





Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

149

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.0011/00

OK

**Método de Dirac e de Faddeev e Jackiw: um estudo
comparativo**

Jairzinho A. Ramos Medina

Orientador

Dr. Prof. *Bruto Max Pimentel Escobar*



Setembro de 2000

AL DIOS PADRE Y AMIGO

por su amor infinito.

por su amistad perfecta.

por su bendición continua.

por su apoyo constante.

Agradecimentos

A Deus, por conduzir minha vida até o dia de hoje e por ser além de um pai um amigo que jamais se esqueceu de mim.

A meus pais Honorinda e Urbano, a meus irmãos Edson, Rivelinho e Elisabet, por seu amor e carinho que são as coisas mais preciosas que tenho na vida.

A Jaime e Eithne Nunez, por seus maravilhosos conselhos e palavras e, porque eles são como meus segundos pais que sempre me apoiarão.

Ao professor B. M. Pimentel, pela orientação da tese e pelo dialogo que sempre manteve comigo, transmitindo sua experiência e seus conselhos para minha pessoa.

Aos amigos R. Bentin e T. Vargas, com os quais compartilhei os momentos felizes e tristes e encontrei neles as palavras de ânimo para continuar.

Aos amigos J. Acosta e M. Rodriguez, por sua amizade e companherismo e a todos aqueles que mostraram sempre disposição para me ajudar durante todo este tempo.

A CAPES, pelo apoio financeiro que tornou este trabalho possível.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo comparativo entre o método Hamiltoniano de Dirac e o método de Faddeev e Jackiw (F-J) para o tratamento de sistemas vinculados com o propósito de analisar e estabelecer as diferenças e a possível equivalência entre eles.

Palavras Chaves: Sistemas singulares, método de Dirac, formalismo de Faddeev e Jackiw.

Áreas do conhecimento: 1.05.03.01-3

Abstract

In this work, we present a comparative study between Dirac's Hamiltonian method and Faddeev and Jackiw's method for treating constrained systems. Our purpose is to analysis and stablish the differences and possible equivalence between these methods.

Índice

1	Introdução	1
2	O formalismo Hamiltoniano para sistemas vinculados: Método de Dirac	4
2.1	Introdução	4
2.2	Conceitos fundamentais	5
2.2.1	Parênteses de Poisson (P.B). Propriedades	5
2.2.2	As equações e as constantes de movimento	7
2.3	O formalismo Hamiltoniano	8
2.3.1	Os vínculos e as equações de movimento	8
2.3.2	Extensão da definição do P.B.	12
2.3.3	Consequências da extensão dos P.B.	14
2.3.4	Vínculos de primeira e segunda classe	18
2.3.5	Transformações de Gauge	21
2.3.6	A conjectura de Dirac	24
2.3.7	Os parênteses de Dirac	25
2.3.8	Teoria de campos	34
2.4	Exemplos	36
2.4.1	Campo livre de Dirac	37
2.4.2	Modelo Proca Abeliano	39
2.4.3	Campo eletromagnético livre	42
2.4.4	Lagrangeano da QED	45
3	O formalismo de Faddeev e Jackiw	49
3.1	Introdução	49
3.1.1	O formalismo de F-J e o Lagrangeano canônico $L_c(q, p)$	50
3.2	O formalismo de F-J	53
3.2.1	Formalismo F-J sem vínculos	53
3.2.2	Formalismo F-J com vínculos	65
3.3	Exemplos	72

3.3.1	Sistemas não vinculados	73
3.3.2	Sistemas vinculados	76
4	Comparação do formalismo de Dirac e F-J	90
4.1	Introdução	90
4.2	Exemplos de comparação	92
5	Conclusões	98
	Referências	100

Capítulo 1

Introdução

Os sistemas vinculados surgem com bastante frequência na física. Exemplos destes sistemas são a teoria do eletromagnetismo de Maxwell, a da gravitação de Einstein e numerosos sistemas físicos invariantes de Lorentz, os quais possuem vínculos que invalidam o tratamento usual clássico destes sistemas. As tentativas de analisar sistemas vinculados provêm dos anos 30 quando P.G. Bergmann e colaboradores [1, 2, 3, 4] tornaram clara a conexão entre os vínculos e as propriedades de invariância de uma teoria.

Os sistemas vinculados foram extensamente estudados a partir do início dos anos 50, sendo os trabalhos de Dirac [5, 6, 7] e Bergmann [1, 8], através de seus estudos de campos gravitacionais, os pioneiros neste tratamento. Eles realizaram uma exaustiva análise deste tipo de sistemas, particularmente aqueles com simetrias de gauge. Dirac melhorou estes estudos desenvolvendo um método Hamiltoniano para analisar sistemas onde os momentos não são todos funções independentes das velocidades [5], este método é denominado o método de Dirac.

Este método consistente para sistemas vinculados elaborado por Dirac há mais de quarenta anos que se baseia no formalismo Hamiltoniano, é o método padrão no estudo de teorias com vínculos [9, 10, 11]. A importância deste método está no fato de nos permitir obter os parênteses generalizados apropriados para quantizar sistemas vinculados. O formalismo de Dirac classifica os vínculos em primeira e segunda classe, que nos levam de forma conveniente aos parênteses de Dirac, os quais são os parênteses que permitirão a passagem aos comutadores da mecânica quântica. A classificação dos vínculos em duas categorias tem um significado físico: por um lado, somente os vínculos de segunda classe permitem uma verdadeira redução dos graus físicos de liberdade e, por outro lado, os vínculos de primeira classe possuem a propriedade fundamental de estarem relacionados às simetrias de gauge [9, 11, 12].

O ponto central no método de Dirac é a implementação dos vínculos na Hamiltoniana que nos conduz aos parênteses generalizados chamados parênteses de Dirac.

Os vínculos de segunda classe são incorporados em uma nova estrutura canônica, resolvendo deste modo a difícil implementação dos vínculos de segunda classe no nível quântico. Com efeito, a regra de quantização usual para os parênteses de Poisson ($\{, \}_{PB} \rightarrow -\frac{i}{\hbar}[\]$), conduz a uma inconsistência quando é aplicado ao parêntese de dois vínculos de segunda classe. Ao impor a estabilidade dos vínculos sob a evolução temporal, o método de Dirac conduz diretamente à idéia de parêntese generalizado (parênteses de Dirac). Esta incorporação dos vínculos nos novos parênteses transforma o conjunto de vínculos de segunda classe numa algebra abeliana, permitindo assim uma implementação consistente pela regra $\{, \}_D \rightarrow -\frac{i}{\hbar}[\]$.

No final da década de 80, Faddeev e Jackiw [13] desenvolveram um novo formalismo para a quantização de sistemas dinâmicos seguindo um tratamento geométrico clássico baseado na estrutura simplética do espaço de fase [14, 15]. A proposta deles, baseada em Lagrangeanos de primeira ordem lineares nas derivadas temporais e dirigida ao estudo de sistemas vinculados, aparece como uma alternativa ao tradicional e bem sucedido método de Dirac. A restrição a Lagrangeanos de primeira ordem é relevante, contudo não é só em teoria de campos que podemos sempre mudar para um Lagrangeano de primeira ordem introduzindo o conceito de momento canônico conjugado. Atualmente, este método é conhecido como método de Faddeev e Jackiw (F-J), consistindo em diagonalizar, por meio de uma transformação de Darboux, a matriz 2-forma simplética associada ao Lagrangeano reduzido. Se esta matriz é singular obtemos novos vínculos, os quais podem ser colocados no Lagrangeano reduzido. O procedimento continua através de uma nova diagonalização e finaliza quando obtemos uma matriz simplética não singular, que representa os parênteses generalizados no espaço de fase reduzido. Na realidade, este método põe em evidência as variáveis cíclicas, dando lugar a uma identificação imediata das equações de vínculos que serão usadas para eliminar as variáveis supérfluas, reduzindo deste modo o espaço de fase. Neste método a classificação de um sistema físico como vinculado ou não vinculado depende do fato da matriz simplética ter ou não inversa. Podem existir sistemas físicos que sejam vinculados do ponto de vista de Dirac, mas não são vinculados segundo o método de F-J. A classificação de vínculos em primeira e segunda classe não é necessária neste método. *

A importância do método de F-J, está no fato de que podemos obter os parênteses apropriados para quantizar os sistemas físicos sem seguir passo a passo o método de Dirac. O método de F-J é inclusive mais rápido e evita procedimentos embaraçosos e complicados presentes no método de Dirac. Porém, como os próprios autores

*Deve-se ter cuidado com o uso abusivo dado aqui do termo “matriz 2-forma simplética”, que é por definição não singular e fechada. Nos estamos identificando este termo indistintamente tanto quando a matriz 2-forma é singular ou não singular.

reconheceram, isto nem sempre pode ser feito, sendo então sugerido por eles que nestes casos se usar-se-á o método de Dirac.

A equivalência entre o método de Dirac e de F-J não está bem estabelecida e definida pois cada método tem suas próprias características mantidas durante sua aplicação. Os resultados obtidos através desses dois métodos, após os cálculos de exemplos físicos conhecidos são diferentes em alguns casos e iguais em outros, não permitindo o estabelecimento de uma equivalência completa entre o método de Dirac e de F-J. A principal diferença entre estes métodos é que o método de F-J é um método de redução do espaço que conduz diretamente aos graus de liberdade físicos. Contudo é verdade que no método de Dirac também inclui-se a possibilidade de se eliminar variáveis por meio da implementação dos parênteses de Dirac, ou seja, a eliminação de uma variável por cada vínculo de segunda classe. Mas, ainda assim, o método de Dirac mantém graus de liberdade supérfluos devido à presença dos vínculos de primeira classe, os quais são mantidos até o final quando, logo depois de fixar o gauge, os graus de liberdade supérfluos são eliminados.

Porém, no método de F-J, quando existam vínculos de primeira classe, a redução pode ser realizada não afetando o conteúdo físico da teoria. Isto significa que o método de F-J já fixa o gauge implicitamente durante a execução do próprio método, dando lugar unicamente aos graus de liberdade físicos.

Existem outros métodos para se estudar sistemas vinculados, cada um com suas próprias peculiaridades. Entre eles podemos mencionar, por exemplo, o formalismo Lagrangeano [11, 12] em que os vínculos são considerados relações entre as coordenadas e velocidades e o método simplético [16, 17, 18, 19, 20, 21] que é uma versão modificada do método de F-J.

Nos seguintes capítulos 2 e 3 desenvolveremos detalhadamente o método de Dirac e de F-J, respectivamente. Faremos no capítulo 4 a comparação entre ambos métodos por meio de resultados obtidos no tratamento específico de exemplos. Finalmente, no capítulo 5, apresentaremos conclusões a respeito do estudo comparativo entre o método de Dirac e o método de F-J.

Capítulo 2

O formalismo Hamiltoniano para sistemas vinculados: Método de Dirac

2.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos o tratamento Hamiltoniano de sistemas vinculados desenvolvido por Dirac [5] há mais de quarenta anos, e que ficou conhecido como método de Dirac.

O objetivo principal é chegar aos parênteses de Poisson generalizados, chamados parênteses de Dirac que se constituem na conexão para os comutadores da mecânica quântica.

O objetivo deste formalismo Hamiltoniano é estabelecer uma teoria quântica exata, que possa implicar em sérias dificuldades de caráter fundamental e que tem preocupado aos físicos por muito tempo.

Nos últimos anos, os físicos tem procurado estabelecer métodos alternativos para obter teorias de campos quânticos. Estes métodos porém não conduzem a uma solução satisfatória do problema da quantização.

Segundo Dirac, alguma informação do sistema físico sempre se perde nestes métodos, o que não acontece quando se usa o Hamiltoniano ou alguma generalização do conceito de Hamiltoniano. Assim, consideramos deste ponto de vista que o Hamiltoniano é realmente importante para a teoria quântica e portanto é essencial construir a teoria quântica a partir de um Hamiltoniano.

Começamos assumindo que existe uma ação integral que depende do movimento tal que, quando se varia o movimento e se usa as condições para que a ação integral seja estacionária, obtemos as equações de movimento.

O método de se iniciar com uma ação integral possui a grande vantagem, de facilmente adequar-se aos principios relativísticos. A teoria quântica necessita ajustar-se à relatividade pois, em geral, estamos tratando com partículas movimentando-se em altas velocidades.

Quando temos o Hamiltoniano, podemos aplicar um método padrão que nos dá uma primeira aproximação para a teoria quântica. Mas, podemos perguntar se será possível passar diretamente do Lagrangeano à teoria quântica evitando passar pelo Hamiltoniano. Para algumas situações simples se pode fazer isso. Por exemplo para alguns campos simples usados em física o Lagrangeano é quadrático nas velocidades, sendo semelhantes àqueles que se têm na dinâmica não relativística de partículas. Para Lagrangeanos quadráticos nas velocidades, têm-se usado alguns métodos para passar diretamente do Lagrangeano à teoria quântica. Esta limitação de que os Lagrangeanos sejam quadráticos nas velocidades é bastante restritiva. Portanto, queremos evitar esta limitação e trabalhar com um Lagrangeano que possa ser uma função completamente geral das velocidades. Deste modo, conseguimos um formalismo geral o qual pode ser aplicável a qualquer caso. Assim, nós seguiremos o seguinte procedimento: começamos com uma ação integral, daí obtemos o Lagrangeano e logo construímos o Hamiltoniano, e daqui passamos à teoria quântica. Este caminho será discutido nas seguintes seções.

Na próxima seção fazemos uma revisão dos parênteses de Poisson e suas propriedades. Revisaremos as equações e constantes de movimento e o Teorema de Poisson [22, 23]. Usaremos estes conceitos para construir a estrutura Hamiltoniana deste formalismo, e a seguir desenvolveremos em detalhe o formalismo Hamiltoniano. Finalmente, na última seção, apresentaremos alguns exemplos que permitiram ilustrar o procedimento seguido no método Hamiltoniano.

2.2 Conceitos fundamentais

2.2.1 Parênteses de Poisson (P.B). Propriedades

Seja $F(p, q, t)$ um observável com $p = p(t)$ e $q = q(t)$, então sua derivada temporal total está expressa como

$$\frac{dF(p, q, t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (2.1)$$

onde

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} \quad \dot{p}_i = \frac{dp_i}{dt}.$$

Aqui enfatizamos que F depende tanto explícita quanto implicitamente do tempo t .

Mas sabemos que as equações de Hamilton são expressas como

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Substituindo estas equações em (2.1), temos que

$$\frac{dF(p, q, t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (2.2)$$

Definimos então os *Parênteses de Poisson*, como

$$\{F, G\} \equiv \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (2.3)$$

e com isto a equação (2.2) terá a seguinte forma

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (2.4)$$

A partir de sua definição os parênteses de Poisson satisfazem as seguintes propriedades:

1. $\{F, G\} = -\{G, F\}$
2. $\{F, \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2\} = \lambda_1 \{F, G_1\} + \lambda_2 \{F, G_2\} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2.$
3. $\{\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2, G\} = \lambda_1 \{F_1, G\} + \lambda_2 \{F_2, G\} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2.$
4. $\{F, G_1 G_2\} = \{F, G_1\} G_2 + G_1 \{F, G_2\}$
5. $\{F_1 F_2, G\} = F_1 \{F_2, G\} + \{F_1, G\} F_2$
6. $\frac{\partial}{\partial t} \{F, G\} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial t}, G \right\} + \left\{ F, \frac{\partial G}{\partial t} \right\}$
7. $\{q_i, F\} = \frac{\partial F}{\partial p_i} \quad \{p_i, F\} = -\frac{\partial F}{\partial q_i}$
8. $\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0 \quad \text{Identidade de Jacobi.}$

Vamos agora definir o operador Liouvilliano para o Hamiltoniano H , o qual representaremos como \mathcal{L}_H , dado por

$$\mathcal{L}_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}. \quad (2.5)$$

Usando (2.5) em (2.3) podemos expressar os parênteses de Poisson em termos de \mathcal{L}_H como

$$\{F, H\} = \mathcal{L}_H F, \quad (2.6)$$

onde

$$\mathcal{L}_H F = \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Agora substituindo (2.6) em (2.4), temos que

$$\frac{dF}{dt} = \mathcal{L}_H F + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (2.7)$$

Com a definição dada em (2.5) e com a propriedade 7 dos parênteses de Poisson, podemos expressar as equações canônicas de Hamilton como

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q_i, H\} = \mathcal{L}_H q_i, \quad (2.8)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \{p_i, H\} = \mathcal{L}_H p_i. \quad (2.9)$$

2.2.2 As equações e as constantes de movimento

Se F é uma função das variáveis dinâmicas e permanece constante durante o movimento do sistema, então F deve satisfazer a seguinte condição

$$\frac{dF}{dt} = 0, \quad (2.10)$$

que pode também ser escrita, segundo (2.4), como

$$\{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (2.11)$$

Todas aquelas funções F que obedecem a eq.(2.11) são chamadas *Constantes de Movimento* ou integrais de movimento. Assim podemos dizer que os parênteses de Poisson do Hamiltoniano H com qualquer constante de movimento deve ser nulo, exceto a derivada parcial temporal explícita da função constante de movimento.

Temos assim uma prova geral para procurar e identificar as constantes de movimento de um sistema. Se a constante de movimento não é explicitamente dependente do tempo então

$$\{H, F\} = 0, \quad (2.12)$$

ou seja, os parênteses de Poisson da constante de movimento com o Hamiltoniano deve ser zero.

As relações entre as acelerações, velocidades e coordenadas são chamadas as *Equações de Movimento*. Estas equações são de segundo ordem para as coordenadas $q(t)$ e sua integração permite, em princípio, a determinação destas funções e das trajetórias do sistema.

Se duas constantes de movimento são conhecidas, a identidade de Jacobi permite obter outras constantes. Relacionado com isto, mencionamos o seguinte teorema:

Teorema de Poisson

Se f e g são duas constantes de movimento, os parênteses de Poisson são também uma constante de movimento, pois se

$$\frac{df}{dt} = 0 \quad \frac{dg}{dt} = 0 \implies \frac{d\{f, g\}}{dt} = 0,$$

e segundo (2.10)

$$\{f, g\} = \text{constante de movimento}$$

2.3 O formalismo Hamiltoniano

Começamos nosso formalismo com a ação integral, representada por I

$$I = \int L dt, \quad (2.13)$$

onde L é o Lagrangeano. Temos que considerar como passar do Lagrangeano ao Hamiltoniano, com o qual iremos quantizar o sistema físico. Obter o Hamiltoniano é o primeiro passo para uma teoria quântica ou pelo menos nos sugere uma primeira aproximação.

Tomaremos um Lagrangeano L que será uma função geral das coordenadas e velocidades. Nossa sequência de trabalho será partir de um Lagrangeano com sua ação integral, passar para um Hamiltoniano e deste para a teoria quântica.

A idéia fundamental na quantização de um sistema corresponde à seguinte substituição

$$\{\text{Parênteses de Poisson}\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [\text{Comutador}].$$

Entretanto, tal substituição só pode ser feita se *não* houver *vínculos*. Quando *existem* vínculos isto não é possível.

Dáí que o objetivo principal da quantização de sistemas vinculados é procurar novos parênteses de Poisson generalizados com os quais possamos quantizar o sistema.

Começaremos considerando uma teoria dinâmica envolvendo somente um número finito de graus de liberdade. A partir deste número finito podemos passar a um número infinito de graus de liberdade, necessários para uma teoria de campos.

2.3.1 Os vínculos e as equações de movimento

Assim, com um número finito de graus de liberdade, temos coordenadas dinâmicas que indicaremos por

$$q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

onde n é o número de graus de liberdade. Também temos as velocidades $\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i$.

Nós tomamos o Lagrangeano como uma função das coordenadas e as velocidades, assim

$$L = L(q, \dot{q}_i),$$

e não consideraremos a possibilidade de que o Lagrangeano L tenha uma dependência explícita do tempo t , além da dependência temporal implicada por $q_i(t)$ e $\dot{q}_i(t)$; pois consideraremos que não existem forças externas que atuem sobre o sistema.

Desenvolveremos esta dinâmica Lagrangeana e passaremos à dinâmica Hamiltoniana seguindo as idéias aprendidas da dinâmica com coordenadas generalizadas. As equações de movimento de Lagrange, as quais provêm da variação da ação integral, podem ser expressas como

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0. \quad (2.14)$$

Para passar ao formalismo Hamiltoniano, nós introduzimos os momentos p_i , definidos por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.15)$$

Aqui devemos considerar os seguintes casos:

i) Matriz Hessiana não singular

$$|H_{ki}| = \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i} \right| \neq 0.$$

Então podemos expressar as velocidades \dot{q}_i em função de q 's e p 's. Daí poderemos passar do formalismo Lagrangeano para o formalismo Hamiltoniano.

ii) Matriz Hessiana singular

$$|H_{ki}| = 0.$$

Nesse caso não podemos expressar as velocidades \dot{q}_i em função dos q 's e p 's. Portanto, a passagem entre os dois formalismos não será possível.

O primeiro caso pode ser encontrado em [22, 23]. Nós só trabalharemos com o segundo caso [10, 12], no qual existem certas relações conectando o momento e as coordenadas do tipo $\phi(p, q) = 0$, que segue de (2.15) assim

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = f(q, p) \implies p_i = f(q, p)$$

daí

$$\phi = p_i - f(q, p) = 0 \implies \phi(q, p) = 0, \quad (2.16)$$

podendo haver várias relações independentes deste tipo, cada uma delas designadas por um índice $m = 1, 2, \dots, M$. Assim temos

$$\phi_m(q, p) = 0, \quad (2.17)$$

as relações expressas em (2.17) são definidas como *Vínculos Primários* da teoria. Tais vínculos surgem somente da definição (2.15) dos momentos p_i .

Vamos agora considerar a expressão

$$p_i \dot{q}_i - L,$$

fazendo variações nas variáveis q e \dot{q}

$$\delta(p_i \dot{q}_i - L) = (\delta p_i) \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i,$$

mas devido a (2.15) resulta

$$\delta(p_i \dot{q}_i - L) = \dot{q}_i \delta p_i - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \delta q_i. \quad (2.18)$$

De (2.18) notamos que a quantidade $\delta(p_i \dot{q}_i - L)$ envolve somente a variação dos q 's e dos p 's.

Isto significa que $\delta(p_i \dot{q}_i - L)$ pode ser expressa apenas em termos de q e p , independente das velocidades. Quando a expressamos deste modo, esta quantidade é chamada o Hamiltoniano H

$$H = p_i \dot{q}_i - L. \quad (2.19)$$

Porém o Hamiltoniano não está unicamente determinado, pois podemos acrescentar qualquer combinação linear dos ϕ_m , os quais são zero (eq.(2.17)).

Assim, podemos obter outro Hamiltoniano dado por

$$H^* = H + c_m \phi_m, \quad (2.20)$$

onde c_m são coeficientes que podem ser funções dos q 's e p 's. Este novo Hamiltoniano é tão apropriado como H para o estudo de nossa teoria; de tal forma que não é possível distinguir entre um e outro.

Com a definição do Hamiltoniano H , podemos escrever (2.18) como

$$\delta H = \dot{q}_i \delta p_i - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) \delta q_i, \quad (2.21)$$

válida para qualquer variação dos q 's e p 's sujeita à condição de preservar os vínculos (eq.(2.17)), ou seja, os q 's e p 's não podem ser variados independentemente pois eles estão restritos por (2.17). Porém, para variações dos q 's e p 's as quais preservam essas condições, (2.21) é válida.

Para mostrarmos isso fazemos

$$\delta(p_i \dot{q}_i - L) = (\delta p_i) \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i,$$

e de (2.16)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = f(q, p)$$

temos então que

$$\delta(p_i \dot{q}_i - L) = [p_i - f(q, p)] \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (2.22)$$

Porém sabemos que de (2.16)

$$\phi(q, p) = p_i - f(q, p) = 0$$

e substituindo em (2.22)

$$\delta(p_i \dot{q}_i - L) = \phi(q, p) \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i = \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i.$$

Daí temos que

$$\delta H = \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i$$

sob a condição $\phi_m(q, p) = 0$.

Do método geral do cálculo de variações [24] aplicados a uma equação variacional com vínculos deste tipo, nós obtemos que

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}, \quad (2.23)$$

e

$$-\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial H}{\partial q_i} + u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i},$$

ou substituindo (2.14) e (2.15) na última equação

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i}, \quad (2.24)$$

onde os u_m são coeficientes desconhecidos os quais em geral não são funções dos q 's e p 's, já que qualquer combinação linear dos vínculos ϕ usando estes coeficientes é zero, ou seja

$$u_m \phi_m(q, p) = 0.$$

Com isto nós temos as equações Hamiltonianas de movimento descrevendo como as variáveis q e p variam no tempo, porém estas equações envolvem coeficientes desconhecidos u_m .

Com a ajuda dos parênteses de Poisson, podemos reescrever as equações do movimento para alguma função $g(q, p)$, onde esta função depende apenas implicitamente do tempo. Assim nós temos que

$$\dot{g}(q, p) = \dot{g} = \frac{dg(q, p)}{dt} = \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt}$$

ou, em forma mais compacta

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial g}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (2.25)$$

Se substituirmos (2.23) e (2.24) em (2.25), temos que

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + u_m \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} \right),$$

e usando a definição dos parênteses de Poisson, esta última equação pode ser escrita como

$$\dot{g} = \{g, H\} + u_m \{g, \phi_m\}. \quad (2.26)$$

Podemos escrever estas equações ainda numa forma mais concisa se estendemos a definição dos parênteses de Poisson para incluir funções mais gerais.

2.3.2 Extensão da definição do P.B.

Até agora temos definido os parênteses de Poisson unicamente para quantidades, tais como f e g , as quais podem ser expressas em termos dos q 's e p 's.

Funções mais gerais que incluíam por exemplo uma variável velocidade, que não é expressa em termos dos q e p , não têm parênteses de Poisson com outra quantidade.

Vamos, então, estender o conceito dos parênteses de Poisson e supor que eles existem para quaisquer duas quantidades e que eles satisfazem todas as propriedades listadas na seção 1.2, contudo estes parênteses são indeterminados quando as quantidades não são funções dos q 's e p 's.

Neste caso os parênteses de Poisson para qualquer duas quantidades não estão definidos como na eq.(2.3), apesar de satisfazerem todas as propriedades 1-8 dadas na seção 1.2 como mencionamos anteriormente, ou seja, nesta extensão os parênteses de Poisson têm outra definição.

Suponhamos então, que possamos escrever (2.26) como

$$\dot{g} = \{g, H + u_m \phi_m\}, \quad (2.27)$$

onde u_m não são funções de q e p .

Os u_m 's são funções arbitrárias presentes num dos membros dos parênteses de Poisson, e portanto não podemos usar a definição dada em (2.3) para desenvolver os parênteses de Poisson em (2.27).

Porém podemos trabalhar estes novos parênteses de Poisson (2.27), usando as propriedades apresentadas na introdução.

Assim, usando a propriedade 2, temos que

$$\{g, H + u_m \phi_m\} = \{g, H\} + \{g, u_m \phi_m\}, \quad (2.28)$$

e da propriedade 4

$$\{g, u_m \phi_m\} = \{g, u_m\} \phi_m + u_m \{g, \phi_m\}, \quad (2.29)$$

onde o último parêntese em (2.29) está bem definido, pois g e ϕ_m são ambos funções dos q 's e p 's. Os parênteses $\{g, u_m\}$ não estão definidos, mas estão multiplicados por termos que desaparecem, os ϕ_m . Então o primeiro termo em (2.29) se anula e temos

$$\{g, u_m \phi_m\} = u_m \{g, \phi_m\} \quad (2.30)$$

substituindo (2.30) em (2.28), obtemos a seguinte expressão

$$\{g, H + u_m \phi_m\} = \{g, H\} + u_m \{g, \phi_m\} \quad (2.31)$$

provando desta maneira que (2.27) é o mesmo que (2.26). A partir deste momento, nenhuma das equações de vínculos (2.17) deve ser usada antes de desenvolver totalmente todos os parênteses de Poisson. Se fizermos isso obteríamos resultados incorretos. Assim estabeleceremos como regra que:

“Todos os parênteses de Poisson devem ser desenvolvidos totalmente antes de fazermos uso das equações de vínculos”.

Para lembrar esta regra em nosso formalismo escreveremos as equações de vínculos (2.17) como equações com uma sinal de igualdade diferente (\approx) do sinal usual de igualdade.

Assim (2.17) agora é escrito como

$$\phi_m(q, p) \approx 0, \quad (2.32)$$

sendo chamada de *equações fracas*, para a distinguirmos das equações usuais ou equações fortes.

Assim, podemos fazer uso de (2.32) somente depois de termos desenvolvido todos os parênteses de Poisson nos quais se está interessado. Uma definição mais exata de igualdade fraca pode ser encontrada em [10], pág. 47-56 e [12] pág. 64-66.

Sujeito a esta regra, os novos parênteses de Poisson (2.31) estarão completamente definidos e poderemos escrever nossas equações de movimento (2.27) ou (2.26) numa forma mais concisa

$$\dot{g} \approx \{g, H_T\}, \quad (2.33)$$

onde H_T é o Hamiltoniano Total, que comparando (2.27) e (2.33) fica expresso como

$$H_T = H + u_m \phi_m. \quad (2.34)$$

Então com (2.34), temos que nossas equações de movimento (2.33) podem também serem expressas como

$$\dot{g} \approx \{g, H\} + u_m \{g, \phi_m\}. \quad (2.35)$$

2.3.3 Consequências da extensão dos P.B.

Nesta parte vamos examinar as consequências das equações de movimento dadas em (2.35), que provêm do fato de haveremos estendido o conceito dos parênteses de Poisson (2.31) sujeitos à regra dada na seção anterior, tendo assim novos parênteses completamente definidos. Descobriremos as condições às quais estas equações de movimento nos conduzem e analisaremos elas para obter as características que descrevam totalmente estas equações de movimento.

Em primeiro lugar devemos estabelecer alguma condição de consistência sobre as quantidades $\phi_m(q, p)$. Isto é:

“A equação de vínculos (2.17) deve preservar-se através do tempo”.

Das equações (2.33) ou (2.35), se considerarmos g como um dos ϕ , teremos por consistência que

$$\dot{g} = \dot{\phi}_m = 0.$$

Da equação anterior, substituindo em (2.35)

$$\{\phi_m, H\} + u_{m'} \{\phi_m, \phi_{m'}\} \approx 0 \quad (2.36)$$

onde $m, m' = 1, 2, \dots, M$.

Na equação (2.36) temos um número determinado de condições de consistência, uma para cada valor de m e, examinamos estas equações para descobrir a onde elas nos conduzem. É possível que estas condições conduzam a uma inconsistência. Se esta inconsistência ocorre, significa que nosso Lagrangeano original é tal que as equações de movimento são inconsistentes. Podemos ilustrar isto usando um exemplo com um só grau de liberdade, se tomamos $L = q$ então a equação de movimento Lagrangeana (2.14) dá como resultado $1=0$, mostrando assim a inconsistência das equações de movimento. Deste modo, notamos que não podemos tomar um Lagrangeano completamente arbitrário, devemos impor a condição de que as equações de movimento não envolva alguma inconsistência.

Com estas restrições as equações (2.36) podem ser divididas em três tipos ou classes.

1. O primeiro tipo de equação se reduz a

$$0 \approx 0, \quad (2.37)$$

ou seja, é satisfeito com a ajuda dos vínculos primários.

2. O segundo tipo se reduz a uma equação independente dos u_m , envolvendo somente aos q 's e os p 's. Esta equação deve ser independente dos vínculos primários, de outro modo seria do primeiro tipo. Assim, esta equação é da forma

$$\chi(q, p) \approx 0. \quad (2.38)$$

3. Finalmente uma equação em (2.36) pode não reduzir-se a nenhuma das mencionadas anteriormente e nesse caso se impõe condições sobre os u_m .

Cada equação do segundo tipo nos permite obter outro vínculo sobre as variáveis Hamiltonianas q e p . Estes novos vínculos são chamados vínculos secundários e se diferenciam dos vínculos primários já que estes últimos são consequência meramente da definição dos momentos (2.15), enquanto os vínculos secundários vêm do uso das equações de movimento.

Se temos um vínculo secundário na teoria, então devemos estabelecer outra condição de consistência. Então temos $\dot{\chi}$, segundo a equação de movimento (2.35) exigindo que

$$\dot{g} = \dot{\chi} \approx 0$$

e daí conseguimos outra equação

$$\{\chi, H\} + u_m \{\chi, \phi_m\} \approx 0. \quad (2.39)$$

Esta equação tem de ser considerada do mesmo modo como foi tratada a equação (2.36), devendo-se fazer a mesma análise. Podendo-se ter qualquera dos três casos acima. Caso seja uma equação do segundo tipo, novamente temos que dar um passo a mais pois teremos vínculos secundários adicionais. Repetindo o processo até que esgotemos todas as condições de consistência o resultado final será ficarmos com um número determinado de vínculos secundários do tipo (2.38) junto com um número de condições sobre os coeficientes u_m do tipo (2.36).

Os vínculos secundários serão, para muitos casos, considerados no mesmo nível ou condição que os vínculos primários, sendo assim conveniente usar a seguinte notação para os vínculos secundários

$$\phi_k \approx 0$$

onde $k = M + 1, M + 2, \dots, M + K$, sendo K o número total de vínculos secundários. Estes devem ser escritos como equações fracas do mesmo modo que os vínculos primários, não devendo ser usados antes de desenvolver todos os parênteses de Poisson. Todos os vínculos (primários e secundários) podem ser escritos como

$$\phi_j \approx 0, \quad (2.40)$$

onde $j = 1, 2, \dots, M + K = J$.

Analisaremos agora as equações do terceiro tipo que ainda permanecem, verificando quais são as condições que eles impõem sobre os coeficientes u_m . Estas equações são

$$\{\phi_j, H\} + u_m \{\phi_j, \phi_m\} \approx 0, \quad (2.41)$$

onde $m = 1, 2, \dots, M$ e $j = 1, 2, \dots, J$, e implicam condições sobre os coeficientes u_m que não se reduzem a equações de vínculos.

Estas equações serão analisadas a partir da suposição de que os u são desconhecidos e que temos em (2.41) um número determinado de equações lineares não-homogêneas, com coeficientes que são funções dos q e p .

Procuraremos uma solução para estas equações, que nos permita obter os coeficientes u_m como funções de q e p

$$u_m = U_m(q, p). \quad (2.42)$$

Deve existir pelo menos uma solução da forma (2.42), pois do contrário significaria que as equações Lagrangeanas de movimento são inconsistentes, e nós estamos excluindo este caso. Esta solução não deve ser única, já que se possuímos uma solução particular podemos somar a esta qualquer outra solução $V_m(q, p)$ das equações homogêneas associadas à equação (2.41)

$$V_m(q, p)\{\phi_j, \phi_m\} \approx 0, \quad (2.43)$$

e que nós dará outra solução das equações não-homogêneas (2.41), que é expressa como

$$u_m = U_m + V_m. \quad (2.44)$$

Até aqui, temos uma solução V_m para as equações homogêneas associadas com (2.41), onde m identifica cada elemento da solução independente V . Porém pode existir não só um conjunto solução independente da equação (2.43) mas vários, que iremos representar por $V_{am}(q, p)$, onde $a = 1, 2, \dots, A$, indica o número de conjunto soluções independentes. Assim a forma mais geral de (2.43) é

$$V_{am}(q, p)\{\phi_j, \phi_m\} = 0. \quad (2.45)$$

A solução mais geral de (2.41) é obtida considerando todas as soluções independentes de (2.45), daí tomamos a combinação linear dos V_{am} e temos

$$V'_m = v_a V_{am}, \quad (2.46)$$

que também é solução de (2.45).

Então os coeficientes u_m são expressos, em geral, como

$$u_m = U_m + V'_m,$$

e substituindo (2.46) nesta última equação a solução geral u_m da equação (2.41) é

$$u_m = U_m + v_a V_{am}, \quad (2.47)$$

onde os coeficientes v_a são arbitrários.

Nesse momento, passamos a substituir estas expressões para u_m no Hamiltoniano total H_T (2.34) da teoria

$$\begin{aligned} H_T &= H + u_m \phi_m = H + (U_m + v_a V_{am}) \phi_m \\ H_T &= H + U_m \phi_m + v_a V_{am} \phi_m. \end{aligned}$$

Podemos escrever esta última equação como

$$H_T = H' + v_a \phi_a, \quad (2.48)$$

onde

$$H' = H + U_m \phi_m \quad (2.49)$$

e

$$\phi_a = V_{am} \phi_m, \quad (2.50)$$

ϕ_a são novos vínculos resultantes de combinações lineares dos antigos.

Como resultado desta análise satisfizemos todas as condições de consistência da teoria mas ainda temos coeficientes arbitrários v_a , cujo número é menor ou igual ao número de coeficientes u_m ($A \leq M$).

Agora os coeficientes u_m não são arbitrários pois têm que satisfazer as condições de consistência, enquanto que os v_a são arbitrários. Podemos então considerar aos v_a funções arbitrárias do tempo t e ainda assim, satisfazer todos os requerimentos de nossa teoria dinâmica. Isto nos proporciona uma diferença com o formalismo Hamiltoniano usual, pois neste caso temos funções arbitrárias do tempo presentes na solução geral das equações de movimento (2.33), com condições iniciais dadas.

Estas funções arbitrárias do tempo significam que estamos usando um aparato matemático com características arbitrárias. Por exemplo, um sistema de coordenadas que podemos escolher de maneira arbitrária ou o gauge na teoria eletrodinâmica.

Como resultado desta arbitrariedade na estrutura matemática, as variáveis dinâmicas em tempos posteriores não estão completamente definidas pelas variáveis dinâmicas iniciais; e isso se mostra através das funções arbitrárias que aparecem na solução geral (eq.(2.33)).

2.3.4 Vínculos de primeira e segunda classe

Precisamos agora definir alguma terminologia que nos permita identificar as relações entre as quantidades presentes no formalismo, e por meio da qual possamos

classificar os vínculos e obter propriedades relacionados com eles. Deste modo poderemos analisar mais ordenadamente os sistemas físicos vinculados e obter um estudo completo dos vínculos presentes na teoria. Definiremos em geral funções de primeira e segunda classe, chamando a atenção ao caso quando estas funções são vínculos seguindo-se daí a denominação de vínculos de primeira e segunda classe para estas funções

Funções de primeira classe

Definimos qualquer variável dinâmica R , que é uma função de q e p , como de primeira classe se R tem parênteses de Poisson fracamente nulos com todos os vínculos ϕ_j ; ou seja

$$\{R, \phi_j\} \approx 0, \quad (2.51)$$

onde $j = 1, 2, \dots, J$. A função R pode ser um vínculo $R(q, p) = \phi(q, p)$, de modo que

$$\{\phi_l, \phi_j\} \approx 0, \quad (2.52)$$

sendo que neste caso temos um *Vínculo de Primeira Classe* ϕ_l . Mas considerando as equações de movimento (2.35), as condições de consistência (2.41) e a equação (2.52) se tem

$$\{\phi_l, H\} \approx 0 \quad (2.53)$$

onde $l = 1, 2, \dots, L$, L sendo o número de vínculos de primeira classe, $L \leq J$.

Comparando esta última relação com (2.51), R pode também ser em particular o Hamiltoniano H , ou seja

$$R(q, p) = H(q, p)$$

Concluimos destes resultados (2.51)-(2.53) que:

Os vínculos primeira classe tem parênteses de Poisson nulo com ele mesmo, com os outros vínculos e com o Hamiltoniano.

Funções de segunda classe

Se a função R não cumpre a propriedade mencionada anteriormante, então R é uma função de segunda classe e, em particular, se R é um vínculo, temos *Vínculos de Segunda Classe*.

Se R é de primeira classe, então $\{R, \phi_j\}$ é fortemente igual a alguma combinação linear dos ϕ pois os vínculos ϕ são, por definição, as únicas quantidades independentes as quais são fracamente zero. Assim nós temos as equações fortes

$$\{R, \phi_j\} = c_{jj'}\phi_{j'}, \quad (2.54)$$

onde $j, j' = 1, 2, \dots, J$, e $\phi_j \approx 0$.

Mostramos a seguir uma propriedade importante das funções de primeira classe expresso pelo seguinte teorema:

“O parêntese de Poisson de duas quantidades de primeira classe é também de primeira classe”.

Prova: Sejam R e S de primeira classe, então de (2.54)

$$\{S, \phi_j\} = d_{jj'}\phi_{j'}. \quad (2.55)$$

Vamos agora calcular $\{\{R, S\}, \phi_j\}$, usando a identidade de Jacobi

$$\begin{aligned} \{\{R, S\}, \phi_j\} &= \{\{R, \phi_j\}, S\} - \{\{S, \phi_j\}, R\} = \{c_{jj'}\phi_{j'}, S\} - \{d_{jj'}\phi_{j'}, R\} \\ &= c_{jj'}\{\phi_{j'}, S\} + \{c_{jj'}, S\}\phi_{j'} - d_{jj'}\{\phi_{j'}, R\} - \{d_{jj'}, R\}\phi_{j'}, \end{aligned}$$

como

$$\{\phi_{j'}, S\} \approx 0, \quad \{\phi_{j'}, R\} \approx 0 \quad e \quad \phi_{j'} \approx 0$$

temos que

$$\{\{R, S\}, \phi_j\} \approx 0$$

com isto provamos que o parêntese de Poisson $\{R, S\}$ é de primeira classe.

Então podemos dividir os vínculos em primeira e segunda classe, cada classe pode ainda dividir-se em primários ou secundários. Notamos também que H' (2.49) e ϕ_a (2.50) são de primeira classe, formando os parênteses de Poisson de ϕ_a com ϕ_j , temos

$$\{\phi_a, \phi_j\} = \{V_{am}\phi_m, \phi_j\} = V_{am}\{\phi_m, \phi_j\} + \{V_{am}, \phi_j\}\phi_m,$$

mas $\phi_m \approx 0$, então

$$\{\phi_a, \phi_j\} \approx V_{am}\{\phi_m, \phi_j\} \approx 0$$

ao usarmos a equação (2.45). Então, segundo (2.52) ϕ_a é um vínculo de primeira classe.

Similarmente com H' , de (2.49)

$$\begin{aligned}\{H', \phi_j\} &= \{H, \phi_j\} + \{U_m \phi_m, \phi_j\} \\ &= \{H, \phi_j\} + U_m \{\phi_m, \phi_j\} + \{U_m, \phi_j\} \phi_m,\end{aligned}$$

mas com $\phi_m \approx 0$ temos que

$$\{H', \phi_j\} = \{H, \phi_j\} + U_m \{\phi_m, \phi_j\},$$

porém como U_m é solução de (2.41) resulta

$$\{H', \phi_j\} \approx 0$$

e portanto, segundo (2.51), H' é uma função de primeira classe.

Assim (2.48) nos dá o Hamiltoniano total H_T em termos de um Hamiltoniano de primeira classe H' junto com vínculos de primeira classe ϕ_a .

Qualquer combinação linear dos vínculos ϕ_a é também outro vínculo e, se tomarmos uma combinação linear de vínculos primários obtemos outro vínculo primário, de modo tal que ϕ_a são todos os vínculos primários de primeira classe.

A situação final é que temos o Hamiltoniano total H_T expresso como a soma de um Hamiltoniano de primeira classe H' mais uma combinação linear de vínculos primários de primeira classe.

O número de funções arbitrárias do tempo v_a , que estão na solução geral das equações de movimento é igual ao número de valores que o índice a pode tomar. Isto é igual ao número de vínculos de primeira classe primários independentes ϕ_a , pois todos os ϕ_a estão incluídos na soma de (2.48).

2.3.5 Transformações de Gauge

Para conseguir uma compreensão física da situação anterior, começamos com variáveis iniciais dadas e conseguimos uma solução das equações de movimento com funções arbitrárias. As variáveis iniciais das quais precisamos são q e p . Não precisamos dar valores iniciais aos coeficientes v_a . Estas condições iniciais descrevem o chamado estado físico inicial de um sistema.

O estado físico está determinado somente pelos q 's e os p 's e não pelos coeficientes v . Agora o estado inicial deve determinar o estado em tempos posteriores, mas os q 's e os p 's em tempos posteriores não estão unicamente determinados pelo estado inicial, devido ao fato de termos funções arbitrárias v presentes. Isto significa que o estado não determina um único conjunto de q e p a pesar de que o conjunto q e p determina um único estado. Deve haver várias escolhas dos q e p as quais correspondam ao mesmo estado.

Assim nós temos o problema de procurar todos os conjuntos de q e p que correspondam a um estado físico particular.

Todos estes valores para os q e os p num certo instante de tempo t , os quais podem evoluir de um mesmo estado inicial, devem corresponder ao mesmo estado físico naquele instante de tempo.

Seguindo, tomaremos valores particulares iniciais para os q 's e os p 's no tempo $t = 0$ e analisaremos como serão os q 's e os p 's depois de um pequeno intervalo δt . Para uma variável dinâmica geral $g(q, p)$ com valor inicial g_0 , seu valor no tempo δt é usando a expansão de Taylor

$$g(\delta t) = g_0 + \dot{g}\delta t,$$

mas de (2.33), temos

$$g(\delta t) = g_0 + \{g, H_T\}\delta t$$

e com (2.48) e aplicando a definição dada em (2.35), temos que

$$g(\delta t) = g_0 + \delta t[\{g, H'\} + v_a\{g, \phi_a\}]. \quad (2.56)$$

Confirmamos, então, que as funções arbitrárias do tempo v aparecem na solução geral das equações de movimento (2.33), ou seja, a solução geral g têm funções arbitrárias v .

Suponhamos que tomamos diferentes valores v' para estes coeficientes, o que resultará num $g(\delta t)$ diferente, ou seja

$$g'(\delta t) = g_0 + \delta t[\{g, H'\} + v'_a\{g, \phi_a\}], \quad (2.57)$$

onde lembramos que v é diferente de v' .

Subtraindo estas duas últimas equações, temos

$$\Delta g(\delta t) = g - g' = \delta t(v_a - v'_a)\{g, \phi_a\},$$

que pode ser reescrita como

$$\Delta g(\delta t) = \varepsilon_a\{g, \phi_a\}, \quad (2.58)$$

onde

$$\varepsilon_a = \delta t(v_a - v'_a)$$

é um número arbitrário infinitesimal, devido ao coeficiente δt e portanto Δg também é arbitrário.

A transformação (2.58), é chamada transformação infinitesimal de contato ou *Transformação de Gauge* porque elas não mudam o estado físico do sistema.

Mudando todas nossas variáveis Hamiltonianas (q, p) de acordo com a regra (2.58) resulta, que as novas variáveis Hamiltonianas devem descrever o mesmo estado. Esta mudança nas variáveis Hamiltonianas consiste em aplicar uma transformação infinitesimal de contato ou de gauge com uma função geratriz $\epsilon_a \phi_a$. Assim, concluímos que os ϕ_a , vínculos de primeira classe primários da teoria, são geradores de transformações infinitesimais de contato (2.58) e produzem mudanças nos q 's e os p 's que não afetam o estado físico.

Desse modo, temos que o estado de um sistema está determinado unicamente pelos q e p e não pelos v_a , porém os q e p estão expressos em termos das funções arbitrárias do tempo v_a as quais fazem com que os q e p tenham diferentes valores para um mesmo tempo t . Portanto, os q e p em tempos posteriores não estão unicamente determinadas pelo estado inicial, pois temos funções arbitrárias v_a presentes nelas. Embora devendo existir várias escolhas de q e p que correspondam ao mesmo estado físico, o estado físico não muda, o que significa que os observáveis do sistema (energia, etc.) são funções de q e p , iguais para cada conjunto de valores de q e p .

Em geral, as transformações (2.58) não são as únicas que não mudam o estado físico. Com efeito outro resultado que se obtém, quando aplicamos transformações infinitesimais da forma (2.58) sucessivamente, [5] pag 21-22, é

$$\{\phi_a, \phi_{a'}\} \quad (2.59)$$

que podemos usar como uma função geratriz ou gerador de uma transformação de gauge. Como sabemos que os ϕ_a são de primeira classe, então seus parênteses de Poisson com os outros vínculos da teoria são fortemente iguais a alguma combinação linear dos ϕ , esta combinação linear deve ser de primeira classe.

Um outro resultado é que o parêntese de Poisson $\{H', \phi_a\}$ a partir de qualquer vínculo primário de primeira classe com o Hamiltoniano de primeira classe H' é também um gerador de uma transformação de gauge, pois com o teorema mencionado anteriormente nesta seção, estes parênteses também são uma função linear dos vínculos de primeira classe.

Uma demonstração mais formal destes resultados pode ser encontrada em [25] pág. 17. Assim vemos que as transformações de gauge (2.58) e as obtidas anteriormente (2.59) que não produzem mudanças no estado físico, são transformações para os quais o gerador ou função geratriz é um vínculo de primeira classe.

A única maneira de generalizar estas transformações em relação a (2.58), é considerando que os geradores de gauge agora possam também incluir os vínculos secundários de primeira classe como geradores destas transformações de gauge. Isto

é fornecido por ϕ_a e H' que são de primeira classe e os parênteses $\{\phi_a, \phi_{a'}\}$ e $\{\phi_{a'}, H'\}$ que também serão de primeira classe e que podem ser geradores destas transformações de gauge; o que significa que estes parênteses serão combinações lineares dos vínculos de primeira classe. Contudo não há nenhuma razão para esperar que esta combinação linear seja unicamente um vínculo primário, podendo também ser vínculo secundário. Na prática existem vínculos secundários de primeira classe que podem ser expressos desse modo, e ser considerados geradores destas transformações [5, 25].

Resumindo, podemos dizer que: *os vínculos de primeira classe são geradores das transformações de gauge.*

Então se examinarmos o Hamiltoniano total H_T

$$H_T = H' + v_a \phi_a$$

notamos que o último termo contém os geradores da transformação de gauge. Podendo incluir os vínculos secundários de primeira classe como geradores de uma transformação de gauge que conduzem a uma mudança nos q 's e p 's, sem mudar o estado físico.

Concluindo-se que aquelas transformações das variáveis dinâmicas que não mudam os estados físicos são transformações infinitesimais de contato ou de gauge cujo gerador ou função geratriz é um vínculo primário de primeira classe primário ou possivelmente um vínculo secundário de primeira classe.

Esta afirmação dá lugar à Conjectura de Dirac, que estudaremos na próxima seção.

2.3.6 A conjectura de Dirac

Seguindo a análise anterior, a conjectura de Dirac estabelece que:

“Todos os vínculos de primeira classe secundários devem ser incluídos como geradores das transformações de gauge as quais não mudam o estado físico”.

Dirac não encontrou exemplo algum para o qual existissem vínculos secundários de primeira classe que gerem alguma mudança no estado físico.

Continuamos com a idéia de que há certas mudanças nos p e q que não correspondem a mudanças de estado; estas transformações têm como geradores vínculos primários e secundários de primeira classe (conjectura de Dirac). Isso sugere que deveríamos generalizar as equações de movimento e permitir a variação da variável dinâmica g com o tempo contendo não só uma variação dada por (2.33) mas também qualquer variação que não corresponda a uma mudança do estado. Portanto, de-

veríamos considerar uma equação de movimento mais geral

$$\dot{g} = \{g, H_E\} \quad (2.60)$$

onde temos um Hamiltoniano estendido H_E , que contém o Hamiltoniano H_T além de todos aqueles geradores acompanhado de coeficientes arbitrários, que não mudam o estado do sistema.

Daí temos o Hamiltoniano estendido H_E definido como

$$H_E = H_T + v'_{\alpha'} \phi_{\alpha'} \quad (2.61)$$

aqueles geradores $\phi_{\alpha'}$, que não estão incluídos em H_T , são os vínculos secundários de primeira classe.

A presença destes termos adicionais no Hamiltoniano provocará mudanças adicionais em g como se pode notar ao substituir (2.61) em (2.60), porém estas mudanças não correspondem a alguma mudança de estado e, conseqüentemente eles serão incluídos ainda que nós não tenhamos chegado explicitamente a estas mudanças extras de g por um trabalho direto com o Lagrangeano, assim (2.61) é a teoria Hamiltoniana geral.

A equação (2.61) pode também ser expresso como

$$H_E = H' + v_{\alpha} \phi_{\alpha} + v'_{\alpha'} \phi_{\alpha'}, \quad (2.62)$$

onde $v_{\alpha} \phi_{\alpha} + v'_{\alpha'} \phi_{\alpha'}$ são os geradores das transformações de gauge. Isto inclui os vínculos primários e secundários de primeira classe.

Devemos enfatizar aqui que, estritamente falando, a necessidade de usar o Hamiltoniano Estendido não provem da teoria Lagrangeana. É H_T que gera as equações Lagrangeanas de movimento originais já que H_E contém mais funções arbitrárias do tempo que H_T . A introdução de H_E é uma nova característica do esquema Hamiltoniano, que realmente estende o formalismo Lagrangeano fazendo manifestos todos os graus de liberdade de gauge.

Podemos expressar (2.62) numa forma mais compacta

$$H_E = H' + u_b \gamma_b, \quad (2.63)$$

onde γ_b são os vínculos de primeira classe primários e secundários.

2.3.7 Os parênteses de Dirac

Passaremos a considerar o problema da quantização da teoria Hamiltoniana. Se considerarmos o caso no qual todos os vínculos são de primeira classe e não existem

vínculos de segunda classe; a quantização da teoria torna-se fácil. Neste caso nós substituímos nossas coordenadas e momentos, q e p , por seus correspondentes operadores, satisfazendo as relações de comutação as quais correspondem aos parênteses de Poisson da teoria clássica. Então podemos estabelecer a Equação de Schrödinger e adicionalmente impor certas condições suplementares sobre a função de onda e, deste modo, construir toda a teoria quântica para este caso. Cada vínculo de primeira classe conduz a uma condição suplementar sobre a função de onda. Outra maneira de quantizar uma teoria que só tem vínculos de primeira classe é impondo certas condições que fixam o gauge (fixação de Gauge) quebrando as simetrias de gauge que provêm da presença dos vínculos de primeira classe. Deste modo levamos todos os vínculos de primeira classe a vínculos de segunda classe resultando numa teoria unicamente com vínculos de segunda classe, cujo procedimento quantização será discutida a seguir.

Vamos agora a considerar como quantizar uma teoria Hamiltoniana na qual somente há vínculos de segunda classe. Mas previamente daremos o conceito de condição suplementar, que é usado na quantização de sistemas com vínculos.

Ao estudar um sistema dinâmico particular, podemos impor equações sobre as coordenadas e velocidades adicionais às equações de movimento que vêm do Lagrangeano. Aquelas são chamadas condições suplementares [6], que devem ser introduzidos como equações fracas adicionais na teoria. As condições suplementares podem ser expressas como relações entre os q 's, p 's e os coeficientes ν , mas eles podem algumas vezes conduzir a equações unicamente entre q e p . Estas condições darão lugar a uma redução adicional no número de graus de liberdade de movimento, reduzindo o número de vínculos de primeira classe.

Tomando o seguinte exemplo: consideremos os vínculos de segunda classe

$$q_1 \approx 0 \quad p_1 \approx 0 \quad (2.64)$$

eles têm seus parênteses de Poisson diferente de zero, então nós perguntamos como podemos obter uma teoria quântica.

Nós não podemos impor (2.64) como condição suplementar sobre as funções de onda como fizemos com os vínculos de primeira classe. Se fizéssemos isso então

$$q_1\psi = 0 \quad p_1\psi = 0$$

e obteríamos uma contradição pois teríamos que

$$(q_1p_1 - p_1q_1)\psi = i\hbar\psi = 0,$$

pois fazendo a correspondência clássica temos $\{p_1, q_1\} = 0$. Porém esse resultado não é concordante com a teoria, porque p_1 e q_1 são de segunda classe e seu parêntese de Poisson é diferente de zero. Nesta situação devemos optar por outro caminho.

As variáveis q_1 e p_1 não são de interesse, elas estão restritas a serem nulas, de modo que o grau de liberdade "1" não é de importância física. Podemos excluir este grau de liberdade "1"; e trabalhar com os restantes. Isto significa ter uma definição diferente para os parênteses de Poisson.

Dessa forma, teríamos que trabalhar com a seguinte definição de parênteses de Poisson na teoria clássica

$$\{\xi, \eta\} = \frac{\partial \xi}{\partial q_n} \frac{\partial \eta}{\partial p_n} - \frac{\partial \xi}{\partial p_n} \frac{\partial \eta}{\partial q_n}, \quad (2.65)$$

onde $n = 2, 3, \dots, N$. Nesta equação estão todas as variáveis de interesse físico, com isto estaria resolvido o problema e poderíamos escolher q_1 e p_1 identicamente nulos.

Nenhuma contradição existe até aqui, e podemos passar à teoria quântica em termos unicamente dos graus de liberdade $n = 2, 3, \dots, N$.

Podemos generalizar esta idéia e tomar por exemplo

$$p_1 \approx 0, \quad q_1 \approx f(q_r, p_r),$$

onde $r = 2, 3, \dots, N$. Fazemos o mesmo como no caso anterior e obtemos as mesmas conclusões. Esta é a idéia que usamos para quantizar uma teoria que envolva vínculos de segunda classe. Daí concluímos que [5, 10, 25]:

A existência de vínculos de segunda classe significa que existem graus de liberdade que não têm conteúdo físico.

Nós devemos omitir aqueles graus de liberdade e estabelecer novos parênteses de Poisson referindo-se unicamente aos graus de liberdade de conteúdo físico. Portanto, em termos daqueles novos parênteses de Poisson podemos quantizar nossa teoria.

Retornamos à teoria clássica, na qual temos um número determinado de vínculos $\phi_j \approx 0$ alguns de primeira classe e outros de segunda classe. Porém, podemos substituir esses vínculos por combinações lineares independentes destes próprios vínculos, os quais se comportarão tão bem como os vínculos originais. Tentaremos obter combinações lineares de tal modo que possamos levar tantos vínculos de segunda classe quanto seja possível a vínculos de primeira classe, porém alguns permanecem como vínculos de segunda classe, os quais não podem ser convertidos a vínculos de primeira classe

Aqueles que permanecem como vínculos de segunda classe serão representados por

$$\chi_s, \quad s = 1, 2, \dots, S,$$

onde S é o número de vínculos de segunda classe tal que, nenhuma combinação linear deles é de primeira classe.

Ao escolher estes vínculos “sobreviventes” de segunda classe formamos todos os parênteses de Poisson de uns com os outros e estruturamos estes parênteses de Poisson como uma matriz representada por C , assim

$$C = (c_{ss'}) = \begin{pmatrix} 0 & \{\chi_1, \chi_2\} & \{\chi_1, \chi_3\} & \dots & \{\chi_1, \chi_S\} \\ \{\chi_2, \chi_1\} & 0 & \{\chi_2, \chi_3\} & \dots & \{\chi_2, \chi_S\} \\ \{\chi_3, \chi_1\} & \{\chi_3, \chi_2\} & 0 & \dots & \{\chi_3, \chi_S\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \{\chi_S, \chi_1\} & \{\chi_S, \chi_2\} & \{\chi_S, \chi_3\} & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.66)$$

Uma maneira mais compacta de representar a matriz C é expressando em termos de seus elementos

$$c_{ss'} = \{\chi_s, \chi_{s'}\} \quad s, s' = 1, 2, \dots, S.$$

sendo D o determinante desta matriz, ou seja

$$D = \det C.$$

A continuação mencionamos o seguinte teorema, teorema este de suma importância [5, 12]:

“O determinante D da matriz C não é nulo, nem mesma fracamente”.

Notamos que o número de vínculos de segunda classe χ_s que não podem ser trazidos a primeira classe deve ser par; pois a matriz C é antisimétrica como vemos em (2.66). Qualquer determinante de uma matriz antisimétrica com um número ímpar de linhas e colunas será nulo, porém segundo o Teorema mencionado anteriormente, D não se anula e concluímos que a matriz C deve ter um número par de linhas e colunas.

Como o determinante D não se anula, podemos obter a inversa ou recíproca da matriz C , que denotaremos na forma de componentes como $c^{ss'}$, então

$$c^{ss'} c_{s's''} = c^{ss'} \{\chi_{s'}, \chi_{s''}\} = \delta_{ss''}. \quad (2.67)$$

Assim $c^{ss'}$ é a inversa de $c_{ss'}$.

Nesse momento definimos o novo parêntese de Poisson, ao qual chamaremos *Parêntese de Dirac* e que será denotado por $\{, \}_D$, como:

“Qualquer duas quantidades ξ e η têm um parêntese de Dirac definido por

$$\{\xi, \eta\}_D = \{\xi, \eta\} - \{\xi, \chi_s\} c^{ss'} \{\chi_{s'}, \eta\}, \quad (2.68)$$

onde $\{\xi, \eta\}$ é o parêntese de Poisson usual”.

Podemos notar que este, o parêntese de Dirac definido em (2.68) satisfaz todas as propriedades dos parênteses de Poisson usuais:

- $\{\xi, \eta\}_D$ é antisimétrico entre ξ e η .
- $\{\xi, \eta\}_D$ é linear em ξ e η .
- Lei do produto

$$\{\xi_1 \xi_2, \eta\}_D = \xi_1 \{\xi_2, \eta\}_D + \{\xi_1, \eta\}_D \xi_2.$$

- Identidade de Jacobi

$$\{\{\xi, \eta\}_D, \zeta\}_D + \{\{\eta, \zeta\}_D, \xi\}_D + \{\{\zeta, \xi\}_D, \eta\}_D = 0.$$

Agora provaremos que as equações de movimento são válidas tanto para os parênteses de Dirac como para os parênteses de Poisson, de (2.33) e (2.68)

$$\{g, H_T\}_D = \{g, H_T\} - \{g, \chi_s\} c^{ss'} \{\chi_{s'}, H_T\}, \quad (2.69)$$

mas

$$\{\chi_{s'}, H_T\} \approx 0$$

pois H_T é de primeira classe (H' e $v_a \phi_a$ são de primeira classe), e também pelo uso das condições de consistência.

Substituindo esta relação em (2.69) temos que

$$\{g, H_T\}_D \approx \{g, H_T\}, \quad (2.70)$$

com (2.70) e (2.69) as equações de movimento em termos dos parênteses de Dirac são dadas por

$$\dot{g} \approx \{g, H_T\}_D, \quad (2.71)$$

provando assim que as equações de movimento são válidas e têm a mesma forma tanto para os parênteses de Dirac como para os de Poisson.

Contudo, se tomarmos qualquer função ξ de q e p e formarmos seu parênteses de Dirac com uns dos χ , por exemplo $\chi_{s''}$, temos que

$$\{\xi, \chi_{s''}\}_D = \{\xi, \chi_{s''}\} - \{\xi, \chi_s\} c^{ss'} \{\chi_{s'}, \chi_{s''}\},$$

mas usando (2.67) nesta última equação resulta

$$\begin{aligned} \{\xi, \chi_{s''}\}_D &= \{\xi, \chi_{s''}\} - \{\xi, \chi_s\} \delta_{ss''} \\ &= \{\xi, \chi_{s''}\} - \{\xi, \chi_{s''}\} = 0, \end{aligned}$$

e portanto

$$\{\xi, \chi_{s''}\}_D = 0. \quad (2.72)$$

Daí, concluímos que podemos colocar os χ_s iguais a zero antes de desenvolver os parênteses de Dirac, isto significa que podemos tomar os vínculos de segunda classe χ_s fortemente nulos sem precisar desenvolver previamente os parênteses de Dirac.

Isto pode ser expresso como

$$\chi_s = 0, \quad (2.73)$$

onde esta é uma equação fortemente nula diferente da equação fracamente nula dada em (2.32).

Até aqui nós modificamos nossa teoria clássica dando lugar aos parênteses de Dirac, proporcionando a base para passarmos à teoria quântica. Passamos à teoria quântica tomando as relações de comutação correspondentes às relações dos parênteses de Dirac e considerando as equações fortemente nulas (2.73) como equações entre operadores da teoria quântica.

As equações fracamente nulas, se ainda estão presentes, são todas vínculos de primeira classe e vêm a ser novamente condições suplementares sobre as funções de onda.

A situação é então reduzida ao caso prévio onde havia somente vínculos de primeira classe, obtendo novamente um método de quantizar nossa teoria Hamiltoniana clássica geral.

Notamos também que quando passamos à teoria quântica a distinção entre vínculos primários e secundários não tem importância, e não é fundamental. Isso depende muito do Lagrangeano original com o qual iniciamos a trabalhar.

Assim, uma vez que estamos no formalismo Hamiltoniano, podemos esquecer da distinção entre vínculos primários e secundários, porém a distinção entre vínculos de primeira e segunda classe é fundamental e muito importante.

O processo neste método consiste em converter tantos vínculos de segunda classe quanto for possível em vínculos de primeira classe e definir os parênteses de Dirac, os quais nos permitem tratar os vínculos de segunda classe que ainda permanecem como fortemente nulos.

Em conclusão: quando fazemos uso dos parênteses de Dirac para uma teoria Hamiltoniana na qual há vínculos de segunda classe, estes vínculos são fortemente nulos.

Finalmente, para entendermos melhor a dedução da definição dos parênteses de Dirac dada na equação (2.68) e a passagem do parêntese de Poisson ao comutador, apresentaremos uma motivação a mais.

Seja um certo operador hermitiano \hat{A} , os valores observáveis relativos a este operador são obtidos através da equação de auto-valores

$$\hat{A}\psi = a\psi,$$

onde \hat{A} e ψ , num caso geral, dependem do tempo. A evolução temporal de ψ é dada, como sabemos, pela equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \quad (2.74)$$

onde \hat{H} é o operador Hamiltoniano.

Com esta equação e com a equação de autovalores, podemos obter como o operador \hat{A} evolui com o tempo. Derivando temporalmente ambos os lados da equação de auto-valores, temos

$$\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\psi + \hat{A}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{da}{dt}\psi + a\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (2.75)$$

e substituindo (2.74) em (2.75) obtemos

$$\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\psi - \frac{i}{\hbar}\hat{A}\hat{H}\psi = \frac{da}{dt}\psi - \frac{i}{\hbar}a\hat{H}\psi \quad (2.76)$$

mas, novamente, usando a equação de auto-valores temos

$$a\hat{H}\psi = \hat{H}a\psi = \hat{H}\hat{A}\psi \quad (2.77)$$

que, substituída em (2.76) resulta

$$\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\psi + \frac{i}{\hbar}(\hat{H}\hat{A} - \hat{A}\hat{H})\psi = \frac{da}{dt}\psi$$

e daí

$$\left(\frac{\partial\hat{A}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}]\right)\psi = \frac{da}{dt}\psi. \quad (2.78)$$

Como $\frac{d\hat{A}}{dt}$ deve ser decorrente da atuação do operador $\frac{d\hat{A}}{dt}$ sobre ψ podemos concluir que a evolução temporal do operador \hat{A} é dada, na descrição de Heisenberg, como

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}. \quad (2.79)$$

Seja agora a quantidade clássica $A(q, p)$ correspondente ao operador quântico \hat{A} . Sua evolução temporal pode ser escrita com ajuda das equações canônicas de Hamilton como

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial A}{\partial t}, \end{aligned}$$

e usando a definição de parênteses de Poisson (2.3), obtemos

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (2.80)$$

Comparando-se (2.80) e (2.79) fica clara a correspondência

$$\{\text{Parênteses de Poisson}\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar}[\text{Comutador}] \quad (2.81)$$

exceto, como é usual, de complicações que possam vir das ambiguidades de ordenamento dos operadores. Todo o desenvolvimento anterior foi feito sem considerar vínculos.

Vamos supor agora que existam M vínculos ϕ_m ($m = 1, 2, \dots, M$), sendo eles todos os vínculos do sistema físico. Neste caso as equações de Hamilton são, de (2.23) e (2.24),

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \quad (2.82)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} \quad (2.83)$$

onde λ_m são os multiplicadores de Lagrange.

Assim a evolução temporal de uma quantidade $A(q, p)$, usando (2.82) e (2.83), é dada por

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial q_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Daí, com a definição dos parênteses de Poisson, esta última equação torna-se

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \lambda_m \{A, \phi_m\} + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (2.84)$$

Como a relação acima possui validade geral, vamos substituir A por qualquer um dos vínculos da teoria e, usando a condição de consistência de que os vínculos não evoluem no tempo, temos que (2.84) fica expresso como

$$\frac{d\phi_b}{dt} = \{\phi_b, H\} + \lambda_m \{\phi_b, \phi_m\} = 0. \quad (2.85)$$

Agora introduzimos a matriz C , cujos elementos c_{ab} são parênteses de Poisson dos vínculos, isto é

$$c_{mb} = \{\phi_m, \phi_b\} = -c_{bm},$$

e substituindo esta última equação em (2.85) temos

$$\lambda_m c_{mb} = \{\phi_b, H\}. \quad (2.86)$$

Quando todos os vínculos da teoria são considerados, incluindo-se os de fixação de gauge (caso existam), a matriz C tem inversa [5, 10]. Assim, de (2.86) podemos obter os multiplicadores de Lagrange

$$\lambda_m = -c_{mb}^{-1} \{\phi_b, H\}, \quad (2.87)$$

colocando (2.87) em (2.84) finalmente obtemos

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} - \{A, \phi_m\} c_{mb}^{-1} \{\phi_b, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (2.88)$$

Para que esta equação fique de uma forma que possa ser comparada com a equação de Heisenberg (2.79) fazemos

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\}_D + \frac{\partial A}{\partial t} \quad (2.89)$$

onde

$$\{A, H\}_D = \{A, H\} - \{A, \phi_m\} c_{mb}^{-1} \{\phi_b, H\} \quad (2.90)$$

é a definição dos parênteses de Dirac $\{, \}_D$ entre A e H e que corresponde ao comutador.

Para o caso de duas quantidades quaisquer A e B , a definição dos parênteses de Dirac, é

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \phi_m\} c_{mb}^{-1} \{\phi_b, B\} \quad (2.91)$$

mostrando claramente a razão para definir os parênteses de Dirac como foi feito em (2.68).

2.3.8 Teoria de campos

É algo *formal* e *direto* passar do número finito de graus de liberdade a um número infinito de graus de liberdade, o qual precisamos para uma teoria de campo [10, 12, 22].

A dinâmica de um sistema com um número finito de graus de liberdade é descrito por funções do tempo $q_i(t)$, que são as coordenadas, onde o índice i é um índice discreto.

Para um número infinito de graus de liberdade a dinâmica é descrita por uma função $\varphi(x)$ do espaço-tempo, função esta denominada campo.

Neste caso substituímos o índice discreto i por um índice contínuo x , ou seja,

$$q_i(t) = q(i, t) \longrightarrow q(\vec{x}, t) = \varphi(x),$$

onde $x = (\vec{x}, t) = (x^1, x^2, x^3, \dots, x^n, x^0) = (x^\mu)$, $\mu = 0, 1, 2, \dots, n$.

Em teoria de campos devemos considerar que existem quantidades equivalentes ao caso discreto, como densidades Lagrangeanas e Hamiltonianas e as somatórias serão substituídas por integrais e as derivadas ordinárias por derivadas funcionais.

Como os campos possuem infinitos graus de liberdade, quando se trabalha com matrizes, determinantes e inversas destas quantidades deve-se ter cuidado com as operações que serão realizadas.

Daremos algumas definições básicas com as quais se constrói toda a teoria de campos de forma análoga ao caso discreto, mas não daremos provas rigorosas das propriedades e definições que usaremos.

Um Lagrangeano numa teoria de campo é um funcional dos campos e suas derivadas, se considerarmos só a primeira derivada temporal, então

$$L = L(\varphi, \dot{\varphi}). \tag{2.92}$$

Podemos ser mais gerais, se considerarmos teorias locais onde L pode ser expresso como

$$L = \int \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) d\vec{x}, \tag{2.93}$$

sendo \mathcal{L} chamada densidade Lagrangeana.

A ação S é também um funcional expresso, de forma análoga ao caso discreto, como

$$S[\varphi] = \int L dt = \int dt \int \mathcal{L} d\vec{x} = \int \mathcal{L} dx,$$

daí que S também pode ser expressa assim

$$S[\varphi] = \int \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) dx. \tag{2.94}$$

As equações de Euler-Lagrange para os campos são

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi^a(x)} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}^a(x)} = 0 \quad (2.95)$$

ou também

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^a(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^a(x))} = 0, \quad (2.96)$$

que podem ser mostrados usando a equação (2.94) e a mesma condição $\delta S[\varphi] = 0$ do caso discreto.

A relação entre L e \mathcal{L} é

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi^a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^a} - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \varphi^a)} \right). \quad (2.97)$$

Agora definimos os momentos canonicamente conjugados aos campos φ por

$$\pi_a(x) \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}^a(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^a(x)}, \quad (2.98)$$

de forma que a densidade Hamiltoniana \mathcal{H} é dada por

$$\mathcal{H} = \pi_a(x) \dot{\varphi}^a(x) - \mathcal{L}, \quad (2.99)$$

sendo H o Hamiltoniano

$$H = \int \mathcal{H} d\vec{x}, \quad (2.100)$$

ou usando (2.99),

$$H = \int [\pi_a(x) \dot{\varphi}^a(x) - \mathcal{L}] d\vec{x}. \quad (2.101)$$

As equações canônicas de Hamilton podem ser escritas como

$$\dot{\varphi}^a(x) = \frac{\delta H}{\delta \pi_a(x)} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a(x)} \quad (2.102)$$

$$\pi_a(x) = -\frac{\delta H}{\delta \varphi^a} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi^a}. \quad (2.103)$$

Se tomarmos dois funcionais $A(\varphi(x), \pi(x))$ e $B(\varphi(y), \pi(y))$ seu parêntese de Poisson serão dado por

$$\{A(x), B(y)\}_{x^0=y^0} = \{A(\vec{x}), B(\vec{y})\} = \int \left(\frac{\delta A(x)}{\delta \varphi^a(z)} \frac{\delta B(x)}{\delta \pi_a(z)} - \frac{\delta A(x)}{\delta \pi_a(z)} \frac{\delta B(x)}{\delta \varphi_a(z)} \right) d\vec{z} \quad (2.104)$$

só estando definidos para tempos iguais, aqui $x^0 = y^0$.

Com (2.104) as equações de Hamilton (2.102) e (2.104) são

$$\dot{\varphi}_a(x) = \{\varphi_a(x), H(x^0)\} \quad (2.105)$$

$$\dot{\pi}_a(x) = \{\pi_a(x), H(x^0)\} \quad (2.106)$$

e os parênteses de Poisson fundamentais entre os campos e os momentos são

$$\{\varphi^a(x), \varphi^b(y)\} = \{\pi_a(x), \pi_b(y)\} = 0, \quad (2.107)$$

$$\{\varphi^a(x), \pi_b(y)\} = \delta_a^b \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.108)$$

também definidos a tempos iguais $x^0 = y^0$.

Devemos observar que a notação $\varphi^a(x)$ esta indicando que o campo também tem componentes, além dos infinitos graus de liberdade indicados pelo índice contínuo x , o mesmo acontecendo com os momentos $\pi_a(x)$ e outras quantidades que podem aparecer na teoria de campo. Estas quantidades sempre terão dois índices, um contínuo e o outro discreto.

Com estas quantidades e definições se constrói toda a dinâmica para infinitos graus de liberdade incluindo também os sistemas vinculados.

Passar todo o formalismo Hamiltoniano para sistemas vinculados de finitos graus de liberdade a infinitos graus não é só uma formalidade, se deve ter cuidado ao trabalhar com as quantidades definidas neste caso contínuo. Usando as ferramentas dadas nesta seção podemos obter as equações de movimento, as condições de consistência, os vínculos de primeira e segunda classe primários e secundários, os parênteses de Dirac, etc, porém usando agora os campos $\varphi(x)$ em lugar da coordenada discreta $q_i(t)$.

Concluimos desta maneira o tratamento de sistemas vinculados no formalismo de Dirac para partículas dadas pelas coordenadas $q_i(t)$ e para os campos $\varphi(x)$.

2.4 Exemplos

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos de sistemas vinculados, os quais serão analisados usando o método de Dirac para obter, deste modo, os parênteses apropriados para passar a uma teoria quântica.

2.4.1 Campo livre de Dirac

A densidade Lagrangeana \mathcal{L}_D para o campo de Dirac (spin-1/2) ψ , é dada por

$$\mathcal{L}_D = i\frac{(\lambda+1)}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + i\frac{(\lambda-1)}{2}\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (2.109)$$

onde $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ é o campo adjunto de Dirac, γ^μ representa quatro matrizes, chamadas matrizes de Dirac, as quais satisfazem a seguinte relação

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}$$

com

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}) = (\beta, \beta\vec{\alpha}),$$

onde $\vec{\alpha}$ e β são quatro matrizes hermitianas, e λ é um parâmetro arbitrário. A presença deste parâmetro tem o propósito de incluir o Lagrangeano simetrizado e não simetrizado de Dirac em nossa análise sendo, deste modo, o mais geral estudo deste exemplo. Por outro lado, este parâmetro nos permite conhecer a possibilidade de que nossos resultados possam depender ou não, da forma inicial do Lagrangeano de Dirac com o qual começamos a análise.

Para $\lambda = 0$ temos a densidade Lagrangeana simetrizada $\mathcal{L}_D^{(0)}$

$$\mathcal{L}_D^{(0)} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{i}{2}(\partial_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi.$$

Para $\lambda = 1$ temos a densidade Lagrangeana não simetrizada $\mathcal{L}_D^{(1)}$

$$\mathcal{L}_D^{(1)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi.$$

Daí notamos que

$$\mathcal{L}_D^{(0)} = \frac{\mathcal{L}_D^{(1)} + \mathcal{L}_D^{(1)\dagger}}{2}.$$

Desenvolvendo (2.109) temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D &= i\frac{(\lambda+1)}{2}\psi^\dagger\dot{\psi} + i\frac{(\lambda-1)}{2}\dot{\psi}^\dagger\psi + i\frac{(\lambda+1)}{2}\psi^\dagger\vec{\alpha}\cdot\nabla\psi \\ &+ i\frac{(\lambda-1)}{2}\nabla\psi^\dagger\cdot\vec{\alpha}\psi - m\psi^\dagger\gamma^0\psi \end{aligned} \quad (2.110)$$

e portanto a densidade Lagrangeana \mathcal{L}_D é de primeira ordem em ψ e ψ^\dagger . Evidentemente os campos são ψ e ψ^\dagger e seus momentos conjugados π_ψ e π_{ψ^\dagger} respectivamente, são definidos como

$$\pi_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial\dot{\psi}} = i\frac{(\lambda+1)}{2}\psi^\dagger \quad (2.111)$$

$$\pi_{\psi^\dagger} = \frac{\partial\mathcal{L}_D}{\partial\dot{\psi}^\dagger} = i\frac{(\lambda-1)}{2}\psi, \quad (2.112)$$

onde devemos chamar a atenção ao cuidado que se deve ter na ordem em que são colocados os termos [10].

De (2.111) e (2.112) os vínculos primários são

$$\phi_1 = \pi_\psi - i\frac{(\lambda + 1)}{2}\psi^\dagger = 0 \quad (2.113)$$

$$\phi_2 = \pi_{\psi^\dagger} - i\frac{(\lambda - 1)}{2}\psi = 0. \quad (2.114)$$

A densidade Hamiltoniana canônica \mathcal{H}_D é expressa como

$$\mathcal{H}_D = \pi_\psi \dot{\psi} + \dot{\psi}^\dagger \pi_{\psi^\dagger} - \mathcal{L}_D, \quad (2.115)$$

com (2.111) e (2.112) na densidade Lagrangeana \mathcal{L}_D e, logo em (2.115) temos que

$$\mathcal{H}_D = -\pi_\psi \vec{\alpha} \cdot \nabla \psi - \nabla \psi^\dagger \cdot \vec{\alpha} \pi_{\psi^\dagger} + m\psi^\dagger \gamma^0 \psi. \quad (2.116)$$

Então a densidade Hamiltoniana total \mathcal{H}_T é

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_D + u_1 \phi_1 + u_2 \phi_2, \quad (2.117)$$

onde u_1, u_2 são multiplicadores de Lagrange. Assim o Hamiltoniano total primário H_T é expresso como

$$H_T = \int \mathcal{H}_T d\vec{x} = \int (\mathcal{H}_D + u_1 \phi_1 + u_2 \phi_2) d\vec{x}. \quad (2.118)$$

Agora impomos as condições de consistência sobre os vínculos primários

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1, H_T\} \approx 0 \quad (2.119)$$

$$\dot{\phi}_2 = \{\phi_2, H_T\} \approx 0, \quad (2.120)$$

destas obtemos relações que nos permitem encontrar os multiplicadores de Lagrange u_1 e u_2 .

O parêntese de Poisson para dois funcionais esta definido na equação (2.104), com esta relação calculamos o parêntese de Poisson dos vínculos primários

$$\{\phi_1(\vec{x}), \phi_2(\vec{y})\} = \left\{ \pi_\psi - i\frac{(\lambda + 1)}{2}\psi^\dagger, \pi_{\psi^\dagger} - i\frac{(\lambda - 1)}{2}\psi \right\},$$

então temos daí que

$$\{\phi_1(\vec{x}), \phi_2(\vec{y})\} = -i\delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.121)$$

e de (2.121) concluímos que ϕ_1 e ϕ_2 são vínculos de segunda classe como era de se esperar.

Como ϕ_1 e ϕ_2 são os únicos vínculos da teoria, com eles devemos construir a matriz C (2×2) com elementos C_{ab} , definidos como

$$C_{ab} = \{\phi_a(\vec{x}), \phi_b(\vec{y})\}$$

onde $a, b = 1, 2$.

Daí a matriz C é expressa como

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.122)$$

mas $\det C \neq 0$, então C tem inversa. Calculando sua inversa temos que

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.123)$$

Os vínculos ϕ_1 e ϕ_2 podem ser eliminados, ou seja são fortemente nulos, se substituímos os parênteses de Poisson pelos parênteses de Dirac.

De forma similar a (2.91), o parêntese de Dirac numa teoria de campos, para duas funções do espaço de fase A e B , está definido como

$$\{A(\vec{x}), B(\vec{y})\}_D = \{A(\vec{x}), B(\vec{y})\} - \int d\vec{u} d\vec{v} \{A(\vec{x}), \phi_a(\vec{u})\} C_{ab}^{-1}(\vec{u}, \vec{v}) \{\phi_b(\vec{v}), B(\vec{y})\} \quad (2.124)$$

e com (2.124) podemos encontrar os parênteses de Dirac para os campos e seus momentos conjugados. Assim temos que

$$\begin{aligned} \{\psi(\vec{x}), \psi(\vec{y})\}_D &= \{\pi_\psi(\vec{x}), \pi_\psi(\vec{y})\}_D = 0 \\ \{\psi^\dagger(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{y})\}_D &= \{\pi_{\psi^\dagger}(\vec{x}), \pi_{\psi^\dagger}(\vec{y})\}_D = 0 \\ \{\psi(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{y})\}_D &= -i\delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (2.125)$$

os parênteses restantes entre ψ , ψ^\dagger e π_ψ , π_{ψ^\dagger} e entre π_ψ e π_{ψ^\dagger} ; são deduzidos usando os parênteses anteriores e os vínculos de segunda classe primários dados em (2.113) e (2.114).

Estes parênteses são os apropriados para passar a uma teoria quântica, pois com eles todos os vínculos de segunda classe ficaram fora da teoria.

2.4.2 Modelo Proca Abeliano

A densidade Lagrangeana para este modelo é dada por

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu, \quad (2.126)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ e a métrica usada é $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Se desenvolvemos (2.126) temos que

$$\mathcal{L}_P = \frac{1}{2}\dot{\vec{A}}^2 + \dot{\vec{A}} \cdot \nabla A_0 + \frac{1}{2}(\nabla A_0)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{A})^2 + \frac{m^2}{2}A_0^2 - \frac{m^2}{2}\vec{A}^2,$$

onde notamos que \mathcal{L}_P é de segunda ordem em $\dot{\vec{A}}$.

Os campos são A^μ ; $\mu = 0, 1, 2, 3$ e seus momentos conjugados π_μ são definidos como

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \dot{A}^\mu}.$$

Daí temos que

$$\pi_\mu = F_{\mu 0} \tag{2.127}$$

e portanto

$$\pi_0 = F_{00} = 0$$

de modo que temos um vínculo primário dado por

$$\phi_1 = \pi_0 \approx 0. \tag{2.128}$$

A densidade Hamiltoniana canônica \mathcal{H}_P para este caso, é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_P &= \pi_\mu \dot{A}^\mu - \mathcal{L}_P \\ \mathcal{H}_P &= \pi_0 \dot{A}^0 + \pi_i \dot{A}^i - \mathcal{L}_P, \end{aligned} \tag{2.129}$$

e de (2.126) \mathcal{L}_P pode ser expressa usando (2.127), como

$$\mathcal{L}_P = -\frac{\pi_i \pi^i}{2} - \frac{F_{ij} F^{ij}}{4} + \frac{m^2}{2}(A_0^2 - A_i^2). \tag{2.130}$$

Em (2.127) fazemos $\mu = i$, e temos que

$$\pi_i = F_{i0}$$

e como $F_{i0} = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i$, substituindo na equação anterior, obtemos que

$$\dot{A}^i = -\pi^i + \partial^i A_0. \tag{2.131}$$

Usando (2.130) e (2.131) em (2.129), resulta

$$\mathcal{H}_P = -\frac{\pi_i \pi^i}{2} + \frac{F_{ij} F^{ij}}{4} - \frac{m^2}{2}(A_0^2 - A_i^2) + \pi_i \partial^i A_0. \tag{2.132}$$

Fazendo uma integração por partes e considerando que no infinito os campos se anulam, o último termo de (2.132) muda da seguinte forma: $\pi_i \partial^i A_0 \rightarrow -A_0 \partial_i \pi^i$. Então a densidade Hamiltoniana canônica tem a forma

$$\mathcal{H}_P = -\frac{\pi_i \pi^i}{2} + \frac{1}{4}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)(\partial^i A^j - \partial^j A^i) - \frac{m^2}{2}(A_0^2 - A_i^2) - A_0 \partial_i \pi^i. \quad (2.133)$$

Agora a densidade Hamiltoniana total \mathcal{H}_T é

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_P + \lambda \phi_1, \quad (2.134)$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange. Então o Hamiltoniano total H_T esta expresso como

$$H_T = \int \mathcal{H}_T d\vec{x} = \int (\mathcal{H}_P + \lambda \pi_1) d\vec{x}. \quad (2.135)$$

Impomos então as condições de consistência no vínculo ϕ_1

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1, H_T\} \approx 0, \quad (2.136)$$

com (2.128) e (2.134) em (2.136) e obtemos

$$\dot{\phi}_1 = m^2 A_0 + \partial_i \pi^i \approx 0. \quad (2.137)$$

Esta última relação gera um vínculo secundário

$$\phi_2 = m^2 A_0 + \partial_i \pi^i \approx 0 \quad (2.138)$$

ao qual impomos a condição de consistência

$$\dot{\phi}_2 = \{\phi_2, H_T\} \approx 0,$$

e daqui só obtemos uma relação para definir o multiplicador λ , a qual não é de nosso interesse agora.

Estes dois vínculos definem a superfície de vínculos no espaço de fase. Com a definição dada em (2.104), o parêntese de Poisson destes vínculos é

$$\{\phi_1(\vec{x}), \phi_2(\vec{y})\} = -m^2 \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.139)$$

e daí concluímos que ϕ_1 e ϕ_2 são de segunda classe, como era de se esperar.

Como só temos vínculos de segunda classe na teoria, nós podemos construir a matriz C (2×2) cujos elementos são dados por

$$C_{ab} = \{\phi_a, \phi_b\}, \quad a, b = 1, 2 \quad (2.140)$$

com (2.128) e (2.138) a matriz C é

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -m^2 \\ m^2 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.141)$$

sendo que $\det C \neq 0$ e portanto C tem inversa, expressa como

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m^2} \\ -\frac{1}{m^2} & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.142)$$

Os vínculos ϕ_1 e ϕ_2 podem ser considerados fortemente nulos ao substituirmos o parêntese de Poisson pelo parêntese de Dirac, o qual está definido em (2.124).

Podemos então encontrar o parêntese de Dirac dos A^μ e π_i , assim temos os seguintes resultados

$$\begin{aligned} \{A^i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y})\}_D &= \delta_j^i \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{A^i(\vec{x}), A^j(\vec{y})\}_D &= \{\pi_i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y})\}_D = 0 \\ \{A_0(\vec{x}), \pi_i(\vec{y})\}_D &= 0 \\ \{A_0(\vec{x}), A^i(\vec{y})\}_D &= \frac{1}{m^2} \partial_{\vec{x}}^i \delta(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (2.143)$$

estes são os parênteses apropriados para quantizar o sistema físico, pois com eles todos os vínculos de segunda classe estão fora do sistema em questão.

2.4.3 Campo eletromagnético livre

Estudamos agora o campo eletromagnético livre no formalismo de Dirac. Se na equação (2.126) fazemos a massa nula, ou seja $m = 0$, obtemos a densidade Lagrangeana \mathcal{L}_e para o campo eletromagnético livre

$$\mathcal{L}_e = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.144)$$

e desenvolvendo esta equação temos

$$\mathcal{L}_e = \frac{1}{2} \dot{\vec{A}}^2 + \vec{A} \cdot \nabla A_0 + \frac{1}{2} [(\nabla A_0)^2 - (\nabla \times \vec{A})^2], \quad (2.145)$$

sendo que do exemplo anterior temos que os momentos conjugados aos campos A^μ estão dados por

$$\pi_\mu = F_{\mu 0} \quad (2.146)$$

daí obtemos o seguinte vínculo primário

$$\phi_1 = \pi_0 \approx 0. \quad (2.147)$$

Seguindo os cálculos do exemplo anterior, se fazemos $m = 0$ em (2.133) obtemos a densidade Hamiltoniana canônico \mathcal{H}_e para este caso, dado por

$$\mathcal{H}_e = -\frac{\pi_i \pi^i}{2} + \frac{1}{4}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)(\partial^i A^j - \partial^j A^i) - A_0 \partial_i \pi^i \quad (2.148)$$

e a densidade Halmiltoniana total \mathcal{H}_T é

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_e + \lambda \phi_1, \quad (2.149)$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange. Daqui o Hamiltoniano total H_T fica expresso como

$$H_T = \int \mathcal{H}_T d\vec{x} = \int (\mathcal{H}_e + \lambda \phi_1) d\vec{x}. \quad (2.150)$$

Impomos a condição de consistência no vínculo ϕ_1 , e colocando $m = 0$ em (2.137), temos

$$\dot{\phi}_1 = \partial_i \pi^i \approx 0. \quad (2.151)$$

Isto gera o vínculo secundário

$$\phi_2 = \partial_i \pi^i \approx 0. \quad (2.152)$$

Estes vínculos definem a superfície de vínculos no espaço de fase. O parêntese de Poisson deles está expresso, fazendo $m = 0$ em (2.139), como

$$\{\phi_1, \phi_2\} = 0 \quad (2.153)$$

e daí concluímos que ϕ_1 e ϕ_2 são de primeira classe.

Neste caso não são construídos os parênteses de Dirac para os campos e seus conjugados. Mas podemos calcular os parênteses de Poisson fundamentais entre as variáveis canônicas

$$\{A^\mu(\vec{x}), \pi_\nu(\vec{y})\} = \delta^\mu_\nu \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (2.154)$$

os quais são obviamente incompatíveis com o vínculo $\pi_0 \approx 0$.

O Hamiltoniano Extendido H_E definido pela expressão (2.62) será

$$H_E = \int (\mathcal{H}_e + \lambda \phi_1 + \nu \phi_2) d\vec{x}, \quad (2.155)$$

com (2.147) e (2.152) em (2.155) H_E resulta em

$$H_E = \int (\mathcal{H}_e + \lambda \pi_0 + \nu \partial_i \pi^i) d\vec{x} \quad (2.156)$$

onde tanto λ quanto v são funções arbitrárias e a densidade Hamiltoniana canônica \mathcal{H}_e está dada na equação (2.148). Usando a relação (2.131), fazendo uma integração por partes e, usando condições de fronteira para desprezar as integrais de superfície o Hamiltoniano Extendido H_E fica expresso como

$$H_E = \int \left(\frac{1}{2} \vec{\pi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{A})^2 + \lambda \pi_0 \right) + (v - A_0) \nabla \cdot \vec{\pi} d\vec{x}. \quad (2.157)$$

Podemos agora calcular as equações de movimento definidas em (2.60). Para A_0 temos

$$\begin{aligned} \dot{A}_0 &\approx \{A_0, H_E\} = \left\{ A_0, \int \lambda \pi_0 d\vec{x}' \right\} \\ \dot{A}_0 &\approx \int \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \lambda(\vec{x}', t) d\vec{x}' = \lambda(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

então

$$\dot{A}_0 = \lambda(\vec{x}, t) = \lambda. \quad (2.158)$$

Para as outras componentes de A^μ temos

$$\dot{A}^j \approx \{A^j, H_E\} = \left\{ A^j, \int \left(-\frac{1}{2} \pi^i \pi_i - A_0 \partial_i \pi^i + v \partial_i \pi^i \right) d\vec{x}' \right\}$$

daí resulta

$$\dot{A}^j = -\pi^j + \partial^j A_0 - \partial^j v. \quad (2.159)$$

Para os momentos π^j temos

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^j &\approx \{\pi^j, H_E\} = \left\{ \pi^j, \int \frac{1}{4} F_{ik} F^{ik} d\vec{x}' \right\} \\ \dot{\pi}^j &\approx \frac{1}{2} (\partial_i F^{ij}(\vec{x}) - \partial_k F^{jk}(\vec{x})) = \partial_i F^{ij}(\vec{x}) \end{aligned}$$

então

$$\dot{\pi}^j = \partial_i F^{ij}(\vec{x}) = \partial_i F^{ij}. \quad (2.160)$$

De (2.158) notamos que A_0 é basicamente uma função arbitrária no Hamiltoniano que será eliminada das equações de movimento unicamente depois de fixar o gauge.

Deste modo, temos agora o Hamiltoniano Extendido dado pela equação (2.156) ou (2.157) e os coeficientes arbitrários sujeitos a satisfazer as equações (2.158) e (2.159) respectivamente.

2.4.4 Lagrangeano da QED

Consideremos a densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (2.161)$$

que pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}\dot{\vec{A}}^2 + \dot{\vec{A}}\cdot\nabla A_0 + \frac{1}{2}(\nabla A_0)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{A})^2 + i\psi^\dagger\dot{\psi} + i\psi^\dagger\vec{\alpha}\cdot(\nabla - ie\vec{A})\psi \\ & - e\rho A_0 - m\psi^\dagger\gamma^0\psi, \end{aligned}$$

onde $\rho = \psi^\dagger\psi$, é a densidade de probabilidade. \mathcal{L} é de segunda ordem em $\dot{\vec{A}}$, e de primeira ordem em $\dot{\psi}$, os campos são os A^μ , os ψ e os ψ^\dagger ; e seus momentos conjugados estão definidos como

$$\begin{aligned} \pi_\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^\mu} = F_{\mu 0} \longrightarrow \pi_0 = 0 \\ \pi_\psi &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = i\psi^\dagger \\ \pi_{\psi^\dagger} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}^\dagger} = 0 \end{aligned}$$

e destas relações temos os vínculos primários

$$\phi_1 = \pi_0 \approx 0 \quad (2.162)$$

$$\phi_2 = \pi_\psi - i\psi^\dagger \approx 0 \quad (2.163)$$

$$\phi_3 = \pi_{\psi^\dagger} \approx 0. \quad (2.164)$$

Determinemos agora a densidade Hamiltoniana canônica \mathcal{H}_c

$$\mathcal{H}_c = \pi_0\dot{A}^0 + \pi_i\dot{A}^i + \pi_\psi\dot{\psi} + \psi^\dagger\pi_{\psi^\dagger} - \mathcal{L}, \quad (2.165)$$

onde com $\pi_0 = 0$, $\dot{A}^i = -\pi^i + \partial^i A_0$ e $\pi_{\psi^\dagger} = 0$ temos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c = & -\frac{\pi_i\pi^i}{2} + \frac{1}{4}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)(\partial^i A^j - \partial^j A^i) - A_0\partial_i\pi^i \\ & - i\psi^\dagger\alpha^i(\partial_i + ieA_i) + e\rho A_0 + m\psi^\dagger\gamma^0\psi, \end{aligned} \quad (2.166)$$

sendo que fizemos uma integração por partes para obter o termo $-A_0\partial_i\pi^i$.

Então a densidade Hamiltoniana total é

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_c + \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \lambda_3\phi_3, \quad (2.167)$$

onde λ_1 , λ_2 e λ_3 são multiplicadores de Lagrange. De onde podemos obter o Hamiltoniano total H_T expresso como

$$H_T = \int \mathcal{H}_T d\vec{x} = \int (\mathcal{H}_c + \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 + \lambda_3 \phi_3) d\vec{x}. \quad (2.168)$$

Agora imporemos as condições de consistência sobre os vínculos

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1, H_T\} = \partial_i \pi^i + e\rho \approx 0 \quad (2.169)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_2 &= \{\phi_2, H_T\} = -i(\partial_i - ieA_i)\psi^\dagger \alpha^i \\ &- e\psi^\dagger A_0 - m\psi^\dagger \gamma^0 + i\lambda_3 \gamma^0 \approx 0 \end{aligned} \quad (2.170)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_3 &= \{\phi_3, H_T\} = -i(\partial_i + ieA_i)\gamma^i \psi + e\gamma^0 A_0 \psi \\ &+ m\psi - i\gamma^0 \lambda_2 \approx 0 \end{aligned} \quad (2.171)$$

e destas determinamos λ_2 e λ_3 e o vínculo secundário

$$\chi = \partial_i \pi^i - e\rho \approx 0. \quad (2.172)$$

Analisemos agora quais são os vínculos de primeira e de segunda classe. Calculando os parênteses de Poisson destes vínculos temos

$$\{\phi_1, \phi_1\} = \{\phi_1, \phi_2\} = \{\phi_1, \phi_3\} = \{\phi_1, \chi\} = 0,$$

e daí $\phi_1 = \pi_0$ é vínculo de primeira classe. Considerando os parênteses de Poisson entre os demais vínculos

$$\begin{aligned} \{\phi_2(\vec{x}), \phi_3(\vec{y})\} &= -i\{\psi^\dagger(\vec{x}), \pi_{\psi^\dagger}(\vec{y})\} = -i\delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\phi_2(\vec{x}), \chi(\vec{y})\} &= -e\{\pi_\psi(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{y})\psi(\vec{y})\} = e\psi^\dagger \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\phi_3(\vec{x}), \chi(\vec{y})\} &= e\{\pi_{\psi^\dagger}, \psi^\dagger(\vec{y})\psi(\vec{y})\} = -e\psi \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (2.173)$$

daí ϕ_2 , ϕ_3 e χ são de segunda classe.

Mudamos nossa notação para os vínculos de segunda classe para facilitar o cálculo

$$\Phi_1 = \chi, \quad \Phi_2 = \phi_2, \quad \Phi_3 = \phi_3. \quad (2.174)$$

Agora podemos construir a seguinte matriz, cujos elementos são os parênteses de Poisson dos vínculos de segunda classe

$$\Delta = \begin{pmatrix} \{\Phi_1, \Phi_1\} & \{\Phi_1, \Phi_2\} & \{\Phi_1, \Phi_3\} \\ \{\Phi_2, \Phi_1\} & \{\Phi_2, \Phi_2\} & \{\Phi_2, \Phi_3\} \\ \{\Phi_3, \Phi_1\} & \{\Phi_3, \Phi_2\} & \{\Phi_3, \Phi_3\} \end{pmatrix},$$

usando (2.173) esta matriz fica expressa como

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -e\psi^\dagger & e\psi \\ e\psi^\dagger & 0 & -i \\ -e\psi & i & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}).$$

Porém esta matriz tem um autovetor com autovalor nulo dado por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ ie\psi \\ ie\psi^\dagger \end{pmatrix}, \quad (2.175)$$

e podemos deduzir que existe outro vínculo de primeira classe dado pela seguinte combinação linear

$$\begin{aligned} \varphi &= \chi + ie\Phi_2\psi - ie\Phi_3\psi^\dagger \\ \varphi &= \partial_i\pi^i + ie(\pi_\psi\psi + \psi^\dagger\pi_{\psi^\dagger}). \end{aligned} \quad (2.176)$$

Este vínculo substituirá ao vínculo χ . Deste modo, nós temos os vínculos de primeira classe ϕ_1 e φ e os vínculos de segunda classe ϕ_2 e ϕ_3 .

Como não podemos construir outros vínculos de primeira classe desta maneira, a matriz Δ se reduz a uma matriz C (2×2) cujos elementos são os parênteses de Poisson dos vínculos de segunda classe que ficam na teoria: ϕ_2 e ϕ_3 . A matriz C é dada por

$$C = \begin{pmatrix} \{\Phi_2, \Phi_2\} & \{\Phi_2, \Phi_3\} \\ \{\Phi_3, \Phi_2\} & \{\Phi_3, \Phi_3\} \end{pmatrix}$$

onde

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}),$$

e como $\det C \neq 0$, C tem inversa a qual é dada por

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.177)$$

Agora os vínculos de segunda classe podem ser eliminados, ou seja são fortemente nulos, se substituirmos os parênteses de Poisson pelos parênteses de Dirac os quais estão definidos em (2.124). Com esta definição encontramos que os parênteses de Dirac não nulos dos A^μ , π_μ , ψ e ψ^\dagger são expressos como

$$\begin{aligned} \{A^\mu(\vec{x}), \pi_\nu(\vec{y})\}_D &= \delta^\mu_\nu \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\psi(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{y})\}_D &= -i\delta(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (2.178)$$

Devemos mencionar que o único parêntese de Dirac não nulo que ainda falta ser colocado na equação anterior, pode ser obtido usando o segundo parêntese de (2.178) e o vínculo de segunda classe primário dado em (2.163).

Aqui também devemos mencionar que a liberdade de gauge que provem dos vínculos de primeira classe ϕ_1 e φ é mantida.

Capítulo 3

O formalismo de Faddeev e Jackiw

3.1 Introdução

No presente capítulo estudaremos um formalismo alternativo ao de Dirac para sistemas vinculados, que foi desenvolvido por Faddeev e Jackiw (F-J) [13, 26]. Primeiramente daremos uma visão geral deste novo formalismo e algumas de suas principais características.

O método de F-J é aplicado à Lagrangeanos de primeira ordem nas velocidades e baseia-se na estrutura simplética geométrica fazendo uso do teorema de Darboux [27], com o qual se obtém os resultados desejados (parênteses generalizados, Hamiltonianos, etc.) sem seguir passo a passo o método de Dirac.

Dois aspectos no formalismo de Dirac são evitados no formalismo F-J. O primeiro tem as seguintes opções:

A primeira, é quando o Lagrangeano depende linearmente da velocidade $\dot{\xi}$ para uma das variáveis dinâmicas ξ , ou seja

$$L = L(\xi, \dot{\xi}) = f_i(\xi)\dot{\xi}^i + C,$$

e usando a definição do momento canônico π_i , temos

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i} = f_i(\xi) \quad (3.1)$$

daí, notamos que esta última equação não permite expressar os $\dot{\xi}$ em função dos π .

E, a segunda é quando o Lagrangeano é independente de $\dot{\xi}$ e, neste caso,

$$L = L(\xi)$$

e a definição de momento canônico nos fornece

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i} = 0 \implies \pi_i = 0. \quad (3.2)$$

Novamente não se pode expressar ξ^i em função de π_i . Porém, no método de Dirac, definimos um momento canônico e as expressões independentes de $\dot{\xi}$ são chamadas vínculos. Neste formalismo alternativo (F-J) estes vínculos não são introduzidos.

O segundo aspecto está relacionado com a classificação dos vínculos em vínculos de primeira e segunda classe que o formalismo de Dirac estabelece. Esta classificação não é feita no formalismo de F-J, pois todos os vínculos são considerados do mesmo modo.

A partir destes dois pontos devemos enfatizar que o conceito de vínculo no formalismo F-J é diferente do usado no formalismo de Dirac. No formalismo F-J, quando se obtém expressões similares às equações (3.1) e (3.2) estas simplesmente não são vínculos. O conceito de vínculo no formalismo F-J está relacionado com a inversa de uma matriz antisimétrica.

A dependência temporal das variáveis dinâmicas não é indicada explicitamente, já que todas as quantidades são definidas no mesmo instante de tempo. As contribuições de derivadas temporais totais para os Lagrangeanos são omitidas cada vez que for conveniente.

3.1.1 O formalismo de F-J e o Lagrangeano canônico $L_c(q, p)$

O método de F-J é, essencialmente, um formalismo Lagrangeano. Antes de desenvolver os detalhes deste método, explicitaremos aspectos que serão usados no decorrer do capítulo.

A dinâmica de um sistema com finitos graus de liberdade pode ser derivada da ação S , expressa como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt \quad (3.3)$$

onde $L(q, \dot{q}) = L$ é o Lagrangeano que depende das coordenadas e velocidades generalizadas $q = q_i$ e $\dot{q} = \dot{q}_i$, respectivamente, com $i = 1, 2, \dots, N$. Também, devemos mencionar que o Lagrangeano neste caso não dependerá explicitamente do tempo t , pois consideraremos que não existem forças externas sobre o sistema, mas as coordenadas e velocidades têm dependência temporal $q_k = q_k(t)$ e $\dot{q}_k = \dot{q}_k(t)$.

Consideremos, inicialmente, que o Lagrangeano seja não singular, que é uma propriedade do Lagrangeano e não do sistema por ele descrito e, portanto não há vínculos na teoria.

O princípio de mínima ação que governa o movimento dos sistemas físicos requer que a ação (3.3) seja minimizada. Este princípio pode ser escrito como

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt = 0 \quad (3.4)$$

com t_1 e t_2 fixos. A equação (3.4) é a condição para a existência das trajetórias clássicas.

De (3.4) podemos obter as equações de movimento de Euler-Lagrange para $t_1 < t < t_2$ como

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad (3.5)$$

de onde obtêm-se as equações de movimento do sistema físico se o Lagrangeano do sistema é conhecido.

Até agora temos trabalhado com o Lagrangeano $L(q, \dot{q})$, mas podemos por meio de uma transformação de Legendre levar o Lagrangeano $L(q, \dot{q})$ a uma nova quantidade representada por Λ que depende das variáveis canônicas q e p , (p é o momento canônico conjugado a q) sendo que estas variáveis (q, p) podem passar por meio de transformações canônicas, a outras variáveis canônicas (Q, P) .

Para passar de $L(q, \dot{q})$ a Λ definimos o momento canônico p como

$$p_i \equiv \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i}, \quad (3.6)$$

e, considerando que a determinante da matriz Hessiana não é nula, ou seja, não há vínculos, podemos expressar \dot{q} em função de (q, p) a partir de (3.6). Dito do ponto de vista do formalismo Lagrangeano resolvermos todas as acelerações como função das posições e velocidades. Assim, de (3.6) obtemos que

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p). \quad (3.7)$$

Com (3.7), a transformação de Legendre nos permite expressar a quantidade Λ como

$$\Lambda = p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q})|_{\dot{q}=\dot{q}(q,p)}, \quad (3.8)$$

onde Λ não depende explicitamente de \dot{q} . Da equação (3.8) o Lagrangeano $L(q, \dot{q})$ com a substituição $\dot{q} = \dot{q}(q, p)$ pode ser escrito como

$$L(q, \dot{q})|_{\dot{q}=\dot{q}(q,p)} = L_c(q, p) = p_i \dot{q}_i - \Lambda \quad (3.9)$$

onde o Lagrangeano $L_c(q, p)$ será chamado *Lagrangeano Canônico*.

Contudo o Lagrangeano canônico não é o mesmo que o Lagrangeano $L(q, \dot{q})$, ou seja

$$L_c(q, p) \neq L(q, \dot{q}), \quad (3.10)$$

pois se com $L(q, \dot{q})$ obtemos as equações de Euler-Lagrange do movimento, por outro lado, com o Lagrangeano $L_c(q, p)$ obtemos as equações de Hamilton do movimento

[5, 22, 23] do sistema físico como equações de Euler-Lagrange. A quantidade Λ é comumente chamada Hamiltoniano e representado por H neste tratamento. Dessa forma há uma formulação Hamiltoniana do sistema físico. Por outro lado, estas descrições, Lagrangeana e Hamiltoniana, expressam a mesma física e nada novo é acrescentado.

É muito útil expressar o Lagrangeano na forma canônica $L_c(q, p)$ (3.9), pois desta forma podemos sempre tornar um Lagrangeano de qualquer ordem nas velocidades \dot{q} em um de primeira ordem, linear nas velocidades. Deste modo podemos desenvolver o método F-J, pois este método é aplicado justamente para Lagrangeanos de primeira ordem, daí a utilidade do Lagrangeano canônico.

O Lagrangeano $L(q, \dot{q})$ pode, em geral, ser de qualquer ordem em \dot{q} , mas podemos dividi-lo em dois casos:

(a) Se $L(q, \dot{q})$ é linear em \dot{q} .

O Lagrangeano $L(q, \dot{q})$ adota a forma geral

$$L(q, \dot{q}) = a_i(q)\dot{q}_i - H(q), \quad (3.11)$$

este Lagrangeano (3.11), já está na forma apropriada que requer o formalismo F-J.

Então, o tratamento segundo o formalismo F-J do Lagrangeano (3.11) é direto, podendo-se calcular a matriz simplética 2-forma $f(q)$, que definiremos posteriormente, e que terá inversa se não consideramos vínculos no sistema físico.

(b) Se $L(q, \dot{q})$ é quadrática em \dot{q} ou de maior grau.

Neste caso temos primeiro, antes de usar o método F-J, que tornar linear o Lagrangeano $L(q, \dot{q})$. Para fazermos isso usaremos a transformação de Legendre e a definição do momento (3.6), de modo que o Lagrangeano $L(q, \dot{q})$ passa a ser um Lagrangeano canônico $L_c(q, p)$ da forma

$$L_c(q, p) = p_i\dot{q}_i - H(q, p). \quad (3.12)$$

Sendo ainda mais geral, se $\xi = (q, p) = (q_i, p_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$, então (3.12) tem a forma

$$L_c(\xi) = a_I(\xi)\dot{\xi}_I - H(\xi) \quad (3.13)$$

com $I = 1, 2, \dots, N, N+1, \dots, 2N$. Com (3.12) ou (3.13) o método F-J, pode ser usado. Daí calculamos a matriz 2-forma $f(\xi)$, que possui inversa se não temos vínculos neste caso.

Porém, se consideramos que existem vínculos (no formalismo F-J) então a matriz $f(\xi)$ em ambos os casos não têm inversa. No caso específico da existência de vínculos o tratamento do Lagrangeano vinculado segue um esquema similar ao argumento anterior para um Lagrangeano sem vínculos. Assim, quando se faz a análise usando o método F-J, temos novamente dois casos dependendo de como aparece \dot{q} no Lagrangeano vinculado $L_v(q, \dot{q})$. Se $L_v(q, \dot{q})$ é linear em \dot{q} ; então o método F-J se aplica diretamente como no caso (a). Se \dot{q} é quadrática ou de maior grau em $L_v(q, \dot{q})$, então primeiro temos que tornar linear $L_v(q, \dot{q})$, por meio da definição de momento canônico p e, de uma transformação de Legendre com os quais nossas variáveis dinâmicas são os (q, p) . Dessa maneira, passamos do Lagrangeano $L_v(q, \dot{q})$ a um Lagrangeano canônico $L_v^{(c)}(q, p)$ o qual só depende de q, p e é linear em \dot{q} . Logo, podemos aplicar o método de F-J de forma similar ao caso (b).

Ao desenvolvermos o método de F-J no caso geral com $\xi = (q, p)$, faremos a análise considerando que nosso Lagrangeano é em geral de qualquer grau, logo linearizaremos o Lagrangeano obtendo assim o Lagrangeano canônico $L_c(q, p)$, que representaremos por $L(\xi)$.

3.2 O formalismo de F-J

3.2.1 Formalismo F-J sem vínculos

Usamos uma formulação Lagrangeana de primeira ordem, linear em \dot{q}_i , neste estudo. Na física existem sistemas dinâmicos elementares de primeira ordem embora não tenham vínculos neles. No caso de um Lagrangeano de segunda ordem pode-se convertê-lo em primeira ordem por meio de uma transformação de Legendre. Se fazemos uma descrição Hamiltoniana convencional da dinâmica, podemos sempre construir um Lagrangeano de primeira ordem cujo espaço de configuração coincide com o espaço de fase do Lagrangeano original.

Seja ξ quaisquer das variáveis dinâmicas p ou q . Então

$$\xi^i = (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N = 2n.$$

ou seja

$$\begin{aligned} \xi^1 &= q_1, \quad \xi^2 = q_2, \quad \dots, \quad \xi^n = q_n \\ \xi^{n+1} &= p_1, \quad \xi^{n+2} = p_2, \quad \dots, \quad \xi^{2n} = p_n \end{aligned}$$

Não necessariamente existe correspondência entre cada q com cada p , isto é, nem sempre estará presente a variável q_i e sua conjugada respectiva p_i . Portanto, N nem sempre será um número par; caso exista uma correspondência entre todas as

variáveis e suas conjugadas, $N = 2n$ será sempre par. Fazemos toda a formulação em função da nova variável ξ , chamada variável simplética.

Começamos com um Lagrangeano de primeira ordem $L = L(\xi, \dot{\xi})$, linear em $\dot{\xi}$, que em geral terá a forma seguinte

$$L = a_i(\xi)\dot{\xi}^i - V(\xi), \quad (3.14)$$

onde $a_i(\xi)$, tem o caráter de um potencial vetorial.

Se modificamos $a_i(\xi)$ por uma derivada

$$a_i \implies a_i + \frac{\partial \theta}{\partial \xi^i}$$

esta mudança não afeta a dinâmica, já que

$$a_i \implies a_i + \frac{\partial \theta}{\partial \xi^i}$$

então

$$\begin{aligned} L' &= \left(a_i + \frac{\partial \theta}{\partial \xi^i}\right)\dot{\xi}^i - V(\xi) \\ L' &= a_i(\xi)\dot{\xi}^i + \frac{\partial \theta}{\partial \xi^i}\dot{\xi}^i \\ L' &= a_i(\xi)\dot{\xi}^i - V(\xi) + \frac{d\xi^i}{dt} \frac{\partial \theta}{\partial \xi^i} \end{aligned}$$

daí, temos que

$$L' = a_i(\xi)\dot{\xi}^i - V(\xi) + \frac{d\theta}{dt}. \quad (3.15)$$

Das equações (3.14) e (3.15), resulta

$$L' = L + \frac{d\theta}{dt}, \quad (3.16)$$

assim com (3.16) a dinâmica não muda pois as equações de movimentos são as mesmas para L' e L que diferem apenas numa diferencial total.

Observamos também que quando o Hamiltoniano é definido pela transformada de Legendre usual, as velocidades estão ausentes na expressão $\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i}\dot{\xi}^i - L$, uma vez que L é de primeira ordem, ou seja linear em $\dot{\xi}^i$, assim

$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i}\dot{\xi}^i - L \\ H &= \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}^i} [a_i(\xi)\dot{\xi}^i - V(\xi)] \right\} \dot{\xi}^i - (a_i(\xi)\dot{\xi}^i - V(\xi)) \end{aligned}$$

logo

$$H = a_i(\xi)\dot{\xi}^i - (a_i(\xi)\dot{\xi}^i - V(\xi)) = V(\xi).$$

Daí concluímos que

$$H(\xi) = V(\xi). \quad (3.17)$$

Com a equação (3.17), o Lagrangeano (3.14) toma a seguinte forma

$$L = a_i(\xi)\dot{\xi}^i - H(\xi), \quad (3.18)$$

onde o primeiro termo à direita da equação (3.18) define a 1-forma canônica $a_i(\xi)d\xi^i = a(\xi)$.

Para introduzir o formalismo de F-J, em sua forma mais simples, iniciaremos o método com um caso especial passando a um caso geral.

1) Caso Especial

Em lugar de tratar com um $a_i(\xi)$ geral tomaremos $a_i(\xi)$ que seja linear em ξ^i

$$a_i(\xi) = \frac{1}{2}\xi^j\omega_{ji}, \quad (3.19)$$

onde ω_{ji} é uma matriz constante e antissimétrica

$$\omega_{ji} = -\omega_{ij}$$

e a parte simétrica de $a_i(\xi)$ contribui apenas com uma derivada total temporal irrelevante ao Lagrangeano L , e pode ser omitida. Seja

$$a_i = \xi^j A_{ji},$$

onde A_{ji} é uma matriz constante. Reescrevendo-a como

$$A_{ji} = \frac{1}{2}(A_{ji} + A_{ij}) + \frac{1}{2}(A_{ji} - A_{ij}),$$

e substituindo A_{ji} na última equação resulta

$$a_i(\xi) = \frac{1}{2}(A_{ji} + A_{ij})\xi^j + \frac{1}{2}(A_{ji} - A_{ij})\xi^j. \quad (3.20)$$

De (3.20) e (3.18) temos que o Lagrangeano L é

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\xi^j(A_{ji} + A_{ij})\dot{\xi}^i + \frac{1}{2}\xi^j(A_{ji} - A_{ij})\dot{\xi}^i - H(\xi) \\ L &= \frac{1}{2}\xi^j(A_{ji} + A_{ij})\dot{\xi} - H(\xi) + \frac{1}{2}\xi^j(A_{ji} - A_{ij})\dot{\xi}^i, \end{aligned}$$

daí resulta

$$L = \frac{1}{2}\xi^j \omega_{ji} \dot{\xi}^i - H(\xi) + \frac{1}{2}\xi^j (A_{ji} + A_{ij}) \dot{\xi}^i,$$

onde $\omega_{ji} = A_{ji} - A_{ij}$ e o último termo nesta equação pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\xi^j (A_{ji} + A_{ij}) \dot{\xi}^i &= \frac{1}{4} \frac{d}{dt} \left[\xi^j (A_{ji} + A_{ij}) \xi^i \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{4} \xi^j (A_{ji} + A_{ij}) \xi^i \right], \end{aligned}$$

então

$$L = \frac{1}{2}\xi^j \omega_{ji} \dot{\xi}^i - H(\xi) + \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{4} \xi^j (A_{ji} + A_{ij}) \xi^i \right]. \quad (3.21)$$

De (3.21) notamos que a parte simétrica da matriz A contribui apenas com uma derivada total para a mudança do Lagrangeano, portanto será omitida e (3.21) toma a seguinte forma

$$L = \frac{1}{2}\xi^j \omega_{ji} \dot{\xi}^i - H(\xi), \quad (3.22)$$

de onde

$$a_i(\xi) = \frac{1}{2}\xi^j \omega_{ji}$$

que é a forma de $a_i(\xi)$ dada em (3.19).

As equações de Euler-Lagrange são expressas como

$$\frac{\partial L}{\partial \xi^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i} \right) = 0, \quad (3.23)$$

com (3.19) o Lagrangeano da equação (3.18), toma a forma seguinte

$$L = \frac{1}{2}\xi^j \omega_{ji} \dot{\xi}^i - H(\xi)$$

com isto obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \xi^i} &= \xi^j \frac{\partial a_j}{\partial \xi^i} - \frac{\partial H}{\partial \xi^i} \\ \frac{\partial L}{\partial \xi^i} &= \frac{1}{2}\dot{\xi}^j \omega_{ij} - \frac{\partial H}{\partial \xi^i} \end{aligned} \quad (3.24)$$

e também

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i} &= a_j \frac{\partial \dot{\xi}^j}{\partial \dot{\xi}^i} \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i} &= a_i(\xi) = \frac{1}{2}\xi^j \omega_{ji}, \end{aligned}$$

então

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i} \right) = \frac{1}{2} \dot{\xi}^j \omega_{ji}, \quad (3.25)$$

e substituindo (3.24) e (3.25) em (3.23) temos

$$\left(\frac{1}{2} \dot{\xi}^j \omega_{ij} - \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi^i} \right) - \left(\frac{1}{2} \dot{\xi}^j \omega_{ji} \right) = 0.$$

Como

$$-\omega_{ij} = \omega_{ji}$$

então

$$\left(\frac{1}{2} \dot{\xi}^j \omega_{ij} - \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi^i} \right) + \left(\frac{1}{2} \right) \dot{\xi}^j \omega_{ij} = 0$$

e daí a equação de Euler-Lagrange torna-se

$$\omega_{ij} \dot{\xi}^j = \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi^i}. \quad (3.26)$$

Ao analisar a equação (3.26) encontramos dois casos:

- a) $\det \omega \neq 0$
- b) $\det \omega = 0$

Concentrando-se no primeiro caso, se a matriz antissimétrica ω tem inversa, então

$$\det(\omega_{ij}) \neq 0$$

e o número de linhas e colunas de ω_{ij} será um número par, ou seja

$$i = j = 1, 2, 3 \dots, N = 2n$$

e ω será uma matriz quadrada de ordem $(2n) \times (2n)$. Determinamos a equação de evolução temporal a partir de (3.26), a qual multiplicamos pela inversa da matriz ω , representada por ω^{ki} . Assim temos que

$$\begin{aligned} \omega^{ki} \omega_{ij} \dot{\xi}^j &= \omega^{ki} \frac{\partial H}{\partial \xi^i} \\ \dot{\xi}^k &= \omega^{ki} \frac{\partial H}{\partial \xi^i} \end{aligned}$$

onde uma troca de índices resulta em

$$\dot{\xi}^i = \omega^{ij} \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi^j}, \quad (3.27)$$

que são as equação dinâmicas com $a_i(\xi)$ dada pela equação (3.19).

A partir de (3.27) definimos o parêntese generalizado de modo que o parêntese de Poisson entre a variável simplética ξ e o Hamiltoniano reproduza (3.27), assim

$$\{\xi^i, H(\xi)\} = \dot{\xi}^i = \omega^{ij} \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi^j}, \quad (3.28)$$

onde $\{\xi^i, H(\xi)\}$ deve cumprir todas as propriedades dos parênteses de Poisson canônicos. Usamos então a seguinte propriedade dos parênteses de Poisson canônicos

$$\{\xi, f(\eta_1, \eta_2, \dots)\} = \{\xi, \eta_1\} \frac{\partial f}{\partial \eta_1} + \{\xi, \eta_2\} \frac{\partial f}{\partial \eta_2} + \dots, \quad (3.29)$$

onde $\xi, \eta_1, \eta_2, \dots$, são funções de p e q .

Assim, usando (3.29) com $\xi = \xi^1, \xi^2, \xi^3, \dots$, temos

$$\begin{aligned} \{\xi^i, H(\xi)\} &= \{\xi^i, \xi^1\} \frac{\partial H}{\partial \xi^1} + \{\xi^i, \xi^2\} \frac{\partial H}{\partial \xi^2} + \dots = \{\xi^i, \xi^j\} \frac{\partial H}{\partial \xi^j}, \\ \{\xi^i, H(\xi)\} &= \{\xi^i, \xi^j\} \frac{\partial H}{\partial \xi^j}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

substituindo esta expressão em (3.28), temos

$$\{\xi^i, H(\xi)\} = \dot{\xi}^i = \omega^{ij} \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi^j} = \{\xi^i, \xi^j\} \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi^j},$$

e portanto

$$\{\xi^i, \xi^j\} = \omega^{ij} \quad (3.31)$$

sendo esta expressão equivalente à definição dos parênteses generalizados dada em (3.28); além de satisfazer todas as propriedades dos parênteses de Poisson. A seguir, provaremos as propriedades mais importantes

- **Antissimetria:** Se

$$\{\xi^i, \xi^j\} = \omega^{ij} \implies \{\xi^j, \xi^i\} = \omega^{ji} = -\omega^{ij} = -\{\xi^i, \xi^j\},$$

daí

$$\{\xi^i, \xi^j\} = -\{\xi^j, \xi^i\}.$$

- **Linearidade:** Usando (3.28) ou (3.31)

$$\{\xi^i, \lambda \xi^j\} = \omega^{ij}(\lambda \delta_i^j) = \lambda \omega^{ij} \delta_i^j,$$

e da expressão anterior, temos

$$\begin{aligned} \{\xi^i, \lambda_1 \xi^j + \lambda_2 \xi^l\} &= \omega^{im}(\lambda_1 \delta_m^j + \lambda_2 \delta_m^l) \\ &= \lambda_1 \omega^{ij} + \lambda_2 \omega^{il}, \end{aligned}$$

que pode ser reescrita, com ajuda de (3.31), como

$$\{\xi^i, \lambda_1 \xi^j + \lambda_2 \xi^l\} = \lambda_1 \{\xi^i, \xi^j\} + \lambda_2 \{\xi^i, \xi^l\}.$$

- **Identidade de Jacobi:** Como

$$\{\xi^i, \xi^j\} = \omega^{ij},$$

então

$$\{\xi^k, \{\xi^i, \xi^j\}\} + \{\xi^i, \{\xi^j, \xi^k\}\} + \{\xi^j, \{\xi^k, \xi^i\}\} = \{\xi^k, \omega^{ij}\} + \{\xi^i, \omega^{jk}\} + \{\xi^j, \omega^{ki}\}, \quad (3.32)$$

e da definição (3.28) ou de (3.31) onde, para nosso caso consideramos que $\omega^{ij} = cte$, substituindo na última equação, temos

$$\{\xi^k, \omega^{ij}\} = \{\xi^i, \omega^{jk}\} = \{\xi^j, \omega^{ki}\} = 0,$$

e substituindo em (3.32) resulta na identidade de Jacobi

$$\{\xi^k, \{\xi^i, \xi^j\}\} + \{\xi^i, \{\xi^j, \xi^k\}\} + \{\xi^j, \{\xi^k, \xi^i\}\} = 0.$$

Podemos generalizar (3.31), usando (3.29), para funções de ξ^i

$$\{A(\xi), B(\xi)\} = \frac{\partial A(\xi)}{\partial \xi^i} \omega^{ij} \frac{\partial B(\xi)}{\partial \xi^j}, \quad (3.33)$$

onde (3.33) satisfaz todas as propriedades dos parênteses de Poisson canônicos. Faremos a seguir as demonstrações das propriedades mais importantes.

- **Antissimetria:** de (3.33)

$$\begin{aligned}\{B, A\} &= \frac{\partial B}{\partial \xi^i} \omega^{ij} \frac{\partial A}{\partial \xi^j} = \frac{\partial B}{\partial \xi^j} \omega^{ji} \frac{\partial A}{\partial \xi^i} = \frac{\partial A}{\partial \xi^i} \omega^{ji} \frac{\partial B}{\partial \xi^j} = -\frac{\partial A}{\partial \xi^i} \omega^{ij} \frac{\partial B}{\partial \xi^j} \\ \{B, A\} &= -\frac{\partial A}{\partial \xi^i} \omega^{ij} \frac{\partial B}{\partial \xi^j}\end{aligned}$$

daí temos a propriedade de antissimetria

$$\{A, B\} = -\{B, A\}.$$

- **Linearidade:** de (3.33) temos

$$\begin{aligned}\{A, \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2\} &= \frac{\partial A}{\partial \xi^i} \omega^{ij} \frac{\partial (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)}{\partial \xi^j} \\ &= \frac{\partial A}{\partial \xi^i} \omega^{ij} \left(\lambda_1 \frac{\partial B_1}{\partial \xi^j} + \lambda_2 \frac{\partial B_2}{\partial \xi^j} \right) \\ &= \lambda_1 \frac{\partial A}{\partial \xi^i} \omega^{ij} \frac{\partial B_1}{\partial \xi^j} + \lambda_2 \frac{\partial A}{\partial \xi^i} \omega^{ij} \frac{\partial B_2}{\partial \xi^j} \\ &= \lambda_1 \{A, B_1\} + \lambda_2 \{A, B_2\},\end{aligned}$$

resultando em

$$\{A, \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2\} = \lambda_1 \{A, B_1\} + \lambda_2 \{A, B_2\}.$$

- **Associatividade:** de (3.33)

$$\begin{aligned}\{A, B\} &= \frac{\partial A}{\partial \xi^i} \omega^{ij} \frac{\partial B}{\partial \xi^j} \\ &= \frac{\partial A}{\partial \xi^i} \omega^{ij} B \frac{\partial C}{\partial \xi^j} + \frac{\partial A}{\partial \xi^i} \omega^{ij} C \frac{\partial B}{\partial \xi^j} \\ &= B\{A, C\} + C\{A, B\},\end{aligned}$$

ou

$$\{A, BC\} = B\{A, C\} + C\{A, B\}.$$

• **Identidade de Jacobi:** de (3.33) temos

$$\begin{aligned} \{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} &= \left\{A, \frac{\partial B}{\partial \xi^j} \omega^{ij} \frac{\partial C}{\partial \xi^i}\right\} + \left\{B, \frac{\partial C}{\partial \xi^i} \omega^{ij} \frac{\partial A}{\partial \xi^j}\right\} \\ &\quad + \left\{C, \frac{\partial A}{\partial \xi^i} \omega^{ij} \frac{\partial B}{\partial \xi^j}\right\} \\ &= \frac{\partial A}{\partial \xi^k} \omega^{kl} \frac{\partial}{\partial \xi^l} \left(\frac{\partial B}{\partial \xi^i} \omega^{ij} \frac{\partial C}{\partial \xi^j} \right) + \frac{\partial B}{\partial \xi^k} \omega^{kl} \frac{\partial}{\partial \xi^l} \left(\frac{\partial C}{\partial \xi^i} \omega^{ij} \frac{\partial A}{\partial \xi^j} \right) + \frac{\partial C}{\partial \xi^k} \omega^{kl} \frac{\partial}{\partial \xi^l} \left(\frac{\partial A}{\partial \xi^i} \omega^{ij} \frac{\partial B}{\partial \xi^j} \right) \\ &= \frac{\partial A}{\partial \xi^k} \omega^{kl} \omega^{ij} \left(\frac{\partial B}{\partial \xi^i} \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^l \partial \xi^j} + \frac{\partial C}{\partial \xi^j} \frac{\partial^2 B}{\partial \xi^l \partial \xi^i} \right) + \frac{\partial B}{\partial \xi^k} \omega^{kl} \omega^{ij} \left(\frac{\partial C}{\partial \xi^i} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^l \partial \xi^j} + \frac{\partial A}{\partial \xi^j} \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^l \partial \xi^i} \right) \\ &\quad + \frac{\partial C}{\partial \xi^k} \omega^{kl} \omega^{ij} \left(\frac{\partial A}{\partial \xi^i} \frac{\partial^2 B}{\partial \xi^l \partial \xi^j} + \frac{\partial B}{\partial \xi^j} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^l \partial \xi^i} \right), \end{aligned}$$

e juntando o primeiro termo com o quarto, o segundo com o quinto e o terceiro com o sexto e trocando os índices entre estes termos, respectivamente, obtemos valores nulos para cada par de termos, resultando na identidade de Jacobi

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0.$$

2) Caso geral

No caso mais geral tomamos $a_i(\xi)$ como uma função arbitrária de ξ , que não depende explicitamente do tempo. Com isto o Lagrangeano L fica expresso como

$$L = a_i(\xi) \dot{\xi}^i - H(\xi),$$

e as equação de Euler-Lagrange para L são

$$\frac{\partial L}{\partial \xi^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i} \right) = 0.$$

Substituindo a expressão do Lagrangeano L , resulta em

$$f_{ij}(\xi) \dot{\xi}^j = \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi^i}, \quad (3.34)$$

onde definimos

$$f_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial \xi^i} - \frac{\partial a_i}{\partial \xi^j}, \quad (3.35)$$

com a propriedade de antissimetria

$$f_{ij} = -f_{ji}.$$

Da equação (3.35) podemos construir a expressão

$$f(\xi) = \left(\frac{\partial a_j}{\partial \xi^i} - \frac{\partial a_i}{\partial \xi^j} \right) d\xi^i d\xi^j = f_{ij} d\xi^i d\xi^j,$$

denominada de 2-forma canônica. Como a 1-forma canônica é $a(\xi) = a_i(\xi)d\xi^i$ então

$$da(\xi) = \left(\frac{\partial a_j}{\partial \xi_i} - \frac{\partial a_i}{\partial \xi_j} \right) d\xi^i d\xi^j$$

e com isto $f(\xi)$ pode ser expressa como

$$f(\xi) = da(\xi),$$

onde $f(\xi)$ é uma diferencial exata. Usando a propriedade das formas diferenciais

$$df = d(da(\xi)) = 0,$$

então $f(\xi)$ é fechada. A análise da expressão (3.34) resulta em:

- a) f_{ij} tem inversa \rightarrow não há vínculos
- b) f_{ij} não tem inversa \rightarrow existem vínculos

Análogo ao primeiro caso, só trataremos o caso não singular, i.e. quando existe a inversa de f_{ij} .

Multiplicando a equação (3.34) pela inversa de f_{ij} , que denotaremos por f^{ij} , temos

$$f^{ki} f_{ij} \dot{\xi}^j = f^{ki} \frac{\partial H}{\partial \xi^i} \implies \dot{\xi}^k = f^{ki} \frac{\partial H}{\partial \xi^i},$$

e fazendo a troca apropriada de índices resulta na equação de evolução temporal de ξ^i ,

$$\dot{\xi}^i = f^{ij} \frac{\partial H}{\partial \xi^j}. \quad (3.36)$$

De maneira similar ao primeiro caso, definimos os parênteses generalizados de modo que reproduza (3.36), assim

$$\{\xi^i, H(\xi)\} = \dot{\xi}^i = f^{ij} \frac{\partial H}{\partial \xi^j}. \quad (3.37)$$

O parêntese dado por (3.37) satisfaz todas as propriedades do parêntese canônico. Da propriedade (3.29)

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^i &= f^{ij} \frac{\partial H}{\partial \xi^j} = \{\xi^i, H(\xi)\} \\ &= \left[\frac{\partial H}{\partial \xi^1} \{\xi^i, \xi^1\} + \frac{\partial H}{\partial \xi^2} \{\xi^i, \xi^2\} + \dots \right] \\ &= \frac{\partial H}{\partial \xi^j} \{\xi^i, \xi^j\} = \{\xi^i, \xi^j\} \frac{\partial H}{\partial \xi^j} \end{aligned}$$

daí

$$f^{ij} \frac{\partial H}{\partial \xi^j} = \{\xi^i, \xi^j\} \frac{\partial H}{\partial \xi^j},$$

e então

$$\{\xi^i, \xi^j\} = f^{ij}(\xi), \quad (3.38)$$

sendo a equação (3.38) equivalente a (3.37) e com esta provaremos a seguir que os parênteses definidos tanto em (3.37) como em (3.38) satisfarão todas as propriedades dos parênteses de Poisson canônicos.

• **Antissimetria:**

$$\{\xi^j, \xi^i\} = f^{ji} = -f^{ij} = -\{\xi^i, \xi^j\},$$

logo

$$\{\xi^i, \xi^j\} = -\{\xi^j, \xi^i\}.$$

• **Identidade de Jacobi:**

Aqui temos que

$$\{\xi^k, \{\xi^i, \xi^j\}\} + \{\xi^i, \{\xi^j, \xi^k\}\} + \{\xi^j, \{\xi^k, \xi^i\}\} = \{\xi^k, f^{ij}(\xi)\} + \{\xi^i, f^{jk}(\xi)\} + \{\xi^j, f^{ki}(\xi)\},$$

e usando a propriedade (3.29) resulta em

$$\{\xi^k, f^{ij}(\xi)\} + \{\xi^i, f^{jk}(\xi)\} + \{\xi^j, f^{ki}(\xi)\} = \frac{\partial f^{ij}}{\partial \xi^l} \{\xi^k, \xi^l\} + \frac{\partial f^{jk}}{\partial \xi^m} \{\xi^i, \xi^m\} + \frac{\partial f^{ki}}{\partial \xi^n} \{\xi^j, \xi^n\}.$$

Usando a expressão (3.38) podemos reescrever a relação acima como

$$\{\xi^k, \{\xi^i, \xi^j\}\} + \{\xi^i, \{\xi^j, \xi^k\}\} + \{\xi^j, \{\xi^k, \xi^i\}\} = \frac{\partial f^{ij}}{\partial \xi^l} f^{kl} + \frac{\partial f^{jk}}{\partial \xi^m} f^{im} + \frac{\partial f^{ki}}{\partial \xi^n} f^{jn}. \quad (3.39)$$

A partir da definição de f_{ij} ,

$$f^{ij} f_{jm} = \delta_m^i$$

temos que

$$f_{mj} \frac{\partial f^{ij}}{\partial \xi^k} = f^{ij} \frac{\partial f_{jm}}{\partial \xi^k}$$

e multiplicando esta equação por f^{lm} obtemos

$$\frac{\partial f^{il}}{\partial \xi^k} = f^{lm} f^{ij} \frac{\partial f^{jm}}{\partial \xi^k}. \quad (3.40)$$

Substituindo (3.40) em (3.39) e realizando as operações de troca de índices duas vezes, temos

$$\{\xi^k, \{\xi^i, \xi^j\}\} + \{\xi^i, \{\xi^j, \xi^k\}\} + \{\xi^j, \{\xi^k, \xi^i\}\} = f^{kl} f^{j\alpha} f^{i\beta} \left(\frac{\partial f_{\beta\alpha}}{\partial \xi^i} + \frac{\partial f_{\alpha l}}{\partial \xi^\beta} + \frac{\partial f_{l\beta}}{\partial \xi^\alpha} \right). \quad (3.41)$$

Da definição de $f_{\beta,\alpha}$,

$$f_{\beta\alpha} = \frac{\partial a_\alpha}{\partial \xi^\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial \xi^\alpha}.$$

e de suas derivadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\beta\alpha}}{\partial \xi^l} &= \frac{\partial^2 a_\alpha}{\partial \xi^l \partial \xi^\beta} - \frac{\partial^2 a_\beta}{\partial \xi^l \partial \xi^\alpha} \\ \frac{\partial f_{l\beta}}{\partial \xi^\alpha} &= \frac{\partial^2 a_\beta}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^l} - \frac{\partial^2 a_l}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta} \\ \frac{\partial f_{\alpha l}}{\partial \xi^\beta} &= \frac{\partial^2 a_l}{\partial \xi^\beta \partial \xi^\alpha} - \frac{\partial^2 a_\alpha}{\partial \xi^\beta \partial \xi^l}, \end{aligned}$$

resulta, somando-as, na identidade de Bianchi para $f_{\alpha\beta}$

$$\frac{\partial f_{\beta\alpha}}{\partial \xi^l} + \frac{\partial f_{\alpha l}}{\partial \xi^\beta} + \frac{\partial f_{l\beta}}{\partial \xi^\alpha} = 0.$$

Deste resultado e de (3.41), obtemos finalmente a identidade de Jacobi para ξ^k

$$\{\xi^k, \{\xi^i, \xi^j\}\} + \{\xi^i, \{\xi^j, \xi^k\}\} + \{\xi^j, \{\xi^k, \xi^i\}\} = 0.$$

De modo análogo ao primeiro caso, podemos também generalizar (3.38) para funções de ξ , assim

$$\{A(\xi), B(\xi)\} = \frac{\partial A(\xi)}{\partial \xi^i} f^{ij}(\xi) \frac{\partial B(\xi)}{\partial \xi^j} \quad (3.42)$$

e, (3.42) também cumpre com todas as propriedades dos parênteses de Poisson canônicos. Neste caso com $a_i(\xi)$ arbitrário, f_{ij} é mais geral e depende de ξ , não sendo constante como no caso especial (primeiro caso).

3.2.2 Formalismo F-J com vínculos

Consideraremos o caso em que as matrizes ω_{ij} e f_{ij} não tem inversas e, consequentemente, existem vínculos.

Da equação de Euler-Lagrange para ω_{ij} (3.26) com $a_i = \frac{1}{2}\xi^j\omega_{ij}$, ou para f_{ij} (3.34) com a_i arbitrário, temos

$$\omega_{ij}\dot{\xi}^j = \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi^i}. \quad (3.43)$$

onde $i, j = 1, 2, \dots, N$. Aqui só consideraremos a matriz ω_{ij} pois sua análise é igual para f_{ij} e as conclusões também serão as mesmas. Como

$$\det \omega = 0,$$

o posto de ω_{ij} é menor que N ,

$$\text{Posto } \omega = N^* < N.$$

Reescrevendo (3.43) explicitamente como,

$$\begin{pmatrix} \omega_{11} & \dots & \omega_{1N} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \omega_{N1} & \dots & \omega_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi}^1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \xi^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial \xi^N} \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

e usando operações elementares de linhas, multiplicamos ambos membros da equação (3.44) pelos números $(y_1^1, y_1^2, \dots, y_1^N)$

$$\begin{pmatrix} y_1^1 \\ \vdots \\ y_1^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{11} & \dots & \omega_{iN} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \omega_{N1} & \dots & \omega_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi}^1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^1 \\ \vdots \\ y_1^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \xi^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial \xi^N} \end{pmatrix}.$$

Logo somamos todas as linhas e as substituímos na última linha obtendo

$$\begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1N} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi}^1 \\ \dot{\xi}^2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \xi^1} \\ \frac{\partial H}{\partial \xi^2} \\ \vdots \\ y_1^1 \frac{\partial H}{\partial \xi^1} + \dots + y_1^N \frac{\partial H}{\partial \xi^N} \end{pmatrix},$$

e desta equação matricial devemos ter que

$$y_1^1 \frac{\partial H}{\partial \xi^1} + y_1^2 \frac{\partial H}{\partial \xi^2} + \dots + y_1^N \frac{\partial H}{\partial \xi^N} = 0. \quad (3.45)$$

Se proseguirmos fazendo operações sobre linhas, obteremos a matriz ω na seguinte forma

$$\omega = (\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} x & x & x & x & x & \dots & x \\ 0 & x & x & x & x & \dots & x \\ 0 & 0 & x & x & x & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

em (3.46) ω é uma matriz $N \times N$ com N^* primeiras linhas e N' últimas linhas nulas.

A equação (3.45) é obtida para cada uma das N' últimas filas da matriz ω . Então (3.45) pode ser expressa em forma mais geral, como

$$y_a^i \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi^i} = 0 \quad (3.47)$$

com $a = 1, 2, \dots, N'$, e os y_a^i sendo simplesmente números.

Disto diz-se então que há N' modos zero y_a^i , sendo (3.47) uma equação de vínculos em termos de ξ^i . Diz-se então que o sistema está vinculado por N' equações nas quais não aparece a derivada temporal. É importante enfatizar que, para que ω adote a forma dada em (3.46) deva-se cumprir a condição (3.47).

Considerando a forma da matriz ω e analisando a equação (3.47) podemos dizer que no espaço ortogonal ao espaço descrito pelas coordenadas z_a , a matriz ω possui inversa cuja dimensão é par ($2n$). As variáveis z_a com $a = 1, 2, \dots, N'$ são as coordenadas de um subespaço imerso no espaço de dimensão N ($N' < N$). O espaço ortogonal é um espaço de dimensão par descrito pelas coordenadas $\xi^{i'}$, $i' = 1, 2, \dots, 2n = N^*$.

O que obtivemos até agora é que a partir da obtenção de ω na forma (3.46) conseguimos um espaço de dimensão menor que N cuja dimensão é par que será descrito pelas coordenadas $\xi^{i'}$; com $i' = 1, 2, \dots, 2n$, neste espaço que é ortogonal ao espaço descrito pelas coordenadas z_a , a matriz ω é inversível, uma vez que agora o número de filas e colunas de ω são números pares, i.e. $\det \omega$ é não nulo, pois ela é antissimétrica. Seja ω' a representação de ω neste espaço de menor dimensão (par) descrito pelos $\xi^{i'}$, sendo a dimensão do espaço total = $N = 2n + N'$, onde $2n$ é a dimensão do espaço descrito pelos $\xi^{i'}$ e, N' é a dimensão do espaço descrito pelos z_a . Expressando isso em índices:

$$i, j : 1, 2, \dots, N = \begin{cases} i', j' = 1, 2, \dots, 2n \\ a = 1, 2, \dots, N' \end{cases}$$

e assim $N = 2n + N'$.

A seguinte interpretação pode ser feita segundo o que se fez acima. Dividimos o espaço total N , em dois subespaços; um subespaço descrito pelas coordenadas $\xi^{i'}$ de dimensão par ($i' = 1, 2, \dots, 2n$) e outro subespaço descrito pelas coordenadas $\xi^{i''}$ com $i'' = 2n + 1, 2n + 2, \dots, N - 2n$ de dimensão $N - 2n$. Neste subespaço, para tornar mais fácil a notação substituímos as coordenadas $\xi^{i''}$ pelas coordenadas z_a com o índices $a = 1, 2, \dots, N' = N - 2n$. Ambos espaços são ortogonais entre si.

No espaço de dimensão par, a matriz ω possui uma inversa, isto se deduz do fato de que ω é levado a forma dada em (3.46). Podemos representar ω neste subespaço como ω' ($\omega_{i'j'}; i', j' = 1, 2, \dots, 2n$), sendo que ω' possui inversa e é a ela à quem nos referimos quando dizemos que ω tem inversa no subespaço de dimensão par descrito pelos $\xi^{i'}$.

O problema principal foi que a matriz ω não tinha inversa no espaço total de dimensão N mas neste subespaço, descrito pelos $\xi^{i'}$, ω possui uma inversa. Então soluciona-se o problema da singularidade da matriz ω . Já que agora ω tem uma inversa neste subespaço podemos seguir todos os passos da seção 2.2.1 sem nenhum problema quando ω tinha inversa no espaço total de dimensão N . O objetivo agora é passar todas aquelas quantidades que tínhamos no espaço total de dimensão N ao subespaço de dimensão par $2n$, quantidades como o Lagrangeano e o Hamiltoniano. Os Lagrangeanos também terão diferentes formas segundo o espaço de dimensão N ou o espaço de dimensão par em que se encontrem, mas a física contida neles é a mesma.

Em seguida expressaremos (3.47) de outra forma que nos permita fazer uma análise mais apropriada e clara.

Assim, de (3.47), temos

$$y_a^1 \frac{\partial H}{\partial \xi^1} + y_a^2 \frac{\partial H}{\partial \xi^2} + \dots + y_a^N \frac{\partial H}{\partial \xi^N} = 0$$

ou

$$(y_a^1 \frac{\partial}{\partial \xi^1} + y_a^2 \frac{\partial}{\partial \xi^2} + \dots + y_a^N \frac{\partial}{\partial \xi^N}) H(\xi) = 0. \quad (3.48)$$

Substituímos o operador entre parênteses pelo operador $\frac{\partial}{\partial z_a}$, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial z_a} = y_a^1 \frac{\partial}{\partial \xi^1} + y_a^2 \frac{\partial}{\partial \xi^2} + \dots + y_a^N \frac{\partial}{\partial \xi^N}. \quad (3.49)$$

Agora, substituindo (3.49) em (3.48), resulta em

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_a}\right) H = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial H}{\partial z_a} = 0 \quad (3.50)$$

que é outra forma de expressar (3.47).

Resolver o problema de ω não ter inversa indo a um subespaço de dimensão par, implica que se deve satisfazer as eqs.(3.47) ou (3.50), as quais envolvem as coordenadas z_a e ξ^i , como veremos mais adiante. Tanto (3.47) como (3.50) envolvem as coordenadas ξ^i entre si, e as coordenadas ξ^i com z_a . Isto é, estas coordenadas estão vinculadas entre elas e por isso (3.47) ou (3.50) são as equações de vínculos, que assim surjem no sistema. Como $a = 1, 2, \dots, N'$ o sistema está vinculado por N' equações.

Da equação (3.49)

$$\frac{\partial}{\partial z_a} = y_a^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} \quad (3.51)$$

e usando a regra da cadeia para $\frac{\partial}{\partial z_a}$ obtemos

$$\frac{\partial}{\partial z_a} = \frac{\partial \xi^i}{\partial z_a} \frac{\partial}{\partial \xi^i}. \quad (3.52)$$

Daí temos

$$y_a^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial z_a} \quad (3.53)$$

e portanto

$$\partial z_a = \frac{1}{y_a^i} \partial \xi^i,$$

onde y_a^i são números. Logo, da última equação, temos

$$z_a = \int \frac{\partial \xi^i}{y_a^i} = \frac{\xi^i}{y_a^i} + f(\xi^j) \quad j \neq i,$$

daí

$$z_a = \frac{\xi^i}{y_a^i} + f(\xi^j) \quad j \neq i \quad (3.54)$$

desta equação, generalizando, temos

$$z_a = z_a(\xi^i), \quad a = 1, 2, \dots, N' \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.55)$$

onde N' é o número de equações e N é número de incógnitas. Como $N' < N$, então $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{2n}$ não podem ser expressos em termos de z_a . A equação (3.55) não expressa uma transformação de coordenadas mas apenas uma relação entre elas.

Analisando a expressão (3.55) temos que a forma como foram feitas as mudanças de variáveis para as coordenadas $\xi^i, i = 1, 2, \dots, N$, é

$$z_{i'} = \xi^{i'} \begin{cases} z_1 = \xi^1 \\ z_2 = \xi^2 \\ \vdots \\ z_{2n} = \xi^{2n} \end{cases} \quad i' = 1, 2, \dots, 2n \quad (3.56)$$

onde notamos que os $\xi^{i'} = z_{i'} = \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{2n}$ não podem ser obtidos em função dos z_a , pois os z_a estão expressos da seguinte forma

$$z_a \begin{cases} z_{2n+1} = z_{2n+1}(\xi^i) \\ z_{2n+2} = z_{2n+2}(\xi^i) \\ \vdots \\ z_N = z_N(\xi^i) \end{cases} \quad a = 2n + 1, 2n + 2, \dots, N = 2n + N' \quad (3.57)$$

onde as variáveis $\xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}, \dots, \xi^N$ podem ser obtidas em função dos z_a e os $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^N$. Aqui estamos considerando que os ξ^{2n+1}, \dots, ξ^N são as incógnitas e os $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{2n}$ com os z_a são as quantidades dadas.

Para simplificar a notação dos índices a , consideraremos z_{2n+1} como o primeiro termo ou a primeira coordenada de todas as z_a , então $n = 0$ e temos que

$$a = 1, 2, \dots, N'$$

então

$$z_a \begin{cases} z_1 = z_1(\xi^i) \\ z_2 = z_2(\xi^i) \\ \vdots \\ z_{N'} = z_{N'}(\xi^i) \end{cases} \quad (3.58)$$

ou seja temos N' equações e N' variáveis $\xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}, \dots, \xi^{N'} = \xi^a$.

Dáí o Hamiltoniano $H(\xi^i)$ com $i = 1, 2, \dots, N$ e expresso no espaço total de dimensão N é

$$H(\xi^i) = H(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \xi^{2n+2}, \dots, \xi^N), \quad (3.59)$$

e de (3.56) e (3.58) as variáveis $\xi_i = \xi^1, \dots, \xi^{2n}, \xi^{2n+1}, \dots, \xi^N$ serão expressas em termos de $\xi^{i'}$ e z_a , ou seja, $\xi^i = \xi^{i'}, z_a$. Então (3.59) resulta em

$$H(\xi) = H(\xi^i) = H(\xi^{i'}, z_a) = H(\xi', z), \quad (3.60)$$

onde, para simplificar a notação fizemos $\xi^{i'} = \xi^i$.

Substituindo (3.60) em (3.47) ou (3.50) obtemos

$$\frac{\partial H(\xi', z)}{\partial z_a} = 0 \quad (3.61)$$

que é a equação de vínculos. A expressão (3.61) é a mesma que a equação de vínculos (3.50). Só que em (3.61) o Hamiltoniano H é dado em função dos $\xi^{i'}$ e z_a , o que agora nos permite expressar os z_a em função dos $\xi^{i'}$ o que é o objetivo desejado, pois segundo (3.56) e (3.57) não é possível fazê-lo.

Com (3.61) podemos levar tanto o Hamiltoniano como o Lagrangeano ao subespaço descrito pelos $\xi^{i'}$, cuja dimensão é par e onde, portanto, ω possui inversa de forma a tratar o problema com uma matriz ω' não singular. As coordenadas $\xi^{i'}$ não estão vinculadas entre si, devido a (3.61).

Passamos a expressar o Lagrangeano sob as condições dadas anteriormente. Seja a matriz ω' no subespaço descrito pelos $\xi^{i'}$, então ω' possui inversa e o Lagrangeano continua sendo L mas agora será expresso em termos das coordenadas $\xi^{i'}$ (espaço menor) que não estão vinculadas entre si. Então o Lagrangeano, L neste caso, é dado no subespaço expandido pelos $\xi^{i'}$ como

$$L = \frac{1}{2} \xi^{i'} \omega_{i'j'} \dot{\xi}^{j'} - H(\xi', z) \quad (3.62)$$

onde $i'j' = 1, 2, \dots, 2n$, $\xi^i = \xi^{i'}$, $z = z_a$, $a = 1, 2, \dots, N'$.

De (3.60), (3.61) e (3.62) vemos que $H(\xi^i)$ expresso em termos de $\xi^{i'}$ envolve os z_a , os quais estão presentes na equação de vínculos (3.61), de onde podemos determinar os z_a em termos dos $\xi^{i'}$. Assim obtemos o Hamiltoniano só em função dos $\xi^{i'}$.

Porém é preciso realizar uma análise adicional da equação de vínculos eq.(3.61) com o propósito de conhecer $H(\xi', z)$ de acordo como estejam os z_a presentes neste Hamiltoniano.

- Se os z_a no Hamiltoniano $H(\xi^{i'}, z)$ não são lineares então podemos resolver a equação para os z_a e expressá-los em função de $\xi^{i'}$. Isto requer que

$$\det \left[\frac{\partial^2 H(\xi', z)}{\partial z_a \partial z_b} \right] \neq 0,$$

pois desta maneira o Hamiltoniano $H(\xi', z)$ poderá ser expresso somente em função dos $\xi^{i'}$

$$H(\xi', z) = H(\xi').$$

Como consequência o Lagrangeano, segundo (3.62), se expressará todo em função dos $\xi^{i'}$. Neste caso ω' possui uma inversa no espaço descrito pelos $\xi^{i'}$ e neste subespaço não existirão vínculos e portanto o Lagrangeano L de (3.62) será fácil de analisar e será o mesmo caso que o da seção 2.1 quando não há vínculos, ou seja, fomos de um problema que possuía vínculos num espaço maior a um problema sem vínculos num espaço de dimensão menor (descrito pelos $\xi^{i'}$).

- Se os z_a no Hamiltoniano $H(\xi', z)$ são lineares então a equação (3.61) não permite expressar z_a em termos de $\xi^{i'}$, pois os z_a estarão ausentes e (3.61) seria uma relação entre os $\xi^{i'}$ somente. Neste caso nem todos os z_a poderão ser expressos em termo dos $\xi^{i'}$ e, portanto, o Hamiltoniano $H(\xi', z)$ não poderá ser expresso só em função dos $\xi^{i'}$ senão que terá uma parte que envolverá ainda os z_a .

Obtendo e eliminando tantos z_a quanto sejam possíveis em termos dos ξ' através da equação (3.61), o Hamiltoniano $H(\xi', z)$ terá a seguinte forma

$$H(\xi', z) = H(\xi') + z_k \phi^k(\xi') \quad k < a,$$

substituindo este Hamiltoniano em (3.62) o Lagrangeano L , conseqüentemente, pode ser expresso como

$$L = \frac{1}{2} \xi^{i'} \omega_{i'j'} \xi^{j'} - H(\xi') - z_k \phi^k(\xi') \quad (3.63)$$

onde observamos que o último termo de (3.63) provém do fato de que existem z_k que aparecem de forma linear em $H(\xi', z)$. É aqui onde surjem os vínculos no subespaço descrito pelos $\xi^{i'}$. Estes vínculos relacionam os $\xi^{i'}$ entre si. Os z_k farão o papel de multiplicadores de Lagrange. Devemos lembrar que ω' ainda possui uma inversa. Se renomeamos os z_k por λ_k na equação anterior, o Lagrangeano L fica expresso como

$$L = \frac{1}{2} \xi^{i'} \omega_{i'j'} \xi^{j'} - H(\xi') - \lambda_k \phi^k(\xi'). \quad (3.64)$$

Os únicos e verdadeiros vínculos no modelo neste subespaço são os $\phi^k(\xi')$, os quais estão multiplicados pelos multiplicadores de Lagrange λ_k .

Para incorporar os vínculos ao modelo não é necessário classificá-los como de primeira e segunda classe. Mais propriamente resolveremos estes vínculos satisfazendo a seguinte equação

$$\phi^k(\xi') = 0 \quad (3.65)$$

a equação (3.65) provém da equação de Euler-Lagrange para L com respeito aos λ_k pois agora, segundo o método de multiplicadores de Lagrange [24], λ_k passa a ser também um grau de liberdade ou variável independente do sistema. Assim temos

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_k} \right) = 0, \quad (3.66)$$

e usando o Lagrangeano L segundo (3.64) temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} &= \phi^k(\xi^i) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_k} \right) &= 0 \end{aligned}$$

e substituindo em (3.66) resulta

$$\phi^k(\xi^i) - 0 = 0 \quad \longrightarrow \quad \phi^k(\xi^i) = 0.$$

A equação (3.65) dá as relações entre os ξ^i , uma vez que daí pode-se expressar alguns dos ξ^i em função dos outros ξ^i reduzindo assim o número das variáveis ξ^i na equação (3.64).

Por meio de (3.65) elimina-se o último termo na equação (3.64) e reduz-se o número de ξ^i a menos de $2n$ que estão presentes em (3.64). De (3.65), ao expressar os ξ^i em função dos outros ξ^i e substituir em (3.64) com $\phi^k(\xi^i) = 0$, obtêmos uma nova 1-forma canônica representada por $\bar{a}(\xi^i)$ com $i = 1, 2, \dots, \kappa$ e $\kappa < 2n$. Assim obtemos de (3.64) um Lagrangeano L em termos dos novos ξ^i , novamente se analisa este Lagrangeano de forma igual a que se fez nas seções 2.2.1 e 2.2.2. Repete-se toda a análise anterior mas usando $\bar{a}(\xi^i)$, considerando se existe ou não inversa para ω e desenvolvendo os dois casos anteriormente analisados.

Resumindo: o que fizemos foi reduzir o espaço de fase com vínculos mediante uma transformação de Darboux a um espaço sem vínculos onde a matriz ω tem inversa deixando de fora, deste modo, os vínculos do sistema físico e obtendo os parênteses generalizados que nós permitaram quantizar o sistema físico em questão.

Com certeza podem existir obstáculos técnicos ao levar a cabo os passos anteriores, resolver os vínculos pode ser demasiado difícil e construir a transformação de Darboux para as coordenadas canônicas pode não ser possível, fazendo-nos retornar ao método de Dirac.

3.3 Exemplos

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos enfocando e dando a motivação física aos resultados obtidos nas seções anteriores. Daremos exemplos tanto para

sistemas sem vínculos como também para sistemas vinculados, no caso discreto ou para campos.

Com estes exemplos, para o caso de sistemas sem vínculos, mostraremos que os resultados obtidos usando o método F-J são consistentes ao fazer a comparação com os resultados que se obtêm usando o método de Dirac. No caso de sistemas vinculados, mostraremos explicitamente todo o procedimento que o método F-J implica. Para isso faremos uso de modelos com Lagrangeanos conhecidos na física como: o campo livre de Dirac, o modelo de Proca, o campo eletromagnético livre e a QED. Sendo óbvio que em todos eles faremos uso de conceitos da teoria de campos.

Começaremos com o exemplo para sistemas não vinculados.

3.3.1 Sistemas não vinculados

Apresentamos um exemplo onde mostramos que os resultados obtidos com o método de F-J são os mesmos que os obtidos usando o método de Dirac.

No exemplo são feitas as aproximações necessárias, considerando o comportamento dos campos, neste caso elétrico e magnético, para obter o Lagrangeano da forma (3.14) com o qual se constroi o método de F-J.

Exemplo 1.

Neste exemplo mostramos que os parênteses generalizados obtidos no método de F-J, são iguais aos parênteses de Dirac definidos na formulação clássica do método de Dirac.

Consideremos uma partícula massiva em qualquer número de dimensões, movimentando-se num campo eletromagnético externo descrito pelos potenciais: vetorial $a_i(\xi)$ e escalar $V(\xi)$.

O Lagrangeano e Hamiltoniano para esta partícula naquele campo são muito conhecidos, assim

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^i\dot{\xi}^i + a_i(\xi)\dot{\xi}^i - V(\xi) \quad (3.67)$$

$$H = \frac{1}{2m}(p_i - a_i(\xi))^2 + V(\xi) \quad (3.68)$$

com $a_i(\xi)$ arbitrário. Segundo o método de Dirac, define-se o momento

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i} = m\dot{\xi}^i + a_i(\xi)\dot{\xi}^i$$

logo temos

$$p_i - a_i(\xi) = m\dot{\xi}^i \quad (3.69)$$

onde p_i é conjugado a ξ^i . Os parênteses de Poisson fundamentais são

$$\begin{aligned}\{\xi^j, p_i\} &= \delta_i^j \\ \{\xi^i, \xi^j\} &= 0 \\ \{p_j, p_i\} &= 0\end{aligned}$$

onde ξ^i corresponde ao q_i na formulação clássica dos parênteses de Poisson.

Se substituimos (3.69) em (3.68) temos

$$H = \frac{1}{2m}(m\dot{\xi}^i)(m\dot{\xi}^i) + V(\xi) = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^i\dot{\xi}^i + V(\xi)$$

e daí então

$$H = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^i\dot{\xi}^i + V(\xi). \quad (3.70)$$

Se a massa m se faz muito pequena, $m \rightarrow 0$, então em (3.67) e (3.70) temos, respectivamente,

$$\begin{aligned}L &= a_i(\xi)\dot{\xi}^i - V(\xi) \\ H &= V(\xi)\end{aligned}$$

e a partir destas duas últimas equações se desenvolve o formalismo de F-J.

Com $m \rightarrow 0$ na equação (3.69) temos

$$p_i - a_i(\xi) = m\dot{\xi}^i \approx 0 \quad (3.71)$$

Se

$$\phi_i = p_i - a_i(\xi) \approx 0 \quad (3.72)$$

então, segundo Dirac, ϕ_i é um vínculo

$$\phi_i = p_i - a_i(\xi) \quad (3.73)$$

e ϕ_i é de segunda classe, como demonstramos a seguir

$$\begin{aligned}\{\phi_i, \phi_j\} &= \{p_i - a_i(\xi), p_j - a_j(\xi)\} = \{m\dot{\xi}^i, m\dot{\xi}^j\} \\ \{\phi_i, \phi_j\} &= -\{p_i, a_j(\xi)\} - \{a_i(\xi), p_j\} \\ &= \frac{\partial a_j}{\partial \xi^i} \frac{\partial p_i}{\partial p_j} - \frac{\partial a_i}{\partial \xi^j} \frac{\partial p_j}{\partial p_i} \\ &= \frac{\partial a_j}{\partial \xi^i} - \frac{\partial a_i}{\partial \xi^j} = f_{ij}\end{aligned}$$

então, obtemos

$$\{\phi_i, \phi_j\} = \{m\dot{\xi}^i, m\dot{\xi}^j\} = f_{ij} \neq 0. \quad (3.74)$$

Segundo esta última equação o parêntese de Poisson dos ϕ_i é diferente de zero e portanto ϕ_i é de segunda classe de acordo com a definição de Dirac. Portanto, podemos agora calcular o parêntese de Dirac para ξ^i e ξ^j . Assim, segundo a definição do parêntese de Dirac, temos

$$\{\xi^i, \xi^j\}_D = \{\xi^i, \xi^j\} - \{\xi^i, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, \xi^j\} \quad (3.75)$$

Mas de (3.74) f_{ij} é a matriz formada unicamente pelos parênteses de Poisson dos vínculos de segunda classe.

Então f_{ij} o pode ser identificado com a matriz $C_{\alpha\beta}$ que também é uma matriz formada pelos parênteses de Poisson só de vínculos de segunda classe. Portanto, também podemos identificar o inverso de f_{ij} com o de $C_{\alpha\beta}$, assim

$$C^{\alpha\beta} = f^{ij}$$

e substituindo em (3.75)

$$\{\xi^i, \xi^j\}_D = \{\xi^i, \xi^j\} - \{\xi^i, \chi_\alpha\} f^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, \xi^j\},$$

onde χ_α e χ_β são de segunda classe. Então para nosso problema

$$\begin{aligned} \chi_\alpha &= \phi_\alpha \\ \chi_\beta &= \phi_\beta, \end{aligned}$$

logo

$$\{\xi^i, \xi^j\}_D = \{\xi^i, \xi^j\} - \{\xi^i, \phi_\alpha\} f^{\alpha\beta} \{\phi_\beta, \xi^j\}$$

com

$$\begin{aligned} \phi_\alpha &= p_\alpha - a_\alpha(\xi) = m\dot{\xi}^\alpha \\ \phi_\beta &= p_\beta - a_\beta(\xi) = m\dot{\xi}^\beta. \end{aligned}$$

Temos então que os parênteses de Dirac são

$$\{\xi^i, \xi^j\}_D = \{\xi^i, \xi^j\} - \{\xi^i, p_\alpha - a_\alpha(\xi)\} f^{\alpha\beta} \{p_\beta - a_\beta(\xi), \xi^j\}$$

mas

$$\{\xi^i, \xi^j\} = 0$$

portanto

$$\{\xi^i, \xi^j\}_D = -[\{\xi^i, p_\alpha\} - \{\xi^i, a_\alpha(\xi)\}]f^{\alpha\beta}[\{p_\beta, \xi^j\} - \{a_\beta(\xi), \xi^j\}].$$

Porém também temos, segundo as regras de comutação para coordenadas e momentos, que

$$\begin{aligned}\{\xi^i, a_\alpha(\xi)\} &= 0 \\ \{\xi^i, p_\alpha\} &= \delta_\alpha^i \\ \{a_\beta(\xi), \xi^j\} &= 0 \\ \{p_\beta, \xi^j\} &= -\delta_\beta^j\end{aligned}$$

e com estas relações temos

$$\{\xi^i, \xi^j\}_D = -\delta_\alpha^i f^{\alpha\beta} (-\delta_\beta^j)$$

e finalmente obtemos

$$\{\xi^i, \xi^j\}_D = f^{ij}(\xi), \quad (3.76)$$

e de (3.38) e (3.76) temos que

$$\{\xi^i, \xi^j\} = \{\xi^i, \xi^j\}_D.$$

Assim, concluímos que o resultado obtido pelo método de Dirac é também obtido pelo método de F-J, talvez com maior rapidez. Ou seja, o parêntese de F-J é o mesmo que o parêntese de Dirac no caso de sistemas sem vinculados.

3.3.2 Sistemas vinculados

Apresentamos os mesmos exemplos que usamos para ilustrar o método de Dirac, (seção 1.4) porém agora desenvolvidos pelo método de F-J para sistemas vinculados. Nestes exemplos usamos o conceito de campos e nosso objetivo é obter os parênteses generalizados entre as variáveis físicas para poder quantizar o sistema físico. Os Lagrangeanos usados nos exemplos são muito conhecidos e comuns na física. Neles desenvolveremos explicitamente o procedimento do método de F-J, como veremos a seguir.

1) Campo Livre de Dirac

Da equação (2.110) da seção 1.4 a densidade Lagrangeana para o campo livre de Dirac é

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_D &= i\frac{(\lambda+1)}{2}\psi^\dagger\dot{\psi} + i\frac{(\lambda-1)}{2}\dot{\psi}^\dagger\psi + i\frac{(\lambda+1)}{2}\psi^\dagger\vec{\alpha}\cdot\nabla\psi \\ &+ i\frac{(\lambda-1)}{2}\nabla\psi^\dagger\cdot\vec{\alpha}\psi - m\psi^\dagger\gamma^0\psi\end{aligned} \quad (3.77)$$

onde todos os termos desta equação são explicados naquela seção.

Esta densidade Lagrangeana \mathcal{L}_D já está em primeira ordem, ou seja, é linear nas velocidades $\dot{\psi}$ e $\dot{\psi}^\dagger$. Portanto não precisamos definir os momentos conjugados aos campos, pois \mathcal{L}_D está na forma apropriada para usar o método de F-J, como explicamos na introdução, seção 2.1.1.

Segundo o formalismo F-J com vínculos (seção 2.2.2), notamos que \mathcal{L}_D não contém as variáveis do tipo z , pois todas as variáveis simpléticas ou campos no Hamiltoniano estão também presentes nos dois primeiros termos simpléticos.

De (3.77) identificamos as variáveis simpléticas

$$\xi_I = (\psi, \psi^\dagger) \quad (3.78)$$

e daí também temos que os coeficientes destas variáveis são

$$\begin{aligned} a_\psi &= i \frac{\lambda + 1}{2} \psi^\dagger \\ a_{\psi^\dagger} &= i \frac{\lambda - 1}{2} \psi. \end{aligned} \quad (3.79)$$

A matriz 2-forma f_{IJ} está definida, segundo a equação (3.35) no caso de campos, como

$$f_{IJ}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\delta a_J(\vec{y})}{\delta \xi_I(\vec{x})} - \frac{\delta a_I(\vec{x})}{\delta \xi_J(\vec{y})}, \quad (3.80)$$

e daí resulta

$$f_{\psi\psi^\dagger} = f_{\psi^\dagger\psi} = 0. \quad (3.81)$$

Logo, usando (3.80) e (3.79) obtemos que

$$\begin{aligned} f_{\psi\psi^\dagger}(\vec{x}, \vec{y}) &= \frac{\delta a_{\psi^\dagger}(\vec{y})}{\delta \psi(\vec{x})} - \frac{\delta a_\psi(\vec{x})}{\delta \psi^\dagger(\vec{y})} \\ &= i \frac{\lambda - 1}{2} \delta(\vec{y} - \vec{x}) - i \frac{\lambda + 1}{2} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ f_{\psi^\dagger\psi}(\vec{x}, \vec{y}) &= -i \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned}$$

e também

$$f_{\psi^\dagger\psi}(\vec{x}, \vec{y}) = i \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.82)$$

Então a matriz f_{IJ} tem a seguinte forma

$$f_{IJ}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.83)$$

e como $\det f_{IJ}(\vec{x}, \vec{y}) \neq 0$, então $f_{IJ}(\vec{x}, \vec{y})$ tem inversa.

Determinamos a inversa $f_{IJ}^{-1}(\vec{x}, \vec{y})$ desta matriz usando a seguinte relação

$$\int f_{IJ}(\vec{x}, \vec{z}) f_{JK}^{-1}(\vec{z}, \vec{y}) d\vec{z} = \delta_{IK} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.84)$$

e daí

$$f_{IJ}^{-1}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.85)$$

Os parênteses generalizados, segundo a equação (3.38), são dados como

$$\{\xi_I(\vec{x}), \xi_J(\vec{y})\} = f^{IJ}(\vec{x}, \vec{y}) = f_{IJ}^{-1}(\vec{x}, \vec{y}), \quad (3.86)$$

e então, com as equações (3.85) e (3.86), obtemos os seguintes parênteses generalizados

$$\begin{aligned} \{\psi(\vec{x}), \psi(\vec{y})\} &= 0 \\ \{\psi^\dagger(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{y})\} &= 0 \\ \{\psi(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{y})\} &= -i\delta(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Colocando em termos do campo adjunto $\bar{\psi}$, temos

$$\begin{aligned} \{\psi(\vec{x}), \psi(\vec{y})\} &= 0 \\ \{\bar{\psi}(\vec{x}), \bar{\psi}(\vec{y})\} &= 0 \\ \{\psi(\vec{x}), \bar{\psi}(\vec{y})\} &= -i\gamma^0 \delta(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (3.88)$$

sendo estes os parênteses apropriados para quantizar a teoria em questão.

2) Modelo de Proca Abeliano

Da seção 1.4, temos que a densidade Lagrangeana para este modelo é

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \quad (3.89)$$

e desenvolvendo esta expressão temos que

$$\mathcal{L}_P = \frac{1}{2} \dot{\vec{A}}^2 + \vec{A} \cdot \nabla A_0 + \frac{1}{2} (\nabla A_0)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \times \vec{A})^2 + \frac{m^2}{2} A_0^2 - \frac{m^2}{2} \vec{A}^2. \quad (3.90)$$

Desta equação notamos que \mathcal{L}_P é um Lagrangeano de segundo ordem pois não é linear em $\dot{\vec{A}}$. Então, para usar o método de F-J, temos que linearizar o Lagrangeano

\mathcal{L}_P e para isso definimos o momento canônico conjugado aos campos. Os campos são A^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$, e os momentos conjugados π_μ são definidos como

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \dot{A}^\mu} \quad (3.91)$$

e daí

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 0 \\ \vec{\pi} &= -(\dot{\vec{A}} + \nabla A_0). \end{aligned}$$

Usando a transformada de Legendre podemos expressar \mathcal{L}_P linearmente em $\dot{\vec{A}}$ como

$$\mathcal{L}_P = -\vec{\pi} \cdot \dot{\vec{A}} - \frac{1}{2}[\vec{\pi}^2 + (\nabla \times \vec{A})^2] - \vec{\pi} \cdot \nabla A_0 + \frac{m^2}{2} A_0^2 - \frac{m^2}{2} \vec{A}^2, \quad (3.92)$$

onde $\vec{\pi} = (\pi^i) = (-\pi_i)$.

Fazendo a integração por partes do terceiro termo em (3.92) e usando as condições de fronteira

$$\vec{r} \rightarrow \infty \quad A_0 \rightarrow 0 \quad \vec{\pi} \rightarrow 0$$

temos que

$$\mathcal{L}_P = -\vec{\pi} \cdot \dot{\vec{A}} - \frac{1}{2}[\vec{\pi}^2 + (\nabla \times \vec{A})^2 + m^2 \vec{A}^2] + A_0 \nabla \cdot \vec{\pi} + \frac{m^2}{2} A_0^2 \quad (3.93)$$

onde identificamos a densidade Hamiltoniana, que pode ser expressa como

$$\mathcal{H}_P = \frac{1}{2}[\vec{\pi}^2 + (\nabla \times \vec{A})^2 + m^2 \vec{A}^2] - A_0 \nabla \cdot \vec{\pi} - \frac{1}{2} m^2 A_0^2, \quad (3.94)$$

e com isto o Hamiltoniano H_P é

$$H_P = \int \frac{1}{2}[\vec{\pi}^2 + (\nabla \times \vec{A})^2 + m^2 \vec{A}^2] - A_0 \nabla \cdot \vec{\pi} - \frac{1}{2} m^2 A_0^2 d\vec{r}. \quad (3.95)$$

Inicialmente em (3.93) tínhamos as variáveis simpléticas

$$(A^i, \pi_i, A_0) \quad (3.96)$$

onde $i = 1, 2, 3$. Ao comparar a densidade Lagrangeana \mathcal{L}_P ou o Lagrangeano L_P com a forma do Lagrangeano do método F-J dada em (3.62), seção 2.2.2, notamos que a única quantidade que faz o papel da variável do tipo z é A_0 , pois ela está em \mathcal{H}_P , mas não esta no termo simplético de \mathcal{L}_P . Então

$$z = z_1 = A_0 \quad (3.97)$$

daí as novas variáveis simpléticas são

$$\xi_I = (A^i, \pi_i). \quad (3.98)$$

Agora a equação de movimento para A_0 é

$$\frac{\delta H_P}{\delta A_0} = 0 \quad (3.99)$$

logo

$$\frac{\delta H_P}{\delta A_0} = \frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial A_0} - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}_P}{\partial (\partial_i A_0)} \right) = 0,$$

e usando (3.94) na equação anterior temos que

$$A_0 = \frac{-\nabla \cdot \vec{\pi}}{m^2}. \quad (3.100)$$

Substituindo (3.100) em (3.93)

$$\mathcal{L}'_P = -\vec{\pi} \cdot \dot{\vec{A}} - \frac{1}{2} [\vec{\pi}^2 + (\nabla \times \vec{A})^2 + m^2 \vec{A}^2] - \frac{1}{2m^2} (\nabla \cdot \vec{\pi})^2 \quad (3.101)$$

e verificando de (3.101) que as variáveis simpléticas, como já mencionamos em (3.98), são $\xi_I = (A^i, \pi_i)$. E os coeficientes que acompanham estas variáveis são de (3.101)

$$a_I = (a_i^{\vec{A}}, a_i^{\vec{\pi}}) = (\pi_i, 0) = (-\vec{\pi}, 0). \quad (3.102)$$

Com isto podemos calcular a matriz 2-forma (f_{IJ}). Usando a definição (3.80) os elementos desta matriz são

$$\begin{aligned} f_{A^i A^j} &= f_{\pi_i \pi_j} = 0 \\ f_{A^i \pi_j} &= -f_{\pi_i A^j} = -\delta_{ij} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned}$$

e portanto a matriz tem a seguinte forma

$$f_{IJ}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} \\ \delta_{ij} & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.103)$$

Como $\det f_{IJ} \neq 0$, então a inversa de f_{IJ} pode ser calculada de (3.84), e possui a seguinte forma

$$f_{IJ}^{-1}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} \\ -\delta_{ij} & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (3.104)$$

Com a definição dada em (3.86), os parênteses generalizados são

$$\begin{aligned} \{A^i(\vec{x}), A^j(\vec{y})\} &= 0 \\ \{\pi_i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y})\} &= 0 \\ \{A^i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y})\} &= \delta_{ij}\delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (3.105)$$

e deste modo já estamos no espaço reduzido no qual não há vínculos, segundo o método F-J e podemos quantizar o sistema físico em questão.

3) Lagrangeano da QED

A densidade Lagrangeana neste caso tem a seguinte forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi$$

e desenvolvendo esta equação temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\dot{\vec{A}}^2 + \dot{\vec{A}}\cdot\nabla A_0 + \frac{1}{2}(\nabla A_0)^2 - \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{A})^2 + i\psi^\dagger\dot{\psi} + i\psi^\dagger\vec{\alpha}\cdot(\nabla + ie\vec{A})\psi \\ &- e\rho A_0 - m\psi^\dagger\gamma^0\psi. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Novamente notamos que o Lagrangeano \mathcal{L} é de segundo ordem em $\dot{\vec{A}}$. Então temos que reduzir (3.106) a um Lagrangeano de primeira ordem. Para fazer isso definimos os momentos conjugados π_μ aos campos A^μ como

$$\pi_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^\mu}$$

e daí $\pi_0 = 0$ e $\vec{\pi} = -(\dot{\vec{A}} + \nabla A_0)$.

Com isto e usando a transformação de Legendre podemos expressar \mathcal{L} linearmente em $\dot{\vec{A}}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\vec{\pi}\cdot\dot{\vec{A}} + i\psi^*\dot{\psi} - \frac{1}{2}[\vec{\pi}^2 + (\nabla \times \vec{A})^2] - e\rho A_0 - \vec{\pi}\cdot\nabla A_0 + i\psi^*\vec{\alpha}\cdot(\nabla - ie\vec{A})\psi \\ &- m\psi^*\gamma^0\psi \end{aligned}$$

onde, por uma integração por partes e considerando as condições fronteiras no infinito o termo $\vec{\pi}\cdot\nabla A_0$ passa a ser $-A_0\nabla\cdot\vec{\pi}$. Dessa forma \mathcal{L} fica expressa como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\vec{\pi}\cdot\dot{\vec{A}} + i\psi^*\dot{\psi} - \frac{1}{2}[\vec{\pi}^2 + (\nabla \times \vec{A})^2] - A_0(e\rho - \nabla\cdot\vec{\pi}) + i\psi^*\vec{\alpha}\cdot(\nabla - ie\vec{A})\psi \\ &- m\psi^*\gamma^0\psi. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Inicialmente em (3.107) as variáveis simpléticas são

$$(A^i, \pi_i, A^0, \psi, \psi^\dagger). \quad (3.108)$$

Ao fazer a comparação como no exemplo anterior notamos que a única quantidade que não está no termo simplético de (3.107) é A_0 e, portanto, esta faz o papel da variável z , ou seja $z = z_1 = A_0$. Com isto as variáveis simpléticas são

$$(A^i, \pi_i, \psi, \psi^\dagger). \quad (3.109)$$

Usando a equação de movimento para A_0

$$\frac{\delta H}{\delta A_0} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A_0} - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i A_0)} \right) = 0 \quad (3.110)$$

e de (3.107) a densidade Hamiltoniana \mathcal{H} é

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}[\vec{\pi}^2 + (\nabla \times \vec{A})^2] + A_0(e\rho - \nabla \cdot \vec{\pi}) - i\psi^* \vec{\alpha}(\nabla - ie\vec{A})\psi + m\psi^* \gamma^0 \psi. \quad (3.111)$$

Substituindo (3.111) em (3.110) obtemos o seguinte vínculo

$$\nabla \cdot \vec{\pi} = e\rho. \quad (3.112)$$

Com (3.107) o Lagrangeano L é expresso como

$$L = \int -\vec{\pi} \cdot \dot{\vec{A}} + i\psi^* \dot{\psi} - \frac{1}{2}[\vec{\pi}^2 + (\nabla \times \vec{A})^2] - A_0(e\rho - \nabla \cdot \vec{\pi}) - m\psi^* \gamma^0 \psi d\vec{r} - H_M[(\nabla - ie\vec{A})], \quad (3.113)$$

onde

$$H_M[(\nabla - ie\vec{A})] = \int i\psi^* \vec{\alpha}(\nabla - ie\vec{A})\psi d\vec{r}.$$

A substituição de (3.112) em (3.113), implica resolver o vínculo (3.112). Para isso decomponos $\vec{\pi}$ e \vec{A} em suas partes longitudinal e transversal

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}_{||} + \vec{\pi}_T \quad (3.114)$$

$$\vec{A} = \vec{A}_{||} + \vec{A}_T \quad (3.115)$$

com

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\pi}_T &= 0 & \nabla \times \vec{\pi}_{||} &= 0 & \vec{\pi}_{||} &= \nabla \phi & \vec{\pi}_T &= \nabla \times \vec{M} \\ \nabla \cdot \vec{A}_T &= 0 & \nabla \times \vec{A}_{||} &= 0 & \vec{A}_{||} &= \nabla \varphi & \vec{A}_T &= \nabla \times \vec{N}. \end{aligned}$$

Sabemos também que

$$\vec{\pi} = -\nabla A_0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

e, ao comparar esta última equação com (3.114), notamos que quando

$$\vec{\pi}_{||} = -\nabla A_0 \longrightarrow \nabla \times \vec{\pi}_{||} = 0$$

e

$$\vec{\pi}_T = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \longrightarrow \nabla \cdot \vec{\pi}_T = -\frac{\partial(\nabla \cdot \vec{A}_{||} + \nabla \cdot \vec{A}_T)}{\partial t} = 0.$$

Como estamos trabalhando com densidades Lagrangeanas e Hamiltonianas que contêm a $\vec{\pi}$ e \vec{A} , consideramos a seguinte integral

$$\int \vec{\pi}_{||}^2 d\vec{r} = \int (\nabla \phi) \cdot (\nabla \phi) d\vec{r}.$$

Integrando por partes a integral anterior temos

$$\int \vec{\pi}_{||}^2 d\vec{r} = \int \nabla \cdot (\phi \nabla \phi) d\vec{r} - \int \phi \nabla^2 \phi d\vec{r}, \quad (3.116)$$

e considerando a seguinte condição de fronteira

$$\vec{r} \rightarrow \infty \implies \phi \rightarrow 0$$

a primeira integral em (3.116) se anula. Então temos que

$$\int \vec{\pi}_{||}^2 d\vec{r} = - \int \phi \nabla^2 \phi d\vec{r} \quad (3.117)$$

mas

$$\nabla^2 \phi = -e\rho = -\nabla \cdot \vec{\pi}$$

de onde resulta

$$\phi = \frac{-\nabla \cdot \vec{\pi}}{\nabla^2}. \quad (3.118)$$

Substituindo estas duas últimas expressões em (3.117) obtemos

$$\int \vec{\pi}_{||}^2 d\vec{r} = \int \left(\frac{\nabla \cdot \vec{\pi}}{\sqrt{-\nabla^2}} \right)^2 d\vec{r}. \quad (3.119)$$

Como $\vec{r} \rightarrow \infty$ e $\vec{\pi} \rightarrow 0$, então

$$\int \vec{\pi}_{||}^2 d\vec{r} = \int \left(\frac{\nabla \cdot \vec{\pi}}{\sqrt{-\nabla^2}} \right)^2 d\vec{r} = \int \left(\frac{\nabla \pi}{\sqrt{-\nabla^2}} \right)^2 d\vec{r},$$

onde $\pi = |\vec{\pi}|$. Desta última equação obtemos que

$$\vec{\pi}_{||} = \frac{\nabla \pi}{\sqrt{-\nabla^2}}. \quad (3.120)$$

Como \vec{A} tem as mesmas propriedades que $\vec{\pi}$ e $\vec{A}_{||} = \nabla\varphi$, então $\vec{A}_{||}$ pode ser expressa de forma similar a (3.120), assim

$$\vec{A}_{||} = \frac{\nabla A}{\sqrt{-\nabla^2}} \quad (3.121)$$

onde $A = |\vec{A}|$. Logo usando (3.120) e (3.121) em (3.114) e (3.115), respectivamente, resulta em

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}_T + \frac{\nabla\pi}{\sqrt{-\nabla^2}} \quad (3.122)$$

$$\vec{A} = \vec{A}_T + \frac{\nabla A}{\sqrt{-\nabla^2}}. \quad (3.123)$$

Substituindo (3.122) em (3.112) fornece

$$\nabla \cdot \left(\vec{\pi}_T + \frac{\nabla\pi}{\sqrt{-\nabla^2}} \right) = e\rho$$

porém $\nabla \cdot \vec{\pi}_T = 0$ e então

$$\frac{\nabla^2\pi}{\sqrt{-\nabla^2}} = e\rho.$$

Daí obtemos

$$\pi = -\frac{1}{\sqrt{-\nabla^2}}e\rho, \quad (3.124)$$

e para A obtemos resultados análogos.

A equação (3.124) é substituída em (3.122) que junto com (3.123) e (3.112), são substituídas no Lagrangeano (3.113) com isso obtemos que

$$\begin{aligned} L = & \int \left(-\vec{\pi}_T \cdot \dot{\vec{A}}_T + e\rho \frac{1}{\sqrt{-\nabla^2}} \dot{A} + i\psi^\dagger \dot{\psi} - \frac{1}{2} [\vec{\pi}_T^2 + (\nabla \times \vec{A}_T)^2 - e^2 \rho \frac{1}{\nabla^2} \rho] \right) d\vec{r} \\ & - H_M \left[(\nabla - ie\vec{A}_T - ie \frac{\nabla}{\sqrt{-\nabla^2}} A) \psi \right] - \int \bar{\psi} m \psi d\vec{r}. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Com (3.122), (3.123) e (3.124) resolveremos os vínculos da eq. (3.112) e, conseqüentemente, os vínculos foram eliminados de (3.113) e o Lagrangeano apresenta a forma dada em (3.125) a qual não tem vínculos.

A transformação de Darboux permite substituir

$$\psi \longrightarrow e^{i\frac{e}{\sqrt{-\nabla^2}}A} \psi,$$

onde esta substituição tem o efeito de cancelar o termo $\rho \frac{e}{\sqrt{-\nabla^2}} \dot{A}$ com a contribuição que vem de $i\psi^\dagger \dot{\psi}$ e assim eliminar A do Hamiltoniano. Ficamos então com o seguinte Lagrangeano

$$L = \int (-\vec{\pi}_T \cdot \dot{\vec{A}}_T + i\psi^\dagger \dot{\psi} - \frac{1}{2} [\vec{\pi}_T^2 + (\nabla \times \vec{A}_T)^2 - e^2 \rho \frac{1}{\nabla^2} \rho]) d\vec{r} - H_M[(\nabla - ie\vec{A}_T)\psi] - \int m\bar{\psi}\psi d\vec{r}. \quad (3.126)$$

Depois de substituir e resolver o vínculo, vemos da equação (3.126) que as novas variáveis simpléticas são

$$\xi_I = (A_T^i, \pi_{i_T}, \psi, \psi^\dagger) \quad (3.127)$$

e os coeficientes que acompanham estas variáveis são

$$a_I = (a_i^{\vec{A}_T}, a_i^{\pi_T}, a_\psi, a_{\psi^\dagger}) = (\pi_{i_T}, 0, i\psi^\dagger, 0) = (-\vec{\pi}_T, 0, i\psi^\dagger, 0). \quad (3.128)$$

Com estas quantidades determinamos a matriz 2-forma (f_{IJ}) . Usando a definição (3.80) os elementos desta matriz são

$$\begin{aligned} f_{A_T^i \pi_{j_T}} &= -\delta_{ij} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ f_{\psi \psi^\dagger} &= -i \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (3.129)$$

e todos os demais termos são nulos. Portanto a matriz (f_{IJ}) tem a seguinte forma

$$f_{IJ}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & 0 & 0 \\ \delta_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad (3.130)$$

e como $\det f_{IJ} \neq 0$ então (f_{IJ}) tem inversa. Usando (3.84) calculamos a inversa de (f_{IJ}) que é

$$f_{IJ}^{-1}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} & 0 & 0 \\ -\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (3.131)$$

e com a expressão dada em (3.86) os parênteses generalizados são expressos como

$$\begin{aligned} \{A_T^i(\vec{x}), \pi_{j_T}(\vec{y})\} &= \delta_{ij} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\psi(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{y})\} &= -i \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{A_T^i(\vec{x}), A_T^j(\vec{x})\} &= \{\psi(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{y})\} = \{\psi^\dagger(\vec{x}), \psi(\vec{y})\} = 0. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Desta maneira, os vínculos ficam fora da teoria e podemos passar a quantizar o sistema físico considerado. Neste caso o gauge de Coulomb já foi fixado ao fazer o procedimento do método de F-J

4) Campo Eletromagnético Livre

A densidade Lagrangeana para o campo eletromagnético livre é dado por

$$\mathcal{L}_e = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (3.133)$$

Desenvolvendo esta expressão temos que

$$\mathcal{L}_e = \frac{1}{2}\dot{\vec{A}}^2 + \vec{A}\cdot\nabla A_0 + \frac{1}{2}[(\nabla A_0)^2 - (\nabla \times \vec{A})^2] \quad (3.134)$$

onde notamos que \mathcal{L}_e é de segunda ordem em \vec{A} e portanto precisamos linearizar esta densidade Lagrangeana para aplicar o método F-J. Para fazermos isso definimos os momentos canônicos conjugados como

$$\pi_\mu = F_{\mu 0} \quad (3.135)$$

e daí

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 0 \\ \vec{\pi} &= -(\dot{\vec{A}} + \nabla A_0). \end{aligned} \quad (3.136)$$

Usando a transformada de Legendre expressamos \mathcal{L}_e linearmente $\dot{\vec{A}}$, o que é facilmente obtido se fizermos $m = 0$ em (3.92). Então \mathcal{L}_e é expresso como

$$\mathcal{L}_e = -\vec{\pi}\cdot\dot{\vec{A}} - \frac{1}{2}[\vec{\pi}^2 + (\nabla \times \vec{A})^2] - \vec{\pi}\cdot\nabla A_0, \quad (3.137)$$

fazendo a integração por partes e considerando as condições de fronteira como fizemos no exemplo (3), temos

$$\mathcal{L}_e = -\vec{\pi}\cdot\dot{\vec{A}} - \frac{1}{2}[\vec{\pi}^2 + (\nabla \times \vec{A})^2] + A_0\nabla\cdot\vec{\pi}. \quad (3.138)$$

Aqui as variáveis simpléticas iniciais são

$$(A^i, \pi_i, A_0). \quad (3.139)$$

Fazemos a mesma comparação como no exemplo (3) para identificar a variável z . Notamos novamente que a única quantidade que não está no termo simplético de (3.138) é A_0 , portanto esta faz o papel da variável z , ou seja, $z = z_1 = A_0$. Deste modo as variáveis simpléticas são

$$(A^i, \pi_i), \quad (3.140)$$

e a equação de movimento para A_0 é

$$\frac{\delta H_e}{\delta A_0} = 0$$

onde H_e é o Hamiltoniano do campo eletromagnético, ou também

$$\frac{\delta H_e}{\delta A_0} = \frac{\partial \mathcal{H}_e}{\partial A_0} - \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}_e}{\partial (\partial_i A_0)} \right) = 0 \quad (3.141)$$

onde \mathcal{H}_e é a densidade Hamiltoniana, que pode ser expressa de (3.138) como

$$\mathcal{H}_e = \frac{1}{2} [\vec{\pi}^2 + (\nabla \times \vec{A})^2] - A_0 \nabla \cdot \vec{\pi}. \quad (3.142)$$

Substituindo (3.142) em (3.141) temos o seguinte vínculo

$$\nabla \cdot \vec{\pi} = 0, \quad (3.143)$$

e com a equação (3.138) o Lagrangeano L_e é

$$L_e = \int (-\vec{\pi} \cdot \vec{A} - \frac{1}{2} [\vec{\pi}^2 + (\nabla \times \vec{A})^2] + A_0 \nabla \cdot \vec{\pi}) d\vec{r}. \quad (3.144)$$

Para substituir (3.143) em (3.144) temos que resolver a equação de vínculo (3.143), o que será feito seguindo os cálculos do exemplo (4), nos quais colocaremos $\rho = 0$. Desta maneira, seguindo os cálculos do exemplo anterior, a partir da equação (3.114) e (3.115) temos

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}_{||} + \vec{\pi}_T \quad (3.145)$$

$$\vec{A} = \vec{A}_{||} + \vec{A}_T \quad (3.146)$$

com

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{\pi}_T &= 0 & \nabla \times \vec{\pi}_{||} &= 0 & \vec{\pi}_{||} &= \nabla \phi & \vec{\pi}_T &= \nabla \times \vec{M} \\ \nabla \cdot \vec{A}_T &= 0 & \nabla \times \vec{A}_{||} &= 0 & \vec{A}_{||} &= \nabla \varphi & \vec{A}_T &= \nabla \times \vec{N}. \end{aligned}$$

Integrando por partes e considerando as condições de fronteira, de que no infinito os campos se anulam, temos das equações (3.116), (3.117) e (3.119) que

$$\vec{\pi}_{||} = \frac{\nabla \pi}{\sqrt{-\nabla^2}}, \quad (3.147)$$

e de forma similar obtemos

$$\vec{A}_{||} = \frac{\nabla A}{\sqrt{-\nabla^2}}. \quad (3.148)$$

Substituindo estas duas últimas equações em (3.145) e (3.146)

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}_T + \frac{\nabla\pi}{\sqrt{-\nabla^2}} \quad (3.149)$$

$$\vec{A} = \vec{A}_T + \frac{\nabla A}{\sqrt{-\nabla^2}}, \quad (3.150)$$

e substituindo (3.149) em (3.143) resulta

$$\nabla \cdot \vec{\pi} = \nabla \cdot \left(\vec{\pi}_T + \frac{\nabla\pi}{\sqrt{-\nabla^2}} \right) = 0, \quad (3.151)$$

porém $\nabla \cdot \vec{\pi}_T = 0$ e portanto de (3.151), temos

$$\frac{\nabla^2\pi}{\sqrt{-\nabla^2}} = 0 \quad (3.152)$$

e para \vec{A} obtemos resultados similares.

Considerando (3.152) tanto para π como para A nas equações (3.149) e (3.150) e substituindo estas no Lagrangeano dado em (3.144), obtemos que

$$L_e = \int (\vec{\pi}_T \cdot \dot{\vec{A}}_T - \frac{1}{2} [\vec{\pi}_T^2 + (\nabla \times \vec{A}_T)^2]) d\vec{r} \quad (3.153)$$

e daí a densidade Lagrangeana \mathcal{L}_e torna-se

$$\mathcal{L}_e = \vec{\pi}_T \cdot \dot{\vec{A}}_T - \frac{1}{2} [\vec{\pi}_T^2 + (\nabla \times \vec{A}_T)^2]. \quad (3.154)$$

Da equação (3.154) podemos identificar as novas variáveis simpléticas que são

$$\xi_I = (A_T^i, \pi_{i_T}) \quad (3.155)$$

e podemos também identificar os coeficientes que acompanham estas variáveis como

$$a_I = (a_i^{\vec{A}_T}, a_i^{\pi_T}) = (\pi_{i_T}, 0) = (-\vec{\pi}_T, 0). \quad (3.156)$$

Deste modo, e com a definição dada em (3.80), podemos determinar a matriz 2-forma (f_{IJ}) como

$$f_{IJ}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \delta_{ij} \delta(\vec{x} - \delta y). \quad (3.157)$$

Como temos $\det f_{IJ} \neq 0$ então (f_{IJ}) tem inversa que é expressa como

$$f_{IJ}^{-1}(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \delta_{ij} \delta(\vec{x} - \delta y), \quad (3.158)$$

e com a definição dada em (3.86) e com (3.158), os parênteses generalizados são

$$\begin{aligned} \{A_T^i(\vec{x}), \pi_{i_T}(\vec{y})\} &= \delta_j^i \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{A_T^i(\vec{x}), A_T^j(\vec{y})\} &= \{\pi_{i_T}(\vec{x}), \pi_{j_T}(\vec{y})\} = 0 \end{aligned} \quad (3.159)$$

sendo estes os parênteses apropriados para passar a uma teoria quântica. Neste caso o gauge de Coulomb já foi fixado ao fazer o procedimento do método de F-J.

Finalizamos assim o estudo do formalismo F-J para sistemas sem vínculos e com vínculos.

Capítulo 4

Comparação do formalismo de Dirac e F-J

4.1 Introdução

Neste capítulo fazemos a comparação dos métodos de Dirac e F-J para o caso de vínculos efetivos [28, 29], com os quais trabalhamos em toda a análise desenvolvida nos capítulos anteriores.

Discutiremos a aparente equivalência entre ambos os formalismos. A seguir apresentaremos os exemplos desenvolvidos nos capítulos anteriores através de ambos métodos independentemente, fazendo as comparações entre os métodos de Dirac e F-J. A partir de isso obteremos certas restrições que impedem generalizar a equivalência deles.

Ao discutirmos a possibilidade da equivalência geral entre ambos formalismos para vínculos efetivos, seguindo um procedimento passo a passo da classificação padrão de vínculos de primeira e segunda classe do método de Dirac no formalismo F-J, encontraremos que a transformação de Darboux usada no processo de redução F-J pode ser vista como uma transformação canônica no formalismo de Dirac.

Em contraste com o método de Dirac, o formalismo F-J é um procedimento de redução clássico, portanto a quantização pode ser realizada somente no espaço reduzido.

O formalismo de Dirac possui características que fazem dele um método muito usado para o estudo de sistemas vinculados. As principais características são:

- (a) A possibilidade de conservar todas as variáveis no espaço de fase
- (b) A construção de um procedimento para determinar, passo a passo, a superfície de vínculos final onde o movimento tem lugar.
- (c) A elucidação dos verdadeiros graus de liberdade da teoria, separados dos graus de gauge. Em geral, deixamos de lado os graus de liberdade de gauge por

meio de uma “fixação de gauge”, que significa introduzir um novo conjunto de vínculos a posteriori.

Ao contrário do método de Dirac no método F-J as variáveis são reduzidas às variáveis físicas tornando, formalmente, o procedimento mais simples. Por isso exploramos o método F-J para descobrir quais são as diferenças, se existem, com o método de Dirac, ou quais são as vantagens de cada método. Poderíamos dizer que tecnicamente ambos métodos são diferentes, mas ambos deveriam ser equivalentes.

A principal diferença é que o método F-J, é um método de redução aos graus de liberdade físicos. Porém o método de Dirac também inclui a possibilidade de eliminar variáveis. Com efeito, o uso do parêntese de Dirac permite a eliminação de uma variável por cada vínculo de segunda classe. No método F-J quando alguns vínculos de primeira classe estão presentes pode-se fazer a redução, contudo a forma simplética vem a ser degenerada (singular) e este fato implica que algumas variáveis dinâmicas e suas equações de movimento podem ser perdidas. Mas este aspecto não afeta o conteúdo físico da teoria, sendo isto uma característica importante do formalismo F-J.

O método F-J se concentra na obtenção das equações de movimento para o conjunto de variáveis físicas deixando de lado qualquer outra variável supérflua. Algumas das variáveis que no formalismo de Dirac estão relacionadas às variáveis físicas por meio dos vínculos são completamente eliminadas no método F-J junto a outras variáveis que vem a ser os graus de liberdade de gauge. Isto explica a eficiência do método F-J: o formalismo F-J não produz informação supérflua que será posteriormente eliminada, ao contrário do que ocorre no método de Dirac, onde mantemos esta informação supérflua (graus de liberdade de gauge) até o final.

Esta eficiência por outro lado gera algumas desvantagens. A discriminação ou a eliminação discriminada de variáveis conduz a dificuldades típicas que impedem o processo de redução: a perda de covariância e, em alguns casos ainda, a perda de propriedades de localidade para teorias de campos reduzidos.

A diferença entre os dois procedimentos de consistência ou estabilização, o de Dirac e F-J, é que, no primeiro caso, obtemos uma nova forma simplética (parêntese de Dirac) e alguns vínculos de primeira classe em cada etapa do processo de redução. O procedimento de consistência termina quando nenhum novo vínculo aparece na teoria e ficamos com uma teoria de gauge com vínculos unicamente de primeira classe num espaço de fase parcialmente reduzido. A redução final é agora realizada por meio de um processo de fixação de gauge. Quanto ao caso do método F-J, em cada etapa colocamos os vínculos na ação para conseguir um Lagrangeano reduzido e diagonalizamos (por meio de uma transformação de Darboux) sua forma simplética

associada obtendo novos vínculos por meio do processo de redução, resultando em uma nova estrutura simplética que pode ser degenerada. O procedimento continua através de uma nova diagonalização e termina com uma estrutura simplética não degenerada que de fato representa os parênteses generalizados no espaço de fase reduzido. Neste método o gauge já foi fixado implicitamente dentro do próprio procedimento.

Para comparar ambos os formalismos trabalharemos com coordenadas que permitam uma representação canônica da superfície de vínculos em cada etapa do processo de consistência. Assumimos também que todos os vínculos que aparecem no formalismo são efetivos. Esta suposição é crucial e a falha dela pode obstruir a equivalência entre o método de Dirac e F-J.

4.2 Exemplos de comparação

Nesta seção apresentaremos e compararemos os exemplos desenvolvidos, nos dois primeiros capítulos, através do método de Dirac e F-J respectivamente. Para fazer isso, discutiremos e compararemos os resultados obtidos por meio de ambos métodos para obter conclusões que nos permitam estabelecer os casos em que ambos formalismos são equivalentes. Portanto, não podemos generalizar a equivalência destes métodos.

Para fazer a comparação apresentaremos cada exemplo desenvolvido segundo o método de Dirac e F-J, respectivamente, e daí apresentaremos os comentários que nos permitam conhecer como se comporta um mesmo sistema físico vinculado quando é analisado por cada método.

(1) CAMPO LIVRE DE DIRAC

a) Método de Dirac

A análise de Dirac é feita em detalhe no capítulo 1, seção 1.4. Neste exemplo aparecem unicamente vínculos de segunda classe: ϕ_1 e ϕ_2 , expressas nas equações (2.113) e (2.114) da seção 1.4. Os parênteses de Dirac entre os campos e seus momentos conjugados estão dados na equação (2.125), e os outros parênteses restantes que ainda faltam se deduzem usando os vínculos ϕ_1 e ϕ_2 e os parênteses anteriores.

Os graus de liberdade são: $\psi, \pi_\psi, \psi^\dagger, \pi_{\psi^\dagger}$ formando um espaço de fase de quatro dimensões mas nós temos dois vínculos de segunda classe. Então, segundo o formalismo de Dirac, podemos reduzir nosso espaço de fase somente a duas dimensões e portanto eliminamos dois graus de liberdade, por exemplo π_ψ e π_{ψ^\dagger} . Então os verdadeiros graus de liberdade físicos são somente: ψ e ψ^\dagger , e os parênteses de Dirac deles são obtidos também da equação (2.125) sendo expressos em termos do campo

adjunto $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$ como

$$\begin{aligned} \{\psi(\vec{x}), \psi(\vec{y})\}_D &= 0 \\ \{\bar{\psi}(\vec{x}), \bar{\psi}(\vec{y})\}_D &= 0 \\ \{\psi(\vec{x}), \bar{\psi}(\vec{y})\}_D &= -i\gamma_0 \delta(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde (4.1) são os verdadeiros parênteses de Dirac com os quais quantizamos este sistema físico e com os quais também faremos as comparações com o método F-J.

b) Método de F-J

A análise F-J completa para este sistema físico é feita no capítulo 2, seção 2.3.2, e daí podemos obter os parênteses generalizados expressos segundo a equação (3.88) como

$$\begin{aligned} \{\psi(\vec{x}), \psi(\vec{y})\} &= 0 \\ \{\bar{\psi}(\vec{x}), \bar{\psi}(\vec{y})\} &= 0 \\ \{\psi(\vec{x}), \bar{\psi}(\vec{y})\} &= -i\gamma^0 \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

sendo estes os parênteses apropriados para quantizar o sistema físico. E com eles também realizaremos a comparação com o método de Dirac.

Ao comparar (4.1) com (4.2) notamos que os resultados obtidos, usando tanto o método de Dirac como o método F-J, são iguais. Ou seja, os parênteses generalizados obtidos são os mesmos usando qualquer destes métodos. Sendo que o método de F-J é mais direto na obtenção destes parênteses pois ele já elimina todos os graus de liberdade não físicos ou supérfluos durante o procedimento, conservando unicamente os verdadeiros graus de liberdade físicos em termos dos quais se obtém diretamente os parênteses de Dirac. Já no método de Dirac todos os graus de liberdade estão ainda presentes até o final do processo, pois podemos obter os parênteses de Dirac entre todos eles. E no final discriminamos, segundo os vínculos, os graus de liberdade não físicos.

Neste exemplo temos um Lagrangeano \mathcal{L}_D , dado em (2.110) ou (3.77), que é de primeira ordem, ou seja, é linear nas derivadas temporais dos campos, portanto para fazer uso do método F-J não é necessário definir os momentos conjugados aos campos. No método de Dirac é preciso definir os momentos conjugados para poder estabelecer os vínculos do sistema.

Em conclusão: para sistemas físicos com Lagrangeanos de primeira ordem, linear nas derivadas temporais, os resultados obtidos pelos métodos de Dirac e F-J são idênticos. Portanto, para Lagrangeanos de primeira ordem os métodos de Dirac e F-J são equivalentes.

(2) MODELO DE PROCA ABELIANO

a) Método de Dirac

Segundo a análise de Dirac, realizado na seção 1.4, neste caso também aparecem unicamente dois vínculos de segunda classe, os quais denotamos por ϕ_1 e ϕ_2 , e que são expressos nas equações (2.128) e (2.138) daquela seção.

Os graus de liberdade de nosso espaço de fase são os A^μ e os π_μ , mas como temos dois vínculos de segunda classe, podemos reduzir as dimensões deste espaço e eliminar dois graus de liberdade supérfluos os quais segundo os vínculos ϕ_1 e ϕ_2 são π_0 e A_0 . Usamos (2.128) e (2.138) para eliminar π_0 e A_0 respectivamente, e com isto os parênteses de Dirac entre os verdadeiros graus físicos de liberdade podem ser obtidos da equação (2.143) e são expressos como

$$\begin{aligned} \{A^i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y})\}_D &= \delta_j^i \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{A^i(\vec{x}), A^j(\vec{y})\}_D &= \{\pi_i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y})\}_D = 0 \\ \{\partial^j \pi_j(\vec{x}), \pi_i(\vec{y})\}_D &= 0 \\ \{\partial^j \pi_j(\vec{x}), A^i(\vec{y})\}_D &= -\partial_x^i \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

estes são os parênteses apropriados para a quantizar o sistema físico. E também os usaremos para fazer a comparação com o método F-J.

b) Método de F-J

A análise completa de F-J é feita na seção 2.3.2, de onde podemos obter os parênteses generalizados, expressos segundo a equação (3.105) como

$$\begin{aligned} \{A^i(\vec{x}), A^j(\vec{y})\} &= 0 \\ \{\pi_i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y})\} &= 0 \\ \{A^i(\vec{x}), \pi_j(\vec{y})\} &= \delta_{ij} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

e com estes parênteses quantizamos o sistema.

Ao comparar as equações (4.3) com (4.4) notamos que os resultados obtidos por ambos métodos são diferentes. Não temos os mesmos parênteses em cada método, apesar de contarmos com os mesmos graus de liberdade físicos. Segundo o método de Dirac obtemos dois parênteses de Dirac a mais do que os obtidos no método F-J.

Neste exemplo o Lagrangeano \mathcal{L}_P dado em (2.126) ou (3.90) é de de segunda ordem pois não é linear nas derivadas temporais dos campos A^μ . Então precisamos definir primeiramente seus momentos conjugados para linearizar \mathcal{L}_P e logo podermos usar o método F-J.

O método F-J durante seu próprio procedimento já eliminou implicitamente os graus de liberdade supérfluos deixando somente os graus físicos, que estão presentes nos parênteses generalizados (4.4). Já no método de Dirac, com ajuda das equações de vínculos (2.128) e (2.138), eliminamos os graus supérfluos e também ficamos com os graus físicos que são os mesmos que obtidos no método F-J e que estão presentes nos parênteses de Dirac (4.3). Mas ainda a pesar disto os resultados são diferentes.

Em conclusão: para sistemas físicos com Lagrangeanos de segunda ordem, não linear nas derivadas temporais e com vínculos de segunda classe os resultados obtidos, isto é os parenteses generalizados, não são iguais. Para estes casos os métodos de Dirac e F-J não são equivalentes.

(3) CAMPO ELETROMAGNETICO LIVRE

a) Método de Dirac

A análise de Dirac deste caso está feita na seção 1.4, segundo a qual temos unicamente vínculos de primeira classe denotados por ϕ_1 e ϕ_2 e que estão dados nas equações (2.147) e (2.152), respectivamente. Estes dois vínculos de primeira classe geram transformações de gauge que não afetam o estado físico deste sistema. Neste exemplo não temos vínculos de segunda classe e portanto não existem parênteses de Dirac.

Porém podemos calcular os parênteses de Poisson entre os campos e seus momentos conjugados que segundo a equação (2.154), estão expressos como

$$\begin{aligned} \{A^\mu(\vec{x}), \pi_\nu(\vec{y})\} &= \delta^\mu_\nu \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{A^\mu(\vec{x}), A^\nu(\vec{y})\} &= 0 \\ \{\pi_\mu(\vec{x}), \pi_\nu(\vec{y})\} &= 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Até aqui temos desenvolvido os passos que o método de Dirac menciona, apesar de ainda termos graus de liberdade não físicos e simetrias de gauge devido à presença dos vínculos de primeira classe. Um passo posterior a ser feito será fixar o gauge para deste modo eliminar os graus não físicos e quebrar as simetrias de gauge.

b) Método de F-J

O tratamento de F-J em detalhe é feito na seção 2.3.2, de onde os parênteses generalizados estão expressos pela equação (3.159) como

$$\begin{aligned} \{A_T^i(\vec{x}), \pi_{i_T}(\vec{y})\} &= \delta_j^i \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{A_T^i(\vec{x}), A_T^j(\vec{y})\} &= \{\pi_{i_T}(\vec{x}), \pi_{j_T}(\vec{y})\} = 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

os quais são os apropriados para quantizar o sistema físico e também os usaremos eles para fazer a comparação com o método de Dirac.

Ao comparar a equação (4.5) com (4.6), notamos que os resultados são completamente diferentes. Ao chegar nesta etapa no procedimento do método de Dirac, nós temos somente os parênteses de Poisson entre os campos e seus momentos. Não podemos definir os parenteses de Dirac pois temos que primeramente fixar o gauge que é um passo posterior a esta etapa do método. Enquanto no método de F-J, ao chegar a esta mesma etapa, já obtemos os parênteses generalizados pois os graus de liberdade supérfluos foram eliminados no processo seguido no método de F-J. Ou seja o gauge foi fixado implicitamente ao desenvolver o método F-J.

Neste exemplo o Lagrangeano \mathcal{L}_e dado em (2.145) ou (3.133) é também de segundo ordem, quadrático nas derivadas temporais dos campos, e precisamos definir os momentos conjugados para linearizar o Lagrangeano e podermos usar o método de F-J. Aqui só temos vínculos de primeira classe, os quais geram simetrias de gauge que são diretamente eliminadas nas etapas do método F-J enquanto que no método de Dirac elas ainda se mantêm até o final da etapa correspondente, precisando dar-se um passo adicional de fixar o gauge e eliminar os graus de liberdade não físicos.

Em conclusão: para sistemas físicos com Lagrangeanos de segunda ordem, quadráticos nas derivadas temporais e unicamente com vínculos de primeira classe os resultados obtidos por ambos métodos ao chegar a uma mesma etapa, são diferentes. Portanto os métodos de Dirac e F-J não são equivalentes quando temos Lagrangeanos de segunda ordem com vínculos de primeira classe.

(4) LAGRANGEANO QED

a) Método de Dirac

Segundo a análise de Dirac feita em detalhe na seção 1.4, neste exemplo temos vínculos de primeira classe denotados por ϕ_1 e φ , dados nas equações (2.162) e (2.176), assim como vínculos de segunda classe denotados por ϕ_2 e ϕ_3 e dados nas equações (2.163) e (2.164), respectivamente. Os vínculos de primeira classe geram transformações de gauge como mencionamos anteriormente. Já com os vínculos de segunda classe podemos eliminar os graus de liberdade supérfluos e reduzir o espaço de fase. Como temos dois vínculos de segunda classe podemos eliminar dois graus de liberdade através das equações de vínculos (2.162) e (2.176) respectivamente, sendo que os graus de liberdade a serem eliminados são π_ψ e π_{ψ^\dagger} . Com isto os parênteses de Dirac entre os graus de liberdade restantes podem ser obtidos da equação (2.178) e serem expressos como

$$\begin{aligned} \{A^\mu(\vec{x}), \pi_\nu(\vec{y})\}_D &= \delta^\mu_\nu \delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\psi(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{y})\}_D &= -i\delta(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Devemos indicar que ainda temos graus de liberdade não físicos que são os graus de

liberdade de gauge devido à presença de vínculos de primeira classe. Estes graus de liberdade não físicos ainda permanecem pois não fixamos o gauge com o qual eles são eliminados. Este é um passo que deve ser feito posteriormente a esta etapa.

b) Método de F-J

O método de F-J para este exemplo é desenvolvido de forma completa na seção 2.3.2, de onde os parênteses generalizados são dados segundo a equação (3.132) como

$$\begin{aligned} \{A_T^i(\vec{x}), \pi_{jT}(\vec{y})\} &= \delta_{ij}\delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{\psi(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{y})\} &= -i\delta(\vec{x} - \vec{y}) \\ \{A_T^i(\vec{x}), A_T^j(\vec{x})\} &= \{\psi(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{y})\} = \{\psi^\dagger(\vec{x}), \psi(\vec{x})\} = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ao comparar as equações (4.7) e (4.8) notamos que ao final desta etapa os resultados obtidos por ambos métodos são completamente diferentes. Segundo o método de Dirac ainda temos graus de liberdade supérfluos pois não fixamos o gauge, o que deve ser feito como um passo posterior a esta etapa. Enquanto que no método de F-J ao chegar a esta etapa já foram eliminados todos os graus não físicos da teoria, ou seja, o gauge foi fixado implicitamente durante o procedimento restando somente os verdadeiros graus de liberdade físicos.

O Lagrangeano \mathcal{L} para este exemplo, dado em (2.161) ou (3.106), é de segunda ordem, quadrático nas derivadas temporais dos campos. Também neste caso precisamos definir os momentos conjugados para linearizar o Lagrangeano e podermos fazer uso do método de F-J. Este Lagrangeano possui dois vínculos de primeira classe e dois de segunda classe que dão lugar à presença de graus de liberdade supérfluos que foram eliminados implicitamente no método F-J ao chegar a esta etapa. Mas no método de Dirac, somente os vínculos de segunda classe são eliminados e temos ainda, ao final da mesma etapa, graus de liberdade supérfluos que devem ser eliminados num passo posterior.

Em conclusão: para sistemas físicos com Lagrangeanos de segunda ordem, quadráticos nas derivadas temporais e com vínculos de primeira e segunda classe os resultados obtidos por ambos métodos ao final de uma mesma etapa, são diferentes. Por tanto o método de Dirac e o método de F-J não são equivalentes para Lagrangeanos de segunda ordem com presença de vínculos de primeira e segunda classe.

Capítulo 5

Conclusões

Deste estudo comparativo entre o método de Dirac e o método de F-J, podemos obter as seguintes conclusões:

1. O método de Dirac e o método de F-J não são completamente equivalentes. Unicamente no caso de sistemas físicos com Lagrangeanos de primeira ordem ambos métodos são equivalentes pois o método de F-J pode ser usado diretamente, não sendo necessário definir os momentos conjugados nem usar a transformada de Legendre. Porém quando temos Lagrangeanos de segunda ordem (ou de maior grau) ambos métodos são inequivalentes. Neste caso é preciso definir os momentos canônicos conjugados e, usando a transformada de Legendre, tornar o Lagrangeano em primeira ordem, de forma a podermos fazer uso do método de F-J.
2. A principal diferença e razão fundamental pela qual ambos métodos não são equivalentes é que o método de F-J é um procedimento clássico de redução diretamente aos verdadeiros graus de liberdade físicos. Ou seja, o método de F-J elimina todas as variáveis supérfluas em cada etapa do procedimento, enquanto que no método de Dirac as variáveis não físicas (graus de gauge) são mantidas até o final.

Devido a isso, quando temos teorias com Lagrangeanos de primeira ordem no formalismo de Dirac aparecem somente vínculos de segunda classe e, consequentemente temos graus supérfluos na teoria, os quais são eliminados ao implementarmos os parênteses de Dirac. Deste modo o método de Dirac elimina as variáveis não físicas, tendo no final somente os verdadeiros graus físicos. No método de F-J para estes mesmos Lagrangeanos de primeira ordem, os graus supérfluos são completamente eliminados, restando só os graus físicos. Assim, no final temos que ambos métodos eliminam totalmente os graus de liberdade supérfluos, não sendo deixado nenhum deles na teoria. Por tal motivo ambos

os métodos são equivalentes neste caso.

Por outro lado, quando a teoria tem Lagrangeanos de segunda ordem (ou de maior grau) o método de Dirac fornece vínculos de primeira e segunda classe na teoria, o que origina a presença de graus não físicos e também dos chamados graus de liberdade de gauge que são graus supérfluos. O método de Dirac, com a implementação dos parênteses de Dirac, consegue eliminar unicamente os graus não físicos deixando ainda presentes os graus de gauge da teoria até o final do procedimento onde, depois de fixar o gauge, estes graus são eliminados. No método de F-J isto não acontece, pois neste método todos os graus supérfluos, incluindo os graus de gauge, são eliminados e chegamos ao final do procedimento só com os verdadeiros graus físicos. Ao final temos que Dirac apresenta uma teoria ainda com graus de gauge que serão posteriormente eliminados, enquanto o método de F-J apresenta uma teoria somente com os verdadeiros graus físicos. Nestas teorias o gauge já é fixado implicitamente na execução do método de F-J, enquanto no método de Dirac o gauge será fixado de forma explícita posteriormente sendo esta uma etapa adicional. Por este motivo, para estas teorias, os métodos de Dirac e de F-J não são equivalentes

3. As vantagens ou desvantagens de um método em relação ao outro não estão bem definidas. Em alguns casos o método F-J é mais rápido e simplifica cálculos complicados presentes no método de Dirac e os resultados são facilmente obtidos. Mas em outros o método de F-J se torna difícil, com cálculos embaraçosos sendo, nestes casos, mais apropriado usar o método de Dirac. Na realidade as vantagens ou desvantagens dependem da natureza de cada sistema físico ou teoria, incluindo teorias que são não vinculadas segundo o método de F-J, mas são vinculadas do ponto de vista do método de Dirac. Neste caso é melhor usar o método de F-J pois os cálculos serão mais fáceis, sendo isto uma vantagem do método de F-J com respeito ao método de Dirac.

Referências

- [1] P. G. Bergmann, *Phys. Rev.* **75**, 680 (1949).
- [2] P. G. Bergmann & J. H. Brunings, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 480 (1949).
- [3] P. G. Bergmann, R. Penfield, R. Schiller & H. Zatzkis, *Phys. Rev.* **80**, 81 (1950).
- [4] P. G. Bergmann & J. L. Anderson, *Phys. Rev.* **83**, 1018 (1951).
- [5] P. A. M. Dirac, "Lectures in Quantum Mechanics", Yeshiva University NY (1964).
- [6] P. A. M. Dirac, *Canad. J. Math.* **2**, 129 (1950).
- [7] P. A. M. Dirac, *Phys. Rev.* **114**, 924 (1959).
- [8] P. G. Bergmann & R. Schiller, *Phys. Rev.* **89**, 4 (1953).
- [9] A. Hanson, T. Regge & C. Teitelboin, "Constrained Hamiltonian Systems", *Accademia Nazionale dei Lincei* **22**, (1976).
- [10] K. Sundermeyer, "Lecture Notes in Physics-Constrained Dynamics" Vol. 169, Springer-Verlag, New York/Berlin (1982).
- [11] D. M. Gitman & I. V. Tyutin, "Quantization of Fields with Constraints", Springer-Verlag (1990).
- [12] E. C. G. Sudarshan & N. Mukunda, "Classical Dynamics: A modern perspective" John Wiley & Sons (1974).
- [13] L. Faddeev & R. Jackiw, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1692 (1988).
- [14] V. I. Arnold, "Mathematical Methods in Classical Mechanics", Springer-Verlag, New York/Berlin (1978)
- [15] R. Abraham & J. E. Marsden, "Foundations of Mechanics", Second Edition, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Reading, MA (1978).
- [16] J. Barcelos-Neto & C. Wotzasek, *Int. J. Mod. Phys. A* **7**, 4981 (1992).

- [17] J. Barcelos-Neto & C. Wotzasek, *Mod. Phys. Lett. A* **7**, 1737 (1992).
- [18] H. Montani & C. Wotzasek, *Mod. Phys. Lett. A* **8**, 3387 (1993).
- [19] H. Montani, *Int. J. Mod. Phys. A* **8**, 4319 (1993).
- [20] C. Wotzasek, *Ann. Phys.* **243**, 76 (1995).
- [21] H. S. Blas & B. M. Pimentel, *Ann. Phys.* **282**, 67 (2000).
- [22] H. Goldstein, "Classical Mechanics", Second Edition, Addison-Wesley (1980).
- [23] L. D. Landau & E. M. Lifshitz, "Mechanics", Vol 1, Pergamon Press (1960).
- [24] C. Lanczos, "The Variational Principles of Mechanics", Forth Edition, University of Toronto Press (1949).
- [25] M. Henneaux & C. Teitelboim, "Quantization of Gauge Systems", Princeton University, Princeton NJ (1992).
- [26] R. Jackiw, CTP/2215, hep-th/9306075, Proc. 2nd Workshop on constraints theory and quantization methods, Montepulciano, (1993) (World Scientific, Singapore, 1995).
- [27] P. J. Olver, "Applications of Lie Groups to Differential Equations", Graduate Texts in Mathematics **107**, Springer-Verlag, New York (1986).
- [28] J. A. García & J. M. Pons, *Int. J. Mod. Phys A* **12**, 451 (1997).
- [29] J. A. García & J. M. Pons, *Int. J. Mod. Phys. A* **13**, 3691 (1988).

