



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Análise de Estabilidade de Escoamentos do Fluido Viscoelástico Giesekus

Laison Junio da Silva Furlan

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Analice Costacurta Brandi

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Agosto de 2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Análise de Estabilidade de Escoamentos do Fluido Viscoelástico Giesekus

Laison Junio da Silva Furlan

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Analice Costacurta Brandi

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Agosto de 2018

Ficha catalográfica elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação - Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação - UNESP, Campus de Presidente Prudente

F984a Furlan, Laison Junio da Silva.
Análise de estabilidade de escoamentos do fluido viscoelástico Giesekus /
Laison Junio da Silva Furlan. - 2018
78 f.

Orientador: Analice Costacurta Brandi
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de
Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente, 2018
Inclui bibliografia

1. Transição laminar-turbulenta. 2. Fluido Giesekus. 3. Simulação
numérica direta. 4. Teoria de estabilidade linear. I. Brandi, Analice
Costacurta. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e
Tecnologia. III. Título.

Alessandra Kuba Oshiro Assunção
CRB-8/9013

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

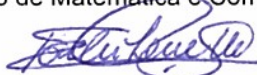
**TÍTULO: ANÁLISE DE ESTABILIDADE DE ESCOAMENTOS DO FLUIDO VISCOELÁSTICO
GIESEKUS**

**AUTOR: LAISON JUNIO DA SILVA FURLAN
ORIENTADORA: ANALICE COSTACURTA BRANDI**

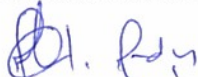
Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em MATEMÁTICA
APLICADA E COMPUTACIONAL, pela Comissão Examinadora:



Profa. Dra. ANALICE COSTACURTA BRANDI
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente



Profa. Dra. GILCILENE SANCHEZ DE PAULO
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente



Dr. MARCIO TEIXEIRA MENDONÇA
Divisão de Propulsão Aeronáutica / Instituto de Aeronáutica e Espaço

Presidente Prudente, 02 de agosto de 2018.

*À minha família e meus amigos,
por sempre estarem ao meu lado.*

Agradecimentos

Quero primeiramente agradecer aos meus pais, José Roberto e Lúdia, meu irmão Dexter, e aos meus demais familiares que sempre me apoiaram.

À Professora Analice Costacurta Brandi pela orientação, paciência e dedicação, compartilhando seus conhecimentos e experiências para que a minha formação fosse além da acadêmica.

Aos Professores Leandro Franco de Souza e Márcio Teixeira de Mendonça pela disposição e colaboração no desenvolvimento desta dissertação, à Professora Gilcilene Sanchez de Paulo e também aos alunos do ICMC-USP, Arianne e Matheus.

Aos meus amigos, da vida, da graduação e da pós, pois a nossa jornada é repleta de dificuldades e obstáculos, mas quando temos pessoas com quem possamos contar, tudo se torna mais fácil, mais simples. Alexander Supertramp disse que, “a felicidade só é plena quando compartilhada”, e eu escolhi compartilhar a minha com as pessoas que me rodeiam pois sei que é recíproco.

Em especial, aos meus amigos Rodrigo, Jéssica e Letícia, amizade essa que se fortaleceu durante o desenvolvimento desse mestrado, pois sofremos juntos, batalhamos juntos e conseguimos vencer juntos.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo nº 2017/11068-6, pelo apoio financeiro no desenvolvimento deste trabalho.

E a todos que contribuíram, diretamente ou indiretamente, para o sucesso deste trabalho.

“ O sucesso é ir de fracasso em fracasso sem perder entusiasmo.”
Winston Churchill

Resumo

O presente trabalho investiga a transição laminar-turbulenta devido a ondas de Tollmien-Schlichting para o escoamento de Poiseuille incompressível, bidimensional, de um fluido viscoelástico, utilizando a equação constitutiva Giesekus. A Teoria de Estabilidade Linear e a Simulação Numérica Direta são utilizadas para verificar a estabilidade de escoamentos de fluidos viscoelásticos a perturbações não estacionárias. Na análise LST a equação de Orr-Sommerfeld é modificada para um fluido viscoelástico e resolvida pelo método da estimativa (*Shooting*). Enquanto que, na formulação DNS, as equações de Navier-Stokes, juntamente com a equação constitutiva Giesekus, são resolvidas utilizando métodos de diferenças finitas compactas de alta ordem. Com o objetivo de avaliar as curvas neutras de estabilidade e as taxas de amplificação, diferentes simulações numéricas são realizadas variando-se os parâmetros adimensionais no modelo Giesekus e comparando com o fluido Newtoniano. As técnicas LST e DNS mostraram-se ferramentas eficientes na análise espacial da estabilidade de escoamentos viscoelásticos do tipo Giesekus, permitindo uma melhor compreensão da influência dos parâmetros adimensionais desses escoamentos e contribuindo com resultados originais na verificação da estabilidade de escoamentos viscoelásticos utilizando o fluido Giesekus.

Palavras-Chave: *Transição Laminar-Turbulenta, Fluido Giesekus, Simulação Numérica Direta, Teoria de Estabilidade Linear.*

Abstract

The present work investigates the laminar-turbulent transition due to Tollmien-Schlichting waves for the incompressible two-dimensional Poiseuille flow of a viscoelastic fluid, using the Giesekus constitutive equation. Linear Stability Theory and Direct Numerical Simulation are used to verify the stability of viscoelastic fluid flows to unsteady disturbances. In the LST analysis, the Orr-Sommerfeld equation is modified to a viscoelastic fluid and solved by Shooting method. Whereas, in the DNS formulation, the Navier-Stokes equations with the Giesekus constitutive equation are solved using high-order compact finite difference methods. In order to evaluate the neutral stability curves and the amplification rates, different numerical simulations are performed by varying the dimensionless parameters in the Giesekus model and their results are compared with the Newtonian fluid. The LST and DNS techniques proved to be efficient tools to the spatial stability analysis of viscoelastic fluid flows of the Giesekus type, allowing a better comprehension of the dimensionless parameters influence of those flows, contributing with original results to verification of the viscoelastic fluid flows stability using Giesekus fluid.

Keywords: *Laminar-Turbulent Transition, Giesekus Fluid, Direct Numerical Simulation, Linear Stability Theory.*

Lista de Figuras

3.1	Domínio computacional do escoamento de Poiseuille 2D.	40
4.1	Comparação de curvas neutras para os modelos Oldroyd-B (○) e Giesekus (—) para os valores de $Wi = 2.0, 6.0, 10.0$ e 14.0 e fixados $\beta = 0.25$ (a), $\beta = 0.50$ (b) e $\beta = 0.75$ (c).	50
4.2	Perfil de velocidade u (a) e dos tensores T^{xx} (b), T^{xy} (c) e T^{yy} (d), para $Re = 8000, Wi = 2, \beta = 0.25$ e diferentes valores de α_G	52
4.3	Perfil de velocidade u (a) e dos tensores T^{xx} (b), T^{xy} (c) e T^{yy} (d), para $Re = 8000, Wi = 2, \beta = 0.50$ e diferentes valores de α_G	53
4.4	Perfil de velocidade u (a) e dos tensores T^{xx} (b), T^{xy} (c) e T^{yy} (d), para $Re = 8000, Wi = 2, \beta = 0.75$ e diferentes valores de α_G	54
4.5	Ampliação do perfil de velocidade das Figuras 4.2 – 4.4 (a), para $\beta = 0.25$ (a), $\beta = 0.50$ (b), $\beta = 0.75$ (c), $Re = 8000$ e $Wi = 2$ fixos e diferentes valores de α_G	55
4.6	Curvas neutras para os valores de $\beta = 0.25$ e $Wi = 2.0$ fixos e diferentes valores de α_G	56
4.7	Curvas neutras para os valores de $\beta = 0.50$ e $Wi = 6.0$ e 10 fixos e diferentes valores de α_G	57
4.8	Curvas neutras para os valores de $\beta = 0.75$ e $Wi = 2.0, 6.0$ e 10 fixos e diferentes valores de α_G	58
4.9	Curvas neutras para os valores de $\beta = 0.50$ e $Wi = 2.0$ fixos e diferentes valores de α_G	59
4.10	Valores de Reynolds crítico para diferentes valores de α_G , considerando fixos $\beta = 0.5$ e $Wi = 2$	60
4.11	Curvas neutras para os valores de $Wi = 2.0$ e $\alpha_G = 0.25$ e 0.50 fixos e diferentes valores de β	61
4.12	Valores de Reynolds crítico para diferentes valores de β , considerando fixos $\alpha_G = 0.25$ e 0.50 e $Wi = 2$	61
4.13	Curvas neutras para os valores de $\beta = 0.70$ e $\alpha_G = 0.25$ e 0.50 fixos e diferentes valores de Wi	62
4.14	Curvas neutras para os valores de $\beta = 0.90$ e $\alpha_G = 0.25$ e 0.50 fixos e diferentes valores de Wi	63
4.15	Valores de Reynolds crítico para diferentes valores de Weissenberg Wi , considerando fixos $\beta = 0.70$ e 0.90 e $\alpha_G = 0.25$ e 0.50	64

Lista de Tabelas

3.1	Classificação de instabilidades.	47
4.1	Valores de Re crítico referentes as curvas neutras da Figura 4.9.	59
4.2	Valores de Re crítico referentes as curvas neutras da Figura 4.11.	60
4.3	Valores de Re crítico referentes as curvas neutras das Figuras 4.13 e 4.14.	64
4.4	Classificação de estabilidade variando α_G para $Re = 5200$, $\beta = 0.9$ e $Wi = 1$	65
4.5	Classificação de estabilidade variando α_G para $Re = 8000$, $\beta = 0.9$ e $Wi = 5$	65
4.6	Classificação de estabilidade variando Re para $\beta = 0.50$, $\alpha_G = 0.75$ e $Wi = 6$	65
4.7	Classificação de estabilidade variando Re para $\beta = 0.50$, $\alpha_G = 0.6$ e $Wi = 2$	65
4.8	Classificação de estabilidade variando Wi para $Re = 3000$, $\beta = 0.60$ e $\alpha_G = 0.2$	66
4.9	Classificação de estabilidade variando Wi para $Re = 4000$, $\beta = 0.60$ e $\alpha_G = 0.0$	66
4.10	Classificação de estabilidade variando β para $Re = 6000$, $\alpha_G = 0.75$ e $Wi = 2$	66
4.11	Classificação de estabilidade variando β para $Re = 7000$, $\alpha_G = 0.25$ e $Wi = 2$	66

Lista de Siglas

DNS - Simulação Numérica Direta.

FAS - Esquema de Aproximação Total.

LST - Teoria de Estabilidade Linear.

Sumário

Resumo	3
Abstract	5
Lista de Figuras	6
Lista de Tabelas	7
Lista de Siglas	11
1 Introdução	15
2 Formulação Matemática	19
2.1 Equações Governantes	19
2.1.1 Modelos Newtoniano e Não-Newtoniano	19
2.2 Modelo Giesekus	21
2.3 Adimensionalização	22
2.4 Simulação Numérica Direta	25
2.5 Teoria de Estabilidade Linear	27
2.6 escoamento Base	37
3 Método Numérico	39
3.1 Simulação Numérica Direta	39
3.1.1 Introdução de Perturbações	39
3.1.2 Aproximação Numérica de Derivadas Temporais	40
3.1.3 Aproximação Numérica de Derivadas Espaciais	41
3.1.4 Amortecimento de Reflexões na Entrada do escoamento	42
3.1.5 Relaminarização do escoamento	42
3.1.6 Cálculo da Vorticidade na Parede	43
3.1.7 Algoritmo Computacional	44
3.2 Teoria de Estabilidade Linear	45
3.2.1 Solução Numérica da Equação de Orr-Sommerfeld	45
3.2.2 Análise Espacial e Temporal de Instabilidades	47
4 Resultados	49
4.1 Verificação do Código LST	49
4.2 Estudo dos Parâmetros Adimensionais do Modelo Giesekus	51
4.2.1 escoamento Base	51
4.2.2 Análise de Estabilidade utilizando LST	56
4.3 Comparação LST e DNS	64

5	Conclusão	69
	Referências	73
A	Resolução da Equação de Orr-Sommerfeld para o fluido Giesekus	75

Introdução

Em muitas aplicações industriais os produtos estão relacionados diretamente com a dinâmica dos fluidos e se investe grande quantidade de recursos para desenvolver novas tecnologias nessa área. Dentre as aplicações o comportamento das propriedades reológicas de fluidos não-Newtonianos são de grande importância no processamento e fabricação de produtos poliméricos. Muitos materiais e formulações de uso comum exibem propriedades reológicas complexas, cuja viscosidade e viscoelasticidade podem variar dependendo das condições externas aplicadas. Cada vez mais os polímeros estão substituindo outros materiais, logo, é imprescindível que o produto polimérico apresente um desempenho mecânico satisfatório durante a vida útil projetada para uma determinada aplicação.

Dentre a classe dos fluidos não-Newtonianos estão os fluidos viscoelásticos, que são fluidos que obedecem a Lei de Hooke (lei da física relacionada à elasticidade de corpos) e também a lei de Newton para a viscosidade. Uma característica importante desses fluidos é que podem recuperar parte da deformação ao serem removidas as tensões aplicadas, quando ocorrem deformações durante o escoamento. Sendo assim, um fluido viscoelástico dissipa um pouco de energia e armazena o restante.

Um fluido viscoelástico não tem a forma padrão universalmente válida para cada fluido em todas as situações do escoamento. Esta realidade é uma das razões pelas quais o tema da viscoelasticidade é tão desafiador. Por tal motivo, o procedimento usual na escolha de equações constitutivas é buscar aquela equação que é mais adequada para a descrição do processo de interesse, bem como o conjunto de parâmetros que maximiza a adequação da equação escolhida ao tipo e condições de processo em estudo.

Os modelos viscoelásticos não lineares são complexos e tem grande aplicação na modelagem de escoamentos poliméricos por serem capazes de descrever os fenômenos não lineares e por este motivo vem sendo muito pesquisado nas últimas décadas. Entre os principais modelos viscoelásticos não lineares encontrados na literatura podem ser citados os modelos Oldroyd-B ([5],[24],[26],[27]), Giesekus [10], White-Metzner [40], PTT ([25],[27]), FENE [3], Leonov [18], Pom Pom [14], K-BKZ ([19],[20]), entre outros.

Com o passar do tempo, estudos sobre o comportamento dos fluidos foram mais elaborados devido a evolução da tecnologia para o auxílio das pesquisas e experiências tornando possível simular escoamentos de fluidos dentro de laboratórios para observar o comportamento de diferentes tipos de fluidos sobre diferentes situações, como por exemplo, escoamentos laminares (é um escoamento onde existe um mínimo de agitação das várias camadas do fluido), escoamentos turbulentos (é um escoamento de um fluido em que as partículas se misturam de forma não linear, isto é, de forma caótica com turbulência e redemoinhos, em oposição ao escoamento laminar), o fenômeno chamado de transição de escoamento laminar para turbulento, entre outros.

No final do século *XIX*, Reynolds estudou o escoamento dentro de tubos e investigou o fenômeno de transição de um escoamento laminar para um escoamento turbulento, e verificou que, de acordo com um parâmetro adimensional (mais tarde chamado de número de Reynolds), o escoamento poderia ser laminar ou turbulento. Com base nos estudos de Reynolds, Rayleigh verificou que a instabilidade de um escoamento está associada à existência de um ponto de inflexão no perfil de velocidade desse escoamento.

Os pesquisadores Orr e Sommerfeld, desenvolveram estudos independentes voltados a propagação de perturbações em uma camada limite ¹, e esses estudos deram origem à equação de Orr-Sommerfeld [29]. Posteriormente, Tollmien e Schlichting [30] demonstraram que essa equação possui perturbações instáveis sem que hajam pontos de inflexão, e as ondas que se propagam sobre a camada limite foram denominadas ondas de Tollmien-Schlichting.

A teoria de estabilidade hidrodinâmica tem como objetivo investigar se essas perturbações são amplificadas ou amortecidas, e qual a relação da evolução dessas perturbações com o fenômeno de transição para o escoamento turbulento. O desequilíbrio entre as forças de inércia e o campo de pressão pode levar a instabilidade se não houver efeitos viscosos dissipativos. Porém, a viscosidade também tem um efeito desestabilizador devido à difusão de quantidade de movimento.

Em geral, o aparecimento de instabilidades em escoamentos Newtonianos é uma consequência direta da presença do termo convectivo não linear na equação de quantidade de movimento, que tem a função de amplificar com o aumento do número de Reynolds. Entretanto, em escoamentos viscoelásticos as não linearidades entram não só através da convecção na equação de quantidade de movimento, mas também através da convecção na equação do tensor, oriunda da equação constitutiva. Assim, não é impossível imaginar que instabilidades viscoelásticas podem apresentar diferenças qualitativas daquelas correspondentes observadas com fluidos Newtonianos e/ou decorrem em condições para que esta última nunca teria sido observada, ou seja, instabilidades puramente elásticas.

Nos últimos anos, várias instabilidades puramente elásticas têm sido relatadas correspondendo a trabalhos experimentais ou teóricos através da análise de estabilidade linear ([16], [32],[15]). E, ainda, há muitos trabalhos de escoamentos em canais de fluidos viscoelásticos na literatura. Os escoamentos de Poiseuille e de Couette são geralmente utilizados como testes de *benchmark* para as novas equações constitutivas, havendo muito interesse em instabilidades nesse tipo de escoamentos viscoelásticos (ver [2], [38],[21],[9], [42], [35],[33]). No entanto, ainda hoje, o escoamento de Poiseuille não foi amplamente estudado, tendo algumas questões sem respostas, principalmente na área de estabilidade de fluidos viscoelásticos, despertando assim o interesse para o estudo desse problema para o fluido Giesekus.

A Teoria de Estabilidade Linear (LST, do inglês *Linear Stability Theory*), é suficientemente simples para ser realizada em várias geometrias e ainda eficiente para permitir uma investigação paramétrica sobre o limite de estabilidade em escoamento primário. Além disso, os autovetores críticos resolvidos podem ser usados para inferir a estrutura (padrões) do escoamento secundário após o início da instabilidade ([11],[12]).

O método da Simulação Numérica Direta (DNS, do inglês *Direct Numerical Simulation*) resolve as equações de Navier-Stokes diretamente em todas as escalas espaciais e temporais presentes no escoamento. A vantagem deste método é a possibilidade de se chegar mais próximo dos últimos estágios da transição, onde as interações não lineares são fortes, permitindo um estudo mais aprofundado dos processos que levam um escoamento à turbulência.

¹A camada limite é a camada de fluido nas imediações de uma superfície delimitadora, fazendo-se sentir os efeitos difusivos e a dissipação da energia mecânica.

A importância do projeto proposto está no desenvolvimento de um diagrama de curvas neutras de estabilidade para escoamentos viscoelásticos utilizando a Teoria de Estabilidade Linear e na avaliação de taxas de amplificação dos escoamentos viscoelásticos utilizando a Simulação Numérica Direta. A contribuição da pesquisa científica é inovadora, pois visa agregar conhecimentos e promover o aprimoramento científico e tecnológico de transição laminar-turbulenta, desenvolvimento de códigos e a construção de técnicas eficientes na simulação de escoamentos incompressíveis de fluidos viscoelásticos.

Além disso, até onde se tem conhecimento da literatura, não há resultados sobre curvas neutras de estabilidade utilizando o fluido viscoelástico Giesekus. Sendo assim, este trabalho vem contribuir com resultados atuais no sentido de disponibilizar uma ferramenta importante na verificação de estabilidade de escoamentos bidimensionais utilizando o fluido Giesekus.

Neste contexto, este trabalho tem como principal objetivo estudar o fenômeno de transição para a turbulência, do escoamento de Poiseuille incompressível, bidimensional, de um fluido viscoelástico, do tipo Giesekus. A investigação desse fenômeno é realizada através da análise da convecção de ondas de Tollmien-Schlichting para o escoamento considerado, utilizando as técnicas de Teoria de Estabilidade Linear e de Simulação Numérica Direta, a fim de analisar a estabilidade do escoamento do fluido viscoelástico do tipo Giesekus e comparar com a de fluidos Newtonianos.

O trabalho está organizado da seguinte forma:

No capítulo 2 são apresentadas as equações governantes para escoamentos bidimensionais, incompressíveis, isotérmicos, de um fluido Newtoniano e não-Newtoniano. A equação considerada no escoamento viscoelástico é a equação constitutiva do tipo Giesekus. Todas essas equações estão apresentadas nas formas dimensional e adimensional. Neste mesmo capítulo, são apresentadas as equações utilizadas na formulação vorticidade-velocidade utilizada na simulação numérica direta, bem como a dedução da equação de Orr-Sommerfeld modificada para um fluido viscoelástico e as equações utilizadas na teoria de estabilidade linear.

Em seguida, no capítulo 3 são apresentados os métodos numéricos que são utilizados para a solução das equações governantes obtidas utilizando a simulação numérica direta e a teoria de estabilidade linear.

No capítulo 4 são apresentados os resultados numéricos obtidos utilizando a teoria de estabilidade linear, como a verificação da implementação das equações de estabilidade utilizando resultados já verificados para o modelo Oldroyd-B, a apresentação de curvas neutras de estabilidade para o modelo Giesekus e, também, a comparação entre os resultados obtidos pelas técnicas LST e DNS.

E, por fim, são apresentadas as conclusões do trabalho, assim como as perspectivas de continuidade da pesquisa.

Formulação Matemática

Neste capítulo são apresentadas as equações governantes para escoamentos incompressíveis e isotérmicos para fluidos Newtoniano e não-Newtoniano. Também são apresentadas as equações presentes na formulação vorticidade-velocidade, utilizada na Simulação Numérica Direta, e ainda, a dedução da equação de Orr-Sommerfeld para um fluido viscoelástico utilizando a Teoria de Estabilidade Linear. A equação que modela o fluido viscoelástico considerada é a equação constitutiva Giesekus.

2.1 Equações Governantes

As equações que modelam escoamentos incompressíveis e isotérmicos são as equações da continuidade (conservação de massa) e a conservação de momento (quantidade de movimento), que são dadas da seguinte forma:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \right] = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.2)$$

onde \mathbf{u} é o vetor velocidade, t é o tempo, ρ é a densidade do fluido e $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor tensão total, definido por

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}, \quad (2.3)$$

em que p é a pressão, \mathbf{I} é o tensor identidade e $\boldsymbol{\tau}$ o tensor simétrico das tensões, determinado a partir da equação constitutiva do fluido considerado. No caso bidimensional, $\mathbf{u} = [u \ v]^\top$ representa as componentes da velocidade nas direções x e y , respectivamente, e o tensor simétrico das tensões é definido por $\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau^{xx} & \tau^{xy} \\ \tau^{xy} & \tau^{yy} \end{bmatrix}$.

2.1.1 Modelos Newtoniano e Não-Newtoniano

Algumas características dos fluidos relacionadas com as suas propriedades físicas servem para classificá-los como Newtoniano e não-Newtoniano. Essas características influenciam alguns fatores relevantes em um escoamento, como por exemplo, o fluxo do material, a taxa de deformação e etc.

Em modelos de fluidos Newtonianos, o tensor simétrico das tensões é linearmente proporcional ao tensor taxa de deformação (chama-se Newtoniano pois essa proporção é conhecida como lei de Newton para a viscosidade), que é dado por

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_s \mathbf{D}, \quad (2.4)$$

em que η_s é a viscosidade dinâmica do fluido e \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação, escrito por

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top). \quad (2.5)$$

No caso bidimensional, pode-se escrever da seguinte forma

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Calculando o divergente da equação (2.3) para um fluido Newtoniano, tem-se que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}) = \nabla \cdot (2\eta_s \mathbf{D} - p\mathbf{I}) = 2\eta_s \nabla \cdot \mathbf{D} - \nabla \cdot p\mathbf{I} = \\ &= 2\eta_s \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} = \\ &= \eta_s \left[2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \end{bmatrix} = \\ &= \eta_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, em coordenadas cartesianas bidimensionais, as equações da continuidade (2.1) e a da quantidade de movimento (2.2), para um fluido Newtoniano, tornam-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.7)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right], \quad (2.8)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]. \quad (2.9)$$

Os fluidos que não apresentam uma linearidade entre a taxa de deformação e a tensão de cisalhamento são chamados de fluidos não-Newtonianos. O valor da viscosidade dinâmica não é constante, ou seja, varia de acordo com a taxa de deformação aplicada.

No modelo de fluido não-Newtoniano para um fluido viscoelástico, o tensor das tensões é definido pela soma da contribuição Newtoniana (viscosa) e da contribuição não-Newtoniana (elástica), ou seja,

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_s \mathbf{D} + \mathbf{T}, \quad (2.10)$$

onde η_s é a viscosidade do solvente Newtoniano, \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação definido em (2.5), \mathbf{T} é o tensor extra-tensão (simétrico) que representa a contribuição não-Newtoniana (polimérica), dado por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix}.$$

Logo, calculando o divergente do tensor tensão total (2.3) para um fluido não-Newtoniano, tem-se

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}) = \nabla \cdot (2\eta_s \mathbf{D} + \mathbf{T} - p\mathbf{I}) = 2\eta_s \nabla \cdot \mathbf{D} + \nabla \cdot \mathbf{T} - \nabla \cdot p\mathbf{I} = \\ &= 2\eta_s \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix} + \\ &- \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} = \eta_s \left[2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \\ &\quad + \begin{bmatrix} \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} & \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \end{bmatrix} = \\ &= \eta_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \begin{bmatrix} \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} & \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, em coordenadas cartesianas, as equações de continuidade (2.1) e de quantidade de movimento (2.2), para um fluido não-Newtoniano se tornam

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.11)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y}, \quad (2.12)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y}. \quad (2.13)$$

2.2 Modelo Giesekus

Neste trabalho é utilizada a equação constitutiva do modelo Giesekus [10] que é escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{T} + \lambda_p \overset{\nabla}{\mathbf{T}} + \alpha_G \frac{\lambda_p}{\eta_p} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) = 2\eta_p \mathbf{D}, \quad (2.14)$$

onde η_p é o coeficiente de viscosidade polimérica e λ_p é o tempo de relaxação do fluido. A constante α_G representa o parâmetro de mobilidade que regula o comportamento “shear thinning” (decréscimo da viscosidade com o aumento de uma pressão exercida, exemplo, creme dental) do fluido ($0 \leq \alpha_G \leq 1$), $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}$ denota o produto tensorial, $\overset{\nabla}{\mathbf{T}}$ é a derivada convectada dada por

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \frac{D\mathbf{T}}{Dt} - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^\top - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T}, \quad (2.15)$$

em que $\frac{D\mathbf{T}}{Dt}$ é a derivada material de \mathbf{T} , que pode ser descrita por

$$\frac{D\mathbf{T}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{T}). \quad (2.16)$$

Reescrevendo a equação (2.14) em coordenadas cartesianas bidimensionais, tem-se

$$\mathbf{T} + \lambda_p \overset{\nabla}{\mathbf{T}} + \alpha_G \frac{\lambda_p}{\eta_p} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) = 2\eta_p \mathbf{D},$$

$$\mathbf{T} + \lambda_p \left[\frac{D\mathbf{T}}{Dt} - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^\top - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T} \right] + \alpha_G \frac{\lambda_p}{\eta_p} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) = 2\eta_p \mathbf{D},$$

$$\mathbf{T} + \lambda_p \left[\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{T}) - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^\top - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T} \right] + \alpha_G \frac{\lambda_p}{\eta_p} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) = 2\eta_p \mathbf{D}.$$

Após manipulações algébricas são obtidas as equações dos tensores não-Newtonianos para o modelo Giesekus

$$\begin{aligned} T^{xx} + \lambda_p \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ + \alpha_G \frac{\lambda_p}{\eta_p} (T^{xx^2} + T^{xy^2}) = 2\eta_p \frac{\partial u}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} T^{xy} + \lambda_p \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ + \alpha_G \frac{\lambda_p}{\eta_p} (T^{xy}(T^{xx} + T^{yy})) = \eta_p \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} T^{yy} + \lambda_p \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ + \alpha_G \frac{\lambda_p}{\eta_p} (T^{xy^2} + T^{yy^2}) = 2\eta_p \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Vale ressaltar que, se o termo α_G na equação (2.14) for igual a zero, este modelo reduz-se ao modelo de fluido viscoelástico do tipo Oldroyd-B [5].

2.3 Adimensionalização

Uma maneira comum de tratar um problema em mecânica dos fluidos computacional é a utilização das equações que modelam esse problema de forma adimensional. Este tratamento possibilita mostrar os efeitos físicos além de ser possível formular o modelo para o problema independente do sistema de unidades de medidas. Utilizando esse tratamento, surgem algumas constantes adimensionais conhecidas na literatura, como por exemplo, número de Reynolds, número de Weissenberg, constante β , entre outros [8].

Considerando as seguintes mudanças de variáveis abaixo nas equações governantes

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad t^* = \frac{tU}{L}, \quad \mathbf{p}^* = \frac{\mathbf{p}}{\rho U^2}, \quad \mathbf{T}^* = \frac{\mathbf{T}}{\rho U^2}, \quad (2.20)$$

onde L representa o comprimento do canal, U a velocidade e ρ a densidade, aparecem os números adimensionais:

- Número de Reynolds (Re): Representa a razão entre as forças inercias e as forças viscosas do escoamento e é definido por

$$Re = \frac{\rho UL}{\eta_0}, \quad (2.21)$$

onde η_0 é a viscosidade total do fluido, dada por $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$, sendo que η_s é a viscosidade do solvente e η_p a viscosidade do polímero.

- Número de Weissenberg (Wi): Para um fluido viscoelástico, é a razão entre uma escala de tempo característica do fluido e uma escala de tempo do escoamento,

$$Wi = \frac{\lambda_p U}{L}. \quad (2.22)$$

- Constante β : A constante $\beta \in (0, 1)$ é uma quantidade que controla a contribuição do solvente Newtoniano, definida por

$$\beta = \frac{\eta_s}{\eta_0}. \quad (2.23)$$

A dedução das equações de conservação e dos tensores não-Newtonianos na sua forma adimensional é realizada substituindo as variáveis adimensionais 2.20 e manipulando os termos algebricamente.

Para a obtenção da equação da continuidade em sua forma adimensional, realiza-se as seguintes manipulações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial(Uu^*)}{\partial(Lx^*)} + \frac{\partial(Uv^*)}{\partial(Ly^*)} = 0 \Rightarrow \overbrace{\frac{U}{L}}^{\neq 0} \left[\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right] = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Para obtenção da equação de quantidade de movimento na direção x , em sua forma adimensional, realiza-se as seguintes manipulações:

$$\begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right] &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y}, \\ \Rightarrow \rho \left[\frac{\partial(Uu^*)}{\partial(\frac{L}{U}t^*)} + \frac{\partial(U^2 u^* u^*)}{\partial(Lx^*)} + \frac{\partial(U^2 u^* v^*)}{\partial(Ly^*)} \right] &= -\frac{\partial(\rho U^2 p^*)}{\partial(Lx^*)} + \\ + \eta_s \left[\frac{\partial^2(Uu^*)}{\partial(Lx^*)^2} + \frac{\partial^2(Uu^*)}{\partial(Ly^*)^2} \right] + \frac{\partial(\rho U^2 T^*)^{xx}}{\partial(Lx^*)} + \frac{\partial(\rho U^2 T^*)^{xy}}{\partial(Ly^*)}. \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados da equação pelo termo $\frac{\rho U^2}{L}$, tem-se

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(u^* u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(u^* v^*)}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \overbrace{\frac{\eta_s}{\rho UL}}^{\circledast} \left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right] + \frac{\partial T^{*xx}}{\partial x^*} + \frac{\partial T^{*xy}}{\partial y^*}.$$

Aplicando as seguintes manipulações ao termo \circledast nota-se que

$$\circledast \frac{\eta_s}{\rho UL} = \frac{\eta_0 - \eta_p}{\rho UL} = \frac{1}{Re} - \frac{\eta_p}{\rho UL} = \frac{1}{Re} - \frac{\eta_0 - \eta_s}{\rho UL} = \frac{1}{Re} - \frac{1 - \frac{\eta_s}{\eta_0}}{\frac{\rho UL}{\eta_0}} = \frac{1}{Re} - \frac{1 - \beta}{Re} = \frac{\beta}{Re}.$$

Observe que a notação (*) nas variáveis adimensionais é omitida por questão de simplicidade, visto que as constantes adimensionais denotam que a equação está em sua forma adimensional. Então, a equação de quantidade de movimento na direção x em sua forma adimensional é escrita por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y}. \quad (2.25)$$

De forma análoga, é obtida a equação de quantidade de movimento na direção y , em sua forma adimensional

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y}. \quad (2.26)$$

Para obter as equações dos tensores não-Newtonianos em sua forma adimensional, realiza-se as seguintes manipulações:

$$\begin{aligned} & T^{xx} + \lambda_p \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ & \quad + \alpha_G \frac{\lambda_p}{\eta_p} ((T^{xx})^2 + (T^{xy})^2) = 2\eta_p \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \Rightarrow & \rho U^2 T^{*xx} + \lambda_p \left(\frac{\partial(\rho U^2 T^{*xx})}{\partial(\frac{L}{U}t^*)} + \frac{\partial(Uu^* \rho U^2 T^{*xx})}{\partial Lx^*} + \frac{\partial(Uv^* \rho U^2 T^{*xx})}{\partial Ly^*} - 2\rho U^2 T^{*xx} \frac{\partial Uu^*}{\partial Lx^*} + \right. \\ & \quad \left. - 2\rho U^2 T^{*xy} \frac{\partial Uu^*}{\partial Ly^*} \right) + \alpha_G \frac{\lambda_p}{\eta_p} ((\rho U^2 T^{*xx})^2 + (\rho U^2 T^{*xy})^2) = 2\eta_p \frac{\partial(Uu^*)}{\partial(Lx^*)}, \\ \Rightarrow & \rho U^2 T^{*xx} + \frac{\lambda_p \rho U^3}{L} \left(\frac{\partial T^{*xx}}{\partial t^*} + \frac{\partial(u^* T^{*xx})}{\partial x^*} + \frac{\partial(v^* T^{*xx})}{\partial y^*} - 2T^{*xx} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - 2T^{*xy} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) + \\ & \quad + \frac{\alpha_G \lambda_p}{\eta_p} \rho^2 U^4 (T^{*xx^2} + T^{*xy^2}) = 2\frac{\eta_p U}{L} \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}$$

Dividindo todos os termos da equação pelo termo ρU^2 , tem-se

$$\begin{aligned} & T^{*xx} + \frac{\lambda_p U}{L} \left(\frac{\partial T^{*xx}}{\partial t^*} + \frac{\partial(u^* T^{*xx})}{\partial x^*} + \frac{\partial(v^* T^{*xx})}{\partial y^*} - 2T^{*xx} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - 2T^{*xy} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) + \\ & \quad + \frac{\alpha_G \lambda_p \rho U^2}{\eta_p} (T^{*xx^2} + T^{*xy^2}) = 2\frac{\eta_p}{\rho UL} \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}$$

Considerando o termo \circledast , apresentam-se as seguintes manipulações:

$$\frac{\alpha_G \lambda_p \rho U^2}{\eta_p} = \frac{\alpha_G LWiU\rho}{\eta_p} = \frac{\alpha_G Wi(LU\rho)}{\eta_0 - \eta_s} = \frac{\alpha_G Wi(LU\rho) \frac{1}{\eta_0}}{1 - \frac{\eta_s}{\eta_0}} = \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta}.$$

Substituindo esta manipulação, juntamente com as considerações utilizadas para as equações de Navier-Stokes, obtém-se a equação do tensor T^{xx} , em sua forma adimensional

$$T^{xx} + Wi \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} (T^{xx^2} + T^{xy^2}) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.27)$$

Procedendo de forma análoga, são obtidas as equações dos tensores não-Newtonianos T^{xy} e T^{yy} , em sua forma adimensional

$$T^{xy} + Wi \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} (T^{xy}(T^{xx} + T^{yy})) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.28)$$

$$T^{yy} + Wi \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} (T^{xy^2} + T^{yy^2}) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.29)$$

As equações (2.24)–(2.29) modelam um escoamento incompressível, isotérmico e bidimensional, para um fluido viscoelástico utilizando o modelo Giesekus em qualquer regime do escoamento.

2.4 Simulação Numérica Direta

A Simulação Numérica Direta resolve as equações de Navier-Stokes empregando esquemas de diferenças finitas de alta ordem, em que todas as escalas do escoamento são simuladas. A principal restrição desta técnica está relacionada com seu custo computacional, por isso, no Capítulo 3 são descritos métodos eficientes que são utilizados para resolver o problema usando esta formulação.

Com o intuito de simplificar o problema e eliminar o tratamento da pressão nas equações de quantidade de movimento, opta-se pela formulação vorticidade-velocidade. Definindo a vorticidade ω_z bidimensional como

$$\omega_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.30)$$

e derivando esta equação em relação a x , obtém-se

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\overbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}^{\otimes} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

onde \otimes da equação (2.1), tem-se $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$.

Assim, é obtida a equação de Poisson para a componente v da velocidade

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial(\omega_z)}{\partial x}. \quad (2.31)$$

Para obter a equação de transporte de vorticidade bidimensional, realiza-se as seguintes manipulações

$$\frac{\partial}{\partial x}(2.26) - \frac{\partial}{\partial y}(2.25),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(vv)}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right] + \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^{yy}}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2(uu)}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right] + \frac{\partial^2 T^{xx}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial y^2}.$$

Subtraindo as equações, obtém-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(vv)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2(uu)}{\partial y \partial x} = \\ & = \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right] + \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T^{yy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 T^{xx}}{\partial y \partial x}. \end{aligned}$$

Simplificando as derivadas, é obtida a equação de transporte de vorticidade bidimensional

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T^{yy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 T^{xx}}{\partial y \partial x}. \quad (2.32)$$

O seguinte sistema de equações adimensionais é considerado neste trabalho

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial(\omega_z)}{\partial x}, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T^{yy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 T^{xx}}{\partial y \partial x}, \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} T^{xx} + Wi \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} (T^{xx^2} + T^{xy^2}) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial u}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} T^{xy} + Wi \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} (T^{xy}(T^{xx} + T^{yy})) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} T^{yy} + Wi \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\alpha_G Wi Re}{1 - \beta} (T^{xy^2} + T^{yy^2}) = 2 \frac{(1 - \beta)}{Re} \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Neste trabalho é considerado o problema do escoamento de Poiseuille plano não-Newtoniano, em que é necessário empregar três tipos de condições de contorno: condição de entrada de fluido no domínio de solução (inflow), condição de saída de fluido do domínio de solução (outflow) e condição sobre uma superfície rígida (parede sólida).

- Entrada de fluido (*Inflow*): A posição do contorno de entrada é estabelecida, a velocidade tangencial (v) no contorno é considerada nula e a velocidade normal (u) é prescrita

$$u = U(y) \quad \text{e} \quad v = 0. \quad (2.39)$$

A contribuição não-Newtoniana \mathbf{T} é determinada considerando que o fluido não recebe interferência desta propriedade:

$$\mathbf{T} = \mathbf{0}. \quad (2.40)$$

- Parede (fronteira sólida): Nestes tipos de contornos, é comum considerar a condição de não-escorregamento e impermeabilidade, que é considerada como

$$u = 0 \quad \text{e} \quad v = 0. \quad (2.41)$$

- Saída de fluido (*Outflow*): Considera-se a condição de Neumann homogênea na direção normal à fronteira (direção x), para a velocidade e também para a contribuição não-Newtoniana, como segue

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{T}}{\partial x^2} = \mathbf{0}. \quad (2.42)$$

2.5 Teoria de Estabilidade Linear

Nesta seção é apresentada a análise de estabilidade linear para escoamentos de fluidos viscoelásticos, utilizando a equação constitutiva do tipo Giesekus. O objetivo é deduzir a equação de Orr-Sommerfeld para um fluido viscoelástico do tipo Giesekus e estudar sua solução numérica.

O primeiro passo é assumir que o escoamento principal (base) é invariante na direção x , ou seja,

$$\begin{aligned} u &= U(y), \\ v &= 0, \\ p &= P(x, y), \\ T &= \hat{T}(y). \end{aligned}$$

Considerando que o escoamento instantâneo pode ser decomposto em um escoamento principal (base) mais um escoamento perturbado, as variáveis dependentes podem ser decompostas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= U(y) + \tilde{u}(x, y, t), \\ v(x, y, t) &= \tilde{v}(x, y, t), \\ p(x, y, t) &= P(x, y) + \tilde{p}(x, y, t), \\ T(x, y, t) &= \hat{T}(y) + \tilde{T}(x, y, t). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Substituindo essas variáveis decompostas nas equações de continuidade, de Navier-Stokes e dos tensores não-Newtonianos, são obtidas as equações para as perturbações. Pode-se observar que, por hipótese, o escoamento principal (base) é solução das equações de Navier-Stokes, então as perturbações também devem satisfazer esse sistema de equações.

Continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(U(y) + \tilde{u}(x, y, t))}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v}(x, y, t))}{\partial y} = \overbrace{\frac{\partial U(x, y, t)}{\partial x}}^{=0} + \frac{\partial \tilde{u}(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}(x, y, t)}{\partial y} = 0.$$

Logo,

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0. \quad (2.44)$$

Equação da quantidade de movimento na direção x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y}.$$

Substituindo as variáveis (2.43) nessa equação, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(U(y) + \tilde{u}(x, y, t))}{\partial t} + \frac{\partial((U(y) + \tilde{u}(x, y, t))(U(y) + \tilde{u}(x, y, t)))}{\partial x} + \\ & + \frac{\partial((U(y) + \tilde{u}(x, y, t))\tilde{v}(x, y, t))}{\partial y} = -\frac{\partial(P(x, y) + \tilde{p}(x, y, t))}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2(U(y) + \tilde{u}(x, y, t))}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2(U(y) + \tilde{u}(x, y, t))}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial(\hat{T}^{xx}(y) + \tilde{T}^{xx}(x, y, t))}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{T}^{xy}(y) + \tilde{T}^{xy}(x, y, t))}{\partial y}. \end{aligned}$$

Ou, simplificando, torna-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U(y)}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \frac{\partial(U(y)U(y))}{\partial x} + \frac{\partial(U(y)\tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{u}U(y))}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{u}\tilde{u})}{\partial x} + \frac{\partial(U(y)\tilde{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\tilde{u}\tilde{v})}{\partial y} = \\ & = -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2(U(y))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \hat{T}^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{T}^{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial y}. \end{aligned}$$

Usando a hipótese de que o escoamento base satisfaz as equações de Navier-Stokes, é obtida a equação de quantidade de movimento em x perturbada:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial U}{\partial y} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial y}.$$

Equação da quantidade de movimento na direção y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y}.$$

Substituindo as variáveis (2.43) nessa equação, tem-se

$$\frac{\partial(\tilde{v}(x, y, t))}{\partial t} + \frac{\partial((U(y) + \tilde{u}(x, y, t))\tilde{v}(x, y, t))}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v}(x, y, t)\tilde{v}(x, y, t))}{\partial y} =$$

$$= -\frac{\partial(P(x, y) + \tilde{p}(x, y, t))}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2(\tilde{v}(x, y, t))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\tilde{v}(x, y, t))}{\partial y^2} \right) + \\ + \frac{\partial(\hat{T}^{xy}(y) + \tilde{T}^{xy}(x, y, t))}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{T}^{yy}(y) + \tilde{T}^{yy}(x, y, t))}{\partial y}.$$

Ou, simplificando, torna-se

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{\partial(U(y)\tilde{v}(x, y, t))}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{u}\tilde{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v}\tilde{v})}{\partial y} = \\ = -\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \hat{T}^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{T}^{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial y}.$$

Usando a hipótese de que o escoamento base satisfaz as equações de Navier-Stokes, é obtida a equação de quantidade de movimento em y perturbada:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial y}.$$

Os termos que estão entre colchetes nas equações da quantidade de movimento na direção x e na direção y perturbadas são os termos não lineares. Usando a hipótese de Schlichting [30], que afirma que as perturbações devem ser pequenas no sentido de que os termos não lineares possam ser desprezados quando comparados com os termos lineares, assume-se que as amplitudes das perturbações são pequenas, logo esses termos não lineares podem ser desprezados, fornecendo assim, um sistema simplificado para o escoamento perturbado:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0, \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial y}, \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial y}. \quad (2.47)$$

Equação do tensor não-Newtoniano T^{xx} :

$$T^{xx} + Wi \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} (T^{xx^2} + T^{xy^2}) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Substituindo as variáveis (2.43) nessa equação, tem-se

$$(\hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx}) + Wi \left(\frac{\partial(\hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx})}{\partial t} + \frac{\partial((U + \tilde{u})(\hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx}))}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v}(\hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx}))}{\partial y} + \right. \\ \left. - 2(\hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx}) \frac{\partial(U + \tilde{u})}{\partial x} - 2(\hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx}) \frac{\partial(U + \tilde{u})}{\partial y} \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \left((\hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx})^2 + \right. \\ \left. + (\hat{T}^{xy} + \tilde{T}^{xy})^2 \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial(U + \tilde{u})}{\partial x},$$

$$\begin{aligned}
& \hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx} + Wi \left(\frac{\partial \hat{T}^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(U\hat{T}^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{u}\hat{T}^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(U\tilde{T}^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{u}\tilde{T}^{xx})}{\partial x} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial(\tilde{v}\hat{T}^{xx})}{\partial y} + \frac{\partial(\tilde{v}\tilde{T}^{xx})}{\partial y} - 2\hat{T}^{xx} \frac{\partial U}{\partial x} - 2\hat{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - 2\tilde{T}^{xx} \frac{\partial U}{\partial x} - 2\tilde{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + -2\hat{T}^{xy} \frac{\partial U}{\partial y} + \right. \\
& \left. -2\hat{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial U}{\partial y} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \left(\hat{T}^{xx^2} + 2\hat{T}^{xx}\tilde{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx^2} + \hat{T}^{xy^2} + \right. \\
& \left. + 2\hat{T}^{xy}\tilde{T}^{xy} + \tilde{T}^{xy^2} \right) = \frac{2(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right).
\end{aligned}$$

Usando a hipótese de que o escoamento base satisfaz as equações de Navier-Stokes e também, as equações dos tensores para o escoamento base, então, é obtida a equação do tensor T^{xx} perturbada:

$$\begin{aligned}
& \tilde{T}^{xx} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial y} - 2\hat{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - 2\hat{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial U}{\partial y} + \right. \\
& \left. + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial y} - 2\tilde{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \left(2\hat{T}^{xx}\tilde{T}^{xx} + 2\hat{T}^{xy}\tilde{T}^{xy} + \right. \\
& \left. + [\tilde{T}^{xx^2} + \tilde{T}^{xy^2}] \right) = \frac{2(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Equação do tensor não-Newtoniano T^{xy} :

$$\begin{aligned}
& T^{xy} + Wi \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} (T^{xy}(T^{xx} + T^{yy})) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).
\end{aligned}$$

Substituindo as variáveis (2.43) nessa equação, tem-se

$$\begin{aligned}
& (\hat{T}^{xy} + \tilde{T}^{xy}) + Wi \left(\frac{\partial(\hat{T}^{xy} + \tilde{T}^{xy})}{\partial t} + \frac{((U + \tilde{u})(\hat{T}^{xy} + \tilde{T}^{xy}))}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v}(\hat{T}^{xy} + \tilde{T}^{xy}))}{\partial y} + \right. \\
& \left. -(\hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - (\hat{T}^{yy} + \tilde{T}^{yy}) \frac{\partial(U + \tilde{u})}{\partial y} \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \left((\hat{T}^{xy} + \tilde{T}^{xy}) \left(\hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \hat{T}^{yy} + \tilde{T}^{yy} \right) \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial(U + \tilde{u})}{\partial y} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \hat{T}^{xy} + \tilde{T}^{xy} + Wi \left(\frac{\partial \hat{T}^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(U\hat{T}^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{u}\hat{T}^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(U\tilde{T}^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{u}\tilde{T}^{xy})}{\partial x} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial(\tilde{v}\hat{T}^{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\tilde{v}\tilde{T}^{xy})}{\partial y} - \hat{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \tilde{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \hat{T}^{yy} \frac{\partial U}{\partial y} - \hat{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \tilde{T}^{yy} \frac{\partial U}{\partial y} - \tilde{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \left(\hat{T}^{xy} \left(\hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx} + \hat{T}^{yy} + \tilde{T}^{yy} \right) + \tilde{T}^{xy} \left(\hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx} + \hat{T}^{yy} + \tilde{T}^{yy} \right) \right) = \\
& = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right).
\end{aligned}$$

Usando a hipótese de que o escoamento base satisfaz as equações de Navier-Stokes e também, as equações dos tensores para o escoamento base, é obtida a equação do tensor T^{xy} perturbada:

$$\begin{aligned}
& \tilde{T}^{xy} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \hat{T}^{xy}}{\partial y} - \hat{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \hat{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \tilde{T}^{yy} \frac{\partial U}{\partial y} + \right. \\
& \left. + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial y} - \tilde{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \tilde{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \left(\hat{T}^{xy} (\tilde{T}^{xx} + \tilde{T}^{yy}) + \tilde{T}^{xy} (\hat{T}^{xx} + \hat{T}^{yy}) + \right. \\
& \left. + [\tilde{T}^{xy} (\tilde{T}^{xx} + \tilde{T}^{yy})] \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right).
\end{aligned}$$

Equação do tensor não-Newtoniano T^{yy} :

$$\begin{aligned}
& T^{yy} + Wi \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial (uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial (vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \left(T^{xy^2} + T^{yy^2} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial v}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Substituindo as variáveis (2.43) nessa equação, e usando a hipótese de que o escoamento base satisfaz as equações de Navier-Stokes e também dos tensores, é obtida de forma análoga a equação do tensor T^{yy} perturbada:

$$\begin{aligned}
& \tilde{T}^{yy} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \hat{T}^{yy}}{\partial y} - 2\hat{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - 2\hat{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \right. \\
& \left. + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial y} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - 2\tilde{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right] \right) + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \left(2\hat{T}^{xy} \tilde{T}^{xy} + 2\hat{T}^{yy} \tilde{T}^{yy} + \right. \\
& \left. + [\tilde{T}^{xy^2} + \tilde{T}^{yy^2}] \right) = \frac{2(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Os termos entre colchetes do lado esquerdo das equações dos tensores T^{xx} , T^{xy} e T^{yy} perturbadas, são os termos não lineares dessas equações. Assumindo que as amplitudes das perturbações são pequenas, esses termos não lineares podem ser desprezados, fornecendo assim, um sistema simplificado de equações para os tensores não-Newtonianos perturbados:

$$\begin{aligned}
& \tilde{T}^{xx} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \hat{T}^{xx}}{\partial y} - 2\hat{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - 2\hat{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \left(2\hat{T}^{xx} \tilde{T}^{xx} + 2\hat{T}^{xy} \tilde{T}^{xy} \right) = \frac{2(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}, \quad (2.48) \\
& \tilde{T}^{xy} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \hat{T}^{xy}}{\partial y} - \hat{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \hat{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \tilde{T}^{yy} \frac{\partial U(y)}{\partial y} \right) +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \left(\hat{T}^{xy} (\tilde{T}^{xx} + \tilde{T}^{yy}) + \tilde{T}^{xy} (\hat{T}^{xx} + \hat{T}^{yy}) \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right), \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{yy} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial y} - 2\hat{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - 2\hat{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \left(2\hat{T}^{xy} \tilde{T}^{xy} + 2\hat{T}^{yy} \tilde{T}^{yy} \right) = \frac{2(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

As condições de contorno adotadas para o problema de Poiseuille não-Newtoniano são

$$\tilde{u} = \tilde{v} = 0 \quad \text{para} \quad y = -1 \quad \text{e} \quad y = 1, \quad (2.51)$$

que correspondem à condição de não escorregamento na parede (no-slip).

Como as equações resultantes são lineares e os seus coeficientes não dependem de x e t , então, pode-se buscar soluções utilizando algum método para este tipo de equação, como por exemplo, o método de separação de variáveis, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y, t) &= \frac{1}{2} [\bar{u}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + \overbrace{\bar{u}(y)^* e^{i(\omega t - \alpha x)}}^{cc}], \\ \tilde{v}(x, y, t) &= \frac{1}{2} [\bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + \bar{v}(y)^* e^{i(\omega t - \alpha x)}], \\ \tilde{p}(x, y, t) &= \frac{1}{2} [\bar{p}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + \bar{p}(y)^* e^{i(\omega t - \alpha x)}], \\ \tilde{T}(x, y, t) &= \frac{1}{2} [\bar{T}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + \bar{T}(y)^* e^{i(\omega t - \alpha x)}], \end{aligned} \quad (2.52)$$

onde $i = \sqrt{-1}$. Estas equações indicam que as perturbações se propagam como ondas com frequência ω , comprimento de onda $\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$, velocidade de onda $c = \frac{\omega}{\alpha}$, em que α é o número de onda na direção x e $\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}$ e \bar{T} as amplitudes das perturbações.

Pode-se observar que, somar um número complexo com o seu complexo conjugado (cc), é o mesmo que procurar o valor da variável em questão apenas no domínio real. Na prática, resolve-se as equações perturbadas complexas, para encontrar o valor de α, ω e \bar{u} , por isso, o complexo conjugado é desprezado ao efetuar as substituições das variáveis nas equações perturbadas.

Substituindo as variáveis 2.52 nas equações de Navier-Stokes perturbadas, é obtido um novo sistema de equações, como apresentado a seguir. Observa-se que as equações perturbadas estão representadas por derivadas parciais, porém, após algumas substituições os termos das equações dependem unicamente de uma variável, então, simplifica-se as derivadas parciais por derivadas ordinárias.

Equação da Continuidade perturbada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} &= 0, \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \bar{u}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right) &= \frac{1}{2} \bar{u}(y) i \alpha e^{i(\alpha x - \omega t)} + \frac{1}{2} e^{i(\alpha x - \omega t)} \frac{d\bar{v}(y)}{dy} = 0, \\ \Rightarrow \frac{1}{2} e^{i(\alpha x - \omega t)} \left[i \alpha \bar{u}(y) + \frac{d\bar{v}(y)}{dy} \right] &= 0, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow i\alpha\bar{u}(y) + \frac{d\bar{v}(y)}{dy} = 0.$$

Equação da Quantidade de Movimento na direção x perturbada:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial y}, \\ \Rightarrow & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \bar{u}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right) + U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \bar{u}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right) + \left(\frac{1}{2} \bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right) \frac{\partial U}{\partial y} = \\ & = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \bar{p}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right) + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{2} \bar{u}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{2} \bar{u}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right) \right] + \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \bar{T}^{xx}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \bar{T}^{xy}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right), \\ \Rightarrow & -i\omega \bar{u}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + i\alpha \bar{u}(y) U e^{i(\alpha x - \omega t)} + \bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \frac{dU}{dy} = -i\alpha \bar{p}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + \\ & + \frac{\beta}{Re} \left[-\alpha^2 \bar{u}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + e^{i(\alpha x - \omega t)} \frac{d^2 \bar{u}(y)}{dy^2} \right] + i\alpha \bar{T}^{xx}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + e^{i(\alpha x - \omega t)} \frac{d\bar{T}^{xy}(y)}{dy}, \\ -i\omega \bar{u}(y) + i\alpha \bar{u}(y) U + \bar{v}(y) \frac{dU}{dy} & = -i\alpha \bar{p}(y) + \frac{\beta}{Re} \left[-\alpha^2 \bar{u}(y) + \frac{d^2 \bar{u}(y)}{dy^2} \right] + i\alpha \bar{T}^{xx}(y) + \frac{d\bar{T}^{xy}(y)}{dy}. \end{aligned}$$

Substituindo ω por $c\alpha$, é obtida a equação de quantidade de movimento na direção x , da seguinte forma:

$$i\alpha(U - c)\bar{u} + \bar{v} \frac{dU}{dy} + i\alpha \bar{p} - i\alpha \bar{T}^{xx} - \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} = \frac{\beta}{Re} \left(\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} - \alpha^2 \bar{u} \right).$$

Equação da Quantidade de Movimento na direção y perturbada:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial y}, \\ \Rightarrow & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right) + U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \bar{p}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right) + \\ & + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{2} \bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{2} \bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \bar{T}^{xy}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \bar{T}^{yy}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right), \\ \Rightarrow & -i\omega \bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + i\alpha \bar{v}(y) U e^{i(\alpha x - \omega t)} = -e^{i(\alpha x - \omega t)} \frac{d\bar{p}(y)}{dy} + \frac{\beta}{Re} \left[-\alpha^2 \bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + \right. \\ & \quad \left. + e^{i(\alpha x - \omega t)} \frac{d^2 \bar{v}(y)}{dy^2} \right] + i\alpha \bar{T}^{xy}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + e^{i(\alpha x - \omega t)} \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy}, \\ \Rightarrow & -i\omega \bar{v}(y) + i\alpha \bar{v}(y) U = -\frac{d\bar{p}(y)}{dy} + \frac{\beta}{Re} \left[-\alpha^2 \bar{v}(y) + \frac{d^2 \bar{v}(y)}{dy^2} \right] + i\alpha \bar{T}^{xy}(y) + \frac{d\bar{T}^{yy}(y)}{dy}. \end{aligned}$$

Substituindo ω por $c\alpha$, é obtida a equação de quantidade de movimento na direção y , da seguinte forma:

$$i\alpha(U - c)\bar{v} + \frac{d\bar{p}}{dy} - i\alpha\bar{T}^{xy} - \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} = \frac{\beta}{Re} \left(\frac{d^2\bar{v}}{dy^2} - \alpha^2\bar{v} \right).$$

Portanto, reescrevendo o sistema das equações de conservação é obtido

$$i\alpha\bar{u}(y) + \frac{d\bar{v}(y)}{dy} = 0, \quad (2.53)$$

$$i\alpha(U - c)\bar{u} + \bar{v}\frac{dU}{dy} + i\alpha\bar{p} - i\alpha\bar{T}^{xx} - \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} = \frac{\beta}{Re} \left(\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} - \alpha^2\bar{u} \right), \quad (2.54)$$

$$i\alpha(U - c)\bar{v} + \frac{d\bar{p}}{dy} - i\alpha\bar{T}^{xy} - \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} = \frac{\beta}{Re} \left(\frac{d^2\bar{v}}{dy^2} - \alpha^2\bar{v} \right). \quad (2.55)$$

Para a dedução da equação de Orr-Sommerfeld, considera-se esse novo sistema escrito em função das auto-funções \bar{u} , \bar{v} , \bar{p} e \bar{T} e realiza-se as seguintes manipulações.

Derivando a equação de quantidade de movimento na direção x (2.54) em relação a y , tem-se

$$i\alpha(U - c)\frac{d\bar{u}}{dy} + i\alpha\bar{u}\frac{dU}{dy} + \frac{d\bar{v}}{dy}\frac{dU}{dy} + \bar{v}\frac{d^2U}{dy^2} + i\alpha\frac{d\bar{p}}{dy} - i\alpha\frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} - \frac{d^2\bar{T}^{xy}}{dy^2} = \frac{\beta}{Re} \left(\frac{d^3\bar{u}}{dy^3} - \alpha^2\frac{d\bar{u}}{dy} \right). \quad *$$

Multiplicando a equação de quantidade de movimento na direção y (2.55) pela constante $i\alpha$, obtém-se

$$-\alpha^2(U - c)\bar{v} + i\alpha\frac{d\bar{p}}{dy} + \alpha^2\bar{T}^{xy} - i\alpha\frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} = \frac{\beta}{Re} \left(i\alpha\frac{d^2\bar{v}}{dy^2} + i\alpha^3\bar{v} \right). \quad **$$

Fazendo $*$ - $**$, tem-se

$$i\alpha(U - c)\frac{d\bar{u}}{dy} + i\alpha\bar{u}\frac{dU}{dy} + \alpha^2(U - c)\bar{v} + \frac{d\bar{v}}{dy}\frac{dU}{dy} + \bar{v}\frac{d^2U}{dy^2} + i\alpha \left(\frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} - \frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} \right) +$$

$$-\alpha^2\bar{T}^{xy} - \frac{d^2\bar{T}^{xy}}{dy^2} = \frac{\beta}{Re} \left(\frac{d^3\bar{u}}{dy^3} - \alpha^2\frac{d\bar{u}}{dy} - i\alpha\frac{d^2\bar{v}}{dy^2} + i\alpha^3\bar{v} \right).$$

Usando a equação da continuidade, que fornece o resultado $\bar{u} = \frac{i}{\alpha}\frac{d\bar{v}}{dy}$, tem-se

$$i\alpha(U - c)\frac{d}{dy} \left(\frac{i}{\alpha}\frac{d\bar{v}}{dy} \right) + i\alpha\frac{i}{\alpha}\frac{d\bar{v}}{dy}\frac{dU}{dy} + \alpha^2(U - c)\bar{v} + \frac{d\bar{v}}{dy}\frac{dU}{dy} + \bar{v}\frac{d^2U}{dy^2} + i\alpha \left(\frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} - \frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} \right) +$$

$$-\alpha^2\bar{T}^{xy} - \frac{d^2\bar{T}^{xy}}{dy^2} = \frac{\beta}{Re} \left(\frac{d^3}{dy^3} \left(\frac{i}{\alpha}\frac{d\bar{v}}{dy} \right) - \alpha^2\frac{d}{dy} \left(\frac{i}{\alpha}\frac{d\bar{v}}{dy} \right) - i\alpha\frac{d^2\bar{v}}{dy^2} + i\alpha^3\bar{v} \right).$$

Simplificando os termos após algumas manipulações, tem-se

$$-(U - c)\frac{d^2\bar{v}}{dy^2} + \alpha^2(U - c)\bar{v} + \bar{v}\frac{d^2U}{dy^2} + i\alpha \left(\frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} - \frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} \right) - \alpha^2\bar{T}^{xy} - \frac{d^2\bar{T}^{xy}}{dy^2} =$$

$$= \frac{\beta}{Re} \left(\frac{i}{\alpha} \frac{d^4 \bar{v}}{dy^4} - 2i\alpha \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} + i\alpha^3 \bar{v} \right).$$

Multiplicando por $-\alpha$, é obtida a seguinte equação diferencial ordinária

$$\begin{aligned} \alpha(U - c) \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} - \alpha^3 (U - c) \bar{v} - \alpha \bar{v} \frac{d^2 U}{dy^2} + i\alpha^2 \left(\frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} - \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} \right) + \alpha^3 \bar{T}^{xy} + \alpha \frac{d^2 \bar{T}^{xy}}{dy^2} = \\ = -\frac{i\beta}{Re} \left(\frac{d^4 \bar{v}}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} + \alpha^4 \bar{v} \right). \end{aligned}$$

Logo, a equação de Orr-Sommerfeld para um fluido viscoelástico do tipo Giesekus, é dada por

$$\begin{aligned} \alpha(U - c) \left(\frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} - \alpha^2 \bar{v} \right) - \alpha \bar{v} \frac{d^2 U}{dy^2} + \alpha \frac{d^2 \bar{T}^{xy}}{dy^2} + i\alpha^2 \left(\frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} - \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} \right) + \alpha^3 \bar{T}^{xy} = \\ = -\frac{i\beta}{Re} \left(\frac{d^4 \bar{v}}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} + \alpha^4 \bar{v} \right). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Como o modelo viscoelástico considerado é o Giesekus, então, as equações dos tensores não-Newtonianos presentes na equação de Orr-Sommerfeld são

$$\begin{aligned} \bar{T}^{xx} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{xx} + U i \alpha \bar{T}^{xx} + \bar{v} \frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} + 2\hat{T}^{xx} \frac{d\bar{v}}{dy} - 2\hat{T}^{xy} \frac{i}{\alpha} \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} - 2\bar{T}^{xy} \frac{dU}{dy} \right) + \\ + \frac{2\alpha_G Wi Re}{(1 - \beta)} \left(\hat{T}^{xx} \bar{T}^{xx} + \hat{T}^{xy} \bar{T}^{xy} \right) = -\frac{2(1 - \beta)}{Re} \frac{d\bar{v}}{dy}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}^{xy} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{xy} + U i \alpha \bar{T}^{xy} + \bar{v} \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} - \hat{T}^{xx} i \alpha \bar{v} - \bar{T}^{yy} \frac{dU}{dy} - \hat{T}^{yy} \frac{i}{\alpha} \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} \right) + \\ + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1 - \beta)} \left(\bar{T}^{xy} (\hat{T}^{xx} + \hat{T}^{yy}) + \hat{T}^{xy} (\bar{T}^{xx} + \bar{T}^{yy}) \right) = \frac{(1 - \beta)}{Re} \left(i\alpha \bar{v} + \frac{i}{\alpha} \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} \right), \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}^{yy} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{yy} + U i \alpha \bar{T}^{yy} + \bar{v} \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} - 2\hat{T}^{xy} i \alpha \bar{v} - 2\hat{T}^{yy} \frac{d\bar{v}}{dy} \right) + \\ + \frac{2\alpha_G Wi Re}{(1 - \beta)} \left(\hat{T}^{xy} \bar{T}^{xy} + \hat{T}^{yy} \bar{T}^{yy} \right) = \frac{2(1 - \beta)}{Re} \frac{d\bar{v}}{dy}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

E, as derivadas das equações dos tensores não-Newtonianos são dadas por

$$\frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} + Wi \left(-i\omega \frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} + i\alpha \frac{dU}{dy} \bar{T}^{xx} + i\alpha U \frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} + \frac{d\bar{v}}{dy} \frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} + \bar{v} \frac{d^2 \hat{T}^{xx}}{dy^2} + 2 \frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} \frac{d\bar{v}}{dy} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +2\hat{T}^{xx} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} - 2\frac{i}{\alpha} \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} - 2\frac{i}{\alpha} \hat{T}^{xy} \frac{d^3\bar{v}}{dy^3} - 2\frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} \frac{dU}{dy} - 2\bar{T}^{xy} \frac{d^2U}{dy^2} \Big) + \\
& + \frac{2\alpha_G WiRe}{(1-\beta)} \left(\frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} \bar{T}^{xx} + \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} \bar{T}^{xy} \right) + \frac{2\alpha_G WiRe}{(1-\beta)} \left(\hat{T}^{xx} \frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} + \hat{T}^{xy} \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} \right) = \\
& = -\frac{2(1-\beta) d^2\bar{v}}{Re dy^2}, \tag{2.60}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} + Wi \left(-i\omega \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} + U i\alpha \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} + i\alpha \frac{dU}{dy} \bar{T}^{xy} + \frac{d\bar{v}}{dy} \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} + \bar{v} \frac{d^2\hat{T}^{xy}}{dy^2} - \frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} i\alpha\bar{v} \right. \\
& \left. - \hat{T}^{xx} i\alpha \frac{d\bar{v}}{dy} - \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} \frac{dU}{dy} - \bar{T}^{yy} \frac{d^2U}{dy^2} - \frac{i}{\alpha} \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} - \hat{T}^{yy} \frac{i}{\alpha} \frac{d^3\bar{v}}{dy^3} \right) + \\
& + \frac{\alpha_G WiRe}{(1-\beta)} \left(\frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} (\hat{T}^{xx} + \hat{T}^{yy}) + \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} (\bar{T}^{xx} + \bar{T}^{yy}) \right) + \\
& + \frac{\alpha_G WiRe}{(1-\beta)} \left(\bar{T}^{xy} \left(\frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} + \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} \right) + \hat{T}^{xy} \left(\frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} + \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} \right) \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(i\alpha \frac{d\bar{v}}{dy} + \frac{i}{\alpha} \frac{d^3\bar{v}}{dy^3} \right), \tag{2.61}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} + Wi \left((i\alpha U - i\omega) \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} - \frac{d\bar{v}}{dy} \left(\frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} + 2i\alpha\hat{T}^{xy} \right) + \bar{v} \left(\frac{d^2\hat{T}^{yy}}{dy^2} - 2i\alpha \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy^2} \right) + \right. \\
& \left. + i\alpha\bar{T}^{yy} \frac{dU}{dy} - 2\hat{T}^{yy} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} \right) + \frac{2\alpha_G WiRe}{(1-\beta)} \left(\hat{T}^{xy} \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} + \bar{T}^{xy} \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} + \hat{T}^{yy} \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} + \bar{T}^{yy} \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} \right) = \\
& = \frac{2(1-\beta) d^2\bar{v}}{Re dy^2}, \tag{2.62}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2\bar{T}^{xy}}{dy^2} + Wi \left((i\alpha U - i\omega) \frac{d^2\bar{T}^{xy}}{dy^2} + i\alpha \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} \frac{dU}{dy} + \left(\frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} - i\alpha\hat{T}^{xx} \right) \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} + \right. \\
& + 2 \left(\frac{d^2\hat{T}^{xy}}{dy^2} - i\alpha \frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} \right) \frac{d\bar{v}}{dy} + \bar{v} \left(\frac{d^3\hat{T}^{xy}}{dy^3} - i\alpha \frac{d^2\hat{T}^{xy}}{dy^2} \right) - \frac{d^2\hat{T}^{yy}}{dy^2} \frac{d\bar{v}}{dy} - 2\frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} + \\
& \left. - \hat{T}^{yy} \frac{d^3\bar{v}}{dy^3} - \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} \frac{d^2U}{dy^2} - \bar{T}^{yy} \frac{d^3U}{dy^3} \right) + \\
& + \frac{\alpha_G WiRe}{(1-\beta)} \left((\bar{T}^{xx} + \bar{T}^{yy}) \frac{d^2\hat{T}^{xy}}{dy^2} + 2 \left(\frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} + \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} \right) \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} + \left(\frac{d^2\bar{T}^{xx}}{dy^2} + \frac{d^2\bar{T}^{yy}}{dy^2} \right) \hat{T}^{xy} + \right. \\
& \left. + (\hat{T}^{xx} + \hat{T}^{yy}) \frac{d^2\bar{T}^{xy}}{dy^2} + 2 \left(\frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} + \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} \right) \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} + \bar{T}^{xy} \left(\frac{d^2\hat{T}^{xx}}{dy^2} + \frac{d^2\hat{T}^{yy}}{dy^2} \right) \right) = \\
& = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(i\alpha \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} + \frac{i}{\alpha} \frac{d^4\bar{v}}{dy^4} \right). \tag{2.63}
\end{aligned}$$

2.6 Escoamento Base

Para calcular o escoamento base do problema de Poiseuille, assume-se que todas as variáveis são dependentes apenas do eixo y , exceto para a pressão cujo gradiente é constante na direção x . O domínio na direção y é compreendido entre $[-1, 1]$.

Considerando a equação da continuidade, pode-se observar que a componente v do vetor velocidade é nula. De fato,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v(x, y, t) \equiv \text{constante}, \quad (2.64)$$

como $v_{parede} = 0$ então $v(x, y, t) \equiv 0$.

Ainda, considerando o escoamento no canal no estado estacionário, totalmente desenvolvido, pode-se escrever as hipóteses impostas sobre o escoamento da seguinte forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} = 0; \quad \nabla p = \text{constante}; \quad v = 0; \quad u = u(y); \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}(y) \right)$$

Dadas as equações adimensionalizadas para o modelo de fluido viscoelástico do tipo Giesekus, tem-se o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y}, \\ T^{xx} + Wi \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) &+ \\ &+ \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} (T^{xx^2} + T^{xy^2}) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ T^{xy} + Wi \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) &+ \\ &+ \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} (T^{xy}(T^{xx} + T^{yy})) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ T^{yy} + Wi \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) &+ \\ &+ \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} (T^{xy^2} + T^{yy^2}) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned}$$

Aplicando no sistema as hipóteses impostas, é obtido um novo sistema de equações simplificadas que descrevem o escoamento do fluido viscoelástico para o modelo Giesekus, da seguinte forma

$$-P_x + \frac{\beta}{Re} \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} = 0, \quad (2.65)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} = 0, \quad (2.66)$$

$$\hat{T}^{xx} = 2Wi\hat{T}^{xy}\frac{dU}{dy} - \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \left(\hat{T}^{xx^2} + \hat{T}^{xy^2} \right), \quad (2.67)$$

$$\hat{T}^{xy} = Wi\hat{T}^{yy}\frac{dU}{dy} - \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \left(\hat{T}^{xy}(\hat{T}^{xx} + \hat{T}^{yy}) \right) + \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{dU}{dy}, \quad (2.68)$$

$$\hat{T}^{yy} = -\frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \left(\hat{T}^{xy^2} + \hat{T}^{yy^2} \right). \quad (2.69)$$

O sistema de equações (2.65)-(2.69) não possui uma solução analítica completa disponível na literatura. Há soluções semi-analíticas que dependem da resolução de equações não-lineares para que seja possível obter as componentes do escoamento base [7], [28], [39], [41].

Uma solução semi-analítica para o escoamento de Poiseuille para o modelo viscoelástico Giesekus foi desenvolvida por professores colaboradores dessa pesquisa, em especial, pela Profa. Dra. Gilcilene Sanchez de Paulo, utilizando como referência [31]. No entanto, essa solução ainda está em fase de verificação e validação do problema, e em breve será publicada no trabalho intitulado “An Algorithm for Solving an Implicit Solution for Fully Developed Flow in a Channel of a Giesekus Fluid” no 17th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering (ENCIT 2018).

Sendo assim, neste trabalho o escoamento base foi gerado numericamente com o código de Simulação Numérica Direta bidimensional, com ausência de perturbações e as simulações são executadas até o escoamento atingir o estado estacionário. E ainda, as variáveis para o escoamento base são consideradas no meio do canal. Para a técnica LST, vale ressaltar que é necessário os valores até da terceira derivada das componentes do escoamento base, então, a partir do valor de \bar{u} , por exemplo, as derivadas são aproximadas utilizando a técnica de diferenças finitas compactas para se obter $\frac{d\bar{u}}{dy}$, $\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}$ e $\frac{d^3\bar{u}}{dy^3}$.

Método Numérico

Neste capítulo são descritos os métodos numéricos utilizados para obtenção das soluções das equações utilizando as técnicas da Simulação Numérica Direta e da Teoria de Estabilidade Linear. Além disso, é descrita a sequência de cálculo (algoritmo) efetuada para obtenção da solução para cada técnica utilizada.

3.1 Simulação Numérica Direta

Nesta seção são descritos os métodos utilizados na formulação de Simulação Numérica Direta. A formulação depende de vários métodos empregados, desde a discretização espacial e temporal das equações diferenciais até a solução de uma equação de Poisson.

Todos os métodos utilizados são baseados em referências da literatura que garantem a eficiência desses métodos, para que o problema seja resolvido de maneira eficiente computacionalmente, a fim de se obter resultados satisfatórios. Em decorrência do uso desses métodos numéricos e de computadores com alto poder de processamento, pode-se calcular todas as escalas de turbulência de um escoamento pela completa resolução das equações governantes.

3.1.1 Introdução de Perturbações

De acordo com Fasel [6], a introdução de perturbações temporais é realizada através de injeção e sucção de massa na parede para geração de ondas de Tollmien-Schlichting.

No método implementado, assume-se que no tempo $t = 0$, o escoamento não possui perturbações. No tempo $t + \delta t$, são inseridas as perturbações através da técnica de injeção e sucção de massa na parede em uma determinada região, como pode ser observado na Figura 3.1.

Esta perturbação é representada por meio de uma função polinomial $f(x)$ de grau 9 para a velocidade v

$$v = A_p f(x) \text{sen}(\omega_t t), \quad x_1 < x < x_2, \quad (3.1)$$

e

$$v = 0, \quad x \leq x_1 \quad \text{ou} \quad x \geq x_2, \quad (3.2)$$

onde A_p representa uma constante utilizada para ajustar a amplitude das perturbações, ω_t é a frequência temporal da perturbação e t o tempo. Os coeficientes do polinômio

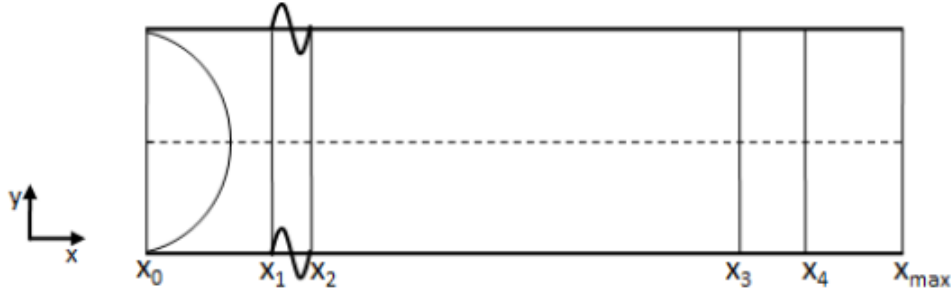


Figura 3.1: Domínio computacional do escoamento de Poiseuille 2D.

são escolhidos convenientemente com o objetivo de anular o valor da função e das suas primeira e segunda derivadas nos pontos x_1 e x_2 , suavizando a introdução de perturbações no escoamento.

3.1.2 Aproximação Numérica de Derivadas Temporais

O método numérico utilizado para discretização temporal das equações que modelam o escoamento e dos componentes do tensor extra-tensão das equações do fluido viscoelástico, é um esquema clássico de quatro etapas na integração de Runge-Kutta de quarta ordem [8]. O sistema linear resultante da equação de Poisson é resolvido usando um esquema completo de aproximação *multigrid* (FAS) [37]. Esse sistema linear foi resolvido por meio de um ciclo V composto por 4 níveis. Uma vez que o objetivo é a resolução de um problema elíptico, optou-se, de acordo com o trabalho de Brandt [4], por uma razão de engrossamento igual a 2.

O avanço temporal é realizado por meio da aplicação de um método Runge-Kutta clássico de quarta ordem de precisão, citado em [8]. O método Runge-Kutta empregado é do tipo Previsor-Corretor onde, os métodos de Euler explícito e implícito são utilizados como previsor e corretor, respectivamente, para um avanço temporal de t a $t + \frac{\Delta t}{2}$. O avanço para $t + \Delta t$ é realizado pela aplicação de um previsor baseado na regra do ponto médio e um corretor baseado na regra de Simpson. Os quatro passos do método são descritos como segue:

$$\begin{aligned}\omega_z^{(n+\frac{1}{2})^*} &= \omega_z^n + \frac{\Delta t}{2} g(t^n, \omega_z^n), \\ \omega_z^{(n+\frac{1}{2})^{**}} &= \omega_z^n + \frac{\Delta t}{2} g(t^{n+\frac{1}{2}}, \omega_z^{(n+\frac{1}{2})^*}), \\ \omega_z^{(n+1)^*} &= \omega_z^n + \Delta t g(t^{n+\frac{1}{2}}, \omega_z^{(n+\frac{1}{2})^{**}}), \\ \omega_z^{(n+1)} &= \omega_z^n + \frac{\Delta t}{6} \left[g(t^n, \omega_z^n) + 2g(t^{n+\frac{1}{2}}, \omega_z^{(n+\frac{1}{2})^*}) + g(t^{n+\frac{1}{2}}, \omega_z^{(n+\frac{1}{2})^{**}}) + g(t^{n+1}, \omega_z^{(n+1)^*}) \right],\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}g(t, \omega_z) &= -u \frac{\partial(\omega_z)}{\partial x} - v \frac{\partial(\omega_z)}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right) + \\ &\quad \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T^{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T^{yy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 T^{xx}}{\partial y \partial x}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

3.1.3 Aproximação Numérica de Derivadas Espaciais

As derivadas espaciais são calculadas usando diferenças finitas compactas de alta ordem ([13], [17], [34], [36]). O uso das diferenças finitas compactas utilizadas para a estimativa da primeira e segunda derivada espacial, requer a solução de sistemas lineares tridiagonais. O uso dessa técnica faz com que as aproximações numéricas das derivadas tenham quinta e sexta-ordem de precisão [36].

Para o cálculo da aproximação referente à primeira derivada de uma função em f , tem-se

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 4 & & & & & & \\ & 1 & 6 & 2 & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & 1 & 3 & 1 & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 2 & 6 & 1 \\ & & & & & & & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ \vdots \\ f'_i \\ \vdots \\ f'_{n-1} \\ f'_n \end{bmatrix} = \\
 & = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \frac{1}{24}(-74f_1 + 16f_2 + 72f_3 - 16f_4 + 2f_5) \\ \frac{1}{120}(-406f_1 - 300f_2 + 760f_3 - 80f_4 + 30f_5 - 4f_6) \\ \vdots \\ \frac{1}{12}(-f_{i-2} - 28f_{i-1} + 28f_{i+1} + f_{i+2}) \\ \vdots \\ \frac{1}{120}(406f_n + 300f_{n-1} - 760f_{n-2} + 80f_{n-3} - 30f_{n-4} + 4f_{n-5}) \\ \frac{1}{24}(74f_n - 16f_{n-1} - 72f_{n-2} + 16f_{n-3} - 2f_{n-4}) \end{bmatrix}, \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

em que h representa o espaçamento e n representa o número de pontos discretizados. De forma similar, o cálculo da segunda derivada resulta no sistema

$$\begin{bmatrix} 13 & 137 & & & & & & \\ & 1 & 12 & 3 & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & 2 & 11 & 2 & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 3 & 12 & 1 \\ & & & & & & & 137 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f''_1 \\ f''_2 \\ \vdots \\ f''_i \\ \vdots \\ f''_{n-1} \\ f''_n \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{60}(9775f_1 - 20285f_2 + 11170f_3 - 550f_4 - 145f_5 + 36f_6) \\ \frac{1}{360}(4834f_1 - 8424f_2 + 1890f_3 + 2320f_4 - 810f_5 + 216f_6 - 26f_7) \\ \vdots \\ \frac{1}{4}(3f_{i-2} + 48f_{i-1} - 102f_i + 48f_{i+1} + 3f_{i+2}) \\ \vdots \\ \frac{1}{360}(4834f_n - 8424f_{n-1} + 1890f_{n-2} + 2320f_{n-3} - 810f_{n-4} + 216f_{n-5} - 26f_{n-6}) \\ \frac{1}{60}(9775f_n - 20285f_{n-1} + 11170f_{n-2} - 550f_{n-3} - 145f_{n-4} + 36f_{n-5}) \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

O sistema linear obtido foi resolvido utilizando o método *multigrid* com um esquema FAS (*Full Approximation Scheme*), utilizando um esquema de ciclo V composto por 4 níveis.

3.1.4 Amortecimento de Reflexões na Entrada do Escoamento

Com o intuito de evitar possíveis reflexões, uma zona de amortecimento próxima à entrada é adotada e o componente de vorticidade é ponderado por meio de uma função da forma

$$f_1(x) = f_1(\epsilon) = 6\epsilon^5 - 15\epsilon^4 + 10\epsilon^3, \quad (3.6)$$

onde ϵ é uma função dependente dos pontos (i) de discretização na direção longitudinal (x) definida como

$$\epsilon = \frac{i - 1}{i_1 - 1}, \quad (3.7)$$

onde $1 \leq i \leq i_1$. Assim, a função $f_1(x)$ é aplicada no intervalo da seguinte forma

$$\omega_z(x, y, t) = f_1(x)\hat{\omega}_z(x, y, t). \quad (3.8)$$

O termo $\hat{\omega}_z(x, y, t)$ representa o componente de vorticidade que sai do integrador temporal e $\omega_z(x, y, t)$ é o valor do componente obtido após a aplicação do amortecimento.

3.1.5 Relaminarização do Escoamento

Assim como na região de entrada do escoamento, efeitos não físicos associados à reflexão numérica de perturbações convectivas presentes na região de saída do escoamento podem comprometer a qualidade dos resultados numéricos. Os estudos de Kloker [13], Meitz [22] e Souza [34] fornecem uma técnica de relaminarização no sentido de eliminar tais efeitos de reflexão de onda, no qual é adotada neste trabalho.

A técnica consiste em, considerando um intervalo próximo à saída do escoamento, impõe-se que as perturbações dos componentes de vorticidade decaiam a zero. Neste sentido, considerando um intervalo $x_3 < x < x_4$ em correspondência com os pontos de malha i_3 e i_4 , utiliza-se uma função f_2 tal que $f_2(x_3) = 1$ até $f_2(x_4) = 0$. Assim,

$$\omega_z(x, y, t) = f_2(x)\hat{\omega}_z(x, y, t), \quad (3.9)$$

para todo o intervalo anteriormente definido. Ressalta-se que $\hat{\omega}_z(x, y, t)$ representa o componente da vorticidade que sai do integrador temporal e $\omega_z(x, y, t)$ é tomado como valor obtido após a relaminarização.

Kloker [13] utiliza um polinômio de 5ª ordem para a função $f_2(x)$. Esse polinômio assegura que a variação da função e sua derivada sejam suaves para evitar reflexões. O polinômio adotado é

$$f_2(x) = f_2(\epsilon) = 1 - 6\epsilon^5 + 15\epsilon^4 - 10\epsilon^3, \quad (3.10)$$

onde $\epsilon = (i - i_3)/(i_4 - i_3)$, para $i_3 \leq i \leq i_4$.

Meitz [22] realizou um estudo mais aprofundado dessa técnica e verificou que os efeitos de se aplicar a técnica de relaminarização n vezes, a cada passo do integrador temporal, pode ser escrito como

$$\omega_z(x, y, t) = f_2^n(x)\hat{\omega}_z(x, y, t). \quad (3.11)$$

Testes realizados por Meitz [22], voltados à aplicação da equação (3.11) a uma função $\omega_z(x, y, t)$ constante, com $n = 1, 50, 100$ e 150 , mostraram que a repetida aplicação da função $f_2(x)$ gera um decaimento brusco. Este decaimento pode causar reflexões de onda na região de relaminarização. A fim de evitar este comportamento brusco, Meitz [22] propôs a utilização da seguinte função

$$f_3(x) = f_3(\epsilon) = e^{-\frac{\epsilon^4}{10}}(1 - \epsilon^{50})^4. \quad (3.12)$$

Neste trabalho, é utilizada a função proposta por Meitz [22]. Souza [34] ainda ressalta que, para o bom funcionamento da técnica, as seguintes restrições devem ser respeitadas

$$i_4 - i_3 \geq 2\lambda, \quad (3.13)$$

$$i_{max} - i_4 \geq \lambda, \quad (3.14)$$

onde λ é um comprimento de onda de Tollmien-Schlichting.

3.1.6 Cálculo da Vorticidade na Parede

Adam [1] utilizou o método de Padé clássico e fez comparações utilizando diferentes condições de contorno. Ainda, mostrou que a vantagem em se calcular a derivada no contorno através de aproximações compactas é a de manter o esquema estável, prevenindo qualquer instabilidade numérica proveniente do contorno.

Os cálculos dos componentes de vorticidade na parede são efetuados após a resolução das equações de Poisson e da continuidade para os componentes de velocidade. O cálculo da vorticidade é realizado em $y = -1$ ou $y = 1$, segundo Souza [34], efetuando-se os seguintes passos:

a) Calcula-se

$$J = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (3.15)$$

A segunda derivada na direção x , no intervalo entre x_1 e x_2 , é obtida considerando a mesma função utilizada para a inserção das ondas de Tollmien-Schlichting. Além disso, toma-se como nula a derivada nos demais pontos. Na direção y , a aproximação explícita e descentrada abaixo apresentada é utilizada.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \Big|_{y=-1} &= \frac{1}{18\delta y^2} [-134.89v_1 + 216v_2 - 135v_3 + 80v_4 - \\ &\quad - 33.75v_5 + 8.64v_6 - v_7] + O(\delta y^6). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Em $y = 1$, uma aproximação similar é empregada. Essas aproximações reforçam o fato de que $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}|_{y=\text{parede}} = 0$.

- b) Tendo os valores do laplaciano da velocidade, o componente de vorticidade é então obtido por meio da equação:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial x} = -J. \quad (3.17)$$

As aproximações numéricas empregadas, também propostas por Souza [34], são:

para $i = 2$:

$$\omega_{z_2} = \frac{1}{720} [\delta x(251\omega'_{z_1} + 646\omega'_{z_2} - 264\omega'_{z_3} + 106\omega'_{z_4} - 19\omega'_{z_5}) + 720\omega_{z_1}] + O\left(\frac{3}{160}\delta x^6\right); \quad (3.18)$$

para $3 \leq i \leq imax - 2$:

$$\omega_{z_2} = \frac{1}{57} [\delta x(10\omega'_{z_{i-1}} + 57\omega'_{z_{i-1}} + 24\omega'_{z_i} - \omega'_{z_{i-1}}) + 33\omega'_{z_{i-2}} + 24\omega'_{z_{i-1}}] + O\left(\frac{11}{3420}\delta x^6\right); \quad (3.19)$$

para $i = imax - 1$: uma aproximação similar a $i = 2$ é utilizada.

3.1.7 Algoritmo Computacional

A estratégia para filtragem a qual foi adotada, decorre do estudo de Lele [17]. Dentre os diversos métodos compactos de filtragem proposto pelo autor, opta-se pelo uso de um método compacto de 4ª ordem. A filtragem é aplicada ao final de cada iteração temporal e consiste em recalculiar a distribuição dos componentes de vorticidade por meio de um sistema pentadiagonal, apresentado por Souza [34], onde $\hat{\omega}_z$ representa a vorticidade antes da aplicação desse filtro computacional.

Por fim, com o propósito de eliminar oscilações numéricas, um filtro é aplicado após o último passo de Runge-Kutta. Este filtro requer a solução de um sistema pentadiagonal, e é aplicado na componente vorticidade na direção do escoamento e nas componentes do tensor extra-tensão não-Newtoniano.

Resolve-se numericamente as equações (2.33) – (2.38) através da aplicação do seguinte algoritmo:

1. Aplicar um passo do integrador de tempo para a vorticidade e para os tensores não-Newtonianos;
2. Aplicar as funções responsáveis pelas zonas de amortecimento e relaminarização do escoamento;
3. Introduzir as perturbações por sucção e injeção nas paredes;
4. Calcular o lado direito da equação de Poisson, dada pela equação (2.34);
5. Calcular a velocidade v , resolvendo a equação de Poisson (2.34);
6. Calcular o valor da velocidade u através da equação (2.33);
7. Calcular a vorticidade ω_z através da equação (2.35);
8. Calcular os componentes do tensor extra-tensão não-Newtoniano através das equações (2.36) – (2.38);

9. Atualizar o valor da vorticidade $\hat{\omega}_z$ nas paredes;
10. Aplicar o filtro após o último passo do integrador de tempo.

Após o último subpasso do integrador temporal, aplica-se o filtro computacional. O método numérico é finalizado quando atinge-se o tempo limite da simulação imposto.

3.2 Teoria de Estabilidade Linear

Nesta seção é apresentada o método de solução da equação de Orr-Sommerfeld para um fluido viscoelástico do tipo Giesekus. Além disso, é apresentado o algoritmo utilizado para obtenção da solução dessa equação, bem como a classificação das instabilidades através da abordagem LST.

3.2.1 Solução Numérica da Equação de Orr-Sommerfeld

A solução da equação de Orr-Sommerfeld modificada corresponde a um problema de autovalor, cuja solução está vinculada aos valores dos parâmetros α , ω , Re , Wi , β , α_G , e depende do perfil de velocidade do escoamento base. As perturbações correspondentes são denominadas ondas de Tollmien-Schlichting.

De maneira geral, a equação de Orr-Sommerfeld pode ser reescrita por

$$\bar{v}^{IV} + A(y)\bar{v}'' + B(y)\bar{v} + C(y) = 0, \quad (3.20)$$

onde

$$A(y) = -2\alpha^2 - \frac{iRe\alpha}{\beta}(U - c), \quad (3.21)$$

$$B(y) = \alpha^4 + \frac{iRe\alpha^3}{\beta}(U - c) + \frac{iRe\alpha}{\beta} \frac{d^2U}{dy^2}, \quad (3.22)$$

$$C(y) = \frac{Re\alpha^2}{\beta} \left(\frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} - \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} \right) - \frac{iRe\alpha}{\beta} \left(\frac{d^2\bar{T}^{xy}}{dy^2} - \alpha^2\bar{T}^{xy} \right). \quad (3.23)$$

Pode-se escrever

$$\bar{v}^{IV} = -A(y)\bar{v}'' - B(y)\bar{v} + C(y), \quad (3.24)$$

desde que C não contenha termos \bar{v}^{IV} . Caso contrário, se escreve

$$(1 + C_2)\bar{v}^{IV} = -A(y)\bar{v}'' - B(y)\bar{v} + C_1 \quad (3.25)$$

ou

$$\bar{v}^{IV} = \frac{-A(y)\bar{v}'' - B(y)\bar{v} + C_1}{(1 + C_2)}. \quad (3.26)$$

A manipulação que foi utilizada para a equação de Orr-Sommerfeld modificada para um fluido não Newtoniano ser resolvida está descrita no Apêndice A.

Reescrevendo a equação (3.20) na forma matricial $\bar{V}' = M\bar{V}$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \bar{v}' \\ \bar{v}'' \\ \bar{v}''' \\ \bar{v}^{IV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -B(y) & 0 & -A(y) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{v}' \\ \bar{v}'' \\ \bar{v}''' \end{bmatrix}.$$

Inicia-se o cálculo pela parede inferior. Para $y = -1$, uma combinação linear de soluções deve satisfazer as condições $\bar{v} = \bar{v}' = 0$. Assim, o vetor solução $\bar{V} = [\bar{v}, \bar{v}', \bar{v}'', \bar{v}''']$ pode ser escrito usando a base canônica

$$\bar{V}_{(y=-1)} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

onde é necessário que $a_1 = a_2 = 0$, para que a condição de não escorregamento e impermeabilidade seja satisfeita. Tem-se então, para o contorno inferior

$$a_3 \bar{V}_I + a_4 \bar{V}_{II} = a_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Integra-se a equação de Orr-Sommerfeld a partir das condições de contorno $\bar{V}_I = [0, 0, 1, 0]^T$ e $\bar{V}_{II} = [0, 0, 0, 1]^T$ até o contorno oposto $y = 1$. O resultado da integração fornece em $y = 1$ os valores V_I e V_{II} cuja combinação linear deve ser compatível com a condição de contorno, tal que

$$b_1 \bar{V}_I + b_2 \bar{V}_{II} = b_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

que na forma matricial é dada por

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_I & \bar{v}'_I & \bar{v}''_I & \bar{v}'''_I \\ \bar{v}_{II} & \bar{v}'_{II} & \bar{v}''_{II} & \bar{v}'''_{II} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para o sistema linear acima admitir uma solução não trivial, é necessário que

$$\begin{vmatrix} \bar{v}_I & \bar{v}'_I & \bar{v}''_I & \bar{v}'''_I \\ \bar{v}_{II} & \bar{v}'_{II} & \bar{v}''_{II} & \bar{v}'''_{II} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.27)$$

É utilizado um processo computacional implementado por Mendonça [23], adotando o método da estimativa, para resolver a equação de Orr-Sommerfeld modificada, para um fluido viscoelástico do tipo Giesekus, com os seguintes passos:

1. Considera os valores iniciais para os autovalores dados α , ω , Re , Wi , α_G e β ;
2. Integra a equação de Orr-Sommerfeld, por meio de um método de Runge-Kutta de quarta ordem, partindo-se do contorno inferior;
3. Verifica se a condição de contorno no contorno superior é satisfeita, ou seja, se a restrição (3.27) é respeitada;

4. Altera o valor de ω (ou α dependendo da análise – temporal ou espacial), de forma que o mesmo esteja próximo do valor anterior;
5. Integra novamente a equação e verifica se a restrição é satisfeita ¹;
6. Se a restrição não for respeitada, interpola-se ω por meio das últimas duas aproximações. Neste ponto, o algoritmo retorna ao item (5.).

Para a integração da equação de Orr-Sommerfeld utilizou-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem, e em cada passo dessa integração é necessário verificar se os vetores V_I e V_{II} são ortogonais e chamar uma rotina de ortonormalização de Gramm-Schmidt caso não sejam.

3.2.2 Análise Espacial e Temporal de Instabilidades

A equação de \tilde{u} em (2.52), possui a autofunção \bar{u} , e as constantes ω e α , complexos. Neste caso, a solução do sistema é expressa como

$$\tilde{u}(x, y, t) = \bar{u}(y)e^{(-\alpha_i x + \omega_i t)}e^{i(\alpha_r x - \omega_r t)}, \quad (3.28)$$

onde os índices r e i representam componentes real e imaginária, respectivamente.

Observa-se que, quando ω é um número real e α é um número complexo, a amplitude da perturbação cresce na direção do escoamento médio em x . Neste caso, a formulação em questão é chamada de formulação espacial. Os componentes ω_r , α_r e α_i representam, respectivamente, a frequência, o número de onda e a taxa de amplificação espacial.

Por outro lado, na formulação denominada temporal, α é tomado como um número real e ω como sendo um número complexo. Neste caso, a amplitude da perturbação cresce diretamente em função do tempo. A taxa de amplificação, para esta formulação, é dada por ω_i . Dessa forma, a Tabela 3.1 apresenta a classificação das instabilidades, utilizando as análises temporal e espacial.

Tabela 3.1: Classificação de instabilidades.

<i>Tipo de análise</i>	<i>taxa de amplificação</i>	<i>amplitude</i>	<i>classificação</i>
análise temporal	$\omega_i < 0$	decrece	estável
	$\omega_i = 0$	constante	neutro
	$\omega_i > 0$	cresce	instável
análise espacial	$\alpha_i < 0$	cresce	instável
	$\alpha_i = 0$	constante	neutro
	$\alpha_i > 0$	decrece	estável

¹O uso dos valores de ω^{k-1} e ω^k , no sentido de se estimar ω^{k+1} , é caracterizado pelo método das Secantes.

Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos para a análise da estabilidade espacial de um escoamento bidimensional entre placas planas paralelas para um fluido viscoelástico do tipo Giesekus. Os resultados dessa análise de estabilidade estão apresentados em três subseções, na primeira subseção é realizada a verificação do código LST, na segunda são apresentados alguns resultados da análise da estabilidade linear espacial para o modelo Giesekus e na última são realizadas simulações numéricas comparando os resultados obtidos utilizando a técnica da simulação numérica direta com a teoria da estabilidade linear.

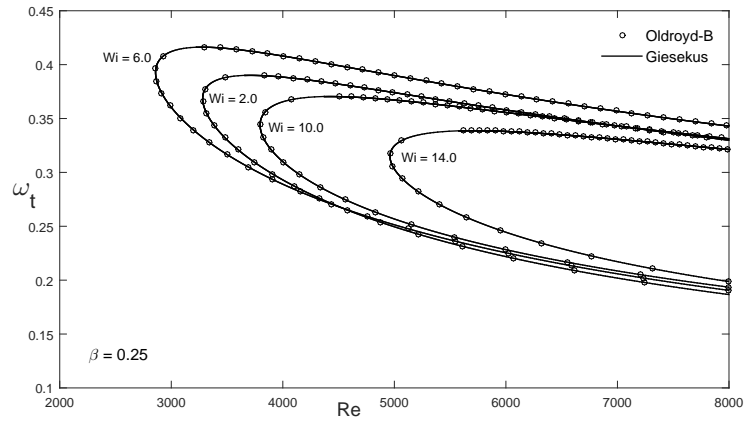
4.1 Verificação do Código LST

Nesta seção é realizada a verificação do código LST implementado para o problema de Poiseuille plano, bidimensional, incompressível e isotérmico, utilizando o modelo de fluido viscoelástico Giesekus. O domínio computacional do problema pode ser visto na Figura 3.1. A verificação foi realizada comparando o código desenvolvido neste trabalho considerando $\alpha_G = 0$ na equação (2.14) que representa o modelo Giesekus com o que já havia sido desenvolvido para o modelo Oldroyd-B [9]. Vale ressaltar que, quando $\alpha_G = 0$ na equação (2.14), a equação constitutiva obtida é do modelo Oldroyd-B. Enfatiza-se, ainda que, o código LST implementado com o modelo Oldroyd-B foi verificado com resultados da literatura de Zhang *et al.* [42], conforme pode ser visto em [35].

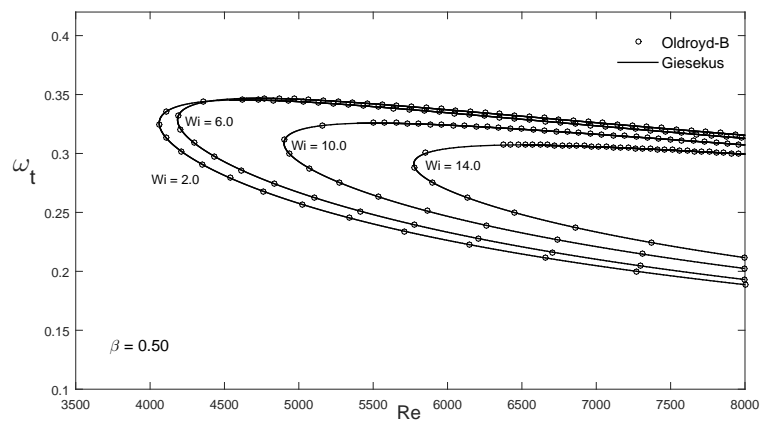
Os métodos numéricos utilizados nas simulações numéricas estão descritos no Capítulo 3, e os detalhes da resolução da equação de Orr-Sommerfeld modificada para o modelo Giesekus está descrita no Apêndice A.

Para a verificação do código LST utilizando o modelo Giesekus foram analisados resultados para diferentes valores da constante β e do número de Weissenberg, e comparados com o código do modelo Oldroyd-B. Nessas simulações numéricas foram considerados doze casos, de forma que para cada $\beta = 0.25, 0.50$ e 0.75 , foram consideradas variações de $Wi = 2.0, 6.0, 10.0$ e 14.0 . Os valores de Reynolds simulados são $Re = 2000$ a $Re = 8000$. As curvas neutras de estabilidade que foram geradas para esses casos utilizando os dois diferentes códigos estão apresentadas na Figura 4.1.

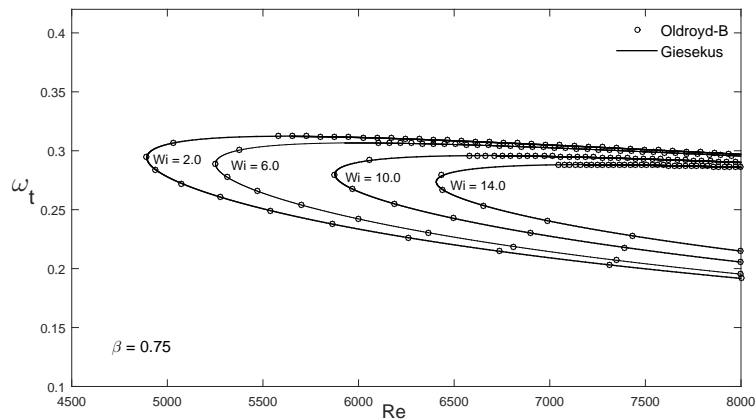
A Figura 4.1 apresenta os resultados da comparação entre o modelo Oldroyd-B e o modelo Giesekus considerando $\alpha_G = 0$ no código desenvolvido. Na Figura 4.1 (a), foi fixado $\beta = 0.25$ e foram simulados diferentes valores de Wi . Pode-se observar que o comportamento do escoamento não é monotônico com a variação de Wi . Nota-se ainda que, para o modelo Oldroyd-B (considerando Giesekus com $\alpha_G = 0$), para $Wi = 6$ o



(a)



(b)



(c)

Figura 4.1: Comparação de curvas neutras para os modelos Oldroyd-B (\circ) e Giesekus (—) para os valores de $Wi = 2.0, 6.0, 10.0$ e 14.0 e fixados $\beta = 0.25$ (a), $\beta = 0.50$ (b) e $\beta = 0.75$ (c).

escoamento apresenta uma região de instabilidade maior que os demais valores de Wi . No entanto, nas Figuras 4.1 (b) e 4.1 (c), considerando fixos os valores de $\beta = 0.50$ e $\beta = 0.75$, respectivamente, os dois modelos viscoelásticos apresentaram uma região de estabilidade maior, conforme o número de Wi aumentou.

A partir das curvas neutras da Figura 4.1 observa-se uma boa concordância entre os modelos viscoelásticos Oldroyd-B e Giesekus. Sendo assim, a verificação realizada é um indicativo de que o código implementado, está apto a simular e analisar a estabilidade de escoamentos bidimensionais com o modelo Giesekus, encorajando a resolver outros escoamentos com diferentes parâmetros adimensionais do modelo.

4.2 Estudo dos Parâmetros Adimensionais do Modelo Giesekus

Nesta seção são apresentadas as componentes do escoamento base para diferentes parâmetros adimensionais do modelo Giesekus adotados nas simulações numéricas. E, ainda, com o objetivo de observar o comportamento das soluções numéricas do escoamento de Poiseuille quando varia-se os parâmetros adimensionais presentes no modelo Giesekus, são apresentados resultados de análise de estabilidade linear espacial através de curvas neutras de estabilidade.

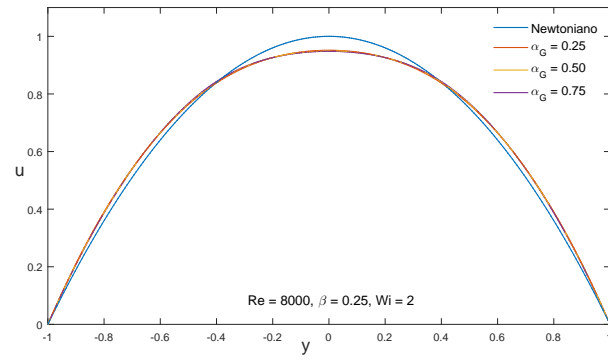
4.2.1 Escoamento Base

Nesta subseção são apresentadas algumas componentes do escoamento base do problema de Poiseuille viscoelástico, como a velocidade na direção do escoamento (u) e os tensores não-Newtonianos representados por T^{xx} , T^{xy} e T^{yy} . O comportamento da componente de velocidade u do modelo Giesekus, para diferentes valores de α_G , foi comparado com a velocidade do fluido Newtoniano. E ainda, para o modelo Giesekus, são apresentadas as componentes dos tensores não-Newtonianos T^{xx} , T^{xy} e T^{yy} do escoamento base para os seguintes parâmetros adimensionais: $Re = 8000$ e $Wi = 2.0$ fixos, $\beta = 0.25, 0.50, 0.75$ e $\alpha_G = 0.25, 0.50$ e 0.75 , como podem ser observadas nas Figuras 4.2, 4.3 e 4.4.

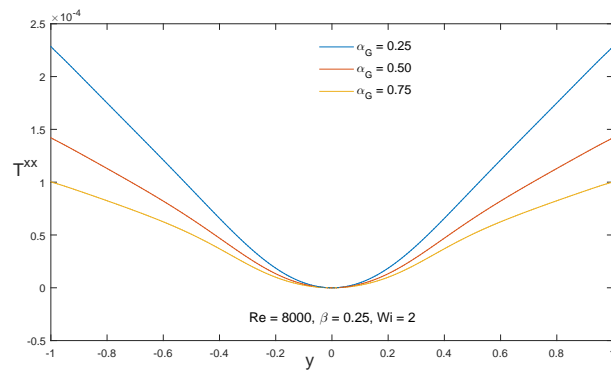
Nas Figuras 4.2 (a), 4.3 (a) e 4.4 (a) observa-se que, como esperado, a velocidade u do escoamento base para o fluido Giesekus, com diferentes valores de α_G , apresentam uma diferença em relação ao fluido Newtoniano. Analisa-se ainda que, conforme aumenta o valor de β (ver Figura 4.4 (a)), mais a velocidade u do escoamento base para o fluido Giesekus se aproxima do fluido Newtoniano. Isso está coerente com a literatura, pois quando β se aproxima de 1 no modelo considerado, maior a quantidade de solvente Newtoniano no fluido [31]. Por outro lado, analisando a velocidade u apenas para o modelo Giesekus, pode-se verificar que, independentemente do valor de α_G , o modelo não apresenta grandes variações dessa componente no escoamento base.

As Figuras 4.2 – 4.4 (b), 4.2 – 4.4 (c), 4.2 – 4.4 (d) apresentam o comportamento dos tensores não-Newtonianos T^{xx} , T^{xy} e T^{yy} , respectivamente, do escoamento base para diferentes valores de β . Percebe-se que o perfil de solução dos tensores não-Newtonianos decresce com o aumento da constante β . Como já explicado acima, isto está de acordo, uma vez que, quando β está próximo de 1 o fluido está próximo ao fluido Newtoniano e, portanto, a tensão no escoamento tende a ser menor.

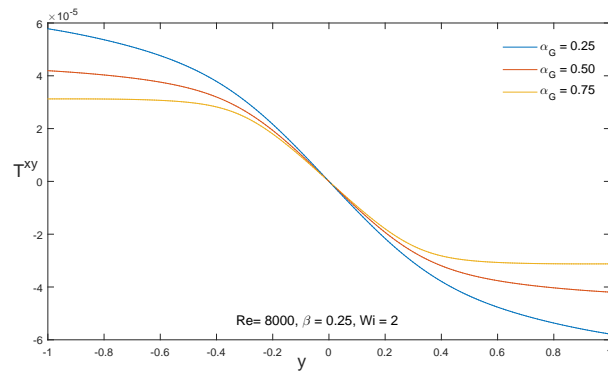
Ainda analisando essas figuras, pode-se observar a influência do parâmetro α_G nos tensores não-Newtonianos T^{xx} , T^{xy} e T^{yy} . As Figuras 4.2 – 4.4 (b) e 4.2 – 4.4 (c), que correspondem aos tensores T^{xx} e T^{xy} , respectivamente, apresentam um mesmo comportamento, ou seja, a medida que aumenta o valor de α_G , para um valor de β fixo, as tensões no escoamento diminuem. Por outro lado, para o tensor T^{yy} mostrado nas Figuras 4.2 – 4.4 (d), conforme o valor de α_G aumenta, para um valor de β fixo, as tensões no escoamento também aumentam.



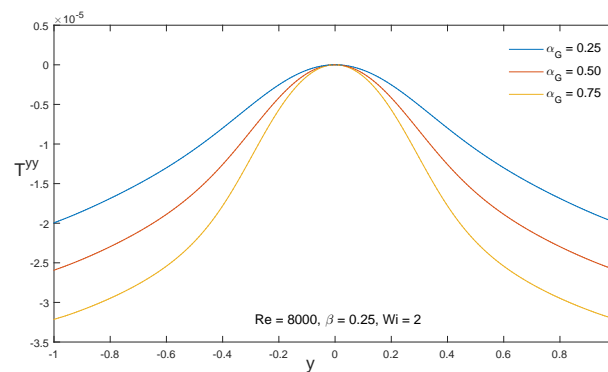
(a)



(b)

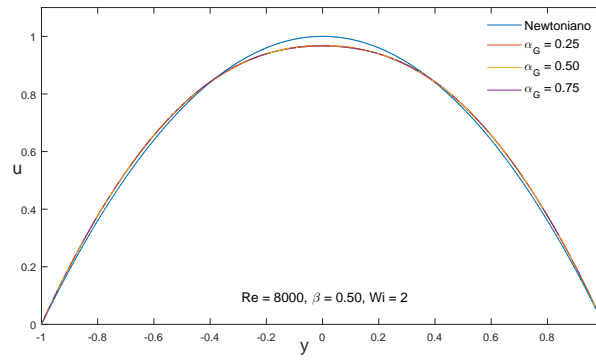


(c)

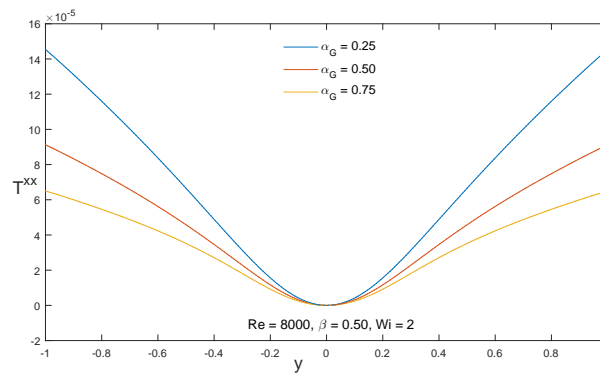


(d)

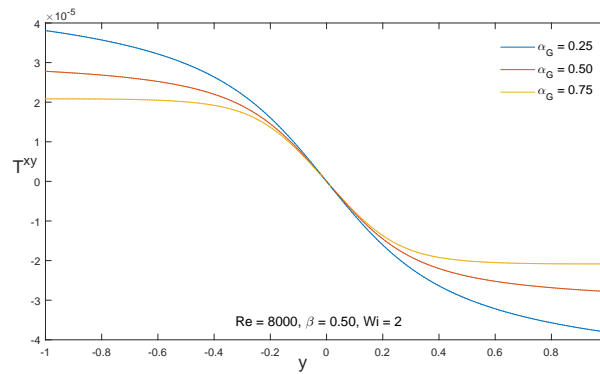
Figura 4.2: Perfil de velocidade u (a) e dos tensores T^{xx} (b), T^{xy} (c) e T^{yy} (d), para $Re = 8000, Wi = 2, \beta = 0.25$ e diferentes valores de α_G .



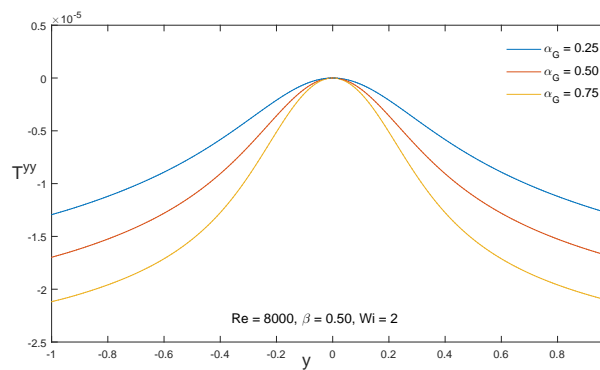
(a)



(b)

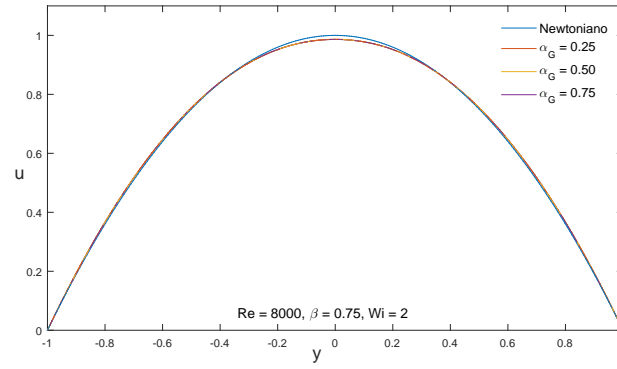


(c)

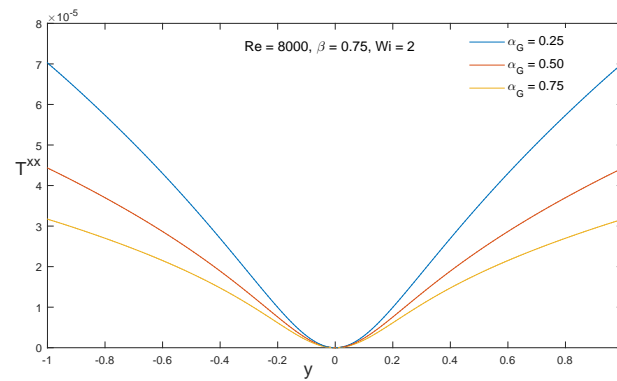


(d)

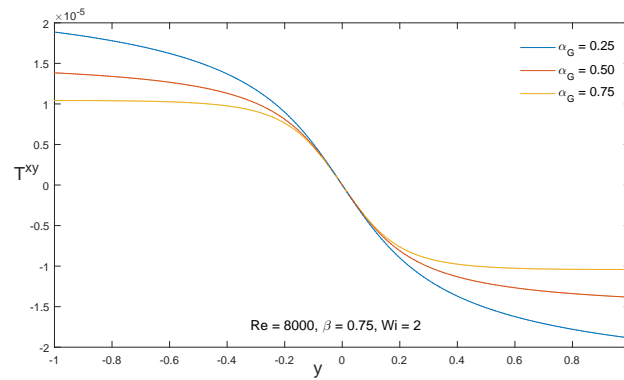
Figura 4.3: Perfil de velocidade u (a) e dos tensores T^{xx} (b), T^{xy} (c) e T^{yy} (d), para $Re = 8000$, $Wi = 2$, $\beta = 0.50$ e diferentes valores de α_G .



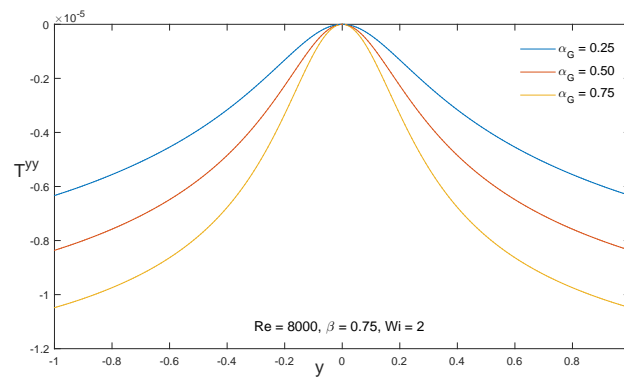
(a)



(b)



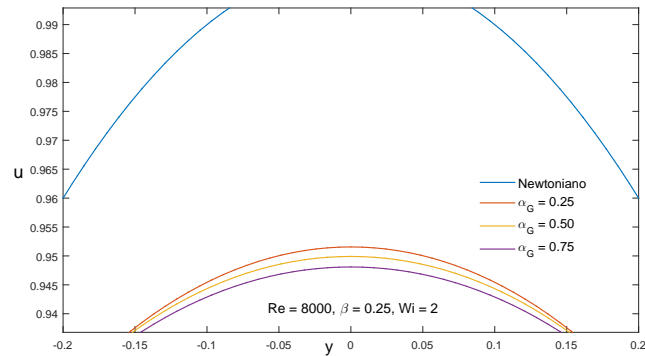
(c)



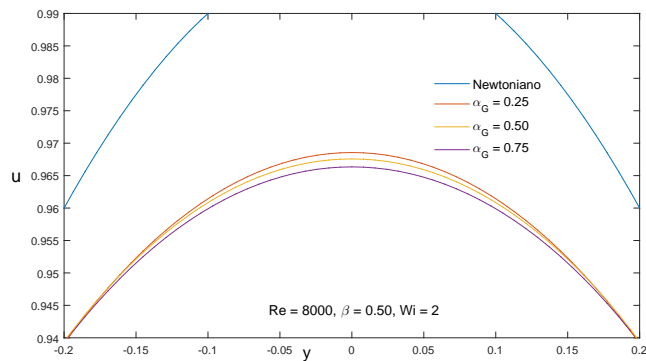
(d)

Figura 4.4: Perfil de velocidade u (a) e dos tensores T^{xx} (b), T^{xy} (c) e T^{yy} (d), para $Re = 8000$, $Wi = 2$, $\beta = 0.75$ e diferentes valores de α_G .

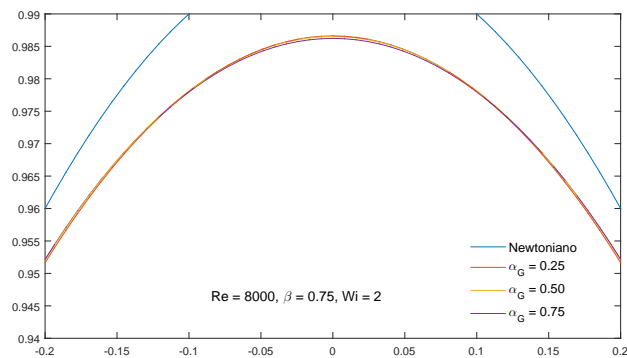
Para uma melhor visualização das Figuras 4.2 – 4.4 (a) que representam o perfil de velocidade u nos escoamentos foram realizadas ampliações dessas figuras como pode ser visto na Figura 4.5. Esta figura mostra a influência das forças elásticas não-Newtonianas no perfil de velocidade, comparando com o perfil de velocidade do fluido Newtoniano. E, ainda, é possível notar a influência do parâmetro α_G nos perfis de velocidade dos escoamentos para o modelo Giesekus. Observa-se que há uma pequena diferença entre as curvas do modelo Giesekus, e quanto maior o valor de β , menor essa diferença, e as curvas estão mais próxima da curva do fluido Newtoniano.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.5: Ampliação do perfil de velocidade das Figuras 4.2 – 4.4 (a), para $\beta = 0.25$ (a), $\beta = 0.50$ (b), $\beta = 0.75$ (c), $Re = 8000$ e $Wi = 2$ fixos e diferentes valores de α_G .

4.2.2 Análise de Estabilidade utilizando LST

Os resultados da análise espacial através do código LST são apresentados nesta subseção. Nesta análise considera-se ω real e α complexo, conforme Tabela 3.1. Com o objetivo de avaliar as curvas neutras de estabilidade, diferentes simulações numéricas foram realizadas variando-se os parâmetros adimensionais para o escoamento do fluido Giesekus e comparando com o escoamento de fluido Newtoniano. Neste trabalho, os parâmetros estudados são o número de Reynolds (Re), o número de Weissenberg (Wi) e as constantes β e α_G .

Para cada simulação é possível determinar a curva neutra, ou seja, onde os valores de $\alpha_i = 0$. Esta curva apresenta um formato característico de “banana”. As taxas de amplificação maiores do que zero ($\alpha_i > 0$), ou seja, região estável, estão do lado de fora da banana, e as taxas de amplificação menores do que zero ($\alpha_i < 0$), região instável, estão no interior da banana. Simulações numéricas foram realizadas para encontrar os valores de α_i para diversos valores de Reynolds e frequência ω_t .

Considerando o escoamento de Poiseuille viscoelástico, utilizando o modelo Giesekus, a influência do parâmetro α_G , que pode ser visto na equação constitutiva (2.14), foi inicialmente analisada. Quando avalia-se as curvas neutras de estabilidade, foca-se somente nas perturbações bidimensionais e compara-se os resultados do fluido Giesekus com os fluidos Oldroyd-B e Newtoniano, para diferentes valores de parâmetros adimensionais desses modelos. A influência dos parâmetros α_G e β foram estudados para diferentes valores de Wi , considerando os valores de Reynolds $Re = 2000$ a $Re = 8000$. As Figuras 4.6 – 4.11 mostram os resultados obtidos das curvas neutras de estabilidade para a variação dos parâmetros citados.

Na Figura 4.6 são apresentadas curvas neutras de estabilidade para três diferentes valores de α_G : $\alpha_G = 0, 0.25$ e 0.50 , mantendo-se fixos os valores de $\beta = 0.25$ e $Wi = 2.0$. Nesta figura também é apresentada a curva neutra para o fluido Newtoniano. As curvas neutras do modelo Giesekus foram comparadas com a curva neutra do modelo Oldroyd-B ($\alpha_G = 0$), e também com a curva neutra do fluido Newtoniano. Observa-se que o comportamento do escoamento não é monotônico com a variação de α_G . E, ainda, o escoamento para o modelo Oldroyd-B ($\alpha_G = 0$) apresenta uma região instável muito maior do que os escoamentos para maiores valores de α_G ($\alpha_G = 0.25$ e 0.50) e do fluido Newtoniano. Vale destacar que neste caso o escoamento de fluido Newtoniano é mais estável que os escoamentos do fluido Giesekus.

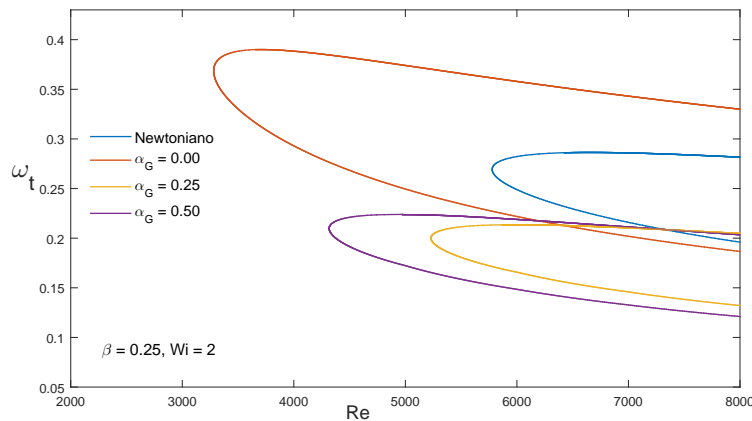
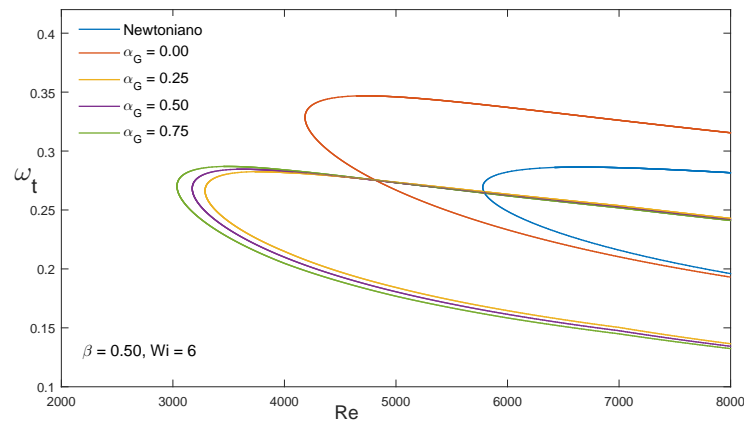
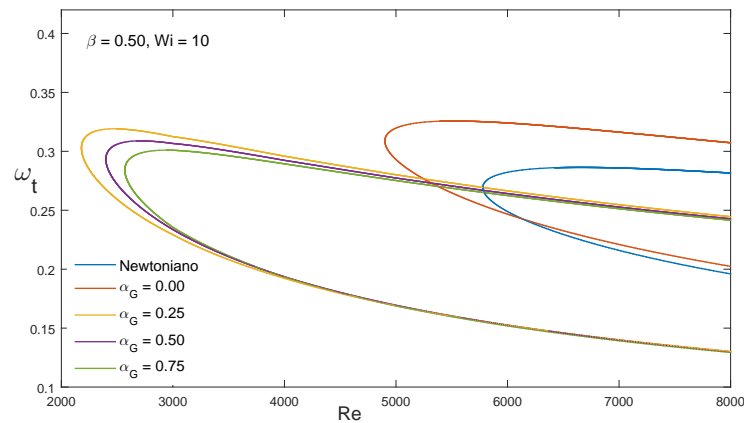


Figura 4.6: Curvas neutras para os valores de $\beta = 0.25$ e $Wi = 2.0$ fixos e diferentes valores de α_G .

Seguindo a mesma ideia, para os valores fixos de $\beta = 0.50$ e $Wi = 6.0$ e 10 e considerando quatro diferentes valores de α_G : $\alpha_G = 0, 0.25, 0.50$ e 0.75 , as curvas neutras de estabilidade estão apresentadas na Figura 4.7. Nesta figura o escoamento do fluido Newtoniano também é mais estável que os escoamentos do fluido Giesekus, como na Figura 4.6. Entretanto, para estes parâmetros adimensionais o escoamento do modelo Oldroyd-B ($\alpha_G = 0$) não apresentou a maior região instável como na Figura 4.6. Na Figura 4.7 (a) observa-se que à medida que aumenta o valor de α_G maior a região de instabilidade dos escoamentos. Aumentando o valor de Wi para 10 e mantendo-se os outros parâmetros adimensionais iguais como ser visto na Figura 4.7 (b), observa-se que, as curvas neutras para os diferentes valores de α_G apresentam uma região instável muito maior do que as curvas neutras considerando os mesmos valores de α_G apresentados na Figura 4.7 (a). E, ainda, nesta figura nota-se que à medida que aumenta o valor de α_G nas simulações menor a região de instabilidade dos escoamentos.



(a)

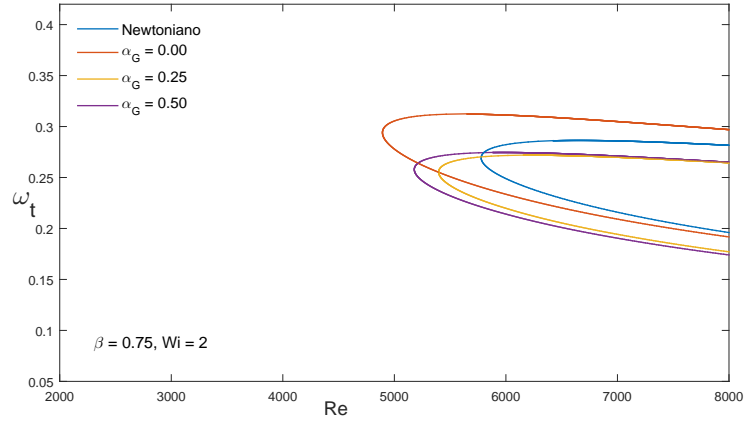


(b)

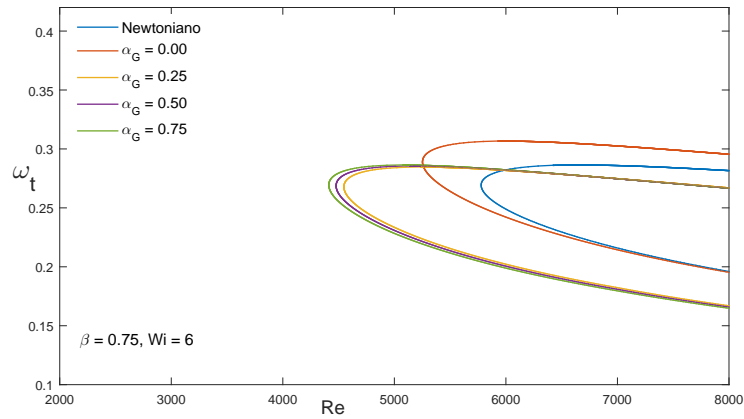
Figura 4.7: Curvas neutras para os valores de $\beta = 0.50$ e $Wi = 6.0$ e 10 fixos e diferentes valores de α_G .

Aumentando o valor da constante β , deixando o fluido mais próximo do fluido Newtoniano, considerando agora os valores fixos de $\beta = 0.75$ e $Wi = 2.0, 6.0$ e 10 , para os valores de $\alpha_G = 0, 0.25, 0.50$ e 0.75 , as curvas neutras de estabilidade estão apresentadas na Figura 4.8. Nas Figuras 4.8 (a) e (b) os escoamentos do fluido Newtoniano também são mais estáveis que os escoamentos do fluido Giesekus, como apresentados nas Figuras 4.6 e 4.7. No entanto, diferentemente de todos os casos apresentados até aqui a Figura 4.8 (c)

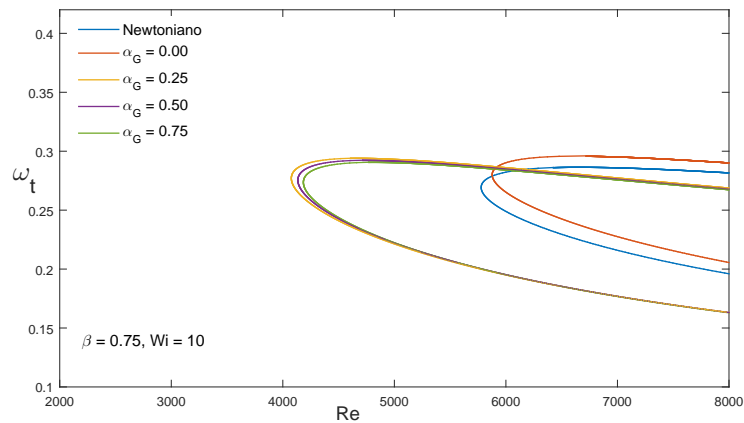
apresentou o escoamento para o modelo Oldroyd-B ($\alpha_G = 0$) com a região estável maior do que todas as curvas apresentadas nesta figura. Nas Figuras 4.8 (a) e (b) observa-se que à medida que aumenta o valor de α_G maior a região de instabilidade dos escoamentos. E, assim como no caso da Figura 4.7 (b), para $Wi = 10$, é visto que à medida que aumenta o valor de α_G nas simulações menor a região de instabilidade dos escoamentos.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.8: Curvas neutras para os valores de $\beta = 0.75$ e $Wi = 2.0, 6.0$ e 10 fixos e diferentes valores de α_G .

Analisando as Figuras 4.6 – 4.8 nota-se que as curvas neutras de estabilidade para os casos de $\alpha_G = 0$ e 0.25 apresentam um deslocamento, que em muitos casos é razoavelmente grande. Com intuito de avaliar esse deslocamento das curvas neutras para o modelo Giesekus, diferentes valores de α_G foram simulados, $\alpha_G = 0, 0.001, 0.005, 0.01, 0.05, 0.10, 0.15, 0.25$ e 0.50, enfatizando aqui os valores de $0 \leq \alpha_G \leq 0.25$ e considerando fixos os seguintes parâmetros adimensionais nas simulações numéricas $\beta = 0.50$ e $Wi = 2.0$. Observando a Figura 4.9, pode-se verificar que, pequenas variações no parâmetro α_G apresentam grandes variações na estabilidade do escoamento do modelo considerado. Este exemplo ilustra, para este caso, a não monotonicidade da estabilidade do modelo Giesekus.

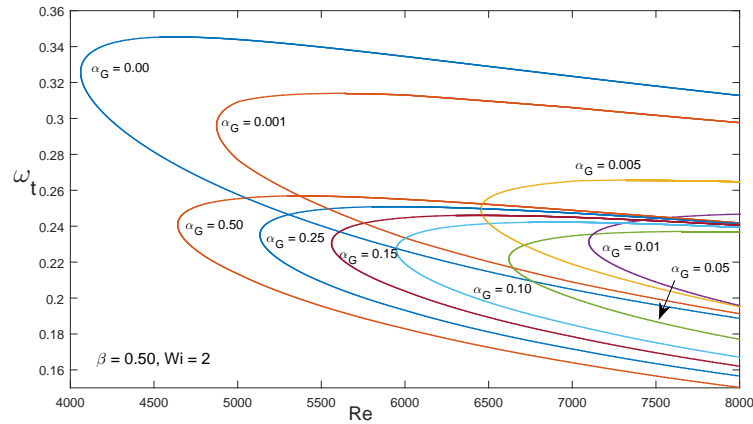


Figura 4.9: Curvas neutras para os valores de $\beta = 0.50$ e $Wi = 2.0$ fixos e diferentes valores de α_G .

A Figura 4.9 também mostra os valores de Reynolds crítico, ou seja, o menor valor de Reynolds onde o escoamento ainda é estável a perturbações não estacionárias. Sendo assim, esta análise pode ser vista na Tabela 4.1 e na Figura 4.10, que apresentam a variação dos valores de Reynolds crítico para cada caso considerado nas simulações variando o parâmetro α_G .

Essa análise auxilia a entender como a região de estabilidade varia de acordo com o parâmetro α_G para os valores fixos de $\beta = 0.50$ e $Wi = 2$. A Tabela 4.1 mostra os valores aproximados do número de Reynolds crítico para cada caso simulado, conforme o parâmetro α_G aumenta.

Tabela 4.1: Valores de Re crítico referentes as curvas neutras da Figura 4.9.

α_G	Re crítico
0.00	4061.6
0.001	4874.0
0.005	6453.9
0.01	7099.1
0.05	6621.0
0.10	5948.5
0.15	5561.3
0.25	5133.5
0.50	4641.8

Observando a Tabela 4.1, pode-se verificar que, a região de instabilidade diminui de forma significativa quando se varia α_G igual a zero (modelo Oldroyd-B) até 0.01.

No entanto, quando varia o parâmetro $\alpha_G = 0.05$ até 0.50 , percebe-se que a região de instabilidade aumenta conforme o valor de α_G aumenta. A Figura 4.10 mostra em detalhes esse comportamento do número de Reynolds crítico de acordo com a variação do parâmetro α_G .

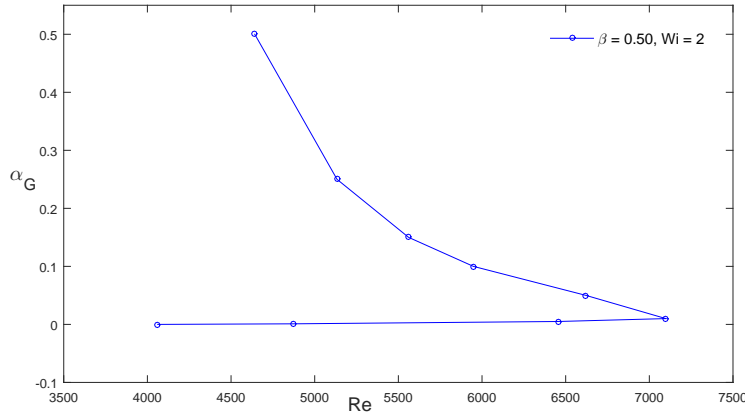


Figura 4.10: Valores de Reynolds crítico para diferentes valores de α_G , considerando fixos $\beta = 0.5$ e $Wi = 2$.

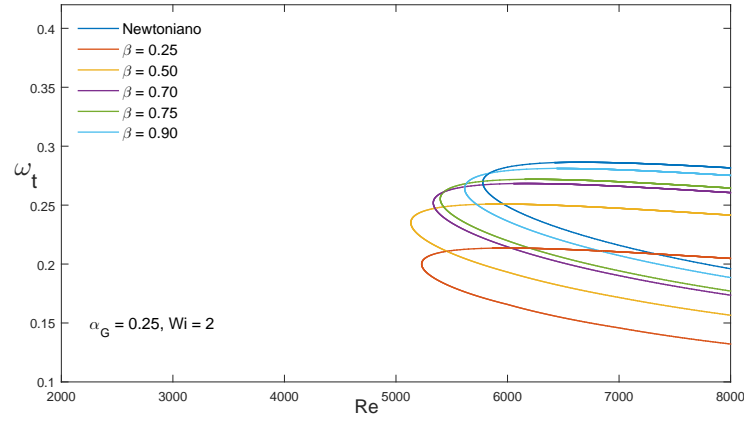
Para verificar a influência da constante β na estabilidade do escoamento de Poiseuille do fluido Giesekus foram realizadas simulações numéricas considerando fixos os parâmetros $Wi = 2$ e $\alpha_G = 0.25$ e 0.50 , para cinco diferentes valores de β : $\beta = 0.25, 0.50, 0.70, 0.75$ e 0.90 . Ainda, utilizando o código LST desenvolvido para o modelo Giesekus, foram obtidas as curvas neutras de estabilidade para cada caso e estão apresentadas na Figura 4.11, juntamente com a curva neutra para o modelo do fluido Newtoniano.

Analisando a Figura 4.11, nota-se que as curvas neutras de estabilidade do modelo Giesekus vão se aproximando da curva neutra do modelo Newtoniano, conforme o valor de β é aumentado. É possível verificar também que, com o aumento do valor de α_G (Figura 4.11 (b)), a região de instabilidade também aumentou. Esse aumento foi mais significativo nos menores valores de β , quanto mais próximo de 1 o valor de β , menor foi o aumento da região instável do modelo Giesekus.

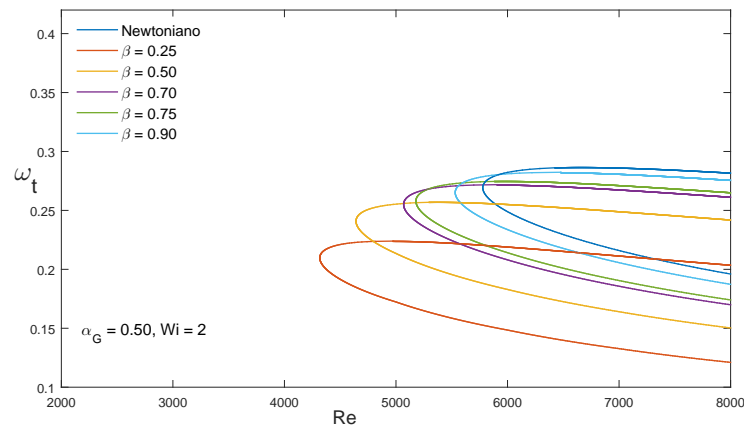
Os valores do número de Reynolds crítico também foram analisados na Figura 4.11, a fim de observar a região de estabilidade conforme a variação do parâmetro β , mantendo-se fixos dois diferentes valores de α_G . A Tabela 4.2 apresenta os valores de Reynolds crítico para os valores fixos de $Wi = 2$ e $\alpha_G = 0.25$ e 0.50 e os valores de $\beta = 0.25, 0.50, 0.70, 0.75$ e 0.90 . A Figura 4.12 mostra em detalhes esse comportamento do número de Reynolds crítico de acordo com a variação do parâmetro β .

Tabela 4.2: Valores de Re crítico referentes as curvas neutras da Figura 4.11.

	$\alpha_G = 0.25$	$\alpha_G = 0.50$
β	Re crítico	Re crítico
0.25	5230.1	4317.0
0.50	5133.5	4641.8
0.70	5334.6	5068.6
0.75	5397.2	5178.8
0.90	5615.7	5531.1



(a)



(b)

Figura 4.11: Curvas neutras para os valores de $Wi = 2.0$ e $\alpha_G = 0.25$ e 0.50 fixos e diferentes valores de β .

Na Tabela 4.2, pode-se observar que a variação da região de instabilidade é maior para $\alpha_G = 0.50$, e que essa região tem um aumento considerável, se comparado com a região de instabilidade para $\alpha_G = 0.25$ para os valores de $\beta \leq 0.50$. Para melhor compreensão dos valores mostrados na Tabela 4.2, pode-se observar a Figura 4.12.

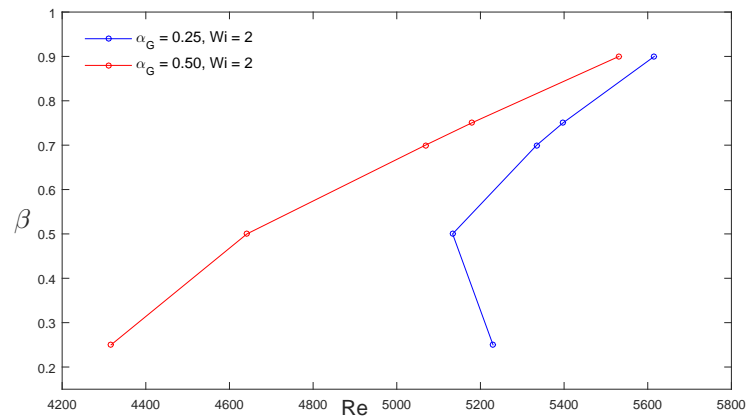
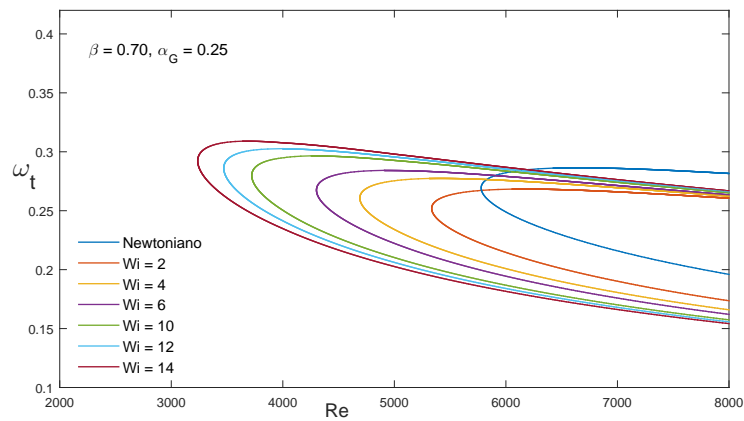


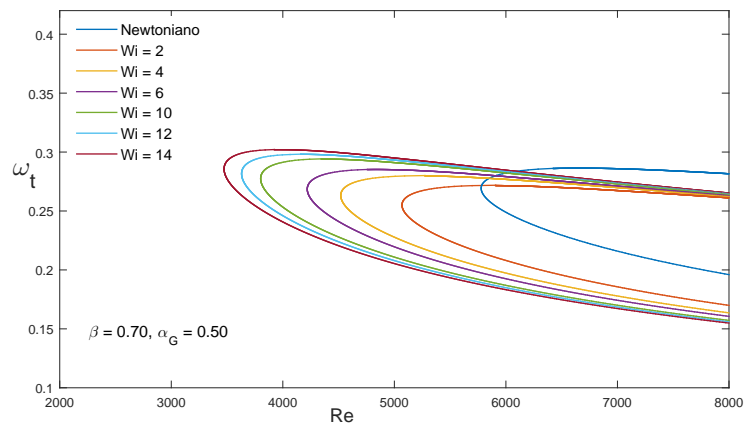
Figura 4.12: Valores de Reynolds crítico para diferentes valores de β , considerando fixos $\alpha_G = 0.25$ e 0.50 e $Wi = 2$.

Ainda com relação à análise de estabilidade linear espacial para o problema de Poiseuille utilizando o fluido Giesekus foi verificada a influência do número de Weissenberg nas simulações numéricas. Nessas simulações foram considerados os valores de Reynolds $Re = 2000$ a $Re = 8000$, dois diferentes valores de β e α_G : $\beta = 0.70, 0.90$ e $\alpha_G = 0.25, 0.50$, e ainda, seis diferentes valores de Weissenberg: $Wi = 2, 4, 6, 10, 12, 14$. As Figuras 4.13 e 4.14 mostram os resultados obtidos para as curvas neutras de estabilidade, utilizando os parâmetros mencionados acima, e também a curva neutra para o fluido Newtoniano.

Observando a Figura 4.13, para um valor de $\beta = 0.70$ fixo, e considerando os valores de $\alpha_G = 0.25$ (Figura 4.13 (a)) e $\alpha_G = 0.50$ (Figura 4.13 (b)), nota-se um comportamento monotônico do crescimento da região de instabilidade com o aumento do número de Weissenberg. E, ainda, conforme é aumentado o valor de α_G , a região de instabilidade aumenta para os valores de $Wi \leq 6$ e diminui para os valores de $Wi > 6$. Nestes casos o escoamento do fluido Newtoniano é mais estável que todos os escoamentos do fluido Giesekus.



(a)

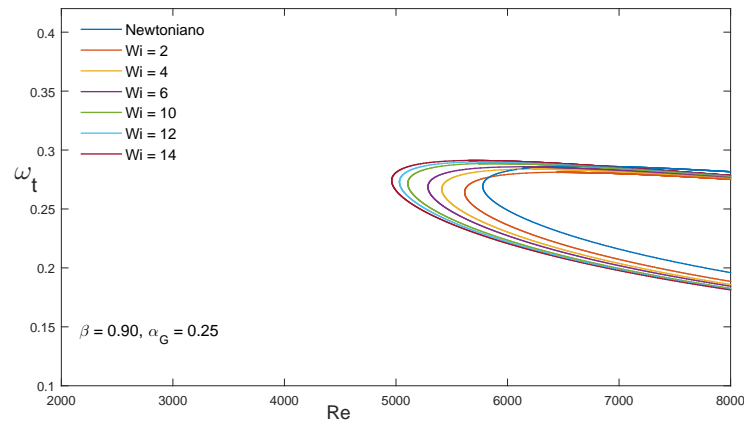


(b)

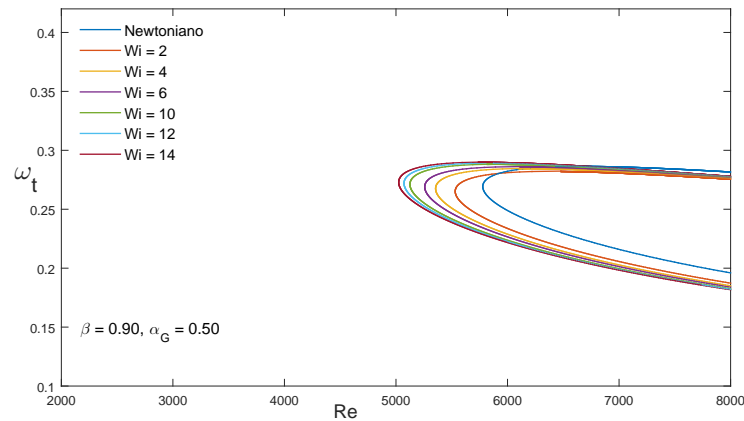
Figura 4.13: Curvas neutras para os valores de $\beta = 0.70$ e $\alpha_G = 0.25$ e 0.50 fixos e diferentes valores de Wi .

Aumentando o valor da constante β , considerando agora $\beta = 0.90$ fixo, deixando o fluido mais próximo do fluido Newtoniano e considerando os valores de $\alpha_G = 0.25$ (Figura 4.14 (a)) e $\alpha_G = 0.50$ (Figura 4.14 (b)), observa-se que a variação na região de instabilidade é menor do que a variação para $\beta = 0.70$ (Figura 4.13), mas ainda é possível perceber analisando apenas o gráfico das curvas. Por outro lado, o escoamento torna-se

mais instável com o aumento do número de Weissenberg. E, ainda, o escoamento do fluido Newtoniano é mais estável que todos os outros escoamentos do fluido Giesekus.



(a)



(b)

Figura 4.14: Curvas neutras para os valores de $\beta = 0.90$ e $\alpha_G = 0.25$ e 0.50 fixos e diferentes valores de Wi .

As Figuras 4.13 e 4.14 também mostram os valores de Reynolds crítico, ou seja, o menor valor de Reynolds onde o escoamento ainda é estável a perturbações não estacionárias. Sendo assim, esta análise pode ser vista na Tabela 4.3 e na Figura 4.15, que apresentam a variação dos valores de Reynolds crítico para cada caso considerado nas simulações variando o número de Weissenberg.

A Tabela 4.3 apresenta o número de Reynolds crítico para cada caso simulado de acordo com os parâmetros adimensionais especificados. Vale ressaltar que o número de Reynolds crítico para o fluido Newtoniano é igual a 5778.2. Observando esta tabela nota-se que o maior valor de Re crítico é igual a 5615.7 ($\beta = 0.90$, $\alpha_G = 0.25$ e $Wi = 2$) e o menor valor de Re crítico é igual a 3236.9 ($\beta = 0.70$, $\alpha_G = 0.25$ e $Wi = 14$). E, ainda, comparando os valores dessa tabela com o Re crítico do fluido Newtoniano, nota-se que os valores de Re crítico para $\beta = 0.9$ mais se aproximam do Re crítico do fluido Newtoniano, o que era esperado, uma vez que este fluido é mais próximo do fluido Newtoniano.

Tabela 4.3: Valores de Re crítico referentes as curvas neutras das Figuras 4.13 e 4.14.

	$\beta = 0.70$ $\alpha_G = 0.25$	$\beta = 0.70$ $\alpha_G = 0.50$	$\beta = 0.90$ $\alpha_G = 0.25$	$\beta = 0.90$ $\alpha_G = 0.50$
Wi	Re crítico	Re crítico	Re crítico	Re crítico
2	5334.6	5068.6	5615.7	5531.1
4	4690.6	4519.4	5411.2	5355.1
6	4301.7	4219.1	5286.7	5257.7
10	3721.5	3801.2	5106.3	5125.2
12	3470.5	3630.2	5031.3	5072.3
14	3236.9	3473.3	4961.6	5024.3

Analisando a Figura 4.15 nota-se com mais clareza a diminuição da região de instabilidade para os valores de $Wi \geq 10$ conforme o parâmetro α_G aumenta.

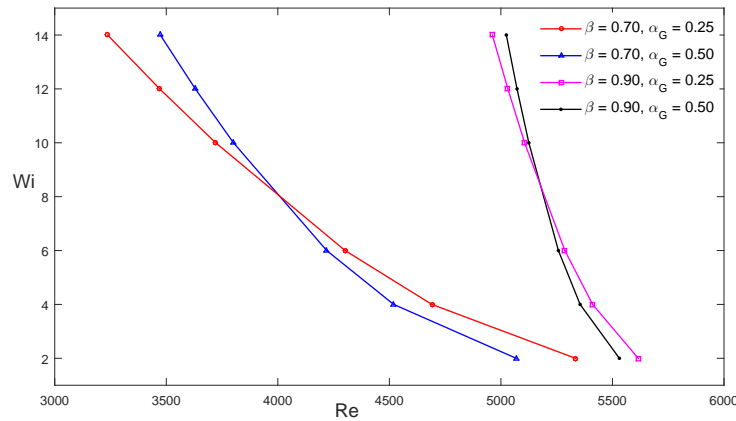


Figura 4.15: Valores de Reynolds crítico para diferentes valores de Weissenberg Wi , considerando fixos $\beta = 0.70$ e 0.90 e $\alpha_G = 0.25$ e 0.50 .

4.3 Comparação LST e DNS

Nesta seção as técnicas da simulação numérica direta e da teoria de estabilidade linear foram utilizadas para investigar a convecção de ondas de Tollmien-Schlichting no problema de Poiseuille para o fluido viscoelástico Giesekus, a fim de analisar a estabilidade do escoamento. Detalhes da técnica de simulação numérica direta para o problema de Poiseuille para um fluido viscoelástico podem ser encontrados em [9].

Simulações numéricas foram realizadas com o objetivo de obter as taxas de amplificação denotadas por α_i , uma vez que neste trabalho é realizada a análise de estabilidade espacial. De acordo com a Tabela 3.1, quando $\alpha_i < 0$ tem-se um escoamento instável, quando $\alpha_i = 0$ um escoamento neutro, e por fim, quando $\alpha_i > 0$ tem-se um escoamento estável.

Neste trabalho foi estudada a variação dos parâmetros adimensionais α_G , Re , Wi e β para diferentes parâmetros adimensionais do modelo Giesekus. Diante da classificação acima, a comparação entre os resultados obtidos para taxa de amplificação utilizando ambas as técnicas de análise de estabilidade estão apresentados nas Tabelas 4.4 a 4.11. Vale ressaltar que a frequência ω_t utilizada para as simulações numéricas foi $\omega_t = 0.2$.

As Tabelas 4.4 e 4.5 mostram a variação do parâmetro α_G do modelo Giesekus, considerando $\alpha_G = 0.0, 0.2, 0.4$ e 0.6 e os seguintes parâmetros fixos $Re = 5200$ e 8000 , $\beta = 0.9$ e $Wi = 1$ e 5 , respectivamente. Observa-se uma boa concordância dos resultados obtidos para a taxa de amplificação entre as técnicas analisadas, diferindo apenas em casas decimais.

Tabela 4.4: Classificação de estabilidade variando α_G para $Re = 5200$, $\beta = 0.9$ e $Wi = 1$.

Re	β	α_G	Wi	classificação	α_i - DNS	α_i - LST
5200	0.9	0.0	1	estável	2.07×10^{-2}	2.06×10^{-2}
5200	0.9	0.2	1	estável	1.90×10^{-2}	1.89×10^{-2}
5200	0.9	0.4	1	estável	1.85×10^{-2}	1.84×10^{-2}
5200	0.9	0.6	1	estável	1.82×10^{-2}	1.81×10^{-2}

Tabela 4.5: Classificação de estabilidade variando α_G para $Re = 8000$, $\beta = 0.9$ e $Wi = 5$.

Re	β	α_G	Wi	classificação	α_i - DNS	α_i - LST
8000	0.9	0.0	5	instável	-9.13×10^{-3}	-9.22×10^{-3}
8000	0.9	0.2	5	instável	-8.99×10^{-3}	-9.03×10^{-3}
8000	0.9	0.4	5	instável	-8.87×10^{-3}	-9.20×10^{-3}
8000	0.9	0.6	5	instável	-9.00×10^{-3}	-9.27×10^{-3}

Os resultados apresentados nas Tabelas 4.6 e 4.7 foram obtidos para os parâmetros fixos $\beta = 0.50$, $\alpha_G = 0.75$ e 0.6 , $Wi = 6$ e 2 e variando o número de Reynolds para $Re = 3000, 4000, 5000, 6000$ e 7000 , respectivamente. Estes resultados apresentam maior diferença entre os valores da taxa de amplificação, entretanto, o resultado da estabilidade do escoamento utilizando ambas as técnicas estão em concordância, tornando o resultado satisfatório.

Tabela 4.6: Classificação de estabilidade variando Re para $\beta = 0.50$, $\alpha_G = 0.75$ e $Wi = 6$.

Re	β	α_G	Wi	classificação	α_i - DNS	α_i - LST
7000	0.50	0.75	6	instável	-1.59×10^{-2}	-1.80×10^{-2}
6000	0.50	0.75	6	instável	-1.22×10^{-2}	-1.14×10^{-2}
5000	0.50	0.75	6	estável	6.00×10^{-3}	5.40×10^{-3}
4000	0.50	0.75	6	estável	3.40×10^{-3}	3.93×10^{-3}
3000	0.50	0.75	6	estável	1.90×10^{-2}	2.71×10^{-2}

Tabela 4.7: Classificação de estabilidade variando Re para $\beta = 0.50$, $\alpha_G = 0.6$ e $Wi = 2$.

Re	β	α_G	Wi	classificação	α_i - DNS	α_i - LST
7000	0.50	0.60	2	instável	-6.30×10^{-3}	-6.81×10^{-3}
6000	0.50	0.60	2	instável	-4.10×10^{-4}	-4.59×10^{-4}
5000	0.50	0.60	2	estável	7.00×10^{-3}	7.23×10^{-3}
4000	0.50	0.60	2	estável	2.00×10^{-3}	2.51×10^{-3}
3000	0.50	0.60	2	estável	3.54×10^{-2}	3.60×10^{-2}

O efeito do número de Weissenberg na estabilidade do escoamento é mostrado nas Tabelas 4.8 e 4.9 para os parâmetros fixos $Re = 3000$ e 4000 , $\beta = 0.60$ e $\alpha_G = 0.2$ e 0.0 ,

respectivamente. A Tabela 4.8 mostra a variação de altos valores de Weissenberg como $Wi = 7, 10$ e 12 , enquanto que a Tabela 4.9 mostra baixos valores de Weissenberg como $Wi = 1, 3$ e 5 . Os resultados dessas tabelas mostram o mesmo comportamento dos casos anteriores das Tabelas 4.6 e 4.7.

Tabela 4.8: Classificação de estabilidade variando Wi para $Re = 3000$, $\beta = 0.60$ e $\alpha_G = 0.2$.

Re	β	α_G	Wi	classificação	α_i - DNS	α_i - LST
3000	0.60	0.2	7	estável	3.04×10^{-2}	3.95×10^{-2}
3000	0.60	0.2	10	estável	2.00×10^{-2}	2.54×10^{-2}
3000	0.60	0.2	12	estável	3.00×10^{-2}	3.77×10^{-2}

Tabela 4.9: Classificação de estabilidade variando Wi para $Re = 4000$, $\beta = 0.60$ e $\alpha_G = 0.0$.

Re	β	α_G	Wi	classificação	α_i - DNS	α_i - LST
4000	0.60	0.0	1	estável	2.18×10^{-2}	2.34×10^{-2}
4000	0.60	0.0	3	estável	3.28×10^{-2}	3.84×10^{-2}
4000	0.60	0.0	5	estável	4.77×10^{-2}	4.33×10^{-2}

Para verificar a variação da constante β na estabilidade do escoamento foram realizadas simulações numéricas considerando os parâmetros fixos $Re = 6000$ e 7000 , $\alpha_G = 0.75$ e 0.25 e $Wi = 2$, que estão mostradas nas Figuras 4.10 e 4.11, respectivamente. Os valores da constante β considerados nas simulações numéricas foram $\beta = 0.25, 0.50$ e 0.75 . Os resultados dessas tabelas apresentam uma pequena diferença entre os valores da taxa de amplificação, observando que os resultados mais distantes podem ser vistos para $\beta = 0.75$. Todavia, o resultado da estabilidade do escoamento utilizando ambas as técnicas estão em concordância, tornando o resultado satisfatório.

Tabela 4.10: Classificação de estabilidade variando β para $Re = 6000$, $\alpha_G = 0.75$ e $Wi = 2$.

Re	β	α_G	Wi	classificação	α_i - DNS	α_i - LST
6000	0.25	0.75	2	estável	1.06×10^{-2}	1.00×10^{-2}
6000	0.50	0.75	2	estável	6.20×10^{-3}	6.53×10^{-3}
6000	0.75	0.75	2	estável	3.30×10^{-3}	8.70×10^{-2}

Tabela 4.11: Classificação de estabilidade variando β para $Re = 7000$, $\alpha_G = 0.25$ e $Wi = 2$.

Re	β	α_G	Wi	classificação	α_i - DNS	α_i - LST
7000	0.25	0.25	2	estável	3.70×10^{-3}	3.3×10^{-3}
7000	0.50	0.25	2	estável	1.01×10^{-2}	1.82×10^{-2}
7000	0.75	0.25	2	estável	1.00×10^{-3}	8.1×10^{-2}

Por fim, para todos os casos simulados, os resultados são satisfatórios, mostrando que ambas as técnicas, DNS e LST, são coerentes nas análises de estabilidade dos escoamentos de fluidos viscoelásticos. Analisando os resultados obtidos presentes nas Tabelas 4.4 a 4.11,

pode-se observar que a diferença dos resultados entre as técnicas estão apenas nos valores encontrados para a taxa de amplificação.

Os detalhes do código implementado para a técnica DNS estão descritos em [33].

Conclusão

Neste trabalho foram apresentadas as equações que modelam escoamentos incompressíveis, isotérmicos, bidimensionais, para um fluido não-Newtoniano do tipo viscoelástico, utilizando a equação constitutiva Giesekus. Essas equações foram apresentadas em suas formas dimensional e adimensional, em detalhes.

As técnicas de Teoria de Estabilidade Linear e Simulação Numérica Direta foram utilizadas para investigar a estabilidade dos escoamentos a perturbações não estacionárias de fluidos viscoelásticos, em particular, no problema de Poiseuille plano.

Utilizando a Teoria de Estabilidade Linear foi apresentada a dedução detalhada da equação de Orr-Sommerfeld para o fluido viscoelástico do tipo Giesekus, e as equações dos tensores não-Newtonianos presentes nesta equação. A solução da equação de Orr-Sommerfeld corresponde a um problema de autovalor, que foi resolvido utilizando o método da estimativa. E, ainda, detalhes da resolução desta equação pode ser encontrado no Apêndice A.

Neste trabalho foi utilizada somente a análise espacial para investigar a estabilidade de escoamentos de fluidos viscoelásticos utilizando a Teoria de Estabilidade Linear, através das curvas neutras de estabilidade. As componentes do escoamento base também foram apresentadas para diferentes parâmetros adimensionais do modelo Giesekus adotados nas simulações numéricas.

As curvas neutras de estabilidade foram avaliadas somente através das perturbações bidimensionais e, ainda, os resultados do fluido Giesekus foram comparados com os resultados dos fluidos Oldroyd-B ($\alpha_G = 0$) e Newtoniano, para diferentes valores de parâmetros adimensionais desses modelos. Além disso, a influência dos parâmetros adimensionais presentes no modelo Giesekus tais como α_G , β e Wi foram estudados, considerando os valores de Reynolds de $Re = 2000$ a $Re = 8000$.

Os resultados numéricos obtidos variando-se o parâmetro α_G foram realizados para quatro diferentes valores de α_G , $\alpha_G = 0, 0.25, 0.50$ e 0.75 e diferentes valores de β e Wi . A maioria das curvas neutras de estabilidade mostraram que o escoamento do fluido Newtoniano é mais estável que os escoamentos do fluido Giesekus, exceto para o caso em que foram considerados os parâmetros $\beta = 0.75$ e $Wi = 10$.

Além disso, analisando os resultados numéricos da variação do parâmetro α_G percebeu-se que as curvas neutras para os casos de $\alpha_G = 0$ e 0.25 apresentaram um deslocamento considerável, em que simulações numéricas foram realizadas para os valores de $0 \leq \alpha_G \leq 0.25$ e constatou-se que pequenas variações no parâmetro α_G apresentaram grandes variações na estabilidade do escoamento do modelo considerado. E, ainda, foi realizada uma análise do número de Reynolds crítico, variando-se o parâmetro α_G , em

que essa análise auxiliou a compreender como a região de estabilidade varia com este parâmetro.

A influência da constante β , que controla a contribuição do solvente Newtoniano no fluido, também foi estudada para analisar a estabilidade do escoamento de Poiseuille do fluido Giesekus e foram realizadas simulações numéricas considerando cinco diferentes valores de β , $\beta = 0.25, 0.50, 0.70, 0.75$ e 0.90 , para diferentes valores de α_G e Wi . Os resultados numéricos mostraram que as curvas neutras de estabilidade do modelo Giesekus foram se aproximando da curva neutra do modelo Newtoniano, conforme o valor de β foi aumentado, o que está coerente com a literatura, pois quando β se aproxima de 1 no modelo considerado, maior a quantidade de solvente Newtoniano no fluido. E, também, os valores do número de Reynolds crítico foram analisados para observar a região de estabilidade conforme a variação do parâmetro β .

O efeito das forças elásticas, dada pelo número de Weissenberg (Wi), na estabilidade do escoamento foi simulado para seis diferentes valores de Weissenberg, a saber $Wi = 2, 4, 6, 10, 12, 14$ e diferentes valores de α_G e β . As curvas neutras de estabilidade mostraram que o escoamento tornou-se mais instável com o aumento do número de Weissenberg. E, também, pode-se concluir que o escoamento do fluido Newtoniano foi mais estável que todos os outros escoamentos do fluido Giesekus. Neste caso, os valores do número de Reynolds crítico também foram avaliados com a variação do número de Weissenberg.

Diante da dificuldade em comparar os resultados obtidos neste trabalho com resultados da literatura, uma outra técnica de análise da estabilidade, a Simulação Numérica Direta, foi utilizada neste trabalho. Com intuito de investigar a convecção de ondas de Tollmien-Schlichting no problema de Poiseuille para o fluido viscoelástico Giesekus, avaliando as taxas de amplificação, diferentes simulações numéricas foram realizadas variando-se os parâmetros adimensionais para o escoamento de fluido viscoelástico e comparando com o escoamento de fluido Newtoniano.

Os resultados numéricos obtidos utilizando ambas as técnicas DNS e LST foram satisfatórios e importantes na análise da estabilidade de escoamentos viscoelásticos, visto que não existem muitos resultados na literatura para o modelo de fluido viscoelástico Giesekus. Sendo esta a principal contribuição científica deste trabalho, disponibilizando resultados atuais a partir de uma ferramenta numérica importante na verificação da estabilidade de escoamentos bidimensionais utilizando o fluido Giesekus.

Referências

- [1] Y. Adam. Highly accurate compact methods and boundary conditions. *Journal of Computational Physics*, 24:10–22, 1977.
- [2] M. Avgousti; A. N. Beris. Non-axisymmetric modes in viscoelastic Taylor-Couette flow. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 50(2):225 – 251, 1993.
- [3] R. B. Bird; P. J. Dotson; N. L. Johnson. Polymer solution rheology based on a finitely extensible bead-spring chain model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 7:213 – 235, 1980.
- [4] A. Brandt. Multilevel adaptative solutions to boundary values problems. *Mathematics of Computation*, 31:333–390, 1977.
- [5] E. Brasseur; M. Fyrillas; G. Georgiou; M. Crochet. The time-dependent extrudate-swell problem of an Oldroyd-B fluid with slip along the wall. *Journal of Rheology*, 42:549–566, 1994.
- [6] H. F. Fasel; U. Rist; U. Konzelmann. Numerical investigation of the three-dimensional development in boundary-layer transition. *AIAA Journal*, 28:29–37, 1990.
- [7] L. L. Ferrás; J. M. Nóbrega; F. T. Pinho. Analytical solutions for channel flows of Phan-Thien-Tanner and Giesekus fluids under slip. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 171:97–105, 2012.
- [8] J. H. Ferziger; M. Peric. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1997.
- [9] E. S. Gervazoni. Análise de estabilidade linear de escoamentos bidimensionais do fluido Oldroyd-B. Master’s thesis, Universidade Estadual Paulista, 2016.
- [10] H. Giesekus. A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2:69–109, 1982.
- [11] M. Golubitsky; D. G. Schaeffer. *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, volume I. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [12] M. Golubitsky; D. G. Schaeffer; I. N. Stewart . *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, volume II. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [13] M. Kloker. A robust high-resolution split-type compact FD scheme for spatial direct numerical simulation of boundary-layer transition. *Applied Scientific Research*, 59:353–377, 1998.

-
- [14] R. G. Larson. *Constitutive Equations for Polymer Melts and Solutions*. Butterworths, 1988.
- [15] R. G. Larson. Instabilities in viscoelastic flows. *Rheologica Acta*, 31:213–263, 1992.
- [16] R. G. Larson; E. S. G. Shaqfeh; S. J. Muller. A purely elastic instability in Taylor-Couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 218:573–600, 1990.
- [17] S. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics*, 103:16–42, 1992.
- [18] A. I. Leonov. Nonequilibrium thermodynamics and rheology of viscoelastic polymer media. *Rheologica Acta*, 15:85–98, 1976.
- [19] X. L. Luo; R. I. Tanner. A streamline element scheme for solving viscoelastic flow problems part II: Integral constitutive models. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 22:61–89, 1986.
- [20] X. L. Luo; R. I. Tanner. Finite element simulation of long and short circular die extrusion experiments using integral models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 25:9–22, 1988.
- [21] J. Mak. *Hydrodynamic Stability of Newtonian and Non-Newtonian Fluids*. PhD thesis, University of Durham, 2009.
- [22] H. L. Meitz. *Numerical Investigation of Suction in a Transitional Flat-Plate Boundary Layer*. PhD thesis, The University of Arizona, 1996.
- [23] M. T. Mendonça; M. A. F. Medeiros. *Instabilidade hidrodinâmica e transição para turbulência com aplicações em engenharia e meteorologia*. ENCIT - 2002, 2002.
- [24] G. Mompean; M. Deville. Unsteady finite volume of Oldroyd-B fluid through a three-dimensional planar contraction. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 72:253–279, 1997.
- [25] N. Phan-Thien; R. I. Tanner. A new constitutive equation derived from network theory. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2:353–365, 1977.
- [26] T. N. Phillips; A. Williams. Comparison of creeping and inertial flow of an Oldroyd-B fluid through a planar and axisymmetric contraction. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 108:25–47, 2002.
- [27] F. T. Pinho; M. A. Alves; P. J. Oliveira. Benchmark solutions for the flow of Oldroyd-B and PTT fluids in planar contractions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 10:45–75, 2003.
- [28] A. Raisi; M. Mirzazadh; A. S. Dehnavi; F. Rashidi. An approximate solution for the Couette-Poiseuille flow of the Giesekus model between parallel plates. *Rheologica Acta*, 47:75–80, 2008.
- [29] J. K. Rogenski. Desenvolvimento e otimização de um código paralelizado para simulação de escoamentos incompressíveis. Master's thesis, Universidade de São Paulo, 2011.
- [30] H. Schlichting. *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill, IncH., 1979.

- [31] G. Schleiniger; R. J. Weinacht. Steady Poiseuille flows for a Giesekus fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 40:79–102, 1991.
- [32] E. S. G. Shaqfeh; S. J. Muller; R. G. Larson. The effects of gap width and dilute solution properties on the viscoelastic Taylor-Couette instability. *Journal of Fluid Mechanics*, 235:285–317, 1992.
- [33] A. A. Silva. Simulação numérica da estabilidade de escoamentos de um fluido Giesekus. Master's thesis, Universidade de São Paulo, 2018.
- [34] L. F. Souza. *Instabilidade centrífuga e transição para turbulência em escoamentos laminares sobre superfícies côncavas*. PhD thesis, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2003.
- [35] L. F. Souza; A. C. Brandi; M. T. Mendonça. *Estabilidade de Escoamentos de Fluidos não-Newtonianos*, volume 10, pages 101–160. In: *Turbulência*, 1 edition, 2016.
- [36] L. F. Souza; M. T. Mendonça; M. A. F. Medeiros. The advantages of using high-order finite differences schemes in laminar-turbulent transition studies. *International Journal for Numerical Methods Fluids*, 48:565–592, 2005.
- [37] K. Stüben; U. Trottenberg. *Nonlinear multigrid methods, the full approximation scheme*, chapter 5, pages 58–71. Köln-Porz, 1981.
- [38] R. Sureshmukar; A. N. Beris. Linear stability analysis of viscoelastic Poiseuille flow using an Arnoldi-based orthogonalization algorithm. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 56:151 – 182, 1995.
- [39] S. M. Taghavi; N. Khabazi; K. Sadeghy. Hydromagnetic linear instability analysis of Giesekus fluids in plane Poiseuille flow. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 14:2046–2055, 2009.
- [40] J. A. White; A. B. Metzner. Development of constitutive equations for polymeric melts and solutions. *Journal of Applied Polymer Science*, 7:1867–1889, 1963.
- [41] J. Y. Yoo; H. C. Choi. On the steady simple shear flows of the one-mode Giesekus fluid. *Rheologica Acta*, 28:13–24, 1989.
- [42] M. Zhang; I. Lashgari; T. A. Zaki; L. Brandt. Linear stability analysis of channel flow of viscoelastic Oldroyd-B and FENE-P fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 737:249 – 279, 2013.

Resolução da Equação de Orr-Sommerfeld para o fluido Giesekus

Neste apêndice é descrito em detalhes o tratamento necessário para obtenção da solução da equação de Orr-Sommerfeld modificada para um fluido do tipo Giesekus.

Para obter a solução da equação de Orr-Sommerfeld é utilizado um método numérico para solução de equações diferenciais ordinárias, no entanto, as componentes que correspondem ao escoamento presentes na equação precisam ser conhecidas, ou seja, as componentes T^{xy} , $\frac{dT^{xy}}{dy}$, $\frac{d^2T^{xy}}{dy^2}$, $\frac{dT^{xx}}{dy}$ e $\frac{dT^{yy}}{dy}$ necessitam ser calculadas para que seja possível resolver a equação de Orr-Sommerfeld a cada passo do método da estimativa,

$$\begin{aligned} \frac{d^4\bar{v}}{dy^4} - \left[i(\alpha U - \omega) \frac{Re}{\beta} + 2\alpha^2 \right] \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} + \left[i \frac{Re\alpha}{\beta} \frac{d^2U}{dy^2} + i \frac{Re\alpha^2}{\beta} (U\alpha - \omega) + \alpha^4 \right] \bar{v} + \\ + \frac{Re}{\beta} \left[\alpha^2 \frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} - i\alpha \frac{d^2\bar{T}^{xy}}{dy^2} - i\alpha^3 \bar{T}^{xy} - \alpha^2 \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} \right] = 0. \end{aligned} \quad (A.1)$$

Portanto, a equação de Orr-Sommerfeld necessita do valor dos tensores \bar{T}^{xx} , \bar{T}^{xy} e \bar{T}^{yy} . A dificuldade surge justamente pelo fato de que as equações dos tensores para o fluido Giesekus formam um sistema, visto que as equações são dependentes uma da outra. Logo, é necessário realizar uma manipulação para que seja possível tratar essa dependência e obter os valores para os tensores sem maiores dificuldades. Considerando as equações

$$\begin{aligned} \bar{T}^{xx} \left(1 - i\omega Wi + i\alpha U Wi + \frac{2\alpha Wi Re}{(1-\beta)} \hat{T}^{xx} \right) = -\frac{2(1-\beta)}{Re} \frac{d\bar{v}}{dy} - Wi \frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} \bar{v} - \\ - 2Wi \hat{T}^{xx} \frac{d\bar{v}}{dy} + 2\frac{i}{\alpha} Wi \hat{T}^{xy} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} + 2Wi \frac{dU}{dy} \bar{T}^{xy} - \frac{2\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \hat{T}^{xy} \underbrace{\left[\bar{T}^{xy} \right]}, \end{aligned} \quad (A.2)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}^{xy} \left(1 - i\omega Wi + i\alpha U Wi + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} (\hat{T}^{xx} + \hat{T}^{yy}) \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} (i\alpha \bar{v} + \frac{i}{\alpha} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2}) - Wi \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} \bar{v} + \\ + i\alpha Wi \hat{T}^{xx} \bar{v} + Wi \underbrace{\left[\bar{T}^{yy} \right]} \frac{dU}{dy} + Wi \frac{i}{\alpha} \hat{T}^{yy} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} - \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \hat{T}^{xy} \underbrace{\left[\bar{T}^{xx} + \bar{T}^{yy} \right]}, \end{aligned} \quad (A.3)$$

$$\begin{aligned} \overline{T}^{yy} \left(1 - i\omega Wi + i\alpha U Wi + \frac{2\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \hat{T}^{yy} \right) &= \frac{2(1-\beta)}{Re} \frac{d\bar{v}}{dy} - Wi \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} \bar{v} + \\ &+ 2i\alpha Wi \hat{T}^{xy} \bar{v} + 2Wi \hat{T}^{yy} \frac{d\bar{v}}{dy} - \frac{2\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \hat{T}^{xy} \underbrace{\left[\overline{T}^{xy} \right]}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Os termos marcados $\underbrace{\left[\right]}$ precisam ser isolados para permitir o cálculo de T^{xy} em função de T^{xx} e T^{yy} .

A fim de simplificar a notação são realizadas as seguintes mudanças de variáveis:

$$\begin{aligned} g_{xx} &= \left(1 - i\omega Wi + i\alpha U Wi + \frac{2\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \hat{T}^{xx} \right), \\ g_{xy} &= \left(1 - i\omega Wi + i\alpha U Wi + \frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} (\hat{T}^{xx} + \hat{T}^{yy}) \right), \\ g_{yy} &= \left(1 - i\omega Wi + i\alpha U Wi + \frac{2\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \hat{T}^{yy} \right), \end{aligned}$$

e

$$f1_{xx} = -\frac{2(1-\beta)}{Re} \frac{d\bar{v}}{dy} - Wi \frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} \bar{v} - 2Wi \hat{T}^{xx} \frac{d\bar{v}}{dy} + 2\frac{i}{\alpha} Wi \hat{T}^{xy} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2},$$

$$f2_{xx} = 2Wi \frac{dU}{dy} - \frac{2\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \hat{T}^{xy},$$

$$f1_{xy} = \frac{(1-\beta)}{Re} (i\alpha \bar{v} + \frac{i}{\alpha} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2}) - Wi \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} \bar{v} + i\alpha Wi \hat{T}^{xx} \bar{v} + Wi \frac{i}{\alpha} \hat{T}^{yy} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2},$$

$$f2_{xy} = Wi \frac{dU}{dy},$$

$$f3_{xy} = -\frac{\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \hat{T}^{xy},$$

e

$$f1_{yy} = \frac{2(1-\beta)}{Re} \frac{d\bar{v}}{dy} - Wi \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} \bar{v} + 2i\alpha Wi \hat{T}^{xy} \bar{v} + 2Wi \hat{T}^{yy} \frac{d\bar{v}}{dy},$$

$$f2_{yy} = -\frac{2\alpha_G Wi Re}{(1-\beta)} \hat{T}^{xy}.$$

Essas mudanças tornam as equações dos tensores como

$$g_{xx} \overline{T}^{xx} = f1_{xx} + f2_{xx} \overline{T}^{xy},$$

$$\overline{T}^{xx} = \frac{f1_{xx} + f2_{xx} \overline{T}^{xy}}{g_{xx}}, \quad (\text{A.5})$$

$$g_{xy} \overline{T}^{xy} = f1_{xy} + f2_{xy} \overline{T}^{yy} + f3_{xy} (\overline{T}^{xx} + \overline{T}^{yy}), \quad (\text{A.6})$$

$$\bar{T}^{yy} = \frac{f1_{yy} + f2_{yy}\bar{T}^{xy}}{g_{yy}}. \quad (\text{A.7})$$

Pode-se agora calcular as derivadas das expressões dos tensores, uma vez que \bar{T}^{xx} e \bar{T}^{yy} aparecem explicitamente na equação de Orr-Sommerfeld somente como derivada primeira. Portanto, tem-se

$$\frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} = \frac{1}{g_{xx}} \left(f1'_{xx} + f2'_{xx}\bar{T}^{xy} + f2_{xx}\frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} \right) - (f1_{xx} + f2_{xx}\bar{T}^{xy})\frac{dg_{xx}}{dy}\frac{1}{g_{xx}^2}, \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} = \frac{1}{g_{yy}} \left(f1'_{yy} + f2'_{yy}\bar{T}^{xy} + f2_{yy}\frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} \right) - (f1_{yy} + f2_{yy}\bar{T}^{xy})\frac{dg_{yy}}{dy}\frac{1}{g_{yy}^2}. \quad (\text{A.9})$$

Utilizando as equações (A.5) e (A.7) na equação (A.6) para isolar o termo \bar{T}^{xy} do lado esquerdo, de modo que o lado direito não contenha os termos \bar{T}^{xx} e \bar{T}^{yy} explicitamente, tem-se a equação

$$g_{xy}\bar{T}^{xy} = f1_{xy} + f2_{xy} \left(\frac{f1_{yy} + f2_{yy}\bar{T}^{xy}}{g_{yy}} \right) + f3_{xy} \left(\frac{f1_{xx} + f2_{xx}\bar{T}^{xy}}{g_{xx}} \right) + f3_{xy} \left(\frac{f1_{yy} + f2_{yy}\bar{T}^{xy}}{g_{yy}} \right).$$

Reagrupando os termos que contém \bar{T}^{xy} do lado esquerdo da equação, tem-se

$$\begin{aligned} \left(g_{xy} - \frac{f2_{xy}f2_{yy}}{g_{yy}} - \frac{f3_{xy}f2_{xx}}{g_{xx}} - \frac{f3_{xy}f2_{yy}}{g_{yy}} \right) \bar{T}^{xy} &= \\ &= f1_{xy} + \frac{f2_{xy}f1_{yy}}{g_{yy}} + \frac{f3_{xy}f1_{xx}}{g_{xx}} + \frac{f3_{xy}f1_{yy}}{g_{yy}}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Para o cálculo da derivada de \bar{T}^{xy} deve-se usar a equação (A.10), que já não está mais escrita em termos de \bar{T}^{xx} e \bar{T}^{yy} explicitamente.

Reescrevendo a equação (A.10) como

$$\bar{T}^{xy} = \frac{1}{\left(g_{xy} - \frac{f2_{xy}f2_{yy}}{g_{yy}} - \frac{f3_{xy}f2_{xx}}{g_{xx}} - \frac{f3_{xy}f2_{yy}}{g_{yy}} \right)} \left[f1_{xy} + \frac{f2_{xy}f1_{yy}}{g_{yy}} + \frac{f3_{xy}f1_{xx}}{g_{xx}} + \frac{f3_{xy}f1_{yy}}{g_{yy}} \right].$$

Os termos que contém a derivada segunda de v são os termos que geram a derivada quarta, após efetuar o cálculo da segunda derivada de \bar{T}^{xy} . Como esses termos devem ser isolados na equação de Orr-Sommerfeld, reescreve-se as equações de $f1_{xx}$ e $f1_{xy}$ para que seja possível isolar as segundas derivadas de v . Assim, tem-se que

$$f1_{xx} = f1a_{xx} + f1b_{xx}\frac{d^2\bar{v}}{dy^2}, \quad (\text{A.11})$$

onde

$$f1a_{xx} = -\frac{2(1-\beta)}{Re}\frac{d\bar{v}}{dy} - Wi\frac{d\hat{T}^{xx}}{dy}\bar{v} - 2Wi\hat{T}^{xx}\frac{d\bar{v}}{dy},$$

$$f1b_{xx} = 2\frac{i}{\alpha}Wi\hat{T}^{xy},$$

e

$$f1_{xy} = f1a_{xy} + f1b_{xy}\frac{d^2\bar{v}}{dy^2}, \quad (\text{A.12})$$

onde

$$f1a_{xy} = \frac{(1-\beta)}{Re}i\alpha\bar{v} - Wi\frac{d\hat{T}^{xy}}{dy}\bar{v} + i\alpha Wi\hat{T}^{xx}\bar{v},$$

$$f1b_{xy} = Wi\frac{i}{\alpha}\hat{T}^{yy} + \frac{(1-\beta)}{Re}\frac{i}{\alpha}.$$

Reescrevendo a equação de T^{xy} com essas mudanças, tem-se

$$\begin{aligned} \bar{T}^{xy} &= \frac{1}{\left(g_{xy} - \frac{f2_{xy}f2_{yy}}{g_{yy}} - \frac{f3_{xy}f2_{xx}}{g_{xx}} - \frac{f3_{xy}f2_{yy}}{g_{yy}}\right)} \left[\frac{f2_{xy}f1_{yy}}{g_{yy}} + \frac{f3_{xy}f1_{yy}}{g_{yy}} \right] + \\ &+ \frac{1}{\left(g_{xy} - \frac{f2_{xy}f2_{yy}}{g_{yy}} - \frac{f3_{xy}f2_{xx}}{g_{xx}} - \frac{f3_{xy}f2_{yy}}{g_{yy}}\right)} \left[f1a_{xy} + \frac{f3_{xy}}{g_{xx}}f1a_{xx} \right] + \\ &+ \frac{1}{\left(g_{xy} - \frac{f2_{xy}f2_{yy}}{g_{yy}} - \frac{f3_{xy}f2_{xx}}{g_{xx}} - \frac{f3_{xy}f2_{yy}}{g_{yy}}\right)} \left[f1b_{xy} + \frac{f3_{xy}}{g_{xx}}f1b_{xx} \right] \frac{d^2\bar{v}}{dy^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Com o intuito de simplificar o cálculo das derivadas, realiza-se a seguinte mudança

$$\bar{T}^{xy} = h1 + h2\frac{d^2\bar{v}}{dy^2}. \quad (\text{A.14})$$

Calculando as derivadas, tem-se

$$\frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} = \frac{dh1}{dy} + \frac{dh2}{dy}\frac{d^2\bar{v}}{dy^2} + h2\frac{d^3\bar{v}}{dy^3}, \quad (\text{A.15})$$

e

$$\frac{d^2\bar{T}^{xy}}{dy^2} = \frac{d^2h1}{dy^2} + \frac{d^2h2}{dy^2}\frac{d^2\bar{v}}{dy^2} + 2\frac{dh2}{dy}\frac{d^3\bar{v}}{dy^3} + h2\frac{d^4\bar{v}}{dy^4}, \quad (\text{A.16})$$

ou

$$\frac{d^2\bar{T}^{xy}}{dy^2} = h3 + h2\frac{d^4\bar{v}}{dy^4}. \quad (\text{A.17})$$

Na equação de Orr-Sommerfeld, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d^4\bar{v}}{dy^4} &= \frac{1}{\left(1 - i\alpha\frac{Re}{\beta}h2\right)} \left\{ \left[i(\alpha U - \omega)\frac{Re}{\beta} + 2\alpha^2 \right] \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} - \left[i\frac{Re\alpha}{\beta}\frac{d^2U}{dy^2} + i\frac{Re\alpha^2}{\beta}(U\alpha - \omega) + \alpha^4 \right] \bar{v} \right. \\ &\quad \left. - \frac{Re}{\beta} \left[\alpha^2\frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} - i\alpha h3 - i\alpha^3\bar{T}^{xy} - \alpha^2\frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Após essa manipulação é possível resolver a equação de Orr-Sommerfeld para os parâmetros desejados, a partir dos valores das variáveis do escoamento base.