi^-(x) = -\phi^+(x) + \sqrt{-\frac{\nu}{\mu}} = \sqrt{-\frac{\nu}{4\mu}} \left(1 + \sqrt{\frac{e^{-\nu x}}{e^{-\nu x} - 4Ae^{\nu x}}} \right), \quad (4.41)$$

que soluções conectam os mínimos v_6 e v_5 , então são soluções do setor topológico BPS t_{65} .

A densidade de energia para os setores, t_{38} , t_{48} , t_{62} e t_{65} , é dada por

$$k(x) = p(x) = -\frac{4A^2\nu^3}{\mu} \frac{e^{\nu x}}{(e^{-\nu x} - 4Ae^{\nu x})^3}. \quad (4.42)$$

Usando as soluções BPS encontradas para cada um dos setores topológicos, nós mostramos as órbitas de cada setor, veja a figura 4.18. As órbitas obtidas concordam com aqueles obtidas a partir da equação da órbita, veja a figura 4.10.

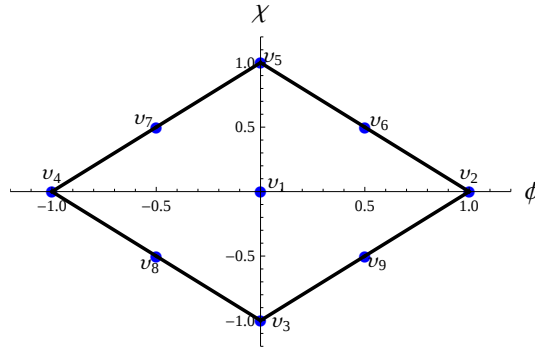


Figura 4.18: Órbitas no plano (ϕ, χ) , para $\nu = 1$, $\mu = -1$.

4.9 Estados BPS para c_0 arbitrário

A partir da equação de órbita (4.16), obtemos as seguintes relações, $\phi = \phi(\chi)$, entre as possíveis soluções BPS

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(2\chi^2(x) + c_0 + \sqrt{c_0 \left(8\chi^2(x) + c_0 + \frac{2\nu}{\mu} \right)} \right)}, \quad (4.43)$$

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(2\chi^2(x) + c_0 - \sqrt{c_0 \left(8\chi^2(x) + c_0 + \frac{2\nu}{\mu} \right)} \right)}, \quad (4.44)$$

$$\phi(x) = -\sqrt{\frac{1}{2} \left(2\chi^2(x) + c_0 + \sqrt{c_0 \left(8\chi^2(x) + c_0 + \frac{2\nu}{\mu} \right)} \right)}, \quad (4.45)$$

$$\phi(x) = -\sqrt{\frac{1}{2} \left(2\chi^2(x) + c_0 - \sqrt{c_0 \left(8\chi^2(x) + c_0 + \frac{2\nu}{\mu} \right)} \right)}. \quad (4.46)$$

Estas relações são válidas para qualquer valor da constante da integração c_0 . Se c_0 toma o valor crítico zero as equações (4.43), (4.44), (4.45) e (4.46) são reduzidas à forma da equação (4.22), e se c_0 toma o valor crítico $-\frac{2\nu}{\mu}$, se reduzem às formas das equações (4.31) e (4.32). Mas agora vamos trabalhar para valores de c_0 diferentes daqueles já estudados.

Então, substituindo a equação (4.43) na equação de Bogomol'nyi (4.14), com $\lambda = \mu$, obtemos soluções numéricas, cujos perfis são mostradas na figura 4.19.

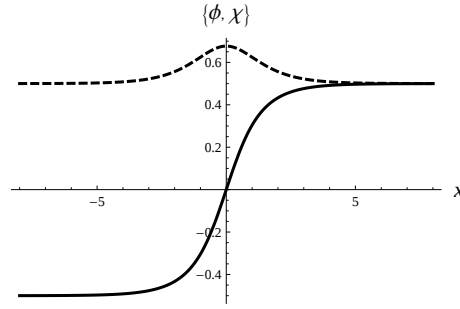


Figura 4.19: Perfis dos campos ϕ (linha tracejada) e χ (linha contínua), para $\nu = 1$, $\mu = -1$ e $c_0 = -5$.

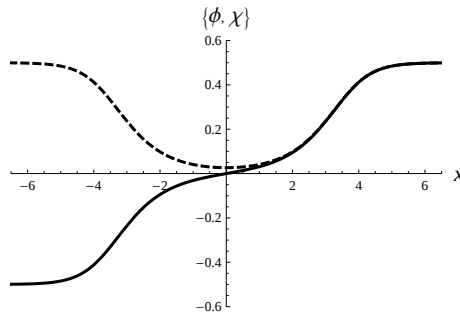


Figura 4.20: Perfis dos campos ϕ (linha tracejada) e χ (linha contínua), para $\nu = 1$, $\mu = -1$ e $c_0 = -0.00001$.

Da figura 4.19, observamos que para o caso da constante de integração c_0 menor do valor crítico zero, a solução $\phi(x)$ apresenta um perfil *lump* e a solução $\chi(x)$ apresenta um perfil de *kink* simples. Além disto, as soluções conectam os mínimos $v_6 = (\phi(\infty), \chi(\infty)) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $v_9 = (\phi(-\infty), \chi(-\infty)) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, então essas soluções são soluções BPS do setor topológico t_{69} .

Quando c_0 está se aproximando ao valor crítico zero, os perfis das soluções se deformam continuamente passando a ter, o campo ϕ um perfil *lump* invertido alargado formando uma planície e o campo χ um perfil *kink* duplo, como são mostrados na figura 4.20. Nesta figura observa-se que, as soluções conectam os mínimos $v_6 = (\phi(\infty), \chi(\infty)) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $v_9 = (\phi(-\infty), \chi(-\infty)) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ passa próximo ao mínimo $v_1 = (0, 0)$. Esta situação foi já deduzida a partir da configuração da órbita na seção 4.6, ver figura 4.7.

Substituindo a equação (4.44) na equação de Bogomol'nyi (4.14), com $\lambda = \mu$, obtemos soluções numéricas, cujos perfis são da mesma forma dada na figura 4.19, para c_0 maior que o valor crítico $-\frac{2\nu}{\mu}$. Então, esta solução BPS conecta os mínimos v_6 e v_9 . Mas agora, quando c_0 é próximo a $-\frac{2\nu}{\mu}$ as soluções se deformam apresentando perfis mostrado na figura 4.21. O campo ϕ apresenta um perfil *lump* alargado com longo planalto e o campo χ apresenta um perfil *kink* duplo.

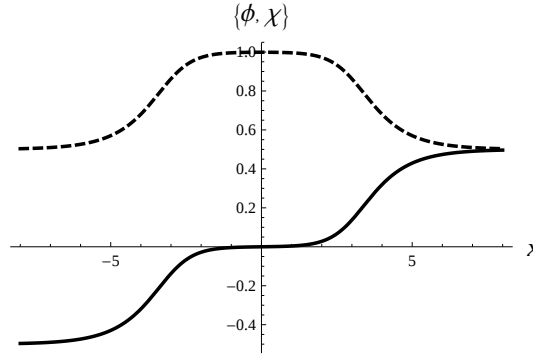


Figura 4.21: Perfis dos campos ϕ (linha tracejada) e χ (linha contínua), para $\nu = 1$, $\mu = -1$ e $c_0 = 2.00001$.

Desta figura 4.21, nota-se que as soluções conectam os mínimos $v_6 = (\phi(\infty), \chi(\infty)) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $v_9 = (\phi(-\infty), \chi(-\infty)) = (1, 0)$ passando próximo do mínimo $v_2 = (1, 0)$. Esta situação foi já deduzida a partir da configuração da órbita, ver figura 4.9.

Substituindo a equação (4.45) na equação de Bogomol'nyi (4.14), com $\lambda = \mu$, obtemos soluções numéricas, cujos perfis dos campos são mostrados na figura 4.22.

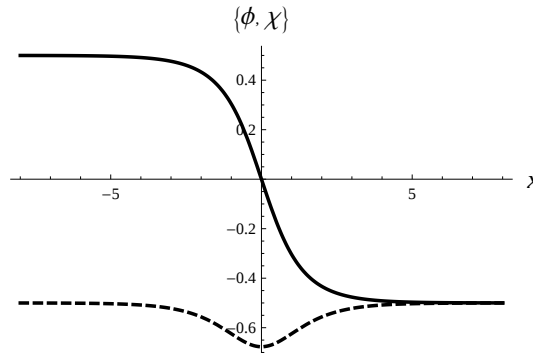


Figura 4.22: Perfis dos campos ϕ (linha tracejada) e χ (linha contínua), para $\nu = 1$, $\mu = -1$ e $c_0 = -5$.

Observamos a partir da figura 4.22 que para o caso de valores da constante integração c_0 menores que o valor crítico zero, a solução $\phi(x)$ apresenta um perfil *lump* invertido e a solução $\chi(x)$ apresenta um perfil *antikink*. Além de isso, as soluções conectam os mínimos $v_8 = (\phi(\infty), \chi(\infty)) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ e $v_7 = (\phi(-\infty), \chi(-\infty)) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ou seja as soluções são soluções BPS do setor topológico t_{78} .

Quando c_0 está se aproximando ao valor crítico zero, os perfis das soluções se deformam continuamente passando a ter, o campo ϕ um perfil *lump* alargado formando um planalto e o campo χ um perfil *kink* duplo, como são mostrados na figura 4.23.

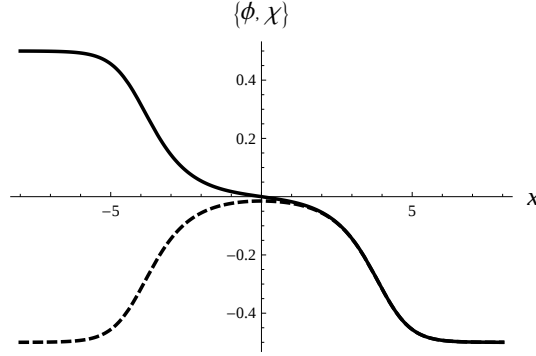


Figura 4.23: Perfis dos campos ϕ (linha tracejada) e χ (linha contínua), para $\nu = 1$, $\mu = -1$ e $c_0 = -0.00001$.

Desta figura, nota-se que as soluções conectam os mínimos $v_8 = (\phi(\infty), \chi(\infty)) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ e $v_7 = (\phi(-\infty), \chi(-\infty)) = (0, 0)$ passando próximo do mínimo $v_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Esta situação já foi deduzida a partir da configuração da órbita, ver figura 4.7.

Substituindo a equação (4.46) na equação de Bogomol'nyi (4.14), com $\lambda = \mu$, obtemos soluções numéricas, cujos perfis dos campos é da mesma forma dada na figura 4.22, para valores da constante de integração c_0 maiores que o valor crítico $-\frac{2\nu}{\mu}$. Então, esta solução BPS conecta os mínimos v_8 e v_7 . Mas agora, quando c_0 é próximo a $-\frac{2\nu}{\mu}$ as soluções se deformam apresenta perfis mostrados na figura 4.24.

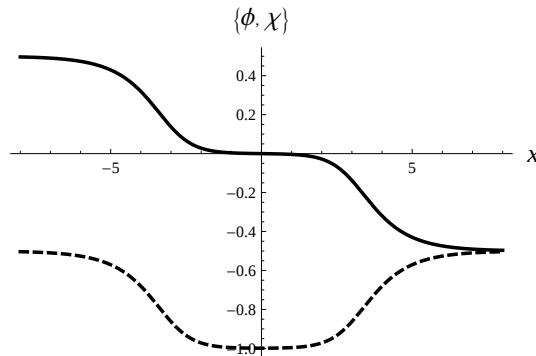


Figura 4.24: Perfis dos campos ϕ (linha tracejada) e χ (linha contínua), para $\nu = 1$, $\mu = -1$ e $c_0 = 2.00001$.

Desta figura, note-se que as soluções conectam os mínimos $v_7 = (\phi(\infty), \chi(\infty)) =$

$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ e $v_8 = (\phi(-\infty), \chi(-\infty)) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ passando próximo do mínimo $v_4 = (-1, 0)$. Esta situação foi já deduzida a partir da configuração da órbita, ver figura 4.9).

Para obter as soluções faltantes, a quais conectam os mínimos v_6, v_7 e v_8, v_9 , encontra-se a relação, a partir da equação da órbita (4.16), $\chi = \chi(\phi)$ e procede-se da mesma maneira como foi desenvolvido acima. Assim, podemos encontrar que as soluções para os setores faltantes t_{67} e t_{89} . A configuração totais das órbitas obtidas a partir das soluções BPS, são mostrados nas figuras 4.25, 4.26 e 4.27.

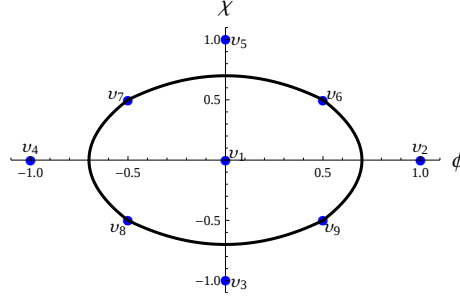


Figura 4.25: Órbitas no plano (ϕ, χ) , para $\nu = -1$, $\mu = 1$ e $c_0 = 4$.

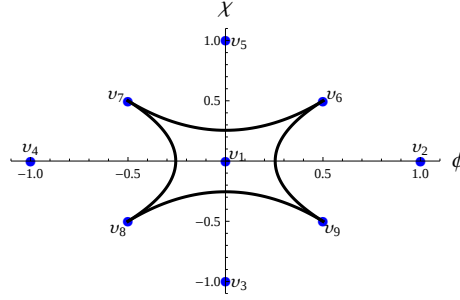


Figura 4.26: Órbitas no plano (ϕ, χ) , para $\nu = -1$, $\mu = 1$ e $c_0 = -0.01$.

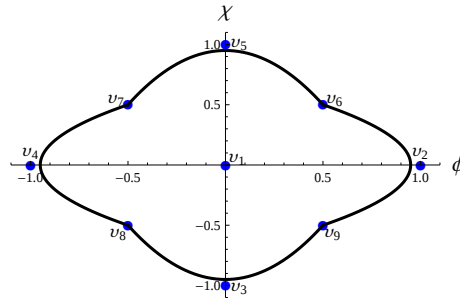


Figura 4.27: Órbitas no plano (ϕ, χ) , para $\nu = -1$, $\mu = 1$ e $c_0 = 2.01$.

Estas órbitas obtidas a partir das soluções BPS estão de acordo com as obtidas a partir da equação de órbita (4.16) na seção 4.6, ver figuras 4.6, 4.7 e 4.8.

4.10 Estados não-BPS

Agora, para completar o estudo das soluções do modelo proposto, encontramos as soluções que conectam o mínimo v_1 com os mínimos v_2, v_3, v_4 e v_5 . Nota-se que os mínimos v_1, v_2 e v_4 se encontram no eixo $\chi = 0$ do plano (ϕ, χ) e os mínimos v_1, v_3 e v_5 se encontram no eixo $\phi = 0$ do plano (ϕ, χ) .

Começamos achando as soluções que conectam os mínimos v_1, v_2 e v_4 . Para isso fazemos $\chi = 0$ nas equações de movimento (4.9) e (4.10), com $\lambda = \mu$, assim obtemos

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \phi (3\mu^2\phi^4 + 4\mu\nu\phi^2 + \nu^2). \quad (4.47)$$

Esta equação se reduz a uma equação de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dx} = \phi (\nu + \mu\phi^2), \quad (4.48)$$

então, as soluções encontradas da equação (4.47), por meio da equação (4.48), são soluções não-BPS. Essas soluções são da forma

$$\phi^\pm(x) = \pm \sqrt{\frac{\nu A e^{\nu x}}{e^{-\nu x} - \mu A e^{\nu x}}} \quad e \quad \chi(x) = 0, \quad (4.49)$$

onde a constante A é a constante de integração da equação (4.48), a qual é escolhida de forma que as soluções sejam simétricas com respeito ao eixo $x = 0$. Os perfis do campo ϕ é mostrado na figura 4.28.

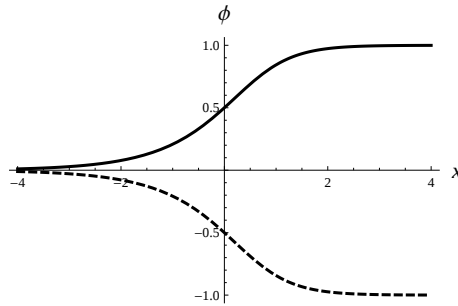


Figura 4.28: Soluções não-BPS ϕ^+ (linha contínua) e ϕ^- (linha tracejada), para $\nu = 1$, $\mu = -1$.

Desta figura vemos que, a solução ϕ^+ conecta os mínimos $v_1 = \phi^+(\infty) = 1$ e $v_2 = \phi^+(-\infty) = 0$, ou seja ϕ^+ é uma solução não-BPS do setor não-BPS t_{12} . Também, a solução ϕ^- conecta os mínimos $v_1 = \phi^-(\infty) = -1$ e $v_4 = \phi^-(-\infty) = 0$, ou seja ϕ^- é uma solução não-BPS do setor não-BPS t_{14} .

A densidade de energia, para ambas soluções, equação (4.49), é dada por

$$k(x) = p(x) = -\frac{A\nu^3}{2} \frac{e^{-\nu x}}{(A\mu e^{\nu x} - e^{-\nu x})^3}. \quad (4.50)$$

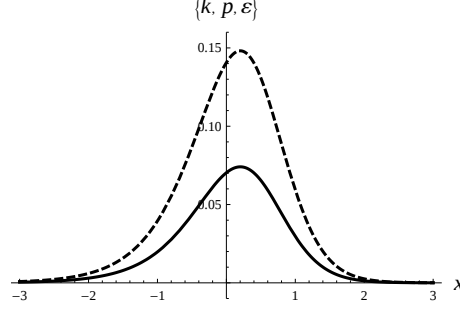


Figura 4.29: Densidade de energia cinética $k(x)$, potencial $p(x)$ (linha contínua) e total $\varepsilon(x)$ (linha tracejada). Para $\nu = 1$ e $\mu = -1$.

É importante indicar que as soluções não-BPS, equação (4.49), apresentam densidade de energia igualmente distribuídas em $k(x)$ e $p(x)$. Esta é uma característica que foi usada por Bazeia e Brito em [11] para fazer uma junção tripla de defeitos. O valor da energia não-BPS nos setores são, $E_{n-BPS} = t_{12} = t_{14} = -\frac{\nu^2}{4\mu}$.

Agora, achemos as soluções que conectam os mínimos v_1 , v_3 e v_5 . Para isso fazemos $\phi = 0$ nas equações de movimento (4.9) e (4.10), com $\lambda = \mu$, assim obtemos

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = \chi (3\mu^2\chi^4 + 4\mu\nu\chi^2 + \nu^2). \quad (4.51)$$

esta equação diferencial é idêntica à equação (4.47), portanto as soluções de (4.51) são soluções não-BPS que conectam os mínimos v_1 , v_3 e v_5 e apresentam as mesmas características. As soluções são

$$\chi^\pm(x) = \pm \sqrt{\frac{\nu A e^{\nu x}}{e^{-\nu x} - \mu A e^{\nu x}}} \quad e \quad \phi(x) = 0, \quad (4.52)$$

A solução *kink* χ^+ conecta os mínimos v_1 e v_5 , ou seja χ^+ é uma solução não-BPS do setor não-BPS t_{15} , e a solução *antikink* χ^- conecta os mínimos v_1 e v_3 , ou seja χ^- é uma solução não-BPS do setor não-BPS t_{13} . A densidade de energia destas soluções são

$$k(x) = p(x) = -\frac{A\nu^3}{2} \frac{e^{-\nu x}}{(A\mu e^{\nu x} - e^{-\nu x})^3}, \quad (4.53)$$

e o valor da energia não-BPS, $E_{n-BPS} = t_{13} = t_{15} = -\frac{\nu^2}{4\mu}$.

Deste modo, nós encontramos todas as soluções BPS e não-BPS, com suas respectivas energias e tensões, do modelo proposto.

Finalmente, uma vez encontradas todas as soluções, nós examinamos devidamente, empregando as energias BPS e não-BPS, que setores cumprem estritamente a relação (3.1), a fim de juntar as soluções topológicas. Infelizmente, nenhum arranjo dos setores satisfazem dita relação. No entanto, nós descrevemos, na seção 4.6, uma maneira de estudar o comportamento das soluções BPS a partir da configuração da órbita. A configuração da órbita, e das soluções BPS, é controlada por meio dos valores da constante de integração c_0 . Esta constante de integração c_0 não está presente na densidade de lagrangiana e, consequentemente, tampouco nas energias BPS. Em vista disso, há uma degenerescência das soluções porque, apesar dos diferentes valores de c_0 a energia BPS da configuração dos campos é precisamente a mesma. É por esta razão que c_0 também chama-se parâmetro de degenerescência [26]. Também, mostramos como encontrar os valores críticos de c_0 . Um caso interessante acontece quando c_0 assume valores próximos de seus valores críticos, no modelo de dois campos, as soluções BPS se deformam continuamente passando a ter o campo ϕ um perfil tipo *lump* alargado e o campo χ um perfil tipo *kink* duplo. Além disso, quero chamar a atenção, que as densidades de energia das soluções BPS e não-BPS são estritamente positivas.

Em seguida, nós passamos a estudar modelos supersimétricos, como nosso modelo proposto, porém em $(4 + 1)$ dimensões no espaço-tempo deformado.

Capítulo 5

Cénarios Mundos-Branas

Após o nascimento da relatividade geral de Einstein, a pergunta sobre a dimensionalidade do mundo em que vivemos apareceu naturalmente. No âmbito da teoria gravitacional de Einstein, o espaço e o tempo são unificados e isso nos permite perceber que o mundo circundante é quadri-dimensional. As questões que surgem infalivelmente nesse caso é sobre a dimensionalidade do nosso mundo:

1. Por que são as dimensões observadas fisicamente do nosso universo iguais a $(3+1)$ (espaço+tempo)?
2. Se as dimensões reais são ainda mais de quatro, porque as dimensões extra não são observáveis?

Em seu artigo de 1921, Kaluza [27] considerou a extensão da relatividade geral para cinco dimensões. Ele considerou as equações de campo onde todos os componentes da métrica são independentes da quinta coordenada. Esta consideração ficou conhecida como *cylindrical condition*. A teoria de Kaluza desenvolve uma teoria de campo covariante em cinco dimensões que descrevem as teorias quadri-dimensionais da relatividade geral e eletromagnetismo. Em 1926 Oskar Klein [28] considerou que a dimensão extra teria uma forma circular com raio menor do que as escalas comumente observadas. Esta teoria da gravidade em um espaço-tempo compacto é chamada teoria Kaluza-Klein. A teoria Kaluza-Klein ainda apresentava certos problemas em sua interpretação como uma teoria que unificava a gravidade e eletromagnetismo. A mais notável previa uma unidade de carga que era muito menor que a carga do elétron. Estes problemas aliados à efervescente pesquisa em mecânica quântica à época, fizeram com que fosse abandonada até a década de 1970.

Nas últimas décadas, a idéia de que o nosso espaço, na verdade, tem um número de mais de quatro dimensões se tornou bastante popular novamente. Supõe-se que muitos problemas da física de partículas elementares podem ser resolvidos por introdução das cordas e da supersimetria, e aumentando o número de dimensões do espaço-tempo. Ao aumentar o número de dimensões, surge uma pergunta legítima: por que as propriedades das dimensões extras diferem muito das dimensões do espaço-tempo observada em quatro

dimensões. Duas soluções para esta questão foram sugeridas, chamados mecanismo de compactificação espontânea e modelos de mundos-brana.

No caso das dimensões extra compactadas, supõe-se que essas dimensões são muito pequenas e não observáveis. Em [29]-[31], foi introduzido a abordagem moderna para o problema da não observação de outras dimensões compactadas.

De um modo geral, nos modelos de mundos-brana as partículas do modelo padrão são confinadas em uma hipersuperfície (chamada brana) embutido em um espaço de dimensão superior (chamado *bulk*). Somente gravidade e matéria exótica, tais como o campo do dilaton, podem se propagar no *bulk*. Nosso universo pode ser um objeto brana. Esta idéia foi inicialmente motivada fenomenologicamente [32]-[34] e mais tarde ampliada pelos recentes desenvolvimentos na teoria das cordas. Dentro de alguns cenários de mundos-brana, as restrições sobre o tamanho das dimensões extras se tornam mais fracas, porque as partículas do modelo padrão propagam-se apenas em três dimensões espaciais. A lei da gravitação de Newton, no entanto, é sensível à presença das dimensões extras. A gravidade está sendo testada apenas em escalas maiores do que um décimo de milímetro, e possíveis desvios abaixo da escala podem ser previstos.

Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali (ADD) [35] e [36], propuseram um modelo interessante, mas simples, considerando uma geometria plana, em $(4 + d)$ dimensões, em que d dimensões são compactas, com raio R (*toroidal topology*). Todas as partículas do modelo padrão são confinadas na brana, mas a gravidade pode explorar as d dimensões extras. Isto dá origem a uma modificação da lei da força gravitacional visto por um observador sobre a brana. O resultado mais importante da proposta (ADD) é uma possível solução para o problema de hierarquia, que é a grande discrepância entre a escala de Planck em 10^{19} GeV e a escala eletrofraca a 100 GeV.

Randall e Sundrum em 1998 [12] propuseram um modelo (RS1) de espaço-tempo cinco-dimensional, com duas branas com um espaço (*bulk*) anti-De Sitter entre elas: uma brana onde as partículas do modelo padrão estão confinadas, denominada brana do modelo padrão, e outra, onde a gravidade está localizada, denominada brana de Planck. O que previne a gravidade de escapar para a dimensão extra em baixas energias é a constante cosmológica negativa do *bulk*. A razão pela qual a gravidade parece fraca na brana do modelo padrão é que ela é exponencialmente suprimida com a distância entre as branas (devido à curvatura). Em um segundo modelo (RS2) proposto pelos mesmos autores [12], há somente uma brana de modelo padrão e uma dimensão extra infinita. Vários problemas físicos têm sido consideradas nos modelos de Randall-Sundrum e suas extensões. Em muitos trabalhos, foi assumido que a brana é infinitamente fina. Embora na aproximação de brana fina muitos resultados interessantes foram obtidos, em algumas situações os efeitos da espessura da brana devem ser consideradas.

5.1 Branas Espessas

Do ponto de vista realista, uma brana deve ter uma espessura. Em alguns casos, os efeitos da espessura da brana pode ser importantes. A inclusão da espessura da brana nos dá novas possibilidades e novos problemas. Em muitas teorias de campo multidimensional acopladas à gravidade existem soluções de defeitos topológicos. Eles levaram a uma rica variedade de mundos brana. Ao mesmo tempo, a espessura da brana também traz ambiguidade na definição das quantidades eficazes em quatro dimensões. Vamos agora dar nossa definição de branas espessas, nossa definição está baseada na forma de uma metrica de cinco-dimensões:

$$ds^2 = a^2(r) g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dr^2, \quad (5.1)$$

onde $-\infty < r < \infty$ é a coordenada da dimensão extra. $g_{\mu\nu}$ é só a métrica do espaço-tempo quadridimensional de Minkowski ou anti de Sitter. $a(y)$ é a função de deformação, que é regular, tem um pico na brana e cai rapidamente para longe da brana. Um comportamento típico da função de deformação em soluções de tipo branas fina e grossa é mostrado na figura 5.1. Quando se considera a simetria Z_2 , $a(r) = a(-r)$ é satisfeita. A normalização

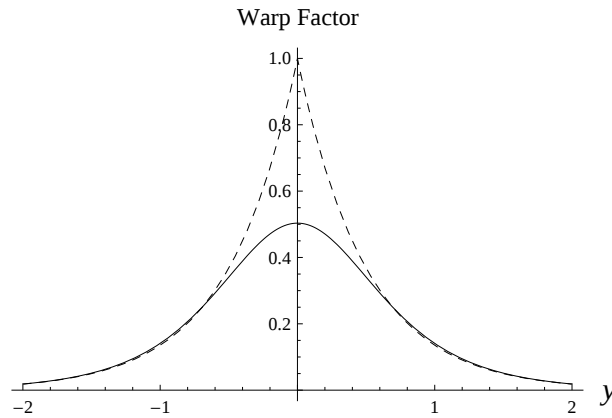


Figura 5.1: Comportamento do fator de deformação $a(y)$ de uma brana fina (linha tracejada) e de uma brana espessa (linha contínua).

do modo zero do gráviton dá a condição de que $\int_{-\infty}^{\infty} dr (a(r))^4$ seja não-nula e finita. Em problemas de cinco-dimensões, a aproximação de brana fina é válida enquanto a espessura da brana não pode ser resolvida.

5.2 Modelos Estudados

Nesta parte da dissertação, apresentamos alguns modelos revisados, dentro da teoria supersimétrica, que geram branas espessas. Nestes modelos nós consideramos campos escalares reais acoplados à gravidade em $(4+1)$ dimensões do espaço-tempo deformado,

onde usaremos a constante newtoniana $4\pi G^{(5)} = 1$.

Consideramos um sistema de um campo escalar acoplada à gravidade cuja ação é da forma

$$S = \int d^4x dr \sqrt{|g|} \left(-\frac{1}{4}R + \frac{1}{2}\partial_a\phi\partial^a\phi - V(\phi) \right), \quad (5.2)$$

onde $g \equiv \text{Det}(g_{ab})$ e a métrica do *bulk* dada por

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = e^{2A(r)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dr^2, \quad (5.3)$$

onde $a, b = 0, \dots, 4$. Neste caso $r = x^4$ representa a dimensão extra, e $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica minkowskiana $(1, -1, -1, -1)$. Os índices gregos correm de 0 a 3, $e^{2A(r)}$ é chamado o fator de deformação, o qual depende só da dimensão extra. As equações estáticas de movimento para esses modelos, para o caso $\phi = \phi(r)$ e $A = A(r)$, são as seguintes (ver apêndice C)

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + 4\frac{dA}{dr}\frac{d\phi}{dr} = \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi}, \quad (5.4)$$

$$\frac{d^2A}{dr^2} = -\frac{2}{3}\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2, \quad (5.5)$$

$$\left(\frac{dA}{dr}\right)^2 = \frac{1}{6}\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 - \frac{1}{3}V(\phi). \quad (5.6)$$

Se o potencial é dado pela expressão, [37]:

$$V(\phi) = \frac{1}{8}\left(\frac{\partial W(\phi)}{\partial\phi}\right)^2 - \frac{1}{3}(W(\phi))^2, \quad (5.7)$$

pode-se verificar as soluções das seguintes equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{2}\frac{\partial W(\phi)}{\partial\phi}, \quad \text{e} \quad \frac{dA}{dr} = -\frac{1}{3}W(\phi), \quad (5.8)$$

são soluções das equações diferenciais de segunda ordem dadas pelas equações (5.4)-(5.6).

5.2.1 Primeiro modelo

Nós começamos com o modelo apresentado por Martin Gremm em [38]. Este modelo é amplamente estudado devido à sua aplicação nas diversas áreas da física, como por exemplo na matéria condensada, na biofísica, na física de partículas, na cosmologia, etc. Além disso, mostra várias características do cenário de branas espessas.

Nesse artigo se considera o superpotencial $W(\phi)$ da forma

$$W(\phi) = 3bc \sin\left(\sqrt{\frac{2}{3b}}\phi\right), \quad (5.9)$$

as soluções das equações (5.8) são dadas pelas seguintes expressões

$$\phi(r) = \sqrt{6b} \arctan \left[\tanh \left(\frac{cr}{2} \right) \right], \quad (5.10)$$

$$A(r) = b \ln [\operatorname{sech}(cr)]. \quad (5.11)$$

A configuração do potencial V , equação (5.7), com o superpotencial W dada em (5.9), é representada na figura 5.2.

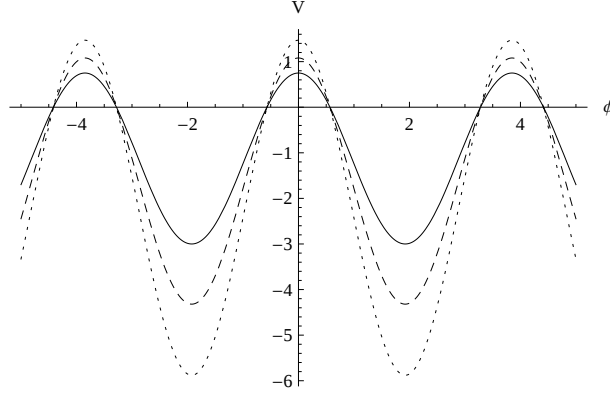


Figura 5.2: Configuração do potencial V . Para $c = 1$ (linha contínua), $c = 1.2$ (linha tracejada) e $c = 1.4$ (linha pontilhada), com $b = 1$.

A configuração do campo escalar real ϕ e do fator de deformação $e^{2A(r)}$, são dadas nas figuras 5.2 e 5.3, respectivamente.

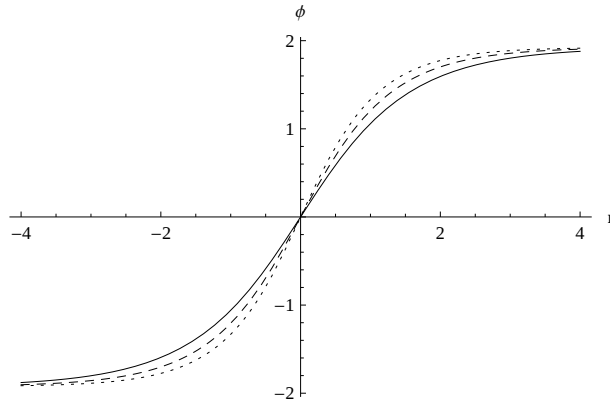


Figura 5.3: Configuração do campo escalar ϕ . Para $c = 1$ (linha contínua), $c = 1.2$ (linha tracejada) e $c = 1.4$ (linha pontilhada) com $b = 1$.

Da figura 5.3 nós deduzimos que o campo escalar real ϕ tem uma configuração tipo *kink*, indo do mínimo do potencial $\phi_0(r \rightarrow -\infty) = -\sqrt{6b}\pi/4$ ao mínimo $\phi_0(r \rightarrow \infty) = \sqrt{6b}\pi/4$. Isso indica que o defeito (brana) encontra-se nos arredores de $r = 0$. Outro fato importante a mencionar é que a espessura da brana varia de acordo com as mudanças no valor do parâmetro c , ou seja, o parâmetro c está associado com a espessura da brana. Esta análise é reforçada pelo comportamento da configuração do fator de deformação dada

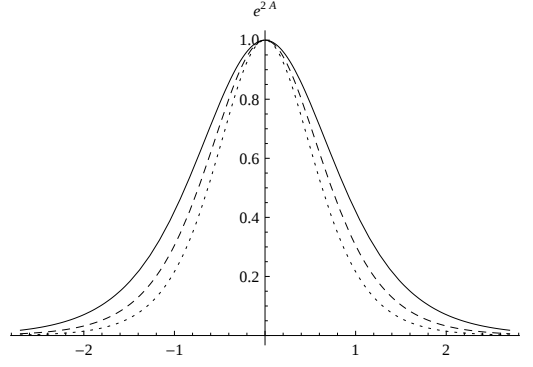


Figura 5.4: Configuração do fator de deformação $e^{2A(r)}$. Para $c = 1$ (linha contínua), $c = 1.2$ (linha tracejada) e $c = 1.4$ (linha pontilhada) com $b = 1$.

na figura 5.4. Também observa-se a partir dos valores dos mínimos do potencial V , que o parâmetro b , amplitude do *kink*, está associado a esses valores.

Da figura 5.4, configuração do fator de deformação, mostrada acima, nós podemos deduzir que o sistema na dimensão extra apresenta simetria Z_2 , ou seja, se cumpre: $e^{A(r)} = e^{A(-r)}$.

A densidade de energia do campo escalar, é dada pela seguinte expressão (ver Apêndice B):

$$T_{00} = e^{2A(r)} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + V(\phi) \right]. \quad (5.12)$$

Substituindo as equações (5.10) e (5.11) em (5.12), nós obtemos a densidade de energia do campo escalar em função da dimensão extra r . A configuração desta densidade de energia é mostrada na figura 5.5.

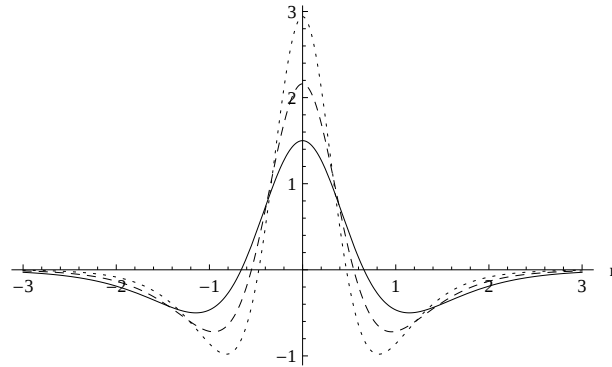


Figura 5.5: Configuração da densidade de energia do campo escalar T_{00} . Para $c = 1$ (linha contínua), $c = 1.2$ (linha tracejada) e $c = 1.4$ (linha pontilhada) com $b = 1$.

Como foi mencionado acima, a brana está localizada nos arredores de $r = 0$, então da figura 5.5, podemos deduzir que a brana possui uma tensão positiva (energia por unidade de volume) e a relação entre o parâmetro c e a espessura da brana também é observado no comportamento da configuração da tensão da brana.

Em seguida, passamos a analisar o comportamento assintótico de $A(r)$. Quando

$r \rightarrow \pm\infty$ nós obtemos, a partir da equação (5.11), $A(r) \sim -bc|r|$. Também no limite assintótico, as equações de movimento (5.4)-(5.6) se reduzem à forma

$$V(\pm\phi_0) = cte, \quad (5.13)$$

$$\frac{d^2 A}{dr^2} = 0, \quad (5.14)$$

$$\left(\frac{dA}{dr}\right)^2 = -\frac{1}{3}V(\pm\phi_0). \quad (5.15)$$

como para o modelo, $V(\phi_0) = V(-\phi_0) = -3b^2c^2 < 0$ obtemos

$$A(r) = -\sqrt{-\frac{1}{3}V(\phi_0)}|r| = -bc|r|. \quad (5.16)$$

Assim a equação (5.3) toma a forma

$$ds^2 = e^{-2bc|r|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dr^2, \quad (5.17)$$

correspondente à métrica de um espaço AdS_5 com simetria Z_2 . Além de isso, o expoente bc está associada à curvatura do espaço-tempo AdS_5 . Estes resultados concordam com aqueles encontrados por o autor.

Agora analisemos com mais detalhe a energia do campo escalar. Da figura 5.5 observamos que a densidade de energia do campo escalar assume valores positivos e negativos, a densidade de energia positiva, como já foi mencionada acima, está associada ao defeito (brana), então uma pergunta surge naturalmente: O que ou quem influenciou a densidade de energia do campo escalar pode assumir valores negativos? Além disso, é intrigante o fato da densidade de energia assumir valores negativos já que estamos acostumados com modelos, como o proposto no capítulo 4 onde o espaço-tempo é plano, em que a densidade de energia dos campos escalares assume somente valores positivos portanto a energia dos campos escalares é positiva e igual à energia BPS. Assim nos perguntamos, no cenário mundos-brana, qual é o valor da energia do campo escalar? e, que energia desempenha o papel de energia BPS?

A resposta à primeira pergunta é dada mais abaixo. Para tentar responder a segunda pergunta vamos a fazer uma análise da energia do campo escalar, equação (5.12).

Energia do Campo Escalar

Substituindo as equações (C.8) e (C.9) na equação (5.12) obtemos

$$T_{00} = -\frac{1}{2}e^{2A(r)} \left[6 \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + 3 \frac{d^2 A}{dr^2} \right],$$

pode-se reescrever esta equação na forma

$$T_{00} = -\frac{3}{2} \left[2 \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 e^{2A(r)} + \frac{d^2 A}{dr^2} e^{2A(r)} \right],$$

a qual pode ser re-escrita como uma derivada total

$$T_{00} = -\frac{3}{2} \frac{d}{dr} \left(\frac{dA}{dr} e^{2A(r)} \right). \quad (5.18)$$

Finalmente, a energia do campo escalar E_ϕ é definida da forma

$$E_\phi = \int_{-\infty}^{\infty} dr T_{00}. \quad (5.19)$$

Assim, substituindo (5.18) em (5.19) o valor da energia do campo escalar é dada por

$$E_\phi = \frac{1}{2} \left(e^{2A(\infty)} W(\phi(\infty)) - e^{2A(-\infty)} W(\phi(-\infty)) \right). \quad (5.20)$$

Este resultado mostra que o valor da energia do campo escalar E_ϕ depende do comportamento assintóticos do fator de deformação e do valor do superpotencial W no limite assintótico das soluções do campo.

Para nosso modelo revisado, no limite assintótico a solução do campo vai até um dos mínimos do potencial, como é observado na figura 5.3, e o valor do superpotencial, em geral, é uma constante. Também, no limite assintótico o fator de deformação vai até zero, ver figura 5.4. Estes resultados são iguais para todos os modelos que geram branas espessas.

Assim nós chegamos ao resultado de que a energia do campo escalar, para todos os modelos que geram branas espessas, é igual a zero. Além disso, este resultado nos indica que a contribuição da densidade de energia positiva é a mesma da densidade de energia negativa.

Por outro lado, nós tentamos obter as equações de primeira ordem dadas na equação (5.8), a partir da densidade de energia do campo escalar e procedendo da mesma maneira que na seção 2.2, mas não podemos achar ditas equações. Então nós afirmamos que, no cenário de mundos-brana, a energia do campo escalar não desempenha o papel da energia BPS. Para responder a última pergunta nós passamos a estudar o comportamento da energia do sistema no caso das soluções clássicas encontradas.

Funcional de Energia e Equações de Bogomol'nyi

Agora passamos a estudar a energia do sistema e sua relação com as equações de Bogomol'nyi. A partir da ação (5.2) nós deduzimos a densidade de lagrangiana do sistema

$$\mathcal{L}_{sist}(\phi, g_{ab}) = \sqrt{|g|} \left(-\frac{1}{4} R + \frac{1}{2} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi - V(\phi) \right). \quad (5.21)$$

Substituindo as equações (5.3) e (A.6) na equação (5.21) obtemos

$$\mathcal{L}_{sist}(\phi, A) = e^{4A(r)} \left(-5 \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 - 2 \frac{d^2 A}{dr^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 - V(\phi) \right),$$

$$\mathcal{L}_{sist}(\phi, A) = e^{4A(r)} \left(3 \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 - V(\phi) \right) - 2 \frac{d}{dr} \left(\frac{dA}{dr} e^{4A} \right),$$

como o último termo à direita é uma derivada total com respeito a r , nós finalmente obtemos

$$\mathcal{L}_{sist}(\phi, A) = e^{4A(r)} \left(3 \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 - V(\phi) \right). \quad (5.22)$$

Define-se a funcional de energia [22]:

$$E[\phi, A] = \int_{-\infty}^{\infty} dr (-\mathcal{L}_{sist}). \quad (5.23)$$

As equações de movimento (C.5) e (C.8) são as Equações de Euler-Lagrange deste funcional. Este funcional está associado com a energia do sistema, campo gravitacional mais o campo escalar, como foi relatado por S. W. Hawking et. al. [39]. Assim nós obtemos

$$E[\phi, A] = \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{4A(r)} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + V(\phi) - 3 \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 \right), \quad (5.24)$$

Para garantir a estabilidade do vácuo e positividade da energia do sistema $E[\phi, A]$, se escolhe o potencial V da forma, ver [37] e [40]

$$V(\phi) = \frac{g^2}{8} \left(\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{g^2}{3} (W(\phi))^2. \quad (5.25)$$

Substituindo a equação (5.25) na equação (5.24) obtemos

$$E[\phi, A] = \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{4A(r)} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \frac{g^2}{8} \left(\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi} \right)^2 - \frac{g^2}{3} (W(\phi))^2 - 3 \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 \right),$$

agrupando os termos devidamente temos

$$E[\phi, A] = \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{4A(r)} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \mp \frac{g}{2} \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi} \right)^2 - 3 \left(\frac{dA}{dr} \pm \frac{g}{3} W(\phi) \right)^2 \right) \\ \pm \int_{-\infty}^{\infty} dr \frac{d}{dr} (e^{4A(r)} W(\phi)). \quad (5.26)$$

Daqui resulta que $E[\phi, A]$ extremisa para soluções do seguinte par de equações de primeira

ordem:

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{g}{2} \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi} \quad , \quad \frac{dA}{dr} = \mp \frac{g}{3} W(\phi). \quad (5.27)$$

A primeira equação está associada ao campo escalar e a segunda equação à geometria do espaço-tempo. Estas equações são chamadas equações de Bogomol'nyi e suas soluções se chamam soluções de Bogomol'nyi. É fácil verificar que as soluções destas equações de fato resolvem as equações de segunda ordem [(5.4) – (5.6)]. Assim o valor da energia $E[\phi, A]$ é dada pela expressão

$$E[\phi, A] = \left| e^{4A(\infty)} W(\phi(\infty)) - e^{4A(-\infty)} W(\phi(-\infty)) \right|. \quad (5.28)$$

Desta maneira nós afirmamos que a energia do sistema desempenha o papel de energia topológica E_{BPS} no presente cenário das interações de campos escalares com a gravitação em (4+1) dimensões. Além disso, o valor desta energia BPS é igual a zero, devido a sua dependencia do comportamento assintóticos do fator de deformação ao quadrado e do valor do superpotencial W no limite assintótico das soluções do campo. Esse resultado está totalmente de acordo com as conclusões dadas por P. K. Townsend [40] e não é surpreendente, visto que o funcional de energia é proporcional à densidade de lagrangiana, a qual é nula para soluções das equações de movimento.

Limite de Branas finas

No cenário de Randall e Sundrum [12], se menciona que a gravidade quadridimensional pode ser observada em uma brana fina interpolando entre o espaço-tempo AdS_5 . Neste sentido nós estudamos o limite de branas finas do modelo aqui considerado, para isso nós seguimos as idéias de F. Dahia e C. Romero [41].

Começamos lembrando que a métrica (5.3) se reduz a uma métrica AdS_5 longe da brana espessa, equação (5.17). Também, os parâmetros positivos b , c e bc estão relacionados ao mínimo do potencial, à espessura da brana e à curvatura do espaço-tempo respectivamente.

No limite de brana fina, $c \rightarrow \infty$, as soluções dadas pelas equações (5.10) e (5.11) se reduzem às seguintes expressões

$$\phi_{bf}(r) = \frac{\sqrt{6b}\pi}{4} \text{sgn}[r], \quad (5.29)$$

$$A_{bf}(r) = -bc|r|. \quad (5.30)$$

Estes resultados obtidos são reforçados pelo comportamento das configurações do campo escalar e do fator de deformação dadas na figura 5.6.

Agora, define-se a densidade de energia própria da brana que excede o mínimo do

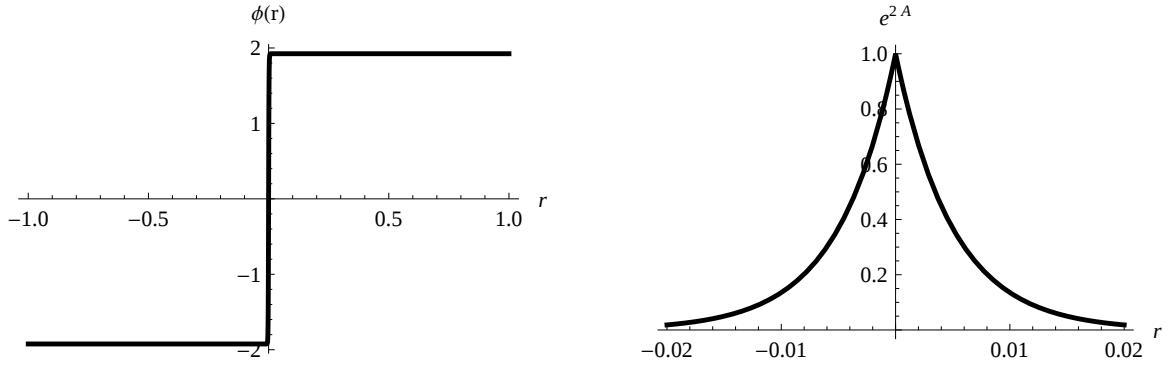


Figura 5.6: Comportamento no limite de brana fina do ϕ (esquerda) e e^{2A} (direita). Para $c = 100$ e $b = 1$.

potencial escalar $V(\phi_0)$ como [41],

$$\rho = T_{mn}u^m u^n - V(\phi_0), \quad (5.31)$$

onde $u^m = e^{-A(r)}(\partial_t)^m$ é a quadrivelocidade de observadores que estão em repouso em relação à brana. Para nosso modelo, usando a equação (5.12), a densidade de energia própria tem a forma

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + V(\phi) - V(\phi_0). \quad (5.32)$$

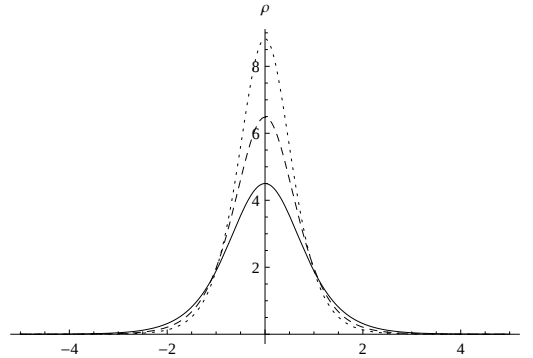


Figura 5.7: Configuração da densidade de energia própria da brana. Para $c = 1$ (linha contínua), $c = 1.2$ (linha tracejada) e $c = 1.4$ (linha pontilhada) com $b = 1$.

A configuração da densidade de energia própria é mostrada na figura 5.7. Desta figura, nós podemos dar resposta à primeira pergunta feita acima e afirmar que, o valor negativo do mínimo do potencial influencia a densidade de energia do campo escalar a assumir valores negativos. Além disso se observa que no limite de brana fina ($c \rightarrow \infty$), a energia própria da brana está concentrada ao redor de $r = 0$ então define-se a tensão da brana da forma, ver referência [41],

$$\lambda = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(r) dr. \quad (5.33)$$

Para o modelo considerado se encontra o seguinte valor para a tensão da brana. Substituindo a equação (5.32) na equação (5.33), e empregando as equações de movimento (5.5) e (5.6), obtemos

$$\lambda = \lim_{\eta, c \rightarrow \infty} \int_{-\eta}^{\eta} \left(-\frac{3}{2} \frac{d^2 A}{dr^2} - 3 \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 - V(\phi_0) \right) dr,$$

onde η é um parâmetro positivo e $-\eta \leq r \leq \eta$. No limite de brana fina a tensão da brana é da forma

$$\lambda = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left[-\frac{3}{2} (A'_{bf}(\eta) - A'_{bf}(-\eta)) - \int_{-\eta}^{\eta} (3 (A'_{bf})^2 + V(\phi_0)) dr \right]. \quad (5.34)$$

Substituindo a equação (5.30) no último resultado, obtemos

$$\lambda = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left[3 \sqrt{-\frac{1}{3} V(\phi_0) \text{sgn}[\eta]} - V(\phi_0) \int_{-\eta}^{\eta} (1 - (\text{sgn}[r])^2) dr \right],$$

finalmente, o valor da tensão da brana no limite de brana fina é dado por

$$\lambda = \sqrt{-3V(\phi_0)}. \quad (5.35)$$

Este resultado positivo do valor da tensão da brana está completamente de acordo com os resultados obtidos em [12].

Flutuações da Métrica

Passamos agora a encontrar a função do modo zero do gráviton dentro da brana espessa. Para isso, consideremos a estabilidade do sistema analisando as equações de movimento para pequenas flutuações ao redor da solução clássica. Isto é feito por meio de uma perturbação da métrica, tal como foi mencionado na referência [37].

$$ds^2 = e^{2A(r)} (\eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu - dr^2, \quad (5.36)$$

onde ε é um número pequeno e $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(r, x_\mu)$ representa as flutuações da métrica. Consideramos também que pequenas flutuações são feitas ao redor das soluções clássicas $\phi \rightarrow \phi(r) + \varepsilon \tilde{\phi}(r, x_\mu)$. Realizando essas perturbações na densidade de lagrangiana, e fazendo a expansão até a segunda ordem, obtemos a seguinte equação de movimento para a flutuação do campo escalar

$$e^{-2A} \square \tilde{\phi} - 4 \frac{dA}{dr} \frac{d\tilde{\phi}}{dr} - \frac{d^2 V}{d\phi^2} \tilde{\phi} - \frac{d^2 \tilde{\phi}}{dr^2} = \frac{1}{2} \frac{d\phi}{dr} \eta^{\mu\nu} \frac{dh_{\mu\nu}}{dr}. \quad (5.37)$$

Para as flutuações da métrica, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + e^{2A} \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dr} + 2 \frac{dA}{dr} \right) \frac{dh_{\mu\nu}}{dr} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (\partial_\mu \partial_\nu h_{\alpha\beta} - \partial_\mu \partial_\alpha h_{\beta\nu} - \partial_\nu \partial_\alpha h_{\beta\mu}) \\
& + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} e^{2A} \frac{dA}{dr} \partial_r (\eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}) + \frac{4}{3} e^{2A} \eta_{\mu\nu} \frac{dV}{d\phi} \tilde{\phi} = 0.
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Em geral, é difícil levar em conta as flutuações lineares de todas os componentes da métrica em conjunto com as flutuações da brana com o fim de ter uma visão ampla da estabilidade linear de todo o sistema. Isto é devido ao fato de que o conjunto de equações diferenciais acopladas é muito difícil de ser resolvido. Ainda assim é possível mostrar que a parte transversal e de traço nulo das flutuações da métrica ($\bar{h}_{\mu\nu}$), desacoplam das flutuações dos campos escalares, como foi indicado na referência [37]. Ora, construindo $\bar{h}_{\mu\nu} = P_{\mu\nu\alpha\beta} h^{\alpha\beta}$ a partir do projetor não local [42]:

$$P_{\mu\nu\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2} (\pi_{\mu\alpha} \pi_{\nu\beta} + \pi_{\mu\beta} \pi_{\nu\alpha}) - \frac{1}{3} \pi_{\mu\nu} \pi_{\alpha\beta}, \tag{5.39}$$

com $\pi_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square}$, temos que a equação (5.38) pode ser simplificada a

$$\frac{d^2 \bar{h}_{\mu\nu}}{dr^2} + 4 \frac{dA}{dr} \frac{d\bar{h}_{\mu\nu}}{dr} - e^{-2A} \partial_\rho \partial^\rho \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \tag{5.40}$$

Realizamos uma redefinição conveniente da função $\bar{h}_{\mu\nu}$:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = e^{ik_\mu x^\mu} e^{-\frac{3}{2}A(r)} \xi_{\mu\nu}(r), \tag{5.41}$$

e nós encontramos, fazendo uso da transformação da variável $dz = e^{-A(r)} dr$, que $\xi_{\mu\nu}(z)$ satisfaz a equação de estabilidade do tipo Schrödinger

$$-\frac{d^2 \xi_{\mu\nu}}{dz^2} + V_{eff}(z) \xi_{\mu\nu} = k^2 \xi_{\mu\nu}, \tag{5.42}$$

onde o potencial efetivo é dado por:

$$V_{eff}(z) = \frac{9}{4} \left(\frac{dA}{dz} \right)^2 + \frac{3}{2} \frac{d^2 A}{dz^2}. \tag{5.43}$$

O operador diferencial na equação (5.42), pode ser fatorado como o produto de dois operadores, um adjunto do outro:

$$a^\dagger a \xi_{\mu\nu}(z) \equiv \left(\frac{d}{dz} + \frac{3}{2} \frac{dA}{dz} \right) \left(-\frac{d}{dz} + \frac{3}{2} \frac{dA}{dz} \right) \xi_{\mu\nu}(z) = k^2 \xi_{\mu\nu}(z), \tag{5.44}$$

onde os valores dos autovalores devem cumprir a relação $k^2 \geq 0$ para garantir a estabil-

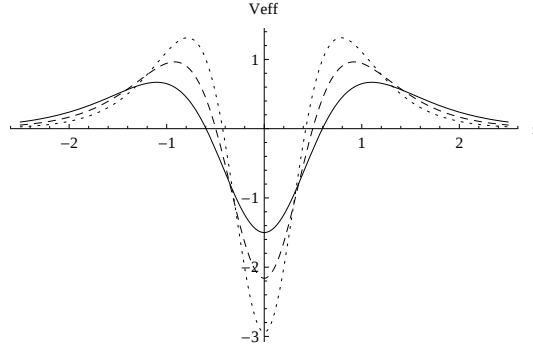


Figura 5.8: Comportamento do V_{eff} . Para $c = 1$ (linha contínua), $c = 1.2$ (linha tracejada) e $c = 1.4$ (linha pontilhada), com $b = 1$.

idade da equação (5.42). A função de onda para o modo zero, ou seja quando $k = 0$, é dada por

$$\xi_{\mu\nu}^{(0)}(z) = N_{\mu\nu} e^{(3/2)A(z)}, \quad (5.45)$$

onde $N_{\mu\nu}$ é um fator de normalização.

5.2.2 Segundo modelo

Agora estudamos um modelo supersimétrico, ainda de um só campo escalar acoplado à gravidade, que apresenta soluções tipo *kink* que podem ser continuamente deformados em configurações do tipo *kink* duplo. Esses modelos são amplamente estudados em Matéria Condensada, na Cosmologia, etc., pois essa deformação contínua é associada a uma transição de fase de primeira ordem [43].

Na referência [44] se considera o potencial V_p , no espaço-tempo plano, da forma

$$V_p(\phi) = \frac{1}{2} [(1 - g)\phi^2 + g] (1 - \phi^2)^2, \quad (5.46)$$

onde $0 < g < 1$. A configuração do potencial, equação (5.46), é dado na figura 5.9: Desta

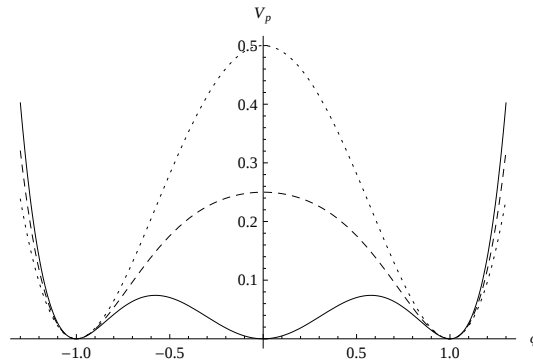


Figura 5.9: Comportamento do potencial. Para $g = 0.00001$ (linha contínua), $g = 0.5$ (linha tracejada) e $g = 0.99999$ (linha pontilhada).

figura observamos que o potencial V_p tem dois mínimos globais em $\phi_0 = \pm 1$ mas para

$0 < g < 1/3$ o potencial apresenta dois mínimos globais e um mínimo local em $\phi_1 = 0$. Os mínimos se degeneram quando $g = 0$.

Para encontrar o superpotencial W deste segundo modelo, nós usamos as equações (2.8) e (5.46), e obtemos

$$W_\phi = (1 - \phi^2) \sqrt{(1 - g)\phi^2 + g},$$

desta equação nós encontramos o seguinte o superpotential não-polinomial W

$$W(\phi) = W_0 - \frac{1}{8}\phi \left(2\phi^2 - 5 + \frac{1}{1-g} \right) \sqrt{g + \phi^2 - g\phi^2} - \frac{g(-4 + 3g)}{8(1-g)^{\frac{3}{2}}} \ln \left[2 \left(\phi - g\phi + \sqrt{1-g} \sqrt{g + \phi^2 - g\phi^2} \right) \right], \quad (5.47)$$

onde W_0 escolhe-se de forma que o superpotencial seja simétrico. Assim se cumpre a condição, $W(0) = 0$.

Retornando ao espaço-tempo deformado, o superpotencial W , equação (5.47), gera um potencial $V(\phi)$ de acordo com a equação (5.7), com a configuração mostrada na figura 5.10.

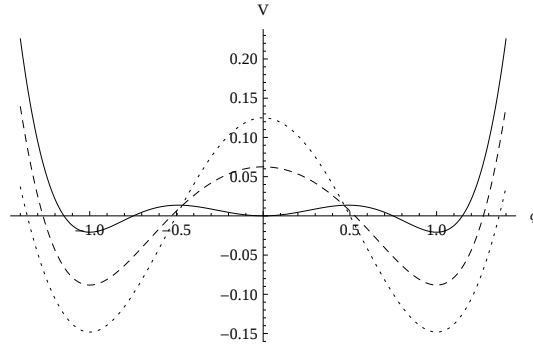


Figura 5.10: Comportamento do potencial no espaço-tempo deformado. Para $g = 0.00001$ (linha contínua), $g = 0.5$ (linha tracejada) e $g = 0.99999$ (linha pontilhada).

Nota-se que este potencial também é limitado por abaixo.

A solução da equação diferencial de primeira ordem para o campo, equação (5.8), é da forma

$$\phi(r) = \frac{\sqrt{g} \sinh\left(\frac{r}{2}\right)}{\sqrt{1 + g \sinh^2\left(\frac{r}{2}\right)}}. \quad (5.48)$$

A configuração do campo ϕ , é mostrada na figura 5.11. Vemos que, quando o valor de g é próximo a 1, a solução ϕ apresenta uma configuração *kink* simples, indo do mínimo local do potencial $\phi_0 = -1$ ao mínimo local $-\phi_0$. Isso indica que o defeito (brana) encontra-se nos arredores de $r = 0$. A configuração interna da solução ϕ se modifica, passando de uma configuração *kink* simples a um *kink* duplo quando $0 < g < 1/3$ é próximo a 0, ou seja, a estrutura interna da brana se modifica passando a ser duas branas. Esta

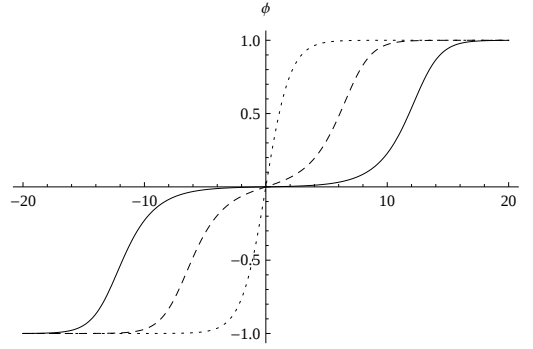


Figura 5.11: Comportamento do perfil do campo ϕ . Para $g = 0.00001$ (linha contínua), $g = 0.003$ (linha tracejada) e $g = 0.99999$ (linha pontilhada).

análise é reforçada pelo comportamento da configuração da solução numérica do fator de deformação dada na figura 5.12, o perfil do fator de deformação se alarga formando um longo planalto, isso indica que a brana se desdobra em duas branas cada uma nos extremos do planalto.

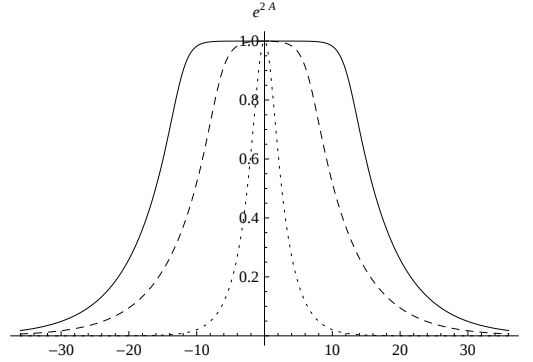


Figura 5.12: Comportamento do fator de deformação. Para $g = 0.00001$ (linha contínua), $g = 0.003$ (linha tracejada) e $g = 0.99999$ (linha pontilhada).

Da configuração do fator de deformação nós podemos deduzir que o sistema na dimensão extra apresenta simetria Z_2 , ou seja, se cumpre: $e^{A(r)} = e^{A(-r)}$.

O desdobramento fica ainda mais evidente a partir da densidade de energia do campo escalar. A densidade de energia do campo escalar T_{00} é dada pela equação (5.12). A configuração desta densidade de energia é mostrada na figura 5.13. Desta figura observamos que a brana possui uma tensão positiva (energia por unidade de volume), além disso o comportamento de desdobramento da brana também é observada.

Finalmente neste segundo modelo também é possível localizar a gravidade seguindo o procedimento padrão do primeiro modelo, além disso o valor da densidade de energia do campo escalar é zero, como já foi deduzido acima.

Continuando com nossa revisão de modelos que geram branas espessas, agora estudaremos sistemas compostos por dois campos escalares acoplados à gravidade. A ação

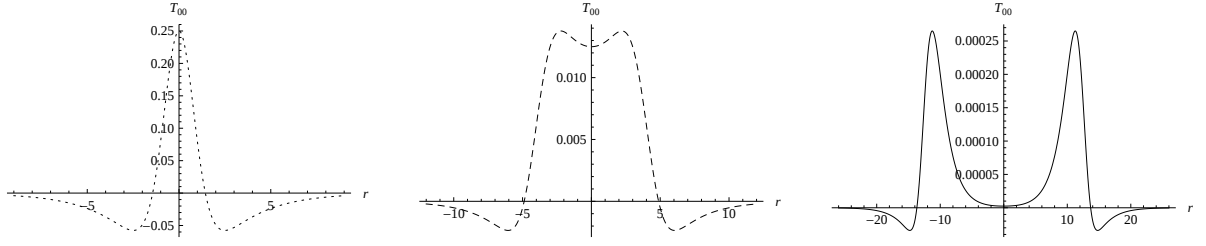


Figura 5.13: Comportamento da Densidade de energia do campo escalar. Para $g = 0.00001$ (linha contínua), $g = 0.05$ (linha tracejada) e $g = 0.99999$ (linha pontilhada).

para estes modelos é da forma

$$S = \int d^4x dr \sqrt{|g|} \left(-\frac{1}{4}R + \frac{1}{2}\partial_a\phi\partial^a\phi + \frac{1}{2}\partial_a\chi\partial^a\chi - V(\phi, \chi) \right), \quad (5.49)$$

onde $g \equiv \text{Det}(g_{ab})$ e a métrica do espaço-tempo deformado é dada por

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = e^{2A}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dr^2, \quad a, b = 0, \dots, 4. \quad (5.50)$$

onde $r = x^4$ representa a dimensão extra, e $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica minkowskiana $(1, -1, -1, -1)$. As equações estáticas de movimento para esses modelos, para o caso $\phi = \phi(r)$ e $A = A(r)$, são as seguintes (ver apêndice C)

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + 4\frac{dA}{dr}\frac{d\phi}{dr} = \frac{\partial V(\phi, \chi)}{\partial\phi}, \quad (5.51)$$

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + 4\frac{dA}{dr}\frac{d\chi}{dr} = \frac{\partial V(\phi, \chi)}{\partial\chi}, \quad (5.52)$$

$$\frac{d^2A}{dr^2} = -\frac{2}{3} \left[\left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 \right], \quad (5.53)$$

$$\left(\frac{dA}{dr} \right)^2 = \frac{1}{6} \left[\left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 \right] - \frac{1}{3}V(\phi, \chi). \quad (5.54)$$

Se o potencial é dado pela expressão, [37]:

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial\phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial\chi} \right)^2 - \frac{4}{3}W^2, \quad (5.55)$$

pode-se verificar as soluções das seguintes equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{\partial W}{\partial\phi}, \quad \frac{d\chi}{dr} = \frac{\partial W}{\partial\chi} \quad \text{e} \quad \frac{dA}{dr} = -\frac{2}{3}W, \quad (5.56)$$

são soluções das equações diferenciais de segunda ordem dadas pelas equações (5.51)-

(5.54).

5.2.3 Terceiro modelo

Revisemos o modelo estudado nas referências [45] e [46]. Esse modelo é muito estudado porque eles suportam soluções paredes de Bloch (degeneradas e críticas) e de Ising, estes tipos de soluções aparecem em materiais ferromagnéticos [47], também esse modelo pode eventualmente ser usado para descrever a separação de branas espessas devido a uma transição de fase de primeira ordem em uma geometria deformada [48].

O superpotential $W(\phi, \chi)$ polinomial utilizado é da forma

$$W(\phi, \chi) = \phi \left[\lambda \left(\frac{\phi^2}{3} - a^2 \right) + \mu \chi^2 \right], \quad (5.57)$$

Usando a equação diferencial de órbita, equação (2.15), é obtida a expressão

$$\phi^2 - a^2 = c_0 \chi^{\lambda/\mu} - \frac{1}{\lambda/\mu - 2} \chi^2, \quad (5.58)$$

onde c_0 é uma constante de integração que aparece ao resolver a equação diferencial de órbita. A órbita acima, equação (5.58), é substituída na segunda das equações em (5.56) e obtemos a seguinte equação diferencial para o campo $\chi(x)$

$$\frac{d\chi}{dx} = \pm 2\mu\chi \sqrt{a^2 + c_0 \chi^{\lambda/\mu} - \frac{1}{\lambda/\mu - 2} \chi^2}, \quad (\lambda/\mu \neq 2). \quad (5.59)$$

Na referência [45] várias soluções são encontradas para a equação (5.59) sendo que cada uma destas soluções é substituída na equação de órbita para se encontrar a solução correspondente para o campo $\phi(x)$. Abaixo nós listamos um conjunto de solução, de nosso interesse, sendo que escolhemos uma constante de integração da equação (5.59) adequadamente, de forma a ter as soluções com perfis simétricas em torno da origem.

Assim, para o caso $\lambda = 4\mu$ e $c_0 < \frac{1}{16a^2}$, onde $\frac{1}{16a^2}$ é chamado o valor crítico de c_0 , as soluções da equação (5.59) são dadas por

$$\phi(x) = \mp \sqrt{1 - 16a^2 c_0} \frac{a \sinh(4\mu ax)}{\sqrt{1 - 16a^2 c_0} \cosh(4\mu ax) + 1}, \quad (5.60)$$

$$\chi(x) = - \frac{2a}{\sqrt{\sqrt{1 - 16a^2 c_0} \cosh(4\mu ax) + 1}}, \quad (5.61)$$

$$A(\chi) = \alpha_0 + \left(\frac{8a^2}{9} \right) \ln(\chi) - \frac{1}{18} \chi^2 - \frac{c_0}{9} \chi^4, \quad (5.62)$$

onde α_0 é escolhido de forma que se cumpra $A(0) = 0$. Agora vamos discutir esses

resultados.

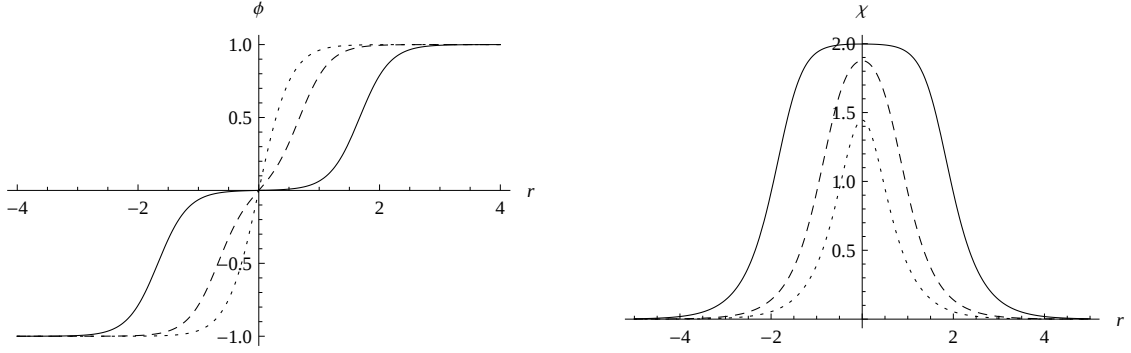


Figura 5.14: Comportamento do campo ϕ (esquerda) e χ (direita). Para $c_0 = 1/16.00001$ (linha contínua), $c_0 = 1/16.3$ (linha tracejada) e $c_0 = 1/100$ (linha pontilhada), com $a = 1$ e $\mu = 1$.

Na figura 5.5 mostramos a configuração dos campos $\phi(r)$ e $\chi(r)$. Da análise dessa figura nós podemos afirmar o seguinte: quando o valor de c_0 está longe de seu valor crítico a solução ϕ apresenta uma configuração kink simples, isso indica que o defeito (brana) encontra-se nos arredores de $r = 0$. Neste caso a solução χ apresenta uma configuração lump. A configuração da solução ϕ se modifica entre os mínimos do potencial, passando de uma configuração *kink* simples a uma do tipo *kink* duplo quando o valor de c_0 é próximo a seu valor crítico, ou seja, podemos dizer que passamos a ter duas branas. Nessa situação a configuração da solução χ , passa de um lump encurtado em sua parte superior a um lump de tipo planalto. Esta análise é reforçada pelo comportamento da configuração do fator de deformação dada na figura 5.15, quando $c_0 \approx \frac{1}{16a^2}$, o perfil do fator de deformação se alarga formando um longo planalto, isso indica que a brana se desdobra em duas branas cada uma nos extremos do planoalto.

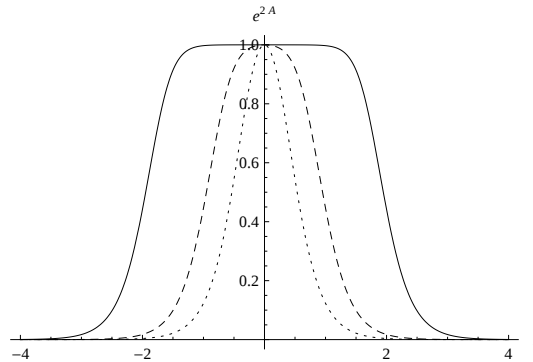


Figura 5.15: Comportamento do fator de deformação. Para $c_0 = 1/16.00001$ (linha contínua), $c_0 = 1/16.3$ (linha tracejada) e $c_0 = 1/100$ (linha pontilhada), com $a = 1$ e $\mu = 1$.

Da configuração do fator de deformação nós podemos deduzir que o sistema na dimensão extra apresenta simetria Z_2 , ou seja, se cumpre: $e^{A(r)} = e^{A(-r)}$.

Agora vejamos a densidade de energia dos campos escalares. T_{00} é dado pela seguinte

expressão (ver Apêndice B)

$$T_{00} = e^{2A(r)} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 + V(\phi, \chi) \right]. \quad (5.63)$$

Substituindo as equações (5.60) e (5.61) em (5.63), nós obtemos a densidade de energia dos campos escalares em função da dimensão extra r . A configuração desta densidade de energia é mostrada na figura 5.16, aqui também podemos olhar o mecanismo de separação de branas, conforme o esperado.

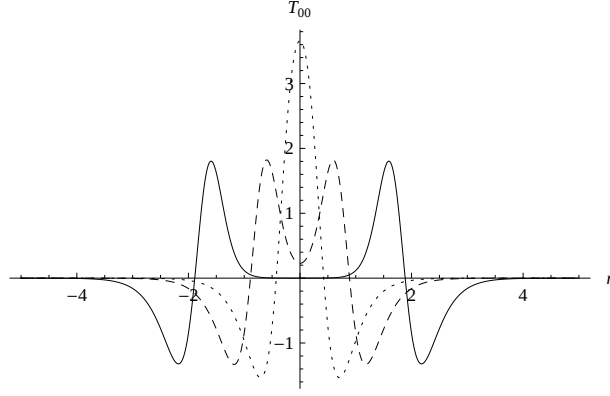


Figura 5.16: Configuração da densidade de energia do campo escalar T_{00} . Para $c_0 = 1/16.00001$ (linha contínua), $c_0 = 1/16.3$ (linha tracejada) e $c_0 = 1/100$ (linha pontilhada), com $a = 1$ e $\mu = 1$.

Flutuações da métrica

Neste modelo se pode localizar a gravidade. Também para isso, se procede tal como foi feito no primeiro modelo tratado neste capítulo, equações (5.37) a (5.45). Se faz uma perturbação na métrica, equação (5.36), e nas soluções clássicas $\phi \rightarrow \phi(r) + \varepsilon \tilde{\phi}(r, x_\mu)$ e $\chi \rightarrow \chi(r) + \varepsilon \tilde{\chi}(r, x_\mu)$, onde ε é um pequeno número. Substituindo essas perturbações na densidade lagrangiana, e fazendo a expansão até segunda ordem em ε , obtemos a seguinte equações de movimentos para as flutuações dos campos escalares

$$e^{-2A} \square \tilde{\phi} - 4 \frac{dA}{dr} \frac{d\tilde{\phi}}{dr} - \frac{d^2 V}{d\phi^2} \tilde{\phi} - \frac{d^2 \tilde{\phi}}{dr^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \chi} \tilde{\chi} = \frac{1}{2} \frac{d\phi}{dr} \eta^{\mu\nu} \frac{dh_{\mu\nu}}{dr}, \quad (5.64)$$

$$e^{-2A} \square \tilde{\chi} - 4 \frac{dA}{dr} \frac{d\tilde{\chi}}{dr} - \frac{d^2 V}{d\chi^2} \tilde{\chi} - \frac{d^2 \tilde{\chi}}{dr^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi \partial \chi} \tilde{\phi} = \frac{1}{2} \frac{d\chi}{dr} \eta^{\mu\nu} \frac{dh_{\mu\nu}}{dr},$$

e para as flutuações da métrica,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} + e^{2A} \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dr} + 2 \frac{dA}{dr} \right) \frac{dh_{\mu\nu}}{dr} - \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} (\partial_\mu \partial_\nu h_{\alpha\beta} - \partial_\mu \partial_\alpha h_{\beta\nu} - \partial_\nu \partial_\alpha h_{\beta\mu}) \\ + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} e^{2A} \frac{dA}{dr} \partial_r (\eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}) + \frac{4}{3} e^{2A} \eta_{\mu\nu} \left(\frac{dV}{d\phi} \tilde{\phi} + \frac{dV}{d\chi} \tilde{\chi} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Em geral, é difícil levar em conta as flutuações lineares de todas as componentes da

métrica em conjunto com as flutuações da brana com o fim de ter uma visão ampla da estabilidade linear de todo o sistema. Então aplicamos o operador projetor, definido pela equação (5.39), na equação (5.65), e obtemos

$$\frac{d^2 \bar{h}_{\mu\nu}}{dr^2} + 4 \frac{dA}{dr} \frac{d\bar{h}_{\mu\nu}}{dr} - e^{-2A} \partial_\rho \partial^\rho \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (5.66)$$

A equação obtida, equação (5.66), é idêntica à equação (5.40). Portanto, o potencial efetivo V_{eff} da equação de Schrödinger é dado por:

$$V_{eff}(z) = \frac{9}{4} \left(\frac{dA}{dz} \right)^2 + \frac{3}{2} \frac{d^2 A}{dz^2}, \quad (5.67)$$

e a função de onda para o modo zero é da forma

$$\xi_{\mu\nu}^{(0)}(z) = N_{\mu\nu} e^{(3/2)A(z)},$$

onde $N_{\mu\nu}$ é a constante de normalização.

Substituindo a equação (5.62) na equação (5.67) obtemos a configuração do potencial efetivo, figura 5.17. Nesta configuração também podemos observar a separação da brana.

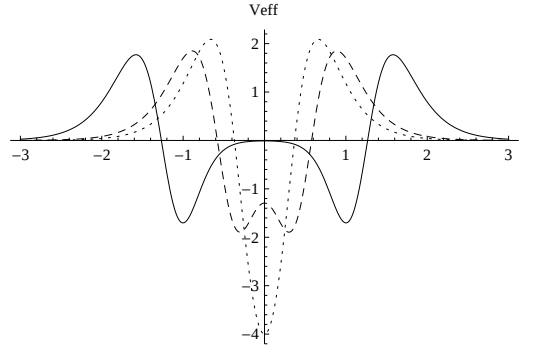


Figura 5.17: Comportamento do Potencial Efetivo. Para $c_0 = 1/16.01$ (linha contínua), $c_0 = 1/19$ (linha tracejada) e $c_0 = 1/500$ (linha pontilhada), com $a = 1$ e $\mu = 1$.

Para concluir indicamos que, procedendo da mesma forma como no primeiro modelo, mas agora com dois campos escalares, obtemos os mesmos resultados para a energia de matéria, equação (5.20), e a relação entre o funcional de energia e as equações de Bogomol'nyi (equações diferenciais de primeira ordem, equação (5.56)). Além disso, para que o universo observável seja estabilizado dentro da branas é necesario não só localizar grávitons mas também campos de gauge e a matéria. É importante mencionar que as referências [13] e [49] dissertam sobre a localização de férmions de spin 1/2 em branas espessas originadas neste terceiro modelo. Devido à variedade de soluções (branas críticas e denegeradas) e das diversas formas de acoplar os campos escalares ao férmion, constata-se diversos resultados. Na maioria dos casos é possível localizar férmions sem massa de

quiralidade bem definida e parece haver a regularidade de que férmions massivos não são localizados, mas pode-se encontrar ressonâncias na brana [13]. Uma discussão sobre localização de férmions em branas é feita no próximo capítulo desta dissertação, onde abordamos o cenário de mundos-brana no caso de dinâmica não-canônica para os campos escalares.

A seguir empregamos o modelo de dois campos escalares proposto no capítulo anterior ao cenários de mundos-brana.

5.2.4 Quarto modelo

Como último modelo para estudar, vamos considerar o modelo supersimétrico proposto no capítulo 4 desta dissertação. Este modelo apresenta uma característica peculiar, não encontrado na literatura existente, ele têm dois pontos, os dois valores críticos que pode assumir c_0 , onde se apresenta o processo de separação de branas.

Esse modelo possui um superpotential $W(\phi, \chi)$ polinomial, que envolve dois campos escalares interagentes ϕ e χ , da forma

$$W(\phi, \chi) = \lambda\chi^3\phi + \mu\phi^3\chi + \nu\phi\chi. \quad (5.68)$$

A equação da órbita obtida, para o caso $\lambda = \mu$, é da forma (ver equação (4.16))

$$\phi^2(\phi^2 - c_0) + \chi^2(\chi^2 - c_0) - 2\phi^2\chi^2 - c_0\frac{\nu}{2\mu} = 0. \quad (5.69)$$

onde c_0 é uma constante de integração que aparece se resolver a equação diferencial da órbita, equação (2.15). Neste caso, a constante de integração c_0 têm dois valores críticos 0 e $-\frac{2\nu}{\mu}$. Como se mostrou no terceiro modelo, o processo de separação de branas se apresenta quando c_0 é próximo aos valores críticos.

Devemos mencionar neste ponto, que a equação de órbita, equação (5.69), pode ser usada para construir modelos efetivos com um campo escalar que apresentam as principais características deste modelo com dois campos escalares interagentes. Este método já foi empregado com sucesso na referência [43].

Assim, a partir da equação da órbita nós obtemos

$$\phi(r) = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(2\chi^2(r) + c_0 \pm \sqrt{c_0 \left(8\chi^2(r) + c_0 + \frac{2\nu}{\mu} \right)} \right)}, \quad (5.70)$$

está expressão é substituída nas equações de (5.56) e obtemos as soluções para os campos $\phi(r)$ e $\chi(r)$ e para $A(r)$.

Nós apresentamos as configurações dos campos $\phi(r)$ e $\chi(r)$, figuras 5.18 e 5.19, para os

casos

$$\phi_{\pm}(r) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(2\chi^2(r) + c_0 \pm \sqrt{c_0 \left(8\chi^2(r) + c_0 + \frac{2\nu}{\mu} \right)} \right)}. \quad (5.71)$$

As outras soluções apresentam características similares. As figuras 5.18 e 5.19, mostram o processo de separação das branas quando c_0 é próximo aos valores críticos, como já foi mencionado acima.

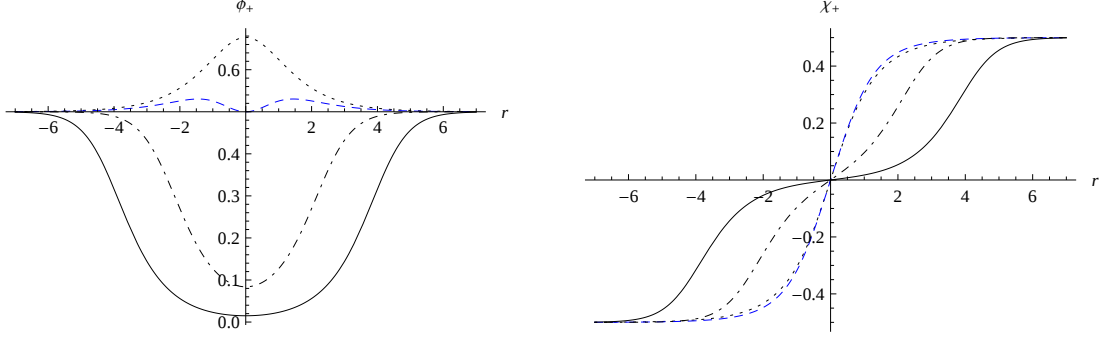


Figura 5.18: Comportamento dos campos ϕ_+ e χ_+ . Para $c_0 = -0.00001$ (linha contínua), $c_0 = -0.01$ (linha tracejada pontilhada), $c_0 = -0.25$ (linha tracejada), e $c_0 = -5$ (linha pontilhada) com $\mu = -1$ e $\nu = 1$.

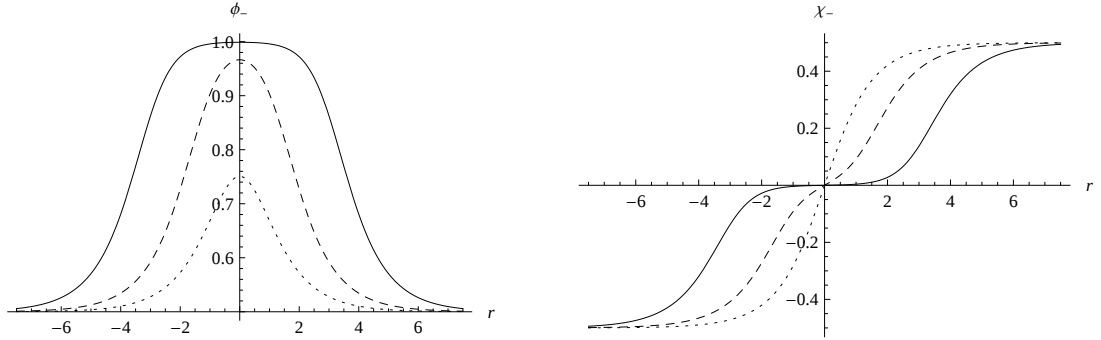


Figura 5.19: Comportamento dos campos ϕ_- e χ_- . Para $c_0 = 2.00001$ (linha contínua), $c_0 = 2.01$ (linha tracejada) e $c_0 = 5$ (linha pontilhada) com $\mu = -1$ e $\nu = 1$.

O processo de separação de branas também é observado na configuração do fator de deformação, figura 5.20, e da densidade de energia T_{00} , figura 5.21, conforme o esperado. Da configuração do fator de deformação nós podemos deduzir que o sistema na dimensão extra apresenta simetria Z_2 , ou seja, se cumpre: $e^{A(r)} = e^{A(-r)}$.

Neste quarto modelo também é possível localizar a gravidade seguindo o procedimento padrão do terceiro modelo. Além disso, também existe soluções branas críticas, para cada valor crítico de c_0 . A energia do campo escalar y do sistema é diferente de zero, para essas soluções críticas, já que o valor no limite assintótico do fator de deformação é diferente de zero.

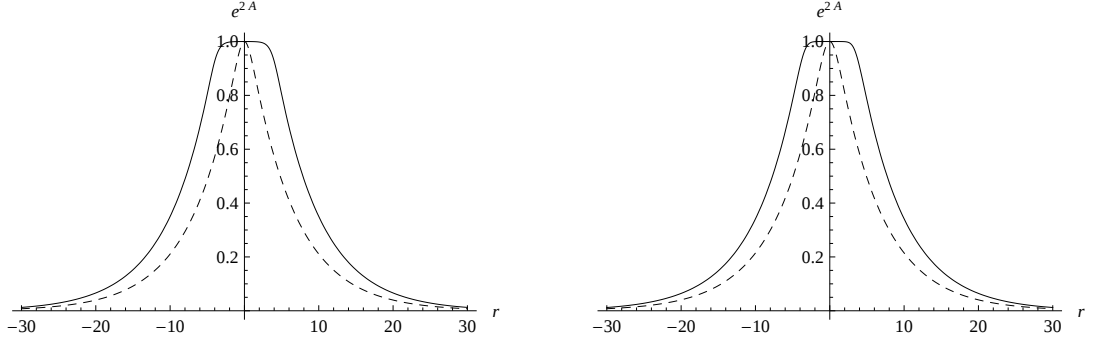


Figura 5.20: Comportamento do fator do deformação. Esquerda: $c_0 = -5$ (linha tracejada), $c_0 = -0.00001$ (linha tracejada). Direita: $c_0 = 5$ (linha tracejada) e $c_0 = 2.00001$ (linha continua). Para $\mu = -1$ e $\nu = 1$.

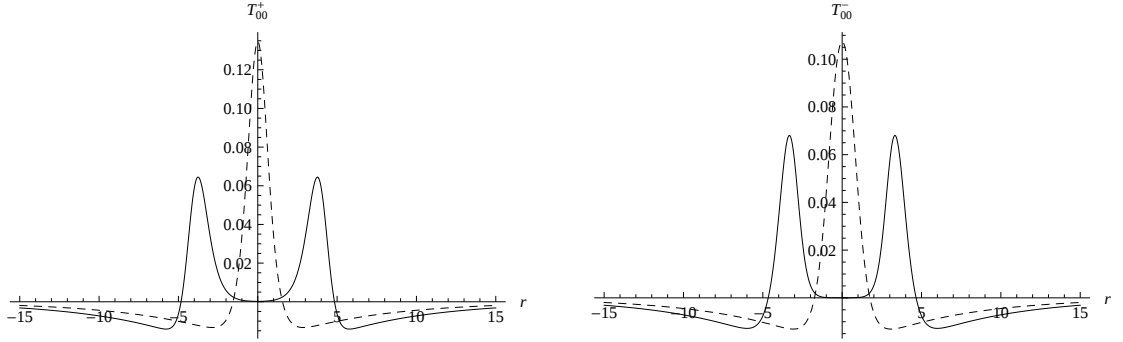


Figura 5.21: Configuração da densidade de energia do campo escalar T_{00} . Esquerda: $c_0 = -5$ (linha tracejada), $c_0 = -0.00001$ (linha tracejada). Direita: $c_0 = 5$ (linha tracejada) e $c_0 = 2.00001$ (linha continua). Para $\mu = -1$ e $\nu = 1$.

Finalmente, nós podemos afirmar que para modelos com um campo a energia do campo escalar e do sistema sempre é nula. Também, ao considerar soluções não-críticas, nos modelos com dois campos escalares, a energia dos campos escalares e do sistema é nula. Se nós consideramos as soluções críticas, a energia dos campos escalares e do sistema é diferente de zero.

Importante também notar que a divisão de branas no segundo modelo tratado é controlado pela constante de acoplamento g , ou seja, um parâmetro do próprio potencial, conduzindo a uma deformação na configuração do potencial durante a divisão da brana, como é mostrado na figura 5.10. Por outro lado, no caso de modelos com dois campos, como os terceiro e quarto modelos tratados aqui, a divisão de branas é controlada pela constante de integração c_0 que, naturalmente é externa ao potencial, ou seja, o potencial não sofre nenhum tipo de deformação nesses modelos. Poderíamos também construir, a partir do quarto modelo apresentado aqui, um modelo com somente um campo escalar (neste caso seria o campo χ , o qual descreveria a o fenômeno de divisão de branas. Isto pode ser feito como na referência [43]. No entanto, como se pode notar em [43], o modelo efetivo tem a constante c_0 como parâmetro do potencial. Assim o processo de divisão de

branas seria acompanhado, naturalmente, pela mudança na configuração do potencial.

Outro fato relevante nestes modelos em mundos-brana, é que se paga um preço muito alto para termos soluções exatas de mínima energia. Este preço é revelado na forma do potencial (5.7). Na maioria dos modelos, com exceção do primeiro modelo apresentado aqui, este potencial não é limitado por baixo, o que estragaria qualquer expansão perturbativa para a quantização do sistema. De fato, não conhecemos referências que tratam com a quantização destes sistemas. Tudo o que temos até agora é a expansão ação por meio de pequenas flutuações do campo escalar e da métrica em torno das soluções clássicas. Mesmo nestes casos, consideramos somente termos de 2^a ordem, como está explicado no início deste capítulo (equações (5.39)-(5.65)). Mas, como já notado anteriormente, é difícil levar em conta as flutuações lineares de todas as componentes da métrica em conjunto com as flutuações do campo escalar.

Tudo o que é descrito neste capítulo é desenvolvido dentro de modelos com dinâmica canônica. Em seguida, nós passamos a revisar um modelo, ainda em mundos-brana, mas agora com uma dinâmica generalizada.

Capítulo 6

Modelo mundos-brana com dinâmica não-canônica

Neste último capítulo nós revisamos e ampliamos a análise do modelo no cenário de mundos-branas com dinâmica não-canônica desenvolvido por D. Bazeia et. al. [16], e estudamos o problema de localização de férmions nesse modelo. Assim, considera-se um campo escalar real acoplado à gravidade em $(4+1)$ dimensões do espaço-tempo deformado, onde usaremos a constante newtoniana $4\pi G^{(5)} = 1$ e r é a dimensão extra.

A ação para este tipo de sistema é descrito por

$$S = \int d^5x \sqrt{|g|} \left[-\frac{1}{4}R + \mathcal{L}(\phi, X) \right], \quad (6.1)$$

onde $g \equiv \text{Det}(g_{ab})$, $X = \frac{1}{2} \partial^a \phi \partial_a \phi$. O elemento de linha no espaço-tempo é como o dado na equação (5.3)

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b = e^{2A(r)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dr^2, \quad (6.2)$$

onde os índices latinos vão de 0 até 4, $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski com assinatura $(+, -, -, -)$ e e^{2A} é o fator de deformação (índices grego vão de 0 até 3). Se considera que $A = A(r)$ and $\phi = \phi(r)$.

Pode-se determinar que as equações do movimento estáticas para o sistema acima são da forma

$$(\mathcal{L}_X + 2X\mathcal{L}_{XX})\phi'' - (2X\mathcal{L}_{X\phi} - \mathcal{L}_\phi) = -4\mathcal{L}_X A'\phi', \quad (6.3)$$

$$A'' + 2A'^2 = \frac{2}{3}\mathcal{L}, \quad (6.4)$$

$$A'^2 = \frac{1}{3}(\mathcal{L} - 2X\mathcal{L}_X), \quad (6.5)$$

onde a linha indica derivada com respeito a r , $\mathcal{L}_X = \partial\mathcal{L}/\partial X$ e $\mathcal{L}_\phi = \partial\mathcal{L}/\partial\phi$.

A densidade de energia do campo escalar é dada pela expressão (ver Apêndice B)

$$T_{00}(y) = -e^{2A(y)} \mathcal{L}, \quad (6.6)$$

A densidade de lagrangiana $\mathcal{L}$ do campo escalar considerada tem a forma

$$\mathcal{L} = K(X) - V(\phi), \quad (6.7)$$

onde $K(X)$ e $V(\phi)$ são o termo cinético não-canônico e o potencial do sistema respectivamente. Para este caso as equações de movimento, equações (6.3)-(6.5), podem ser reescritas como

$$(K' + 2XK'') \phi'' - V_\phi = -4K' A' \phi', \quad (6.8)$$

$$A'' + 2A'^2 = \frac{2}{3} (K - V), \quad (6.9)$$

$$A'^2 = \frac{1}{3} (K - V - 2XK'). \quad (6.10)$$

Estas são as equações de movimento do sistema com dinâmica não-canônica.

No artigo mencionado acima, os autores apresentam dois modelos explícitos para $K(X)$, aqui nós revisamos um desses modelos.

6.1 O modelo: $K(X) = X + \alpha|X|X$

Este modelo também é considerado na referência [50], onde α é um parâmetro real positivo e $X = -\frac{1}{2} \phi'^2$. Para esse modelo, as equações do movimento ficam

$$\phi'' + 4A'\phi' - V_\phi = -\alpha (3\phi'' + 4\phi'A') \phi'^2, \quad (6.11)$$

$$A'' + 2A'^2 = -\frac{1}{3} \phi'^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2} \phi'^2 \right) - \frac{2}{3} V, \quad (6.12)$$

$$A'^2 = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{3}{2} \alpha \phi'^2 \right) \phi'^2 - \frac{1}{3} V. \quad (6.13)$$

Das equações (6.12) e (6.13) se obtém

$$A'' = -\frac{2}{3} \phi'^2 (1 + \alpha \phi'^2), \quad (6.14)$$

Para estender o formalismo de primeira ordem no cenário de mundos-brana, os autores escolhem a derivada do fator de deformação em relação à dimensão extra a ser uma função do campo escalar, [22]. As razões que os autores apresentam para esta escolha é que, *uma vez que na ação, equação (6.1), o setor geométrico permanece inalterado,*

também esperamos que esta equação permanece inalterada. Assim escrevemos

$$A' = -\frac{1}{3} W(\phi). \quad (6.15)$$

Substituindo a equação (6.15) na equação (6.14) obtemos

$$\phi' + \alpha \phi'^3 = \frac{1}{2} W_\phi. \quad (6.16)$$

Este último resultado é uma equação cúbica em ϕ' , então a solução real para (6.16) é dada por

$$\phi' = \frac{m(W_\phi)}{6\alpha} - \frac{2}{m(W_\phi)}, \quad (6.17)$$

onde

$$m(W_\phi) = \left(54\alpha^2 W_\phi + 6\sqrt{3} (16\alpha^3 + 27\alpha^4 W_\phi^2)^{1/2} \right)^{1/3}. \quad (6.18)$$

Novamente, substituindo a equação (6.15) na equação (6.13), obtemos o potencial do sistema

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \phi'^2 - \frac{1}{3} W(\phi)^2 + \frac{3}{4} \alpha \phi'^4, \quad (6.19)$$

onde ϕ' é dado por (6.17).

Por outro lado, neste ponto nós examinamos o funcional de energia, dado pela equação (5.23), para este modelo com dinâmica não-canônica. Assim, este funcional é da forma

$$E[A, \phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{4A} \left\{ \frac{1}{2} \phi'^2 - 3A'^2 + \frac{\alpha}{4} \phi'^4 + V \right\}. \quad (6.20)$$

Este funcional $E[A, \phi]$ fornece as equações de movimento estáticas (6.11) e (6.12) para todo valor de α , da mesma maneira que no caso da dinâmica canônica, mas a partir desta funcional não se pode encontrar as equações de primeira ordem. Além disso, examinamos a energia do campo escalar com dinâmica não-canônica. Das equações (6.6) e (6.7) obtemos

$$E_\phi = \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{2A} \left\{ \frac{1}{2} \phi'^2 + \frac{\alpha}{4} \phi'^4 + V \right\}, \quad (6.21)$$

substituindo a equação (6.19) na equação (6.21) obtemos

$$E_\phi = \int_{-\infty}^{\infty} dr e^{2A} \left\{ \phi'^2 + \alpha \phi'^4 - \frac{1}{3} W^2 \right\}. \quad (6.22)$$

Finalmente, usando as equações (6.12) e (6.15) e integrando, vemos que o valor da energia do campo escalar é

$$E_\phi = \frac{1}{2} \left(e^{2A(\infty)} W(\phi(\infty)) - e^{2A(-\infty)} W(\phi(-\infty)) \right), \quad (6.23)$$

para todo α . Da mesma maneira que no caso da dinâmica canônica, o valor da energia do campo escalar depende do comportamento assintótico do fator de deformação e do campo escalar.

Agora seguimos o mesmo procedimento feita pelos autores [16] focando o estudo para o caso de α muito pequeno. A equação (6.16) fica

$$\phi' = \frac{1}{2} W_\phi - \alpha \phi'^3.$$

$$\phi' \approx \frac{1}{2} W_\phi - \alpha \left(\frac{1}{2} W_\phi \right)^3$$

Assim se obtém, em primeira aproximação em α que

$$\phi' = \frac{1}{2} W_\phi - \frac{\alpha}{8} W_\phi^3. \quad (6.24)$$

A partir desta equação diferencial de primeira ordem se encontra as soluções do campo escalar do modelo com dinâmica não-canônica. Agora, substituindo a equação (6.24) no potencial do sistema, equação (6.19), obtemos

$$V(\phi) = \frac{1}{8} W_\phi^2 - \frac{1}{3} W^2 - \frac{\alpha}{64} W_\phi^4. \quad (6.25)$$

Neste ponto nós voltamos a examinar o funcional de energia do sistema (5.23) e logramos encontramos as equações diferenciais de primeira ordem (6.15) e (6.24). Para mostrar isso, substituímos as equações (6.24) e (6.25) na equação (6.20), assim

$$\begin{aligned} E[A, \phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dr \left\{ \frac{1}{2} \left(\phi' - \frac{1}{2} W_\phi + \frac{\alpha}{8} W_\phi^3 \right)^2 - 3 \left(A' + \frac{1}{3} W \right)^2 \right\} \\ + \frac{\alpha}{8} \int_{-\infty}^{\infty} dr \left(2\phi'^4 + \frac{3}{8} W_\phi^4 - W_\phi^3 \phi' \right) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dr \frac{d}{dr} (W e^{4A}). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Aqui resulta que $E[\phi, A]$ extremisa para soluções do par de equações diferenciais de primeira ordem dadas pelas equações (6.15) e (6.24). Deste modo, o valor da energia do sistema é dado pela expressão $E[\phi, A]$ é

$$E[\phi, A] = \left| e^{4A(\infty)} W(\phi(\infty)) - e^{4A(-\infty)} W(\phi(-\infty)) \right|, \quad (6.27)$$

para α muito pequeno. Este resultado reforça o modelo no cenário de mundos-brana com dinâmica não-canônica já que o mesmo resultado foi obtido quando se trabalha com modelos no cenário de mundos-brana com dinâmica canônica, equação (5.28).

Entretanto, a solução para a equação (6.24) torna-se

$$\phi(r) = \phi_0(r) - \frac{\alpha}{4} W_\phi(\phi_0(r)) W(\phi_0(r)), \quad (6.28)$$

onde $\phi_0(r)$ é a solução para $\alpha = 0$. Das equações (6.15) e (6.28), obtemos

$$A(r) = A_0(r) + \frac{\alpha}{12} W(\phi_0(r))^2, \quad (6.29)$$

onde $A_0(r)$ representa $A(r)$ para $\alpha = 0$.

A densidade de energia do campo escalar dada pela equação (6.6) é

$$T_{00} = e^{2A(r)} \left(\frac{1}{4} W_\phi^2 - \frac{1}{3} W^2 - \frac{\alpha}{16} W_\phi^4 \right). \quad (6.30)$$

Substituindo as equações (6.28) e (6.29) na equação (6.30), obtemos

$$T_{00} = T_{00}(0) - \frac{\alpha}{48} e^{2A_0(y)} \left(6W_{\phi\phi} W_\phi^2 W - 10W^2 W_\phi^2 + 3W_\phi^4 + \frac{8}{3} W^4 \right)_{\phi=\phi_0}, \quad (6.31)$$

onde

$$T_{00}(0) = e^{2A_0(y)} \left(\frac{1}{4} W_\phi^2 - \frac{1}{3} W^2 \right)_{\phi=\phi_0}. \quad (6.32)$$

Note-se que a densidade de energia do campo escalar dada pela equação (6.31) é um pouco diferente da que é dada na referência [16].

Para mostrar a validade das soluções obtidas, os autores consideram o superpotential $W(\phi)$, da forma

$$W(\phi) = 3a \sin(b\phi), \quad (6.33)$$

onde a e b são parâmetros reais. Este modelo é semelhante ao primeiro modelo estudado no capítulo anterior. As soluções clássicas para as equações (6.28) e (6.29) são dadas por

$$\phi(r) = \frac{1}{b} \arcsin \left[\tanh \left(\frac{3}{2} ab^2 r \right) \right] - \frac{9a^2 b \alpha}{4} \tanh \left(\frac{3}{2} ab^2 r \right) \operatorname{sech} \left(\frac{3}{2} ab^2 r \right), \quad (6.34)$$

e

$$A(r) = \frac{2}{3b^2} \ln \left[\operatorname{sech} \left(\frac{3}{2} ab^2 r \right) \right] + \frac{3a^2 \alpha}{4} \tanh^2 \left(\frac{3}{2} ab^2 r \right). \quad (6.35)$$

Os perfis do campo escalar e da densidade de energia do campo escalar é mostrado na figura (6.1) para alguns valores de α . O estudo numérico dá total apoio à expressões analíticas na primeira aproximação em α . A figura (6.1a) mostra claramente que a brana espessa fica nos arredores de $r = 0$. Essa região tem uma densidade de energia do campo escalar positiva. A contribuição do termo cinético não-canônico modifica o perfil sem alterar a forma simétrica da densidade de energia do campo escalar, como é observado na

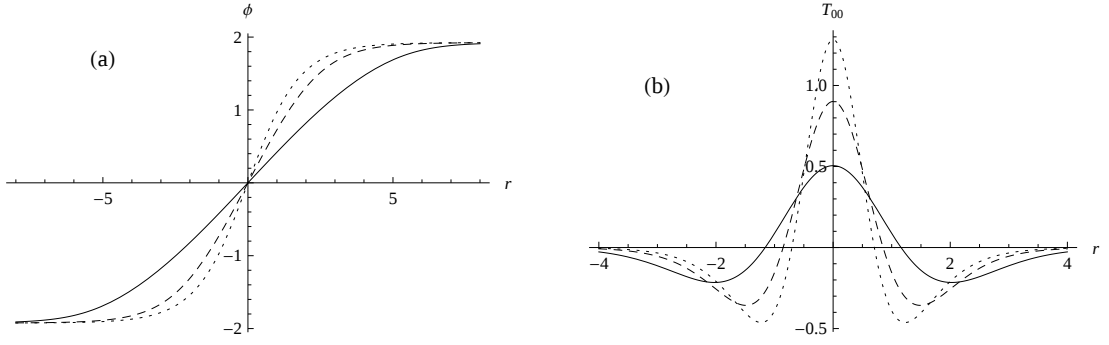


Figura 6.1: Perfis de $\phi(r)$ e T_{00} . Para, para $a = 1$, $b = \sqrt{2/3}$, $\alpha = 0.1$ (linha pontilhada), $\alpha = 1$ (linha tracejada) e $\alpha = 10$ (linha contínua).

figura (6.1b). A espessura da brana alarga a medida que α aumenta. Todos os resultados mencionados estão deacordos com os resultados obtidos pelos autores, D. Bazeia et. al. [16].

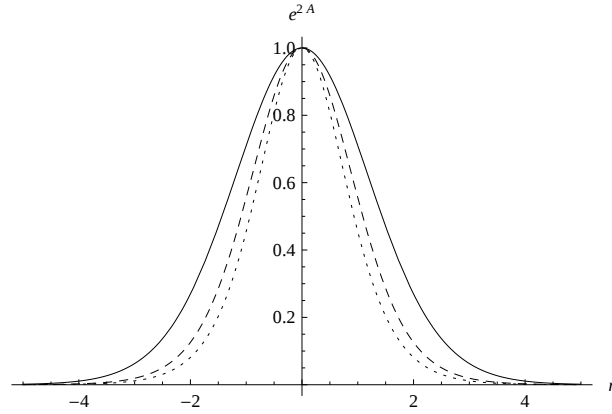


Figura 6.2: Perfis do fator de deformação para $a = 1$, $b = \sqrt{2/3}$, $\alpha = 0.1$ (linha pontilhada), $\alpha = 1$ (linha tracejada) and $\alpha = 10$ (linha contínua).

Os perfis do fator de deformação são mostrados na figura (6.2) para alguns valores de α . Esta figura nós deduzimos que no limite assintótico ($r \rightarrow \pm\infty$) o fator de deformação é nula ($e^{2A} \rightarrow 0$) para todo α . Portanto a energia do campo escalar, equação (6.23), e a energia do sistema, equação (6.27), são nulas. Estos mesmos resultados

Nós também estudamos o comportamento das soluções no limite de branas finas deste modelo com dinâmica não-canônica. As soluções, na primeira aproximação em α , equações (6.34) e (6.35) se reduzem no limite de branas finas ($ab^2 \rightarrow \infty$) às seguintes expressões

$$\phi_{bf}(r) = \frac{\pi}{2b} \text{sgn}[r] \quad (6.36)$$

$$A_{bf}(r) = -a|r| \quad (6.37)$$

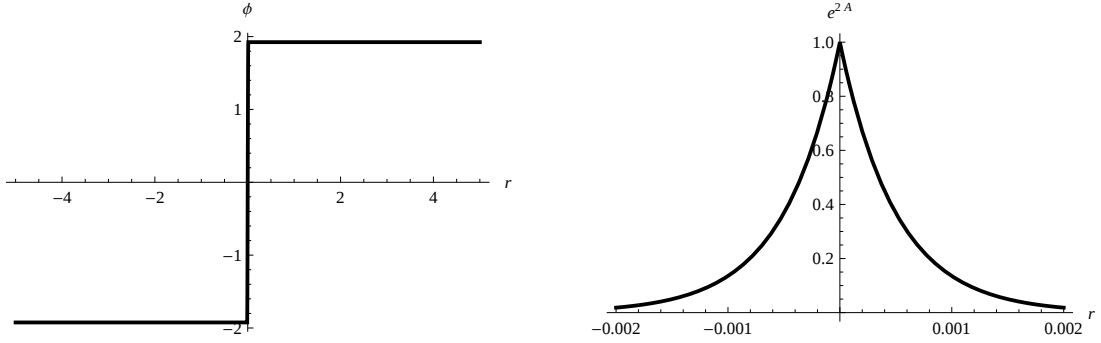


Figura 6.3: Perfis no limite de brana fina do campo escalar (esquerda) e da função de deformação (direita). Para $a = 1000$ e $b = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Deste modo, podemos afirmar que o modelo no cenário de branas-mundo com dinâmica não-canônica estudado aqui se aproxima suavemente ao modelo no cenário de branas-mundo de L. Randall e R. Sundrum [12].

Assim concluímos a revisão do modelo no cenário mundos-brana com dinâmica não-canônica, D. Bazeia et. al. [16]. Em seguida, nós dissertamos sobre o problema de localização de férmions 1/2 em branas espessas originadas neste modelo.

6.2 Localização de Fermiões

A ação de um campo de Dirac acoplado com um campo escalar através de um acoplamento de Yukawa geral é dado por

$$S = \int d^5x \sqrt{|g|} [i\bar{\Psi}\Gamma^M\nabla_M\Psi - \eta\bar{\Psi}F(\phi)\Psi] , \quad (6.38)$$

onde η é a constante de acoplamento entre os férmions e o campo escalar, $\bar{\Psi} = \Psi\Gamma^0$ e $\nabla_M = \partial_M + \frac{1}{4}\omega_M^{\bar{A}\bar{B}}\Gamma_{\bar{A}\bar{B}}$. A equação de movimento é obtida como

$$i\Gamma^M\nabla_M\Psi - \eta F(\phi)\Psi = 0. \quad (6.39)$$

Nesta etapa, é útil considerar a corrente. A partir da equação (6.39) obtemos

$$i\bar{\Psi}\Gamma^M(\nabla_M\Psi) - \eta\bar{\Psi}F(\phi)\Psi = 0$$

$$-i(\nabla_M\bar{\Psi})\Gamma^M\Psi - \eta\bar{\Psi}F(\phi)\Psi = 0$$

então a lei de conservação de J^M é da forma

$$\nabla_M J^M = \bar{\Psi} (\nabla_M \Gamma^M) \Psi, \quad (6.40)$$

onde $J^M = \bar{\Psi} \Gamma^M \Psi$. Assim, se a seguir for verdadeira

$$\nabla_M \Gamma^M = 0, \quad (6.41)$$

então a quadricorrente será conservada. A condição (6.41) é a afirmação puramente geométrica de que as matrizes gama no espaço-tempo deformado são covariantes. Para a representação das matrizes gama $\Gamma^M = (e^{-A}\gamma^\mu, -i\gamma^5)$, com o elemento de linha (6.2), a condição (6.41) é trivialmente satisfeita e, portanto, a corrente é conservada.

A equação de movimento (6.39) torna-se

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu + \gamma^5 e^A (\partial_r + 2\partial_r A) - \eta e^A F(\phi)] \Psi = 0. \quad (6.42)$$

Neste ponto, usamos a decomposição quirial da forma

$$\Psi(x, r) = \sum_n \psi_{L_n}(x) \alpha_{L_n}(r) + \sum_n \psi_{R_n}(x) \alpha_{R_n}(r), \quad (6.43)$$

com $\psi_{L_n}(x) = -\gamma^5 \psi_{R_n}(x)$ e $\psi_{R_n}(x) = \gamma^5 \psi_{L_n}(x)$. Nesta decomposição $\psi_{L_n}(x)$ e $\psi_{R_n}(x)$ são as componentes de quiralidade-direita e quiralidade-esquerda do campo espinorial quadridimensional, respectivamente. Substituindo a equação (6.43) na equação (6.42), e exigindo que $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_{L_n} = m_n \psi_{R_n}$ e $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_{R_n} = m_n \psi_{L_n}$, obtemos

$$[\partial_r + 2\partial_r A + \eta F(\phi)] \alpha_{L_n} = m_n e^{-A} \alpha_{R_n}, \quad (6.44)$$

$$[\partial_r + 2\partial_r A - \eta F(\phi)] \alpha_{R_n} = -m_n e^{-A} \alpha_{L_n}. \quad (6.45)$$

As funções α_{L_n} e α_{R_n} cumprem certa condição de ortonormalização. Se chegou a essa condição substituindo a equação (6.43) na ação, equação (6.38), empregando as equações (6.44)-(6.45) e, adicionalmente, exigindo que o resultado tenha a forma da ação quadridimensional para férmions quirais massivos

$$S = \sum_n \int d^4x \bar{\psi}_n (\gamma^\mu \partial_\mu - m_n) \psi_n, \quad (6.46)$$

onde $\psi_n = \psi_{L_n} + \psi_{R_n}$ e $m_n \geq 0$. Assim, as funções α_{L_n} e α_{R_n} devem obedecer à condição de ortonormalização:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dr e^{3A} \alpha_{L_m} \alpha_{R_n} = \delta_{LR} \delta_{mn}. \quad (6.47)$$

Agora, fazendo a seguinte mudança de variável

$$z = \int_0^r e^{-A(r')} dr', \quad (6.48)$$

e redefinindo as funções $\alpha_{L_n} = e^{-2A} L_n$ e $\alpha_{R_n} = e^{-2A} R_n$, temos que as equações se transformam em (6.44) e (6.45)

$$-L_n''(z) + V_L(z)L_n = m_n^2 L_n, \quad (6.49)$$

$$-R_n''(z) + V_R(z)R_n = m_n^2 R_n, \quad (6.50)$$

onde

$$V_L(z) = \eta^2 e^{2A} F^2(\phi) - \eta \partial_z (e^A F(\phi)), \quad (6.51)$$

$$V_R(z) = \eta^2 e^{2A} F^2(\phi) + \eta \partial_z (e^A F(\phi)). \quad (6.52)$$

Para observar a configuração destes potenciais, nós usamos seqüências de pares de pontos (z, r) com um passo constante em z , já que a função $z = z(r)$ é uma função bijetiva, como se mostra na figura 6.4

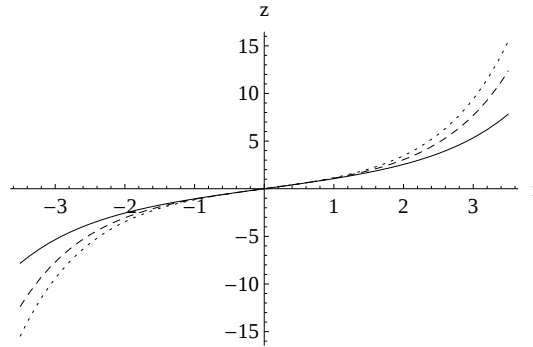


Figura 6.4: Perfis da função $z = z(r)$. Para $a = 1000$ e $b = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Neste ponto, é instrutivo observar que com a mudança de variável, equação (6.48), obtemos uma geometria a ser conformalmente plana

$$ds^2 = e^{2A(z)} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dz^2). \quad (6.53)$$

Agora vamos centrar a atenção sobre a condição (6.41). Para o elemento de linha (6.53) a representação das matrizes gama é da forma $\Gamma^M = (e^{-A}\gamma^\mu, -ie^{-A}\gamma^5)$. Nesse caso obtemos

$$\nabla_M \Gamma^M = i(\partial_z A(z))e^{-A(z)}\gamma^5. \quad (6.54)$$

Portanto, a corrente não é conservada para o elemento de linha (6.53). Sabe-se que,

em geral, a reformulação da teoria em um novo sistema conforme leva a uma teoria fisicamente inequivalente. Esse problema já tem um precedente nos modelos cosmológicos dentro da teoria tensor-multiescalar da gravidade estudada por T. Damour [51]. Sob essa argumentação, usamos apenas a mudança de variável (6.48) para ter uma análise qualitativa do perfil de potencial, que é um ingrediente fundamental para a localização de férmions na brana.

Em seguida, vamos centrar a atenção sobre o cálculo do modo zero. Substituindo $m_n = 0$ nas equações (6.44) e (6.45), ao mesmo tempo usamos $\alpha_{L_n} = e^{-2A}L_n$ e $\alpha_{R_n} = e^{-2A}R_n$, respectivamente, obtemos

$$L_0 \propto \exp \left[-\eta \int_0^r dr' F(\phi) \right], \quad (6.55)$$

$$R_0 \propto \exp \left[\eta \int_0^r dr' F(\phi) \right]. \quad (6.56)$$

Este fato é o mesmo para o caso de duas dimensões da equação de Dirac. Nesse contexto são chamadas soluções isoladas por A.S. de Castro et. al. [52]. Aqui vale a pena mencionar que a normalização do modo zero e a existência de um mínimo do potencial efetivo sob a brana são condições essenciais para o problema da localização do férmion na brana. Recentemente, este fato já foi relatado por L.B. Castro [53].

A fim de verificar a condição de normalização (6.47) para o modo zero dos férmions de quiralidade-esquerda (6.55), a integral pode ser convergente *i.e*

$$\int_{-\infty}^{\infty} dr \exp \left[-A(r) - 2\eta \int_0^r dr' F(\phi(r')) \right] < \infty. \quad (6.57)$$

Esse resultado mostra claramente que a normalização do modo zero é decidido pelo comportamento assintótico de $e^{-A(r)}$ e $F(\phi(r))$. Anteriormente foi mostrado que para modelos que geram branas espessas o termo $e^{-A(r)}$ é nula no limite assintótico. Então a normalização do modo zero é decidido pelo comportamento assintótico somente de $F(\phi(r))$. Além disso, a partir de (6.51) e (6.52) pode ser observado que o perfil do potencial efetivo depende da escolha de $F(\phi(r))$. Esse fato implica que a existência de um mínimo do potencial efetivo $V_L(z(r))$ ou $V_R(z(r))$ localizada na brana é decidido por $F(\phi(r))$. Este ponto será mais claro quando se considera um acoplamento de Yukawa específico. Portanto, o comportamento de $F(\phi(r))$ desempenha um papel preponderante para a localização de férmions na brana [53]. Depois de esclarecer as duas condições essenciais para o problema da localização de férmion na brana, estamos agora em posição de escolher algumas formas específicas para acoplamentos de Yukawa.

6.2.1 Modos zeros e localização de férmions

Passamos a estudar o caso mais simples de acoplamento, ou seja $F(\phi) = \phi$. Em primeiro lugar, consideramos o problema de normalização da solução. Neste caso, substituindo as equações (6.34) e (6.35), no integrando da equação (6.57) obtemos

$$I = \exp \left[-\ln(\operatorname{sech}(ar)) - \frac{3a^2\alpha}{4} \tanh^2(ar) - \sqrt{6} \eta \bar{I}(r) - \frac{3\sqrt{6}}{2} a\eta\alpha \operatorname{sech}(ar) \right], \quad (6.58)$$

onde $\bar{I} = \int dr' \arcsin[\tanh(ar')]$. Seguimos o mesmo procedimento desenvolvido por A. Melfo et. al. [54]. Então precisamos apenas de considerar o comportamento assintótico do integrando, assim obtemos

$$I \rightarrow \exp \left[-\left(\frac{\pi\eta}{b} - a \right) |r| - \frac{3a\alpha\eta}{2b} e^{-\frac{3}{2}ab^2|r|} \right]. \quad (6.59)$$

Note-se que o comportamento assintótico do integrando depende do sinal de a e b . Podemos facilmente concluir que quatro classes diferentes de soluções podem ser segregados:

Caso A: $a > 0$ e $b > 0$.

O comportamento de (6.59) para $|r| \rightarrow \infty$ é dado por

$$I \rightarrow \exp \left[-\left(\frac{\pi}{b} \eta - a \right) |r| \right] \rightarrow 0, \quad \text{por } \eta > ab/\pi. \quad (6.60)$$

Este resultado mostra que o modo zero de quiralidade-esquerda é normalizado apenas para $\eta > ab/\pi$. Note-se que o comportamento assintótico da condição de normalização para este caso é independente de α . Agora, sob a mudança de $\eta \rightarrow -\eta$ ($L_0 \rightarrow R_0$), obtemos que os férmions de quiralidade-direita não pode ter um modo de zero normalizável. A forma dos potenciais para este caso são mostrados na figura 6.5 para alguns valores de α . A figura 6.5(a) mostra que o potencial de férmions de quiralidade-esquerda, $(V_L)_A$, é de fato um potencial tipo vulcão. As formas da densidade de energia do campo escalar, potencial $(V_L)_A$ e modo zero, para este caso são mostrados na figura 6.6 para $\alpha = 0.1$. Um comportamento semelhante é obtido para $\alpha = 1$ e $\alpha = 10$. A figura 6.6 mostra claramente que o potencial efetivo $(V_L)_A$ tem um mínimo na brana, além disso, mostra claramente que o modo zero de quiralidade-esquerda é localizada sobre a brana. Por outro lado, a figura 6.5(a) mostra uma estrutura de poço cuja profundidade diminui à medida que α cresce. A partir desta pode-se concluir que a capacidade de armadilhar férmions decresce à medida que o valor de α cresce. A figura 6.5(b) mostra que o potencial $(V_R)_A$ é sempre positivo. Este potencial efetivo tem um máximo que decresce à medida que α cresce. Portanto, o potencial não pode armadilhar férmions com quiralidade direita.

Caso B: $a > 0$ e $b < 0$.

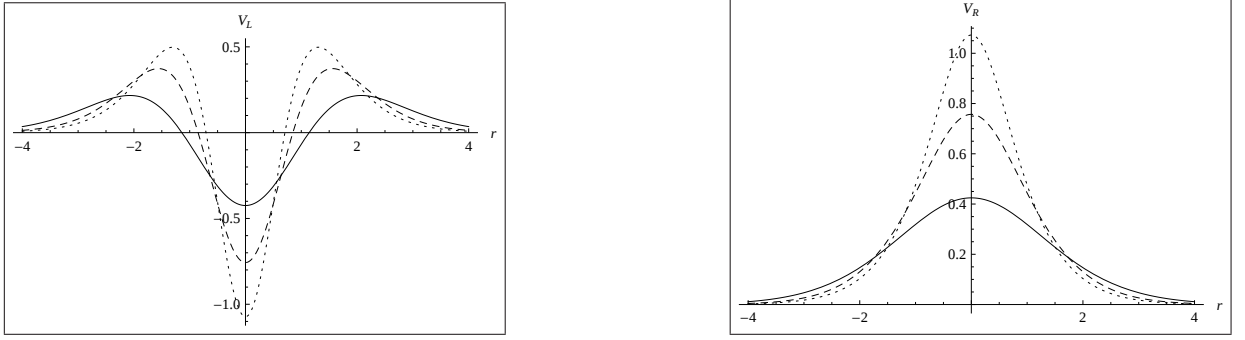


Figura 6.5: Perfis dos potenciais: (a) $(V_L(r))_A$ (esquerda) e (b) $(V_R(r))_A$ (direita) para $\eta = 1$, $a = 1$, $b = \sqrt{2/3}$, $\alpha = 0.1$ (linha pontilhada), $\alpha = 1$ (linha tracejada) e $\alpha = 10$ (linha contínua)

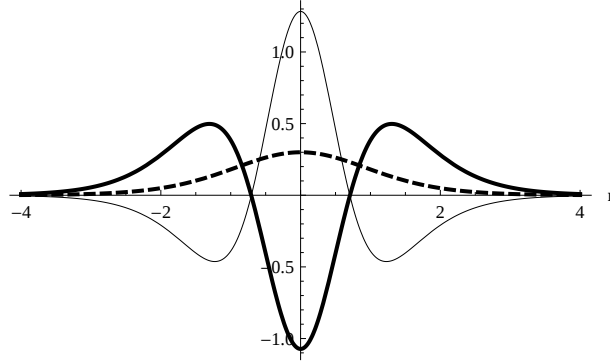


Figura 6.6: Perfis de T_{00} (linha contínua), $(V_L)_A$ (linha espessa) e modo zero (linha espessa tracejada) para $\eta = 1$ and $\alpha = 0.1$.

O comportamento de (6.59) para $|r| \rightarrow \infty$ é da forma

$$I \rightarrow \exp \left[\left(\frac{\pi}{|b|} \eta + a \right) |r| \right] \rightarrow \infty. \quad (6.61)$$

Este resultado leva a um modo zero não normalizável, portanto o modo zero de quiralidade-direita não pode ser localizado na brana. Semelhante ao caso anterior, o comportamento assintótico da condição de normalização é independente de α . Caso contrário, a mudança de $\eta \rightarrow -\eta$ ($L_0 \rightarrow R_0$) permitiu concluir que os férmions de quiralidade-direita pode ser normalizável baixo a condição $\eta > ab/\pi$. É instrutivo observar que, sob a alteração $b \rightarrow -|b|$ na equação (6.34), obtemos $\phi \rightarrow -\phi$ (ou seja, $F(\phi) \rightarrow -F(\phi)$), portanto, o comportamento dos potenciais para o caso **B** pode ser escrita com facilidade, substituindo $(V_L)_B = (V_R)_A$ e $(V_R)_B = (V_L)_A$. A partir disso, podemos concluir que o modo zero de quiralidade-direita é localizada na brana para $\eta > ab/\pi$.

Caso C: $a < 0$ e $b < 0$.

O comportamento de (6.59) para $|r| \rightarrow \infty$ é da forma

$$I \rightarrow \exp \left[- \left(|a| - \frac{\pi}{|b|} \eta \right) |r| - \frac{3\alpha\eta}{2} \frac{|a|}{|b|} e^{\frac{3}{2}|a|b^2|r|} \right]. \quad (6.62)$$

Neste ponto vale a pena mencionar que $e^{\frac{3}{2}|a|b^2|r|}$ tem um comportamento assintótico dominante que $\left(|a| - \frac{\pi}{|b|} \eta \right) |r|$ então $I \rightarrow 0$ independente do valor de η . Este resultado mostra que o modo zero de quiralidade-esquerda é normalizado para qualquer valor de η . Agora, sob a mudança de $\eta \rightarrow -\eta$ ($L_0 \rightarrow R_0$), obtemos que os férmions de quiralidade-direita não pode ter um modo de zero normalizável. Mais uma vez, note que sob a mudança $b \rightarrow -|b|$ e $a \rightarrow -|a|$ na equação (6.34) obtemos $\phi \rightarrow \phi$ (ou seja, $F(\phi) \rightarrow F(\phi)$), portanto, o comportamento dos potenciais para o caso **C** pode ser escrito com facilidade, substituindo $(V_L)_C = (V_L)_A$ e $(V_R)_C = (V_R)_A$. A partir disso, podemos concluir que o modo zero de quiralidade-esquerda é localizado na brana.

Caso D: $a < 0$ and $b > 0$.

O comportamento de (6.59) para $|r| \rightarrow \infty$ é da forma

$$I \rightarrow \exp \left[- \left(|a| + \frac{\pi}{b} \eta \right) |r| + \frac{3\alpha\eta}{2} \frac{|a|}{b} e^{\frac{3}{2}|a|b^2|r|} \right]. \quad (6.63)$$

A expressão $e^{\frac{3}{2}|a|b^2|r|}$ tem um comportamento assintótica dominante que o termo $-\left(|a| + \frac{\pi}{b} \eta \right) |r|$ então $I \rightarrow \infty$ é independente do valor de η . Este resultado mostra que o modo zero de quiralidade-esquerda não é normalizado. Entretanto, sob a mudança de $\eta \rightarrow -\eta$ ($L_0 \rightarrow R_0$), obtemos que os férmions de quiralidade-direita são normalizados para qualquer valor de η . Mais uma vez nota-se que sob a mudança $a \rightarrow -|a|$ na equação (6.34), obtemos $\phi \rightarrow -\phi$ (ou seja, $F(\phi) \rightarrow -F(\phi)$), portanto, o comportamento dos potenciais para o caso **D** pode ser escrito com facilidade substituindo $(V_L)_D = (V_R)_A$ e $(V_R)_D = (V_L)_A$. A partir disso, podemos concluir que o modo zero de quiralidade-direita é localizados na brana.

Nestes quatro casos diferentes de soluções, a condição de normalização do modo zero é independente de α , mas a capacidade de armadilhar férmions é inversamente proporcional a α . Nós não podemos determinar um valor máximo exato de α , na qual a profundidade do poço desaparece porque para α não necessariamente pequena não temos expressões analíticas para a solução deste modelo. Neste caso, o estudo numérico é essencial.

Capítulo 7

Conclusões e comentários

Nos primeiros capítulos desta dissertação trabalhamos num espaço-tempo plano com $(1+1)$ dimensões. No capítulo 4, mostramos através de um exemplo simples que, ao preservar a simetria Z_3 no âmbito de uma teoria supersimétrica, não se pode encontrar soluções BPS, porque o superpotencial nos três mínimos é nulo, o que gera uma tensão nula nos setores topológicos. Em seguida, nós abandonamos a simetria Z_3 e propusemos um superpotencial W , secção 4.3, para procurar um possível ladrilhamento no plano das configurações, plano (ϕ, χ) . Infelizmente não atingimos nosso objetivo. No entanto, nós descrevemos, na secção 4.6, uma maneira de estudar o comportamento das soluções BPS a partir da configuração da órbita. A configuração da órbita, e das soluções BPS, é controlada por meio dos valores da constante de integração c_0 . Esta constante de integração c_0 não está presente na densidade de lagrangiana e, conseqüentemente, tampouco nas energias BPS. Em vista disso, há uma degenerescência das soluções, pois, apesar dos diferentes valores de c_0 , fora do crítico, a energia BPS é precisamente a mesma. Também, mostramos um método para encontrar os valores críticos de c_0 . Um caso interessante acontece quando c_0 assume valores próximos de seus valores críticos, no modelo de dois campos. Nesse caso as soluções BPS se deformam continuamente passando a ter o campo ϕ um perfil tipo *lump* alargado e o campo χ um perfil tipo *kink* duplo. Com este modelo generalizamos a análise feita em [23] para modelos de dois campos que admite uma equação diferencial para a órbita.

No capítulo 5 estudamos características e propriedades de branas espessas através de vários modelos encontrados na literatura [38, 44, 16] e através do modelo proposto na secção 4.3. Mostramos que para modelos com um campo a energia do campo escalar e do sistema sempre é nula. Também, ao considerar soluções não-críticas, nos modelos com dois campos escalares, a energia dos campos escalares e do sistema é nula. Se nós consideramos as soluções críticas, a energia dos campos escalares e do sistema é diferente de zero. É importante mencionar que a divisão da brana no segundo modelo tratado é controlado pela constante de acoplamento g , ou seja, um parâmetro do próprio potencial, conduzindo a uma deformação da configuração do potencial na divisão como foi mostrado

na figura 5.10. Por outro lado, no caso de modelos com dois campos, como os terceiro e quarto modelos tratados aqui, a divisão de branas é controlada pela constante de integração c_0 que naturalmente é externa ao potencial, ou seja, o potencial não sofre nenhum tipo de deformação nesses modelos. Além disso, mostramos que o funcional de energia desempenha o papel de energia BPS neste cenário.

No capítulo 6 ampliamos a análise apresentada na referência [16] que trata de modelos de branas espessas com dinâmica generalizada e estudamos o problema de localização de férmions. Mostramos que as equações de movimento podem ser deduzidas a partir do funcional $E[A, \phi]$, já mencionado no caso da dinâmica canônica. Além disso, mostramos que as energias da matéria e do sistema são nulas. Encontramos uma expressão para a densidade de energia de matéria que difere ligeiramente de [16]. As soluções, ao considerar α pequeno, se aproximam assintoticamente às soluções do modelo de Randall e Sundrum [12]. No problema de localização de férmions, mostramos que a mudança de variável $dz = e^{A(r)}dr$ não conduz a uma corrente conservada, porque as matrizes gamma no espaço-tempo deformado não são constantes covariantemente. Analizamos a condição de normalização para o modo zero fermiônico e encontramos que o modo zero dos férmions de quiralidade-esquerda é normalizável, quando $\eta > ab/\pi$ e é independente de α . O potencial de férmions de quiralidade-esquerda $(V_L)_A$ tem um perfil tipo vulcão e tem um mínimo onde se localiza a brana ($r = 0$), portanto, o modo zero dos férmions de quiralidade-esquerda estão localizadas sobre a brana. Além disso, mostramos que a capacidade de $(V_L)_A$ armadilhar férmions é inversamente proporcional a α . Férmions sem massa de quiralidade-direita, por sua vez, não podem ser localizados sobre a brana. Para α não necessariamente pequena, o estudo numérico feito para uma ampla gama de valores de α confirmam os nossos resultados.

Referências Bibliográficas

- [1] M. K. Prasad and C. M. Sommerfield. **Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon**. Physical Review Letters, v. 35, p. 760-762, 1975; E. B. Bogomol'nyi, Yad. Fiz. 24, 861 (1976) [Sov. J. Nucl. Phys. 24, 449 (1976)].
- [2] E. R. C. Abraham and P. K. Townsend. **Intersecting Extended Objects in Supersymmetric Field Theories**. Nuclear Physics B, v. 351, p. 313-332, 1991.
- [3] G. W. Gibbons and P. K. Townsend. **Bogomol'nyi Equation for Intersecting Domain Walls**. Physical Review Letters, v. 83, p. 1727-1730, 1999.
- [4] P. M. Saffin. **Tiling with Almost-BPS-Invariant Domain-Wall Junctions**. Physical Review Letters, v. 83, p. 4249-4252, 1999.
- [5] Sean M. Carroll, Simeon Hellerman and Mark Trodden. **Domain wall junctions are $\frac{1}{4}$ BPS states**. Physical Review D, v. 61, 065001, 2000.
- [6] D. Bazeia and F. A. Brito. **Tiling the Plane without Supersymmetry**. Physical Review Letters, v. 84, p. 1094-1097, 2000.
- [7] Ashoke Sen. **String Network**. Journal of High Energy Physics, v. 03, 1998, 005.
- [8] D. Walgraef. **Spatio-Temporal Pattern Formation**. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [9] W. Edwards and S. Fauve. **Patterns and quasi-patterns in the Faraday experiment**. Journal of Fluid Mechanics, v. 278, p. 123-130, 1994.
- [10] F. Melo, P. Umbanhowar and H. Swinney. **Hexagons, Kinks, and Disorder in Oscillated Granular Layers**. Physical Review Letters, v. 75, p. 3838-3841, 1995.
- [11] D. Bazeia and F. A. Brito. **Bags, junctions and networks of BPS and non-BPS defects**. Physical Review D, v. 61, 105019, 2000.
- [12] L. Randall and R. Sundrum. **Large Mass hierarchy from a Small Extra Dimension**. Physical Review Letters. 83 (2002) 3370, and **An Alternative to Compactification**. Physical Review Letters. 83 (2002) 4690.

- [13] C. A. S. Almeida, R. Casana, Jr. M. M. Ferreira e A. R. Gomes. **Fermion localization and resonances on two-field thick branes**, Physical Review D, v. 79, 2009, 125022.
- [14] S.J. Perlmutter. **Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae**, The Astrophysical Journal, v. 517, p. 565-586, 1999.
- [15] N.A. Bachall, J.P. Ostriker, S.J. Perlmutter e P.J. Steinhardt. **The Cosmic Triangle: Revealing the State of the Universe**, Science, v. 284, p. 1481-1488, 1999.
- [16] D. Bazeia, A.R. Gomes, L. Losano e R. Menezes. **Braneworld models of scalar fields with generalized dynamics**, Physics Letters B, V. 671, p. 402-410, 2009.
- [17] T. Chiba, T. Okabe e M. Yamaguchi. **Kinetically driven quintessence**, Physical Review D, v. 62, 023511, 2000.
- [18] C. Armendariz-Picon, V.F. Mukhanov and P.J. Steinhardt. **Dynamical Solution to the Problem of a Small Cosmological Constant and Late-Time Cosmic Acceleration**, Physical Review Letters, v. 85, p. 4438-4441, 2000.
- [19] C. Armendariz-Picon, T. Damour and V.F. Mukhanov. **K-Inflation**, Physics Letters B, v. 458, p. 209, 1999.
- [20] E. Babichev. **Global topological k-defects**, Physical Review D, v. 74, 2006, 085004.
- [21] D. Bazeia, L. Losano, R. Menezes, e J.C.R. Oliveira. **Generalized global defect solutions**, The European Physical Journal C, v. 51, p. 953-962, 2007.
- [22] K. Skenderis e P. K. Townsend. **Gravitational stability and renormalization-group flow**, Physics Letters B, v. 468, p.46-51, 1999.
- [23] A. de Souza Dutra. **General solutions for some classes of interacting two field kinks**. Physics Letters B, v. 626, p. 249-255, 2005.
- [24] Y. B. Zeldovich, I. Y. Kobzarev and L. B. Okun. **Cosmological Consequences of the Spontaneous Breakdown of Discrete Symmetry**. Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki, v. 67, p. 3-11, 1974.
- [25] E. S. Fraga and Á. Mocsy. **Connecting and Effective Model of Confinement and Chiral Symmetry to Lattice QCD**. Brazilian Journal of Physics, v. 37, p. 281-285, 2007.

- [26] M. A. Shifman e M. B. Voloshin. **Degenerate domain wall solutions in supersymmetric theories**, Physical Review D, v. 57, p. 2590-2598, 1998.
- [27] T. Kaluza. **On the problem of unity in Physics**. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) K1 (1921) 966.
- [28] O. Klein. **Quantum Theory and Five-Dimensional Relativity Theory**. Z. Phys. 37 (1926) 895.
- [29] E. Cremmer e J. Scherk. **Dual models in four dimensions with internal symmetries**. Nuclear Physics B, v. 103, p. 399, 1976.
- [30] D. V. Volkov, D. P. Sorokin e V. I. Tkach. **Mechanisms of spontaneous compactification of $N=2$, $d=10$ supergravitation**. JETP Lett. 38 (1983) 481.
- [31] M. Gell-Mann e B. Zwiebach. **Spacetime compactification induced by scalars**. Physics Letters B, v. 141, p. 333, 1984.
- [32] K. Akama. **Pregeometry**. Lecture Notes in Physics, v. 176, p. 267, 1982.
- [33] V. A. Rubakov e M. E. Shaposhnikov. **Do we live inside a domain wall?**. Physics Letters B, v. 125, p. 136, 1983.
- [34] G. W. Gibbons e D. L. Wiltshire. **Spacetime as a membrane in higher dimensions**. Nuclear Physics B, v. 717, 1987.
- [35] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos e G. Dvali. **The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter**, Physics Letters B, v. 429, p. 263-272, 1998.
- [36] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos e G. Dvali. **New dimensions at a millimeter to a fermi and superstrings at a TeV**, Physics Letters B, v. 436, p. 257, 1998.
- [37] O. DeWolfe, D. Z. Freedman, S. S. Gubser and A. Karch. **Modeling the fifth dimension with scalars and gravity**. Physical Review D, v. 62, 046008, 2000.
- [38] Martin Gremm. **Four-dimensional gravity on a thick domain wall**, Physics Letters B, v. 478, 434, 2000.
- [39] S. W. Hawking e Gary T. Horowitz. **The gravitational Hamiltonian, action, entropy and surface terms**, Classical and Quantum Gravity, v. 13, p.1487-1498, 1996.
- [40] P. K. Townsend. **Positive energy and the scalar potential in higher dimensional (super)gravity theories**, Physics Letters, v. 148B, p.55-59, 1984.

- [41] F. Dahia e C. Romero. **Confinement and stability of the motion of test particles in thick branes**, Physics Letters B, v. 651, p. 232-238, 2007.
- [42] D. Anselmi. **Central functions and their physical implications**. Journal High Energy Physics, v. 05, 005, 1998.
- [43] Augusto E. R. Chumbes e Marcelo B. Hott. **Nonpolynomial potentials with deformable topological structures**, Physical Review D, v. 81, 045008, 2010.
- [44] N. H. Christ and T. D. Lee. **Quantum expansion of soliton solutions**, Physical Review D, v. 12, 1606, 1975.
- [45] A. de Souza Dutra, A. C. Amaro de Faria, Jr. and M. Hott. **Degenerate and critical Bloch branes**. Physical Review D, v. 78, 2008, 043526.
- [46] D. Bazeia e A. R. Gomes. **Bloch Brane**. Journal of High Energy Physics, v. 05, 012, 2004.
- [47] A. H. Eschenfelder. **Magnetic Bubble Technology**, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [48] A. Campos. **Critical Phenomena of Thick Branes in Warped Spacetimes**, Physical Review Letters, v. 88, 141602, 2002.
- [49] R. A. C. Correa, A. de Souza Dutra e M. B. Hott. **Fermion localization on degenerate and critical branes**, arXiv:1011.1849v1 [hep-th].
- [50] C. Adam, J. Sanchez-Guillen e A. Wereszczynski. **k-defects as compactons**, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, v. 40, p. 13625-13643, 2007.
- [51] Valerio Faraoni, Edgard Gunzig e Pasquale Nardone **Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology**, Fundamentals of Cosmic Physics, v. 20, p. 121, 1999.
- [52] L.B. Castro, A.S. de Castro and M.B. Hott. **Relativistic effects of mixed vector-scalar-pseudoscalar potentials for fermions in 1+1 dimension**, International Journal of Modern Physics E, v. 16, p. 3002-, 2007.
- [53] L.B. Castro. **Fermion localization on two-field thick branes**, Physical Review D, v. 83, 045002, 2011.
- [54] A. Melfo, N. Pantoja e J.D. Tempo. **Fermion localization on thick branes**, Physical Review D, v. 73, 2006, 044033.
- [55] L. D. Landau, E. M. Lifshitz. **Teoría Clásica de los Campos**, Editorial Reverté, España, 2002.

Apêndice A

Escalar de Curvatura

A partir da métrica dada pela equação (5.50), nós deduzimos

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} e^{2A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{2A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{2A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad g^{ab} = \begin{pmatrix} e^{-2A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-2A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-2A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

onde $a, b = 0, \dots, 4$, os símbolos de Christoffel são definidos da seguinte forma:

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right), \quad (\text{A.2})$$

neste caso são

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^4 &= -\Gamma_{11}^4 = -\Gamma_{22}^4 = -\Gamma_{33}^4 = e^{2A} \frac{dA}{dr} \\ \Gamma_{04}^0 &= \Gamma_{14}^1 = \Gamma_{24}^2 = \Gamma_{34}^3 = \Gamma_{40}^0 = \Gamma_{41}^1 = \Gamma_{42}^2 = \Gamma_{43}^3 = \frac{dA}{dr}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Ora, o tensor de Ricci é definido como:

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l, \quad (\text{A.4})$$

assim obtemos

$$\begin{aligned} R_{00} &= -R_{11} = -R_{22} = -R_{33} = e^{2A} \left[4 \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + \frac{d^2 A}{dr^2} \right] \\ R_{44} &= -4 \left[\left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + \frac{d^2 A}{dr^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Finalmente o escalar de curvatura R , fica dado por

$$R = g^{ik} R_{ik} = 4 \left[5 \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 + 2 \frac{d^2 A}{dr^2} \right]. \quad (\text{A.6})$$

Note-se que para a métrica selecionado, equação (5.50), segue-se que:

$$R > 0. \quad (\text{A.7})$$

Apêndice B

Tensor de Energia-Momento da matéria

A ação de um sistema de dois campos escalares reais, ϕ e χ , interagentes acoplados à gravidade em (4+1) dimensões do espaço-tempo deformado é dado por

$$S = \int d^4x dr \sqrt{|g|} \left(-\frac{1}{4}R + \frac{1}{2}g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi + \frac{1}{2}g^{ab}\partial_a\chi\partial_b\chi - V(\phi, \chi) \right), \quad (\text{B.1})$$

onde $g \equiv \text{Det}(g_{ab})$ e $a, b = 0, \dots, 4$, desta equação deduzimos a densidade Langrangiana de matéria é dada pela expressão

$$\mathcal{L} = \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2}g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi + \frac{1}{2}g^{ab}\partial_a\chi\partial_b\chi - V(\phi, \chi) \right). \quad (\text{B.2})$$

Para achar o tensor energia-momento de matéria nós usamos a expressão dada na referência [55]

$$\frac{1}{2}\sqrt{|g|}T_{cd} = \frac{\partial}{\partial x^a} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial g^{cd}/\partial x^a)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{cd}}. \quad (\text{B.3})$$

Também necessitaremos as seguintes propriedades da métrica

$$\frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial g_{ab}} = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}g^{ab} \quad , \quad \frac{\partial g^{cd}}{\partial g_{ab}} = -\frac{1}{2}(g^{ac}g^{bd} + g^{bc}g^{ad}). \quad (\text{B.4})$$

Substituindo (B.2) em (B.3), e usando (B.4) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt{|g|}T_{cd} &= -g_{mc}g_{nd}\frac{\partial}{\partial g_{mn}} \left[\sqrt{|g|} \left(\frac{1}{2}g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi + \frac{1}{2}g^{ab}\partial_a\chi\partial_b\chi - V(\phi, \chi) \right) \right] \\ &= -g_{mc}g_{nd} \left[\frac{1}{2}\sqrt{|g|}g^{mn} \left(\frac{1}{2}g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi + \frac{1}{2}g^{ab}\partial_a\chi\partial_b\chi - V(\phi, \chi) \right) \right] \\ &\quad -g_{mc}g_{nd}\sqrt{|g|} \left[-\frac{1}{4}(g^{ma}g^{nb} + g^{mb}g^{na})\partial_a\phi\partial_b\phi - \frac{1}{4}(g^{ma}g^{nb} + g^{mb}g^{na})\partial_a\chi\partial_b\chi \right] \end{aligned}$$

ou seja,

$$T_{cd} = -g_{mc}\delta_d^m \left(\frac{1}{2}g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi + \frac{1}{2}g^{ab}\partial_a\chi\partial_b\chi - V(\phi, \chi) \right) + \frac{1}{2}(\delta_i^a\delta_k^b + \delta_i^b\delta_k^a)\partial_a\phi\partial_b\phi \\ + \frac{1}{2}(\delta_i^a\delta_k^b + \delta_i^b\delta_k^a)\partial_a\chi\partial_b\chi.$$

Finalmente, o tensor energia-momento de matéria tem a forma

$$T_{ik} = -g_{ik} \left(\frac{1}{2}g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi + \frac{1}{2}g^{ab}\partial_a\chi\partial_b\chi - V(\phi, \chi) \right) + \partial_i\phi\partial_k\phi + \partial_i\chi\partial_k\chi. \quad (\text{B.5})$$

Para métrica dada pela equação (5.50) e para o caso dos campos escalares dependentes somente da dimensão extra, $\phi = \phi(r)$ e $\chi = \chi(r)$, nós obtemos que a densidade de energia de matéria fica

$$T_{00} = e^{2A(r)} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 + V(\phi, \chi) \right] = -e^{2A(r)} \mathcal{L}. \quad (\text{B.6})$$

Os outros elementos do tensor de energia-momento são

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = -e^{2A(r)} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 + V(\phi, \chi) \right], \quad (\text{B.7})$$

$$T_{44} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 - V(\phi, \chi). \quad (\text{B.8})$$

Apêndice C

Equações de Movimento

Demonstraremos como obter as equações de movimento para um sistema cuja ação é determinada pela equação (5.49), cuja métrica do espaço-tempo é dada pela equação (5.50)

As equações de movimento dos campos escalares reais são obtidas das equações de Euler-Lagrange

$$\partial^a \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta [\partial_a \phi(x)]} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi(x)} = 0 \quad , \quad \partial^a \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta [\partial_a \chi(x)]} - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \chi(x)} = 0. \quad (\text{C.1})$$

onde a densidade Lagrangiana dos campos escalares reais é dada pela equação (B.2).

Então, para o caso estático e considerando que ϕ e χ são funções somente da variável r , temos

$$\partial^a \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_a \phi)} \right) = -4 \frac{dA}{dr} e^{4A} \frac{d\phi}{dr} - e^{4A} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right), \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = -e^{4A} \frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (\text{C.3})$$

De forma que obtemos a equação de movimento

$$\partial^a \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_a \phi)} \right) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = e^{4A} \left(-4 \frac{dA}{dr} \frac{d\phi}{dr} - \frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) = 0, \quad (\text{C.4})$$

da qual resulta a equação (5.51), ou seja

$$\frac{d^2 \phi}{dr^2} + 4 \frac{dA}{dr} \frac{d\phi}{dr} = \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (\text{C.5})$$

Da mesma maneira, obtemos a equação de movimento para o campo χ

$$\frac{d^2 \chi}{dr^2} + 4 \frac{dA}{dr} \frac{d\chi}{dr} = \frac{\partial V}{\partial \chi}, \quad (\text{C.6})$$

esta é a equação (5.52).

Ora, achemos as equações de Einstein para o sistema considerado. A equação que nós considerarmos é apresentada na Ref. [55]

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi G^{(5)}T_{ab}, \quad (\text{C.7})$$

onde $G^{(5)}$ é a constante de Newton e nós considerarmos $4\pi G^{(5)} = 1$, R_{ab} e R representa o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, respectivamente. Substituindo (A.5), (A.6), (B.6) e (B.7) em (C.6), obtemos

$$\frac{d^2 A}{dr^2} + 2 \left(\frac{dA}{dr} \right)^2 = -\frac{2}{3}V - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 \right], \quad (\text{C.8})$$

$$\left(\frac{dA}{dr} \right)^2 = -\frac{1}{3}V + \frac{1}{6} \left[\left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 \right]. \quad (\text{C.9})$$

A equação (C.8) é a equação dada em (5.54). A partir das equação (C.7) e (C.8) nós obtemos

$$\frac{d^2 A}{dr^2} = -\frac{2}{3} \left[\left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2 \right], \quad (\text{C.10})$$

esta é a equação dada em (5.53).