



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Câmpus de São José do Rio Preto

Chang Hsun Ming

Simulações empregando a decomposição de Adomian para  
resolver as equações da dinâmica de voo de quadrotores

São José do Rio Preto  
2016

Chang Hsun Ming

Simulações empregando a decomposição de Adomian para  
resolver as equações da dinâmica de voo de quadrotores

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação, junto ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Área de Concentração – Computação Aplicada, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Francisco  
Donegá Zafalon

São José do Rio Preto  
2016

Chang, Hsun Ming.

Simulações empregando a decomposição de Adomian para resolver as equações da dinâmica de voo de quadrotores / Chang Hsun Ming. -- São José do Rio Preto, 2016

65 f. : il., tabs.

Orientador: Geraldo Francisco Donegá Zafalon

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Computação - Matemática. 2. Simulação (Computadores digitais) 3. Quadrotor - Simulação por computador. I. Zafalon, Geraldo Francisco Donegá. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 518.72

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE  
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Chang Hsun Ming

Simulações empregando a decomposição de Adomian para resolver as equações da dinâmica de voo de quadrotoros

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação, junto ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Área de Concentração – Computação Aplicada, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Geraldo Francisco Donegá Zafalon  
UNESP – São José do Rio Preto, SP  
Orientador

Prof. Dr. Carlos Roberto Valêncio  
UNESP – São José do Rio Preto, SP

Prof. Dr. Wladimir Seixas  
UFSCAR – Sorocaba, SP

São José do Rio Preto  
26 de fevereiro de 2016

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, que sempre me protegeu e deu forças para superar todos os obstáculos.

Aos meus pais, Chang Fu Yang e Chang Wu Chiu Hsia, que me trouxeram ao Brasil e proporcionaram todo o suporte para que eu pudesse fazer a minha pós-graduação, também pelo carinho e amor.

Aos irmãos e cunhada, Chang Ti Hao, Chang Ling Ning e Chen Ying Ying, pelo carinho e amor.

A minha esposa, Lee Pei Yu, pelo apoio, carinho e amor.

Aos meus amigos que durante esses anos compartilharam suas conquistas e sempre torceram pelas minhas.

Ao Prof. Dr. José Márcio Machado que me incentivou o estudo do mestrado, pelo seu exemplo de profissional, apesar de não estar mais comigo hoje, sempre está no meu coração.

Aos Prof. Dr. Carlos Roberto Valêncio e Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup>. Paula Rahal, pelo acompanhamento, carinho e apoio.

Ao meu orientador Prof. Dr. Geraldo Francisco Donegá Zafalon, pela disposição, orientação, paciência e amizade.

Aos amigos do laboratório de bioinformática, Anderson Rici Amorim e Juliano Farias da Nóbrega, pelas ajudas incondicionais.

*À minha família*

*Não importa quantos passos você deu para trás,  
o importante é quantos passos agora você vai dar para frente.*

Provérbio Chinês

## RESUMO

Um quadrotor é um veículo aéreo não-tripulado (VANT). Diversos estudos sobre o controle de seu voo foram conduzidos nos últimos anos. As técnicas de domínio da dinâmica de voos são assuntos interessantes em diversas áreas em que podem ser aplicadas e a maioria das pesquisas é realizada em ambiente interno com a presença de sensores. A aplicação em ambiente externo ainda é pouco estudada devido à falta de autocontrole de voo do próprio quadrotor. Nesse cenário, foi encontrada a motivação para a confecção da proposta apresentada no trabalho, cujo principal objetivo é aplicar o método da decomposição de Adomian e analisar as soluções com outros métodos aplicados, por meio de simulações computacionais, para se ter uma solução que pode ser implementada no autocontrole de voo. Nas simulações realizadas, obtêm-se os resultados bons e significativos em relação às velocidades angulares, cuja eficiência é melhor do que outros métodos comparados. Portanto, a utilização do método da decomposição de Adomian nas equações da dinâmica de voos apresenta um bom desempenho.

Palavras-chave: Quadrotor. Veículo aéreo não-tripulado. Método da decomposição de Adomian.

## **ABSTRACT**

The quadrotor is an unmanned aerial vehicle (UAV). Several studies on the control of its flight have been conducted in recent years. The domain techniques of dynamic flights are interesting subjects in the various areas where they can be applied and most research is carried out in the indoor environment with the presence of sensors. The outdoor applications are still little studied due to lack of self-control quadrotor own flight. In this scenario, the motivation to develop this work was found, whose aim is to apply the Adomian decomposition method and analyze the solutions with other methods applied through computer simulations to have a solution that can be deployed in flight self. In the simulations, we obtain the good and significant results in relation to the angular velocity, whose efficiency is better than other methods compared. Therefore, the use of the Adomian decomposition method in equations of dynamic flight has a good performance.

Keywords: Quadrotor. Unmanned aerial vehicle. Adomian decomposition method.

# Lista de Figuras

FIGURA 1.1: EXEMPLO DE UM VANT DO TIPO QUADROTOR.....	14
FIGURA 2.1: ROTAÇÃO EM 2D.....	17
FIGURA 2.2: ROTAÇÃO ANTI-HORÁRIA DE UM VETOR $\mathbf{P}$ AO REDOR DO VETOR UNITÁRIO $\mathbf{n}$ DE UM ÂNGULO $\mu$ , PARA OBTER UM VETOR $\mathbf{Q}$ .....	18
FIGURA 2.3: ROTAÇÃO DE $\mathbf{P}$ AO REDOR DO EIXO $Z$ .....	19
FIGURA 2.4: COORDENADAS DO <i>FRAME</i> INERCIAL.....	21
FIGURA 2.5: COORDENADAS DO <i>FRAME</i> DO VEÍCULO.....	21
FIGURA 2.6: O <i>FRAME</i> DO VEÍCULO 1.....	22
FIGURA 2.7: O <i>FRAME</i> DO VEÍCULO 2.....	22
FIGURA 2.8: O <i>FRAME</i> DO CORPO.....	23
FIGURA 2.9: DERIVAÇÃO DA EQUAÇÃO DE CORIOLIS.....	25
FIGURA 2.10: DEFINIÇÃO DOS EIXOS.....	26
FIGURA 2.11: MODELAGEM SIMPLIFICADA DAS MASSAS DO QUADROTOR COMO ESFERAS.....	30
FIGURA 2.12: MOVIMENTO DO QUADROTOR.....	32
FIGURA 2.13: A VISTA SUPERIOR DO QUADROTOR.....	33
FIGURA 2.14: DEFINIÇÃO DAS FORÇAS E TORQUES QUE ATUAM SOBRE O QUADROTOR.....	33
FIGURA 3.1: GRÁFICO DA COMPARAÇÃO DE RESULTADOS DOS MÉTODOS DE EULER E DE <i>RUNGE-KUTTA</i> .....	44
FIGURA 5.1: RESULTADO DA VELOCIDADES ANGULARES COM VELOCIDADE DE PROPULSORES $\Omega_F=219$ , $\Omega_B=215$ , $\Omega_L=215$ E $\Omega_R=215$ .....	55
FIGURA 5.2: RESULTADO DA VELOCIDADES ANGULARES COM VELOCIDADE DE PROPULSORES $\Omega_F=215$ , $\Omega_B=215$ , $\Omega_L=219$ E $\Omega_R=215$ .....	56
FIGURA 5.3: RESULTADO DA VELOCIDADES ANGULARES COM VELOCIDADE DE PROPULSORES $\Omega_F=219$ , $\Omega_B=219$ , $\Omega_L=215$ E $\Omega_R=215$ .....	57
FIGURA 5.4: RESULTADO DA VELOCIDADES ANGULARES COM VELOCIDADE DE PROPULSORES $\Omega_F=219$ , $\Omega_B=215$ , $\Omega_L=215$ E $\Omega_R=215$ .....	59
FIGURA 5.5: RESULTADO DA VELOCIDADES ANGULARES COM VELOCIDADE DE PROPULSORES $\Omega_F=219$ , $\Omega_B=215$ , $\Omega_L=215$ E $\Omega_R=217$ .....	60
FIGURA 5.6: RESULTADO DA VELOCIDADES ANGULARES COM VELOCIDADE DE PROPULSORES $\Omega_F=229$ , $\Omega_B=215$ , $\Omega_L=215$ E $\Omega_R=215$ .....	61

# Lista de Tabela

TABELA 5.1: PARÂMETROS DO QUADROTOR NA SIMULAÇÃO .....	54
--------------------------------------------------------	----

## Lista de Abreviaturas e Símbolos

$F_i$	Força de empuxo produzida pelo $i$ -ésimo motor
$g$	Aceleração da gravidade
$I$	Matriz contante de inercial
$I_x$	Momento de inércia em torno do eixo $x$ do quadrotor
$I_y$	Momento de inércia em torno do eixo $y$ do quadrotor
$I_z$	Momento de inércia em torno do eixo $z$ do quadrotor
$J_{TP}$	Efeito giroscópico da rotação do propulsor
$M$	Massa do corpo principal do quadrotor
$R$	Raio do corpo principal do quadrotor
$l$	Distância entre o centro do quadrotor e o centro de propulsores
$m$	Massa de propulsor
$u$	Velocidade do quadrotor segundo eixo $x$
$v$	Velocidade do quadrotor segundo eixo $y$
$w$	Velocidade do quadrotor segundo eixo $z$
$p$	Velocidade angular do quadrotor segundo eixo $x$
$q$	Velocidade angular do quadrotor segundo eixo $y$
$r$	Velocidade angular do quadrotor segundo eixo $z$
$\theta$	Ângulo de arfagem
$\dot{\theta}$	Taxa de arfagem
$\phi$	Ângulo de rolagem
$\dot{\phi}$	Taxa de rolagem
$\psi$	Ângulo de guinada
$\dot{\psi}$	Taxa de guinada
$\omega_i$	Velocidade angular do propulsor do $i$ -ésima motor
$\delta_i$	Sinal de comando do $i$ -ésimo motor
$\tau_\phi$	Torque de rolagem
$\tau_\theta$	Torque de arfagem
$\tau_\psi$	Torque de guinada

# SUMÁRIO

Capítulo 1 Introdução.....	13
1.1 Considerações Iniciais.....	13
1.2 Motivação e Objetivos .....	14
1.3 Organização da Dissertação .....	15
Capítulo 2 Fundamentação Teórica .....	16
2.1 Frames de Referência.....	16
2.1.1 MATRIZES DE ROTAÇÃO .....	16
2.1.2 FRAME DE COORDENADAS DO QUADROTOR .....	20
2.1.2.1 O Frame Inercial $\mathcal{F}^i$ .....	20
2.1.2.2 O Frame do Veículo $\mathcal{F}^v$ .....	21
2.1.2.3 O Frame do Veículo 1, $\mathcal{F}^{v1}$ .....	21
2.1.2.4 O Frame do Veículo 2, $\mathcal{F}^{v2}$ .....	22
2.1.2.5 O Frame do Corpo, $\mathcal{F}^b$ .....	23
2.1.3 EQUAÇÃO DE CORIOLIS.....	24
2.2 Cinemática e Dinâmica .....	25
2.2.1 VARIÁVEIS DE ESTADO DO QUADROTOR .....	26
2.2.2 CINEMÁTICA DO QUADROTOR .....	27
2.2.3 DINÂMICA DE CORPOS RÍGIDOS .....	28
2.2.4 PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO .....	31
2.2.5 FORÇAS E MOMENTOS.....	32
2.3 Modelos Inerciais .....	35
2.3.1 PRIMEIRO MODELO INERCIAL .....	35
2.3.2 SEGUNDO MODELO INERCIAL .....	37
2.3.3 TERCEIRO MODELO INERCIAL .....	37
2.4 Considerações Finais.....	38
Capítulo 3 Métodos Numéricos .....	40
3.1 Considerações Iniciais.....	40
3.2 Método da Decomposição de Adomian .....	40
3.3 Método de <i>Runge-Kutta</i> .....	43
3.3.1 RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM .....	44

Capítulo 4 Modelagem do Quadrotor .....	47
4.1 Considerações Iniciais.....	47
4.2 Decomposição de Adomian para Calcular as Equações da Velocidade Angular nos Modelos Inerciais. ....	47
Capítulo 5 Implementação e Resultados .....	52
5.1 Considerações Iniciais.....	52
5.2 Algoritmo do Método da Decomposição de Adomian .....	52
5.3 Simulações .....	53
5.3.1 DESEMPENHO DAS VELOCIDADES ANGULARES NOS TRÊS MODELOS DO MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DE ADOMIAN. ....	53
5.3.2 DESEMPENHO DAS VELOCIDADES ANGULARES NOS TRÊS MÉTODOS .....	59
5.4 Considerações Finais.....	62
Capítulo 6 Considerações Finais e Trabalhos Futuros.....	63
6.1 Considerações Finais.....	63
6.2 Trabalhos Futuros .....	63
Referências.....	64

---

# Capítulo 1

## Introdução

---

### 1.1 Considerações Iniciais

O desenvolvimento de Veículos Aéreos Não Tripulados (VANTs), ou do inglês *Unmanned Aerial Vehicles* (UAV), teve grande expansão nas últimas duas décadas, visto a grande evolução em áreas como telecomunicações, sensores e microprocessadores. Essa terminologia se aplica às aeronaves que operam sem intervenção humana e que possuem certa capacidade resolutive para cumprir objetivos (NETO, 2008).

Existem diversos tipos de VANTs, como de asas fixas, como aviões; de asas móveis, como helicópteros e multicópteros; entre outras categorias, como balões; e dirigíveis. Cada uma destas categorias apresenta certas características que define sua faixa de aplicação (COSTA, 2012).

Aviões normalmente são utilizados para vistorias de grandes áreas, por possuírem boa velocidade de cruzeiro e autonomia. Contudo, para se manterem no ar, é necessário que haja uma velocidade mínima de sustentação. Varreduras mais detalhadas, que demandem velocidades menores, são, portanto, inviáveis. Outra característica deste tipo de aeronave é a necessidade de locais apropriados de pouso e decolagem, que limita-se o local de vistoria para áreas próximas às condições exigidas.

Balões e dirigíveis autônomos possuem excelente autonomia, pois necessitam de pouca energia para flutuar, pelo fato de serem leves. Existem aeronaves deste tipo que têm autonomia de dias, até meses, devido ao baixo consumo de combustível. Além disso, possuem baixa velocidade e por serem de grande volume são muito susceptíveis às intempéries climáticas, como chuvas e ventos, o que não lhes permite uma boa precisão e manobrabilidade. Sua utilização está relacionada à vistoria de áreas extensas e climatologia (ELFES, 1998).

Os helicópteros e multicópteros são uma variedade de VANTs que podem pairar e fazer vistorias mais detalhadas. Possuem grande manobrabilidade e precisão. Portanto, sua aplicação está voltada para inspeções em que precisão e detalhamento

são mais importantes que sua autonomia. Mais baratos e mais precisos que os helicópteros, os multicópteros são alternativas viáveis para inspeções mais criteriosas. Os multicópteros controlam sua posição, altitude e inclinação com combinações entre as velocidades entre os propulsores, diferentemente dos helicópteros, que o fazem com complexos sistemas de angulação nas hélices superior e traseira. O resultado disso é que os multicópteros têm um custo operacional inferior, manutenção mais barata, e maior robustez estrutural. Um contraponto, porém, é que normalmente possuem uma menor capacidade de carga. Como exemplo de aplicação, podem ser utilizados para inspeção de linhas de transmissão de energia (COSTA, 2012).

O quadrotor é um tipo de veículo aéreo não tripulado composto de quatro rotores distribuídos nas extremidades de uma estrutura mecânica simples em forma de “X”. É capaz de fazer decolagens e pousos verticais bem como pairar em uma determinada posição a uma determinada altitude. As aplicações para quadrotor são inúmeras. Por exemplo, pelo seu alto grau de mobilidade e simplicidade mecânica o torna apto a realizar as tarefas de supervisão de ambientes de difícil acesso ou perigosos a seres humanos. Na Figura 1.1 pode ser observado um exemplar de quadrotor (GUIMARÃES, 2012).



Figura 1.1: Exemplo de um VANT do tipo quadrotor.

(Fonte: <http://spectrum.ieee.org/automaton/robotics/military-robots/aeryon-scout-quadrotor-spies-on-bad-guys-from-above>)

## 1.2 Motivação e Objetivos

Os quadrotores tornaram-se equipamentos de muito interesse nas pesquisas e aplicações em diversas áreas. Assim, a melhoria no domínio de controle de voo desses equipamentos ficou cada vez mais exigente e necessária. Nos últimos anos, a

técnica de controle de voo no ambiente interno foi bastante desenvolvida, mas o desafio atual é fazer os voos em ambiente externo, sem presença de sensores, ou até mesmo sem rádio controle. Para isso, o bom entendimento sobre as equações de dinâmica de voos e a aplicação de solução melhor para as equações, é parte fundamental para o desenvolvimento de pesquisas e tecnologias nessa área.

O objetivo desse trabalho é apresentar os conceitos sobre as equações da dinâmica de voos, sendo uma base para aprofundar o método da decomposição de Adomian e implementar os métodos numéricos, como *Runge-Kutta* e *NDSolve* do Mathematica para fazerem as simulações das velocidades angulares e analisar os resultados. Devido ao tempo necessário de alteração das velocidades nos quatro propulsores de quadrotoros é pequeno, os resultados obtidos nas simulações são esperados que comprovem a efetividade do método da decomposição de Adomian.

O uso do método da decomposição de Adomian é uma abordagem inovadora para o estudo da dinâmica de voos, que apresenta uma rápida convergência para uma solução adequada.

### **1.3 Organização da dissertação**

O trabalho foi dividido em 6 Capítulos.

No Capítulo 1 apresentam-se os conceitos iniciais, as tarefas desempenhadas por VANTs, e as linhas de pesquisa desenvolvidas atualmente.

No Capítulo 2 apresentam-se os principais conceitos envolvendo matrizes de rotação, bem como a apresentação de *frame* de coordenadas do quadrotor, equação de *Coriolis*, cinemática e dinâmica, e forças e momentos, além dos modelos inerciais.

No Capítulo 3, é feita a apresentação dos dois métodos aplicados no trabalho, a decomposição de Adomian e o método de *Runge-Kutta* de quarta ordem.

No Capítulo 4, desenvolve-se a modelagem matemática aplicada via decomposição de Adomian.

No Capítulo 5, são apresentadas as simulações para determinarem as velocidades angulares em diversas condições iniciais e nos métodos apresentados anteriormente. O capítulo são feitas comparações dos resultados obtidos.

No Capítulo 6 finalmente apresentam-se as conclusões obtidas durante a realização do trabalho. Ao fim deste trabalho, é proposta a continuação natural dos procedimentos utilizados, para melhoria do desempenho e aplicação em tarefas mais específicas.

---

# Capítulo 2

## Fundamentação Teórica

---

Neste capítulo, baseado no trabalho feito pelo (BEARD, 2008), detalha-se a modelagem dos quadrotores, tanto na forma cinemática quanto dinâmica. Em princípio, apresenta-se toda a matemática envolvida para a determinação física do modelo. Os modelos matemáticos são desenvolvidos em diferentes referenciais, nesse contexto chamados de *frames* de referência.

As transformações lineares de translação e rotação oferecem as coordenadas em diferentes *frames*, para que ao fim do processo possa se ter um modelo que se possa usar para construir, dentre outras, as leis de controle para os ângulos de rolagem (*roll*), arfagem (*pitch*) e guinada (*yaw*) que são as rotações ao redor das coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente.

### 2.1 Frames de Referência

Um sistema de coordenadas de um *frame* é transformado em outro por meio de duas operações básicas: rotações e translações. Nos desenvolvimentos a seguir descrevem-se as matrizes de rotação e o seu uso na transformação entre *frames*. Com isso, são apresentadas as coordenadas dos *frames* usados em sistemas de micro-veículos aéreos.

#### 2.1.1 Matrizes de Rotação

Considere dois sistemas de coordenadas apresentados na Figura 2.1.

O vetor  $\mathbf{p}$  pode ser expresso tanto no *frame*  $\mathcal{F}^0$  (especificado por  $(\hat{i}^0, \hat{j}^0, \hat{k}^0)$ ) quanto no *frame*  $\mathcal{F}^1$  (especificado por  $(\hat{i}^1, \hat{j}^1, \hat{k}^1)$ ). No *frame*  $\mathcal{F}^0$  tem-se

$$\mathbf{p} = p_x^0 \hat{i}^0 + p_y^0 \hat{j}^0 + p_z^0 \hat{k}^0. \quad (2.1)$$

Alternativamente em  $\mathcal{F}^1$  tem-se

$$\mathbf{p} = p_x^1 \hat{i}^1 + p_y^1 \hat{j}^1 + p_z^1 \hat{k}^1. \quad (2.2)$$

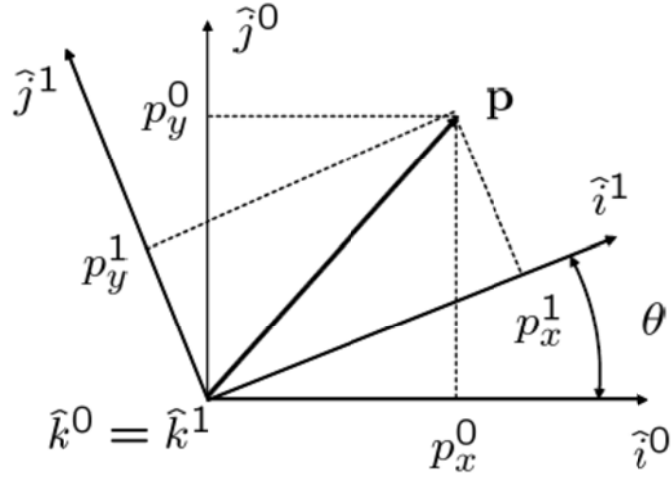


Figura 2.1: Rotação em 2D. (BEARD, 2008)

Igualando as duas expressões

$$p_x^1 \hat{i}^1 + p_y^1 \hat{j}^1 + p_z^1 \hat{k}^1 = p_x^0 \hat{i}^0 + p_y^0 \hat{j}^0 + p_z^0 \hat{k}^0. \quad (2.3)$$

Tomando o produto interno de ambos os lados com  $(\hat{i}^1, \hat{j}^1, \hat{k}^1)$  e representando o resultado na forma matricial

$$\mathbf{p}^1 \triangleq \begin{pmatrix} p_x^1 \\ p_y^1 \\ p_z^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{i}^1 \cdot \hat{i}^0 & \hat{i}^1 \cdot \hat{j}^0 & \hat{i}^1 \cdot \hat{k}^0 \\ \hat{j}^1 \cdot \hat{i}^0 & \hat{j}^1 \cdot \hat{j}^0 & \hat{j}^1 \cdot \hat{k}^0 \\ \hat{k}^1 \cdot \hat{i}^0 & \hat{k}^1 \cdot \hat{j}^0 & \hat{k}^1 \cdot \hat{k}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x^0 \\ p_y^0 \\ p_z^0 \end{pmatrix}.$$

Pela geometria apresentada na Figura 2.1, tem-se:

$$\mathbf{p}^1 = RZ_0^1 \mathbf{p}^0 \quad (2.4)$$

onde

$$RZ_0^1 \triangleq \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

A notação  $RZ_0^1$  é usada para denotar uma matriz de rotação de coordenadas do *frame*  $\mathcal{F}^0$  para o *frame*  $\mathcal{F}^1$ . Esta é uma matriz de rotação ao redor do eixo  $z$ .

Do mesmo modo, uma rotação pelo sentido da regra da mão direita no eixo  $y$  resultará em

$$RY_0^1 \triangleq \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

e no eixo  $x$

$$R_0^1 \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

As matrizes,  $RZ_0^1$ ,  $RY_0^1$  e  $RX_0^1$ , das Equações (2.5), (2.6), (2.7) anteriormente apresentadas, são exemplos de uma classe mais geral de matrizes de rotação que possuem as seguintes propriedades:

**C.1.**  $(R_a^b)^{-1} = (R_a^b)^T = R_b^a$

**C.2.**  $R_b^c R_a^b = R_a^c$

**C.3.**  $\det R_a^b = 1$

Na obtenção da Equação (2.4), deve-se notar que o vetor  $\mathbf{p}$  permanece constante, e as novas coordenadas em  $\mathcal{F}^1$  foram obtidas rotacionando  $\mathcal{F}^0$  em um ângulo  $\theta$ .

Com o que foi apresentado até o momento, é possível demonstrar o desenvolvimento da fórmula denominada **fórmula de rotação**, que executa uma rotação contrária à regra da mão direita no vetor  $\mathbf{p}$  ao redor de um vetor  $\hat{n}$  com um ângulo  $\mu$ . Para isso, considere o modelo apresentado na Figura 2.2.

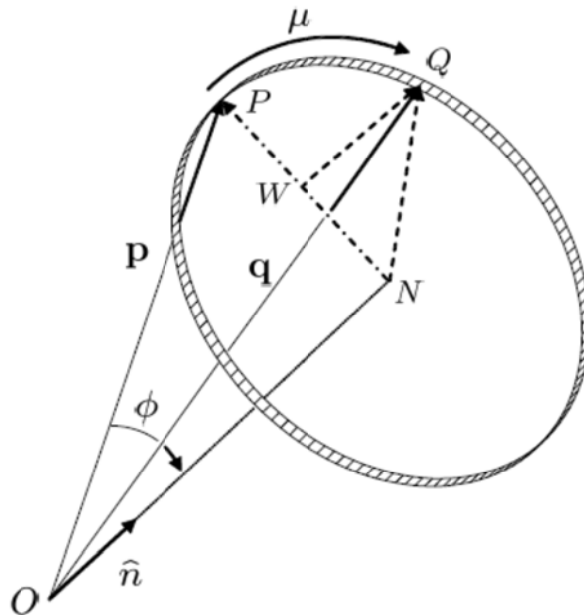


Figura 2.2: Rotação anti-horária de um vetor  $\mathbf{p}$  ao redor do vetor unitário  $\hat{n}$  de um ângulo  $\mu$ , para obter um vetor  $\mathbf{q}$ . (BEARD, 2008)

O vetor  $\mathbf{p}$  é rotacionado sobre o vetor unitário  $\hat{n}$  com um ângulo  $\mu$  para produzir um novo vetor  $\mathbf{q}$ . O ângulo entre  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  é  $\mu$ . Considerando-se as propriedades geométricas, tem-se:

$$\mathbf{q} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NW} + \overrightarrow{WQ}. \quad (2.8)$$

O vetor  $\overrightarrow{ON}$  pode ser encontrado por meio da projeção  $\mathbf{p}$  sobre o vetor unitário  $\hat{n}$ , e na direção de  $\hat{n}$ :

$$\overrightarrow{ON} = (\mathbf{p} \cdot \hat{n})\hat{n}. \quad (2.9)$$

O vetor  $\overrightarrow{NW}$  está na direção  $\mathbf{p} - \overrightarrow{ON}$ , com o comprimento  $NQ \cos \mu$ . Nota-se que o comprimento  $NQ$  é igual ao de  $NP$ , que é igual a  $\|\mathbf{p} - \overrightarrow{ON}\|$ , tem-se:

$$\overrightarrow{NW} = \frac{\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \hat{n})\hat{n}}{\|\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \hat{n})\hat{n}\|} NQ \cos \mu = (\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \hat{n})\hat{n}) \cos \mu. \quad (2.10)$$

O vetor  $\overrightarrow{WQ}$  é perpendicular a  $\mathbf{p}$  e  $\hat{n}$ , e tem comprimento  $NQ \sin \mu$ . Note-se que  $NQ = \|\mathbf{p}\| \sin \phi$ , então:

$$\overrightarrow{WQ} = \frac{\mathbf{p} \times \hat{n}}{\|\mathbf{p}\| \sin \phi} NQ \sin \mu = -\hat{n} \times \mathbf{p} \sin \mu. \quad (2.11)$$

Portanto, a Equação (2.8) torna-se,

$$\mathbf{q} = (1 - \cos \mu)(\mathbf{p} \cdot \hat{n})\hat{n} + \cos \mu \mathbf{p} - \sin \mu (\hat{n} \times \mathbf{p}) \quad (2.12)$$

que é conhecida como **Fórmula de Rotação**.

Como exemplo de aplicação da Equação (2.12), considere uma rotação no sentido oposto da regra da mão direita de um vetor  $\mathbf{p}^0$ , em um *frame*  $\mathcal{F}^0$ , ao redor do eixo  $z$ , como mostrado na Figura 2.3.

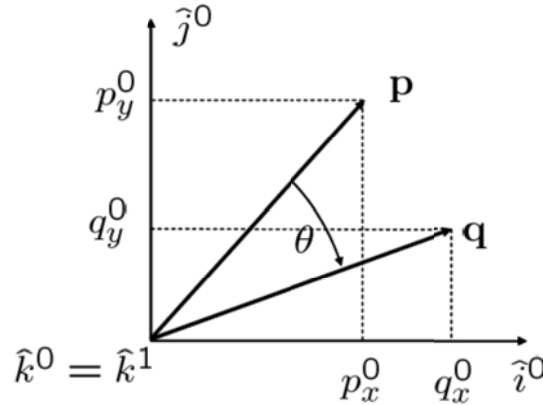


Figura 2.3: Rotação de  $\mathbf{p}$  ao redor do eixo  $z$ . (BEARD, 2008)

Utilizado-se a fórmula da rotação, tem-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}^0 &= (1 - \cos \theta)(\mathbf{p} \cdot \hat{n})\hat{n} + \cos \theta \mathbf{p} - \sin \theta (\hat{n} \times \mathbf{p}) \\
&= (1 - \cos \theta)\mathbf{p}_z^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos \theta \begin{pmatrix} \mathbf{p}_x^0 \\ \mathbf{p}_y^0 \\ \mathbf{p}_z^0 \end{pmatrix} - \sin \theta \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_y^0 \\ \mathbf{p}_x^0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{p}^0 \\
&= R_0^1 \mathbf{p}^0.
\end{aligned}$$

Note-se que a matriz de rotação  $R_0^1$  pode ser interpretada de duas maneiras diferentes. A primeira interpretação é que transforma o vetor fixo  $\mathbf{p}$  de uma expressão no *frame*  $\mathcal{F}^0$  em uma expressão no *frame*  $\mathcal{F}^1$ , em que  $\mathcal{F}^1$  foi obtido de  $\mathcal{F}^0$  por uma rotação anti-horária. A segunda interpretação é que a matriz rotaciona o vetor  $\mathbf{p}$ ,  $\theta$  graus, para um novo vetor  $\mathbf{q}$ , no sentido horário, em relação ao mesmo *frame* de referência. Rotações de vetores no sentido da regra da mão direita são obtidas por  $(R_0^1)^T$ . A partir de ferramental matemático apresentado anteriormente, encontra-se, a seguir, a aplicação para quadrotores.

## 2.1.2 Frame de Coordenadas do Quadrotor

Diversos sistemas de coordenadas importantes podem ser utilizados para modelar os quadrotores. O objetivo desta seção é definir e descrever os seguintes *frames* de coordenadas: o *frame* inercial, o *frame* do veículo, o *frame* 1 do veículo, o *frame* 2 do veículo, e o *frame* do corpo. No presente trabalho, assume-se a Terra plana e estacionária, o que é uma suposição válida para quadrotores.

### 2.1.2.1 O *frame* inercial $\mathcal{F}^i$

O sistema de coordenadas inercial é um sistema de coordenadas fixo à Terra, com a origem definida no local de partida. Como pode-se observar na Figura 2.4, o vetor unitário  $\hat{i}^i$  é apontado para o norte,  $\hat{j}^i$  aponta para leste, e  $\hat{k}^i$  aponta para o centro da Terra.

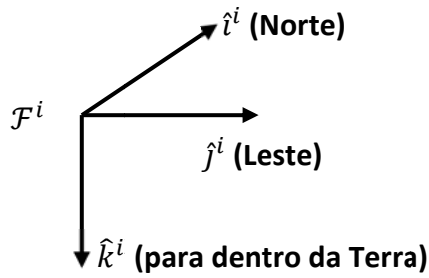


Figura 2.4: Coordenadas do *frame* inercial. (adaptada de BEARD, 2008)

### 2.1.2.2 O *frame* do veículo $\mathcal{F}^v$

A origem do *frame* do veículo é o centro de massa do quadrotor. Contudo, os eixos de  $\mathcal{F}^v$  são alinhados com os eixos do *frame* inercial  $\mathcal{F}^i$ . Em outras palavras, o vetor unitário  $\hat{i}^v$  aponta para o norte,  $\hat{j}^v$  aponta para leste, e  $\hat{k}^v$  aponta para o centro da Terra, como mostrado na Figura 2.5

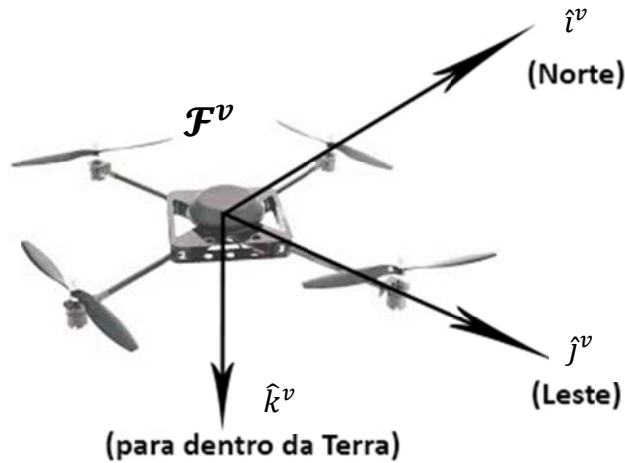


Figura 2.5: Coordenadas do *frame* do veículo.

### 2.1.2.3 O *frame* do veículo 1, $\mathcal{F}^{v1}$

A origem do *frame* do veículo 1 é idêntico ao *frame* do veículo, isto é, do centro de gravidade. Contudo,  $\mathcal{F}^{v1}$  é positivamente rotacionado ao redor de  $\hat{k}^v$  de um ângulo de guinada  $\psi$  tal que se o *frame* da aeronave não estiver rolando ou arfando, então  $\hat{i}^{v1}$  apontará para a hélice dianteira da aeronave,  $\hat{j}^{v1}$  aponta para a hélice direita, e  $\hat{k}^{v1}$  alinhado com  $\hat{k}^v$  apontando para o centro da Terra. O *frame* do veículo 1 é mostrado na Figura 2.6.

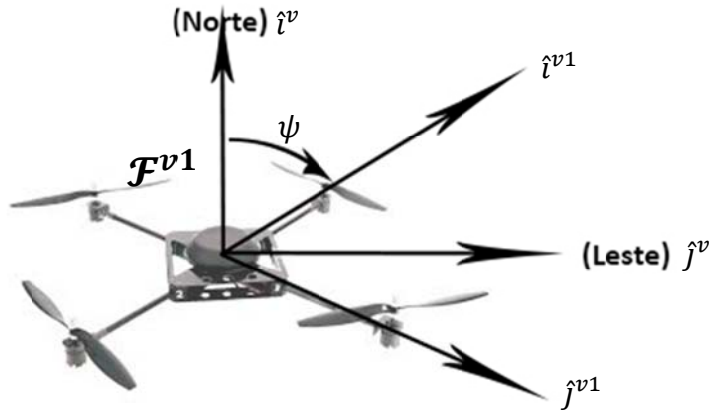


Figura 2.6: O *frame* do veículo 1.

A transformação entre  $\mathcal{F}^v$  e  $\mathcal{F}^{v1}$  é dada por

$$\mathbf{p}^{v1} = R_v^{v1}(\psi)\mathbf{p}^v$$

onde

$$R_v^{v1}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

#### 2.1.2.4 O *frame* do veículo 2, $\mathcal{F}^{v2}$

A origem do *frame* do veículo 2 é novamente o centro de gravidade, e é obtido rotacionando o *frame* do veículo 1 ao redor  $\hat{j}^{v1}$  por um ângulo de arfagem  $\theta$ . Se o ângulo de rolagem for zero, então  $\hat{i}^{v2}$  aponta para a hélice dianteira,  $\hat{j}^{v2}$  aponta para a hélice direita, e  $\hat{k}^{v2}$  aponta para a parte inferior da aeronave, conforme pode ser verificado na Figura 2.7:

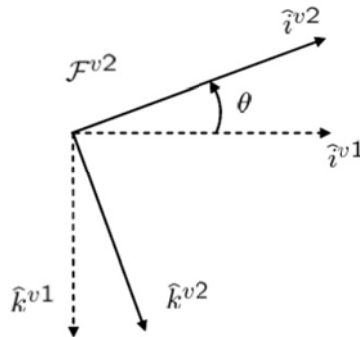


Figura 2.7: O *frame* do veículo 2. (BEARD, 2008)

A transformação entre  $\mathcal{F}^{v1}$  e  $\mathcal{F}^{v2}$  é dada por

$$\mathbf{p}^{v2} = R_{v1}^{v2}(\theta)\mathbf{p}^{v1}$$

onde

$$R_{v1}^{v2}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

### 2.1.2.5 O *frame* do corpo, $\mathcal{F}^b$

O *frame* do corpo é obtido rotacionando o *frame* do veículo 2 em um ângulo de rolagem  $\phi$ , no sentido da regra da mão direita, ao redor de  $\hat{i}^{v2}$ . Portanto, a origem é o centro de gravidade,  $\hat{i}^b$  aponta para a hélice dianteira da aeronave,  $\hat{j}^b$  aponta para a hélice direita, e  $\hat{k}^b$  aponta para a barriga do veículo. O *frame* do corpo é mostrado na Figura 2.8.

A transformação entre  $\mathcal{F}^{v2}$  e  $\mathcal{F}^b$  é dada por

$$\mathbf{p}^b = R_{v2}^b(\phi)\mathbf{p}^{v2}$$

onde

$$R_{v2}^b(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \text{sen } \phi \\ 0 & -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

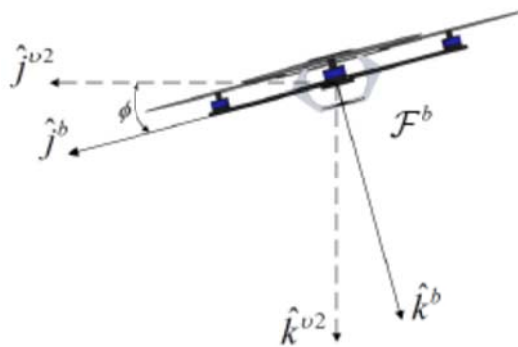


Figura 2.8: O *frame* do corpo. (COSTA, 2012)

A transformação entre o *frame* do veículo e o do corpo é dada por:

$$\begin{aligned}
R_v^b(\phi, \theta, \psi) &= R_{v_2}^b(\phi) R_{v_1}^{v_2}(\theta) R_v^{v_1}(\psi) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi c\theta \\ c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi c\theta \end{pmatrix} \quad (2.16)
\end{aligned}$$

onde denota-se  $c\phi \triangleq \cos \phi$  e  $s\phi \triangleq \sin \phi$ .

### 2.1.3 Equação de Coriolis

Agora será construída uma derivação da equação de Coriolis (BEARD, 2008). Esta equação é utilizada para descrever a relação das velocidades entre os dois sistemas de coordenadas. Neste caso relaciona a velocidade do corpo expressada no *frame* de corpo com a velocidade expressada em coordenadas no *frame* inercial.

Suponha que são dados dois *frames* coordenados  $\mathcal{F}^i$  e  $\mathcal{F}^b$  como os mostrados na Figura 2.9.  $\mathcal{F}^i$  pode representar o *frame* inercial, e  $\mathcal{F}^b$  o *frame* de corpo do quadrotor. Suponha que o vetor  $\mathbf{p}$  está se movendo em  $\mathcal{F}^b$  e que  $\mathcal{F}^b$  está rotacionando e transladando em relação a  $\mathcal{F}^i$ . O objetivo é encontrar a derivada no tempo de  $\mathbf{p}$  em relação ao *frame*  $\mathcal{F}^i$ .

Serão encontradas as equações apropriadas por meio de dois passos. Assume-se primeiro que  $\mathcal{F}^b$  não esteja rotacionando em relação a  $\mathcal{F}^i$ . Denotando a derivada de  $\mathbf{p}$  no *frame*  $\mathcal{F}^i$  como  $\frac{d}{dt_i} \mathbf{p}$  tem-se

$$\frac{d}{dt_i} \mathbf{p} = \frac{d}{dt_b} \mathbf{p}. \quad (2.17)$$

Por outro lado, assume-se que  $\mathbf{p}$  é fixo em  $\mathcal{F}^b$ , mas  $\mathcal{F}^b$  está rotacionando em relação a  $\mathcal{F}^i$ , e considera  $\hat{s}$  o eixo de rotação instantâneo e  $\delta\phi$  o ângulo de rotação (anti-horária). Pela fórmula de rotação (2.12) tem-se

$$\mathbf{p} + \delta\mathbf{p} = (1 - \cos(-\delta\phi))\hat{s}(\hat{s} \cdot \mathbf{p}) + \cos(-\delta\phi) \mathbf{p} - \sin(-\delta\phi)\hat{s} \times \mathbf{p}. \quad (2.18)$$

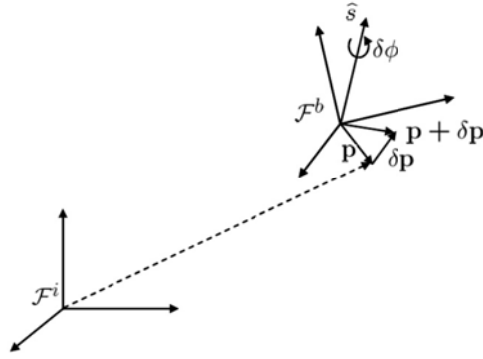


Figura 2.9: Derivação da Equação de Coriolis. (BEARD, 2008)

Usa-se a aproximação para pequenos ângulos e divide-se ambos os lados da igualdade por  $\delta t$ :

$$\frac{\delta \mathbf{p}}{\delta t} \approx \frac{\delta \phi}{\delta t} \hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{p}. \quad (2.19)$$

Seja o limite  $\delta t \rightarrow 0$  e defina-se a velocidade angular de  $\mathcal{F}^b$  em relação a  $\mathcal{F}^i$  como  $\omega_{b/i} \triangleq \hat{\mathbf{s}} \dot{\phi}$  chega-se a

$$\frac{d}{dt_i} \mathbf{p} = \omega_{b/i} \times \mathbf{p}. \quad (2.20)$$

Uma vez que a diferenciação é um operador linear, pode-se combinar as Equações (2.17) e (2.20) para obter

$$\frac{d}{dt_i} \mathbf{p} = \frac{d}{dt_b} \mathbf{p} + \omega_{b/i} \times \mathbf{p}, \quad (2.21)$$

que é a *equação de Coriolis*.

## 2.2 Cinemática e Dinâmica

Uma vez descrito o ferramental matemático para dar suporte ao método, serão derivadas as expressões de cinemática e dinâmica de um corpo rígido para descrever a dinâmica de voos (COSTA, 2012). Enquanto as expressões obtidas nessa subseção são gerais para qualquer corpo rígido, serão usadas notações e *frames* coordenados que são mais típicos nos trabalhos relacionados a problemas aeronáuticos (BEARD, 2008). Em particular, será definida, a seguir, a notação usada para as variáveis de estado do quadrotor. Depois disso, serão obtidas as expressões para cinemática, e então a dinâmica.

## 2.2.1 Variáveis de Estado do Quadrotor

As variáveis de estado do quadrotor são as 12 seguintes grandezas:

- $p_n$  = a posição inercial (norte) do quadrotor ao longo de  $\hat{i}^i$  em  $\mathcal{F}^i$
- $p_e$  = a posição inercial (leste) do quadrotor ao longo de  $\hat{j}^i$  em  $\mathcal{F}^i$
- $h$  = a altitude da aeronave medida ao longo de  $-\hat{k}^i$  em  $\mathcal{F}^i$
- $u$  = a velocidade do *frame* do corpo medida ao longo de  $\hat{i}^b$  em  $\mathcal{F}^b$
- $v$  = a velocidade do *frame* do corpo medida ao longo de  $\hat{j}^b$  em  $\mathcal{F}^b$
- $w$  = a velocidade do *frame* do corpo medida ao longo de  $\hat{k}^b$  em  $\mathcal{F}^b$
- $\phi$  = o ângulo de rolagem definido em relação a  $\mathcal{F}^{v2}$
- $\theta$  = o ângulo de arfagem definido em relação a  $\mathcal{F}^{v1}$
- $\psi$  = o ângulo de guinada definido em relação a  $\mathcal{F}^v$
- $p$  = velocidade angular de rolagem medida ao longo de  $\hat{i}^b$  em  $\mathcal{F}^b$
- $q$  = velocidade angular de arfagem medida ao longo de  $\hat{j}^b$  em  $\mathcal{F}^b$
- $r$  = velocidade angular de guinada medida ao longo de  $\hat{k}^b$  em  $\mathcal{F}^b$

As variáveis de estado são mostradas esquematicamente na Figura 2.10. A posição ( $p_n$ ,  $p_e$ ,  $h$ ) do quadrotor é dada no *frame* inercial, com  $h$  positivo ao longo do negativo do eixo  $z$  do *frame* inercial. A velocidade ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) e a velocidade angular ( $p$ ,  $q$ ,  $r$ ) são dadas em relação ao *frame* do corpo. Os ângulos de Euler ( $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ) são dados em relação ao *frame* do veículo 2, *frame* do veículo 1, e *frame* do veículo, respectivamente.



Figura 2.10: Definição dos eixos.

## 2.2.2 Cinemática do Quadrotor

A cinemática do quadrotor serve para determinar as equações do deslocamento, da velocidade e da aceleração angular.

As variáveis de estado  $p_n$ ,  $p_e$  e  $-h$  são quantidades no *frame* inercial, enquanto que as velocidades  $u$ ,  $v$  e  $w$  são quantidades no *frame* do corpo. Portanto, a relação entre posição e velocidade é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_i} \begin{pmatrix} p_n \\ p_e \\ -h \end{pmatrix} &= R_v^b \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = (R_v^b)^T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\phi s\theta s\psi - c\phi s\psi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A relação entre os ângulos absolutos  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$ , e as taxas de variação angulares  $p$ ,  $q$  e  $r$  é também complicada pelo fato destas quantidades serem definidas em relação a diferentes sistemas de coordenadas. As taxas angulares são definidas no *frame*  $\mathcal{F}^b$ , contudo o ângulo de rolagem  $\phi$  é definido em  $\mathcal{F}^{v2}$ , o ângulo de arfagem  $\theta$  é definido em  $\mathcal{F}^{v1}$ , e o ângulo de guinada  $\psi$  é definido no *frame* do veículo  $\mathcal{F}^v$ .

É necessário relacionar  $p$ ,  $q$ , e  $r$  a  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$  e  $\dot{\psi}$ . Uma vez que  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\psi}$  assumem valores mínimos (BEARD, 2008) e nota-se que

$$R_{v2}^b(\dot{\phi}) = R_{v1}^{v2}(\dot{\theta}) = R_v^{v1}(\dot{\psi}) = I$$

tem-se

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} &= R_{v2}^b(\dot{\phi}) \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + R_{v2}^b(\phi) R_{v1}^{v2}(\dot{\theta}) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + R_{v2}^b(\phi) R_{v1}^{v2}(\theta) R_v^{v1}(\dot{\psi}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

que se invertendo torna-se

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

### 2.2.3 Dinâmica de Corpos Rígidos

A dinâmica de corpos rígidos serve para determinar forças necessárias para iniciar, finalizar e controlar o movimento.

Seja  $\mathbf{v}$  a velocidade do quadrotor. As leis de Newton apenas se aplicam a referenciais inerciais, portanto a aplicação ao movimento translacional é

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt_i} = \mathbf{f} \quad (2.24)$$

em que  $m$  é a massa do quadrotor,  $\mathbf{f}$  é a força total aplicada ao quadrotor, e  $\frac{d}{dt_i}$  é a derivada no tempo no *frame* inercial. Da equação de Coriolis tem-se

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt_i} = m \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt_b} + \omega_{b/i} \times \mathbf{v} \right) = \mathbf{f} \quad (2.25)$$

em que  $\omega_{b/i}$  é a velocidade angular do *frame* aéreo em relação ao *frame* inercial. Uma vez que a força de controle é computada e aplicada nas coordenadas do corpo, e uma vez que  $\omega$  é medida também nestas coordenadas, será expressa a Equação (2.25) em função do *frame* do corpo, em que  $\mathbf{v}_b \triangleq (u, v, w)^T$ , e  $\omega_{b/i}^b \triangleq (p, q, r)^T$ . Portanto, em coordenadas do corpo, a Equação (2.25) torna-se

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

onde  $\mathbf{f}^b \triangleq (f_x, f_y, f_z)^T$ .

Para o movimento de rotação, a segunda lei de Newton diz que

$$\frac{d\mathbf{h}^b}{dt_i} = \mathbf{m} \quad (2.27)$$

onde  $\mathbf{h}$  é o momento angular e  $\mathbf{m}$  é o torque aplicado. Usa-se a equação de Coriolis, tem-se

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt_i} = \frac{d\mathbf{h}}{dt_b} + \omega_{b/i} \times \mathbf{h} = \mathbf{m}. \quad (2.28)$$

Novamente, a Equação (2.28) é mais facilmente solucionada nas coordenadas do corpo onde  $\mathbf{h}^b = \mathbf{I}\omega_{b/i}^b$ , onde  $\mathbf{I}$  é a matriz constante de inércia dada por

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int xy dm & -\int xz dm \\ -\int xy dm & \int (x^2 + z^2) dm & -\int yz dm \\ -\int xz dm & -\int yz dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix} \\ \triangleq \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Como mostrado na Figura 2.11, o quadrotor é essencialmente simétrico em relação aos eixos, portanto  $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ , o que implica em

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

e sua inversa é

$$\frac{1}{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Ao considerar o peso de um quadrotor, pode-se dividir em duas partes: corpo principal e os quatro rotores. Para determinar o peso de corpo principal, considera-se como uma esfera sólida. A inércia para uma esfera sólida é dado por  $\mathbf{I} = 2MR^2/5$  (BEARD, 2008). Portanto, na Figura 2.11 é apresentado um modelo para uma esfera sólida:

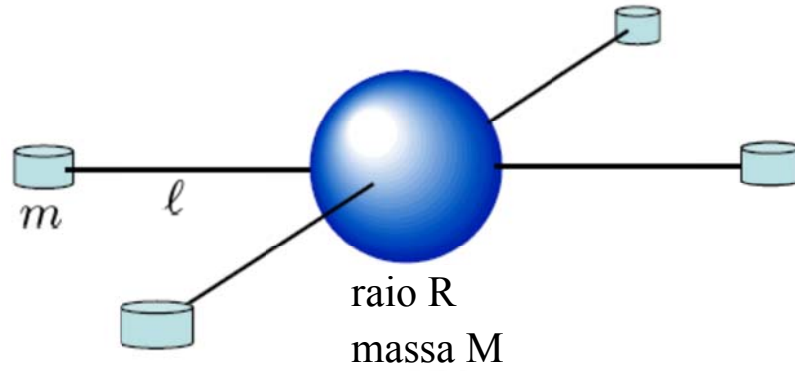


Figura 2.11: Modelagem simplificada das massas do quadrotor como esferas.  
(adaptada de BEARD, 2008)

$$\begin{aligned}
 I_x &= \frac{2MR^2}{5} + 2l^2m \\
 I_y &= \frac{2MR^2}{5} + 2l^2m \\
 I_z &= \frac{2MR^2}{5} + 4l^2m
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

onde  $m$  é a massa de propulsores e  $l$  é a distância entre o centro do quadrotor e o centro de propulsores.

Assim, tem-se

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{I_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{pmatrix} \right] \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{I_y - I_z}{I_x} qr \\ \frac{I_z - I_x}{I_y} pr \\ \frac{I_x - I_y}{I_z} pq \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{I_x} \tau_\phi \\ \frac{1}{I_y} \tau_\theta \\ \frac{1}{I_z} \tau_\psi \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

O modelo dos seis graus de liberdade para a cinemática e dinâmica do quadrotor pode ser resumido pelas equações (2.34), (2.35), (2.36) e (2.37) como a seguir:

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_n \\ \dot{q}_e \\ \dot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ s\theta & -s\phi c\theta & -c\phi c\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \text{sen } \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ 0 & \frac{\text{sen } \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{I_y - I_z}{I_x} qr \\ \frac{I_z - I_x}{I_y} pr \\ \frac{I_x - I_y}{I_z} pq \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{I_x} \tau_\phi \\ \frac{1}{I_y} \tau_\theta \\ \frac{1}{I_z} \tau_\psi \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

#### 2.2.4 Princípio de funcionamento

Para ganhar ou perder altitude, basta um aumento ou uma diminuição proporcional das velocidades dos rotores, conforme mostrado na Figura 2.12(b). Um par de rotores opostos gira no sentido horário, enquanto que o outro par gira no sentido anti-horário para equilibrar o momento angular. Assim, para fazer o movimento de guinada em torno do eixo  $z$  é necessário diminuir proporcionalmente a velocidade dos rotores frente e atrás e aumentar correspondentemente a velocidade nos rotores direito e esquerdo ou vice-versa. Desta forma, o empuxo ascendente é mantido enquanto que um torque diferencial é gerado, produz-se a guinada conforme mostrado na Figura 2.12(c). Para fazer rotação em torno dos eixos  $x$  e  $y$ , rolagem e arfagem respectivamente, basta aumentar a velocidade de um rotor e diminuir proporcionalmente a velocidade do seu par oposto. Desta forma, gera-se um torque diferencial que produz as inclinações desejadas. Ver Figura 2.12(d). Tendo um ângulo de rolagem ou arfagem definido, surge uma componente horizontal do empuxo que é responsável pelo deslocamento do veículo ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  da Terra.

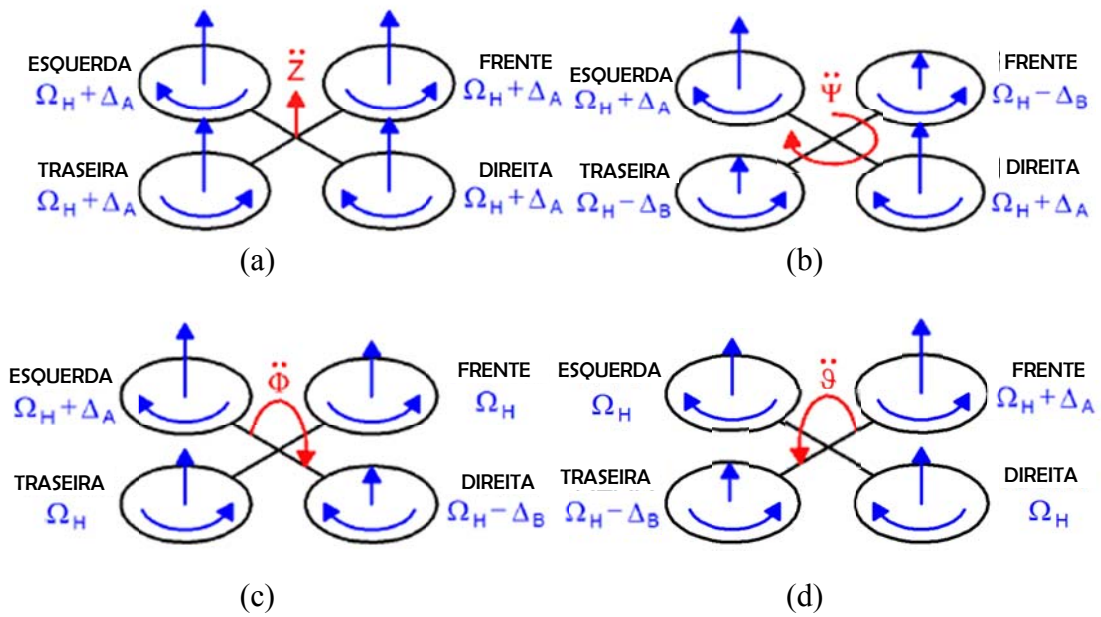


Figura 2.12: Movimento do quadrotor. (a) Movimento ascendente vertical. (b) Guinada horário. (c) Movimento de rolagem. (d) Movimento de arfagem. (adaptado de BRESCIANI, 2008)

### 2.2.5 Forças e Momentos

Nesta seção descrevem-se as forças e torques que agem sobre o quadrotor. Uma vez que não há superfícies aerodinâmicas de elevação (*aerodynamics lifting surfaces*), será assumido que as forças e momentos aerodinâmicas são desprezíveis. As forças e momentos são primeiramente devidos à gravidade e aos quatro propulsores.

Na Figura 2.13 mostra-se uma vista superior do sistema do quadrotor. Como pode ser visto na Figura 2.14, cada motor produz uma força  $F$  e um torque  $\tau$ . O total de forças agindo sobre o quadrotor é dado pela Equação (2.38).

$$F = F_f + F_r + F_b + F_l. \quad (2.38)$$

O torque de rolagem é produzido pelas forças dos motores da direita e esquerda como

$$\tau_\phi = l(F_l - F_r). \quad (2.39)$$

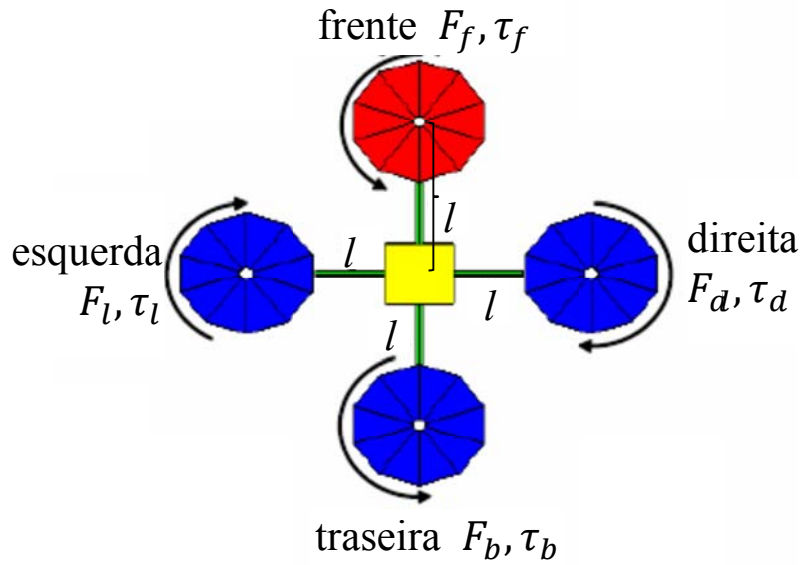


Figura 2.13: A vista superior do quadrotor. (adaptada de BEARD, 2008)

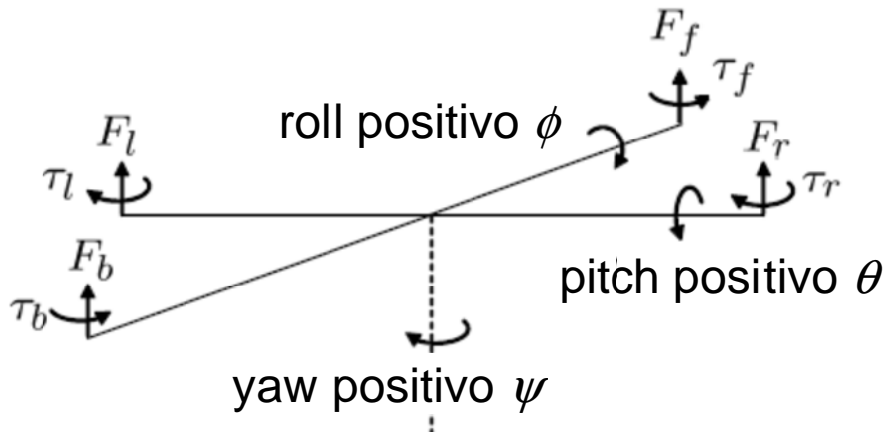


Figura 2.14: Definição das forças e torques que atuam sobre o quadrotor. (adaptada de BEARD, 2008)

De maneira similar, o torque de arfagem é produzido pelas forças dos motores traseiro e dianteiro

$$\tau_{\theta} = l(F_f - F_b). \quad (2.40)$$

Devido à terceira lei de Newton, o arrasto dos propulsores produzem um torque de guinada no corpo do quadrotor. A direção do torque vai ser oposta à direção de movimento do propulsor. Portanto, o torque de guinada total é dado por

$$\tau_{\psi} = \tau_r + \tau_l - \tau_f - \tau_b. \quad (2.41)$$

A sustentação e o arrasto produzido pelos propulsores é proporcional ao quadrado da velocidade angular. Será assumido que a velocidade angular é

diretamente proporcional ao comando de modulação por largura de pulso enviado ao motor. Portanto, a força e o torque de cada motor pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} F_* &= k_1 \delta_* \\ \tau_* &= k_2 \delta_* \end{aligned}$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  são constantes que precisam ser determinadas experimentalmente,  $\delta_*$  é o sinal de comando do motor, e  $*$  representa  $f, r, b, l$ .

Portanto, as forças e torques no quadrotor podem ser escritas na matriz como

$$\begin{pmatrix} F \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & k_1 & k_1 & k_1 \\ 0 & -lk_1 & 0 & lk_1 \\ lk_1 & 0 & -lk_1 & 0 \\ -k_2 & k_2 & -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_f \\ \delta_r \\ \delta_b \\ \delta_l \end{pmatrix} \triangleq \mathcal{M} \begin{pmatrix} \delta_f \\ \delta_r \\ \delta_b \\ \delta_l \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

O real comando dos motores pode ser encontrado com

$$\begin{pmatrix} \delta_f \\ \delta_r \\ \delta_b \\ \delta_l \end{pmatrix} = \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} F \\ \tau_\phi \\ \tau_\theta \\ \tau_\psi \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Note que é necessário que o comando de modulação por largura de pulso esteja entre 0 e 1.

Adicionalmente à força exercida pelo motor, a gravidade também exerce força no quadrotor. No *frame*  $\mathcal{F}^v$ , a força da gravidade atuante no centro de massa é dada por

$$\mathbf{f}_g^v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Contudo, uma vez que  $v$  na Equação (2.35) é expresso em  $\mathcal{F}^b$ , deve-se transformar o *frame* do corpo para chegar à

$$\mathbf{f}_g^b = R_v^b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \sin \phi \\ mg \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Portanto, as Equações (2.34), (2.35), (2.36) e (2.37) podem ser expressas como:

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_n \\ \dot{q}_e \\ \dot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ s\theta & -s\phi c\theta & -c\phi c\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rv - qw \\ pw - ru \\ qu - pv \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -g \sin \theta \\ g \cos \theta \sin \phi \\ g \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{I_y - I_z}{I_x} qr \\ \frac{I_z - I_x}{I_y} pr \\ \frac{I_x - I_y}{I_z} pq \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{I_x} \tau_\phi \\ \frac{1}{I_y} \tau_\theta \\ \frac{1}{I_z} \tau_\psi \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

## 2.3 Modelos inerciais

As Equações (2.46) à (2.49) são as equações de movimento do quadrotor. Para determinar as velocidades angulares, nas literaturas encontram diversos modelos com considerações diferentes. Nesta seção apresenta três modelos que serão aplicados nas simulações.

### 2.3.1 Primeiro modelo inercial

Derivando-se a Equação (2.46) e desprezando a matriz de rotação  $\dot{R}_b^v$ , chega-se a

$$\begin{pmatrix} \ddot{p}_n \\ \ddot{q}_e \\ \ddot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\theta c\psi & s\phi s\theta c\psi - c\phi s\psi & c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi + c\phi c\psi & c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ s\theta & -s\phi c\theta & -c\phi c\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Negligenciando os termos Coriolis, e combinando as Equações (2.50) e (2.47)

$$\begin{pmatrix} \ddot{p}_n \\ \ddot{q}_e \\ \ddot{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi \\ c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi \\ -c\phi c\theta \end{pmatrix} \frac{F}{m}. \quad (2.51)$$

Portanto, a Equação (2.51) pode ser expressada como:

$$\begin{cases} \ddot{x} = (c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi) \frac{U_1}{m} \\ \ddot{y} = (c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi) \frac{U_1}{m} \\ \ddot{z} = -g + (c\phi c\theta) \frac{U_1}{m} \end{cases} \quad (2.52)$$

onde  $U_1 = F = b(\Omega_f^2 + \Omega_r^2 + \Omega_b^2 + \Omega_l^2)$  é responsável pela decolagem do quadrotor.

Combinando as Equações (2.52) e (2.49) se obtém o primeiro modelo inercial

$$\begin{cases} \ddot{x} = (c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi) \frac{U_1}{m} \\ \ddot{y} = (c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi) \frac{U_1}{m} \\ \ddot{z} = -g + (c\phi c\theta) \frac{U_1}{m} \\ \ddot{\phi} = \left(\frac{I_y - I_z}{I_x}\right) qr + \frac{U_2}{I_x} \\ \ddot{\theta} = \left(\frac{I_z - I_x}{I_y}\right) pr + \frac{U_3}{I_y} \\ \ddot{\psi} = \left(\frac{I_x - I_y}{I_z}\right) pq + \frac{U_4}{I_z} \end{cases} \quad (2.53)$$

O sinal de controle do sistema são apresentadas em (2.54).

$$\begin{cases} F = U_1 = b(\Omega_f^2 + \Omega_r^2 + \Omega_b^2 + \Omega_l^2) \\ \tau_\phi = U_2 = lb(-\Omega_r^2 + \Omega_l^2) \\ \tau_\theta = U_3 = lb(-\Omega_f^2 + \Omega_b^2) \\ \tau_\psi = U_4 = d(-\Omega_f^2 + \Omega_r^2 - \Omega_b^2 + \Omega_l^2) \end{cases} \quad (2.54)$$

onde  $b$  é o constante de empuxo,  $l$  é a distância entre o centro do quadrotor e o centro de propulsor e  $d$  é o coeficiente de arrasto.  $\Omega_i$ ,  $i = f, r, b, l$  são respectivas velocidades dos motores. O sinal de controle  $U_1$  é responsável pela decolagem do quadrotor. O sinal de controle  $U_2$  e  $U_3$  são responsáveis pelo movimento de rolagem e arfagem, respectivamente. E o sinal de controle  $U_4$  é responsável pelo movimento de guinada. Percebe-se que todos os sinais de controle dependem diretamente da velocidade dos motores.

### 2.3.2 Segundo modelo inercial

Existe outro modelo que inclui a resultante dos efeitos giroscópicos da rotação do corpo rígido no espaço e a rotação dos quatro propulsores. Uma vez que dois deles (dianteiro e traseiro / esquerdo e direito) são rotativos no sentido horário e os outros dois para o anti-horário, existe um desequilíbrio total quando a soma algébrica das velocidades do rotor não é igual a zero. Se, além disso, as taxas de rotação ou de arfagem também são diferentes de zero, o quadrotor exercita-se um torque giroscópico de acordo com a Equação (2.55) (BRESCIANI, 2008).

$$J_{TP} \left( \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \Omega = J_{TP} \begin{pmatrix} -q \\ p \\ 0 \end{pmatrix} \Omega, \quad (2.55)$$

onde  $\Omega = -\Omega_f + \Omega_r - \Omega_b + \Omega_l$  e  $J_{TP}$  é a inercia rotacional.

Portanto, pode ressaltar que o modelo apresenta um comportamento não linear.

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = (c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi) \frac{U_1}{m} \\ \ddot{y} = (c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi) \frac{U_1}{m} \\ \ddot{z} = -g + (c\phi c\theta) \frac{U_1}{m} \\ \ddot{\phi} = \left( \frac{I_y - I_z}{I_x} \right) qr - \frac{J_{TP}}{I_x} q\Omega + \frac{U_2}{I_x} \\ \ddot{\theta} = \left( \frac{I_z - I_x}{I_y} \right) pr + \frac{J_{TP}}{I_y} p\Omega + \frac{U_3}{I_y} \\ \ddot{\psi} = \left( \frac{I_x - I_y}{I_z} \right) pq + \frac{U_4}{I_z} \end{array} \right. \quad (2.56)$$

### 2.3.3 Terceiro modelo inercial

Algumas hipóteses serão consideradas, para linearizar o sistema e tornar os controladores mais simples sem que haja perda significativa de desempenho (BEARD, 2008). Assumindo que os ângulos  $\phi$  e  $\theta$  são pequenos, a Equação (2.36) pode ser simplificada como

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

De modo similar, considerando as velocidades angulares são pequenas. Por essa razão, os termos de Coriolis  $qr$ ,  $pr$  e  $pq$  são pequenos, pode-se simplificar a Equação (2.37), de modo a se obter

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_x} \tau_\phi \\ \frac{1}{I_y} \tau_\theta \\ \frac{1}{I_z} \tau_\psi \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Combinando (2.57) e (2.58) se obtém

$$\begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_x} \tau_\phi \\ \frac{1}{I_y} \tau_\theta \\ \frac{1}{I_z} \tau_\psi \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

Portanto, o modelo inercial simplificado é dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} = (c\phi s\theta c\psi + s\phi s\psi) \frac{U_1}{m} \\ \ddot{y} = (c\phi s\theta s\psi - s\phi c\psi) \frac{U_1}{m} \\ \ddot{z} = -g + (c\phi c\theta) \frac{U_1}{m} \\ \ddot{\phi} = \frac{U_2}{I_x} \\ \ddot{\theta} = \frac{U_3}{I_y} \\ \ddot{\psi} = \frac{U_4}{I_z} \end{array} \right. \quad (2.60)$$

## 2.4 Considerações finais

Na teoria de controle, o conhecimento do comportamento dinâmico de um dado sistema pode ser adquirido através dos seus estados. Para o sistema quadrotor, a altitude em torno dos 3 eixos de rotação,  $x$ ,  $y$  e  $z$ , é conhecida por 6 estados: os 3 ângulos de Euler que são  $\phi$  rolagem,  $\theta$  arfagem e  $\psi$  guinada respectivamente, e as 3

velocidades angulares que são  $p$ ,  $q$  e  $r$ , velocidades estas também conhecidas por taxas angulares. Os 6 estados anteriores descrevem a atitude do quadrotor. Para controlar também a sua posição, outros 6 estados são necessários: a posição do centro gravítico,  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e as velocidades lineares,  $u$ ,  $v$  e  $w$ , que são relativas ao referencial móvel. Assim, são 12 estados no total que descrevem os 6 graus de liberdade do quadrotor.

Determinar as 3 velocidades angulares com melhor eficiência será uma pesquisa interessante tanto na simulação quanto na prática. Por isso, no capítulo 3 são apresentados os métodos numéricos que vão sendo aplicados nos modelos mencionados anteriormente.

---

# Capítulo 3

## Métodos Numéricos

---

### 3.1 Considerações iniciais

Neste capítulo serão apresentados os métodos numéricos da decomposição de Adomian e de *Runge-Kutta* de quarta ordem, utilizados no presente trabalho, bem como formas de suas aplicações. O uso do método da decomposição de Adomian na solução dinâmica de voo é uma aplicação inovadora. E por meio do método de *Runge-Kutta* de quarta ordem pode-se fazer uma comparação nos resultados obtidos.

### 3.2 Método da decomposição de Adomian

Recentemente, com o método da decomposição de Adomian tornou-se possível evitar os métodos de discretização que conduzem a requisitos computacionais pesados na resolução de equação diferenciais parciais não lineares. Este método conduz a soluções computáveis, exatas, convergentes e que podem ser verificadas teoricamente a qualquer grau de aproximação.

O método da decomposição de Adomian foi introduzido por George Adomian, na década de 1980, para resolver equações lineares e não lineares. Sua convergência foi provada por Cherruault (CHERRUAULT, 1989) e sua estrutura matemática foi estabelecida por Abbaoui (ABBAOUI, 2001).

O objetivo do método da decomposição de Adomian é tornar possíveis, fisicamente, as soluções realistas de sistemas complexos sem compromisso com a solução e a modelagem usual para alcançar a tratabilidade.

Verificou-se ainda que o método da decomposição de Adomian é utilizado na investigação de diversas aplicações científicas, requer menos trabalho em comparação com as técnicas tradicionais, é fácil de programar em problemas aplicados e fornece soluções imediatas e convergentes sem qualquer necessidade de linearização ou discretização.

Atualmente, este método tem sido utilizado por muitos autores nas mais diversas áreas, tanto para resolver problemas envolvendo equações diferenciais nos

problemas de valor inicial ou de contorno, quanto para resolver sistemas de equações diferenciais.

Dehghan investigou a aplicação do método da decomposição de Adomian para resolver equações diferenciais parciais bidimensionais parabólicas lineares, com especificações não locais de fronteira, substituindo as condições clássicas de fronteira (DEHGHAN, 2004).

Dehghan e Tatari utilizaram o método da decomposição de Adomian para resolver problemas de Cálculo Variacional, com o objetivo de encontrar a solução para uma equação diferencial ordinária originada de um problema variacional. Eles apresentaram resultados numéricos para mostrar a eficiência do método, especialmente de sua convergência (DEHGHAN; TATARI, 2006).

Kaya e Yokus utilizaram o método da decomposição de Adomian para resolver a equação do calor e a equação não linear de Burgers, com condições iniciais apropriadas. Demonstraram que a aplicação do método com a solução parcial em relação à  $x$  exige maior trabalho computacional em comparação com a solução em relação à  $t$ , porém a solução numérica em relação à  $x$  é interessante em termos de precisão e eficiência (KAYA; YOKUS, 2002).

Pereira aplica o método da decomposição de Adomian à interação fluido-estrutura de um cabo (PEREIRA, 2010).

A solução pelo método da decomposição é uma aproximação, mas que não altera o problema dado. A solução obtida por decomposição é geralmente uma série infinita, porém uma aproximação de  $n$  termos, em que  $\phi_n$  normalmente é uma solução bastante precisa, sendo que sempre se pode aumentar  $n$  para atingir a precisão desejada. Ainda, o método da decomposição tem a vantagem que, em geral, para pequenos valores de  $n$  é possível uma solução significativa.

Para descrever o método de Adomian considera-se

$$Au(t) = f(t), \quad (3.1)$$

em que  $A$  é um operador qualquer, isto é, envolvendo uma parte linear e outra não linear. Este operador é dividido em  $L + N$ , onde  $L$  é a parte linear, facilmente invertida, e  $N$  é o restante desde operador ou uma não linearidade. Logo, tem-se:

$$(L + N)u(t) = f(t). \quad (3.2)$$

Reescrevendo a equação acima, pois  $Lu$  é facilmente invertível, obtém-se

$$u(t) = L^{-1}f(t) - L^{-1}Nu(t). \quad (3.3)$$

Como  $u$  é solução do problema, pode-se expandi-lo como  $u = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ , isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u \quad (3.4)$$

e pode-se escolher  $u_0 = L^{-1}f(t)$ . Por outro lado, o termo não linear  $Nu$  é expandido em termos dos polinômios de Adomian, como:

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_n \quad (3.5)$$

Estes polinômios serão discutidos adiante. Com este procedimento pode-se, reescrever a Equação (3.3) como

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_n. \quad (3.6)$$

Conseqüentemente, permite-se a escolha:

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1}\hat{A}_0 \\ u_2 &= -L^{-1}\hat{A}_1 \\ u_3 &= -L^{-1}\hat{A}_2 \\ &\vdots \\ u_n &= -L^{-1}\hat{A}_{n-1} \end{aligned}$$

Deve-se notar que, com esta escolha, os polinômios  $\hat{A}_n$  são gerados para cada não linearidade, de modo que  $\hat{A}_0$  dependa somente de  $u_0$ ,  $\hat{A}_1$  dependa somente de  $u_0$  e  $u_1$ ,  $\hat{A}_2$  dependa somente de  $u_0$ ,  $u_1$  e  $u_2$  e assim sucessivamente (Adomian, 1988). Desta forma, a solução do problema pode ser encontrada como  $u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i$ . Adomian definiu se a série converge, o  $n$ ésimo termo da soma parcial  $\phi_n = \sum_{i=0}^n u_i$  será a solução aproximada desde que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \sum_{i=0}^{\infty} u_i = u. \quad (3.7)$$

Existem duas maneiras de calcular os polinômios de Adomian: os chamados  $\hat{A}_n$  acelerados e os  $A_n$  lentos (por sua convergência ser mais lenta). Neste trabalho será empregado o acelerado e, por isso, faz-se uma análise detalhada dessa forma de solução. Estes dois modos de encontrar os polinômios de Adomian resultam na mesma solução aproximada. A diferença está na velocidade da convergência. A outra forma, dita lenta, pode ser encontrada em (Adomian, 1988).

Para obtenção dos polinômios de Adomian  $\hat{A}_n$ , deve-se considerar uma equação com solução  $u(t)$  contendo uma não linearidade

$$Nu = f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (3.8)$$

Tomando a expansão da série de Taylor da função  $f(u)$  em torno de  $u_0(t)$ , obtemos

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}_n = f(u) = f(u_0) + (u - u_0)f'(u_0) + \frac{(u - u_0)^2}{2!}f''(u_0) + \dots \quad (3.9)$$

Estes polinômios são definidos por

$$\begin{aligned} \hat{A}_0 &= f(u_0) \\ \hat{A}_1 &= u_1 \frac{d}{du_0} f(u_0) + \frac{u_1^2}{2!} \frac{d^2}{du_0^2} f(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} \frac{d^3}{du_0^3} f(u_0) + \dots \\ \hat{A}_2 &= u_2 \frac{d}{du_0} f(u_0) + \frac{u_2^2}{2!} \frac{d^2}{du_0^2} f(u_0) + \frac{u_2^3}{3!} \frac{d^3}{du_0^3} f(u_0) + u_1 u_2 \frac{d^2}{du_0^2} f(u_0) + \\ &\quad + \frac{1}{2} (u_1^2 u_2 + u_2^2 u_1) \frac{d^3}{du_0^3} f(u_0) + \dots \end{aligned}$$

e assim por diante. Nesta formulação, os subíndices de cada termo de  $\hat{A}_n$  não ultrapassam o  $n$  do polinômio, isto é,  $\hat{A}_0$  só tem termos com  $u_0$ ,  $\hat{A}_1$  só tem termos com  $u_0$  e  $u_1$ , assim consequentemente.

### 3.3 Método de Runge-Kutta

O método de *Runge-Kutta* é, provavelmente, um dos métodos numéricos mais populares. O método de *Runge-Kutta* de quarta ordem também é um dos mais

precisos para obter soluções aproximadas de valor inicial. Desta forma o método foi escolhido para comparação com o método de Adomian.

O método de *Runge-Kutta* consiste em comparar um polinômio de *Taylor* apropriado para eliminar o cálculo das derivadas, fazendo-se várias avaliações da função  $f$  a cada passo. Estes métodos podem ser construídos para qualquer ordem  $\alpha$ . Conforme Figura 3.1, pode-se verificar resultados obtidos com método de *Runge-Kutta* comparando com outras abordagens. Verifica-se a excelente qualidade de suas soluções.

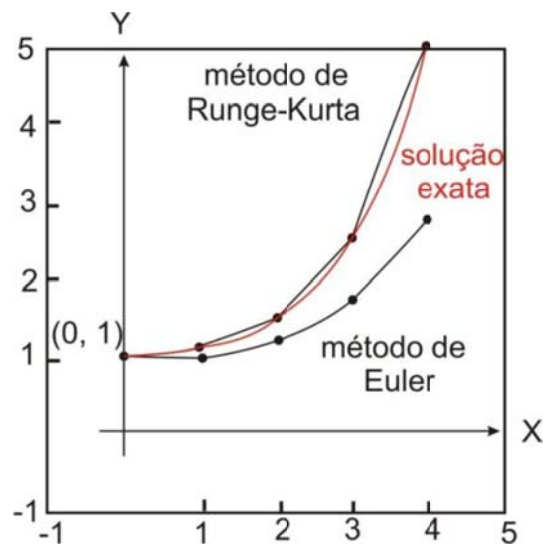


Figura 3.1: Gráfico da comparação de resultados dos métodos de Euler e de *Runge-Kutta* (VALLE, 2012).

Pelo polinômio de *Taylor* com resto, se uma função  $y(x)$  tiver  $k + 1$  derivadas contínuas em um intervalo aberto contendo  $\alpha$  e  $x$ , pode-se escrever

$$y(x) = y(a) + y'(a) \frac{x-a}{1!} + \dots + y^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} + y^{(k+1)}(c) \frac{(x-a)^{(k+1)}}{(k+1)!}, \quad (3.10)$$

em que  $c$  é algum número entre  $a$  e  $x$ .

### 3.3.1 Runge-Kutta de quarta ordem

Ao se substituir  $\alpha$  por  $x_n$  e  $x$  por  $x_{n+1} = x_n + h$ , a Equação (3.10) se torna

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \dots + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} y^{(k+1)}(c)$$

(3.11)

em que  $c$  é agora algum número entre  $x_n$  e  $x_{n+1}$ .

Fazendo  $k = 4$  na Equação (3.11):

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_n) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x_n) + \frac{h^5}{5!}y^{(5)}(c)$$

(3.12)

O procedimento de *Runge-Kutta* de quarta ordem consiste em encontrar constantes apropriadas de tal forma que a fórmula:

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4$$

Considerando:

$$y(x_{n+1}) = y_n + h\varphi(x_n, y_n; h)$$

onde:

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 k_1)$$

$$k_3 = hf(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_2 k_1 + \beta_3 k_2)$$

$$k_4 = hf(x_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_4 k_1 + \beta_5 k_2 + \beta_6 k_3)$$

coincide com um polinômio de Taylor de grau quatro.

$$p_4(x) = y(a) + y'(a)(x - a) + \frac{y''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{y'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \frac{y^{(4)}(a)}{4!}(x - a)^4$$

Isso resulta em 11 equações de 13 incógnitas, ou seja, possui infinitas soluções. O mais popular é o método abaixo:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

(3.13)

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

Ao se observam as Equações em (3.13); percebe-se que  $k_2$  depende de  $k_1$ ,  $k_3$  depende de  $k_2$  e  $k_4$  depende de  $k_3$ . Além disso,  $k_2$  e  $k_3$  envolvem aproximações às inclinações no ponto do intervalo entre  $x_n$  e  $x_{n+1}$  (VALLE, 2012).

---

# Capítulo 4

## Modelagem do Quadrotor

---

### 4.1 Considerações iniciais

Neste capítulo é apresentada a modelagem realizada para o quadrotor, segundo o método da decomposição de Adomian. Dos três modelos apresentados no capítulo 3, os primeiros são não lineares que serão aplicados pelo método da decomposição de Adomian. Nas equações de calcular as velocidades angulares separam em duas partes, uma é linear e a outra é não-linear. A parte não-linear será construída pela série de decomposição de Adomian, e depois são acopladas as duas partes para encontrar as soluções.

### 4.2 Decomposição de Adomian para calcular as equações da velocidade angular nos modelos inerciais.

O primeiro passo é buscar as soluções possíveis para as velocidades angulares  $p$ ,  $q$  e  $r$  com a série de decomposição aproximada de funções explicitamente dependentes do tempo,  $t$ .

$$p = \sum_{i=0}^N p_i(t), \quad q = \sum_{i=0}^N q_i(t), \quad r = \sum_{i=0}^N r_i(t). \quad (4.1)$$

Em seguida, substituir essas séries de decomposição nas equações adequadas dos modelos que são sendo simulados, Equações (2.53) e (2.56). Depois de aplicar o operador de integração definido com relação ao tempo, obtem-se o resultado a seguir:

**1º Modelo sem efeitos giroscópicos:**

$$\begin{aligned}
 p &= p(t_0) + \int_{t_0}^t K_1 \left( \sum_{i=0}^N q_i(\tau) \right) \left( \sum_{j=0}^N r_j(\tau) \right) d\tau + \frac{U_2}{I_x} \int_{t_0}^t d\tau \\
 q &= q(t_0) + \int_{t_0}^t K_2 \left( \sum_{i=0}^N p_i(\tau) \right) \left( \sum_{j=0}^N r_j(\tau) \right) d\tau + \frac{U_3}{I_y} \int_{t_0}^t d\tau \\
 r &= r(t_0) + \int_{t_0}^t K_3 \left( \sum_{i=0}^N p_i(\tau) \right) \left( \sum_{j=0}^N q_j(\tau) \right) d\tau + \frac{U_4}{I_z} \int_{t_0}^t d\tau
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

**2º modelo com efeitos giroscópicos:**

$$\begin{aligned}
 p &= p(t_0) + \int_{t_0}^t K_1 \left( \sum_{i=0}^N q_i(\tau) \right) \left( \sum_{j=0}^N r_j(\tau) \right) d\tau - \int_{t_0}^t \frac{J_{TP}\Omega}{I_x} \left( \sum_{i=0}^N q_i(\tau) \right) \\
 &\quad + \frac{U_2}{I_x} \int_{t_0}^t d\tau \\
 q &= q(t_0) + \int_{t_0}^t K_2 \left( \sum_{i=0}^N p_i(\tau) \right) \left( \sum_{j=0}^N r_j(\tau) \right) d\tau + \int_{t_0}^t \frac{J_{TP}\Omega}{I_y} \left( \sum_{i=0}^N p_i(\tau) \right) \\
 &\quad + \frac{U_3}{I_y} \int_{t_0}^t d\tau \\
 r &= r(t_0) + \int_{t_0}^t K_3 \left( \sum_{i=0}^N p_i(\tau) \right) \left( \sum_{j=0}^N q_j(\tau) \right) d\tau + \frac{U_4}{I_z} \int_{t_0}^t d\tau
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

em que

$$K_1 = \frac{I_y - I_z}{I_x}, \quad K_2 = \frac{I_z - I_x}{I_y}, \quad K_3 = \frac{I_x - I_y}{I_z} \tag{4.4}$$

e  $U_2 = lb(-\Omega_r^2 + \Omega_l^2)$ ,  $U_3 = lb(-\Omega_f^2 + \Omega_b^2)$ ,  $U_4 = d(-\Omega_f^2 + \Omega_r^2 - \Omega_b^2 + \Omega_l^2)$ .

Pode ser facilmente demonstrado que a série de decomposição, para os termos de *Coriolis*  $qr$ ,  $pr$  e  $pq$  nas equações acima, pode estar diretamente relacionada com os polinômios de Adomian para produtos não-lineares

$$(q_0 + q_1 + q_2 + \dots)(r_0 + r_1 + r_2 + \dots) = A_0 + A_1 + A_2 + \dots$$

onde os polinômios de Adomian  $A_i$  são dados por

$$\begin{aligned}
A_0 &= q_0 r_0, \\
A_1 &= q_1 r_0 + q_0 r_1, \\
A_2 &= q_0 r_2 + q_2 r_0 + q_1 r_1, \\
A_3 &= q_0 r_3 + q_3 r_0 + q_1 r_2 + q_2 r_1, \\
A_4 &= q_0 r_4 + q_4 r_0 + q_1 r_3 + q_3 r_1 + q_2 r_2, \\
&\dots \\
A_N &= q_0 r_N + q_N r_0 + q_1 r_{N-1} + q_{N-1} r_1 + \dots + \dots,
\end{aligned}$$

para cada polinômio de Adomian. Depois de substituir  $p$  por sua expansão, em termos de uma série decomposição em Equações (4.2) e (4.3), e de acordo com as regras do método da decomposição de Adomian, as identificações que definem um conjunto de relações recursivas dos dois modelos são:

**1º modelo sem efeitos giroscópicos:**

$$\begin{aligned}
p_0 &= p(t_0) + \frac{U_2}{I_x} t, \\
p_1 &= \int_{t_0}^t K_1 A_0 d\tau = \int_{t_0}^t K_1 q_0 r_0 d\tau, \\
p_2 &= \int_{t_0}^t K_1 A_1 d\tau = \int_{t_0}^t K_1 (q_1 r_0 + q_0 r_1) d\tau, \\
p_3 &= \int_{t_0}^t K_1 A_2 d\tau = \int_{t_0}^t K_1 (q_2 r_0 + q_0 r_2 + q_1 r_1) d\tau, \\
p_4 &= \int_{t_0}^t K_1 A_3 d\tau = \int_{t_0}^t K_1 (q_3 r_0 + q_0 r_3 + q_2 r_1 + q_1 r_2) d\tau, \\
&\dots \\
p_N &= \int_{t_0}^t K_1 A_{N-1} d\tau.
\end{aligned}$$

Usa-se uma abordagem semelhante, as relações equivalentes podem ser determinadas por  $q$  e  $r$ , de tal modo que

$$\begin{aligned}
q_0 &= q(t_0) + \frac{U_3}{I_y} t, \\
q_1 &= \int_{t_0}^t K_2 B_0 d\tau = \int_{t_0}^t K_2 p_0 r_0 d\tau, \\
q_2 &= \int_{t_0}^t K_2 B_1 d\tau = \int_{t_0}^t K_2 (p_1 r_0 + p_0 r_1) d\tau, \\
q_3 &= \int_{t_0}^t K_2 B_2 d\tau = \int_{t_0}^t K_2 (p_2 r_0 + p_0 r_2 + p_1 r_1) d\tau,
\end{aligned}$$

$$q_4 = \int_{t_0}^t K_2 B_3 d\tau = \int_{t_0}^t K_2 (p_3 r_0 + p_0 r_3 + p_2 r_1 + p_1 r_2) d\tau,$$

...

$$q_N = \int_{t_0}^t K_2 B_{N-1} d\tau,$$

e

$$r_0 = r(t_0) + \frac{U_4}{I_z} t,$$

$$r_1 = \int_{t_0}^t K_3 C_0 d\tau = \int_{t_0}^t K_3 p_0 q_0 d\tau,$$

$$r_2 = \int_{t_0}^t K_3 C_1 d\tau = \int_{t_0}^t K_3 (p_1 q_0 + p_0 q_1) d\tau,$$

$$r_3 = \int_{t_0}^t K_3 C_2 d\tau = \int_{t_0}^t K_3 (p_2 q_0 + p_0 q_2 + p_1 q_1) d\tau,$$

$$r_4 = \int_{t_0}^t K_3 C_3 d\tau = \int_{t_0}^t K_3 (p_3 q_0 + p_0 q_3 + p_2 q_1 + p_1 q_2) d\tau,$$

...

$$r_N = \int_{t_0}^t K_3 C_{N-1} d\tau.$$

## 2º modelo com efeitos giroscópicos:

$$p_0 = p(t_0) + \frac{U_2}{I_x} t,$$

$$p_1 = \int_{t_0}^t K_1 A_0 d\tau - \int_{t_0}^t q_0 \frac{J_{TP}}{I_x} \Omega d\tau = \int_{t_0}^t K_1 q_0 r_0 d\tau - \int_{t_0}^t q_0 \frac{J_{TP}}{I_x} \Omega d\tau,$$

$$p_2 = \int_{t_0}^t K_1 A_1 d\tau - \int_{t_0}^t q_1 \frac{J_{TP}}{I_x} \Omega d\tau = \int_{t_0}^t K_1 (q_1 r_0 + q_0 r_1) d\tau - \int_{t_0}^t q_1 \frac{J_{TP}}{I_x} \Omega d\tau,$$

$$p_3 = \int_{t_0}^t K_1 A_2 d\tau - \int_{t_0}^t q_2 \frac{J_{TP}}{I_x} \Omega d\tau = \int_{t_0}^t K_1 (q_2 r_0 + q_0 r_2 + q_1 r_1) d\tau - \int_{t_0}^t q_2 \frac{J_{TP}}{I_x} \Omega d\tau,$$

$$p_4 = \int_{t_0}^t K_1 A_3 d\tau - \int_{t_0}^t q_3 \frac{J_{TP}}{I_x} \Omega d\tau$$

$$= \int_{t_0}^t K_1 (q_3 r_0 + q_0 r_3 + q_2 r_1 + q_1 r_2) d\tau - \int_{t_0}^t q_3 \frac{J_{TP}}{I_x} \Omega d\tau,$$

...

$$p_N = \int_{t_0}^t K_1 A_{N-1} d\tau - \int_{t_0}^t q_{N-1} \frac{J_{TP}}{I_x} \Omega d\tau.$$

Usa-se uma abordagem semelhante, as relações equivalentes podem ser determinadas por  $q$  e  $r$ , de tal modo que

$$\begin{aligned}
q_0 &= q(t_0) + \frac{U_3}{I_y} t, \\
q_1 &= \int_{t_0}^t K_2 B_0 d\tau + \int_{t_0}^t p_0 \frac{J_{TP}}{I_y} \Omega d\tau = \int_{t_0}^t K_2 p_0 r_0 d\tau + \int_{t_0}^t p_0 \frac{J_{TP}}{I_y} \Omega d\tau, \\
q_2 &= \int_{t_0}^t K_2 B_1 d\tau + \int_{t_0}^t p_1 \frac{J_{TP}}{I_y} \Omega d\tau = \int_{t_0}^t K_2 (p_1 r_0 + p_0 r_1) d\tau + \int_{t_0}^t p_1 \frac{J_{TP}}{I_y} \Omega d\tau, \\
q_3 &= \int_{t_0}^t K_2 B_2 d\tau + \int_{t_0}^t p_2 \frac{J_{TP}}{I_y} \Omega d\tau = \int_{t_0}^t K_2 (p_2 r_0 + p_0 r_2 + p_1 r_1) d\tau + \int_{t_0}^t p_2 \frac{J_{TP}}{I_y} \Omega d\tau, \\
q_4 &= \int_{t_0}^t K_2 B_3 d\tau + \int_{t_0}^t p_3 \frac{J_{TP}}{I_y} \Omega d\tau \\
&= \int_{t_0}^t K_2 (p_3 r_0 + p_0 r_3 + p_2 r_1 + p_1 r_2) d\tau + \int_{t_0}^t p_3 \frac{J_{TP}}{I_y} \Omega d\tau, \\
&\dots \\
q_N &= \int_{t_0}^t K_2 B_{N-1} d\tau + \int_{t_0}^t p_{N-1} \frac{J_{TP}}{I_y} \Omega d\tau,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
r_0 &= r(t_0) + \frac{U_4}{I_z} t, \\
r_1 &= \int_{t_0}^t K_3 C_0 d\tau = \int_{t_0}^t K_3 p_0 q_0 d\tau, \\
r_2 &= \int_{t_0}^t K_3 C_1 d\tau = \int_{t_0}^t K_3 (p_1 q_0 + p_0 q_1) d\tau, \\
r_3 &= \int_{t_0}^t K_3 C_2 d\tau = \int_{t_0}^t K_3 (p_2 q_0 + p_0 q_2 + p_1 q_1) d\tau, \\
r_4 &= \int_{t_0}^t K_3 C_3 d\tau = \int_{t_0}^t K_3 (p_3 q_0 + p_0 q_3 + p_2 q_1 + p_1 q_2) d\tau, \\
&\dots \\
r_N &= \int_{t_0}^t K_3 C_{N-1} d\tau.
\end{aligned}$$

---

# Capítulo 5

## Implementação e Resultados

---

### 5.1 Considerações iniciais

Neste capítulo é apresentado o algoritmo do método da decomposição de Adomian implementado nas equações dinâmicas de voo para calcular as velocidades angulares de quadrotor.

Vale ressaltar, que o método da decomposição de Adomian para o estudo de dinâmica de voos de quadrotor ainda não foi implementado, o que torna o presente trabalho inovador.

Posteriormente, implementou-se o algoritmo desenvolvido no software *Mathematica* e realizou-se as simulações com os valores de entrada em diversas situações e com dois modelos apresentados em Equações (2.53) e (2.55). Além disso, fez-se as mesmas simulações pelo método de *Runge-Kutta* de quarta ordem e por própria função *NDSolve* do software *Mathematica*, incluindo o modelo simplificado (Equação (2.59)).

### 5.2 Algoritmo do método da decomposição de Adomian

Segundo o método da decomposição de Adomian, desenvolveu-se o algoritmo 1 a seguir para encontrar as soluções iniciais das equações da dinâmica de voo.

---

**Algoritmo 1** Processo de calcular velocidade angular do quadrotor pelo método da decomposição de Adomian

---

**Entrada:**  $I_x, I_y, I_z, J_{TP}, l, b, d, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, tempo$

Sejam  $p_{t0} = q_{t0} = r_{t0} = 0$ ;

Calcular  $U_1, U_2, U_3, U_4, K_1, K_2, K_3, \Omega$ ;

**ENQUANTO** ( $n=0; n<4$ ) **FAÇA**

Calcular  $p_n, q_n, r_n, A_n, B_n, C_n$ ;

$n = n + 1$ ;

**FIM ENQUANTO**

Calcular  $p_4, q_4, r_4$ ;

$$p=p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4;$$

$$q=q_0 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4;$$

$$r=r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + r_4;$$

**ENQUANTO** ( $t < \text{tempo}$ ) **FAÇA**

*Calcular*  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ;

$t = t + 0.1$ ;

**FIM ENQUANTO**

---

Calcula-se o polinômio de Adomian até quarta ordem, porque com o aumento de expoentes nas equações obtidas em cada passo, os coeficientes correspondentes aproximam-se de 0. Por isso, nas simulações o polinômio de Adomian é calculado até quarta ordem, garantindo-se eficiência e corretudo nos resultados. Devido à eficiência do procedimento e como o tempo observado é curto, escolheu-se 0,1 segundo como a escala do tempo.

### 5.3 Simulações

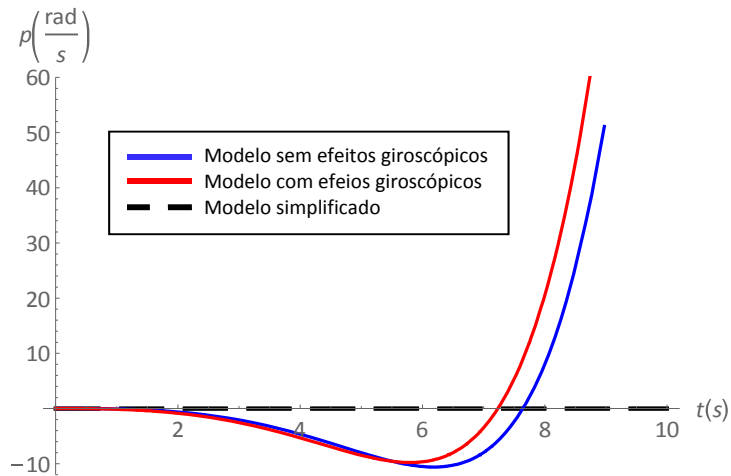
Desconsiderou-se os fatores externos, por exemplo, densidade do ar, as simulações foram feitas em condições ideais. Na primeira etapa de simulação, são apresentados os resultados de velocidades angulares obtidos pelo método da decomposição de Adomian. Na segunda etapa, são apresentados os resultados de velocidades angulares obtidos pela NDSolve de software *Mathematica*, o método de *Runge-Kutta* de quarta ordem e o método da decomposição de Adomian. Os valores positivos obtidos nas simulações representam a rotação no sentido horário ao redor do eixo correspondente.

#### 5.3.1 Desempenho das velocidades angulares nos três modelos do método da decomposição de Adomian.

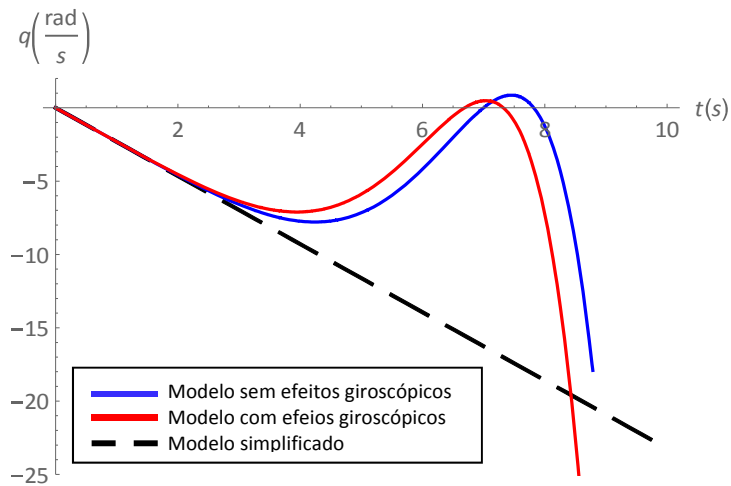
Nesta subseção são apresentadas as simulações com alterações de velocidade de quatro propulsores do quadrotor nos três modelos do método da decomposição de Adomian apresentados na seção 2.3.

Tabela 5.1: Parâmetros do Quadrotor na simulação

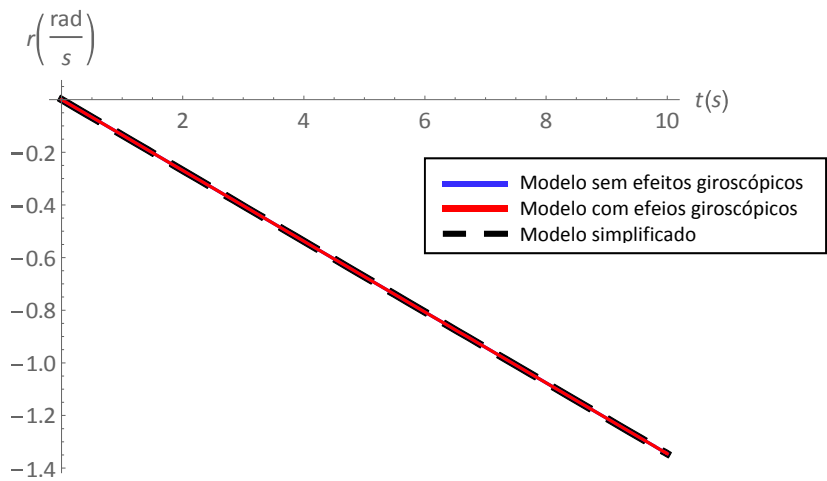
Parâmetro	valor
$I_x$	0,0081 kg. m <sup>2</sup> .
$I_y$	0,0081 kg. m <sup>2</sup> .
$I_z$	0,0142 kg. m <sup>2</sup>
$J_{TP}$	0,000104 kg. m <sup>2</sup>
$m$	1 kg
$l$	0,2 m
$b$	0,0000542 N. m. s <sup>2</sup>
$d$	0.0000011 N. m. s <sup>2</sup>



(a)

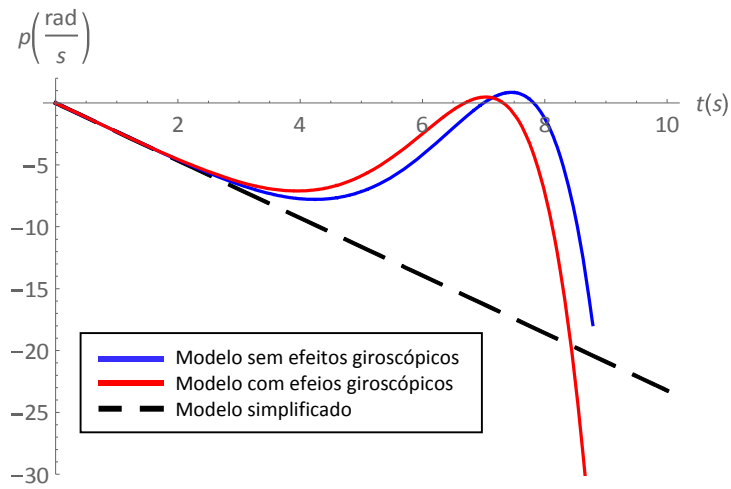


(b)

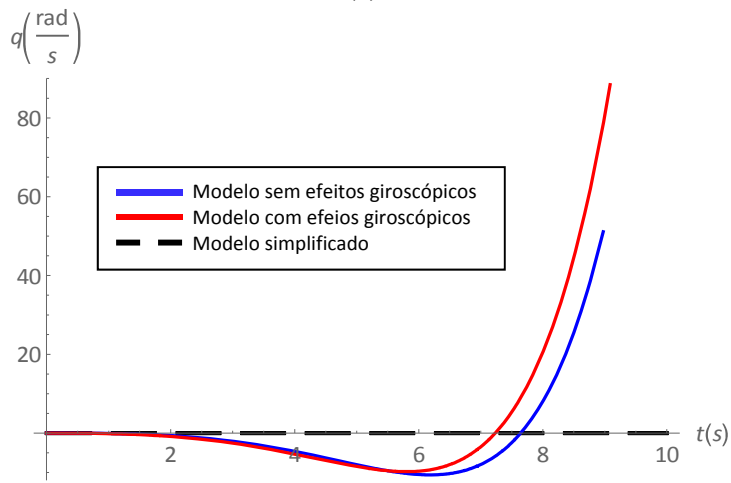


(c)

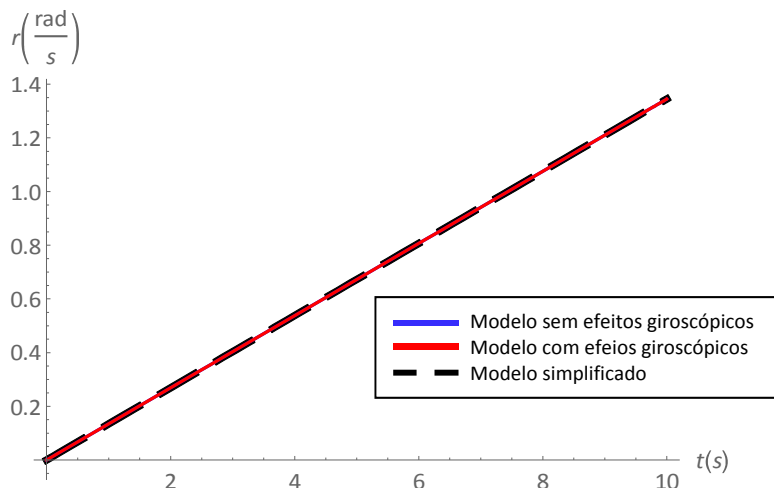
Figura 5.1: Resultado da velocidades angulares em rolagem (a), arfagem (b) e guinada (c) com velocidade de propulsores  $\Omega_f=219$ ,  $\Omega_b=215$ ,  $\Omega_l=215$  e  $\Omega_r=215$ .



(a)



(b)



(c)

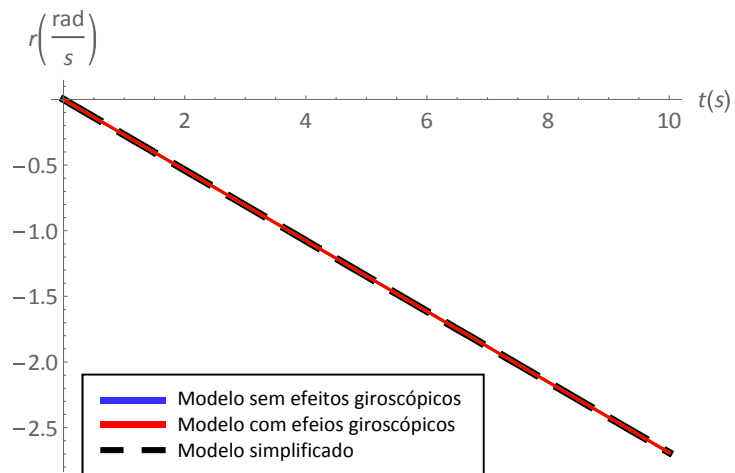
Figura 5.2: Resultado da velocidades angulares em rolagem (a), arfagem (b) e guinada (c) com velocidade de propulsores  $\Omega_r=215$ ,  $\Omega_b=215$ ,  $\Omega_l=219$  e  $\Omega_r=215$ .



(a)



(b)



(c)

Figura 5.3: Resultado da velocidades angulares em rolagem (a), arfagem (b) e guinada (c) com velocidade de propulsores  $\Omega_f=219$ ,  $\Omega_b=219$ ,  $\Omega_l=215$  e  $\Omega_r=215$ .

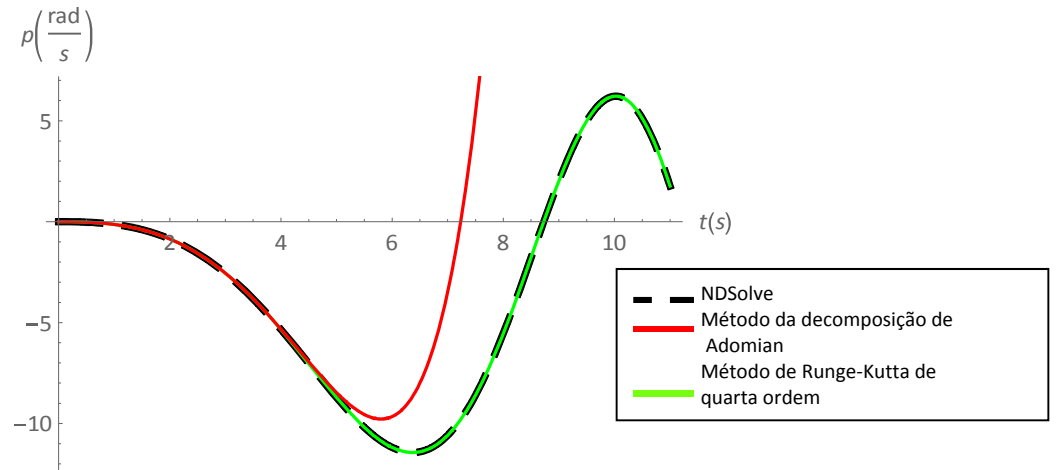
Considera-se as velocidades angulares iniciais nos três eixos são 0 (rad/s), e as velocidades dos propulsores do quadrotor, no estado pairado, são 215 rad/s. Os aumentos de velocidade dos propulsores são 4 rad/s, para observar o comportamento nos três eixos.

Pode-se observar na Figura 5.1(b), com aumento da velocidade no propulsor dianteiro do quadrotor, apresenta-se o comportamento da arfagem dos três modelos. E pelos modelos com efeito giroscópico e sem efeito giroscópico, além da arfagem, apresenta-se, na Figura 5.1(a), uma rolagem que tem a velocidade angular alta no sentido horário ao redor do eixo  $x$  a partir do sexto segundo. Isso aconteceu também nos resultados da Figura 5.2(b) que se fez um aumento da velocidade no propulsor esquerdo do quadrotor. Na Figura 5.2(a) apresenta-se o comportamento da rolagem nos três modelos. As simulações mostram que o comportamento de guinada dos três modelos é linear.

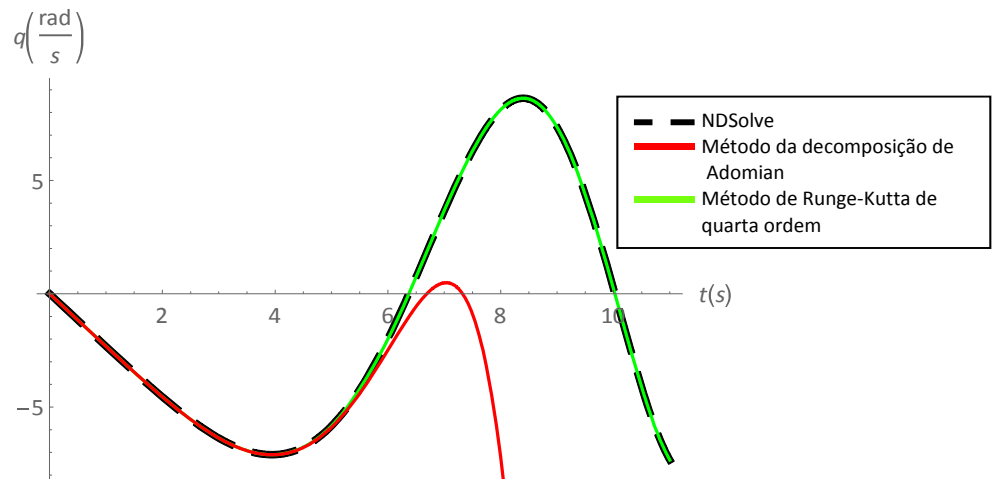
Faz-se o aumento de velocidade nos propulsores dianteiro e traseiro, apresenta a guinada anti-horária na Figura 5.3(c). Nas Figuras 5.3(a) e 5.3(b) mostram-se os comportamentos esperados na rolagem e arfagem nas simulações, verifica-se que o modelo com efeito giroscópico tem eficiência melhor do que o modelo sem efeito giroscópico em tempo determinado.

Na seção 5.3.2, adota-se o modelo com efeito giroscópico nas simulações para se comparar os resultados obtidos pelos método da decomposição de Adomian, o de *Runge-Kutta* de quarta ordem e a função *NDSolve* de software da *Mathematica*.

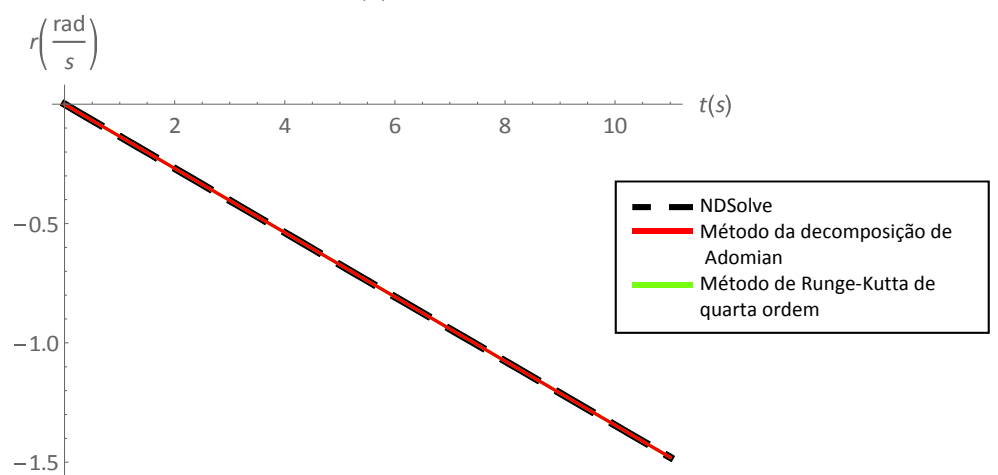
### 5.3.2 Desempenho das velocidades angulares nos três métodos .



(a)

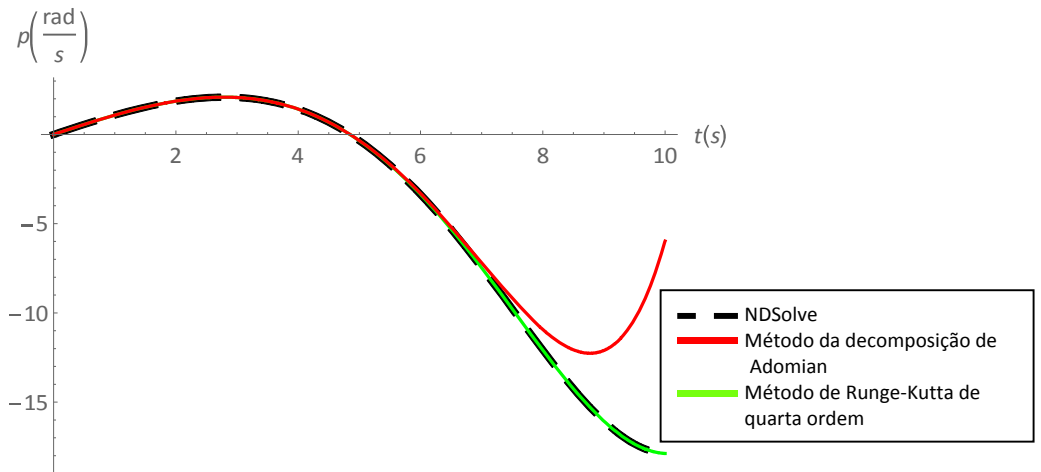


(b)

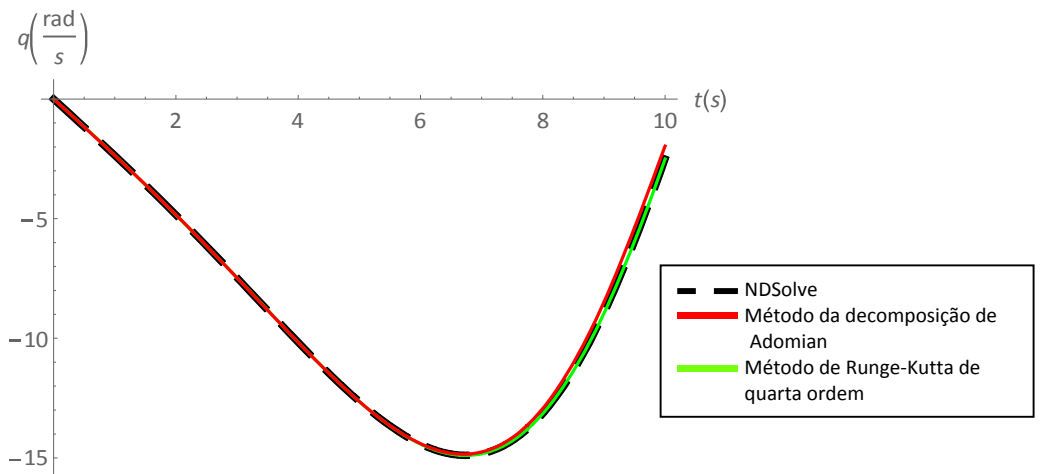


(c)

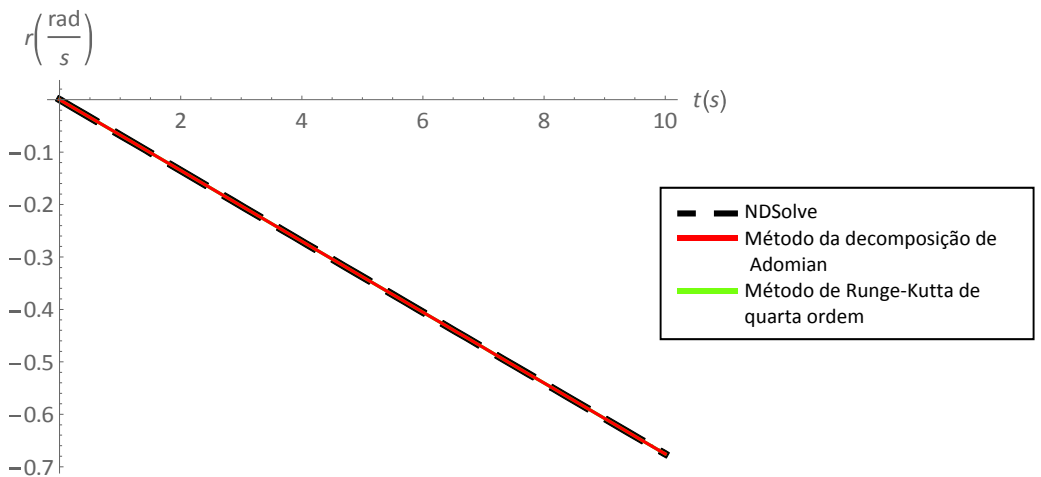
Figura 5.4: Resultado da velocidades angulares em rolagem (a), arfagem (b) e guinada (c) com velocidade de propulsores  $\Omega_f=219$ ,  $\Omega_b=215$ ,  $\Omega_l=215$  e  $\Omega_r=215$ .



(a)

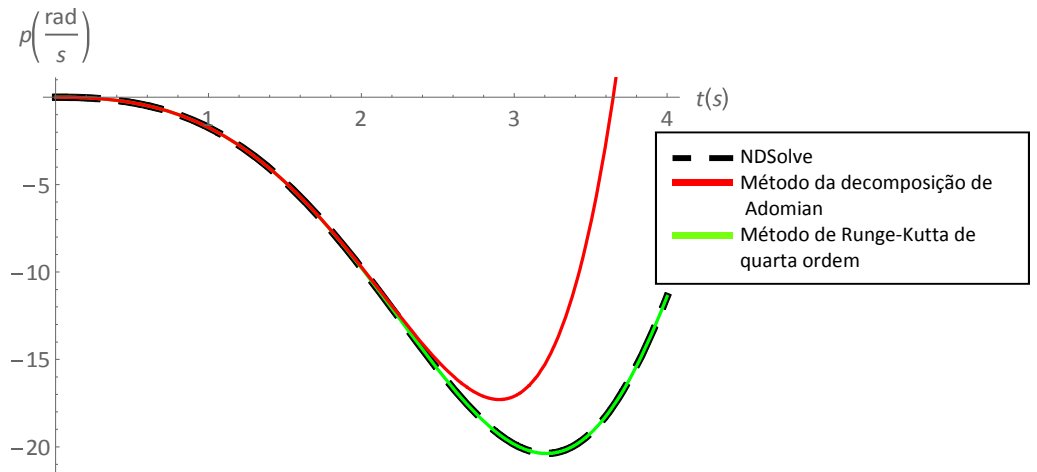


(b)

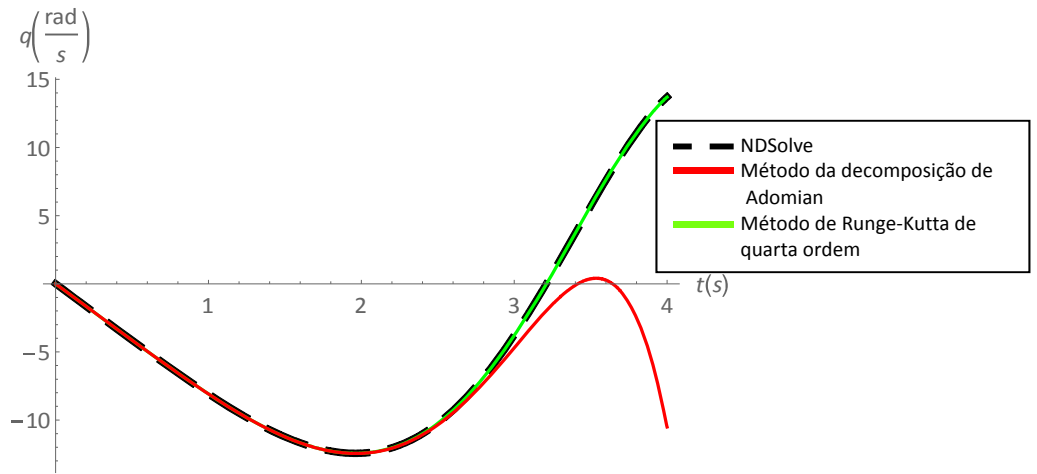


(c)

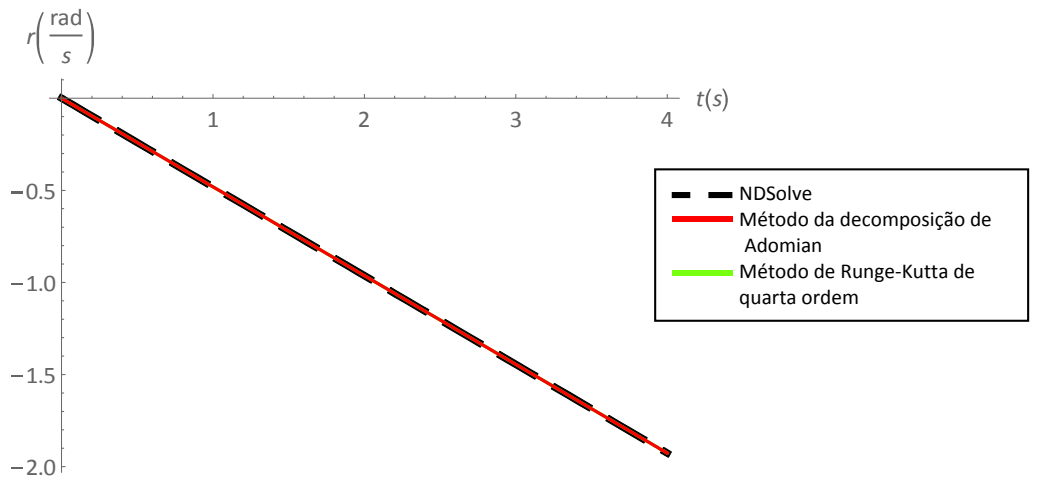
Figura 5.5: Resultado da velocidades angulares em rolagem (a), arfagem (b) e guinada (c) com velocidade de propulsores  $\Omega_f=219$ ,  $\Omega_b=215$ ,  $\Omega_l=215$  e  $\Omega_r=217$ .



(a)



(b)



(c)

Figura 5.6: Resultado da velocidades angulares em rolagem (a), arfagem (b) e guinada (c) com velocidade de propulsores  $\Omega_f=229$ ,  $\Omega_b=215$ ,  $\Omega_l=215$  e  $\Omega_r=215$ .

Considerou-se as velocidades angulares iniciais nos três eixos são 0 (rad/s), e as velocidades dos propulsores do quadrotor, no estado pairado, são 215 rad/s.

Com o aumento de velocidade 4 rad/s no propulsor dianteiro, apresentam-se na Figura 5.4(b) os comportamentos da arfagem nos três métodos. Pode ser observado que o resultado do método de *Runge-Kutta* de quarta ordem é idêntico com a NDSolve, tanto na arfagem quanto nas rolagem e guinada.

Pode-se observar na Figura 5.4(b), com aumento da velocidade no propulsor dianteiro do quadrotor, o resultado da arfagem mostrada pelo método da decomposição de Adomian é bem aproximado dos outros métodos antes do 4º segundo. Isso acontece o mesmo resultado na rolagem observando na Figura 5.4(a).

Baseado na simulação anterior, faz-se mais o aumento de velocidade 2 rad/s no propulsor direito. Nas Figuras 5.5(a) e 5.5(b), os comportamentos de rolagem e arfagem pelo método da decomposição de Adomian ficam quase idênticos dos outros métodos em tempo maior, aproximadamente 6 segundos.

Com o aumento de velocidade 14 rad/s no propulsor dianteiro, aceleram-se às velocidades de rolagem e de arfagem mais rapidamente. Pode-se observar nas Figuras 5.6(a) e 5.6(b) que o tempo dos resultados cujas as velocidades angulares são quase idênticos diminui até 2 segundos.

A fidelidade do método da decomposição de Adomian pode ser verificada nos resultados. Além disso, o método possui uma convergência mais rápida do que os outros métodos testados. Assim, além de ser um método que facilita a modelagem matemática, também é eficiente sob o ponto de vista computacional.

#### **5.4 Considerações finais**

Nas simulações, o método da decomposição de Adomian apresentou bons resultados. Embora houve o pico na aceleração da velocidade angular depois de certo tempo, o que é mais interessante é obter uma velocidade angular desejada em um curto tempo, o que mostra-se mais eficiente em relação aos outros métodos apresentados neste trabalho. Isto ajuda muito no controle de velocidade dos propulsores para ter velocidade desejada e posição desejada do quadrotor quando está em voo.

---

# Capítulo 6

## Considerações Finais e Trabalhos Futuros

---

### 6.1 Considerações finais

O principal objetivo deste trabalho foi realizar a implementação do método da decomposição de Adomian para calcular as velocidades angulares em rolagem, arfagem e guinada de quadrotor. Além da implementação do método da decomposição de Adomian ser uma abordagem inovadora, os resultados obtidos das simulações foram muito satisfatórios. Na realidade, o tempo necessário de fazer a alteração de velocidades angulares é muito curto, e o método da decomposição de Adomian apresenta um desempenho bom, superior, em muitos casos, em relação aos outros métodos utilizados nos testes. Portanto, é viável aplicar o método da decomposição de Adomian nas equações dinâmicas do voo.

A simulação realizada no *Mathematica* apresentou desempenho satisfatório para conseguir ter o resultado compatível em determinando tempo com outros métodos experimentados.

### 6.2 Trabalhos futuros

Baseado nos resultados obtidos com este trabalho, pode-se sugerir alguns ajustes para trabalhos futuros, tais como:

- Completar as equações dinâmicas do voo na implementação e na simulação.
- Determinar os ângulos, as velocidades e as posições do quadrotor com a aplicação do método de decomposição de Adomian.
- Implementar o controlador diretamente em uma plataforma real para validar seu desempenho.

## REFERÊNCIAS

- ABBAOUI, K. et al. *A New Formulation of Adomian Method – Convergence Result*. Kybernets, Vol. 30, No. 9/10, 2001, pp. 1183-1191.
- ADOMIAN, G. *A Review of the Decomposition Method in Applied Mathematics*. University of Georgia, 1988.
- BEARD, R. *Quadrotor Dynamics and Control*. Brigham Young University, 2008.
- BRESCIANI, T. *Modelling, Identification and Control of a Quadrotor Helicopter*. Master thesis, Lund University, 2008.
- CHERRUAULT, Y. *Convergence of Adomian's Method*. Kybernets, Vol. 18, N°2, pp. 31-38, 1989.
- COSTA, E. *Algoritmos de Controle Aplicados à Estabilização do Voo de um Quadrotor*. Dissertação de mestrado, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – Universidade Federal de Juiz de Fora, 2012.
- DEHGHAN, M. *Application of the Adomian Decomposition Method for Two-dimensional Parabolic Equation subject to Nonstandard Boundary Specifications*. Applied Mathematics and Computation, 157 (2004) pp 549-560.
- DEHGHAN, M.; TATARI, M. *The Use of Adomian Decomposition Method for Solving Problems in Calculus of Variations*. Mathematical Problems in Engineering. Volume 2006, Article ID 65379, pp 1-12.
- ELFES, A. et al. *Project aurora: development of an autonomous unmanned remote monitoring robotic airship*. Journal of the Brazilian Computer Society, SciELO Brasil, v. 4, n. 3, 1998.
- GUIMARÃES, J. *Controle de Atitude e Altitude para um Veículo Aéreo Não Tripulado do Tipo Quadrirrotor*. Dissertação de mestrado, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação da UFRN, 2012.

KAYA, D.; YOKUS, A. *A Numerical Comparison of Partial Solutions in the Decomposition Method for Linear and Nonlinear Partial Differential Equations*. Mathematics and Computers in Simulation 60 (2002) pp 507-512.

NETO, A. *Geração de trajetórias para veículos aéreos autônomos não-tripulados*. Dissertação de mestrado, Curso de Pós-Graduação em Ciência da Computação – Universidade Federal de Minas Gerais, 2008.

PEREIRA, A. *O Método da Decomposição de Adomian Aplicado à Interação Fluido-Estrutura de um Cabo*. Tese de doutorado, Curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010.

VALLE, K. *Métodos Numéricos de Euler e Runge-Kutta*. Monografia de Pós-graduação, Curso de Pós-graduação em Educação Matemática – Universidade Federal de Minas Gerais, 2012.