IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

4

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT–T.003/93

Fenômenos Não-Lineares de Superfície em Sistemas Convectivos

SAMUEL MAIER KURCBART

INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA
304
BIBLIOTECA

Orientador

Prof. Dr. José Geraldo Pereira

Agosto 1993

IFT/T
D-029

Aos meus pais e a minha irmã

Agradecimentos

Ao Professor José Geraldo Pereira o carinho, a paciência e a dedicação demonstradas durante a orientação, incentivando-me com sua postura respeitosa e franca.

Ao Professor Roberto André Kraenkel a pertinência das suas observações críticas, a preciosa colaboração nos estudos realizados, o apoio e a confiança que me dedica.

Minha profunda estima ao Professor Miguel Alberto Manna, que pela sua visão profundamente humana, orientação e pelo envolvimento com o tema deste estudo desde o primeiro momento contribuiram fortemente para a minha formação pessoal.

Aos amigos do Instituto de Física Teórica (IFT-UNESP) cujo carinho e confiança certamente deixam traços positivos na pesquisa.

Ao Instituto de Física Teórica (IFT-UNESP), seus professores e funcionários, a carinhosa acolhida e a preciosa colaboração nos estudos realizados.

Aos amigos do IFUSP, IMEUSP e FFCLUSP o apoio e o carinho.

E ao CNPq o importante apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho investigamos a formação e a propagação de ondas nào-lineares de superfície em sistemas convectivos. Consideramos apenas ondas de grande comprimento, nas situações em que o movimento convectivo ainda não teve início. Examinamos a influência de diferentes condições de contorno térmicas e mêcanicas, tanto no sistema de Rayleigh-Bénard, como no de Bénard-Marangoni. Deduzimos as equações que governam a evolução das ondas não-lineares na superfície destes dois sistemas, e descobrimos também a existência de um processo difusivo que ocorre no limiar da convecção.

Abstract

In this work we investigate the formation and propagation of surface nonlinear waves in convective systems. We consider only long wave modes, in situations well before the beginning of convective motion. We examine the influence of various different thermal and mechanical boundary conditions, both in the Rayleigh-Bénard and in the Bénard-Marangoni systems. We derive the equations governing the evolution of the nonlinear waves and we also discover the existence of a diffusive process occuring at the critical Rayleigh number for the onset of convection.

Índice

1 Introdução 2

2 Ondas Lineares e Não-Lineares 6

3 A equação de Kadomtsev-Petviashvili(KP) e o sistema de Rayleigh-Bénard 11

4 A equação de Burgers e o sistema de Rayleigh-Bénard 19

5 Viscosidade dependente da temperatura e as equações de KP e de Burgers 27

6 Processos difusivos no sistema de Rayleigh-Bénard 35

6.1 Instabilidade difusiva no limiar da convecção 35

6.2 Processos difusivos no regime supercrítico 45

7 Uma Generalização Dissipativa da Equação de Boussinesq 49

7.1 Equação de Boussinesq dissipativa no sistema de Bénard-Marangoni 49

7.2 Equação de Boussinesq dissipativa no sistema de Rayleigh-Bénard 59

8 Conclusões 68

Referências Bibliográficas 70

Capítulo 1

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é o estudo da formação e propagação de ondas não-lineares de grande comprimento de onda na superfície de sistemas convectivos. Vamos considerar os sistemas de Rayleigh-Bénard(RB) e Bénard-Marangoni(BM). Nesta Introdução apresentaremos uma breve descrição destes sistemas, assim como um resumo do artigo de Alfaro e Depassier [1], que inspirou nossos primeiros trabalhos. A seguir, no Capítulo 2, intitulado "Ondas Lineares e Não-Lineares", mostraremos de maneira sucinta os seguintes conceitos essenciais para o entendimento do trabalho: distorção não-linear de ondas, ondas dispersivas, dissipação e sólitons. A partir do Capítulo 3 vamos apresentar nossa contribuição ao estudo das ondas não-lineares de superfície nos sistemas de RB e de BM.

No estudo dos fenômenos convectivos, tanto o sistema de RB como o de BM tiveram papel de destaque [2, 3]. Em nosso trabalho, não tratamos do fenômeno da convecção em si. Estudamos fluidos aquecidos por baixo, nas situações em que a convecção ainda não teve início. Consideramos um fluido limitado inferiormente por um plano horizontal e superiormente pela superfície livre do fluido. Supomos que a extensão horizontal do fluido é infinita, de modo que as fronteiras horizontais não têm nenhuma influência no fenômeno estudado. Além disto, supomos que a propagação do calor através do fluido, na ausência de convecção, realiza-se apenas pelo processo de difusão térmica.

Num fluido aquecido por baixo, sob ação do campo gravitacional, as camadas localizadas na região inferior tornam-se menos densas que as superiores, e esta diferença na

densidade origina a força de empuxo. Entretanto, a ação desta força no fluido não produz, de imediato, movimento, pois a viscosidade o inibe. Quando a diferença de temperatura ΔT entre as superfícies superior e inferior do fluido atinge um valor crítico, a força de empuxo supera a força viscosa e, consequentemente, se estabelece um movimento no fluido, dando início à convecção. Neste ponto, o sistema passa de um estado estático para um estado de movimento estacionário.

A força de empuxo e a força viscosa não são, entretanto, as únicas que atuam num fluido aquecido por baixo. A variação da tensão superficial do fluido com a temperatura origina também movimentos convectivos. A tensão superficial é uma força coesiva que tende a minimizar a área da interface do fluido. O comportamento térmico da tensão superficial é semelhante ao da densidade, ou seja, a tensão superficial é função decrescente da temperatura. Assim, uma diferença de temperatura através da superfície do fluido resulta num gradiente de tensão superficial, que tende a restabelecer o equilíbrio de forças na superfície. O papel do gradiente de tensão superficial no estabelecimento do movimento convectivo é similar ao da força de empuxo, que consideramos anteriormente.

Os sistemas formados por fluidos aquecidos, nos quais a dependência da tensão superficial com a temperatura tem influência dominante no estabelecimento do movimento convectivo, recebem o nome de sistema de Bénard-Marangoni. Por outro lado, os sistemas em que a dependência da densidade do fluido com a temperatura, e consequentemente o empuxo, tem influência dominante para o estabelecimento do movimento convectivo, são denominados sistemas de Rayleigh-Bénard.

Para o sistema de RB, é usual definir-se um parâmetro adimensional, o número de Rayleigh(R). Ele é dado pela razão entre a força de empuxo e a força viscosa que inibe o movimento do fluido. Para as situações em que R supera certo valor crítico, a força de empuxo supera os efeitos dissipativos da viscosidade, e o sistema evolui de um estado estático para um estado em que se manifesta a convecção.

De modo semelhante, é usual definir-se o número de Marangoni(M) para o sistema de BM. O número M é dado pela razão entre a força devida ao gradiente de tensão superficial e a força viscosa. Para um determinado aquecimento, o gradiente de tensão superficial supera os efeitos dissipativos e, consequentemente, o sistema evolui de um estado estático

para um estado em que a convecção tem início. Esta situação ocorre quando o número M é maior que certo valor crítico M_c [3].

O números R e M dependem da distância d entre os pontos da superfície livre e o plano que limita inferiormente o fluido. O número R é proporcional a d^4 e o número M apresenta dependencia em d^2. Esta dependência para com a distância indica-nos que o sistema de RB é caracterizado por fluidos cuja profundidade é maior que a dos fluidos que constituem o sistema de BM. Dependendo da profundidade d, o empuxo ou o gradiente de tensão superficial terá influência dominante no estado do sistema [3].

Em nosso trabalho, é importante lembrar, estamos interessados em situações nas quais o processo de convecção ainda não teve início. Em outras palavras, estudamos os sistemas de RB e de BM nas situações em que os números R e M são menores que o valores críticos para o início da convecção. Esta é exatamente a situação considerada por Alfaro e Depassier [1]. Estes autores deduziram que, para determinadas condições termo-mecânicas de contorno e número R igual a 30, perturbações apropriadas na superfície livre do sistema de RB evoluem segundo a equação de Korteweg-de Vries (KdV). Alfaro e Depassier interpretaram que os sólitons presentes neste sistema são formados devido a um balanço, que só ocorre em $R = 30$, entre a energia fornecida ao sistema sob a forma de calor e a energia dissipada pela viscosidade.

Nossa tese está dividida em oito capítulos. No capítulo 3 apresentamos uma extensão dos resultados de Alfaro e Depassier [1] para um sistema de RB em (2+1)-dimensões. Deduzimos [5] que, para $R = 30$, perturbações apropriadas na superfície livre do sistema evoluem de acordo com a equação de Kadomtsev-Petviashvili(KP) [4].

No capítulo 4 estudamos o comportamento do sistema de RB para R diferente do valor crítico, $R = 30$. Neste caso, deduzimos [8, 9, 10] que perturbações na superfície livre do sistema são descritas pela equação de Burgers em (2+1) dimensões [7]. Em R diferente do valor crítico, porém "muito próximo", as perturbações na superfície livre evoluem segundo a equação de KdV-Burgers.

No capítulo 5 consideramos o efeito da dependência da viscosidade com a temperatura na formação das ondas não-lineares de superfície. Mesmo havendo esta dependência, mostramos [6] que ainda existe um ponto de balanço que é identificado por um número R

menor que 30.

O capítulo 6 está dividido em duas seções. Na primeira, estudamos um processo difusivo que se desenvolve no sistema de RB, no limiar da convecção. Para as condições de contorno empregadas, este limiar corresponde a um número R crítico igual a 320. No caso de perturbações negativas da superfície, ou de resfriamento de um ponto do fluido, obtivemos [11, 12] uma solução auto-similar para a equação de evolução não-linear encontrada. Esta solução descreve frentes que se propagam no fluido. Na segunda seção, consideramos o mesmo sistema físico e estudamos as perturbações da superfície livre do sistema no regime supercrítico, isto é, para o número R acima do seu valor crítico $R = 320$. Obtivemos uma equação de evolução não-linear que envolve um termo difusivo proporcional à derivada espacial de quarta ordem.

O capítulo 7 está dividido também em duas seções. Utilizando um método perturbativo [14] que faz uso de dois parâmetros infinitesimais, desenvolvemos na primeira seção um estudo de ondas não-lineares de superfície no sistema de BM. Na segunda seção, consideramos o mesmo problema, só que no sistema de RB. Obtivemos [15] sistemas acoplados de equações de evolução para o campo de velocidades e para as perturbações da superfície livre do fluido. Estes sistemas envolvem não-linearidade, dispersão e dissipação, sendo que a predominância de cada um destes efeitos é determinada pela relação entre os dois parâmetros perturbativos envolvidos no método. Estes sistemas de equações constituem generalizações dissipativas do sistema de Boussinesq [16].

No capítulo 8 apresentamos as conclusões e as considerações finais.

æ

Capítulo 2

Ondas Lineares e Não-Lineares

Neste capítulo vamos reunir alguns conceitos básicos relacionados ao estudo de ondas não-lineares. Começaremos pela definição de onda. Entendemos por onda um sinal reconhecível que se propaga em um meio com uma velocidade também reconhecível. Os movimentos ondulatórios podem ser classificados matematicamente em hiperbólicos e dispersivos. Ondas hiperbólicas são descritas por equações diferenciais do tipo hiperbólico. Já a caracterização das ondas dispersivas não se baseia diretamente na forma da equação que descreve a onda, mas na solução e na relação de dispersão associada à equação. No entanto, existem sistemas descritos por equações hiperbólicas cujas soluções são dispersivas(por exemplo, a equação de Klein-Gordon) [14]. Em nosso trabalho estaremos interessados unicamente no estudo de ondas dispersivas.

Para sistemas dispersivos lineares e unidimensionais, as ondas são expressas na forma

$$\varphi(x,t) = A\cos(kx \mp \omega t + \delta), \tag{2.1}$$

em que A é a amplitude da onda, k e ω estão relacionados, respectivamente, ao comprimento de onda λ e à freqüencia ν por meio de

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \qquad \omega = 2\pi\nu, \tag{2.2}$$

sendo k o número de onda e ω a freqüência angular. Na expressão (2.1), o sinal $(-)$ representa uma onda que se propaga para a direita, o sinal $(+)$ uma onda que se propaga

para a esquerda, e δ representa uma fase constante que depende da origem das coordenadas e do tempo. A solução geral das equações que descrevem os sistemas dispersivos lineares corresponde a uma sobreposição de soluções da forma(2.1), expressa pela integral de Fourier

$$\varphi(x,t) = \int_0^\infty F(k)\cos(kx - \omega t)dk, \tag{2.3}$$

em que $F(k)$ é determinada pelas condições iniciais ou de fronteira. Para que $\varphi(x,t)$ satisfaça a equação que descreve o sistema, k e ω devem estar ligados por uma relação da forma

$$G(k,\omega) = 0. \tag{2.4}$$

A relação entre k e ω é denominada relação de dispersão. No caso de ondas dispersivas, a relação (2.4) é expressa por uma função a valores reais

$$\omega = \omega(k), \tag{2.5}$$

que satisfaz a condição :

$$\frac{d^2\omega(k)}{dk^2} \neq 0. \tag{2.6}$$

A velocidade da onda com número de onda k, denominada velocidade de fase C_p, é dada por

$$C_p = \frac{\omega(k)}{k}. \tag{2.7}$$

Já a velocidade com que o pacote (2.3) como um todo se desloca, denominada velocidade de grupo C_g, é caracterizada por

$$C_g = \frac{d\omega(k)}{dk}. \tag{2.8}$$

Assim, para a sobreposição expressa em (2.3), as componentes com diferentes números de onda k viajam com velocidades distintas e o pacote, portanto, dispersa-se com o tempo.

A equação mais simples que descreve ondas dispersivas é dada por

$$\varphi_t + \varphi_{xxx} = 0, \tag{2.9}$$

em que os índices inferiores denotam derivadas parciais. A esta equação está associada a seguinte relação de dispersão:

$$\omega - k^3 = 0. \tag{2.10}$$

Nos sistemas em que ω é linearmente proporcional a k, a velocidade de fase C_p é independente do número de onda k e não ocorrem os efeitos dispersivos. Este é o caso dos sistemas descritos pela equação da onda

$$\varphi_{tt} = c^2 \varphi_{xx}, \tag{2.11}$$

em que c é uma constante.

A função (2.1) satisfaz esta equação, assim como a sobreposição de soluções expressa pela integral de Fourier (2.3). Podemos reescrever a solução geral (2.3) da equação de onda na forma

$$\varphi(x,t) = f(x-t) + g(x+t), \tag{2.12}$$

em que as funções f e g são arbitrárias. Esta expressão é conhecida como solução de d'Alembert.

A equação da onda (2.11) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$(\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)\varphi = 0. \tag{2.13}$$

Logo, ao escolhermos ondas que se propagam para a direita, a equação da onda (2.11) assume a forma

$$\varphi_t + c\varphi_x = 0. \tag{2.14}$$

Vamos, agora, considerar uma generalização não-linear da equação da onda (2.14), caracterizada por

$$\varphi_t + \varphi\varphi_x = 0. \tag{2.15}$$

Esta equação possui uma solução implícita, expressa por uma função arbitrária φ, que depende da variável $\xi = x - \varphi t$. Notemos que na solução de d'Alembert (2.12) empregamos a variável $\xi = x - ct$. Assim, considerando a solução

$$\varphi(x,t) = f(x - \varphi t) = f(\xi), \tag{2.16}$$

determinamos sua derivada espacial e temporal

$$\varphi_t = -(\varphi + t\varphi_t) f_\xi, \tag{2.17}$$

$$\varphi_x = (1 - t\varphi_x) f_\xi. \tag{2.18}$$

Substituindo estas expressões na equação(2.15), resulta

$$\varphi_t + \varphi\varphi_x = -(\varphi_t + \varphi\varphi_x)tf_\xi = 0. \tag{2.19}$$

No diagrama (x, φ), figura (2.1), cada ponto φ evolui com uma velocidade φ. Durante a evolução temporal, os pontos em que φ assume valores maiores apresentam maiores velocidades, de modo que φ tende a se distorcer. O termo não-linear em (2.15), portanto, está associado à distorção e quebra da onda [14].

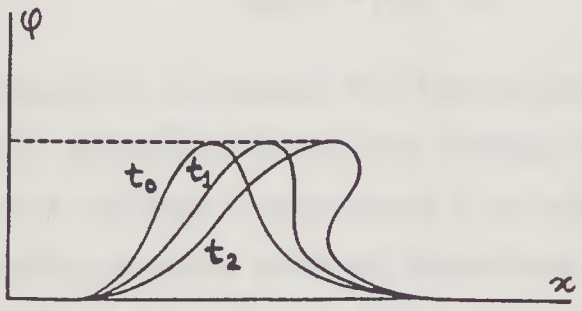


Figura 2.1: Mudança na forma da onda. $(t_0 < t_1 < t_2)$

Os efeitos de distorção e de quebra podem ser "compensados" se introduzirmos na equação não-linear (2.15) um termo proporcional a φ_{xx}(termo dissipativo). Exemplo deste efeito de "compensação " ocorre na equação de Burgers [14]:

$$\varphi_t + \varphi\varphi_x - \nu\varphi_{xx} = 0. \tag{2.20}$$

A equação de Burgers admite uma solução da forma $\varphi(x,t) = f(x-ct)$, que não apresenta quebra ou distorção [14]. A solução $f(x-ct)$ é expressa como função da variável $\xi = x - ct$ na forma

$$f(\xi) = \frac{1}{2}f_0\left[1 - \tanh(\frac{1}{4\nu}f_0\xi + C)\right] \tag{2.21}$$

em que f_0 e C dependem das condições iniciais. A solução (2.21) da equação de Burgers apresenta um perfil que não muda com o tempo [14].

O parâmetro ν representa fisicamente a viscosidade dinâmica do fluido. A dissipação da energia devido à viscosidade "compensa" o efeito de distorção e quebra da onda. A

interação entre o efeito dissipativo e a não-linearidade origina uma onda (2.21), que se propaga com um perfil fixo.

Veremos, a seguir, ondas que são resultado do balanço entre a distorção (descrita por um termo não-linear) e o efeito dispersivo. Vamos considerar a equação de Korteweg-de Vries(KdV)[17]

$$\varphi_t + \alpha\varphi\varphi_x + \beta\varphi_{xxx} = 0, \tag{2.22}$$

que inclui o efeito de distorção (presente na equação (2.15)) e o efeito de dispersão (expresso na equação (2.9)). Esta equação possui soluções ondulatórias na forma

$$\varphi(x,t) = f(x - ct). \tag{2.23}$$

Estas ondas, ao interagirem, se deformam mas retomam suas formas originais após o intervalo da interação, apresentando apenas uma mudança de fase. Outra característica destas ondas é que a velocidade é proporcional a sua amplitude [18, 19]. Ondas que reúnem as características expressas acima são denominadas sólitons. A equação de KdV possui soluções solitônicas puras se as condições iniciais para o sistema são da forma $\varphi(x,0) = -N \cdot (N+1)\text{sech}^2 x$, em que N é um número natural diferente de zero[13].

Ondas descritas por equações lineares com termos dispersivos modificam de perfil a cada instante e, portanto, dispersam-se. Assim, equações lineares não apresentam soluções solitônicas. O sóliton de KdV é fruto do balanço entre o efeito dispersivo e a tendência à distorção produzida pelo termo não-linear [17].

Capítulo 3

A equação de Kadomtsev-Petviashvili(KP) e o sistema de Rayleigh-Bénard

Neste capítulo mostramos que o sistema de Rayleigh-Bénard(RB) em (2+1)dimensões, para o número de Rayleigh (R) igual a 30, apresenta ondas solitárias que se propagam na superfície livre e deformável do sistema [5]. Estas ondas são descritos pela equação de Kadomtsev-Petviashvili(KP) [4] e correspondem a ondas de gravidade[14] com grande comprimento de onda λ que se propagam num fluido viscoso de pequena profundidade d ($d << \lambda$).

Apresentamos, a seguir, um resumo do "Reductive Perturbation Method"(RPM). Este método é apropriado para tratar perturbações com "grande comprimento de onda" λ. Empregando um parâmetro perturbativo ε, definimos escalas de diferentes ordens para a variável espacial x e a temporal t

$$x_n = \varepsilon^n(x - ct), \qquad t_p = \varepsilon^p t. \tag{3.1}$$

Em seguida, expandimos em série de potência de ε os campos (velocidade, pressão, temperatura, etc.), que são funções da variável espacial e da temporal. Introduzindo as expressões dos operadores diferenciais e as expansõesdestes campos nas equações que descrevem o sistema, podemos obter soluções para cada ordem em ε. Este método perturbativo foi introduzido por Gardner e Morikawa[20] e sistematizado por Taniuti [21].

Vamos escrever as equações que descrevem o sistema de RB em (2+1)dimensões. Consideremos um fluido limitado inferiormente em $z = 0$ por um meio, idealizado como con-

dutor térmico perfeito, plano e livre de tensões tangenciais. Nesta fronteira, o fluido está a uma temperatura $T = T_b$. A fronteira superior do fluido, em $z = d + \eta(x, y, t)$, constitui uma superfície bidimensional, deformável, submetida à pressão constante. A profundidade d é tal que o efeito do empuxo é predominante quando comparado à influência da tensão superficial. Esta consideração justifica assumirmos que a tensão superficial é nula.

As equações hidrodinâmicas que descrevem o movimento do fluido podem ser simplificadas introduzindo a aproximação de Boussinesq. Nas equações de movimento, a densidade é considerada constante, a não ser para o termo associado à força gravitacional. Para este termo a densidade é assumida como função linear da temperatura e não dependente da pressão.

Nesta aproximação e para um sistema cartesiano de coordenadas (x, y, z), as equações e condições de fronteira que descrevem o sistema RB são expressas por:
equação da continuidade para um fluido incompressível

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0; \tag{3.2}$$

equação de movimento (equação de Navier-Stokes) para um fluido incompressível

$$\rho_0 D_t \vec{v} = -\vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g}; \tag{3.3}$$

equação de propagação do calor

$$D_t T = \kappa \nabla^2 T; \tag{3.4}$$

equação de estado

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha (T - T_0)]; \tag{3.5}$$

em que $D_t = \partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ é a derivada convectiva, $\vec{v} = (u, v, w)$ é o campo de velocidades do fluido e P simboliza a pressão. A viscosidade μ, a difusividade térmica κ e o coeficiente de expansão térmica α são assumidos como constantes. T_0 e ρ_0 são a temperatura e a densidade de referência, respectivamente.

As condições de contorno na fronteira superior $z = d+\eta(x, y, t)$ são definidas da seguinte forma[22]:
condição cinemática (ou de não evaporação) da superfície

$$\eta_t + u\eta_x + v\eta_y = w; \tag{3.6}$$

condição de continuidade das componentes normal e tangencial das tensões na superfície de um fluido viscoso

$$\begin{aligned}(P-P_a)\eta_x-\mu[2u_x\eta_x-(u_z+w_x)+(u_y+v_x)\eta_y] &= 0, &(3.7)\\ P-P_a+\mu[(w_x+u_z)\eta_x-2w_z+(w_y+v_z)\eta_y] &= 0, &(3.8)\\ (P-P_a)\eta_y-\mu[(v_x+u_y)\eta_x-(v_z+w_y)+2v_y\eta_y] &= 0; &(3.9)\end{aligned}$$

e a condição de fluxo normal de calor

$$\hat{n}\cdot\vec{\nabla}T=-F/K, \tag{3.10}$$

em que $\hat{n}$ é o versor normal à superfície livre expresso por

$$\hat{n}=(-\eta_x,-\eta_y,1)/N, \qquad N=(1+\eta_x^2+\eta_y^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.11}$$

F representa o fluxo normal de calor, K é a condutividade térmica e P_a é a pressão constante exercida sobre a superfície livre.

Supomos que a resistência ao deslizamento de duas camadas do fluido é maior que a resistência ao movimento relativo entre o fluido e o plano $z=0$, que delimita inferiormente o fluido [23]. Decorre desta suposição que o plano inferior seja considerado livre de tensões ("stress-free") e o campo de velocidades sobre esta fronteira seja caracterizado por

$$w=0, \quad v_z=0, \quad e \quad u_z=0. \tag{3.12}$$

A forma da equação de evolução que descreve perturbações na superfície livre depende crucialmente desta condição de contorno dinâmica.

A solução estática para este sistema de equações depende somente da variável z e é expressa na forma

$$\begin{aligned}T_s &= T_0-\frac{F}{K}(z-d),\\ \rho_s &= \rho_0[1+(\alpha F/K)(z-d)],\\ P_s &= P_a-g\rho_0[(z-d)+(\alpha\frac{F}{2K})(z-d)^2].\end{aligned} \tag{3.13}$$

O passo seguinte consiste em adimensionalizar as variáveis envolvidas no problema. Assim, adotamos d como unidade de comprimento, d^2/κ como unidade de tempo, $\rho_0 d^3$

como unidade de massa e Fd/K como unidade de temperatura. Deste procedimento resulta um sistema de equações adimensionais envolvendo somente três parâmetros adimensionais:

- número de Prandtl $\sigma = \mu/\rho_0\kappa$,
- número de Rayleigh $R = \rho_0 g\alpha F d^4/K\kappa\mu$
- número de Galileo $G = gd^3\rho_0^2/\mu^2$.

A equação de evolução não-linear que descreve a perturbação à solução estática (3.13) é obtida introduzindo-se uma expansão perturbativa. Primeiramente, definimos as variáveis lentas

$$\xi = \varepsilon(x - ct), \quad \zeta = \varepsilon^2 y, \quad \tau = \varepsilon^3 t \tag{3.14}$$

em função de ε, que é um parâmetro positivo e "pequeno". A expressão para a variável ζ reflete que os parâmetros da onda dependem fracamente da coordenada y. Notemos que as variáveis da equação (3.14) já estão adimensionalizadas, assim como as variáveis das equações que se seguirão. Expandimos, a seguir, todas as variáveis (já adimensionalizadas) em função do parâmetro ε na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
u &= \varepsilon^2\hat{u} = \varepsilon^2(u_0 + \varepsilon^1 u_1 + \varepsilon^2 u_2 + ...), \\
v &= \varepsilon^3\hat{v} = \varepsilon^3(v_0 + \varepsilon^1 v_1 + \varepsilon^2 v_2 + ...), \\
w &= \varepsilon^3\hat{w} = \varepsilon^3(w_0 + \varepsilon^1 w_1 + \varepsilon^2 w_2 + ...), \\
P - P_s &= \hat{p} = p_0 + \varepsilon^1 p_1 + \varepsilon^2 p_2 + ..., \\
T - T_s &= \hat{\theta} = \theta_0 + \varepsilon^1\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + ..., \\
\eta &= \varepsilon^2\hat{\eta} = \varepsilon^2(\eta_0 + \varepsilon^1\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + ...).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Introduzindo as expansões (3.15) nas equações (3.2) a (3.10) e na equação (3.12), expressando as derivadas em função das variáveis ξ, ζ, τ e empregando os parâmetros adimensionais σ, R e G, resulta o sistema de equações adimensionais abaixo, em que eliminamos o sinal $\hat{}$ de todos os campos por simplicidade de notação.

$$\varepsilon^1(u_\xi + \varepsilon^2 v_\zeta + w_z) = 0, \tag{3.16}$$

$$-\varepsilon^2 c u_\xi + \varepsilon^4 u_\tau + \varepsilon^4 u u_\xi + \varepsilon^6 v u_\zeta + \varepsilon^4 w u_z = -P_\xi + \sigma(\varepsilon^3 u_{\xi\xi} + \varepsilon^5 u_{\zeta\zeta} + \varepsilon^1 u_{zz}), \tag{3.17}$$

$$-\varepsilon^3 c v_\xi + \varepsilon^5 v_\tau + \varepsilon^5 u v_\xi + \varepsilon^7 v v_\zeta + \varepsilon^5 w v_z = -\varepsilon^1 P_\zeta + \sigma(\varepsilon^4 v_{\xi\xi} + \varepsilon^6 v_{\zeta\zeta} + \varepsilon^2 v_{zz}), \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} -\varepsilon^4 c w_\xi + \varepsilon^6 w_\tau + \varepsilon^6 u w_\xi + \varepsilon^8 v w_\zeta + \varepsilon^6 w w_z &= -P_z + \sigma(\varepsilon^5 w_{\xi\xi} + \varepsilon^7 w_{\zeta\zeta} + \varepsilon^3 w_{zz}) \\ &\quad -G\sigma^2 + R\sigma(T - T_0), \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$-\varepsilon c T_\xi + \varepsilon^3 T_\tau + \varepsilon^3 u T_\xi + \varepsilon^5 v T_\zeta + \varepsilon^3 w T_z = \varepsilon^2 T_{\xi\xi} + \varepsilon^4 T_{\zeta\zeta} + T_{zz}. \tag{3.20}$$

Em $z = 1 + \varepsilon^2 \eta$ temos:

$$-\varepsilon^1 c \eta_\xi + \varepsilon^3 \eta_\tau + \varepsilon^3 u \eta_\xi + \varepsilon^5 v \eta_\zeta = \varepsilon^1 w, \tag{3.21}$$

$$\varepsilon^1 (P - P_a)\eta_\xi - \sigma[\varepsilon^4 2 u_\xi \eta_\xi - u_z - \varepsilon^2 w_\xi + \varepsilon^6 (u_\zeta + v_\xi)\eta_\zeta] = 0 \tag{3.22}$$

$$P - P_a + \sigma[(\varepsilon^7 w_\xi + \varepsilon^5 u_z)\eta_\xi - \varepsilon^3 2 w_z + (\varepsilon^9 w_\zeta + \varepsilon^7 v_z)\eta_\zeta] = 0, \tag{3.23}$$

$$\varepsilon^3 (P - P_a)\eta_\zeta - \sigma[\varepsilon^6 (v_\xi + u_\zeta)\eta_\xi - \varepsilon^2 v_z - \varepsilon^4 w_\zeta + \varepsilon^8 2 v_\zeta \eta_\zeta] = 0, \tag{3.24}$$

$$\varepsilon^4 \eta_\xi T_\xi + \varepsilon^6 \eta_\zeta T_\zeta - T_z = N. \tag{3.25}$$

Em $z = 0$ obtemos:

$$u_z = 0, \quad v_z = 0, \quad w = 0, \quad \theta = 0. \tag{3.26}$$

Assim, cada ordem da expansão perturbativa das equações (3.2) a (3.12) pode ser resolvida em termos de uma função arbitrária e de condições de compatibilidade provindas das condições de contorno. Na ordem ε^0 obtemos

$$\theta_0 = 0, \qquad p_0 = 0. \tag{3.27}$$

Em ordem ε^1, introduzindo a função arbitrária $f(\xi, \zeta, \tau)$ temos a seguinte solução :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 0, \\ p_1 &= 0, \\ u_0 &= f(\xi, \zeta, \tau), \\ w_0 &= -z f_\xi(\xi, \zeta, \tau), \\ \eta_0 &= f(\xi, \zeta, \tau)/c. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Na ordem ε^2 temos

$$\begin{aligned} \theta_2 &= 0, \\ p_2 &= G\sigma^2\eta_0, \\ u_1 &= g(\xi,\zeta,\tau), \\ v_0 &= r(\xi,\zeta,\tau), \\ w_1 &= -zg_\xi(\xi,\zeta,\tau), \\ \eta_1 &= g(\xi,\zeta,\tau)/c \end{aligned} \tag{3.29}$$

em que $g(\xi,\zeta,\tau)$ e $r(\xi,\zeta,\tau)$ são funções arbitrárias. Nesta ordem, a equação (3.17) implica a seguinte condição de compatibilidade:

$$c^2 = G\sigma^2. \tag{3.30}$$

Em ordem ε^3, introduzindo as funções arbitrárias $h(\xi,\zeta,\tau)$ e $s(\xi,\zeta,\tau)$ obtemos a seguinte solução :

$$\begin{aligned} \theta_3 &= \frac{1}{6}f_\xi(z^3-3z), \\ p_3 &= \frac{1}{24}R\sigma f_\xi(z^4-6z^2+5) - 2\sigma f_\xi + G\sigma^2\eta_1, \\ u_2 &= \frac{1}{24}f_{\xi\xi}(z^6-15z^4+39z^2) + h(\xi,\zeta,\tau), \\ v_1 &= s(\xi,\zeta,\tau), \\ w_2 &= -\frac{1}{168}f_{\xi\xi\xi}(z^7-21z^5+91z^3) - (h_\xi + r_\zeta)z. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Substituindo os resultados expressos nas equações (3.27) a (3.31) na equação (3.22)(em ordem ε^2) obtemos o número de Rayleigh crítico R_c como condição de compatibilidade em ordem ε^3:

$$R_c = 30. \tag{3.32}$$

A condição dada pela equação (3.21) na superfície livre implica a seguinte relação entre as funções $f(\xi,\zeta,\tau), h(\xi,\zeta,\tau)$ e $r(\xi,\zeta,\tau)$:

$$ch_\xi - c^2\eta_{2\xi} = -f_\tau - 2ff_\xi - \frac{71}{168}cf_{\xi\xi\xi} - cr_\zeta. \tag{3.33}$$

Uma outra relação entre estas funções é obtida a partir das outras condições de contorno

$$r_\xi = f_\zeta. \tag{3.34}$$

Na ordem ε^4 os termos relevantes obtidos são expressos por

$$\begin{aligned}
\theta_4 &= -\frac{1}{120}cf_{\xi\xi}(z^5 - 10z^3 + 25z) + \frac{1}{6}g_\xi(z^3 - 3z), \\
p_4 &= G\sigma^2\eta_2 + \frac{1}{4}\sigma g_\xi(5z^4 - 30z^2 + 17) + 15\frac{\sigma f^2}{c^2} - \frac{1}{2}cf_{\xi\xi}(z^2 - 1) \\
&\quad -\frac{1}{24}c\sigma f_{\xi\xi}(z^6 - 15z^4 + 75z^2 - 61).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Nesta ordem, a condição expressa na equação (3.21) determina a relação

$$ch_\xi - c^2\eta_{2\xi} = f_\tau + \frac{30 + G\sigma}{G\sigma}ff_\xi + \frac{272\sigma - 15}{168}cf_{\xi\xi\xi}. \tag{3.36}$$

A compatibilidade entre as relações (3.33), (3.34) e (3.36) fornece-nos uma equação de evolução para a função $f(\xi, \zeta, \tau)$

$$\left[f_\tau + \frac{3(10 + G\sigma)}{2G\sigma}ff_\xi + c\left(\frac{17}{21}\sigma + \frac{1}{6}\right)f_{\xi\xi\xi}\right]_\xi = -\frac{1}{2}cf_{\zeta\zeta}. \tag{3.37}$$

Efetuando a mudança de variáveis:

$$\begin{aligned}
\xi &\to \Lambda^{-1}\xi, \\
\zeta &\to \left(\frac{c}{6\Lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\zeta, \\
f &\to -\frac{4G\sigma}{(10 + G\sigma)\Lambda}f,
\end{aligned} \tag{3.38}$$

em que

$$\Lambda = \left[c(\frac{17\sigma}{21} + \frac{1}{6})\right]^{-\frac{1}{3}}, \tag{3.39}$$

reescremos a equação (3.37) na forma

$$(f_\tau - 6ff_\xi + f_{\xi\xi\xi})_\xi + 3f_{\zeta\zeta} = 0, \tag{3.40}$$

conhecida como equação de Kadomtsev-Petviashvili(KP) [4].

A solução onda solitária da equação (3.37) é dada por [24]:

$$f(\xi,\zeta,\tau) = A\text{sech}^2\left\{\Lambda\left[\frac{1}{2}(m-l)\xi - \frac{1}{2}(m^2-l^2)\left(\frac{6}{\Lambda c}\right)^{\frac{1}{2}}\zeta - 2(m^3-l^3)\frac{\tau}{\Lambda}\right] - \beta\right\}, \quad (3.41)$$

em que m e l são números reais e

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{m}{l}\right), \\ A &= \frac{2G\sigma}{\Lambda(10+G\sigma)}(m-l)^2. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Se $l \neq -m$ a função (3.41) representa uma onda solitária obliqua, movendo-se numa direção que forma determinado ângulo com o eixo ξ. Quando ξ, ζ tendem a ∞, a função (3.41) não decresce ao longo da direção definida pela equação

$$\xi = (l+m)\left(\frac{6}{c\Lambda}\right)^{\frac{1}{2}}\zeta. \quad (3.43)$$

No entanto, se $l = -m$, a solução (3.41) corresponde a uma onda solitária de KdV. Percebemos, assim, que a solução onda solitária (3.41) da equação KP descreve uma onda cujo formato é o de uma canaleta.

Capítulo 4

A equação de Burgers e o sistema de Rayleigh-Bénard

Neste capítulo continuaremos estudando a propagação de perturbações da superfície livre do sistema de Rayleigh-Bénard (RB). Vamos considerar perturbações com comprimento de onda λ muito maior que a profundidade d do fluido, ou seja, perturbações de grande comprimento de onda. Para o estudo da propagação destas perturbações, empregaremos o "Reductive Perturbation Method" (RPM) [21] e um conjunto de variáveis lentas diferente daquele que utilizamos no capítulo anterior. Mostraremos [8, 9, 10] que, para um número de Rayleigh (R) diferente de 30, perturbações na superfície livre bidimensional do sistema de RB são governadas pela equação de Burgers em (2+1)dimensões [7]. Apresentaremos uma solução do tipo onda caminhante para esta equação.

Consideremos as equações e condições de contorno que caracterizam o sistema de RB na aproximação de Boussinesq :
equação da continuidade para um fluido incompressível

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0; \tag{4.1}$$

equação de movimento(equação de Navier-Stokes) para um fluido incompressível

$$\rho_0 D_t \vec{v} = -\vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g}; \tag{4.2}$$

equação de propagação do calor

$$D_t T = \kappa \nabla^2 T; \tag{4.3}$$

equação de estado

$$\rho = \rho_0[1 - \gamma(T - T_0)], \tag{4.4}$$

em que $D_t = \partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ é a derivada convectiva, $\vec{v} = (u, v, w)$ é o campo de velocidades do fluido e P simboliza a pressão. A viscosidade μ, a difusividade térmica κ e o coeficiente de expansão térmica γ são assumidos como constantes. T_0 e ρ_0 são a temperatura e a densidade de referência, respectivamente.

As condições de contorno na fronteira superior, $z = d + \eta(x, y, t)$, são definidas da seguinte forma [22]:
condição cinemática (ou de não evaporação) da superfície

$$\eta_t + u\eta_x + v\eta_y = w; \tag{4.5}$$

condição de continuidade das componentes normal e tangencial das tensões na superfície de um fluido viscoso

$$(P - P_a)\eta_x - \mu[2u_x\eta_x - (u_z + w_x) + (u_y + v_x)\eta_y] = 0, \tag{4.6}$$

$$P - P_a + \mu[(w_x + u_z)\eta_x - 2w_z + (w_y + v_z)\eta_y] = 0, \tag{4.7}$$

$$(P - P_a)\eta_y - \mu[(v_x + u_y)\eta_x - (v_z + w_y) + 2v_y\eta_y] = 0; \tag{4.8}$$

e a condição de fluxo normal de calor

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla} T = -F/K, \tag{4.9}$$

em que $\hat{n}$ é o versor normal à superfície livre expresso por

$$\hat{n} = (-\eta_x, -\eta_y, 1)/N, \qquad N = (1 + \eta_x^2 + \eta_y^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.10}$$

F representa o fluxo normal de calor, K é a condutividade térmica e P_a é a pressão constante exercida sobre a superfície livre.

Supomos que a resistência ao deslizamento de duas camadas do fluido é maior que a resistência ao movimento relativo entre o fluido e o plano $z = 0$ que delimita inferiormente o fluido [23]. Decorre desta suposição que o plano inferior seja considerado livre de tensões ("stress-free") e o campo de velocidades sobre esta fronteira seja caracterizado por:

$$w = 0, \quad v_z = 0, \quad e \quad u_z = 0. \tag{4.11}$$

Supomos, também, que a fronteira inferior do fluido é um condutor térmico perfeito e, consequentemente, a condição térmica nesta fronteira é dada por

$$T = T_b \tag{4.12}$$

A solução estática deste sistema de equações e condições de contorno é somente função da coordenada z e é expressa por

$$\begin{aligned} T_s &= T_0 - \left(\frac{F}{K}(z-d)\right), \\ \rho_s &= \rho_0 \left[1 + \left(\frac{\gamma F}{K}\right)(z-d)\right], \\ P_s &= P_a - g\rho_0 \left[(z-d) + \left(\gamma \frac{F}{2K}\right)(z-d)^2\right]. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Para adimensionalizar as variáveis envolvidas no problema, empregamos unidades determinadas a partir da solução estática (4.13). Assim adotamos d como unidade de comprimento, d^2/κ como unidade de tempo, $\rho_0 d^3$ como unidade de massa e Fd/K como unidade de temperatura. Introduzimos, também, três parâmetros adimensionais:

- número de Prandtl $\sigma = \mu/\rho_0\kappa$,
- número de Rayleigh $R = \rho_0 g\gamma F d^4/K\kappa\mu$
- número de Galileo $G = gd^3\rho_0^2/\mu^2$.

A seguir, definimos o seguinte conjunto de variáveis lentas [21], já na forma adimensional:

$$\xi = \varepsilon^{\alpha}(x - ct), \quad \zeta = \varepsilon^{\alpha+\frac{1}{2}} y, \quad \tau = \varepsilon^{\alpha+1} t, \tag{4.14}$$

em que ε é um parâmetro pequeno e α é um parâmetro que assume os valores $1/2$ ou 1.

Consideramos as seguintes expansões em ε dos campos adimensionais u, v, w, η, P e T :

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon^1 \hat{u} = \varepsilon^1(u_0 + \varepsilon^1 u_1 + \varepsilon^2 u_2 + ...), \\ v &= \varepsilon^{\frac{3}{2}} \hat{v} = \varepsilon^{\frac{3}{2}}(v_0 + \varepsilon^1 v_1 + \varepsilon^2 v_2 + ...), \\ w &= \varepsilon^{\alpha+1} \hat{w} = \varepsilon^{\alpha+1}(w_0 + \varepsilon^1 w_1 + \varepsilon^2 w_2 + ...), \\ P - P_s &= \varepsilon^{\alpha} \hat{p} = \varepsilon^{\alpha}(p_0 + \varepsilon^1 p_1 + \varepsilon^2 p_2 + ...), \\ T - T_s &= \varepsilon^{\alpha+1} \hat{\theta} = \varepsilon^{\alpha+1}(\theta_0 + \varepsilon^1 \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + ...), \\ \eta &= \varepsilon^1 \hat{\eta} = \varepsilon^1(\eta_0 + \varepsilon^1 \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + ...). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Introduzindo as expansões (4.15) e as variáveis lentas (4.14) nas equações (4.1) a (4.12), obtemos o seguinte conjunto de equações (em que eliminamos o sinal $\hat{}$ de todos os campos por simplicidade de notação):

$$\varepsilon^{\alpha}(u_{\xi} + \varepsilon^{1}v_{\zeta} + w_{z}) = 0, \tag{4.16}$$

$$-\varepsilon^{\alpha+1}cu_{\xi}+\varepsilon^{\alpha+2}u_{\tau}+\varepsilon^{\alpha+2}uu_{\xi}+\varepsilon^{\alpha+3}vu_{\zeta}+\varepsilon^{\alpha+2}wu_{z} = -\varepsilon^{\alpha}P_{\xi}+\sigma(\varepsilon^{2\alpha+1}u_{\xi\xi}+\varepsilon^{2\alpha+2}u_{\zeta\zeta}+\varepsilon^{1}u_{zz}), \tag{4.17}$$

$$-\varepsilon^{\alpha+1}cv_{\xi}+\varepsilon^{\alpha+2}v_{\tau}+\varepsilon^{\alpha+2}uv_{\xi}+\varepsilon^{\alpha+3}vv_{\zeta}+\varepsilon^{\alpha+2}wv_{z} = -\varepsilon^{\alpha}P_{\zeta}+\sigma(\varepsilon^{2\alpha+1}v_{\xi\xi}+\varepsilon^{2\alpha+2}v_{\zeta\zeta}+\varepsilon^{1}v_{zz}), \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} -\varepsilon^{2\alpha+1}cw_{\xi} \;+\; & \varepsilon^{2\alpha+1}w_{\tau}+\varepsilon^{2\alpha+2}uw_{\xi}+\varepsilon^{2\alpha+3}vw_{\zeta}+\varepsilon^{2\alpha+2}ww_{z} = \\ = \; & -P_{z}+\sigma(\varepsilon^{3\alpha+1}w_{\xi\xi}+\varepsilon^{3\alpha+2}w_{\zeta\zeta}+\varepsilon^{\alpha+1}w_{zz})-G\sigma^{2}+R\sigma(T-T_{0}), \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$-\varepsilon^{\alpha}cT_{\xi}+\varepsilon^{\alpha+1}T_{\tau}+\varepsilon^{\alpha+1}uT_{\xi}+\varepsilon^{\alpha+2}vT_{\zeta}+\varepsilon^{\alpha+1}wT_{z} = \varepsilon^{2\alpha}T_{\xi\xi}+\varepsilon^{2\alpha+1}T_{\zeta\zeta}+T_{zz}. \tag{4.20}$$

Em $z = 1 + \varepsilon^{1}\eta$, temos:

$$-\varepsilon^{\alpha}c\eta_{\xi}+\varepsilon^{\alpha+1}\eta_{\tau}+\varepsilon^{\alpha+1}u\eta_{\xi}+\varepsilon^{\alpha+2}v\eta_{\zeta} = \varepsilon^{\alpha}w, \tag{4.21}$$

$$\varepsilon^{\alpha}(P-P_{a})\eta_{\xi}-\sigma[\varepsilon^{2\alpha+1}2u_{\xi}\eta_{\xi}-u_{z}-\varepsilon^{2\alpha}w_{\xi}+\varepsilon^{2\alpha+2}(u_{\zeta}+v_{\xi})\eta_{\zeta}] = 0, \tag{4.22}$$

$$P-P_{a}+\sigma[(\varepsilon^{3\alpha+2}w_{\xi}+\varepsilon^{\alpha+2}u_{z})\eta_{\xi}-\varepsilon^{\alpha+1}2w_{z}+(\varepsilon^{2\alpha+3}w_{\zeta}+\varepsilon^{\alpha+3}v_{z})\eta_{\zeta}] = 0, \tag{4.23}$$

$$\varepsilon^{\alpha}(P-P_{a})\eta_{\zeta}-\sigma[\varepsilon^{2\alpha+1}(v_{\xi}+u_{\zeta})\eta_{\xi}-v_{z}-\varepsilon^{2\alpha}w_{\zeta}+\varepsilon^{2\alpha+2}2v_{\zeta}\eta_{\zeta}] = 0, \tag{4.24}$$

$$\varepsilon^{2\alpha+1}\eta_{\xi}T_{\xi}+\varepsilon^{2\alpha+2}\eta_{\zeta}T_{\zeta}-T_{z} = N. \tag{4.25}$$

Em $z = 0$, temos:

$$u_{z} = 0, \quad v_{z} = 0, \quad w = 0, \quad \theta = 0. \tag{4.26}$$

Ordem a ordem em ε, podemos obter soluções para este conjunto. Ao longo do processo de resolução destas equações, tratamos somente de potências inteiras de ε. Embora α assuma os valores $1/2$ e 1, não precisamos considerar as ordens inteiras de ε separadamente das ordens semi-inteiras. Por exemplo, para a primeira ordem contribuem, além dos termos

proporcionais a ε^1, os termos que contenham ε^α e $\varepsilon^{\alpha+1}$. Para a segunda ordem contribuem os termos proporcionais a ε^2, $\varepsilon^{\alpha+1}$, $\varepsilon^{2\alpha}$ e $\varepsilon^{2\alpha+1}$. Assim, dependendo do valor de α, a primeira ordem conterá termos proporcionais a $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$, a segunda ordem termos proporcionais a $\varepsilon^{\frac{3}{2}}$, etc.

Em ordem mais baixa, a solução é expressa na forma

$$\begin{aligned} u_0 &= f(\xi,\zeta,\tau), \\ w_0 &= -z f_\xi(\xi,\zeta,\tau), \\ p_0 &= \varepsilon^{1-\alpha}\frac{G\sigma^2}{c^2} f(\xi,\zeta,\tau), \\ \eta_0 &= \frac{1}{c} f(\xi,\zeta,\tau), \end{aligned} \tag{4.27}$$

com $f(\xi,\zeta,\tau)$ uma função arbitrária.

Na próxima ordem, obtemos a seguinte solução

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{1}{6}(z^3-3z) f_\xi, \\ v_0 &= h(\xi,\zeta,\tau), \\ u_1 &= g(\xi,\zeta,\tau) + \varepsilon^{2\alpha-1}\left[\frac{R}{720}(z^6-15z^4+75z^2)-\frac{3}{2}z^2\right] f_{\xi\xi} \\ &- \varepsilon^{3\alpha-1}\left[\frac{c}{24\sigma}(z^4-6z^2)\right] f_{\xi\xi\xi} + \varepsilon^\alpha\left[G\sigma\eta_{1\xi}+\frac{R}{c^2} f f_\xi\right]\frac{z^2}{2}, \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} w_1 &= -z(g_\xi + h_\zeta) \\ &- \varepsilon^{2\alpha-1}\left[\frac{R}{5040}(z^7-21z^5+175z^3)-\frac{z^3}{2}\right] f_{\xi\xi\xi} \\ &+ \varepsilon^{3\alpha-1}\left[\frac{c}{120\sigma}(z^5-10z^3)\right] f_{\xi\xi\xi\xi} - \varepsilon^\alpha\left[G\sigma\eta_{1\xi\xi}+\frac{R}{c^2}(f_\xi f_\xi + f f_{\xi\xi})\right]\frac{z^3}{6}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1 &= \left[\frac{R\sigma}{24}(z^4-6z^2+5)-2\sigma\right] f_\xi \\ &- \varepsilon^\alpha\left[\frac{c}{2}(z^2-1)\right] f_{\xi\xi} + \varepsilon^{1-\alpha}\left[G\sigma^2\eta_1+\frac{R\sigma}{2}\eta_0^2\right], \end{aligned}$$

em que as funções $g(\xi,\zeta,\tau)$ e $h(\xi,\zeta,\tau)$ são funções arbitrárias. Nesta ordem, a condição (4.21) na fronteira livre é expressa pela equação :

$$c^2\eta_{1\xi} - c g_\xi = f_\tau + 2 f f_\xi + \varepsilon^{2\alpha-1}\left[\frac{31}{1008}cR - \frac{c}{2}\right] f_{\xi\xi\xi} + c h_\zeta. \tag{4.29}$$

Ainda nesta ordem, obtemos a seguinte condição de compatibilidade que relaciona a velocidade c aos parâmetros G e σ:

$$c^2 = G\sigma^2. \tag{4.30}$$

Na ordem seguinte, determinamos θ_1 e p_2 em termos de $f(\xi,\zeta,\tau)$:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \varepsilon^{\alpha-1}\left[\frac{c}{120}(z^5-10z^3+25z)\right]f_{\xi\xi}, \\ p_2 &= -\varepsilon^{\alpha-1}\left[\frac{cR\sigma}{720}(z^6-15z^4+75z^2-61)+\frac{c}{2}(z^2-1)\right]f_{\xi\xi}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

As condições de fronteira fornecem-nos a equação

$$\begin{aligned} -(c^2\eta_{1\xi}-cg_\xi) &= f_\tau+\left[1+\frac{R}{G\sigma}\right]ff_\xi-\varepsilon^{\alpha-1}\left[4-\frac{2R}{15}\right]\sigma f_{\xi\xi} \\ &\quad+\varepsilon^{2\alpha-1}\left[\frac{7}{6}+\frac{272}{5040}R\sigma-\frac{155}{5040}R\right]cf_{\xi\xi\xi}, \end{aligned} \tag{4.32}$$

e a seguinte relação entre as funções $f(\xi,\zeta,\tau)$ e $h(\xi,\zeta,\tau)$:

$$f_\zeta = h_\xi. \tag{4.33}$$

Da relação de compatibilidade entre as equações (4.29), (4.32) e (4.33) resulta uma equação de evolução para a função $f(\xi,\zeta,\tau)$:

$$\left[f_\tau+\left(\frac{3G\sigma+R}{2G\sigma}\right)ff_\xi-\varepsilon^{\alpha-1}\nu f_{\xi\xi}+\varepsilon^{2\alpha-1}\left(\frac{1}{6}+\frac{17}{630}R\sigma\right)cf_{\xi\xi\xi}\right]_\xi=-\frac{c}{2}f_{\zeta\zeta}, \tag{4.34}$$

em que

$$\nu = 2\sigma-\frac{R\sigma}{15}. \tag{4.35}$$

Consideremos o sistema em que R está no intervalo R menor que 30. Nesta situação, ν é positivo. Escolhendo o parâmetro α igual a 1 e não considerando termos proporcionais a ε^1, a equação de evolução (4.34) assume a seguinte forma:

$$\left[f_\tau+\left(\frac{3G\sigma+R}{2G\sigma}\right)ff_\xi-\nu f_{\xi\xi}\right]_\xi=-\frac{c}{2}f_{\zeta\zeta}. \tag{4.36}$$

Por meio da transformação

$$f\to\frac{2G\sigma}{3G\sigma+R}f, \tag{4.37}$$

reescrevemos a equação (4.36) na forma

$$[f_\tau+ff_\xi-\nu f_{\xi\xi}]_\xi=-\frac{c}{2}f_{\zeta\zeta}. \tag{4.38}$$

Esta é a equação de Burgers em (2+1) dimensões [7]. No caso limite em que a superfície livre é unidimensional, $f(\xi,\tau)$ não depende de ζ e a equação (4.38) assume a forma usual da equação de Burgers em (1+1) dimensões [14].

Uma solução na forma de onda progressiva para a equação (4.36) é expressa por

$$f(\Lambda) = f(A\xi + B\zeta - C\tau). \tag{4.39}$$

A forma explicita desta solução é a seguinte:

$$f(\Lambda) = \frac{(3G\sigma + R)(2C - cB^2)}{4G\sigma}\left\{1 - \tanh\left[\frac{2C - cB^2}{4\nu}(\Lambda - \Lambda_0)\right]\right\}. \tag{4.40}$$

As constantes A, B, C e Λ_0 dependem das condições iniciais. A função $f(\Lambda)$ representa um kink quase-unidimensional, que pode ser considerado como uma espécie de "Bore" [25]. A condição $\nu > 0$ corresponde a um sistema predominantemente dissipativo, no qual a energia fornecida ao sistema é menor que a dissipada pela viscosidade.

Se o fluido não é aquecido, a equação (4.34) continua descrevendo a evolução das perturbações da superfície livre. No entanto, a relação (4.35) entre ν, σ e G assume a forma

$$\nu = 2\sigma. \tag{4.41}$$

À medida que aumentamos o fluxo de calor, R cresce, se aproxima do valor crítico R=30, ν tende a zero e o sistema torna-se gradativamente menos dissipativo. Em R=30, ν se anula e o sistema apresenta um balanço entre a energia fornecida sob a forma de calor e a dissipada pela viscosidade. Nesta situação, o sistema torna-se predominantemente dispersivo. Assim, para $\nu = 0$, escolhendo $\alpha = 1/2$ e redefinindo convenientemente as variáveis ξ, ζ e τ, a equação (4.34) assume a seguinte forma:

$$(f_\tau - 6ff_\xi + f_{\xi\xi\xi})_\xi = -3f_{\zeta\zeta}. \tag{4.42}$$

Esta é a equação de Kadomtsev-Petviashvili(KP) que obtivemos no capítulo anterior.

Se continuarmos aumentando o fluxo de calor, R assumirá valores maiores que 30 e ν tornar-se-á negativo. O sistema apresentará carácter antidissipativo, ou seja, a energia fornecida ao sistema será maior que a dissipada pela viscosidade. A evolução das perturbações da superfície livre será descrita pela equação de Burgers em (2+1) dimensões e a

solução expressa em (4.40) representará um anti-kink quase-unidimensional propagando-se no sentido oposto ao do kink. Observemos que esta solução não faz sentido para um valor de R arbitrariamente grande, pois para esta situação, outros fenômenos que não foram levados em conta em nosso formalismo devem ser considerados.

Vamos discutir agora nossas escolhas para o valor do parâmetro α. Quando $\nu \neq 0$, na equação (4.34) o termo proporcional à segunda derivada é de ordem menor que o termo que contém a terceira derivada. Escolhendo α=1, só o termo proporcional à segunda derivada contribui para a equação de evolução. Para ν=0, se α=1/2, o termo que contém a terceira derivada é que contribuirá para a equação. Compreendemos, assim, o motivo para considerarmos os casos α=1/2 e α=1.

Finalmente, é interessante que comentemos o seguinte fato. A transformação de Hopf-Cole [14], expressa na forma

$$f = -2\nu \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \Phi(\xi, \tau) \tag{4.43}$$

"transforma" a equação de Burgers em (1+1) dimensões na equação do calor. Para o caso em (2+1) dimensões , a transformação de Hopf-Cole relaciona a equação (4.38) à seguinte equação não-linear:

$$\left[\frac{\Phi_\tau - \nu \Phi_{\xi\xi}}{\Phi}\right]_\xi = -\frac{c}{2}[\ln \Phi]_{\zeta\zeta}, \tag{4.44}$$

em que Φ é função das variáveis ξ, ζ e τ. Verificamos que esta transformação não associa a equação de Burgers (4.38) à equação do calor em (2+1) dimensões . Isto não nos surpreende, pois na equação do calor em (2+1) dimensões as coordenadas ξ e ζ estão em "mesmo pé de igualdade", enquanto na equação (4.38) consideramos ζ uma coordenada "fraca".

Resumindo, neste capítulo, mostramos que a evolução das perturbações na superfície livre do sistema de RB, para um fluido viscoso e para $R \neq 30$, é descrita pela equação de Burgers em (2+1) dimensões . Apresentamos uma solução do tipo onda caminhante desta equação. A solução representa um kink. Para $R = 30$, o sistema apresenta um balanço entre a energia dissipada pela viscosidade e a fornecida ao sistema sob a forma de calor. Nesta situação, o sistema manifesta carácter predominantemente dispersivo e as perturbações da superfície são governadas pela equação de Kadomtsev-Petviashvili(KP).

Capítulo 5

Viscosidade dependente da temperatura e as equações de KP e de Burgers

Nos capítulos anteriores estudamos o comportamento das perturbações de grande comprimento de onda na superfície de um fluido viscoso e aquecido por baixo. A perturbação é descrita pela equação de Burgers quando o sistema apresenta o número de Rayleigh (R) diferente de 30. Para o caso em que o número de Rayleigh (R) do sistema é igual a 30, a perturbação é descrita pela equação de Kadomtsev-Petviashvili(KP). Assim, o número crítico $R = 30$ identifica a situação na qual o sistema apresenta um balanço entre a dissipação de energia devido à viscosidade e a energia fornecida na forma de calor.

Neste capítulo, estudaremos o efeito causado neste sistema por uma dependência da viscosidade com a temperatura. Investigaremos se o sistema ainda apresenta uma configuração na qual ocorra um balanço de energia. Mostraremos que esta configuração existe, associada porém a um novo número crítico. Verificaremos que a dependência da viscosidade com a temperatura, além de modificar o número crítico, altera também os coeficientes das equações de evolução, dadas pelas equações de KP e Burgers.

Em geral, a viscosidade de um fluido depende da temperatura . Sabemos que esta dependência pode ser relevante nos fenômenos convectivos, modificando substancialmente o padrão das células convectivas [26]. Embora estejamos estudando um fenômeno que ocorre abaixo do limiar de convecção [27], estamos interessados em investigar os efeitos da dependência da viscosidade com a temperatura também neste fenômeno. Consideramos a

seguinte dependência entre a viscosidade μ e a temperatura T :

$$\mu = \mu_a \exp\left[-\gamma(T - T_a)\right], \tag{5.1}$$

em que γ é uma constante e μ_a, T_a são valores de referência para a viscosidade e temperatura, respectivamente. A equação de estado que expressa a dependência entre a densidade ρ e a temperatura T é expressa por

$$\rho = \rho_a[1 - \alpha(T - T_a)], \tag{5.2}$$

na qual o coeficiente de expansão térmica α é assumido como constante e ρ_a é a densidade de referência. Denotamos por $\vec{v} = (u, v, w)$ o campo de velocidades do fluido, enquanto P simboliza a pressão. A difusividade térmica é denotada por κ, K é a condutividade térmica e P_a é a pressão constante exercida sobre a superfície livre. Na aproximação de Boussinesq e empregando a notação anterior, as equações que descrevem o sistema de Rayleigh-Bénard(RB), cujo fluido apresenta viscosidade dependente da temperatura, são expressas na seguinte forma:
equação da continuidade para um fluido incompressível

$$u_x + v_y + w_z = 0, \tag{5.3}$$

equação de movimento (equação de Navier-Stokes) para um fluido incompressível:

$$\begin{aligned} \rho_a(u_t + uu_x + vu_y + wu_z) = & - P_x + 2\mu_x u_x + \mu_z(u_z + w_x) \\ & + \mu_y(u_y + v_x) + \mu(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} \rho_a(v_t + uv_x + vv_y + wv_z) = & - P_y + \mu_x(u_y + v_x) \\ & + 2\mu_y v_y + \mu_z(v_z + w_y) \\ & + \mu(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}), \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} \rho_a(w_t + uw_x + vw_y + ww_z) = & - P_z + \mu_x(u_z + w_x) \\ & + \mu_y(w_y + v_z) + 2\mu_z w_z \\ & + \mu(w_{xx} + w_{yy} + w_{zz}) - \rho g, \end{aligned} \tag{5.6}$$

equação de propagação do calor

$$T_t + uT_x + vT_y + wT_z = \kappa(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}). \tag{5.7}$$

As condições de contorno na fronteira superior, $z = d + \eta(x, y, t)$, são definidas da seguinte forma [22]:
condição cinemática (ou de não evaporação) da superfície

$$\eta_t + u\eta_x + v\eta_y = w, \tag{5.8}$$

condição de continuidade das componentes normal e tangencial das tensões na superfície de um fluido viscoso

$$(P - P_a)\eta_x - \mu[2u_x\eta_x - (u_z + w_x) + (u_y + v_x)\eta_y] = 0, \tag{5.9}$$

$$P - P_a + \mu[(w_x + u_z)\eta_x - 2w_z + (w_y + v_z)\eta_y] = 0, \tag{5.10}$$

$$(P - P_a)\eta_y - \mu[(v_x + u_y)\eta_x - (v_z + w_y) + 2v_y\eta_y] = 0 \tag{5.11}$$

e a condição de fluxo normal de calor

$$\eta_x T_x + \eta_y T_y + T_z = \frac{NF}{K}, \tag{5.12}$$

em que $N = (1 + \eta_x^2 + \eta_y^2)^{\frac{1}{2}}$ e F representa o fluxo normal de calor.

Supomos que a resistência ao deslizamento entre duas camadas do fluido seja maior que a resistência entre o fluido e o plano $z = 0$ que delimita inferiormente o fluido [23]. Decorre desta suposição que o plano inferior seja considerado livre de tensões ("stress-free"), e o campo de velocidades sobre esta fronteira seja caracterizado por:

$$w = 0, \quad v_z = 0, \quad e \quad u_z = 0. \tag{5.13}$$

Supomos que esta fronteira é um condutor térmico perfeito e a condição térmica correspondente é expressa por:

$$T(0) = T_b. \tag{5.14}$$

A solução estática para este sistema de equações depende somente de variável z e é expressa na forma

$$\begin{aligned} T_s &= T_a - \frac{F}{K}(z-d), \\ \rho_s &= \rho_a\left[1+(\alpha\frac{F}{K})(z-d)\right], \\ \mu_s &= \mu_a \exp\left[\left(\frac{\gamma F}{K}\right)(z-d)\right], \\ P_s &= P_a - g\rho_a\left[(z-d)+(\alpha\frac{F}{2K})(z-d)^2\right]. \end{aligned} \tag{5.15}$$

O passo seguinte consiste em adimensionalizar as variáveis envolvidas neste sistema em função de unidades determinadas a partir da solução estática (5.15). Assim adotamos d como unidade de comprimento, d^2/κ como unidade de tempo, $\rho_a d^3$ como unidade de massa e Fd/K como unidade de temperatura. Deste procedimento resulta um sistema de equações adimensionais envolvendo sómente quatro parâmetros adimensionais:

- número de Prandtl $\sigma = \mu_a/\rho_a\kappa$,
- número de Rayleigh $R = \rho_a g\alpha F d^4/K\kappa\mu_a$
- número de Rayleigh "modificado" RQ com Q definido por: $Q = \gamma/\alpha$
- número de Galileo $G = gd^3\rho_a^2/\mu_a^2$.

Estudamos o comportamento das perturbações à solução estática do sistema empregando o "Reductive Perturbation Method"(RPM). Nosso procedimento consiste primeiramente em definir as "variáveis lentas"

$$\begin{aligned} \xi &= \varepsilon(x-ct), \\ \zeta &= \varepsilon^{\frac{3}{2}}y, \\ \tau &= \varepsilon^2 t, \end{aligned} \tag{5.16}$$

em função de ε, que é um parâmetro positivo e "pequeno". Observemos que as variáveis x, y e t na definição anterior já estão adimensionalizadas, assim como as variáveis das equações que se seguirão. Expandimos, a seguir, as variáveis que descrevem o estado do sistema em função do parâmetro ε na seguinte forma:

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon^1\hat{u} = \varepsilon^1(u_0 + \varepsilon^1 u_1 + \varepsilon^2 u_2 + ...), \\ v &= \varepsilon^{\frac{3}{2}}\hat{v} = \varepsilon^{\frac{3}{2}}(v_0 + \varepsilon^1 v_1 + \varepsilon^2 v_2 + ...), \\ w &= \varepsilon^2\hat{w} = \varepsilon^2(w_0 + \varepsilon^1 w_1 + \varepsilon^2 w_2 + ...), \\ P - P_s &= \varepsilon^1\hat{p} = \varepsilon^1(p_0 + \varepsilon^1 p_1 + \varepsilon^2 p_2 + ...), \\ T - T_s &= \varepsilon^2\hat{\theta} = \varepsilon^2(\theta_0 + \varepsilon^1\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + ...), \\ \eta &= \varepsilon^1\hat{\eta} = \varepsilon^1(\eta_0 + \varepsilon^1\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + ...). \end{aligned} \tag{5.17}$$

Empregando estas expansões e a definição de "variáveis lentas", podemos reescrever o sistema de equações (5.1)-(5.14) na forma indicada abaixo, em que eliminamos o sinal $\hat{}$ de todos os campos por simplicidade de notação:

$$u_\xi + \varepsilon v_\zeta + w_z = 0, \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned} -c\varepsilon u_\xi + \varepsilon^2(u_\tau + uu_\xi + wu_z) + \varepsilon^3 vu_\zeta &= -P_\xi + \sigma[2\varepsilon^2\mu_\xi u_\xi + \varepsilon^3\mu_\zeta(u_\zeta + v_\xi)] \\ &\quad +\sigma[\mu_z(u_z + \varepsilon^2 w_\xi)] \\ &\quad +\sigma[\mu(\varepsilon^2 u_{\xi\xi} + \varepsilon^3 u_{\zeta\zeta} + u_{zz})], \end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned} -c\varepsilon v_\xi + \varepsilon^2(v_\tau + uv_\xi + wv_z) + \varepsilon^3 vv_\zeta &= -P_\zeta + \sigma[2\varepsilon^3\mu_\zeta v_\zeta + \mu_z(v_z + \varepsilon^2 w_\zeta)] \\ &\quad +\sigma[\varepsilon^2\mu_\xi(v_\xi + u_\zeta)] \\ &\quad +\sigma[\mu(\varepsilon^2 v_{\xi\xi} + \varepsilon^3 v_{\zeta\zeta} + v_{zz})], \end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned} -c\varepsilon^3 w_\xi + \varepsilon^4(w_\tau + uw_\xi + ww_z) + \varepsilon^5 vw_\zeta &= -P_z + \sigma[\mu_\xi(\varepsilon^2 u_z + \varepsilon^4 w_\xi) + \mu_\zeta(\varepsilon^5 w_\zeta + \varepsilon^3 v_z)] \\ &\quad +\sigma[\varepsilon^2 2\mu_z w_z + \mu(\varepsilon^4 w_{\xi\xi} + \varepsilon^5 w_{\zeta\zeta} + \varepsilon^2 w_{zz})] \\ &\quad +R(T - T_a) - G\sigma^2, \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$-c\varepsilon T_\xi + \varepsilon^2 T_\tau + \varepsilon^2 uT_\xi + \varepsilon^3 vT_\zeta + \varepsilon^2 wT_z = \varepsilon^2 T_{\xi\xi} + \varepsilon^3 T_{\zeta\zeta} + T_{zz}, \tag{5.22}$$

$$\mu = \exp\left[-\frac{RQ}{G\sigma}(T - T_a)\right]. \tag{5.23}$$

Em $z = 1 + \varepsilon\eta$:

$$-c\varepsilon\eta_\xi + \varepsilon^2\eta_\tau + \varepsilon^2 u\eta_\xi + \varepsilon^3 v\eta_\zeta = \varepsilon w, \tag{5.24}$$

$$\varepsilon(P-P_a)\eta_\xi - \mu\sigma[\varepsilon^3 2u_\xi\eta_\xi - u_z - \varepsilon^2 w_\xi + \varepsilon^4(u_\zeta + v_\xi)\eta_\zeta] = 0, \tag{5.25}$$

$$(P-P_a) + \mu\sigma[\varepsilon^5 w_\xi\eta_\xi + \varepsilon^3 u_z\eta_\xi - \varepsilon^2 2w_z + (\varepsilon^6 w_\zeta + \varepsilon^4 v_z)\eta_\zeta] = 0, \tag{5.26}$$

$$\varepsilon(P-P_a)\eta_\zeta - \mu\sigma[\varepsilon^3(v_\xi + u_\zeta)\eta_\xi + \varepsilon^4 2v_\zeta\eta_\zeta - v_z - \varepsilon^2 w_\zeta] = 0, \tag{5.27}$$

$$\varepsilon^3 T_\xi\eta_\xi + \varepsilon^4 T_\zeta\eta_\zeta - T_z = N. \tag{5.28}$$

Em $z = 0$

$$w = 0, \qquad u_z = 0, \qquad v_z = 0,$$
$$\theta = 0. \tag{5.29}$$

Ordem a ordem podemos resolver estas equações. Em ordem mais baixa, a solução é dada por

$$\begin{aligned} u_0 &= f(\xi,\zeta,\tau), \\ w_0 &= -zf_\xi(\xi,\zeta,\tau), \\ p_0 &= \frac{G\sigma^2}{c}f(\xi,\zeta,\tau), \\ \eta_0 &= \frac{1}{c}f(\xi,\zeta,\tau). \end{aligned} \tag{5.30}$$

em que $f(\xi,\zeta,\tau)$ é uma função arbitrária. Na proxima ordem obtemos:

$$\begin{aligned} u_1 &= h(\xi,\zeta,\tau), \\ v_0 &= g(\xi,\zeta,\tau), \\ w_1 &= -z(h_\xi + g_\zeta), \\ p_1 &= \frac{R\sigma}{24}(z^4 - 6z^2 + 30)f_\xi + G\sigma^2\eta_1 + \frac{R\sigma}{2c^2}f^2 - 2\sigma\mu_s f_\xi, \\ \theta_0 &= \frac{f_\xi}{6}(z^3 - 3z), \end{aligned} \tag{5.31}$$

em que $g(\xi,\zeta,\tau)$ e $h(\xi,\zeta,\tau)$ são funções arbitrárias. Nesta ordem, obtemos a partir da equação (5.25) a seguinte condição de compatibilidade:

$$c^2 = G\sigma^2. \tag{5.32}$$

A condição sobre a superfície livre (5.24) pode ser expressa pela equação :

$$-h_\xi - g_\zeta + c\eta_{1\xi} = \frac{1}{c}f_\tau + \frac{2}{c}ff_\xi. \tag{5.33}$$

Os resultados relevantes na ordem seguinte são:

a equação proveniente da condição sobre a superfície livre (5.24):

$$\left\{-\frac{4G\sigma}{RQ}[1-\exp(-RQ/G\sigma)]+\frac{2R}{15}\right\}f_{\xi\xi}+\left(\frac{3}{\sigma}+\frac{R}{c^2}\right)ff_{\xi}+\frac{2}{\sigma}f_{\tau}=-\frac{c}{\sigma}g_{\zeta} \tag{5.34}$$

e o vínculo existente entre as funções $f(\xi,\zeta,\tau)$ e $g(\xi,\zeta,\tau)$:

$$f_{\zeta}=g_{\xi}. \tag{5.35}$$

A condição de compatibilidade entre as equações (5.33), (5.34) e (5.35) resulta na seguinte equação de evolução para $f(\xi,\zeta,\tau)$:

$$\left[f_{\tau}+\frac{3G\sigma+R}{2G\sigma}ff_{\xi}+\nu f_{\xi\xi}\right]_{\xi}=-\frac{c}{2}f_{\zeta\zeta} \tag{5.36}$$

em que :

$$\nu=\frac{R\sigma}{15}-\frac{2G\sigma^2}{RQ}[1-\exp(-RQ/G\sigma)]. \tag{5.37}$$

Esta é a equação de Burgers em (2+1) dimensões [7].

No limite $Q\to 0$, ou seja, quando a viscosidade pode ser considerada constante (não dependente da temperatura), a equação (5.36) e o coeficiente ν (5.37) assumem as formas obtidas anteriormente em (4.35) e (4.36). Assim, uma das consequencias de introduzirmos a dependência da viscosidade com a temperatura consiste em modificarmos o coeficiente do termo dissipativo, tornando-o menor do que o coeficiente para o caso da viscosidade considerada como não dependente da temperatura.

Num determinado número de Rayleigh, denominado Rayleigh crítico (R_c), o coeficiente dissipativo ν pode se anular. A condição para a dissipação nula é dada pela equação algébrica transcendental:

$$\frac{R}{30}=\frac{G\sigma}{RQ}[1-\exp(-RQ/G\sigma)]. \tag{5.38}$$

Observemos que o lado direito desta equação é estritamente menor que 1. Logo, o número de Rayleigh crítico será menor que 30. Assim, ao considerarmos a dependência viscosidade-temperatura, diminuímos o número de Rayleigh crítico. Quando o número de Rayleigh do sistema assume o valor crítico, as perturbações de grande comprimento de onda que se propagam na superfície livre são descritas pela equação de Kadomtsev-Petviashvili(KP) (3.40).

Consideremos, finalmente, o caso limite em que $G\sigma \gg RQ$. A partir da expressão (5.38), podemos reescrever a condição de dissipação nula na seguinte forma:

$$R = 30(1 - RQ/2G\sigma). \tag{5.39}$$

Neste caso a correção para o número crítico $R_c = 30$ é pequena. Esta situação corresponde a fluidos cuja viscosidade depende "fracamente" da temperatura. Por outro lado, fluidos cuja viscosidade depende "fortemente" da temperatura, apresentam $Q \gg 1$ e neste caso, as correções ao número crítico $R_c = 30$ são significativas.

Estas correções podem ser importantes e deverão ser levadas em conta na elaboração de experiências para se detectar as ondas não-lineares previstas pela teoria.

Capítulo 6

Processos difusivos no sistema de Rayleigh-Bénard

6.1 Instabilidade difusiva no limiar da convecção

O movimento convectivo no sistema de Rayleigh-Bénard tem sido objeto de investigações ao longo dos anos [3, 27]. Para determinadas condições de contorno térmicas e mecânicas podemos determinar, por meio da análise linear da estabilidade, o número de Rayleigh crítico (R_c) para o início do movimento convectivo[27]. Além deste resultado, é possível estabelecer um comprimento de onda característico (λ_c) relacionado às dimensões das células convectivas do sistema. Ressaltamos que tanto R_c como λ_c dependem fortemente das condições de contorno do sistema. Para certas condições, λ_c pode ser infinito e neste caso, empregamos os conceitos da teoria das ondas não-lineares no limite de grandes comprimentos de onda para estudar a instabilidade em questão. Assim, utilizando o "Reductive Perturbation Method" (RPM) [21], obtemos não somente R_c para o limiar da convecção (já conhecido por meio da análise linear, neste caso: $R_c = 320$ [27]) como também a equação de evolução das perturbações da superfície, ou da temperatura, no ponto crítico para o limiar da convecção.

Nos capítulos anteriores, empregamos o RPM e obtivemos equações que descrevem ondas. Neste capítulo, o fenômeno que estudamos não apresenta comportamento ondulatório. Apesar disto, o RPM pode ser utilizado, pois ele não está restrito à descrição de fenômenos puramente ondulatórios. De fato, o fenômeno que descrevemos é um fenômeno difusivo governado por uma equação não-linear que foi estudada por Zel'dovich e Raizer [28] num outro

contexto. Para uma perturbação negativa da superfície, ou um resfriamento do sistema, prevemos que a solução desta equação não-linear de difusão descreve frentes "abruptas" que se propagam no sistema. Para uma perturbação "positiva" da superfície, ou um aquecimento, nossa abordagem não possibilita descrever o comportamento do sistema, pois ele entra no regime convectivo. Chapman e Proctor[29] empregaram um procedimento semelhante ao nosso para o estudo deste sistema, mas com a superfície superior indeformável e $R > 320$.

Consideremos um fluido viscoso que, quando em repouso, está limitado entre os planos $z = 0$ e $z = d$. Para descrevermos o estado do fluido utilizamos a aproximação de Bousssinesq. A superfície que delimita inferiormente o fluido é um plano, que idealizamos como sendo um isolante perfeito, que satisfaz a condição de contorno rígido ("no slip"). A superfície que delimita superiormente o fluido é livre, deformável e sujeita a um fluxo constante de calor. O fluido não é limitado na direção horizontal. Ele está sujeito à ação gravitacional com $\vec{g} = -g\hat{e}_z$. Consideraremos somente os efeitos do empuxo, e desprezaremos a contribuição da tensão superficial. O campo de velocidades, denotamos por $\vec{v} = (u, w)$. Denotamos por P a pressão, por T a temperatura e por ρ a densidade. A densidade apresenta uma dependência linear com a temperatura:

$$\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)] \tag{6.1}$$

em que α é a constante de expansão térmica e T_0 e ρ_0 são valores de referência para T e ρ, respectivamente. As equações que descrevem o fluido são expressas por:
equação da continuidade para um fluido incompressível

$$u_x + w_z = 0, \tag{6.2}$$

equação de movimento (equação de Navier-Stokes) para um fluido incompressível

$$\rho_0(u_t + uu_x + wu_z) = -P_x + \mu(u_{xx} + u_{zz}), \tag{6.3}$$

$$\rho_0(w_t + uw_x + ww_z) = -P_z + \mu(w_{xx} + w_{zz}) - \rho g, \tag{6.4}$$

equação de propagação do calor

$$T_t + uT_x + wT_z = \kappa(T_{xx} + T_{zz}). \tag{6.5}$$

Nas equações anteriores μ representa a viscosidade, κ a difusividade térmica e supomos que μ e κ são constantes. As condições de contorno na fronteira superior, $z = d + \eta(x,t)$, são definidas da seguinte forma [22]:
condição cinemática (ou de não evaporação) da superfície

$$\eta_t + u\eta_x = w, \tag{6.6}$$

condição de continuidade das componentes normal e tangencial das tensões na superfície de um fluido viscoso

$$P - P_a - \frac{2\mu}{N^2}\left[w_z + u_x(\eta_x)^2 - \eta_x(u_z + w_x)\right] = 0, \tag{6.7}$$

$$[1 - (\eta_x)^2](u_z + w_x) + 2\eta_x(w_z - u_x) = 0, \tag{6.8}$$

condição de fluxo normal de calor

$$\eta_x T_x - T_z = \frac{F}{K}, \tag{6.9}$$

em que $N = [1 + (\eta_x)^2]^{\frac{1}{2}}$ representa o módulo do vetor normal à superfície livre, F é o fluxo constante de calor que atravessa esta superfície, K é a condutividade térmica e P_a representa a pressão constante exercida sobre a superfície livre. No plano inferior, $z = 0$, as condições de contorno são

$$u = 0, \qquad w = 0, \tag{6.10}$$

e

$$T_z = -F/K. \tag{6.11}$$

A solução estática destas equações é expressa por:

$$\begin{aligned} T_s &= T_0 - \frac{F}{K}(z-d), \\ \rho_s &= \rho_0[1 + (\frac{\alpha F}{K})(z-d)], \\ P_s &= P_a - g\rho_0[(z-d) + (\alpha\frac{F}{2K})(z-d)^2]. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Será conveniente adimensionalizar as grandezas presentes nas equações anteriores empregando as unidades características do sistema. Estas unidades são escolhidas a partir da solução estática (6.12). Adotamos d como unidade de comprimento, d^2/κ como unidade de

tempo, $\rho_0 d^3$ como unidade de massa e Fd/K como unidade de temperatura. Intoduzimos, também, três parâmetros adimensionais:

- número de Prandtl $\sigma = \mu/\rho_0\kappa$,
- número de Rayleigh $R = \rho_0 g\alpha F d^4/K\kappa\mu$,
- número de Galileo $G = gd^3\rho_0^2/\mu^2$.

A partir deste ponto todas as grandezas devem ser entendidas como adimensionais.

Estudaremos o comportamento das perturbações à solução estática do sistema. Definimos inicialmente o seguinte conjunto de variáveis lentas[21], já na forma adimensional:

$$\xi = \varepsilon x, \qquad \tau = \varepsilon^3 t. \tag{6.13}$$

A transformação de Gardner-Morikawa[20] contém usualmente a velocidade de grupo na definição da variável ξ. Verificamos, no entanto, que ao introduzirmos esta velocidade na definição das novas variáveis, obtemos ao longo dos cálculos que a velocidade de grupo é nula. Esta é uma indicação que a instabilidade que estamos tratando não tem caráter oscilatório. Assim, omitimos a velocidade de grupo na definição das variáveis lentas (6.13). Outra questão que gostaríamos de considerar é o "scaling" da variável temporal (6.13). Dependendo das condições de contorno térmicas e mecânicas, a mesma definição das variáveis lentas pode servir para estudar fenômenos oscilatórios e dispersivos [1]. Por outro lado, a definição das variáveis lentas não é necessariamente única. Por exemplo, Gertsberg e Sivashinsky [30] empregaram outra definição no estudo do regime convectivo deste sistema, cujas condições de contorno são as mesmas que consideramos.

Efetuamos a seguinte expansão em ε dos campos adimensionais u, w, η , P e T :

$$\begin{aligned}
u &= \varepsilon^2\hat{u} = \varepsilon^2(u_0 + \varepsilon^1 u_1 + \varepsilon^2 u_2 + ...), \\
w &= \varepsilon^3\hat{w} = \varepsilon^3(w_0 + \varepsilon^1 w_1 + \varepsilon^2 w_2 + ...), \\
P - P_s &= \varepsilon^1\hat{p} = \varepsilon^1(p_0 + \varepsilon^1 p_1 + \varepsilon^2 p_2 + ...), \\
T - T_s &= \varepsilon^1\hat{\theta} = \varepsilon^1(\theta_0 + \varepsilon^1\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + ..., \\
\eta &= \varepsilon^1\hat{\eta} = \varepsilon^1(\eta_0 + \varepsilon^1\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + ...).
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Introduzindo as expansões (6.14) e as variáveis lentas (6.13) nas equações (6.1) a (6.5) e nas condições de contorno (6.6) a (6.11), obtemos o conjunto de equações abaixo, em que eliminamos o símbolo $\hat{}$ de todos os campos por simplicidade de notação.

$$\varepsilon^1(u_\xi + w_z) = 0, \tag{6.15}$$

$$\varepsilon^4(u_\tau + uu_\xi + wu_z) = -P_\xi + \sigma(\varepsilon^3 u_{\xi\xi} + \varepsilon^1 u_{zz}), \tag{6.16}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^6(w_\tau + uw_\xi + ww_z) &= -P_z + \sigma(\varepsilon^5 w_{\xi\xi} + \varepsilon^3 w_{zz}) \\ &\quad -G\sigma^2 + R\sigma(T - T_0),\end{aligned} \tag{6.17}$$

$$\varepsilon^3(T_\tau + uT_\xi + wT_z) = \varepsilon^2 T_{\xi\xi} + T_{zz}. \tag{6.18}$$

Em $z = 1 + \varepsilon^2\eta$ temos:

$$\varepsilon^2(\eta_\tau + u\eta_\xi) = \varepsilon^1 w, \tag{6.19}$$

$$\varepsilon^1(P - P_a)\eta_\xi - \sigma[\varepsilon^4 2u_\xi\eta_\xi - \varepsilon^1 u_z - \varepsilon^3 w_\xi] = 0, \tag{6.20}$$

$$P - P_a + \sigma[(\varepsilon^6 w_\xi\eta_\xi + \varepsilon^5 u_z)\eta_\xi - \varepsilon^3 2w_z] = 0, \tag{6.21}$$

$$\varepsilon^3\eta_\xi T_\xi - T_z = N. \tag{6.22}$$

Em $z = 0$ obtemos:

$$u = 0, \qquad w = 0, \qquad \theta_z = 0. \tag{6.23}$$

Ordem a ordem, determinamos soluções para este conjunto de equações. Em ordem mais baixa a solução é expressa por:

$$\begin{aligned}\theta_0 &= \frac{8G\sigma}{3R}\eta_0, \\ p_0 &= G\sigma^2\left(\frac{8z}{3} - \frac{5}{3}\right)\eta_0, \\ u_0 &= G\sigma\left(\frac{4z^3}{9} - \frac{5z^2}{6} + \frac{z}{3}\right)\eta_{0\xi}, \\ w_0 &= -G\sigma\left(\frac{z^4}{9} - \frac{5z^3}{18} + \frac{z^2}{6}\right)\eta_{0\xi\xi}.\end{aligned} \tag{6.24}$$

Nesta ordem $\eta(\xi, \tau)$ é uma função arbitrária. Na próxima ordem, a solução obtida é da forma

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= g(\xi,\tau), \\
p_1 &= R\sigma(z-1)g + G\sigma^2\eta_1 + \left(\frac{R\sigma}{2} - \frac{8G\sigma^2}{3}\right)\eta_0^2, \\
u_1 &= R\left(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2}{2} + \frac{z}{2}\right)g_\xi + G\sigma\left(\frac{z^2}{2} - z\right)\eta_{1\xi} \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[\left(R - \frac{16G\sigma}{3}\right)\left(\frac{z^2}{2} - z\right) - G\sigma z\right](\eta_0^2)_\xi, \\
w_1 &= -R\left(\frac{z^4}{24} - \frac{z^3}{6} + \frac{z^2}{4}\right)g_{\xi\xi} - G\sigma\left(\frac{z^3}{6} - \frac{z^2}{2}\right)\eta_{1\xi\xi} \\
&\quad - \frac{1}{2}\left[\left(R - \frac{16G\sigma}{3}\right)\left(\frac{z^3}{6} + \frac{z^2}{2}\right) - G\sigma\frac{z^2}{2}\right](\eta_0^2)_{\xi\xi}.
\end{aligned} \tag{6.25}$$

em que $g(\xi,\tau)$ e $\eta_1(\xi,\tau)$ são funções arbitrárias. Da condição sobre a superfície livre (6.19) resulta uma equação que relaciona estas funções :

$$-\frac{R}{8}g_{\xi\xi} + \frac{G\sigma}{3}\eta_{1\xi\xi} = \eta_{0\tau} + \left[\frac{R}{6} - \frac{11G\sigma}{18}\right](\eta_0^2)_{\xi\xi}. \tag{6.26}$$

Estamos interessados em determinar a equação de evolução para o campo η_0. Verificamos que não é necessário determinarmos explicitamente a forma dos campos u_2, u_3, w_2, w_3, p_2, p_3,... . Determinaremos somente as expressões de θ_{2z} e θ_{3z}. Cada uma destas funções satisfaz as condições de contorno (6.22) e (6.23), o que implica duas condições de compatibilidade, uma para cada ordem em ε. Obtemos assim a expressão de θ_{2z}:

$$\theta_{2z} = -\frac{8G\sigma}{R}(z)\eta_{0\xi\xi} + G\sigma\left(\frac{z^5}{45} - \frac{5z^4}{72} + \frac{z^3}{18}\right)\eta_{0\xi\xi} \tag{6.27}$$

acompanhada de uma condição de compatibilidade:

$$R = 320 \tag{6.28}$$

e a expressão de θ_{3z}:

$$\begin{aligned}\theta_{3z} &= \frac{G\sigma}{120}(z)\eta_{0\tau} + \frac{G^2\sigma^2}{360}\left[\frac{z^4}{3} - \frac{5z^3}{6} + \frac{z^2}{2}\right](\eta_{0\xi})^2 \\ &+ \left[\left(80 - \frac{4G\sigma}{3}\right)\left(\frac{z^4}{12} - \frac{z^3}{3}\right) - \frac{G\sigma}{12}(z^3)\right](\eta_0^2)_{\xi\xi} \\ &+80\left[\frac{z^5}{30} - \frac{z^4}{6} + \frac{z^3}{3} - \frac{z}{80}\right]g_{\xi\xi} \\ &+G\sigma\left[\frac{z^4}{24} - \frac{z^3}{6}\right]\eta_{1\xi\xi}. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Introduzindo a expressão anterior nas condições de contorno (6.22) e (6.23) e substituindo $R = 320$, resulta uma condição de compatibilidade que envolve η_1 e g, na mesma combinação encontrada na equação (6.26), a saber:

$$\left(\frac{G\sigma}{45}\right)\eta_{0\tau} + \left(-\frac{316}{3} - \frac{7G\sigma}{15}\right)\eta_{0\xi}^2 + \left(-\frac{320}{3} - \frac{7G\sigma}{15}\right)\eta_0\eta_{0\xi\xi} = \left(\frac{G\sigma}{3}\right)\eta_{1\xi\xi} - (40)g_{\xi\xi} \tag{6.30}$$

A eliminação dos campos g e η_1 das equações (6.26) e (6.30) leva-nos à seguinte equação de evolução para o campo η_0, em $R = 320$:

$$\left(\frac{G\sigma}{45} - 1\right)\eta_{0\tau} + \left(\frac{4G\sigma}{45}\right)\eta_0\eta_{0\xi\xi} + \left(\frac{4G\sigma}{45} + \frac{4}{3}\right)(\eta_{0\xi})^2 = 0. \tag{6.31}$$

O valor crítico para o número de Rayleigh, que deduzimos em (6.28), coincide com o valor para o limiar do movimento convectivo obtido por meio da análise linear da estabilidade [27]. Assim, a equação (6.31) descreve a evolução temporal de uma perturbação na superfície livre, no ponto crítico para o limiar da convecção.

Uma simplificação da equação de evolução (6.31) surge ao considerarmos:

$$G\sigma \gg 1, \tag{6.32}$$

que é a situação usual da aproximação de Boussinesq. Dividindo a equação (6.31) por $G\sigma$ e não considerando termos proporcionais a $(G\sigma)^{-1}$ quando comparados com a unidade, obtemos a seguinte equação :

$$\eta_{0\tau} + 4\eta_0\eta_{0\xi} + 4(\eta_{0\xi})^2 = 0. \tag{6.33}$$

Reescrevemos esta equação na forma:

$$\eta_{0\tau} + 2(\eta_0^2)_{\xi\xi} = 0 \tag{6.34}$$

e introduzimos um novo campo $\phi(\xi,\tau)$ definido por $\phi = -\eta_0$, de maneira que a equação anterior pode ser expressa na forma da equação não linear de difusão[28]:

$$\phi_\tau = 2(\phi^2)_{\xi\xi}. \tag{6.35}$$

A solução auto-similar da equação de difusão (6.35) foi estudada anteriormente por Zel'dovich e Raizer [28]. Ela pode ser expressa por:

$$\phi(\xi,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{6}\left[\frac{Q^2}{2\tau}\right]^{1/3}(\chi_0^2 - \chi^2) & \text{se } \chi < \chi_0, \\ 0 & \text{se } \chi > \chi_0 \end{cases} \tag{6.36}$$

em que χ é a variável auto-similar definida por:

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{\xi}{(2Q\tau)^{1/3}}, \\ \chi_0 &= \left(\frac{9}{2}\right)^{1/3} \\ Q &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi,0)d\xi \end{aligned} \tag{6.37}$$

Notemos que tanto a equação de evolução como a solução auto-similar são invariantes sob a transformação :

$$\xi = \varepsilon x, \quad \tau = \varepsilon^3 t, \quad \phi = -\varepsilon^{-1}\eta. \tag{6.38}$$

Portanto, para as coordenadas transformadas ("stretched coordinates") assim como para as coordenadas físicas, a solução auto-similar (6.36) apresenta a mesma forma. Observemos também que esta solução é singular em $\tau = 0$. Nosso interesse, no entanto, é o comportamento assintótico ($\tau \to \infty$) da solução (6.36). Em outras palavras, dadas as condições iniciais $\phi(\xi,0)$ para a evolução descrita pela equação (6.35), no limite $\tau \to \infty$, a função $\phi(\xi,\tau)$ tende assintoticamente para a solução (6.36) [31]. Supomos que as condições iniciais $\phi(\xi,0)$ são descritas por funções "bem localizadas", que satisfazem a condição $\phi(\xi,0) \geq 0$. Desta maneira, a função (6.36) representa o comportamento das soluções da equação (6.35) para perturbações η_0 negativas da superfície livre e grandes intervalos de tempo. A principal característica desta solução é que ela descreve frentes "abruptas" que se propagam. Uma perturbação inicial localizada será diferente de zero numa região que cresce com o tempo. Os dois pontos em que ela decai a zero são denominados "frentes". Estes pontos

propagam-se com velocidade finita e oposta, o que corresponde a um "alargamento" não instantâneo da perturbação. Este comportamento é típico de um processo não-linear e difere da difusão linear. Para uma diferença $R - 320$ pequena, o processo não-linear de difusão é predominante, o que leva ao aparecimento de frentes que se propagam no sistema.

A versão em (2+1)dimensões da equação não-linear de difusão (6.34) obtém-se introduzindo a coordenada y, perpendicular à coordenada x e definindo sua companheira "lenta"da seguinte maneira: $\zeta = \varepsilon y$. Com esta definição, as coordenadas x e y são colocadas no "mesmo pé de igualdade". Assim, a equação (6.31) assume a forma

$$\left(\frac{G\sigma}{45} - 1\right)\eta_{0\tau} + \frac{4G\sigma}{45}\eta_0(\eta_{0\xi\xi} + \eta_{0\zeta\zeta}) + \left(\frac{4G\sigma}{45} + \frac{4}{3}\right)(\eta_{0\xi}^2 + \eta_{0\zeta}^2) = 0. \tag{6.39}$$

Para $G\sigma \gg 1$ obtemos, a partir da equação anterior,

$$\eta_{0\tau} + 2(\eta_0^2)_{\xi\xi} + 2(\eta_0^2)_{\zeta\zeta} = 0. \tag{6.40}$$

Esta equação foi estudada anteriormente [32], e para sistemas com simetria circular a equação (6.40) descreve frentes "abruptas", que se propagam de maneira semelhante àquela descrita pela equação (6.34).

Analisemos agora o significado de perturbações negativas mencionadas ao longo deste capítulo. Vamos inicialmente definir um novo número de Rayleigh:

$$\overline{R} = \frac{\rho_0 g\alpha d^3}{\kappa\mu}\Delta T \tag{6.41}$$

em que ΔT denota a diferença de temperatura entre as superfícies que delimitam o fluido. $\overline{R}$ corresponde a um número de Rayleigh dependente das variáveis x e t, pois a superfície que delimita superiormente o fluido é deformável e evolui no tempo. Expandindo ΔT em função do parâmetro ε:

$$\Delta T = \frac{Fd}{K} + \varepsilon\frac{F}{K}\eta_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{6.42}$$

e empregando a definição do número de Rayleigh R, reescrevemos $\overline{R}$ para $R = 320$ na seguinte forma:

$$\overline{R} = 320 + \varepsilon\frac{\rho_0 g\alpha F d^3}{\kappa\mu K}\eta_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{6.43}$$

Este novo número de Rayleigh caracteriza o balanço entre o empuxo e a dissipação para cada ponto nas coodenadas (x, y) e no instante t. Logo, uma perturbação negativa η_0 está relacionada a um número $\overline{R}$ menor que 320 em cada ponto e instante t. Em termos da temperatura θ_0, as mesmas considerações são válidas para uma peturbação que resfrie a superfície ou um ponto qualquer do fluido. Portanto, perturbações negativas da superfície significam perturbações que tornam R inferior a 320, e isto garante que o sistema não se encontra no processo convectivo.

6.2 Processos difusivos no regime supercrítico

Na seção anterior, obtivemos uma equação de evolução que descreve perturbações na superfície livre do sistema de Rayleigh-Bénard(RB) no limiar do movimento convectivo, ou seja, para o número de Rayleigh R igual a 320. Nesta seção vamos considerar o mesmo sistema físico, porém escolhendo uma nova definição para as variáveis lentas do sistema, que são apropriadas para situações em que R está acima do valor crítico $R_c = 320$ [29]. Isto nos permitirá obter o comportamento das perturbações na superfície livre do sistema no regime supercrítico, isto é, para $R > 320$.

Definimos as novas variáveis lentas da seguinte maneira:

$$\xi = \varepsilon x, \qquad \tau = \varepsilon^4 t. \tag{6.44}$$

Observemos que Chapman e Proctor [29] empregaram a mesma definição das variáveis lentas para o estudo do sistema RB, porém consideraram a superfície superior rígida. Estes autores estavam interessados apenas nas instabilidades convectivas do sistema RB. Embora não estejamos estudando a passagem para o regime convectivo em si, vamos seguir estes autores e definir o número de "Rayleigh modificado" $R^{\#}$:

$$R^{\#} = R + \varepsilon^2 \mu^2. \tag{6.45}$$

O número de Rayleigh modificado $R^{\#}$ é a soma do número de Rayleigh R com um termo proporcional a ε^2, o mesmo parâmetro usado na definição dos "scalings" e das variáveis lentas. A grandeza μ^2 é uma constante positiva. Consideramos a seguinte expansão das variáveis adimensionais:

$$\begin{aligned}
u &= \varepsilon^3 \hat{u} = \varepsilon^3(u_0 + \varepsilon^1 u_1 + \varepsilon^2 u_2 + ...), \\
w &= \varepsilon^4 \hat{w} = \varepsilon^4(w_0 + \varepsilon^1 w_1 + \varepsilon^2 w_2 + ...), \\
\eta &= \varepsilon^2 \hat{\eta} = \varepsilon^2(\eta_0 + \varepsilon^1 \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + ...), \\
T - T_s &= \varepsilon^2 \hat{\theta} = \varepsilon^2(\theta_0 + \varepsilon^1 \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + ...), \\
P - P_s &= \varepsilon^2 \hat{p} = \varepsilon^2(p_0 + \varepsilon^1 p_1 + \varepsilon^2 p_2 + ...)
\end{aligned} \tag{6.46}$$

Substituindo estas expansões e as "variáveis lentas", reescrevemos o sistema de equações (6.1) a (6.11) na forma indicada abaixo, em que eliminamos o sinal ˆ dos campos por simplicidade de notação:

$$\varepsilon^2(u_\xi + w_z) = 0, \tag{6.47}$$

$$\varepsilon^6(u_\tau + uu_\xi + wu_z) = -P_\xi + \sigma(\varepsilon^4 u_{\xi\xi} + \varepsilon^2 u_{zz}), \tag{6.48}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^8(w_\tau + uw_\xi + ww_z) &= -P_z + \sigma(\varepsilon^6 w_{\xi\xi} + \varepsilon^4 w_{zz}) \\ &\quad -G\sigma^2 + R\sigma(T - T_0) + \varepsilon^2\mu^2\sigma(T - T_0),\end{aligned} \tag{6.49}$$

$$\varepsilon^4(T_\tau + uT_\xi + wT_z) = \varepsilon^2 T_{\xi\xi} + T_{zz}. \tag{6.50}$$

Em $z = 1 + \varepsilon^2\eta$

$$\varepsilon^4(\eta_\tau + u\eta_\xi) = \varepsilon^2 w, \tag{6.51}$$

$$\varepsilon^2(P - P_a)\eta_\xi - \sigma[\varepsilon^6 2u_\xi\eta_\xi - \varepsilon^2 u_z - \varepsilon^4 w_\xi] = 0, \tag{6.52}$$

$$P - P_a + \sigma[\varepsilon^8 w_\xi\eta_\xi + \varepsilon^6 u_z - \varepsilon^4 2w_z] = 0, \tag{6.53}$$

$$\varepsilon^4\eta_\xi T_\xi - T_z = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^6\eta_{0\xi}^2. \tag{6.54}$$

Em z=0

$$u = 0, \quad w = 0, \quad \theta_z = 0. \tag{6.55}$$

Ordem a ordem em ε, podemos resolver estas equações. Em ordem mais baixa (ε^2) a solução é da forma:

$$\begin{aligned}\theta_0 &= \frac{8G\sigma}{3R}\eta_0, \\ p_0 &= \frac{8}{3}G\sigma^2\eta_0 z + \frac{\mu^2\sigma}{2}(-z^2 + 2z - 1) - \frac{5}{3}G\sigma^2\eta_0, \\ u_0 &= G\sigma\eta_{0\xi}\left(\frac{4}{9}z^3 - \frac{5}{6}z^2 + \frac{1}{3}z\right), \\ w_0 &= G\sigma\eta_{0\xi\xi}\left(-\frac{1}{9}z^4 + \frac{5}{18}z^3 - \frac{1}{6}z^2\right).\end{aligned} \tag{6.56}$$

Nesta ordem, $\eta_0(\xi, \tau)$ é uma função arbitrária.

A próxima ordem a ser considerada é ε^4. A equação (6.50) e as condições de contorno (6.54) e (6.55) determinam a condição de compatibilidade

$$R = 320 \tag{6.57}$$

e uma expressão para θ_2. Nesta ordem, obtemos

$$\begin{aligned}\theta_2 &= G\sigma\eta_{0\xi\xi}\left(\frac{z^6}{270}-\frac{z^5}{72}+\frac{z^4}{72}-\frac{z^2}{240}+\frac{23}{40320}\right)+\frac{1}{2}\eta_0^2-\frac{G\sigma}{120}\eta_0^2\\ &\quad+\frac{G\sigma}{320}\eta_2-\mu^2\frac{G\sigma\eta_0}{320\times 120}-\frac{l}{320\sigma}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_2 &= G\sigma^2\eta_{0\xi\xi}\left(\frac{32}{189}z^7-\frac{20}{27}z^6+\frac{8}{9}z^5-\frac{8}{9}z^3+\frac{5}{6}z^2-\frac{19}{126}z\right)+160\sigma\eta_0^2 z\\ &\quad-\frac{8G\sigma^2}{3}\eta_0^2 z+G\sigma^2\eta_2 z+l(1-z)\end{aligned} \tag{6.58}$$

$$\begin{aligned}u_2 &= G\sigma\eta_{0\xi\xi\xi}\left(\frac{4}{1701}z^9-\frac{5}{378}z^8+\frac{4}{189}z^7-\frac{1}{15}z^5+\frac{5}{36}z^4-\frac{61}{756}z^3-\frac{11}{252}z\right)\\ &\quad+\eta_0\eta_{0\xi}\left[160\left(\frac{z^3}{3}-z\right)+G\sigma\left(\frac{5}{3}z-\frac{8}{9}z^3\right)\right]\\ &\quad+G\sigma\eta_{2\xi}\left(\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{2}z\right)+\frac{l_\xi}{\sigma}\left(-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2}z\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w_2 &= -\left\{G\sigma\eta_{0\xi\xi\xi\xi}\left(\frac{2}{8505}z^{10}-\frac{5}{3402}z^9+\frac{1}{378}z^8-\frac{1}{90}z^6+\frac{1}{36}z^5-\frac{61}{3024}z^4-\frac{11}{504}z^2\right)\right\}\\ &\quad-\left\{(\eta_{0\xi}^2+\eta_0\eta_{0\xi\xi})\left[160\left(\frac{1}{12}z^4-\frac{1}{2}z^2\right)+G\sigma\left(\frac{5}{6}z^2-\frac{2}{9}z^4\right)\right]\right\}\\ &\quad-\left\{G\sigma\eta_{2\xi\xi}\left(\frac{1}{24}z^4-\frac{1}{4}z^2\right)+\frac{l_{\xi\xi}}{\sigma}\left(-\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{6}z^3-\frac{1}{4}z^2\right)\right\}.\end{aligned}$$

Nestas expressões , $l(\xi,\tau)$ e $\eta_2(\xi,\tau)$ são funções arbitrárias. Da condição de contorno (6.51) na superfície livre resulta uma equação de evolução para η_0, que contém $l(\xi,\tau)$ e $\eta_2(\xi,\tau)$:

$$\begin{aligned}\eta_{0\tau}+\left[\frac{5}{9}G\sigma-\frac{200}{3}\right](\eta_0\eta_{0\xi\xi}+\eta_{0\xi}^2) &- \frac{31}{1296}G\sigma\eta_{0\xi\xi\xi\xi}\\ &- \frac{5}{24}G\sigma\eta_{2\xi\xi}-\frac{1}{8\sigma}l_{\xi\xi}=0.\end{aligned} \tag{6.59}$$

Na ordem ε^6, a equação (6.50) e as condições de contorno (6.54) e (6.55) determinam uma condição de compatibilidade que envolve uma combinação das funções $l(\xi,\tau)$ e $\eta_2(\xi,\tau)$. Esta combinação permite-nos eliminar l e η_2 presentes na equação (6.59). Deste processo obtemos uma equação de evolução para η_0:

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{G\sigma}{45}\right)\eta_{0\tau} &- \left(\frac{4}{45}G\sigma+\frac{4}{3}\right)\eta_{0\xi}^2-\frac{4}{45}G\sigma\eta_0\eta_{0\xi\xi}\\ &- \mu^2\frac{G\sigma}{14400}\eta_{0\xi\xi}-\frac{58G\sigma}{31185}\eta_{0\xi\xi\xi\xi}=0.\end{aligned} \tag{6.60}$$

Ao considerarmos $G\sigma \gg 1$, que é a situação usual da aproximação de Boussinesq, surge uma simplificação da equação de evolução (6.60). Dividindo esta equação por $G\sigma$ e não considerando termos proporcionais a $(G\sigma)^{-1}$ quando comparados com a unidade, obtemos a seguinte equação :

$$\eta_{0\tau} + 4(\eta_{0\xi})^2 + 4\eta_0\eta_{0\xi\xi} + \mu^2\frac{1}{320}\eta_{0\xi\xi} + \frac{58}{693}\eta_{0\xi\xi\xi\xi} = 0. \tag{6.61}$$

Podemos reescrevê-la numa forma compacta:

$$\eta_{0\tau} + 2\left(\eta_0^2 + \frac{\mu^2}{640}\eta_0 + \frac{29}{693}\eta_{0\xi\xi}\right)_{\xi\xi} = 0. \tag{6.62}$$

A equação de evolução (6.61) é não-linear e envolve dissipação. Ela contém termos presentes na equação (6.33), obtida na seção anterior. Além destes termos, a equação de evolução (6.61) é composta por um termo que depende do parâmetro μ^2 e outro termo proporcional à derivada espacial de quarta ordem. Assim, para as mesmas condições de contorno térmicas e mecânicas consideradas na seção anterior, a mudança na definição das variáveis lentas (6.44) e a introdução do número de Rayleigh modificado $R^{\#}$ produzem uma nova equação de evolução (6.61). Ela descreve as perturbações na superfície livre do sistema de RB, no regime supercrítico, as quais não apresentam um comportamento oscilatório. Alguns testes preliminares indicam que esta equação é não integrável. Uma resposta sobre a sua possível integrabilidade constitui uma questão em aberto.

Capítulo 7

Uma Generalização Dissipativa da Equação de Boussinesq

7.1 Equação de Boussinesq dissipativa no sistema de Bénard-Marangoni

Neste capítulo, estudaremos as perturbações na superfície livre de um sistema de Bénard-Marangoni (BM), empregando um método perturbativo diferente do "Reductive Perturbation Method" (RPM). Esta abordagem também é apropriada ao estudo das ondas de grande comprimento na aproximação de águas rasas. Neste contexto, obteremos [15] um sistema de equações de evolução acopladas que descreve o campo de velocidades do fluido e as perturbações da superfície livre do sistema. Interpretaremos este sistema como uma generalização dissipativa do sistema usual de Boussinesq[16].

Consideremos um fluido limitado, inferiormente, por um plano rígido e, superiormente, por um gás passivo. O gás exerce pressão constante sobre a superfície livre, e desprezamos sua viscosidade e a variação de sua densidade. O plano rígido encontra-se em $z = 0$, e a posição de equilíbrio da interface em $z = d$. Supomos que a profundidade d é tal que os efeitos da dependência da tensão superficial com a temperatura são predominantes em relação ao empuxo. Descrevemos o sistema BM por meio das seguintes equações :
equação da continuidade para um fluido incompressível

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0; \tag{7.1}$$

equação de movimento (equação de Navier-Stokes) para um fluido incompressível

$$\rho D_t \vec{v} = -\vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g}, \tag{7.2}$$

equação de propagação do calor

$$D_t T = \kappa \nabla^2 T, \tag{7.3}$$

em que $D_t = \partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ é a derivada convectiva, $\vec{v} = (u, w)$ é o campo de velocidades do fluido, e p simboliza a pressão. A densidade ρ, a viscosidade μ e a difusividade térmica κ são assumidos como constantes. Consideramos somente o fenômeno da termocapilaridade neste sistema. A equação de estado

$$\tau = \tau_0[1 - \gamma(T - T_0)], \tag{7.4}$$

descreve a tensão superficial τ como uma função linear da temperatura [33]. Nesta equação, γ é constante, τ_0 e T_0 são valores de referência para a tensão superficial e temperatura, respectivamente.

As condições na fronteira superior, $z = d + \eta(x,t)$, são caracterizadas pelas equações [22]:
condição cinemática (ou de não evaporação) da superfície

$$\eta_t + u\eta_x = w, \tag{7.5}$$

condição de continuidade das componentes normal e tangencial das tensões na superfície de um fluido viscoso

$$(P - P_a) - \frac{2\mu}{N^2}\left(w_z + u_x\eta_x^2 - \eta_x u_z - \eta_x w_x\right) = -\frac{\tau}{N^3}\eta_{xx}, \tag{7.6}$$

$$\mu(1 - \eta_x^2)(u_z + w_x) + 2\mu\eta_x(w_z - u_x) = N(\tau_x + \eta_x\tau_z), \tag{7.7}$$

e a condição de fluxo normal de calor

$$\eta_x T_x - T_z = \frac{F}{K}N, \tag{7.8}$$

em que F representa o fluxo normal de calor, K é a condutividade térmica, P_a é a pressão constante exercida sobre a superfície livre e N representa o módulo do vetor normal exterior à esta superfície, cuja expressão é: $N = (1 + \eta_x^2)^{1/2}$.

Supomos que a resistência ao movimento relativo entre duas camadas do fluido é maior que a resistência ao movimento entre o fluido e o plano $z = 0$, que delimita inferiormente o fluido [23]. Decorre desta suposição que o plano inferior seja considerado livre de tensões ("stress-free") e o campo de velocidades sobre esta fronteira seja caracterizado por:

$$w = 0 \quad e \quad u_z = 0. \tag{7.9}$$

Supomos que este plano é um condutor térmico perfeito e sua temperatura é mantida constante: $T = T_b$.

A solução estática destas equações e condições de contorno é função somente da coordenada z :

$$\begin{aligned} P_s &= P_a - g\rho(z-d), \\ T_s &= T_0 - \frac{F}{K}(z-d). \end{aligned} \tag{7.10}$$

Nosso tratamento perturbativo será feito em torno deste estado estático. Consideramos dois parâmetros "pequenos" determinados a partir das escalas horizontal e vertical das perturbações, denotadas por l e a, respectivamente. Estes parâmetros perturbativos são definidos na forma:

$$\varepsilon = \frac{a}{d}, \qquad \delta = \frac{d}{l}. \tag{7.11}$$

Intoduzimos agora a seguinte adimensionalização das coordenadas:

$$x' = \frac{1}{l}x, \qquad z' = \frac{1}{d}z, \qquad t' = \frac{C_0}{l}t, \tag{7.12}$$

em que

$$C_0^2 = gd. \tag{7.13}$$

Os campos u, w e η são adimensionalizados da seguinte maneira:

$$u' = \frac{C_0}{ag}u, \qquad w' = \frac{C_0 d}{alg}w, \qquad \eta' = \frac{1}{a}\eta. \tag{7.14}$$

Ao substituirmos estas variáveis adimensionais nas equações e condições sobre as fronteiras, obtemos um sistemas de equações adimensionais no qual estão presentes quatro parâmetros adimensionais, a saber:

- número de Prandtl $\sigma = \mu/\rho\kappa$
- número de Reynolds $R = \rho d C_0/\mu$
- número de Bond $B = \rho g d^2/\tau_0$
- número de Marangoni $M = \gamma F d^2 \tau_0/K\kappa\mu$.

Expressamos as equações adimensionalizadas na forma indicada abaixo, em que eliminamos o sinal $'$ dos campos por simplicidade de notação.

$$\delta^2 u_x + w_z = 0, \tag{7.15}$$

$$\varepsilon u_t + \varepsilon^2 u u_x + \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} w u_z = -P_x + \frac{\varepsilon\delta}{R} u_{xx} + \frac{\varepsilon}{\delta R} u_{zz}, \tag{7.16}$$

$$\varepsilon w_t + \varepsilon^2 u w_x + \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} w w_z = -P_z + \frac{\varepsilon\delta}{R} w_{xx} + \frac{\varepsilon}{\delta^2 R} w_{zz} - 1, \tag{7.17}$$

$$\varepsilon T_t + \varepsilon^2 u T_x + \frac{\varepsilon^2}{\delta^2} w T_z = \frac{\varepsilon\delta}{R\sigma} T_{xx} + \frac{\varepsilon}{\delta R\sigma} T_{zz}, \tag{7.18}$$

$$\varepsilon\eta_t + \varepsilon^2 u\eta_x = \frac{\varepsilon}{\delta^2} w, \tag{7.19}$$

$$(P - P_a)N^3 - \frac{2N}{R}\left[\frac{\varepsilon}{\delta} w_z + \varepsilon^3\delta^3 u_x \eta_x^2 - \varepsilon^2\delta(\eta_x u_z + \eta_x w_x)\right] = \left[-\frac{\varepsilon\delta^2}{B} + \frac{\varepsilon\delta^2 M}{\sigma R^2}(T - T_0)\right]\eta_{xx}, \tag{7.20}$$

$$\varepsilon(1 - \varepsilon^2\delta^2\eta_x^2)(u_z + w_x) + 2\eta_x(\varepsilon^2 w_z - \varepsilon^2\delta^2 u_x) = -\frac{MN}{\sigma R}\left(\delta T_x + \varepsilon\delta T_z\eta_x\right), \tag{7.21}$$

$$-\varepsilon\delta^2\eta_x T_x + T_z = -N, \tag{7.22}$$

$$u_z(0) = 0, \qquad w(0) = 0, \tag{7.23}$$

$$\theta(0) = 0. \tag{7.24}$$

No sentido de obtermos a equação de evolução das perturbações da superfície livre, no contexto dos modelos da propagação de ondas em águas rasas, expandimos todas as variáveis em potências de z. Consideramos nesta expansão termos até a ordem ε ou δ^2. Iniciamos este processo, expandindo as componentes u e w do campo de velocidades $\vec{v}$, a saber:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n, \qquad w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n, \tag{7.25}$$

em que as componentes u_n e w_n são funções de x e t. Substituindo estas expansões na equação (7.15), obtemos a relação :

$$w_{n+1} = -\delta^2 \frac{u_{nx}}{n+1}. \tag{7.26}$$

Decorre das condições na fronteira em $z = 0$ e da relação (7.26) entre as componentes u_n e w_{n+1} que:

$$\begin{aligned} u_1 = 0, u_3 = 0, u_5 = 0, ... \\ w_0 = 0, w_2 = 0, w_4 = 0, ... \end{aligned} \tag{7.27}$$

O emprego da expansão da pressão p:

$$P = P_s + \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n, \tag{7.28}$$

na qual as componentes p_n são funções de x e t, possibilita-nos obter a partir das equações (7.16) e (7.17), as componentes u_2, u_4, u_6 e p_2 em função de u_0 e p_0 somente. As outras componentes das expansões de u e p contribuem para a equação em ordens maiores que ε ou δ^2. Consequentemente, estas componentes não são consideradas em nosso tratamento. Expressamos, a seguir, as componentes u_2, u_4, u_6 e p_2, tendo o cuidado de considerar apenas os termos que contribuem para a equação de evolução até a ordem ε ou δ^2:

$$\begin{aligned} u_2 &= \delta \frac{R}{2}\left(u_{0t} + \varepsilon u_0 u_{0x} + \frac{1}{\varepsilon} p_{0x} - \frac{\delta}{R} u_{0xx}\right), \\ u_4 &= \delta^3 \frac{R}{24}\left(-\frac{2}{\varepsilon} p_{0xxx} + \frac{R}{\delta} u_{0tt} + \frac{R}{\varepsilon\delta} p_{0xt} - 2u_{0xxt}\right), \\ u_6 &= \delta^3 \frac{R^3}{720}\left(u_{0ttt} + \frac{1}{\varepsilon} p_{0xtt}\right), \\ p_2 &= -\delta^2 \frac{p_{0xx}}{2}. \end{aligned} \tag{7.29}$$

Ao introduzirmos a expansão da temperatura T:

$$T = T_s + \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n z^n \tag{7.30}$$

na equação (7.18) e na condição (7.24), verificamos que:

$$\theta_0 = 0, \theta_2 = 0, \theta_4 = 0, \theta_6 = 0, etc. \tag{7.31}$$

Obtemos também expressões para as componentes θ_3 e θ_5, representadas em função de θ_1, u_0 e p_0. Observemos que as componentes θ_n são funções de x e t. As componentes θ_n não nulas, para $n > 5$, contribuem para a equação de evolução em ordens maiores que ε ou δ^2.

Substituindo a expansão da temperatura(7.30) na equação (7.22), e empregando as expressões de θ_3 e θ_5 obtidas a partir da equação (7.18), resulta uma equação para as componentes θ_1, u_0 e p_0. Expandindo θ_1 em potências de δ:

$$\theta_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_1^n \delta^n, \tag{7.32}$$

obtemos a expressão de θ_1 em função de u_0 e p_0. Consequentemente, reescrevemos as componentes θ_3 e θ_5 em função de u_0 e p_0 somente:

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= -\varepsilon\delta\frac{R\sigma}{2}u_{0x} + \varepsilon\delta^2\frac{R^2\sigma}{24}(5\sigma - 1)u_{0xt} - \delta^2\frac{R^2\sigma}{24}p_{0xx}, \\
\theta_3 &= -\varepsilon\delta^2\frac{R^2\sigma^2}{12}u_{0xt} + \varepsilon\delta^3\frac{R^2\sigma^2}{24}(5\sigma - 1)u_{0xtt} + \varepsilon\delta\frac{R\sigma}{6}u_{0x}, \\
\theta_5 &= \varepsilon\delta^2\left[\left(\frac{1+\sigma}{\sigma}\right)u_{0xt} + \frac{1}{\varepsilon\sigma}p_{0xx} - \delta\frac{R\sigma}{2}u_{0xtt} - \delta\frac{2}{R\sigma}u_{0xxx}\right].
\end{aligned} \tag{7.33}$$

Observemos que os termos presentes nas expressões anteriores são os únicos que contribuem para as equações até a ordem ε ou δ^2.

Introduzindo na equação (7.20) as expansões da pressão (7.28) e da temperatura (7.30), e as expressões (7.29) e (7.33), resulta uma equação que relaciona p_0 a u_0 e η. Expandindo p_0 em potências de δ:

$$p_0 = \sum_{n=0}^{\infty} p_0^n \delta^n, \tag{7.34}$$

representamos p_0 em função de u_0 e η, a saber:

$$p_0 = \varepsilon\eta - \varepsilon\delta\frac{2}{R}u_{0x} - \varepsilon\delta^2\left[u_{0xt} + \left(\frac{1}{B} + \frac{1}{2}\right)\eta_{xx}\right] + \varepsilon\delta^3\left[\frac{2}{R}u_{0xx} - \frac{R}{12}u_{0xtt}\right]. \tag{7.35}$$

Esta expressão de p_0 possibilita-nos reescrever as componentes u_2, u_4, u_6, p_2, θ_1, θ_3 e θ_5 somente em função de u_0 e η. Substituindo nas equações (7.19) e (7.21) as expressões das

componentes de u, w, p e T obtemos, até ordem ε ou δ^2, um sistema acoplado de equações de evolução para u_0 e η

$$u_{0t} + c^2\eta_x + \varepsilon u_0 u_{0x} - \frac{\delta}{R}\left(4 + \frac{M}{3}\right)u_{0xx} + \delta\frac{R}{6}\left(u_{0tt} + \eta_{xt}\right) - \delta^2\left[\frac{11}{6} - \frac{M}{30}(4\sigma - 1)\right]u_{0xxt} - \delta^2\left(\frac{1}{B} + \frac{M}{30} + 1\right)\eta_{xxx} + \delta^2\frac{R^2}{120}\left(u_{0ttt} + \eta_{xtt}\right) = 0, \tag{7.36}$$

$$\eta_t + u_{0x} + \varepsilon(u_0\eta)_x + \delta\frac{R}{6}(u_{0xt} + \eta_{xx}) - \delta^2\frac{1}{2}u_{0xxx} + \delta^2\frac{R^2}{120}(u_{0xtt} + \eta_{xxt}) = 0, \tag{7.37}$$

em que c^2 é definido por

$$c^2 = 1 - \frac{M}{R^2\sigma}. \tag{7.38}$$

Estas equações nos possibilitam obter as equações de evolução, até ordem a ε ou δ^2, para os campos u e η.

Substituindo as expressões das componentes u_2, u_4 e u_6 na expansão de u, dada pela equação (7.25), obtemos até a ordem δ^2:

$$u = u_0 + \delta\frac{R^2}{2}\left(u_{0t} + \eta_x - \frac{3\delta}{R}u_{0xx}\right)z^2 + \delta^2\frac{R^2}{24}\left(u_{0tt} + \eta_{xt}\right)z^4 + \mathcal{O}(\varepsilon\delta, \delta^3). \tag{7.39}$$

Considerando o valor médio de u na profundidade z $(0 \leq z \leq 1)$, reescrevemos a expressão anterior na forma

$$\tilde{u} = u_0 + \delta\frac{R}{6}(u_{0t} + \eta_x) - \delta^2\frac{1}{2}\left[u_{0xx} - \frac{R^2}{60}(u_{0tt} + \eta_{xt})\right] + \mathcal{O}(\varepsilon\delta, \delta^3). \tag{7.40}$$

Podemos reordenar $\tilde{u}$ da seguinte maneira:

$$\tilde{u} - \delta\frac{R}{6}\eta_x - \delta^2\frac{R^2}{120}\eta_{xt} = u_0 + \delta\frac{R}{6}u_{0t} + \delta^2\left(\frac{R^2}{120}u_{0tt} - \frac{1}{2}u_{0xx}\right). \tag{7.41}$$

Vamos denotar por f a função que representa o lado direito da igualdade (7.41)

$$f = \tilde{u} - \delta\frac{R}{6}\eta_x - \delta^2\frac{R^2}{120}\eta_{xt}, \tag{7.42}$$

isto é

$$f = u_0 + \delta\frac{R}{6}u_{0t} + \delta^2\left(\frac{R^2}{120}u_{0tt} - \frac{1}{2}u_{0xx}\right). \tag{7.43}$$

Reescrevemos (7.43) sob a forma

$$f = \hat{U}u_0, \tag{7.44}$$

em que $\hat{U}$ é o operador linear definido por

$$\hat{U} = \mathbf{I} + \delta\frac{R}{6}\partial_t + \delta^2\left(\frac{R^2}{120}\partial_{tt} - \frac{1}{2}\partial_{xx}\right). \tag{7.45}$$

Denotamos o operador unidade por **I**. Determinamos a partir da definição anterior o operador inverso $\hat{U}^{-1}$, que nos possibilita expressar u_0 em função de f até a ordem de δ^2

$$u_0 = f - \delta\frac{R}{6}f_t + \delta^2\frac{R^2}{36}f_{tt} + \delta^2\left(\frac{1}{2}f_{xx} - \frac{R^2}{120}f_{tt}\right). \tag{7.46}$$

Substituindo a expressão de f na relação anterior e considerando termos até a ordem δ^2, resulta uma expressão de u_0, representada em função de u e η

$$u_0 = u - \delta\frac{R}{6}(\eta_x + u_t) + \delta^2\frac{1}{2}\left[u_{xx} + \frac{7R^2}{180}(u_{tt} + \eta_{xt})\right], \tag{7.47}$$

em que por simplicidade de notação omitimos o sinal $\tilde{}$ do termo u. Empregando esta expressão de u_0 e a equação (7.36), obtemos uma equação de evolução para o campo u:

$$\begin{aligned} u_t \;+\; & \varepsilon u u_x + \left(1 - \frac{M}{R^2\sigma}\right)\eta_x - \delta\frac{1}{R}\left(4 + \frac{M}{3}\right)u_{xx} - \delta^2\frac{1}{6}\left(4 + \frac{M}{3}\right)u_{txx} \\ + \; & \delta^2\left[\frac{M}{30}(4\sigma - 1) - \frac{4}{3}\right]u_{xxt} + \delta^2\left(\frac{1}{B} - \frac{M}{30} - 1\right)\eta_{xxx} = 0. \end{aligned} \tag{7.48}$$

Em ordem mais baixa(ε^0 e δ^0), esta equação assume a forma

$$u_t = \left(\frac{M}{R^2\sigma} - 1\right)\eta_x. \tag{7.49}$$

Reescrevemos a equação de evolução para η, introduzindo a expressão de u_0, equação (7.47), na equação (7.37):

$$\eta_t + u_x + \varepsilon(u\eta)_x = 0. \tag{7.50}$$

Em ordem mais baixa(ε^0 e δ^0) esta equação relaciona:

$$\eta_t = u_x. \tag{7.51}$$

Por meio de (7.49) e (7.51), obtemos a equação de propagação das ondas lineares, cuja velocidade é denotada por c. As equações (7.49) e (7.51) nos possibilitam, também, reescrever a equação de evolução para u na seguinte forma:

$$u_t + c^2\eta_x + \varepsilon u u_x - \delta\frac{1}{R}\left(4 + \frac{M}{3}\right)u_{xx} + \delta^2\Lambda\eta_{xtt} = 0, \tag{7.52}$$

na qual

$$\Lambda = \frac{4}{3} - \frac{1}{c^2}\left(1 + \frac{1}{B}\right) + \frac{M}{30}\left(1 - \frac{1}{c^2} - 4\sigma\right) + \frac{1}{6}\left(4 + \frac{M}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{c^2}\right). \tag{7.53}$$

A presença do termo u_{xx} na equação (7.52) confere-lhe um caráter dissipativo, o que justifica considerarmos o sistema formado por (7.50) e (7.52) uma generalização dissipativa do sistema de Boussinesq usual [14, 16]. Se o número de Marangoni do sistema assume o valor crítico $M_c = -12$, as equações (7.50) e (7.52) coincidem com a forma conhecida da equação de Boussinesq, a saber:

$$u_t + c^2\eta_x + \varepsilon u u_x + \delta^2 \Lambda \eta_{xtt} = 0, \tag{7.54}$$

$$\eta_t + u_x + \varepsilon(u\eta)_x = 0. \tag{7.55}$$

Para esta situação, assumindo δ^2 da ordem de ε e escolhendo o sentido de propagação das ondas, por exemplo, para a direita, obtemos a seguinte relação entre u e η, válida até a ordem ε e δ^2:

$$u = c\eta - \varepsilon\frac{c}{4}\eta^2 - \delta^2\frac{\Lambda}{2}\eta_{xt}, \tag{7.56}$$

que corresponde a uma espécie de invariante de Riemann[14]. Introduzindo esta relação de u numa das equações (7.50) ou (7.52), obtemos a equação de Korteweg-de Vries(KdV)[17]:

$$\eta_t + c\eta_x + \varepsilon\frac{3c}{2}\eta\eta_x + \delta^2\frac{\Omega}{2}\eta_{xxx} = 0, \tag{7.57}$$

em que

$$\Omega = \frac{1}{5}\left(\frac{14}{3} + 8\sigma\right) - \frac{1}{c^2}\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{B}\right). \tag{7.58}$$

Consideremos o sistema fora do ponto crítico ($M \neq -12$) e δ da ordem de ε, tal que termos da ordem de δ^2 não sejam considerados. Neste caso, as equações (7.50) e (7.52) assumem a forma de um sistema de Boussinesq estritamente dissipativo, no qual o termo dispersivo não está presente:

$$u_t + c^2\eta_x + \varepsilon u u_x - \frac{\delta}{R}\left(4 + \frac{M}{3}\right)u_{xx} = 0, \tag{7.59}$$

$$\eta_t + u_x + \varepsilon(u\eta)_x = 0. \tag{7.60}$$

Escolhemos novamente o sentido de propagação das ondas para a direita e procuramos soluções u contendo termos até ordem a ε e δ. Obtemos a seguinte expressão de u:

$$u = c\eta - \varepsilon\frac{c}{4}\eta^2 - \delta\frac{1}{2R}\left(4 + \frac{M}{3}\right)\eta_x. \tag{7.61}$$

Substituindo esta expressão na equação (7.60), resulta

$$\eta_t + c\eta_x + \varepsilon\frac{3c}{2}\eta\eta_x - \delta\frac{1}{2R}\left(4+\frac{M}{3}\right)\eta_{xx} = 0, \tag{7.62}$$

que é a equação de Burgers [14].

7.2 Equação de Boussinesq dissipativa no sistema de Rayleigh-Bénard

Nesta seção empregamos o mesmo método perturbativo [14] usado na secção anterior, só que agora para o estudo de ondas não-lineares de superfície no sistema de Rayleigh-Bénard(RB). Interessamo-nos pelo estudo das ondas de grande comprimento, na aproximação de águas rasas. Obtemos um sistema de equações de evolução acopladas que descreve o campo de velocidades e a perturbação na superfície do fluido. Estas equações não são as mesmas deduzidas para o sistema de Bénard-Marangoni(BM) na secção anterior,sendo uma variante da generalização dissipativa do sistema de Boussinesq.

Consideremos um fluido limitado inferiormente em $z = 0$ por um plano idealizado como sendo um condutor térmico perfeito e livre de tensões tangenciais. A fronteira superior do fluido, em $z = d$, é uma superfície deformável, submetida à pressão constante. Para este sistema, a profundidade d é tal que o efeito do empuxo predomina se comparado ao efeito da dependência da tensão superficial com a temperatura. Esta consideração justifica assumirmos que a tensão superficial seja nula.

As equações hidrodinâmicas que descrevem o movimento do fluido podem ser simplificadas introduzindo a aproximação de Boussinesq. Nesta aproximação e considerando um sistema cartesiano de coordenadas(x, z), as equações e condições de fronteira que descrevem o sistema RB são expressas por:
equação da continuidade para um fluido incompressível

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0, \tag{7.63}$$

equação de movimento (equação de Navier-Stokes) para um fluido incompressível

$$\rho_0 D_t \vec{v} = -\vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g}, \tag{7.64}$$

equação de propagação do calor

$$D_t T = \kappa \nabla^2 T, \tag{7.65}$$

equação de estado

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha (T - T_0)], \tag{7.66}$$

em que $D_t = \partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ é a derivada convectiva, $\vec{v} = (u, w)$ é o campo de velocidades do fluido e P simboliza a pressão. A viscosidade μ, a difusividade térmica κ e o coeficiente de expansão térmica α são assumidos como constantes. T_0 e ρ_0 são a temperatura e a densidade de referência, respectivamente.

As condições de contorno na fronteira superior $z = d + \eta(x, t)$ são definidas da seguinte forma[22]:
condição cinemática (ou de não evaporação) da superfície

$$\eta_t + u\eta_x = w, \tag{7.67}$$

condição de continuidade das componentes normal e tangencial das tensões na superfície de um fluido viscoso

$$(P - P_a)N^2 - 2\mu[w_z + u_x\eta_x^2 - u_z\eta_x - w_x\eta_x] = 0, \tag{7.68}$$

$$\mu(1 - \eta_x^2)(u_z + w_x) + 2\mu(w_z - u_x)\eta_x = 0, \tag{7.69}$$

e a condição de fluxo normal de calor

$$\hat{n} \cdot \vec{\nabla} T = -F/K, \tag{7.70}$$

em que $\hat{n}$ é o versor normal à superfície livre expresso por:

$$\hat{n} = (-\eta_x, 1)/N, \qquad N = (1 + \eta_x^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{7.71}$$

F representa o fluxo normal de calor, K é a condutividade térmica e P_a é a pressão constante exercida sobre a superfície livre.

Supomos que a resistência ao deslizamento entre duas camadas do fluido é maior que a resistência entre o fluido e o plano $z = 0$, que delimita inferiormente o fluido [23]. Decorre desta suposição que o plano inferior seja considerado livre de tensões ("stress-free") e o campo de velocidades sobre esta fronteira seja caracterizado por:

$$w = 0, \qquad u_z = 0. \tag{7.72}$$

A condição térmica na fronteira $z = d + \eta(x, t)$ corresponde a um fluxo constante de calor, e na fronteira $z = 0$, a temperatura é mantida constante: $T = T_b$.

A solução estática para este sistema de equações e condições de contorno depende somente da variável z, sendo expressa na forma

$$\begin{aligned} T_s &= T_0 - \frac{F}{K}(z-d), \\ \rho_s &= \rho_0[1+(\alpha F/K)(z-d)], \\ P_s &= P_a - g\rho_0[(z-d)+(\alpha\frac{F}{2K})(z-d)^2]. \end{aligned} \tag{7.73}$$

Em nosso estudo, consideramos perturbações a este estado estático do sistema. Tratamos de perturbações que possuem comprimento de onda típico l e amplitude típica a. Com estas grandezas construímos dois parâmetros perturbativos:

$$\varepsilon = \frac{a}{d}, \qquad \delta = \frac{d}{l}. \tag{7.74}$$

O parâmetro ε mede o quão pequena é a amplitude perturbativa e δ avalia o quão extenso é o comprimento de onda desta perturbação, ambos em relação à profundidade d.

Expressamos as equações (7.63) a (7.66), as condições de contorno (7.67) a (7.72) e a solução estática (7.73) numa forma adimensional, empregando a seguinte adimensionalização das coordenadas:

$$x' = \frac{1}{l}x, \qquad z' = \frac{1}{d}z, \qquad t' = \frac{C_0}{l}t, \tag{7.75}$$

em que

$$C_0^2 = gd. \tag{7.76}$$

Os campos u, w e η são adimensionalizados da seguinte maneira:

$$u' = \frac{C_0}{ag}u, \qquad w' = \frac{C_0 d}{alg}w, \qquad \eta' = \frac{1}{a}\eta. \tag{7.77}$$

Ao substituirmos as variáveis adimensionais, definidas em (7.75) a (7.77), nas equações e condições sobre as fronteiras, obtemos um sistema de equações adimensionais em que estão presentes três parâmetros adimensionais, a saber:

- número de Prandtl $\sigma = \mu/\rho\kappa$
- número de Galileo $G = gd^3\rho_0^2/\mu^2$.
- número de Rayleigh $R = \rho_0 g\gamma F d^4/K\kappa\mu$.

As equações adimensionais resultantes são expressas na forma indicada abaixo, em que eliminamos o sinal $'$ dos campos por simplicidade de notação:

$$\delta^2 u_x + w_z = 0, \tag{7.78}$$

$$\varepsilon\delta^2 u_t + \varepsilon^2\delta^2 u u_x + \varepsilon^2 w u_z = -\delta^2 P_x + \frac{1}{\sqrt{G}}\left(\varepsilon\delta^3 u_{xx} + \varepsilon\delta u_{zz}\right), \tag{7.79}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon\delta^2 w_t + \varepsilon^2\delta^2 u w_x + \varepsilon^2 w w_z &= -\delta^2 P_z + \frac{1}{\sqrt{G}}\left(\varepsilon\delta^3 w_{xx} + \varepsilon\delta w_{zz}\right) \\ &\quad +\delta^2\left[\frac{R}{G\sigma}(T - T_0) - 1\right],\end{aligned} \tag{7.80}$$

$$\varepsilon\delta^2 T_t + \varepsilon^2\delta^2 u T_x + \varepsilon^2 w T_z = \frac{1}{\sigma\sqrt{G}}\left(\varepsilon\delta^3 T_{xx} + \varepsilon\delta T_{zz}\right). \tag{7.81}$$

Em $z = 1 + \varepsilon\eta$:

$$\varepsilon\delta^2\eta_t + \varepsilon^2\delta^2 u\eta_x = \varepsilon w, \tag{7.82}$$

$$\delta(P - P_a)N^2 - \frac{2}{\sqrt{G}}\left(\varepsilon w_z + \varepsilon^3\delta^4 u_x\eta_x^2 - \varepsilon^2\delta^2 u_z\eta_x - \varepsilon^2\delta^2 w_x\eta_x\right) = 0, \tag{7.83}$$

$$[1 - \varepsilon^2\delta^2\eta_x^2][u_z + w_x] + \varepsilon 2\eta_x[w_z - \delta^2 u_x] = 0, \tag{7.84}$$

$$-\varepsilon\delta^2\eta_x T_x + T_z = -N \tag{7.85}$$

Em $z = 0$:

$$\theta = 0, \tag{7.86}$$

$$u_z = 0, \qquad w = 0. \tag{7.87}$$

No contexto do estudo das ondas de grande comprimento em águas rasas, vamos obter a equação de evolução das perturbações na superfície livre. Para isto, expandimos os campos u, w, P e T em potências de z. Consideramos nesta expansão termos que contribuem até a ordem ε ou δ^2. Iniciamos expandindo estes campos:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n, \qquad w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n, \tag{7.88}$$

$$P = P_s + \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n, \tag{7.89}$$

$$T = T_s + \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n z^n \tag{7.90}$$

As componentes u_n, w_n, p_n e θ_n são funções de x e t. Substituindo as expansões de u e w na equação (7.78), obtemos a relação :

$$w_{n+1} = -\delta^2 \frac{u_{nx}}{n+1}. \tag{7.91}$$

Esta relação entre as componentes u_n e w_{n+1} e as condições na fronteira $z = 0$ são simultaneamente satisfeitas se:

$$\begin{aligned} u_1 = 0, u_3 = 0, u_5 = 0, ... \\ w_0 = 0, w_2 = 0, w_4 = 0, ... \end{aligned} \tag{7.92}$$

Introduzindo a expansão de T na equação (7.81) e na condição de contorno (7.86), resulta

$$\theta_0 = 0, \theta_2 = 0, \theta_4 = 0 \quad \theta_6 = 0, etc, \tag{7.93}$$

bem como as expressões para θ_3 e θ_5 em função de θ_1, u_0 e p_0. Quando substituímos a expansão de T e as expressões de θ_3 e θ_5 na equação (7.85), obtemos θ_1 em função de u_0 e p_0:

$$\theta_1 = \delta \left[-\frac{\sigma\sqrt{G}}{2} \varepsilon u_{0x} \right] + \delta^2 \left[-\frac{G\sigma}{24} p_{0xx} + \varepsilon \frac{G\sigma}{24} (5\sigma - 1) u_{0xt} \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2 \delta). \tag{7.94}$$

Usando esta expressão podemos reescrever θ_3 e θ_5 em função de u_0 e p_0

$$\begin{aligned} \theta_3 = \varepsilon\delta \frac{\sigma\sqrt{G}}{6} u_{0x} - \varepsilon\delta^2 \frac{G\sigma^2}{12} u_{0xt} - \delta^3 \frac{G\sigma^2\sqrt{G}}{144} p_{0xt} + \mathcal{O}(\varepsilon\delta^3), \\ \theta_5 = \delta^2 \frac{G\sigma}{120} p_{0xx} + \varepsilon\delta^2 \frac{G\sigma(\sigma+1)}{120} u_{0xt} + \mathcal{O}(\varepsilon\delta^3). \end{aligned} \tag{7.95}$$

Da mesma maneira podemos expressar em função de u_0 e p_0 os termos p_2, p_4, p_6, u_2, u_4, u_6 e u_8. As outras componentes das expansões de u e p contribuem para a equação em ordens maiores que ε ou δ^2. Expressamos, a seguir, as componentes p_2, p_4, p_6, u_2, u_4, u_6 e u_8, considerando apenas os termos que contribuem para a equação de evolução até a ordem ε ou δ^2

$$p_2 = -\varepsilon\delta \left(\frac{R}{4\sqrt{G}} \right) u_{0x} + \varepsilon\delta^2 \left(\frac{R(5\sigma - 1)}{48} \right) u_{0xt} - \delta^2 \left(\frac{R}{48} + \frac{1}{2} \right) p_{0xx} \tag{7.96}$$

$$p_4 = \varepsilon\delta \left(\frac{R}{24\sqrt{G}} \right) u_{0x} - \varepsilon\delta^2 \left(\frac{R\sigma}{48} \right) u_{0xt} \tag{7.97}$$

$$p_6 = \delta^2 \frac{R}{720} p_{0xx} + \varepsilon\delta^2 \left(\frac{R(\sigma+1)}{720}\right) u_{0xt} \tag{7.98}$$

$$u_2 = \delta \frac{\sqrt{G}}{2} u_{0xt} + \varepsilon\delta \frac{\sqrt{G}}{2} u_0 u_{0x} + \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right) \frac{\sqrt{G}}{2} p_{0x} - \delta^2 \frac{1}{2} u_{0xx} \tag{7.99}$$

$$\begin{aligned} u_4 &= \delta^2 \frac{G}{24} u_{0tt} + \frac{\delta^2}{\varepsilon} \left(\frac{G}{24}\right) p_{0xt} - \delta^3 \left(\frac{\sqrt{G}}{12}\right) u_{0xxt} \\ &\quad -\delta^2 \frac{R}{48} u_{0xx} - \frac{\delta^3}{\varepsilon} \left(\frac{R\sqrt{G}}{576} + \frac{\sqrt{G}}{12}\right) p_{0xxx} \end{aligned} \tag{7.100}$$

$$\begin{aligned} u_6 &= \delta^3 \left(\frac{G\sqrt{G}}{720}\right) u_{0ttt} + \frac{\delta^3}{\varepsilon} \left(\frac{G\sqrt{G}}{720}\right) p_{0xtt} \\ &\quad -\delta^3 \left[\frac{R\sqrt{G}(\sigma+1)}{1440}\right] u_{0xxt} + \delta^2 \left(\frac{R}{720}\right) u_{0xx} \end{aligned} \tag{7.101}$$

$$u_8 = \delta^3 \left(\frac{R\sqrt{G}}{40320}\right) \left[\frac{1}{\varepsilon} p_{0xxx} + (\sigma+2) u_{0xxt}\right]. \tag{7.102}$$

Substituindo a expansão de P e a expressão de θ_1 na condição de contorno(7.83), resulta uma expressão que relaciona p_0 a u_0 e η :

$$\begin{aligned} p_0 &= \varepsilon\eta + \varepsilon^2 \left(\frac{R}{2G\sigma}\right) \eta^2 + \varepsilon\delta \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{5R}{24} - 2\right) u_{0x} \\ &\quad +\varepsilon\delta^2 \left[\frac{R}{720}(14 - 61\sigma) u_{0xt} - u_{0xt} + \left(\frac{14R}{720} - \frac{1}{2}\right) \eta_{xx}\right]. \end{aligned} \tag{7.103}$$

Verificamos, assim, que podemos expressar as componentes das expansões de T, P, u e w em função de u_0 e η. Empregando estas componentes, resulta das equações (7.82) e (7.84) um sistema acoplado de equações de evolução para u_0 e η:

$$\begin{aligned} &u_{0t} + \varepsilon u_{0t}\eta + \eta_x + \varepsilon u_0 u_{0x} - \delta \tfrac{1}{\sqrt{G}} \left(4 - \tfrac{2R}{15}\right) u_{0xx} + \varepsilon \left(1 + \tfrac{R}{G\sigma}\right) \eta\eta_x + \delta \tfrac{\sqrt{G}}{6} \left(u_{0tt} + \eta_{xt}\right) \\ &\quad +\delta^2 \left[\tfrac{-11}{6} + \tfrac{73R}{1680} - \tfrac{17R\sigma}{315}\right] u_{0xxt} + \delta^2 \left(\tfrac{4R}{315} - 1\right) \eta_{xxx} + \delta^2 \tfrac{G}{120} \left(u_{0ttt} + \eta_{xtt}\right) = 0, \end{aligned} \tag{7.104}$$

$$\eta_t + u_{0x} + \varepsilon(u_0\eta)_x + \delta \frac{\sqrt{G}}{6} (u_{0xt} + \eta_{xx}) + \delta^2 \left(\frac{155R}{5040} - \frac{1}{2}\right) u_{0xxx} + \delta^2 \frac{G}{120} (u_{0xtt} + \eta_{xxt}) = 0, \tag{7.105}$$

em que consideramos termos até a ordem ε e δ^2.

A componente u_0 é o primeiro termo da expansão de u em potências da variável z. Dissemos anteriormente que as componentes u_2, u_4 e u_6 são funções de u_0 e η. Portanto, até a ordem δ^2, podemos expressar u unicamente em função de u_0 e η:

$$u = u_0 + \left[\delta\frac{\sqrt{G}}{2}(u_{0t}+\eta_x) + \delta^2\left(\frac{5R}{48}-\frac{3}{2}\right)u_{0xx}\right]z^2 + \delta^2\left[\frac{G}{24}(u_{0tt}+\eta_{xt}) - \frac{R}{48}u_{0xx}\right]z^4 + \delta^2\left[\frac{R}{720}u_{0xx}\right]z^6 + \mathcal{O}(\varepsilon\delta,\delta^3). \quad (7.106)$$

Considerando o valor médio desta expressão de u na profundidade z $(0 \leq z \leq 1)$, obtemos:

$$\overline{u} = u_0 + \delta\frac{\sqrt{G}}{6}(u_{0t}+\eta_x) + \delta^2\left[\left(\frac{155R}{5040}-\frac{1}{2}\right)u_{0xx} + \frac{G}{120}(u_{0tt}+\eta_{xt})\right], \quad (7.107)$$

em que $\overline{u}$ denota o valor médio de u. A partir desta expansão de $\overline{u}$ em função de u_0, podemos expressar u_0 em função de $\overline{u}$ da seguinte forma:

$$u_0 = \overline{u} - \delta\frac{\sqrt{G}}{6}(\eta_x + \overline{u_t}) + \delta^2\left[\left(+\frac{1}{2}-\frac{155R}{5040}\right)\overline{u_{xx}} + \frac{7G}{360}(\overline{u_{tt}}+\eta_{xt})\right] + \mathcal{O}(\varepsilon\delta,\delta^3) \quad (7.108)$$

Substituindo a expressão (7.108) na equações (7.104) e (7.105) e empregando as equações resultantes em ordem mais baixa (δ^0,ε^0) para relacionar os termos $\overline{u_t}$ a η_x e $\overline{u_{xxt}}$ a η_{xxx}, obtemos (omitindo o sinal $^-$ do campo u)

$$u_t + \eta_x + \varepsilon u u_x + \varepsilon\left(\frac{R}{G\sigma}\right)\eta\eta_x - \delta\frac{1}{\sqrt{G}}\left(4-\frac{4R}{30}\right)u_{xx} + \delta^2\left(\frac{1}{3}+\frac{17R\sigma}{315}\right)\eta_{xtt} = 0, \quad (7.109)$$

$$\eta_t + u_x + \varepsilon(u\eta)_x = 0. \quad (7.110)$$

Este sistema acoplado de equações não-lineares de evolução corresponde a uma variante da generalização dissipativa da equação de Boussinesq. A equação (7.109) difere de (7.52), obtida no sistema de Bénard-Marangoni, pela presença de um termo proprcional à $\eta\eta_x$, enquanto que a equação (7.50) coincide com a equação (7.110).

No limite em que α e μ tendem a zero, o sistema formado pelas equações (7.109) e (7.110) coincide com o conhecido sistema usual de Boussinesq [14] :

$$u_t + \eta_x + \varepsilon u u_x + \delta^2\left(\frac{1}{3}\right)\eta_{xtt} = 0,$$
$$\eta_t + u_x + \varepsilon(u\eta)_x = 0 \quad (7.111)$$

Quando o número de Rayleigh(R) do sistema assume o valor crítico $R_c = 30$, considerando δ^2 da ordem de ε e escolhendo o sentido de propagação das ondas, por exemplo,

para a direita, obtemos uma relação entre u e η:

$$u = \eta + \varepsilon\frac{1}{4}\left(\frac{R}{G\sigma} - 1\right)\eta^2 - \delta^2\left(\frac{1}{6} + \frac{17\sigma}{630}\right)\eta_{xxt}, \tag{7.112}$$

que constitue uma espécie de invariante de Riemann[14]. Introduzindo esta relação em qualquer uma das equações (7.109) ou (7.110), resulta a seguinte equação :

$$\eta_t + \eta_x + \varepsilon\left(\frac{3G\sigma + 30}{2G\sigma}\right)\eta\eta_x + \delta^2\left(\frac{1}{6} + \frac{17\sigma}{21}\right)\eta_{xxx} = 0. \tag{7.113}$$

Esta é a equação de Korteweg-de Vries[17].

Consideremos agora a situação em que $R \neq 30$. Assumindo que δ é da ordem de ε, reescrevemos as equações (7.109) e (7.110) na seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_t + \eta_x + \varepsilon u u_x - \delta\frac{1}{\sqrt{G}}\left(4 - \frac{4R}{30}\right)u_{xx} + \varepsilon\left(\frac{R}{G\sigma}\right)\eta\eta_x = 0, \\ \eta_t + u_x + \varepsilon(u\eta)_x = 0. \end{aligned} \tag{7.114}$$

Esta é a variante estritamente dissipativa do sistema de equação de Boussinesq, na qual o termo dispersivo não está presente. O sistema (7.114) é semelhante àquele formado pelas equações (7.50) e (7.52), obtido na seção anterior.

Se escolhemos o sentido de propagação das ondas, por exemplo, para a direita, obtemos a seguinte relação entre u e η:

$$u = \eta + \varepsilon\left(\frac{R}{4G\sigma} - \frac{1}{4}\right)\eta^2 - \delta\frac{1}{\sqrt{G}}\left(2 - \frac{R}{15}\right)\eta_x. \tag{7.115}$$

Substituindo esta expressão numa das equações (7.114), obtemos:

$$\eta_t + \eta_x + \varepsilon\left(\frac{3G\sigma + R}{2G\sigma}\right)\eta\eta_x - \delta\frac{1}{\sqrt{G}}\left(2 - \frac{2R}{30}\right)\eta_{xx} = 0, \tag{7.116}$$

que é a equação de Burgers[14].

O sistema acoplado de equações de evolução (7.50) e (7.52) descreve o campo de velocidades e as perturbações na superfície livre do sistema de Bénard-Marangoni. Da mesma forma, o sistema formado pelas equações (7.109) e (7.110) descreve a velocidade e as perturbações na superfície livre do sistema de Rayleigh-Bénard. Estes sistemas de equações podem ser considerados como generalizações dissipativas do sistema usual de Boussinesq. Estas equações envolvem não-linearidade, dispersão e dissipação. A predominância de um

destes comportamentos depende da relação entre os parâmetros ϵ e δ. As versões estritamente dissipativas destes sistemas parecem não terem sido tratadas na literatura. Sua integrabilidade é um problema em aberto.

Capítulo 8

Conclusões

Neste trabalho, estudamos a formação e propagação de ondas não-lineares de superfície em sistemas convectivos, sempre na aproximação de grandes comprimentos de onda. Assim, no capítulo 3 mostramos [5] que para o número de Rayleigh(R) crítico $R_c = 30$, perturbações na superfície bidimensional livre de um sistema de Rayleigh-Bénard evoluem de acordo com a equação de Kadomtsev-Petviashvili. Para $R \neq 30$, deduzimos [8, 9, 10] no capítulo 4 que essas mesmas perturbações são governadas pela equação de Burgers em (2+1)dimensões. Para o mesmo sistema considerado nos capítulos 3 e 4, introduzimos uma dependência da viscosidade com a temperatura no capítulo 5. Mesmo havendo esta dependência, mostramos [6] que continua existindo um número crítico que no qual ocorre um balanço entre a energia fornecida ao sistema na forma de calor e a dissipada pela viscosidade. Como resultado, segue-se que perturbações apropriadas na superfície livre do sistema continuam sendo descritas pelas equações de Kadomtsev-Petviashvili e Burgers, porém o número de Rayleigh crítico é alterado em relação àquele obtido nos capítulos 3 e 4.

No capítulo 6, considerando ainda um sistema de Rayleigh-Bénard, porém alterando as condições de contorno e os "scalings", mostramos [11, 12] a existência de um fenômeno difusivo não-linear descrito por uma equação de difusão não-linear, que ocorre no limiar da convecção para este sistema, caraterizado por um número de Rayleigh crítico $R_c = 320$. Estudamos também as peturbações da superfície livre deste sistema no regime supercrítico, isto é, para $R > 320$. Obtivemos uma equação não-linear dissipativa, que contém um termo proporcional à derivada espacial de quarta ordem. A integrabilidade das equações

de evolução não-lineares que descrevem esses fenômenos ainda é uma questão em aberto.

No capítulo 7, empregamos um método perturbativo apropriado para estudar sistemas acoplados de equações diferenciais, que descrevem ondas não-lineares de superfície. Neste método, consideram-se dois parâmetros perturbativos, definidos em função da amplitude e do comprimento típicos das perturbações da superfície livre. A escolha de diferentes relações entre os parâmetros perturbativos permite-nos coletar de forma precisa termos até determinada ordem e desprezar ordens superiores. Para o sistema de Bénard-Marangoni, obtivemos [15] um sistema acoplado de equações diferenciais parciais não-lineares para a velocidade e a amplitude das perturbações. Este sistema de equações é uma generalização dissipativa do sistema usual de Boussinesq. Esta generalização envolve dispersão e dissipação, sendo a predominância de cada um destes fenômenos descrita pela relação entre os parâmetros perturbativos. Para $\varepsilon = \delta^2$, o sistema de Boussinesq generalizado reduz-se à equação de KdV; para $\varepsilon = \delta$, este sistema resulta na equação de Burgers. A mesma análise foi feita no sistema de Rayleigh-Bénard, obtendo-se resultados análogos.

O estudo de ondas não-lineares na superfície de sistemas convectivos tem sido, nos ultimos anos, um assunto de grande interesse. Ao estudarmos aspectos relacionados a estes sistemas, esperamos ter contribuído não só para o melhor entendimento destes fenômenos, como também para o fornecimento de subsídios a possíveis experiências que porventura venham a ser realizadas com o objetivo de se detectar ondas não-lineares na superfície livre dos sistemas convectivos.

Referências Bibliográficas

[1] C.M.Alfaro and M.C.Depassier, Phys.Rev.Lett.62, 2597 (1989).

[2] S. Chandrasekhar, "Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability" (Clarendon, Oxford, 1961).

[3] P. Manneville, "Dissipative Structure and Weak Turbulence" (Academic Press, New York, 1990).

[4] B.B.Kadomtsev and V.I.Petviashvili, Sov.Phys.Dokl.15, 539 (1970).

[5] S.M.Kurcbart, M.A.Manna, J.G.Pereira and A.N.Garazo, Phys.Lett.A 148, 53 (1990).

[6] R.A.Kraenkel, S.M.Kurcbart, J.G.Pereira and M.A.Manna, Phys.Lett.A 169, 259 (1992).

[7] M.Bartuccelli, P.Pantano and T.Brugarino, Lett. Nuovo Cimento, 37, 433 (1983).

[8] R.A.Kraenkel, S.M.Kurcbart, J.G.Pereira and M.A.Manna, "Kadomtsev-Petviashvili and (2+1)Dimensional Burgers Equation in the Bénard Problem", 7th Workshop on Nonlinear Coherent Structures in Physics and Biology, Dijon, France (Lectures Notes in Physics, vol. 393, Springer-Verlag, Berlin, 1992).

[9] R.A.Kraenkel, S.M.Kurcbart, J.G.Pereira and M.A.Manna, "Some Nonlinear Evolution Equations in the Bénard Problem", 7th Workshop on Nonlinear Evolution Equation and Dynamical Systems, Lecce, Italy (World Scientific, Singapore, 1992).

[10] R.A.Kraenkel, J.G.Pereira and M.A.Manna, Phys.Rev.A, 45, 838 (1992).

[11] R.A.Kraenkel,S.M.Kurcbart,J.G.Pereira and M.A.Manna, Phys.Rev.E, 47, 3303 (1993).

[12] R.A.Kraenkel, S.M.Kurcbart, J.G.Pereira and M.A.Manna, "Diffusive Instability in a Bénard System at the Critical Point for Onset of Convection", to appear in the Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Nonlinear Coherent Structures in Physics and Biology (June 1-4 1993, University of Bayreuth, Germany), Ed. by F.G.Mertens and K.H.Spatschek, (Plenum, 1993).

[13] G.L.Lamb,Jr. "Elements of Soliton Theory"(Wiley, New York, 1980).

[14] G.B.Whitham, "Linear and Nonlinear Waves" (Wiley, New York, 1974).

[15] R.A.Kraenkel,S.M.Kurcbart,J.G.Pereira and M.A.Manna, "Dissipative Boussinesq System of Equations in the Bénard-Marangoni Phenomenon" (submetido para publicação).

[16] L.F.J.Broer, Appl.Sci.Res. 31, 377 (1975).

[17] R.K.Dodd, J.C.Eilbeck, J.D.Gibbon and H.C.Morris, "Solitons and Nonlinear Wave Equations" (Academic Press, London (1982)).

[18] N.J.Zabusky and M.D.Kruskal, Phys.Rev.Lett. 15, 240 (1965).

[19] M.J.Ablowitz and H.Segur, "Solitons and the Inverse Scattering Transform" (SIAM, 4, Philadelphia, 1981).

[20] C.S.Gardner and G.K.Morikawa, Comm.Pure Appl.Math 18, 35 (1965).

[21] T.Taniuti, Suppl. Prog. Theor. Phys. 55, 1 (1974).

[22] J.V.Wehausen and E.V.Laitone, in:" Encyclopaedia of Physics", vol. 9, ed S. Flügge (Springer, Berlin, 1960).

[23] G.C.Stokes, Trans. Cambridge Philos. Soc.8, 287 (1845)[reprinted in: Mathematical and Physical papers, Vol.I, p.75 (Johnson Reprint Corporation, New York,1966)].

[24] M.Jaulent, M.A.Manna and L.M.Alonso, Inverse Probl. 5, 573 (1989).

[25] J.J.Stoker, " Water Waves " (Interscience, London, 1982).

[26] E.Palm, T.Ellingsen and B.Gjevik, J.Fluid Mech. 30, 651 (1967).

[27] D.A.Nield, J.Fluid Mech. 29, 545 (1964).

[28] Ya. B. Zel'dovich and Yu. P. Raizer "Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena", vol.II (Academic Press, New York,1967).

[29] C.J.Chapman and M.R.E.Proctor, J.Fluid Mech. 101, 759 (1980).

[30] V.L.Gertsberg and G.I.Sivashinsky, Prog. Theor. Phys. 66 , 1219 (1981).

[31] Ya. B. Zel'dovich and G.I.Barenblatt Dokl.Akad.Nauk SSSR 41, 671 (1958) [Phys. Dokl.3,44 (1958)].

[32] W.F.Ames, "Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering"(Academic Press, New York, 1967).

[33] S.H.Davis, Ann. Rev.Fluid Mech. 19 , 403 (1987).