

RESSALVA

Atendendo solicitação da autora,
o texto completo desta tese será
disponibilizado somente a partir
de 20/08/2023



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Jennifer Cristina Borges

Um Estudo sobre Métodos de Solução para o
Problema de Corte de Estoque Biobjetivo

São José do Rio Preto
2021

Jennifer Cristina Borges

Um Estudo sobre Métodos de Solução para o
Problema de Corte de Estoque Biobjetivo

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profa. Dra. Maria do Socorro Nogueira Rangel

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto
2021

B732e Borges, Jennifer Cristina
Um Estudo sobre Métodos de Solução para o Problema de Corte de
Estoque Biobjetivo / Jennifer Cristina Borges. -- São José do Rio
Preto, 2021
188 p. : il., tabs.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio
Preto
Orientadora: Maria do Socorro Nogueira Rangel

1. Problema de corte de estoque. 2. Otimização Multiobjetivo. 3.
Métodos de Escalarização. 4. Invidade. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de
Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Jennifer Cristina Borges

Um Estudo sobre Métodos de Solução para o
Problema de Corte de Estoque Biobjetivo

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Maria do Socorro Nogueira Rangel
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto
Orientadora

Prof. Dr. Angelo Aliano Filho
UTFPR - Apucarana

Profa. Dra. Gislaine Mara Melega
UFSCar - São Carlos

Profa. Dra. Kelly Cristina Poldi
UNICAMP - IMECC - Campinas

Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
20 de agosto de 2021

Dedico aos meus pais e a mim.

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar à Deus que iluminou o meu caminho durante esta longa caminhada.

Agradeço aos meus pais e a minha irmã, que com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu concluísse todas as etapas da minha vida. Mesmo distante nunca deixaram de dar apoio nos momentos de insegurança.

Agradeço ao meu namorado pela enorme paciência e palavras de incentivo, principalmente nessa reta final.

Um agradecimento muito especial à minha orientadora e amiga Profa. Dra. Maria do Socorro Nogueira Rangel pelos grandes ensinamentos acadêmicos e pessoais. Agradeço pelos “puxões de orelha” que me tornaram uma professora e pesquisadora, e principalmente por acreditar quando eu mesma não acreditava em mim.

Agradeço a todos os professores da UNESP que tive a honra de conhecer, em especial agradeço ao Prof. Dr. Silvio Araújo por ter sido tão receptivo e por ter me aceito como orientada (mesmo por pouco tempo), por proporcionar as melhores confraternizações e por ter aceito o convite para compor a banca de defesa. Agradeço ao Prof. Dr. Valeriano Antunes pela colaboração na parte de “Invexidade” desenvolvida nessa tese. Agradeço ao Prof. Dr. Luiz Leduino pela colaboração no desenvolvimento do Apêndice C que resultou em um artigo apresentado no CNMAC2019.

Agradeço ao Prof. Dr. Angelo Aliano Filho e à Profa. Dra. Kelly Poldi por aceitarem o convite para compor a banca de defesa.

Agradeço aos meus amigos pelo apoio e ensinamentos compartilhados. Em especial agradeço a Gislaine por ser a primeira pessoa a me acolher em São José do Rio Preto e por tornar uma grande amiga, pela imensa ajuda no desenvolvimento desse estudo e por aceitar o convite para compor a banca examinadora. Agradeço ao meu amigo Rodrigo pela imensa ajuda com a parte computacional e por ajudar nas dúvidas mesmo sem entender, as vezes, o que estava falando. Ao Nicolas pela paciência e prestatividade todas as vezes que solicitei sua ajuda independente do dia e horário.

Agradeço as minhas amigas Ana e Bruninha pela estadia em São Carlos todas as vezes que participava de um evento na USP. Agradeço à Jéssica que mesmo distante sempre esteve presente. Agradeço as minhas grandes amigas matemáticas Marcela e Camila, que mesmo distantes estiveram sempre comigo. Enfim, agradeço a todos os amigos que Rio Preto me deu de presente e fizeram parte dos 5 anos mais desafiadores da minha vida.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*A ciência poderá ter encontrado a cura
para a maioria dos males,
mas não achou ainda o remédio
para o pior de todos:
a apatia dos seres humanos.*
Helen Keller

RESUMO

Nessa tese é feita uma breve revisão sobre as principais características do Problema de Corte de Estoque (PCE) Unidimensional e Bidimensional. Apresentam-se modelos de otimização matemática utilizados para gerar os padrões de corte unidimensionais e bidimensionais e diferentes critérios de otimização. Os critérios considerados são: minimizar o número total de objetos cortados, *setups* e ciclos da serra que são conflitantes entre si, e utiliza-se a abordagem multiobjetivo para resolver o PCE Unidimensional e Bidimensional. Na revisão de literatura verificou-se que o Problema de Corte de Estoque Bidimensional Multiobjetivo (PCEM-2D) é pouco abordado na literatura. Os artigos que tratam o caso unidimensional (PCEM-1D) usando métodos de escalarização desconsideram a geração dinâmica de colunas para a matriz de restrições do problema. Assim, a partir da revisão da literatura sobre métodos de escalarização para problemas de otimização inteira multiobjetivo são selecionados os métodos ϵ -Restrito Lexicográfico, Tchebycheff Ponderado Aumentado e Particionamento da Fronteira para resolver o PCEM-1D e o PCEM-2D, considerando que os padrões de corte são gerados dinamicamente. Através de simulações computacionais foi possível concluir que a geração de padrões de corte dinâmica resulta em uma melhor aproximação da fronteira de Pareto do que a geração de colunas *a priori*, e que o método que usa a estratégia *branch and cut* obteve o melhor desempenho quando comparado a outros dois métodos para os casos unidimensional e bidimensional. Outra contribuição dessa tese é a utilização de conceitos de invexidade para provar resultados de otimalidade parcial para o problema de corte de estoque biobjetivo. Dessa forma reitera-se conexões entre a otimização discreta e a otimização contínua multiobjetivo.

Palavras-chave: Problema de corte de estoque, Otimização Multiobjetivo, Métodos de Escalarização, Invexidade.

ABSTRACT

In this thesis, a review of the main features of the one dimensional and the two dimensional Cutting Stock Problem (CSP) is presented. Mathematical optimization models to generate one-dimensional and two-dimensional cutting patterns as well as different optimization criteria are discussed. The criteria considered are: minimize the total number of objects cut, of setups and of saw cycles that conflict with each other, therefore a multiobjective approach is proposed to solve the One-dimensional and Two-dimensional CSP. In the literature few papers address the Two-Dimensional Multiobjective Cutting Stock Problem (MCSP-2D). The papers that propose scalarization methods for the one-dimensional case (MCSP-1D) do not consider a dynamic generation of columns for the problem constraint matrix. Thus, from the literature review about scalarization methods, the ϵ -Lexicographical Restricted, Augmented Weighted Tchebycheff and Frontier Partitioning methods were selected to solve the MCSP-1D and the MCSP-2D considering that the cutting patterns are dynamically generated. Through the computer simulations it was possible to conclude that the dynamic generation of cutting patterns results in a better approximation of the Pareto frontier. The method based on a branch and cut strategy had the best performance compared to the other two methods for both problems. Another contribution of this thesis is the use of invexity concepts to prove partial optimality results for the biobjective cutting stock problem. Thus reiterating connections between discrete optimization and multiobjective continuous optimization.

Keywords: Cutting stock problem, Multiobjective Optimization, Scalarization methods, Invexity.

Lista de Figuras

2.1	Ilustração de um Problema de corte de estoque unidimensional.	21
2.2	Problema de corte de estoque bidimensional.	22
2.3	Problema de corte de estoque tridimensional.	22
2.4	Padrão de corte homogêneo maximal.	23
2.5	Padrão de corte guilhotinado e não guilhotinado.	24
2.6	Padrão de corte guilhotinado ortogonal e não ortogonal.	25
2.7	Padrão de corte guilhotinado dois estágios.	25
2.8	Máquina utilizada no processo de corte.	33
3.1	Espaço decisão ($\mathcal{X}$) de (3.4)	41
3.2	Espaço critério ($\mathcal{Z}$) de (3.4)	41
3.3	Representação da fronteira de Pareto e dos vetores ideal e nadir.	42
3.4	Divisão horizontal do triângulo.	46
3.5	Fronteira de Pareto (SP).	49
3.6	Fronteira de Pareto (ER).	50
3.7	Primeira iteração do método FPA^* para $k = 0$	57
3.8	Segunda iteração do método FPA^* para $k = 1$	57
3.9	Terceira iteração do método FPA^* para $k = 2$	58
3.10	Quarta iteração do método FPA^* para $k = 3$	58
3.11	Quinta iteração do método FPA^* para $k = 4$	58
3.12	Sexta iteração do método FPA^* para $k = 5$	58
4.1	Esquema para o método de GC multiobjetivo geral.	68
5.1	Perfil de desempenho do método ERL para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = 4$).	83
5.2	Perfil de desempenho do método FPA^* para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = 4$).	84
5.3	Perfil de desempenho do método TPA para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = 4$).	85
5.4	Perfil de desempenho do método ERL para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = 7$).	86
5.5	Perfil de desempenho do método ERL para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = d_{max}$).	87
5.6	Perfil de desempenho do método FPA^* para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = 7$).	88
5.7	Perfil de desempenho do método FPA^* para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = d_{max}$).	89

5.8	Perfil de desempenho do método TPA para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = 7$).	90
5.9	Perfil de desempenho do método TPA para GCd e GCs para o $PCEB_c^L - 1D$ com relação a σ^2 ($c = d_{max}$).	91
5.10	Aproximações da fronteira de Pareto obtidas pelo método FPA^* utilizando a GCd e a GCs para $c = 7$ (classe P, $m = 60$).	92
5.11	Aproximações da fronteira de Pareto obtidas pelo método FPA^* utilizando a GCd e a GCs para $c = d_{max}$ (classe P, $m = 60$).	92
5.12	Perfil de desempenho dos métodos ERL , FPA^* e TPA para o $PCEB_c^L - 1D$ com GCd em relação ao tempo ($c = 4$).	94
5.13	Perfil de desempenho dos métodos ERL , FPA^* e TPA para para o $PCEB_c^L - 1D$ com GCd em relação ao tempo ($c = 7$).	95
5.14	Perfil de desempenho dos métodos ERL , FPA^* e TPA para o $PCEB_c^L - 1D$ com GCd em relação ao tempo ($c = d_{max}$).	97
5.15	Aproximações da fronteira de Pareto obtidas pelos métodos FPA^* , ERL e TPA utilizando a GCd para $c = 7$ (classe P, $m = 100$).	98
5.16	Aproximações da fronteira de Pareto obtidas pelos métodos FPA^* , ERL e TPA utilizando a GCd para $c = d_{max}$ (classe P, $m = 100$).	99
5.17	Perfil de desempenho das variações FPA_{var1}^* e FPA_{var2}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = 7$).	115
5.18	Perfil de desempenho das variações FPA_{var1}^* e FPA_{var3}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = 7$).	116
5.19	Perfil de desempenho das variações FPA_{var1}^* e FPA_{var4}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = 7$).	117
5.20	Perfil de desempenho das variações FPA_{var2}^* e FPA_{var3}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = 7$).	117
5.21	Perfil de desempenho das variações FPA_{var2}^* e FPA_{var4}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = 7$).	118
5.22	Perfil de desempenho das variações FPA_{var3}^* e FPA_{var4}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = 7$).	119
5.23	Perfil de desempenho das variações FPA_{var1}^* e FPA_{var2}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = d_{max}$).	124
5.24	Perfil de desempenho das variações FPA_{var1}^* e FPA_{var3}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = d_{max}$).	125
5.25	Perfil de desempenho das variações FPA_{var1}^* e FPA_{var4}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = d_{max}$).	126
5.26	Perfil de desempenho das variações FPA_{var2}^* e FPA_{var3}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = d_{max}$).	127
5.27	Perfil de desempenho das variações FPA_{var2}^* e FPA_{var4}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = d_{max}$).	128
5.28	Perfil de desempenho das variações FPA_{var3}^* e FPA_{var4}^* para o ($PCEB_c^L - 2D$) com relação ao tempo ($c = d_{max}$).	129
5.29	Perfil de desempenho dos métodos ERL , FPA_{var2}^* e TPA para o ($PCEB_c^L - 2D$) em relação ao tempo ($c = 7$).	133
5.30	Perfil de desempenho dos métodos ERL , FPA_{var2}^* e TPA para o ($PCEB_c^L - 2D$) em relação ao hipervolume (σ^2) com $c = 7$	136
5.31	Aproximações da fronteira de Pareto obtidas pelos métodos FPA_{var2}^* , ERL e TPA utilizando a GCd para $c = 7$ ($id = 11$, $m = 100$).	136

5.32	Perfil de desempenho dos métodos ERL , FPA_{var3}^* e TPA ($PCEB_c^L - 2D$) em relação ao tempo ($c = d_{max}$).	137
5.33	Perfil de desempenho dos métodos ERL , FPA_{var3}^* e TPA em relação ao hipervolume (σ^2) com $c = d_{max}$	139
5.34	Aproximações da fronteira de Pareto obtidas pelos métodos FPA_{var3}^* , ERL e TPA utilizando a GCd para $c = d_{max}$ ($id = 14$, $m = 100$).	139
C.1	Gráfico da função f	171
C.2	Esquema de implicações entre os conjuntos de funções.	174
C.3	Gráfico da função $\phi(t)$ com $M = 50$	178
C.4	Gráfico da função $\phi_2(t)$ com $c = 5$ e $m = 100$	181

Lista de Tabelas

2.1	Elementos para classificação de Problemas de Corte e Empacotamento. . .	20
3.1	Método da Soma Ponderada aplicado ao Exemplo 3.16.	48
3.2	Método ϵ -Restrito aplicado ao Exemplo 3.16.	50
3.3	Resumo da Literatura sobre o PCE multiobjetivo.	63
3.4	Resumo dos métodos de escalarização encontrados na literatura e suas variações.	65
3.5	Comparação entre BBM, MRV e FPA que utilizam técnicas de decomposição ou divisão do espaço critério.	66
5.1	Resultados obtidos pelo método <i>ERL</i> para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 4$	81
5.2	Resultados obtidos pelo método <i>FPA*</i> para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 7$	82
5.3	Resultados obtidos pelo método <i>TPA</i> para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = d_{max}$	83
5.4	Resultados obtidos pelos métodos <i>ERL</i> , <i>FPA*</i> e <i>TPA</i> para o $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 4, 7$	93
5.5	Resultados obtidos pelos métodos <i>ERL</i> , <i>FPA*</i> e <i>TPA</i> para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 4, 7$ através das métricas σ^1 , σ^2 e σ^4	94
5.6	Resultados obtidos pelos métodos <i>ERL</i> , <i>FPA*</i> e <i>TPA</i> para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = d_{max}$	96
5.7	Resultados obtidos pelos métodos <i>ERL</i> , <i>FPA*</i> e <i>TPA</i> para o $PCEB_c^L - 1D$ e $c = d_{max}$, das métricas σ^1 , σ^2 e σ^4	96
5.8	Resultados obtidos pelos métodos <i>ERL</i> , <i>FPA*</i> e <i>TPA</i> para o $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 4, 7, d_{max}$, das métricas σ^5 e σ^6	98
5.9	Formatos e tamanhos para o objeto e os itens no gerador 2DCPackGen (SILVA; OLIVEIRA; WÄSCHER, 2014).	101
5.10	Formatos e tamanhos para os itens de acordo com Martello e Vigo (1998) e a correspondência com o gerador 2DCPackGen.	102
5.11	Classificação das dimensões w_i e l_i em função de W e L (FIGUEIREDO, 2006).	102
5.12	Classificação das Instâncias da indústria.	103
5.13	Conjunto de instâncias do $(PCEB_c^L)$ -2D utilizadas no estudo computacional.	104
5.14	Resultados obtidos pelo método <i>ERL</i> (GCs) para o $(PCEB_c^L - 2D)$ considerando 16 tipos de itens, $m = 10$	106
5.15	Resultados obtidos pelo método <i>ERL</i> (GCd) para o $(PCEB_c^L - 2D)$ considerando 16 tipos de itens, $m = 10$	107
5.16	Método <i>ERL</i> (GCs X GCd) para itens nos formatos 1, 3, 6 e 13.	108

5.17	Método ERL (GCs X GCd) para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com a variação de m .	109
5.18	Resultados obtidos pelo método ERL(GCd) para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com a variação de c , $id_{item} = 1$.	111
5.19	Número de variáveis e restrições após o pré-processamento das instâncias do modelo M1-rot (2.22)-(2.26) do conjunto C.	112
5.20	Variações do método FPA^* considerando as permutações de objetos e ciclos e os valores de ζ_i para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com $c = 7$.	114
5.21	Métricas relativas as variações do método FPA^* considerando as permutações de objetos e ciclos e os valores de ζ_i para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com $c = 7$.	120
5.22	Métricas σ^5 e σ^6 para as quatro variações do FPA^* para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com $c = 7$.	121
5.23	Variações do método FPA^* considerando as permutações de objetos e ciclos e os valores de ζ_i para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com $c = d_{max}$.	123
5.24	Métricas relativas as variações do método FPA^* considerando as permutações de objetos e ciclos e os valores de ζ_i para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com $c = d_{max}$.	130
5.25	Resultados obtidos pelos métodos ERL , FPA_{var2}^* e TPA para o $PCEB_c^L - 2D$ e $c = 7$.	132
5.26	Métricas relativas aos variações dos métodos ERL , FPA_{var2}^* e TPA para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com $c = 7$.	134
5.27	Métricas σ^5 e σ^6 relativas aos métodos ERL , FPA_{var2}^* e TPA para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com $c = 7$.	135
5.28	Métricas relativas aos variações dos métodos ERL , FPA_{var3}^* e TPA para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com $c = d_{max}$.	138
B.1	Resultados obtidos pelo método FPA para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 4$.	155
B.2	Resultados obtidos pelo método TPA para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 4$.	156
B.3	Resultados obtidos pelo método ERL para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 7$.	157
B.4	Resultados obtidos pelo método FPA^* para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 7$.	158
B.5	Resultados obtidos pelo método TPA para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 7$.	159
B.6	Resultados obtidos pelo método ERL para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = d_{max}$.	160
B.7	Resultados obtidos pelo método FPA para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = d_{max}$.	161
B.8	Resultados obtidos pelo método TPA para GC estática (GCs) e dinâmica (GCd) para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = d_{max}$.	162
B.9	Resultados obtidos pelos métodos ERL , FPA^* e TPA para o $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 4, 7$.	163
B.10	Resultados obtidos pelos métodos ERL , FPA^* e TPA para $PCEB_c^L - 1D$ e $c = 4, 7$ através das métricas σ^1 , σ^2 e σ^4 .	164
B.11	Método ERL (GCs X GCd) para o $(PCEB_c^L - 2D)$ com a variação de m .	166

LISTA DE SIGLAS

BBM	<i>Balanced Box Method</i>
ER	ϵ –Restrito
ERL	ϵ –Restrito Lexicográfico
FPA	<i>Frontier Partitioner Algorithm</i>
FPA*	<i>Frontier Partitioner Algorithm</i> (considerando a Soma Ponderada Personalizada)
GC	Geração de Colunas
GCa	Geração de Colunas <i>a priori</i>
GCd	Geração de Colunas dinâmica
GCs	Geração de Colunas estática
MRV	<i>Multiple Reference Vectors</i>
OM	Otimização Multiobjetivo
OIM	Otimização Inteira Multiobjetivo
OIMM	Otimização Inteira Mista Multiobjetivo
PCE	Problema de Corte de Estoque
PCEB	Problema de Corte de Estoque Biobjetivo
PCEB _c	Problema de Corte de Estoque Biobjetivo (Minimização do número total de objetos e ciclos da serra)
PCEB ^L	Problema de Corte de Estoque Biobjetivo Linearizado
PCEB-1D	Problema de Corte de Estoque Unidimensional Biobjetivo
PCEB-2D	Problema de Corte de Estoque Bidimensional Biobjetivo
PCEB _c ^L	Problema de Corte de Estoque Biobjetivo Linearizado (Minimização do número total de objetos e ciclos da serra)
PCEM-1D	Problema de Corte de Estoque Unidimensional Multiobjetivo
PCEM-2D	Problema de Corte de Estoque Bidimensional Multiobjetivo
PCEM ^L	Problema de Corte de Estoque Multiobjetivo Linearizado
PCGR	Problema de Corte Guilhotinado e Restrito
PCKT	Ponto Crítico de Kuhn-Tucker
PMR	Problema Mestre Restrito
POIB	Problema de Otimização Inteira Biobjetivo
POM	Problema de Otimização Multiobjetivo
POLM	Problema de Otimização Linear Multiobjetivo
SP	Soma Ponderada
SPP	Soma Ponderada Personalizada
TPA	Tchebycheff Ponderado Aumentado

Sumário

1	Introdução	17
2	Problema de Corte de Estoque	19
2.1	Características do PCE	21
2.2	Modelagem matemática do problema de corte de estoque unidimensional e bidimensional monobjetivo	25
2.3	Geração de colunas no contexto da otimização monobjetivo para o PCE (1D e 2D)	28
2.4	Geração de padrões de corte 1D e 2D	29
2.5	Outros Critérios de otimização para o PCE	32
3	Otimização Multiobjetivo	36
3.1	Conceitos e definições	37
3.2	Buscas no espaço critério e no espaço de decisão	43
3.3	Métodos de escalarização	46
3.3.1	Método da soma ponderada	47
3.3.2	Método ϵ -restrito	47
3.3.3	Método de Tchebycheff	51
3.4	Métodos que combinam técnicas de decomposição do espaço critério e es- calarizações	52
3.4.1	Método de particionamento da fronteira (FPA)	53
3.5	Métricas de desempenho	58
3.6	Problema de corte de estoque multiobjetivo	60
3.7	Conclusões	64
4	Métodos de Escalarização Aplicados ao PCE Biobjetivo (1D e 2D)	67
4.1	Geração de colunas no contexto da otimização multiobjetivo para o PCE (1D e 2D)	68
4.2	Descrição dos métodos de escalarização para o $PCEB_c^L$	73
4.2.1	Método ϵ -Restrito Lexicográfico	73
4.2.2	Método de Particionamento da Fronteira	74
4.2.3	Método Tchebycheff Ponderado Aumentado	77
5	Estudo Computacional	79
5.1	Estudo computacional $PCEB_c^L$ -1D	79
5.1.1	Descrição das instâncias	80
5.1.2	Resultados e discussão	81
5.2	Estudo computacional $PCEB_c^L$ -2D	100
5.2.1	Descrição das instâncias	100

5.2.2	Resultados e discussão	105
5.3	Conclusões	139
6	Considerações Finais	141
	Referências	143
Apêndice A	Variações dos Métodos de Escalarização	151
A.1	Variações do método da Soma Ponderada	151
A.2	Variações do método ϵ –Restrito	151
A.3	Variações do método da Métrica de Tchebycheff	154
Apêndice B	Tabelas Complementares	155
B.1	Resultados para os Métodos ERL, FPA^* e TPA aplicados ao $PCEB_c^L$ -1D	155
B.2	Resultados para os Métodos ERL, FPA^* e TPA aplicados ao $PCEB_c^L$ -2D	165
Apêndice C	Teoria de Invexidade Aplicada ao PCE Biobjetivo	168
C.1	Convexidade e convexidade generalizada (Invexidade)	168
C.1.1	Convexidade e invexidade de funções	168
C.1.2	Relações entre convexidade e invexidade	172
C.2	Problemas de otimização multiobjetivo e invexidade	174
C.3	Problema auxiliar para o PCEB (<i>Setup</i>)	177
C.4	Problema auxiliar para o $PCEB_c$ (ciclos)	179
C.5	Conclusões	185

1 Introdução

Em alguns processos industriais, a produção inclui um estágio no qual é necessário cortar objetos grandes em partes menores otimizando um ou mais critérios a fim de atender uma demanda pré-determinada. Esse estágio envolve a solução de um problema de otimização matemática conhecido na literatura como Problema de Corte de Estoque (PCE). O PCE é um dos problemas mais estudados na área da otimização combinatória devido a sua grande aplicabilidade em indústrias de móveis, papel, aço, vidros, plásticos, tecidos, colchões entre outras. Alguns pontos importantes do planejamento da produção no qual o problema de corte de estoque está presente são os custos do desperdício de material e a produtividade do equipamento de corte. Essa produtividade pode ser afetada, dentre outros motivos, pelo tipo e número de diferentes padrões usados no corte dos objetos conhecido como *setup* e também pelo número de objetos que podem ser cortados simultaneamente na máquina de corte (ciclos da serra). Assim, como critério de otimização para tratar essas características pode se considerar a minimização do número total de objetos, e (ou) minimização do número total de *setups*, e (ou) minimização de ciclos da serra, entre outros critérios. Um melhor aproveitamento da capacidade da serra (ciclos completos de serra) pode implicar no aumento do número de objetos cortados. E ao minimizar o número de diferentes padrões de corte pode implicar em um aumento na frequência dos padrões de cortes utilizados assim aumentando o número de objetos cortados. Isso mostra um conflito entre os critérios, ou seja, quando um critério é individualmente otimizado, o outro é piorado. Frequentemente esses critérios conflitantes são considerados simultaneamente em um problema de otimização monobjetivo. Uma forma de abordar explicitamente o conflito entre esses objetivos é considerar a Otimização Multiobjetivo. A principal característica dos problemas de Otimização Multiobjetivo é que a solução é dada por um conjunto não unitário de soluções, ditas eficientes no sentido de Pareto.

O foco dessa tese é a solução do PCE unidimensional e bidimensional multiobjetivo considerando a característica não linear da função objetivo que representa o número de ciclos da serra e sua versão linearizada. Através da revisão de métodos de escalarização para solução de problemas de otimização multiobjetivo, seleciona-se três métodos para resolver o PCE unidimensional e bidimensional multiobjetivo linearizado ($PCEM^L$). Uma das contribuições dessa tese é a proposta de um algoritmo de Geração de colunas multiobjetivo baseado em métodos de escalarizações para resolver o $PCEM^L$. A análise do desempenho dos métodos é feita através das métricas de comparação propostas na literatura que analisam a qualidade da aproximação da fronteira de Pareto. Outra contribuição dessa tese é a utilização de resultados que garantem a eficiência parcial de uma solução factível do PCE Biobjetivo a partir do conceito de convexidade generalizada também conhecida como invexidade. Essa abordagem é apresentada no Apêndice C como um estudo inicial que pode ser empregada futuramente de duas formas: obter uma aproximação da fronteira de Pareto através da resolução de um sistema de equações não lineares; utilizar essa abordagem para classificar soluções factíveis obtidas por métodos heurísticos e assim

obter uma aproximação da fronteira de Pareto.

Os capítulos dessa tese estão organizados da seguinte maneira. No Capítulo 2 é feita uma revisão das características do Problema de Corte de Estoque unidimensional e bidimensional. Modelos matemáticos de otimização para os problemas de corte de estoque e para o subproblema *price* associado ao método de geração de colunas são também apresentados. No Capítulo 3 são descritos os principais conceitos e definições da Otimização Multiobjetivo incluindo a descrição de métodos de busca no espaço critério e no espaço de decisão, e métricas de avaliação da qualidade da aproximação da fronteira de Pareto. No Capítulo 4 é apresentado o algoritmo de geração de colunas dinâmica e a descrição dos métodos escolhidos para aplicar ao PCE Biobjetivo. Uma análise dos resultados do estudo computacional proposto para avaliar a qualidade das aproximações da Fronteira de Pareto obtidas é apresentado no Capítulo 5. Por fim, no Capítulo 6 são feitas as considerações finais e são apresentadas propostas futuras.

6 Considerações Finais

Nesta tese abordou-se as principais características do Problema de Corte de Estoque através de uma revisão da literatura e o método mais utilizado na sua resolução que é o método de Geração de Colunas. Apresentou-se os principais conceitos da Otimização Multiobjetivo destacando os métodos de solução mais utilizados que são os métodos de escalarização. O estudo das técnicas de escalarização mostrou uma variedade de métodos e poucos artigos que aplicam essas técnicas no PCEM-2D. Através da revisão realizada sobre os métodos de escalarização foi possível selecionar três métodos para o desenvolvimento do estudo computacional apresentado. Essa revisão, apresentada no Capítulo 3, serviu de inspiração para um minicurso ministrado na “XXXI SEMAT” (BORGES; RANGEL, 2019), e resultou no artigo (BORGES; RANGEL, 2020).

Um algoritmo de Geração de Colunas multiobjetivo foi proposto e incorporado nos métodos *ERL*, *FPA** e *TPA* aplicados ao $(PCEB_c^L)$ unidimensional e bidimensional, Capítulo 4. Através do estudo computacional desenvolvido foi possível concluir que a geração de colunas dinâmica obteve aproximações da fronteira com maior qualidade do que quando se considera apenas a GC a priori (GCs), a qualidade da fronteira foi avaliada utilizando seis métricas de desempenho. Mostrou-se também como a cardinalidade da aproximação da fronteira pode ser afetada pelo valor da capacidade da serra, quanto maior a capacidade da serra maior é a cardinalidade. Através da alteração da capacidade da serra para o valor da demanda máxima no algoritmo proposto foi possível aplicar os métodos *ERL*, *FPA** e *TPA* para obter uma aproximação da fronteira para o *PCEB* (objetos, *setup*) obtendo resultados similares aos da literatura. A comparação entre os métodos *ERL*, *FPA** e *TPA* mostrou que aplicar técnicas de decomposição no espaço critério combinadas às técnicas de escalarização resulta em métodos mais rápidos que retornam uma aproximação melhor da fronteira de Pareto (método *FPA**). Com isso, conclui-se que o método mais adequado para se resolver os Problemas de Corte de Estoque Biobjetivo unidimensional e bidimensional tanto para a minimização de (objetos, ciclos) quanto para a minimização de (objetos, *setup*) é o *FPA**.

Os resultados para o caso unidimensional mostraram uma aproximação da fronteira de boa qualidade obtida pelo *TPA* porém ele não obtém um bom desempenho considerando os indicadores de desempenho número de soluções por tempo de execução (σ^5) e número de soluções por subproblema resolvido (σ^6), e o tempo computacional devido ao grande número de subproblemas resolvidos, resultando em um número menor de soluções por unidade de tempo de execução e por subproblema. Esse desempenho se dá por causa da dificuldade em determinar uma variação adequada dos pesos necessários na escalarização do método. Uma maneira de contornar pode ser verificando a possibilidade de aplicar a estratégia utilizada no método *FPA** ao método *TPA*. Utilizando a decomposição do espaço critério e o cálculo dos pesos realizado apenas uma vez, evita-se que os pesos no método *TPA* sejam variados a cada iteração do método.

Uma revisão sobre convexidade e convexidade generalizada (invexidade) é apresentado

e através desses conceitos são provados resultados de otimalidade parcial para o PCEB. Esses resultados permitem estabelecer conexões entre a otimização discreta e a otimização contínua multiobjetivo. No Apêndice C, o PCEB e o $PCEB_c$ são considerados em sua natureza não linear e não diferenciável. Uma suavização da função ciclos da serra e os resultados de otimalidade parcial são usados para encontrar soluções parcialmente eficientes através da solução de um sistema de equações não lineares. Resultados parciais desse apêndice foram publicados em Borges, Rangel e Neto (2020), Florentino et al. (2019).

Principais contribuições da tese:

- Revisão da teoria de otimização Multiobjetivo e métodos de escalarização;
- Desenvolvimento e implementação de um algoritmo de geração de colunas multi-objetivo aplicado em três métodos de escalarização da literatura para resolver o $PCEB_c^L$ unidimensional e bidimensional sendo facilmente adaptado para simular o $PCEB^L$ (objetos, *setup*).
- Comparação dos três métodos (ERL , FPA^* e TPA) através de um conjunto de métricas que comparam a qualidade da aproximação da fronteira e o desempenho dos métodos, determinando o método mais adequado.
- Desenvolvimento de uma estratégia para determinar soluções parcialmente eficientes que considera a característica não linear e não diferenciável do $PCEB_c$ propondo uma suavização para a função ciclos da serra.

Ainda há várias lacunas a serem preenchidas relativas ao PCE-2D multiobjetivo, entre elas, destacam-se:

- Melhoria no algoritmo de geração de colunas que pode ser obtida utilizando a estratégia “busca ponto a ponto aprimorada” descrita em Artigues, Jozefowicz e Sarpong (2018).
- Devido à dificuldade em obter padrões de corte bidimensionais discutida no Capítulo 2, foi possível ver através dos resultados mostrados nesse Capítulo 4 que para o caso bidimensional o tempo é prejudicado pelo modelo escolhido para gerar os padrões de corte (subproblema *price*). Uma proposta para contornar esse problema é testar outros modelos ou heurísticas para gerar os padrões de corte.
- Combinar os métodos FPA^* e TPA .
- Aplicar outras escalarizações como a Var.8 do ER que obteve melhor desempenho de acordo com Sáez-Aguado e Trandafir (2018).
- Considerar o PCE-2D triobjetivo, considerando, por exemplo, a minimização de (objetos, ciclos, *setup*).

Referências

- ALIANO-FILHO, A. *Novas extensões de técnicas de escalarização no problema de corte unidimensional inteiro multiobjetivo*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, IMECC, Campinas, 2016.
- ALIANO-FILHO, A.; MORETTI, A.; PATO, M. Aplicação do algoritmo ϵ -restrito com uma heurística de arredondamento no problema de corte unidimensional inteiro multiobjetivo. In: *Anais do XLVII SBPO. SOBRAPO - Brazilian Operational Research Society*. [S.l.: s.n.], 2015. p. 3983–3994.
- ALIANO-FILHO, A.; MORETTI, A. C.; PATO, M. V. A comparative study of exact methods for the bi-objective integer one-dimensional cutting stock problem. *Journal of the Operational Research Society*, Taylor & Francis, v. 69, n. 1, p. 91–107, 2018.
- ALIANO-FILHO, A. et al. An exact scalarization method with multiple reference points for bi-objective integer linear optimization problems. *Annals of Operations Research*, v. 296, n. 1, p. 35–69, 2021.
- ANEJA, Y. P.; NAIR, K. P. K. Bicriteria transportation problem. *Management Science*, v. 25, n. 1, p. 73–78, 1979.
- ARANA-JIMÉNEZ, M. et al. Pseudoinvexity, optimality conditions and efficiency in multiobjective problems; duality. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, v. 68, p. 24–34, 2008.
- ARANA-JIMÉNEZ, M.; SALLES-NETO, L. Sufficient condition for partial efficiency in a bicriteria nonlinear cutting stock problem. *RAIRO-Operations Research*, EDP Sciences, v. 51, n. 3, p. 709–717, 2017.
- ARTIGUES, C.; JOZEFOWIEZ, N.; SARPONG, B. M. Column generation algorithms for bi-objective combinatorial optimization problems with a min–max objective. *EURO Journal on Computational Optimization*, v. 6, n. 2, p. 117–142, 2018.
- ASSIS, N. S.; RANGEL, S. Uma revisão sobre o uso da programação dinâmica na solução do problema de corte. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 7, n. 1, 2020.
- BEENSON, R. *Optimization with respect to multiple criteria*. Tese (Doutorado) — University of Southern California, Los Angeles, California, 1971.
- BELOV, G.; SCHEITHAUER, G. A branch-and-cut-and-price algorithm for one-dimensional stock cutting and two-dimensional two-stage cutting. *European Journal of Operational Research*, v. 171, n. 1, p. 85 – 106, 2006.

- BEN-TAL, A. Characterization of pareto and lexicographic optimal solutions. In: FANDEL, G.; GAL, T. (Ed.). *Multiple Criteria Decision Making Theory and Application*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1980. p. 1 – 11.
- BENSON, H. P.; SUN, E. A weight set decomposition algorithm for finding all efficient extreme points in the outcome set of a multiple objective linear program. *European Journal of Operational Research*, v. 139, n. 1, p. 26 – 41, 2002.
- BOLAND, N.; CHARKHGARD, H.; SAVELSBERGH, M. The triangle splitting method for biobjective mixed integer programming. In: LEE, J.; VYGEN, J. (Ed.). *Integer Programming and Combinatorial Optimization*. [S.l.]: Springer International Publishing, 2014. p. 162 – 173.
- BOLAND, N.; CHARKHGARD, H.; SAVELSBERGH, M. A criterion space search algorithm for biobjective integer programming: The balanced box method. *INFORMS Journal on Computing*, v. 27, n. 4, p. 735–754, 2015.
- BOLAND, N.; CHARKHGARD, H.; SAVELSBERGH, M. A criterion space search algorithm for biobjective mixed integer programming: The triangle splitting method. *INFORMS Journal on Computing*, v. 27, n. 4, p. 597–618, 2015.
- BOLAND, N.; CHARKHGARD, H.; SAVELSBERGH, M. The l-shape search method for triobjective integer programming. *Mathematical Programming Computation*, v. 8, p. 217–251, 2016.
- BOLAND, N.; CHARKHGARD, H.; SAVELSBERGH, M. A new method for optimizing a linear function over the efficient set of a multiobjective integer program. *European Journal of Operational Research*, v. 260, n. 3, p. 904–919, 2017.
- BOLAND, N.; CHARKHGARD, H.; SAVELSBERGH, M. The quadrant shrinking method: A simple and efficient algorithm for solving tri-objective integer programs. *European Journal of Operational Research*, v. 260, n. 3, p. 873–885, 2017.
- BORGES, J.; RANGEL, S. Introdução aos problemas de otimização matemática multiobjetivo. In: XXXI SEMAT - *Semana da Matemática*. [S.l.: s.n.], 2019. Realizada no Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Câmpus de São José do Rio Preto, IBILCE - UNESP.
- BORGES, J.; RANGEL, S. Uma revisão sobre métodos de escalarização para o problema de corte de estoque bidimensional multiobjetivo. In: *Anais do LII Simpósio Brasileiro de pesquisa Operacional - SBPO*. [s.n.], 2020. Visitada pela última vez em 22/07/2021. Disponível em: <<https://proceedings.science/sbpo-2020/papers/>>.
- BORGES, J. C.; RANGEL, S.; NETO, L. L. de S. A teoria da invexidade aplicada ao problema de corte de estoque biobjetivo. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 7, n. 1, 2020.
- CARVALHO, J. V. de. Lp models for bin packing and cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*, v. 141, n. 2, p. 253 – 273, 2002.
- CERVELATI, J.; MEDAR, M. R. Funções invexas diferenciáveis e o teorema de karush-kuhn-tucker1. *Trends in Applied and Computational Mathematics*, v. 7, n. 1, 2006.

- CHANKONG, V.; HAIMES, Y. Y. *Multiobjective decision making: theory and methodology*. [S.l.]: Courier Dover Publications, 2008.
- CHAVES, C. *Um estudo sobre heurísticas residuais para o problema de corte de estoque bidimensional*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2019.
- CHRISTOFIDES, N.; WHITLOCK, C. An algorithm for two-dimensional cutting problems. *Operations Research*, v. 25, n. 1, p. 30 – 44, 1977.
- CINTRA, G. et al. Algorithms for two-dimensional cutting stock and strip packing problems using dynamic programming and column generation. *European Journal of Operational Research*, v. 191, n. 1, p. 61 – 85, 2008.
- CRAVEN, B. Invex functions and constrained local minima. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, Cambridge University Press, v. 24, n. 3, p. 357 – 366, 1981.
- DEB, K. *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- DEGRAEVE, Z.; PEETERS, M. Optimal integer solutions to industrial cutting-stock problems: Part 2, benchmark results. *INFORMS Journal on Computing*, v. 15, n. 1, p. 58–81, 2003.
- DOLAN, E. D.; MORE, J. J. Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming*, v. 91, n. 2, p. 201–213, 2002.
- DYCKHOFF, H. A new linear programming approach to the cutting stock problem. *Operations Research*, v. 29, p. 1092–1104, 12 1981.
- DYCKHOFF, H. Cutting and packing a typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, v. 44, n. 2, p. 145 – 159, 1990.
- EGUDO, R.; HANSON, M. Multiobjective duality with invexity. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 126, n. 2, p. 469 – 477, 1987.
- EHRGOTT, M. *Multicriteria Optimization*. Berlin: Springer, 2000.
- EHRGOTT, M. A discussion of scalarization techniques for multiple objective integer programming. *Annals of Operations Research*, v. 147, n. 1, p. 343 – 360, 2006.
- EHRGOTT, M.; GANDIBLEUX, X. A survey and annotated bibliography of multiobjective combinatorial optimization. *OR-Spektrum*, v. 22, n. 4, p. 425 – 460, 2000.
- EHRGOTT, M.; GANDIBLEUX, X. Multiple objective combinatorial optimization - a tutorial. In: *Multi-Objective Programming and Goal Programming*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2003. p. 3 – 18.
- EVANS, J. P.; STEUER, R. E. A revised simplex method for linear multiple objective programs. *Mathematical Programming*, v. 5, n. 1, p. 54 – 72, 1973.
- FIGUEIREDO, A. G. d. *Análise de produtividade de padrões de corte na indústria de móveis*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2006.

- FLORENTINO, H. et al. Modelando e resolvendo sistemas não lineares com técnicas de programação por metas. In: *Anais do XXXIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC*. [S.l.: s.n.], 2019.
- FOERSTER, H.; WASCHER, G. Pattern reduction in one-dimensional cutting stock problems. *International journal of production research*, Taylor & Francis, v. 38, n. 7, p. 1657–1676, 2000.
- GAU, T.; WÄSCHER, G. Cutgen1: A problem generator for the standard one-dimensional cutting stock problem. *European Journal of Operational Research*, v. 84, n. 3, p. 572–579, 1995.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations Research*, v. 9, n. 6, p. 849 – 859, 1961.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting stock problema - part ii. *Operations Research*, v. 11, n. 6, p. 863 – 888, 1963.
- GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. *Operations Research*, v. 13, n. 1, p. 94 – 120, 1965.
- GOMEZ, J. C.; TERASHIMA-MARINS, H. Approximating multi-objective hyper-heuristics for solving 2d irregular cutting stock problems. In: SIDOROV, G. e. a. (Ed.). *Advances in Soft Computing*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2010. p. 349 – 360.
- HAMACHER, H. W.; PEDERSEN, C. R.; RUZIKA, S. Finding representative systems for discrete bicriterion optimization problems. *Operations Research Letters*, v. 35, n. 3, p. 336 – 344, 2007.
- HANSON, M. A. On sufficiency of the kuhn-tucker conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 80, n. 2, p. 545 – 550, 1981.
- HINXMAN, A. The trim-loss and assortment problems: A survey. *European Journal of Operational Research*, v. 5, n. 1, p. 8–18, 1980.
- HOMAG. 2019. Visitada pela última vez em: 04/06/2019. Disponível em: <<https://www.homag.com/pt/detalhes-do-produto/seccionadora-de-paines-sawteq-b-300/>>.
- IBM, C. *CPLEX*. [S.l.], 2014. Visitada pela última vez em: 13/03/2019. Disponível em: <<http://www-01.ibm.com/software/integration/optimization/cplex-optimizer/>>.
- IBM Support. 2018. Visitada pela última vez em: 11/05/2021. Disponível em: <<https://www.ibm.com/support/pages/note-reproducibility-cplex-runs>>.
- JOZEFOWIEZ, N.; LAPORTE, G.; SEMET, F. A generic branch-and-cut algorithm for multiobjective optimization problems: Application to the multilabel traveling salesman problem. *INFORMS Journal on Computing*, v. 24, p. 554 – 564, 2012.
- JULIA, C. *JuMP*. [S.l.], 2018. Visitada pela última vez em: 09/10/2020. Disponível em: <<https://juiacomputing.com/products/juliapro/>>.
- KANTOROVICH, L. V. Mathematical methods of organizing and planning production. *Management Science*, v. 6, n. 4, p. 366 – 422, 1960.

- KOLEN, A. W. J.; SPIEKSMAN, F. C. R. Solving a bi-criterion cutting stock problem with open-ended demand: a case study. *Journal of the Operational Research Society*, v. 51, n. 11, p. 1238 – 1247, 2000.
- LIBERALINO, C. H. P. et al. Uso de dicas do usuário na otimização do problema bin packing tridimensional. *SBPO-A PESQUISA OPERACIONAL E O USO RACIONAL DE RECURSOS HIDRICOS, XL*, p. 1942–1950, 2008.
- LODI, A.; MONACI, M. Integer linear programming models for 2-staged two-dimensional knapsack problems. *Mathematical Programming*, Springer-Verlag, v. 94, n. 2-3, p. 257–278, 2003.
- MALAGUTI, E.; DURÁN, R. M.; TOTH, P. Approaches to real world two-dimensional cutting problems. *Omega*, v. 47, p. 99 – 115, 2014.
- MARTELLO, S.; TOTH, P. *Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations*. USA: John Wiley & Sons, Inc., 1990. ISBN 0471924202.
- MARTELLO, S.; VIGO, D. Exact solution of the two-dimensional finite bin packing problem. *Management Science*, v. 44, n. 3, p. 388–399, 1998.
- MARTIN, M. et al. Models for the two-dimensional rectangular single large placement problem with guillotine cuts and constrained pattern. *International Transactions in Operational Research*, v. 27, n. 2, p. 767–793, 2020.
- MARTIN, M. et al. The constrained two-dimensional guillotine cutting problem with defects: an ilp formulation, a benders decomposition and a cp-based algorithm. *International Journal of Production Research*, Taylor & Francis, v. 58, n. 9, p. 2712–2729, 2020.
- MARTIN, M.; MORABITO, R.; MUNARI, P. A bottom-up packing approach for modeling the constrained two-dimensional guillotine placement problem. *Computers & Operations Research*, v. 115, p. 104851, 2020.
- MARTIN, M. P. *Problemas de corte guilhotinado e restritos: formulações matemáticas e métodos de solução*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de São Carlos, São carlos, 2019.
- MAVROTAS, G.; DIAKOULAKI, D. A branch and bound algorithm for mixed zero-one multiple objective linear programming. *European Journal of Operational Research*, v. 107, n. 3, p. 530 – 541, 1998.
- MELLOULI, A.; MELLOULI, R.; MASMOUDI, F. An innovative genetic algorithm for a multi-objective optimization of two-dimensional cutting-stock problem. *Applied Artificial Intelligence*, Taylor & Francis, v. 33, n. 6, p. 531–547, 2019.
- MISHRA, S. K.; GIORGI, G. *Nonconvex Optimization and its Applications. Inverity and Optimization*. Berlim: Springer Verlag, 2008.
- MORABITO, R.; ARENALES, M. N. Staged and constrained two-dimensional guillotine cutting problems: An and/or-graph approach. *European Journal of Operational Research*, v. 94, n. 3, p. 548 – 560, 1996.

- MOSQUERA, G.; RANGEL, S. Redução de ciclos da serra no problema de corte de estoque bidimensional na indústria de móveis. In: *Anais do XXX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC*. [S.l.: s.n.], 2007.
- MUNARI-JUNIOR, P. A. Comparação de softwares científicos utilizando perfis de desempenho: automatização dos cálculos pela planilha perfis. xls. São Carlos, SP, Brasil., 2009.
- MUÑOZ, C. et al. Improving cutting-stock plans with multi-objective genetic algorithms. In: MIRA J. AND ÁLVAREZ, J. R. (Ed.). *Bio-inspired Modeling of Cognitive Tasks*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2007. p. 528 – 537.
- OSUNA-GÓMEZ, R.; BEATO-MORENO, A.; RUFIAN-LIZANA, A. Generalized convexity in multiobjective programming. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 233, n. 1, p. 205 – 220, 1999.
- POLDI, K. C.; ARENALES, M. N. Heuristics for the one-dimensional cutting stock problem with limited multiple stock lengths. *Computers & Operations Research*, v. 36, n. 6, p. 2074 – 2081, 2009.
- RANGEL, S.; FIGUEIREDO, A. G. d. O problema de corte de estoque em indústrias de móveis de pequeno e médio portes. *Pesquisa Operacional*, scielo, v. 28, p. 451 – 472, 2008.
- RANGEL, S.; SÁEZ-AGUADO, J. Biobjective approaches for the cutting stock problem minimizing total number of objects and saw cycles. *INFORMS 2017 Technical Program*, v. 1, p. 165–165, 2017a.
- RANGEL, S.; SÁEZ-AGUADO, J. Unidimensional cutting stock problem: Mathematical models to minimize the number of saw cycles and objects. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 5, n. 1, 2017b.
- RESPICIO, A.; CAPTIVO, E. Bi-objective sequencing of cutting patterns. In: *METAHEURISTICS: progress as real problem solvers*. [S.l.]: Springer, 2005. p. 227 – 241.
- RIQUELME, N.; LÜCKEN, C. V.; BARAN, B. Performance metrics in multi-objective optimization. In: *2015 Latin American Computing Conference (CLEI)*. [S.l.: s.n.], 2015. p. 1–11.
- SÁEZ-AGUADO, J.; TRANDAFIR, P. C. Variants of the ϵ –constraint method for biobjective integer programming problems: application to ρ -median-cover problems. *Mathematical Methods of Operations Research*, v. 87, n. 2, p. 251 – 283, 2018.
- SALLES-NETO, L. L.; ARAUJO, S.; GOLFETO, R. Um problema de corte de estoque multiobjetivo. *Pesquisa Operacional para o Desenvolvimento*, v. 6, n. 2, p. 183 – 201, 2014.
- SANTIS, M. D.; GRANI, G.; PALAGI, L. Branching with hyperplanes in the criterion space: The frontier partitioner algorithm for biobjective integer programming. *European Journal of Operational Research*, v. 283, n. 1, p. 57–69, 2020.

- SILVA, E.; ALVELOS, F.; CARVALHO, J. V. de. An integer programming model for two- and three-stage two-dimensional cutting stock problems. *European Journal of Operational Research*, v. 205, n. 3, p. 699–708, 2010.
- SILVA, E.; OLIVEIRA, J. F.; WÄSCHER, G. 2dcpackgen: A problem generator for two-dimensional rectangular cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, v. 237, n. 3, p. 846–856, 2014.
- SLIMANI, H.; RADJEF, M. S. *Multiobjective Programming under Generalized Inconvexity: Optimality, Duality, Applications*. [S.l.]: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2010.
- SOLAND, R. M. Multicriteria optimization: A general characterization of efficient solutions. *Decision sciences*, Wiley Online Library, v. 10, n. 1, p. 26 – 38, 1979.
- SOURD, F.; SPANJAARD, O. A multiobjective branch-and-bound framework: Application to the biobjective spanning tree problem. *INFORMS Journal on Computing*, v. 20, n. 3, p. 472 – 484, 2008.
- STIDSEN, T.; ANDERSEN, K. A.; DAMMANN, B. A branch and bound algorithm for a class of biobjective mixed integer programs. *Management Science*, v. 60, n. 4, p. 1009 – 1032, 2014.
- SYLVA, J.; CREMA, A. A method for finding the set of non-dominated vectors for multiple objective integer linear programs. *European Journal of Operational Research*, v. 158, n. 1, p. 46 – 55, 2004.
- TEIXEIRA, F. L.; POLDI, K. C. O problema de corte de estoque associado ao problema de minimizar o número de pilhas abertas. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 7, n. 1, 2020.
- TOSCANO, A.; RANGEL, S.; YANASSE, H. H. A heuristic approach to minimize the number of saw cycles in small-scale furniture factories. *Annals of Operations Research*, v. 258, n. 2, p. 719–746, 2017.
- VANDERBECK, F. Exact algorithm for minimising the number of setups in the one-dimensional cutting stock problem. *Operations Research*, v. 48, n. 6, p. 915–926, 2000.
- WÄSCHER, G.; GAU, T. Heuristics for the integer one-dimensional cutting stock problem: A computational study. *Operations-Research-Spektrum*, Springer-Verlag, v. 18, n. 3, p. 131–144, 1996.
- WÄSCHER, G.; HAUSSNER, H.; SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, v. 183, n. 3, p. 1109 – 1130, 2007.
- WILLIAMS, H. P. *Model building in mathematical programming*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.
- YANASSE, H.; MORABITO, R. Linear models for one-group two-dimensional guillotine cutting problems. *International Journal of Production Research*, v. 44, p. 3471 – 3491, 2006.

YANASSE, H.; ZINOBER, A.; HARRIS, R. G. Two-dimensional cutting stock with multiple stock sizes. *Journal of The Operational Research Society - J OPER RES SOC*, v. 42, p. 673 – 683, 1991.

YANASSE, H. H. A note on the minimization of the number of cutting cycles problem. *Livro de resumos do XI Simpósio de Pesquisa Operacional e Logística da Marinha - SPOLM*, 2008.

YANASSE, H. H.; MORABITO, R. A note on linear models for two-group and three-group two-dimensional guillotine cutting problems. *International Journal of Production Research*, v. 46, n. 21, p. 6189–6206, 2008.

YU, P.; ZELENY, M. The techniques of linear multiobjective programming. *Revue française d'automatique, informatique et recherche opérationnelle*, v. 3, p. 51 – 71, 1974.

ZELENY, M. *Linear Multiobjrctivr Programming*. Berlim: Springer Verlag, 1974.