

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

**Estimação Bayesiana dos parâmetros da distribuição  
Exponencial Generalizada Bivariada**

Leandro Fernandes Coladello

Orientador: Prof. Dr. Fernando Antonio Moala

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente  
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

**Estimação Bayesiana dos parâmetros da distribuição Exponencial  
Generalizada Bivariada**

Leandro Fernandes Coladello  
Orientador: Prof. Dr. Fernando Antonio Moala

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação  
em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade  
de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do tí-  
tulo de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Março de 2014

Coladello, Leandro Fernandes.


C642e      Estimação Bayesiana dos parâmetros da distribuição Exponencial Generalizada Bivariada  
/ Leandro Fernandes Coladello. - Presidente Prudente : [s.n], 2014  
xiii, 82 f. : il.

Orientador: Fernando Antonio Moala

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Inclui bibliografia

1. Distribuição bivariada. 2. Exponencial Generalizada Bivariada. 3. Análise Bayesiana.  
I. Moala, Fernando Antonio. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e  
Tecnologia. III. Título.

**BANCA EXAMINADORA**

  
\_\_\_\_\_  
**PROF. DR. FERNANDO ANTÔNIO MOALA**  
ORIENTADOR

  
\_\_\_\_\_  
**PROF. DR. JORGE ALBERTO ACHCAR**  
USP

  
\_\_\_\_\_  
**PROF. DR. CARLOS APARECIDO DOS SANTOS**  
UEM

  
\_\_\_\_\_  
**LEANDRO FERNANDES COLADELLO**

Presidente Prudente (SP), 25 de fevereiro de 2014.

RESULTADO: APROVADO

# Resumo

Várias distribuições bivariadas para análise de confiabilidade tem sido propostas, mas a distribuição Exponencial Generalizada Bivariada (BVGE) apresentada por Gupta e Kundu (2009) possui interessantes propriedades. Por exemplo, a distribuição BVGE possui distribuições marginais Exponenciais Generalizadas (GE), que tem sido muito utilizadas em problemas unidimensionais. Dessa forma, uma análise estatística dos parâmetros e distribuição BVGE é de grande importância na modelagem de problemas em confiabilidade. Um modo alternativo de obtenção de distribuições bivariadas (ou multivariadas) é através da teoria de Cópulas e a técnica mostra-se ser uma grande alternativa, à medida que esta teoria permite a criação de distribuições multivariadas sem a necessidade de se supor qualquer tipo de restrição às distribuições marginais e muito menos às multivariadas. Inferências para estas diferentes versões de modelos bivariados de tempo de falha são agora de grande importância, conseqüentemente a realização de uma comparação se faz necessária e o método Bayesiano de análise estatística é amplamente reconhecido por oferecer significantes benefícios na análise de dados e assim justifica sua utilização. Neste trabalho foram consideradas comparações entre as distribuições BVGE e algumas distribuições exponenciais generalizadas bivariadas definidas a partir das funções cópulas, de modo a propor várias opções de distribuições que possam ser utilizadas no caso bivariado.

**Palavras-chave:** Distribuição exponencial generalizada, distribuição bivariada, cópulas, análise Bayesiana.

# Abstract

Many bivariate distributions for survival analysis were proposed, but the Bivariate Generalized Exponential Distribution (BVGE) presented by Gupta and Kundu (2009) has interesting properties. For example, the BVGE distribution has Generalized Exponential marginal distributions, which is used in many unidimensional problems. An alternative way to obtain multivariate (or bivariate) distributions is the use of Copula theory, which is proving to be a useful alternative, because it permits the construction of multivariate distributions without the necessity of giving restrictions to marginal and multivariate distributions. Inference about different bivariate models of failure time are very important, and consequently, comparisons can be made and the Bayesian method is recognized to offer significantly benefits in data analysis, justifying its use. This work considered comparisons between the Bivariate Generalized Exponential Distribution and generalized bivariate exponential distributions obtained by copulas functions.

**Keywords:** Bivariate generalized exponential distribution, bivariate distribution, copulas, Bayesian analysis.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Algumas definições</b>	<b>3</b>
2.1	Inferência Bayesiana . . . . .	3
2.1.1	Priori Uniforme . . . . .	3
2.1.2	Priori de Jeffreys . . . . .	3
2.2	Métodos de seleção de modelos . . . . .	4
2.2.1	AIC . . . . .	4
2.2.2	BIC . . . . .	5
2.2.3	DIC . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Distribuição Exponencial Generalizada Univariada</b>	<b>7</b>
3.1	Introdução . . . . .	7
3.2	Estimação de Máxima Verossimilhança . . . . .	10
3.3	Estimação Bayesiana . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Distribuição Exponencial Generalizada Bivariada</b>	<b>13</b>
4.1	Introdução . . . . .	13
4.2	Definição da distribuição BVGE . . . . .	13
4.3	Estimação de Máxima Verossimilhança . . . . .	18
4.4	Estimação Bayesiana . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Determinando a distribuição BVGE a partir de funções Cópulas</b>	<b>24</b>
5.1	Funções de Cópulas . . . . .	24
5.2	Distribuição BVGE derivada da Cópula Farlie - Gumbel - Morgenstern . . . . .	28
5.3	Distribuição BVGE derivada da Cópula Gumbel-Barnett . . . . .	32
5.4	Distribuição BVGE derivada da Cópula Clayton . . . . .	36
5.5	Distribuição BVGE derivada da Cópula Frank . . . . .	37
5.6	Análise Bayesiana . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Simulação</b>	<b>41</b>
6.1	Simulação de dados via distribuição BVGE de Gupta e Kundu . . . . .	41
6.2	Simulação de dados via distribuição BVGE via cópula FGM . . . . .	42
6.3	Simulação de dados via distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett . . . . .	44
6.4	Simulação de dados via distribuição BVGE via cópula Clayton . . . . .	45

6.5	Simulação de dados via distribuição BVGE via cópula Frank . . . . .	46
<b>7</b>	<b>Aplicação em dados reais</b>	<b>49</b>
7.1	Dados da competição de futebol UEFA. . . . .	49
7.1.1	Ajustamento para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu . . . . .	50
7.1.2	Ajustamento para a distribuição BVGE via cópula FGM . . . . .	54
7.1.3	Ajustamento para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett . . . . .	59
7.1.4	Ajustamento para a distribuição BVGE via cópula Clayton . . . . .	63
7.1.5	Ajustamento para a distribuição BVGE via cópula Frank . . . . .	71
7.1.6	Comparação dos modelos BVGE, BVGE FGM, BVGE Gumbel, BVGE Clayton e BVGE Frank por AIC, BIC e DIC . . . . .	75
7.1.7	Resultados gráficos adicionais baseados no EMV . . . . .	76
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>79</b>
8.1	Propostas Futuras . . . . .	79
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>81</b>

# Lista de Abreviaturas

AIC	Critério de informação de Akaike ( <i>Akaike's Information Criterion</i> )
BIC	Critério da informação Bayesiana ( <i>Bayesian Information Criterion</i> )
BVGE	Exponencial Generalizada Bivariada ( <i>Bivariate Generalized Exponential</i> )
DIC	Critério da informação deviance ( <i>Deviance Information Criterion</i> )
EMV	Estimador de máxima verossimilhança ( <i>Maximum Likelihood Estimator</i> )
f.d.p.	Função densidade de probabilidade ( <i>Density probability function</i> )
f.d.a.	Função distribuição acumulada ( <i>Cumulative distribution function</i> )
f.g.m.	Função geradora de momentos ( <i>Moments generating function</i> )
FGM	Farlie-Gumbel-Morgenstern
i.i.d.	Independentes e identicamente distribuídas. ( <i>Independent and identically distributed</i> )
IC	Intervalo de confiança ( <i>Confidence Interval</i> )
ICr	Intervalo de credibilidade ( <i>Credibility Interval</i> )
GE	Exponencial Generalizada ( <i>Generalized Exponential</i> )
V.a.	Variável aleatória ( <i>Random variable</i> )

# Lista de Figuras

3.1	Diferentes formas para a distribuição Exponencial Generalizada Univariada. . . . .	8
3.2	Funções risco para a distribuição Exponencial Generalizada Univariada. . . . .	10
4.1	Gráficos das f.d.p. conjuntas para a parte contínua com os valores $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda) = (2, 1, 1, 1)$ , $(0.5, 0.5, 0.5, 1)$ e $(5, 5, 5, 1)$ , respectivamente. . . . .	16
4.2	Linhas de contorno para as distribuições da Figura (4.1). . . . .	16
4.3	Gráficos das f.d.p. marginais de $X_1$ e $X_2$ para a parte contínua com $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda) = (a)(2, 1, 1, 1)$ , $(b)(0.5, 0.5, 0.5, 1)$ e $(c)(5, 5, 5, 1)$ , respectivamente. . . . .	17
5.1	Gráfico da f.d.p. conjunta para a distribuição BVGE via cópula FGM, $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ , e contornos para $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1.5$ com $\theta = 0.8, 0.5, 0.1, -0.5, -0.8$ . No gráfico da conjunta, $\theta = 0.8$ . . . . .	30
5.2	Gráfico da f.d.p. conjunta para a distribuição BVGE via cópula FGM, $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ , e contornos para $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ com $\theta = 0.8, 0.5, 0.1, -0.5, -0.8$ . No gráfico da conjunta, $\theta = 0.8$ . . . . .	31
5.3	Gráfico da f.d.p. conjunta para a distribuição BVGE via cópula Gumbel e contornos para $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1.5$ com $\theta = 1, 0.8, 0.5, 0.025, 0$ . No gráfico da conjunta, $\theta = 1$ . . . . .	34
5.4	Gráfico da f.d.p. conjunta para a distribuição BVGE via cópula Gumbel e contornos para $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ com $\theta = 1, 0.8, 0.5, 0.025, 0$ . No gráfico da conjunta, $\theta = 1$ . . . . .	35
5.5	Gráfico da f.d.p. conjunta para a distribuição BVGE via cópula Clayton GK e contornos para $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1.5$ com $\theta = 0.5, 1, 10, 100, 1000$ . No gráfico da conjunta, $\theta = 0.5$ . . . . .	37
5.6	Gráfico da f.d.p. conjunta para a distribuição BVGE via cópula Frank e contornos para $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1.5$ com $\theta = -10, -5, 4, 10, 11$ . No gráfico da conjunta, $\theta = -10$ . . . . .	39
7.1	Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições à posteriori $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda)$ utilizando-se a priori de Jeffreys para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu. . . . .	51
7.2	Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda)$ utilizando-se a priori Uniforme para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu. . . . .	52
7.3	Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda)$ utilizando-se das prioris Gama independentes para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu. . . . .	53
7.4	Comparação das distribuições à posteriori obtidas a partir das prioris especificadas para cada parâmetro da distribuição BVGE. . . . .	54
7.5	Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$ utilizando priori de Jeffreys para a distribuição BVGE via cópula FGM. . . . .	55

7.6	Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$ utilizando priori Uniforme para a distribuição BVGE via cópula FGM. . . . .	56
7.7	Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$ utilizando prioris Gama independentes para a distribuição BVGE via cópula FGM. . . . .	57
7.8	Comparação das distribuições à posteriori obtidas a partir das prioris especificadas para cada parâmetro da distribuição BVGE via cópula FGM. . . . .	58
7.9	Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$ utilizando priori de Jeffreys para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett. . . . .	60
7.10	Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$ utilizando priori Uniforme para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett. . . . .	60
7.11	Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$ utilizando prioris Gama independentes para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett. . . . .	61
7.12	Comparação das distribuições à posteriori obtidas a partir das prioris especificadas para cada parâmetro da distribuição BVGE via cópula Gumbel. . . . .	63
7.13	Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$ utilizando priori de Jeffreys para a distribuição BVGE via cópula Clayton. . . . .	64
7.14	Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$ utilizando priori de Jeffreys para a distribuição BVGE via cópula Clayton GK. . . . .	65
7.15	Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$ utilizando priori Uniforme para a distribuição BVGE via cópula Clayton. . . . .	66
7.16	Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$ utilizando priori Uniforme para a distribuição BVGE via cópula Clayton GK. . . . .	66
7.17	Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$ utilizando prioris Gama independentes para a distribuição BVGE via cópula Clayton. . . . .	67
7.18	Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$ utilizando prioris Gama independentes para a distribuição BVGE via cópula Clayton GK. . . . .	68
7.19	Comparação das distribuições à posteriori obtidas a partir das prioris especificadas para cada parâmetro da distribuição BVGE via cópula Clayton. . . . .	69
7.20	Comparação das distribuições à posteriori obtidas a partir das prioris especificadas para cada parâmetro da distribuição BVGE via cópula Clayton GK. . . . .	70
7.21	Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$ utilizando priori de Jeffreys para a distribuição BVGE via cópula Frank. . . . .	72
7.22	Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$ utilizando priori Uniforme para a distribuição BVGE via cópula Frank. . . . .	73
7.23	Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$ utilizando prioris Gama independentes para a distribuição BVGE via cópula Frank. . . . .	74
7.24	Comparação das distribuições à posteriori obtidas a partir das prioris especificadas para cada parâmetro da distribuição BVGE via cópula Frank. . . . .	75
7.25	Contornos das densidades com base nos EMV para os dados da UEFA. Em (a), apenas as densidades das cópulas são consideradas. Em (b), a distribuição BVGE é adicionada. . . . .	77
7.26	Contornos das sobrevivências com base nos EMV para os dados da UEFA. Em (a), apenas as densidades das cópulas são consideradas. Em (b), a distribuição BVGE é adicionada. . . . .	77

8.1    Diferentes contornos para a distribuição Log-Normal bivariada. . . . . 80

# Lista de Tabelas

3.1	Comportamento das funções risco da GE, Weibull e Gama. . . . .	9
6.1	Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro $\alpha_1 = 2.0$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu. . . . .	41
6.2	Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro $\alpha_2 = 3.0$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu. . . . .	42
6.3	Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro $\alpha_3 = 1.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu. . . . .	42
6.4	Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro $\lambda = 1.0$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu. . . . .	42
6.5	Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro $\alpha_1 = 1.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula FGM. . . . .	43
6.6	Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro $\alpha_2 = 2.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula FGM. . . . .	43
6.7	Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro $\lambda_1 = 0.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula FGM. . . . .	43
6.8	Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro $\lambda_2 = 0.05$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula FGM. . . . .	43
6.9	Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro $\theta = 0.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula FGM. . . . .	43
6.10	Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro $\alpha_1 = 1.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett. . . . .	44

6.11	Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro $\alpha_2 = 2.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett. . . . .	44
6.12	Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro $\lambda_1 = 0.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett. . . . .	44
6.13	Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro $\lambda_2 = 0.05$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett. . . . .	45
6.14	Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro $\theta = 0.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett. . . . .	45
6.15	Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro $\alpha_1 = 1.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Clayton. . . . .	45
6.16	Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro $\alpha_2 = 2.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Clayton. . . . .	45
6.17	Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro $\lambda_1 = 0.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Clayton. . . . .	46
6.18	Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro $\lambda_2 = 0.05$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Clayton. . . . .	46
6.19	Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro $\theta = 0.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Clayton. . . . .	46
6.20	Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro $\alpha_1 = 1.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Frank. . . . .	47
6.21	Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro $\alpha_2 = 2.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Frank. . . . .	47
6.22	Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro $\lambda_1 = 0.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Frank. . . . .	47
6.23	Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro $\lambda_2 = 0.05$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Frank. . . . .	47
6.24	Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro $\theta = 1.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Frank. . . . .	47

7.1	Dados da Liga dos Campeões UEFA (2004-2006). . . . .	49
7.2	Estimativa de máxima verossimilhança (EMV), desvios padrões e intervalos de 95% confiança (IC) para os parâmetros $\alpha_1$ e $\lambda_1$ e $\lambda_2$ supondo $X_1 \sim GE(\alpha_1, \lambda_1)$ . . . . .	50
7.3	Estimativa de máxima verossimilhança (EMV), desvios padrões e intervalos de 95% confiança (IC) para os parâmetros $\alpha_2$ e $\lambda_2$ supondo $X_2 \sim GE(\alpha_2, \lambda_2)$ . . . . .	50
7.4	Estimativa de máxima verossimilhança, desvios padrões e intervalos de 95% confiança para os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e $\lambda$ da distribuição BVGE de Gupta e Kundu. . . . .	50
7.5	Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e $\lambda$ utilizando priori de Jeffreys para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu. . . . .	51
7.6	Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e $\lambda$ utilizando priori Uniforme para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu. . . . .	51
7.7	Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e $\lambda$ utilizando prioris Gama( $\theta_1, \theta_2$ ) independentes com hiperparâmetros $\theta_1 = 0.01$ e $\theta_2 = 0.01$ para cada um dos parâmetros para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu. . . . .	52
7.8	Estimativa de máxima verossimilhança, médias a posteriori e desvios padrões e para os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e $\lambda$ para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu. . . . .	53
7.9	Intervalos de confiança (95%) para os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e $\lambda$ e respectivas amplitudes para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu. . . . .	53
7.10	Intervalos de credibilidade (95%) para os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e $\lambda$ e respectivas amplitudes para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu. . . . .	53
7.11	Estimativa de máxima verossimilhança (EMV), desvios padrões e intervalos de 95% confiança (IC) para os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ e $\theta$ da distribuição BVGE via cópula FGM. . . . .	55
7.12	Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ e $\theta$ utilizando priori de Jeffreys para a distribuição BVGE via cópula FGM. . . . .	55
7.13	Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ e $\theta$ utilizando priori Uniforme para a distribuição BVGE via cópula FGM. . . . .	56
7.14	Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ e $\theta$ utilizando prioris Gama independentes com hiperparâmetros $\theta_1 = 0.01$ e $\theta_2 = 0.01$ e $\theta \sim U[-1, 1]$ para a distribuição BVGE via cópula FGM. . . . .	56
7.15	Estimativa de máxima verossimilhança, médias a posteriori e desvios padrões e para os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ e $\theta$ para a distribuição BVGE via cópula FGM. . . . .	57
7.16	Intervalos de confiança (95%) para os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ e $\theta$ e respectivas amplitudes para a distribuição BVGE via cópula FGM. . . . .	57
7.17	Intervalos de credibilidade (95%) para os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ e $\theta$ e respectivas amplitudes para a distribuição BVGE via cópula FGM. . . . .	58
7.18	Estimativa de máxima verossimilhança (EMV), desvios padrões e intervalos de 95% confiança (IC) para os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ e $\theta$ para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett. . . . .	59
7.19	Estimativa de máxima verossimilhança (EMV), desvios padrões e intervalos de 95% confiança (IC) para os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ e $\theta$ para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett. . . . .	59
7.20	Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$ e $\theta$ utilizando priori de Jeffreys para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett. . . . .	59

7.21	Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ utilizando priori Uniforme para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett.	60
7.22	Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade e confiança para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ utilizando prioris Gama independentes com hiperparâmetros $\theta_1 = 0.01$ e $\theta_2 = 0.01$ e $\theta \sim U[0, 1]$ . para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett . . .	61
7.23	Estimativa de máxima verossimilhança, médias a posteriori e desvios padrões e para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett. . . . .	61
7.24	Intervalos de confiança (95%) para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ e respectivas amplitudes para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett. . . . .	62
7.25	Intervalos de credibilidade (95%) para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ e respectivas amplitudes para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett. . . . .	62
7.26	Estimativa de máxima verossimilhança (EMV), desvios padrões e intervalos de 95% confiança (IC) para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ da distribuição BVGE via cópula Clayton. . . . .	64
7.27	Estimativa de máxima verossimilhança (EMV), desvios padrões e intervalos de 95% confiança (IC) para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ da distribuição BVGE via cópula Clayton GK. . . .	64
7.28	Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ utilizando priori de Jeffreys para a distribuição BVGE via cópula Clayton. .	65
7.29	Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ utilizando priori de Jeffreys para a distribuição BVGE via cópula Clayton GK.	65
7.30	Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ utilizando priori Uniforme para a distribuição BVGE via cópula Clayton. . .	65
7.31	Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ utilizando priori Uniforme para a distribuição BVGE via cópula Clayton GK.	66
7.32	Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ utilizando prioris Gama independentes com hiperparâmetros $\theta_1 = 0.01$ e $\theta_2 = 0.01$ para a distribuição BVGE via cópula Clayton . . . . .	67
7.33	Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ utilizando prioris Gama independentes com hiperparâmetros $\theta_1 = 0.01$ e $\theta_2 = 0.01$ para a distribuição BVGE via cópula Clayton GK. . . . .	67
7.34	Estimativa de máxima verossimilhança, médias a posteriori e desvios padrões e para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ para a distribuição BVGE via cópula Clayton. . . . .	68
7.35	Intervalos de confiança (95%) para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ e respectivas amplitudes para a distribuição BVGE via cópula Clayton. . . . .	68
7.36	Intervalos de credibilidade (95%) para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ e respectivas amplitudes para a distribuição BVGE via cópula Clayton. . . . .	71
7.37	Estimativa de máxima verossimilhança, médias a posteriori e desvios padrões e para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ para a distribuição BVGE via cópula Clayton GK. . . . .	71
7.38	Intervalos de confiança (95%) para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ e respectivas amplitudes para a distribuição BVGE via cópula Clayton GK. . . . .	71
7.39	Intervalos de credibilidade (95%) para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ e respectivas amplitudes para a distribuição BVGE via cópula Clayton GK. . . . .	71

7.40	Estimativa de máxima verossimilhança (EMV), desvios padrões e intervalos de 95% confiança (IC) para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ da distribuição BVGE via cópula Frank. . . . .	72
7.41	Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ utilizando priori de Jeffreys para a distribuição BVGE via cópula Frank. . . . .	72
7.42	Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ utilizando priori Uniforme para a distribuição BVGE via cópula Frank. . . . .	73
7.43	Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ utilizando prioris Gama independentes com hiperparâmetros $\theta_1 = 0.01$ e $\theta_2 = 0.01$ para a distribuição BVGE via cópula Frank. . . . .	73
7.44	Estimativa de máxima verossimilhança, médias a posteriori e desvios padrões e para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ para a distribuição BVGE via cópula Frank. . . . .	74
7.45	Intervalos de confiança (95%) para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ e respectivas amplitudes para a distribuição BVGE via cópula Frank. . . . .	74
7.46	Intervalos de credibilidade (95%) para os parâmetros $\alpha_1$ , $\alpha_2$ , $\lambda_1$ , $\lambda_2$ e $\theta$ e respectivas amplitudes para a distribuição BVGE via cópula Frank. . . . .	75
7.47	Cálculo do AIC, BIC e DIC para os modelos BVGE, BVGE FGM e BVGE Gumbel, BVGE Clayton, BVGE Clayton GK e BVGE Frank. . . . .	76

# Capítulo 1

## Introdução

Geralmente, os estudos de sistemas de confiabilidade em engenharia assumem independência entre os tempos de falhas dentro do mesmo componente. Contudo, em muitas aplicações poderíamos ter tempos de falha correlacionados e a confiabilidade do sistema pode ser modificada por esta suposição. Desta forma, teríamos tempos de falhas  $T_1$  e  $T_2$  associados a cada componente. Este problema é de grande interesse em aplicações industriais e de engenharia.

Na teoria de Análise de Confiabilidade há claramente uma necessidade de distribuições bivariadas. Por exemplo, em um sistema de confiabilidade, a falha simultânea de componentes poderia dominar a chance de falha individual. Assim, uma análise estatística da causa comum de falha é importante para eliminar ou diminuir as chances dessas falhas. Neste caso, as distribuições bivariadas de confiabilidade são aplicáveis como um modelo de falha para tal sistema, em que o efeito de qualquer correlação entre as confiabilidades existe na confiabilidade geral do sistema.

As distribuições de tempos de falha bivariadas são consideradas para descreverem tais dependências como as propostas por Freund (1961) [FRE61]; Marshall e Olkin (1976) [MO76]; Sarkar (1987) [SAR87]; Dowton (1970) [DOW70]; Gumbel (1960) [GUM60]; Hawkes (1988) [HAW72]; Block e Basu (1974) [BB74]. Geralmente, as distribuições bivariadas de tempo de falha estendem algumas populares distribuições univariadas como Exponencial, Gamma, Weibull ou uma distribuição Log-normal.

Outras distribuições de tempo de falha univariadas podem ser estendidas para o caso bivariado. Um desses modelos é a distribuição Exponencial Generalizada, introduzida por Gupta e Kundu (1999) [DR99], que mostrou ser uma forma bastante eficaz para análise de dados de tempo de falhas univariados (ver, por exemplo, Gupta e Kundu (2000) [DR00], Gupta e Kundu (2007) [DR07] e Moala, Achcar e Tarumoto (2010) [JAJ10]). Esta distribuição é uma alternativa às já bem conhecidas distribuições Gamma e Weibull. Uma vez que a função de distribuição da Exponencial Generalizada é apresentada numa forma fechada, é facilmente utilizada para analisar dados de tempo de falha.

Recentemente Kundu e Gupta (2009) [DR09] introduziram uma distribuição bivariada cujas distribuições marginais são Exponenciais Generalizadas, denominada distribuição Exponencial Generalizada Bivariada (BVGE) com quatro parâmetros. A distribuição BVGE tem várias propriedades desejáveis, e pode ser utilizada de forma bastante eficaz para analisar dados de falhas bivariados quando existe dependência entre eles. Por ser muito recente a proposta da distribuição BVGE, há apenas dois ou três artigos na literatura, o que levou a realização deste trabalho e à aplicação de métodos Bayesianos para estimação de seus parâmetros.

A utilização da metodologia das funções cópulas, alternativa para obtenção de distribuições multivariadas, também é utilizada para derivar diferentes distribuições exponenciais bivariadas (ver, por exemplo, Nelsen

(2006) [NEL06]; Trived e Zimmer (2005 a, b) [TZ5a], [TZ5b]).

Por exemplo, Achcar, Moala e Tarumoto (2010) [AJH10] apresentam uma nova versão para uma distribuição Exponencial Generalizada Bivariada derivada da função cópula Farlie-Gumbel-Morgensten, proposta por Morgenstern (1956) [MOR56], com marginais dadas por distribuições Exponenciis Generalizada Univariadas. No artigo, uma análise Bayesiana é apresentada para essa distribuição na presença de dados censurados e covariáveis.

Neste trabalho, para a obtenção das estimativas dos parâmetros da distribuição BVGE proposta por Kundu e Gupta, serão utilizados métodos diferentes daqueles abordados pelos autores; por exemplo, métodos Bayesianos. Para tanto, foi realizada uma aplicação com um conjunto de dados extraído de Meintanis (2007) [MEI07], que referem-se a partidas de futebol da Liga dos Campeões da UEFA no período de 2004-2006. As amostras para a distribuição conjunta a posteriori de interesse foram simuladas usando métodos MCMC (Markov Chain Monte Carlo). Uma comparação entre as distribuições BVGE e as distribuições exponenciais generalizadas bivariadas, obtidas com as derivadas das funções cópulas, também foram consideradas.

Para tanto, no capítulo 2 são revisados rapidamente alguns conceitos estatísticos já conhecidos e que serão utilizados no decorrer deste trabalho. No capítulo 3 são apresentados os conceitos da distribuição Exponencial Generalizada Univariada. No capítulo 4 é discutida a versão bivariada da distribuição, proposta por Gupta e Kundu (1999), com ênfase em suas propriedades estatísticas. No capítulo 5, o conceito de cópula é abordado juntamente com as formulações das distribuições BVGE a partir das derivadas das cópulas Farlie-Gumbel-Morgenstein, Gumbel-Barnett, Clayton e Frank. No capítulo 6 são realizadas simulações a partir das distribuições estudadas com tamanhos amostrais diferentes. No capítulo 7 é realizada uma aplicação com dados reais baseados em resultados clássicos e Bayesianos. Por fim, no capítulo 8 os principais resultados e conclusões são apontados.

# Capítulo 2

## Algumas definições

Seguem neste capítulo definições de conceitos importantes que foram utilizados na análise estatística deste trabalho tais como os conceitos de inferência Bayesiana, prioris, posterioris e também das medidas AIC, BIC e DIC.

### 2.1 Inferência Bayesiana

Ao contrário da inferência clássica, a Inferência Bayesiana trata um parâmetro de interesse, por exemplo,  $\theta$ , como uma variável aleatória e, portanto, com uma distribuição de probabilidade a priori. Esta distribuição deve representar probabilisticamente o conhecimento que se tem sobre  $\theta$  antes da realização do experimento. Em situações onde não há informações disponíveis sobre o parâmetro, é necessário uma priori,  $\pi(\theta)$ , que exiba pouca ou nenhuma informação que influencie nos dados, evitando assim a subjetividade da informação. Na literatura encontram-se várias formulações para as prioris não-informativas, como exemplo, Jeffreys (1967) [JEF], Uniforme, entre outras.

A distribuição a posteriori, escrita como  $p(\theta|x)$  tem como fundamento o Teorema de Bayes:

$$p(\theta|x) = \frac{p(\theta, x)}{p(x)} = \frac{p(x|\theta)p(\theta)}{p(x)} = \frac{L(\theta|x)\pi(\theta)}{\int L(\theta|x)\pi(\theta)d\theta} \propto L(\theta|x)\pi(\theta). \quad (2.1)$$

Neste trabalho tomou-se como prioris não-informativas: priori de Jeffreys, priori Uniforme e produto de prioris Gamma independentes com grande variância.

#### 2.1.1 Priori Uniforme

Uma priori que expressa pouca ou nenhuma informação pode ser dada pela priori Uniforme (Laplace, 1774) [LAP74], dada por:

$$\pi_U(\theta) \propto cte. \quad (2.2)$$

#### 2.1.2 Priori de Jeffreys

A priori de Jeffreys (1967) [JEF] é comumente utilizada em análises Bayesianas para representar situações com pouca informação disponível. Esta priori é derivada da matriz de Informação de Fisher  $I(\phi)$  como:

$$\pi_J(\phi) \propto \sqrt{\det[I(\phi)]}. \quad (2.3)$$

onde  $\phi$  pode ser real ou vetor e cada elemento da matriz pode ser escrito como:

$$I_{ij}(\phi) = -E\left(\frac{\partial^2 \log f(x|\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j}\right).$$

Box e Tiao (1973) [BT73] explicam a derivação não-informativa da priori de Jeffreys em termos da verossimilhança.

A priori de Jeffreys é amplamente utilizada devido a sua propriedade de invariância sob transformações um-a-um de  $\phi$ . Embora a priori de Jeffreys tenha muitas propriedades de interesse, discute-se se uma versão multivariada da mesma é apropriada. Sua versão multiparamétrica pode sofrer transformações em que a verossimilhança não é transladada (veja Box e Tiao para detalhes).

## 2.2 Métodos de seleção de modelos

### 2.2.1 AIC

O critério de Informação de Akaike (do inglês, *Akaike Information Criterion* - AIC) é baseado na Informação de Kullback-Leibler.

A Informação de Kullback-Leibler (K-L) é uma medida de discriminação entre um modelo estatístico (modelo candidato) e a verdadeira distribuição dos dados (modelo verdadeiro). Geralmente, este modelo verdadeiro é uma abstração. A informação ou distância de Kullback-Leibler entre os modelos  $f(x)$  e  $g(x)$  é definida como:

$$I_{KL}[f(x), g(x)] = \int f(x) \log\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) dx. \quad (2.4)$$

Segundo Akaike (1973) [AKA73] o problema para obter um critério rigoroso de seleção de modelos baseado na informação K-L está em estimar

$$E_Y[E_X[\log(g(x|\hat{\theta}(y)))]], \quad (2.5)$$

em que  $E_X[\log(g(x|\hat{\theta}(y)))]$  é nada mais que a  $E[\log(g(x))]$ , com  $\theta$  sendo substituído pelo estimador de máxima verossimilhança de  $\theta$  sobre uma amostra  $Y$  do modelo candidato. Aqui  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.

Assim, o valor da função de log-verossimilhança maximizada é uma estimativa tendenciosa da Eq. (2.5), com vício aproximado pelo número  $k$  de parâmetros estimáveis do modelo candidato. Para maiores esclarecimentos ver Burnham and Anderson (2004). Logo, um estimador não viciado da Eq. (2.5) para grandes amostras é:

$$\hat{E}(I_{KL}) = \log(L(\hat{\theta})) - k. \quad (2.6)$$

Multiplicando a Eq. (2.6) por  $(-2)$  temos que o critério de AIC para seleção de modelos é dado por:

$$AIC = -2\log L(\hat{\theta}) + 2k. \quad (2.7)$$

### 2.2.2 BIC

O Critério da Informação Bayesiana (BIC) apresenta forma semelhante ao AIC em uma estrutura Bayesiana, em outras palavras ele pode ser utilizado como uma estimativa do Fator de Bayes. Superficialmente o mesmo difere do AIC somente por depender do tamanho amostral.

BIC é um método de estimação que procura a probabilidade à posteriori de um modelo  $M_\theta$ , isto é, a soma ponderada das probabilidades a posteriori das hipóteses em  $M_\theta$  que correspondem a diferentes valores de  $\theta$ . A maneira de se obter este método, demonstrado por Schwarz (1978), é reproduzida a seguir.

Assuma que  $M_\theta$  é um dos modelos candidatos, com um vetor de parâmetros  $k$ -dimensional e que o interesse seja aproximar a probabilidade a posteriori de  $M_\theta$ . Assuma ainda que a função densidade de probabilidade para  $X$  pertence à família exponencial.

Uma particular distribuição pertence a família exponencial se a mesma pode ser escrita como:

$$p(x|\theta) = e^{n[A(x) - \lambda|\theta - \hat{\theta}(x)]^2}, \quad (2.8)$$

em que  $\hat{\theta}(x)$  denota o estimador de máxima verossimilhança (EMV) do parâmetro  $\theta$  desconhecido e  $n$  o tamanho amostral.

A probabilidade de  $M_\theta$  proporcional a priori  $\pi(M_\theta)$  e a verossimilhança de  $M_\theta$  é definida por:

$$\begin{aligned} p(M_\theta|x) &\propto \int_{\theta \in \Theta} e^{n[A(x) - \lambda|\theta - \hat{\theta}(x)]^2} \pi(M_\theta) d\theta = \\ &= \pi(M_\theta) e^{nA(x)} \int_{\theta \in \Theta} e^{-n\lambda|\theta - \hat{\theta}(x)|^2} d\theta. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Substituindo  $\theta$  por  $\theta/\sqrt{n\lambda}$  e considerando que a estimativa de máxima verossimilhança  $\hat{\theta}(x)$  é  $p(x|\hat{\theta}(x)) = e^{nA(x)}$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \log p(M_\theta|x) &\propto \log \pi(M_\theta) + nA(x) + \log \left( \frac{1}{n\lambda} \right)^{\frac{k}{2}} + \log \int_{\theta \in \Theta} e^{-|\theta - \hat{\theta}(x)|^2} d\theta = \\ &= \log \pi(M_\theta) + nA(x) + \frac{1}{2}k \log \left( \frac{1}{n\lambda} \right) + \log \sqrt{\pi}^k = \\ &= \log \pi(M_\theta) + \log p(x|\hat{\theta}(x)) - \frac{1}{2}k \log \left( \frac{n\lambda}{\pi} \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Analisando o lado esquerdo da Eq. (2.10) tem-se a função log-posteriori, um critério de comparação padrão Bayesiano, em que quanto maior o valor, mais vantajoso escolhê-lo. Ainda da Eq. (2.10), esta pode ser separada em três termos: probabilidade a priori (em  $\log$ ), a log-verossimilhança dado o EMV estimado e uma penalidade proporcional ao número de parâmetros do modelo. Assim, obteve-se o “núcleo” do método BIC.

Schwartz sugere estimar a log-posteriori utilizando aproximação para amostras grandes. Assim, o modelo com maior probabilidade a posteriori é o modelo que minimiza

$$BIC(M_\theta, x) = -2 \log p(x|\hat{\theta}(x)) + k \log n. \quad (2.11)$$

### 2.2.3 DIC

DIC é uma medida de complexidade com base nas suas propriedades de estimação, conhecido como o número de parâmetros efetivos.

Estudiosos sugeriram medir tal complexidade comparando a *deviance* (desvio) esperada dos dados (sob a distribuição a posteriori) e a *deviance* na estimativa  $\hat{\theta}(x)$  que está sendo utilizada.

A medida canônica explicada entre o dado  $x$  e o modelo é  $-\log p(x|\theta)$  pois:

- (i) Se  $x$  ocorre e era improvável, a “surpresa” sobre  $\theta$  é alta, então a hipótese é punida com uma alta *deviance*.
- (ii) Se  $x$  ocorre sob  $\theta$ , a hipótese é “premiada” com uma *deviance* pequeno.
- (iii) Além disso, no caso de variáveis i.i.d.  $X_1, X_2, \dots, X_N$ ,  $p(x_1, x_2, \dots, x_N|\theta) = \prod_i p(x_i|\theta)$ .

Prosseguindo, pode-se comparar a *deviance* esperado (condicional a posteriori de  $\theta$ ) com a *deviance* observado sob a atual estimativa de  $\theta$ . Assuma que essa quantia seja denominada Pd. Assim:

$$\begin{aligned} Pd &= E_{\theta|x}[-2\log p(x|\theta)] - 2[-\log p(x|\hat{\theta}(x))] = \\ &= 2\log p(x|\hat{\theta}(x)) - 2 \int_{\theta \in \Theta} \log p(x|\theta) p(\theta|x) d\theta. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Pd mede a extensão que a estimativa  $\hat{\theta}(x)$  é esperada em sobreajustar os dados e quanto *deviance* pode-se esperar em observar no futuro.

Deste modo, sendo  $D = -2\log p(x|\theta)$ ,

$$Pd = E_{\theta|x}[D] - D[E_{\theta|x}(\theta)] = \bar{D} - \hat{D} \quad (2.13)$$

Em um processo iterativo, como *Gibbs Sampling*,  $\bar{D}$  é a média das log-verossimilhanças calculadas ao final de cada iteração do algoritmo de Gibbs,  $\hat{D}$  é a log-verossimilhança calculada usando a média a posteriori de  $\theta$ , ou seja, o ajuste e Pd é uma penalidade de superestimação do modelo. Note que, adicionando vários parâmetros com variâncias grandes, irão ser produzidas iterações com verossimilhanças distantes dos valores de  $\hat{D}$ .

Finalmente, o DIC é definido analogamente ao AIC como:

$$DIC = \hat{D} + 2Pd = \bar{D} + Pd. \quad (2.14)$$

O DIC é, portanto, uma generalização do AIC. Maiores detalhes podem ser encontrados em Burnham e Anderson (2004) [BA04] e Erar e Cetin (2002) [EC02].

## Capítulo 3

# Distribuição Exponencial Generalizada Univariada

### 3.1 Introdução

Gompertz e Verhust (*apud* Gupta e Kundu (1999)) utilizaram algumas distribuições acumuladas durante a primeira metade do século XIX a fim de comparar tabelas referentes à mortalidade humana. Dentre elas, apresentaram:

$$F(x; \alpha, \lambda, \rho) = (1 - \rho e^{-x\lambda})^\alpha, \quad x \geq \frac{1}{\lambda} \ln \rho; \quad \rho, \lambda, \alpha \in \mathfrak{R}^+. \quad (3.1)$$

A distribuição Exponencial Generalizada Univariada (*GE*) foi definida como um caso particular da distribuição (3.1), quando  $\rho = 1$ . Assim, a variável aleatória (v.a.)  $X$  é assumida ter distribuição  $GE(\alpha, \lambda)$  com parâmetros  $\alpha$  e  $\lambda$  se sua função distribuição for dada por:

$$F(x; \alpha, \lambda) = (1 - e^{-x\lambda})^\alpha; \quad x \geq 0, \quad \alpha, \lambda \geq 0. \quad (3.2)$$

Aqui,  $\alpha$  e  $\lambda$  comportam-se como parâmetros de forma e de escala, respectivamente. Tomando-se  $\alpha = 1$ , obtém-se a função distribuição Exponencial usual.

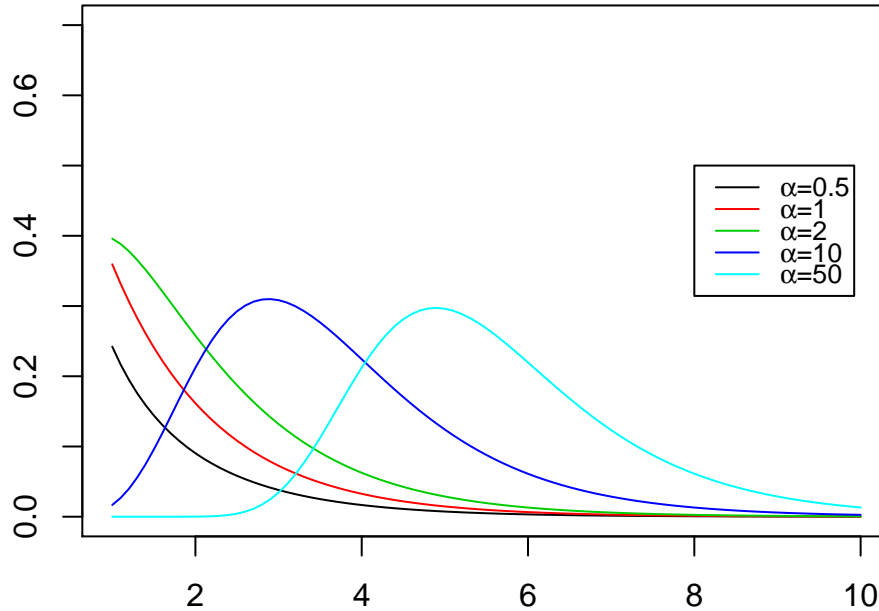
A correspondente função densidade de probabilidade de (3.2) é dada por:

$$f(x; \alpha, \lambda) = \alpha \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-x\lambda})^{\alpha-1} \quad x \geq 0, \quad \alpha, \lambda \geq 0. \quad (3.3)$$

A função densidade (3.3) apresenta grande flexibilidade de ajustamento quando se varia o parâmetro de forma  $\alpha$ , conforme apresentado na Figura (3.1).

A função geradora de momentos (f.g.m.) para uma variável  $X \sim GE(\alpha, \lambda)$  é dada por:

$$\begin{aligned} M(t) &= E(e^{tX}) = \\ &= \alpha \lambda \int_0^{+\infty} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1} e^{(t-\lambda)x} dx = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(1-t/\lambda)}{\Gamma(\alpha-t/\lambda+1)}, \quad t \leq \lambda. \end{aligned} \quad (3.4)$$



**Figura 3.1:** Diferentes formas para a distribuição Exponencial Generalizada Univariada.

onde  $\Gamma(\delta) = \int_0^{\infty} x^{\delta-1} e^{-x} dx$  é a Função Gama.

Diferenciando (3.4) e avaliando-a em  $t = 0$ , tem-se os momentos de interesse, esperança e variância,  $E(X)$  e  $V(X)$ , respectivamente, dados por:

$$E(X) = \frac{\Psi'(\alpha+1) - \Psi(1)}{\lambda} \quad (3.5)$$

e

$$V(X) = \frac{\Psi'(1) - \Psi'(\alpha+1)}{\lambda^2}, \quad (3.6)$$

em que  $\Psi(\cdot)$  é a função digama dada por  $\Psi(\delta) = \frac{d}{d\delta} \log \Gamma(\delta)$ .

As funções de sobrevivência e risco são de grande interesse na área de confiabilidade, e, no caso da função densidade (3.3) para  $X$ , são obtidas, respectivamente, como:

$$S(x; \alpha, \lambda) = P(X \geq x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x})^\alpha \quad (3.7)$$

e

$$h(x; \alpha, \lambda) = \frac{f(x; \alpha, \lambda)}{S(x; \alpha, \lambda)} = \frac{\alpha \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha-1}}{1 - (1 - e^{-\lambda x})^\alpha}. \quad (3.8)$$

Para efeito de comparação, as funções risco das distribuições Gama e Weibull são dadas, respectivamente, por:

$$h_G(t; \alpha, \lambda) = \frac{\lambda t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha, \lambda t)}$$

e

$$h_W(t; \alpha, \lambda) = \alpha \lambda^\alpha t^{\alpha-1}.$$

Note que, para  $\alpha = 1$ , as três distribuições tornam-se distribuições Exponenciais com parâmetro  $\lambda$ . Assim, todas são generalizações distintas da distribuição Exponencial. Se  $\alpha > 1$ ,  $h(x; \alpha, \lambda)$  aumenta de 0 à  $\lambda$  (log-côncavo) e decresce de  $+\infty$  até 1, se  $\alpha < 1$  (log-convexo). Se  $\alpha = 1$ ,  $h(x; \alpha, \lambda) = \lambda$ , i.é., a função risco é constante. Esse comportamento é similar ao comportamento da função risco de uma distribuição Gama e pode ser mostrado observando-se a derivada segunda do logaritmo de (3.3). Em comparação à Weibull, as distribuições Gama e GE podem ser alternativas devido a taxa de falha da Weibull crescer ao infinito, enquanto nas outras duas crescem até  $\lambda$  - digamos que se estabilizam devido à manutenção de um determinado componente. Uma comparação entre as três funções riscos é dada na Tabela (3.1).

Para dados relacionados à sobrevivência, a distribuição GE não só é uma boa alternativa à distribuição Gama, mas também à distribuição Weibull. A Figura (7.1) apresenta as diversas formas que as funções risco para a distribuição Exponencial Generalizada Univariada assumem.

**Tabela 3.1:** *Comportamento das funções risco da GE, Weibull e Gama.*

Parâmetro	GE	Weibull	Gama
$\alpha = 1$	Constante ( $\lambda$ )	Constante ( $\lambda$ )	Constante ( $\lambda$ )
$\alpha > 1$	Aumenta de 0 à $\lambda$	Aumenta de 0 à $+\infty$	Aumenta de 0 à $\lambda$
$\alpha < 1$	Decresce de $+\infty$ à $\lambda$	Decresce de $+\infty$ à 0	Decresce de $+\infty$ à $\lambda$

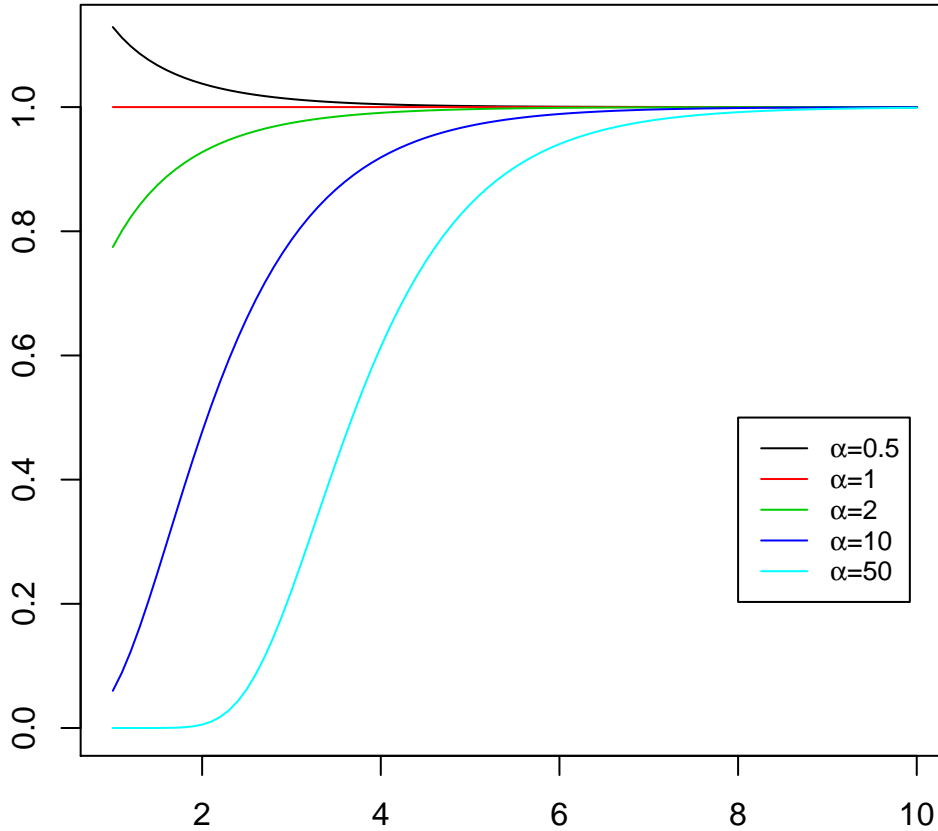


Figura 3.2: Funções risco para a distribuição Exponencial Generalizada Univariada.

### 3.2 Estimação de Máxima Verossimilhança

Suponha que se tenha uma amostra aleatória (a.a.) cujos elementos  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sejam provenientes de uma distribuição  $GE(\alpha, \lambda)$ . A função de verossimilhança baseada em  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  nos parâmetros  $\lambda$  e  $\alpha$  é dada por:

$$L(\theta; X) = \alpha^n \lambda^n \prod_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda x_i})^{\alpha-1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}, \quad (3.9)$$

onde  $\theta = (\alpha, \lambda)$ .

Consequentemente, sua log-verossimilhança é dada por:

$$l(\theta; X) = n \log \alpha + n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-\lambda x_i}). \quad (3.10)$$

Através de (3.10) os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) para os parâmetros  $\alpha$  e  $\lambda$  podem ser obtidos, bastando encontrar a solução do sistema composto pelas equações  $\frac{\partial}{\partial \alpha} l = 0$  e  $\frac{\partial}{\partial \lambda} l = 0$ . Deste modo, os

EMV de  $\alpha$  e  $\lambda$  são soluções das equações:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} l = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-\lambda x_i}) = 0 \quad (3.11)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} l = \frac{n}{\lambda} + \sum_{i=1}^n x_i + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{-\lambda x_i}}{1 - e^{-\lambda x_i}} = 0. \quad (3.12)$$

De (3.11) e (3.12), os EMV são dados pelas equações:

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(1 - e^{-\hat{\lambda} x_i})} \quad (3.13)$$

e

$$\frac{n}{\hat{\lambda}} - \sum_{i=1}^n x_i + (\hat{\alpha} - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{-\hat{\lambda} x_i}}{(1 - e^{-\hat{\lambda} x_i})} = 0. \quad (3.14)$$

Apesar de  $\hat{\alpha}$  possuir solução explícita, é necessário utilizar métodos iterativos para a obtenção de  $\hat{\lambda}$ . Um método possível seria o algoritmo de Newton-Raphson. O *software R* contém pacotes específicos que realizam esse procedimento, tais como *maxLik* e *mle*, desde que fornecidas as funções de log-verossimilhança para o primeiro pacote e o negativo da mesma para o segundo.

Os estimadores de máxima verossimilhança de  $\alpha$  e  $\lambda$  são viciados para amostras pequenas. No caso de grandes amostras ( $n \rightarrow \infty$ ) tornam-se não-viciados. Tais estimadores têm distribuição conjunta assintoticamente normal dada por:

$$(\hat{\alpha}, \hat{\lambda}) \sim N_2((\alpha, \lambda), I^{-1}(\alpha, \lambda)), \quad (3.15)$$

em que  $I(\alpha, \lambda)$  é a matriz de informação de Fisher, dada por:

$$I(\alpha, \lambda) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E \left[ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} l \right] & -E \left[ \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \lambda} l \right] \\ -E \left[ \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \lambda} l \right] & -E \left[ \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} l \right] \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Segundo Gupta e Kundu (1999) [DR99], com base em (3.3), os elementos de (3.16), para  $\alpha > 2$  são obtidos:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{n}{\alpha^2}; \\ a_{22} &= \frac{n}{\lambda^2} \left[ 1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-2} [\psi'(1) - \psi'(\alpha-1) + [\psi(\alpha-1) - \psi(1)]^2] \right. \\ &\quad \left. - \alpha [\psi'(1) - \psi'(\alpha) + [\psi(\alpha) - \psi(1)]^2] \right]; \\ a_{12} = a_{21} &= \frac{n}{\lambda} \left[ [\psi(\alpha+1) - \psi(1)] - \frac{\alpha}{\alpha-1} [\psi(\alpha) - \psi(1)] \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Se  $0 < \alpha \leq 2$ , os elementos  $a_{12} = a_{21}$  e  $a_{22}$  não possuem expressão fechada e devem ser obtidos numericamente. Os elementos serão dados pela aproximação numérica de:

$$a_{12} = -n\alpha\lambda \int_0^{\infty} x e^{-2x} (1 - e^{-x})^{\alpha} dx$$

e

$$a_{22} = -\frac{n}{\lambda^2} - n\alpha(\alpha-1)\lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-2x} (1 - e^{-x})^{\alpha-3} dx.$$

### 3.3 Estimação Bayesiana

Para uma análise Bayesiana da distribuição  $GE(\alpha, \lambda)$ , diferentes prioris podem ser assumidas para  $\alpha$  e  $\lambda$ . A priori de Jeffreys, discutida em (2.3), para  $\alpha$  e  $\lambda$ , é dada por:

$$\pi_J(\alpha, \lambda) \propto \sqrt{\det[\bar{I}(\alpha, \lambda)]}, \quad (3.18)$$

isto é,

$$\begin{aligned} \pi_J^{1/2}(\alpha, \lambda) \propto & \frac{1}{\alpha^2 \lambda^2} \left[ 1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha-2} [\psi'(1) - \psi'(\alpha-1)] \right. \\ & \left. + [\psi(\alpha-1) - \psi(1)]^2 - \alpha[\psi'(1) - \psi'(\alpha) + [\psi(\alpha) - \psi(1)]^2] \right] \\ & - \frac{1}{\lambda^2} \left[ [\psi(\alpha+1) - \psi(1)] - \frac{\alpha}{\alpha-1} [\psi(\alpha) - \psi(1)] \right]^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Outras prioris podem ser especificadas, por exemplo, prioris Gama independentes, isto é,

$$\pi_\alpha(\alpha) \sim \text{Gama}(a_\alpha, b_\alpha),$$

$$\pi_\lambda(\lambda) \sim \text{Gama}(a_\lambda, b_\lambda),$$

onde  $a_\alpha$ ,  $b_\alpha$ ,  $a_\lambda$  e  $b_\lambda$  são conhecidos como hiperparâmetros. Tais prioris são informativas ou não informativas, dependendo da especificação dos hiperparâmetros.

Amostras da distribuição a posteriori conjunta são obtidas utilizando-se do procedimento MCMC (*Markov Chain Monte Carlo*). Desta maneira,  $\alpha$  é simulado da distribuição  $\pi(\alpha|\lambda, x)$  e  $\lambda$  de  $\pi(\lambda|\alpha, x)$  através do algoritmo de *Metropolis-Hastings* (veja [SE95]).

Simplificações e alternativas para a priori de Jeffreys, exemplos de aplicações e simulações são observados em Achcar, Moala e Boleta [JAJ10] (2010) e Moala, Achcar e Tomazella [AAD12] (2012).

No presente trabalho, estas análises foram estendidas para o caso da distribuição Exponencial Generalizada Bivariada.

## Capítulo 4

# Distribuição Exponencial Generalizada Bivariada

### 4.1 Introdução

No capítulo anterior, foi apresentada a distribuição  $GE$  univariada, possível alternativa às distribuições Gama e Weibull. Gupta e Kundu (2009) [DR09] propuseram uma nova distribuição bivariada, distribuição Exponencial Bivariada Generalizada ( $BVGE$ ), de modo que suas distribuições marginais fossem conhecidas e, mais do que isso, também fossem exponenciais generalizadas, em contrapartida a trabalhos anteriores, como exemplo, Sarhan e Balakrishnam (2007) [SB07], em que se definia uma distribuição bivariada também com base na distribuição  $GE$ , porém, com marginais desconhecidas.

A distribuição  $BVGE$ , apresentada a seguir, possui quatro parâmetros,  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 > 0$ ,  $\alpha_3 > 0$  e  $\lambda > 0$  e possui propriedades convenientes que a possibilitam ser utilizada na prática tais como f.d.p. conjunta e f.d.a. conjunta com formas fechadas de cálculo. Supondo  $U_1 \sim GE(\alpha_1, \lambda)$ ,  $U_2 \sim GE(\alpha_2, \lambda)$  e  $U_3 \sim GE(\alpha_3, \lambda)$  v.a's independentes, o vetor  $(X_1, X_2)$  terá distribuição  $BVGE(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda)$ , onde  $X_1 = \max\{U_1, U_3\}$  e  $X_2 = \max\{U_2, U_3\}$ .

Previamente à sua definição formal, seguem dois exemplos discutidos por Gupta e Kundu (2009) de situações em que a distribuição  $BVGE$  pode ser aplicada: modelos de estresse e modelos de manutenção.

*Modelos de estresse:* Suponha um sistema com dois componentes. Cada um deles é submetido a um estresse individual e independente, por exemplo,  $U_1$  e  $U_2$ . O sistema possui um estresse geral,  $U_3$ , que é transmitido para ambos componentes igualmente. Logo, o estresse observado será, em cada componente,  $X_1 = \max\{U_1, U_3\}$  e  $X_2 = \max\{U_2, U_3\}$ .

*Modelos de manutenção:* Considere um sistema com dois componentes, cada um com manutenção individual. O sistema também possui uma manutenção geral. Devido à manutenção individual, o tempo de vida do  $i$ -ésimo componente,  $i = 1, 2$  é aumentado em  $U_i$  e devido a manutenção geral, o aumento individual é de  $U_3$ . Assim, os tempos de vidas dos dois componentes serão agora  $X_1 = \max\{U_1, U_3\}$  e  $X_2 = \max\{U_2, U_3\}$ .

### 4.2 Definição da distribuição BVGE

A distribuição  $BVGE$  foi definida a partir de sua f.d.a. conjunta como sugerido por Gupta e Kundu (2009), que se basearam nos conceitos de Arnold (1967).

Sejam  $U_1 \sim GE(\alpha_1, \lambda)$ ,  $U_2 \sim GE(\alpha_2, \lambda)$  e  $U_3 \sim GE(\alpha_3, \lambda)$ , v.a's independentes. Defina  $X_1 = \max\{U_1, U_3\}$  e

$X_2 = \max\{U_2, U_3\}$ , cujas funções distribuições  $F_{X_i}(x_i)$ ,  $i = 1, 2$  são, respectivamente:

$$F_{X_1}(x_1) = (1 - e^{-\lambda x_1})^{\alpha_1 + \alpha_3} \quad \text{e} \quad F_{X_2}(x_2) = (1 - e^{-\lambda x_2})^{\alpha_2 + \alpha_3}, \quad (4.1)$$

para  $\alpha_i > 0, i = 1, 2, 3, \lambda > 0$ .

De (4.1), as funções densidade de probabilidade são:

$$f_{X_1}(x_1) = (\alpha_1 + \alpha_3)\lambda e^{-\lambda x_1} (1 - e^{-\lambda x_1})^{\alpha_1 + \alpha_3 - 1}$$

e

$$f_{X_2}(x_2) = (\alpha_2 + \alpha_3)\lambda e^{-\lambda x_2} (1 - e^{-\lambda x_2})^{\alpha_2 + \alpha_3 - 1},$$

para  $\alpha_i > 0, i = 1, 2, 3, \lambda > 0$ . Portanto, tem-se que  $X_1 \sim GE(\alpha_1 + \alpha_3, \lambda)$  e  $X_2 \sim GE(\alpha_2 + \alpha_3, \lambda)$ .

Para  $z = \min\{x_1, x_2\}$ ,

$$\begin{aligned} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = P(U_1 \leq x_1, U_2 \leq x_2, U_3 \leq z) \\ &= (1 - e^{-\lambda x_1})^{\alpha_1} (1 - e^{-\lambda x_2})^{\alpha_2} (1 - e^{-\lambda z})^{\alpha_3} \\ &= \begin{cases} (1 - e^{-\lambda x_1})^{\alpha_1 + \alpha_3} (1 - e^{-\lambda x_2})^{\alpha_2} & \text{se } x_1 < x_2 \\ (1 - e^{-\lambda x_1})^{\alpha_2 + \alpha_3} (1 - e^{-\lambda x_2})^{\alpha_1} & \text{se } x_1 > x_2 \\ (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} & \text{se } x_1 = x_2 = x \end{cases}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Deste modo,

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} F_{GE}(x_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda) F_{GE}(x_2; \alpha_2, \lambda) & \text{se } x_1 < x_2 \\ F_{GE}(x_1; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda) F_{GE}(x_2; \alpha_1, \lambda) & \text{se } x_1 > x_2 \\ F_{GE}(x; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda) & \text{se } x_1 = x_2 = x \end{cases}, \quad (4.3)$$

em que  $F_{GE}(\cdot; \alpha, \lambda)$  representa a função distribuição da distribuição Exponencial Generalizada de parâmetros  $\alpha$  e  $\lambda$ . Logo, a função densidade de probabilidade da distribuição BVGE é dada por:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = f_{GE}(x_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda) f_{GE}(x_2; \alpha_2, \lambda) & \text{se } x_1 < x_2 \\ f_2(x_1, x_2) = f_{GE}(x_1; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda) f_{GE}(x_2; \alpha_1, \lambda) & \text{se } x_1 > x_2 \\ f_3(x_1, x_2) = \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} f_{GE}(x; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda) & \text{se } x_1 = x_2 = x \end{cases}, \quad (4.4)$$

em que  $f_{GE}(\cdot; \alpha, \lambda)$  representa a f.d.p. da distribuição Exponencial Generalizada de parâmetros  $\alpha$  e  $\lambda$ . Assim:

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_3)\lambda^2(1 - e^{-\lambda x_1})^{\alpha_1 + \alpha_3 - 1}(1 - e^{-\lambda x_2})^{\alpha_2 - 1}e^{-x_1 - x_2} & \text{se } x_1 < x_2 \\ \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3)\lambda^2(1 - e^{-\lambda x_1})^{\alpha_1}(1 - e^{-\lambda x_2})^{\alpha_2 + \alpha_3 - 1}e^{-x_1 - x_2} & \text{se } x_1 > x_2 \\ \alpha_3\lambda(1 - e^{-\lambda x_2})^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1} & \text{se } x_1 = x_2 = x \end{cases}. \quad (4.5)$$

Para os casos  $x_1 \leq x_2$  e  $x_1 \geq x_2$ , a f.d.p. foi obtida derivando-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} F_{GE}(x_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda) f_{GE}(x_2; \alpha_2, \lambda) = \\ &= f_{GE}(x_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda) f_{GE}(x_2; \alpha_2, \lambda) \end{aligned} \quad (4.6)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} F_{GE}(x_1; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda) f_{GE}(x_2; \alpha_1, \lambda) = \\ &= f_{GE}(x_1; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda) f_{GE}(x_2; \alpha_1, \lambda), \end{aligned} \quad (4.7)$$

respectivamente.

Para o caso em que  $x_1 = x_2 = x$ , utilizam-se os fatos de que:

$$\int_0^\infty \int_0^{x_2} f_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int_0^\infty \int_0^{x_1} f_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int_0^\infty f_3(x) dx = 1,$$

com

$$\begin{aligned} p &= \int_0^\infty \int_0^{x_2} f_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} e \\ q &= \int_0^\infty \int_0^{x_1} f_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$p + q - 1 = \int_0^\infty f_3(x) dx = \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}.$$

A distribuição *BVGE*, como pode ser notado, possui uma parte contínua e uma parte discreta, que podem ser explicitadas se  $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$  for reescrita como  $qF_c + (1 - q)F_d$ ,  $F_d$  sendo a parte discreta e  $F_c$  a parte contínua, com  $0 \leq q \leq 1$ . Assim:

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} F_c(x_1, x_2) + \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} F_d(x_1, x_2) \quad (4.8)$$

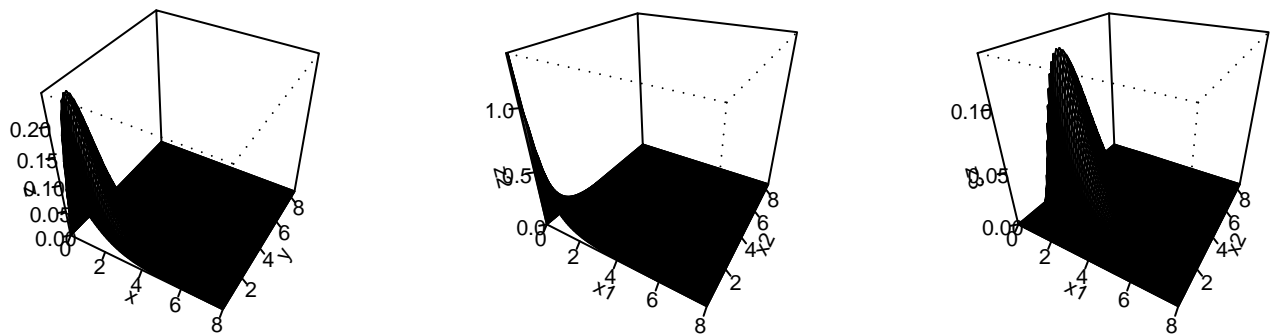
em que

$$F_d(x_1, x_2) = (1 - e^{-z})^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$$

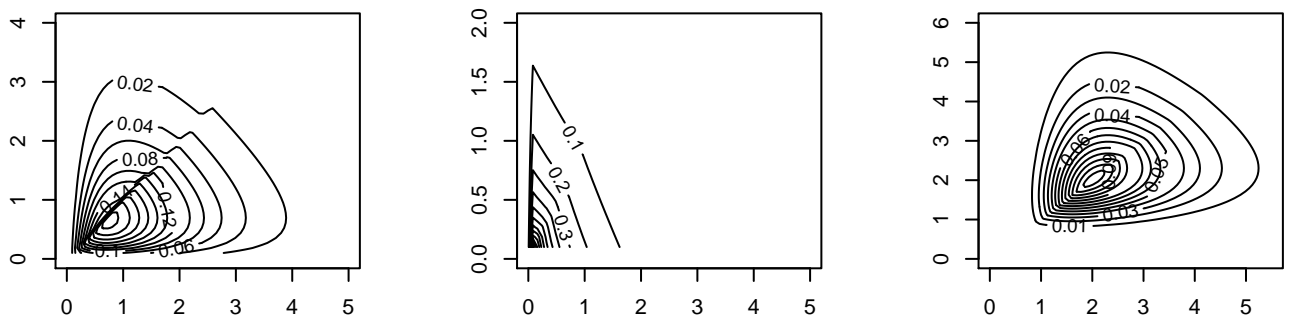
e

$$F_c(x_1, x_2) = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2} (1 - e^{-x_1})^{\alpha_1} (1 - e^{-x_2})^{\alpha_2} (1 - e^{-z})^{\alpha_3} - \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2} (1 - e^{-z})^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}.$$

As Figuras (4.1), (4.2) e (4.3) mostram gráficos das f.d.p. conjuntas, bem como as linhas de contorno para a parte contínua da distribuição BVGE para diferentes parâmetros e as respectivas distribuições marginais.

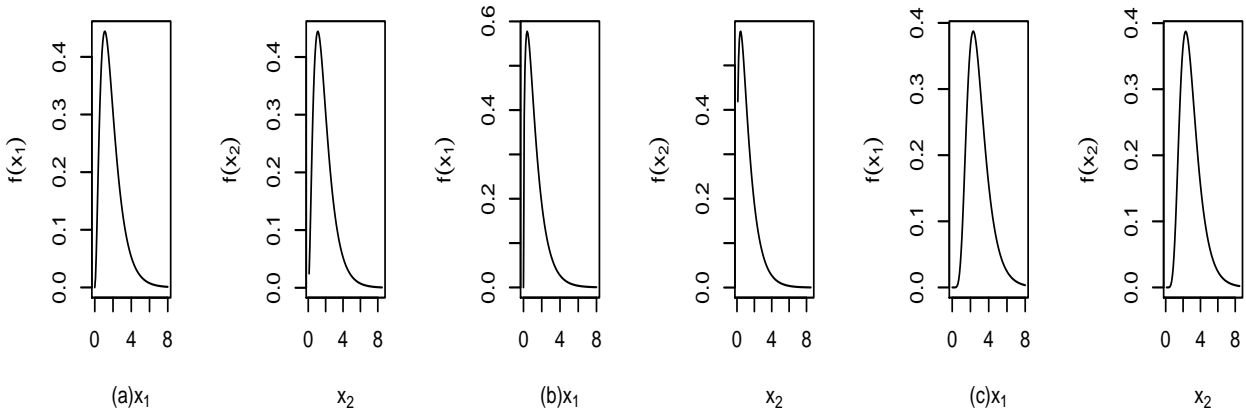


**Figura 4.1:** Gráficos das f.d.p. conjuntas para a parte contínua com os valores  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda) = (2, 1, 1, 1)$ ,  $(0.5, 0.5, 0.5, 1)$  e  $(5, 5, 5, 1)$ , respectivamente.



**Figura 4.2:** Linhas de contorno para as distribuições da Figura (4.1).

Para facilidade nos cálculos da função geradora de momentos (f.g.m.), foi considerado  $\lambda = 1$ . Os momentos da distribuição podem ser obtidos na forma de séries finitas, se os parâmetros forem inteiros ou infinitas caso



**Figura 4.3:** Gráficos das f.d.p. marginais de  $X_1$  e  $X_2$  para a parte contínua com  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda) = (a)(2, 1, 1, 1)$ ,  $(b)(0.5, 0.5, 0.5, 1)$  e  $(c)(5, 5, 5, 1)$ , respectivamente.

contrário. Como  $0 < e^{-x_1} < 1$  e  $0 < e^{-x_2} < 1$  para  $x_1 > 0$  e  $x_2 > 0$ , tem-se ao utilizar a expansão binomial, para um  $x$  qualquer, que:

$$(1 - e^{-x})^{\alpha-1} = \sum_{i=0}^{\alpha-1} (-1)^i \binom{\alpha-1}{i} e^{-ix}. \quad (4.9)$$

A função geratriz de momentos conjuntos para  $(X_1, X_2)$  é dada por:

$$\begin{aligned} M(t_1, t_2) &= E(e^{t_1 X_1 + t_2 X_2}) = \\ &= \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_3) \int_0^\infty \int_0^{x_2} (1 - e^{-x_1})^{\alpha_1 + \alpha_3 - 1} (1 - e^{-x_2})^{\alpha_2 - 1} \\ &\quad \times e^{x_1(t_1 - 1) + x_2(t_2 - 1)} dx_1 dx_2 \\ &+ \alpha_1 (\alpha_2 + \alpha_3) \int_0^\infty \int_0^{x_1} (1 - e^{-x_2})^{\alpha_2 + \alpha_3 - 1} (1 - e^{-x_1})^{\alpha_1 - 1} \\ &\quad \times e^{x_1(t_1 - 1) + x_2(t_2 - 1)} dx_1 dx_2 \\ &+ \alpha_3 \int_0^\infty (1 - e^{-x})^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1} e^{(t_1 + t_2)x} dx. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Substituindo-se (4.9) em (4.10), tem-se:

$$\begin{aligned} M(t_1, t_2) &= \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_3) \int_0^\infty \int_0^{x_2} \sum_{i=0}^{\alpha_1 + \alpha_3 - 1} (-1)^i \binom{\alpha_1 + \alpha_3 - 1}{i} \sum_{j=0}^{\alpha_2 - 1} (-1)^j \binom{\alpha_2 - 1}{j} \\ &\quad \times e^{-x_2(j+1-t_2) - x_1(i+1-t_1)} dx_1 dx_2 \\ &+ \alpha_1 (\alpha_2 + \alpha_3) \int_0^\infty \int_0^{x_1} \sum_{i=0}^{\alpha_2 + \alpha_3 - 1} (-1)^i \binom{\alpha_2 + \alpha_3 - 1}{i} \sum_{j=0}^{\alpha_1 - 1} (-1)^j \binom{\alpha_1 - 1}{j} \\ &\quad \times e^{-x_2(i+1-t_2) - x_1(j+1-t_1)} dx_1 dx_2 \\ &+ \alpha_3 \int_0^\infty \sum_{i=0}^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1} (-1)^i \binom{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1}{i} e^{-x(1-t_1-t_2+i)} dx. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Como as quantidades dentro dos somatórios são absolutamente integráveis, trocando-se a ordem de sinais de soma e integração, tem-se que:

$$\begin{aligned}
M(t_1, t_2) &= \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_3) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \binom{\alpha_1 + \alpha_3 - 1}{i} \binom{\alpha_2 - 1}{j} \\
&\quad \times \frac{1}{(j+1-t_2)(j+2-t_2+i-t_1)} \\
&+ \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{i+j} \binom{\alpha_2 + \alpha_3 - 1}{i} \binom{\alpha_1 - 1}{j} \\
&\quad \times \frac{1}{(1-t_2+i)(j+2-t_2+i-t_1)} \\
&+ \alpha_3 \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1}{i} \frac{1}{1-t_1-t_2+i},
\end{aligned} \tag{4.12}$$

para  $t_1 < 1$  e  $t_2 < 1$ .

Deste modo, obtém-se os diferentes momentos derivando  $M(t_1, t_2)$  e avaliando o resultado em  $t_1 = t_2 = 0$ . Outras maneiras de se obter a f.g.m. podem ser vistas em Ashour, Amim e Muhammed (2009) [SEH09].

Como a função de sobrevivência bivariada e a distribuição acumulada conjunta tem a relação:

$$S(x_1, x_2) = 1 - F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) + F_{X_1, X_2}(x_1, x_2), \tag{4.13}$$

a função de sobrevivência bivariada  $S(x_1, x_2)$  da distribuição BVGE é dada por:

$$\begin{aligned}
S(x_1, x_2) &= 1 - F_{GE}(x_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda) - F_{GE}(x_2; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda) \\
&+ \begin{cases} F_{GE}(x_1; \alpha_1 + \alpha_3, \lambda) F_{GE}(x_2; \alpha_2, \lambda) & \text{se } x_1 \leq x_2 \\ F_{GE}(x_1; \alpha_2 + \alpha_3, \lambda) F_{GE}(x_2; \alpha_1, \lambda) & \text{se } x_1 \geq x_2. \\ F_{GE}(x; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda) & \text{se } x_1 = x_2 = x \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

### 4.3 Estimação de Máxima Verossimilhança

Suponha que se tenha uma a.a. cujos elementos  $(X_{11}, X_{21}), \dots, (X_{1n}, X_{2n})$  sejam provenientes de uma distribuição  $BVGE(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda)$ . A função de verossimilhança para os parâmetros  $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda)$  é dada por:

$$L(\theta; X_1, X_2) = \prod_{i=1}^n f_{X_{1i}, X_{2i}}(x_{1i}, x_{2i}) \tag{4.15}$$

Considere que  $n = n_1 + n_2 + n_3$  e que  $n_1, n_2$  e  $n_3$  representam o número de elementos presentes nos seguintes conjuntos

$$I_1 = \{X_{1i} < X_{2i}\},$$

$$I_2 = \{X_{1i} > X_{2i}\},$$

$$I_3 = \{X_{1i} = X_{2i} = Y_i\}.$$

Deste modo (4.15) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
L(\theta; X_1, X_2) &= (\alpha_1 + \alpha_3)^{n_1} \alpha_2^{n_1} \lambda^{2n_1} \prod_{i \in I_1} e^{-\lambda(x_{1i} + x_{2i})} (1 - e^{-\lambda x_{1i}})^{\alpha_1 + \alpha_3 - 1} (1 - e^{-\lambda x_{2i}})^{\alpha_2 - 1} + \\
&+ \alpha_1^{n_2} (\alpha_2 + \alpha_3)^{n_2} \lambda^{2n_2} \prod_{i \in I_2} e^{-\lambda(x_{1i} + x_{2i})} (1 - e^{-\lambda x_{1i}})^{\alpha_1 - 1} (1 - e^{-\lambda x_{2i}})^{\alpha_2 + \alpha_3 - 1} + \\
&+ \alpha_3^{n_3} \lambda^{n_3} \prod_{i \in I_3} e^{-\lambda x_{1i}} (1 - e^{-\lambda x_{1i}})^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Baseado em (4.16), a função log-verossimilhança é dada por:

$$\begin{aligned}
l(\theta; x_1, x_2) &= n_1 \log(\alpha_1 + \alpha_3) + n_1 \log \alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_3 - 1) \sum_{i \in I_1} \log(1 - e^{-\lambda x_{1i}}) + \\
&+ (\alpha_2 - 1) \sum_{i \in I_1} \log(1 - e^{-\lambda x_{2i}}) + n_2 \log \alpha_1 + n_2 \log(\alpha_2 + \alpha_3) + \\
&+ (\alpha_1 - 1) \sum_{i \in I_2} \log(1 - e^{-\lambda x_{1i}}) + (\alpha_2 + \alpha_3 - 1) \sum_{i \in I_2} \log(1 - e^{-\lambda x_{2i}}) + \\
&+ n_3 \log \alpha_3 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1) \sum_{i \in I_3} \log(1 - e^{-\lambda y_i}) + \\
&- \lambda \left( \sum_{i \in I_3} y_i + \sum_{i \in I_1 \cup I_2} x_{1i} + \sum_{i \in I_1 \cup I_2} x_{2i} \right) + (2n_1 + 2n_2 + n_3) \log \lambda.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

As expressões para cálculo do EMV não foram aqui apresentadas por serem complexas e extensas, mas podem ser obtidas calculando-se o sistema composto pelas derivadas  $\frac{\partial l}{\partial \alpha_1} = 0$ ,  $\frac{\partial l}{\partial \alpha_2} = 0$ ,  $\frac{\partial l}{\partial \alpha_3} = 0$  e  $\frac{\partial l}{\partial \lambda} = 0$ . Métodos computacionais são necessários para o cálculo das estimativas. No caso deste trabalho, utilizou-se o *software R* para determinação do EMV através do pacote *maxLik*.

A matriz informação de Fisher no caso da BVGE é dada por uma matriz de dimensão 4 como:

$$I = -E \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_1^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} & \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_3} & \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_1 \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_2^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3} & \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_2 \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_3 \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_3 \partial \alpha_2} & \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_3^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_3 \partial \lambda} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda \partial \alpha_2} & \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda \partial \alpha_3} & \frac{\partial^2 l}{\partial \lambda^2} \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Para obtenção dos elementos de sua matriz, inicialmente, deve-se notar que:

$$E(n_1) = nP(X_1 < X_2) = \int_0^\infty \int_0^{x_2} f_1(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{\alpha_2}{\tilde{\alpha}}, \tag{4.19}$$

$$E(n_2) = nP(X_1 > X_2) = \int_0^\infty \int_0^{x_1} f_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{\alpha_1}{\tilde{\alpha}} \text{ e} \tag{4.20}$$

$$E(n_3) = nP(X_1 = X_2) = \int_0^\infty f_3(x) dx = \frac{\alpha_3}{\tilde{\alpha}}. \tag{4.21}$$

Além disso, os seguintes resultados se fazem necessários (ver Gupta e Kundu (2009) [DR09]):

$$\begin{aligned}
\xi(\alpha) &= E\left(\frac{Z^2 e^{-\lambda Z}}{(1 - e^{-\lambda Z})^2}\right) \\
&= \int_0^\infty \frac{z^2 e^{-\lambda z}}{(1 - e^{-\lambda z})^2} \alpha \lambda e^{-\lambda z} (1 - e^{-\lambda z})^{\alpha-1} dz \\
&= \begin{cases} \alpha \lambda \int_0^\infty z^2 e^{-2\lambda z} (1 - e^{-\lambda z})^{\alpha-3} dz & \text{se } 0 \leq \alpha \leq 2 \\ \frac{\alpha}{(\alpha-2)\lambda^2} \left[ \psi'(1) - \psi'(\alpha-1) + [\psi(\alpha) - \psi(1)]^2 \right] \\ \quad + \frac{\alpha}{(\alpha-1)\lambda^2} \left[ \psi'(1) - \psi(\alpha) + [\psi(\alpha) - \psi(1)]^2 \right] & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

e

$$\begin{aligned}
\eta(\alpha) &= E\left(\frac{Z e^{-\lambda Z}}{(1 - e^{-\lambda Z})}\right) \\
&= \int_0^\infty \frac{z e^{-\lambda z}}{(1 - e^{-\lambda z})} \alpha \lambda e^{-\lambda z} (1 - e^{-\lambda z})^{\alpha-1} dz \\
&= \begin{cases} \alpha \lambda \int_0^\infty z e^{-2\lambda z} (1 - e^{-\lambda z})^{\alpha-2} dz & \text{se } 0 \leq \alpha \leq 2 \\ \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{\alpha}{\alpha-1} [\psi(\alpha) - \psi(1) - (\psi(\alpha+1) - \psi(1))] \right] & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Por fim, o lema seguinte auxilia a obtenção dos elementos da matriz.

**Lema.** *Sejam  $V_0 \sim GE(\tilde{\alpha} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda)$ ,  $V_1 \sim GE(\alpha_1 + \alpha_3, \lambda)$  e  $V_2 \sim GE(\alpha_2 + \alpha_3, \lambda)$  três v.a.'s independentes e  $g(\cdot)$  uma função Borel mensurável, então:*

$$\begin{aligned}
E(g(X_1)|I_1) &= E(g(V_1)) - \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{\tilde{\alpha}} E(g(V_0)) \\
E(g(X_1)|I_2) &= \frac{\alpha_1}{\tilde{\alpha}} E(g(V_0)) \\
E(g(X_1)|I_3) &= \frac{\alpha_3}{\tilde{\alpha}} E(g(V_0)) \\
E(g(X_2)|I_1) &= \frac{\alpha_2}{\tilde{\alpha}} E(g(V_0)) \\
E(g(X_2)|I_2) &= E(g(V_2)) - \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\tilde{\alpha}} E(g(V_0))
\end{aligned}$$

*Demonstração.* Tem-se:

$$\begin{aligned}
E(g(X_1)|I_1) &= (\alpha_1 + \alpha_3)\alpha_2\lambda^2 \int_0^\infty g(x_1)(1 - e^{-\lambda x_1})^{\alpha_1 + \alpha_3 - 1} e^{-\lambda x_1} \times \\
&\quad \times \left[ \int_{x_1}^\infty (1 - e^{-\lambda x_2})^{\alpha_2 - 1} e^{-\lambda x_2} dx_2 \right] dx_1 \\
&= (\alpha_1 + \alpha_3)\lambda \int_0^\infty g(x_1)(1 - e^{-\lambda x_1})^{\alpha_1 + \alpha_3 - 1} e^{-\lambda x_1} (1 - (1 - e^{-\lambda x_1})^{\alpha_2}) dx_1 \\
&= (\alpha_1 + \alpha_3)\lambda \int_0^\infty g(x_1)(1 - e^{-\lambda x_1})^{\alpha_1 + \alpha_3 - 1} e^{-\lambda x_1} \\
&\quad - (\alpha_1 + \alpha_3)\lambda \int_0^\infty g(x_1)(1 - e^{-\lambda x_1})^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1} \\
&= E(g(V_1)) - \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{\tilde{\alpha}} E(g(V_0)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(g(X_1)|I_2) &= \alpha_1\lambda^2(\alpha_2 + \alpha_3) \int_0^\infty g(x_1)(1 - e^{-\lambda x_1})^{\alpha_1 - 1} e^{-\lambda x_1} \\
&\quad \times \left[ \int_0^{x_1} (1 - e^{-\lambda x_2})^{\alpha_2 + \alpha_3 - 1} e^{-\lambda x_2} dx_2 \right] dx_1 \\
&= \alpha_1\lambda \int_0^\infty g(x_1)(1 - e^{-\lambda x_1})^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1} e^{-\lambda x_1} dx_1 \\
&= \frac{\alpha_1}{\tilde{\alpha}} E(g(V_0)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(g(X_1)|I_3) &= \alpha_3\lambda \int_0^\infty g(x_1)(1 - e^{-\lambda x_1})^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1} e^{-\lambda x_1} dx_1 \\
&= \frac{\alpha_3}{\tilde{\alpha}} E(g(V_0)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(g(X_2)|I_1) &= (\alpha_1 + \alpha_3)\alpha_2\lambda^2 \int_0^\infty g(x_2)(1 - e^{-\lambda x_2})^{\alpha_2 - 1} e^{-\lambda x_2} \times \\
&\quad \times \left[ \int_0^{x_2} (1 - e^{-\lambda x_1})^{\alpha_1 + \alpha_3 - 1} e^{-\lambda x_1} dx_1 \right] dx_2 \\
&= \alpha_2\lambda \int_0^\infty g(x_2)(1 - e^{-\lambda x_2})^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1} e^{-\lambda x_2} dx_2 \\
&= \frac{\alpha_2}{\tilde{\alpha}} E(g(V_0)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(g(X_2)|I_2) &= \alpha_1\lambda^2(\alpha_2 + \alpha_3) \int_0^\infty g(x_2)(1 - e^{-\lambda x_2})^{\alpha_2 + \alpha_3 - 1} e^{-\lambda x_2} \\
&\quad \times \left[ \int_{x_2}^\infty (1 - e^{-\lambda x_1})^{\alpha_1 - 1} e^{-\lambda x_1} dx_1 \right] dx_2 \\
&= (\alpha_2 + \alpha_3)\lambda \int_0^\infty g(x_2)(1 - e^{-\lambda x_2})^{\alpha_2 + \alpha_3 - 1} e^{-\lambda x_2} (1 - (1 - e^{-\lambda x_2})^{\alpha_1}) dx_2 \\
&= E(g(V_2)) - \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\tilde{\alpha}} E(g(V_0)).
\end{aligned}$$

□

No lema é assumido uma função  $g(\cdot)$  qualquer, mas no caso da distribuição BVGE tem-se o interesse em  $g(Z) = \frac{Ze^{-\lambda Z}}{(1-e^{-\lambda Z})}$ , conforme mostram os resultados (4.22) e (4.23).

A partir dos resultados (4.19) à (4.23) e do lema proposto, os elementos são obtidos e dados por:

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_1^2}\right) &= -\frac{n}{\tilde{\alpha}} \left[ \frac{\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_3)^2} + \frac{1}{\alpha_1} \right], \\
E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_2^2}\right) &= -\frac{n}{\tilde{\alpha}} \left[ \frac{\alpha_1}{(\alpha_2 + \alpha_3)^2} + \frac{1}{\alpha_2} \right], \\
E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_3^2}\right) &= -\frac{n}{\tilde{\alpha}} \left[ \frac{\alpha_1}{(\alpha_2 + \alpha_3)^2} + \frac{\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_3)^2} + \frac{1}{\alpha_3} \right], \\
E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \lambda^2}\right) &= -n \left[ \frac{\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_3 - 1)}{\tilde{\alpha}} [\xi(\alpha_1 + \alpha_3) - \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{\tilde{\alpha}} \xi(\tilde{\alpha})] + (\alpha_2 - 1) \left(\frac{\alpha_2}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \xi(\tilde{\alpha}) \right. \\
&\quad \left. + (\alpha_1 - 1) \left(\frac{\alpha_1}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \xi(\tilde{\alpha}) + \frac{\alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3 - 1)}{\tilde{\alpha}} [\xi(\alpha_2 + \alpha_3) - \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\tilde{\alpha}} \xi(\tilde{\alpha})] \right. \\
&\quad \left. + (\tilde{\alpha} - 1) \left(\frac{\alpha_3}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \xi(\tilde{\alpha}) + \frac{2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3}{\tilde{\alpha}\lambda^2} \right], \\
E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_1 \partial \lambda}\right) &= n \left[ \frac{\alpha_2}{\tilde{\alpha}} [\eta(\alpha_1 + \alpha_3) - \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{\tilde{\alpha}} \eta(\tilde{\alpha})] + \left(\frac{\alpha_1}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \eta(\tilde{\alpha}) + \left(\frac{\alpha_3}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \eta(\tilde{\alpha}) \right], \\
E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_2 \partial \lambda}\right) &= n \left[ \frac{\alpha_1}{\tilde{\alpha}} [\eta(\alpha_2 + \alpha_3) - \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\tilde{\alpha}} \eta(\tilde{\alpha})] + \left(\frac{\alpha_2}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \eta(\tilde{\alpha}) + \left(\frac{\alpha_3}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \eta(\tilde{\alpha}) \right],
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_3 \partial \lambda}\right) &= n \left[ \frac{\alpha_2}{\tilde{\alpha}} [\eta(\alpha_1 + \alpha_3) - \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{\tilde{\alpha}} \eta(\tilde{\alpha})] + \frac{\alpha_1}{\tilde{\alpha}} [\eta(\alpha_2 + \alpha_3) - \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\tilde{\alpha}} \eta(\tilde{\alpha})] \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\alpha_3}{\tilde{\alpha}}\right)^2 \eta(\tilde{\alpha}) \right],
\end{aligned}$$

$$E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}\right) = 0,$$

$$E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_3}\right) = -n \frac{\alpha_2}{\tilde{\alpha}(\alpha_1 + \alpha_3)^2},$$

$$E\left(\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3}\right) = -n \frac{\alpha_1}{\tilde{\alpha}(\alpha_2 + \alpha_3)^2}.$$

(4.25)

## 4.4 Estimação Bayesiana

Para uma análise Bayesiana da distribuição  $BVGE(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda)$ , novamente, diferentes prioris podem ser assumidas para  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  e  $\lambda$ . Para o caso da priori de Jeffreys, tem-se:

$$\pi_J(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda) \propto \sqrt{\det[I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda)]}. \tag{4.26}$$

É possível encontrar a fórmula exata do determinante analiticamente, embora o processo seja exaustivo devido à complexidade dos elementos e da própria dimensão do determinante (neste caso, dimensão quatro).

Prioris Gama independentes para obter a priori conjunta também são utilizadas, isto é,

$$\pi_{\alpha_1}(\alpha_1) \sim \text{Gama}(a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}),$$

$$\pi_{\alpha_2}(\alpha_2) \sim \text{Gama}(a_{\alpha_2}, b_{\alpha_2}),$$

$$\pi_{\alpha_3}(\alpha_3) \sim \text{Gama}(a_{\alpha_3}, b_{\alpha_3}),$$

$$\pi_{\lambda}(\lambda) \sim \text{Gama}(a_{\lambda}, b_{\lambda}),$$

onde  $a_{\alpha_1}$ ,  $b_{\alpha_1}$ ,  $a_{\alpha_2}$ ,  $b_{\alpha_2}$ ,  $a_{\alpha_3}$ ,  $b_{\alpha_3}$  e  $a_{\lambda}$  e  $b_{\lambda}$  são os hiperparâmetros.

Assim, uma priori para  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda)$  seria:

$$\pi_j(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda) \propto \pi_{\alpha_1}(\alpha_1)\pi_{\alpha_2}(\alpha_2)\pi_{\alpha_3}(\alpha_3)\pi_{\lambda}(\lambda). \quad (4.27)$$

Para a priori Uniforme, ter-se-ia

$$\pi_j(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda) \propto cte. \quad (4.28)$$

No caso bivariado, amostras da distribuição a posteriori conjunta também são obtidas utilizando-se do procedimento MCMC. Desta maneira,  $\alpha_1$  pode ser simulado da distribuição  $\pi(\alpha_1|\alpha_2, \alpha_3, \lambda, x, y)$ ,  $\alpha_2$  de  $\pi(\alpha_2|\alpha_1, \alpha_3, \lambda, x, y)$ ,  $\alpha_3$  de  $\pi(\alpha_3|\alpha_1, \alpha_2, \lambda, x, y)$  e  $\lambda$  de  $\pi(\lambda|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, x, y)$  através do algoritmo *Metropolis Hastings*, aqui implementado utilizando o *software R*. Detalhes adicionais de MCMC são encontrados em Carlin e Chib (1995) [CC95].

Neste trabalho, em sua aplicação, todos os hiperparâmetros foram tomados com o valor 0.01, tornando as prioris Gama independentes não informativas. Além disso, devido à complexidade de obtenção analítica do determinante para a priori de Jeffreys, os mesmos foram obtidos computacionalmente através da função *det()* do *software R*.

## Capítulo 5

# Determinando a distribuição BVGE a partir de funções Cópulas

### 5.1 Funções de Cópulas

Um grande interesse estatístico é investigar como se dá a relação entre uma função distribuição multivariada e suas respectivas marginais (tanto univariada como de outras ordens). Sklar (1959) [SKL59] propôs como solução para este problema, no caso de marginais de dimensão um, a criação de uma classe de funções denominadas cópulas. Essa classe é definida a partir das funções distribuições em  $[0, 1] \times [0, 1]$  cujas marginais sejam uniformes em  $[0, 1]$ .

Segundo Sklar, uma função distribuição multivariada pode ser escrita na fórmula de cópula de modo que, se  $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$  é uma distribuição conjunta com funções distribuições marginais  $F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_m(x_m)$ , então existe uma cópula  $C(U_1, U_2, \dots, U_m)$  tal que

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_m(x_m))$$

ocorra, isto é,  $C$  é usada como ligação entre a distribuição conjunta e suas marginais.

Tendo em foco o caso bivariado, a definição formal de uma cópula é dada como sendo uma função  $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  que satisfaz:

$$(a) \forall u, v \in [0, 1], C(u, 0) = 0 = C(0, v), C(u, 1) = u \text{ e } C(1, v) = v.$$

$$(b) \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1] \text{ t.q. } u_1 \leq u_2 \text{ e } v_1 \leq v_2, C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

O teorema de Sklar (1959) para o caso bivariado é dado a seguir:

**Teorema 1.** *Sejam  $X_1$  e  $X_2$  v.a's com função distribuição conjunta  $F$  e funções distribuições marginais  $F_1$  e  $F_2$ , respectivamente. Então existe uma cópula  $C$  tal que*

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

$\forall x, y$  em  $R$ . Se  $X_1$  e  $X_2$  são contínuas,  $C$  é única. De outro modo,  $C$  é unicamente determinado em  $Im(F_1) \times Im(F_2)$ . Reciprocamente, se  $C$  é uma cópula e  $F_1$  e  $F_2$  são funções distribuições, então  $F$  é uma distribuição conjunta com marginais  $F_1$  e  $F_2$ .

*Demonstração.* Para uma prova mais detalhada, veja Nelsen (2006) [NEL06].

O teorema da Transformação Integral da Probabilidade (TIP) pode ser aplicado separadamente nas duas v.a.'s para definir  $U = F_1(x_1)$  e  $V = F_2(x_2)$ , em que  $U$  e  $V$  seguem distribuições uniformes em  $[0, 1]$ , isto é,  $U \sim U(0, 1)$  e  $V \sim U(0, 1)$ .  $U$  e  $V$  são usualmente dependentes se  $X_1$  e  $X_2$  forem dependentes. Se  $X_1$  e  $X_2$  forem independentes, há a implicação de  $U$  e  $V$  serem independentes. Com  $U$  e  $V$  uniformes, o problema se reduz em especificar uma distribuição bivariada entre tais variáveis, isto é, especificar uma cópula.

Seja  $X = (X_1, X_2)$  um vetor aleatório com função distribuição  $F$  e seja  $V \sim U(0, 1)$  independente de  $X$ . Considerando as transformações  $U_i = F_i(X_i, V)$ ,  $i = 1, 2$ , então, pelo TIP,  $U_i \sim U(0, 1)$  e  $X_i = F_i^{-1}(U_i)$ . Definindo  $C$  como a função distribuição de  $U = (U_1, U_2)$ , tem-se:

$$F(x_1, x_2) = P(F_i^{-1}(U_i) \leq x_i) = P(U_i \leq F_i(x_i)) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)),$$

isto é,  $C$  é cópula de  $F$ . □

Deste modo, o corolário a seguir também pode ser usado como uma ferramenta teórica para se obter cópulas a partir de uma distribuição multivariada.

**Corolário 1.** *Sejam  $F_1^{-1}$  e  $F_2^{-1}$  inversas generalizadas de  $F_1$  e  $F_2$ , contínuas, respectivamente. Então é válida a relação :*

$$C(u, v) = F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)) \quad (5.1)$$

*Nota:* A inversa generalizada (ou pseudo-inversa, quasi-inversa),  $F^{-1}(t)$ , de uma função distribuição  $F(t)$ , é qualquer função em  $[0, 1]$  tal que:

(i) se  $t$  está no contra-domínio de  $F$ , então  $F^{-1}(t)$  é a inversa usual, um número  $x$  tal que  $F(x) = t$ , isto é,  $F(F^{-1}(t)) = t$ .

(ii) se a inversa usual não existe, então

$$F^{-1}(t) = \sup\{x | F(x) \leq t\}, u \in [0, 1].$$

Note que, considerando-se  $F_1(x_1)$  e  $F_2(x_2)$  contínuas com densidades  $f_1(x_1)$  e  $f_2(x_2)$ ,  $X_1 = F_1^{-1}(U)$  e  $X_2 = F_2^{-1}(V)$ ,  $c(u, v)$  a função densidade de  $C(u, v)$  e  $f(x_1, x_2)$  a densidade de  $F(x_1, x_2)$ , tem-se:

$$\begin{aligned} c(u, v) &= F(X_1(u), X_2(v)) \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial X_1}{\partial U} & \frac{\partial X_1}{\partial V} \\ \frac{\partial X_2}{\partial U} & \frac{\partial X_2}{\partial V} \end{array} \right| \\ &= \frac{f(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v))}{f_1(F_1^{-1}(u))f_2(F_2^{-1}(v))} \end{aligned} \quad (5.2)$$

com  $\frac{\partial X_1}{\partial U} = \left( \frac{\partial F(X_1)}{\partial X_1} \right)^{-1} = f_1(X_1)^{-1}$ ,  $\frac{\partial X_2}{\partial V} = f_2(X_2)^{-1}$  e as demais derivadas nulas.

A expressão (5.2) é conhecida como densidade da cópula  $C(u, v)$ .

Para a simulação de observações  $(x_1, x_2)$  de um par de v.a.'s  $(X_1, X_2)$  usando uma distribuição conjunta  $F$ , é possível se utilizar do teorema de Sklar e do corolário (1). A partir destes, basta gerar um par  $(u, v)$  de  $(U, V)$  cuja função distribuição é  $C$ , cópula de  $X_1$  e  $X_2$ , e depois transformar as variáveis utilizando-se do TIP. Um procedimento para gerar  $(u, v)$  é através da distribuição condicional de  $V$  dado  $U = u$ , denotada por  $c_u(v)$ .

Assim, notando que:

$$\begin{aligned} c_u(v) &= P(V \leq v | U = u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{P(V \leq v, U \in (u - \Delta u, u + \Delta u))}{P(U \in (u - \Delta u, u + \Delta u))} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{C(u + \Delta u, v) - C(u, v)}{\Delta u} = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}. \end{aligned}$$

1. Gere  $u \sim U(0, 1)$  e  $t \sim U(0, 1)$ .
2. Faça  $v = c_u^{-1}(t)$ .
3. O par almejado é  $(u, v)$ .

Existem várias famílias de cópulas conhecidas. Abaixo são apresentadas algumas delas.

*Cópula Produto:* A cópula mais simples é a cópula produto, denotada por  $\Pi$ , e dada por:

$$C(u, v) = \Pi = uv. \quad (5.3)$$

A cópula produto é importante pois corresponde à independência entre  $u$  e  $v$ .

*Cópula Gumbel-Barnett:* Seja  $\phi \in [0, 1]$ . Então:

$$C(u, v) = u + v - 1 + (1 - u)(1 - v) \exp\{-\phi \log(1 - u) \log(1 - v)\} \quad (5.4)$$

é uma família de cópulas.

*Cópula Marshall-Olkin:* Seja  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ . Então:

$$C(u, v) = \min(u^{1-\alpha}, uv^{1-\beta}) \quad (5.5)$$

é uma família de cópulas.

*Cópula Arquimedes:* Cópulas da forma

$$C(u, v) = \Psi^{-1}(\Psi(u) + \Psi(v)) \quad (5.6)$$

são denominadas cópulas Arquimedianas, em que  $\Psi^{-1}$  é a inversa generalizada de uma função contínua e estritamente decrescente em  $[0, 1]$  a  $[0, \infty]$ , com  $\Psi(1) = 0$ . As cópulas seguintes são subclasses das Arquimedianas.

*Cópula Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM):* Seja  $\theta \in [-1, 1]$ . Então:

$$C(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v) \quad (5.7)$$

é uma família de cópulas. Se  $\theta = 0$ , a FGM torna-se uma cópula produto independente.

*Cópula Clayton:* Seja  $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$ . Então:

$$C(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} \quad (5.8)$$

é uma família de cópulas.

*Cópula Frank:* Seja  $\theta \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ . Então:

$$C(u, v) = -\ln \left( 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right) \theta^{-1} \quad (5.9)$$

é uma família de cópulas.

Cópulas também podem ser usadas no estudo de dependência entre v.a.'s. Algumas das medidas mais conhecidas são  $\tau$  de Kendall e  $\rho$  de Spearman, dadas abaixo.

(a)  $\tau$  de Kendall. A medida  $\tau$  de Kendall para um par  $(X_1, X_2)$ , de acordo com  $F$ , é definida como a diferença entre as probabilidades de concordância e discordância para dois pares  $(X_{11}, X_{21})$  e  $(X_{12}, X_{22})$ . Os pares  $(X_{11}, X_{21})$  e  $(X_{12}, X_{22})$  são concordantes se  $(X_{11}, X_{21})(X_{12}, X_{22}) > 0$  e discordantes se  $(X_{11}, X_{21})(X_{12}, X_{22}) < 0$ . Logo:

$$\begin{aligned} \tau_{X_1, X_2} &= P\left((X_{11} - X_{21})(X_{12} - X_{22}) > 0\right) - P\left((X_{11} - X_{21})(X_{12} - X_{22}) < 0\right) \\ &= Q(X_1, X_2). \end{aligned} \quad (5.10)$$

A expressão (5.10) pode ser expressa em termos de cópula, tornando-se:

$$\tau_C = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1. \quad (5.11)$$

O resultado (5.11) é encontrado ao ser verificado que:

$$\begin{aligned} Q &= 2P\left((X_{11} - X_{21})(X_{12} - X_{22}) > 0\right) - 1 \\ &= 2\left(P(X_{11} > X_{12}, X_{21} > X_{22}) + P(X_{11} < X_{12}, X_{21} < X_{22})\right) - 1 \\ &= 2\left(\int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) + \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v)\right) - 1. \end{aligned}$$

Note que (5.11) é interpretada como o valor esperado de  $C(u, v)$  no intervalo  $[0, 1]$ , isto é,

$$\tau_K = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1 = 4E(C(U, V)) - 1.$$

(b)  $\rho$  de Spearman. Sejam  $(X_{11}, X_{21})$ ,  $(X_{12}, X_{22})$  e  $(X_{13}, X_{23})$  três vetores de v.a.'s independentes com distribuição  $F$ . A medida  $\rho$  de Spearman ( $\rho_S$ ) é definida proporcionalmente à probabilidade de concordância subtraída da probabilidade de discordância para dois vetores  $(X_{11}, X_{21})$  e  $(X_{12}, X_{23})$ . Assim, a medida  $\rho$  de

Spearman é definida como:

$$\rho_S = 3 \left( P \left( (X_{11} - X_{21})(X_{12} - X_{23}) > 0 \right) - P \left( (X_{11} - X_{21})(X_{12} - X_{23}) < 0 \right) \right). \quad (5.12)$$

Observe que  $(X_{11}, X_{21})$  tem distribuição conjunta  $F$  e  $(X_{12}, X_{23})$  possui variáveis independentes entre si e, portanto, sua distribuição conjunta é  $F_{12}F_{23}$ . Em termos de cópulas, a medida é definida pela diferença de probabilidades de concordância e discordância entre uma cópula  $C$  e uma cópula produto  $\Pi$  a mais de uma constante normalizadora. Tem-se, então:

$$\rho_S = 3Q(C, \Pi) = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3. \quad (5.13)$$

## 5.2 Distribuição BVGE derivada da Cópula Farlie - Gumbel - Morgenstern

Existem, na literatura, várias cópulas que tem sido utilizadas para se obter uma distribuição exponencial generalizada bivariada. Para um par de distribuições  $F_1$  e  $F_2$ , a família de distribuições conjuntas Farlie-Gumbel-Morgenstern é definida como

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)(1 + \theta(1 - F_1(x_1))(1 - F_2(x_2))), \theta \in [-1, 1].$$

Nesta família, verifica-se que  $F_1$  e  $F_2$  são as funções distribuições marginais de  $F$ . A partir desta distribuição, tem-se a cópula Farlie-Gumbel-Morgenstern dada em (5.7),

$$C(u, v) = uv + (1 + \theta(1 - u)(1 - v)),$$

ou ainda,

$$C(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v), \quad (5.14)$$

em que  $-1 \leq \theta \leq 1$ ,  $u = F_1(x_1)$  e  $v = F_2(x_2)$ ,  $F_1(x_1)$  e  $F_2(x_2)$  sendo as acumuladas marginais de  $X_1$  e  $X_2$ . O parâmetro  $\theta$  é associado à dependência das variáveis  $X_1$  e  $X_2$  e relacionadas também às medidas (5.11) e (5.13).

A partir de (5.11), tem-se:

$$\tau_K = 4 \int_0^1 \int_0^1 ((uv + \theta uv(1 - u)(1 - v))\theta(1 + \theta(1 - 2u)(1 - 2v))) dudv = 2\theta/9$$

e, de (5.13),

$$\rho_S = 12 \int_0^1 \int_0^1 (uv + \theta uv(1 - u)(1 - v)) dudv - 3 = \theta/3.$$

Como visto, coeficiente de correlação é  $\rho = \theta/3$ , variando no intervalo  $[-1/3, 1/3]$ .

A partir de (5.2), ou derivando parcialmente (5.14) em relação a  $u$  e  $v$ , tem-se que a densidade da cópula FGM:

$$c(u, v) = 1 + \theta(1 - 2u)(1 - 2v) \quad (5.15)$$

Assuma que as v.a.'s  $X_1$  e  $X_2$  possuam distribuições  $X_1 \sim GE(\alpha_1, \lambda_1)$  e  $X_2 \sim GE(\alpha_2, \lambda_2)$  com:

$$u = F_1(x_1) = P(X_1 \leq x_1) = (1 - \exp(-\lambda_1 x_1))^{\alpha_1} \quad (5.16)$$

e

$$v = F_2(x_2) = P(X_2 \leq x_2) = (1 - \exp(-\lambda_2 x_2))^{\alpha_2}. \quad (5.17)$$

De (5.7), a distribuição conjunta  $(X_1, X_2)$  é dada por:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2) &= (1 - e^{-\lambda_1 x_1})^{\alpha_1} (1 - e^{-\lambda_2 x_2})^{\alpha_2} \times \\ &\quad \times [1 + \theta(1 - (1 - e^{-\lambda_1 x_1})^{\alpha_1})(1 - (1 - e^{-\lambda_2 x_2})^{\alpha_2})]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

De (5.18), a função densidade de probabilidade  $f(x_1, x_2)$  é dada por:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \\ &= \alpha_1 \alpha_2 \lambda_1 \lambda_2 (1 - e^{-\lambda_1 x_1})^{\alpha_1 - 1} (1 - e^{-\lambda_2 x_2})^{\alpha_2 - 1} \times \\ &\quad \times (e^{-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2}) [1 + \theta(1 - 2(1 - e^{-\lambda_1 x_1})^{\alpha_1})(1 - 2(1 - e^{-\lambda_2 x_2})^{\alpha_2})] \\ &= f_1(x_1) f_2(x_2) + \theta f_1(x_1) f_2(x_2) (1 - 2F_1(x_1))(1 - 2F_2(x_2)). \end{aligned} \quad (5.19)$$

A função de sobrevivência bivariada  $S(x_1, x_2)$  da cópula FGM é dada por:

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2) &= 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F(x_1, x_2) = \\ &= S_1(x_1) S_2(x_2) (1 + \theta F_1(x_1) F_2(x_2)) \end{aligned} \quad (5.20)$$

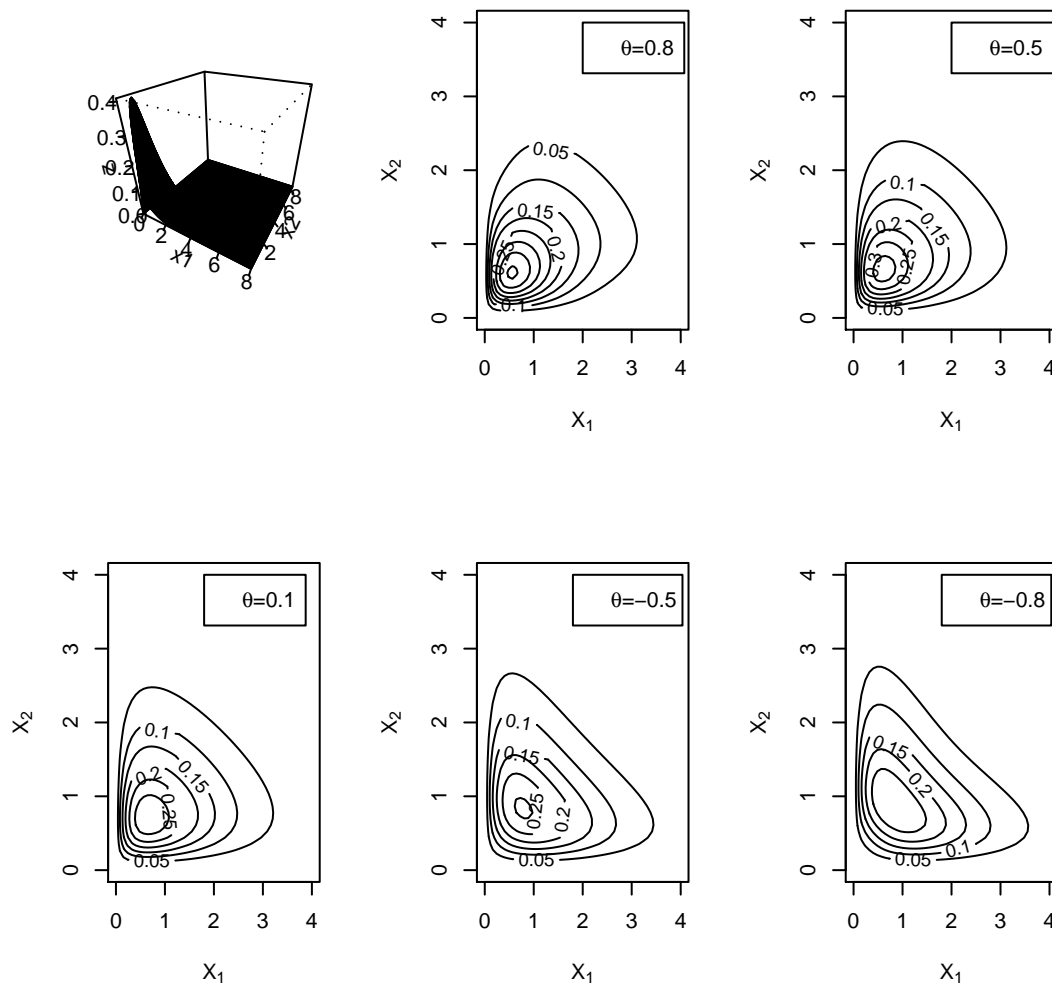
em que  $S_1(x_1) = 1 - F_1(x_1)$  e  $S_2(x_2) = 1 - F_2(x_2)$ , funções de sobrevivências marginais de  $X_1$  e  $X_2$ , respectivamente.

Para o caso da distribuição BVGE via cópula FGM, obtém-se, a partir de (5.20):

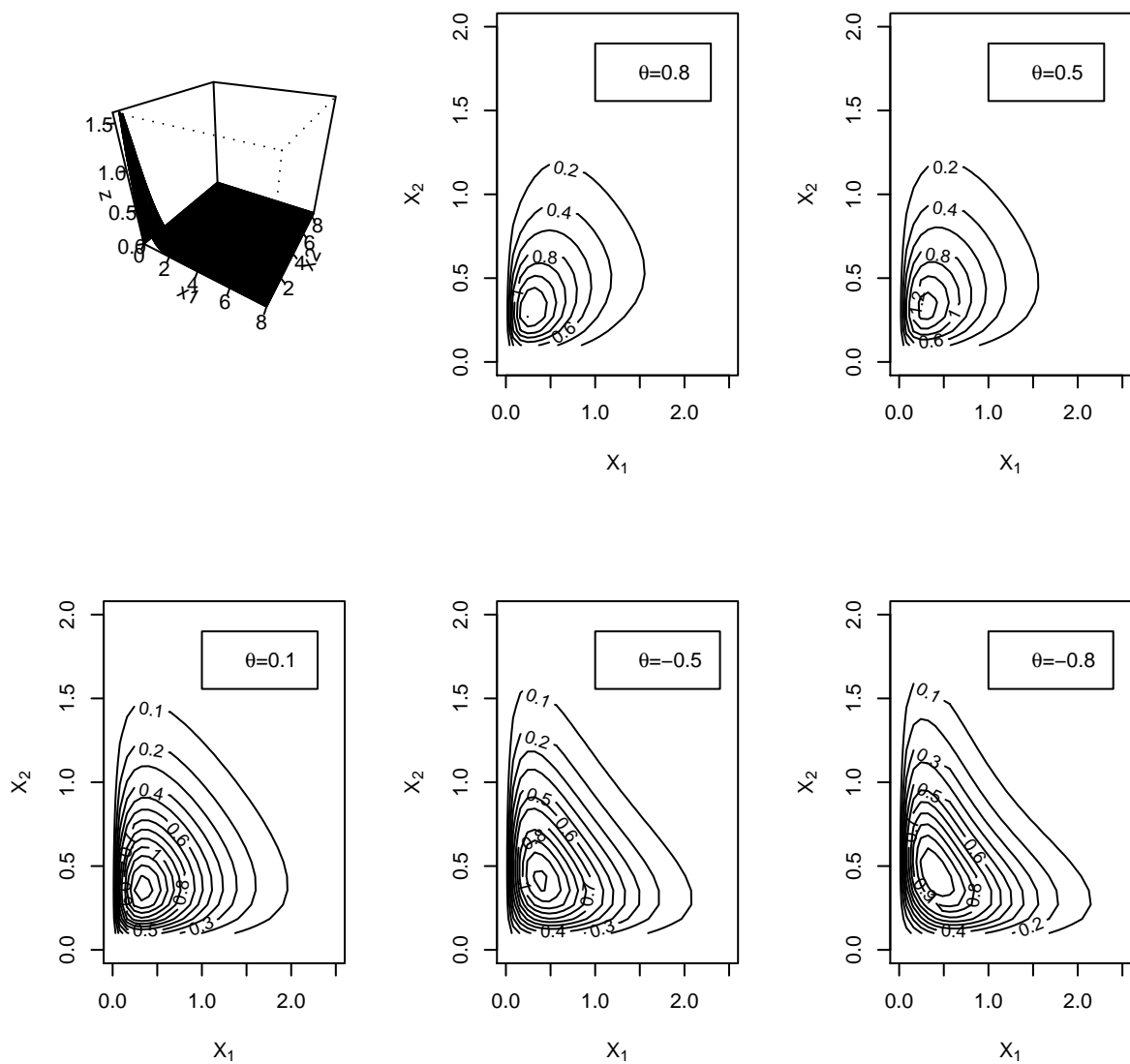
$$S(x_1, x_2) = (1 - (1 - e^{-\lambda_1 x_1})^{\alpha_1})(1 - (1 - e^{-\lambda_2 x_2})^{\alpha_2}) [1 + \theta(1 - e^{-\lambda_1 x_1})^{\alpha_1} (1 - e^{-\lambda_2 x_2})^{\alpha_2}] \quad (5.21)$$

As Figuras (5.1) e (5.2) mostram a densidade conjunta  $f(x_1, x_2)$  para  $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1.5)$  e  $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3)$ , respectivamente para diferentes  $\theta$ s. Observando-se os contornos, é possível notar a relação de dependência que  $\theta$  produz em  $X_1$  e  $X_2$ .

Trabalhos já foram realizados utilizando-se da distribuição BVGE via cópula FGM, como exemplo, em Moala, Achcar e Tarumoto (2010), [AJH10], onde é apresentada como distribuição alternativa ao ajuste de dados na presença de dados censurados e presença de covariáveis.



**Figura 5.1:** Gráfico da f.d.p. conjunta para a distribuição BVGE via cópula FGM,  $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ , e contornos para  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 3$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1.5$  com  $\theta = 0.8, 0.5, 0.1, -0.5, -0.8$ . No gráfico da conjunta,  $\theta = 0.8$ .



**Figura 5.2:** Gráfico da f.d.p. conjunta para a distribuição BVGE via cópula FGM,  $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ , e contornos para  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 3$ ,  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 3$  com  $\theta = 0.8, 0.5, 0.1, -0.5, -0.8$ . No gráfico da conjunta,  $\theta = 0.8$ .

### 5.3 Distribuição BVGE derivada da Cópula Gumbel-Barnett

Considere inicialmente a função distribuição da distribuição exponencial bivariada proposta por Gumbel (1960), dada por:

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 - e^{-x_1} - e^{-x_2} + e^{-(x_1+x_2+\phi x_1 x_2)} & , \text{ se } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ 0, & \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad (5.22)$$

em que  $\phi \in [0, 1]$ . De (5.22) tem-se que a função densidade conjunta é:

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \quad (5.23)$$

$$= e^{-x_1-x_2-\phi x_1 x_2} (-\phi + 1 + \phi x_1 + \phi x_2 + \phi^2 x_1 x_2). \quad (5.24)$$

As densidades marginais de (5.24) são, respectivamente  $f_1(x_1) = e^{-x_1}$  e  $f_2(x_2) = e^{-x_2}$ .

Com base no corolário (1), as inversas generalizadas (neste caso, as inversas comuns) de (5.22) são calculadas e dadas por  $F_1^{-1}(u) = -\log(1-u)$  e  $F_2^{-1}(v) = -\log(1-v)$ ,  $u, v \in (0, 1)$ . Daí, tem-se a cópula Gumbel-Barnett como dada em (5.4),

$$C(u, v) = u + v - 1 + (1-u)(1-v) \exp\{-\phi \log(1-u) \log(1-v)\}. \quad (5.25)$$

A densidade da cópula (5.25) é dada por:

$$c(u, v) = [-\phi + (1-\phi \log(1-u))(1-\phi \log(1-v))] \exp\{-\phi \log(1-u) \log(1-v)\}. \quad (5.26)$$

Alguns autores consideram a cópula com a denominação de somente Gumbel, mas Barnett (1980) [BAR80] a discutiu primeiramente em termos de marginais uniformes, daí o nome Gumbel-Barnett.

Agora, de (5.16) e (5.17), a função distribuição acumulada conjunta da distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett

$$F(x_1, x_2) = \left(1 - e^{-\beta_1 x_1}\right)^{\alpha_1} + \left(1 - e^{-\beta_2 x_2}\right)^{\alpha_2} - 1 + \left(1 - \left(1 - e^{-\beta_1 x_1}\right)^{\alpha_1}\right) \left(1 - \left(1 - e^{-\beta_2 x_2}\right)^{\alpha_2}\right) \times \\ \times e^{-\phi \ln\left(1 - \left(1 - e^{-\beta_1 x_1}\right)^{\alpha_1}\right) \ln\left(1 - \left(1 - e^{-\beta_2 x_2}\right)^{\alpha_2}\right)} \quad (5.27)$$

Assim, a função densidade conjunta da distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett é dada por:

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) [-\phi + (1-\phi \log(1-F_1(x_1)))(1-\phi \log(1-F_2(x_2)))] \times \\ \times \exp\{-\phi \log(1-F_1(x_1)) \log(1-F_2(x_2))\} = \\ = \alpha_1 \alpha_2 \lambda_1 \lambda_2 e^{-(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)} (1 - e^{-\lambda_1 x_1})^{\alpha_1 - 1} (1 - e^{-\lambda_2 x_2})^{\alpha_2 - 1} \times \\ \times [-\phi + (1-\phi \log(1 - (1 - e^{-\lambda_1 x_1})^{\alpha_1})) (1-\phi \log(1 - (1 - e^{-\lambda_2 x_2})^{\alpha_2}))] \quad (5.28)$$

A função de sobrevivência bivariada  $S(x_1, x_2)$  da cópula Gumbel-Barnett pode ser facilmente encontrada e

é dada por:

$$\begin{aligned}
S(x_1, x_2) &= 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F(x_1, x_2) = \\
&= S_1(x_1)S_2(x_2)\exp\{-\phi \log S_1(x_1) \log S_2(x_2)\} = \\
&= (1 - (1 - e^{-\lambda_1 x_1})^{\alpha_1})(1 - \phi \log(1 - (1 - e^{-\lambda_2 x_2})^{\alpha_2}))\exp\{-\phi \times \\
&\quad \times \log(1 - (1 - e^{-\lambda_1 x_1})^{\alpha_1}) \log(1 - (1 - e^{-\lambda_2 x_2})^{\alpha_2})\}, \tag{5.29}
\end{aligned}$$

em que  $S_1(x_1) = 1 - F_1(x_1)$  e  $S_2(x_2) = 1 - F_2(x_2)$ , funções de sobrevivências marginais de  $X_1$  e  $X_2$ , respectivamente.

O  $\tau$  de Kendall, dado por (5.11) deve ser obtido numericamente, pois

$$\int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) = \int_0^1 \Psi(v) dv$$

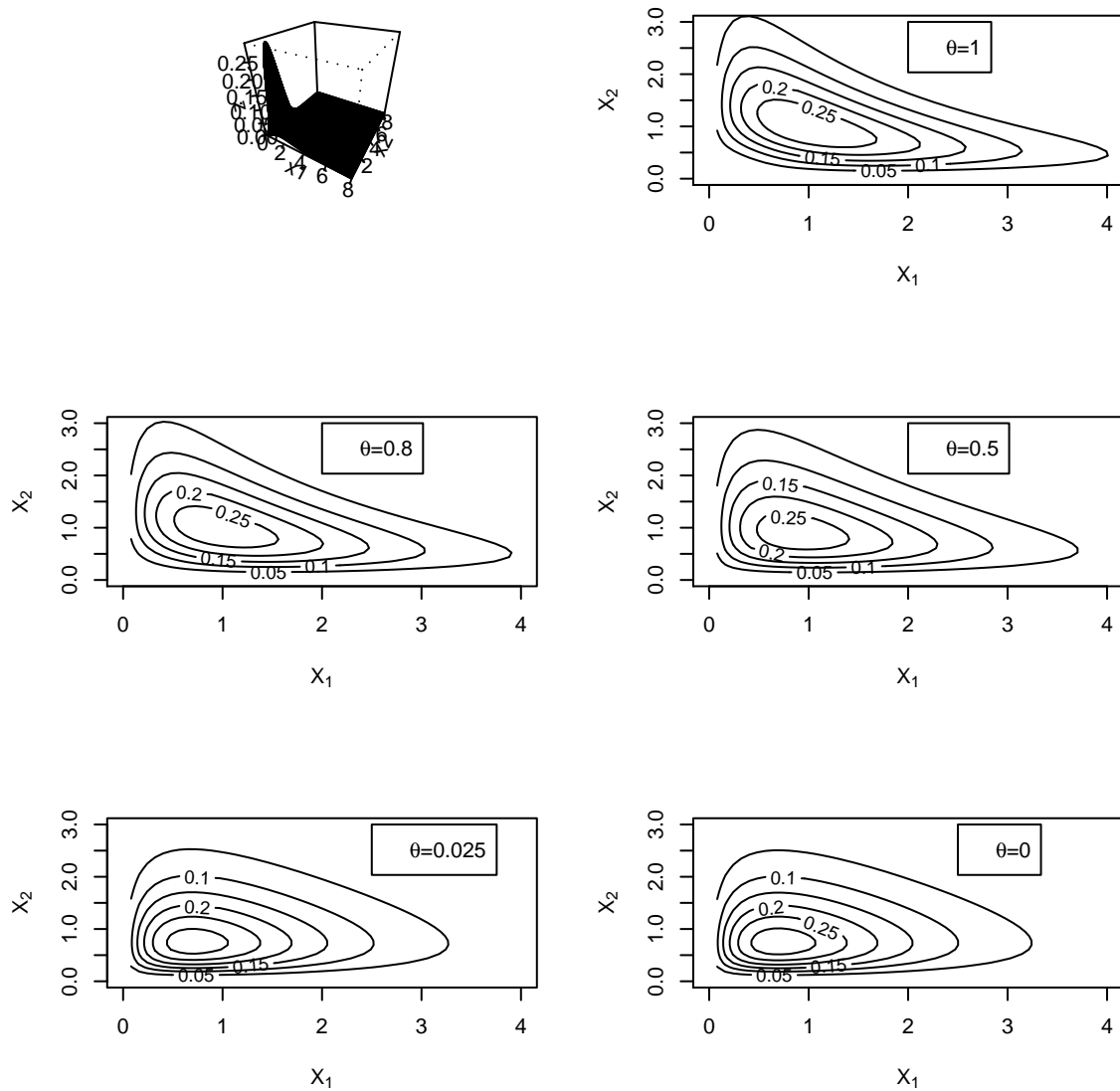
não possui solução analítica. A função  $\Psi(v)$ , resultado da integração em  $u$ , é omitida devido à sua extensão.

A medida (5.13) também deve ser obtida numericamente, pois

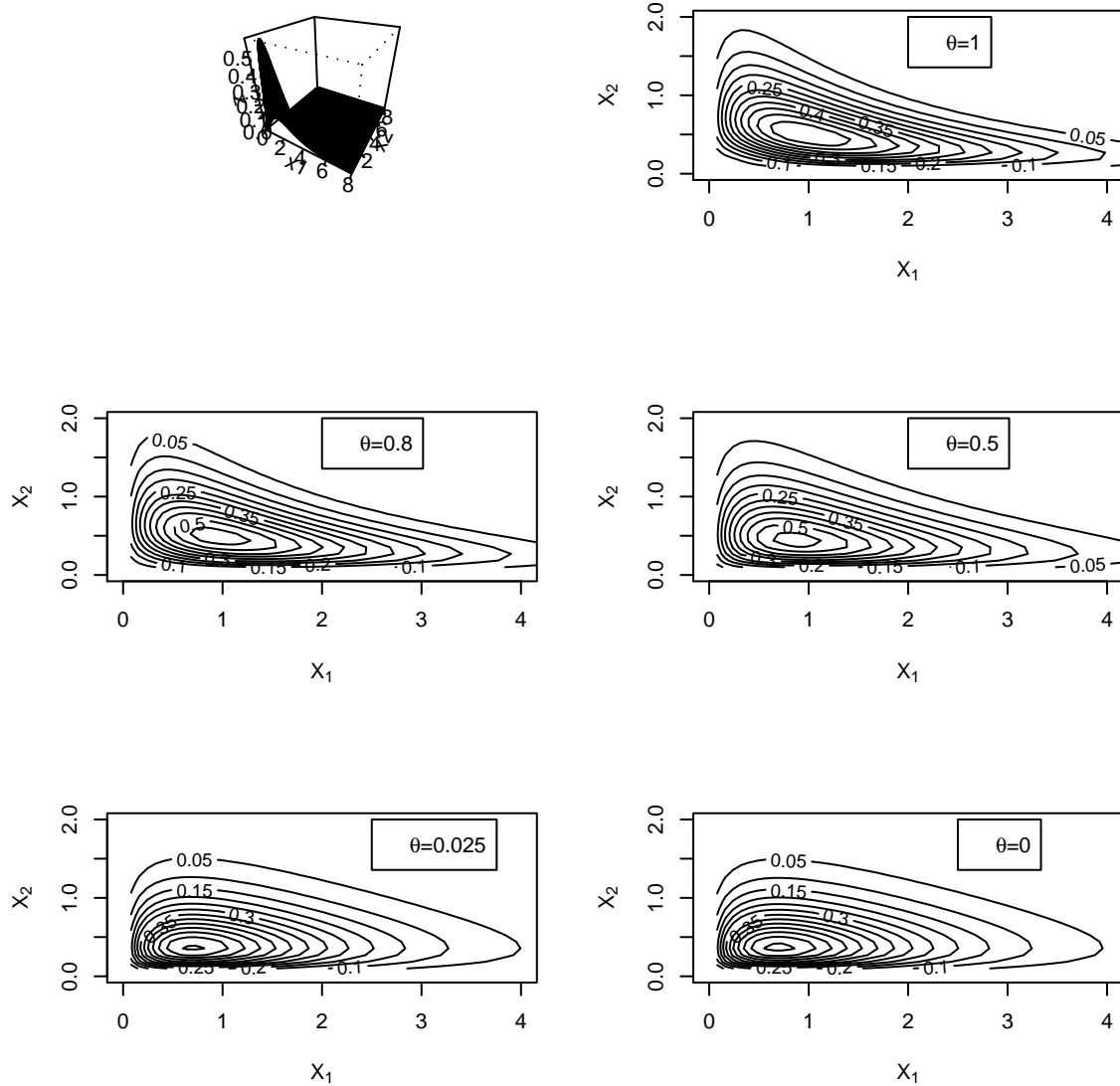
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 (u + v - 1 + (1 - u)(1 - v)\exp\{-\phi \log(1 - u) \log(1 - v)\}) dudv = \\
\int_0^1 1/2 \frac{-2v - \phi \log(1 - v) + 2v\phi (1 - v)}{-2 + \phi \log(1 - v)} dv \tag{5.30}
\end{aligned}$$

não possui solução analítica.

As Figuras (5.1) e (5.2) mostram a densidade conjunta  $f(x_1, x_2)$  para  $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1.5)$  e  $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \lambda_3 = 1, \lambda_2 = 3)$ , respectivamente para diferentes  $\theta$ s. Observando-se os contornos, é possível notar a relação de dependência que  $\theta$  produz em  $X_1$  e  $X_2$ .



**Figura 5.3:** Gráfico da f.d.p. conjunta para a distribuição BVGE via cópula Gumbel e contornos para  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 3$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1.5$  com  $\theta = 1, 0.8, 0.5, 0.025, 0$ . No gráfico da conjunta,  $\theta = 1$ .



**Figura 5.4:** Gráfico da f.d.p. conjunta para a distribuição BVGE via cópula Gumbel e contornos para  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 3$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$  com  $\theta = 1, 0.8, 0.5, 0.025, 0$ . No gráfico da conjunta,  $\theta = 1$ .

## 5.4 Distribuição BVGE derivada da Cópula Clayton

Outra maneira de se obter a distribuição BVGE é através da cópula Clayton, dada por:

$$C(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}},$$

com  $\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$ .

Assim, a densidade desta cópula é dada por:

$$c(u, v) = (\theta + 1)(uv)^{-\theta+1} (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\left(\frac{1}{\theta}+2\right)}$$

Assumindo (5.16) e (5.17),

$$F(x_1, x_2) = \left( \left( (1 - e^{-\lambda_1 x_1})^{\alpha_1} \right)^{-\theta} + \left( (1 - e^{-\lambda_2 x_2})^{\alpha_2} \right)^{-\theta} - 1 \right)^{-\theta^{-1}} \quad (5.31)$$

De (5.31), a função densidade de probabilidade  $f(x_1, x_2)$  é dada por:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \left( \left( (1 - e^{-\lambda_1 x_1})^{\alpha_1} \right)^{-\theta} + \left( (1 - e^{-\lambda_2 x_2})^{\alpha_2} \right)^{-\theta} - 1 \right)^{-\frac{1+2\theta}{\theta}} \times \\ &\times \left( (1 - e^{-\lambda_2 x_2})^{\alpha_2} \right)^{-\theta} \alpha_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2 - \lambda_1 x_1} \left( (1 - e^{-\lambda_1 x_1})^{\alpha_1} \right)^{-\theta} \alpha_1 \lambda_1 \times \\ &\times (1 + \theta) \left( -1 + e^{-\lambda_2 x_2} \right)^{-1} \left( -1 + e^{-\lambda_1 x_1} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (5.32)$$

A função de sobrevivência conjunta baseada na cópula Clayton é expressa como:

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2) &= 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F(x_1, x_2) = \\ &= S_1(x_1) + S_2(x_2) - 1 + (F_1(x_1))^{-\theta} + (F_2(x_2))^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} = \\ &= 1 - (1 - e^{-\lambda_1 x_1})^{\alpha_1} - (1 - e^{-\lambda_2 x_2})^{\alpha_2} + \left( (1 - e^{-\lambda_1 x_1})^{-\theta \alpha_1} + \right. \\ &\quad \left. + (1 - e^{-\lambda_2 x_2})^{-\theta \alpha_2} - 1 \right)^{-\frac{1}{\theta}}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Gupta e Kundu (2011) [DR11] propõem uma distribuição BVGE considerando as v.a.'s  $X_1$  e  $X_2$  com  $X_1 \sim GE(\alpha \alpha_1, \lambda_1)$ ,  $X_2 \sim GE(\alpha \alpha_2, \lambda_2)$  e com  $\theta = 1/\alpha$ . Assim, mostram que a mesma também pode ser obtida via cópula de Clayton. Esta distribuição é apresentada a seguir e, por comodidade, será denominada distribuição BVGE via cópula Clayton GK.

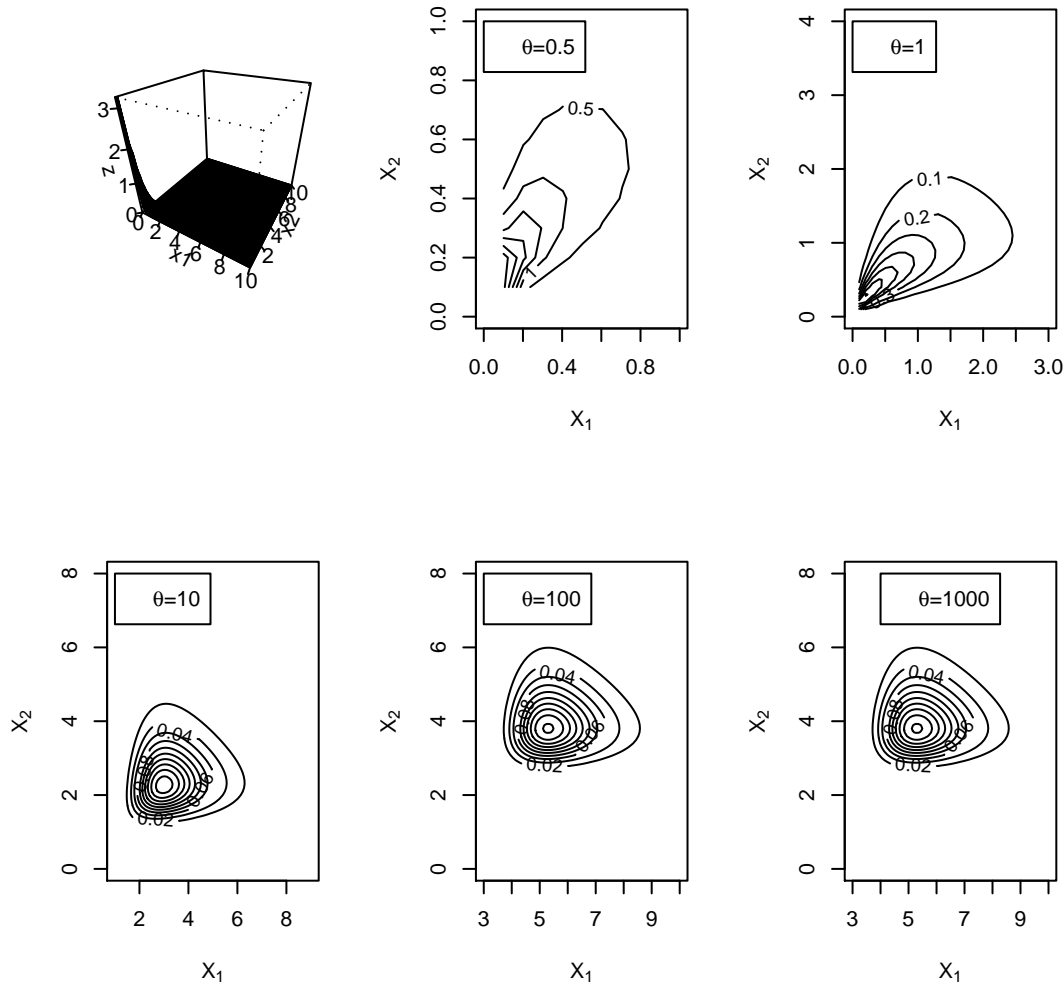
Deste modo, a função distribuição conjunta de  $X_1$  e  $X_2$  será:

$$F(x_1, x_2) = \left[ (1 - e^{-\lambda_1 x_1})^{-\alpha_1} + (1 - e^{-\lambda_2 x_2})^{-\alpha_2} - 1 \right]^\alpha \quad (5.34)$$

O  $\tau$  de Kendall é calculado analiticamente e é dado por  $\tau_K = \frac{\theta}{\theta+2}$ . Já a medida  $\rho$  de Spearman para esta cópula é muito complicada de ser obtida e é omitida neste trabalho.

A cópula Clayton tem sido usada para estudar riscos correlacionados, pois exibe uma forte dependência em sua cauda à esquerda, e uma dependência relativamente fraca em sua cauda à direita. Além disso, quando  $\theta = 0$ , a independência ocorre, enquanto que, quando  $\theta \rightarrow \infty$ , implica-se em dependência positiva perfeita.

A Figura (5.5) mostra a densidade conjunta  $f(x_1, x_2)$  de (5.34) para  $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1.5)$  para diferentes  $\theta$ s, considerando a distribuição (5.34).



**Figura 5.5:** Gráfico da f.d.p. conjunta para a distribuição BVGE via cópula Clayton GK e contornos para  $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1.5$  com  $\theta = 0.5, 1, 10, 100, 1000$ . No gráfico da conjunta,  $\theta = 0.5$ .

## 5.5 Distribuição BVGE derivada da Cópula Frank

Outra distribuição BVGE é obtida pela cópula Frank, dada em (5.9), como segue:

$$C(u, v) = -\ln \left( 1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right) \theta^{-1}$$

com  $\theta \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$  é denominada cópula Frank.

A densidade desta cópula é dada por:

$c(u, v) =$

$$\frac{e^{-\theta(u+v)} \theta (e^{-\theta} - 1)}{(e^{-\theta} + e^{-\theta(u+v)} - e^{-\theta u} - e^{-\theta v})^2}.$$

Assumindo (5.16) e (5.17), tem-se:

$$F(x_1, x_2) = -\ln \left( 1 + \frac{\left( e^{-\theta(1-e^{-\lambda_1 x_1})^{\alpha_1}} - 1 \right) \left( e^{-\theta(1-e^{-\lambda_2 x_2})^{\alpha_2}} - 1 \right)}{e^{-\theta} - 1} \right) \theta^{-1}. \quad (5.35)$$

Deste modo, a função densidade conjunta da distribuição BVGE via cópula Frank é encontrada e dada por:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = & - \frac{e^{-\theta((1-e^{-\lambda_1 x_1})^{\alpha_1} + (1-e^{-\lambda_2 x_2})^{\alpha_2})} \theta (e^{-\theta} - 1)}{\left( e^{-\theta} + e^{-\theta((1-e^{-\lambda_1 x_1})^{\alpha_1} + (1-e^{-\lambda_2 x_2})^{\alpha_2})} - e^{-\theta(1-e^{-\lambda_1 x_1})^{\alpha_1}} - e^{-\theta(1-e^{-\lambda_2 x_2})^{\alpha_2}} \right)^2} \times \\ & \times \alpha_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2 - \lambda_1 x_1} \left( (1 - e^{-\lambda_1 x_1})^{\alpha_1} \right)^{-\theta} \alpha_1 \lambda_1. \end{aligned} \quad (5.36)$$

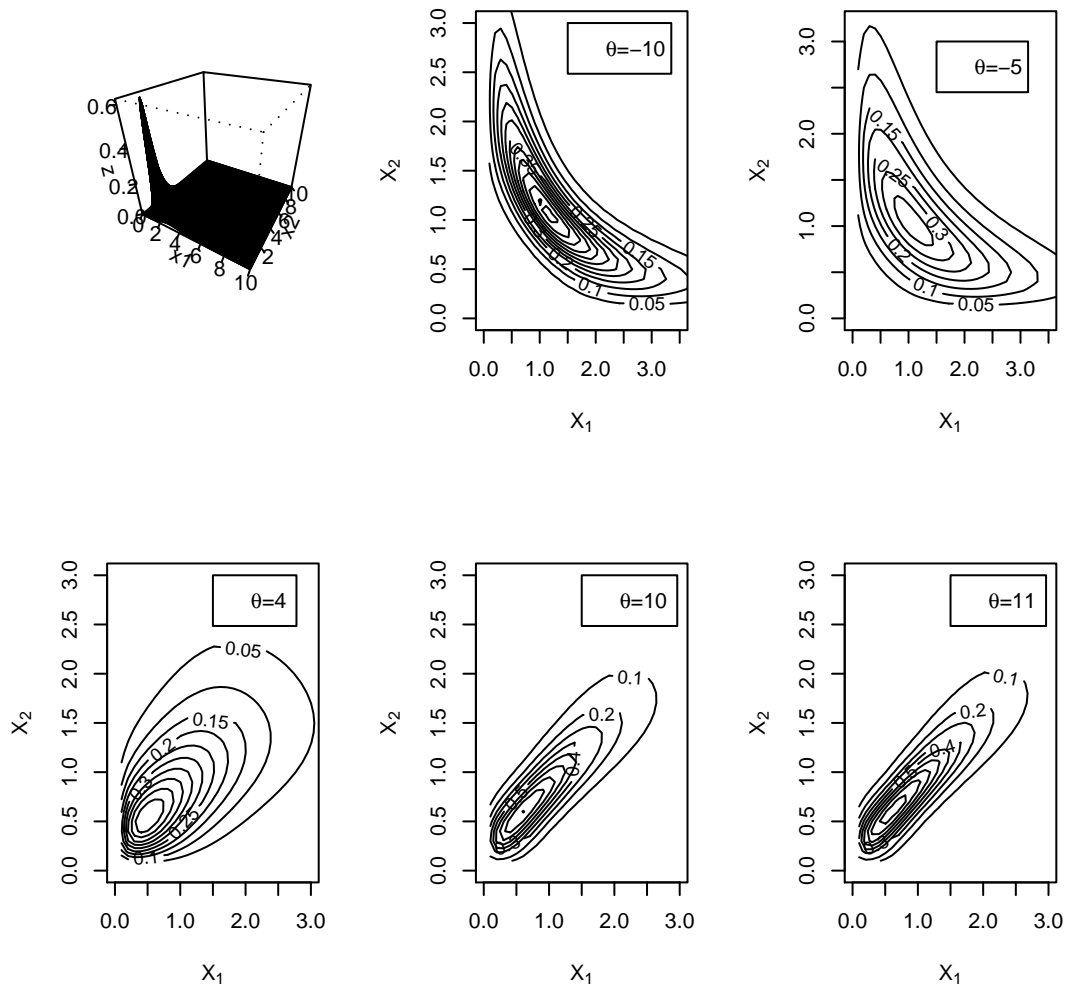
A função de sobrevivência conjunta baseada na cópula Frank é expressa como:

$$\begin{aligned} S(x_1, x_2) &= 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F(x_1, x_2) = \\ &= 1 - \left( 1 - e^{-\lambda_1 x_1} \right)^{\alpha_1} - \left( 1 - e^{-\lambda_2 x_2} \right)^{\alpha_2} - \\ &\quad - \ln \left( 1 + \frac{\left( e^{-\theta(1-e^{-\lambda_1 x_1})^{\alpha_1}} - 1 \right) \left( e^{-\theta(1-e^{-\lambda_2 x_2})^{\alpha_2}} - 1 \right)}{e^{-\theta} - 1} \right) \theta^{-1} \end{aligned} \quad (5.37)$$

A relação entre o  $\tau$  de Kendall e o parâmetro  $\theta$  da cópula Frank é dada por:

$$\frac{\frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{t}{e^t - 1} dt - 1}{\theta} = \frac{1 - \tau}{4}$$

A Figura (5.6) mostra a densidade conjunta  $f(x_1, x_2)$  de (5.36) para  $(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1.5)$  para diferentes  $\theta$ s.



**Figura 5.6:** Gráfico da f.d.p. conjunta para a distribuição BVGE via cópula Frank e contornos para  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 3$ ,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1.5$  com  $\theta = -10, -5, 4, 10, 11$ . No gráfico da conjunta,  $\theta = -10$ .

## 5.6 Análise Bayesiana

A análise Bayesiana para a estimação proposta neste capítulo seguiu os mesmos procedimentos e prioris utilizados na seção (4.4), isto é, Jeffreys, Uniforme e produto de Gamas independentes.

Adicionalmente, tem-se o parâmetro de dependência  $\theta$ , cuja priori não-informativa pode ser

$$\pi(\theta) \sim U[-1, 1]$$

no caso da cópula FGM e

$$\pi(\theta) \sim U[0, 1]$$

no caso da cópula Gumbel.

Destacam-se aqui as prioris de Jeffreys para as distribuições (5.19) e (5.28). Devido às suas densidades apresentarem uma forma analítica complexa, suas log-verossimilhanças e respectivas derivadas, de primeira

e segunda ordem, para obtenção da matriz informação de Fisher para cinco parâmetros serão extremamente extensas e trabalhosas. Assim, toda a construção das respectivas matrizes para (5.19) e (5.28) foram obtidas computacionalmente através dos *softwares* MAPLE e R da seguinte forma:

- 1. No *software* MAPLE, foram obtidas: função log-verossimilhança e derivadas de primeira e segunda ordem.
- 2. Ainda no *software* MAPLE, foram obtidos os elementos  $\left(\frac{\partial^2 \log f(x|\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j}\right) \times \text{densidade}$ , sendo  $\phi$  o conjunto de parâmetros de cada densidade. No caso das distribuições apresentadas, tiveram-se  $i = j = 5$  parâmetros:  $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2$  e  $\theta$ .
- 3. As expressões foram otimizadas no MAPLE para a linguagem computacional e passadas ao *software* R.
- 4. No *software* R, através do pacote que realiza integrações duplas, *pracma()*, foram calculadas  $I_{ij}(\phi) = -E\left(\frac{\partial^2 \log f(x|\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j}\right)$ .

O item (4) foi repetido para cada iteração do algoritmo de *Metropolis Hastings*.

# Capítulo 6

## Simulação

Antes de prosseguir para uma aplicação de dados reais, seguem neste capítulo simulações realizadas a partir das distribuições BVGE de Gupta e Kundu e das distribuições BVGE via cópulas obtidas por este presente trabalho, bem como respectivas análises e comentários. O intuito é mostrar que a estimação, utilizando-se destas distribuições, é possível para tamanhos de amostras diferentes, nos casos clássico e Bayesiano.

### 6.1 Simulação de dados via distribuição BVGE de Gupta e Kundu

Nesta seção, foram feitas comparações entre as prioris apresentadas e o estimador de máxima verossimilhança, a fim de se obter uma alternativa para estimar os parâmetros  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda)$  para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu. Em termos de aplicação utilizou-se a BVGE(2.0, 3.0, 1.5, 1.0) com amostras de  $n = 20, 50$  e 100 valores. O algoritmo MCMC foi utilizado para obter as estimativas dos parâmetros a partir da geração de  $Q$  cadeias MCMC e finalizado quando  $Q = 1000$  cadeias. Para cada priori e tamanho amostral, a convergência foi diagnosticada pelo teste de Geweke (1992) [GEW92]. Cada cadeia foi gerada de uma amostra simulada distinta, com 10000 iterações e os elementos da amostra MCMC tomados com salto de tamanho 10.

Para a estimação de máxima verossimilhança também foram simuladas amostras até que se obtivessem 1000 quádruplas de EMV  $(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\lambda})$ . Foi utilizado o pacote computacional do R, *maxlik*().

Nas tabelas (6.1) à (6.4) foram sumarizadas as informações resultantes do processo de simulação: estimativa do EMV, as médias a posteriori de cada parâmetro em relação a cada priori (Gama, Uniforme e Jeffreys), erros padrões (entre parentêses) e probabilidade de cobertura [entre colchetes].

**Tabela 6.1:** Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro  $\alpha_1 = 2.0$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu.

Par	$n$	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
	$n = 20$	2.314(1.093) [0.96]	2.262(1.086) [0.94]	3.039(1.476) [0.90]	2.519(1.287) [0.93]
$\alpha_1$	$n = 50$	2.111(0.585) [0.96]	2.017(0.539) [0.97]	2.401(0.674) [0.93]	2.132(0.614) [0.94]
	$n = 100$	2.090(0.410) [0.95]	2.052(0.390) [0.96]	2.190(0.430) [0.93]	2.089(0.412) [0.95]

**Tabela 6.2:** Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro  $\alpha_2 = 3.0$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu.

Par	$n$	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\alpha_2$	$n = 20$	3.580(1.647) [0.96]	3.475(1.690) [0.94]	4.835(2.455) [0.88]	3.811(1.884) [0.95]
	$n = 50$	3.289(0.892) [0.96]	2.887(0.668) [0.97]	3.676(1.000) [0.92]	3.278(0.904) [0.95]
	$n = 100$	3.149(0.580) [0.96]	3.111(0.571) [0.96]	3.310(0.606) [0.95]	3.151(0.591) [0.95]

**Tabela 6.3:** Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro  $\alpha_3 = 1.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu.

Par	$n$	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\alpha_3$	$n = 20$	1.788(0.920) [0.93]	1.681(0.816) [0.96]	2.271(1.199) [0.91]	1.763(0.895) [0.95]
	$n = 50$	1.593(0.476) [0.95]	1.589(0.436) [0.98]	1.770(0.532) [0.94]	1.610(0.492) [0.96]
	$n = 100$	1.551(0.311) [0.95]	1.538(0.315) [0.97]	1.620(0.328) [0.95]	1.549(0.324) [0.95]

**Tabela 6.4:** Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro  $\lambda = 1.0$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu.

Par	$n$	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\lambda$	$n = 20$	1.061(0.180) [0.96]	1.026(0.182) [0.96]	1.186(0.217) [0.85]	1.059(0.184) [0.94]
	$n = 50$	1.025(0.110) [0.95]	0.993(0.105) [0.96]	1.078(0.115) [0.91]	1.020(0.114) [0.96]
	$n = 100$	1.017(0.076) [0.95]	1.005(0.077) [0.96]	1.035(0.079) [0.94]	1.013(0.078) [0.96]

Para o caso da distribuição BVGE de Gupta e Kundu, tanto as estimativas clássicas quanto as Bayesianas aproximaram-se dos verdadeiros valores dos parâmetros a medida que  $n$  aumentou. Ambas as estimações apresentaram baixos valores de erro padrão e probabilidade de cobertura próxima à 0.95 para todos os tamanhos amostrais estudados.

No caso Bayesiano, o uso das prioris Gamas independentes para  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda)$  apresentou melhores resultados quando comparados com os EMV e as demais estimações provenientes do uso das prioris Uniforme e Jeffreys.

## 6.2 Simulação de dados via distribuição BVGE via cópula FGM

Nesta seção, foram feitas comparações entre as prioris apresentadas e o EMV, a fim de se obter uma alternativa para estimar os parâmetros  $(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$  para a situação da distribuição BVGE via cópula FGM. Em termos de aplicação utilizaram-se os parâmetros (1.5, 2.5, 0.5, 0.05, 0.5) com amostras de  $n = 20, 50$  e 100 valores. O algoritmo MCMC foi utilizado para obter as estimativas dos parâmetros a partir da geração de  $Q$  cadeias MCMC e finalizado quando  $Q = 1000$  cadeias. Para que as prioris Uniforme, Gama e Jeffreys obtivessem convergência, foi utilizado o teste de Geweke (1992) [GEW92]. Cada cadeia foi gerada de uma amostra simulada distinta, com 500 iterações e os elementos da amostra MCMC tomados com salto de tamanho 5.

Para a estimação de máxima verossimilhança também foram simuladas amostras até que se obtivessem 1000 quintuplas de EMV  $(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\theta})$ , também utilizando o pacote `maxlik()`, do R.

Nas tabelas (6.5) à (6.9) são apresentadas as estimativas de máxima verossimilhança e médias a posteriori dos parâmetros  $(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$  para os casos em que  $n = 20, 50$  e 100, os erros padrões e respectivas probabilidades de cobertura.

**Tabela 6.5:** Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro  $\alpha_1 = 1.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula FGM.

Par	$n$	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\alpha_1$	$n = 20$	1.754(0.747) [0.95]	1.757(0.719) [0.94]	2.089(0.966) [0.90]	1.441(0.502) [0.89]
	$n = 50$	1.601(0.353) [0.95]	1.591(0.355) [0.95]	1.678(0.373) [0.93]	1.548(0.387) [0.91]
	$n = 100$	1.546(0.228) [0.95]	1.555(0.212) [0.97]	1.586(0.219) [0.96]	1.508(0.218) [0.95]

**Tabela 6.6:** Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro  $\alpha_2 = 2.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula FGM.

Par	$n$	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\alpha_2$	$n = 20$	3.054(1.482) [0.95]	2.575(0.402) [0.99]	2.757(0.396) [0.99]	2.605(0.413) [0.98]
	$n = 50$	2.692(0.680) [0.95]	2.613(0.364) [0.99]	2.703(0.345) [0.99]	2.597(0.387) [0.99]
	$n = 100$	2.593(0.436) [0.95]	2.600(0.291) [0.99]	2.659(0.294) [0.99]	2.598(0.298) [0.99]

**Tabela 6.7:** Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro  $\lambda_1 = 0.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula FGM.

Par	$n$	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\lambda_1$	$n = 20$	0.549(0.163) [0.93]	0.545(0.147) [0.95]	0.610(0.178) [0.90]	0.427(0.121) [0.80]
	$n = 50$	0.519(0.089) [0.95]	0.516(0.085) [0.99]	0.541(0.093) [0.93]	0.491(0.087) [0.90]
	$n = 100$	0.509(0.060) [0.95]	0.508(0.059) [0.96]	0.515(0.059) [0.96]	0.501(0.061) [0.91]

**Tabela 6.8:** Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro  $\lambda_2 = 0.05$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula FGM.

Par	$n$	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\lambda_2$	$n = 20$	0.054(0.014) [0.94]	0.051(0.009) [0.98]	0.054(0.010) [0.98]	0.051(0.009) [0.96]
	$n = 50$	0.051(0.008) [0.94]	0.051(0.006) [0.98]	0.052(0.006) [0.97]	0.050(0.006) [0.95]
	$n = 100$	0.050(0.005) [0.95]	0.050(0.004) [0.99]	0.051(0.004) [0.98]	0.050(0.004) [0.95]

**Tabela 6.9:** Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro  $\theta = 0.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula FGM.

Par	$n$	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\theta$	$n = 20$	133.2(2415.) [0.90]	0.184(0.229) [0.99]	0.187(0.437) [0.98]	0.196(0.239) [0.98]
	$n = 50$	0.523(0.516) [0.92]	0.291(0.254) [0.98]	0.312(0.235) [0.98]	0.308(0.268) [0.96]
	$n = 100$	0.503(0.301) [0.93]	0.398(0.211) [0.99]	0.388(0.215) [0.98]	0.425(0.222) [0.98]

Para a distribuição BVGE via cópula FGM, como era de se esperar, a medida que  $n$  aumenta, as estimativas obtidas se aproximam dos verdadeiros parâmetros, tanto para o caso clássico quanto para o Bayesiano. Em geral, o uso da priori Uniforme produziu estimativa mais distantes dos verdadeiros valores, enquanto as prioris Gama e Jeffreys produziram melhores valores.

Apesar de alguns valores obtidos pelo método de máxima verossimilhança terem sido mais próximos do que os Bayesianos, estes obtiveram um menor erro padrão, como observado, por exemplo, na tabela das estimativas

de  $\theta$ , (6.9). Ainda no caso de  $\theta$ , na estimação clássica, quando  $n = 20$  as estimativas assumiram valores muito acima daqueles permitidos pelo seu espaço paramétrico.

### 6.3 Simulação de dados via distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett

Nesta seção, foram feitas comparações entre as prioris apresentadas e o EMV, a fim de se obter uma alternativa para estimar os parâmetros  $(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$  para a situação da distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett. Em termos de aplicação utilizaram-se os parâmetros  $(1.5, 2.5, 0.5, 0.05, 0.5)$  com amostras de  $n = 20, 50$  e  $100$  valores. O algoritmo MCMC foi utilizado para obter as estimativas dos parâmetros a partir da geração de  $Q$  cadeias MCMC e finalizado quando  $Q = 1000$  cadeias. Para que as prioris Uniforme, Gama e Jeffreys obtivessem convergência, foi utilizado o teste de Geweke (1992) [GEW92]. Cada cadeia foi gerada de uma amostra simulada distinta, com 500 iterações e os elementos da amostra MCMC tomados com salto de tamanho 5.

Para a estimação de máxima verossimilhança também foram simuladas amostras até que se obtivessem 1000 quintuplas de EMV  $(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\theta})$ , também utilizando o pacote *maxlik()*, do R.

Nas tabelas (6.10) à (6.14) são apresentadas as estimativas de máxima verossimilhança e médias a posteriori dos parâmetros  $(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$  para os casos em que  $n = 20, 50$  e  $100$ , os erros padrões e respectivas probabilidades de cobertura.

**Tabela 6.10:** Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro  $\alpha_1 = 1.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett.

Par	$n$	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
	$n = 20$	1.721(0.613) [0.96]	1.798(0.796) [0.95]	2.054(0.920) [0.91]	1.484(0.518) [0.90]
$\alpha_1$	$n = 50$	1.592(0.345) [0.96]	1.584(0.333) [0.95]	1.704(0.369) [0.94]	1.490(0.308) [0.91]
	$n = 100$	1.561(0.227) [0.96]	1.527(0.208) [0.97]	1.585(0.237) [0.94]	1.506(0.214) [0.91]

**Tabela 6.11:** Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro  $\alpha_2 = 2.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett.

Par	$n$	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
	$n = 20$	3.103(1.294) [0.96]	2.621(0.419) [0.95]	2.832(0.377) [0.98]	2.624(0.440) [0.94]
$\alpha_2$	$n = 50$	2.801(0.725) [0.96]	2.672(0.335) [0.99]	2.753(0.332) [0.99]	2.647(0.397) [0.99]
	$n = 100$	2.736(0.455) [0.96]	2.670(0.280) [0.99]	2.721(0.286) [0.98]	2.632(0.312) [0.99]

**Tabela 6.12:** Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro  $\lambda_1 = 0.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett.

Par	$n$	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
	$n = 20$	0.534(0.142) [0.95]	0.538(0.156) [0.95]	0.591(0.176) [0.91]	0.416(0.087) [0.93]
$\lambda_1$	$n = 50$	0.512(0.088) [0.94]	0.510(0.087) [0.95]	0.541(0.089) [0.94]	0.472(0.069) [0.94]
	$n = 100$	0.506(0.059) [0.96]	0.506(0.056) [0.97]	0.526(0.060) [0.95]	0.485(0.059) [0.95]

**Tabela 6.13:** Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro  $\lambda_2 = 0.05$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett.

Par	$n$	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
	$n = 20$	0.056(0.015) [0.95]	0.052(0.008) [0.98]	0.055(0.008) [0.96]	0.056(0.008) [0.93]
$\lambda_2$	$n = 50$	0.054(0.007) [0.96]	0.052(0.005) [0.98]	0.054(0.005) [0.97]	0.053(0.006) [0.93]
	$n = 100$	0.053(0.005) [0.95]	0.052(0.004) [0.99]	0.053(0.004) [0.96]	0.054(0.005) [0.95]

**Tabela 6.14:** Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro  $\theta = 0.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett.

Par	$n$	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
	$n = 20$	0.827(5.657) [0.95]	0.498(0.119) [0.98]	0.481(0.130) [0.98]	0.505(0.122) [0.99]
$\theta$	$n = 50$	0.516(0.288) [0.95]	0.501(0.136) [0.99]	0.485(0.141) [0.97]	0.529(0.131) [0.98]
	$n = 100$	0.503(0.184) [0.95]	0.490(0.126) [0.99]	0.460(0.127) [0.99]	0.510(0.130) [0.99]

Para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett, novamente os resultados se assemelham aos da distribuição BVGE via cópula FGM. No entanto, em relação ao caso Bayesiano, a estimação de  $\theta$  foi melhor quando comparado à distribuição derivada da cópula FGM.

## 6.4 Simulação de dados via distribuição BVGE via cópula Clayton

Nesta seção, repetem-se comparações entre as prioris apresentadas e o EMV, a fim de se obter uma alternativa para estimar os parâmetros  $(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$ , para a situação da distribuição BVGE via cópula Clayton.

Nas tabelas (6.15) à (6.19) são apresentadas as estimativas de máxima verossimilhança e médias a posteriori dos parâmetros  $(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$  para os casos em que  $n = 20, 50$  e  $100$ , os erros padrões e respectivas probabilidades de cobertura. No caso Bayesiano, cada cadeia foi gerada de uma amostra simulada distinta, com 500 iterações e os elementos da amostra MCMC tomados com salto de tamanho 5.

**Tabela 6.15:** Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro  $\alpha_1 = 1.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Clayton.

Par	$n$	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
	$n = 20$	1.737(0.692) [0.92]	1.327(0.553) [0.90]	1.530(0.600) [0.93]	1.195(0.525) [0.90]
$\alpha_1$	$n = 50$	1.606(0.437) [0.93]	1.383(0.334) [0.93]	1.476(0.341) [0.93]	1.266(0.329) [0.90]
	$n = 100$	1.548(0.250) [0.95]	1.379(0.229) [0.93]	1.442(0.211) [0.94]	1.367(0.214) [0.90]

**Tabela 6.16:** Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro  $\alpha_2 = 2.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Clayton.

Par	$n$	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
	$n = 20$	2.984(1.230) [0.93]	2.310(0.982) [0.90]	2.743(1.086) [0.93]	2.317(0.907) [0.90]
$\alpha_2$	$n = 50$	2.681(0.744) [0.94]	2.327(0.595) [0.92]	2.495(0.395) [0.93]	2.251(0.547) [0.90]
	$n = 100$	2.586(0.433) [0.95]	2.339(0.229) [0.92]	2.430(0.388) [0.95]	2.305(0.385) [0.90]

**Tabela 6.17:** Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro  $\lambda_1 = 0.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Clayton.

Par	$n$	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\lambda_1$	$n = 20$	0.590(0.387) [0.94]	0.478(0.146) [0.90]	0.556(0.169) [0.94]	0.313(0.110) [0.90]
	$n = 50$	0.520(0.205) [0.91]	0.508(0.099) [0.94]	0.543(0.110) [0.94]	0.438(0.108) [0.95]
	$n = 100$	0.510(0.114) [0.95]	0.507(0.061) [0.97]	0.527(0.069) [0.95]	0.514(0.073) [0.95]

**Tabela 6.18:** Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro  $\lambda_2 = 0.05$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Clayton.

Par	$n$	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\lambda_2$	$n = 20$	0.056(0.016) [0.93]	0.052(0.015) [0.92]	0.059(0.017) [0.90]	0.046(0.015) [0.90]
	$n = 50$	0.051(0.009) [0.96]	0.051(0.008) [0.94]	0.054(0.008) [0.93]	0.050(0.009) [0.95]
	$n = 100$	0.050(0.006) [0.95]	0.051(0.005) [0.95]	0.052(0.005) [0.95]	0.050(0.006) [0.95]

**Tabela 6.19:** Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro  $\theta = 0.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Clayton.

Par	$n$	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\theta$	$n = 20$	0.557(0.188) [0.95]	1.363(2.257) [0.92]	0.990(1.252) [0.90]	0.644(0.353) [0.90]
	$n = 50$	0.517(0.117) [0.92]	0.786(0.696) [0.92]	0.718(0.526) [0.92]	0.636(0.025) [0.90]
	$n = 100$	0.511(0.006) [0.95]	0.634(0.194) [0.92]	0.613(0.123) [0.95]	0.608(0.123) [0.95]

Para a cópula Clayton, novamente, na maioria dos casos, as estimativas Bayesianas e clássicas se assemelham. Novamente, embora algumas estimativas de máxima verossimilhança ficaram mais próximas do verdadeiro valor, as estimativas Bayesianas apresentaram menor erro padrão, na maioria dos casos.

## 6.5 Simulação de dados via distribuição BVGE via cópula Frank

Foram feitas comparações entre as prioris apresentadas e o EMV, a fim de se obter uma alternativa para estimar os parâmetros  $(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$  para a situação da distribuição BVGE via cópula Frank. Em termos de aplicação utilizaram-se os parâmetros  $(1.5, 2.5, 0.5, 0.05, 1.5)$  com amostras de  $n = 20, 50$  e  $100$  valores. No caso Bayesiano, cada cadeia foi gerada de uma amostra simulada distinta, com 500 iterações e os elementos da amostra MCMC tomados com salto de tamanho 5.

Para a estimação de máxima verossimilhança também foram simuladas amostras até que se obtivessem 1000 quintuplas de EMV  $(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\theta})$ , também utilizando o pacote *maxlik()*, do R.

Nas tabelas (6.20) à (6.24) são apresentadas as estimativas de máxima verossimilhança e médias a posteriori dos parâmetros  $(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$  para os casos em que  $n = 20, 50$  e  $100$ , os erros padrões e respectivas probabilidades de cobertura.

**Tabela 6.20:** Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro  $\alpha_1 = 1.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Frank.

Par	$n$	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\alpha_1$	$n = 20$	2.660(1.079) [0.90]	2.420(0.946) [0.99]	3.041(1.554) [0.95]	1.297(0.247) [0.90]
	$n = 50$	2.409(0.582) [0.90]	2.210(0.454) [0.99]	2.380(0.521) [0.95]	1.337(0.144) [0.94]
	$n = 100$	2.313(0.369) [0.90]	2.181(0.302) [0.99]	2.300(0.436) [0.95]	1.359(0.112) [0.95]

**Tabela 6.21:** Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro  $\alpha_2 = 2.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Frank.

Par	$n$	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\alpha_2$	$n = 20$	4.594(2.165) [0.90]	4.448(2.488) [0.94]	5.698(3.240) [0.84]	3.502(1.660) [0.94]
	$n = 50$	4.166(1.252) [0.82]	3.883(1.125) [0.98]	4.313(1.160) [0.90]	3.580(0.984) [0.86]
	$n = 100$	3.954(0.715) [0.91]	3.871(0.760) [0.95]	3.863(0.663) [0.91]	3.401(0.651) [0.90]

**Tabela 6.22:** Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro  $\lambda_1 = 0.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Frank.

Par	$n$	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\lambda_1$	$n = 20$	0.554(0.140) [0.95]	0.487(0.124) [0.95]	0.566(0.157) [0.98]	0.259(0.021) [0.60]
	$n = 50$	0.517(0.084) [0.95]	0.477(0.066) [0.97]	0.499(0.072) [0.98]	0.283(0.012) [0.60]
	$n = 100$	0.508(0.055) [0.95]	0.483(0.051) [0.96]	0.494(0.056) [0.95]	0.291(0.009) [0.61]

**Tabela 6.23:** Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro  $\lambda_2 = 0.05$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Frank.

Par	$n$	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\lambda_2$	$n = 20$	0.054(0.012) [0.95]	0.051(0.012) [0.94]	0.056(0.012) [0.98]	0.042(0.010) [0.85]
	$n = 50$	0.051(0.007) [0.95]	0.049(0.007) [0.97]	0.052(0.007) [0.95]	0.045(0.006) [0.93]
	$n = 100$	0.051(0.005) [0.95]	0.051(0.004) [0.95]	0.050(0.004) [0.96]	0.054(0.005) [0.95]

**Tabela 6.24:** Estimativas do EMV e médias a posteriori do parâmetro  $\theta = 1.5$ , em relação às prioris Gama, Uniforme e Jeffreys, com seus respectivos erros padrões e probabilidade de cobertura para a distribuição BVGE via cópula Frank.

Par	$n$	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\theta$	$n = 20$	1.612(1.530) [0.95]	1.160(0.850) [0.94]	1.649(1.388) [0.98]	2.364(2.188) [0.94]
	$n = 50$	1.572(0.979) [0.95]	1.249(0.903) [0.94]	1.595(0.899) [0.98]	1.927(1.164) [0.96]
	$n = 100$	1.507(0.636) [0.95]	1.171(0.614) [0.95]	1.502(0.610) [0.99]	1.847(0.703) [0.97]

O uso da distribuição BVGE via cópula Frank, em geral, produziu estimativas próximas aos valores reais, mas houve maior inconsistência dos resultados do que nas demais cópulas. Por exemplo, algumas amplitudes ficaram distantes dos valores de 0.95, como no caso de  $\lambda_1$  utilizando-se da priori de Jeffreys. Outro exemplo seriam os valores obtidos na estimação de  $\alpha_2$ , que foram superestimados, tanto no EMV quanto nas estimativas Bayesianas.

Em geral, os métodos Bayesianos e clássicos conseguiram estimar os parâmetros das distribuições propostas de maneira satisfatória. Os métodos se alternaram na questão sobre qual foi o melhor em cada caso, assim

como algumas prioris também se mostraram mais úteis que outras em determinadas situações.

Nos exemplos das distribuições BVGE de Gupta e Kudu, BVGE via cópula FGM e BVGE via cópula Gumbel-Barnett, o uso das prioris Gama independentes proporcionou melhores resultados de estimação, além de menores erros padrões. No caso das distribuições BVGE via cópula Clayton e BVGE via cópula Frank, o uso das prioris Uniformes produziu resultados mais próximos dos valores reais.

Em ambos os métodos, alguns problemas foram vistos, como a superestimação de  $\theta$  para a BVGE via cópula FGM quando  $n = 20$  no caso clássico e as baixas probabilidades de cobertura, ao se utilizar a priori de Jeffreys no caso de  $\lambda_1$  na distribuição BVGE via cópula Frank. No primeiro caso, é comum acontecer quando  $n$  é considerado baixo, não capturando, portanto, a dependência de forma correta. Para o segundo caso, as amostras selecionadas e a complexidade dos cálculos numéricos podem ter prejudicado a simulação.

O próximo capítulo estuda o comportamento das distribuições analisadas, com base em um conjunto de dados reais.

## Capítulo 7

# Aplicação em dados reais

### 7.1 Dados da competição de futebol UEFA.

O seguinte conjunto de dados foi extraído de Meintanis (2007) [MEI07] e é apresentado na Tabela (6.1). Os dados referem-se às partidas de futebol da Liga dos Campeões da UEFA no período de 2004-2006, em que  $X_1$  representa o tempo em minutos para a ocorrência do primeiro gol, marcado por qualquer um dos times do campeonato desde que seja por pênalti, falta ou chute direto, e  $X_2$  representa o tempo decorrido até o primeiro gol marcado pelo time anfitrião, independente do estilo de jogada. Neste contexto, as possibilidades existentes são  $X_1 < X_2$ ,  $X_1 > X_2$  ou  $X_1 = X_2$ . Meintanis (2007) usou a distribuição Marshal-Olkin para análise enquanto aqui foi utilizada a distribuição exponencial bivariada generalizada.

**Tabela 7.1:** *Dados da Liga dos Campeões UEFA (2004-2006).*

Time	$X_1$	$X_2$	Time	$X_1$	$X_2$
Lyon-Real Madrid	26	20	Internazionale-Bremen	34	34
Milan-Fenerbahce	63	18	Real Madrid-Roma	53	39
Chelsea-Anderlecht	19	19	Man. United-Fenerbahce	54	7
Club Brugge-Juventus	66	85	Bayern-Ajax	51	28
Fenerbahce-PSV	40	40	Moscow-PSG	76	64
Internazionale-Rangers	49	49	Barcelona-Shakhtar	64	15
Panathinaikis-Bremen	8	8	Leverkusen-Roma	26	48
Ajax-Arsenal	69	71	Arsenal-Panathinaikos	16	16
Man. United-Benfica	39	39	Dynamo Kyiv-Real Madrid	44	13
Real Madrid-Rosenborg	82	48	Man. United-Sparta	25	14
Villarreal-Benfica	72	72	Bayern-M. TelAviv	55	11
Juventus-Bayern	66	62	Bremen-Internazionale	49	49
Club Brugge-Rapid	25	9	Anderlecht-Valencia	24	24
Olympiacos-Lyon	41	3	Panathinaikos-PSV	44	30
Internazionale-Porto	16	75	Arsenal-Rosenborg	42	3
Schalke-PSV	18	18	Liverpool-Olympiacos	27	47
Barcelona-Bremen	22	14	M. TelAviv-Juventus	28	28
Milan-Schalke	42	42	Bremen-Panathinaikos	2	2
Rapid-Juventus	36	52			

Inicialmente, antes de estudar ambas as variáveis conjuntamente, foram ajustadas distribuições exponenciais generalizadas univariadas para  $X_1$  e  $X_2$  individualmente. Isto é, foi suposto  $X_1 \sim GE(\alpha_1, \lambda_1)$  e  $X_2 \sim GE(\alpha_2, \lambda_2)$ .

Os resultados com base nos estimadores de máxima verossimilhança e suas propriedades assintóticas são exibidos nas Tabelas (7.2) e (7.3).

**Tabela 7.2:** Estimativa de máxima verossimilhança (EMV), desvios padrões e intervalos de 95% confiança (IC) para os parâmetros  $\alpha_1$  e  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  supondo  $X_1 \sim GE(\alpha_1, \lambda_1)$ .

	EMV	Desvio Padrão	IC
$\alpha_1$	3.1192	0.7909	(1.5692; 4.6694)
$\lambda_1$	0.0449	0.0071	(0.0309; 0.0588)

**Tabela 7.3:** Estimativa de máxima verossimilhança (EMV), desvios padrões e intervalos de 95% confiança (IC) para os parâmetros  $\alpha_2$  e  $\lambda_2$  supondo  $X_2 \sim GE(\alpha_2, \lambda_2)$ .

	EMV	Desvio Padrão	IC
$\alpha_2$	1.6775	0.3892	(0.9147; 2.4403)
$\lambda_2$	0.0413	0.0077	(0.0262; 0.0563)

Utilizando-se o teste de Kolmogorov-Smirnov (KS) tem-se que as distâncias entre as distribuições ajustadas e empíricas para  $X_1$  e  $X_2$  são 0.1195 (p-valor: 0.66) e 0.1205 (p-valor: 0.65), respectivamente. Ao nível de significância de 5%, as distribuições propostas não são rejeitadas para as variáveis.

### 7.1.1 Ajustamento para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu

Para o caso da distribuição BVGE proposta por Gupta e Kundu, inicialmente através da abordagem clássica, foram obtidos os estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros e os respectivos intervalos de confiança assintóticos baseados na matriz informação de Fisher. Os seguintes resultados de estimação são obtidos e apresentados na Tabela (7.4).

**Tabela 7.4:** Estimativa de máxima verossimilhança, desvios padrões e intervalos de 95% confiança para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  e  $\lambda$  da distribuição BVGE de Gupta e Kundu.

	EMV	Desvio Padrão	IC
$\alpha_1$	1.44532	0.43635	(0.80824; 2.51029)
$\alpha_2$	0.46813	0.20293	(0.18814; 0.96959)
$\alpha_3$	1.17035	0.31592	(0.67573; 1.88532)
$\lambda$	0.03899	0.00587	(0.02858; 0.05174)

A partir da distribuição BVGE ajustada na Tabela (7.4), tem-se as marginais  $X_1 \sim GE(2.615, 0.039)$  e  $X_2 \sim GE(1.638, 0.039)$ . Utilizando-se novamente o teste KS, as distâncias entre as distribuições empíricas e ajustadas são 0.1034 (p-valor: 0.82) e 0.1001 (p-valor: 0.85), respectivamente. Portanto, baseando-se nas distribuições marginais, o ajuste da distribuição BVGE não é rejeitada, podendo ser utilizada de maneira eficaz no ajuste da distribuição dos dados. Em Gupta e Kundu (2007), mostra-se que a distribuição BVGE proposta produz melhor ajustamento quando comparado à distribuição exponencial bivariada de Marshall-Olkin.

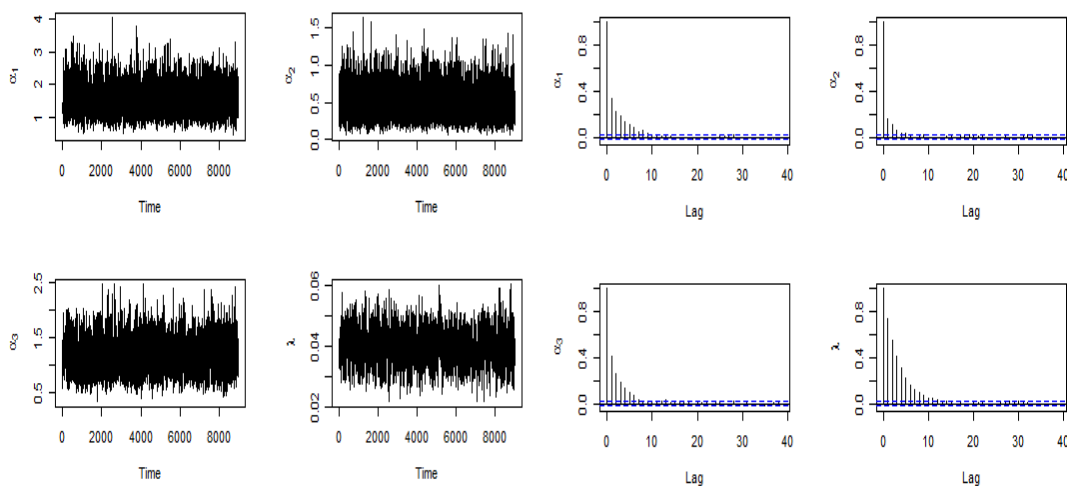
Para a análise Bayesiana, os parâmetros foram estimados através do método MCMC (Markov Chain Monte Carlo). O processo foi simulado para cada priori enunciada na seção (4.4) com 100000 iterações, sendo 1000 utilizadas como aquecimento (descartadas). Para amenizar os efeitos de autocorrelação, foram tomados saltos de tamanho 10. Os resultados seguem.

A Tabela (7.5) mostra, utilizando-se a priori de Jeffreys, as estimativas Bayesianas de cada parâmetro da distribuição BVGE,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  e  $\lambda$  com seus respectivos desvios-padrões e intervalos de 95% de credibilidade (ICr).

**Tabela 7.5:** Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  e  $\lambda$  utilizando priori de Jeffreys para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu.

	Média	Desvio Padrão	ICr
$\alpha_1$	1.48832	0.43926	(0.79561; 2.49977)
$\alpha_2$	0.49500	0.20250	(0.17966; 0.95718)
$\alpha_3$	1.17972	0.29820	(0.65736; 1.80876)
$\lambda$	0.03927	0.00586	(0.02828; 0.05086)

Na Figura (7.1) estão presentes as séries temporais e os gráficos de autocorrelações das distribuições à posteriori para cada um dos parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  e  $\lambda$  para o caso da priori de Jeffreys. Percebe-se que as séries são estacionárias e as autocorrelações decrescem a medida que o *lag* (defasagem) aumenta, indicando convergência do método.



**Figura 7.1:** Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições à posteriori  $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda)$  utilizando-se a priori de Jeffreys para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu.

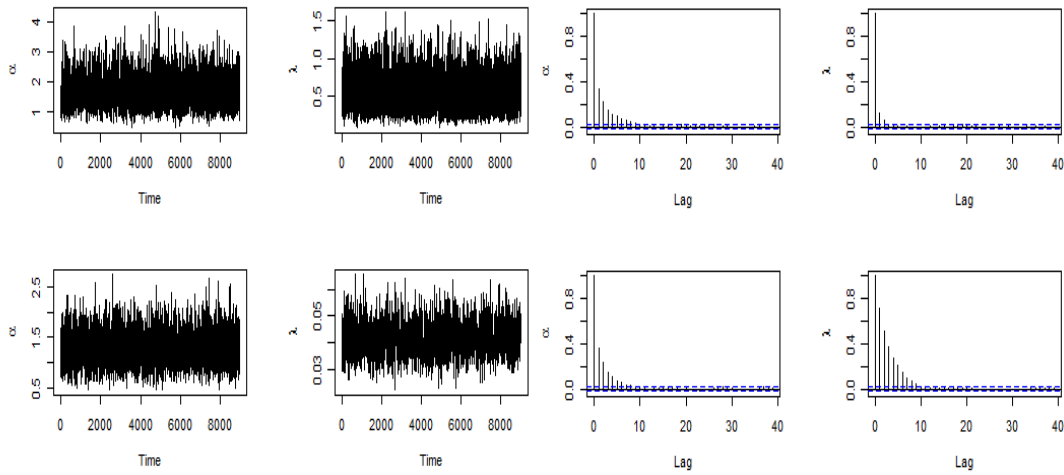
A Tabela (7.6) mostra, agora utilizando-se a priori Uniforme, as estimativas Bayesianas de cada parâmetro com seus respectivos desvios-padrões e intervalos de 95% de credibilidade para a distribuição BVGE.

**Tabela 7.6:** Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  e  $\lambda$  utilizando priori Uniforme para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu.

	Média	Desvio Padrão	ICr
$\alpha_1$	1.65613	0.47467	(0.88854; 2.72744)
$\alpha_2$	0.55279	0.21345	(0.21571; 1.04233)
$\alpha_3$	1.28109	0.30462	(0.76006; 1.94119)
$\lambda$	0.04162	0.00588	(0.03057; 0.05382)

Na Figura (7.2) estão presentes as séries temporais e os gráficos de autocorrelações das distribuições à

posteriori para cada um dos parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  e  $\lambda$  para o caso da priori Uniforme. As conclusões são as mesmas para o caso da priori de Jeffreys.

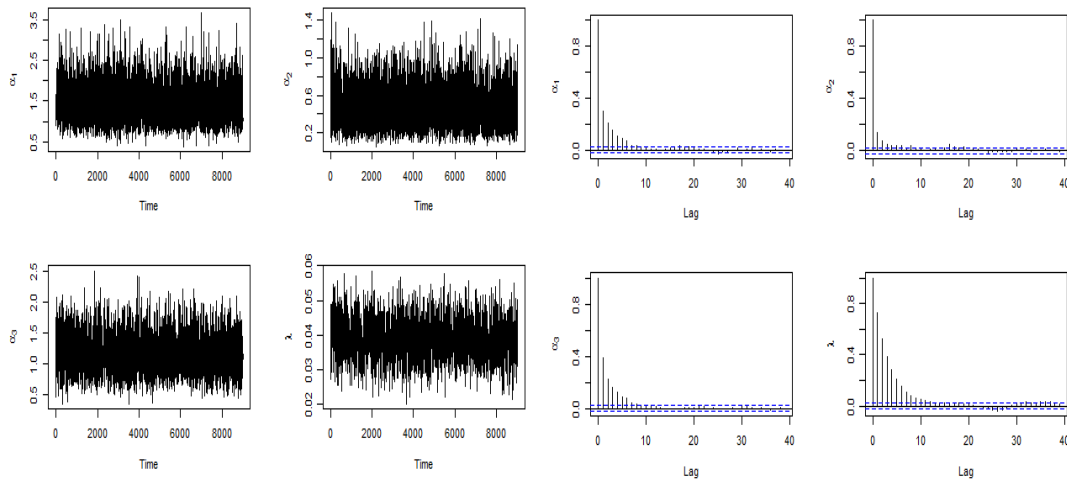


**Figura 7.2:** Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori  $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda)$  utilizando-se a priori Uniforme para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu.

A Tabela (7.7) e a Figura (7.3) fornecem a mesma análise para o caso das prioris Gama independentes, tomando como todos hiperparâmetros o valor 0.01, isto é, a priori para cada parâmetro ( $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  e  $\lambda$ ) segue uma distribuição  $Gama(0.01, 0.01)$  :

**Tabela 7.7:** Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  e  $\lambda$  utilizando prioris  $Gama(\theta_1, \theta_2)$  independentes com hiperparâmetros  $\theta_1 = 0.01$  e  $\theta_2 = 0.01$  para cada um dos parâmetros para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu.

	Média	Desvio Padrão	ICr
$\alpha_1$	1.42999	0.41751	(0.75675; 2.38980)
$\alpha_2$	0.46118	0.18903	(0.16913; 0.89816)
$\alpha_3$	1.16731	0.27668	(0.68092; 1.77432)
$\lambda$	0.03853	0.00562	(0.02803; 0.04996)



**Figura 7.3:** Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori  $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda)$  utilizando-se das priors Gama independentes para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu.

As Tabelas (7.8) à (7.10) resumiam as informações mais relevantes.

**Tabela 7.8:** Estimativa de máxima verossimilhança, médias a posteriori e desvios padrões e para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  e  $\lambda$  para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu.

	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\alpha_1$	1.4452 (0.3337)	1.4299 (0.4175)	1.6561 (0.47467)	1.4883 (0.4393)
$\alpha_2$	0.4681 (0.1838)	0.4612 (0.1890)	0.5528 (0.21345)	0.4950 (0.2025)
$\alpha_3$	1.1703 (0.2497)	1.1673 (0.2767)	1.2811 (0.30462)	1.1797 (0.2982)
$\lambda$	0.0389 (0.0022)	0.0385 (0.0056)	0.0416 (0.00588)	0.0393 (0.0059)

**Tabela 7.9:** Intervalos de confiança (95%) para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  e  $\lambda$  e respectivas amplitudes para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu.

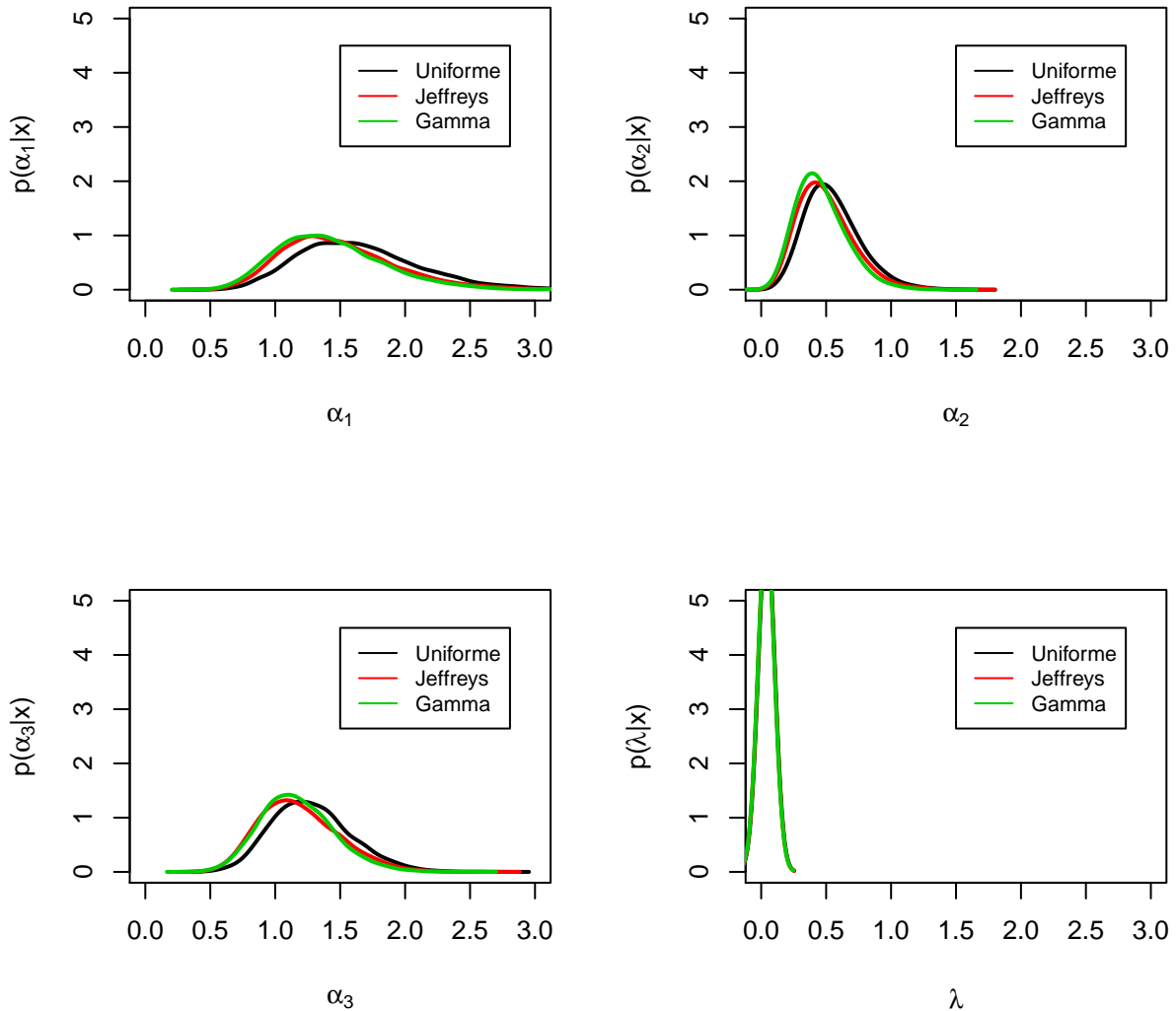
EMV	
$\alpha_1$	(0.7911; 2.0993) [1.3082]
$\alpha_2$	(0.1079; 0.8283) [0.7204]
$\alpha_3$	(0.6809; 1.6598) [0.9789]
$\lambda$	(0.0347; 0.0433) [0.0086]

**Tabela 7.10:** Intervalos de credibilidade (95%) para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  e  $\lambda$  e respectivas amplitudes para a distribuição BVGE de Gupta e Kundu.

	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\alpha_1$	(0.7567; 2.3898) [1.6331]	(0.8885; 2.7274) [1.8389]	(0.7956; 2.4998) [1.7042]
$\alpha_2$	(0.1691; 0.8982) [0.7291]	(0.2157; 1.0423) [0.8266]	(0.1797; 0.9572) [0.7775]
$\alpha_3$	(0.6809; 1.7743) [1.0934]	(0.7601; 1.9412) [1.1811]	(0.6574; 1.8088) [1.1514]
$\lambda$	(0.0280; 0.0499) [0.0219]	(0.0306; 0.0538) [0.0232]	(0.0283; 0.0509) [0.0226]

Tanto as estimativas Bayesianas quanto as estimativas clássicas ficaram próximas, sendo que a menor diferença ocorreu para as dos EMV e as das priors Gama independentes. As estimativas provenientes do uso da

priori Uniforme foram as que mais se distanciaram das demais. Os intervalos de confiança e de credibilidade apresentaram amplitudes similares, sendo os que se basearam na priori Uniforme aqueles que possuíram maiores amplitudes. Para o caso do parâmetro  $\lambda$ , todos os intervalos apresentados possuíram menor amplitude que os demais parâmetros. Para o caso das cópulas, mostrado nas próximas seções, o tamanho amostral influenciará na estimação clássica, fornecendo valores não condizentes às especificações das mesmas.



**Figura 7.4:** Comparação das distribuições à posteriori obtidas a partir das prioris especificadas para cada parâmetro da distribuição BVGE.

### 7.1.2 Ajustamento para a distribuição BVGE via cópula FGM

Utilizando os dados da UEFA, conforme anteriormente, agora aplicados à distribuição BVGE via cópula FGM, apresentada na seção (5.2), foram obtidos, primeiramente, os estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$ , com seus respectivos desvios padrões e intervalos de 95% de confiança. Os resultados encontram-se na Tabela (7.11).

Foi observado que tanto o estimador de máxima verossimilhança quanto o intervalo de confiança para

**Tabela 7.11:** Estimativa de máxima verossimilhança (EMV), desvios padrões e intervalos de 95% confiança (IC) para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  da distribuição BVGE via cópula FGM.

	EMV	Desvio Padrão	IC
$\alpha_1$	3.03273	0.78941	(1.48549; 4.57997)
$\alpha_2$	1.67372	0.39304	(0.90335; 2.44408)
$\lambda_1$	0.04443	0.00707	(0.03057; 0.05830)
$\lambda_2$	0.04188	0.00777	(0.02665; 0.05710)
$\theta$	1.07541	0.40078	(0.28987; 1.86094)

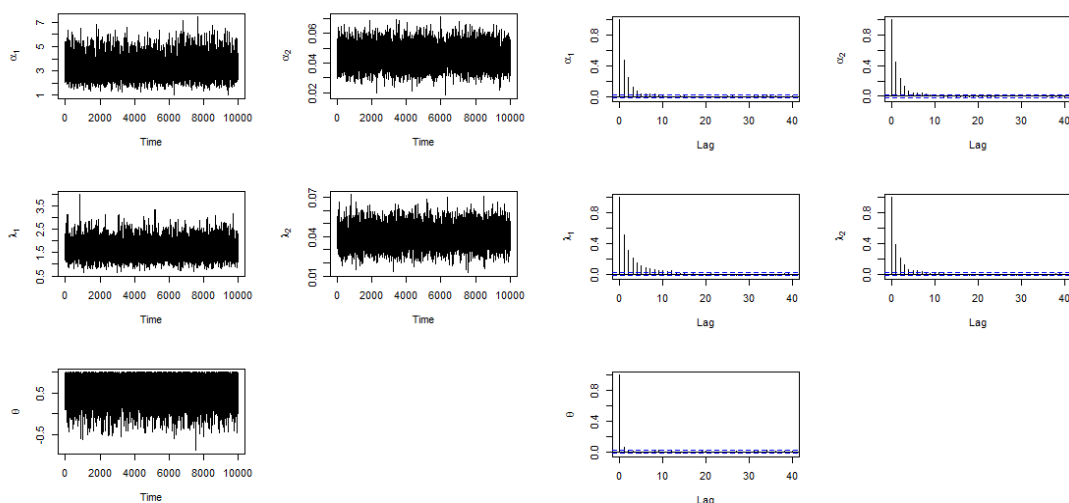
$\theta$  estão fora do intervalo de variação do mesmo, isto é,  $\hat{\theta} \notin [-1, 1]$ . O tamanho amostral no caso pode ser considerado pequeno para estimar  $\theta$ . Para o caso Bayesiano, tal fato não ocorre, como apresentado adiante.

A Tabela (7.12) traz as estimativas à posteriori dos parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  utilizando-se a priori de Jeffreys para o caso da distribuição BVGE via cópula FGM, com seus respectivos desvios padrões e intervalos de 95% de credibilidade.

**Tabela 7.12:** Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  utilizando priori de Jeffreys para a distribuição BVGE via cópula FGM.

	Média	Desvio Padrão	ICr
$\alpha_1$	3.29391	0.82090	(1.93606; 5.11727)
$\alpha_2$	1.72135	0.41145	(1.03015; 2.59604)
$\lambda_1$	0.04487	0.00694	(0.03160; 0.05851)
$\lambda_2$	0.04032	0.00758	(0.02603; 0.05560)
$\theta$	0.64138	0.28971	(-0.07515; 0.98763)

Os procedimentos gráficos para verificação da convergência são satisfeitos, conforme indica a Figura (7.5). Para cada parâmetro, foi obtido uma série temporal estacionária e gráficos de autocorrelações que diminuem conforme a defasagem.

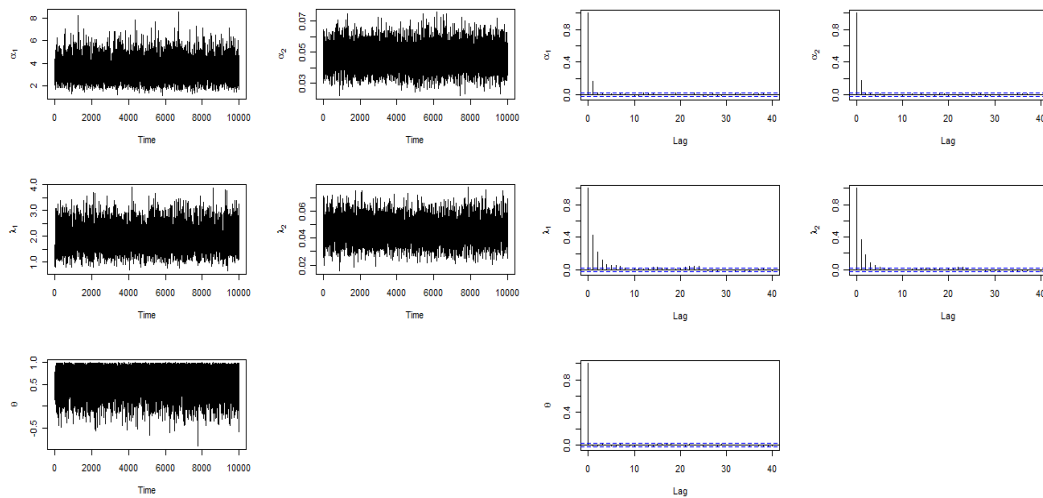


**Figura 7.5:** Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori  $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$  utilizando priori de Jeffreys para a distribuição BVGE via cópula FGM.

Os resultados das estimativas baseadas na priori Uniforme para o caso desta distribuição são exibidos na tabela (7.13). Já na Figura (7.6) são apresentadas as análises gráficas de convergência para este caso.

**Tabela 7.13:** Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  utilizando priori Uniforme para a distribuição BVGE via cópula FGM.

	Média	Desvio Padrão	ICr
$\alpha_1$	3.38962	0.86695	(1.95145; 5.33749)
$\alpha_2$	1.88622	0.44814	(1.11888; 2.87406)
$\lambda_1$	0.04683	0.00717	(0.03321; 0.06132)
$\lambda_2$	0.04496	0.00817	(0.02961; 0.06181)
$\theta$	0.59491	0.29318	(-0.09510; 0.98254)

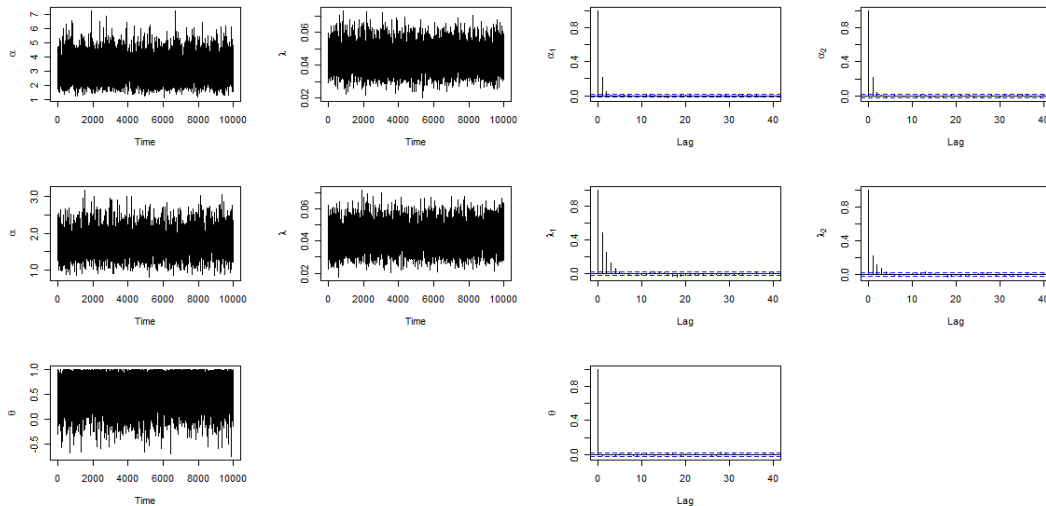


**Figura 7.6:** Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori  $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$  utilizando priori Uniforme para a distribuição BVGE via cópula FGM.

No caso das priors Gama independentes, novamente foram utilizados como hiperparâmetros o valor 0.01. Foi tomada como priori para  $\theta$  uma distribuição uniforme entre -1 e 1, isto é,  $\theta \sim U[-1, 1]$ . Os resultados obtidos estão na Tabela (7.14).

**Tabela 7.14:** Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  utilizando priors Gama independentes com hiperparâmetros  $\theta_1 = 0.01$  e  $\theta_2 = 0.01$  e  $\theta \sim U[-1, 1]$  para a distribuição BVGE via cópula FGM.

	Média	Desvio Padrão	ICr
$\alpha_1$	3.09149	0.78552	(1.78800; 4.83551)
$\alpha_2$	1.68717	0.31654	(1.14443; 2.41813)
$\lambda_1$	0.04448	0.00703	(0.03119; 0.05890)
$\lambda_2$	0.04166	0.00716	(0.02877; 0.05719)
$\theta$	0.58805	0.29435	(-0.10199; 0.98408)



**Figura 7.7:** Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori  $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$  utilizando prioris Gama independentes para a distribuição BVGE via cópula FGM.

As Tabelas (7.15) à (7.46) resumiam as informações mais relevantes.

**Tabela 7.15:** Estimativa de máxima verossimilhança, médias a posteriori e desvios padrões e para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  para a distribuição BVGE via cópula FGM.

	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\alpha_1$	3.0327 (0.7841)	3.0915 (0.7855)	3.3896 (0.8669)	3.2939 (0.8209)
$\alpha_2$	1.6737 (0.3930)	1.6872 (0.3165)	1.8862 (0.4481)	1.7213 (0.4114)
$\lambda_1$	0.0444 (0.0070)	0.0445 (0.0070)	0.0468 (0.0071)	0.0449 (0.0069)
$\lambda_2$	0.0419 (0.0077)	0.0417 (0.0072)	0.0449 (0.0081)	0.0403 (0.0075)
$\theta$	1.0754 (0.4008)	0.5880 (0.2943)	0.5949 (0.2932)	0.6414 (0.2897)

**Tabela 7.16:** Intervalos de confiança (95%) para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  e respectivas amplitudes para a distribuição BVGE via cópula FGM.

EMV	
$\alpha_1$	(1.4855; 4.5799) [3.0944]
$\alpha_2$	(0.9033; 2.4441) [1.5408]
$\lambda_1$	(0.0306; 0.0583) [0.0277]
$\lambda_2$	(0.0266; 0.0571) [0.0305]
$\theta$	(0.2899; 1.8609) [1.5710]

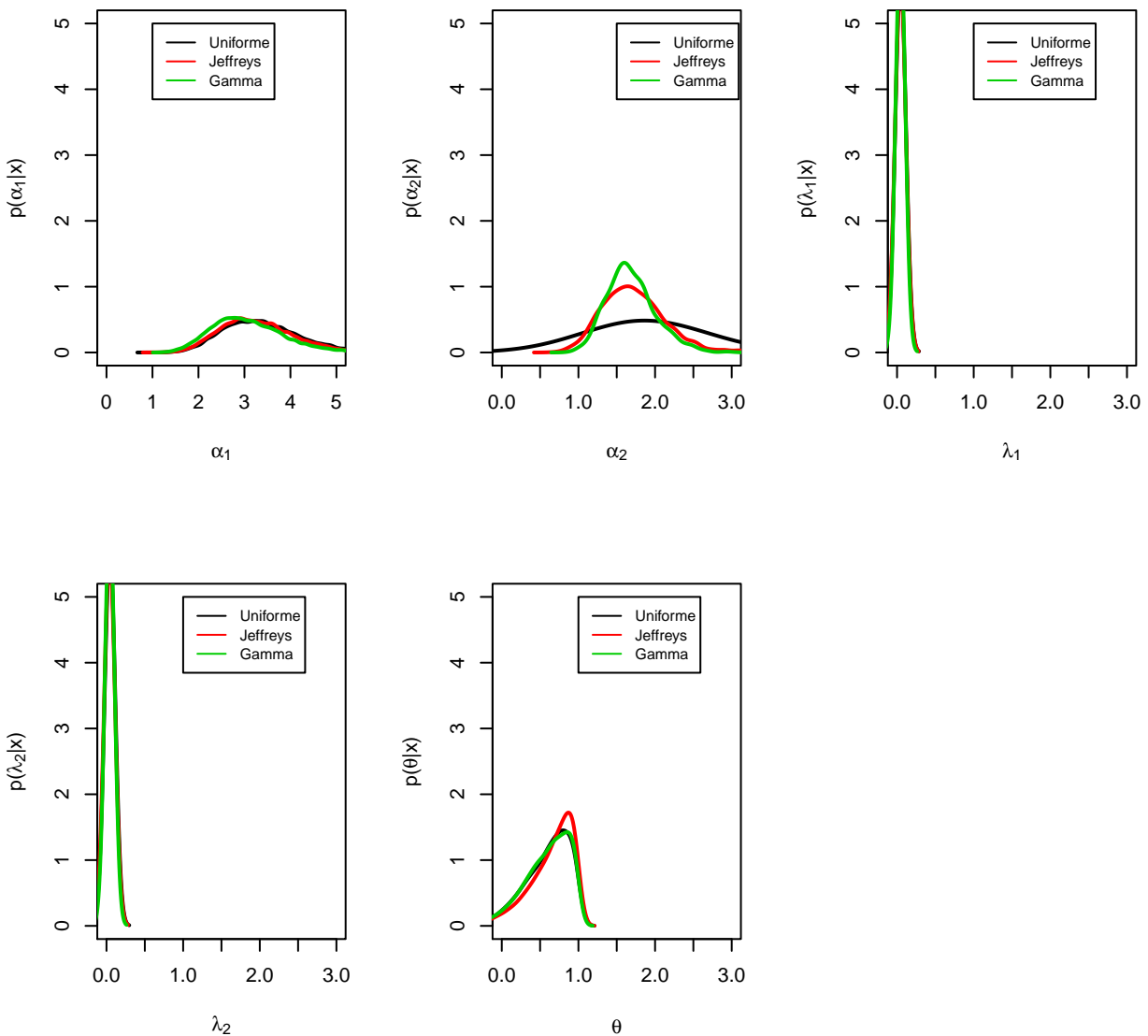
Novamente, as estimativas clássicas e Bayesianas são similares, com exceção da estimação clássica de  $\theta$ , muito provavelmente devido ao tamanho amostral ser pequeno, fazendo com que  $\hat{\theta} \notin [-1, 1]$ .

Os intervalos de confiança e credibilidade também são similares. Com exceção de  $\theta$ , as prioris Uniformes forneceram os intervalos de maiores amplitudes. Ademais, as prioris Gamas independentes produziram intervalos com amplitudes menores.

A Figura (7.8) traz o desenho de cada posteriori para cada um dos parâmetros. Novamente, observa-se que a escolha da priori não influencia os resultados.

**Tabela 7.17:** Intervalos de credibilidade (95%) para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  e respectivas amplitudes para a distribuição BVGE via cópula FGM.

	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\alpha_1$	(1.7880; 4.8355) [3.0475]	(1.9514; 5.3375) [3.3861]	(1.9360; 5.1173) [3.1813]
$\alpha_2$	(1.1444; 2.4181) [1.2737]	(1.1188; 2.8741) [1.7553]	(1.0301; 2.5960) [1.5659]
$\lambda_1$	(0.0312; 0.0589) [0.0277]	(0.0332; 0.0613) [0.0281]	(0.0316; 0.0585) [0.0269]
$\lambda_2$	(0.0288; 0.0572) [0.0284]	(0.0296; 0.0618) [0.0322]	(0.0260; 0.0556) [0.0296]
$\theta$	(-0.102; 0.9841) [1.0861]	(-0.095; 0.9825) [0.9920]	(-0.075; 0.9876) [1.0626]



**Figura 7.8:** Comparação das distribuições à posteriori obtidas a partir das priors especificadas para cada parâmetro da distribuição BVGE via cópula FGM.

### 7.1.3 Ajustamento para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett

A análise feita na seção (7.1.5) foi repetida a seguir, agora utilizando-se a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett, proposta em (5.3). O caso da cópula Gumbel-Barnett para estimação clássica foi realizado no *software SAS*, em decorrência do *R* não ter obtido convergência para os dados em questão.

**Tabela 7.18:** Estimativa de máxima verossimilhança (EMV), desvios padrões e intervalos de 95% confiança (IC) para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett.

	EMV	Desvio Padrão	IC
$\alpha_1$	2.83312	0.16505	(2.50962; 3.15661)
$\alpha_2$	0.77278	0.09663	(0.58338; 0.96217)
$\lambda_1$	0.22284	0.02057	(0.18252; 0.26315)
$\lambda_2$	0.20828	0.02979	(0.14989; 0.26666)
$\theta$	-1.8490	0.21290	(-2.2663; -1.4317)

Note que a estimativa do EMV para  $\theta \notin [0, 1]$ . Ao impor, no processo de estimação, que  $\theta \in [0, 1]$  (aqui foi utilizado o *software SAS* em decorrência do *software R* não permitir tal ação), os resultados obtidos serão:

**Tabela 7.19:** Estimativa de máxima verossimilhança (EMV), desvios padrões e intervalos de 95% confiança (IC) para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett.

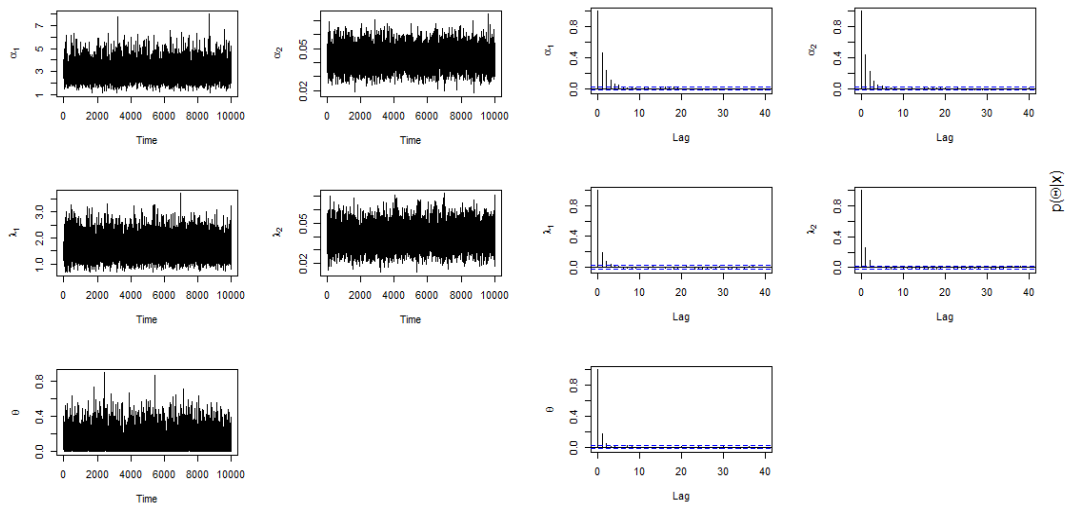
	EMV	Desvio Padrão	IC
$\alpha_1$	3.11929	1.17763	(0.81114; 5.42745)
$\alpha_2$	1.67752	0.35894	(0.97399; 2.38104)
$\lambda_1$	0.04492	0.00739	(0.03043; 0.05939)
$\lambda_2$	0.04129	0.00562	(0.03027; 0.05230)
$\theta$	0	0	-

A Tabela (7.19) evidencia as similaridades entre as estimativas clássicas e Bayesianas, conforme mostrado a seguir.

Primeiramente, a Tabela (7.20) traz as estimativas dos parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  para a distribuição BVGE via cópula Gumbel obtidas pelo uso da priori de Jeffreys. Na Figura (7.9) estão presentes as séries temporais e os gráficos de autocorrelações das distribuições à posteriori para cada um dos parâmetros. Percebe-se que as séries são estacionárias e as autocorrelações decrescem a medida que o *lag* aumenta, indicando convergência do método.

**Tabela 7.20:** Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  utilizando priori de Jeffreys para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett.

	Média	Desvio Padrão	ICr
$\alpha_1$	3.02229	0.78333	(1.75608; 4.76249)
$\alpha_2$	1.62681	0.39404	(0.96904; 2.49460)
$\lambda_1$	0.04317	0.00711	(0.02996; 0.05786)
$\lambda_2$	0.03931	0.00799	(0.02492; 0.05569)
$\theta$	0.10642	0.10009	(0.00301; 0.37618)

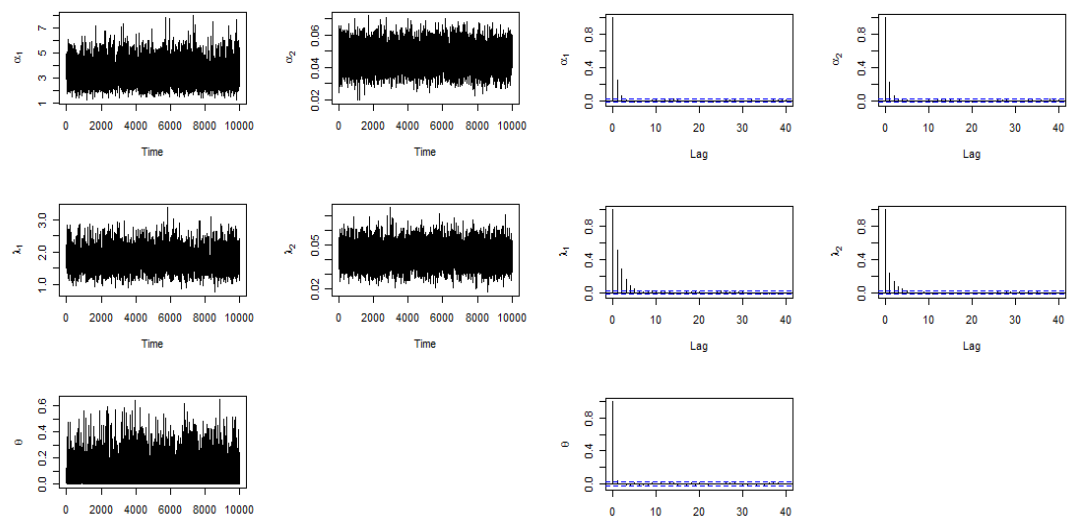


**Figura 7.9:** Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori  $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$  utilizando priori de Jeffreys para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett.

A Tabela (7.21) e a Figura (7.10) fornecem os resultados das estimativas e diagnósticos de convergências no caso de utilização da priori Uniforme.

**Tabela 7.21:** Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  utilizando priori Uniforme para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett.

	Média	Desvio Padrão	ICr
$\alpha_1$	3.32095	0.83986	(1.93175; 5.19897)
$\alpha_2$	1.76800	0.31697	(1.20083; 2.42682)
$\lambda_1$	0.04554	0.00712	(0.03225; 0.06010)
$\lambda_2$	0.04227	0.00715	(0.02919; 0.05718)
$\theta$	0.09565	0.08849	(0.00252; 0.32790)



**Figura 7.10:** Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori  $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$  utilizando priori Uniforme para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett.

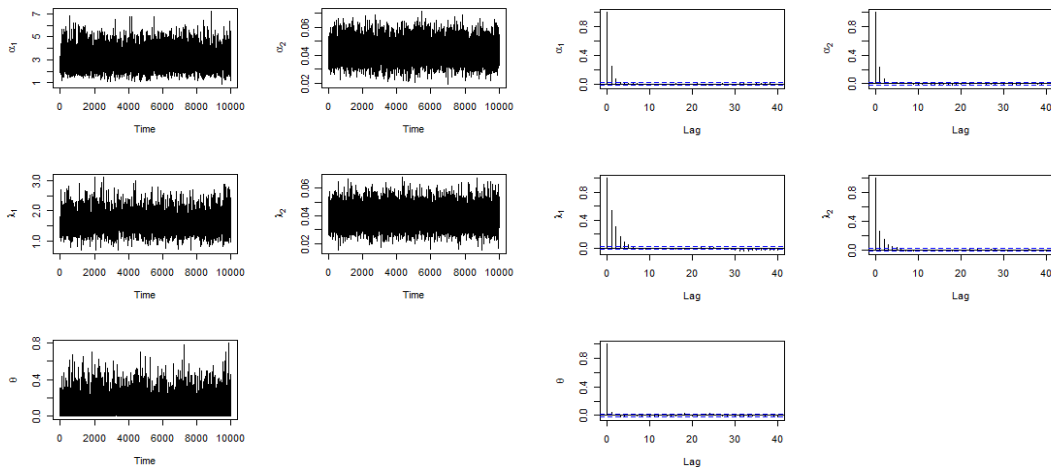
No caso das priors Gama independentes, novamente foram utilizados como hiperparâmetros o valor 0.01.

Foi tomada como priori para  $\theta$  uma distribuição uniforme entre 0 e 1, isto é,  $\theta \sim U[0, 1]$ . Os resultados obtidos estão na Tabela (7.22)

**Tabela 7.22:** Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade e confiança para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  utilizando prioris Gama independentes com hiperparâmetros  $\theta_1 = 0.01$  e  $\theta_2 = 0.01$  e  $\theta \sim U[0, 1]$ , para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett

	Média	Desvio Padrão	ICr
$\alpha_1$	2.99837	0.78078	(1.72259; 4.76243)
$\alpha_2$	1.61239	0.30628	(1.08158; 2.27104)
$\lambda_1$	0.04297	0.00710	(0.02962; 0.05749)
$\lambda_2$	0.03931	0.00716	(0.02622; 0.05417)
$\theta$	0.10691	0.09988	(0.00301; 0.36898)

Na Figura (7.11), verificam-se que os métodos gráficos para diagnóstico de convergência estão satisfeitos.



**Figura 7.11:** Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori  $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$  utilizando prioris Gama independentes para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett.

Novamente, as Tabelas (7.23) à (7.37) resumiam as informações mais relevantes.

**Tabela 7.23:** Estimativa de máxima verossimilhança, médias a posteriori e desvios padrões e para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett.

	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\alpha_1$	3.1192 (1.1776)	2.9984 (0.7808)	3.3209 (0.8398)	3.0223 (0.7833)
$\alpha_2$	1.6775 (0.3589)	1.6124 (0.3063)	1.7680 (0.3169)	1.6268 (0.3940)
$\lambda_1$	0.0449 (0.0074)	0.0429 (0.0071)	0.0455 (0.0071)	0.0432 (0.0071)
$\lambda_2$	0.0413 (0.0056)	0.0393 (0.0072)	0.0423 (0.0071)	0.0393 (0.0079)
$\theta$	-	0.1069 (0.0999)	0.0956 (0.0885)	0.1064 (0.1000)

No caso da distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett, os intervalos de credibilidade obtiveram menores amplitudes que os intervalos de confiança, sendo que o intervalo construído a partir das estimativas utilizando as prioris Gamas independentes o menor dentre eles. No caso clássico, em que  $\theta \in [0, 1]$ , as estimativas se assimilaram com as estimativas Bayesianas. No entanto, as estimativas foram conseguidas através do

**Tabela 7.24:** Intervalos de confiança (95%) para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  e respectivas amplitudes para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett.

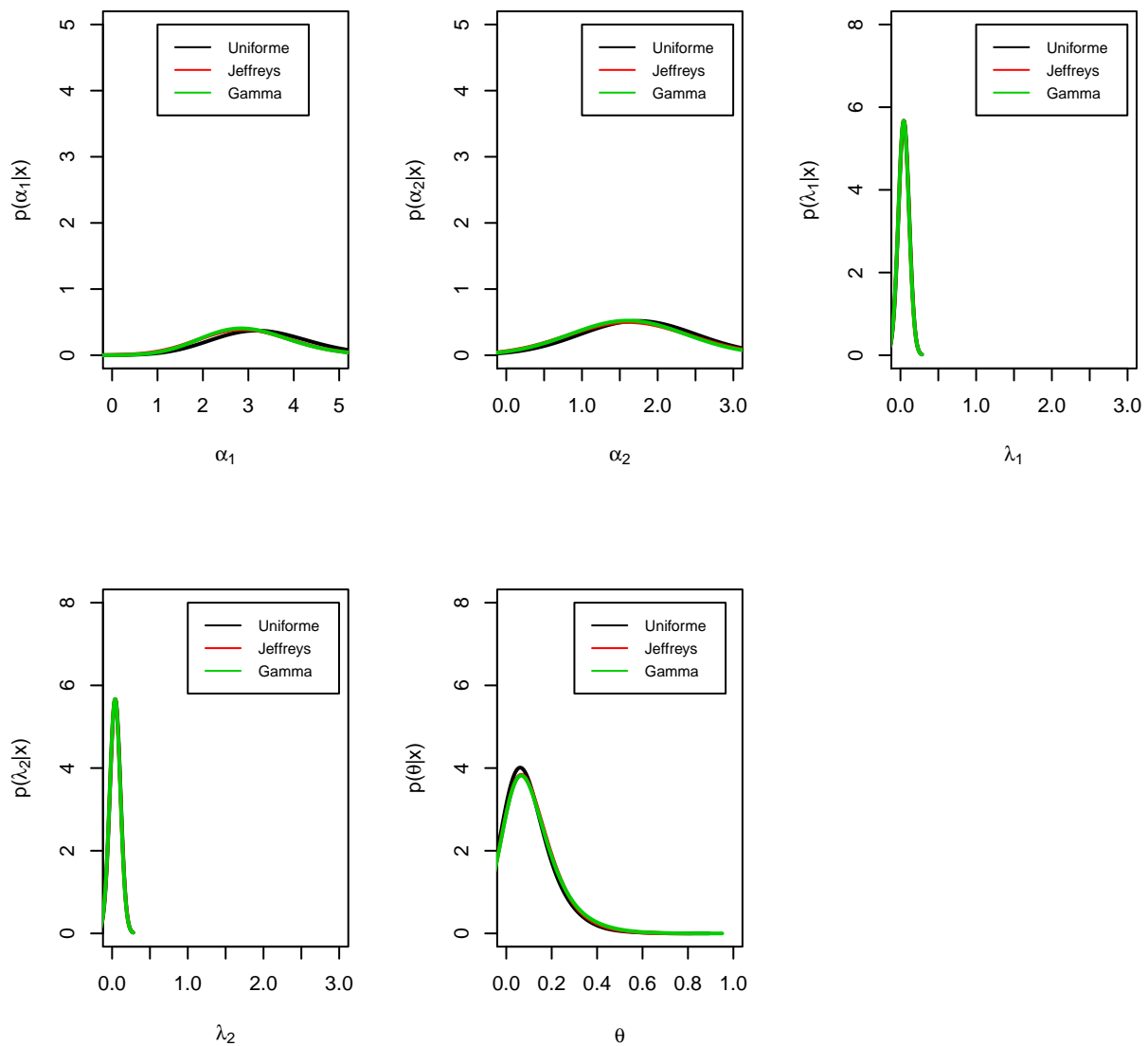
EMV	
$\alpha_1$	(0.8111; 5.4274) [4.6163]
$\alpha_2$	(0.9739; 2.3810) [1.4071]
$\lambda_1$	(0.0304; 0.0594) [0.0290]
$\lambda_2$	(0.0303; 0.0523) [0.0220]
$\theta$	- [-]

**Tabela 7.25:** Intervalos de credibilidade (95%) para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  e respectivas amplitudes para a distribuição BVGE via cópula Gumbel-Barnett.

	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\alpha_1$	(1.7226; 4.7624) [3.0398]	(1.9317; 5.1989) [3.2672]	(1.7561; 4.7625) [3.0064]
$\alpha_2$	(1.0816; 2.2710) [1.1894]	(1.2008; 2.4268) [1.2260]	(0.9690; 2.4946) [1.5256]
$\lambda_1$	(0.0296; 0.0575) [0.0279]	(0.0322; 0.0601) [0.0279]	(0.0299; 0.0578) [0.0279]
$\lambda_2$	(0.0262; 0.0542) [0.0280]	(0.0292; 0.0572) [0.0280]	(0.0249; 0.0557) [0.0308]
$\theta$	(0.0030; 0.3689) [0.3659]	(0.0025; 0.3279) [0.3254]	(0.0030; 0.3761) [0.3731]

software SAS. Em geral, o resultado plausível sem a imposição seria aquele enumerado na Tabela (7.18).

A Figura (7.12) traz o desenho de cada posteriori para cada um dos parâmetros. Novamente, observa-se que a escolha da priori não influencia os resultados.



**Figura 7.12:** Comparação das distribuições à posteriori obtidas a partir das priors especificadas para cada parâmetro da distribuição BVGE via cópula Gumbel.

#### 7.1.4 Ajustamento para a distribuição BVGE via cópula Clayton

A análise agora se baseia na distribuição BVGE via cópula Clayton, proposta em (5.4), utilizando as duas variações apresentadas. Foram obtidos os estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros e os respectivos intervalos de confiança assintóticos baseados na matriz informação de Fisher. Os seguintes resultados de estimação são obtidos e apresentados nas Tabelas (7.26) e (7.26), para as BVGE via Clayton e Clayton GK, respectivamente.

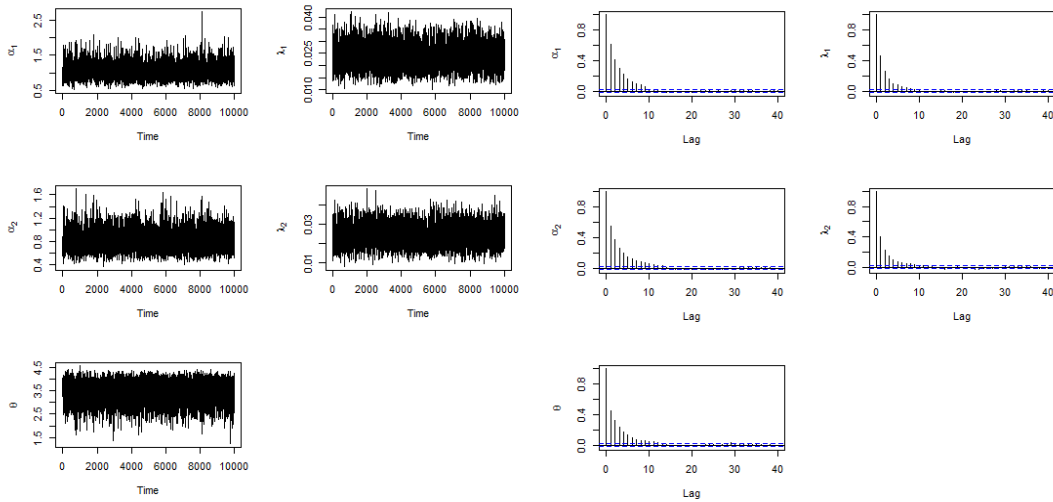
As Tabelas (7.28) e (7.29) trazem as estimativas dos parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  para a distribuição BVGE via cópula Clayton e Clayton GK obtidas pelo uso da priori de Jeffreys. Nas Figuras (7.13) e (7.14) estão presentes as séries temporais e os gráficos de autocorrelações das distribuições à posteriori para cada um dos parâmetros. Percebe-se que as séries são estacionárias e as autocorrelações decrescem a medida que o *lag* aumenta, indicando convergência do método.

**Tabela 7.26:** Estimativa de máxima verossimilhança (EMV), desvios padrões e intervalos de 95% confiança (IC) para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  da distribuição BVGE via cópula Clayton.

	EMV	Desvio Padrão	IC
$\alpha_1$	2.94943	0.76259	(1.45474; 4.44411)
$\alpha_2$	1.83813	0.41886	(1.01717; 2.65909)
$\lambda_1$	0.03996	0.00708	(0.02609; 0.05383)
$\lambda_2$	0.04114	0.00770	(0.02605; 0.05622)
$\theta$	0.46942	0.26697	(-0.0538; 0.99269)

**Tabela 7.27:** Estimativa de máxima verossimilhança (EMV), desvios padrões e intervalos de 95% confiança (IC) para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  da distribuição BVGE via cópula Clayton GK.

	EMV	Desvio Padrão	IC
$\alpha_1$	1.38452	0.70135	(0.00986; 2.75919)
$\alpha_2$	0.86286	0.51089	(-0.1384; 1.86422)
$\lambda_1$	0.04377	0.00711	(-0.3671; 4.62772)
$\lambda_2$	0.04334	0.00769	(0.02983; 0.05772)
$\theta$	2.13027	1.27421	(2.11518; 2.14536)



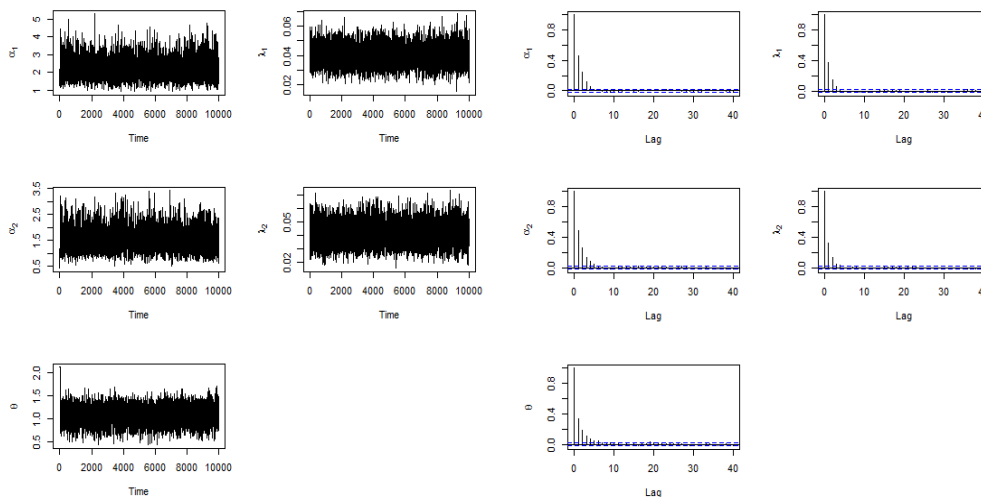
**Figura 7.13:** Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori  $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$  utilizando priori de Jeffreys para a distribuição BVGE via cópula Clayton.

**Tabela 7.28:** Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  utilizando priori de Jeffreys para a distribuição BVGE via cópula Clayton.

	Média	Desvio Padrão	ICr
$\alpha_1$	1.04591	0.21684	(0.70060; 1.53366)
$\alpha_2$	0.80494	0.16436	(0.54012; 1.18023)
$\lambda_1$	0.02345	0.00462	(0.01526; 0.03330)
$\lambda_2$	0.02378	0.00513	(0.01466; 0.03485)
$\theta$	3.37702	0.50593	(2.22839; 4.16829)

**Tabela 7.29:** Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  utilizando priori de Jeffreys para a distribuição BVGE via cópula Clayton GK.

	Média	Desvio Padrão	ICr
$\alpha_1$	2.19572	0.52420	(1.33135; 3.36001)
$\alpha_2$	1.49931	0.39191	(0.85226; 2.38191)
$\lambda_1$	0.03996	0.00656	(0.02805; 0.05314)
$\lambda_2$	0.04114	0.00795	(0.02646; 0.05750)
$\theta$	1.08345	0.19409	(0.69792; 1.44919)



**Figura 7.14:** Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori  $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$  utilizando priori de Jeffreys para a distribuição BVGE via cópula Clayton GK.

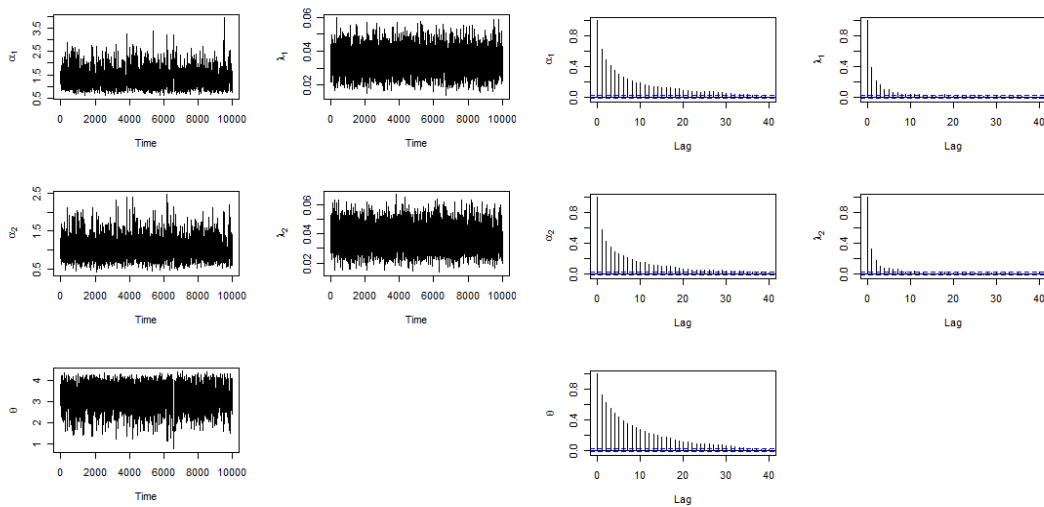
As Tabelas (7.31) e (7.30) e as Figuras (7.15) e (7.16) fornecem os resultados das estimativas e diagnósticos de convergências no caso de utilização da priori Uniforme.

**Tabela 7.30:** Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  utilizando priori Uniforme para a distribuição BVGE via cópula Clayton.

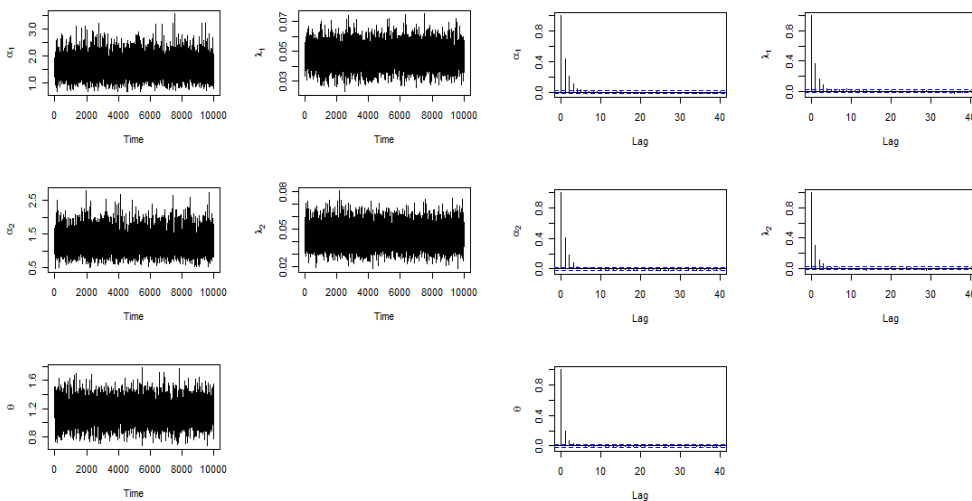
	Média	Desvio Padrão	ICr
$\alpha_1$	1.31822	0.34166	(0.80938; 2.15006)
$\alpha_2$	1.02795	0.25399	(0.64506; 1.63861)
$\lambda_1$	0.03359	0.00636	(0.02187; 0.04684)
$\lambda_2$	0.03672	0.00751	(0.02317; 0.05244)
$\theta$	3.02436	0.65774	(1.63283; 4.06744)

**Tabela 7.31:** Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  utilizando priori Uniforme para a distribuição BVGE via cópula Clayton GK.

	Média	Desvio Padrão	ICr
$\alpha_1$	2.37249	0.53654	(1.46875; 3.55023)
$\alpha_2$	1.62980	0.41333	(0.96096; 2.56090)
$\lambda_1$	0.04174	0.00651	(0.02979; 0.05526)
$\lambda_2$	0.04359	0.00799	(0.02903; 0.05996)
$\theta$	1.07315	0.18476	(0.70388; 1.42923)



**Figura 7.15:** Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori  $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$  utilizando priori Uniforme para a distribuição BVGE via cópula Clayton.



**Figura 7.16:** Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori  $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$  utilizando priori Uniforme para a distribuição BVGE via cópula Clayton GK.

No caso das priors Gama independentes, novamente foram utilizados como hiperparâmetros o valor 0.01. Os resultados obtidos estão nas Tabelas (7.32) e (7.33).

Nas Figuras (7.17) e (7.18), verificam-se que os métodos gráficos para diagnóstico de convergência estão

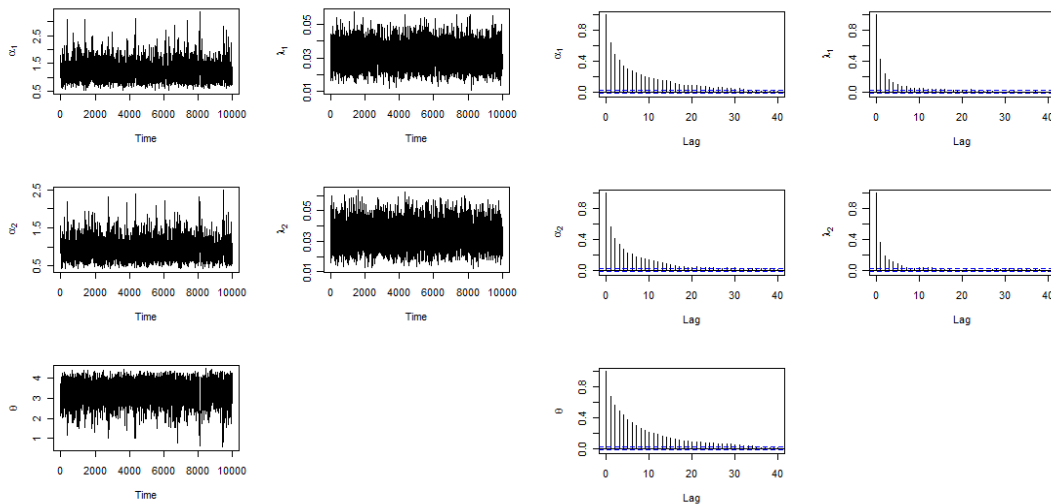
**Tabela 7.32:** Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  utilizando prioris Gama independentes com hiperparâmetros  $\theta_1 = 0.01$  e  $\theta_2 = 0.01$  para a distribuição BVGE via cópula Clayton

	Média	Desvio Padrão	ICr
$\alpha_1$	1.19338	0.30979	(0.74821; 1.94683)
$\alpha_2$	0.92267	0.22750	(0.56679; 1.46191)
$\lambda_1$	0.03099	0.00630	(0.01957; 0.04415)
$\lambda_2$	0.03336	0.00739	(0.02005; 0.04889)
$\theta$	3.14528	0.62495	(1.69166; 4.10994)

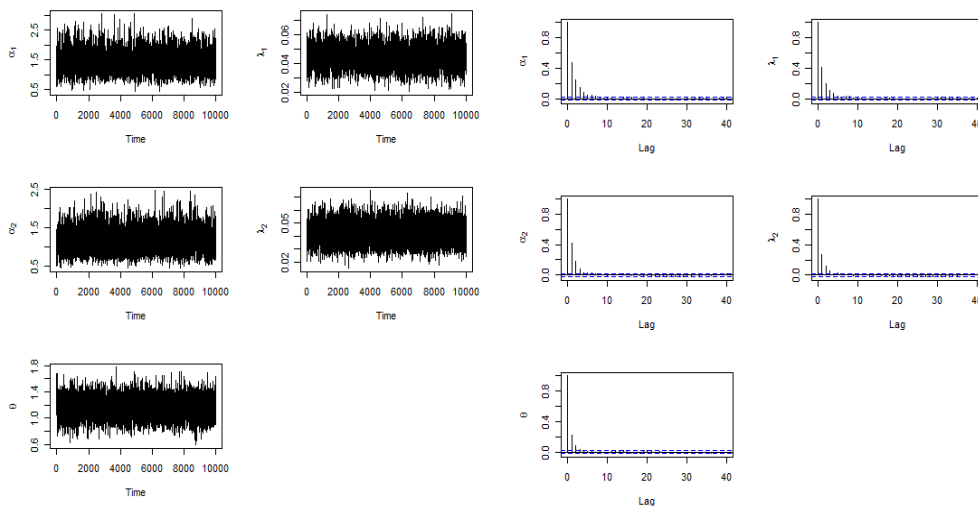
**Tabela 7.33:** Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  utilizando prioris Gama independentes com hiperparâmetros  $\theta_1 = 0.01$  e  $\theta_2 = 0.01$  para a distribuição BVGE via cópula Clayton GK.

	Média	Desvio Padrão	ICr
$\alpha_1$	2.18194	0.51379	(1.30969; 3.32212)
$\alpha_2$	1.49121	0.38572	(0.85646; 2.36919)
$\lambda_1$	0.03958	0.00645	(0.02752; 0.05285)
$\lambda_2$	0.04064	0.00784	(0.02638; 0.05702)
$\theta$	1.07699	0.19098	(0.69832; 1.44521)

satisfeitos.



**Figura 7.17:** Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori  $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$  utilizando prioris Gama independentes para a distribuição BVGE via cópula Clayton.



**Figura 7.18:** Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori  $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$  utilizando prioris Gama independentes para a distribuição BVGE via cópula Clayton GK.

As Tabelas (7.34) à (7.36) resumiam as informações mais relevantes para o caso da cópula Clayton.

**Tabela 7.34:** Estimativa de máxima verossimilhança, médias a posteriori e desvios padrões e para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  para a distribuição BVGE via cópula Clayton.

	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\alpha_1$	2.9494 (0.7625)	1.1933 (0.3097)	1.3182 (0.3416)	1.0459 (0.2168)
$\alpha_2$	1.8381 (0.4188)	0.9226 (0.2275)	1.0279 (0.2539)	0.8049 (0.1643)
$\lambda_1$	0.0399 (0.0070)	0.0309 (0.0063)	0.0335 (0.0063)	0.0234 (0.0046)
$\lambda_2$	0.0410 (0.0077)	0.0333 (0.0073)	0.0367 (0.0075)	0.0237 (0.0051)
$\theta$	0.4690 (0.2669)	3.1452 (0.6249)	3.0243 (0.6577)	3.3770 (0.5059)

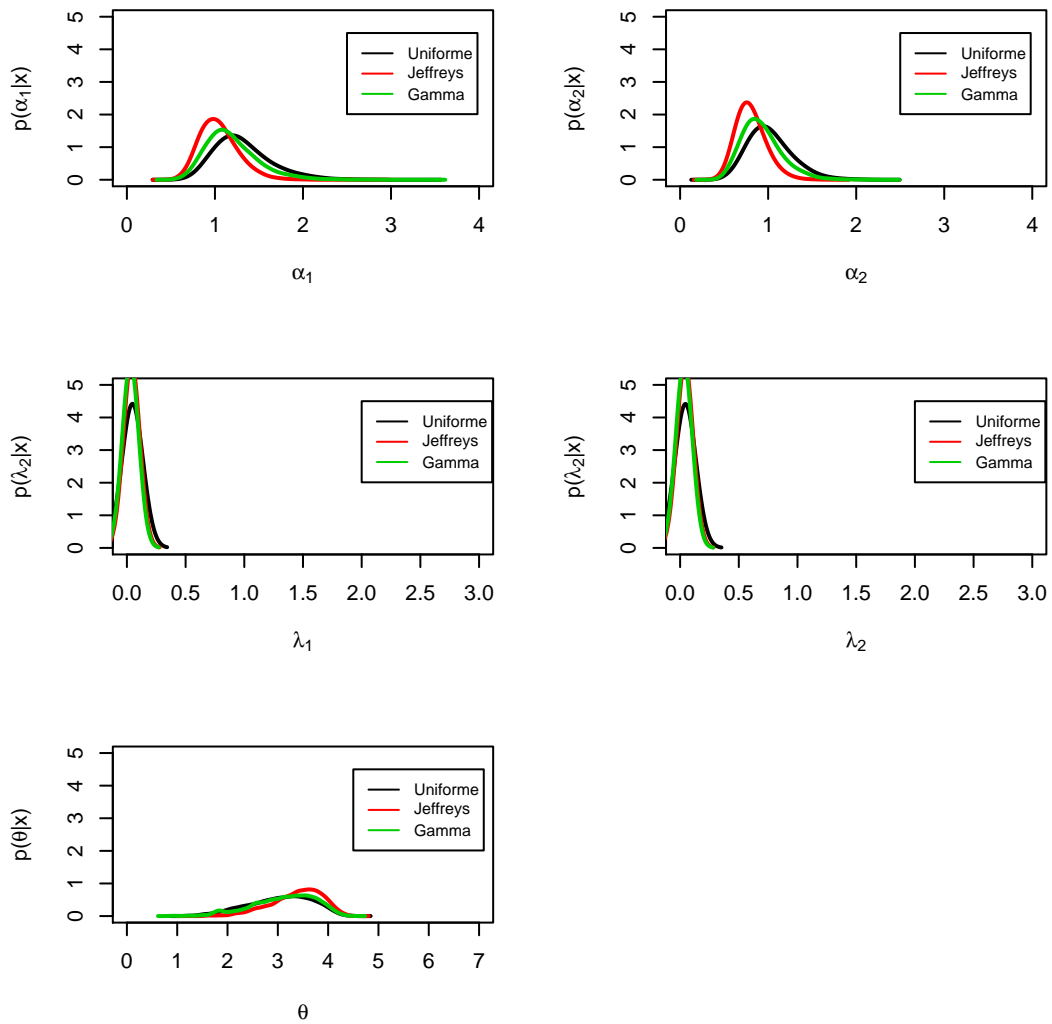
**Tabela 7.35:** Intervalos de confiança (95%) para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  e respectivas amplitudes para a distribuição BVGE via cópula Clayton.

EMV	
$\alpha_1$	(1.4547; 4.4441) [2.9863]
$\alpha_2$	(1.0717; 2.6590) [1.5873]
$\lambda_1$	(0.0260; 0.0538) [0.0278]
$\lambda_2$	(0.0260; 0.0562) [0.0302]
$\theta$	(-0.053; 0.9926) [1.0456]

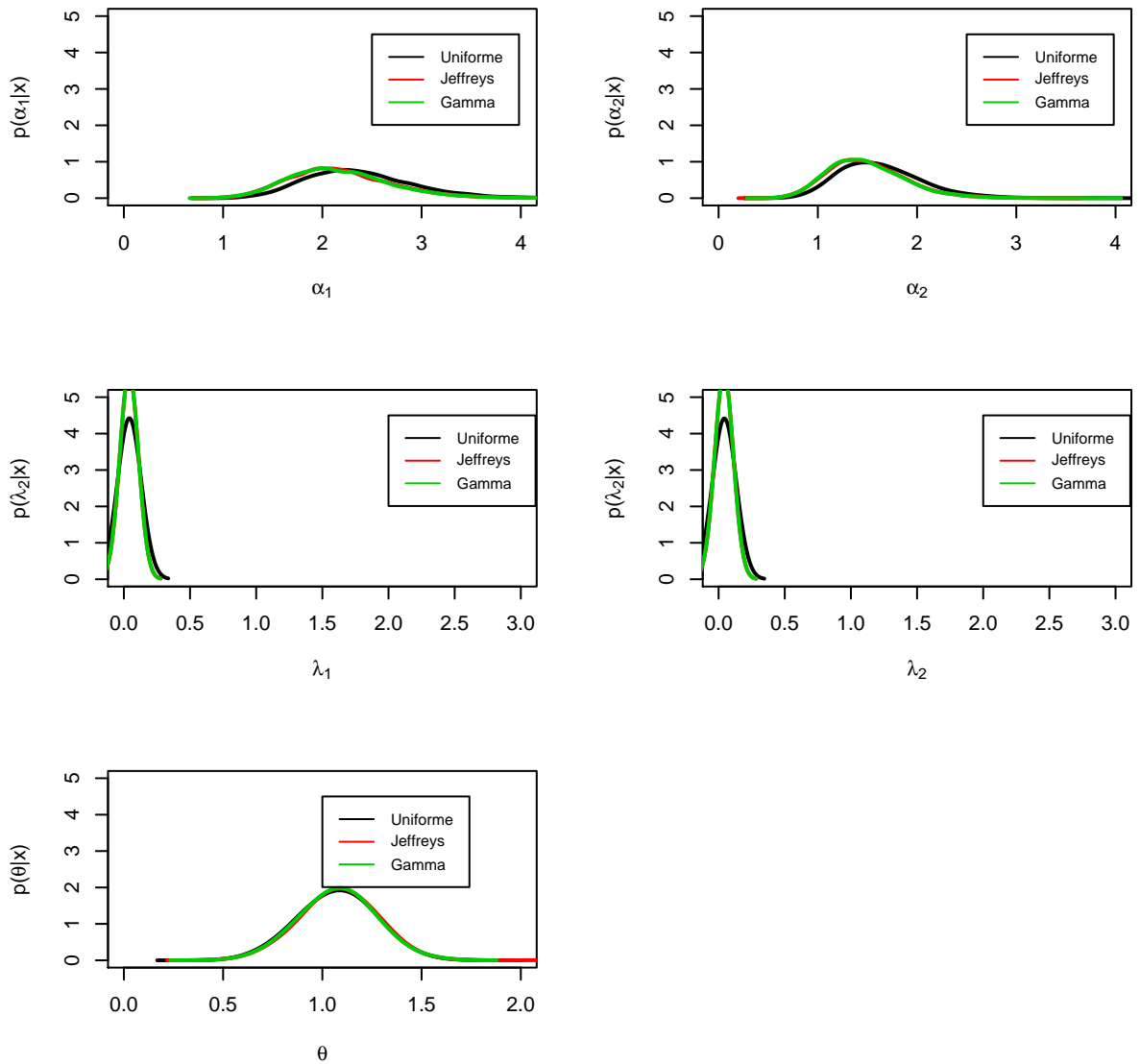
Novamente, as Tabelas (7.37) à (7.39) resumiam as informações mais relevantes para o caso da cópula Clayton GK.

As Figuras (7.19) e (7.20) trazem os desenho de cada posteriori para cada um dos parâmetros.

Novamente, observa-se que a escolha da priori não influencia os resultados.



**Figura 7.19:** Comparação das distribuições à posteriori obtidas a partir das prioris especificadas para cada parâmetro da distribuição BVGE via cópula Clayton.



**Figura 7.20:** Comparação das distribuições à posteriori obtidas a partir das priors especificadas para cada parâmetro da distribuição BVGE via cópula Clayton GK.

**Tabela 7.36:** Intervalos de credibilidade (95%) para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  e respectivas amplitudes para a distribuição BVGE via cópula Clayton.

	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\alpha_1$	(0.7482; 1.9468) [1.1986]	(0.8093; 2.1500) [1.3407]	(0.7006; 1.5336) [0.8330]
$\alpha_2$	(0.5667; 1.4619) [0.8952]	(0.6450; 1.6386) [0.9936]	(0.5401; 1.1802) [0.6401]
$\lambda_1$	(0.0195; 0.0441) [0.0246]	(0.0218; 0.0468) [0.0250]	(0.0152; 0.0333) [0.0181]
$\lambda_2$	(0.0200; 0.0488) [0.0288]	(0.0231; 0.0524) [0.0293]	(0.0146; 0.0348) [0.0202]
$\theta$	(1.6916; 4.1099) [2.4183]	(1.6328; 4.0674) [2.4346]	(2.2283; 4.1682) [1.9399]

**Tabela 7.37:** Estimativa de máxima verossimilhança, médias a posteriori e desvios padrões e para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  para a distribuição BVGE via cópula Clayton GK.

	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\alpha_1$	1.3845 (0.7013)	2.1819 (0.5138)	2.3725 (0.5365)	2.1957 (0.5242)
$\alpha_2$	0.8628 (0.5109)	1.4912 (0.3857)	1.6298 (0.4133)	1.4993 (0.3919)
$\lambda_1$	0.0438 (0.0071)	0.0396 (0.0064)	0.0417 (0.0065)	0.0399 (0.0066)
$\lambda_2$	0.0433 (0.0077)	0.0406 (0.0078)	0.0436 (0.0079)	0.0411 (0.0079)
$\theta$	2.1303 (1.2742)	1.0769 (0.1909)	1.0731 (0.1848)	1.0834 (0.1941)

**Tabela 7.38:** Intervalos de confiança (95%) para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  e respectivas amplitudes para a distribuição BVGE via cópula Clayton GK.

	EMV
$\alpha_1$	(0.0099; 2.7592) [2.7493]
$\alpha_2$	(-0.138; 1.8642) [2.0022]
$\lambda_1$	(0.0298; 0.0577) [0.0279]
$\lambda_2$	(0.0282; 0.0583) [0.0301]
$\theta$	(-0.367; 4.6277) [4.9947]

**Tabela 7.39:** Intervalos de credibilidade (95%) para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  e respectivas amplitudes para a distribuição BVGE via cópula Clayton GK.

	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\alpha_1$	(1.3097; 3.3221) [2.0124]	(1.4687; 3.5502) [2.0815]	(1.3313; 3.3600) [2.0287]
$\alpha_2$	(0.8565; 2.3692) [1.5127]	(0.9609; 2.5609) [1.6000]	(0.8523; 2.3819) [1.5296]
$\lambda_1$	(0.0275; 0.0528) [0.0253]	(0.0298; 0.0553) [0.0255]	(0.0280; 0.0531) [0.0251]
$\lambda_2$	(0.0264; 0.0570) [0.0306]	(0.0290; 0.0599) [0.0309]	(0.0265; 0.0575) [0.0310]
$\theta$	(0.6983; 1.4452) [0.7469]	(0.7039; 1.4292) [0.7253]	(0.6979; 1.4492) [0.7513]

### 7.1.5 Ajustamento para a distribuição BVGE via cópula Frank

Utilizando os dados da UEFA agora aplicados à distribuição BVGE via cópula Frank, foram obtidos, primeiramente, os estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$ , com seus respectivos desvios padrões e intervalos de 95% de confiança. Os resultados encontram-se na Tabela (7.40).

A Tabela (7.41) traz as estimativas à posteriori dos parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  utilizando-se a priori de Jeffreys para o caso da distribuição BVGE via cópula Frank, com seus respectivos desvios padrões e intervalos de 95% de credibilidade.

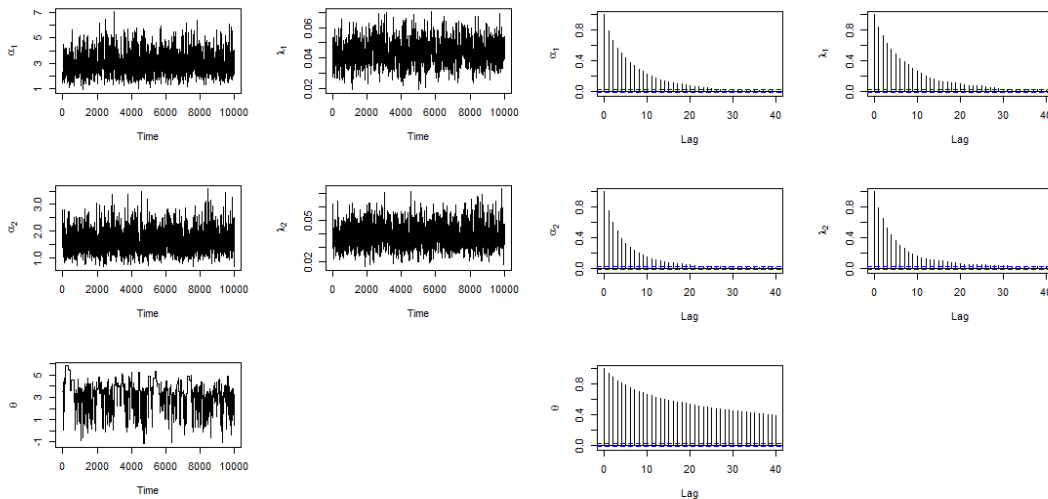
**Tabela 7.40:** Estimativa de máxima verossimilhança (EMV), desvios padrões e intervalos de 95% confiança (IC) para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  da distribuição BVGE via cópula Frank.

	EMV	Desvio Padrão	IC
$\alpha_1$	2.97051	0.77347	(1.45450; 4.48653)
$\alpha_2$	1.63895	0.38762	(0.87921; 2.39868)
$\lambda_1$	0.04446	0.00713	(0.03047; 0.05845)
$\lambda_2$	0.04070	0.00764	(0.02570; 0.05569)
$\theta$	3.03827	1.19462	(0.69672; 5.37967)

**Tabela 7.41:** Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  utilizando priori de Jeffreys para a distribuição BVGE via cópula Frank.

	Média	Desvio Padrão	ICr
$\alpha_1$	2.89418	0.78325	(1.59087; 4.62992)
$\alpha_2$	1.56824	0.38784	(0.92520; 2.44296)
$\lambda_1$	0.04326	0.00723	(0.02966; 0.05811)
$\lambda_2$	0.03875	0.00774	(0.02457; 0.05483)
$\theta$	3.34641	1.08790	(0.92518; 5.41381)

Os procedimentos gráficos para verificação da convergência são satisfeitos, conforme indica a Figura (7.21). Para cada parâmetro, foi obtido uma série temporal estacionária e gráficos de autocorrelações que diminuem conforme a defasagem.

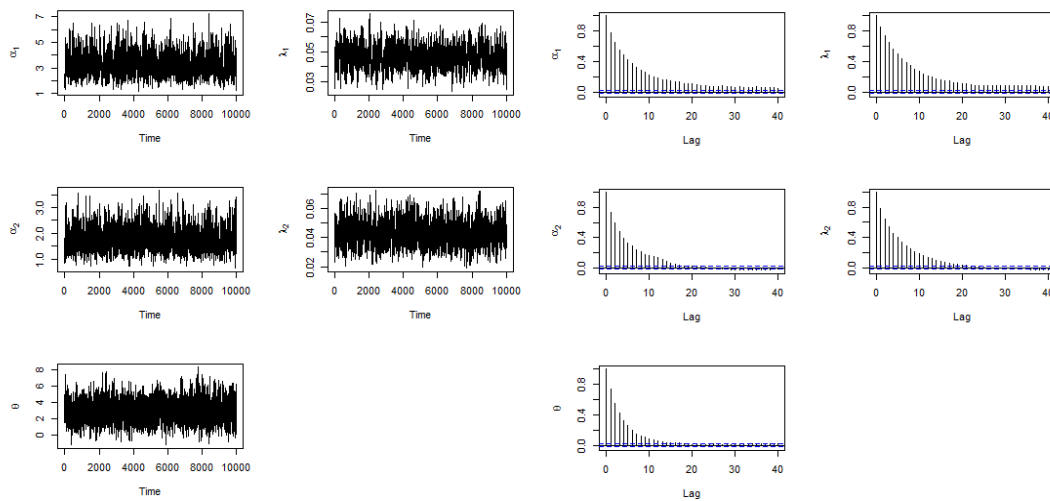


**Figura 7.21:** Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori  $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$  utilizando priori de Jeffreys para a distribuição BVGE via cópula Frank.

Os resultados das estimativas baseadas na priori Uniforme para o caso desta distribuição são exibidos na tabela (7.42). Já na Figura (7.22) são apresentadas as análises gráficas de convergência para este caso.

**Tabela 7.42:** Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  utilizando priori Uniforme para a distribuição BVGE via cópula Frank.

	Média	Desvio Padrão	ICr
$\alpha_1$	3.20634	0.84229	(1.81349; 5.03107)
$\alpha_2$	1.72348	0.42433	(1.02712; 2.67354)
$\lambda_1$	0.04604	0.00741	(0.03202; 0.06064)
$\lambda_2$	0.04208	0.00812	(0.02749; 0.05948)
$\theta$	2.94847	1.30073	(0.56126; 5.69680)

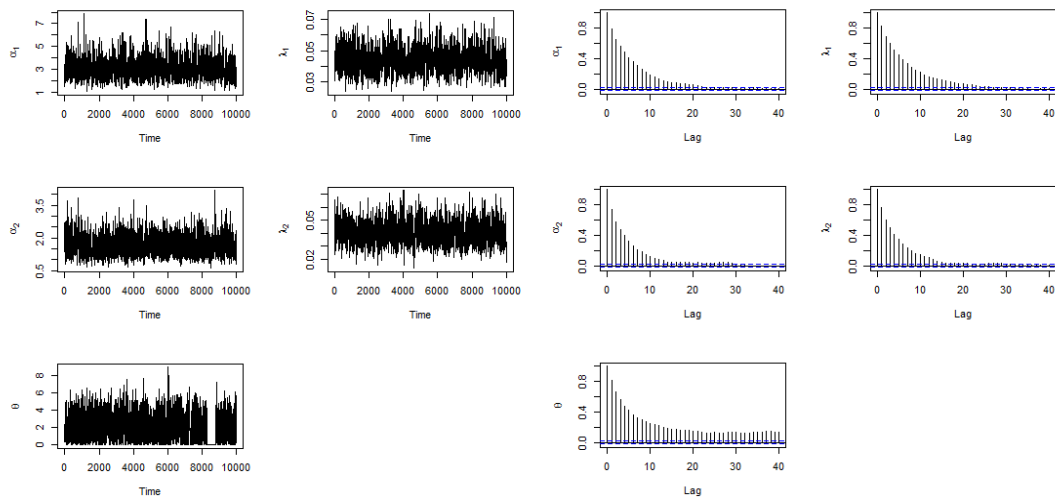


**Figura 7.22:** Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori  $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$  utilizando priori Uniforme para a distribuição BVGE via cópula Frank.

No caso das prioris Gama independentes, novamente foram utilizados como hiperparâmetros o valor 0.01. Os resultados obtidos estão na Tabela (7.43).

**Tabela 7.43:** Médias a posteriori, desvios padrões e intervalo de 95% de credibilidade para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  utilizando prioris Gama independentes com hiperparâmetros  $\theta_1 = 0.01$  e  $\theta_2 = 0.01$  para a distribuição BVGE via cópula Frank.

	Média	Desvio Padrão	ICr
$\alpha_1$	2.99073	0.81261	(1.70471; 4.85282)
$\alpha_2$	1.62610	0.40884	(0.94032; 2.52018)
$\lambda_1$	0.04388	0.00727	(0.03082; 0.05897)
$\lambda_2$	0.04015	0.00801	(0.02566; 0.05673)
$\theta$	2.10700	1.49559	(0.00005; 5.18523)



**Figura 7.23:** Série de tempo e gráfico de autocorrelação das distribuições a posteriori  $\Theta = (\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \theta)$  utilizando priors Gama independentes para a distribuição BVGE via cópula Frank.

As Tabelas (7.44) à (??) resumiam as informações mais relevantes.

**Tabela 7.44:** Estimativa de máxima verossimilhança, médias a posteriori e desvios padrões e para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  para a distribuição BVGE via cópula Frank.

	EMV	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\alpha_1$	2.9705 (0.7734)	2.9907 (0.8126)	3.2063 (0.8422)	2.8941 (0.7832)
$\alpha_2$	1.6389 (0.3876)	1.6261 (0.4088)	1.7234 (0.4243)	1.5682 (0.3878)
$\lambda_1$	0.0444 (0.0071)	0.0438 (0.0072)	0.0460 (0.0074)	0.0432 (0.0072)
$\lambda_2$	0.0407 (0.0076)	0.0401 (0.0080)	0.0420 (0.0081)	0.0387 (0.0077)
$\theta$	3.0382 (1.1946)	2.1070 (1.4955)	2.9484 (1.3007)	3.3464 (1.0879)

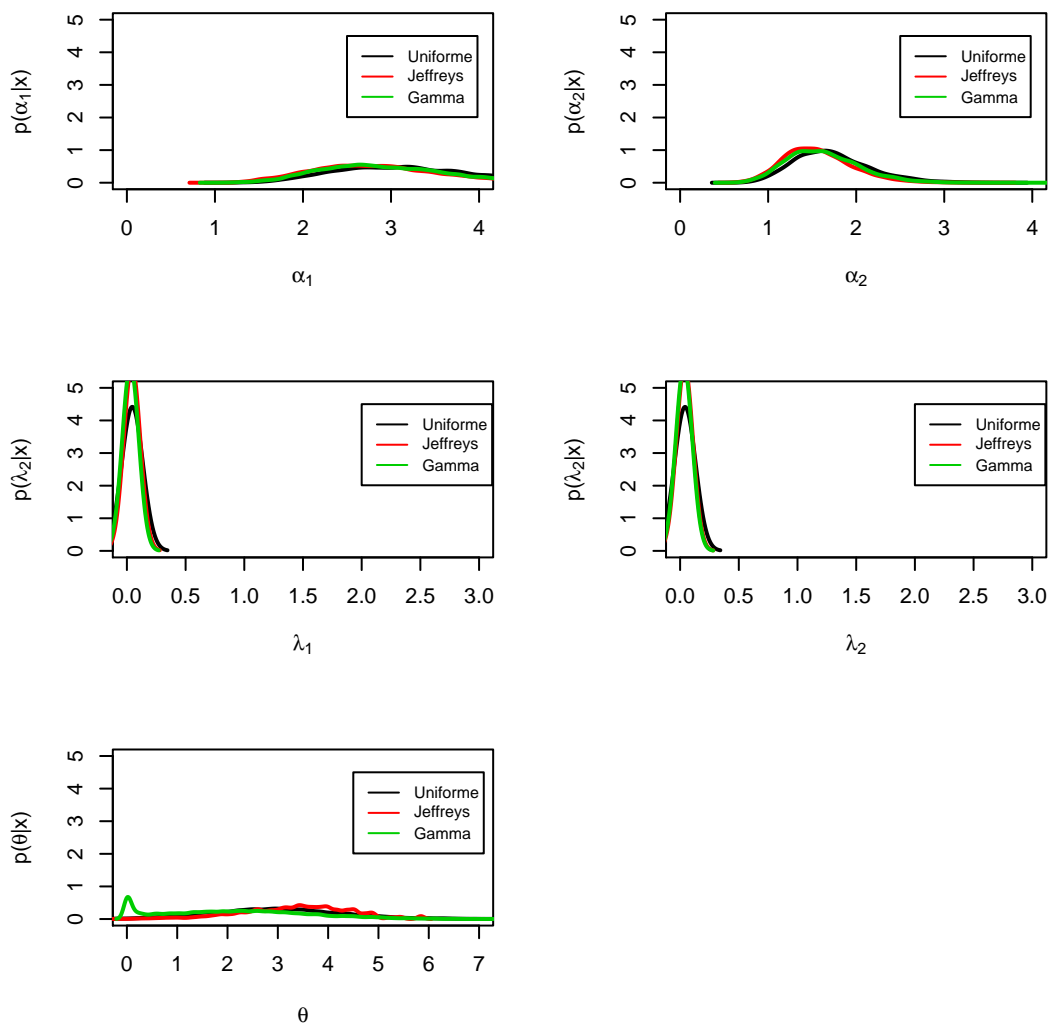
**Tabela 7.45:** Intervalos de confiança (95%) para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  e respectivas amplitudes para a distribuição BVGE via cópula Frank.

EMV	
$\alpha_1$	(1.4545; 4.4865) [3.0320]
$\alpha_2$	(0.8792; 2.3986) [1.5194]
$\lambda_1$	(0.0304; 0.0584) [0.0283]
$\lambda_2$	(0.0257; 0.0556) [0.0299]
$\theta$	(0.6967; 5.3796) [4.6829]

A Figura (7.24) traz o desenho de cada posteriori para cada um dos parâmetros. Novamente, observa-se que a escolha da priori não influencia os resultados.

**Tabela 7.46:** Intervalos de credibilidade (95%) para os parâmetros  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\theta$  e respectivas amplitudes para a distribuição BVGE via cópula Frank.

	Gama	Uniforme	Jeffreys
$\alpha_1$	(1.7047; 4.8528) [3.1481]	(1.8134; 5.0310) [3.2176]	(1.5908; 4.6299) [3.0391]
$\alpha_2$	(0.9403; 2.5201) [1.5798]	(1.0271; 2.6735) [1.6464]	(0.9252; 2.4429) [1.5177]
$\lambda_1$	(0.0308; 0.0589) [0.0281]	(0.0320; 0.0606) [0.0286]	(0.0296; 0.0581) [0.0285]
$\lambda_2$	(0.0256; 0.0567) [0.3110]	(0.0274; 0.0594) [0.0320]	(0.0245; 0.0548) [0.0303]
$\theta$	(0.0000; 5.1852) [5.1852]	(0.5612; 5.6968) [5.1356]	(0.9251; 5.4138) [4.4887]



**Figura 7.24:** Comparação das distribuições à posteriori obtidas a partir das priors especificadas para cada parâmetro da distribuição BVGE via cópula Frank.

### 7.1.6 Comparação dos modelos BVGE, BVGE FGM, BVGE Gumbel, BVGE Clayton e BVGE Frank por AIC, BIC e DIC

Uma das maneiras de se propor a melhor distribuição de ajuste aos dados é verificar as medidas AIC, BIC ou DIC. O modelo mais plausível de escolha é o que produz o menor valor para uma destas medidas. Para os

modelos estudados nas seções (7.1.1), (7.1.5) e (7.1.4), foram obtidos as três medidas. Os resultados Bayesianos foram apresentados com base nas prioris utilizadas.

**Tabela 7.47:** Cálculo do AIC, BIC e DIC para os modelos BVGE, BVGE FGM e BVGE Gumbel, BVGE Clayton, BVGE Clayton GK e BVGE Frank.

Modelo	Método	AIC	BIC	DIC
BVGE	EMV	601.8013	608.245	-
	Gama	601.8099	608.2536	555.2127
	Uniforme	602.2310	608.6746	538.7559
	Jeffreys	601.8567	608.3003	551.0692
BVGE FGM	EMV	664.0960	672.1505	-
	Gama	665.3340	673.3886	650.3340
	Uniforme	665.5554	673.6100	655.1058
	Jeffreys	665.3244	673.379	654.8559
BVGE Gumbel	EMV	667.5045	673.9482	-
	Gama	671.7199	679.7745	660.5807
	Uniforme	671.7453	679.7999	660.3934
	Jeffreys	671.7039	679.7585	660.9636
BVGE Clayton GK	EMV	662.1212	670.1758	-
	Gama	723.2269	731.2815	713.2844
	Uniforme	705.8792	713.9338	695.6055
	Jeffreys	722.8652	730.9198	713.0178
BVGE Clayton	EMV	668.8844	676.9390	-
	Gama	683.1147	691.1693	672.2637
	Uniforme	682.3312	690.3858	671.2192
	Jeffreys	687.8857	695.9403	676.4120
BVGE Frank	EMV	662.3110	670.3655	-
	Gama	663.0254	671.0800	654.0988
	Uniforme	662.4333	670.4879	652.8836
	Jeffreys	662.4251	670.4797	647.4251
GE Univariadas Indep.	EMV	730.9261	737.3698	-
	Jeffreys	733.8137	740.2573	659.6957

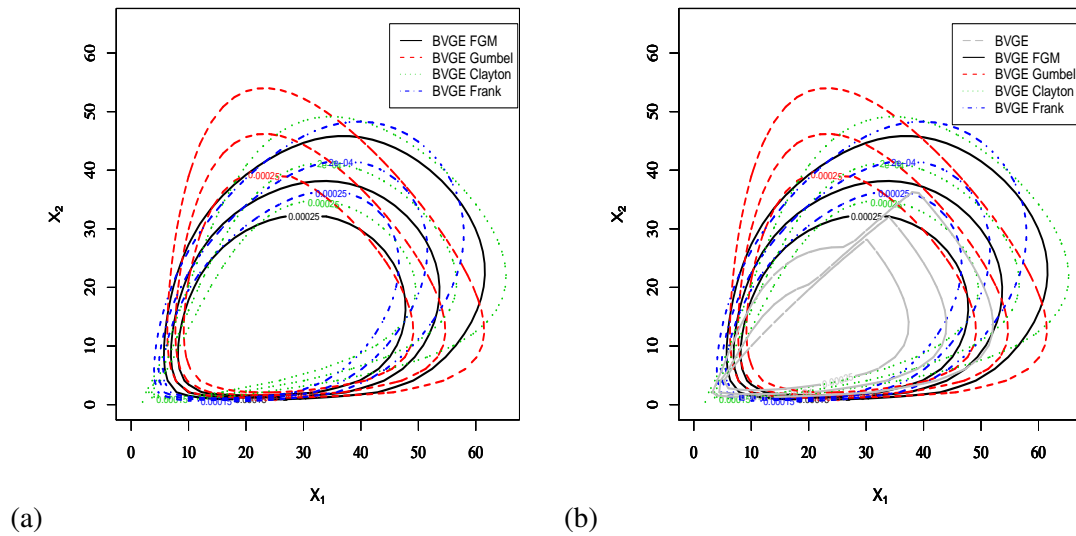
A partir dos resultados dos estimadores de máxima verossimilhança, pode-se perceber que a distribuição BVGE de Gupta e Kundu forneceram menores valores de AIC e BIC que as distribuições BVGE por FGM, Gumbel-Barnett, Frank, Clayton e Clayton GK. Deve-se notar que a distribuição BVGE de Gupta e Kundu possui quatro parâmetros, enquanto as demais possuem cinco.

Ao considerar somente as distribuições provenientes das cópulas, as de Farlie-Gumbel-Morgestein e Frank foram as que obtiveram menores valores de AIC, BIC e DIC, ainda que os valores computados fossem próximos um dos outros.

### 7.1.7 Resultados gráficos adicionais baseados no EMV

Nesta seção foram propostos, como comparação adicional dos resultados, gráficos de contornos baseados nos estimadores de máxima verossimilhança obtidos no exemplo da UEFA. Devido, também, ao princípio de invariância dos EMV, contornos relacionados à função de sobrevivência também foram elaborados a seguir.

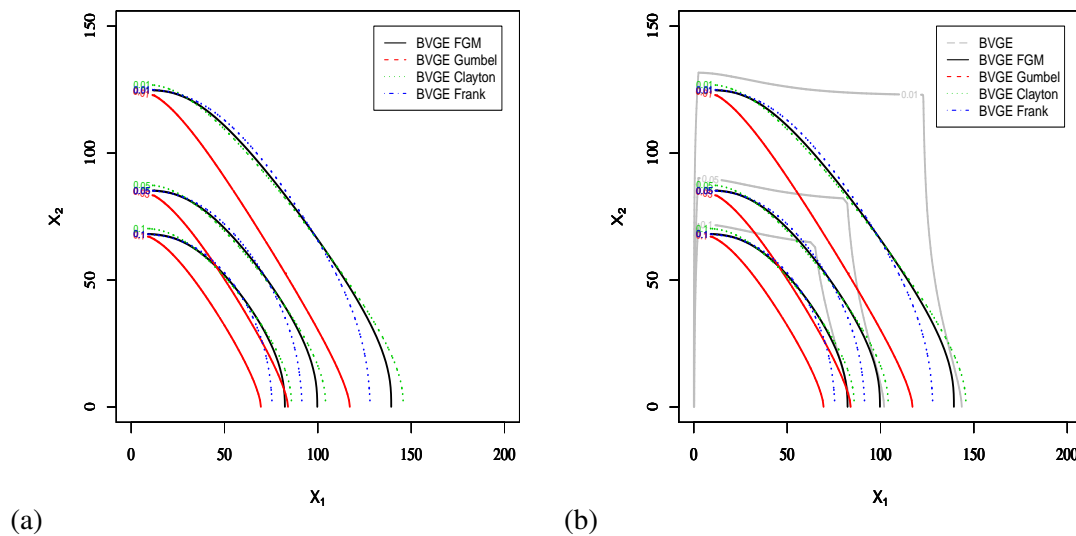
Para os estudos dos contornos com base nas funções densidades conjuntas, apresentadas em (7.25) foram considerados os níveis 0.00015, 0.0002 e 0.00025.



**Figura 7.25:** Contornos das densidades com base nos EMV para os dados da UEFA. Em (a), apenas as densidades das cópulas são consideradas. Em (b), a distribuição BVGE é adicionada.

Primeiramente, observa-se que as distribuições via cópulas possuem contornos semelhantes. Nota-se ainda uma possível presença de simetria, como aponta o caso da da distribuição BVGE via cópula Gumbel e BVGE via cópula Frank.

Quando comparadas com a BVGE de Gupta e Kundu, em (7.25)(b), nota-se que a mesma possui contornos mais concentrados que as demais, indicando declives mais abruptos, além de apresentar melhor captura da dependência dos dados. Os contornos centrais destacam a parte singular da distribuição.



**Figura 7.26:** Contornos das sobrevivências com base nos EMV para os dados da UEFA. Em (a), apenas as densidades das cópulas são consideradas. Em (b), a distribuição BVGE é adicionada.

No caso das funções de sobrevivência, esboçadas na figura (7.26) foram considerados os cortes 0.01, 0.05 e 0.1. Novamente, as distribuições provenientes das cópulas resultaram em curvas semelhantes para as sobre-

vivências, com os níveis da distribuição BVGE via cópula Gumbel mais concentrados que as demais.

No caso da distribuição BVGE, esta apresentou comportamento distinto das demais, apresentando um declive suave entre os níveis 0.05 e 0.1, tornando-a mais longa que as distribuições por cópulas.

## Capítulo 8

# Conclusões

Neste trabalho foram apresentadas várias versões para a distribuição exponencial bivariada generalizada: uma proposta por Gupta e Kundu (2009) e quatro que derivaram de funções cópulas FGM, Gumbel, Clayton e Frank. Para todas elas, foram realizadas as análises clássicas e Bayesianas de um conjunto de dados reais referentes ao campeonato UEFA, de modo que os resultados obtidos por ambas foram bastantes similares, embora que, devido ao tamanho amostral ( $n = 37$ ) os parâmetros  $\theta$  das distribuições obtidas pelas cópulas, na estimação clássica, possuíram valores não condizentes aos seus espaços paramétricos em alguns casos ( $\hat{\theta} = 1.075 \notin [-1, 1]$  na cópula FGM e  $\hat{\theta} = -1.85 \notin [0, 1]$  na cópula Gumbel). Na estimação Bayesiana, tal fato não aconteceu em nenhuma das cópulas.

As medidas de seleção de modelos, AIC, BIC e DIC, favoreceram na escolha da distribuição de Gupta e Kundu e apresentaram valores similares para as distribuições obtidas pelas cópulas. Além disso, deve-se lembrar que a distribuição BVGE de Gupta e Kundu apresenta um parâmetro a menos que as demais, sendo uma vantagem. Deve-se lembrar, no entanto, que as distribuições provenientes das cópulas eram somente contínuas, não apresentando trechos de singularidade.

Na estimação Bayesiana, a escolha entre as prioris Uniforme, Gamma e Jeffreys pareceu não influenciar nos resultados, devido a semelhança dos gráficos obtidos das posterioris e também dos valores AIC, BIC e DIC. Considerando-se somente as distribuições obtidas por cópulas, a distribuição via cópula FGM foi a mais plausível de ser escolhida baseando-se nos critérios mencionados, juntamente com a cópula Frank, que também apresentou valores próximos aos da FGM.

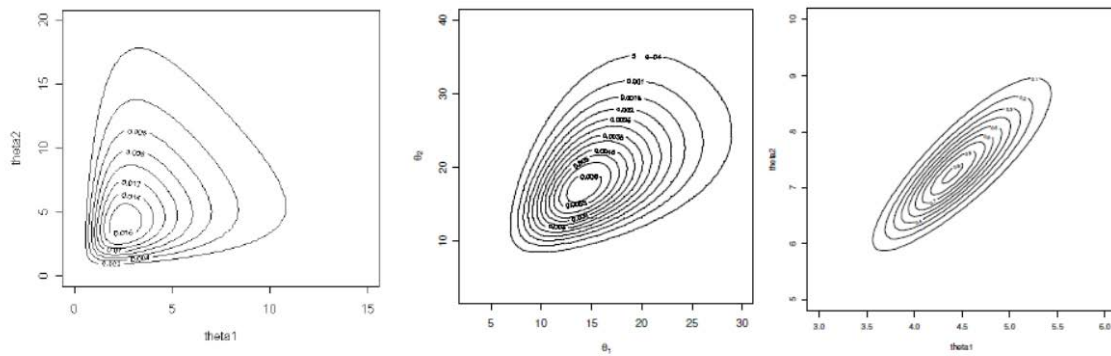
Deve-se enfatizar que para o caso das cópulas, utilizando-se do software *R*, foi possível a obtenção das matrizes de Informação de Fisher a partir de integrações numéricas e também no cálculo dos determinantes.

Para o caso das simulações, todas as distribuições estudadas puderam ser averiguadas em situações onde o tamanho amostral era considerado razoável, com  $n = 20, 50$  e  $100$ , mostrando serem boas alternativas à estimação de dados bivariados. Novamente, alguns resultados clássicos não foram condizentes com seus espaços paramétricos, principalmente no caso do parâmetro  $\theta$  das distribuições por cópulas, mas, em geral, os resultados clássicos e Bayesianos foram parecidos.

### 8.1 Propostas Futuras

São consideradas como propostas futuras:

- Análise de cópulas sob dados censurados (reais e simulados).



**Figura 8.1:** *Diferentes contornos para a distribuição Log-Normal bivariada.*

- No presente trabalho, cada distribuição BVGE foi simulada de si mesma e foi analisado o que ocorria com tamanhos amostrais distintos  $n = 20, 50$  e  $100$  para cada uma delas.
- Qual seria a distribuição BVGE que melhor se ajustaria a um conjunto de dados gerado a partir de uma distribuição que não beneficiasse nenhuma das BVGEs? O intuito é simular amostras de diferentes tamanhos de distribuições Log-Normais Bivariadas com diferentes níveis de correlação, conforme mostra a figura (8.1).

# Referências Bibliográficas

- [AAD12] MOALA F. A., ACHCAR J. A. e TOMAZELLA V. L. D. Bayesian estimation of generalized exponential distribution under noninformative priors. *AIP Conference Proceedings*, 1490:230–242, 2012. 12
- [AJH10] MOALA F. A., ACHCAR J.A. e TARUMOTO M. H. A bivariate generalized exponential distribution derived from copula functions in the presence of censored data and covariates. *Submitted to Sankhya B.*, 2010. 2, 29
- [AKA73] H. AKAIKE. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. *Second international symposium on information theory*, páginas 267–281, 1973. 4
- [BA04] K.P. BURNHAM e D.R. ANDERSON. Multimodel inference: Understanding aic and bic in model selection. *Sociological Methods e Research*, 33:261–304, 2004. 6
- [BAR80] V. BARNETT. Some bivariate uniform distributions. *communications in statistics: Theory and methods. Journal of Royal Statistical Society*, 9:453–461, 1980. 32
- [BB74] H. BLOCK e A. BASU. A continuous bivariate exponential extension. *Journal of the American Statistical Association*, 69:1031–1037, 1974. 1
- [BT73] G. BOX e G. TIAO. *Bayesian Inference in Statistical Analysis*. John Wiley e Series, 1973. 4
- [CC95] B.P. CARLIN e S. CHIB. Bayesian model choice via markov chain monte carlo methods. *Journal of the Royal Statistical - Series B.*, 57:473–484, 1995. 23
- [DOW70] F. DOWTON. Bivariate exponential distributions in reliability theory. *Journal of Royal Statistical Society*, 32:408–417, 1970. 1
- [DR99] KUNDU D. e GUPTA R.D. Generalized exponential distributions. *Austral. New Zealand J. Statist*, 41:173–188, 1999. 1, 11
- [DR00] KUNDU D. e GUPTA R.D. Generalized exponential distribution: Different method of estimations. *J. Statist. Comput. Simul.*, 00:1–22, 2000. 1
- [DR07] KUNDU D. e GUPTA R.D. Generalized exponential distribution: Existing results and some recent developments. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137:3537–3547, 2007. 1
- [DR09] KUNDU D. e GUPTA R.D. Bivariate generalized exponential distribution. *Journal of Multivariate Analysis*, 100:581–593, 2009. 1, 13, 19
- [DR11] KUNDU D. e GUPTA R.D. Absolute continuous bivariate generalized exponential distribution. *Advances in Statistical Analysis*, 95:169–185, 2011. 36
- [EC02] A. ERAR e M.C. CETIN. Variable selection with akaike information criteria: a comparative study. *Journal of Mathematics and Statistics.*, 31:89–97, 2002. 6
- [FRE61] J. FREUND. A bivariate extension of the exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 56:971–977, 1961. 1

- [GEW92] J. GEWEKE. Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to calculating posterior moments. *Bayesian Statistics*, 4, 1992. 41, 42, 44
- [GUM60] E. GUMBEL. Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 55:698–707, 1960. 1
- [HAW72] A. HAWKES. A bivariate exponential distribution with application to reliability. *Journal of the Royal Statistical Society*, 34:129–131, 1972. 1
- [JAJ10] ACHCAR J.A., MOALA F. A. e BOLETA J. Generalized exponential distribution: A bayesian approach using mcmc methods. *Submitted to Sankhya B.*, 2010. 1, 12
- [JEF] H. JEFFREYS. *Theory of Probability*. 3a edição. 3
- [LAP74] P. LAPLACE. Mémoire sur la probabilité des causes par les évenemens. *Mem. Acad. R. Sci. Présentés par Divers Savans*, 6:621–656, 1774. 3
- [MEI07] S. G. MEINTANIS. Test of fit for marshall-olkin distributions with applications. *Journal of Statistical Planning and inference*, 137:3954–3963, 2007. 2, 49
- [MO76] A. MARSHALL e I. OLKIN. A generalized bivariate exponential distribution. *Journal of Applied Probability*, 4:291–302, 1976. 1
- [MOR56] D. MORGENSTERN. Einfache beispiele zweidimensionaler verteilungen. *Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik*, 8:234–256, 1956. 2
- [NEL06] R.B. NELSEN. *An Introduction to Copulas*. Springer, 2º edição, 2006. 2, 24
- [SAR87] S. SARKAR. A continuous bivariate exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 82:667–675, 1987. 1
- [SB07] A. SARHAN e N. BALAKRISHNAN. A new class of bivariate distribution and its mixture. *Journal of the Multivariate Analysis*, 98:1508–1527, 2007. 13
- [SE95] CHIB S.E. e GREENBERG E. Understanding the metropolis-hastings algorithm. *The American Statistician*, 49:327–335, 1995. 12
- [SEH09] ASHOUR S.K., AMIN E.A. e MUHAMMED H.Z. Moment generating function of the bivariate generalized exponential distribution. *Applied Mathematical Sciences*, 3:2911–2918, 2009. 18
- [SKL59] A. SKLAR. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 8:229–231, 1959. 24
- [TZ5a] P. K. TRIVEDI e D. H. ZIMMER. Copula modelling. *New Publishes.*, 2005a. 2
- [TZ5b] P. K. TRIVEDI e D. H. ZIMMER. Copula modelling: an introduction to praticioneis. *Foundations and trends in econometrics*, 1:1–111, 2005b. 2