UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA

MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

O PAPEL DOS GESTOS NO ESTUDO DE GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

ANDRÉ FERREIRA DE LIMA

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

Rio Claro, SP
2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas - IGCE
Câmpus de Rio Claro

ANDRÉ FERREIRA DE LIMA

O papel dos gestos no estudo de geometria espacial de posição

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.
Orientadora: Profa. Dra. Rúbia Barcelos Amaral

Rio Claro – SP
2025

L732p

Lima, André Ferreira de
O papel dos gestos no estudo de geometria espacial de posição / André Ferreira de Lima. -- Rio Claro, 2025
337 p.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientadora: Rúbia Barcelos Amaral

1. Materialização de conceitos da geometria espacial de posição. 2. Significados dos gestos. 3. Linguagem corporal. 4. Visualização. 5. Representação gestual. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Dados fornecidos pelo autor(a).

IMPACTO POTENCIAL DESTA PESQUISA

Esta tese contribui para o conhecimento acerca do papel dos gestos no estudo de Geometria Espacial de Posição, oferecendo dados e análises para interlocuções entre pesquisas na área e possíveis significados dos gestos produzidos por futuros professores de Matemática. As discussões potencializam outras formas de expressão do conhecimento matemático, em particular, a linguagem corporal e, podem ser ampliadas para distintos contextos educacionais, atores e etapas da educação.

POTENTIAL IMPACT OF THIS RESEARCH

This thesis contributes to the body of knowledge regarding the role of gestures in the study of Spatial Geometry of Position, providing data and analyses for dialogues between research in the field and the possible meanings of gestures produced by prospective Mathematics teachers. The discussions enhance alternative ways of expressing mathematical knowledge, particularly through body language, and can be extended to different educational contexts, actors, and stages of education.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas - IGCE
Câmpus de Rio Claro

ANDRÉ FERREIRA DE LIMA

O PAPEL DOS GESTOS NO ESTUDO DE GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Comissão Examinadora:
Profa. Dra. Rúbia Barcelos Amaral (Orientadora)
Universidade Estadual Paulista – Rio Claro/SP

Prof. Dr. Bruno Leite Ferreira
Universidade Federal de Pernambuco – Recife/PE

Prof. Dr. José Carlos Pinto Leivas
Universidade Franciscana – Santa Maria/RS

Prof. Dr. George William Bravo de Oliveira
Fundação de Apoio à Escola Técnica – Rio de Janeiro/RJ

Prof. Dr. Marcelo Almeida Bairral
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – Seropédica/RJ

Conceito: Aprovado

Rio Claro (SP), 31 de março de 2025

DEDICATÓRIA

Dedico esta tese aos meus pais, Antônia e Luís, por todo o esforço que fizeram para educar e transformar a vida dos seus filhos por meio da educação. Isso se mostrou em diversos momentos, em particular quando mudaram da vida campesina para a urbana com a intenção de garantir um melhor acesso à Educação nossa. E foram em busca dos seus sonhos: "já cansados desta luta / Vão pra terras diferentes / Com fé em novas labutas / Pra poder segurar o batente / Com a família pela estrada / Com trouxas e sacos na mão / Com esperança na alvorada / De poder ganhar o chão / E sonham em serem felizes..." (Gilson de Jesus, 1983).

AGRADECIMENTOS

Todos os dias de minha vida agradeço a Deus pelas conquistas alcançadas. Concluir o curso de doutorado em Educação Matemática é motivo de uma gratidão infinita ao Deus-pai que me guiou e me dá sabedoria todos os dias para enfrentar os obstáculos que a vida me revela.

Agradeço à minha família, por estar presente em todos os momentos. Em particular, aos meus pais Antônia, maior guerreira e batalhadora que já conheci e Luís, homem que não mediu esforços para colocar alimento todos os dias em nosso lar. Aos meus irmãos e irmãs: Adriana, Adriano, Juliana, Leandro e Luciana, por acreditarem e se orgulharem de mim. Aos meus sobrinhos(as): Emanuele, Eloá, Sofia e Théo, sementes plantadas por nós para que possam contribuir com um mundo mais humano, responsável pelo meio ambiente, inclusivo e solidário.

Agradeço aos (às) meus (minhas) primos (as), Ivan, Vandinha, Kaíque e Luís, por terem me acolhido tão bem na cidade de São Paulo, por ter me buscado e levado diversas vezes no aeroporto internacional de Guarulhos e no terminal rodoviário do Tietê. Estendo esse agradecimento ao meu tio de coração, Edmilson, sempre preocupado comigo.

Agradeço à Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” pela oportunidade concedida para que eu, professor da Educação Básica e nordestino, pudesse estar inserido em um Programa de Pós-Graduação na área de Educação Matemática. *Que esse espaço acadêmico seja ocupado por muito mais educadores daquela etapa da educação. Que as pesquisas das universidades cheguem verdadeiramente ao chão da sala de aula.*

Agradeço à minha orientadora, Rúbia Barcelos Amaral, parceira de vários pedais e pausas para ‘pasteizinhos’ no decorrer desses anos, pela escuta atenta aos problemas pessoais que enfrentei durante essa caminhada, pelas palavras de confiança, pelos questionamentos feitos nas orientações e nas leituras dos textos enviados para a sua análise.

Agradeço aos professores que integram a comissão examinadora desta tese, que desde o momento da qualificação colaboram e atuam como protagonistas desse processo com encaminhamentos metodológicos e teóricos relevantes para o aprofundamento do texto, bem como, adotam olhares críticos, reflexivos e sugestivos que contribuíram para o êxito deste trabalho.

Agradeço às secretarias de educação: município de Zabelê-Paraíba e Estado do Pernambuco, pela concessão do afastamento remuneratório das atividades docentes pelo período de 4 anos. Esse agradecimento se estende aos (às) professores (as) que integram essas duas escolas. *O investimento por parte dos governos na educação é um pilar transformador,* *que semeia conhecimento e colhe o desenvolvimento social necessário para um futuro mais justo e sustentável*.

Agradeço aos (às) meus (minhas) queridos(as) professores(as), desde aqueles que fizeram parte da educação infantil até a Pós-Graduação, cada um de vocês deixou uma marca única na minha trajetória. Obrigado por cada aula, cada palavra de incentivo e por sempre acreditarem em mim, mesmo nos momentos em que eu mesmo duvidava. *Vocês não foram apenas mestres, mas verdadeiros(as) amigos(as) e mentores(as) que, com carinho e dedicação, fizeram o aprendizado de aventura apaixonante. Carrego comigo cada lição e cada sorriso compartilhado, eu sou eternamente grato por terem iluminado o meu caminho com tanto carinho e sabedoria.*

Aos integrantes do Grupo de Pesquisa Interlocuções entre Geometria e Educação Matemática (teorEMa), obrigado pelos encontros acadêmicos e sociais ocorridos no decorrer dessa jornada, bem como pelas valiosas contribuições que vocês deram para esta tese. Elas foram relevantes para a sistematização e aprofundamento de minha pesquisa. *Esses espaços contribuíram para a minha formação como humano, pesquisador e educador matemático*.

Agradeço ao Conselho do Programa de Pós-Graduação e aos professores do PPGEM, pelas discussões, provocações, inspirações e conhecimentos compartilhados. *Vocês já estavam presentes em minha memória e já faziam parte de meu arcabouço teórico desde o curso de graduação, realizado no estado de Pernambuco. Era um sonho conhecê-los.*

Aos (às) irmãos (irmãs) de orientação: Perovano, Ayla, Beatriz, Débora, Douglas, Luciana e Marjorie, obrigado pelas vivências e compartilhamentos de estórias, incertezas, angústias e confidências. *Juntos fomos mais fortes!*

Aos (às) colaboradores(as) da Secretaria do Programa, em especial à Inajara, pessoa incrível, espontânea, verdadeira e sempre atenta aos nossos pedidos. Também, estendo esse agradecimento à Seção Técnica de Pós-Graduação, em particular, Sandra e Rodrigo que sempre me auxiliaram com presteza nas dúvidas que tive.

Aos (às) alunos (alunas) que participaram da produção de dados desta tese, pela disponibilidade de tempo e empenho durante os momentos de produção de conhecimento matemático.

Aos (às) meus (minhas) colegas no Chile, em especial, Ana Maria, Álvaro e Fabíola, pela oportunidade de compartilhar um pouco da cultura de vocês comigo. Aos (às) professores(as) Gaona e Sandra Meza, por me receberem tão bem durante o meu estágio no exterior. Muito obrigado!

Para aqueles que se reuniram irmãos ao longo desta minha caminhada, em particular, Ezequias, Débora, Perovano, Zamir, Joseane e Eliane (Nordeste!), como foi bom contar com vocês. Obrigado por terem me escutado e pelos conselhos no decorrer desses anos, bem como por nossos encontros e viagens. Geciara, meu muito obrigado pela parceria e as diversas reuniões para estudarmos o referencial teórico. Carol Higuita, Edwin, Heinrich, Fernandes, Daise, Samanta, Renata, Tiele, Pâmela, Yancel, Rosicácia, Ailson, Hércules, Thiago, Jaimy, Rodrigo, Joel, Veruska, Wanderson e Zenildo Santos, agradeço pela colaboração, aprendizagens, confraternizações e momentos únicos que vivemos juntos. Essas vivências tornaram os dias, meses e anos em Rio Claro mais leves.

Dona Maria, minha segunda mãe. Muito obrigado pelo amor, carinho, dedicação e acolhimento em sua casa. A senhora é uma pessoa de luz que nos recebeu, conduziu, aconselhou e escutou nossas angústias, tanto acadêmicas quanto pessoais. Esse seu papel exercido foi muito importante para que mantivéssemos nossa saúde mental equilibrada, além do mais, esse pertencimento familiar fez com que a saudade que sentíamos de nossos familiares que estavam distantes fosse preenchida pelo seu amor fraterno.

Agradeço aos (às) amigos (as) pessoais, incluindo aqueles que mesmo a distância se fizeram e fazem presentes em minha vida (Iranice, Cínthia, Cícera, Francinaldo, Carlos, Silvana, Cleonice, Lourdes Moraes, Ferdiramar, José Alves e Fábio).

Agradeço às pessoas que contribuíram de modo direto e indireto para que eu pudesse realizar um curso de pós-graduação. Elas foram importantes com palavras e motivações para que eu não desanimasse. Destaque para o professor Joelson, orientador do mestrado. Tiêgo, Edivam e Gilberto, amigos que essa mesma etapa educacional me proporcionou. Além dessas pessoas virtuosas, outras marcaram suas presenças em minha memória no decorrer do doutorado, em especial Danyal.

Aos que conheci em Rio Claro/SP, em particular os(as) amigos(as) e parentes de Dona Maria que também se tornaram meus: Jair, Márcia, Luiz, Marcela, Elza, Dona Edite, Renata, Rodolfo, Marilisa, Janderson, Fernando, Angelina e Luciana. *Nas curvas da vida, risos se derramam como confetes ao vento em tardes de sol. Cada gargalhada é um verso espontâneo que colore o cotidiano com leveza e magia. Entre olhares cúmplices e conversas despretensiosas, o tempo se faz breve e encantador, desafiando a gravidade dos dias e elevando a alma em pura descontração.*

Aos professores que estiveram mais próximos ao longo da minha vida profissional, em particular os que convivem comigo, expresso minha sincera gratidão. Vocês não apenas

compartilharam seu vasto conhecimento, mas também desempenharam um papel essencial no meu desenvolvimento profissional, abrindo portas e ampliando horizontes. As conversas de corredores, os conselhos e os momentos de troca que tive com cada um de vocês foram fundamentais para a minha formação enquanto educador matemático, inspirando-me a buscar sempre o melhor e a enxergar desafios como oportunidades de crescimento. Muito obrigado por contribuírem de maneira tão profunda e rigorosa para minha jornada.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – código de financiamento 001.

Para encerrar meus agradecimentos, deixo um belo trecho da “Canção do exílio” de Gonçalves Dias, que celebra a beleza e a esperança que carrego em meu coração. *“Nosso céu tem mais estrelas / Nossas várzeas tem mais flores / Nossos bosques tem mais vidas / Nossa vida mais amores”.* Este verso simboliza a gratidão pelos encontros e aprendizados que iluminaram minha jornada. Enfim, obrigado a todos e a todas que conviveram e convivem comigo e que direta e/ou indiretamente foram peças fundamentais para que eu chegasse a essa fase de minha vida.

RESUMO

Os gestos se revelam potentes para mediar a compreensão e a produção de conhecimentos do campo da Geometria Espacial de Posição (GEP). Eles podem favorecer a construção de significados, bem como ampliar as possibilidades de interação em contextos educacionais. Esta pesquisa tem como questão norteadora: como os gestos influenciam o processo de compreensão e construção de conceitos da Geometria Espacial de Posição? De modo singular, o objetivo da investigação foi analisar como os gestos realizados durante o processo de discussão dos conceitos de GEP contribuem para a compreensão e/ou expressão desses conceitos por parte dos alunos. Este trabalho tem uma abordagem qualitativa e a produção de dados ocorreu em uma turma do curso de graduação em Matemática da Universidade Estadual Paulista, em dois momentos: o primeiro envolveu todos os alunos matriculados e frequentando a disciplina de Geometria Euclidiana Espacial (30 participantes). O segundo, experimento de ensino, ocorreu com seis duplas de alunos integrantes da referida turma, escolhidos a partir de critérios estabelecidos previamente. Esse momento foi caracterizado pela promoção de dois encontros para cada dupla de alunos, que discutiu conceitos que fazem parte da GEP. Os instrumentos de produção de dados foram: a) registros do pesquisador; b) registros escritos e figurais dos alunos tanto no questionário diagnóstico, quanto nos roteiros de atividades; e c) gravações em áudio e em vídeo dos alunos que participaram dos dois momentos da pesquisa. A análise foi realizada à luz de autores que se debruçaram a estudar os gestos em contextos gerais e, em particular, naqueles que estão sob a ótica das discussões da região de inquérito da Educação Matemática. O processo de análise se assentou nas falas, nos registros escritos, nos rabiscos, desenhos, capturas de telas para exemplificar gestos e vídeos de curta duração que ilustraram os exatos instantes em que as gesticulações foram produzidas pelos alunos. Como resultados desta pesquisa saliento que as gesticulações dos alunos são comunicativas, expressivas e exerceram uma corresponsabilidade no que tange à materialização de ideias abstratas. Além do mais, as gesticulações auxiliaram a construção do pensamento, bem como a elaboração de significados pelo discente acerca de noções primitivas da Geometria, bem como conceitos da GEP. Os dados também mostraram que muitas gesticulações foram produzidas simultaneamente ao processo de manipulação de materiais de natureza física. Essa pesquisa ainda revelou a presença das quatro dimensões gestuais, a saber, icônica, metafórica, dêitica e de batida. Portanto, perante o estudo que desenvolvi concluo que os gestos, entendidos como formas de manifestação de linguagem e pensamento, de um lado, ajudaram aos alunos gesticuladores a organizarem suas ideias durante a produção de conhecimento no que tange a alguns conceitos da GEP, bem como nas situações em que tiveram que explicar, justificar e/ou mostrar determinada propriedade geométrica. Ademais, possibilitaram aos que estavam presentes no diálogo ter uma visualização de ideias matemáticas por meio dos gestos e, por consequência disso, ter uma compreensão significativa adquirida por meio estratégias não convencionais do ponto de vista do simbolismo e do rigor matemático.

Palavras-chave: Materialização de conceitos da Geometria Espacial de Posição. Significados dos gestos. Linguagem corporal. Visualização. Representação gestual.

ABSTRACT

Gestures are powerful mediators of understanding and knowledge production in the field of Position Space Geometry (PSG). They can facilitate the construction of meanings and expand the possibilities of interaction in educational contexts. The guiding question of this research is: how do gestures influence the process of understanding and constructing concepts of Position Space Geometry? Uniquely, the objective of this research was to analyze how gestures made during the discussion of PSG concepts contribute to students' understanding of these concepts. This study has a qualitative approach and data production occurred in a class of the undergraduate Mathematics course at the Universidade Estadual Paulista, in two moments: the first involved all students enrolled and attending the Spatial Euclidean Geometry course (30 participants). The second, a teaching experiment, occurred with six pairs of students from the aforementioned class, chosen based on previously established criteria. This moment was characterized by the promotion of two meetings for each pair of students, who discussed concepts that are part of the PSG. The data production instruments were: a) researcher's records; b) written and figurative records of the students in both the diagnostic questionnaire and the activity guides; and c) audio and video recordings of the students who participated in both moments of the research. The analysis was carried out in light of authors who have studied gestures in general contexts and, in particular, those that are under the perspective of discussions in the area of inquiry of Mathematics Education. The analysis process was based on speeches, written records, scribbles, drawings and screenshots to exemplify gestures, and short videos that illustrated the exact moments in which the gestures were produced by the students. As a result of this research, I emphasize that the students' gestures are communicative, expressive and exercised a co-responsibility regarding the materialization of abstract ideas. Furthermore, the gestures helped the construction of thought, as well as the elaboration of meanings by the student about primitive notions of Geometry, as well as concepts of PSG. The data also showed that many gestures were produced simultaneously with the process of manipulating physical materials. This research also revealed the presence of four gestural dimensions, namely, iconic, metaphorical, deictic and beat. Therefore, based on the study I developed, I assume that gestures, understood as one of the forms of expression of language and thought, on the one hand, helped the gesturing students to organize their ideas during the production of knowledge regarding some PSG concepts, as well as in situations in which they had to explain, justify and/or demonstrate a certain geometric property. In addition, they allowed those present in the dialogue to visualize mathematical ideas through gestures and, as a consequence, to have a significant understanding acquired through unconventional strategies from the point of view of symbolism and mathematical accuracy.

Keywords: Materialization of Position Space Geometry concepts. Meanings of gestures. Body language. Visualization. Gestural representation.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BDTD	Biblioteca Digital de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
BOLEMA	Revista Boletim de Educação Matemática
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
DC	Diário de Campo
EJA	Educação de Jovens e Adultos
EMgep	Grupo de Pesquisa Educação Matemática: Grupo de Estudos e Pesquisas
EMP	Grupo de Pesquisa Educação Matemática: Grupo de Estudos e Pesquisas
EMR	Educação Matemática em Revista
ENALIC	Encontro Nacional das Licenciaturas
ENEM	Encontro Nacional de Educação Matemática
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
GA	Geometria Analítica
GE	Geometria Espacial
GEE	Geometria Espacial Euclidiana
GEM	Geometria Espacial Métrica
GEP	Geometria Espacial de Posição
GEPGEO	Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria
GP	Geometria Euclidiana Plana
IFI	Interpretação da Informação Figural
IFPB	Instituto Federal de Ciência e Tecnologia da Paraíba
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
JIEEM	Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática
LD	Livro Didáticos
LEEMAT	Leitura e Escrita em Educação Matemática
LEM	Laboratório de Ensino de Matemática
MD	Materiais Didáticos
MDM	Material Didático Manipulável
MM	Materiais Manipuláveis
OBEDUC	Observatório da Educação
OMS	Organização Mundial de Saúde

PED	Plano de Execução Didática
PMD	Performances Matemáticas Digitais
PNLD	Programa Nacional do Livro e do Material Didático
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
QR-CÓDIGO	Código de Resposta Rápida
REMAT	Revista Eletrônica da Matemática
REVMAT	Revista Eletrônica de Educação Matemática
RIPEM	Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática
RRS	Registros de Representação Semiótica
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SIPEM	Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática
TANGRAM	Revista de Educação Matemática
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TDICs	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação
teorEMa	Grupo de Pesquisa Interlocuções entre Geometria e Educação Matemática
TFP	Teorema Fundamental do Perpendicularismo
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba
UFCG	Universidade Federal de Campina Grande
UFN	Universidade Franciscana
UFPE	Universidade Federal do Pernambuco
UFRN	Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFscar	Universidade Federal de São Carlos
UFSM	Universidade Federal de Santa Maria
UNESP	Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho
UNIBAN	União Bandeirante de Educação
USP	Universidade de São Paulo
VP	Processamento Visual
VCD	Vídeo de Curta Duração

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta seção foi estruturada do seguinte modo: inicialmente, teço considerações sobre minha trajetória pessoal, relacionando-a ao gosto e ao encantamento que tenho pela Matemática. Depois, apresento um panorama sobre meu percurso acadêmico, desde a etapa da educação básica até à universidade. Ressalto a relevância em mencionar o meu lugar de fala e relacioná-lo com a temática que me propus a investigar. Posteriormente, exponho uma descrição sucinta acerca do hodierno cenário da Geometria na etapa do ensino médio. Também, discuto de modo sucinto algumas temáticas referentes ao conhecimento geométrico, base necessária para a compreensão de conteúdos chaves nas disciplinas que integram os cursos superiores na área de exatas, em específico os de graduação em Matemática. Em seguida, apresento objetivos, pergunta norteadora, bem como a estruturação desta pesquisa.

Compreendo que um trabalho dessa natureza é um empreendimento coletivo, tendo em vista que há diversos olhares, críticas, sugestões, acréscimos, dentre outras alterações. Um outro ponto crucial é o aprofundamento em leituras diversas, principalmente, as que compõem o quadro teórico. Entretanto, optei por escrever esta tese em primeira pessoa do singular pelo fato de que, no processo de desenvolvimento da pesquisa, é o pesquisador que senta e decide quais rumos tomar. Essa é uma tarefa produzida em um verdadeiro isolamento.

1.1 Minha Origem: um Relato

Filho de Antônia Ferreira de Lima, agricultora, gari, aposentada e, atualmente, doméstica e de Luís Nunes de Lima, agricultor, aposentado e comerciante. Ambos frequentaram a escola por pouco tempo, o suficiente para assinarem o nome. Essa é a minha origem: residente da zona rural até os 6 anos de idade, momento no qual meus pais decidiram mudar para a cidade, típico da maioria das famílias nordestinas que buscam uma qualidade de vida melhor, bem como poder dar a oportunidade de uma educação escolar aos seus filhos, uma vez que naquela época, aproximadamente há três décadas, o ensino oferecido nas localidades remotas era somente até os anos iniciais do ensino fundamental. Minha mãe teve seis filhos e os educou com amor e carinho. Sou o terceiro na linha sucessiva do tempo. Nesse contexto, meu pai e minha mãe são um casal de origem humilde da zona rural do município de Monteiro/Paraíba, região localizada no cariri paraibano.

Trabalhei desde os meus 10 anos de idade para ajudar os meus pais nas despesas da casa. Inúmeras foram as atribuições que tive. Por exemplo, vendedor de picolé, ajudante de sorveteria, de abatedouro de bovinos, garçom e entregador de encomendas de uma bomboniere. Um dos destinos do pouco dinheiro que recebia era para custear o material escolar meu e de meus irmãos e irmãs, já que meus pais não tinham condições de comprar e, além disso, nessa época, a maioria das escolas não disponibilizavam tais materiais gratuitamente.

Das minhas vivências pessoais como criança e adolescente que trabalhou germinou meu interesse pela Matemática. As tarefas que desempenhava nessas funções requeriam habilidades para realização de cálculos mentais para realizar *trocos* na venda de picolés e/ou fechar determinada comanda de clientes quando era garçom. Os horários em que trabalhava sempre foram em turnos contrários aos do turno em que estudava, isso mostra o comprometimento de meus pais com a educação de seus filhos. Todos concluíram o ensino médio com êxito. Apesar de todas as dificuldades, meus olhos nunca paravam de brilhar com um possível futuro melhor por meio de meus estudos. Sempre gostei de ir à escola e fazer diferença.

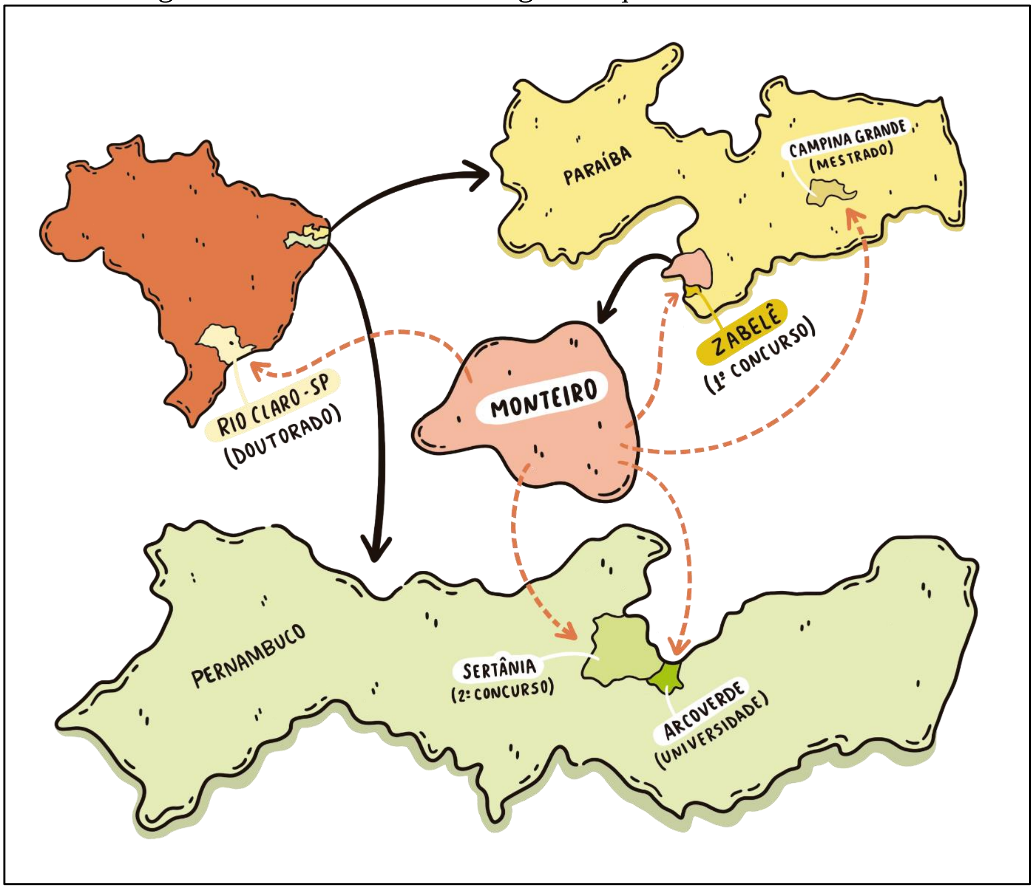
1.2 Trajetória Acadêmica e Profissional: da educação básica à universidade

Estudei todo o ensino fundamental em escolas públicas. A partir do sexto ano, optei por estudar durante o período da noite. Nessa época, ainda não estava em vigor a Educação de Jovens e Adultos (EJA). Meu propósito com essa mudança de horário foi a possibilidade de trabalhar durante o dia. Já em relação à etapa do ensino médio, uma parte dele ocorreu em escola particular. Nessa ocasião, passei a frequentar a escola no período matutino. A oportunidade que tive de estudar em uma instituição de ensino privada se deu por meio de auxílios financeiros custeados por um padre holandês que buscava recursos em seu país de origem e os trazia para dividir entre os jovens carentes de minha cidade por meio de alguns critérios com base na renda da família.

Enquanto estudante, fui parceiro e colaborador de meus ex-professores, demais funcionários e colegas de classe. Esses últimos geralmente recorriam às minhas explicações no tocante a algumas tarefas de Matemática, bem como durante o período das avaliações. O meu interesse pela Matemática escolar crescia. Esse contexto foi influenciado devido à minha facilidade em compreender os conteúdos matemáticos propostos na escola, também pela influência de professores, assim como a motivação recebida por uma parte deles. Foi com esse espírito que dei continuidade aos meus estudos. O sonho em poder realizar um curso de graduação em uma universidade pública não foi possível, mas isso não me impediu de continuar galgando cada vez mais degraus.

Em 2005, logo após a conclusão do ensino médio, submeti-me ao exame de vestibular para o curso de licenciatura plena em Matemática em uma instituição privada. Nesse período, continuei recebendo auxílio financeiro do padre Gabriel (*In memória*). Não tive dúvidas no que concerne à área que escolhi, pois sempre obtive os melhores resultados no campo das exatas durante a educação básica. Naquele ano iniciei uma jornada acadêmica e profissional na qual realizei deslocamentos da pequena cidade em que nasci, Monteiro/PB, até lugares que jamais imaginava estar. Na Figura 1, a seguir, deixo registrado os percursos feitos até os dias de hoje. Eles não podem ser considerados ‘retas’ no sentido de Euclides, pois existiram muitas paradas, mudanças de rumos, novas perspectivas, mas sempre com um objetivo predefinido.

Figura 1 - Minha cidade é tão grande que não cabe no Brasil



Fonte: acervo da pesquisa.

Os lugares por onde passei em busca de melhorias para o meu desenvolvimento profissional são marcados com o início da realização do curso de Licenciatura Plena em Matemática, na cidade de Arcoverde – Pernambuco. Logo após o término veio a primeira conquista na aprovação em concurso público no município de Zabelê – Paraíba. Decorridos alguns anos iniciei o mestrado em Campina Grande – Paraíba. Depois disso, fui contemplado em um segundo concurso para trabalhar na cidade de Sertânia – Pernambuco. Por fim, escrevi a introdução de minha tese de doutorado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", na cidade de Rio Claro – São Paulo. Provavelmente quando você, caro leitor, estiver realizando a leitura deste texto estarei de volta ao meu[1] Nordeste com a finalidade de contribuir para a promoção de uma educação de qualidade. Dando continuidade, nos próximos parágrafos, desenvolvo detalhadamente essas vivências.

No que diz respeito a minha escolha pela profissão de professor, provavelmente foi devido ao fato de nessa época me tornar conhecido pelos meus colegas de classe da educação básica, o que me fez disponibilizar minha residência para ministrar aulas de reforço àqueles que apresentavam resultados insatisfatórios nas avaliações escolares de Matemática, sem cobrar nada por esse trabalho. Aproximadamente seis companheiros se reuniam em volta da mesa de minha humilde casa, com a intenção de rever os conteúdos explicados em sala de aula. Ao mesmo tempo em que auxiliava os meus colegas, também aprendia com eles. Talvez, esse exercício diário me tornou mais sensível para a questão da docência. Meus ex-professores me consideravam um colaborador atuante das turmas pelas quais percorri. Com o decorrer dos anos, passei a receber dos pais desses colegas um incentivo financeiro para sanar as dúvidas das tarefas escolares. Para fins de organização, para cada estudante disponibilizava dias e horários estabelecidos.

Após ter ingressado na graduação, fui convidado a substituir aulas de meus ex-professores (as) de Matemática. Na época, mais precisamente entre os anos de 2006 e 2007, lembro que o valor de cada aula era aproximadamente R$ 5,00 (cinco reais). Essa prática frequente conduziu-me a ocupar o quadro de docentes temporários de uma das escolas em que estudei. Fato de grande orgulho, pois retornei à instituição que tinha estudado durante a minha adolescência. Fui professor de Matemática, Química, Física e Biologia.

Durante alguns anos trabalhando nessa instituição pública de ensino, comecei a colocar em prática uma ideia que sempre tive vontade de que se concretizasse: a implantação e manutenção de um Laboratório de Ensino de Matemática (LEM). Após conversas com a gestora, consegui convencê-la a destinar um espaço e a comprar alguns materiais didáticos (MD)[2] industrializados. Outros foram confeccionados pelos alunos em colaboração comigo. Aos poucos, esse espaço ia recebendo uma *cara* de *cantinho de prazer pela Matemática*. Entretanto, devido às instabilidades contratuais entre o governo do estado da Paraíba e

---

[1] Uso "meu" para marcar que é o lugar de onde vim e para onde volto, o lugar que marca minhas raízes.

[2] Nesta pesquisa, estou entendendo os MD como um conjunto de ferramentas idealizadas, planejadas, pensadas e/ou utilizadas pelo professor em sala de aula para auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem.

professores contratados em caráter de emergência naquela época, eu e meus colegas ficamos alguns meses sem receber salário, dificultando a vida de todos. Devido a isso, solicitei desligamento da escola. Em resumo, o LEM ainda esteve em minha mente por mais alguns anos. Esse contexto evidencia meu interesse pela construção da Matemática, tomando como ponto de partida a utilização de estratégias diversificas, incluindo o uso de Materiais Manipuláveis (MM)[3] e MD para discussão de conceitos matemáticos.

A motivação para trabalhar com MM e MD veio, provavelmente dos trabalhos que realizei com meus colegas durante a graduação. Na época, sempre procurei fazer intervenções nas escolas de educação básica tomando como referência principal a ideia de construir conceitos matemáticos com o auxílio desses materiais. Os resultados dessas visitas eram expostos em disciplinas pedagógicas e de práticas de ensino.

No decorrer da graduação, tive que adequar minha rotina diária, incluindo o cumprimento da jornada docente na escola em que trabalhava com as aulas da universidade. Esse contexto perdurou durante quatro anos. De segunda à sexta-feira, meu cotidiano se resumia assim: após o término de meu expediente de trabalho, deslocava-me para o ponto de ônibus para viajar à cidade onde está situada a universidade que finalizei a Licenciatura em Matemática. O campus da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) só veio a ser instalado em minha cidade natal durante o período em que estava cursando o sexto semestre. Embora estivesse pagando mensalidades na instituição em que estava naquele momento, decidi continuar meu curso na universidade particular.

Em diversas ocasiões ficava muito aborrecido por me deslocar, em média, 180 km por dia. E, muitas vezes, quando chegava para assistir aulas, determinados professores faltavam, a energia oscilava e/ou até mesmo alguns colegas combinavam de não entrar, sendo que aqueles que discordavam, geralmente eram criticados pelos demais. Quando isso acontecia, tinha que esperar as demais pessoas que cursavam outras áreas até às 22h para podermos retornar para a nossa cidade. Nesses momentos de espera, ficava na biblioteca estudando. Esse esforço no ensino superior foi muito significativo porque me fez avançar em conteúdos e discussões que eram trabalhadas no período acadêmico.

Enquanto cursei minha licenciatura, também participei ativamente de congressos, seminários, oficinas e minicursos na área de Educação Matemática. Uma das primeiras experiências foi em 2006, quando estive na cidade de Natal, estado do Rio Grande do Norte,

[3] Em relação aos MM, entendo-os como um conjunto de utensílios do dia a dia, utilizados para outras finalidades, e de materiais de natureza física ou virtual, confeccionados para fins educativos. Retornarei posteriormente para tratar com mais detalhes acerca dos MM e MD.

para participar e apresentar comunicação científica na XVIII Semana de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN). Em 2010, retornei para a XXII semana de Matemática promovida por essa mesma instituição, na ocasião também apresentei comunicação científica. A experiência foi maravilhosa, tanto que em 2014 retornei para apresentar trabalhos no Encontro Nacional das Licenciaturas (ENALIC).

Quando estava no 8º semestre, fui aprovado na seleção para Especialização em Matemática Básica na UEPB (Campus que havia se instalado recentemente em minha cidade de origem, Monteiro – PB). Três anos após ter finalizado a graduação, em 2008, fui aprovado em um concurso público para professor de Matemática dos anos finais do ensino fundamental, no município de Zabelê – PB.

Após o término da especialização, decidi continuar galgando pelas estradas acadêmicas, pois acreditava que tinha que investir em meu desenvolvimento profissional para oportunizar aulas de melhor qualidade aos meus alunos e me tornar um professor diferente, pois até então as minhas aulas eram consideradas integralmente tradicionais. No período de 2010 a 2013, fiz outra especialização em Educação de Jovens e Adultos com Ênfase em Economia Solidária, pela Universidade Federal de Campina Grande (UFCG). Durante essa especialização, participei ativamente dos eventos em Educação Matemática no Campus da UEPB, na cidade em que resido. As produções acadêmicas acumuladas, no decorrer dos últimos anos, tiveram importância para a aprovação, em 2013, no curso Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEPB, Campus I – Campina Grande.

As participações em eventos se tornaram mais intensas por dois motivos: em primeiro lugar, o prazer em estar presente nesses debates e, em segundo, a exigência do curso. Durante esses estudos, afastei-me do exercício da docência para me dedicar exclusivamente ao mestrado. Os aprofundamentos teórico-metodológicos me proporcionaram mais confiança para o exercício de minha prática profissional.

Em específico, meu interesse pelo ensino de Geometria surgiu na educação básica, perpassando pela graduação, pela experiência em sala de aula, pelo curso de Mestrado e por um curso de extensão, ministrado por mim, sobre ensino de Geometria nos anos iniciais do ensino fundamental, em uma parceria com a Prefeitura Municipal de Monteiro – PB. Além disso, a maioria de minhas produções acadêmicas referentes a essa etapa da educação básica estava direcionada ao ensino de Geometria, especificamente nas possíveis dificuldades que os estudantes enfrentam quando se desenvolve um trabalho pautado, inicialmente, em noções da Geometria Euclidiana Plana (GP), para, em seguida, abordar os conteúdos da Geometria Espacial Euclidiana (GEE).

Esse entusiasmo foi primordial para o desenvolvimento do meu trabalho dissertativo, cuja geração de dados foi realizada em uma turma de quinto ano de uma escola pública de minha cidade natal. Entendo que, na pesquisa qualitativa, é importante uma relação de proximidade entre o pesquisador e o seu tema de pesquisa. Nesse sentido, em outubro de 2015, defendi minha dissertação com o seguinte título “Do sensível às ideias: um estudo de geometria envolvendo espaço e forma”, (Lima, 2015). Após a conclusão do curso de mestrado, retornei à escola em que trabalho para regência de aulas, cumprindo, dessa forma, o período de dois anos em que estive afastado para o mestrado. Nesse mesmo tempo, encaminhei alguns artigos científicos para revistas acadêmicas. Um deles, intitulado: “Do sensível às ideias: uma proposta de ensino de geometria, dos aspectos empíricos aos dedutivos” (Lima, Almeida, 2015), foi publicado na *Revista Princípia*, vinculada ao Instituto Federal de Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB). Em 2017, fui aprovado em outro concurso público para o magistério dos anos finais do ensino fundamental e ensino médio do estado de Pernambuco.

No decorrer dos anos em que retornei às escolas após ter finalizado o mestrado, voltei a elaborar um projeto com a intenção de implantar um LEM em uma das instituições que estou vinculado. Foi a oportunidade que tive para colocar em prática esse sonho, sendo que, dessa vez as coisas estavam caminhando para dar certo, uma vez que sou concursado para o cargo de professor dos anos finais do ensino fundamental do município de Zabelê – PB. Assim, praticamente não havia a possibilidade de ficar sem esse cargo. Após apresentar minha proposta à secretária municipal de educação, recebi o aval para dar continuidade ao sonho. A partir daí foi iniciado um processo de aquisição de MD industrializados para trabalhar diversos conteúdos, por exemplo, ábacos, sólidos geométricos em acrílico, material dourado, barras de frações, dentre outros.

À medida que planejava minhas aulas, tentava inserir o uso dos MD. Além disso, comecei um processo de construção desses materiais com o apoio dos alunos. Por exemplo, em uma turma da EJA, organizei em grupos e lancei a proposta para a construção do geoplano utilizando pedaços de tábua e pregos médios. Os alunos ficaram empolgados com o desafio. Alguns deles tinham habilidades com marcenaria. Esse fato foi importante, pois o acabamento do material produzido ficou melhor diante do cuidado que tinham com as medidas e/ou as quinas (vértices) das tábuas. Ressalto que há muita Matemática embutida durante os momentos de produção desses materiais, no entanto, não houve uma exploração mais profunda acerca desses conceitos. Foram produzidos 30 geoplanos que passaram a compor o acervo do LEM da escola municipal em que trabalho atualmente. Vale lembrar que essa instituição também disponibilizou uma sala específica para alocar esses materiais.

Posteriormente, a partir de recomendações da coordenação pedagógica, em parceria com a Secretaria Municipal de Educação, as salas de aula passaram a receber a denominação de *sala ambiente*, ou seja, foi reservada uma sala para cada área do saber, sendo que os professores ficaram responsáveis para construir, colorir e/ou adequar o espaço em função de sua disciplina. No caso, a sala de Matemática já estava com muitos MD e MM. Nesse caso, ao invés dos docentes se locomoverem para ministrar suas aulas, os alunos passaram a fazer isso. No início foi difícil, no entanto, aos poucos eles se acostumaram com a ideia. Em síntese, entendo que essas vivências, no decorrer da educação básica, tiveram implicações diretas na escolha do tema de pesquisa deste trabalho.

Ainda, considero válido salientar que as vivências no mestrado me proporcionaram diversas possibilidades. Uma delas foi a inserção no grupo de Pesquisa Leitura e Escrita em Educação Matemática (LEEMAT), liderado pelo professor Dr. José Joelson Pimentel de Almeida, orientador do meu mestrado. Sou participante desde a fundação do grupo em 2009. Entretanto, estive mais atuante a partir de 2012. Um dos focos desse grupo de pesquisa é o ensino e a aprendizagem de Geometria. Essas experiências foram muito significativas para o meu desenvolvimento profissional, tendo em vista que não tive oportunidade de participar de espaços como esses, nem na licenciatura plena em Matemática, nem nas duas especializações que realizei.

No tocante à minha experiência profissional e à participação em eventos, compreendo que, de um lado, foi de grande importância estar presente nos cursos de formação promovidos pela escola. Também, vejo como relevante viver intensamente o dia a dia nesse espaço. Por exemplo, as conversas com professores durante momentos de planejamento, as reuniões com pais, com a coordenação, bem como os eventos festivos que compõem o calendário escolar; e, por outro lado, encontrar/reencontrar colegas de curso, de trabalho, palestrantes e outras pessoas nos espaços de discussão destinados ao campo da Educação Matemática. Todas essas vivências contribuíram para me tornar um educador mais reflexivo e preocupado com a melhoria da educação.

1.3 O Início do Doutorado e a Apresentação da minha Pesquisa

No ano de 2021, o mundo passava por uma situação nunca vista por minha geração: foi preciso decretar o estado de isolamento social. Nesse contexto, surgiram palavras, termos e/ou orações relacionadas ao momento em que estávamos vivendo. Passei a conhecer um vocabulário que estava direcionado à *pandemia*. Para a Organização Mundial de Saúde (OMS), esse termo é caracterizado como: disseminação mundial de uma nova doença; recebe essa denominação quando uma *epidemia*, *surto*, afeta uma região, espalhando-se por diferentes continentes com transmissão de pessoa para pessoa.

Em meio a esse cenário, as escolas, universidades, centros acadêmicos de quase todo o mundo decretaram fechamento obrigatório e as aulas ficaram suspensas por tempo indeterminado. A partir daí, eu e meus pares passamos a ministrar aulas remotamente. Apesar do temor diante de centenas de mortes pela COVID-19, aproveitei o momento, já que estava trabalhando em casa e em isolamento social, e comecei a participar de cursos, palestras, *lives* e de algumas disciplinas da Pós-Graduação de universidades, tais como a Universidade Federal de São Carlos (UFscar), a Universidade Federal do Pernambuco (UFPE), a Universidade Franciscana (UFN) e a Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho (UNESP). Em uma das dezenas de palestras transmitidas pelo YouTube durante esse período, tive a oportunidade de conhecer virtualmente o professor José Carlos Pinto Leivas, autor de vários artigos científicos que tratam da Geometria, tema de meu interesse. Enviei um *e-mail* para o docente e mantivemos contato. A partir dessa comunicação, recebi o convite para participar do Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria (GEPGEO), liderado por esse docente vinculado à UFN de Santa Maria, no Rio Grande do Sul.

Ao mesmo tempo em que essas cenas iam acontecendo em minha vida, comecei a escrever um projeto de pesquisa para participar de alguns processos seletivos para o curso de doutorado, dentre eles, o de Educação Matemática pela UNESP, do qual obtive aprovação. Era um sonho, pois fiz diversas leituras, durante o mestrado, de textos de autoria de professores que integram o quadro docente desse programa de Pós-Graduação. Finalmente, em 11 de janeiro de 2021, tornei-me aluno de doutorado de uma universidade bem-conceituada, cujo Programa que faço parte tem nota 7 na Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Antes mesmo de iniciar as aulas, em outubro de 2021, fui convidado pela minha orientadora para ser integrante do Grupo de Pesquisa teorEMa - Interlocuções entre Geometria e Educação Matemática. Considero essa imersão valiosíssima para a formação pessoal e acadêmica, além disso, extremamente necessária para entender o mundo da escrita científica. Aliado a isso, o grupo também discutia problemas acerca do ensino e da aprendizagem da Geometria.

Com o início das aulas, os desafios surgiram. Inicialmente, eu e minha turma tivemos aulas *online* pelo Google Meet (serviço de comunicação por vídeo desenvolvido pelo Google), já no mês de janeiro, em uma disciplina de verão que teve duração de 20 dias, com discussões, muita leitura e apresentação de trabalhos. Foi uma experiência cansativa e tensa, tendo em vista que em diversos momentos tivemos que dar uma pausa e ficar em silêncio devido à enxurrada de notícias sobre familiares de colegas da turma que tinham contraído o coronavírus SARS-CoV-2. Em uma das aulas, recebemos a notícia de que o familiar de um colega da disciplina tinha acabado de falecer. Em outras situações, houve relatos de familiares que foram entubados.

Um dos percalços vivenciados no início do curso de doutorado foi a realização das disciplinas virtualmente. Parecia que eu ainda não fazia parte de uma universidade pública de qualidade, nem de um curso de Pós-Graduação. No início das aulas, percebia pouca interação entre os colegas de curso. As câmeras do Google Meet, em sua maioria, ficavam desligadas. Na época, eu estava muito ansioso para conhecer presencialmente os professores, mestrandos, doutorandos e funcionários em geral. Essa cena só veio se concretizar em março de 2022.

O próximo desafio foi residir em um dos estados mais ricos do Brasil, São Paulo, região a qual muitos nordestinos ajudaram a construir, principalmente a sua capital. Sempre escutava relatos de pessoas de minha localidade dizendo que iam trabalhar na “terra da garoa”. Já morando na cidade de Rio Claro – SP, em diversos diálogos formais e informais, percebia frases do tipo “seu sotaque é muito gostoso”. Muitos diziam achar bonito, outros me reconheciam imediatamente e se expressavam: “você não é de Rio Claro”, “você é de qual estado?”, “você é do Nordeste?”, dentre outros questionamentos. Aos poucos, acostumei-me com tudo isso, assim como as pessoas passaram a ficar mais receptivas.

No que tange ao tema[4] de minha pesquisa de doutorado, ressalto que a escolha ocorreu em decorrência de vários fatores. Dentre eles, destaco a vivência na educação básica como estudante e como professor do ensino fundamental, assim como a minha formação inicial na qual esse componente curricular foi abordado de maneira axiomática, valorizando demonstrações matemáticas e o cálculo de áreas e volumes de figuras geométricas espaciais. Embora não tenha recebido orientações que me fizessem ter, naquela época, um olhar aguçado para identificar a Geometria ao nosso redor, sempre me interessei por esse campo da Matemática, tanto é que, como já expus antes, desenvolvi uma pesquisa no mestrado envolvendo essa temática. Diante desses argumentos, decidi prosseguir investigando a importância da GE, dessa vez, envolvendo alunos da graduação.

Esse nível de escolaridade foi escolhido por alguns motivos. Inicialmente, conforme Fernandes (2019), há um número pequeno de pesquisas que são desenvolvidas com essa etapa

[4] Nesta tese discorro acerca da produção de conhecimento na GEP por futuros professores de Matemática. Também disserto acerca do papel dos gestos realizados por esses alunos durante discussões de conceitos da GEP. Essa linguagem corporal foi emergida a partir dos dados produzidos.

da educação, comparando-a com outras. Além disso, a temática da GE, nesse nível, é pouco explorada. Além do mais, há o fato de que já tinha trabalhado com participantes da educação básica em meu mestrado, sendo, a meu ver, muito relevante prosseguir investigando outras etapas. Além desses fatores, os dados foram produzidos em uma turma na qual minha orientadora foi a docente titular. Entendo que esse cenário foi propício para uma comunicação constante envolvendo as duas partes. Tal contexto pode resultar em uma melhoria da pesquisa.

Os dados dessa pesquisa foram produzidos em períodos diferentes. Inicialmente, desenvolvi um trabalho com alunos matriculados e frequentando a disciplina de Geometria Euclidiana Espacial, no primeiro semestre de 2022. Era uma turma que estava iniciando o segundo ano da graduação. Em um segundo momento, realizei experimento de ensino com 12 estudantes, escolhidos a partir dos que participaram da primeira fase. Essa etapa ocorreu no segundo semestre de 2022. A proposta planejada e desenvolvida para esses dois períodos teve como intenção promover discussões acerca de conteúdos que estão no campo da Geometria Espacial de Posição (GEP).

Por um lado, trabalhar com a GEP foi uma decisão pautada na ideia de que há uma valorização excessiva da parte métrica da GE, isto é, há um predomínio no uso de fórmulas e cálculo de áreas. Além disso, a GEP é uma área introdutória da Geometria que possibilita analisar posições referenciais entre objetos. Por outro lado, a escolha dos envolvidos para discutir conceitos da GEP, o modo como olhei para os dados, o caminho de análise percorrido, as categorias de análise emergidas, assim como a imbricação que faço entre elas, já diferencia este trabalho de outros realizados no âmbito da Geometria.

Para a aprendizagem de conceitos da GEP, é necessário ter consciência da existência dos espaços geométricos que estão sendo explorados durante os momentos de produção de conhecimento. Segundo Giménez e Fortuny (1998), há quatro tipos, a saber: micro (pequeno), médio, macro (grande) e cosmo. Diante disso, cabe pontuar que as discussões acerca dos conceitos da GEP por parte dos alunos que participaram da produção de dados desta pesquisa prevaleceram na abrangência do espaço geométrico denominado “micro (pequeno espaço)”. No Quadro 1, há uma síntese desses espaços:

Quadro 1 - Espaços geométricos: características e processos cognitivos

Espaço	**Característica**	**Processos cognitivos**
Micro (pequeno)	Corresponde ao trabalho com as atividades no âmbito das estruturas microscópicas: moléculas, vírus, células, etc.	Representacional, com observação de detalhes em microescalas.
Médio	Desenvolvido através da manipulação de objetos que, por exemplo, podem ser colocados sobre a	Manipulativo, observação (em escala normal) de um amplo

	mesa.	espectro de elemento característicos dos modelos
Macro (grande)	Trabalho com objetos entre 0,5 e 50 vezes o tamanho do sujeito.	Variação escalar. Observação em escalas com representação não-controlável. Movimentos variados e deslocamento do Observador.
Cosmo	Coloca em foco problemas de orientação e referência. Corresponde, por exemplo, ao estudo de fenômenos ecológicos, geográficos, topográficos e astronômicos.	Orientação e referência com relações e representações não-controláveis. Deslocamento virtual (imagens mentais) do observador.

Fonte: Bairral e Silva (2005, p. 15).

Por outro lado, houve discussões nas quais os alunos transitaram entre os espaços *médio* e *macro.* Um dos exemplos em que isso ocorreu foi constatado na narrativa oral de um aluno ao elencar situações do cotidiano para mostrar o caso de *retas reversas,* o que pode ser observado no seguinte trecho: "*supondo que eu esteja deitado em minha cama e vejo pela janela de meu quarto um poste. Considerando que sou uma reta e o poste outra. Eu e ele somos um caso de retas reversas*". Em outra discussão, uma aluna verbalizou: "*supondo que o friso da lateral de um carro seja uma reta. Esse veículo passa por uma placa de sinalização de trânsito fixada em uma calçada. O friso e o ferro que sustenta a placa são exemplos de retas reversas*". Esses dois contextos evidenciam uma saída do médio para o macro espaço. Para Fantin e Bairral (2022, p. 34), "embora não excludentes, cada espaço envolve processos cognitivos diferentes e, desta forma, contribui no desenvolvimento do pensamento geométrico".

Postas essas considerações, uma das pautas de pesquisas que envolvam os processos de ensino e de aprendizagem de Geometria é poder contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Esses estudos procuram entender algumas dificuldades enfrentadas tanto por alunos quanto por professores para compreender determinadas noções do campo geométrico, em específico, do Espacial. Diante disso, considero relevante apresentar características sobre como o ensino dessa área da Matemática ocorre atualmente. Para o desenvolvimento dessa tarefa, tomo como ponto de partida a última etapa da educação básica e, em seguida, teço considerações sobre a graduação em Matemática.

1.4 Cenário Hodierno sobre a Geometria no ensino médio

Ensino Médio, porta de entrada para estudantes que almejam cursar uma graduação qualquer, ou em Matemática. Embora não tenha desenvolvido uma pesquisa com aquele público, julgo importante tecer discussões, aqui, acerca de temas que se localizam na fronteira dessas duas etapas da educação (ensino básico e ensino superior). Um primeiro ponto a considerar diz respeito ao problema de reduzir o estudo da Geometria a uma pilha de exercícios, que têm a função única e exclusiva de memorização de fórmulas, nas quais os estudantes, quando estão resolvendo essas tarefas, apenas substituem os valores que já estão nos enunciados das questões. Sobre essa temática, observa-se que:

> É fato que as pesquisas realizadas nas últimas décadas continuam indicando a ausência da abordagem dos conteúdos de Geometria em sala de aula e, quando ocorrem, em sua maioria acontecem com o emprego de fórmulas e lista de exercícios. Com o estudo das figuras espaciais no Ensino Médio, também não parece-nos não ser muito diferente, pois os docentes continuam receitando fórmulas e problemas algébricos, o que tem tornado algo mecânico e pouco produtivo, cujo resultado tem sido constatado na fragilidade do desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos (Oliveira; Lopes; Cardoso, 2016, p.3).

Além do exposto previamente, é possível perceber que uma prática recorrente na educação básica, em praticamente todas as áreas do saber, diz respeito ao fato de ministrar assuntos de tal forma que obedeçam a uma ordem crescente de dificuldade, ou seja, partindo do nível mais simples ao mais complexo. No domínio da Geometria, "apresentam-se primeiro as propriedades dos pontos de uma reta e passa-se aos ângulos, triângulos, quadriláteros, polígonos e circunferência, sendo esses assuntos apresentados de uma forma axiomática e abstrata" (Fainguelernt, 1999, p. 13).

No tocante às pesquisas que envolvem o ensino e a aprendizagem da Geometria, constata-se uma priorização da Geometria Espacial Métrica (GEM) em detrimento da GEP, (Bispo; Assis, 2021). Percebendo essa lacuna de estudos envolvendo a GEP, estou de acordo com Ferner *et al.*. *(*2016, p. 2), quando ponderam que

> [....] é importante verificar as pesquisas voltadas ao ensino e aprendizagem da geometria, pois o ensino deste campo, geralmente, centra-se na memorização de fórmulas, o que não contribui para o desenvolvimento da capacidade de abstração, de estimar e comparar resultados, de reconhecer propriedades das formas geométricas, essenciais na resolução de problemas da própria matemática e de outras áreas do conhecimento.

Leivas (2009) também corrobora as ideias citadas no decorrer deste texto no que diz respeito à utilização exagerada de fórmulas nos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria, prejudicando, dessa forma, o desenvolvimento do pensamento geométrico. Costa (2020, p. 92) entende por pensamento geométrico como

> A capacidade mental de produzir conhecimentos em Geometria; de mobilizar, de forma coerente, os instrumentos geométricos na resolução de problemas; é a capacidade de entender a complexidade dos fenômenos e de realizar inferências sobre eles; de reconhecer e verificar a relevância da Geometria como um instrumento para a compreensão do mundo físico e como um modelo em Matemática para entendimento do mundo teórico.

Sobre o aprender, concordo com D' Ambrósio (2002, p. 51), quando defende que "[...] aprender não é o mero domínio de técnicas, habilidades e nem a memorização de algumas explicações e teoria". Um ensino de Geometria centrado na decoreba de fórmulas e teoremas vai de encontro ao que o autor assevera anteriormente.

Sumariamente, as disciplinas que integram o campo da Matemática, em particular as de Cálculo e de Álgebra Linear, são as que os estudantes ingressantes no ensino superior mais demonstram dificuldades. Isso se deve, na maioria das vezes, a lacunas na aprendizagem desse campo do saber na etapa da educação básica, bem como à abstração dos conceitos que são discutidos nesses espaços (Nasser, 2013).

Também, incluo a Geometria nesse rol de disciplinas, principalmente no tocante ao estudo dos conceitos geométricos que são vivenciados nos primeiros semestres da graduação em Matemática. Diante disso, considero relevante mostrar a transição entre a etapa do ensino médio e a inserção no ensino superior para o caso da GE, uma vez que pesquisas evidenciam uma formação deficitária das ideias que fazem parte do saber geométrico.

1.5 Ensino de Geometria na Graduação em Matemática

Para discorrer acerca dos cursos de graduação em Matemática, corroboro as ideias de Hoffer (1981) que relata o caso de ex-alunos afirmarem ter vivenciado uma Geometria que priorizava a memorização de provas e teoremas. Contexto bem semelhante com as aulas de Geometria na educação básica, as quais geralmente valorizam a utilização de fórmulas no seu estudo. Esse cenário ainda é muito presente e abre espaço para levantar indagações. E no ensino superior? Ainda persiste? E na graduação em Matemática? Esses questionamentos me possibilitaram fazer reflexões no decorrer da produção desta subseção. Para fomentar esse debate, resgato o pensamento de Nasser (2013, p. 891):

> O ensino, na grande maioria das disciplinas do Ensino Superior, segue o esquema 'teorema – demonstração – exemplo – aplicação'. Esse modelo tem diversas vantagens e até funciona bem para alunos de graduação em Matemática, mas não atende à grande maioria dos alunos da licenciatura ou dos demais cursos que têm o Cálculo como disciplina de serviço.

Na mesma direção, a pesquisa de Leivas (2009) analisou algumas ementas de cursos de formação de professores de Matemática das universidades que constituíram o *corpus* da investigação. O autor expôs algumas considerações, a saber,

> Nos projetos pedagógicos dos cursos de formação de professores, que muitas vezes são simples grades curriculares, o conhecimento geométrico está centrado em algumas disciplinas que abordam Geometria Plana e Espacial, numa concepção dita euclidiana, sem nem ao menos fazer referências à formulação como a de Hilbert, que utiliza uma axiomatização mais completa de Geometria do que a de Euclides, ou a de Lobachevisky, por exemplo (Leivas, 2009, p.15).

Embora esta pesquisa esteja realizando uma discussão geométrica envolvendo estudantes de uma turma de graduação em Matemática, ou seja, na ocasião a maioria deles ainda não tinha feito a opção por licenciatura e/ou bacharelado, considero pertinente o pensamento anterior, tendo em vista que, no referido grupo, mais da metade dos graduandos manifestaram informalmente anseio em trilhar pela carreira da docência.

Uma discussão pertinente na graduação em Matemática no tocante à disciplina de Geometria Euclidiana Espacial (GEE) se refere aos resultados que foram oriundos da Geometria Euclidiana Plana e que também são válidos na Espacial. A pesquisa de Lieban (2019, p. 63, grifo do autor) traz um exemplo do que comentei precedentemente: “Um teorema clássico da geometria plana é *‘Para cada ponto de uma reta, existe uma única reta perpendicular passando por aquele ponto’*, mas não podemos transferir o mesmo resultado para a geometria espacial, pois há um número infinito de retas passando por tal ponto”.

Outro debate pertinente que pode ser explorado no ensino superior se volta para o postulado das paralelas. Segundo Souza (2019, p. 5), “vários resultados importantes estudados em geometria durante o ciclo básico de Educação dependem do Postulado das Paralelas e pouco é dito sobre isso”. Considero relevante olhar para esse resultado e ver como se comporta na GEP, principalmente fazer análises sobre o que pensam determinados estudantes da graduação em Matemática acerca desse resultado.

Também, entendo necessário promover diálogos com os estudantes em torno de como se chegou à ideia da forma cilíndrica, da forma do cone, dentre outros, por meio da rotação. Oportunidades ricas que devem ser iniciadas desde a educação básica e aprofundados no ensino superior. Por exemplo, para o primeiro caso, considerando a rotação de um retângulo assumindo como eixo de rotação um de seus lados. Sobre esse tema, vale salientar que

> Foi necessário investigar-se, na realidade, apesar de ser forma bastante rudimentar, toda uma série de retângulos e cilindros. As matemáticas, assim como todas as outras

> ciências, surgiram das **necessidades** dos homens, da necessidade de medir terras e volumes, do cálculo do tempo e da mecânica (Engels, 1976, p. 34-35, grifo do autor).

A construção dos conceitos de prismas e pirâmides também devem ser aprofundados e aprendidos com significado na graduação em Matemática. Todavia, o foco não deve ser as fórmulas relacionadas a esses conteúdos, mas conversar com os estudantes e mostrar algumas peculiaridades, por exemplo, as diferenças entre o ente matemático ideal em questão, presente no mundo das ideias e a representação dele, assim como promover provocações no sentido de realizar observações nos quesitos referentes ao interior e à casca de um prisma e/ou pirâmide. Refiro-me à casca como superfície de um sólido geométrico. Matematicamente ela é denominada de superfície poliédrica, isto é, uma figura poliédrica unida com as regiões poligonais (não é obrigatório que sejam todas) determinadas pelos polígonos, denominadas faces da superfície poliédrica, satisfazendo as seguintes condições: a) cada aresta deve pertencer a no máximo duas faces; b) caso existam arestas pertencentes a uma só face, elas devem formar uma única poligonal fechada denominada de contorno. Uma preocupação de Kaleff (2012, p. 130, grifo do autor) tem sido

> [...] uma constante, nos projetos desenvolvidos no LEG [Laboratório de Ensino de Geometria], a preocupação com o como se relacionar modelos concretos, representações de poliedros com suas representações na forma de desenhos. A fim de contornar os possíveis obstáculos cognitivos intervenientes nessas situações, desenvolveram-se atividades didáticas relacionadas a dois tipos de modelos de poliedros: o modelo tipo *casca*, representando as faces do poliedro, e o modelo tipo *esqueleto*, representando as arestas do poliedro.

Conforme alerta a referida autora, a representação do tipo *casca* não permite uma boa visualização das arestas que ficam ocultas no sólido. Para sanar esse problema se recomenda utilizar modelos tipo *esqueleto*, uma vez que eles possibilitam aos estudantes terem uma visualização das arestas que são identificadas com facilidade, bem como daquelas que ficam ocultas. No âmbito da Matemática, estou me referindo a uma figura poliédrica, isto é, a união de um número finito de polígonos, satisfazendo as seguintes condições: a) a intersecção de dois polígonos quaisquer ou é vazia, ou é um vértice, ou é um dos lados dos polígonos; b) dois polígonos contendo um lado em comum não são coplanares. Apoiando-se nessas ideias, as questões que guiaram a fase de experimento de ensino estavam acompanhadas de representações de sólidos geométricos confeccionados previamente, sendo que priorizei os dois protótipos mencionados por Kaleff (2012).

Nessa conjuntura de resultados de pesquisas acerca do conhecimento geométrico no âmbito da graduação em Matemática, corroboro o pensamento de Nasser (2013), quando pondera que de um lado tem-se os conteúdos ministrados mais elementares seguindo uma coerência e, de outro, os mais avançados exigem dos estudantes a construção de entidades abstratas por meio de deduções tendo como ponto de partida as definições formais. Essas abstrações podem ser mais compreensíveis quando a maneira como os conceitos matemáticos são representados possibilita facilitar o entendimento por parte dos estudantes. Cabe pontuar que existe uma diversidade de modos para representar uma ideia matemática.

1.6 "Pensei numa enxada, encostada numa, sei lá, fincada no solo": Porque estudar retas, perpendicularismo, ortogonalismo e paralelismo?

De início, exponho que o título desta subseção advém da fala de uma aluna durante as discussões do experimento de ensino. O diálogo versou sobre o resultado de uma reta ser perpendicular a uma reta do plano, mas não ser perpendicular ao plano. Com essa afirmação, pretendo apontar algumas considerações nas quais busco mostrar a relevância dos conceitos de retas reversas, perpendicularismo, ortogonalismo e paralelismo em um campo inserido na própria Geometria Espacial (GE). Antes de tudo, é preciso salientar que a Geometria está associada ao desenvolvimento da própria Matemática (Viseu, Rocha e Monteiro, 2022). Para esses autores, a Geometria:

> é uma área de conhecimento muito rica, não só pela sua grande variedade e diversidade, mas também pelas aplicações práticas que tem, por exemplo, no desenho assistido por computador (CAD) e na modelação geométrica (incluindo o projeto, modificação e fabrico de automóveis e aviões, na construção de edifícios, etc.), robótica, medicina (área da imagiologia médica, o que levou a novos resultados substanciais em campos como tomografia geométrica), animação por computador, apresentações visuais e realidade virtual (Viseu *et al.*. 2022, p. 267).

Nesse contexto, de fato, o exemplo da referida aluna pode ilustrar um caso de uma reta perpendicular a uma do plano, mas não perpendicular ao plano. Para esse esforço de imaginação, é necessário considerar o cabo da enxada oblíquo ao solo e, além disso, imaginar uma reta contida no plano (solo) e tocando em um ponto do cabo, como pode ser visto na Figura 2.

Figura 2 - Enxada fincada no solo

Fonte: elaborada pelo autor.

O contexto da imagem anterior é muito comum no cotidiano de alunos que residem em zonas rurais e/ou até mesmo urbanas, mas ajudam seus pais em tarefas como o plantio e a colheita do milho e do feijão. Essa realidade também fez parte de minha infância. Assim, entendo que enquanto criança vivenciei situações que podem ter desenvolvido meu pensamento geométrico ao ter que operar com os objetos na espacialidade da vida. Enquanto adulto, conhecendo a Geometria como uma produção humana, atribuo significado a uma situação do cotidiano e a identifico naquilo que vejo. Posto isto, é pertinente enfatizar o trabalho de educadores que estão imersos em contextos educacionais nos quais os alunos são oriundos de cenários campesinos. Esses docentes devem ter tido a oportunidade de participar de formações iniciais e/ou continuadas de tal modo que possam aproveitar as experiências prévias dos alunos para produzir conceitos geométricos de maneira sistemática, em particular, da GE. Nesse sentido, corroboro a afirmação de Oliveira (2023, p. 102): "mas o que se quer, aqui, é chamar a atenção para a necessidade de se pensar nossas práticas em sala de aula a fim de que a geometria euclidiana seja apresentada aos estudantes de modo mais próximo de sua realidade". O autor acrescenta que a falta de conexão entre a geometria euclidiana e a realidade física é vista como uma das dificuldades que os alunos enfrentam atualmente. Refletir sobre esse ponto é essencial, pois, quando a geometria não está vinculada diretamente ao espaço físico e aos sentidos como visão, audição e tato, a compreensão se torna mais difícil tanto para os estudantes quanto para os professores.

Oliveira (2023) aponta que os discentes fazem um esforço tremendo para entender a ideia de *ponto*. Em seu ponto de vista, para compreender um pouco da dificuldade que muitos discentes enfrentam ao começar a estudar a geometria euclidiana, é necessário considerar o esforço necessário para entender a noção de *ponto*. O pesquisador recorreu ao que Euclides (2009) falou sobre esse ente primitivo, isto é, um *ponto* é aquilo que não possui partes, ou seja, não possui dimensão. Assim, como podemos explicar a um aluno a existência de um cubo, que é composto por uma infinidade de pontos se, conforme mencionado, o ponto não tem dimensão — sua dimensão é zero? Se um ponto não tem dimensão, como é possível que a soma de uma infinidade de pontos resulte em um cubo, que possui dimensão?

No que concerne à noção de *plano*, Oliveira (2023) recomenda um trabalho pautado na ideia da gravidade. Para isso, o pesquisador traz um caso de um plano denominado de horizonte artificial. Segundo o autor, para determinar o plano do horizonte artificial, pode-se trabalhar com a noção de gravidade usando um recipiente semelhante a uma caixa d'água. Ela pode ser inclinada em diferentes ângulos, mas sempre será possível observar que a superfície da água se ajusta, indicando o plano do horizonte artificial. Embora a água mostre o plano do horizonte como uma superfície horizontal, é crucial lembrar que um plano tridimensional pode se estender em inúmeras direções. Esse esclarecimento é essencial, pois muitas vezes o plano é visto apenas como uma superfície horizontal, por exemplo, como uma mesa para se colocar objetos.

Como maneira de minimizar essas abstrações geométricas, Lima (2015) e Oliveira (2023) recomendam um trabalho pautado inicialmente no estudo da GE para, em seguida, estudar conceitos da Geometria Plana (GP). Esse último autor assevera que de início o aluno deve desenvolver uma visão espacial, composta por elementos do dia a dia, bem como do mundo real. Por fim, o pesquisador entende que cultivar essa percepção espacial é fundamental, pois, na contemporaneidade, os alunos se deparam com diferentes interpretações do conceito de espaço. Alguns exemplos elencados por ele são, o espaço da sala de aula, o espaço de uma apresentação teatral, o espaço digital e o espaço geométrico tridimensional, que é formado por todos os pontos.

Posto isso, como se mostram os conceitos de perpendicularismo, ortogonalismo e paralelismo do campo da GE no mundo real de hoje? Antes de tudo é preciso pôr em destaque o que Oliveira (2023) comenta acerca da ideia de perpendicularidade. Esse autor defende que "por trás desse perpendicularismo, está uma forma intuitiva de se passar do plano para o espaço", Oliveira, 2023, p. 108). Ciente dessa relevância, o fio de prumo[5], instrumento utilizado

[5] Instrumento baseado em um peso de metal que está preso a uma linha que, devido à gravidade, mantém-se perpendicular ao solo.

por mestres de obra da construção civil para garantir a verticalidade de paredes, colunas e outras estruturas, pode ser uma ferramenta extremamente útil em sala de aula para mostrar aos alunos como o conceito de perpendicularismo no espaço está presente em tarefas do dia a dia.

O fio de prumo tem uma relação íntima com o conceito de perpendicularidade no âmbito da GE. A função desse instrumento no espaço tridimensional é criar uma linha reta perpendicular ao plano horizontal, o solo. Manter essa perpendicularidade é relevante nas construções, uma vez que, ela garante que as estruturas estejam niveladas e não inclinadas. Essa condição é fundamental para a estabilidade. Essa Geometria prática também fez parte de minha infância, em particular, quando exerci funções de auxiliar de mestres de obras.

Nesses espaços, procurei questionar aos profissionais desse ramo o motivo de tal uso, assim como a sua funcionalidade. Eles me explicavam e, com base nessas exposições, entendi de modo resumido que, o fio de prumo era utilizado para evitar que o piso e/ou parede ficasse 'torto'. Esse conhecimento prático foi importante para ter tal compreensão, uma vez que, foi por meio desse instrumento que pude entender noções abstratas da Geometria a partir de situações do dia a dia. Por outro lado, é necessário trazer essas experiências informais e, por intermédio delas chegar ao conhecimento geométrico escolar. Em síntese, o fio de prumo pode ser um exemplo prático de como a perpendicularidade é aplicada no mundo real.

Uma aplicação prática do conceito de paralelismo, em particular, entre *planos* também por ser vista na construção civil. Por exemplo, em um edifício com vários andares é necessário que as lajes de concreto de cada um deles sejam paralelas entre si, assim como as paredes. Essas são condições que garantem a estabilidade estrutural. Nesse cenário, também recorre-se ao uso do fio de prumo, pois a leitura dele permite ao mestre de obras ter a certeza de que os planos horizontais e verticais estão paralelos. Outros instrumentos como níveis e réguas de níveis também auxiliam nessa tarefa.

No âmbito da Educação Matemática, Oliveira (2023, p. 112) traz considerações sobre a relevância do uso do fio de prumo em contextos educacionais. Segundo o autor, "discutir isso, que, aparentemente, parece sutil, colabora para os discentes verem como diferentes conceitos se relacionam, não apenas no campo interno de uma área, como também de outra". Assim, os conceitos de perpendicularismo, ortogonalismo, paralelismo, dentre outros da GE, por natureza tem sua importância dentro da própria Matemática, em áreas tais como Geometria Analítica, Álgebra Linear e outras, mas também são relevantes para resolver problemas do mundo real.

Considerando o exposto até presente momento, com ênfase às reflexões que fiz acerca da GE, entendo adequado, agora, apresentar a pergunta desta pesquisa e os objetivos desta pesquisa.

1.7 Questão Norteadora e Objetivo da Pesquisa

O desenvolvimento da questão norteadora que guia esta pesquisa será detalhado na Seção “Percurso trilhado”. Entretanto, cabe situar o leitor que a elaboração dessa interrogação passa por várias fases, momentos de idas e vindas que são importantes para o amadurecimento do pesquisador. Para o caso deste estudo, chamo atenção para o fato de que as conversas com colegas mestrandos e doutorandos, a participação nos Seminários de Matemática e Educação (SMEM), nas Jornadas de Avaliação Continuada (momentos em que conheço o trabalho dos colegas) e no grupo de pesquisa em que faço parte, são espaços que me fizeram refletir a respeito desse tão importante elemento da pesquisa qualitativa. Nesse contexto, apresento a pergunta de pesquisa deste trabalho: *Como os gestos influenciam o processo de compreensão e construção de conceitos de geometria espacial de posição por alunos?* Por sua vez, o objetivo geral, é o seguinte: *Analisar como os gestos realizados durante o processo de discussão dos conceitos de geometria espacial de posição contribuem para a compreensão e/ou expressão desses conceitos por parte dos alunos.* E os específicos subdividem em: i) identificar os tipos de gestos mais recorrentes durante a visualização de conceitos da geometria espacial de posição e ii) analisar a relação entre os gestos e o processo de manipulação em materiais de natureza física.

Apresentada a pesquisa e os objetivos da mesma, para fins organizacionais, na sequência, dedico atenção à estrutura das seções que dão corpo a este texto acadêmico.

1.8 Estrutura das seções que compõem este texto

Quanto à estrutura desta tese, ela está dividida em: introdução (Seção 1), momento em que situo você, caro leitor, acerca do que está por vir. Exponho um recorte de minha vida pessoal, acadêmica e profissional, bem como alguns desafios que enfrentei ao iniciar o curso de doutorado. Ao mesmo tempo, vou externalizando motivos e apontando argumentos que fizeram germinar a temática principal deste trabalho. É neste espaço que apresento a questão desta pesquisa e os objetivos.

Na Seção 2, discorro acerca da revisão de literatura. Nessa ocasião, trago as pesquisas que mais se aproximaram do meu tema. Esse espaço foi estruturado de modo a contemplar teses, dissertações, artigos científicos e trabalhos apresentados em congressos que também versam sobre a temática da GEP. A partir daí, expus possíveis diferenças entre o que já foi pesquisado e o que proponho para este trabalho.

A primeira parte do referencial teórico está disponível na Seção 3, a saber, Representação e visualização em Matemática. No início, disserto acerca dos modos de representação de um conceito matemático. Posteriormente, faço uma discussão sobre *ver*, *enxergar* e *visualizar*, redirecionando esse debate para o campo da Educação Matemática.

Na Seção 4, discorro sobre a segunda parte do arcabouço teórico: produção de gestos para representar determinados resultados da geometria espacial de posição. Para sua produção, inicialmente, fiz diversas leituras e aprofundamentos na obra de McNeill (1992), a fim de dialogar acerca da teoria dos gestos. Ademais, faço explicitações sobre o que se entende por gesticulações, bem como trato acerca das quatro dimensões gestuais propostas por esse autor. Para aprofundar a discussão, busco apoio em outros pesquisadores que se debruçaram a estudar os significados que os gestos têm quando sujeitos estão dialogando sobre conceitos matemáticos abstratos. Em particular, debrucei-me em textos que investigam Geometria e gestos. No campo da Educação Matemática, visitei constantemente os trabalhos de Arzarello e Edwards (2005), Edwards (2009), Costa (2010), dentre outros estudiosos que discutiram sobre o sentido atribuído aos gestos nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática.

O percurso trilhado neste trabalho está na Seção 5. Nesse espaço, apresento o desenvolvimento de uma pesquisa sob o viés qualitativo, os procedimentos e estratégias metodológicas (experimento de ensino), os materiais para a produção de dados e o modo como eles foram analisados, as etapas desenvolvidas durante as duas fases com os colaboradores da pesquisa, os recursos utilizados para transcrição dos áudios e, por fim, o passo a passo realizado para a análise dos dados.

A apresentação dos resultados e discussões ficou para as Seções 6 e 7. A primeira “A utilização de gestos para representar determinados resultados da GEP” trata dos gestos como protagonistas da construção e da comunicação de conceitos geométricos espaciais. A segunda, “Para além das mãos: imbricações entre gestos e manipulações”, aprofundou a temática dos gestos produzidos durante manipulações, bem como os seus significados nos contextos de produção de conhecimentos matemáticos.

As considerações finais constam na Seção 8. Nela, retomo o objetivo principal, a questão de pesquisa, bem como realizo reflexões acerca dos resultados, obtidos à luz da fundamentação teórica construída, apresentando algumas conclusões e implicações no tocante às maneiras como os estudantes discutem noções da GEP. Além disso, discorro acerca de desdobramentos e possibilidades de pesquisas futuras envolvendo a temática. Tal relato é importante, pois mostra que um estudo dessa natureza não tem ponto final, diferentemente disso, abre espaço para avultar novas questões ou questões que ainda não receberam espaço de atenção.

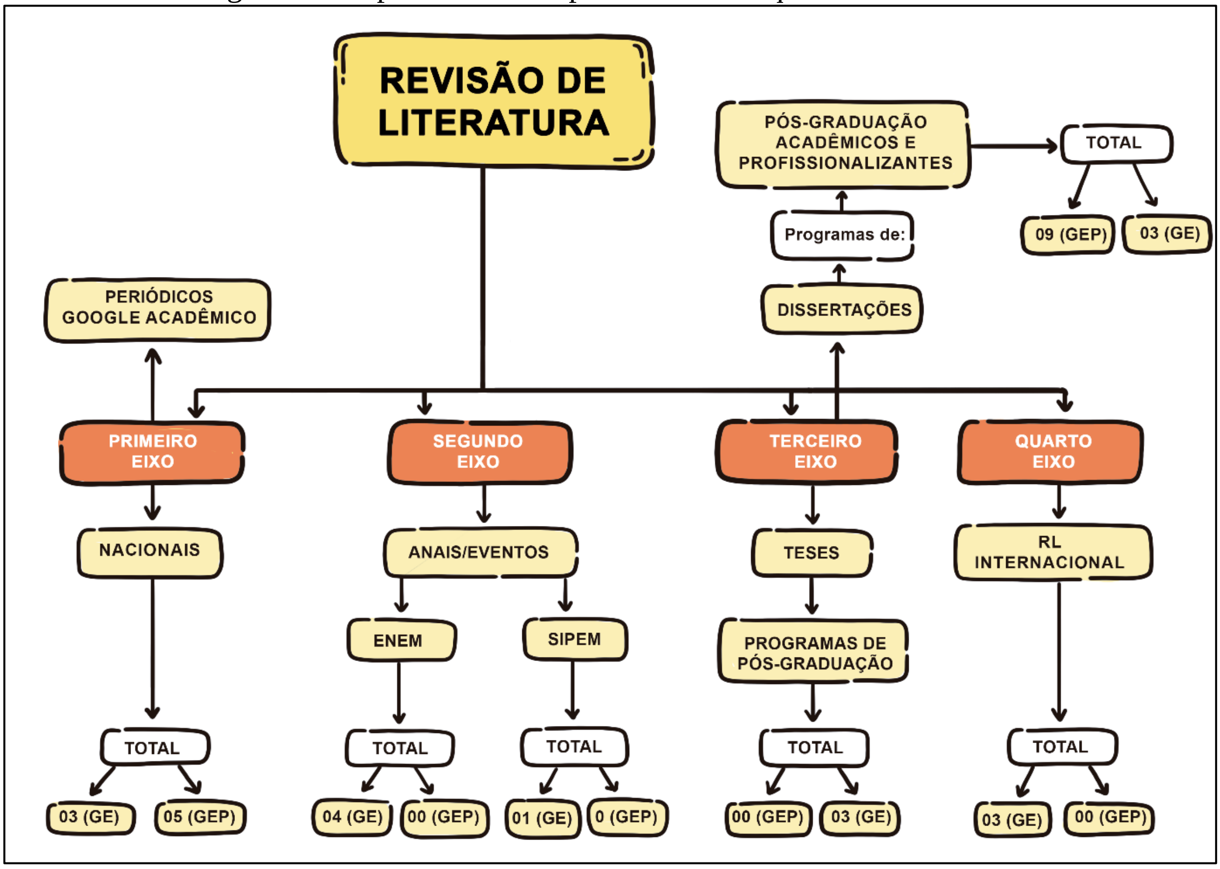
Este trabalho contém, ainda, depois da apresentação das referências bibliográficas, uma parte reservada para os anexos e apêndices, sinalizados no decorrer de cada Seção.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Apresento, nesta seção, minha revisão de literatura (RL), cuja finalidade é compor um panorama das pesquisas que versam sobre a GEP. Para dar conta disso, a discussão é estruturada em quatro grandes eixos que estão em conformidade com a área de interesse desta pesquisa. No primeiro, trato de artigos publicados em revistas nacionais, em que incluo uma busca feita no Google Acadêmico. Tal base de dados foi incluída pelo fato de ter encontrado poucos textos nos periódicos nacionais que versam sobre a GEP. No segundo, discorro sobre um rol de trabalhos publicados em anais de eventos voltados para a área de Educação Matemática. No terceiro, faço discussões acerca das produções brasileiras no formato de dissertações de mestrado e teses de doutorado. Por fim, no quarto, apresento os resultados encontrados a partir de minha busca internacional no banco de dados de resumos e citações (*Scopus*).

Na Figura 3, a seguir, disponibilizo uma síntese dos quatro grandes eixos mencionados anteriormente. Nesse esquema, está a informação acerca do quantitativo de trabalhos, tanto os que se enquadraram na GE quanto os que discutem diretamente sobre a GEP.

Figura 3 - Mapa conceitual apresentando os quatro eixos da RL



Fonte: elaborado pelo autor.

Conforme pode ser observado na Figura 3, 31 trabalhos dentre artigos, dissertações e teses abordam a GEP e, portanto, compõem esta RL. Desse quantitativo, 17 se dedicaram a discorrer sobre a GE e os demais, 14, referem-se exclusivamente à GEP.

2.1 Publicações nacionais

2.1.1 Periódicos Nacionais

Para os periódicos nacionais, utilizei o critério *Qualis* da CAPES para classificação das revistas brasileiras. Pesquisei artigos enquadrados na área de ensino, priorizando o campo da Educação Matemática. Optei pelos periódicos de *Qualis* A1, A2 e A3, cuja divulgação do quadriênio (2017-2020) ocorreu em 2022.

Nas plataformas em que não foi possível fazer a busca por meio de filtros avançados, procedi a leitura de todos os títulos, focando naqueles que continham os termos: “geometria”, “geometria espacial”, “geometria espacial de posição”, “geometric (a)(o)(s)”, “tridimensional”, “posição” e “posicional”. Além do mais, mantive-me atento aos títulos que apresentavam palavras que remetessem ao campo da GEP, por exemplo, “perpendicularismo”, “perpendicularidade”, “perpendicular” e “paralelismo”. Em todos os casos, delimitei-me aos trabalhos que foram desenvolvidos na etapa do ensino médio e/ou no ensino superior.

Quando fiquei em dúvida se o trabalho contemplava os meus parâmetros estabelecidos previamente, fazia leitura dos resumos. Por exemplo, quando encontrava apenas o termo “geometria” no título, realizava a leitura do resumo e das palavras-chave para decidir se tinha aproximação com o meu tema de pesquisa. Nas plataformas digitais das revistas brasileiras que compõem essa RL, nas quais pude fazer a busca avançada, digitei as expressões citadas anteriormente e selecionei os textos que seguiam esses critérios. Nas duas fases, levei em consideração o recorte temporal de 10 anos, isto é, defini, nos filtros, o período compreendido entre 01 de janeiro de 2012 e 31 de dezembro de 2022. Esse recorte temporal se justifica pelo fato de ter encontrado poucos trabalhos sobre a GEP, assim, pareceu-me necessário e prudente ter um recorte temporal maior.

No que diz respeito ao recorte temporal de 10 anos para a revisão de literatura (RL) em periódicos nacionais, dissertações e teses, justifico inicialmente o fato de ter encontrado poucos trabalhos sobre a GEP, por essa razão, a abrangência de um tempo maior, pois entendi que ao fazer isso mais pesquisas poderiam ser encontradas. Além disso, esse período pode ser suficiente para identificar avanços recentes, assim como tendências contemporâneas na região de inquérito da Educação Matemática. Diante disso, as chances para que essa RL esteja alinhada com as práticas, teorias e desafios mais relevantes são maiores. Esse intervalo também pode apontar mudanças mais atuais nessa área, de tal modo que seja possível refletir as práticas, discussões e desafios do mundo de hoje.

Vale destacar que a produção científica na Educação Matemática, bem como em outras áreas, evolui rapidamente. Isso pode ser notado nas abordagens teóricas que surgem cada vez mais em curtos espaços de tempos, nas metodologias e tecnologias que são introduzidas trabalhando intensamente. Sendo assim, entendo que o recorte de 10 anos pode ser interessante diante da possibilidade de acompanhar essas mudanças e, ao mesmo tempo, evitar a inserção de trabalhos ultrapassados e não condizentes com a realidade atual. Por fim, no quesito relevância prática, saliento que os problemas resolvidos há 10 anos podem não ter o mesmo êxito de resolutividade na atualidade, uma vez que há uma rapidez na evolução das ferramentas digitais, assim como os alunos de hoje procuram por outras necessidades.

Ainda, levei em consideração outro parâmetro para inclusão de artigos publicados nos periódicos nacionais nesta RL, o qual se refere ao critério da intersecção, isto é, quando encontrava uma publicação em uma revista, verifiquei se o texto divulgado era o recorte da dissertação de mestrado ou tese de doutorado do mesmo autor do artigo. Nesses casos, optei por apresentar os resultados do estudo maior, ou seja, do trabalho dissertativo ou de tese que já estavam inseridos em minha RL referente às publicações desta natureza. No caso de não dispor desses arquivos em meu banco de dados, fiz a busca a partir das informações dos autores e/ou Programa de Pós-Graduação que constavam no referido artigo.

Vale ressaltar que a minha intenção foi procurar por textos que fizessem discussões acerca da temática da GEP e, caso não houvesse trabalhos focando especificamente nessa subárea da Geometria, procurei por trabalhos sobre a GE, desenvolvidos no ensino médio e/ou superior. Nesse caso, além da leitura dos resumos dos artigos, em algumas situações, como forma de melhorar a RL, debrucei-me em fazer a leitura completa dos textos. Essa preocupação está atrelada à manutenção do foco da presente investigação. Alerto que os trabalhos do campo da Geometria Espacial Métrica (GEM) não foram considerados neste texto.

Esclareço que, mesmo após a leitura dos trabalhos de GE na íntegra, percebi que alguns deles focalizavam conteúdos específicos, por exemplo, sólidos geométricos foi um tema bastante investigado nessas pesquisas. Como a GEP é uma parte introdutória da GE e é extremamente importante estudar os conceitos dessa subárea para, então, ter uma compreensão significativa dos temas que sucedem a GEP, tais como poliedros regulares, prismas e pirâmides, dentre outros, é relevante desenvolver um trabalho com a GEP e, em seguida, estudar os tópicos elencados anteriormente. Sendo assim, essas pesquisas não estão compondo a presente RL.

Compartilho algumas informações relevantes dos bastidores dessa RL. Na *Revista Boletim de Educação Matemática* (BOLEMA), foram lidos 673 títulos e em nenhum deles encontrei explicitamente os parâmetros estabelecidos. Desse universo, fiz a leitura de alguns resumos para tentar identificar uma possível aproximação com minha temática. Todavia, não encontrei trabalhos que evidenciassem essa relação. Na *Revista Educação Matemática Pesquisa* (EMP) encontrei 27 artigos que continham o termo "geometria" em seus títulos. Desse quantitativo, em apenas dois constava a expressão "geometria espacial", sendo um deles contendo explicitamente a expressão GEP em seu título. Na *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (RIPEM), fiz leitura de 245 títulos, dos quais somente um apresentou a expressão GE em seu título.

Na *Revista de Educação em Ciências e Matemática* (Amazônia), li 390 títulos, dos quais nenhum continha as expressões GEP e GE. Na *Educação Matemática em Revista* (EMR), uma publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), foram contabilizados 36 trabalhos quando digitei os parâmetros estabelecidos previamente. Desse quantitativo, nenhum artigo continha a expressão GEP e quatro apresentavam o termo GE em seus títulos, mas, após a leitura, considerei um trabalho para essa RL. Para a revista *Perspectivas da Educação Matemática*, encontrei 15 trabalhos, dos quais apenas um continha a expressão GE, o qual, após leitura do texto na íntegra, não foi considerado para essa RL. A busca feita na *Revista Eletrônica de Educação Matemática* (REVMAT) trouxe 40 publicações contendo algum dos termos estabelecidos por mim. Desse total, duas versavam sobre GE, entretanto, após leitura na íntegra deles, decidi não incluir nessa RL por motivos já mencionados no início dessa RL.

Já no *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática* (JIEEM) foram encontrados 19 trabalhos contendo alguma expressão de meu parâmetro. Mas, a grande maioria não cumpriu requisitos, tais como nível de escolaridade estabelecido nos critérios que defini para busca e valorização excessiva do cálculo de áreas e volumes. Incluí um artigo que versa sobre a bidimensionalidade e a tridimensionalidade na geometria. Na *Revista Paranaense de Educação Matemática*, cataloguei 29 artigos, dos quais dois estão compondo essa RL. Por fim, na *Revista de Educação Matemática* (TANGRAM) e na *Revista Eletrônica da Matemática* (REMAT) foram contabilizados 13 e 6 manuscritos, respectivamente. Entretanto, não tiveram uma relação direta com a GEP, portanto, não foram inclusos nessa RL.

Em relação ao Google Acadêmico, destaco que algumas publicações disponíveis nessa plataforma já tinham sido contabilizadas na parte referente às revistas nacionais. Diante disso, afunilo exclusivamente os trabalhos que contêm toda a expressão “Geometria Espacial de Posição” em seus títulos. Feita a busca avançada, digitando no campo de entrada o meu parâmetro, e considerando o mesmo período para as revistas nacionais, encontrei 11 publicações, das quais três se encontram disponíveis no Quadro 5. Justifico que, nesse momento, considero apenas os artigos, tanto os que são de revistas, mas que não receberam classificação no critério *Qualis*, quanto os que foram apresentados em eventos. Esse esclarecimento é relevante para o momento, tendo em vista que, nesta busca, encontrei dissertações focando na GEP.

Nos Quadros 2, 3, 4 e 5, apresento os artigos publicados em revistas classificadas como *Qualis* A1, A2, A3 e no Google Acadêmico, respectivamente. Listo o nome do periódico, o título do artigo e a referência. Nos espaços onde se lê a letra X, significa que não foi identificado trabalho cujo tema principal fosse a GEP. Também, elenco as publicações que versam sobre a GE e que se aproximam do meu objeto de pesquisa. Para organizar a escrita, cada um dos referidos quadros é exibido e, na sequência, consta sua discussão.

Quadro 2 - Artigos que focaram na GEP publicados em periódicos *Qualis* A1

Periódico	Título do artigo	Conteúdo	Autores e ano
BOLEMA	X	X	X
EMP	Tratamentos figurais vinculados a conceitos de geometria espacial de posição, mobilizados por futuros professores de matemática.	GEP	Fernandes, Soares e Mariani (2021)
RIPEM	A pandemia sob outra perspectiva: uma experiência com fotografias no ensino não presencial de geometria espacial.	Perspectivas	Sá e Rovetta (2021)

Fonte: elaborado pelo autor.

No artigo de Fernandes, Soares e Mariani (2021) há uma discussão acerca de uma das três tarefas desenvolvidas na pesquisa de mestrado com sete estudantes de Licenciatura em Matemática. No texto, as pesquisadoras optaram pela segunda atividade, que tinha como objetivo analisar as posições relativas entre retas e planos.

Foi feito uma atividade em que os alunos fizeram observações de uma figura e precisavam responder perguntas sobre a GEP. Os estudantes deveriam fazer uma observação e, a partir dela, responderem questionamentos, versando sobre as posições relativas entre retas, reta e plano e entre planos. As autoras utilizaram a teoria dos Registros de Representação Semiótica (RRS), proposta por Duval (2011), para analisar os dados. Durante o desenvolvimento de uma das tarefas, ficou constatada a utilização de definições válidas somente na GP, mas que foram utilizadas como sendo corretas na GE. As autoras não apontaram exemplos envolvendo a afirmação precedente. Elas alertam para a importância de se trabalhar a GEP nos cursos de Licenciatura em Matemática como forma de auxiliar os futuros professores.

No trabalho de Sá e Rovetta (2021), foi analisada uma experiência de ensino de GE, tomando como referência o conteúdo da perspectiva, trabalhado a partir da utilização de fotografias. Os autores, ao gerar dados com alunos de ensino médio, investiram em um tipo de perspectiva como técnica escolhida para produção de fotos relacionadas a temas da pandemia do novo coronavírus (Sars-Cov-2). O arcabouço teórico utilizado traz discussões acerca das Performances Matemáticas Digitais (PMD) do ensino de geometria que foram compreendidas pelos pesquisadores como as produções de fotografias realizadas pelos estudantes, pesquisas sobre o ensino e sobre a aprendizagem de geometria, focando na visualização geométrica, assim como o trabalho que se realiza sobre perspectiva. No que concerne a essa última, Sá e Rovetta (2021) justificam a importância do uso da perspectiva em seu trabalho, tendo em vista que, para produção de desenhos em GE, é preciso utilizar uma das técnicas de perspectiva, para deixar evidente a terceira dimensão do objeto que está sendo representado.

Como resultados, os pesquisadores confirmam que as fotografias foram relevantes para potencializar a aprendizagem de Matemática dos estudantes que estavam envolvidos nas atividades de produção de fotos, em particular no tocante à visualização e à manipulação dos objetos. Ainda, em seus olhares, quando cada estudante fazia o planejamento de sua PMD, necessariamente concebia a cena e construía a imagem mental do referido objeto tridimensional que foi fotografado, sendo que, conforme Sá e Rovetta (2021, p. 53, grifo meu), “ao produzir a PMD, ele [*estudante*] realizou a transformação do espaço para o plano com significado, já que os objetos tridimensionais capturados foram representados na forma bidimensional da foto”.

Quadro 3 - Artigos que focaram na GE publicados em periódicos *Qualis* A2

Periódico	Título	Autores
AMAZÔNIA	X	X
EMR	Geometria espacial nas questões do ENEM: Uma análise a partir dos níveis de Van Hiele	Oliveira e Cristovão (2022)

Fonte: elaborado pelo autor.

A pesquisa de Oliveira e Cristovão (2022) olhou para a área de Matemática e Suas Tecnologias do Exame Nacional do Ensino Médio, focando em questões que versam sobre a GE. Nesse procedimento, essas questões foram identificadas, analisadas e classificadas sob a ótica da teoria dos Níveis de Pensamento Geométrico de Van Hiele, com a intenção de sugerir recursos e abordagens para o ensino e a aprendizagem de GE a partir de características, bem como dos níveis das questões analisadas. Para tal utilizaram como arcabouço teórico os trabalhos de Parzysz (2003), inspirado em Van Hiele.

Oliveira e Cristovão (2022) asseveram que o nível 3 (dedução informal), cujas validações ocorrem por meio de natureza teórica, é o que apresenta uma maior quantidade de questões. De acordo com os autores, uma das razões se deve ao fato de ser um nível de pensamento geométrico que se assimila os conteúdos matemáticos desenvolvidos no ensino médio. Esses pesquisadores comentaram que, nessa avaliação nacional, há uma priorização, no que concerne ao nível 3, por questões que valorizam o campo de medidas. Portanto, segundo esses estudiosos, os cálculos foram enquadrados como validações teóricas que não podem ser resolvidos apenas por meio da percepção visual. Ao observar as regularidades desse agrupamento, perceberam itens que exigem o cálculo de volumes de sólidos geométricos, de área de superfícies e cálculo de medidas de diagonais.

Quadro 4 - Artigos que focaram na GEP publicados em periódicos *Qualis* A3

Periódico	**Título**	**Autores**
JIEEM	Representações bidimensionais de figuras tridimensionais: um estudo com a visualização	Souza, Galvão e Souza (2014)
Rev. Paranaense de Educação Matemática	Conceitos de geometria espacial de posição: tratamentos figurais mobilizados por futuros professores de Matemática	Fernandes, Soares e Mariani (2020)

Fonte: elaborado pelo autor.

O trabalho de Souza, Galvão e Souza (2014) produziu dados com alunos do ensino médio. A questão norteadora da pesquisa foi subdividida em duas: “A utilização de imagens externas variadas pode ajudar no desenvolvimento da habilidade de visualização?” e “Quais habilidades de visualização podem ser desenvolvidas com a análise dessas imagens?” (Souza; Galvão; Souza, 2014, p. 87).

Uma das entrevistas realizadas tinha como propósito promover um diálogo preliminar acerca da leitura e da interpretação das representações bidimensionais de figuras em três dimensões. Em outro momento, o pesquisador fez discussões sobre algumas regras de perspectiva e, posteriormente, os participantes retornavam às gravuras da primeira entrevista e tentavam classificá-las em cônicas, paralelas ou, se fosse o caso, em nenhuma.

Em uma das gravuras denominada de “caça palavras” havia a representação de diversos cubos, um deles sendo segurado pela mão direita de um dos personagens. A pesquisadora comenta que quando essa gravura foi apresentada aos participantes, de imediato, eles identificaram que se tratava de um cubo. A representação desse sólido já faz parte do repertório de imagens dos estudantes, conforme pondera a autora da dissertação. Como resultados, as autoras do trabalho concluem que a utilização de imagens externas e variadas pode contribuir para o desenvolvimento da habilidade de visualização.

Em uma das atividades do trabalho de Fernandes, Soares e Mariani (2020), os participantes da pesquisa, além de terem utilizado os registros que foram solicitados, figural e língua natural, também se utilizaram da expressão efetivada por meio de gestos com as mãos para indicar as representações das posições entre retas e planos.

Quadro 5 - Artigos de periódicos buscados no Google Acadêmico focando na GEP

Periódico	Título	Autores
BOLETIM GEPEM	Geometria Espacial de Posição: análise de duas coleções de livros didáticos do Ensino Médio	Fernandes; Soares e Mariani (2019)
INTERMATHS	A utilização de materiais manipuláveis na construção de demonstrações da geometria espacial de posição	Bispo e Assis (2021)
VII CIBEM	Formação continuada e uma abordagem exploratório-investigativa em geometria espacial de posição	Costa e Prado (2013)

Fonte: elaborado pelo autor.

O artigo de Fernandes, Soares e Mariani (2019) tratou da forma como a GEP é trabalhada em LD. Fez análise de duas coleções, fonte de produção dos dados voltadas para o ensino médio. O interesse da primeira autora foi verificar o ano em que a GEP é trabalhada, saber o total de páginas de cada livro, bem como também o percentual que ocupa quando se faz uma comparação com a Geometria e a GE. Posteriormente, identificaram como foram distribuídos os conteúdos da GEP, assim como o quantitativo de páginas em cada coleção que destinou à GEP.

As autoras afirmam que "o estudo das propriedades de posições relativas de objetos geométricos é pouco explorado, o que prejudica o desenvolvimento do pensamento geométrico" (Fernandes; Soares; Mariani, 2019, p. 64). Esse contexto pode interferir no desempenho dos estudantes durante a graduação, principalmente para aqueles que optarem pelo curso de Matemática. Segundo as autoras, o fato de os educandos poder terem a oportunidade de fazer investigações de propriedades, elaborar conjecturas e produzir argumentos são atitudes importantes, pois contribuem para a formação do raciocínio hipotético-dedutivo. Apesar disso, as investigadoras concluíram que não foi possível encontrar atividades que exigissem fazer demonstrações.

Bispo e Assis (2021, p.1) tiveram como finalidade "investigar as contribuições da utilização de MM na construção e demonstrações matemáticas da Geometria Espacial de Posição". Os colaboradores do estudo foram dois estudantes de Licenciatura em Matemática e, para alcançar a referida finalidade, investiu no desenvolvimento de uma sequência didática, cuja temática envolvia fazer a demonstração de um resultado da GEP, por meio da utilização de palitos de churrasco, bolinhas de isopor e régua. Os pesquisadores propuseram aos dois educandos fazer a identificação do ponto de intersecção entre os segmentos de reta que ligam os pontos médios das arestas opostas de um tetraedro. A intenção foi, por meio do MM e de orientações e questionamentos, concluir que, de fato, os referidos segmentos se encontram em um único ponto. O aporte teórico utilizado pelos autores se baseia em reflexões acerca do ensino e da aprendizagem de provas e demonstrações, assim como a utilização de MM durante as aulas de Matemática.

Bispo e Assis (2021) afirmam que a maioria dos trabalhos voltados para o ensino e a aprendizagem da GE dá destaque à parte da GEM, deixando a GEP em segundo plano. Também, de acordo com esses autores, outro assunto não muito discutido na literatura diz respeito a uma conexão entre os MM e as demonstrações matemáticas. Essa quase ausência de um debate acadêmico, no tocante a esse assunto, vai na contramão do que esses autores defendem, isto é, que essa utilização favorece a visualização em GE. Em relação a esses MM, os autores citam o papel sulfite, palitos de churrasco, bolinhas de isopor, sólidos geométricos feitos de acrílico, régua, compasso, dentre outros que, conforme Bispo e Assis (2021), estimulam o processo de imaginar mentalmente. Entretanto, esses pesquisadores alertam que os MM não podem ser vistos como uma solução para resolver todos os problemas do ensino da Matemática.

Um dos ápices relatados por Bispo e Assis (2021) diz respeito ao fato de um dos colaboradores afirmar, logo no primeiro momento do desenvolvimento da sequência didática, iniciada com a construção do tetraedro utilizando palitos de churrasco e bolinhas de isopor, não ter lembrança de que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo tem o comprimento que é a metade do tamanho do terceiro lado. Entretanto, esse mesmo educando relatou que a utilização da régua possibilitou o entendimento desse resultado.

Os dois participantes dessa pesquisa conseguiram, por meio do MM, dizer que cada segmento de reta, construído a partir da ligação dos pontos médios de duas arestas do tetraedro, é paralelo ao terceiro lado. Nessa mesma ocasião, os educandos chegaram à transitividade do paralelismo[6], quando visualizaram um dos paralelogramos obtido a partir da ligação entre os dois segmentos de reta unidos por meio das arestas opostas do tetraedro. Conforme Bispo e Assis (2021, p. 283), “somente o processo de construção mental não parece ser suficiente para que os discentes consigam vislumbrar que os segmentos que unem as arestas opostas do tetraedro consistiam nas diagonais do paralelogramo”. Além disso, os autores informaram que os participantes da pesquisa conseguiram, por meio do MM, apontar a unicidade do ponto de encontro dos segmentos.

Os autores mencionam algumas contribuições dos MM para o processo de construção e compreensão de certas demonstrações matemáticas. São elas: “promoção da visualização tridimensional, compreensão de conceitos, resgate de conhecimentos ‘adormecidos’, realização de redescobertas, autonomia na construção do conhecimento, transição do concreto para o abstrato e construção de conhecimentos” (Bispo; Assis, 2021, p. 285).

O objetivo do artigo de Costa e Prado (2013, p. 143) foi “analisar, em um projeto de formação continuada, reflexões e problematizações de professores sobre conceitos geométricos e ensino de geometria espacial de posição”. Trinta professores participaram da pesquisa. As autoras contaram com os estudos de Shulman (1986; 1987) e Mishra e Koehler (2006; 2009) para a fundamentação teórica. Os conteúdos discutidos foram: conceitos de retas paralelas[7], retas reversas[8] e as posições relativas entre reta e plano, entre planos e figuras espaciais. Para Costa e Prado (2013), esses temas passaram por um processo de problematização, discussão e reconceituação por parte dos professores.

Um dos exemplos apresentados por Costa e Prado (2013) objetivava criar um paralelepípedo por meio do Cabri 3D e, em seguida, criar duas retas distintas quaisquer e que fossem retas suportes das arestas do paralelepípedo. Depois, produzir uma terceira reta, distinta das anteriores. Por fim, esse exemplo solicitava que fosse investigada a posição relativa dessa última reta em relação às duas criadas anteriormente. Ainda, no que concerne a essa atividade, os professores deveriam supor possíveis discussões que pudessem ocorrer em uma sala de aula da educação básica.

Uma das participantes criou duas retas, uma contida em cada lado (de maior comprimento) da face superior do paralelepípedo, depois criou a terceira, interceptando uma das anteriores e fazendo um ângulo de 90º com essa e com as demais. A discussão promovida

[6] Se duas retas são paralelas a uma terceira, então elas são paralelas entre si (Dolce; Pompeo, 2013).
[7] Para esta pesquisa entendo que “duas retas do espaço chamam-se paralelas quando não possuem ponto em comum mas estão contidas em um mesmo plano” (Carvalho, 1993, p. 14).
[8] “Quando duas retas do espaço não estão contidas no mesmo plano (o que necessariamente implica em que elas não possuam ponto comum) elas são chamadas de retas reversas.

para essa situação levou em conta a possibilidade de os educandos visualizarem na tela que a terceira reta construída seria concorrente com as duas anteriores. Entretanto, para que percebessem que a terceira reta tocava apenas em uma das construídas anteriormente era preciso movimentar a figura na tela. Ainda nesse quesito, houve a discussão que embora essas duas retas mencionadas não se tocassem, elas não poderiam ser classificadas como paralelas, tendo em vista que não possuíam um único plano que as contivessem. Essa situação alerta para o fato de ter o cuidado de definir retas paralelas no espaço, evidenciando que há outra condição para ser cumprida, além de elas não terem ponto em comum.

Em síntese, as autoras pontuam a importância da proposição de situações envolvendo as tecnologias na formação de professores. Também, mencionam que a utilização das ferramentas digitais possibilitou fazer manipulações de representações gráficas de forma rápida e com um grau de precisão. Além disso, acrescentam que isso geralmente não é possível com lápis e papel. Realizada a discussão proposta para esta seção, organizada a partir dos quadros, avanço para a discussão de outros estudos.

2.2 Trabalhos Publicados e Apresentados em Anais de Eventos

Nesta subseção, o foco em dois eventos reconhecidos nacionalmente na área de Educação Matemática: o Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) e o Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM). A escolha por esses eventos se justifica pelo fato deles serem caracterizados como os maiores da área de Educação Matemática realizados no Brasil. De acordo com a SBEM, o primeiro reúne professores da educação básica, professores e estudantes das licenciaturas em Matemática e em Pedagogia, estudantes da Pós-Graduação e pesquisadores. O segundo se caracteriza como uma das atividades de maior relevância da SBEM, uma vez que abre espaço para que a produção intelectual, no que concerne ao campo da Educação Matemática, seja divulgado, bem como discutido entre os pares. Ainda de acordo com a SBEM, esse evento promove o intercâmbio entre os grupos que estão espalhados nos mais diversos países e que se preocupam com as pesquisas que fazem parte do rol da Educação Matemática.

2.2.1 Encontro Nacional de Educação Matemática

Minhas buscas nos anais do Encontro Nacional de Educação Matemática foram delimitadas à GE na etapa do ensino médio e do ensino superior. Considero importante olhar para a última etapa da educação básica, pelo fato de ser um momento de transição e, consequentemente, há uma revisitação de conteúdos vistos na etapa precedente, mas com um maior aprofundamento. Por fim, destaco que me debrucei em comunicações orais que versavam sobre a GE, tanto as que olharam para o LD, quanto aquelas que se voltaram para a sala de aula.

Utilizei os mesmos parâmetros de busca feitos para os periódicos nacionais. Em relação aos anos de 2013, 2016, 2019 e 2022, quando digitei os termos mencionados, encontrei 36, 54, 90 e 42 trabalhos publicados, respectivamente. Desse quantitativo, 1, 4, 6 e 3, também respectivamente, tratavam sobre GE no ensino médio. Ressalto que nenhum investigou a GEP. Acrescento ainda que das 14 pesquisas escolhidas para compor esta RL 4 tiveram uma maior aproximação com a temática investigada. Nesse sentido, no quadro, a seguir, reúno informações acerca de trabalhados vinculados ao ENEM sobre a temática de meu interesse. Após o quadro, teço comentários apreciativos sobre cada um dos estudos anunciados.

Quadro 6 - Trabalhos que versam sobre a GE apresentados e publicados no ENEM

Edição/Ano	Título	Autores
XII/2016	Geometria espacial: análise de uma coleção de livros didáticos do Ensino Médio	Ferner *et al.*.
XIII/2019	A geometria de forma lúdica: uma experiência com materiais manipulativos em turma do Ensino Médio	Destefani, Destefani e Marinho
XIV/2022	Utilização da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas nas aulas de geometria espacial	Campos e Fernandes
	Figuras bidimensionais x figuras tridimensionais: qual a diferença na visão de alunos?	Kissner e Cargnin

Fonte: elaborado pelo autor.

A pesquisa de Ferner *et al.* (2016) teve como fonte de produção de dados uma coleção de LD de Matemática do ensino médio, aprovada pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) referente ao ano de 2015. A fundamentação teórica se baseia nos pressupostos de Duval (2011) e nos Níveis de Van Hiele. Neste último caso, foi constatado um número reduzido de estudos se apoiando em tal teoria. Também, verifiquei que a teoria dos Registros de Representação Semiótica (RRS), por um lado, não foi utilizada em nenhum dos artigos que os autores se dispuseram a analisar e, por outro lado, as representações semióticas foram encontradas quando o quesito era apreensão conceitual de objetos matemáticos.

Alguns pontos elucidados nas considerações finais acerca da coleção de LD analisada, quando olharam para os exercícios, evidenciam que o contexto da Matemática recebe mais valorização. No tocante aos níveis de Van Hiele, o de *Análise* é o mais explorado. Isso, de acordo com os autores, possibilita o estabelecimento de relações entre figuras geométricas bidimensionais e tridimensionais. Em relação às transformações de representações semióticas presentes nos exercícios, Ferner *et al.* (2016) concluíram que as *Conversões* são mais exploradas no decorrer dos exercícios, especificamente do registro em língua natural para o algébrico. Em se tratando da coleção analisada, de forma resumida, os autores assinalam que dentre os três volumes que integram o ensino médio, o de número 3 apresentava a maior quantidade de atividades resolvidas e propostas de GE. Enquanto isso, no volume 2, não foram identificadas atividades de GE. Também, foi elucidado que, concernente às atividades inseridas na categoria de conversão do registro em língua natural para o algébrico, sendo o geométrico o intermediário, priorizaram a aplicação de fórmulas.

A pesquisa de Destefani, Destefani e Marinho (2019, p. 2) buscou "investigar a geração e difusão de novas metodologias no ensino da Matemática, utilizando materiais manipulativos, buscando estratégias simples que possibilitem a compreensão e a aprendizagem de conceitos geométricos". A produção dos dados ocorreu com alunos do ensino médio. A partir da observação de sólidos geométricos confeccionados com materiais trazidos pelos educandos de suas casas, foi possível fazer algumas inferências. Por exemplo, segundo as autoras, muitos desses personagens não sabiam fazer a pronúncia correta dos poliedros, enquanto outros denominavam o cubo de "dado" e a pirâmide de triângulo. Outro ponto observado diz respeito ao fato de que quando se possibilita aos discentes o manuseio de materiais nas aulas de Matemática, é possível aumentar as chances de sucesso na aprendizagem.

Os autores Campos e Fernandes (2022) trazem um relato de experiência acerca da prática docente de um professor, por meio da aplicação de uma sequência didática para alunos do ensino médio. Os conceitos da GE, particularmente os de sólidos geométricos, foram possíveis de serem construídos por esses estudantes. Utilizaram a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas. Para os pesquisadores, no decorrer das duas etapas da metodologia, especificamente na fase da leitura, alguns termos que provocaram dúvidas dizem respeito àqueles referentes aos conceitos da GE. Entre eles, as noções de "colineares" ou "coplanares[9]" geraram uma grande discussão. Diante disso, o professor-pesquisador, um dos autores do artigo, relata situações do tipo:

> [...] se são termos específicos do conteúdo trabalhado, como explicar para os estudantes sem que seja trazida à tona uma metodologia tradicional, na qual se apresenta o conceito e os estudantes o utilizam? E se não explicar o conceito, como

[9] Pontos *colineares* são pontos que pertencem a uma mesma reta. Pontos *coplanares* são pontos que pertencem a um mesmo plano.

> dar continuidade na tarefa fundamentando-se na metodologia escolhida? (Campos; Fernandes, 2022, p. 5).

Perante esse impasse, os autores indicam que a solução encontrada foi solicitar que o grupo de educandos fizesse uma busca na internet acerca do significado desses conceitos e, a partir daí, iniciasse uma discussão e, em plenária, chegassem a um consenso no sentido de averiguar se o que foi encontrado estava coerente com o enunciado dos problemas. Logo após a formalização do que é coplanar, Campos e Fernandes (2022) trazem um problema gerador que promoveu um debate. O questionamento indagava aos estudantes o motivo de uma mesa com três pés ser mais firme do que uma com quatro. Para esses autores, houve estranhamento quando os discentes ficaram pensando em uma mesa com essa quantidade de pés. A partir daí, concluíram que, se nesse caso é mais firme, portanto, uma com quatro é mais bamba. Em síntese, os educandos conseguiram, de acordo com os pesquisadores, fazer uma relação do problema com o conteúdo que estava sendo estudado. Como considerações finais, os referidos pesquisadores ponderam que a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas possibilitou a construção dos conceitos primitivos da GE, bem como as posições relativas entre esses elementos no espaço.

O trabalho de Kissner e Cargnin (2022) contou com a participação de educandos do ensino médio. O artigo traz um debate acerca de uma das onze questões elaboradas para a pesquisa. Esse questionamento visava saber se havia diferença entre figuras[10] 2D e 3D e, se houvesse, quais seriam elas. As autoras salientaram que, dentre os dez participantes, dois indicaram que a diferença entre as figuras 2D e 3D diz respeito a suas dimensões. Na ótica das estudiosas, isso indica a necessidade de se trabalhar esses significados com os discentes, antes mesmo do estudo da GE. Ademais, constataram que, dentre os dez voluntários da pesquisa, oito apresentaram respostas contendo algumas incompreensões, por exemplo: “na figura bi você vê a frente e na tri vê outras faces” (Kissner; Cargnin, 2022, p. 3). Segundo as autoras, geralmente, os professores do ensino médio rotulam que seus educandos já sabem diferenciar os termos 2D e 3D, sendo assim, não há um debate sobre o sentido dado a eles. Considerando a discussão tecida neste espaço, reforço a pertinência em desenvolver atividades que estimulem os discentes a pensar acerca da diferenciação entre esses dois termos.

2.2.2 Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática

[10] Figura é qualquer conjunto de pontos. *Figura plana* é uma figura que tem todos os seus pontos num mesmo plano.

No Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), adotei os mesmos procedimentos utilizados para os periódicos nacionais. Após aplicação de todas as condições para busca, encontrei sete pesquisas que poderiam estar relacionadas com o foco principal. Desta procura, depois de ter feito a leitura dos artigos na íntegra, um deles cumpriu com os requisitos estabelecidos (Quadro 7).

Quadro 7 - Trabalhos que versam sobre a GE apresentados e publicados no SIPEM

Edição/Ano	Título	Autores
2012	Habilidades de visualização com alunos da licenciatura em matemática em geometria espacial	Leivas

Fonte: elaborado pelo autor.

O trabalho de Leivas (2012) envolveu 10 licenciandos em Matemática. A visualização foi o tema principal da pesquisa que foi sustentada a partir de diversos teóricos, incluindo alguns da Psicologia da Educação Matemática. Feito um panorama acerca da visualização, Leivas (2012) afirma que ela é entendida como “sendo um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos” (Leivas, 2012, p. 22). A partir daí, o pesquisador considera que tanto educandos da educação básica, quanto aqueles do ensino superior, podem desenvolver a visualização.

O referido autor elaborou 10 atividades com a finalidade de responder à seguinte questão norteadora: “É possível desenvolver em alunos da Licenciatura em Matemática a habilidade de visualização?” (Leivas, 2012, p. 4). O material produzido apresentou as seguintes características: observação de pilhas de cubos que poderiam ser visualizados sob diferentes ângulos, apresentação de quatro objetos espaciais, sendo que em alguns deles não estavam visíveis todas as arestas na representação, produções de desenhos de pilhas de cubos a partir do esboço de vistas laterais, frontais e do topo, por fim, representações de cubos e prismas intersecionados por planos paralelos[11] e perpendiculares às bases. Como resultado, o pesquisador pondera que foi possível a criação, o desenvolvimento e o aprimoramento da habilidade de percepção visual por meio da aplicação das atividades elaboradas previamente. Em seu ponto de vista, uma delas possibilitou concluir a necessidade do desenvolvimento de

[11] Se duas retas concorrentes *r* e *s* são respectivamente paralelas a duas retas *r'* e *s'* de um plano α, o plano determinado por *r* e *s* é paralelo a α.

tarefas que solicitem dos estudantes a representação de objetos tridimensionais e, a partir deles, fazer tanto a identificação das linhas que não ficam visíveis, quanto o tracejado delas.

Em resumo, no tocante ao SIPEM, na tabela, a seguir, exibo um levantamento dos trabalhos publicados e apresentados no evento, nos anos de 2012, 2015, 2018 e 2021, e que tratavam sobre GE. Evidencio que a intenção inicial foi procurar por pesquisas que se dedicaram a investigar a GEP na graduação em Matemática, como o número de estudos foi reduzido, também inclui o ensino médio. Tendo em vista que não localizei estudos no âmbito da GEP, em específico, apresento os resultados referentes à GE.

Tabela 1 - Quantitativo de trabalhos publicados e apresentados no SIPEM que versam sobre a Geometria Espacial

Edição **Ano**	V 2012	VI 2015	VII 2018	VIII 2021	**Total**
GE	3	-	3	1	7
GEP	-	-	-	-	-

Fonte: elaborada pelo autor.

Como descrito anteriormente, um trabalho publicado na edição de 2012 integrou essa RL. Outros quatro, conforme esclareço precedentemente, não atenderam os requisitos estabelecidos, e dois foram oriundos de trabalhos maiores (dissertações ou teses), sendo analisados em seus originais.

2.3 Produções Brasileiras de Dissertações de Mestrado e Teses de Doutorado

Como estratégia para encaminhar minhas discussões, subdivido esta seção em três subseções, a fim de indicar categorias. Na primeira, incluo, exclusivamente, as publicações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). No caso desse Programa, alguns trabalhos foram encontrados na página do PROFMAT/SBM, por meio da inserção no campo destinado à busca da expressão “Geometria Espacial de Posição”. Considerei apenas os trabalhos que apresentavam essa expressão nos títulos. Algumas pesquisas do referido programa também foram encontradas no banco da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD). Para filtrar, nesse caso, utilizei os termos chaves “geometria”, *AND* “posição” e, no campo “assunto” digitei a palavra “Matemática”. A escolha da BDTD ocorreu em razão de ser um ambiente virtual que conta com a parceria de instituições brasileiras de ensino e pesquisa, além disso, no momento das buscas, a página exibia dados de 130 instituições, 563.808 dissertações e 206.344 teses de doutorado.

Na segunda categoria, disserto sobre os trabalhos de mestrado, tanto acadêmicos quanto profissionais, excetos os do PROFMAT. Essas pesquisas foram encontradas no banco da BDTD por meio dos termos que utilizei quando fiz a busca pelos periódicos nacionais. Na terceira categoria, discorro acerca de teses de doutorado. A busca pelos trabalhos obedeceu a parâmetros idênticos aos seguidos no caso dos periódicos nacionais.

Como o número de teses e dissertações que abarcava a temática da GEP foi reduzido, exceto aquelas do PROFMAT, decidi fazer uma busca no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, com a intenção de olhar apenas para os trabalhos que mencionavam a GEP em seus títulos. Para isso, filtrei o termo "Geometria Espacial" *AND* "de posição" e encontrei 247 pesquisas. Na sequência, fiz a leitura de todos os títulos, encontrando apenas uma dissertação que cumpria os requisitos estabelecidos. A escolha dessa plataforma digital se justifica pelo motivo de ser um espaço em que as universidades têm a obrigatoriedade de depositar as dissertações e teses defendidas por Programas de Pós-Graduação reconhecidos pelo Ministério da Educação. Sendo assim, uma das vantagens do Catálogo da CAPES é que contém todos os trabalhos defendidos no Brasil[12].

2.3.1 Dissertações defendidas pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

O PROFMAT, conforme página da SBM, é um programa de mestrado na modalidade semipresencial na área de Matemática com abrangência nacional. Seu funcionamento ocorre a partir do aglomerado de uma rede de universidades que fazem parte da Universidade Aberta do Brasil. Tem como coordenação a SBM e o apoio do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). No Quadro 8, elenco as dissertações que foram publicadas pelo PROFMAT.

Quadro 8 - Dissertações focando na GEP apresentadas entre 2012 a 2022 pelo PROFMAT

Universidade	**Título**	**Objeto de estudo**	**Autores**
Universidade Federal de Santa Maria	Geometria espacial de posição: do concreto ao raciocínio dedutivo com uma passagem pela tecnologia	Alunos do ensino médio	Oliveira (2016)
Universidade Federal de Campina Grande	Análise da axiomatização da geometria espacial nos livros didáticos do ensino médio	Dois LD do ensino médio	Ferreira (2015)
Universidade Federal do Piauí	Uma proposta de aplicação do conteúdo de geometria espacial no ensino médio	Alunos do ensino médio	Araújo (2017)

[12] Apesar disso, não há garantia de encontrar o trabalho completo, pois isso é uma escolha do aluno.

Universidade Estadual de Campinas	Geometria espacial de posição: uma abordagem axiomática utilizando material concreto para o ensino médio	Alunos do ensino médio	Silva (2022)
Universidade Federal do Pará	O uso do geogebra no ensino de geometria espacial de posição	Alunos do ensino médio	Kameyama (2021)
Universidade Federal de São João del-Rei	Uma proposta para o ensino de geometria espacial de posição	Alunos do ensino médio/EJA	Resende (2013)

Fonte: elaborado pelo autor.

Oliveira (2016) objetivou fazer uma apresentação acerca do desenvolvimento e da aplicação de uma proposta didática que contemplasse a GEP. Os participantes foram educandos do ensino médio do Colégio Militar de Santa Maria/RS. A intenção foi poder contribuir com a aprendizagem desse público a partir de uma intervenção que valorizasse a parte teórica da GE. O autor se apoiou em dois momentos: como a GEP está sendo desenvolvida? e, quais LD do PNLD estão sendo utilizados? A fonte para essa busca foram sete Colégios que compõem o Sistema Colégio Militar do Brasil.

Conforme Oliveira (2016), o ensino de GE na educação básica geralmente valoriza o cálculo de áreas e volumes de figuras geométricas espaciais. Nesse contexto, exige-se dos estudantes mais conhecimentos algébricos em detrimento dos geométricos. De acordo com o autor, uma das possíveis justificativas para deixar em um segundo plano a GEP se deve ao fato de que ela exige um raciocínio lógico dedutivo. Assim, configuram-se duas situações: na primeira, temos os estudantes que não se sentem motivados com essa temática; e, na segunda, os professores consideram um tema difícil de ser trabalhado. Outro argumento se refere ao fato de que a GEP requer que os educandos façam descrições sistemáticas e organizadas de representações tridimensionais por meio de planos. O pesquisador alerta que, durante toda a educação básica, esse é o primeiro momento em que se exige essas habilidades. Assim, em sua ótica, Na GEP, tem-se que

> [...] a oportunidade de ajudar a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo dos alunos, não desenvolvendo apenas o aspecto instrumental da matemática e, sim, podendo contribuir para a organização do pensamento, propiciando hábitos investigativos e uma visão mais abrangente da disciplina (Oliveira, 2016, p. 15).

Diante dessas considerações, bem como das contribuições que a GEP, se bem trabalhada e articulada em sala de aula, pode trazer para os estudantes, Oliveira (2016, p. 15) buscou responder à seguinte questão diretriz: “é possível trabalhar os conceitos mais abstratos da geometria espacial no âmbito do ensino médio?” Após uma análise de documentos internos dos colégios, Oliveira (2016) traz como um dos primeiros resultados, no tocante à elaboração das propostas didáticas concernentes à GEP, diferenças entre as instituições de ensino. Houve casos de colégios que não dispõem de tempo de aula específico para a GEP. Também, ficou evidente que as instituições de ensino não mostram uma preocupação no que concerne à apresentação de uma proposta diferente para o ensino de GEP.

Nas considerações finais de seu estudo, Oliveira (2016) afirma que a utilização do *Software* GeoGebra, principalmente a janela de visualização 3D, possibilitou a realização das construções tridimensionais. Elas eram um requisito básico para que a proposta didática pudesse contribuir para a aprendizagem. Segundo o autor, "distorções, falta de visibilidade e até mesmo a falta de criatividade seria um empecilho para o cumprimento destas atividades. Surgiu aí a ideia de se utilizar um *software* que pudesse reproduzir de maneira mais eficiente o trabalho dos alunos" (Oliveira, 2016, p. 118).

Em síntese, Oliveira (2016) apresenta os resultados de uma proposta didática com foco na GEP para alunos do ensino médio de Colégios Militares. Observo que ele não comenta sobre a forma como analisou os seus dados. Entendo que foi feita uma discussão matemática a partir das respostas que os participantes deixaram registradas nas listas de exercícios, nas avaliações e nas construções que foram feitas no laboratório de informática.

Por sua vez, o trabalho de Ferreira (2015) teve como objetivo: contribuir com os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, em especial o da GE. Para isso, analisou dois LD do ensino médio, em particular, os capítulos destinados à parte introdutória da GE. A análise buscou perceber como o método axiomático[13] é apresentado. Para realizar a análise dos LD, a autora se apoiou em três componentes básicos para o ensino de Matemática: a conceituação; a manipulação; e a aplicação, os quais foram conceituados com base em Lima (1999). O primeiro requer atenção a alguns critérios, por exemplo, erros (de desatenção, de raciocínio, de definição e resultados e conceitos mal formulados), excesso de formalismo, linguagem inadequada, imprecisão, obscuridade, confusão de conceitos, objetividade e conexões. Em síntese, a conceituação no tocante à geometria "[...] é bem presente no raciocínio dedutivo. Nesse raciocínio, o aluno compreende o porquê da veracidade (ou não) de algumas afirmações, como também suas negações e (ou) recíprocas e essa prática baseia-se na conceituação" (Ferreira, 2015, p. 11). O segundo demanda maior ênfase nos exercícios, cabendo ao professor saber escolher os exercícios e os problemas. Por fim, o terceiro, conforme Ferreira (2015, p. 11), caracteriza-se como "um exercício rodeado de aplicações é motivador,

[13] Para Ferreira (2015), método axiomático é um conjunto finito de *definições, conceitos primitivos e axiomas* utilizados para definir objetos e demonstrar teoremas.

estimulante, faz com que o aluno encontre um sentido, um porque dedicar seu tempo e sua energia para tentar compreender e aprender o que lhe está sendo apresentado em sala de aula".

Além desses três componentes, para fundamentar o trabalho da análise dos dados, Ferreira (2015) se respaldou em algumas recomendações do PNLD (2012) para o ensino de Matemática e, em um roteiro, elaborado pela autora, contendo sugestões de itens a serem observados em um LD. Para ela, o professor de Matemática deve ter clareza do método axiomático impregnado de certo formalismo. Entretanto, ressalta uma atenção redobrada durante os processos de ensino e de aprendizagem, uma vez que os educandos podem não estar preparados cognitivamente para compreender o formalismo matemático.

Ferreira (2015) deu destaque a alguns pontos que os dois LD analisados apresentaram. Por exemplo, em um deles foi percebida a ausência de informações acerca do que seriam a(s) hipótese(s) e a tese[14], durante o processo de demonstração de um teorema. "Apresentar essas informações é uma atitude que se espera de um livro didático e que o professor também deve seguir" (Ferreira, 2015, p. 36). Em se tratando das componentes conceituação, manipulação e aplicação, elas estavam presentes no livro, sendo que a manipulação com menor ênfase. No outro, a conceituação é a mais utilizada. Já a manipulação poderia ter sido mais explorada no capítulo de GE. Percebeu-se uma ausência da aplicação durante os exercícios resolvidos.

Os resultados mostraram que o método axiomático esteve presente durante quase todo o capítulo de GE do livro 1. Todavia, no livro 2, não foi dada uma importância, uma vez que se fala de conceitos primitivos, postulados e teoremas[15], porém muitas vezes não são utilizados durante o processo de demonstração dos resultados geométricos.

O trabalho de Araújo (2017) também traz um tratamento matemático a respeito da GE por meio da análise de quatro LD do ensino médio ao investigar os capítulos de GE. Não encontrei descrições acerca dos critérios utilizados para escolher os LD, assim como não ficou claro qual seria o objetivo e a questão diretriz. A teoria foi abordada a partir de conceitos, definições, teoremas, propriedades e figuras. Em relação ao processo de análise, não encontrei indícios de quais critérios foram seguidos para essa etapa. O que está evidente é uma descrição sobre como cada LD aborda a GE. Em sua análise, o autor resumiu os seguintes questionamentos: os teoremas foram demonstrados? O livro tratou da GEP? Apresentou a história da geometria? Após responder essas perguntas, Araújo (2017) afirmou que os LD analisados são similares no tocante à abordagem da GEP. Diante disso, sugeriu um roteiro que

[14] Para a autora, a(s) hipótese (s) são afirmações(s) considerada(s) verdadeira(s), que aparecem no enunciado do teorema. A tese também aparece no enunciado do problema e, é o que se pretende concluir na demonstração.
[15] Qualquer proposição que seja consequência de proposições anteriores, (Morgado, Wagner e Jorge, 1990).

pode ser utilizado pelos professores para trabalhar as ideias intuitivas do conteúdo. Uma das recomendações é a utilização de *softwares* e MM, defendendo-os como relevantes à aprendizagem.

A dissertação de Oliveira (2016) apresenta uma discussão formal e axiomática da GEP. Para isso, toma como referência recursos concretos e digitais, pois, na percepção do autor, isso pode possibilitar a formulação de conjecturas. Há um argumento para o início do estudo da GEP por meio de materiais concretos na pesquisa, uma vez que, embora seja utilizado o recurso digital, ainda há o problema em visualizar um objeto tridimensional no plano, no caso, a tela do computador ou *smartphone*, defende o pesquisador.

Em defesa da GEP, Oliveira (2016) assevera que havendo uma boa compreensão dessa subárea, certamente contribuirá para outros conteúdos da GE. Diante disso, o autor elaborou atividades utilizando MM com objetivo de promover a visualização tridimensional. No capítulo destinado ao referencial teórico matemático, ele apresenta um fluxograma que tem a pretensão de indicar quais postulados e quais definições são necessárias para a conclusão de outros conceitos e construções, sendo o ponto de partida cinco postulados discutidos na dissertação do autor. O esquema possibilitou perceber que no estudo de paralelismo entre retas e planos, há a necessidade de se conhecer os cinco postulados, assim como a compreensão do conceito de paralelismo entre retas. Do mesmo modo, a construção de todos os poliedros requer o entendimento dos conceitos de congruência, ou seja, Postulado de Congruência. Por fim, utilizam-se os cinco postulados, bem como o estudo do paralelismo para promover a compreensão da posição relativa entre três planos.

A pesquisa de Kameyama (2021, p. 11) teve como objetivo "compreender como o uso de *software* GeoGebra pode auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem de conceitos de Geometria Espacial de Posição". Como sustentação teórica, o autor fez um apanhado acerca das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs) na educação e a importância da visualização geométrica. A investigação foi realizada com educandos do ensino médio em uma escola pública do estado do Pará. Como resultados, o autor pondera que o trabalho em sala de aula envolvendo tanto a metodologia tradicional quanto a utilização das TDICs, particularmente o software GeoGebra, promoveu construção de conhecimentos da GEP.

Alerto que percebi na referida pesquisa uma ausência de discussão voltada para o ensino e a aprendizagem da GEP no âmbito da Educação Matemática, mostrando, nesse caso, falas ou depoimentos dos participantes do estudo, assim como momentos de interação entre professor-pesquisador e educandos. Considero pertinente pontuar a necessidade de trazer o referencial teórico para discutir juntamente com as diversas interações ocorridas nas aulas às quais foram destinadas para a produção de dados.

Por fim, a pesquisa que Resende (2013) desenvolveu teve como meta a proposição de um conjunto de atividades voltadas para estudantes do ensino médio, na modalidade EJA. A pesquisadora propôs 10 atividades que foram elaboradas por meio da construção de sólidos utilizando planificações. Para a estudiosa, somente depois dessa fase é que os estudantes devem fazer a formalização dos postulados e dos teoremas, sob a mediação do professor e, seus termos, “a Geometria Espacial se adapta muito bem ao conhecimento de mundo do aluno adulto” (Resende, 2013, p. 3). A autora sugere que para a noção de colineares o professor precisa motivar os alunos para a construção de um paralelepípedo e, em seguida, considerar uma das faces, fazer nomeação dos vértices dela e, a partir daí, observar uma aresta dessa face e verificar se os pontos contidos nessa aresta são colineares, ou se alguns pontos contidos na face são coplanares.

2.3.2 Dissertações e teses defendidas em Programas de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática e em Educação Matemática

No tocante às teses encontradas no BDTD, destaco que o resultado apresentado na busca avançada por meio do termo “geometri” indicou 301 publicações, das quais fiz leitura de todos os títulos e constatei que uma grande parte se refere a outros campos que não têm convergências com a área de Ensino[16]. Fiz leitura dos resumos de uma ínfima parte para decidir se haveria conexões do trabalho com minha RL.

2.3.2.1 Dissertações

Quadro 9 - Dissertações focando na GEP apresentadas entre o período de 2012 a 2022

Universidade	Título	Objeto de estudo	Autores
Universidade Federal de Santa Maria	Geometria espacial de posição sob a ótica dos registros de representação semiótica: um estudo com licenciandos em matemática	Estudantes de licenciatura	Ferner (2019)

[16] Ressalto que na busca avançada não limitei as áreas de avaliação/concentração dos Programas de Pós-Graduações.

Universidade Bandeirante de São Paulo	Educação continuada do professor de Matemática: um contexto de problematização desenvolvido por meio de atividades exploratório-investigativas envolvendo geometria espacial de posição	Professores do ensino fundamental e médio	Muraca (2011)
Universidade Estadual de Ponta Grossa	Reflexão de uma prática interdisciplinar e contextualizada para o ensino de geometria espacial de posição e sólidos de Platão	Alunos do ensino médio	Rodrigues (2019)
Universidade Federal do Rio Grande do Sul	GeoGebra 3D no Ensino Médio: uma possibilidade para a aprendizagem da geometria espacial	Alunos do ensino médio	Borsoi (2016)
Universidade Federal do Pernambuco	Conhecimentos de visualização espacial: tarefas de representações visuais com uso de recursos físicos e visuais.	Ensino médio	Máximo (2016)
Universidade Estadual do Pará	Geometria espacial de posição: uma sequência didática utilizando o GeoGebra.	Alunos do ensino médio	Oliveira (2019)

Fonte: elaborado pelo autor.

A pesquisa desenvolvida por Ferner (2019) envolveu licenciandos em Matemática e teve como questão norteadora saber quais contribuições acerca dos conceitos da GEP um estudo embasado nos tratamentos figurais sob a ótica de Duval (2011) eram trazidas para esses participantes. Para a autora, uma das justificativas em produzir dados com esses futuros professores diz respeito ao fato de haver poucas investigações voltadas para o ensino superior, ainda mais quando se trata da GE. A pesquisadora elaborou um quadro mostrando o que foi relatado anteriormente, ou seja, a partir dos dados foi possível afirmar que muitos estudos se interessam mais por conceitos/conteúdos da GP. Essas pesquisas estão mais voltadas para a educação básica. Diante disso, Ferner (2019) justificou, a partir de sua RL, a inexistência, naquele ano, de investigações que incluíssem como participantes licenciandos em Matemática e abordassem a temática da GEP, tendo como aporte teórico os RRS.

Para a maioria das tarefas propostas aos colaboradores da pesquisa de Ferner (2019), optou-se por utilizar o sólido geométrico cubo para tratar de conceitos da GEP. Segunda a autora, a escolha desse sólido se deve ao fato dele estar muito presente em nosso cotidiano. Por meio do cubo, a pesquisa explorou noções geométricas, tais como a colinearidade e coplanaridade de pontos, posição relativa entre planos, reta e plano e entre retas. Ainda de acordo com a autora, ficou constatado que os participantes saíram de sua zona de conforto em diversos momentos. Por exemplo, nas representações figurais em 2D do cubo, em que se trabalhou com uma representação que continha um par de vértices sobreposto, poderia ocorrer o equívoco de visualizar o hexaedro como se fosse uma figura de seis lados. Na outra situação, os vértices do cubo estavam sobrepostos dois a dois. Nesse caso, a figura do cubo dava a entender que era um quadrado. Por fim, as descrições necessitavam que os licenciandos se apoiassem em resultados da GEP.

Em síntese, Ferner (2019) espera que a sua pesquisa possa contribuir com a área da Educação Matemática. A autora assinala que o mapeamento feito nas ementas de cursos de Licenciatura em Matemática, presenciais, em instituições federais de ensino superior teve a intenção de olhar a temática da GE, principalmente a de posição, nas bibliografias mencionadas em projetos pedagógicos desses cursos e, a partir delas, chegar às obras didáticas mais utilizadas. Por meio da observação da natureza dos dados, inferi que não há muita discussão no tocante à GEP.

Muraca (2011) se debruçou em analisar, no âmbito da formação contínua, uma experiência que deu ênfase a um ponto de vista exploratório-investigativa, valorizando as reflexões de professores concernentes a conceitos geométricos, assim como ao ensino da geometria no decorrer da educação básica. A questão diretriz é a seguinte "que problematizações e (re)conceituações os professores evidenciam em uma formação caracterizada por privilegiar uma abordagem exploratório-investigativa sobre geometria espacial de posição?" (Muraca, 2011, p. 18). No tocante à expressão exploratório-investigativa, o autor entende que as atividades enquadradas nesse viés incluem aquelas que fogem dos moldes de uma aula tradicional. É necessário olhar o processo de construção, assim como a maneira como é conduzida.

Muraca (2011) produziu dados por meio de uma experiência de formação continuada. Os participantes de pesquisa foram professores de Matemática do ensino fundamental e médio, docentes do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da União Bandeirante de Educação (UNIBAN), São Paulo, mestrandos e doutorandos. O aporte teórico da pesquisa se baseia nas contribuições de Shon (1995); Shulman (1986); Ponte e Oliveira (2002).

Ao iniciar as discussões sobre a GEP, Muraca (2011) questionou aos professores acerca da diferença entre geometria métrica e geometria espacial de posição. Muitos deles não apresentaram argumentos convincentes sobre as características dessa última, chegando a confundi-la com a geometria dinâmica. As atividades propostas na pesquisa versavam sobre as quatro formas de determinação de um plano e as posições relativas entre retas no espaço. De acordo com esse autor, no momento de discussão entre os participantes ficou nítido que, para eles, a ideia de reta paralela se resumia apenas ao fato delas não se encontrarem, não apresentando ponto em comum. Essa situação ficou mais confusa quando o pesquisador questionou a definição de retas reversas. Entretanto, a partir desse questionamento, os professores começaram a incluir a condição para que as retas paralelas tivessem a mesma direção e estarem em um mesmo plano. Eles começaram a mudar de percepções quando, em uma das atividades, foi solicitado que representassem duas retas no paralelepípedo e, posteriormente, analisassem a posição relativa dessas retas que não se cruzavam. Conforme Muraca (2011), possivelmente uma das justificativas para a não explicitação adequada do conceito de retas paralelas se deve ao fato de haver poucas discussões, na sala de aula, sobre as posições relativas de retas no espaço. Ainda, segundo esse autor, (2011, p. 91) "outro conflito que apareceu durante a discussão em grupo, foi em relação às retas paralelas coincidentes, já que essas retas têm pontos em comum. Nesse caso discutimos outra definição de retas paralelas definida pela distância entre elas".

O pesquisador apontou, em suas considerações finais, dois itens principais: o primeiro está voltado para o conceito de retas paralelas no espaço, uma vez que, no decorrer das atividades, quando os participantes representaram duas retas quaisquer no paralelepípedo, perceberam que elas não tinham ponto em comum e denominavam-nas paralelas. Esse fato evidencia que o conceito de retas paralelas para os professores se refere apenas ao caso de que elas não têm ponto em comum. O segundo item diz respeito ao quesito de os colaboradores não se preocuparem muito com a formalidade matemática. Por exemplo, não estavam empenhados em dar a definição correta dos conteúdos discutidos. De acordo com Muraca (2011), um tópico exemplificado se efetiva quando se afirma que três pontos determinam um plano, o que matematicamente é insuficiente, pois é preciso que eles não estejam alinhados.

O trabalho de Rodrigues (2019, p. 19) teve por finalidade "analisar a promoção do ensino e aprendizagem da geometria de posição e poliedros regulares a partir de materiais didáticos diversificados mediados por uma ação docente sociointeracionista interdisciplinar e contextualizada". A questão diretriz da pesquisa de Rodrigues (2019, p. 20) é a seguinte: "É possível promover o ensino de geometria de posição e poliedros regulares a partir de materiais didáticos diversificados mediados por uma prática pedagógica interdisciplinar e contextualizada?" A autora utilizou as teorias de ensino e de aprendizagem sob a perspectiva de Vygotsky (1991). Para sua sustentação teórica, fundamentou-se no relatório-avaliação proposto por D' Ambrósio (1996), nas atividades que foram desenvolvidas sob a concepção de grupos focais e seu planejamento focando os discentes.

Rodrigues (2019) reservou um capítulo específico para fazer uma apresentação matemática acerca da GEP. Todavia, no decorrer da apresentação dos teoremas, percebi que a maioria deles não foi demonstrada, apenas foram exibidas representações geométricas das posições relativas entre pontos, retas e planos no bidimensional. Esse contexto se estende para as atividades que compuseram o Produto Educacional, uma vez que elas, no que concerne à GEP, estavam mais voltadas para aos entes primitivos, ponto, retas e planos; às características das posições relativas entre retas, ponto e reta, retas e planos, planos e planos. Mas, o fato de Rodrigues (2019) propor o manuseio e a construção dos Sólidos de Platão é uma atitude significativa, tento em vista que os discentes podem ter uma melhor compreensão acerca dos conceitos da GEP, por meio desses MM.

Como resultados, Rodrigues (2019) salientou que após a aplicação do Produto Educacional, a análise dos dados indicou que a proposta das aulas realizadas proporcionou um debate significativo acerca da GEP e dos poliedros regulares. Ademais, as dinâmicas aplicadas produziram melhores interações entre os educandos, havendo mediação entre os componentes das equipes. Assim, conforme a pesquisadora, essa intervenção contribuiu para os processos de ensino e de aprendizagem, principalmente quando os discentes manusearam, construíram e discutiram as atividades, utilizando-se os materiais didáticos, momentos oportunizados a partir da estratégia de grupos focais.

Ressalto uma discussão que considero pertinente: trata-se da definição de retas paralelas no espaço. Na dissertação de Muraca (2011), os professores participantes afirmavam que a característica principal dessas retas é o fato delas não terem ponto de intersecção, sendo necessárias intervenções por parte do pesquisador para que percebessem que, além dessa condição, é necessário que essas retas sejam coplanares. No trabalho de Rodrigues (2019), há o entendimento de que duas retas são posicionadas como paralelas quando estão contidas em um mesmo plano e não tem ponto de intersecção. Por outro lado, em uma das atividades propostas, Rodrigues (2019, p. 86) apresentou uma imagem de um trem se deslocando sobre trilhos e abaixo dessa ilustração escreveu: “observe o trilho por onde o trem irá passar, podemos observar nele a representação de duas retas paralelas”. Como resposta, a autora confirmou que seriam retas que não possuem pontos em comum entre elas, mas vale ressaltar que a ausência de intersecção não garante que as retas sejam paralelas, elas podem ser reversas. Assim, chamo a atenção para o cuidado quando for definir esses objetos matemáticos.

Avançando, a questão de pesquisa de Borsoi (2016, p. 13) é: “De que forma o software de geometria dinâmica GeoGebra pode contribuir no desenvolvimento da habilidade de visualização espacial e na melhor compreensão de conceitos relativos à geometria espacial?” A pesquisadora desenvolveu uma sequência didática, tomando como referência a Engenharia Didática, com a intenção de poder desenvolver habilidades espaciais e, simultaneamente, proporcionar aos alunos participantes da pesquisa a possibilidade de explorar distintas representações de um objeto 3D. A sustentação teórica do trabalho foi a teoria dos RRS de Duval (2011).

Borsoi (2016) trabalhou com alunos do ensino médio. Uma das atividades propostas foi estruturada por meio da construção de um cubo no GeoGebra. Foi necessário que os participantes utilizassem conceitos de paralelismo e de perpendicularismo a partir da observação dos componentes desse objeto geométrico. No posicionamento do pesquisador em questão, embora esse sólido geométrico seja bastante conhecido pelos educandos, houve dificuldades na identificação das características elementares dele. Por exemplo, alguns deles ainda desconheciam que para a construção desse sólido, uma condição necessária e suficiente é que as faces sejam quadrangulares. Em outra atividade, a pesquisadora propôs a investigação da secção (quais planos são formados e o cálculo da área de cada plano) de um cubo a partir do corte, quando se apresenta um conjunto de pontos previamente. Essa proposta estava baseada no fato de as secções de um cubo serem resultados de axiomas e propriedades da GE. Para fins de exemplificação, a autora cita dois casos: dois pontos determinam uma reta e três pontos não colineares determinam um plano. Nessa proposta, os educandos apresentaram, conforme autora, dificuldades em reconhecer/nomear as figuras planas advindas das distintas secções, além do desconhecimento das propriedades que definem essas figuras geométricas planas.

A autora conclui que a utilização de *softwares* de Geometria Dinâmica contribui para o desenvolvimento de habilidades espaciais, assim como proporciona um maior entendimento acerca de conceitos da GE. Os resultados obtidos por Borsoi (2016) sinalizam que a sequência didática elaborada e proposta pode ser validada. Além disso, a autora pondera que a ênfase dada ao cálculo de áreas e volumes pode fazer com que os estudantes não percebam que a geometria tem uma estreita relação com o mundo que o cerca.

O trabalho de Máximo (2016) contou com a participação de cinco duplas de estudantes do ensino normal médio (antigo magistério), habilitados a lecionar tanto na educação infantil quanto nos anos iniciais do ensino fundamental. O arcabouço teórico foram os estudos de Goldino *et al.* (2012), Gutiérrez (1998) e Pittalis e Christou (2010). A pesquisadora utilizou como procedimentos metodológicos a elaboração e análise *a priori* de tarefas visuais, caracterizadas como “leitura” e “escrita”. Concernente à visualização, Máximo (2016) discorre acerca das tarefas visuais. Segundo essa autora, no tocante aos poliedros, foram experienciados dois tipos de tarefas, em que cada dupla de alunos foi convidada, individualmente, para respondê-las, uma de cada vez. Conforme a pesquisadora, para uma dessas duplas não ficou evidente se houve problemas na habilidade de identificação visual. Além disso, há possibilidade de duas das duplas participantes não terem desenvolvido a habilidade de escrever, já que não representaram o sólido que estava na caixa, de forma desejada.

Em resumo, a pesquisa de Máximo (2016) indicou a presença de sete habilidades visuais que foram consideradas de extrema importância nas tarefas envolvendo visualização. Por um lado, o conjunto de tarefas/subtarefas do tipo leitura (identificação), proposto para as duplas, foi desenvolvido de uma forma razoável, por outro lado, percebeu-se dificuldade no tipo de tarefas/subtarefas categorizadas como escrita (representação) (Máximo, 2016).

O trabalho de Oliveira (2019) traz resultados de uma aplicação e desenvolvimento de uma sequência didática, contendo 15 atividades, que visou utilizar o *software* GeoGebra. Foi dado um destaque para o ensino de reta e de plano. A lente teórica utilizada foi a didática da Matemática, apoiando-se no ensino por atividades e no uso de tecnologia de informação e comunicação. A produção de dados emergiu a partir de experimentos com educandos do ensino médio. Empregou-se como metodologia a Engenharia Didática. A questão norteadora foi a seguinte: "Como a utilização do *software* GeoGebra pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de geometria de Posição?" (Oliveira, 2019, p. 13).

Os procedimentos para obtenção de dados consistiram na aplicação de um questionário envolvendo 25 professores da educação básica. Em um segundo momento, foi feita uma pesquisa contando com a participação de 100 educandos de três turmas, sob responsabilidade de outros docentes, do ensino médio de escolas públicas. A partir dos resultados dessas duas fases, Oliveira (2019) fez um cruzamento entre eles para entender como estava a aprendizagem de geometria dos alunos supracitados.

Algumas atividades pensadas solicitavam que os discentes marcassem pontos na tela do GeoGebra sobre uma reta construída, bem como pontos fora dela. Como esperado por Oliveira (2019), os participantes marcaram quantidades distintas e conseguiram mostrar que estão começando a compreender as definições pretendidas, assim como evoluir em relação à abstração do conceito de infinito. Em outra atividade, esses personagens construíram quatro pontos não alinhados e, a partir deles, fizeram construção de retas com base em dois pontos pré-estabelecidos; a ideia era que os educandos percebessem que uma reta pode ser determinada por meio de dois pontos. Segundo esse autor, os discentes conseguiram se aproximar da definição do postulado da existência[17] de uma reta.

Oliveira (2019) conclui que os resultados obtidos no experimento foram positivos e satisfatórios, uma vez que foi possível observar mudanças de comportamento, bem como uma

[17] I) Existe reta e numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos, II) existe plano e num plano, bem como fora dele, há infinitos pontos (Dolce; Pompeo, 2013).

maior motivação por parte dos educandos. O pesquisador também relata que é possível ensinar a GEP a partir de abordagens metodológicas diversas. Entretanto, ressalta a importância de mais estudos focando na reta e no plano, principalmente valorizando a utilização de ferramentas variadas. Ainda, considerou que a sequência didática com ênfase na utilização do GeoGebra se apresentou como uma alternativa diferente, pois os discentes puderam, a partir da interação, fazer abstração dos conceitos, bem como ter uma melhor percepção espacial dos entes geométricos.

2.3.2.2 Teses

A partir dos critérios mencionados anteriormente, apresento a RL dos trabalhos referentes a teses de doutorado. Foram duas teses encontradas, uma delas teve como foco de investigação os LD do ensino médio. Assim, como nas subseções anteriores, apresento o quadro e, na sequência, realizo apreciação pormenoriza:

Quadro 10 - Teses focando na GE/GEP apresentadas entre o período de 2012 a 2022

Universidade	Título	Objeto de estudo	Autores
Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho	Um estudo fenomenológico sobre o conhecimento geométrico	Graduandos em Matemática	Santos (2013)
Universidade Estadual de Campinas	As demonstrações matemáticas presentificadas nos LD do ensino médio: um foco nos capítulos de geometria	LD do Ensino Médio	Mazzi (2019)

Fonte: elaborado pelo autor.

Santos (2013) realizou um curso de extensão universitária envolvendo graduandos em Matemática, cujo tema principal foi a GE e as disposições no espaço. O objetivo do trabalho foi:

> [...] compreender, em uma abordagem fenomenológica, o movimento de construção do conhecimento geométrico que se dá em situações de ensino de conteúdos curriculares referentes às disposições espaciais dos entes geométricos, buscando destacar as intuições, compreensões, diálogos, análises, conclusões e testagens realizadas por alunos, considerando seus conhecimentos prévios, bem como as atividades propositalmente planejadas e os recursos utilizados (Santos, 2013, p. 35).

Para a elaboração das atividades, Santos (2013) utilizou MM, figuras em 3D confeccionadas em cartolina ou acrílico, dentre outros materiais. Além disso, levou em consideração os sentidos e os significados que estudantes da graduação em Matemática atribuem aos entes geométricos: reta, plano e espaço. As questões visavam que os alunos escrevessem espontaneamente seus entendimentos acerca das ideias de ponto, reta, plano e espaço. Uma das tarefas de Santos (2013, p. 58) teve a intenção de elucidar "modos de sentir o sentido de reta e, também, para poder desdobrar, a partir dessa compreensão, diálogos esclarecedores sobre disposições de entes geométricos no espaço". Os participantes desse estudo, ao se depararem com a ideia de paralelismo, não expuseram uma definição do ponto de vista matemático. Ao invés disso, exemplificaram os cantos opostos de uma mesa.

Em relação ao uso dos MM, Santos (2013) relata que eles se mostraram por meio de duas situações. Por um lado, quando constatou o que a literatura diz, isto é, a limitação para representar os entes geométricos. Por outro lado, esses MM possibilitaram aos participantes momentos de experimentação, investigação e inferir resultados. Conforme os dados da pesquisa, a utilização de MM propiciou que os estudantes discutissem noções de ponto e reta. Os alunos procuraram apresentar esses entes geométricos de forma coerente, por exemplo, Santos (2013) informa que um dos educandos alertou que o ponto não se limita ao que está sendo representado com a caneta. Outro ápice mostrado nos dados diz respeito à utilização de termos tais como perpendicularidade, ângulo reto[18] e ortogonalidade que foram mencionados pelos discentes durante quase todos os encontros. Além disso, também houve ocorrência de gestos, movimentações e manipulações que foram compreendidos por Santos (2013) como meios para explicitar compreensões. Segundo a pesquisadora, esses modos de expressão foram considerados importantes, tendo em vista que a sua tese teve como referência o espaço tridimensional. Desse modo, somente a exposição oral não trazia muitas interações.

Para Santos (2013, p. 191), "Os gestos expressam sentido e ganham novas significações na medida em que colaboram para tornar a expressão mais clara diante do focado ou para enriquecer a expressão e facilitar a coparticipação de entendimento". Ainda, assevera que fica difícil se tornar compreensível somente por meio de palavras, como situações apresentadas pelos participantes para exemplificar a infinitude da reta e do plano por meio de gestos com as mãos, usadas para indicar o prolongamento ou a continuidade.

A questão diretriz da tese de doutorado de Mazzi (2019, p. 21) intitula-se: "De que modo as provas e as demonstrações matemáticas estão presentificadas nos livros didáticos de Matemática aprovados pelo PNLD 2018 para o ensino médio nos capítulos que tratam da geometria?". O autor discutiu a noção do sistema axiomático. As coleções foram analisadas à luz das ideias de raciocínio, a saber: dedutivo, indutivo e abdutivo. O trabalho foi dividido em

[18] É todo ângulo congruente a seu suplementar adjacente (Dolce; Pompeo, 2013).

cinco eixos, sendo que o segundo se refere ao modo como os LD introduziram o sistema axiomático. O pesquisador informa que os LD apresentaram divergências conceituais no tocante aos axiomas e postulados. Nesses últimos, o autor verificou que nas coleções analisadas não havia uma sintonia acerca de quais seriam assumidos nos LD, sendo que individualmente os autores fazem escolhas daqueles que consideram convenientes.

Conforme Mazzi (2019), em uma das coleções foi verificado que ela assumiu como postulados algumas sentenças consideradas em Os *Elementos* de Euclides (2009), como demonstráveis. Em síntese, tratando-se do sistema axiomático, o pesquisador informa que apenas duas coleções apresentaram esse conceito, sendo que uma delas fez uma apresentação confusa e inconclusiva. Já a outra fez uma abordagem simples e objetiva. Em relação à maneira como os LD introduzem os conceitos de hipótese, tese, axiomas e demonstração, declarou-se que foram verificados em todas as coleções. Como resultados, o autor conclui que o raciocínio dedutivo foi encontrado em todas as coleções analisadas. Em segundo lugar, vem o raciocínio indutivo, enquanto o raciocínio por analogia esteve presente nos exercícios. No tocante ao raciocínio abdutivo, mostrou-se presente em apenas uma das coleções investigadas.

2.3.2.3 Revisão de literatura em periódicos internacionais

Abordo, nesta subseção, considerações acerca da RL realizada no banco de dados da *Scopus*, que é uma plataforma contendo resumos e citações, pertencente à editora *Elsevier* da Holanda, foi criada em 2004, oferece um serviço *online*, permitindo o acesso a informações indexadas em sua base de dados. Para ter acesso ao Scopus é necessário que as universidades estejam inscritas, como é o caso da Unesp. A escolha desse ambiente virtual deu-se em virtude de indicações positivas do professor Gaona da Universidade de Playa Ancha, Chile. O referido pesquisador tem artigos científicos relatando características dos bancos de dados *WOS, Scupus* e *Scielo.* No trabalho de Gaona (2022), há uma descrição detalhada a respeito desses três repositórios de artigos científicos, assim como os parâmetros para eleger uma plataforma confiável e, por fim, uma série de recomendações para realizar uma busca sistematizada de tal forma que retrate o mais próximo possível os filtros que sintetizam o tema de uma pesquisa.

A RL realizada na *Scopus* ocorreu no dia 13 de novembro de 2023 e é sustentada com base no trabalho de Gaona e Manríquez (2023). A partir dos filtros escolhidos e digitados no campo de busca avançada: (geometr*) AND (3d OR 3-d OR three-dimensional OR threedimensional OR "3 dimensional" OR spatial) AND SUBJTERMS (3304) AND (LIMIT-TO (SRCTYPE, "j")) AND (LIMIT-TO (DOCTYPE, "ar")), encontrei 667 artigos, os quais são pertencentes a 246 fontes documentais distintas. Em comum acordo com o professor Gaona, não estabeleci recorte temporal para a revisão internacional. Essa escolha gerou um grande volume de trabalhos. Pelos filtros usados foram encontrados trabalhos entre 1946 e 2023. Do total de trabalhos, 544 foram produzidos nos últimos 15 anos. Desse modo, foi necessário realizar alguns filtros.

Diante de uma grande quantidade de artigos surgiu o dilema: O que fazer com essas referências? Quais critérios deverei utilizar para diminuir e tornar possível a leitura dos trabalhos que mais se situam no âmbito de minha pesquisa? Uma possível escolha seria por meio de um recorte temporal. Outra decisão seria olhar para as pesquisas que foram desenvolvidas em países latino-americanos, todavia, decidi ler todos os títulos dos textos encontrados. Essas informações foram disponibilizadas em uma planilha do Excel gerada pela plataforma Scopus. Na ocasião, estabeleci uma linguagem binária para inserir e/ou excluir os textos que não se enquadraram nos parâmetros pensados.

Na Figura 4, há um recorte de como esse processo manual se desenvolveu. Nessa figura, os pares de letras AB e AC são as identificações para as colunas de uma planilha do Excel, assim como as linhas são padronizadas por números. À medida que essa etapa ocorreu, percebi diversas áreas, como graduação em Engenharia, em Química, em Arquitetura, em Física e em Psicologia. Também, constatei temáticas no âmbito da realidade aumentada, da álgebra linear, robótica e softwares de geometria dinâmica. Nesse contexto, estabeleci um segundo refinamento.

Figura 4 - Processo binário para RL internacional

AB	AC
Serve?	Pós-resumo
0	0
0	0
1	0
1	0

Fonte: elaborada pelo autor.

No arquivo gerado pela *Scopus*, havia muitas informações a respeito dos trabalhos. Por exemplo, autores, ano de publicação, título, *link* direcionando para os resumos que eram traduzidos automaticamente, palavras-chave, filiação dos autores, dentre outras informações. As duas colunas da Figura 4 foram acrescentadas por mim. Nelas, fui preenchendo com os algarismos “1” para o artigo que contemplava os critérios e, “0” para aquele que não estava dentro dos parâmetros. A coluna AB informa se o título do artigo lido contempla os parâmetros estabelecidos para essa RL internacional, e a AC mostra o resultado após realização da leitura do resumo. Ou seja, quando li o título de um determinado artigo, entendi que se enquadrava nos filtros escolhidos, porém, quando fui fazer a leitura do resumo, percebi que o trabalho não se alinhava à temática desta pesquisa.

No segundo processo de refinamento, estive focado em termos tais como professores de Matemática em formação e GEP. Estabelecido esse parâmetro, encontrei 43 trabalhos que se enquadravam nos requisitos propostos. Como ainda considerava esse quantitativo elevado, decidi realizar leitura dos resumos e das palavras-chave, reduzindo para 15 artigos. Nesse último caso, fiz *download* de todos e realizei a leitura deles em sua totalidade. A partir daí, percebi que informações não disponíveis nos metadados estavam no corpo do texto. Por exemplo, o caso de uma pesquisa que estava enquadrada em meus parâmetros, no entanto, após leitura na íntegra, constatei que os participantes foram graduandos em Psicologia. Nesse caso, o referido texto não foi incluído na RL. Da leitura nos 15 trabalhos, três contemplaram os requisitos estabelecidos, são eles.

Quadro 11 - Artigos internacionais sobre GE/GEP

Periódico	**Título**	**Autores**
Journal of Mathematical Behavior	Subtleties in spatial visualization maneuvers: insights from numerical solutions	Patahuddin *et al.* (2022)
TEM Journal	Spatial Ability and Geometric Thinking of the Students of Teacher Training for Primary Education	Pavlovicova *et al.* (2022)
Journal of Learning for Development	Rethinking Digital Technology versus Paper and Pencil in 3D Geometry	Viseu *et al.* (2022).

Fonte: elaborado pelo autor.

O trabalho de Patahuddin *et al.* (2022, p. 1) focou na compreensão da visualização espacial envolvendo professores de Matemática atuantes em sala de aula. O objetivo da pesquisa é o seguinte: “identificar o papel e a natureza da visualização espacial na solução de problemas de professores em formação que resolvem tarefas de matemática escolar que requerem raciocínio de medição” e, a questão de pesquisa foi: “Como a visualização espacial atua na solução de tarefas de medição relacionadas ao espaço, na perspectiva dos professores em formação?”. Os autores defendem que para exigir o desenvolvimento da visualização espacial nos alunos da educação básica, é preciso que os professores que trabalham nesse nível educacional também tenham condições de reconhecer, assim como aplicar esse raciocínio.

No que concerne aos resultados encontrados pelos autores, elenco-os em pontos. O primeiro diz respeito a uma das tarefas propostas (quatro cubos dispostos em distintas configurações) que permitiu identificar que os professores aplicam várias estratégias para visualizar as faces de um cubo. Alguns participantes utilizaram representações externas (marcas ou números feitos com lápis nas faces), enquanto, outros não o fizeram. Os pesquisadores afirmam a presença de evidências que mostram diferenças na maneira como os indivíduos visualizam. O segundo ponto foi: observou-se que: "o que é visível para uns pode ser invisível para outros". No terceiro, os autores constataram que os professores consideraram as tarefas em 3D mais difíceis de resolver, comparando-se com as em 2D.

Em relação ao quarto ponto, os autores observaram que a compreensão do conceito muitas vezes não é suficiente para resolver um problema. Por exemplo, em alguns casos, conhecer o significado de perímetro não garantiu que os participantes visualizassem que os comprimentos de uma figura eram iguais. No quinto, a visualização espacial é uma componente do pensamento matemático, sendo necessário propor tarefas para desenvolvê-la, tendo em vista que ela não ocorre de forma natural nos indivíduos. No sexto, os professores, que ainda não se apropriaram dos conceitos matemáticos, precisam ser conscientizados das limitações quando estão resolvendo um problema matemático e se apoiam unicamente em fórmulas numéricas. Esses personagens devem receber orientações adequadas no sentido de que eles possam retornar a métodos visuais e práticos como estratégias que contribuem para a compreensão do problema. Por fim, no sétimo ponto, constatou-se que o conhecimento conceitual e a visualização espacial são itens relevantes do conhecimento matemático para os processos de ensino e de aprendizagem. Olhar para um e esquecer o outro pode trazer danos ao que foi deixado em segundo plano.

O estudo de Pavlovicová, Bockova e Lassová (2022) consistiu em duas partes. A primeira teve como finalidade identificar o nível de pensamento geométrico dos futuros professores de Matemática. A segunda buscou determinar o desempenho desses alunos no que diz respeito à resolução de tarefas de habilidade espacial. Os objetivos da investigação, conforme as autoras Pavlovicová, Bockova e Lassová (2022, p. 390, *tradução nossa*) são os seguintes: "determinar o nível de pensamento geométrico dos futuros professores do ensino básico e projetar tarefas de habilidade espacial e avaliar quantitativamente a solução dessas tarefas". Para as pesquisadoras, os resultados do estudo mostraram que os futuros professores têm dificuldades no tocante ao pensamento geométrico nos níveis mais elevados.

A pesquisa de Viseu, Rocha e Monteiro (2022, p. 267, *tradução nossa*) teve como objetivo "discutir os contributos que a tecnologia digital e as abordagens do papel e do lápis podem trazer para a aprendizagem dos alunos". Embora esse trabalho aborde referenciais do campo das tecnologias digitais, foi incluído nessa RL pelo motivo de fazer um comparativo com outros recursos tais como papel e lápis. Os autores explicaram que os participantes resolveram tarefas, inicialmente usando papel e lápis e, em seguida, avançaram para o *GeoGebra*. O conteúdo do artigo se debruçou no estudo da posição relativa de retas e planos. A análise foi realizada por meio de duas tarefas propostas.

Para Viseu, Rocha e Monteiro (2022), a maioria dos alunos conseguiram representar objetos 3D, cubo e prisma usando a perspectiva como estratégia. Eles fizeram isso tanto com papel e lápis, quanto com o *GeoGebra*. Os resultados mostraram que houve mais facilidade em realizar a representação daquele sólido com os recursos tradicionais. Por outro lado, quando os participantes tiveram que representar o prisma triangular, recorreram ao *software* de geometria dinâmica. Segundo os autores, essa inversão se deve ao fato de que os alunos têm uma maior familiaridade com o cubo, pois eles têm uma maior vivência com esse sólido desde muito cedo, por isso a habilidade em representá-lo utilizando papel e lápis. Os pesquisadores concluem afirmando que "quando a familiaridade com o sólido não é tão forte, o *GeoGebra* parece permitir um nível mais alto de sucesso quando comparado à abordagem de papel e lápis" (Viseu, Rocha e Monteiro, 2022, p. 275, *tradução nossa*).

Diante dessa constatação, considero relevante elencar algumas características gerais dos 43 trabalhos, restando 15 após a leitura dos títulos, dos resumos e das palavras-chaves, sendo que, desses últimos, três foram incluídos nessa RL. Essas informações reforçam a ausência de pesquisas sobre futuros professores de Matemática e a GEP. Esses artigos, em sua grande maioria, versaram sobre diversos tópicos da GE, bem como da Geometria Plana. Por exemplo, sólidos geométricos, cálculos de áreas de faces de prismas e pirâmides e de superfícies planas. Por outro lado, também discutiram temáticas envolvendo: impressão em 3D, Geometria Projetiva, teoria da relatividade *versus* GE, rotação mental, dentre outras. Essa diversidade de temas não se enquadrou nos critérios previamente estabelecidos para essa RL internacional.

A partir dessa RL considero relevante apresentar uma síntese de resultados dos trabalhos empíricos no âmbito da Geometria discutidos nesta seção. Ela foi atravessada pelas seguintes temáticas: o uso de imagens externas e variadas como recursos que promovem a habilidade de visualização, a realização de gestos com as mãos para comunicar as posições relativas entre retas e planos, a relevância dos MM para construção de propriedades geométricas, ter o cuidado no momento de definir retas paralelas no espaço, convidar os alunos para discutir acerca dos significados dos termos 2D e 3D, assumir uma postura no tocante ao que se entende por retas paralelas, dialogar sobre as maneiras de se determinar um plano, possíveis diferenças na maneira como os indivíduos visualizam e possibilidades promovidas pelo *GeoGebra*.

2.3.2.4 Síntese da revisão de literatura

A partir das buscas feitas nas revistas enquadradas nos *Qualis* A1, A2 e A3, no Google Acadêmico, nos eventos científicos, na BDTD, no Catálogo de Dissertações e Teses da CAPES e na base de dados da *Scopus*, constatei que a GEP não tem sido foco das pesquisas, fato verificado quando optei por abordar estudos versando sobre outras temáticas da GE para compor esta RL.

As pesquisas no âmbito do PROFMAT são desenvolvidas sob uma ótica mais voltada para o campo da Matemática Pura. Algumas delas propõem sequências de atividades utilizando *softwares* educacionais, destaque para o GeoGebra e para os materiais manipuláveis. Muitos trabalhos desse Programa de Pós-Graduação têm a característica de dissertar sobre ideias e/ou intervenções para serem implantadas em sala de aula, sendo que nesse caso, geralmente, não há a produção de dados envolvendo educandos, educadores e demais sujeitos envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem. Essa é uma peculiaridade do referido Programa. Todavia, ressalto a importância em se promover uma discussão olhando para possíveis dificuldades percebidas quando alunos estão estudando GE, assim como entender o motivo delas ocorrerem e, por fim, propor caminhos para promover o desenvolvimento do pensamento geométrico. Esse debate tem que estar vivo, principalmente quando o foco trata de saberes geométricos, temática deixada em segundo plano por muitas décadas, mas que merece a devida atenção.

Os LD de Matemática do ensino médio também foram alvos dos pesquisadores para analisar o modo como a GE se mostra. Contudo, a GEP, parte introdutória da GE, perde espaço para outros conteúdos tais como sólidos geométricos, poliedros, prismas e pirâmides e o cálculo de áreas e volumes desses objetos geométricos. Os LD também são priorizados nas pesquisas defendidas pelo PROFMAT. Considero relevante esse cenário, tendo em vista que os autores dessas dissertações podem contribuir com um olhar matemático para os LD, podendo, nesse caso, apontar possíveis incongruências conceituais, principalmente nos conteúdos de Geometria.

Embora a GP e a GE sejam disciplinas da maioria dos cursos de graduação em Matemática, observei, conforme RL, uma quase ausência de pesquisas envolvendo a GEP e que promovam uma discussão no âmbito da Educação Matemática, priorizando graduandos em Matemática, principalmente os que acabaram de finalizar a etapa da educação básica. Um maior número de estudos voltados para essa temática, nesse contexto, pode ser relevante, tendo em vista que também há poucas dissertações e, além disso, não encontrei teses que investigaram como os educandos do ensino médio discutem os conteúdos da GEP. O trabalho de doutoramento de Santos (2013) é uma das poucas teses que focou na GEP envolvendo graduandos em Matemática.

Diante de tudo isso, minha pesquisa de doutorado se diferencia e se situa perante as demais elencadas nesta RL. Aponto três itens que podem mostrar essa diferenciação. Eles são considerados de modo articulado. Um primeiro elemento diferenciador diz respeito ao fato de ter incluído acadêmicos de graduação em Matemática; um segundo ponto diz respeito a olhar para o modo como eles discutem conceitos da GEP; e, um terceiro, a desenvolver experimentos de ensino em uma segunda fase envolvendo um grupo menor de estudantes, mas que foram selecionados a partir do grupo maior. Essa escolha de procedimento metodológico possibilitou, conforme pode ser verificado mais adiante, uma maior aproximação entre pesquisador e participantes de pesquisa.

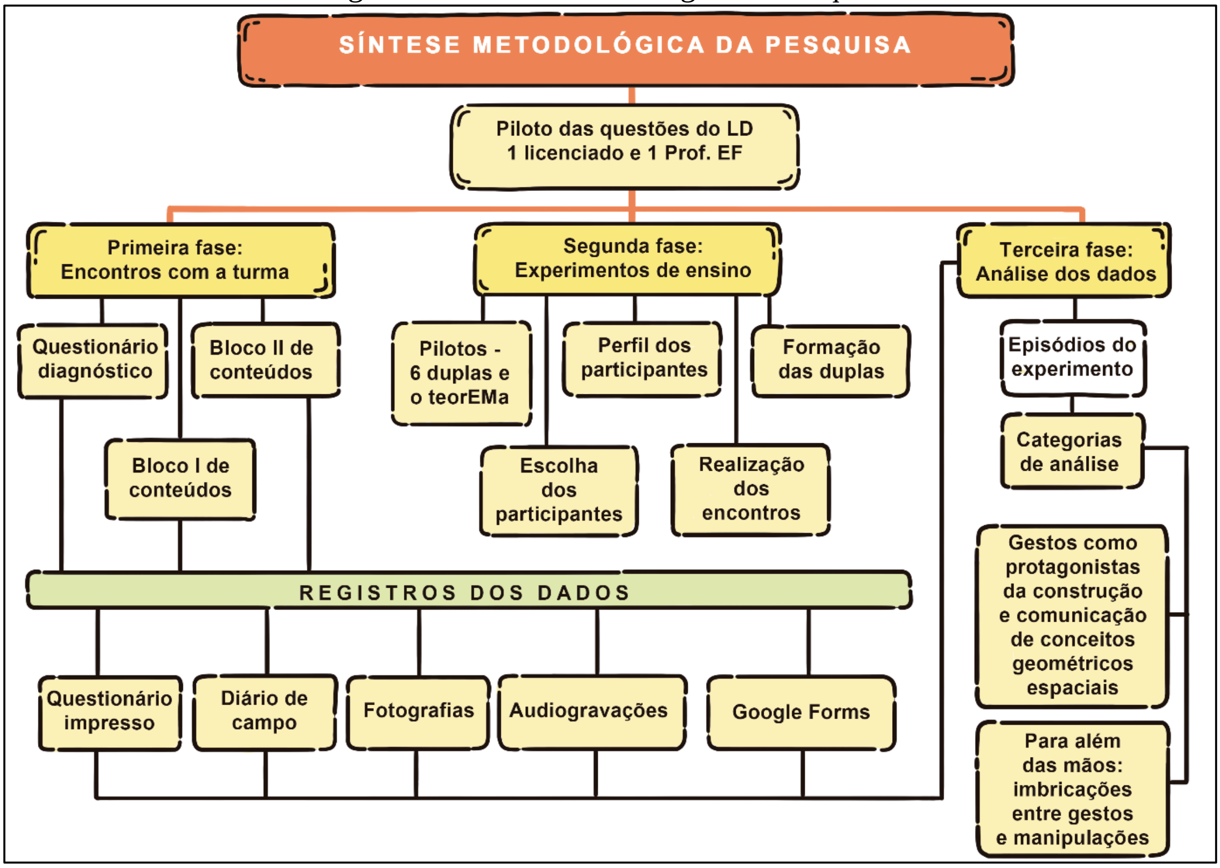
3 PERCURSO TRILHADO

> Não é propósito meu ensinar aqui o método que um deveria seguir para bem orientar a sua razão, mas somente demonstrar de que modo procurei conduzir a minha.
> (René Descartes, 1978).

Nesta seção, disserto sobre as principais características da pesquisa qualitativa, culminando nos bastidores e na elaboração da questão diretriz, da opção metodológica referente aos experimentos de ensino e da sustentação teórica deste trabalho. Apresento o percurso trilhado antes e durante a produção de dados. Assim como descrevo algumas informações referentes: às aplicação do primeiro teste piloto, realizado antes das intervenções com a turma pesquisada; aos encontros com os estudantes para (realização do questionário diagnóstico, resolução e discussão de algumas questões do assunto de GEP que foram retiradas de quatro coleções de LD de Matemática, da fase I); aos bastidores, desenvolvimento do experimento de ensino e perfil dos integrantes (cada dupla de estudantes participou de dois encontros com a finalidade de discutir alguns conceitos da GEP, fase II); à descrição dos instrumentos de registro para produção dos dados; e, por fim, ao processo de análise dos dados culminando na elaboração das categorias (fase III). Também, elenco as questões que guiaram o experimento de ensino.

Os passos que compuseram cada fase da pesquisa podem ser visualizados na Figura 5.

Figura 5 - Síntese Metodológica da Pesquisa



Fonte: elaborada pelo autor.

3.1 A Pesquisa Qualitativa

Esta pesquisa está inserida no território do paradigma qualitativo, o qual vê uma determinada realidade a partir dos olhos das pessoas que colaboram com o estudo. Além disso, esse viés, utilizado por muitos pesquisadores, diferencia-se de abordagens não qualitativas. É preciso salientar que alguns teóricos que utilizei, por exemplo, Bicudo e Costa (2019), apontam que não se trata de fazer uma oposição entre trabalhos que se apoiam nas ideias da pesquisa qualitativa daqueles que escolhem trilhar pela pesquisa quantitativa, nem elencar os prós e contras de cada um deles.

Tendo em vista a importância de esclarecer essas escolhas, considero pertinente deixar meu entendimento a respeito desse viés, assim como minha concordância com pesquisadores que se debruçam em investigar características do paradigma qualitativo. Esses esclarecimentos vão ao encontro das ideias defendidas por Turato *et al.* (2019, p. 137), quando afirmam que "um aluno de iniciação científica, de Pós-Graduação ou de qualquer outro nível hierárquico, que alega fazer 'pesquisa qualitativa', mas não ousa a especificá-la, é pesquisador um tanto perdido no labirinto de tarefas possíveis". Por isso, vejo grande relevância em reservar alguns parágrafos para situar o leitor no tocante às especificidades da pesquisa qualitativa. Diversos pesquisadores trataram deste tipo de abordagem. Para Pertinelli Neto (2019, p. 378), por exemplo, a pesquisa qualitativa,

> Em linhas gerais, entende-se que se fundamenta numa perspectiva que concebe o conhecimento como processo socialmente construído pelos sujeitos nas suas interações cotidianas, enquanto atuam na realidade, transformando-a e sendo transformado. Somam-se ainda como características: preocupação em compreender a totalidade do fenômeno estudado, intepretação intensiva dos dados, heterodoxia da análise e exercício da intuição e da imaginação na investigação científica.

Autores como Gil (2002), Minayo (2019), Fazenda (1994), Alves-Mazzotti; Gewandsznajder (1998), Goldenberg (1997) e outros apresentaram definições da pesquisa qualitativa. A partir delas, destaco, nesta seção, algumas peculiaridades que caracterizam esse modo de pesquisar e, simultaneamente produzir conhecimento. Uma das características da pesquisa qualitativa se refere ao que, de fato, o pesquisador está preocupado, ou seja, ele não visa à representatividade numérica dos participantes, depoentes ou colaboradores da investigação, mas tem a intenção de analisar "o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória etc." (Goldenberg, 1997, p. 14). Os estudos que se fundamentam nessa abordagem também se caracterizam pela possibilidade de fornecer informações mais descritivas, valorizando os significados dados às ações (Borba; Araújo, 2004).

Em relação às pesquisas qualitativas da região de inquérito da Educação Matemática, decidi apresentar alguns esclarecimentos sobre essa vertente qualitativa, tendo em vista que esta investigação faz parte dessa área (Bicudo, 1993). Essa região de inquérito preocupa-se "com o compreender a Matemática, com o fazer a Matemática, com as interpretações elaboradas sobre os significados sociais, culturais e históricos da Matemática" (Bicudo, 1993, p. 19). Essas declarações vão ao encontro de minhas concepções acerca da pesquisa que desenvolvi na disciplina de Geometria Euclidiana Espacial com graduandos em Matemática e, dentre esses, com os alunos participantes do experimento de ensino que se configurou como sendo a Fase II da produção dos dados.

Esta pesquisa no sentido qualitativo se preocupa com o fazer, com o compreender matemático dos participantes do estudo. Por essa razão, interrogo constantemente esse modo e as estratégias que os participantes utilizam para se expressar matematicamente. Esse diálogo, entre alunos e alunos e deles com o pesquisador, emergiu a partir das discussões acerca do conteúdo referente à GEP. Diante do que foi exposto, considero que esta investigação se insere na abordagem qualitativa e na região de inquérito da Educação Matemática.

No que diz respeito à minha postura como pesquisador durante o percurso da elaboração da questão diretriz de uma pesquisa qualitativa, concordo com Bicudo (1993) quando assevera que esse profissional deve estar atravessado por uma inquietação que é revelada através de uma pergunta, de uma interrogação; “[...] é ela que, como o próprio nome sugere, irá dirigir o desenrolar de todo o processo” (Araújo; Borba, 2020, p. 33). Dada essa relevância, vejo que é primordial elencar os bastidores que levaram ao refinamento da questão diretriz de pesquisa, tendo em vista que ela está em constante transformação. Posto isso, descrevo os caminhos percorridos desde a gênese até a fase em que entendo que a interrogação pode ser um ponto de partida para a promoção de discussões e de reflexões acerca de meu objeto de estudo. Sob essa ótica, concordo com Araújo e Borba (2020, p.33) quando arrazoam que

> O processo de construção da pergunta diretriz de uma pesquisa é, na maioria das vezes, um longo caminho, cheio de idas e vindas, mudanças de rumos, retrocessos, até que, após um certo período de amadurecimento, surge a *pergunta*. Um grande problema que percebemos em nossas pesquisas é que, muitas vezes, esse caminho não é apresentado pelo autor. Talvez ele pense que aquele caminho percorrido até o estabelecimento da pergunta tenha sido cheio de enganos, não merecendo ser divulgado, e não perceba que a pergunta é a síntese desse caminho, ou seja, que todo processo de construção da pergunta faz parte da própria pergunta.

Nesse viés, a minha questão diretriz, assim como o objetivo de pesquisa, passaram por um necessário processo de reflexão, em conformidade com as recomendações de Goldenberg (1997), principalmente no que diz respeito à crucialidade de se fazer a pergunta certa para obter êxito na investigação. Entendo que essa etapa não é estática nem mesmo no momento de defesa do doutoramento, tendo em vista que o pesquisador pode querer olhar para outros pontos que ficaram obscuros. Também, penso como Araújo e Borba (2020) quando defendem que esse momento [elaboração da questão diretriz], configura-se, na maioria das vezes, como uma das etapas mais árduas em que o pesquisador deve enfrentar na arte de pesquisar.

Em síntese, esclareço que o processo de elaboração de minha pergunta de pesquisa teve como ponto de partida quando, inicialmente, no momento de elaboração do projeto para a seleção do doutorado, estive focado em olhar para os obstáculos epistemológicos e didáticos nos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria nos anos finais do ensino fundamental, tendo em vista que no mestrado produzi dados com estudantes dos anos iniciais.

Posteriormente, minha questão diretriz esteve voltada para a temática da imaginação, da intuição e da visualização geométrica, tendo como objetivo de estudo analisar LD de

Matemática do ensino médio, restringindo o olhar para os capítulos de Geometria. Pontuo que decidi juntamente com a minha orientadora que seria extremamente importante ir a campo para produção de dados[19], uma vez que já tinha passado por essa fase durante o mestrado. Assim, esse processo se estaciona quando decidi desenvolver esta pesquisa com estudantes da graduação[20] em Matemática, mais precisamente aqueles que estavam matriculados na disciplina de Geometria Euclidiana Espacial.

Em relação à temática da GEP, destaco que, em princípio, despertou uma curiosidade e uma vontade de querer investigar sobre esse tema. Por conseguinte, o cenário atual de elaboração da pergunta de pesquisa está condizente com as advertências de Bicudo (1993) citadas anteriormente.

Na tentativa de explicar a essência de minha questão diretriz, a qual resgato aqui, *como os gestos influenciam o processo de compreensão e construção dos conceitos de geometria espacial de posição por alunos? fui* em busca de outras pesquisas para verificar os possíveis caminhos adotados e que pudessem dar indícios para responder interrogações de caráter mais aberto, como é o meu caso. Com a finalidade de situar os procedimentos utilizados para chegar a um consenso dos direcionamentos dados em torno da apresentação de respostas que se aproximam da interrogação proposta nesta pesquisa. Dito de outro modo, o que vou fazer para responder o *Como* expresso na minha interrogação? Sobre isso, Benedetti (2003) trouxe esclarecimentos acerca de sua questão norteadora, compreendida pelo autor como uma interrogação mais aberta:

> Nota-se nessa pergunta um caráter aberto, visto que não há uma padronização *a priori* das possíveis respostas, mas sim sua construção a partir da análise dos dados, numa ação sistemática de confrontação [...] bem como itens da revisão de literatura. A pergunta conduz as análises nos **processos** pelos quais os estudantes transitaram pelas diversas representações de funções (Benedetti, 2003, p. 55, grifo do autor).

Concordo com o pensamento de Benedetti (2003) e me aproprio de suas falas para refletir sobre a minha questão diretriz, pois também considero que ela não produzirá respostas definitivas, mas encaminhamentos que estarão constantemente em construção. A interrogação desta pesquisa mostrou o modo como os alunos compreendem alguns conceitos da GEP e o que utilizaram para melhorar essa compreensão. Adoto uma postura focada nos processos, ao invés

[19] Entendo que a produção de dados pode ocorrer antes mesmo da imersão no campo e do contato com os colaboradores do estudo. Ela já ocorre durante o processo de planejamento da pesquisa, no entanto, fiz delimitações e a análise é realizada a partir dos diálogos com os educandos.

[20] O Curso de Matemática da instituição na qual ocorreu a produção de dados oferece duas modalidades: o bacharelado e a licenciatura. Os estudantes cursam disciplinas comuns até o segundo ano, momento em que optam por disciplinas relacionadas à escolha entre as modalidades.

de olhar somente para o produto, por isso, continuo concordando com Benedetti (2003, p. 55, grifos do autor) quando expõe que:

> [...] a investigação acaba por enfocar os modos como os participantes aturaram nas atividades propostas, através de comentários, conclusões e ações frente a questões previamente propostas ou que emergiram durante o desenvolvimento das próprias atividades. Nesses grupos, constituídos de estudantes, pesquisador e mídias, são analisadas **quais** questões matemáticas são levantadas, **como** certos recursos condicionam as respostas obtidas e **como** se dá a interação entre os diversos atores desses grupos.

Ou seja, minha investigação está pautada no modo como os alunos se posicionaram diante de conceitos da GEP. É oportuno mencionar que eles tinham que se expressar de diversas maneiras e por meio de distintos recursos, os quais descreverei de forma detalhada posteriormente. Por exemplo, expressões verbais (orais e/ou escritas), expressões imagéticas ou, inclusive, mediante materiais, nas duas fases principais de produção de dados, principalmente no experimento de ensino. Diante de tudo isso, concordo com o seguinte posicionamento:

> Enfocar os processos de determinados fenômenos e chegar a conclusões por meio de análises em profundidade são atributos que caracterizam uma pesquisa no modo qualitativo de investigação, de maneira que a quantificação das respostas obtidas, por exemplo, no número de respostas corretas através de questionários e testes, é menos considerada ou mesmo desconsiderada. Portanto, importam mais os processos que levam os participantes de uma pesquisa a optar por esta ou aquela resposta (Benedetti, 2003, p. 55).

Em síntese, ainda no tocante aos meus argumentos para a opção de iniciar minha interrogação de pesquisa com o conectivo *como* está em consonância com o que Santos (2013, p. 38) defende:

> O “como” presente nessa interrogação indaga os modos pelos quais se dão as vivências dos sujeitos em situação de produzir conhecimento geométrico, abrindo-se para os sentidos e os significados que se produzem na temporalidade dessas vivências. A interrogação posta não tem a finalidade de solicitar uma explicação determinística, apresentando passos lineares a serem dados por qualquer sujeito para que essa produção seja desencadeada.

Os posicionamentos da tese de doutorado de Santos (2013) para explicar a interrogação de sua pesquisa tem intersecções com o que realizo neste estudo. Aqui, estou focado, por exemplo, nos processos utilizados pelos estudantes colaboradores para externar noções da GEP. Ou seja, não tive a intenção de categorizar a fala dos indivíduos como correta/incorreta, pois estávamos (pesquisador e participantes de pesquisa) produzindo saberes geométricos em coletividade. Nesse contexto, todos aprenderam juntos. Desse modo, minha indagação intentou responder como ocorreu essa construção de conhecimento.

3.2 O Contexto do Primeiro Teste Piloto

A fim de saber como os conceitos da GEP presentes em algumas tarefas contidas nos LD de Matemática do ensino médio selecionados para análise, bem como das tarefas que elaborei, eram discutidos e compreendidos pelos participantes desta pesquisa, senti a necessidade de desenvolvê-las com voluntários que não iriam participar de minha intervenção. Além disso, queria quantificar, mesmo que de forma aproximada, o tempo que seria gasto na resolução de todas as questões que integraram o roteiro dos grupos no decorrer da produção de dados. Para isso, solicitei ao meu voluntário, que relatarei logo em seguida, que cronometrasse o horário desde o início da realização até o término de todas as tarefas.

Essas informações fizeram parte da primeira fase da pesquisa. Na ocasião, entrei em contato com um integrante do Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria (GEPGEO) vinculado à Universidade Franciscana (UFN) e um graduando em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM). O primeiro voluntário foi denominado de Pedro[21]. Conversei com ele no mês de fevereiro de 2022, informei a minha pretensão e perguntei se poderia me ajudar e logo se prontificou. Então, encaminhei para Pedro, via *e-mail*, o roteiro de questões que seria proposto aos grupos compostos por estudantes colaboradores de minha pesquisa, contendo as tarefas que selecionei de determinada coleção de LD de Matemática do ensino médio, Coleção 1, bem como aquelas tarefas que elaborei. O critério de escolha dessas perguntas levou em consideração o fato delas poderem possibilitarem diálogos entre os alunos sobre conceitos da GEP. Como os roteiros foram produzidos a partir de quatro coleções de LD de Matemática, e cada uma delas deu origem a dois blocos de conteúdo, decidi que Pedro contribuiria com a resolução de apenas uma coleção de LD. Essa decisão se deve a diversos fatores, entre eles o tempo reduzido que o graduando tinha disponível.

A escolha dessas quatro coleções de LD de Matemática do ensino médio do PNLD, ano de 2021, deve-se ao fato de eu ter entrado em contato com algumas escolas que tenho proximidade profissional e solicitei a doação de alguns LD de Matemática do novo ensino médio. Após esse pedido, recebi quatro coleções. O fato de promover aos estudantes da graduação uma discussão da GEP, tendo como ponto de partida os conteúdos presentes em LD

---

[21] Os colaboradores da pesquisa recebem, aqui, nomes fictícios.

de Matemática do ensino médio, justifica-se pelo cenário que esses participantes se encontravam no início da graduação em Matemática. Isto é, teoricamente perpassaram por todos esses temas na etapa anterior de seus estudos e consequentemente já deveriam compreender noções fundamentais da GEP. Além desses argumentos, pontuo que quando fui olhar o Programa de Ensino de Disciplina do curso de graduação em Matemática da UNESP – Rio Claro constatei que um dos objetivos é estabelecer relações entre os conteúdos da GE e o ensino de Matemática da educação básica. Essa ação não é uma justificativa para a realização de minha pesquisa, entretanto é um item que reforça a importância de revisitar os conteúdos de GE do ensino médio.

Em conversa com Pedro por mensagem via áudio de WhatsApp sobre a percepção que ele teve acerca das tarefas de GEP presentes nos LD de Matemática selecionados, informou-me que elas foram compreensíveis e considerou-as pertinentes para alunos do ensino médio. No tocante ao tempo gasto para a realização das tarefas contidas nos dois blocos de conteúdo, Pedro disse que gastou aproximadamente 3 horas 35 minutos e 18 segundos, tendo em vista que foram resolvidas todas as questões dos blocos 1 e 2 de conteúdo. A partir das informações prestadas por esse colaborador, considerei que uma aula de 2 horas seria suficiente para que os grupos resolvessem cada bloco de conteúdo por dia. Diante disso, procedi conforme tinha planejado.

3.3 Os Alunos Participantes e o Contexto da Produção de Dados: Primeira Fase

A primeira fase da pesquisa contou com a colaboração de estudantes de uma turma da graduação em Matemática da UNESP, campus de Rio Claro. Eles estavam matriculados na disciplina de Geometria Euclidiana Espacial, primeiro semestre de 2022. A produção dos dados ocorreu logo após o retorno das aulas presenciais (elas estavam sendo realizadas virtualmente devido à pandemia de COVID-19). Sendo assim, a turma participante desta pesquisa finalizou o ensino médio e logo após iniciou a graduação já com a pandemia em curso.

Os participantes estavam cursando o segundo ano da graduação. Eles já haviam cursado a disciplina Geometria Plana (GP) no ano anterior. Cabe destacar que, na graduação em Matemática da UNESP–Rio Claro, o componente curricular de GE tem como pré-requisito o componente curricular GP. Um primeiro critério para a escolha dessa disciplina se justifica por ser o tema central de investigação desta tese. Além disso, aproveitei o contexto e cumpri o estágio nesse *lócus*, simultaneamente ao processo de produção dos dados. Um segundo critério para a escolha dessa turma diz respeito ao fato de a orientadora deste trabalho ser a professora responsável da disciplina. Como na pesquisa de Villarreal (1999), também compreendo que desenvolver um estudo dessa natureza em um ambiente no qual o orientador possa estar presente possibilita um acompanhamento acerca do que está ocorrendo no processo de produção de dados da pesquisa.

Esclareço que, em conversas com minha orientadora, avaliamos que a produção dos dados se desenvolveria com uma turma de graduação em Matemática. O principal critério de escolha dos participantes é que eles estivessem matriculados e frequentando a disciplina escolhida. Totalizaram 30 estudantes que participaram dos dois encontros, cada um ocorrido em uma aula.

Vale ressaltar que conforme a grade curricular da educação básica, bem como a obrigatoriedade de se cumprir o que está posto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) entende-se que os estudantes que saem dessa etapa de educação podem e/ou não ter perpassado por muitos conceitos da GE, principalmente nos últimos anos, chegando ao ensino superior com um repertório acerca das noções primordiais da GE. Por isso, propus-me a discutir com eles os conteúdos da GEP na primeira fase e, para isso, uma das soluções para promovê-lo consistiu em desenvolver algumas tarefas dos LD de Matemática do ensino médio.

3.4 A Dinâmica de cada Encontro com toda a Turma

O primeiro encontro destinado para a discussão do bloco 1 de conteúdos, (denomino o conjunto de questões trabalhadas em cada dia de blocos de conteúdos), ocorreu na aula do dia 11 de abril de 2022, no período da tarde, com duração de 2 horas/aulas, enquanto o segundo foi no dia 14 de abril de 2022. Nesse último, foi discutido o bloco 2 de conteúdo com a mesma duração do primeiro dia. Esses conteúdos trabalhados em cada bloco fazem parte do programa da disciplina de Geometria Euclidiana Espacial do curso de graduação em Matemática da UNESP. No Quadro 12, elenco quais temas se referem a cada bloco de conteúdo.

Quadro 12 - Conteúdos de GEP desenvolvidos na fase I da pesquisa

Conteúdos abordados no BLOCO 1	
Conceitos Primitivos	Posição relativa entre retas
• Ponto, reta e plano • Postulados	• Retas Concorrentes • Retas paralelas • Retas reversas
Conteúdos abordados no BLOCO 2	
• Posição relativa entre uma reta um plano	• Posição relativa entre dois planos
• Reta contida em um plano • Reta secante/perpendicular a um plano • Reta paralela a um plano	• Planos paralelos • Planos secantes/perpendiculares

Fonte: elaborado pelo autor.

Os conceitos trabalhos na fase I da pesquisa também foram vivenciados no experimento de ensino detalhado posteriormente. Ressalto que esse caminho percorrido foi o mesmo que Mazzi (2019) adotou em sua dissertação de mestrado, ou seja, o autor desenvolveu um experimento de ensino e trabalhou com conceitos já estudados pelos estudantes. O pesquisador afirma que esse conhecimento prévio não compromete a pesquisa, pelo contrário, possibilita uma reflexão, tendo em vista que apesar do contato com tais conceitos, as participantes da pesquisa mostraram dificuldade em discutir os conteúdos. Tal contexto vivenciado pelo autor também se verifica nesta pesquisa. Para a produção dos dados na fase I, utilizei inicialmente o Questionário Diagnóstico (Apêndice M) aplicado no primeiro contato com a referida turma, em 07/04/2022.

Nesse dia, expliquei os objetivos da pesquisa, relatei suas etapas, assim como deixei claro que haveria uma outra fase para a produção dos dados. Ademais, deixei os estudantes participantes cientes de que a pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética e Pesquisa em Seres Humanos, cujo número do parecer é: 5.278.828. Entreguei o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), apêndice N, aos estudantes e pedi que fizessem a leitura e, em seguida, assinassem, caso concordassem em contribuir com a pesquisa. Alguns questionaram se poderiam levar o documento para assinar em casa. Concordei, uma vez que ainda haveria o questionário diagnóstico para responder. Por fim, após todos os esclarecimentos e o devido consentimento dos estudantes, iniciei a distribuição do questionário diagnóstico e expliquei aos participantes que eles estavam livres para se expressarem espontaneamente e, caso fosse possível, poderiam fazer desenhos, esquemas, dentre outras formas de comunicação. A ideia, aqui, é que os estudantes ficassem livres para expressar seus pontos de vista.

Para os encontros de discussão das tarefas, usei alguns instrumentos para auxiliar no registro dos diálogos entre os integrantes de cada grupo, assim como para captar informações de forma mais ampla, isto é, ter um panorama geral sobre como ocorreu a interação de toda a turma. Para essa tarefa, contei com o suporte de uma câmera[22] de filmagem que ficou na função gravação automática durante todo o tempo de cada encontro[23].

Esse instrumento ficou localizado ao lado da lousa da sala de aula e a intenção era que conseguisse ter uma visão geral de todos os estudantes presentes. A turma foi dividida em dez grupos de três integrantes (no Quadro 11, disponibilizo essa divisão). Em cada uma dessas

---

[22] Esse instrumento foi emprestado pelo Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM), a quem agradeço na pessoa do professor Dr. Marcelo Borba.
[23] Recebi suporte técnico do Douglas Guimarães, integrante do teorEMa. Ele ficou responsável por movimentar a câmera para alguns grupos que manifestavam grandes interações entre os pares.

equipes, deixei um celular com um *software* de gravação de áudio ativado (no total seis) para iniciar a captação assim que fosse entregue o roteiro de estudo contendo as tarefas a serem discutidas. Observo que utilizei ainda um *notebook* como instrumento para captação de áudio e imagem de um dos grupos, totalizando sete dispositivos. Por fim, os demais foram cedidos por alguns integrantes dos grupos que me repassavam o arquivo assim que a sessão era finalizada. Na Figura 6, ilustro alguns dos elementos mencionados anteriormente.

Figura 6 - Representação da sala de aula com câmera frontal para os grupos

Fonte: elaborada pelo autor.

No Quadro 13, também elenco os estudantes que foram selecionados para participar do experimento de ensino. Eles estão assinalados em negrito. A partir de agora, denominá-los-ei por nomes fictícios. Vale salientar que dos dez grupos formados, apenas dois não tiveram representantes que colaboraram com a segunda fase do trabalho. Entretanto, não era uma condição de que todos os grupos tivessem estudantes sendo convidados para contribuir com a referida fase. Para facilitar a identificação daqueles que participaram das duas fases da pesquisa, padronizei-os como os doze primeiros. Essa decisão teve a finalidade de separar os que estavam na primeira fase daqueles da segunda fase, porém sem a intenção de compará-los.

Quadro 13 - Relação das coleções de LD e os respectivos grupos que discutiram as tarefas

Coleções de LD	Integrantes de cada grupo			Blocos de conteúdos
Coleção I	Amanda	**Sandrieli**	Ana Karine	1º e 2º
	Patrícia	**Leonardo**	Quitéria	1º
Coleção I e IX	**Renata**	Antônia	**Cleonice**	1º e 2º
Coleção IV	**Lucas**	Adriana	**Humberto**	2º
	Igor	Lucian	**Edson**	1º e 2º
Coleções VIII e IV	Ricardo	Sabrina	**Iranice**	1º e 2º
Coleção VIII	Maria Teresa	Juliana	Jefferson	1º e 2º
Coleções IV e IX	Caio	Lívia	Edilton	1º e 2º
Coleção IX	**José**	**Thiago**	Jackson	1º e 2º
	Suelen	**Ana Patrícia**	**Luciana**	1º e 2º

Fonte: elaborado pelo autor.

Ainda tecendo considerações acerca dos instrumentos empregados para a produção dos dados, também considero que o roteiro de atividades dos grupos, material que produzi a partir da junção de algumas tarefas da GEP que selecionei dos LD de Matemática, também foi um desses recursos. Por fim, considerei o diário de campo como um instrumento indispensável, pois o empreguei para me expressar e fazer anotações acerca de inquietações, dúvidas e comportamentos no tocante ao modo como se expressavam os colaboradores da pesquisa para comunicar determinado conceito geométrico.

A captação dos áudios das sessões durante a produção dos dados da primeira fase sofreu interferência dos ambientes e, por conseguinte, dificultou a respectiva transcrição. Houve trechos inaudíveis nas gravações dos grupos, em que diversos fatores contribuíram para essa problemática. No decorrer dos encontros, percebi que a sala de aula onde ocorriam as discussões não tinha uma boa acústica. Atrelado a isso, os estudantes conversavam sobre o conteúdo, mas também sobre outros assuntos do dia a dia, o que é normal. Todavia, na maioria das vezes, esses alunos se expressavam em um tom de voz alto. Além disso, os aparelhos de celulares eram constantemente movimentados sobre a banca escolar pelos integrantes dos grupos, além de, em algumas situações, esses dispositivos ficarem distantes da pessoa que estava externando alguma ideia sobre um conceito geométrico.

Essa descrição dificultou o processo de transcrição dos áudios. Mas entendo que esses fatores estão presentes em qualquer pesquisa qualitativa e, muitas vezes, esses detalhes acabam não sendo comentados na parte escrita por alguns pesquisadores. Essas minúcias foram visualizadas por Benedetti (2003, p. 55), quando relata que

> Dentre as dúvidas que se tornaram aparentes no projeto de admissão do mestrado, a principal se referia à intenção de trabalhar com todos os estudantes de uma classe, porém seria difícil o registro dos dados: a câmera focalizaria uma dupla ou várias

> simultaneamente? Escolhida uma, qual seria a dupla escolhida? O ruído poderia atrapalhar as filmagens? E se o tempo de aula se esgotasse antes de terminar os roteiros? O fato de as classes serem compostas por 40 alunos atrapalharia?

Apesar da problemática, consegui extrair das transcrições a essência do meu objeto de estudo e ela não interferiu negativamente na qualidade das análises. Além disso, na fase do experimento de ensino, providenciei distintos dispositivos para captação de áudio e imagem. Ademais, nesse momento, éramos eu (pesquisador) e dois estudantes em um ambiente fechado e sem barulhos, sem interferências externas. Consequentemente, tive uma boa qualidade de imagem e som nessa fase da pesquisa, o que contribuiu para o processo de transcrição.

3.5 Segunda Fase: Sobre o Experimento de Ensino

Para a segunda fase da pesquisa, a opção foi o experimento de ensino[24], que funcionou como uma lanterna para iluminar a prática durante a produção de dados no campo referente a essa fase. Na subseção seguinte, detalho as origens desse procedimento metodológico, bem como apresento uma lista de algumas pesquisas que se utilizaram dessa metodologia em seus trabalhos e, por fim, discuto as principais características do experimento de ensino.

3.5.1 Origens e características do experimento de ensino

Conforme Steffe e Thompson (2000), as origens do experimento de ensino são da antiga União das Repúblicas Socialistas Soviéticas. Para esses autores, ele já era utilizado por pesquisadores da Academia de Ciências Pedagógicas. Além disso, algumas notícias desse tipo de pesquisa chegaram aos Estados Unidos mediante esforços de estudiosos. Segundo Steffe e Thompson (2000, p. 272, tradução nossa), “as versões soviéticas do Experimento de Ensino foram examinadas por um pequeno grupo de pesquisadores nos Estados Unidos em sua formulação de uma nova metodologia para pesquisa em educação matemática”. Essas ações se tornaram importantes e respeitáveis para um início da prática de pesquisa na Educação Matemática.

As pesquisas em Educação Matemática nem sempre consideravam o experimento de ensino como uma forma de fazer pesquisas nessa região de inquérito, isso aproximadamente até 1970, década na qual essa metodologia surgiu nos EUA (Steffe; Thompson, 2000). Duas

[24] O Experimento de ensino foi uma das fases desta pesquisa. Em linhas gerais, realizei uma intervenção pedagógica. Em síntese, essa investigação pode se configurar como uma pesquisa em ensino.

razões foram consideradas pertinentes para seu surgimento. Em primeiro lugar, os modelos por meio dos quais se podia fazer uma Matemática dos alunos se desenvolverem com base em princípios que estavam fora da Educação Matemática. Essas pesquisas geralmente buscavam finalidades que nem sempre era a educação de estudantes. A partir daí, evidenciava-se a necessidade de novos modelos que tivessem raízes nessa área do conhecimento.

Em segundo lugar, a pesquisa e o ensino eram separados por um enorme abismo. Isto é, antes do surgimento do experimento de ensino se utilizava uma metodologia experimental, cujas raízes são do "paradigma da agricultura", a característica dela é que "o pesquisador seleciona uma ou mais amostras de uma população-alvo e submete-a a vários tratamentos" (Steffe; Thompson, 2000, p. 270, tradução nossa).

O procedimento de experimento de ensino faz referência aos métodos que foram utilizados por Vygotsky na antiga União Soviética. Além disso, foi nomeado por esse último pensador como genético-causal ou genético-experimental (Steffe; Thompson, 2000). Encontrei, na literatura especializada, distintas expressões para esse tipo de procedimento metodológico, tais como: experimento de ensino, experimento didático-formativo, experimento didático, experimento formativo. Nesta pesquisa, utilizo o primeiro termo, como a maior parte dos estudos fizeram, inclusive internacionais, no âmbito da Educação Matemática.

A metodologia pautada no experimento de ensino, conforme Barbosa (2009, p. 87),

> Não surgiu padronizada, nem tem a intenção de se tornar, ao contrário, é uma ferramenta conceitual para ser utilizada na organização de atividades e, derivada da entrevista clínica de Piaget, é voltada para exploração da matemática dos estudantes, ou seja, a matemática que os estudantes entendem como tal.

Na visão deste autor, o experimento de ensino vai além da entrevista clínica, ele é voltado para o progresso dos participantes, enquanto ela se preocupa com o conhecimento atual deles. Steffe e Thompson (2000) afirmam que essa metodologia é viva e foi, no início, pensada para a explicação e exploração da atividade Matemática dos estudantes.

Corroboro o pensamento de Zogaib (2019, p. 87) quando explica o sentido amplo do termo experimento. Para a autora, ele "não deve levar-nos a confundir e inserir o procedimento, tampouco a pesquisa, em uma perspectiva positivista e abordagem quantitativa". Além disso, a estudiosa prossegue afirmando que a sua pesquisa não se enquadra em um estudo exclusivamente do tipo experimental, apresentando grupos de controle e grupos experimentais, muito menos o estabelecimento antecipado de variáveis dependentes e independentes.

Essa metodologia foi utilizada em inúmeras pesquisas de integrantes do GPIMEM para o desenvolvimento de seus trabalhos, como Villarreal (1999), Scheffer (2001), Benedetti (2003), Scucuglia (2006) e Zogaib (2019), os quais compõem meu repertório de leitura.

Steffe e Thompson (2000) compreendem que a expressão “experimento de ensino” se caracteriza como uma série de encontros, denominados de episódios de ensino, envolvendo o pesquisador e os estudantes participantes da pesquisa. Complementando, um experimento de ensino de abordagem naturalística, conforme Fiorentini e Lorenzato (2012, p. 71) “[...] é aquela modalidade de investigação na qual a coleta de dados é realizada diretamente no local em que o problema ou fenômeno acontece e pode dar-se por amostragem, entrevista, observação participante, pesquisa-ação, aplicação de questionário, teste, entre outros”.

No decorrer dos encontros, exerci a função de um agente de ensino, tendo o papel de eu-pesquisador. Além desse personagem, o experimento de ensino conta com um estudante, uma dupla, um trio ou até mesmo alguns estudantes, sendo que, no meu caso, escolhi trabalhar com duplas. Também, incluí a presença de uma testemunha[25] dos episódios de ensino que exerceu a função de observador dos encontros, contribuindo com um olhar que, às vezes, difere daquele interpretado pelo pesquisador. Como método de gravação para registrar os episódios utilizei uma câmera (Figura 7) que ficou fixa e posta frente para as duplas, de tal forma que não filmassem os seus rostos.

[25] Em alguns encontros, contei com a participação do Zamir, colombiano, colega de doutorado que virou um amigo. Sou grato pela oportunidade de amizade e ao papel de testemunha de Zamir em alguns encontros do experimento de ensino.

Figura 7 - Câmera posicionada defronte para as duplas

Fonte: arquivos do autor.

Além disso, contei com um *software* de áudio e vídeo instalado no meu *notebook* pessoal que ficou posicionado sobre a mesa. Outro aparelho utilizado foi meu celular para gravação de imagens e áudios, incluindo, neste caso, o rosto dos estudantes. Esses recursos tecnológicos de captação de dados facilitou o processo de transcrição. Nele, utilizei alguns *softwares* específicos, por exemplo, o *otranscribe*[26], que diminuiu a velocidade das conversações, possibilitando o processo de transcrever. Nesse caso, o trabalho foi feito manualmente.

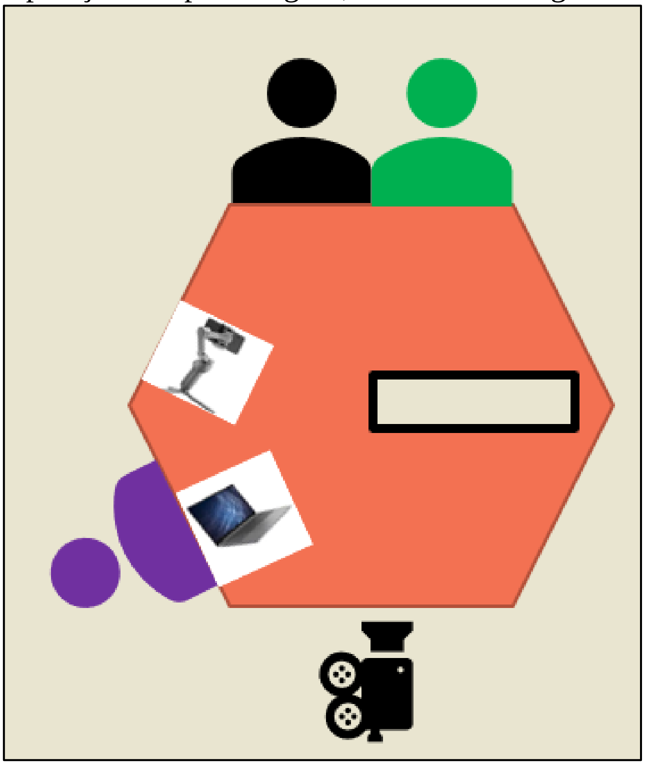
Outros *softwares* também contribuíram com o processo de transcrição, por exemplo, o *Sonix*[27] e o *Descritp*[28], que realizaram automaticamente a transcrição dos áudios contidos nos vídeos de alguns grupos participantes do experimento de ensino. Entretanto, após esse trabalho, tive que fazer leitura de todo o texto, uma vez que os *softwares* não reconhecem algumas palavras. Além disso, coloquei as identificações das falas que correspondiam a cada estudante.

Em síntese, esses personagens se reuniram em um espaço físico que, conforme a literatura, não precisa necessariamente ser a sala de aula. Para o caso desta pesquisa, uma parte das entrevistas ocorreu no LEM e outra parte na sala de reunião do Departamento de

[26] https://otranscribe.com/.
[27] https://my.sonix.ai/accounts/sign_in.
[28] https://web.descript.com/?smartLink=requireApp.

Matemática da UNESP, Rio Claro/SP. Na Figura 8**,** exponho um esquema ilustrando o posicionamento dos itens citados previamente:

Figura 8 - Disposição dos personagens, dos recursos digitais e alguns MM



Fonte: elaborada pelo autor.

No que diz respeito às câmeras, segui os procedimentos utilizados por Benedetti (2003), que priorizou o posicionamento delas levando em conta alguns fatores. Por exemplo, em meu caso, considerei os registros das ações dos participantes, a manipulação de materiais diversos e os movimentos realizados, tais como os gestos que se mostraram na primeira e segunda fase. Em suma, em um experimento de ensino, conforme Benedetti (2003, p. 57), “as atividades normalmente incluem instrumentos de registro, como câmeras de vídeo, gravador e caderno de campo, e métodos de pesquisa, como observação participante, entrevistas e ficha de trabalho”. Ainda em relação ao experimento de ensino, Borba, Almeida e Gracias (2018, p.46) afirmam que esse procedimento metodológico “busca explorar e explicar as atividades matemáticas dos estudantes. Ela é primordialmente utilizada por pesquisadores que buscam entender os conceitos matemáticos e as operações efetuadas”. Para o caso desta pesquisa, investiguei como os estudantes discutiram conceitos da GEP.

De acordo com Steffe e Thompson (2000), o experimento de ensino envolve quatro questões essenciais. A principal delas diz respeito ao “ensino exploratório”. Nesse caso, o professor pesquisador precisa deixar em segundo plano sua forma de pensar, bem como os entendimentos sobre determinados conceitos. Fazendo isso, procura conduzir os rumos e as escolhas que os estudantes fizeram acerca dos conceitos, ou seja, procura entender as concepções desses personagens acerca das ideias matemáticas trabalhadas.

No que tange à Matemática dos estudantes, os autores reforçam que os pesquisadores provavelmente não teriam condições de explicá-la, caso fosse optado por utilizar nossos próprios conceitos e operações matemáticas. A expressão “Matemática dos alunos” foi utilizada por Steffe e Thompson (2000, p. 268, tradução nossa) para se referir “a qualquer coisa que possa constituir as realidades matemáticas dos alunos”. Além disso, para esses autores ela é utilizada por investigadores para interpretar a Matemática dos estudantes. Um debate relevante nesse cenário explora o fato de o professor pesquisador aceitar essa realidade Matemática dos aprendizes e, simultaneamente, ter consciência de que ela é, por vezes, distinta da Matemática dos professores.

Essa Matemática dos estudantes, de acordo com Steffe e Thompson (2000, p. 268, tradução nossa), “é indicada pelo que dizem e fazem enquanto se envolvem em atividade matemática”. Diante desse contexto, ressalto a importância de ter deixado os alunos participantes de minha pesquisa se expressarem e se comunicarem geometricamente de distintas maneiras, de tal modo que fosse possível apresentar algumas considerações sobre como eles discutiram e estavam compreendendo conceitos da GEP.

Para que o debate entre os estudantes e/ou deles comigo fosse espontâneo, foi preciso não adotar uma postura no sentido de forçá-los a responder os questionamentos propostos. Destaco que as discussões ocorridas fora do contexto da turma tiveram como características o fato de que estávamos dialogando e aprendendo juntos conceitos geométricos, pois ocorreram situações e/ou exemplos em que eu não havia pensado. Quando o professor pesquisador consegue caminhar nessa metodologia de pesquisa, ele está cumprindo com um dos objetivos básicos do experimento de ensino que é construir modelos da Matemática dos estudantes. Além do mais, essa realidade pode ser considerada legítima, pois o professor pesquisador consegue visualizar explicações coerentes para o que os estudantes dizem e fazem (Steffe; Thompson, 2000).

Em síntese, não adotei uma postura passiva, isto é, na qualidade de observador, pelo contrário, preocupei-me em atuar como um professor pesquisador. Para isso, foi preciso exercer a função de mediador, sempre que possível procurando os mínimos detalhes que considerava importante, muitas vezes sugerindo um olhar atento para os objetos do espaço no qual estávamos inseridos e aqueles que confeccionei antecipadamente, assim como fazendo questionamentos a partir das respostas que os estudantes davam.

Minhas intervenções ocorreram, ora para recomendar que os estudantes observassem os materiais disponíveis no LEM e/ou os trazidos por mim, ora para esclarecer pontos que ficaram obscuros em cada questionamento feito. Nesse sentido, caso esses alunos mostrassem dúvidas no tocante ao relato de cada enunciado, sugeri que eles mesmos fizessem a leitura das referidas questões que não entenderam. Contudo, mesmo adotando uma postura atenta para que a minha participação não influenciasse nos resultados das respostas, nem sempre foi possível. Em muitos momentos, vi-me explicando ou até mesmo respondendo a alguns questionamentos que eram levantados.

3.5.2 O contexto e os participantes do experimento de ensino: critérios de escolha dos participantes

Considero relevante descrever os critérios de escolha dos participantes para formação das duplas, assim como o motivo de se trabalhar com díades de alunos e o processo de formação delas. No tocante aos 12 estudantes que colaboraram com minha produção de dados no experimento de ensino, convém realçar a justificativa da escolha desse público menor dentre todos aqueles que cursaram a disciplina de Geometria Euclidiana Espacial. Observo, assim,

> [...] outro ponto nevrálgico: a construção da amostra. Na metodologia quantitativa, ela deve ser randomizada idealmente, ou seja, os sujeitos a serem estudados representam estatisticamente a população geral. Na pesquisa qualitativa não há um ‘n’ pré-definido, mas a “amostra” de participantes é construída por conveniência, limitada a quem pode e sabe informar sobre o fenômeno que elegemos para o estudo; assim como será considerada satisfatória no momento em que as informações dadas nas entrevistas atingem a saturação – o ponto em que coletamos material suficiente para dar consistência às categorias em debate e plausibilidade na compreensão. Na realidade, o conceito de “amostra” não é adequado na investigação qualitativa; do que se trata é de “unidades” (pessoas, casos) de investigação” (Turato *et al.*., 2019, p. 140).

Ou seja, por um lado, a escolha dos 12 participantes levou em consideração aqueles que estavam dispostos a participar, de forma mais precisa, os que tinham disponibilidade. Por outro lado, a parte administrativa, isto é, dias, horários e duração dos encontros que estipulei limitou ao número que pretendia. Esse recurso também foi utilizado por Benedetti (2003, p. 61) quando expos que “[...] a disponibilidade de datas e horários, por parte dos voluntários, foi outro fator decisivo; alguns deles não foram escolhidos porque possuíam várias limitações de horários”. Além do critério mencionado antes, um ponto a ser observado foi a análise: da escuta de todos os áudios referentes à primeira fase; dos comentários dos alunos e os registros escritos das tarefas presentes nos LD que compuseram o roteiro de questões dos grupos; e da observação que fiz durante os momentos em que estava cumprindo o Estágio Docente na disciplina. Decidi quais seriam os alunos que participariam do experimento de ensino e fiz o convite. Entretanto, três responderam que não poderiam contribuir. Diante disso, segui a ordem daqueles que mais se aproximavam dos requisitos.

A escolha dos 12 participantes não implica dizer que os demais não pudessem colaborar. Entendo que essa decisão foi muito subjetiva, uma vez que poderia ocorrer que algum participante que ficou de fora trouxesse contribuições para o experimento de ensino. No entanto, segui os critérios. Os demais estudantes também foram relevantes para a produção de dados, principalmente quando afirmaram, em algumas situações, que não tinham estudado determinados conteúdos que abordei nos dois encontros com toda a turma e, em outros casos, não se lembravam de terem estudado os referidos temas da GEP, confirmando o que a literatura relata, isto é, na educação básica há uma valorização da parte métrica da GE.

Esse procedimento para escolha de um grupo de estudantes que fazem parte de um coletivo maior, no caso, a turma, também foi seguida por Scucuglia (2006, p. 27), quando diz que "após o Primeiro Piloto, ministrei um curso temático sobre Calculadoras TI-83 como integrante do GPIMEM. Esse curso possibilitou que eu selecionasse estudantes para participar de experimentos de ensino definitivos". Ou seja, a decisão de quem participaria do experimento de ensino ocorreu somente a partir das vivências, das observações daqueles que poderiam contribuir com a pesquisa.

A pesquisa que Benedetti (2003) desenvolveu também foi um experimento de ensino e o autor relata como procedeu para escolher os participantes. Inicialmente, ele convidou a toda a turma do 1º ano do ensino médio a participar da pesquisa. A partir daí, 11 estudantes se prontificaram para participar da produção de dados. Para o autor, foi muito difícil escolher seis alunos que iam compor as três duplas, mas era necessário, tendo em vista que esse era definido para a produção de dados. Assim, para o critério utilizado, "primeiramente, agrupei os nomes dos estudantes através do rendimento escolar, mediante as informações da professora, sendo que participaram da pesquisa alunos que apresentavam níveis diferentes de desempenho em Matemática, segundo critérios da escola" (Benedetti, 2003, p. 60). Ainda, segundo Benedetti (2003) relata, a professora da turma deu contribuições significativas no sentido de fornecer informações para escolha final dos estudantes que participariam do experimento de ensino.

Esses procedimentos utilizados por outros pesquisadores para decidir quais personagens deveriam participar do experimento de ensino me conferem confiabilidade no tocante aos critérios que defini. Além disso, fiquei atento, dentre os alunos participantes de minha pesquisa que estavam cursando Geometria Euclidiana Espacial, no sentido de ter um certo equilíbrio para convidar tanto estudantes que se mostravam ter um bom desempenho, quanto aqueles que deram indícios de apresentar uma certa dificuldade.

Saliento que a experiência que tive durante a primeira fase da pesquisa, acerca da divisão de toda a turma em grupos de três integrantes, fez-me refletir e considerar que, em meu caso, não foi uma escolha assertiva, tendo em vista que presenciei momentos em que alguns estudantes sequer contribuíram com as discussões. Entretanto, não tive outra opção, uma vez que era uma turma com 32 alunos. Caso tivesse decidido formar grupos com menos participantes, isso traria várias implicações. Por exemplo, uma quantidade enorme de dados, além de ter que conseguir um número maior de dispositivos celulares para a captação de áudio dos grupos. Diante disso, fiz a escolha por trabalhar com duplas no experimento de ensino. Esse critério também foi utilizado por outros pesquisadores:

> A decisão de trabalhar com duplas deveu-se ao fato de que, no trabalho em duplas, acontece uma discussão maior entre os estudantes, quando cada um mostra o raciocínio seguido de maneira mais detalhada, explicando, esclarecendo respostas, promovendo-se, assim, um apoio mútuo entre eles (Sheffer, 2001, p. 60).

Ainda sobre essa decisão,

> A opção por duplas se deve a dois motivos: o primeiro se refere ao fato de que interações entre estudantes podem proporcionar discussões diferentes daquelas que existiriam apenas com um aluno e com o pesquisador; a linguagem dos educandos, ao trabalharem em conjunto, pode-se tornar mais rica, não apenas para a coleta de dados, em vista dos objetivos do pesquisador, mas também para possíveis aprendizagens que podem ocorrer durante os trabalhos do grupo (Benedetti, 2003, p. 56).

Esse cenário foi vivenciado por mim, principalmente no tocante à linguagem dos estudantes que possibilitou distintas aprendizagens, tanto entre eles, quanto entre eles e eu. Talvez, em um grupo maior não fosse possível captar essas interações. Acrescento a justificativa de Villarreal (1999, p. 52): “a decisão de trabalhar com duplas de estudantes está baseada no fato de que, ao trabalhar em conjunto, produzem-se diálogos entre os alunos que mostram os processos seguidos ao resolver um problema de modo mais espontâneo”, fato esse constatado durante os encontros do experimento de ensino de minha pesquisa, uma vez que não percebi empecilhos entre os pares para se expressarem. Os momentos em que ficaram em silêncio era para pensar sobre determinado conceito da GEP ou, em alguns casos, não estavam seguros e/ou não lembravam de determinadas propriedades da GEP, bem como noções básicas da GE.

Também, há a possibilidade de trabalhar com grupos maiores no experimento de ensino. Entretanto, conforme salientado por Villarreal (1999, p. 52), “o grupo pode ser dominado por uma pessoa e as expressões individuais podem sofrer interferências”. Nesse caso, Benedetti (2003) recomenda que o pesquisador dever ter uma habilidade para contornar situações desse tipo. Em síntese, as pesquisas de Oliveira (1997) e Costa (1997) também optaram pelo trabalho com duplas de alunos.

Para esta pesquisa, a formação das duplas foi realizada por mim. Quando comuniquei quem iria compor os pares não houve restrições por parte dos estudantes. Considerei um ponto positivo, pois isso garantiria um entrosamento dos grupos constituídos pelas duplas, entre a dupla e eu e entre eles.

A produção de dados referente ao experimento de ensino seguiu o cronograma que pode ser visualizado nos Quadros 14 e 15. Neles, deixo registrado a data, o horário, os nomes fictícios e o local onde foi realizado e experimento.

Quadro 14 **-** Cronograma referente ao primeiro encontro do experimento de ensino

Data	Horário	Dupla	Local
10/10/2022	08:00 às 10:00 horas	Ana Patrícia e Luciana	LEM
	10:00 às 12:00 horas	Sandrieli e Iranice	LEM
	14:00 às 16:00 horas	Renata e Cleonice	LEM
12/10/2022	16:00 às 18:00 horas	Leonardo e Thiago	LEM
	18:00 às 20:00 horas	José e Edson	LEM
14/10/2022	08:00 às 10:00 horas	Lucas e Humberto	LEM

Fonte: elaborado pelo autor.

Quadro 15 - Cronograma referente ao segundo encontro do experimento de ensino

Data	Horário	Dupla	Local
14/10/2022	10:00 às 12:00 horas	Sandrieli e Iranice	Sala de reunião - DM
17/10/2022	18:30 às 20:30 horas	Renata e Cleonice	Sala de reunião - DM
18/10/2022	18:30 às 20:30 horas	Leonardo e Thiago	Sala de reunião - DM
19/10/2022	18:30 às 20:30 horas	Lucas e Humberto	Sala de reunião - DM
20/10/2022	18:30 às 20:30 horas	Ana Patrícia e Luciana	Sala de reunião - DM
24/10/2022	18:30 às 20:00 horas	José e Edson	Sala de reunião - DM

Fonte: elaborado pelo autor.

A dupla composta por José e Edson não revela ter dificuldades em Matemática. A junção de ambos para compor essa díade foi opção minha e não deles, enquanto no caso de Renata e Cleonice tive consciência de estar escolhendo amigas bem próximas. No tocante à Matemática, essa última aluna apresentou indícios de não ter muitas dificuldades de compreensão. Na dupla composta por Leonardo e Thiago, há um diferencial em relação ao primeiro, tendo em vista que ele já estava no término da graduação em Matemática, mas ainda não tinha cumprido os créditos da referida disciplina observada. Apesar de a dupla composta por Lucas e Humberto ser equilibrada em termos de se expressar matematicamente, o primeiro exerceu uma certa liderança comentada logo, a seguir. Vale lembrar que cumpri meu estágio docente na turma desses alunos, isso foi relevante para o momento de formação das duplas.

No decorrer dos dois encontros do experimento de ensino, notei uma maior interação de um membro de cada dupla, no sentido de tentar responder os questionamentos propostos e se posicionar como um líder. Percebendo isso, tentei minimizar essa liderança e, sempre que possível, fiz perguntas ao estudante que estava se mostrando mais tímido naquela ocasião. Esse cenário também foi constatado por Scheffer (2001, p. 60), que adotou a seguinte postura "atenta a isso, como entrevistadora, procurei ter o cuidado de manter uma participação equilibrada entre os membros da dupla no decorrer do desenvolvimento das atividades". Para o meu caso, busquei interrogar os participantes tímidos ou que mostravam não estar seguros do conteúdo. As intervenções realizadas procuravam fazer com que esses estudantes comentassem o que tinham entendido acerca da explicação do seu par. Em muitos momentos, solicitei que determinados aprendizes explicassem para o seu companheiro que não estava compreendendo.

3.5.3 Perfil dos participantes do experimento de ensino

Os alunos que participaram do experimento de ensino tinham entre 19 e 23 anos de idade distribuídos da seguinte maneira (5, 4, 2 e 1 alunos tinham respectivamente 19, 20, 21 e 23 anos). No tocante ao tipo de escola que frequentaram o ensino médio, os resultados foram (8, 2 e 2 alunos cursaram respectivamente em escolas pública, maior parte na pública e, por fim, na rede particular). Em relação ao ano em que finalizaram a etapa da educação básica, o cenário foi (nos anos de 2016, 2017 e 2018 respectivamente houve 1 aluno concluindo o ensino médio, no ano de 2019 houve 2 alunos e, em 2020, 7 alunos). No Apêndice N, encontram-se as questões que realizei para fins de ter um panorama acerca do perfil dos alunos participantes do experimento de ensino.

Um item também questionado diz respeito ao local de residência dos estudantes que contribuíram com a produção de dados. Todos afirmaram que estavam morando em Rio Claro/SP. Por fim, ressalto que dentre os 12, apenas Leonardo já estava no último semestre do curso de Matemática.

Algumas considerações merecem ser apontadas. Por exemplo, observo que grande parte finalizou a educação básica e, logo em seguida, ingressou no ensino superior. Além dessa constatação, pontuo que esse mesmo público cursou o último ano dessa etapa com a pandemia em curso. Também, constato que o primeiro ano da graduação (2021) se realizou de modo remoto. Essa constatação advém quando questiono o ano em que ingressaram na universidade. Nesse caso, onze alunos responderam que foi no ano de 2021 e; por fim, apenas um respondeu que tinha ingressado em 2018, que era o participante que já estava se formando. Quando questiono se o curso de Matemática tinha sido a primeira opção deles para o ingresso ao ensino superior, dez responderam que sim. As razões para essa escolha foram diversas. Por exemplo, “sempre quis ser professora”, “influência de excelentes professores” e “sempre gostei muito da matéria”. Essas respostas foram as mais comuns. Por fim, na última questão na qual quis saber se os participantes tinham prestado o vestibular e/ou Exame Nacional do Ensino Médio, dez responderam que tinham prestado mais de uma vez. Sobre o motivo de prestar mais de uma vez, três deles disseram que tinha feito isso para treinar, nas palavras deles, como “treineiros”. As universidades que visavam era Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Universidade de São Paulo (USP) e UNESP, mas sempre objetivando obter aprovação nessa última.

3.5.4 O contexto da produção de dados

A produção dos dados da pesquisa ocorreu a partir do preenchimento do questionário diagnóstico, realizado no primeiro contato com a turma, das respostas registradas pelos grupos por escrito no roteiro entregue, das produções imagéticas realizadas pelos estudantes, bem como da transcrição dos áudios advindos tanto das gravações nos celulares quanto na câmera. Esse momento ocorreu nos dois encontros seguintes. Também, integraram os dados os diálogos entre cada membro que compunham as duplas de estudantes, entre eles e o pesquisador. Por fim, as gesticulações percebidas na primeira e segunda fases da pesquisa foram agrupadas e trianguladas com as falas transcritas dos depoentes participantes dos encontros.

3.5.5 Os encontros do experimento de ensino

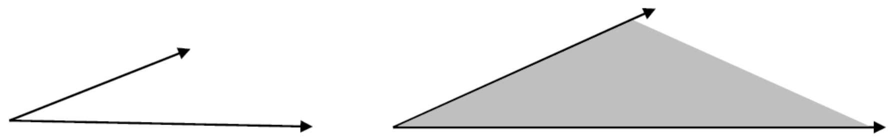
Os encontros com as duplas de alunos contaram com perguntas do tipo abertas. Essas, de acordo com Goldenberg (1997, p.86), caracterizam-se por “resposta livre, não-limitada por alternativas apresentadas, o pesquisado fala ou escreve livremente sobre o tema que lhe é proposto”. Nesse sentido, oportunizei um momento no qual díades de alunos, individualmente, pudessem falar sobre cada questionamento do âmbito da GEP ou até mesmo expor seu raciocínio por meio de materiais disponíveis do LEM, assim como alguns que confeccionei para os encontros, por exemplo, representações de prismas e pirâmides. Também, disponibilizei palitos de churrasco, alfinetes, folhas de isopor, papel sulfite, lápis piloto e canetas.

No primeiro encontro, a conversa foi guiada por um conjunto de dez perguntas que tratavam das posições relativas entre pontos e retas e entre retas e entre planos. O segundo contou com dez questionamentos que abordavam de forma mais específica o paralelismo e o perpendicularismo. Nos Quadros 16 e 17, apresento as questões que guiaram os dois encontros com as duplas do experimento de ensino, acompanhadas pelos respectivos objetivos de cada uma delas.

Quadro 16 - Questões que guiaram o primeiro encontro do experimento de ensino[29]

Q1: Como vocês poderiam fazer relações entre os entes geométricos *ponto*, *reta* e *plano* no *espaço*? **Objetivo:** Promover uma conversa espontânea sobre os entes primitivos geométricos. **Q2:** Considerando o nosso espaço (LEM), construa-o, utilizando no mínimo três representações de planos (alguns materiais disponíveis no laboratório). Quais são as relações entre retas, entre retas e planos e entre planos e planos que vocês conseguem estabelecer? **Objetivo:** Revisitar os conceitos de posições entre retas, retas e planos e entre planos, assim como outros que os participantes expressassem. **Q3:** Quando é que duas retas podem ter dois pontos distintos de intersecção? **Objetivo:** Discutir características das retas coincidentes. **Q4:** Identifique no seu cotidiano objetos geométricos que podem ilustrar as posições relativas de duas retas no plano (quanto à sua intersecção). E agora no espaço. **Objetivo:** Identificar as características de duas retas no plano e no espaço. **Q5:** Em uma conversa com um amigo de outro curso da graduação, como você explicaria cada um dos tipos de retas no plano e no espaço? Quais exemplos você apresentaria para melhorar sua compreensão?

[29] Alguns esclarecimentos merecem ser apontados no que concerne à elaboração dessas perguntas. Inicialmente, trago reflexões para o item 3 desenvolvido no primeiro encontro do experimento de ensino. Nesse contexto, o uso da palavra “intersecção ou interseção”, conforme dicionário da língua portuguesa Larousse Cultural se refere à “ação de cortar; corte, cruzamento” (Pinheiro, Kilmes, 1992, p. 644). Nessa pesquisa, esse termo foi utilizado no sentido apontado por Carvalho (1993, p. 19) quando pondera o caso de possíveis posições relativas de uma reta *r* e um plano α do espaço. O autor diz “Se existirem dois ou mais pontos de interseção, então *r* estará obrigatoriamente contida em α”. Para o caso do item 3, entendo que o uso da expressão “pontos distintos de intersecção” entre duas retas têm o mesmo efeito de Carvalho (1993). Além disso, os LD de Matemática escolhidos para a primeira fase desta tese trazem alguns comentários acerca das retas coincidentes. Por exemplo, na coleção I, não há uma definição para essa situação, no entanto, ao definir retas paralelas, há uma menção ao termo “intersecção” “duas retas, *r* e s, são paralelas se têm todos os pontos comuns (coincidem) ou se estão em um mesmo plano α” e não tem nenhum ponto comum (intersecção vazia)”. Já o autor da coleção II traz a seguinte afirmação “se duas retas *r* e *s* correspondem ao mesmo conjunto de pontos, dizemos que elas são coincidentes, isto é, são a mesma reta”. Por fim, a coleção V diz que “duas retas, *r* e *s*, são coincidentes, se $r=s$, ou seja, *r* e *s* correspondem ao mesmo conjunto de pontos”. Em síntese, a utilização do termo “intersecção” na Matemática vai além do sentido atribuído a língua portuguesa. O uso da expressão “tipos de retas” na questão 5 está grafado somente nesse questionário. No decorrer de todo esse texto, utilizei a frase “posições relativas” para se referir aos objetos matemáticos *ponto, reta e plano*. Esclareço que nas pesquisas qualitativas, principalmente na fase de elaboração de entrevistas, questionários, dentre outras opções metodológicas, geralmente ocorrem deslizes do pesquisador. No meu caso, foi uma escrita realizada no “calor do momento”, mas que ao resgatar as gravações, constatei que havia falado “posições relativas”. Outro equívoco ocorrido durante a elaboração dessas perguntas está no item 6. Foi um momento em que tive a intenção de saber dos alunos como se posicionam as retas reversas, a partir dessa intencionalidade, eles poderiam utilizar distintas ferramentas para mostrar isso, inclusive palitos de churrasco, canetas, dentre outros recursos. Foi isso que aconteceu no dia do encontro com esses personagens.

Objetivo: Elencar as posições relativas entre duas retas no plano e no espaço, apontando diferenças (quanto à intersecção). **Q6:** Como ocorre a construção das retas reversas? **Objetivo:** Entender, a partir da construção, que as retas reversas não possuem pontos de intersecção e, além disso, diferem das paralelas que têm e estão contidas em um único plano. **Q7:** Observe as duas representações abaixo:  Para você, qual ou quais delas representa um ângulo? Justifique sua resposta. **Objetivo:** Concluir que um ângulo pode ser a figura formada por duas semirretas, mas também inclui, além das semirretas, o interior da figura por elas formada. **Q8:** Como vocês representariam um ângulo entre duas retas reversas? Fique à vontade para utilizar quaisquer materiais. **Objetivo:** Compreender a noção de ângulo entre duas retas reversas. **Q9:** Como vocês representariam a medida do ângulo entre dois semiplanos? **Objetivo:** Deduzir que o ângulo entre dois semiplanos é formado a partir de duas semirretas, cada uma contida em um semiplano e ambas com origem comum e perpendiculares à intersecção dos dois semiplanos. **Q10:** Apresente exemplos de algumas propriedades geométricas válidas, tanto no plano quanto no espaço. **Objetivo:** Revisitar a geometria plana, entendendo-a como um ponto de partida para estudar conceitos da geometria espacial.

Fonte: elaborado pelo autor.

Quadro 17 - Questões[30] que guiaram o segundo encontro do experimento de ensino

Q1: Como vocês entendem a noção de perpendicularismo no plano? E no espaço? **Objetivo:** Verificar que a noção de perpendicularismo no plano é um ponto de partida para o entendimento dela no espaço. **Q2:** Observando objetos a sua volta, apresente uma situação na qual uma reta seja perpendicular a uma reta do plano, mas não seja perpendicular ao plano. **Objetivo:** Identificar que uma reta *r* pode ser perpendicular a uma reta *s* do plano, mas *r* não é perpendicular ao plano. **Q3:** Vamos desenvolver um experimento![31] **Objetivo:** Visualizar o teorema fundamental do perpendicularismo a partir do experimento com papel sulfite. **Q4:** Pense na seguinte situação: quantos planos existem passando por uma reta perpendicular a esse plano e que sejam perpendiculares ao plano horizontal? E se a reta não fosse perpendicular ao plano horizontal, se ela fosse oblíqua: quantos planos passam por essa reta e são perpendiculares ao plano horizontal? **Objetivo:** Apresentar a condição para que dois planos sejam perpendiculares.

[30] A questão 8 foi adaptada do artigo de Bispo e Assis (2021); as questões 9 e 10 foram retiradas de Carvalho (1993). As representações contidas nessas três questões foram confeccionadas com palitos de churrasco, linha de costura, cola quente, pedaços de isopor e folha sulfite e disponibilizadas em cima da mesa onde ocorreram os encontros com as duplas de estudantes.

[31] O experimento consistiu em utilizar uma folha de sulfite, destacando irregularmente suas quatro bordas e, em seguida, produziu-se uma primeira dobra e registrou-se com uma caneta de cor vermelha o vinco formado. Posteriormente, realizou-se uma segunda dobra de tal forma que a reta formada anteriormente produzisse duas semirretas. Depois dessas etapas, solicitou-se que os estudantes fizessem movimentos com a produção, apoiando-se sobra a mesa.

Q5: Como você entende as retas ortogonais? Para você, toda reta perpendicular é ortogonal? E toda reta ortogonal é reversa? Dê exemplos.

Objetivo: Compreender que a ortogonalidade se aplica a quaisquer retas, no caso onde elas se encontram, denomina-se de perpendiculares.

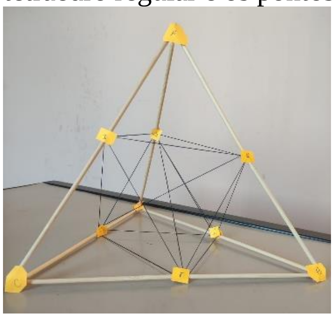
Q6: Construa uma pirâmide. Quais assuntos básicos permitem a construção dessa pirâmide?

Objetivo: Entender que o conceito de pirâmide está atrelado às ideias básicas de retas, plano e um ponto exterior a esse.

Q7: Construa um prisma. Quais assuntos básicos permitem a construção desse prisma?

Objetivo: Entender que o conceito de prisma está atrelado às ideias básicas de pontos, retas e planos paralelos.

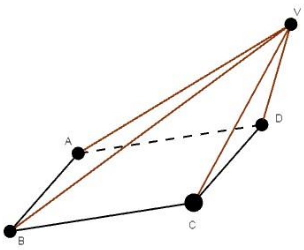
Q8: Aqui temos a representação de um tetraedro regular e os pontos médios de cada uma das arestas.



Quais conteúdos estudados na disciplina de geometria espacial que vocês poderiam evidenciar a partir dessa representação?

Objetivo: 1) Concluir que os segmentos que unem os pontos médios das arestas opostas de um tetraedro se encontram em um único ponto; 2) Exemplificar casos da posição relativa entre retas, entre reta e plano e entre planos e planos.

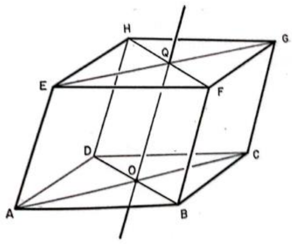
Q9: A partir dessa representação de uma pirâmide onde a base *ABCD* é um paralelogramo, o que você acha da posição relativa quando olha para o plano α definido pela face *V, A* e *B* e a aresta *CD*?



Objetivo: Identificar a existência de paralelismo entre uma reta e um plano em uma pirâmide oblíqua.

Q10: Observe a representação do paralelepípedo apoiado sobre a mesa. Ele foi denominado de *ABCDEFGH*.

O que você conclui a respeito da reta r *(OQ)* de intersecção dos planos α e β determinados pelos pares de arestas opostas (*AE*, *CG*) e (*BF*, *DH*)?



Objetivo: Discutir ideias de paralelismo entre retas e planos, assim como interseções entre planos.

Fonte: elaborado pelo autor.

O processo pelo qual essas questões passaram até chegar ao estágio em que foi aplicado iniciou com o primeiro Teste Piloto, no caso da segunda fase, realizado com os integrantes do Grupo de Pesquisa teorEMa. Nessa etapa, surgiram diversos pontos que tiveram como finalidade refinar as questões. A partir dos diálogos com os membros do grupo, refleti bastante acerca das questões de tal forma a deixá-las mais compreensíveis. Daí em diante, comecei a convidar duplas de voluntários para contribuir com os próximos Testes Pilotos que foram simulados como se realmente fosse um experimento de ensino. A primeira dupla foi composta por dois alunos de mestrado, na qual um deles é membro do teorEMa. A segunda também foi composta por dois membros do teorEMa, na qual um deles, na época, era professor visitante da UNESP/Rio Claro e o outro era aluno de mestrado. A terceira dupla foi composta por dois alunos de graduação, ambos cursando o último semestre. Além disso, fiz simulação do experimento de ensino com um trio de alunos que estavam cursando o terceiro ano da graduação em Matemática. Ressalto que os estudantes mencionados são todos regulares do curso de Matemática da UNESP/Rio Claro.

A partir das informações anteriores, percebe-se que realizei um total de cinco Pilotos que me deram segurança para desenvolver a etapa de produção dos dados referente à segunda fase. Foram diversas contribuições que esses voluntários me propuseram, por exemplo, alguns vícios e repetições de palavras que estava proferindo; algumas questões que não estavam claras suficientemente, assim como me convidaram a refletir sobre o conjunto de questões e isso me possibilitou retirar, melhorar e/ou readaptá-las.

Assim, diante do que foi exposto, relato que segui as recomendações de Goldenberg (1997) no tocante à elaboração das questões que guiaram o experimento de ensino. Para essa autora, elas devem estar em consonância com os objetivos da pesquisa. Por isso, precisam ser pensadas e apresentadas de forma clara e objetiva, evitando-se induzir e confundir os depoentes. Ainda em relação a essas questões, evidencio que as respostas obtidas foram transcritas para fins de fazer triangulação dos dados. Comentarei posteriormente sobre esse tema. A opção pela filmagem deu-se em virtude de que entendo que esse recurso contribui para o processo de análise dos dados. Os trabalhos de Benedetti (2003), Scheffer (2001) e Villareal (1999) aplicaram esse mesmo procedimento metodológico e utilizaram a filmadora como um dos recursos para captar as interações durante os encontros.

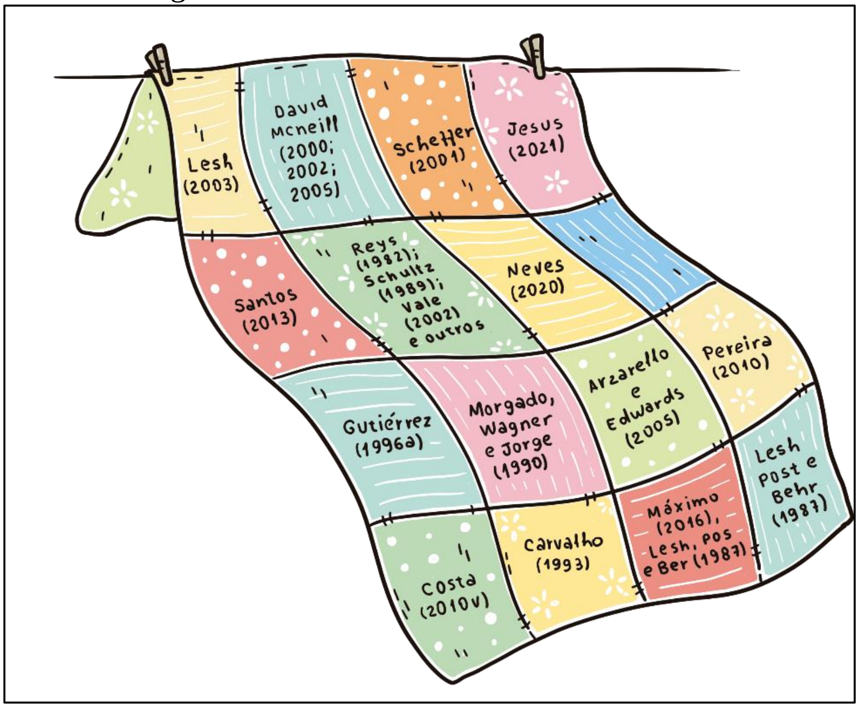
Após a leitura de todas as transcrições, iniciou-se o processo de escolha das cenas mais relevantes que apresentam imbricações fortes com o tema da pesquisa. Elas constituem os episódios de ensino que foram subdivididos em categorias de análises.

As categorias de análise foram elaboradas a partir dos episódios de ensino, momentos mais relevantes da pesquisa. Dos dados emergiram duas categorias: a primeira se intitula: *gestos como protagonistas da construção e comunicação de conceitos geométricos espaciais* e, a segunda: *para além das mãos: imbricações entre gestos e manipulações*. A chegada a esses grandes eixos ocorreu por meio da observação de algumas cenas e que estão mais presentificadas, ou seja, apareceram com mais frequência nos dados produzidos. Além do mais, faço uma discussão de conceitos matemáticos, em específico da GEP, no decorrer dessas duas unidades de análise.

No tocante à primeira categoria, ela foi emergida a partir de uma certa frequência na qual os participantes estão representando conceitos da GEP por meio de gesticulações, sendo que, em alguns grupos, prevalece essa utilização, bem como determinados estudantes que adotam com mais intensidade. Durante o experimento de ensino, também se constatou essas formas de se expressar. Para a segunda, identifiquei que os alunos se apropriaram intensamente dos materiais manipuláveis, disponíveis no LEM e confeccionados por mim, para realizar suas explicações. Durante essas manipulações, geralmente ocorreu a produção de gestos de modo simultâneo. Em resumo, saliento que essas categorias não são disjuntas, algumas cenas incluídas em cada uma delas podem pertencer a duas ou até mesmo três. Todavia, incluo a cena que tem uma forte imbricação com a determinada categoria. Além disso, tento equilibrar a quantidade de cenas em cada uma delas.

Em relação às lentes teóricas, pontuo que foram emergidas a partir das cenas mais relevantes. Saliento que cada lente teórica utilizada para observar o meu objeto de estudo recebeu a denominação de "retalho", defendido nesta tese como uma parte, um pedaço ou fragmento de tecido que, quando se justapõem, formam uma "colcha de retalhos". Essa peça serve como coberta de cama e é composta por diversos retalhos coloridos, que geralmente são guardados por costureiras e/ou donas de casas para confecção da peça. Assim, a partir de agora, meu arcabouço teórico está sendo compreendido como uma "colcha de retalhos", em que cada um desses pedaços se refere aos diversos teóricos que utilizei para analisar os dados produzidos no campo. A Figura 9 sintetiza o que comentei precedentemente.

Figura 9 - Colcha de retalhos: lentes teóricas



Fonte: elaborada pelo autor.

Para compor o referencial teórico matemático, aproprio-me de Carvalho (1993) e Morgado, Wagner e Jorge (1990), que me dão sustentação Matemática; de Gutiérrez (1996a), que teorizou sobre a visualização geométrica; de Lesh, Post e Behr (1987) e Lesh (2003) que abordam os cinco modos de representação de conceitos matemáticos; de David McNeill (2000; 2002; 2005) que teorizou sobre a utilização de gestos, bem como realiza uma classificação deles; de Santos (2013) que identificou a presença de gestos utilizados por estudantes da graduação em Matemática; de Scheffer (2001) que compreende o gesto em seu trabalho como um movimento corporal tal que quando se junta à fala há a expressão de ideias e pensamentos; de Jesus (2021) que percebeu uma grande utilização de gestos quando os participantes de sua pesquisa discutiram conceitos da Geometria Analítica; de Pereira (2010), que estudou os gestos das mãos e a referenciação, investigando processos cognitivos na produção oral; de Arzarello e Edwards (2005), Costa (2010), Bairral (2017, 2020), Assis e Bairral (2022) e Freitas e Bairral (2023). As três últimas referências discutem os gestos e toques em telas de dispositivos móveis no campo da Educação Matemática.

3.5.6 Sobre os instrumentos de produção de dados e das estratégias para a análise

No Quadro 18, detalhei os instrumentos utilizados durante a produção de dados das duas fases da pesquisa em uma coluna. Na outra, descrevi as principais estratégias adotadas para analisar os dados. Em algumas etapas, especifiquei mais minuciosamente na fase do experimento de ensino, tendo em vista que foi nesse momento que os gestos passaram a compor as duas categorias desta pesquisa.

Quadro 18 - Instrumentos para produção de dados e estratégias para realizar as análises

Primeira Fase – discussões com toda a turma	
Instrumentos	**Estratégias para a análise**
Registros escritos no questionário diagnóstico	Fiz uma leitura preliminar das respostas dos alunos. Em outro momento, analisei o material e fiz observações por escrito com a intenção de entender as percepções preliminares dos alunos no tocante a algumas ideias da GEP.
Registros escritos e figuras produzidas nos roteiros de atividades	Fiz uma leitura preliminar das respostas dos alunos. Em outro momento, analisei o material e fiz observações por escrito.
Áudios dos gravadores (celulares)	Escutei as falas dos alunos, identificando cada um deles e estabelecendo nomes fictícios, retornei algumas vezes e, por fim, iniciei o processo de transcrição.
Áudios e imagens da câmera principal	Assisti cada vídeo após o término do encontro, retornei algumas vezes para reanalisar e fazer observações das interações ocorridas e, por fim, em outro momento, após perceber a recorrência de gestos, capturei telas de partes dos vídeos para exemplificar os momentos de produção gestual. Na fase do experimento de ensino, detalhei outras estratégias tomadas naquela ocasião.
Áudios e imagens do notebook	Idem item anterior.
Transcrições das falas	Processo de transcrição dos áudios, inicialmente de modo manual e, depois, com auxílio de *softwares*. Em momento posterior, fiz uma leitura preliminar e, em seguida, releituras para identificar as falas referentes aos momentos de produção gestual, bem como se houve ocorrência de sincronismo e, por fim, agrupei essas falas juntamente com as capturas de telas obtidas.
Anotações no diário de campo	Leituras e releituras para identificar fatos não percebidos a partir das informações obtidas por meio dos outros instrumentos.
Segunda fase – experimento de ensino com as duplas	
Instrumentos	**Estratégias para a análise**
Áudios e imagens da câmera principal	Assisti os vídeos após o término de cada encontro, retornei algumas vezes para reanalisar e fazer observações das interações ocorridas. Posteriormente, capturei telas de partes dos vídeos para exemplificar os momentos de manipulações e de realizações de gestos. Esses últimos também ocorreram na fase anterior. Fiz cortes em partes dos vídeos que exemplificaram momentos de realização de gestos. Denominei esses arquivos de vídeos de curta duração (VCD). Por fim, gerei *Códigos QR* para os VCD. Observação: como o posicionamento da câmera principal variou, esse instrumento geralmente não registrou as faces dos alunos.
Áudios e imagens do celular	A diferença dessa estratégia para a anterior diz respeito ao fato de que, nesse caso, o celular estava apoiado em um tripé de frente

	para os alunos, assim, registrou a face e os movimentos de braços e mãos. Em alguns casos, o áudio dos vídeos dos celulares não foi captado, nessas circunstâncias, analisei os vídeos da câmera principal.
Transcrições das falas	Processo de transcrição dos vídeos com auxílio de *softwares*. Em momento posterior, fiz uma leitura preliminar e, em seguida, releituras para identificar as falas referentes aos momentos de produção gestual e, em seguida, agrupei essas falas juntamente com as capturas de telas, observando a ocorrência de sincronismo e, por fim, analisei os gestos das duas fases, agrupando-os por temáticas.
Anotações no diário de campo	Leituras e releituras para identificar fatos não percebidos a partir das informações obtidas por meio dos outros instrumentos.

Fonte: elaborado pelo autor.

Em suma, o processo percorrido na elaboração e articulação de diferentes dados para que fosse possível uma discussão acerca de meu objeto de estudo, denominou-se conforme Borba e Araújo (2004), de triangulação de métodos. Ela garante e aumenta a credibilidade das pesquisas. Assim, de acordo com Borba e Araújo (2020, p. 41, grifo nosso), "a *triangulação* em uma pesquisa qualitativa consiste na utilização de vários e distintos procedimentos para obtenção dos dados". Por exemplo, no caso desta pesquisa, os procedimentos para a produção dos dados foram o questionário diagnóstico, os registros verbais e imagéticos presentes nos roteiros dos participantes, as transcrições dos áudios referentes à etapa do experimento de ensino, assim como as capturas de tela de algumas cenas que se enquadram nas categorias.

A triangulação de métodos, segundo Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (1998), refere-se à comparação de dados que foram produzidos por meio de métodos qualitativos. Além disso, pode ocorrer de haver uma comparação de dados de uma entrevista com dados de um teste de associação livre.

Para Goldenberg (1997, p. 63), a triangulação "tem por objetivo abranger a máxima amplitude na descrição, explicação e compreensão do objeto de estudo". Dito isso, a análise dos dados seguiu a partir das gravações em áudio e em vídeo dos grupos participantes da primeira fase, das gravações em vídeo da segunda fase, sendo triangulada com os registros contidos no questionário diagnóstico, nos roteiros de questões que os grupos receberam, com as capturas de tela das duas fases para exemplificação de gestos e com as representações feita pelos alunos no decorrer da segunda fase.

4 VISUALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA: IMBRICAÇÕES ENTRE REPRESENTAÇÃO, MANIPULAÇÃO E GESTUALIDADES

Esta seção está dividida em três partes. Na primeira, faço uma discussão breve acerca das entidades abstratas da Geometria. Na segunda, apresento considerações a respeito da representação na Matemática, temática que dialoga com os estudos de Richard Lesh, Post e Behr (1987) e Lesh (2003) e seus seguidores que elaboraram o modelo de traduções de Lesh, composto por cinco categorias: manipulativos, símbolos verbais, símbolos escritos, pictóricos e situações da vida real. Por fim, na última, teço considerações acerca da visualização na Matemática, em específico na subárea da Geometria, em aspectos como concepções preliminares, imersão em alguns pesquisadores que propõem suas definições, importância e o papel das manipulações para o desenvolvimento dessa habilidade.

4.1 As entidades abstratas da Geometria

Tratar sobre o estudo de conceitos da área da Matemática, em particular da subárea, GEP, exige realizar uma breve explanação situando o leitor acerca da formação de conceitos matemáticos, por parte dos que dedicam seu tempo em compreender e compartilhar essas ideias. Para Henrique (2022), o conceito é uma representação mental de uma categoria. Para ser formado, há a necessidade de um determinado número de experiências apresentando algo em comum (Skemp, 1983). No campo da Matemática, consoante Fainguelernt (1999, p. 61), “a definição de um conceito matemático é uma síntese de vários outros conceitos”. Para essa autora, a construção do conceito é um ato de pensar objetivamente e, ao mesmo tempo, imaginar subjetivamente, sendo que nesse último caso chega-se à representação.

Para Skemp (1993, p. 31), “a comunicação dos conceitos matemáticos é muito mais difícil, tanto para quem comunica quanto para quem recebe a comunicação”. Nessa listagem, insere-se a dificuldade para tratar das noções abstratas da Geometria, por exemplo, a ideia de ponto, reta, plano, semirreta, paralelismo, triângulo, polígono, entre outros (Lima; Carvalho, 2010). Essas abstrações são tidas como perfeitas e ideais nas mentes das pessoas, mas as representações realizadas no mundo são consideradas imperfeitas (Silva; Wagner, 2014). Supondo um contexto em que para compreender o conceito de cubo recorrem-se aos exemplos de objetos do cotidiano que tenham uma certa semelhança com o objeto matemático em questão. Nesse sentido,

> Um dado ou sua representação gráfica pode ser associado a um modelo abstrato, o objeto matemático que, no caso, é um cubo. O dado ou a representação gráfica é perceptível pelos sentidos, mas o cubo não, pois é uma entidade ideal, concebida com base em definições e em raciocínios lógicos (Lima; Carvalho, 2010, p.139).

Na Geometria, conforme Fainguelernt (1999), pode-se ter uma diversidade de situações nas quais é possível fazer a associação entre objetos, imagens e conceitos. Para essa autora, um dos exemplos pode ser quando se trata da noção de *ponto* que recebe um significado intuitivo e faz ligação dele a uma imagem de uma ínfima marca em uma folha de papel. Assim como esse ente primitivo, o mundo das ideias da Matemática necessita de ferramentas para representá-las. Nesse sentido, corroboro Domingos (2003) quando expõe que o ato de representar um conceito envolve criar uma ilustração, um exemplo prático ou uma situação específica.

4.2 Representação na Matemática

Para Domingos (2003), praticamente todo tipo de conhecimento inclui informações representadas de diversas maneiras. O autor assevera que o conhecimento e as representações surgem interconectados. Tal relação tem gênese na tradição filosófica, contando com diversos filósofos, dentre eles, Platão, Descartes ou Kant. Posto isso, questiono: “O que é representar?” De acordo com Máximo (2016, p. 184), o termo representação vem do latim, *repraesentattio* e “é uma operação pela qual a mente tem presente em si mesma uma imagem mental, uma ideia ou um conceito correspondendo a um objeto externo”. Segundo Japiassu e Marcondes (1991), trata-se de uma referência à visão e como a maneira de conceber a imagem de algo. Segundo Rico (2000), representar significa substituir, conferindo visibilidade a algo que não está presente e, assim, validando sua falta. Como se percebe, diversos estudiosos trazem seus pontos de vistas acerca do termo ‘representação’. Diante dessa diversidade de literatura, não pretendo fazer uma abordagem exaustiva no que concerne a essa temática, mas ao invés disso, tocar em pontos sensíveis de tal modo que eles possam ser discutidos no âmbito da Educação Matemática. Em síntese, Máximo (2016, p. 184) considera que “a função de representação é exatamente a de tornar presente à consciência a realidade externa, tornando-a um objeto da consciência, e estabelecendo assim a relação entre a consciência e o real”.

Falar em representação, segundo Domingos (2003) implica dizer que ela tem uma dualidade entre o que representa e o que é representado. Para o autor, “representar-se para tornar algo presente, algo esse que existe e é distinto e que é substituído pela representação” (Domingos, 2003, p. 1). Dois mundos são utilizados por diversos autores para classificar as representações. São eles: o das representações externas e o das representações internas. Segundo Domingos (2003), há uma interação entre esses mundos. Ao falar sobre essa temática, o autor pondera que para refletir noções matemáticas, bem como compartilhá-las, é necessário representá-las de alguma forma. Além disso, complementa que a comunicação exige que as representações sejam externas, assumindo a forma de fala, símbolos escritos, ilustrações ou objetos físicos. De outro lado, o ato de pensar sobre objetos matemáticos, é necessário representá-los internamente, para que a mente possa trabalhar com eles. Os autores Dufour-Janvier, Bednarz e Belanger (1987) corroboram os mesmos exemplos de representações externas apontados por Domingos (2003). Na ótica de Mainali (2021, p. 4),

> [...] a representação externa é o produto físico real produzido por um professor ou um aluno que pode ser usado diretamente para ensinar ideias matemáticas. Por exemplo, uma reta numérica, uma equação algébrica ou um triângulo produzido por alunos em um papel é chamado de representação externa.

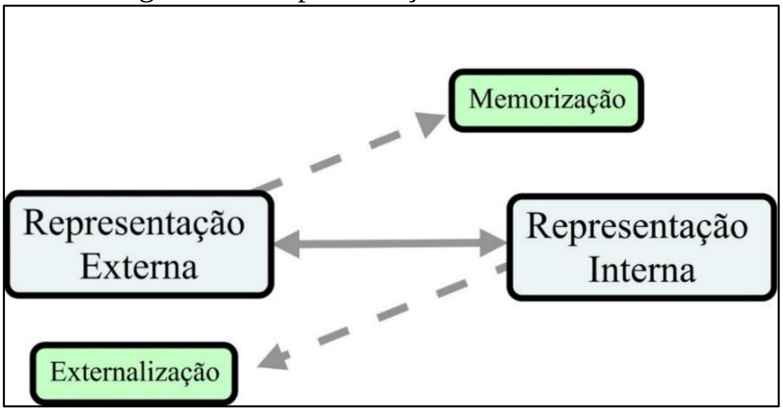
No que concerne às representações internas, são formadas na mente do indivíduo, por exemplo, as imagens mentais. Mainali (2021) destaca que elas podem ser entendidas como objetos não físicos. Conforme Candiotto (2016, p. 93), “a representação do objeto é apenas a imagem mental do objeto real, não é material, mas ideal”, isto é, está no mundo das ideias, sem imperfeições, fato que não ocorre no mundo material.

Viana (2005) assinala que figuras e palavras são formas externas de representação do conhecimento. Esse, por sua vez, pode ser representado internamente, ou seja, mentalmente. A autora cita uma situação em que é possível ter um conhecimento acerca do que vem a ser planos paralelos, bem como representá-los por meio de uma imagem mental. De acordo com Souza e Souza (2016), o ato de ler um texto gera uma representação interna. Vigotski (2008) também entende a fala/palavra interiorizada como um caso de representação interna.

Debruçando-se acerca das representações internas, Viana (2005, p. 40) assegura que elas “são as maneiras pelas quais o indivíduo torna presente no pensamento alguns aspectos do meio ambiente, sejam externos ou pertencentes ao seu próprio mundo imaginário”. Ainda, complementa afirmando que as representações mentais são subdivididas em dois grupos, a saber: representações analógicas e as simbólicas. As primeiras dizem respeito às imagens, sejam elas visuais, auditivas, olfativas, tácteis ou cinéticas, já as segundas têm semelhanças com a linguagem.

As representações externas e internas estão interconectadas, uma vez que as primeiras correspondem à personificação do que é percebido ou construído pelo aluno (Lesh, Post, Behr, 1987). Além disso, de acordo com Zhang (1997), a representação externa pode se converter em interna por meio da memorização, ao mesmo tempo que é possível a transformação da interna em externa por meio da externalização. A Figura 10 sintetiza essas conversões.

Figura 10 - Representação externa e interna



Fonte: elaborada pelo autor.

A internalização é o processo de converter uma representação externa (como símbolos, desenhos, gráficos ou palavras) em uma representação interna, ou seja, em algo que o indivíduo possa compreender e guardar em sua memória. Por exemplo, quando determinada pessoa vê uma imagem ou lê um texto matemático e consegue construir um modelo mental ou uma imagem mental a partir disso. Já a externalização é o processo inverso, nele, o sujeito traduz uma ideia ou conceito presente na mente (representação interna) para uma forma concreta e externa, como um desenho, um diagrama ou mesmo explicações faladas. A externalização possibilita a comunicação ou o compartilhamento de ideias com outras pessoas. Em síntese, esses dois processos são complementares e essenciais no aprendizado matemático, sendo que a internalização auxilia na compreensão individual e na construção do pensamento, enquanto a externalização facilita a comunicação e aplicação do conhecimento. Ambos permitem que as representações se tornem dinâmicas.

Rosa e Orey (2012, p. 277) fazem considerações acerca da externalização e internalização do conhecimento. No tocante à primeira, os pesquisadores ponderam que sua principal característica é a conexão entre os conhecimentos tácito[32] e explícito, utilizando recursos como metáforas, analogias, conceitos, hipóteses e modelos. A última, segundo os autores "está relacionada com o *aprender fazendo*, que é um processo pedagógico que caminha do plano social (das relações interpessoais) para o plano individual (das relações intrapessoais)".

[32] O conhecimento tácito está fincado na experiência pessoal, sendo subjetivo, contextualizado e análogo. Já o conhecimento explícito é sistematicamente disseminado, comunicado e compartilhado. Ele se expressa por meio de palavras, números, dados, fórmulas matemáticas e procedimentos codificados (Nonaka, Takeuchi, 1997).

Para Mainali (2021), um debate polêmico que permeia a temática das representações internas na Matemática diz respeito ao fato de que elas são desacreditadas por uma grande parte de estudiosos que defendem a impossibilidade de realizar investigações para o caso de existirem, ou seja, não é possível visualizar, tocar, manusear uma representação interna, ela está implícita. Enquanto isso, a utilização da expressão ‘representação externa’ ficou a cargo de Goldin (1998). Por outro lado, Lesh (2003), não faz essa separação, denomina de ‘representação’.

Não há como tratar da temática das representações sem mencionar o ensino e a aprendizagem da Geometria, tendo em vista que as ideias desse campo são abstratas e precisam ser representadas e externadas de algum modo para serem compreendidas pelos que a estudam. Por exemplo, de acordo com Fainguelernt (1999, p. 41),

> Os conceitos de pontos, retas e figuras geométricas são manipulados mentalmente (representações internas) à medida que manipulamos objetos (representações externas). Embora se saiba que esses conceitos não sejam objetos, eles têm, subjetivamente, um significado intuitivo para os indivíduos.

Considerada como um item primordial para o ensino e a aprendizagem da Matemática, a representação, principalmente a utilização de variados modos dela, possibilita um ganho significativo para os processos de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos. No entendimento de Mainali (2021, p. 1), a representação “é um signo ou combinação de signos, caracteres, diagramas, objetos, imagens ou gráficos, que podem ser utilizados no ensino e aprendizagem da Matemática”. Nesse contexto, incluo os gestos, discutidos posteriormente como formas de representações de ideias matemáticas no ar. Cavalcanti *et al.,* (2012, p. 185) entendem que a representação pode

> Significar tanto uma imagem mental (um símbolo concreto) quanto um conceito (abstrato). Há uma continuidade entre formas perceptivas e representações figuradas e as imagens visuais necessitam de esquemas motores e perceptivos prévios, adquiridos pela vivência [...], resultando em um novo tipo de esquema avançado, que é a abstração. O termo representação é, portanto, usado em dois sentidos diferentes, ou seja, como pensamento [...] e como imagem mental ou recordação-imagem.

Diante do exposto acerca da importância da representação, vem à tona o quanto é necessário fazer representações quando se trata do domínio da Matemática, área com uma linguagem própria e universal. Por que se apropriar desse recurso quando se estuda conceitos matemáticos? O que vem à mente é que em função da natureza abstrata das ideias matemáticas, recorre-se às representações delas que não são palpáveis, que estão nas mentes dos indivíduos e isso é para tornar o ente matemático abstrato compreensível. Conforme indica Johnson (2018), além de ser necessário um modo de representação, essa peculiaridade da Matemática faz com que as pessoas recorram aos distintos modos de representação para tornar acessíveis as ideias matemáticas. Ou seja, é preciso ir além do ato de representar, é primordial ter condições de poder utilizar distintas formas para externar e/ou comunicar um ente matemático.

A visualização pode ser impulsionada quando o trabalho ocorre a partir de distintas representações de um mesmo conceito da Matemática. Observa-se o pensamento seguinte que põe em cena essa multiplicidade de modos de se compreender essas subjetividades desse tipo de conhecimento.

> [...] representação e abstração são, então, processos complementares em direções opostas: por um lado, um conceito é frequentemente abstraído de várias de suas representações e, por outro lado, as representações são sempre representações de um conceito mais abstrato. Quando uma única representação de um conceito é usada, a atenção pode estar focada nela, em lugar do objeto abstrato. Entretanto, quando diversas representações são usadas em paralelo, a relação com o conceito abstrato correspondente se torna importante (Dreyfus, 1991, p. 38).

Segundo consta em Dreyfus (1991), surge um outro elemento importante para o processo de compreensão das ideias matemáticas, a abstração. Este elemento se encontra em um sentido oposto ao da representação e apesar disso ambos são interconectados. De acordo com Nasser (2013), a representação, a generalização e a síntese são os três componentes que contribuem para a abstração que é definida no Dicionário Aurélio como o ato de separar mentalmente um ou mais elementos de uma totalidade complexa (coisa, representação, fato), os quais só mentalmente podem substituir fora dessa totalidade. Nasser (2013) recomenda que a abstração deve ser desenvolvida desde a educação básica para que os estudantes não cheguem ao ensino superior com dificuldades de dominar essa habilidade. Portanto, a abstração pode e dever ser desenvolvida.

Retomando a discussão acerca da representação, em particular para referenciar conteúdos da GE, coloco em pauta alguns requisitos que os estudantes precisam ficar atentos nos momentos em que realizam representações de entidades geométricas. Por exemplo, a ideia de cubo representada em perspectiva exige cuidados, de modo que se produza algumas arestas tracejadas para mostrar uma sensação de profundidade, ou seja, de tridimensionalidade.

> Portanto, desenvolver representações de objetos espaciais é uma habilidade que vai muito além de produzir um mero desenho do objeto. É necessário que, na representação, estejam envolvidas as relações entre os componentes do objeto, como, por exemplo, uma aresta que liga um vértice a outro consecutivo num poliedro, a qual pode ou não aparecer em verdadeira grandeza, ser visível ou se apresentar oculta, da

> mesma forma que duas faces. Por outro lado, duas arestas que não são consecutivas devem ser traduzidas sem uma ligação contínua, bem como duas faces. Tais relações devem ser bem explícitas na representação, o que não se percebe, muitas vezes, na atividade do professor que apresenta grandes dificuldades a respeito (Leivas, Búrigo, 2011, p. 4).

Esses cuidados elencados são de extrema importância para a construção de conceitos matemáticos. Vale lembrar que essa representação se aproxima do ente ideal. Entretanto, jamais será como esse. O que ocorre na maioria das vezes que os estudantes precisam produzir desenhos em perspectiva é o fato de não se atentarem para esses detalhes, mas isso também acontece com os professores e, consequentemente, essas dificuldades acabam sendo presentes nos alunos.

Posto essas considerações acerca da representação, é urgente promover um ensino de conceitos matemáticos que permita a transição de um tipo de representação para outro. Sobre essa matéria, Mainali (2021, p. 1) defende que os alunos precisam ter a oportunidade de poder traduzir dentro e entre variados modos de representação, uma vez que isso permite aos estudantes a possibilidade de ser mais proficientes na aprendizagem da Matemática. Nesse panorama, surge a expressão ‘competência representacional’ em Matemática, denominada por Huinker (2015, p. 4) como “a capacidade de usar representações de forma significativa para compreender e comunicar ideias matemáticas e para resolver problemas”.

No âmbito desse assunto, entendo que o modelo de tradução de Lesh, Post e Behr (1987) mostra a importância do trabalho pautado na flexibilidade da utilização de diferentes modos de se representar um conceito matemático. Esse assunto também foi discutido nos textos de Tripathi (2008, p. 439) que enfatizou o uso de distintas representações como se fosse “examinar o conceito através de uma variedade de lentes, com cada lente fornecendo uma perspectiva diferente que torna a imagem [conceito] mais rica e profunda”. Segundo Domingos (2003), apesar que determinadas tarefas possam ser concluídas com o uso de uma única representação, muitas exigem integrar conhecimentos de distintos modos ou devem ser realizadas de um modo mais compreensivo de tal maneira que seja combinada o uso de distintas representações em vez de depender apenas de uma. O autor expõe que “esta necessidade de mudar de uma representação para outra torna-se evidente sempre que a outra seja mais eficiente para o passo que pretendemos dar” (Domingos, 2003, p. 6).

Essa diversidade mencionada antes é necessária, tendo em vista que, no caso dessa pesquisa, na fase de experimento de ensino, os estudantes se comunicavam ora entre si, ora com o pesquisador e isso contribui para aqueles que não conseguem compreender um conceito por meio de determinada representação. Mas, por outro lado, quando visualizam a produção de um gesto, por exemplo, por parte de seu colega, isso pode contribuir para um melhor entendimento, facilitando a abstração do ente geométrico.

4.2.2 A representação na Matemática à luz do Modelo de Tradução de Lesh

Em suas investigações, Lesh, Post e Behr (1987) discorreram sobre cinco maneiras de se representar uma ideia matemática. São elas: manipulável, pictórica (visual), simbólica, verbal e contextuais. Esses autores também evidenciaram a ligação entre elas. Esse modelo é um alargamento da teoria de Bruner (1973) que considerava somente três modos de representação. Nessa listagem elencada anteriormente, as duas últimas representações foram incluídas por Lesh, Post e Behr (1987).

Consoante a Cramer (2003), a construção dos significados da Matemática ocorre quando os alunos se movimentam entre essas cinco maneiras propostas por Lesh, Post e Behr (1987). Sobre a relevância das representações nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, os Princípios e Padrões para Matemática Escolar (NCTM, 2000, p. 67) dispõem que

> As representações devem ser tratadas como elementos essenciais para apoiar a compreensão dos alunos sobre conceitos e relações matemáticas; na comunicação de abordagens matemáticas, argumentos e entendimentos para si mesmo e para os outros; no reconhecimento de conexões entre conceitos matemáticos relacionados e na aplicação da matemática a situações problemáticas realistas por meio de modelagem.

Quando os alunos estão nos primeiros anos, tanto da educação básica quanto da universidade, essas representações são essenciais para a compreensão inerente à própria Matemática, tendo em vista que é o momento pelo qual estão convivendo mais com conceitos que requerem grandes abstrações. Diante desse contexto, é importante considerar que

> Os símbolos escritos tendem a ser mais abstratos para os alunos do que as outras representações. Geralmente apresento os símbolos depois que os alunos tiveram a oportunidade de fazer conexões entre as outras representações, de modo que tenham maneiras diferentes de conectar os símbolos às ideias matemáticas, aumentando assim a probabilidade de que os símbolos sejam compreensíveis para eles (Clemente, 2004, p. 99, tradução nossa).

A autora expõe como procedeu para desenvolver o conteúdo de frações dando prioridade às conexões entre as representações, mas tendo o cuidado para não utilizar uma linguagem simbólica exageradamente. A pesquisadora relata que

> Comecei com a linguagem falada e fiz com que respondessem com manipulações; então apresentei peças manipulativas e fiz com que respondessem com a linguagem falada. Nesse ponto, minha instrução estava focada em ajudar os alunos a pensar sobre frações decimais usando uma situação relevante, manipuláveis, linguagem falada e as conexões entre os três (Clemente, 2004, p. 100, tradução nossa).

Essa simbologia mencionada precedentemente é mais difícil de se compreender quando se trata de estudantes da educação básica. Provavelmente, essa é uma das causas que levam esses personagens quando iniciam os seus cursos de graduação a apresentarem dificuldades na compreensão de assuntos do nível exigido para a etapa.

A proficiência por parte dos estudantes em transitar entre diferentes formas de se representar um conceito matemático é tema de discussão do modelo de tradução de Lesh, Post e Behr (1987) que

> [...] sugere que as ideias matemáticas elementares podem ser representadas de cinco modos diferentes: manipulativos, imagens, contextos da vida real, símbolos verbais e símbolos escritos. Salienta que a compreensão se reflete na capacidade de representar ideias matemáticas de múltiplas formas, bem como na capacidade de estabelecer ligações entre as diferentes formas; e salienta que as traduções dentro e entre os vários modos de representação tornam as ideias significativas para os alunos (Cramer, 2003, p. 450, tradução nossa).

As características de cada um desses modos de representação são: as físicas ou representações por meio de materiais manipuláveis, que se referem à manipulação de objetos físicos ou manipulações virtuais; a pictórica ou visual, que diz respeito ao uso de imagens ou diagramas que apresentem ideias matemáticas (neste item incluem-se desenhos, fotografias, figuras e outros, esse caso pode incluir o desenho a mão ou no computador com a intenção de representar um objeto concreto); as simbólicas, que estão relacionadas aos símbolos matemáticos escritos, assim como as palavras escritas que se referem a eles.

Conforme Lesh (2003), essa categoria inclui símbolos verbais e escritos que podem ser considerados como letras, dígitos e/ou símbolos utilizados para fazer representações de números. Também, inserem-se as fórmulas matemáticas, bem como conceitos numéricos, algébricos e geométricos; a categoria verbal é composta pela linguagem matemática formal e pela linguagem do cotidiano; por fim, a categoria contextual está diretamente ligada a situações ou fenômenos realísticos. Nesta última forma de representação de conceitos matemáticos, pontuo o caso específico da Geometria, pois, de acordo com Freudenthal (1973, p. 407), ela propicia "uma das melhores oportunidades que existe para aprender como matematizar a realidade". Nessa última categoria, incluo a observação que alunos realizam em objetos e/ou situações do cotidiano para externar e/ou explicar conceitos geométricos para as pessoas que estão presentes durante a ação comunicativa.

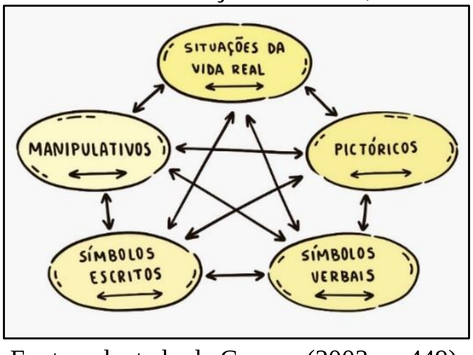
Nesse sentido, corroboro Clemente (2004), quando defende que uma situação de relevância pode ser entendida como contextos em que seja preciso o envolvimento de ideias da Matemática, utilizadas apropriadamente e que despertem o interesse. Além disso, acrescenta que pode ocorrer dessa situação não estar ligada a um fato da realidade.

O trabalho que Johnson (2018) realizou possibilitou a percepção de um modo de representação adicional, a tecnologia ou imagens em movimentos, ampliando, nesse caso, o modelo de tradução de Lesh, Post e Behr (1987). Essa categoria de representações foi entendida como a utilização de qualquer tecnologia (*tablets*, software, *site*, aplicativo, dentre outros) para a produção de protótipos móveis originados a partir de objetos concretos ou pictóricos. Conforme salienta Johnson (2018), existem alguns exemplos de tecnologias que não podem ser enquadradas nessa categoria, tais como *sites* com listas de exercícios puramente mecânicos ou exposição de fatos da Matemática, dentre outras situações.

Ressalto que a categoria representação por meio da tecnologia, proposta por Johnson (2018), traz dinamicidade às representações que antes eram estáticas no papel comum e/ou no livro didático. Vale mencionar que esse pesquisador, com a finalidade de ampliar tal modelo, defende o pictórico como um modo de externar conceitos matemáticos por meio de imagens, tanto feitas de maneira manuscrita, quanto apresentadas na tela de um computador ou *smartphone*. O que se percebe desse tipo de representação é que o elemento inovador é a dinamicidade e a interatividade, tendo surgido a partir da linguagem de programação LOGO (Kaput, 1992).

A Figura 11 sintetiza o modelo de tradução de Lesh, Post e Behr (1987). Para Cramer (2003), as setas que fazem ligações entre os distintos modos representam traduções envolvendo-os, enquanto as setas que se dispõem internamente representam traduções dentro dos modos.

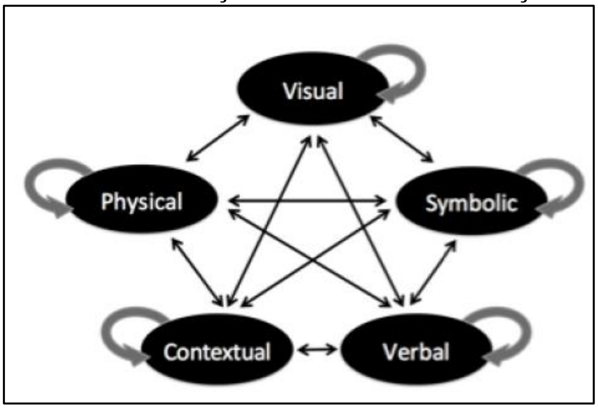
Figura 11 - Modelo de tradução de Lesh, Post e Behr (1987)



Fonte: adaptado de Cramer (2003, p. 449).

Esse modelo recebeu tratamento diferenciado conforme os estudos acerca dele iam avançando e mais pesquisadores se interessavam em aprofundar sobre tal temática. De acordo com Huinker (2015), deve-se salientar que há dois requisitos essenciais que devem ser aprimorados: por um lado, as traduções entre distintos modos de representação. Nessa situação, convém citar o caso de um modelo visual para uma equação; por outro lado, traduções dentro de um mesmo modo de representação, por exemplo, saindo de um modelo visual para outro. É o caso de fazer comparações entre uma matriz e um modelo de área. Diante dessas congruências, o referido autor elaborou um esquema (Figura 12) ilustrando como devem ocorrer transições para cada uma das categorias.

Figura 12 - Reformulação do modelo de tradução de Lesh



Fonte: Huinker (2015, p. 5).

A partir de uma análise no esquema anterior, é possível perceber que a fluência em transitar entre cada um desses modos de representação é relevante e isso pode ser constatado em Vale (2002, p. 16) ao afirmar que: “quando se aprende um conceito novo é importante que os alunos “vejam” o conceito a partir de várias perspectivas ou interpretações” e a partir daí consigam manifestar de diferentes maneiras, sejam elas dentro de uma mesma categoria ou entre categorias distintas.

Para Mainali (2021, p. 12), “tanto no ensino quanto na aprendizagem da matemática, precisamos constantemente mudar de um modo de representação para outro modo de representação”. No âmbito da GEP, nas situações em que os estudantes discutem um determinado conceito geométrico e, simultaneamente, o representam no papel, por meio de gestos, por meio de manipulações, verbalmente, dentre outros tipos, provavelmente o modo como entendem esse tipo de conhecimento está sendo externado. No caso da sala de aula, Oliveira, Izar e Settimy (2022a, p. 77) ponderam que o papel do professor é ficar atento ao processo que os estudantes “projetaram para a execução da manifestação de sua ideia com auxílio de materiais que fazem a concretização da ideia em forma, seja no papel, com gestos ou meio digital”.

Cada um dos cinco modos de representação do modelo de Lesh, Post e Behr (1987) pode se sintetizado no Quadro 19, o qual elenca o nome da categoria e ao lado descreve sucintamente as ações que alunos e professores devem desenvolver.

Quadro 19 **-** Síntese das categorias do modelo de traduções de Lesh, Post e Behr (1987).

Tipo de representação	Descrição
Visuais	Ilustrar, mostrar ou trabalhar com ideias matemáticas usando diagramas, imagens, retas numéricas, gráficos e outros desenhos matemáticos.
Verbais	Usar a linguagem (palavras e frases) para interpretar, discutir, definir ou descrever ideias matemáticas, unindo a linguagem matemática informal à formal.
Contextuais	Situar ideias matemáticas em situações cotidianas, do mundo real ou imaginárias, usando uma variedade de medidas discretas e contínuas (por exemplo, pessoas, metros, jardas).
Físicas	Usar objetos concretos para mostrar, estudar, agir ou manipular ideias matemáticas (por exemplo, cubos, contadores, ladrilhos, tiras de papel).
Simbólicas	Registrar ou trabalhar com ideias matemáticas usando numerais, variáveis, tabelas e outros símbolos.

Fonte: Adaptado de Huinker (2015).

O modelo de tradução de Lesh, Post e Behr (1987) vai ao encontro de resultados de estudos de diversos representantes da Educação Matemática. Por exemplo, Arcavi (1994) argumenta que o esforço feito para aprender esse campo do saber requer a ação de ‘fazer Matemática’. Nesse sentido, quando uma determinada ideia matemática pode ser visualizada por meio de distintas representações, assim como as conexões entre elas, tem-se uma característica da aprendizagem e da compreensão da Matemática. Fainguelernt (1999) também acentua que a apropriação de um conceito requer que os alunos migrem de um tipo de representação para outro e, simultaneamente, demonstrem desenvoltura entre as distintas representações.

Diante do que foi discutido acerca de cada uma das categorias do modelo de tradução de Lesh, Post e Behr (1987), corroboro Passos (2000, p. 83), quando afirma que uma representação “pode ser gráfica, como um desenho em um papel ou como modelos manipuláveis, ou mesmo por meio da linguagem e de gestos, considerados instrumentos importantes para expressar conhecimentos e ideias dos indivíduos”. Sustentando-se nessa autora ao ter incluído as gesticulações, observo a relevância em ampliar as discussões de Lesh, Post e Behr (1987) acerca da referida temática. Entretanto, saliento que esse debate não tem um ponto de chegada. Assim, compreendo que a linguagem corporal manifestada em momentos de discussões, sejam elas formais ou informais, é considerada como uma forma de representação de conceitos matemáticos. Nesse contexto, estou entendendo o corpo como produtor de gestos.

No que concerne as cinco categorias do modelo de Lesh, Post e Behr (1987): manipuláveis, pictóricos (visuais), simbólica, verbal e contextos da vida real (contextuais), compreendo que as duas primeiras, para o caso desta pesquisa, estão imbricadas, tendo em vista que para o desenvolvimento da visualização, uma das inúmeras possibilidades é apostar em um trabalho pautado na manipulação de materiais de natureza física. Isso não significa que seja uma relação de implicação direta, pois é necessário analisar diversos fatores, entre eles, o modo como essas manipulações estão sendo guiadas e trabalhadas em sala de aula. Ainda, há o fato de que quando os indivíduos estão realizando manipulações pode ocorrer uma visualização no sentido de ver com a mente.

Além da imbricação mencionada antes, incluo a linguagem corporal entendida, nesta pesquisa, como gestos que são coparticipantes da construção de conhecimentos do pensamento matemático. Essa temática será discutida posteriormente. Eles funcionam como uma forma de expressão de conhecimentos matemáticos que pode exercer a função de protagonistas na produção de conhecimento geométrico, bem como na comunicação deles. Além disso, promovem o desenvolvimento da visualização, tanto por parte de quem os observam, quanto por aqueles que os produzem. As gesticulações, por sua vez, têm uma relação ímpar com essa habilidade visual. A visualização pode ser considerada como um tema que envolve, por exemplo, a gestualidade e o processo de manipulação sob uma perspectiva reflexiva.

4.3 Visualização em Matemática: um tema em constante reflexão

Para principiar este debate, cabe refletir acerca de três verbos que permeiam a discussão quando a temática versa sobre a visualização: “ver”, “enxergar” e “visualizar”. Segundo o dicionário *online*[33], o primeiro está redigido da seguinte maneira: “captar a imagem através da visão; enxergar: viu o dia claro, ela não vê”; o segundo refere-se a “perceber pelo uso da visão; ver o que está distante; avistar”; e o último refere-se a “fazer com que algo se torne visível, perceptível à visão humana; ver: visualizar um tumor, uma postagem, uma placa de trânsito; transformar conceitos abstratos em imagens mentalmente visíveis: visualizar o irreal”. Ainda

[33] Disponível em: https://www.dicio.com.br/ver/.

em relação ao termo “visualizar”, ele tem origem no latim, *visuais*, relativo à vista, podendo ser entendido como o ato ou efeito de ver. Conforme Henrique (2022, p. 24), “a palavra “ver”, neste caso, assume não só os objetos que estão diante dos olhos, como um livro impresso ou uma representação gráfica na tela do *smartphone,* mas as imagens mentais que conseguimos formar e manipular”. Sobre elas, teço pormenorização mais adiante.

O que diferencia cada um desses três termos? O que mais se aproxima das ideias defendidas na Educação Matemática? Visualizar é ver com os olhos ou ver com a mente? Quando visualizo com os olhos estou fazendo o mesmo com a mente? Apresento possíveis reflexões sobre essas questões, embasando-me em educadores matemáticos. Antes de tudo, vale evidenciar que, conforme Oliveira, Izar e Settimy (2022a), a visualização é entendida como uma operação que antecede a fase de registro. Em meu entendimento, essa habilidade pode ter início na mente das pessoas e, a partir daí, elas escolhem uma forma para registrar determinadas ideias abstratas.

Também, é pertinente esclarecer que os significados atribuídos aos três verbos mencionados anteriormente foram emprestados pela Língua Portuguesa. De certa forma, eles são compreendidos na Educação Matemática sob uma ótica singular que é voltada para esta área, para os objetivos da referida comunidade. Um retrato das pesquisas que versam sobre a visualização no âmbito tanto da educação, quanto da Psicologia, mostra uma diversidade de terminologias para um mesmo termo, por exemplo: imagens visuais, pensamento visual e raciocínio. A essa lista, Gutiérrez (1996b) acrescenta imaginação espacial, raciocínio visual, pensamento espacial, imagens mentais, imagens espaciais, percepção visual, percepção espacial, visão espacial. O autor ainda salienta que não há concordância no tocante à utilização da terminologia. Por exemplo, pode ocorrer de um pesquisador optar por “visualização” e outro escolher “pensamento espacial”. Todavia, ambos estão compartilhando do mesmo significado para expressões diferentes. Em suma, esses termos convergem para o fato de que a visualização é importante em inúmeras atividades da vida, não se restringindo ao aprendizado escolar ou à Geometria (Gutiérrez, 1991). Neste trabalho, assumo o uso do termo “visualização”.

Ainda em relação aos verbos “enxergar” e “ver”, apoio-me em Oliveira e Izar (2022, p. 41) quando ponderam que são “sinônimos em nossa língua. Enxergar vai além do ver, isto é, enxergar é ver com significado, buscando elementos que aprofundem o ver”. Estou compreendendo que esses verbos possuem acepções um pouco diferentes quando o campo de discussão é na Educação Matemática. De acordo com Zulatto (2007, p. 76), visualizar pode ser entendida como

> Uma construção mental de objetos, ou dos processos a eles associados, percebidos pelo indivíduo como externos. Alternativamente pode, ainda, consistir em uma construção, em uma mídia externa como o papel, lousa ou tela do computador, de objetos ou eventos que o indivíduo identifica com objetos ou processos de sua mente.

A ação de visualizar pode estar ligada a ver com a mente um objeto que está ausente no exato momento. Ela parte, para um ser vidente, do ato de ver, tocar, manipular e imaginar. Entendo que as pessoas podem aguçar a sua visualização a partir do repertório de oportunidades adquiridas no decorrer de suas vidas. Para um não vidente, ela pode partir da utilização de outros sentidos, particularmente do tato.

Geralmente, inicia-se com o "ver com olhos" para chegar ao "ver com a mente". Por exemplo, no decorrer da observação da representação do cubo, os estudantes podem "ver com os olhos" os elementos principais do sólido geométrico e, ao mesmo tempo, fazer manipulações e, a partir daí, podem fazer relações matemáticas não explícitas, podem visualizar mentalmente possíveis posições do referido poliedro, conseguindo, dessa forma, "ver com a mente". Consoante Veloso (1998), ao utilizar e manipular tais materiais nas aulas, o desenvolvimento da visualização dos alunos surge como consequência desse trabalho realizado. Ainda segundo esse autor, a visualização não significa somente o ato de ver um objeto. Essa habilidade está interligada à formação de imagens mentais, ou seja,

> As imagens mentais e as ideias abstractas dos alunos são baseadas nas suas experiências. Assim os alunos que vêem e manipulam vários tipos de objetos, têm imagens mentais mais claras e podem representar ideias abstractas mais completamente do que aqueles cujas experiências são mais pobres (Vale, 2002, p. 14).

A riqueza em permitir que os alunos manipulem uma gama de objetos do dia a dia ou projetados está em consonância com o pensamento de Kaleff (2008, p. 20), quando pondera que "o material concreto possibilita ao estudante ver o objeto estudado e não apenas "ver sua imagem mental por meio de sua imaginação, ou seja, na tela mental de sua cabeça". Nesse cenário, é possível observar, no âmbito da Educação Matemática, uma relação acerca das potencialidades de manipulações em materiais de natureza física por parte dos alunos com as discussões voltadas para a promoção e o desenvolvimento da visualização. Nesse sentido, concordo com Oliveira e Izar (2022, p. 39), quando defendem que "o desenvolvimento da visualização espacial prescinde de exercícios que estimulem a observação de modelos físicos, a análise e a interpretação da forma e da dimensão".

É oportuno pôr em relevo que ver com os olhos não implica o ato de manipular fisicamente, uma vez que pode ocorrer a situação em que um aluno esteja diante da tela de um computador ou *smartphone*, visualizando a imagem de um prisma em movimento no GeoGebra, mas não está realizando manipulações na representação, apesar de esse indivíduo exercer um papel ativo para que o *software* possa dinamizar ou acrescentar efeitos especiais a partir de comandos específicos. Há o caso da manipulação digital, por exemplo, a caneta *touch*, o toque do dedo na tela. Nesses casos, os trabalhos desenvolvidos por Bairral (2017) e Assis (2020) assumem notoriedade. Também, pode ocorrer a situação de uma imagem em uma folha de papel de duas retas paralelas cortadas por uma transversal e, a partir daí, o professor solicitar ao aluno que imagine uma delas sendo arrastada, de tal modo que uma fique sobreposta à outra. Um dos objetivos dessa tarefa é mostrar aos discentes que os ângulos correspondentes, neste caso, coincidirão.

O desenvolvimento do pensamento visual, conforme Settimy (2018), está atrelado à utilização de diversos recursos nos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria. Entretanto, entendo que nem sempre um implica diretamente no outro, isto é, pode haver casos em que um trabalho seja desenvolvido com materiais de natureza física e não desenvolver a visualização em determinados sujeitos. Para Del Grande (1990) e Kaleff (2016), o material concreto contribui com o desenvolvimento da visualização.

A respeito da visualização sob a lente da Educação Matemática, Zulatto (2007, p. 77) defende que essa habilidade "tem valor pedagógico e está relacionada à compreensão dos estudantes, que pode se traduzir em representações internas ou externas, com ou sem uso de mídias". Ou seja, nesse campo de pesquisa, procura-se dar contribuições mais amplas, obviamente se apoiando em outras áreas, como a da Psicologia, que traz explicações e características levando em conta a cognição do indivíduo para o desenvolvimento dessa habilidade.

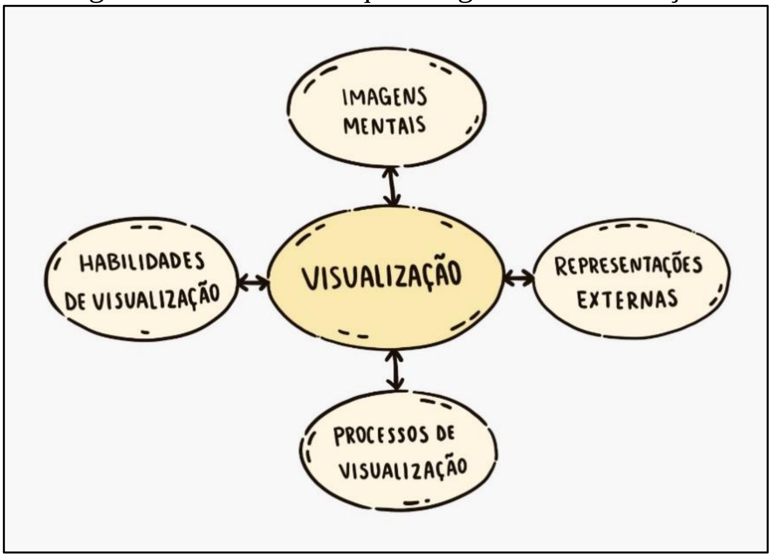
Diante do exposto até o presente momento, o que se entende por visualização? Qual definição de visualização mais se aproxima com o campo da Educação Matemática? Nesse sentido, Henrique (2022, p. 26), afirma que "embora alguns autores tenham apresentado perspectivas diferentes quanto à definição de visualização, estas se complementam e apontam o papel da visualização para a construção e desenvolvimento conceitual". Ou seja, a convergência desses estudiosos está no fato de essa habilidade promover uma construção de conhecimento. Também vale realçar que

> Uma discussão importante para compreender o que entendemos como visualização é admitir uma relação estreita entre linguagem e pensamento. Só é possível saber o que o outro pensa se ele se expressa por meio da linguagem. Em um contexto de ensino e aprendizagem, é pelo diálogo, gestos, produção textual ou pictórica que o professor tem acesso ao pensamento do estudante (Oliveira; Barbosa, 2022, p. 53).

O pensamento anterior traz a reflexão de uma possível ligação entre a produção de gestos no âmbito do ensino e da aprendizagem da Geometria com a visualização, uma vez que se está considerando uma imbricação entre a linguagem e o pensamento para a compreensão do que se entende por visualização. Além disso, entendo que a gestualidade por parte dos alunos, em um contexto educacional, é um meio de expressão não-verbal. Em síntese, considero que os gestos produzidos por sujeitos potencializam e são coparticipantes ativos para o desenvolvimento da visualização.

Para este trabalho, estou adotando a definição de visualização em Matemática teorizada por Gutiérrez (1996b, p. 9): "o tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, mentais ou físicos, realizados para resolver problemas ou provar propriedades". Segundo esse autor, a visualização é composta por quatro elementos essenciais, exibidos na Figura 13.

Figura 13 - Elementos que integram a visualização



Fonte: elaboração própria a partir de Gutiérrez (1996b, p. 9).

No Quadro 20, a seguir, mostro a descrição de cada um desses elementos.

Quadro 20 - Descrição dos elementos que integram à visualização

Tipo	Descrição
Imagem mental	"Qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito ou propriedade matemática por meio de elementos visuais ou espaciais".
Representação externa	"É qualquer tipo de representação verbal ou gráfica de conceitos ou propriedades, incluindo imagens, desenhos, diagramas, etc., que ajudam a criar ou transformar imagens mentais e a fazer raciocínio visual".
Processo de	"É uma ação mental ou física em que imagens mentais estão envolvidas".

visualização	
Habilidades de visualização	Devem ser adquiridas e melhoradas pelos indivíduos.

Fonte: Gutiérrez (1996b, p. 9).

Corroboro Oliveira (2022, p. 25) quando defende que “a visualização não é um caminho de mão única ou de apenas uma via, mas uma encruzilhada, uma rede complexa que se estabelece a partir do ponto de vista de cada ator envolvido”. Essa frente pode convergir com o esquema da Figura 13, uma vez que nele está implícita a característica de um processo envolvendo fatores internos e externos.

No que tange às habilidades de visualização, elas podem ser desenvolvidas junto aos alunos em função das características do problema matemático a ser resolvido. Da lista que se segue, duas foram teorizadas por Hoffer (1977). São elas: discriminação visual, que é a habilidade de diferenciar semelhanças e diferenças entre objetos; e memória visual, que se refere à habilidade de se lembrar de um objeto com detalhes, sendo que não esteja mais à vista, além de poder fazer relações das características dele com outros objetos, presentes no momento da observação ou não. As demais são classificadas, conforme Gutiérrez (1994; 1996b), em:

- Percepção figura-fundo: capacidade de realizar identificações de uma figura em particular, isolando-a de um fundo complexo. Deve-se observar a figura e deixar em segundo plano itens irrelevantes. Evitar distrações com estímulos que distraem nossa visão.
- Constância perceptiva: reconhecer que determinadas propriedades de um objeto (real ou em uma imagem mental) são independentes de tamanho, cor, textura ou posição, além disso, não fazer confusões quando um objeto ou imagem é visto em distintas posições. Para Del Grande (1994, p. 158), “uma pessoa com constância de percepção, por exemplo, reconhecerá um cubo visto de um ângulo oblíquo como um cubo, embora os olhos colham uma imagem diferente quando o cubo é visto de frente ou de cima”.
- Rotação mental: capacidade de produzir imagens mentais em dinamicidade e fazer visualizações de uma configuração em movimento;
- Percepção de posições espaciais: capacidade de relacionar um objeto, imagem ou imagem mental consigo mesmo;

- Percepção das relações espaciais: capacidade de poder relacionar vários objetos, imagens e/ou imagens mentais entre si ou simultaneamente consigo mesmo e/ou em relação um ao outro;
- Discriminação visual: capacidade de comparar vários objetos, imagens e/ou imagens mentais para realizar identificação de possíveis semelhanças e diferenças entre elas.

Em relação ao processo de visualização, Gutiérrez (1996b) afirma que há dois presentes nela. O primeiro correspondente ao "processamento visual" da informação (VP) de Bishop (1989), é a intepretação visual da informação. Esse é o caso para criar imagens mentais, pois, segundo Settimy (2018, p. 32), o VP "é a capacidade de manipular e transformar imagens mentais e abrange a visualização e a tradução de relações abstratas e de informação não figural em termos visuais". O segundo processo, relativo à 'interpretação da informação figural' (IFI) de Bishop (1989), é o da intepretação de imagens visuais, mentais ou físicas. Esse é o da produção de informações e "envolve o conhecimento do 'vocabulário geométrico' e capacidade de ler e interpretar imagens visuais, a fim de obter informações relevantes que possam ajudar a resolver uma atividade" (Settimy, 2018, p. 32).

Ainda sobre o VP e o IFI, pautando-me nas intepretações de Lima e Carvalho (2010) em Bishop (1989), acerca do papel que é exercido à visão para a formação do pensamento geométrico, apresento uma relação com duas capacidades interdependentes. A primeira, conforme ponderam Lima e Carvalho (2014, p. 92, grifos dos autores), "[...] é a de "*ver* os objetos (físicos ou gráficos), o movimento e o espaço físico e de gerar *imagens mentais*". Os autores trazem como exemplo a ação de olhar para uma bola de futebol e, a partir daí, criar a imagem mental de um objeto contendo características que facilitam a realização de movimentos variados. A segunda, conforme asseveram Lima e Carvalho (2014, p. 92), "é a de tornar visíveis nossas ideias e imagens mentais, por meio de objetos físicos ou de suas representações gráficas". Também, incluo as visualizações pictóricas, uma vez que nem sempre são gráficas. Esses últimos pesquisadores reforçam a presença de uma ligação entre essas duas capacidades para a formação do pensamento geométrico das pessoas dotadas de visão.

Dissertarei de forma mais detalhada sobre a temática das imagens mentais logo em seguida. A escolha em realizar essa descrição reside na recorrência com que menciono a expressão "imagens mentais" neste referencial.

4.3.1 Imagens mentais

Tratando-se das imagens mentais produzidas pelos alunos, conforme Sutherland (1993), é necessário estar claro de que elas são perceptíveis apenas por meio de representações externas, por exemplo, linguagem verbal, gestual e gráfica. Neste caso, compreendo que as produções gestuais dos acadêmicos participantes desta pesquisa permitiram que eles externassem conceitos de modo visual.

Para esta pesquisa estou vislumbrando a definição de imagem mental adotada por Gutiérrez (1996b, p. 9): "é qualquer tipo de representação cognitiva de um conceito ou propriedade matemática por meio de elementos visuais ou espaciais". Como estou tratando de imagens na mente, entendo ser relevante informar que ela é aceita na comunidade da Educação Matemática, conforme defendido por Clement (1982). Nesse sentido, algumas definições de imagens mentais vão surgindo sob a lente da Psicologia que predominava nesse período. A partir desse contexto, Presmeg (1986) traz uma definição considerada como mais ampla, levando-se em conta as definições anteriores. Diante disso, foi possível classificar vários tipos de imagens que foram constatadas na pesquisa de Presmeg (1986), conforme está exposto no Quadro 21:

Quadro 21 - Tipos de imagens visuais na ótica de Presmeg

Imagens	Descrição
Concretas/pictóricas	"Figuras em nossa mente". Não é a mesma para todos.
De padrões	Relações matemáticas abstratas de forma visual são representadas por meio delas.
De fórmulas	Determinados alunos podem "ver" em suas mentes algumas fórmulas, já que elas foram escritas na lousa, no caderno e/ou no livro didático.
Cinestésicas	A partir de uma postura não estática, por exemplo, por meio de gestos ou outras expressões corporais, essas imagens são produzidas, transformadas ou transmitidas.
Dinâmicas	Diz respeito à capacidade de poder mover ou transformar uma imagem mental concreta.

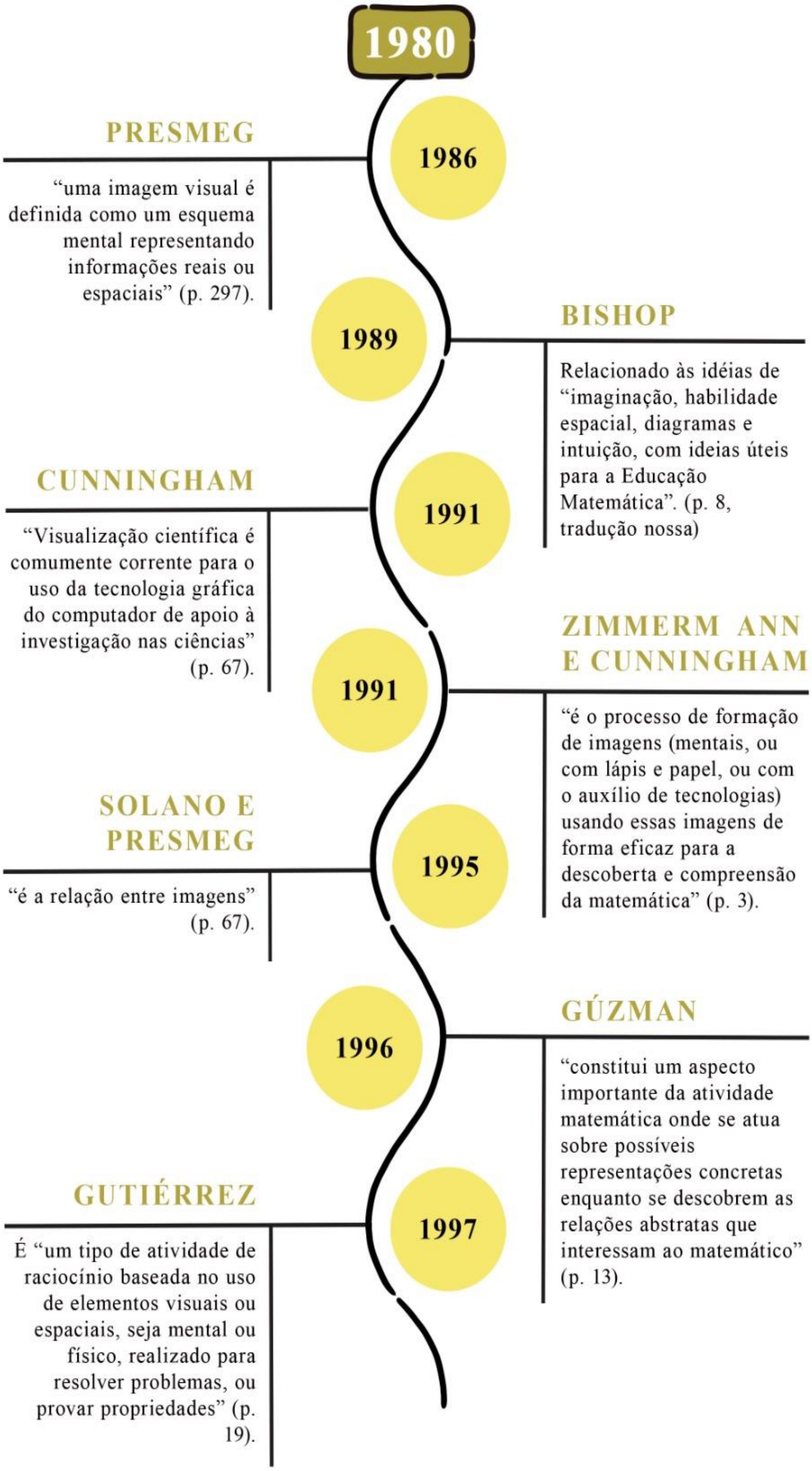
Fonte: elaborado pelo autor com base em Presmeg (1986, p. 43-44).

Ao refletir sobre a classificação dada por Presmeg (1986), vejo a possibilidade de haver uma ligação entre as imagens cinestésicas e a gestualidade, em particular para o caso desta pesquisa, assim como a utilização das imagens dinâmicas, uma vez que percebi, em algumas ocasiões, determinadas pausas de tempo e uma ligeira inclinação da cabeça por parte de alguns integrantes participantes do experimento de ensino. Essas posturas podem remeter ao que estou considerando como manipulação mental de objetos geométricos espaciais.

Para Gutiérrez (1996b), as expressões imagem mental, imagem espacial e imagem visual definidas por Yakimanskaya, Dreyfus e Presmeg são sinônimas, assim como visualização, imagens visuais e pensamento espacial também o são.

A partir do que foi discutido até o presente momento acerca da visualização, observo que muitos estudiosos trouxeram suas compreensões para uma possível definição. Todavia, não estou em defesa de uma mais coerente, nem de propor uma nova, uma vez que isso já foi feito por muitos. Nesse sentido, apenas tomei uma posição sobre qual delas está sendo adotada para este trabalho. Em síntese, com a intenção de agrupar em um único espaço os entendimentos dos teóricos sobre essa temática, apresento uma linha do tempo, Figura 14, mostrando o que já publicaram a respeito da visualização.

Figura 14 - Linha do tempo de algumas definições sobre visualização em Matemática



NEMIROWSKY; NOBLE

1997

"é um ato que não se restringe somente aos aspectos mentais ou aos aspectos externos, mas um meio de estabelecer conexões entre esses dois meios." (p. 101)

1999

ARCAVI

"é a capacidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre fotos, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com o objetivo de descrever a comunicação de informações, de pensar e de desenvolver idéias anteriormente desconhecidas e entendimentos avançados". (p. 26).

DUVAL

1999

"refere-se a uma atividade cognitiva que é intrinsecamente semiótica e o uso da visualização na matemática requer um treino específico, para ver em cada registro de representação." (p. 9).

PASSOS

2000

"é a habilidade de pensar, em termos de imagens mentais (representação mental de um objeto ou de uma expressão), naquilo que não está ante os olhos, no momento da ação do sujeito sobre o objeto" (p. 80).

2000

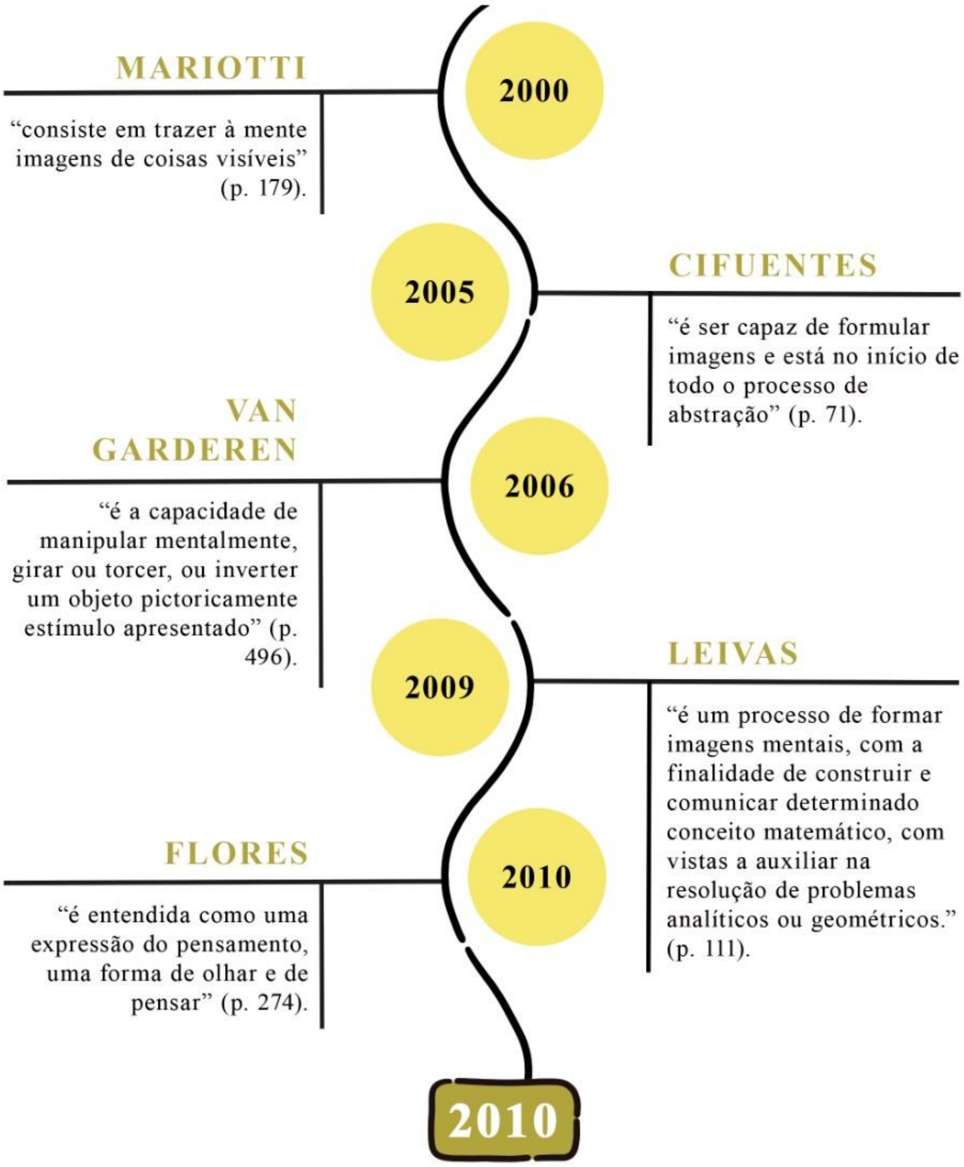
DREYFUS

No campo da Educação Matemática "inclui duas direções: a interpretação e compreensão de modelos visuais e a capacidade de traduzir em informação de imagens visuais o que é dado de forma simbólica". (p. 169).

SENECHAL

2000

"significa em linguagem usual 'percepção espacial' e assim é a reconstrução mental da representação de objetos a 3 dimensões." (p. 170).



Fonte: adaptado de Buratto (2012, p. 59).

Como se percebe na figura anterior, a visualização apresenta uma multiplicidade de conceitos e, para mostrar isso, a pesquisa de Buratto (2012) mapeou dezoito concepções ligadas a esse termo no campo da Educação Matemática. Para essa pesquisadora, a visualização também se utiliza da fonte da Matemática, da Psicologia e da Pesquisa Científica. A partir dessa constatação, a estudiosa afirma que essas compreensões convergem para o fato de que o foco dessa temática se apoia na percepção e na manipulação de imagens visuais.

Realizando uma reflexão sucinta acerca da linha do tempo anterior, confiro destaque a alguns pontos relevantes. Em minha perspectiva, o primeiro deles está relacionado ao que se entende por visualização na ótica de Duval (1999). O autor se apoia em uma das frentes da semiótica para propor sua definição. Não estou assumindo essa corrente. No segundo, vejo que a visualização está ligada à mente do indivíduo.

O terceiro ponto importante diz respeito ao fato de a visualização poder ser desenvolvida, já que os indivíduos não nascem com essa habilidade pronta e acabada. Oliveira (2022) compreende que ações simples do dia a dia permitem esse desenvolvimento. Por outro lado, Flores (2007) assinala que a visualização é uma atividade complexa e, além disso, às vezes há uma certa ingenuidade em achar que um conjunto de atividades elaboradas e trabalhadas em sala de aula pode melhorar o modo de ver dos alunos. Em adição, cabe frisar que não é possível colocar uma lente nos olhos dos alunos para entender como eles processam os elementos percebidos pelo sentido da visão.

Concordo que a visualização é uma habilidade que deve ser desenvolvida, no entanto, saliento que ela se trata de um processo pelo qual algumas pessoas têm mais facilidades do que outras, mas cada um pode desenvolvê-la ao seu tempo. Oliveira (2022, p. 128) chama a atenção para o fato de que “esta é a primeira barreira a ser quebrada, uma vez que alguns alunos já se justificam dizendo não saber desenhar [...]”. O autor reforçou que a visualização não é uma habilidade inata. Para seu desenvolvimento, compreendo que não é simplesmente propor questões previamente pensadas, mas deve-se dar importância à mediação que o professor deve realizar, assim como a percepção que ele tem acerca da visualização e, também, da sua relevância dentro da Matemática, bem como de uma diversidade de recursos que promovem o desenvolvimento da visualização.

Ainda sobre a habilidade de visualização que não nasceu com o indivíduo, compreendo que ela não é inata, isto é, ela pode ser desenvolvida desde o nascimento e é aprimorada à medida que o sujeito é colocado diante de situações que exigem o ato de visualizar. Além disso, é primordial a mediação de uma pessoa adulta ou mais experiente no sentido de lançar interrogações acerca do que está sendo observado. Esse meu entendimento também está em consonância com Oliveira e Izar (2022, p. 38), quando dispõem que a visualização precisa “ser instigada, incrementada. É uma habilidade que precisa ser estimulada e deveria ser desenvolvida em todos os níveis da educação básica”, inclusive a graduação. Negar essa importância acarreta o que Oliveira e Izar (2022, p. 41) apregoa: “a carência de atividades que desenvolvam a visualização no decorrer da educação básica pode dificultar o entendimento dos estudos introdutórios sobre Geometria Espacial e sobre noções básicas de projeções”.

Nesse feixe de ideias propostas, concordo com Borba e Villarreal (2005, p. 96), quando apontam que “a visualização se constitui em um caminho alternativo de acesso ao conhecimento matemático”, independentemente do nível ou etapa da educação. Os autores tratam de representação visual e entendem que a visualização é um elemento da Matemática, funcionando como um meio para se resolver problemas.

Para Gouveia e Miskulin (2012, p. 104), "o visualizar é próprio e distinto de cada aluno, e o contato com o modo de visualizar dos outros, como também as demais experiências presenciadas por ele, configuram e ressignificam constantemente os seus processos de visualização". Nessa mesma direção, Oliveira, Izar e Settimy (2022a, p. 78) defendem que "se é próprio de cada aluno, devemos considerar que não deva existir um modo apenas de se comunicar com o grupo".

Em síntese, um quarto elemento que destaco a partir da reflexão do quadro anterior, mas não o último ponto, pode ser a questão de o ápice e/ou a sustentação da visualização ser a percepção e a manipulação de imagens visuais, como defendido por Buratto (2012).

O olhar de Cifuentes (2005, p. 58) para a visualização pode ser traduzido da seguinte maneira: "o visual na matemática não deve ser entendido só em relação à percepção física, senão também a um certo tipo de percepção intelectual, ligado fortemente à intuição matemática". De acordo com esse pensamento, vislumbro que é ter condições de poder ver alguns conceitos matemáticos com a mente, assim como expressá-los por meio de representações externas variadas.

Nesse debate que realizei com outros pesquisadores acerca da visualização, não tive a intenção de trazer ou defender uma definição apropriada para essa habilidade, no campo da Educação Matemática. A partir das discussões acerca da visualização, é importante reforçar que ela transcende a ação de ver com os olhos, assim como do ato perceptivo e manipulativo. Além do mais, as falas, os gestos e o pensamento, imbricados, realizados durante momentos de produção matemática, são recursos que podem estimular a visualização.

5 PRODUÇÃO DE GESTOS PARA REPRESENTAR DETERMINADOS RESULTADOS DA GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO

Os gestos são janelas para o pensamento
(D. McNeill, 1992).

Nesta seção, faço uma discussão acerca do gesto produzido por crianças em contextos diversos, bem como em situações controladas por meio da observação de partes minúsculas de áudio e vídeo, ao mesmo tempo em que sumarizo o que pensam os teóricos sobre a utilização dessas gesticulações, estendendo-se essas compreensões para a produção de gestos por adultos em situações do cotidiano. Em seguida, elenco as dimensões gestuais, as fases e a sincronicidade entre gesto e fala. Por fim, abordo a importância dos gestos na Matemática e no pensamento espacial.

5.1 Gestos: Primeiras Impressões

Já parou para observar uma criança com poucos meses de idade realizando movimentos aleatórios envolvendo pernas, braços, mãos e face? Muitas vezes, até com um certo ritmo? E quando esses “pequeninos” abrem um sorriso olhando para um adulto? Também, já deve ter visto eles balbuciarem e pronunciarem monossílabas tais como “ba” e “ma”, dentre outras. Outra situação recorrente pode ser observada com crianças maiores, quando questionadas sobre sua idade e respondem realizando gestos com os dedos das mãos. O que se percebe é uma atitude de usar os “dedinhos” para informar a um adulto quantos anos têm. Por que isso ocorre? A pesquisadora Sfard (2009, p. 199) realiza investigações e comenta que

> Os procedimentos gestuais seriam frequentemente automatizados; às vezes eles seriam lembrados por nossos corpos muito melhor do que as palavras são lembradas por nossas mentes. Para perceber isso, basta pensar nos gestos que fazemos sempre que temos uma palavra “na ponta da língua”. Crianças pequenas mostrando um número de dedos em vez de pronunciar uma palavra numérica em resposta à pergunta: “Quantos?”.

Outra espontaneidade de movimentos das mãos ocorre no decorrer da contagem de elementos de uma determinada coleção, por exemplo, as figurinhas de um álbum de colecionadores “mirins” estão enfileiradas e esses utilizam o dedo indicador para contabilizar e quando fazem isso estão apontando para cada figura. Sobre essas questões, Pereira (2010, p. 70) expôs que

> [...] é um comportamento exclusivamente humano e é um dos primeiros dispositivos de comunicação que uma criança adquire, indicando a prioridade *ontogenética* da dêixis[34]. O movimento de apontar é um elemento fundamental da comunicação humana e nos possibilita, mais tarde, como resultado de um complexo processo de aprendizagem, *representar* com braços e mãos o formato de objetos, sua posição no espaço, descrições complicadas de caminhos e até mesmo o abstrato e o metafórico, sugerindo aspectos cognitivos dos gestos.

Tomasello (2010), psicólogo estadunidense, apresentou a importância do gesto de apontar. O estudioso mostrou que o significado transmitido pelos gesticuladores depende do contexto no qual ocorreu o processo de produção das gesticulações. Por exemplo, supondo um auditório sendo utilizado para apresentação de uma palestra e que há algumas poltronas vazias na plateia. Repentinamente, entram mais pessoas e alguém com a intenção de ajudá-las faz um gesto de apontar para uma das cadeiras desocupadas no meio dos espectadores. Outra situação, quando esse mesmo auditório está vazio, com algumas fileiras desorganizadas e um determinado funcionário da limpeza aponta para essas cadeiras. Um sujeito que está diante dessa cena pode entender que o gesto de apontar seja um pedido de ajuda para fazer a organização. Essas duas situações mostram que esse tipo de gesto por si só não tem significado, isso vai depender do contexto em que a gesticulação está ocorrendo.

O ato de apontar faz parte da comunicação mesmo antes do processo de aquisição da linguagem pelas crianças. Os exemplos citados precedentemente estão relacionados a diversos estudos envolvendo os gestos produzidos por elas. Ressalto que esse referencial teórico dialoga acerca dos resultados propostos por estudiosos que discutem essa temática, principalmente quando são produzidos por estudantes das últimas etapas da educação básica e/ou da graduação em Matemática.

Goldin-Meadow (2003, p. 3) conclui que “as crianças expostas a instruções que incluem a fala e os gestos aprendem mais com essa instrução do que crianças expostas a instruções que incluem apenas a fala”. Esse resultado foi inferido para informar que o gesto utilizado pelo professor no decorrer de sua explanação em sala de aula influencia no aprendizado desses alunos. Considerando a minha questão de pesquisa, bem como o objetivo que me propus trilhar, não me aprofundarei na temática da produção de gestos como meio de facilitar os processos de ensino e de aprendizagem de sujeitos dessa faixa etária.

E se os personagens fossem adultos? Imagine-se em uma conversa com amigos e/ou assistindo uma aula, uma palestra ou até mesmo uma missa. Viu-se na cena? Será fácil encontrar

---

[34] Função indicativa própria de certas unidades linguísticas. Os demonstrativos (este, esse, aquele) são signos dêiticos porque não significam, apenas indicam, mostram. Fonte: https://www.dicio.com.br/deixis/.

pessoas proferindo palavras e simultaneamente realizando movimentações com suas mãos, braços, pernas e pés, enfim com o seu próprio corpo? O que esses indivíduos falam têm coerência com os movimentos que suas mãos realizam? Essas ações, muitas vezes, não são percebidas por quem as produz. Elas são formas de comunicação não verbalizáveis. Diante disso, nas ideias de Pereira (2010, p. 19)

> Muitas vezes nos deparamos com pessoas gesticulando muito as mãos quando falam ao telefone, mesmo estando sozinhas, ou seja, a pessoa com quem estão falando não está visível. Outras vezes, de repente, ao esquecer uma palavra no meio de uma fala, é quase que automático o surgimento de um gesto representando a forma ou outra característica do objeto que estamos nos esforçando para lembrar. Também é muito comum fazermos gestos com as mãos quando estamos sozinhos, em situações que exigem um grande esforço da nossa atenção, por exemplo, resolvendo cálculos matemáticos difíceis ou montando um complicado quebra-cabeça.

Uma outra situação, na qual ocorre uma produção de gestos pode ser em um ambiente de trabalho. Por exemplo, em obras de saneamento básico em que se exige máquinas barulhentas sendo manuseadas por operários. Nesse contexto, esses indivíduos não conseguem escutar. Consequentemente, começam a se comunicar através de gestos e essa comunicação não verbal é compreendida por eles. Por que será que isso ocorre? Em suma, para relatar o quão os gestos são utilizados no cotidiano, Godin-Meadow (2003, p. 4) afirma que “até as pessoas cegas de nascença que nunca viram pessoas gesticulando, ao falarem, movem intencionalmente suas mãos”. Alguns teóricos, por exemplo, Fernandes (2008), debruçam-se em investigar a produção de gestos por pessoas não videntes, temática que não será discutida nesta seção, apesar de sua importância para o campo da Educação Matemática.

Os gestos também podem apresentar sentidos que se perpetuaram de geração para geração e são reconhecidos em diversos contextos. Uma dessas gesticulações é apresentada por Forjaz (2008, p. 73) e diz respeito aos “gestos da mão em que o polegar se volta para cima ou para baixo, quando respectivamente significam aprovação ou reprovação”. A mensagem produzida por esse gesto é entendida como um indicativo que algo foi bom, produtivo, relevante, ótimo, legal, tudo bem, tudo ótimo, joia, dentre outros. Por outro lado, pode ser um indicativo de algo negativo, de que não se saiu muito bem na prova e, em síntese, de uma grande quantidade de situações do cotidiano.

Depois de fazer uma apresentação acerca da utilização dos gestos em nosso cotidiano, delimito-me, agora em diante, ao arcabouço teórico em que me apoio. Nessa conjuntura, a Teoria dos Gestos, em que McNeill (1992) é uma das figuras mais conhecidas. Mas também é preciso evidenciar que diversos outros teóricos se encarregaram de apresentar suas definições acerca do que compreendem por gestos. De acordo com McNeill (1992, p. 11), os gestos são "espontâneos movimentos dos braços e mãos... intimamente sincronizados com o fluxo da fala". Já as pesquisas de Sfard (2009), mais voltadas para o campo da Educação Matemática, evidenciam que o gesto é um movimento realizado pelo nosso corpo e cumpre um papel de comunicar algo a alguém.

Para esta pesquisa considero o gesto como um movimento de uma ou mais partes do corpo e/ou até mesmo expressões faciais. Por outro lado, saliento que houve uma quantidade significativa de movimentações por meio dos braços e das mãos nos dados produzidos. De forma resumida, os gestos não se resumem à utilização dessas partes do corpo. Eles têm um sentido mais amplo e podem ser percebidos na expressão facial e troca de olhares, conforme assevera Xiong e Quek (2006). Nesse sentido, de acordo com Pereira (2010, p. 31), o gesto

> [...] é uma forma de comunicação não-verbal de um indivíduo que possui grande capacidade de expressar uma variedade de sentimentos e pensamentos. É feito com uma ou mais partes do corpo, às vezes usando o corpo inteiro, expressões fisionômicas, braços e especialmente as mãos que, no âmbito gestual, desempenham funções claramente ostensivas.

Essa forma de se comunicar por meio do corpo também é tratada na pesquisa de doutorado de Neves (2022, p. 96). A autora caracteriza a linguagem corporal como "uma forma de comunicação não verbal, em que o indivíduo se expressa através de sinais como o olhar, as expressões faciais, os gestos e posições corporais". Como pode ser notado, essa estudiosa compreende os gestos como recursos que fazem parte da linguagem corporal. Reforço o meu entendimento acerca de que esses movimentos de uma ou mais partes do corpo são denominados de gestos, ou seja, eles são as externalizações por meio do próprio corpo de um determinado indivíduo. Nesse sentido, McNeill (1992, p. 105) acentua que os gestos "não são apenas movimentos e nunca podem ser totalmente explicados em termos puramente cinéticos. Eles não são apenas o balanço dos braços no ar, mas sim símbolos que exibem significados por si mesmos. Eles têm um significado que é designado livremente por quem fala".

O que esses movimentos espontâneos querem informar é tema de interesse de muitos estudos e vários deles debatem acerca da relevância dos gestos e seus significados. Esse também é meu interesse nesta pesquisa, visto que realizo observações profundas acerca dos gestos produzidos por uma ou mais partes do corpo, por um grupo de estudantes da graduação em Matemática.

A respeito dessa importância para as expressões não verbalizáveis, Sfard (2009) argumenta que o nosso corpo tem uma memória mais acessível do que a memória verbal. Assim,

> Essa relação também pode ser descrita em termos de corporificação: usando gestos para perceber palavras criamos uma contraparte corporal do que está sendo falado. Os procedimentos gestuais costumam ser automatizados; às vezes eles são lembrados por nossos corpos muito melhor do que as palavras são lembradas por nossas mentes. Para perceber isso, basta pensar nos gestos que realizamos sempre que temos uma palavra "na ponta da língua" (Sfard, 2009, p. 199, tradução nossa).

O nosso corpo, em diversos casos, pode contribuir para a externalização de uma palavra e/ou um resultado matemático que a nossa mente não consegue lembrar de imediato. Por exemplo, no instante em que estive escrevendo este referencial, por inúmeras vezes, vi-me produzindo gestos para auxiliar no processo de rememorar alguma palavra e/ou ideia/pensamento. Esses movimentos geralmente aconteceram com algumas partes de meu corpo. Em determinados momentos inclinava minha cabeça para cima, estalava o dedo polegar com o médio, enrolava alguns fios de cabelo com o dedo médio e puxava os cílios de uma das sobrancelhas. A volta para a posição de repouso só ocorria após a sentença/termo/expressão ser verbalizada por mim. Essas posturas ocorreram durante momentos de escrita desta tese. Como expôs Vygotsky (1997, p. 133), "o gesto é uma escrita no ar e o signo escrito é muitas vezes simplesmente um gesto fixo".

Em relação às pesquisas sobre os gestos, Jesus (2021) chama a atenção para o fato de que elas não são muito recentes, foram temas de interesse de renomados estudiosos, perpassaram por diversos campos do saber, tais como a Psicologia, a Antropologia, a Linguística Cognitiva, a Análise do Discurso, a Neurociência, a Educação Matemática e, por fim, as áreas aplicadas, por exemplo, na produção de *softwares*, bem como videogames.

O que se percebe atualmente é que vem crescendo, embora de forma tímida, alguns estudos voltados para entender a produção de gestos nas aulas de Matemática. No caso de pesquisas brasileiras, enumero as de Castro (2022), Neves (2020) e Fernandes (2008). As investigações acerca dos gestos têm sido realizadas pelos pesquisadores, no âmbito internacional, Adam Kendon (1972; 1980; 1988; 2005), David McNeill (1985; 1992; 2000; 2005), Goldin-Meadow (2003), dentre outros que se preocuparam em estudar essas formas de comunicação não verbalizáveis, conforme assevera Jesus (2021).

Uma parte do arcabouço teórico utilizado para esta tese foi sustentado principalmente nos estudos realizados por McNeill (1992; 2005; 2015); nas contribuições de Pereira (2010) para o campo da Linguística Teórica e Descritiva; nas discussões de Sfard (2009), prioritariamente voltadas à Matemática como um discurso; nas investigações de Goldin-Meadow (2005) e Alibali *et al.* (2014) que discutiram acerca do papel, significado e importância nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática; e, por fim, nos trabalhos de Edwards (2003, 2009) e Bairral (2017, 2020, 2023) que estão voltados para gesticulações em contextos de produção de conhecimentos matemáticos, especificamente, em dispositivos com toques em tela. Além dos autores citados, também incluo outros com os quais pretendo dialogar, em particular os que se dedicaram a relacionar os gestos com a Geometria, por exemplo, Fernandes (2008).

McNeill (1992) organizou a nomenclatura a respeito dos quatro tipos principais de gestos que foi proposta por Kendon (1988) e denomina-se de "*Continuum* de Kendon", subdividida da seguinte maneira: a *gesticulação* é compreendida como aqueles gestos que seguem o ritmo da fala, que está mais presente no cotidiano e tem como carro-chefe a utilização dos braços e das mãos, mas também pode ocorrer o uso de outras partes do corpo, tais como a cabeça, os pés e as pernas, que podem representar diferentes sinais. As principais características da gesticulação podem ser sintetizadas como a ausência de propriedades linguísticas, que não são convencionais, uma vez que os gestos representam uma característica inerente de quem fala.

O segundo tipo, *gestos preenchedores*, de acordo com McNeill (1992), fazem parte da sentença. Esse autor comenta que é um gesto com a função de ocupar um lugar na sentença e pode preencher um espaço gramatical. É um sinal que não acompanha o ritmo da fala como ocorre com a gesticulação. Em síntese, os principais atributos são as propriedades linguísticas, que estão presentes, mas não são convencionais.

O terceiro tipo, *pantomimas*, também reconhecidas como mímicas, podem ser detectadas quando gestos ou até mesmo uma sequência deles narram uma história, fazem simulações de ações e objetos e/ou representam personagens, ou são produzidas sem a utilização da fala. Suas características são a ausência de propriedades linguísticas e não são convencionais. Para Tomaselo (2010), as pantomimas são ações intencionais em que o espectador deve fazer inferências acerca do que está sendo representado por parte de quem produz as gesticulações.

Os Emblemas são compreendidos como sinais convencionais. Por exemplo, a mão fechada com o polegar para cima. Esse caso pode ter variações dependendo da cultura e do lugar. Conforme assegura Pereira (2010), o gesto de "OK" pode apresentar significados diferentes de região para região, de cultura para cultura. Esse gesto consiste em tocar a ponta do polegar na ponta do indicador. Segundo a autora, essa gesticulação foi identificada como um único gesto de mão encontrado nos estudos que fez acerca da interculturalidade. O "OK" pode ter significado de um elogio e/ou de uma ofensa. Esses gestos emblemáticos são produzidos tanto na presença quanto na ausência da fala. Eles também possuem algumas propriedades linguísticas e não são totalmente convencionais.

Por fim, tem-se os sinais que são caracterizados por ocorrer na ausência da fala, nos quais as propriedades linguísticas estão presentes e são totalmente convencionais. Quando os significados dos sinais estão sob a ótica dos surdos, no caso do Brasil, denomina-se Língua brasileira de sinais (LIBRAS) (McNeill, 2000; 2006).

Conforme classificação anterior, a *gesticulação* e os *gestos preenchedores* se caracterizam por estar obrigatoriamente acompanhados da fala. Entretanto, o que diferencia esse último do primeiro diz respeito ao fato de haver um relacionamento diferente com a fala, isto é, ocorre de forma consecutiva. Além disso, os sinais não têm obrigatoriedade de fala. No Quadro 22, há uma síntese da classificação de Kendon (1982):

Quadro 22 - Síntese da classificação de Kendon (1982)

Tipo	**Definição**	**Características**		
		Fala	Propriedades Linguísticas	Convencionais
Gesticulação	Sincronia com a fala. É uma ação realizada pelas mãos de forma individual.	Sim	Não	Não
Gestos preenchedores	Tem um lugar confirmado na sentença, isto é, são gestos que preenchem um espaço gramatical previamente determinado.	Sim	Sim	Não
Emblemas	Gestos definidos pela cultura e têm significados conhecidos.	Opcional	Sim	Parcialmente
Pantomimas	Ausência do fluxo da fala, representam ações do dia a dia.	Não	Não	Não
Sinais	Sinais de uma língua.	Não	Sim	Sim

Fonte: adaptado de Cavalcanti (2020, p. 60).

Ao observar o quadro anterior, é possível notar que a relação envolvendo o gesto e a presença da fala, segundo ordem estabelecida por Kendon (1988) e discutida em Cavalcanti (2020, p. 60),

> vai se estreitando, pois se analisarmos os tipos de gestos dentro dos *continuum* da esquerda para a direita (Gesticulação - Gestos Preenchedores – Pantomimas - Emblemáticos - Língua de Sinais), compreendemos que: a presença de fala diminui; a presença de propriedades linguísticas aumenta e que os gestos individuais são substituídos por aqueles socialmente regulados.

Não tenho a pretensão de tecer aprofundamentos acerca do “*Continuum* de Kendon”, uma vez que há reformulações dele no tocante à presença da fala e outra versão foi pensada por esse estudioso. Além disso, atualmente algumas pesquisas apresentaram outras propostas baseando-se em Kendon (1988), por exemplo, Cavalcanti (2020). A partir das descobertas sobre esse *Continuum*, McNeill (1992) vem contribuindo com o trabalho iniciado e elabora uma subdivisão dos gestos que é vista como melhoramento da proposta primitiva (Cavalcanti, 2020).

5.2 Dimensões Gestuais

Segundo Pereira (2010), os gestos podem trazer revelações e, possivelmente, tornar visível o pensamento dos falantes. Nesse mesmo caminho, Neves (2020, p. 49) comenta que os resultados de sua pesquisa de doutorado “[...] indicaram que a gesticulação é um modo de representação revelador e expressivo, que comunica como se dá a relação entre o experimento e o conteúdo já conhecido pelos alunos”.

Os resultados das investigações de McNeill (1992; 2000; 2005) indicam a produção de quatro tipos de gestos de mãos e braços. Em seus estudos, organizou o *Continuum de* Kendon e classificou os gestos em quatro categorias que são discutidas nas suas pesquisas. Essa divisão engloba os gestos que se enquadram na tipologia da *gesticulação* ou dos *preenchedores*, conforme proposição pensada por Kendon (1988). Nos trabalhos mais recentes de McNeill (2006, 2015), há recomendações para utilização do termo “dimensões” ao invés de “tipos”. Os argumentos para essa mudança se devem ao fato de que a iconicidade, a metaforicidade, a dêixes e a ritmicidade englobam dimensionalidade. Além disso, essas categorias não podem ser consideradas categóricas. Com base nisso, é possível identificar essas dimensões em um único gesto. Diante disso, no decorrer deste texto utilizarei a nomenclatura mais atual.

Os gestos dêiticos se caracterizam por apontar para objetos existentes ou virtuais e ações no espaço, em que geralmente ocorrem expressões do tipo “coloque aqui”, “ao lado de”, “na”, “na frente de”. Já os gestos icônicos estão relacionados intimamente ao conteúdo semântico da fala, ou seja, representam visualmente o conteúdo de entidades e/ou ações concretas. Eles ilustram o que está sendo dito no momento da fala (McNeill, 1992). Por exemplo, quando uma pessoa quer dar a informação de que em um determinado espaço há muita gente, ela pode usar como recurso a ação de levantar uma de suas mãos, junta os dedos e realiza movimentos, dando a entender que aquele lugar está lotado. Para McNeill (1992), os gestos icônicos também podem ser percebidos quando há tentativas de realizar o contorno de diversos objetos no ar. De acordo com Pereira (2010, p. 60),

> Estes gestos dão indicação sobre qualidades de objetos como: forma, tamanho, massa, movimento, outras características físicas. Suas características cinéticas que dizem respeito a movimentos, deslocamentos, entre outros, são um dos seus aspectos importantes, ou seja, o modo como se apresentam (exibem) os dedos, as palmas das mãos, etc. Estas podem ser comparadas, por exemplo, com as características semânticas dos verbos de movimento: entrar, sair, para cima, para baixo, etc.

Outra dimensão gestual proposta por McNeill (1992) são os metafóricos, que têm uma certa aparência com os icônicos. Todavia, uma diferença diz respeito ao fato de representar uma imagem de um objeto ou ideia abstrata. Eles não descrevem eventos concretos. Na verdade, essa dimensionalidade é diferenciadora, por ter a característica de como se tivesse uma forma e ocupasse um lugar no espaço. Segundo Costa (2010), nos gestos metafóricos, as abstrações ganham corpo. Nas palavras de Zhao (2018, p. 22), os gestos metafóricos "[...] apresentam uma ideia abstrata em vez de um objeto ou evento concreto". No que se refere aos metafóricos, entendo que, na GEP, há um terreno fértil para produção desses gestos, uma vez que é uma subárea da Geometria que lida com conceitos matemáticos abstratos.

Por fim, os gestos de batida são conhecidos por ações de repetições simples, usados para dar ênfase. Nessa gesticulação, a mão se destaca por ter movimentos rítmicos como se estivesse demarcando a fala. É um gesto que pode ser combinado com os demais. Por exemplo, podem aparecer simultaneamente com a ação de apontar, ou seja, o gesto dêitico.

Segundo McNeill (1992), essa subdivisão para os gestos não pode ocorrer ou ser analisada de tal forma que não seja levada em consideração a fala do sujeito. Essa observação, no caso desta pesquisa, é muito pertinente, tendo em vista que analiso as capturas de tela (imagens) dos vídeos para exemplificar gestos, assim como vídeos de curta duração (VCD) produzidos na fase do experimento de ensino e, simultaneamente, vejo a sincronicidade do gesto com a fala dos participantes de pesquisa.

No Quadro 23, na sequência, há uma síntese em forma de imagens, mostrando as dimensões gestuais proposta por McNeill (1992). Nele, pode ser visualizado um exemplo representativo de cada gesto produzida pelo *Hand Talk*. Trata-se de um aplicativo disponibilizado na loja Google Play e conta com o personagem Hugo.

Quadro 23 – Dimensões gestuais e algumas representações

Dêitico	Icônico	Metafórico
 **Descrição:** Esse gesto ocorre quando o falante verbaliza expressões que indicam o ato de apontar.	 **Descrição:** Esse gesto indica o conteúdo semântico da fala. Por exemplo, quando um aluno tem a intenção de conceituar retas paralelas, ele pode recorrer a essa gesticulação.	 **Descrição:** Hugo está tentando dar forma à ideia de ponto a partir do toque de um de seus dedos na palma da sua outra mão.

Fonte: elaborado pelo autor.

Sumariamente, uma determinada dimensão gestual pode conter características de outras. Além disso, há situações em que, como já foi dito, os icônicos e os metafóricos são muito semelhantes. Esse último caso se refere às representações de ideias abstratas. O último gesto representado por Hugo também pode ter outra conotação que depende do contexto em que a fala está ocorrendo. São gestos denominados de populares e, segundo Forjaz (2008, p. 74), “[...] estão diretamente relacionados com a expressão das emoções”. No ponto de vista dessa pesquisadora, um exemplo de gesto popular pode ser visto no momento em que se toca o dedo indicador na palma da outra mão e, simultaneamente, acontecem batidas com toques rítmicos, violentos e rápidos. Uma representação dessa cena pode ser encontrada na Figura 15:

Figura 15 - Gestos populares

Fonte: Forjaz (2008).

Para Forjaz (2008), há uma grande quantidade de gestos populares e eles existem desde muito tempo na história da humanidade. Não pretendo focar nos significados produzidos por esses movimentos particulares, embora considero relevante mencioná-los neste espaço.

Um único gesto pode ser decomposto em unidades menores que são identificáveis, por meio da análise de um trecho de um vídeo produzido durante uma investigação e deve ser decomposto em pequenas partes para a referida análise. Esses minúsculos recortes indicam as fases dos gestos que se iniciam quando o falante está com seus braços na posição de repouso e finalizam retornando a esse mesmo estado. Elas também são importantes para este trabalho, tendo em vista que faço análises delas no contexto da Geometria. A seguir, esclareço com mais detalhes cada uma das fases.

5.3 Fases dos Gestos

Os estudos de Kendon (1980), McNeill (1992) e McNeill (2015) concluem que um gesto é subdividido em fases. A *preparação ou lançamento* se caracteriza como a saída da posição de repouso do corpo e/ou parte dele. Por exemplo, as mãos saem de sua posição inicial e vão fazer um deslocamento até o momento de realizar o *stroke*. Em suma, é caracterizado como o instante de repouso dos membros inferiores, superiores ou até mesmo o corpo. A segunda fase é reconhecida quando há um repouso. Por exemplo, no movimento das mãos, entre as fases de *preparação* e *stroke.* A terceira é aquela responsável por uma maior expressividade, é o clímax do gesto. É nessa ocasião que se faz a interpretação dele, tanto no que diz respeito à representação da gestualidade, quanto nas verbalizações emitidas. Nesse momento, o gesto carrega um significado e compete ao pesquisador realizar interpretações da gesticulação. Na quarta, há um diferencial que diz respeito ao fato de nem sempre acontecer. Explico: a peculiaridade dessa fase é que, por exemplo, uma das mãos, ou até mesmo as duas, realiza um movimento no ar e se estaciona, congela-se e esses membros permanecem paralisados no ar. Em síntese, pode-se dizer que é um instante de pausa do movimento das mãos e/ou corpo e ocorre entre as fases do *strole* e a *retração*. Por fim, na quinta fase, o corpo volta para a posição de repouso que estava inicialmente. Enquanto a pessoa estiver realizando movimentos contínuos não se chega nessa fase, que só existe no instante em que o corpo volta ao descanso por completo.

Conforme Kita, Gijn e Hulst (1998), o instante entre o momento em que a mão sai da posição de repouso e retorna a esse mesmo estado é denominado de unidade gestual. No interior dessa, há um segundo elemento que foi chamado de fase gestual, o qual pode conter uma ou mais de uma fase dos gestos. Na unidade gestual, tem-se o golpe que é a única fase obrigatória. As fases do gesto podem ser visualizadas na Figura 16. A produção da figura ocorreu a partir de capturas de tela de vários instantes de um vídeo em que a pessoa realiza um gesto para representar a ação de “torcer”.

Figura 16 - Unidade gestual

Fonte: Madeo, Peres e Lima (2016, p.73).

Na figura anterior, é possível notar que a fase do golpe é retratada em três instantes diferentes. Essa fase, obrigatória do gesto, conforme Pereira (2010, p. 105),

> [...] é uma ação de amplitude máxima do esforço no gesto, de um movimento que deixa impressões, evidências e efeitos de considerável relevância e muitas vezes sincronizados com o ponto de ênfase prosódica. Outro aspecto importante é que o significado representado por essa fase do gesto é normalmente expresso no discurso.

Nota-se que o discurso verbal é sintetizado pela ação de "torcer" e o significado representado por meio de gestos ocorre justamente na fase do golpe. Para reforçar a interligação forte entre gesto e fala, McNeill (2005) lembra que o gesto integra a linguagem. Dessa forma, o autor alerta que é um equívoco achar que o gesto é separado da linguagem. Diante disso, entendo que a ação de se comunicar por meio do corpo e/ou partes dele pode ser considerada como uma gesticulação.

A ação verbal "torcer", representada pelos três instantes, exemplifica o que McNeill (1992) mencionou acerca da ocorrência de um momento em que há sincronicidade entre gesto-fala, denominando de Growt point (ponto de saliência, tradução nossa) (GP). Essa expressão é traduzida por Pereira (2010) como "Ponto de germinação". Em outras palavras, é o clímax que se caracteriza pela coincidência da produção gestual com a produção verbal. Concernente a essas fases gestuais, mais especificamente ao período delas, McNeill (2005, p. 34) conclui que

> O período completo das fases gestuais, do começo da preparação até o final da retração, descreve a duração de um determinado gesto e sua imagem a ele linguisticamente ligada. Nós vemos a imagem em um estado de ativação que não existia antes e não existirá depois desse período.

Posteriormente ao final de todas as fases gestuais, é possível iniciar um processo de repetição. Segundo McNeill (2000) e McNeil, Alibali e Evans (2000), esse contexto evidencia que determinado tema continua em discussão. Diante disso, tem-se um ciclo denominado de coesão gestual. Após essas exposições, considero pertinente apresentar as discussões acerca da sincronicidade entre gesto e fala, somente após ter analisado as características de cada fase gestual e visualizar o gesto como um elemento que carrega significados, muitas vezes, em sincronismo com a linguagem verbal.

5.4 Gestos e Fala: Sincronismo

No tocante ao sincronismo entre o gesto e a fala, é importante levar em conta discussões que giram em torno de duas frentes que passarei a apresentar neste espaço. A primeira defende que os gestos repassam uma informação conflitante com o conteúdo expresso na fala ou pode ter um caráter complementar da fala, fornecendo informações mais detalhadas. A segunda defende que os gestos transmitem a mesma informação contida na fala.

A primeira discussão teórica se sustenta no fato de que os gestos e a fala contêm informações distintas e, segundo Elia, Gagattsis e Heuvel-Panhuizen (2014, p. 738), "os gestos podem fornecer informações conflitantes com o conteúdo da fala ou podem complementar a fala fornecendo informações adicionais". A pesquisa de Neves (2020, p. 202) defende que "[...] os elementos que se destacaram na linguagem corporal expressa no discurso foram os gestos, que complementaram a exposição em momentos estratégicos". Essa autora traz indicativos de um posicionamento a favor do caráter complementador que o gesto pode oferecer durante a ação de comunicar um conceito qualquer. Ainda, em sua percepção,

> Os gestos auxiliam no discurso pela possibilidade de reforçar afirmações, adicionando elementos visuais ao discurso multimodal, como o gesto com as mãos paralelas e afastadas para dar a ideia do tamanho de um objeto ao qual se refere ou o uso do dedo indicador para mostrar algo para o qual se queira fazer referência e associar a um nome, ou conceito, ou ainda gestos para expressar o formato de um objeto ao qual se refere no discurso (Neves, 2020, p. 98).

Neves (2020) considera que os gestos são elementos que integram a linguagem corporal e, além disso, funcionam como recursos que complementam, auxiliam e reforçam a linguagem verbal. Na outra análise entre o conteúdo dos gestos e o da fala, segundo Arzarello e Edwards (2005), os gestos repassam a mesma informação contida na fala. Nesse caso, o significado da fala é reforçado, conforme pressupostos de Goksun, Hirsh-Pasek e Golinkoff (2010). A pesquisadora Sfard (2009) defende que a fala e o gesto, em alguns casos, exerce a função de um "backup" de um para com o outro.

Diante do exposto acerca das duas frentes entre o sincronismo ou não da fala e do gesto, surge uma interrogação: quais possíveis situações do cotidiano retratam as duas situações mencionadas anteriormente? Perante tal questionamento, elenco alguns casos em que o gesto pode ser acompanhado da fala, ou seja, ele tem a mesma importância que a linguagem verbal. Dito isso, ambos podem ser concebidos como personagens principais durante momentos de diálogos sobre diversos temas.

Você já parou para observar o momento em que uma pessoa está gesticulando? Já parou para pensar que o gesto produzido por ela tem muito a ver com o que ela está verbalizando? E já observou se seu professor gesticula quando explica algum conteúdo? Esses gestos têm coerência com o que ele fala? Esses questionamentos permeiam essa subseção.

De acordo com McNeill (1992), os estudos pioneiros acerca da temática da gesticulação não levavam em consideração que os gestos espontâneos acompanhavam a fala. Entretanto, McNeill, (1992, p. 35) reforça que “a fala e o gesto são elementos de um único processo integrado de formação de elocução, no qual há uma síntese de modos opostos de pensamento – imagem global – sintéticas e instantâneas com verbalização linear segmentada temporalmente estendida”. Isto é, a gesticulação ocorre de forma a transmitir uma mensagem de uma única vez em forma de apenas uma representação, enquanto a fala é como se fosse um processo subdividido em elos encadeados de uma corrente representando o tempo. Em relação ao tempo levado para o gesto produzir uma mensagem e o produzido pela fala, Elia, Gagattsis e Heuvel-Panhuizen (2014, p. 737) a partir de estudos no trabalho de McNeill (1992), sintetizam que

> [...] a fala é composta por segmentos produzidos linearmente ao longo do tempo, enquanto o gesto é imediato, representa uma imagem que depende do todo e não pode ser decomposto em partes com significados isolados. Essa visão sugere não apenas que os gestos devem ser examinados em associação com outros modos de representação em nossas tentativas de entender o pensamento matemático, mas também que a contribuição do gesto para a compreensão matemática, que quase sempre requer pensamento analítico e imaginação, é distinta do papel de outras modalidades.

Em relação à discussão matemática relatada anteriormente, reservarei uma subseção específica para ela. Retomando o diálogo e ainda de acordo com McNeill (1992, p. 245), “os gestos, juntamente com a língua, ajudam a constituir o pensamento e refletem a representação imagística mental que é ativada no momento de falar”. Pereira (2010, p. 3), em relação ao que expôs McNeill, conclui que “o gesto é envolvido no planejamento conceitual da mensagem a ser verbalizada, ajudando o falante no processo de conceitualização”. Esse recurso gestual tem um potencial de poder contribuir com a discussão de conceitos da Matemática, tanto para quem realiza o gesto, quanto para aqueles que observam o interlocutor.

Para mostrar a ligação entre o gesto e a linguagem verbal, recorro à Forjaz (2008, p. 35), para pontuar que, em se tratando do conceito de gesto sob a ótica romana, há uma defesa de que “[...] a duração, o início e o fim do discurso, deverão estar em sincronia com o gesto e o pensamento que se exprime”. Esse pensamento tem estreita relação com as fases gestuais descritas precedentemente, uma vez que elas mantêm uma relação entre si e o término delas implica dizer que o discurso oral está finalizado.

A incompatibilidade entre o gesto e a fala foi discutida no trabalho de Elia, Gagattsis e Heuvel-Panhuizen (2014, p. 756), no qual se conclui que “o papel dos gestos na objetivação do conhecimento era crucial também quando uma incompatibilidade gesto-fala ocorria na descrição da criança”. Um exemplo citado na referida pesquisa diz respeito ao fato da ausência de palavras por parte da criança para externar um pensamento. Na falta de vocábulos para comunicar certa mensagem havia a presença do gesto. As seguintes situações podem ocorrer: inicialmente, as crianças ainda podem estar em um processo de aquisição da linguagem, mas também há aquelas que já estão pronunciando determinadas palavras.

Na sequência, discuto acerca do papel dos gestos na Matemática. Para realizar esse debate tentei retomar algumas autoridades que versam sobre a temática da gestualidade sob uma perspectiva geral.

5.5 O Papel dos Gestos na Matemática

Por que discutir sobre os gestos no âmbito da Matemática? Por que gesticular quando se quer comunicar uma ideia de um objeto matemático abstrato a alguém? Será que os gestos são indicativos da ocorrência do processo da aprendizagem da Matemática por parte de um indivíduo qualquer? Será que há uma maior produção de gestos na GE, comparando-se com a Geometria Plana? Essas interrogações me acompanharam no decorrer da produção deste referencial teórico.

No que concerne ao último questionamento apresentado, resgato Costa (2010, p. 129) que afirma: “[...] a aprendizagem da Matemática está intrinsicamente relacionada com a comunicação; e esta conduz a lidar com exteriorizações não verbais, que incluem os gestos”. Nesse contexto, o corpo pode ser um elemento importante durante o processo de construção de conhecimentos matemáticos.

Em princípio, estou considerando que a linguagem verbal, simbólica, visual, algébrica e corporal são formas de comunicar um ente matemático, em especial um ente geométrico. No caso dos gestos, concordo com Castro (2022), quando assinala que o processo de transformação das imagens que se tem na mente acerca de determinado assunto ocorre por meio do movimento de nosso próprio corpo. Diante disso, tomo como ponto de partida o diálogo acerca do gesto como parte integrante do discurso, segundo defende McNeill (2005) e, como complementador da fala, discutido por Alibali e Goldin-Meadow (1993). Embasado nesses teóricos citados e outros que compõem esse quadro teórico, discorro acerca da importância da produção de meneios na Matemática. Nesse contexto, conforme Chen e Herbst (2013), esses podem apresentar um papel duplo. Nesse caso, a fala é mais do que complementar e funciona como uma ferramenta de mediação que propicia o raciocínio matemático.

O debate acerca do gesto na Matemática, por um lado, é visto como um campo em crescimento no âmbito da Educação Matemática, principalmente no Brasil, tendo em vista que a maioria das pesquisas encontradas que fazem uma discussão acerca do papel dessa linguagem corporal nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática é de origem internacional. Um desses trabalhos é de Roth (2001, p. 365), o qual afirma que "existia muito pouca investigação educacional preocupada com o papel dos gestos na aprendizagem e no ensino, particularmente em áreas temáticas que têm sido caracterizadas pela abordagem de assuntos abstratos como a ciência e a matemática". Outros estudos endossam o que foi comentado precedentemente, como o de Flood *et al.* (2014) que afirmam que investigar os gestos em contextos educacionais mostra-se uma abordagem promissora, já que essa temática ainda é recente e pouco explorada no âmbito da pesquisa.

Diante do contexto anterior, defendo inicialmente a premissa de que os gestos podem contribuir para a externalização de entes primitivos da GEP, tais como ponto, reta e plano, que são ideias presentes em nossas mentes. Por exemplo, a noção de infinitude de uma reta pode ser indicada com um gesto em que se junta todos os dedos de ambas as mãos, movimentando-as no sentido horizontal e opostas. De acordo com Santos (2013, p. 192), "a infinitude da reta e do plano ganha destaque nos gestos com as mãos, indicando prolongamento ou continuidade, e a complementação dos gestos com sons, como *zizz,* destacam tal prolongamento".

Por outro lado, algumas dissertações brasileiras, com destaque para a de Feitosa (2018), voltada para o campo das Artes, e teses, como a de Pereira (2010), que estuda os gestos no âmbito da linguística, são trabalhos que mostram a relevância do corpo para se expressar por meio de uma linguagem não-verbal. Também, há o estudo de Neves (2020) que não trata especificamente sobre a gestualidade, mas reserva algumas subseções para discorrer sobre essa temática no âmbito da análise da produção de vídeos por futuros licenciandos em Matemática.

De acordo com Sfard, (2009, p. 197), "[...] os gestos são cruciais para a eficácia da comunicação matemática". Além disso, a autora assevera que eles "são meios inestimáveis para garantir que todos os interlocutores 'falam sobre o mesmo objeto matemático'". Essa ideia matemática pode ser mais compreensível quando a linguagem corporal também é considerada no discurso. Conforme Neves (2020, p. 206), "[...] nota-se que os gestos são muito utilizados, principalmente nos momentos em que as informações mais abstratas estão sendo explicadas [...]".

No tocante à Geometria, Hoffer (1981) enfatiza que ela é uma área em que a linguagem verbal escrita está mais presente do que em qualquer ramo da Matemática. Segundo o autor, há uma abundância do uso da comunicação verbal, um vocabulário rico contando com definições, postulados e proposições que fazem uma descrição das propriedades das figuras, bem como relações entre elas. Ainda, acrescenta que nesses contextos os estudantes estão constantemente sendo convidados para fazer leituras, assim como elaborar suas próprias demonstrações. Entendo a Geometria como uma área rica em formas variadas de linguagem, dentre elas a corporal.

Concordo com as ideias de Hoffer (1992), mas defendo que, em um curso de GE, mais precisamente a GEP, a utilização dessa formalização matemática por meio de uma linguagem escrita predominante se torna, para os estudantes, uma tarefa mais árdua, pois lidam com expressões verbais que definem conceitos abstratos da Matemática. Muitas vezes, esses vocábulos não são aprendidos, muito menos o que eles significam. Por exemplo, considere uma situação de sala de aula na qual o aluno é desafiado e, para se sair bem, precisa pronunciar uma palavra e/ou um significado de um determinado conceito da GEP. Entretanto, esse indivíduo não consegue explicar tais vocábulos. Diante desse cenário, o corpo se torna um ator, tendo como parceira a fala durante a expressão de resultados que o indivíduo não conseguiu lembrar em determinado momento. Nesse contexto, as gesticulações podem externalizar conteúdos já conhecidos.

Na ótica de McNeill (2005), os gestos dos braços e das mãos se caracterizam por esforços realizados simultaneamente. Tratando-se da comunicação na Matemática, esse teórico postula que esses movimentos são meios de “materializar” objetos matemáticos, obtendo-se, dessa forma, um significado mais compreensível de certos conceitos abstratos. Em sua pesquisa, Jesus (2021, p. 276) relata que

> [...] quando os/as estudantes foram desafiados a resolver um problema de maior apelo geométrico, eles/elas pragmaticamente, mobilizaram os seus corpos, em especial gesticulando com braços e mãos, para atribuírem significados aos conceitos e propriedades do objeto matemático em discussão, tornando-os mais compreensíveis e “palpáveis” para si e para os colegas. Ou seja, o uso do recurso gestual na comunicação matemática não é uma ação voltada apenas ao interlocutor, mas é decisiva para a compreensão do próprio enunciador.

Nesse sentido, compreendo que o gesto pode contribuir durante o ato comunicativo, tanto para quem produz a gestualidade, uma vez que essa pode ajudar a ter acesso a uma imagem de uma ideia abstrata produzida durante o discurso, quanto para o receptor, que consegue entender com mais facilidade e, assim, interagir no ato comunicativo. Diante do exposto, defendo as ideias de Chen e Herbst (2013, p. 286) sobre esse assunto:

> É notório que [...] quando os alunos apresentam suas conjecturas, o uso de gestos os ajuda a desenvolver e comunicar explicações complexas sem a necessidade de usar linguagem matemática formal; assim, os gestos podem permitir que os alunos participem de discussões sobre conceitos antes que todos esses tenham sido formalizados e representados em linguagem formal. Com expressões gestuais e verbais, os alunos podem comunicar mais de seu raciocínio e pensamento a seus colegas e professores.

Estudantes de etapas mais avançadas da educação, por exemplo, graduandos em Matemática que perpassaram por cursos elementares da Geometria e, conforme resultados de pesquisas no âmbito da Educação Matemática, já deveriam apresentar indícios de que aprenderam determinados conceitos abstratos da Matemática, mas recorrem aos gestos para comunicar resultados geométricos. Essas posturas vão ao encontro do que Jesus (2021) chama de tradição de produção escrita, que é perpetuada nas aulas de Matemática. Em sua pesquisa de doutorado, o autor constatou que foi observada uma prática recorrente dos participantes do estudo em uma das atividades propostas na produção de dados. Nas palavras de Jesus (2021, p. 222), “os licenciandos e as licenciandas sentindo necessidade, ainda, de recorrerem a outros recursos, que não propriamente da matemática formal, para a compreensão e para a resolução dos problemas, bem como para a comunicação e a justificação dessa solução”. O autor trata das gesticulações utilizadas pelos participantes de seu estudo durante a produção de dados. Diante desses relatos, compreendo que o corpo e/ou partes dele estão a favor da Matemática. Essa linguagem corporal foi utilizada pelos participantes do trabalho em questão. Atrelado às ideias precedentes, está Castro (2022, p. 15), a qual entende que

> [...] a representação de um objeto matemático pode ir além da linguagem materna, da Matemática e das representações figurais ou escritas em língua natural. Ela pode estar interligada com os gestos realizados durante a explicação daquele conteúdo por parte de quem fala.

Os alunos, no caso da pesquisa de Jesus (2021), para serem entendidos, sentiram a necessidade de fazer representações matemáticas por meio de uma linguagem não formal, não acadêmica. Diante disso, recorreram às gesticulações para representar os conceitos que estavam sendo discutidos em uma das atividades propostas. Nesse contexto, o gesto “[...] constituiu-se, especialmente, num tipo de representação utilizada pelos estudantes, que os ajudou a explicitar as ideias” (Scheffer, 2001, p. 188). Nesse mesmo raciocínio, a pesquisa de Neves (2020) também considera que a gesticulação é um modo de representação.

Ainda nessa temática, salta aos olhos o papel que o docente deve exercer diante de tais expressões gestuais produzidas pelos alunos. O trabalho que Plaça e Gobara (2020, p. 112) desenvolveram recomenda que o professor deve “interagir e estar atento às falas e aos gestos dos alunos no momento de responder as questões". Quando o educador matemático em suas aulas valoriza o gesto produzido pelo estudante na escola ele está, conforme Scheffer (2001, p. 193), "[...] propiciando uma ressignificação dos conceitos abordados na sala de aula e, portanto, dando sentido ao movimento juntamente com a intenção de fazer algo, de modo que as atitudes corporais têm, então, sentido na espacialidade construída". Nesse contexto, apresento alguns exemplos encontrados em pesquisas de nível nacional e internacional que sinalizam situações, nas quais os participantes produziram gestos que foram interpretados conforme as dimensões propostas por McNeill (1992). O trabalho de Elia, Gagattsis e Heuvel-Panhuizen (2014, p. 746), apresenta um caso de gesto icônico envolvendo crianças de cinco anos. Para esses autores,

> [...] quando a criança gesticulava sobre a forma dos vários blocos a que se referia em sua descrição, esses gestos eram de caráter icônico. Um exemplo diz respeito à forma cilíndrica (linhas 46-48), para a qual a criança moveu o dedo para fazer uma linha redonda verticalmente no ar.

Essa e outras atividades desenvolvidas pelos autores fizeram com que descrevessem alguns resultados do estudo. Assim, Elia, Gagattsis e Heuvel-Panhuizen (2014, p. 755) dizem que

> [...] diferentes aspectos do conteúdo geométrico foram mais propensos a estimular o uso de tipos específicos de gestos pela criança. Quando a criança descrevia a forma (por exemplo, cilindro), a orientação de um bloco (por exemplo, direção horizontal) e relações topológicas de proximidade ou separação (por exemplo, formas anexadas ou não), ela tendia a produzir gestos icônicos que representavam os aspectos geométricos envolvidos.

Ainda conforme Elia, Gagattsis e Heuvel-Panhuizen (2014, p. 756), "em particular, os resultados desse estudo de caso sugerem que os gestos icônicos eram mais adequados e mais pertinentes ao pensamento geométrico da criança do que os gestos dêiticos". Embora o trabalho citado esteja focado no público infantil, também é interessante investigar sinais escritos no ar que são produzidos por pessoas adultas.

No caso de pesquisas em nível nacional, menciono a tese de doutorado de Neves (2020), que concluiu, a partir de seus dados produzidos, que os participantes realizaram gestos para indicar o formato dos objetos que estavam sendo discutidos no discurso. O trabalho de Jesus (2021, p. 217), também defendido no Brasil, dedicou uma das categorias de sua investigação às gesticulações produzidas pelos colaboradores do estudo. Um dos resultados mostra que

> Muitas vezes, na solução das diversas questões, observamos os/as licenciandos/as apontando onde o colega que escrevia deveria anotar uma expressão ou em que

> palavra ou outra representação gráfica da questão residia a informação a que se referiam. Em geral, esses gestos são acompanhados por expressões como “aqui”, “aí”, “essa ó”, “daqui até aqui”, “esse aqui”, etc.

Reitero que essas expressões são características dos gestos dêiticos que têm como função apontar. Esse gesto também foi realizado por estudantes de licenciatura em Matemática, participantes da pesquisa de Scheffer (2001, p. 186), que afirma que “o movimento da mão, o gesto de apontar com o dedo indicador ao longo dos gráficos estavam presentes na explicação e interpretação dos estudantes quanto às curvas representativas dos movimentos corporais no plano cartesiano”. Muitas são as possibilidades de produção do gesto dêitico. Uma delas foi o caso citado anteriormente. Outra bastante interessante foi discutida na pesquisa de Neves (2020, p. 220). Segundo essa autora, “os estudantes também utilizam os gestos dêiticos, por meio da luz de um laser, para definir e destacar ideias relacionadas ao conceito de circunferência utilizando o fato de uma roda gigante e a figura de uma circunferência no vídeo”. O objetivo do problema era discutir acerca do deslocamento de um carrinho quando ele dar uma volta completa.

O estudo de Edwards (2009, p. 136) constatou que “[...] considerando o corpus como um todo, a proporção de gestos icônicos foi quase tão alta quanto a proporção de gestos metafóricos (23% contra 26%)”. E se os gesticuladores fossem estudantes do curso de graduação em Matemática? Como se revelariam esses dados? No caso de alunos adultos, será que os gestos icônicos são mais recorrentes quando esses personagens estão em processo de desenvolvimento do pensamento geométrico?

No tocante às fases gestuais, apresento, no âmbito da Geometria, um exemplo de um trabalho de doutoramento que promoveu discussões entre estudantes e pesquisador acerca da referida temática. O problema em que ocorreu tal gesticulação surgiu em uma discussão na pesquisa de Jesus (2021) e trata de um desenho de uma curva no ar, a qual foi feita por uma das participantes da investigação citada. No Quadro 24, encontra-se a sequência de imagens constantes na pesquisa em questão.

Quadro 24 - Fases do gesto para representar o desenho de uma curva no ar

I	II	III	IV	V
	 *Preparação*	 *Golpe*		

Preparação			*Golpe*	*Golpe*
VI	VII	VIII	IX	X
 *Sustentação do golpe*	 *Sustentação do golpe*	 *Sustentação do golpe*	 *Sustentação do golpe*	 *Retorno do gesto*

Fonte: adaptado de Jesus (2021).

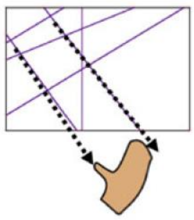
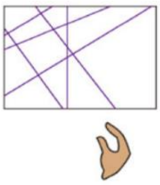
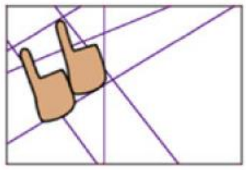
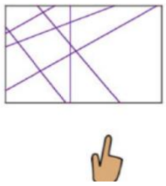
Sintetizando o que Jesus (2021) descreveu acerca dessas imagens, é possível perceber que as primeiras cenas exibidas no quadro anterior mostram a fase de preparação do gesto. Consoante o pesquisador supracitado, a participante estava segurando uma caneta, os dedos indicadores de suas duas mãos estavam esticados a uma altura aproximadamente próxima do pescoço e posicionados do lado direito. Em determinado instante, há um gesto de apontar para a frente com o dedo indicador da mão esquerda. Simultaneamente, o braço é esticado e a mão é projetada para a frente. Em relação ao seu braço direito, posiciona-se em um sentido para trás, tomando como referência o seu corpo. Para Jesus (2021), esse movimento deu a ideia de que as pontas dos dois dedos indicadores representassem os pontos extremos de um segmento. Dando continuidade para a cena seguinte, há uma tentativa de representar o diâmetro da semicircunferência. Esses passos podem ser visualizados nas cenas I, II e III da Quadro 24.

A fase do golpe, segundo Jesus (2021), ocorre quando a mão direta da participante permanece segurando a caneta e o seu dedo indicador fica esticado. Nesse momento, há a descrição no ar de uma semicircunferência, como pode ser constatado nos instantes representados pelas cenas III, IV e V. A fase da sustentação ocorre quando a participante começa a repetir o mesmo gesto, porém, dessa vez, solta a caneta e deixa suas duas mãos voltadas para baixo, mantendo os dedos unidos, a mão esquerda projetada para frente e o braço se esticando como se estivesse em linha reta. Enquanto isso, a mão direita faz a descrição da semicircunferência. Essas cenas podem ser percebidas nos quadros VI a IX. O retorno do gesto ocorre quando os cotovelos são apoiados sobre a carteira, mantendo as mãos unidas em uma posição a sua frente e em repouso.

O exemplo citado precedentemente evidencia o quanto de informações contém uma gesticulação. O pesquisador deve fazer análise das fases gestuais a partir de recortes de vídeos com duração de poucos segundos. Além disso, é preciso identificar cada uma delas, bem como seu início e fim, assim como apontar o exato momento em que se inicia a próxima fase. Ou seja, é um trabalho cuidadoso e demorado.

A pesquisa de Chen e Herbst (2013) mostra em uma de suas atividades uma situação em que as mãos foram utilizadas para produzir gestos quando duas retas são paralelas a partir de um diagrama. Também, foi representado que essas duas linhas se estendendo infinitamente não se cruzariam em um ponto localizado fora da tela. A dupla de alunos participantes da produção de dados se apoiou em uma prova por contradição para demonstrar essas afirmações. Essa demonstração por absurdo pode ser visualizada no Quadro 25.

Quadro 25 - Demonstração por absurdo por meio de gestos

Gestos e descrições das ações realizadas pelos alunos			
			
A afirmação de que as duas linhas deveriam ser paralelas foi por meio de um gesto com a palma da mão aberta, fazendo um movimento para fora da tela do computador. Considerou-se que essas linhas intersectariam em algum ponto. Portanto, as retas não seriam paralelas.	Como as duas retas se tocariam em algum ponto, então elas formariam um triângulo. Constatou isso a partir do posicionamento da mão em que o dedo polegar e o indicador estariam próximos. Utilizou-se esse gesto para considerar um ponto de interseção imaginário fora da tela.	O passo seguinte era encontrar a medida do terceiro ângulo do triângulo virtual, que foi formado a partir das duas retas. Porém, a partir do resultado em que a soma dos ângulos internos de um triângulo deve ser 180º, o aluno afirmou ser impossível ter um terceiro ângulo em qualquer lugar.	A insistência em encontrar um terceiro ponto foi representada a partir de um gesto dêitico posicionado de forma mais distante que o anterior.

Fonte: adaptado de Chen e Herbst (2013).

As sequências de gesticulações verificadas no quadro anterior mostram a prevalência de gestos dêiticos, McNeill (1992), para indicar o paralelismo entre retas. Todavia, os autores Chen e Herbst (2013) concluem que também foram utilizados gestos icônicos durante os momentos em que os alunos quiseram representar objetos matemáticos virtuais, elementos das figuras que não são visíveis, tais como o ponto de interseção e/ou algumas relações matemáticas como o paralelismo entre retas.

5.6 Gestos: Pensamento Espacial e os Gesticuladores Próprios da Matemática

Segundo Krauss (1998), diversos estudos mostram que os gestos e o pensamento espacial estão interligados. Os autores constataram que geralmente as pessoas tinham uma certa tendência para produzir gestos quando externalizavam ideias sobre tópicos espaciais. Essas gesticulações são mais intensas do que quando dialogavam acerca de temáticas não espaciais. Além do mais, como já foi exposto no decorrer deste texto acerca da função comunicativa que o gesto possui, Costa (2010) aponta em seu estudo que os alunos conseguiram por meio do gesto, ou seja, através de uma linguagem não-verbal, externalizar o pensamento visual-espacial.

Nesse sentido, Maschietto e Bussi (2005, p. 133, tradução nossa) defendem que “os gestos são muito importantes na interpretação: os gestos mimetizam planos e linhas e constituem um suporte fundamental para imaginar uma pirâmide”. Um exemplo concreto dessa frase pode ser constatado no trabalho de Arzarello e Edwards (2005), ao proporem que alunos façam uma descrição de um tetraedro. O participante verbalizou da seguinte forma: “sim, é um sólido, feito de dois triângulos colocados com os lados para baixo, que são os que começam assim e vão para cima, e dois triângulos com as bases para cima que são os que vão assim” (Arzarello; Edwards, 2005, p. 129). Na Figura 17, há um recorte do momento em que a fala proferida coincide com o gesto produzido.

Figura 17 - Gesto produzido para representar a ideia de tetraedro

Fonte: Arzarello e Edwards (2005).

A gesticulação estática na imagem anterior ilustra o caso de um gesto particular que tem coerência com a fala, mas também pode representar outros objetos físicos que são lembrados a partir do contexto em que está ocorrendo a interação, por exemplo, um grupo de amigos resolvendo planejar um acampamento e um dos organizadores representa o formato das cabanas. O debate que coloco em pauta a partir da observação da imagem anterior diz respeito ao seguinte questionamento embasado em Edwards (2003): há gestos específicos durante as discussões de conceitos matemáticos? Radford (2005) questiona acerca do papel dos gestos na aula de Matemática. De acordo com esse último teórico, devido à natureza desse campo do saber, torna-se necessária uma subdivisão mais detalhada e mais refinada para os gestos. Esse trabalho ficou por conta de Edwards (2003) que amplia as categorias de McNeill (1992), em particular a iconicidade e a metafórica, levando em consideração os contextos da Matemática.

A pesquisa de Edwards (2003) constatou a produção de 86 gestos realizados por futuros professores dos anos iniciais do ensino fundamental, quando estavam discutindo o conteúdo de frações. Esse quantitativo, segundo a autora, poderia ser encaixado em cada uma das seguintes dimensões gestuais: icônica, metafórica e dêitica. Todavia, no decorrer da análise feita houve a necessidade de uma subcategoria que deveria estar voltada para o campo da Matemática, isso devido ao discurso ocupando um contexto particular, o de conceitos matemáticos (Edwards, 2003).

O ponto de partida para refinar essa subcategoria deu-se a partir da diferença entre os gestos icônicos e os metafóricos, os primeiros por apresentarem uma relação íntima com o conteúdo da fala, referindo-se a objetos e/ou situações concretas; e, os segundos, por terem como característica diferenciadora o fato de se referirem a ideias abstratas. Entretanto, os dados da pesquisa de Edwards (2003) revelaram gestos que apresentavam particularidades concretas e abstratas simultaneamente. Essas últimas diziam respeito a algoritmos e procedimentos matemáticos produzidos a partir de papel e lápis. A pesquisadora denominou esses gestos de "algoritmos no ar".

Um exemplo desse gesto pode ser observado quando uma das participantes gesticulou com seus dedos no ar, de modo a formar um X, para indicar a sentença que diz respeito à multiplicação de frações. Ficou claro para a pesquisadora que esses gestos apresentaram características icônicas, já que os alunos relataram experiências reais, bem como a utilização de uma escrita para representação de um algoritmo matemático. Porém, como já se sabe, esse caráter simbólico próprio da Matemática faz parte da abstração dessa ciência. Desse modo, a dimensão icônica foi subdividida em duas sub-dimensões: icônica-física e icônica-simbólica. A primeira não tem alteração, comparando-se com o gesto icônico proposto por McNeill (1992). A segunda, conforme Edwards (2003, p. 9, tradução nossa), "refere-se aos gestos que remetem para inscrições escritas simbólicas ou gráficas e/ou aos procedimentos associados a essas inscrições". O relato seguinte pode ser interpretado a partir de um foco geométrico.

> Os dados deste estudo indicam que, mesmo para um tópico elementar como frações, o caráter abstrato da matemática foi evidenciado pela alta proporção de gestos com metaforicidade no corpus. No entanto, os participantes também produziram um número quase igual de gestos mostrando iconicidade. Essa iconicidade era de dois tipos. Um tipo referia-se a objetos ou processos concretos, muitas vezes relacionado a materiais tangíveis utilizados no ensino inicial sobre frações. No outro tipo de gesto icônico, que recebeu o rótulo de "icônico-simbólico", os gestos dos participantes reencenaram o processo físico de escrever um procedimento matemático ou referiram-se a localizações visuais e elementos de símbolos matemáticos. Este último tipo de gesto destaca a importância da forma simbólica no pensamento destes alunos sobre a matemática, e a forma como a simbolização pode formar uma "cadeia" de significados neste domínio (Edwards, 2009, p. 139, tradução nossa).

Evidencio que as investigações acerca das implicações dos gestos nos processos de ensino e de aprendizagem sob o âmbito da Educação Matemática estão em crescimento tímido. No Brasil, ainda há poucos trabalhos pesquisando sobre essa temática, principalmente no caso da Geometria. Ressalto que o pesquisador, ao resolver fazer análises sobre a produção de gestos por estudantes quando estão discutindo conceitos matemáticos, não tem uma tarefa fácil pela frente. Várias questões devem ser planejadas antes, embora eu entenda que possam ocorrer imprevistos na pesquisa. Outro ponto no tocante às gesticulações diz respeito ao fato de que "o pesquisador não tem acesso direto a "qualquer representação mental" subjacente a um gesto, mas deve usar os contextos linguístico, social e cultural, bem como a atividade na qual o falante está envolvido, a fim de construir uma interpretação plausível de um gesto" (Edwards, 2009, p. 129).

Por um lado, concordo que essa representação mental do gesto contribui com a enunciação de ideias abstratas da Matemática, por parte dos estudantes que ainda não estão em um nível razoável de compreensão desses resultados. Por outro lado, embora o pesquisador não tenha a sua disposição a representação mental de um gesto, pode olhar sob a ótica da aprendizagem, uma vez que, segundo os trabalhos que teorizam sobre os gestos no campo da Educação Matemática, há um entendimento de que a incompatibilidade entre gesto-fala pode revelar momentos de ocorrência em que determinado aluno está aprendendo um conceito (Edwards, 2003). Nesse viés, segundo anuncia Roth (2001), os alunos, nessa fase, tendem a produzir um gesto para indicar que se está havendo compreensão e essa representação ocorre antes mesmo de proferir verbalmente palavras referentes ao que está sendo compreendido.

6 A UTILIZAÇÃO DE GESTOS PARA REPRESENTAR DETERMINADOS RESULTADOS DA GEP

Nesta seção, apresento os dados e faço a respectiva análise de modo simultâneo. A discussão realizada neste texto está sustentada no objetivo geral de pesquisa, aqui resgatado: analisar como os gestos realizados durante o processo de discussão dos conceitos de geometria espacial de posição contribuem para a compreensão e/ou expressão desses por parte dos alunos. Esse debate está atravessado pelas temáticas desta pesquisa: GEP, gestos, modelo de tradução de Lesh, Post e Behr (1987) e visualização. Dos dados produzidos no campo, emergiram duas categorias que serão discutidas em seções distintas. Para esse momento, focarei naquela que intitula esta seção, mas antes de iniciar, exponho os principais fatos referentes aos bastidores da produção de dados.

6.1 Alguns Relatos dos Bastidores da Categoria da Produção de Gestos

Nesta categoria, adotarei as dimensões dos gestos propostas por McNeill (1992) para analisar as cenas que selecionei a partir de meu olhar nos episódios de ensino. Além deste pesquisador, apoio-me em outras pesquisas de mestrado e de doutorado, bem como em artigos científicos. Vale destacar que, nesta discussão, não tive a intenção de realizar uma categorização de cada gesto, nem de apenas apontar as fases dos gestos, procurei transcender essa ideia. Para isso, busquei dissertar acerca da utilização dos gestos como meio comunicativo pelas duplas de alunos e/ou entre eles e eu, ou seja, essas gestualidades foram produzidas com a intenção de discutir conceitos da GEP. Além disso, elas também exerceram papel de coparticipantes da construção do conhecimento matemático.

O ponto de partida para chegar a essa categoria foram as observações nos vídeos já na primeira fase da pesquisa. Naquele momento, não tinha certeza de que as gesticulações continuariam sendo produzidas na segunda fase, denominada experimento de ensino. A partir do momento em que assisto os vídeos dessa última fase, percebo a continuidade da utilização dessa forma de linguagem não verbal por parte dos colaboradores da referida fase. Saliento que não foi solicitado aos participantes de pesquisa que produzissem gestos, uma vez que este trabalho não tinha pretensão de fazer um estudo exaustivo das gestualidades, como muitas pesquisas no cenário internacional já fizeram.

As gravações dos dois encontros realizadas com todos os alunos que frequentaram a disciplina de Geometria Euclidiana Espacial, as do experimento de ensino e os vídeos de curta duração[35] (VCD) obtidos a partir dessas duas fases, assim como as capturas de telas contendo imagens do exato momento da ocorrência do gesto, foram utilizadas para observação dos gestos realizados durante as discussões concernentes aos conceitos da GEP.

Haja vista que as gestualidades são exemplificadas em cenas de curta duração e não estáticas, decidi fazer recortes de vídeos de trechos pequenos nos quais os alunos estão realizando gestos. Esse material audiovisual pode ser acessado por meio de Código QR[36]. Tal escolha possibilita que o leitor visualize com dinamicidade as gestualidades produzidas. Elas são importantes para perceber a dimensionalidade gestual, as fases gestuais e a correspondência gesto-fala, ou seja, o modo como a gestualidade foi produzida e sua relação com o conceito da GEP. De acordo com Salvadego (2015), com a tecnologia de gravação em áudio, a gravação sincrônica audiovisual e as informações de nível tecnológico, possibilitaram o surgimento de modelos que tiveram papel importante para análise do processo de comunicação, por exemplo, o gesto. Além do recurso audiovisual, também exibo imagens e/ou um conjunto delas para mostrar um certo dinamismo e encandeamento de ideias. Essas escolhas podem diminuir a sensação de estaticidade da imagem, assim como auxiliam no entendimento dos diálogos ocorridos com os alunos.

Na primeira fase da pesquisa, cataloguei 39 cenas relevantes, contendo gesticulações produzidas pelos alunos da disciplina GE para representar conceitos da GEP. Esse resultado foi encontrado a partir das inúmeras vezes em que assisti os vídeos contendo as discussões dos grupos. Esclareço que esse quantitativo é um valor aproximado, ele pode ser maior, tendo em vista que a tarefa de constatar se há ou não a presença de gestos é difícil de ser realizada, considerando que estou entendendo gestos como movimentações de todo o corpo.

Outro ponto importante que merece ser notado é o fato de que nem sempre foi possível realizar a confluência entre gesto-fala dos dados produzidos durante essa fase, uma vez que o áudio ficou inaudível devido às conversas paralelas dos grupos participantes e outras razões pontuadas na metodologia deste trabalho. Os gestos foram percebidos a partir da câmera central e, quando ocorreu a produção por parte de algum aluno, fui buscar a fala nos áudios captados pelos gravadores disponibilizados em cada equipe. Isso foi necessário tendo em vista que o

[35] Recortes são entendidos, nesta pesquisa, como vídeos de curta duração (VCD) obtidos por meio do trabalho de cortar apenas intervalos nos quais ocorreram gestos. Os VCD podem ser acessados de dois modos distintos: primeiro (apontar a câmera e/ou aplicativo de leitura de *Código Qr* para a imagem), segundo (pressionar por alguns segundos a tecla CTRL e, mantendo-a pressionada, clicar com o botão esquerdo do *mouse* sobre a imagem). Esse último caso pode empregado por pessoas que preferirem assistir ao vídeo pelo computador durante a leitura do texto.

[36] Código de Resposta Rápido. Código de barras, ou barramétrico, bidimensional, que pode ser facilmente escaneado usando a maioria dos telefones celulares equipados com câmeras.

dispositivo de filmagem profissional não capturou com nitidez os diálogos envolvendo todos os alunos.

A análise dessa fase decorreu a partir de um olhar minucioso das gesticulações, das transcrições dos áudios, dos registros escritos dos alunos nos roteiros de atividades e dos comentários no diário do pesquisador. Dessa forma, foi realizada uma triangulação de métodos e de dados envolvendo esses itens. Eles se referem a um mesmo instante de recorte temporal, isto é, procurei o intervalo de tempo em que ocorreu a produção do gesto, em seguida, busquei esse mesmo instante nos áudios e, por fim, verifiquei se havia relação com a escrita das respostas para cada pergunta feita.

Em relação ao planejamento dessa fase, não estava prevista a minha intervenção diretamente em cada grupo no tocante à leitura das questões e explicações sucintas de algum conceito da GEP. Isso também foi válido para minha orientadora que esteve presente durante os dois encontros. No entanto, houve uma grande procura por parte dos integrantes das equipes para alguns esclarecimentos tanto no que concerne às explicações conteudistas, quanto ao que estava sendo solicitado em cada questionamento. Esse contexto ocorreu já no primeiro encontro. Diante disso, decidi realizar uma intervenção maior, no sentido de promover um diálogo entre os alunos, tendo em vista que muitas vezes eles não estavam discutindo os conceitos, ou seja, apenas realizavam a escrita de respostas no roteiro de atividades.

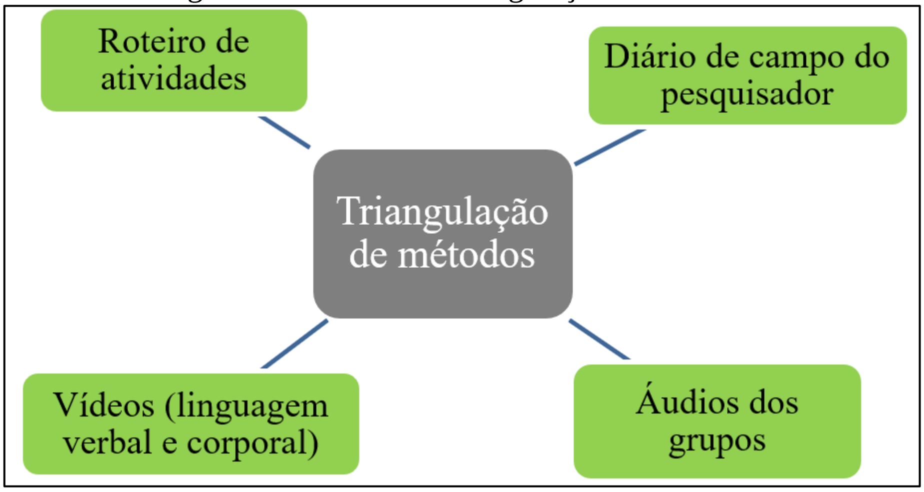
Na segunda fase, experimento de ensino, foram registradas 66 cenas contendo exemplos de gestos. Também, é válido o comentário que fiz em um dos parágrafos anteriores acerca de apresentar um valor fixo para o quantitativo de cenas que contém gestos. É importante deixar claro que esse número foi obtido a partir dos debates promovidos por meio das perguntas realizadas com cada uma das duplas e em cada um dos dois encontros vivenciados. Desse modo, em determinada questão discutida houve pelo menos um gesto produzido, isto é, houve casos de cenas com mais de uma gesticulação.

Em síntese, o total de cenas não se refere ao total de gestos, mas ao tema/conteúdo discutido. Em relação a essa fase da pesquisa, levando em conta esse quantitativo de gestualidades, verifiquei um total de 117 gestos produzidos pelos participantes da pesquisa. Vale lembrar que esse valor faz alusão apenas ao segundo momento da produção de dados.

Chamo a atenção para o total de cenas contabilizadas em cada uma das fases da pesquisa. Inicialmente, durante a produção de dados com os alunos da disciplina, obtive como resultado um valor equivalente a quase que a metade do total contabilizado para a fase do experimento de ensino, como pode ser constatado a partir dos valores apresentados anteriormente. No entanto, com base em informações contidas na metodologia deste trabalho, devo levar em consideração que essa redução pode estar relacionada às dificuldades no tocante à filmagem, uma vez que havia uma câmera profissional que nem sempre registrava gestualidades produzidas por todos os grupos simultaneamente. Vale reforçar que também disponibilizei meu *notebook* pessoal para captar imagens e áudios de um grupo escolhido aleatoriamente.

Por fim, a análise da fase do experimento de ensino levou em consideração a linguagem verbal, a corporal, a sincronicidade entre as duas e as informações contidas no diário de campo do pesquisador que fizeram referência aos gestos. Os dados obtidos foram triangulados por meio de uma triangulação de métodos e dados. Na Figura 18, esquematizo esses processos:

Figura 18 - Síntese da triangulação de métodos



Fonte: elaborada pelo autor.

As transcrições dos áudios captados em cada grupo foram trianguladas com: registros escritos dos alunos nos roteiros de atividades; imagens contendo gesticulações registradas pela câmera central; diário de campo (DC) do pesquisador. A triangulação a partir da fase do experimento de ensino ocorreu por meio da observação repetida de recortes dos vídeos de curta duração (VCD) nos intervalos em que houve a produção de gestos, com o DC. Esclareço que no âmbito dos dados audiovisuais, houve triangulação do gesto com a fala com a intenção de constatar existência, ou não, do sincronismo entre a linguagem corporal e a verbal.

6.2 Estrutura da Categoria Produção de Gestos para Representar Conceitos da GEP

Como meio de estruturar essa categoria, estabeleci inicialmente como critério as dimensões dos gestos, seguindo a proposta de McNeill (1992). Para fazer isso, optei por trazer discussões envolvendo conceitos da GEP, ou seja, a apresentação da dimensão gestual não faria sentido sem a exposição desse contexto. Posteriormente, discorro sobre as fases gestuais, isto é, as partes que compõem o gesto. Por fim, realizei uma imbricação entre os gestos produzidos e os conteúdos matemáticos discutidos. Esse último momento foi subdividido em: sentido denotativo, sentido conotativo e representação gráfica.

6.3 Classificação dos gestos

Discutir as dimensões gestuais conforme proposição de McNeill (1992) faz parte do objetivo desta seção. Apresento cenas relevantes, contendo discussão geométrica por meio da linguagem verbal e da gestual. Com a finalidade de estruturar este texto, optei por discorrer sobre cada dimensão gestual: dêitico, icônico, metafórico e de batida. Esclareço que as gesticulações realizadas podem se enquadrar em mais de um deles. Por exemplo, houve casos em que a iconicidade também poderia ser vista como um gesto metafórico. Isso ocorreu devido às semelhanças atribuídas a esses dois últimos gestos. Esse é um fato apontado por McNeill (1992). Posto isso, nas cenas em que o gesto receber a denominação de dimensão icônica, também podem ocorrer casos em que elas podem ser compreendidas como gestos metafóricos.

Essa discussão é iniciada com a apresentação de alguns dados catalogados a partir da observação minuciosa dos recortes de vídeos que exemplificam gestos. As informações dizem respeito ao quantitativo de gestos produzidos por dupla na fase do experimento de ensino. Esse é o total de gestos considerados para esta pesquisa. Tal informação é relevante tendo em vista que os alunos podem ter produzidos outros gestos para exemplificar situações não matemáticas. Os valores correspondem ao total de gesticulações por dupla.

Tabela 2 - Total de gestos produzidos pelas duplas do experimento de ensino

Dupla	Total de gestos
José e Edson	19
Renata e Cleonice	29
Lucas e Humberto	13
Sandrieli e Iranice	5
Leonardo e Thiago	27
Ana e Luciana	24
Total	117

Fonte: elaborada pelo autor.

Como pode ser percebido na Tabela 2, o total de gestos corresponde a 117. Esse quantitativo pode até ser maior, tendo em vista que o vídeo dos dois encontros realizados com a dupla Ana e Luciana apresentou alguns problemas técnicos e não foi possível contabilizar o valor exato de gesticulações produzidas por elas. Outra constatação da tabela anterior diz respeito a um número pequeno de gestualidades das alunas Sandrieli e Iranice, comparando-se com os demais grupos. Uma das possíveis explicações pode ser o fato de que uma das integrantes sempre esperava a sua companheira iniciar o debate de um determinado questionamento proposto. Diante disso, esse total de gestualidades, em sua grande maioria, foi produzido pela participante que mais interagiu.

Uma das discussões que tive com os alunos teve a finalidade de revisitar os conceitos de posições relativas entre retas, retas e planos e entre planos. Na ocasião, solicitei que a dupla José e Edson justificasse o motivo do paralelismo entre duas retas quaisquer, a partir da representação de um paralelepípedo que esses alunos tinham confeccionado com pedaços de isopor levados por mim no dia do encontro. Edson tomou como referência uma das arestas (em vermelho), localizada na parte superior do material, e afirmou que ela era paralela à outra que estava localizada no lado oposto e na parte inferior (em azul), como pode ser observado no Quadro[37] 26, imagem A.

Quadro 26 - Comunicação do conceito de retas paralelas, reta paralela ao plano e retas reversas pela dupla José e Edson

A | B | C

Fonte: elaborado pelo autor.

A partir dessa afirmação, quis saber como a dupla justificava o paralelismo entre as duas retas citadas anteriormente. Para iniciar essa intervenção, utilizo uma régua para apontar as possíveis representações das retas citadas pelos alunos. No diálogo, a seguir, exponho a minha fala e a dos integrantes dessa dupla de discentes.

[37] Os códigos Qr presentes no decorrer desta seção estão disponíveis nos quadros, geralmente ao lado de transcrições das falas dos alunos e/ou de imagens que foram obtidas dos VCD.

Quadro 27 - Diálogo entre Edson e eu

André: *Você pode dizer pra mim porque essa reta*[38] *aqui* (em vermelho)*, a representação dessa reta, por que vai ser paralela, a essa, aqui* (em azul)*, e uma aqui* (uma reta acima da de cor azul) *em cima?* (Imagem A). **Edson**: *Essa reta aqui* (em vermelho)*, é paralela a essa, aqui* (uma reta oposta e acima da de cor azul), p*orque a distância entre elas é constante. Só que se essa reta aqui* (uma reta acima e oposta a de cor azul) *e essa aqui de baixo* (em azul) *são paralelas entre si, elas definem um plano. Portanto, essa reta, ela é paralela a esse plano, porque ela é paralela a essa reta. Consequentemente ela é paralela à de baixo também* (Imagens B e C).

Fonte: elaborado pelo autor.

O diálogo anterior começou com exemplificações de representantes de retas paralelas e com indícios que a dupla apresentou, no que concerne ao fato de a distância ser constante, para o caso de serem paralelas. Outro assunto mencionado foi a determinação de planos[39] por meio do paralelismo de duas retas. Por exemplo, a de cor vermelha e a de cor azul, assim como esta e a que está localizada na mesma face e na parte de cima. A discussão foi ponto de partida para os alunos construírem conhecimentos e comunicá-los aos presentes no discurso. Além disso, eles externaram argumentos para a existência de uma reta paralela ao plano[40], temática que já tinha sido discutida no primeiro encontro com essa dupla. Fizeram isso se utilizando da linguagem corporal por meio da produção de gestos dêiticos que, segundo Alibali *et al.* (2013), fazem parte da cognição matemática e têm a função de indicar objetos ou lugares com a finalidade de reforçar um discurso.

Nesta pesquisa, os alunos imaginaram o ente geométrico reta e plano e, simultaneamente, por meio da linguagem verbal e em conjunto com a corporal, apontaram características do paralelismo de duas retas, bem como conseguiram descrever a condição de existência para uma reta ser paralela a um plano. Isso mostra uma imbricação entre mente e corpo. Nesta direção, Salvadego (2015) expõe que a atividade mental não ocorre somente na cabeça, vai além, ou seja, é uma ação coordenada entre fala, corpo, símbolos e as ações e reações ocorridas com ferramentas e com meio natural. A interligação entre esses elementos é percebida pelas atitudes de Edson, pois ele desenvolve seus argumentos por meio de uma parceria, envolvendo a movimentação do corpo a partir do seu dedo indicador e polegar, olhares fixados para o que está realizando e, por fim, uso de uma linguagem verbal em consonância com a gestualidade. Esse entrelaçamento foi promovido pelo gesto dêitico.

---

[38] Embora a representação das retas seja um segmento (os coloridos), a observação de que retas não tem início nem fim foi feita aos alunos. Esse esclarecimento também vale para a ideia de plano (recorte de um plano), representada por pedaços de isopor, superfície da mesa, faces dos sólidos geométricos, dentre outras.

[39] Um plano fica determinado por: i) três pontos não colineares, ii) uma reta e um ponto não pertencentes a essa reta, iii) duas retas concorrentes e iv) duas retas paralelas distintas (Morgado, Wagner e Jorge, 1990).

[40] Um plano α e uma reta r não contida em α são paralelos se e somente se existe uma reta s paralela a r e contida em α (Carvalho, 1993).

Com efeito, a intenção de trazer o debate de ideias apresentado no Quadro 27 foi mostrar a diversidade de expressões, cuja função é apontar para alguma coisa, ação presente desde o nascimento. No caso da GEP, os alunos recorreram a elas para mostrar onde estão localizados determinados objetos matemáticos que estavam sendo discutidos na ocasião. Consoante a esse cenário, McNeill (1992) e Arzarello; Robutti e Thomas (2015) afirmam que o ato de apontar pode ser para um lugar físico e/ou até mesmo para uma ideia abstrata que está sendo representada em determinados pontos do espaço. No trecho destacado anteriormente (Quadro 27) ficou explícito o uso de pronomes demonstrativos tais como “aqui”, “essa” e “dessa”. A fala de Edson contém características de um gesto dêitico, conforme explicações de McNeill (1992).

Segundo os resultados de uma das atividades da pesquisa de Neves (2020), no que diz respeito ao gesto dêitico para auxiliar a dedução da equação da circunferência, foi possível verificar que esses gestos destacaram algumas informações relevantes e isso, conforme a pesquisadora, fez com que o discurso fosse mais acessível e compreensível. No caso em que apresentei, a ação do aluno Edson em produzir uma gestualidade por meio de uma abertura entre o dedo polegar e o médio de tal forma que tenha praticamente o mesmo comprimento da borda de isopor, da construção que a dupla tinha produzido, exerceu um papel preponderante para visualizar as representações das três retas em discussão, assim como construir com significado a ideia entre reta paralela a um plano.

O gesto dêitico está presente na comunicação não verbal entre pessoas desde a fase da infância. De acordo com Vygotsky, Luria e Leontiev (1998), essa dimensão dêitica, nas crianças, ocorre quando elas tentam pegar um objeto que não está ao seu alcance. Não tendo noção dessa distância, elas esticam as mãos em direção ao objeto. No caso dos participantes deste estudo, é possível inferir que o ato de apontar para um ente geométrico, presente somente na mente das pessoas, trata-se de um objeto matemático que fisicamente não está ao alcance dos sujeitos. A importância desse signo para o desenrolar de um diálogo verbal, agora envolvendo adultos, é nítida, principalmente no caso desta pesquisa, quando foi utilizado para construir e comunicar conceitos da GEP e foi recorrido diversas vezes pelos participantes do estudo. Scheffer (2001), em sua pesquisa envolvendo alunos de graduação em Matemática, também relata a grande frequência de utilização desse gesto.

A caracterização de retas reversas também foi palco para produção do gesto dêitico. Essa discussão, como no caso da anterior, foi promovida a partir da representação do paralelepípedo confeccionado com pedaços de isopor que representava a sala na qual ocorreu o experimento de ensino. O debate voltou para as retas indicadas em vermelho e verde, Quadro 26, imagem A. A fala e o VCD do aluno Edson pode ser conferida no Quadro 28.

Quadro 28 - Fala do aluno Edson

Edson: *Essa reta aqui, ó!* (Edson refere-se à reta de cor vermelha, imagem A). Ele continuou sua exposição: *a reta de cima* (em vermelho, imagem A)*, que tá no teto, ela vai ser uma reta reversa a essa reta aqui, por exemplo* (em verde, imagem A).	

Fonte: elaborado pelo autor.

Como pode ser observado no VCD do Quadro 28, o aluno Edson utilizou seus dedos, indicador e o médio, oscilando entre um e outro, para percorrer a borda de cima do pedaço de isopor. Essa ação foi realizada para indicar a presença de uma reta no lugar apontado. Além disso, inclinou sua cabeça ligeiramente e fixou seu olhar para cima, informando que se tratava de uma representação de reta presente no teto da sala. Nas gestualidades expressas, há uma mobilização de todo o corpo. Freitas e Bairral (2023) explicam que há uma interação entre corpo e fala, de tal forma que ela contribui para as pessoas que escutam e veem, presentes no discurso, a ter uma informação mais significativa.

Em relação à outra reta (em verde), o aluno Edson também fez uso do dedo do meio para mostrar onde ela estava localizada. Afirmou que a primeira (em vermelho) era reversa à segunda (em verde). Ao mesmo tempo em que expôs seus argumentos verbalmente, realizou o ato de apontar, estabelecendo, dessa forma, um sincronismo entre gesto-fala, conforme assevera McNeill (1992). A ênfase dessa gestualidade ficou nítida a partir do uso dos pronomes demonstrativos “aqui” e “essa”.

Além da função indicativa do gesto dêitico, no exemplo em que estou discutindo, também houve a construção da ideia de reta reversa, conceito que, para muitos, requer atenção para ser compreendido. Nesse caso, as gestualidades produzidas foram coparticipantes da construção de conhecimentos por parte da dupla, em específico, a noção de retas não coplanares. Nesse sentido, conforme Neves (2020), esse tipo de gesto e os representacionais contribuem para a materialização de noções da região de inquérito do conhecimento matemático. Para essa autora, é um esforço realizado com a intenção de tornar concretas determinadas ideias da Matemática.

Outro recorte que apresenta características do gesto dêitico também ocorreu na temática das retas reversas durante um diálogo que tive com os alunos Lucas e Humberto. A pergunta que provocou esse debate teve como intencionalidade solicitar a eles que expusessem a posição entre duas retas no espaço a partir de situações do dia a dia, para um colega da graduação matriculado em um curso não pertencente à área das exatas.

Cada integrante da dupla apresentou um exemplo e o trazido por Humberto gerou uma boa discussão. Os alunos recorreram a diversos recursos. Por exemplo, Lucas explicaria o assunto ao colega de outro curso por meio de um cubo mágico que levava consigo no bolso de sua calça. Também, citaram a quadra de esportes da Unesp e uma academia como outra forma de ter uma melhor visualização das retas reversas. Apesar desses vários fatos do dia a dia, o assunto retornou para a sala na qual se realizava o experimento de ensino. Na Figura 19, há a representação em 3D dessa sala.

Figura 19 - Representação em 3D da sala em que ocorreu o experimento de ensino

Fonte: elaborada pelo autor.

No Quadro 29, em seguida, consta o diálogo da dupla Lucas e Humberto.

Quadro 29 - Diálogo dos alunos Lucas e Humberto

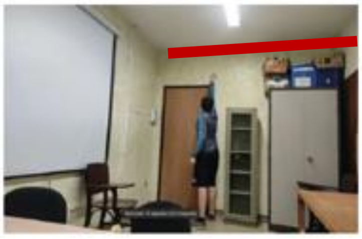
Humberto: *explicar reta reversa, mas…* [risadas] *esse que é o problema. Eu posso virar para ali e falar, tipo, olha, oh… vamos olhar pra parede* (lado da porta, Figura 19) *e pro teto, aquele ponto ali seria, então, a gente pode considerar isso aqui* (parede e teto) *como dois planos e aquela… como é que eu posso chamar, não sei se ele entenderia por intercessão.* **Lucas**: *Você tá falando do ponto ali do canto da parede?* **Humberto**: *Não. Eu tô falando, tipo... Essa parte aqui oh!* (O aluno levantou-se da mesa e foi apontar para o local que estava mencionando).

Fonte: elaborado pelo autor.

A partir desse momento, Humberto começou a mobilizar todo o seu corpo para externar o que tentava comunicar, ou seja, mostrar um exemplo de duas retas reversas. Nessa situação, a linguagem corporal entrou em cena, tendo em vista que o estudante colocou suas pernas em movimentos para ficar de pé e, em seguida, caminhou até próximo da parede, estendeu um de seus braços e, por fim, movimentou sua cabeça para o outro lado oposto e apontou para a representação de uma reta. Foi um conjunto de ações realizadas pelo corpo para comunicar Matemática, de tal forma que ele falou de distintas maneiras, conforme defendido por Salvadego (2015). Esse contexto mostra que uma construção significativa do conhecimento matemático está acessível a todos desde o nascimento, pois esses objetos abstratos podem ser externados por meio de uma linguagem corporal, cabendo, nessas situações, uma valorização dos significados expressos pelo corpo desde cedo no campo escolar.

No Quadro 30, a seguir, exponho as cenas e ao lado delas as falas que ganham significados por meio das gesticulações, principalmente do gesto dêitico.

Quadro 30 - Protocolo de uma parte do diálogo com os alunos Humberto e Lucas

Cena	Imagem	Descrição
A		**Humberto**: *Considerar a parede e o teto e essa parte como uma intersecção* (linha vermelha) *e isso daqui* (parede e teto) *seriam dois planos. Se a gente olhar essa sala* (Figura 19) *aqui, é um prisma, um paralelepípedo, então as retas reversas não tão no mesmo plano. Essa é a definição dela, então, se a gente considerar que a gente tá dentro de um paralelepípedo, a gente olha essa reta aqui* (em vermelho) *da parede, depois a do chão* (Cor amarelo, Figura 19). *Como elas não estão no mesmo plano, então elas são retas reversas.*
B		**André**: *Qual é a outra reta?* **Humberto**: *Aquela dali do canto, aquela do chão mesmo da parte cinza e a parte verde* (reta em amarelo). *Então seria retas reversas, essa reta aqui e aquela ali do chão, seriam retas reversas.* **André**: *Você concorda Lucas?* **Lucas**: *Sim, concordo. Só seria estranho explicar isso!* **Humberto**: *Sim.* **André**: *Essas retas ali que ele tá falando ali e a que ele tá falando aqui, passa um plano pelas duas?*

Fonte: elaborado pelo autor.

As cenas A e B anteriores podem fornecer várias informações. Como pode ser percebido no diálogo anterior, Humberto anunciou diversos conceitos primitivos[41], tais como retas e planos e relacionou-os a situações do dia a dia. Considerou o teto e a parede como se fossem representações de planos, assim como o encontro deles como a ideia de uma reta. Quando indaguei Humberto para que apontasse o local onde visualizou a outra reta (em amarelo), logo de imediato recebi como resposta o encontro entre o piso (em amarelo) e a parede (em vermelho), ou seja, o rodapé abaixo da cortina.

Diante das afirmações de Humberto, continuei meus questionamentos para que a dupla percebesse a existência de um plano entre as duas retas (vermelha, na cena A e amarela, na cena B). Nesse momento, Humberto já tinha retornado para o seu lugar e, ao pensar sobre minha pergunta, respondeu que tinha falado "besteiras". Depois disso, reorganizou suas ideias e começou a mobilizar suas mãos, movimentando-as em sentidos opostos, dando a ideia da possibilidade da determinação de um plano por meio das retas vermelha e amarela. Além disso, estendeu os seus dois braços para apontar os encontros que representariam exemplos de retas reversas. Os gestos produzidos por Humberto, bem como as conversas com o seu colega e a minha intervenção, possibilitou que pensasse e, esse ato pensativo, segundo Nemirovsky (2003), não é um processo localizado nem "atrás", nem "embaixo" da atividade corporal, ele envolve essas atividades corporais. O Quadro 31, na sequência, ilustra essas passagens:

Quadro 31 - Exemplos de retas reversas indicados por Lucas e Humberto

Cenas	Gestos	Descrição
A		**Humberto:** *Seria a horizontal <u>daqui</u> e a vertical da parede, aqui da cortina.*

[41] As noções (*conceitos, termos, entes*) geométricas são estabelecidas por meio de *definições*. Em particular, as primeiras noções, os *conceitos primitivos* (noções *primitivas*) da Geometria, são adotadas sem definição (Dolce, Pompeo, 2013).

B		**André:** *Por que você disse que falou besteiras?* **Humberto:** *Porque se a gente considerar essas duas retas* (vermelho e amarelo) *aqui, a gente consegue traçar um plano ainda.* **Lucas:** *então elas são na verdade… paralelas.* **André:** *Pode ser feita uma rampa aqui?* **Lucas:** *Pode sim!* **Humberto:** *Fazer uma rampa aqui.*

Fonte: elaborado pelo autor.

Os termos sublinhados na fala dos alunos e na minha foram utilizados para apontar entes primitivos da Geometria. A ideia por trás do uso do gesto dêitico, no caso em que estou apresentando, é a de mostrar para os presentes no diálogo o exato lugar onde se pode imaginar uma reta e, para facilitar a visualização dela, recorreu-se às gesticulações para materializar uma noção abstrata.

É relevante destacar a necessidade que os alunos tiveram para mobilizar todo o seu corpo para discutir uma ideia já estudada por eles. Foi importante a atitude de se levantar, esticar um dos braços e o dedo indicador para apontar o local exato do encontro da parede com o teto. A partir das diversas situações reveladas pelas cenas, vejo que o balanço das mãos no ar é apenas um exemplo de gesto. A gesticulação envolve movimentos corporais como, a ação de acenar com a cabeça e/ou os olhos.

Por outro lado, Neves (2020, p. 202) entende que os gestos "[...] são formas de comunicação não verbais no qual o pensamento é incorporado no ambiente físico pela expressão do indivíduo com a utilização das mãos". Para esta pesquisa, a linguagem corporal expressa uma gama de informações que são entendidas pelos interlocutores participantes de uma determinada conversa.

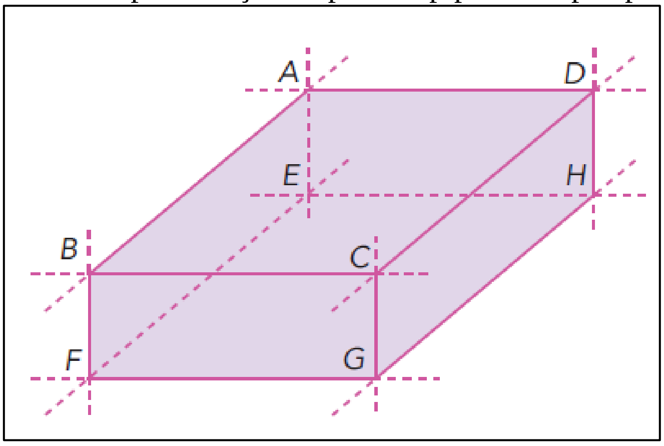
Como defendido por Pereira (2010), o movimento de apontar possibilita a representação do formato de objetos e a posição deles no espaço. Por exemplo, Humberto forneceu a localização dos objetos matemáticos em um espaço euclidiano. Já o trabalho de Neves (2020) trouxe um exemplo de gesto dêitico em que os estudantes utilizaram um material auxiliar (uma caneta laser), para contornar, por meio de sua luz, algumas ideias relacionadas ao conceito de circunferência a partir da foto de uma roda gigante, bem como de uma circunferência exibida em um vídeo.

Em suma, os gestos dêiticos, segundo a concepção de McNeill (2005), permitem a "materialização" de conceitos abstratos. Isso ocorreu quando Humberto esticou um de seus braços para um lado e, ao mesmo tempo, inclinou a cabeça para o mesmo lugar, apontou e disse "*seria a horizontal daqui e a vertical da parede"*, ou seja, era como se o aluno estivesse visualizando a reta e, ao mesmo tempo, convidando seu colega de dupla e eu para visualizarmos as referidas retas.

O gesto icônico é o centro das atenções a partir de agora. Tomei como ponto para essa discussão a subdivisão trazida por Edwards (2003), ou seja, icônico-físico e icônico-simbólico. A cena que saltou aos meus olhos e quero compartilhar nesse espaço se refere a um debate ocorrido na primeira fase da pesquisa, isto é, envolvendo todos os alunos. Eles foram organizados em trios e/ou quartetos. Os alunos Caio, Lívia e Edilton foram os personagens desse diálogo. Eles foram filmados com a câmera do meu *notebook* pessoal[42], por isso, foi possível ter um olhar mais atento para os gestos produzidos por eles.

Uma das questões utilizadas para promover discussões entre os participantes da pesquisa, retirada dos livros didáticos do Novo Ensino Médio, diz respeito à identificação e à classificação de retas suportes de um paralelepípedo, assim como suscitar diálogos entre os alunos no que concerne aos planos que contêm essas retas. A Figura 20, na sequência, mostra a imagem que os autores utilizaram para suscitar os questionamentos.

Figura 20 - Representação de paralelepípedo em perspectiva



Fonte: Coleção IV de livros didáticos (2023).

O item b objetivava saber dos alunos se as retas suportes determinadas pelos segmentos de retas[43] *BC* e *EF* estavam contidas no mesmo plano. Além disso, pedia a classificação das retas quanto à posição e uma possível justificativa para isso. No que se refere aos planos, o

[42] Além da câmera localizada em um dos cantos da sala e de frente para os alunos, disponibilizei meu *notebook* para captar imagens de um grupo qualquer.
[43] Sejam *A* e *B* pontos distintos. O segmento de reta *AB*, ou simplesmente segmento *AB*, o qual é denotado por *AB* [traço em cima], é definido como sendo o conjunto dos pontos *A* e *B*, e dos pontos *X* tais que *A* – *X* – *B*. Os pontos *A* e *B* são denominados *extremidades do segmento AB* (Rezendo; Queiroz, 2008).

grupo composto por Caio, Lívia e Edilton não apresentou dificuldades em informar que os segmentos *BC* e *EF* não estavam no mesmo plano.

Por outro lado, a definição de retas paralelas gerou conflitos entre os envolvidos, uma vez que Edilton informou que as referidas retas suportes eram paralelas, tendo em vista que elas não se encontravam. Essa explicação não foi aceita pelos demais integrantes do grupo, uma vez que esses não estavam satisfeitos com apenas esse argumento. Esses impasses foram propícios para a produção de gestos icônicos-simbólicos, como ilustra o Quadro 32:

Quadro 32 **-** Ideias de retas paralelas e reversas apresentadas por Caio, Lívia e Edilton

Cena	Gestos	Descrição
A		**Edilton:** *Onde que elas vão se encontrar aí?* **Lívia:** *Nenhuma vai se encontrar, porque num tá num mesmo plano, mas essa aqui é uma...* **Caio:** *As paralelas têm que tá assim uma ao lado da outra?* **Edilton:** *Não. Em três dimensões, não.* (O aluno também balançou a cabeça) **Caio:** *Não entendi.* **Lívia:** *Não. Num faz nem sentido.*
B		**Editon:** *Elas não vão se encontrar.* **Edilton:** *Uma reta aqui assim.* (Edilton esticou um de seus braços, deixando-o suspenso no ar).
C D	 	**Edilton:** *Uma reta assim.* (Levantou o outro braço, deixando-o acima do primeiro). **Edilton**: *Elas vão se encontrar em algum ponto?* **Caio:** *Não.* **Edilton**: *Então, são paralelas.* **Caio:** *Não vão se encontrar.* **Edilton:** *Então, elas são paralelas.* **Caio:** *Não necessariamente.* **Edilton:** *Sim.* **Lívia:** *Num tem como ser paralelas.* (Lívia realizou o mesmo gesto de Caio) **Edilton:** *Isso em 2D.* **Lívia:** *Paralelas é duas retas com mesma distância que nunca se encontram.* **Edilton:** *Isso. Em 2D. Em 3D, não.*

Fonte: elaborado pelo autor.

A observância do gesto icônico-simbólico só faz sentido se for apresentada toda a trama na qual a gesticulação foi produzida. Por isso, foi relevante fazer a análise de todo o contexto em que ocorreram essas gestualidades. No mesmo instante em que o aluno Caio começou a verbalizar a frase "*As paralelas têm que tá assim uma ao lado da outra?*", também ocorreu a realização desse tipo de gesto, ou seja, uma sincronia gesto-fala, conforme McNeill (1992). Para tal movimento, as duas mãos de Caio ficaram com os dedos esticados e apoiados sobre a mesa, sendo que elas mantiveram uma distância constante (imagem A). Essa gestualidade também pode ser vista no instante em que Edilton proferiu "*uma reta aqui assim*" e "*uma reta assim*". Cada uma dessas afirmações estava relacionada a um dos braços de Edilton, ou seja, esses membros superiores estavam representando as retas. Isso mostra uma construção de ideias matemáticas em que o corpo interage constantemente com o pensamento, esse, por sua vez, com o corpo.

Cada palavra da frase anterior, dita por Edilton, foi acompanhada por gesticulações. Essas podem representar o pensamento desse aluno no exato momento em que está falando. Ou seja, esse indivíduo produz a gestualidade no mesmo instante em que fala. Sobre o gesto icônico McNeill (1992, p. 132, tradução nossa) expõe que

> Talvez o mais importante sobre os gestos icônicos seja sua capacidade de articular o que, do ponto de vista do interlocutor, são apenas as características relevantes no contexto da fala. Assim, o gesto nos permite observar os pensamentos à medida que eles ocorrem. Gestos icônicos têm esse poder precisamente porque não são limitados por sistemas de regras e padrões. Eles não são forçados, como a fala, a incluir recursos apenas para atender aos padrões de forma.

Cada movimento produzido por Edilton foi observado atentamente por Caio e Lívia. Diante disso, como dito por McNeill (1992), essa díade de indivíduos pôde acompanhar o pensamento elaborado por Edilton. Esse exemplo é favorável para mostrar que o gesto pode ter um duplo papel, isto é, organizar as ideias de quem produz e, ao mesmo tempo, comunicar o discurso matemático aos que observam essa linguagem corporal. Nesse contexto, a observação dessas gestualidades possibilitou a elaboração de argumentos no sentido de refutar a linguagem verbal proferida por Edilton.

Vale considerar que, por um lado, as gesticulações produzidas por Caio, Lívia e Edilton estavam complementando a fala e, além disso, elas possuíam um sentido matemático. Assim, os gestos do quadro anterior, segundo Edwards (2003), podem ser concebidos como icônico-simbólico. Por outro lado, essas gestualidades também são partes integrantes do processo de construção dos referidos conceitos trabalhados na pergunta que gerou esse debate. O trabalho de Neves (2020) defende que o gesto é parte integral do pensamento matemático.

Cabe pontuar que o aluno Edilton estava equivocado ao dizer que as retas suportes BC e EF eram paralelas. Os argumentos utilizados por ele estavam apoiados no fato de que o gesto realizado por Caio (Quadro 32, imagem A) se tratava de uma situação para o caso de retas paralelas no bidimensional. Em síntese, Edilton mostrou duas definições para a relação entre as retas que estavam em função das dimensões, isto é, 2D e/ou 3D. A aluna Lívia voltou a chamar atenção para a distância entre retas paralelas. No seguinte diálogo, é possível observar essa preocupação.

Quadro 33 **-** Diálogo dos alunos Caio, Lívia e Edilton

Lívia: *Paralelas são distâncias iguais.* **Edilton:** *Em 2D é assim, mas não em 3D.* **Caio:** *Pra mim a definição de paralelas são: duas retas que não se encontram e em que elas possuem a mesma direção. Você tá ignorando a parte da mesma direção.*

Fonte: elaborado pelo autor.

Como Caio e Lívia não estavam aceitando os argumentos de Edilton, esse chegou a afirmar que a maioria vence. O aluno quis dizer que se os dois não estão aceitando seu argumento, então o grupo deveria seguir com a opinião deles. Apesar de toda essa discussão, o impasse ainda não tinha sido resolvido, até que, em determinado momento, a tríade de alunos resolveu realizar uma busca na internet com intuito de encontrar a definição de retas paralelas. O discente Edilton ainda, insistentemente, estabeleceu dois tipos de busca: uma para retas paralelas no bidimensional e a outra no tridimensional. O primeiro resultado que encontraram na internet trouxe o seguinte "*Em geometria paralelismo é uma noção que indica se dois objetos estão na mesma direção"*. Após essas buscas, Edilton percebeu o seu equívoco e pediu que tudo que havia falado fosse cancelado. Nesse instante, a dupla que não estava convencida com as justificativas do estudante vibrou com essa afirmação. Esse empolgamento foi devido ao fato de que Caio e Lívia refutavam o argumento de Edilton desde o início em que o gesto foi produzido.

Mas, restava saber a posição relativa dessas retas. Diante disso, Edilton ficou incumbido de realizar outra busca na internet. Após ter encontrado, fez a seguinte leitura *"[Duas retas] são retas [paralelas] se, e somente se, não existe um plano que as contenha"*. Depois disso, chegou à conclusão de que as retas suportes *BC* e *EF* do paralelepípedo são reversas, pois não estão contidas no mesmo plano. O gesto produzido por Edilton (Quadro 32, imagens B e C) já ilustrava que elas não eram coplanares. O uso da internet no momento de discussão do trio foi importante para a construção de conceitos geométricos. Apesar de ter deixado claro que o mais relevante era o debate entre os integrantes de cada grupo e que não havia preocupação em acertar ou não. Entretanto, esse uso possibilitou que os impasses fossem resolvidos.

As gesticulações realizadas por Edilton tiveram a intenção de comunicar um conceito de reta paralela, uma expressão de seu conhecimento, aos colegas de grupo. Esses movimentos podem não ter auxiliado o discente Edilton a reorganizar suas ideias, mas por outro lado foram importantes para que Caio e Lívia aceitassem o convite para o debate. Eles mostraram esse aceite quando inclinaram suas cabeças e, ao mesmo tempo, mudaram a direção de seus olhares para as gesticulações realizadas por Edilton. O papel exercido pela dupla foi importante para que a construção do conceito de reta paralela proposto por Edilton fosse revisto. O gesto foi fundamental para que Caio e Lívia entendessem o que Edilton estava pensando.

Como defende Salvadego (2015), muitas vezes, os gestos têm o poder de ajudar a esclarecer determinadas informações emitidas, principalmente nos momentos em que a linguagem verbal não for muita clara. No caso de Caio, Lívia e Edilton, notei que esse último aluno provavelmente não percebeu as implicações do seu próprio gesto, em um contexto matemático, tendo em vista que afirmou que seus braços, suspensos no ar, representavam retas paralelas. Para os integrantes Caio e Lívia, o argumento verbal dado por Edilton era insuficiente. Por outro lado, as gestualidades produzidas por esse aluno permitiram reforçar a linha defendida pela dupla, ou seja, o gesto exerceu um papel construtivo para o outro e, acontecendo isso, retomou por meio da linguagem verbal coerente proferida por Caio e Lívia.

Uma produção massiva de gestos icônicos, principalmente do tipo simbólico, ocorreu quando os alunos tiveram que representar os entes primitivos geométricos ponto, reta e plano. Nesse sentido, agora, teço considerações no que concerne à ideia do terceiro item. O entendimento acerca dele também foi externado a partir de uma linguagem não verbal, utilizando as mãos em movimentos e com os dedos esticados. Essa forma de se expressar por meio de uma dinamicidade pode estar em função da impossibilidade de conceituar esses entes, uma vez que cada pessoa pode apresentar o seu ponto de vista acerca do que entende por ponto, reta e plano.

Os contextos nos quais apareceram gestualidades para representar e comunicar os entes geométricos primitivos aos presentes nos diálogos foram diversos. Os recortes que apresentarei posteriormente se referem a partes pequenas das macros cenas, isto é, nem sempre essas estavam tratando da ideia ponto, reta e plano, mas essa temática foi pontuada pelos alunos em razão da necessidade de citar tais termos. De um total de 16 gesticulações versando sobre a ideia de plano, destaco duas.

A primeira delas está relacionada à discussão promovida pelo questionamento que solicitou das duplas a construção de representações de pirâmides e, a partir daí, o que os alunos consideravam como principais elementos necessários para entender o referido assunto, ou seja, apenas o essencial para compreender a ideia desse sólido geométrico. Segundo Carvalho (1993), o postulado que permite a escolha de um ponto exterior a um determinado plano é suficiente para a construção de pirâmides. O debate que realizei mediações tinha como intencionalidade discutir essa noção.

Quando a dupla finalizou a construção da representação de pirâmide, Edson começou seu discurso: "*Por definição teria um vértice e imagina que tem outro plano aqui*". A parte destacada está atrelada ao exato momento em que o discente indicou a localização do ente geométrico (plano). Nesse caso, também ocorreu um sincronismo gesto-fala, conforme ponderado por McNeill (1992). O ente geométrico primitivo mencionado pelo aluno diz respeito à representação de um plano que estava paralelo à base da pirâmide, como o próprio discente José disse. A intenção de Edson foi evidenciar que o vértice desse sólido pertence a esse plano (paralelo à base).

Consoante a esse tipo de contexto, Feitosa (2018) discorre que há uma relação direta entre a fala e a execução do gesto, de tal modo que a essência do significado do gesto, denominada de *stroke*, acontece sincronicamente com o recorte mais evidente do discurso. Para o caso desse exemplo, o ápice surgiu quando Edson fez o desenho de uma representação de plano no ar com a sua mão em movimento. Esse foi o momento mais relevante dessa gestualidade, tendo em vista que em sua imagem é possível deduzir que Edson, simultaneamente, pensou e gesticulou uma noção matemática abstrata.

Como um dos termos em destaque tem um sentido matemático, o gesto se enquadrou na tipologia de icônico-simbólico, segundo concepção de Edwards (2003). Por outro lado, também foi possível indicar a existência de um gesto dêitico, uma vez que o aluno apontou para o lugar onde deveria existir um plano. No Quadro 34, disponibilizo as imagens referentes às discussões anteriores:

Quadro 34 - Gesto para representar um plano

Cenas X Tempo	
A t = (56:43)	**B** t = (56:44)
 **Edson**: *E imagina que tenha outro plano aqui.*	 **Edson**: *Um triângulo.*  **Edson:** *E aí por retas, todas secantes a esses dois planos.*

Fonte: elaborado pelo autor.

Nos recortes anteriores, na cena A, Edson representou a ideia de plano com a palma de sua mão virada para baixo. Na cena B, delimitou essa região, denominada por ele de triângulo, contornando-o no ar com o dedo indicador virado para baixo.

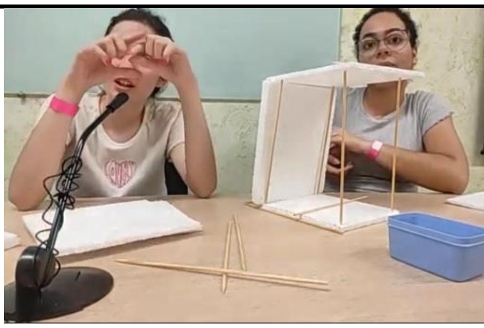
As imagens do Quadro 34, bem como o VCD, mostram os exatos momentos em que Edson fez a representação gráfica de um plano no ar por meio de gestualidades, sendo que tal ente primitivo foi delimitado para indicar a base de cima. Esse gesto icônico produzido por Edson apresenta as características apontadas por Pereira (2010), quando afirma que é uma gestualidade na qual são mobilizados braços e mãos com uma intencionalidade de representar o formato de objetos, assim como a posição deles no espaço. Segundo essa autora, há o surgimento de aspectos cognitivos que estão presentes nos gestos. Essas gesticulações comprovam que os gestos são entendidos como signos, pois na perspectiva Vygotsky (1997, p. 133), “um gesto é especificamente o signo visual [...] O gesto é uma escrita no ar e o signo escrito é muitas vezes simplesmente um gesto fixo”.

No caso da Matemática, os algoritmos, as formas geométricas e, enfim, grande parte da sua simbologia, pode ser escrita no ar por meio de gestualidades. Por exemplo, tenho recordações de que escrevia no ar a fórmula de Báskara quando era estudante e até mesmo em momentos durante regências de aula no ensino fundamental. Além disso, conforme pondera McNeill (1992), o gesto é tido como “global-sintético”, isto é, o significado dele é apresentado de uma única vez por meio do movimento realizado. No caso de Edson, o sentido máximo de sua gestualidade ocorreu quando o discente colocou sua mão virada para baixo e suspensa no ar. Em outro momento, um dos integrantes da dupla anterior representou a ideia de plano através da ação de deslizar a palma das mãos sobre uma mesa. Entretanto, essa referência tem que ser acompanhada da fala, caso contrário, o gesto pode ter outra intepretação.

Outra discussão que destaco foi iniciada no primeiro encontro ocorrido com a dupla Renata e Cleonice. Tal debate também se deu com as demais díades de alunos em outros momentos. O assunto versava sobre o paralelismo entre retas e planos. Na Geometria, de acordo com Carvalho (1993), um plano α e uma reta r não contida em α são paralelos se, e somente se, existe uma reta s paralela à r e contida em α. Vale lembrar que durante o debate acerca desse resultado matemático, uma das integrantes não aceitava que uma reta poderia ser paralela a um plano. A discente considerava “estranho” uma determinada reta solta no ar e, ao mesmo tempo, paralela a um plano. Essa percepção ignorava o fato de que, uma das quatro formas de se determinar um plano é por meio de duas retas coplanares. Sendo assim, a reta imaginada por essa aluna e outra qualquer do referido plano formava outro plano. Essas dificuldades relatadas também se mostraram presentes com outras duplas.

O questionamento que retomou esse debate solicitava que as alunas construíssem a representação da sala onde estava sendo realizado o experimento de ensino por meio de pedaços de isopor. Diversas ideias do campo da GEP foram apontadas pelas discentes. Por exemplo, houve a necessidade de Renata representar o ente primitivo geométrico plano, uma vez que a discussão se tratava de retas paralelas a planos. No Quadro 35, a seguir, apresento a imagem que ilustra o exato momento dessa representação, bem como a fala da aluna no instante em que o ar foi a lousa imaginada por Renata.

Quadro 35 - Gesto em sincronismo com a fala “[...] Porque era um triângulo”



Fonte: elaborado pelo autor.

Nesse caso, Renata não representou o plano por meio da palma de sua mão. Para comunicar o que estava tentando lembrar recorreu ao seu corpo, mais precisamente a suas duas mãos, levantando-as, esticando para cima os dedos indicadores de cada uma delas, de tal modo que eles se tocassem. Também, esticou os dedos polegares e fez com que eles se unissem como se fossem um segmento de reta. Ao mesmo tempo em que fez isso, verbalizou "*Era um triângulo*", "*O plano era um triângulo*". A sua companheira, Cleonice, confirmou o que foi dito *"era"*. No VCD, foi possível perceber uma ênfase na entonação de voz das alunas, o que mostrou um envolvimento na tentativa de lembrar da discussão ocorrida no primeiro encontro (paralelismo entre retas e planos. Sobre essa possível intensidade na voz, corroboro Carneiro (2013, p. 110) quando pondera que "quando falamos, usamos não só a voz, mas também o corpo, pois fazemos gestos, maneios de cabeça, entoações que podem sinalizar por exemplo, uma pergunta, uma crítica, um elogio, etc. Além disso, o VCD exibiu o exato momento em que Renata produziu o gesto com os seus dedos para representar o triângulo, ou seja, a região delimitada em um plano qualquer.

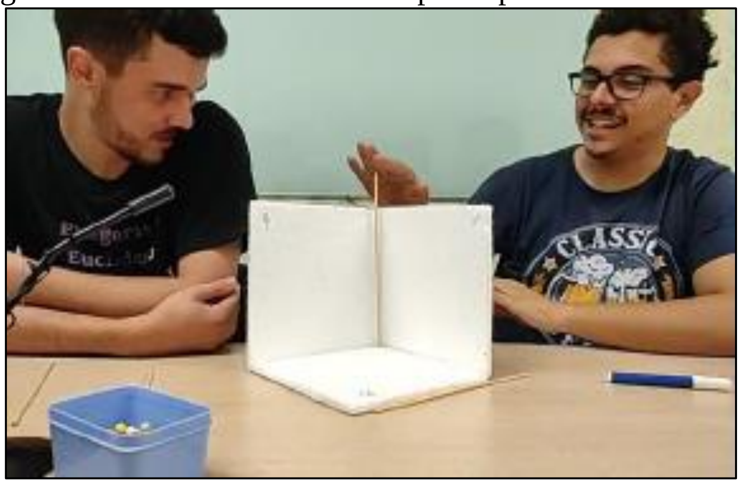
Em síntese, os gestos icônico-simbólicos, conforme subdivisão de Edwards (2003), utilizados para representar e comunicar a ideia de plano, ora foram realizados com as palmas das mãos abertas, ora foram por meio de contornos no ar, ora através da realização de formas geométricas, entendidas como partes do plano, com o uso dos dedos das mãos. Edwards (2003) comenta acerca dessa variedade de gesticulações para indicar uma mesma ideia matemática. Essa diversidade de gestualidades utilizada para indicar a ideia de plano está em consonância com a ponderação de Rodrigues (1975, p. 97): "o mesmo gesto, muitas vezes, indica coisas diferentes; e coisas idênticas são, muitas vezes, como a afirmação, referidas por coisas diferentes". No caso desta pesquisa, foi verificado que a noção de plano foi representada por distintas maneiras, sendo que prevaleceu a utilização das duas mãos abertas e em movimentos sincronizados para todos os lados.

McNeill (1992) fez análises de uma fita de vídeo de dois matemáticos e concluiu que as gesticulações realizadas para determinados conceitos da Matemática eram semelhantes entre os falantes envolvidos. Além do mais, verificou que em momentos distintos da conversa os gestos idênticos foram produzidos para um mesmo conceito matemático e, por fim, notou que um certo gesto fazia referência somente a um conceito. De modo semelhante, para a ideia de plano, percebi uma recorrência dos alunos em abrir as mãos e, em seguida, realizar movimentos com elas como se estivessem deslizando sobre mesas e/ou até mesmo no ar. Essas congruências foram notadas, tanto em um mesmo encontro com determinada dupla em momentos de tempo distintos da conversa, quanto entre as seis díades colaboradoras.

No tocante ao gesto metafórico, um dos exemplos que apresento foi extraído de uma conversa com a dupla Leonardo e Thiago durante o segundo encontro. Houve debate em torno da noção de perpendicularidade, ortogonalidade[44] e a de retas reversas. Além dessas ideias, foi retomada a conversa realizada no primeiro encontro sobre o "Teorema Fundamental do Perpendicularismo" (TFP) que também será discutido em outros momentos desta análise. Morgado, Wagner e Jorge (1990) apresentam dois pontos para a existência de uma reta perpendicular ao plano: a) *uma reta é perpendicular a um plano quando é perpendicular ou ortogonal a todas as retas do plano*; e b) *se uma reta é perpendicular ou ortogonal a duas retas concorrentes, ela é perpendicular ao plano definido pelas concorrentes.*

A apresentação do contexto em que o gesto metafórico se fez presente só faz sentido com a exposição de elementos e/ou trechos anteriores que antecedem a fase mais significativa da gestualidade. Essa conversa teve como ponto de partida o fato da representação de retas por meio de palitos de churrasco espetados e apoiados em pedaços de isopor representando um cenário que fazia referência ao encontro de duas paredes com o piso da sala em que a discussão estava ocorrendo. A Figura 21 ilustra o início do debate entre a dupla e eu.

Figura 21 - Aluno tocando em um palito para indicar uma reta



Fonte: elaborada pelo autor.

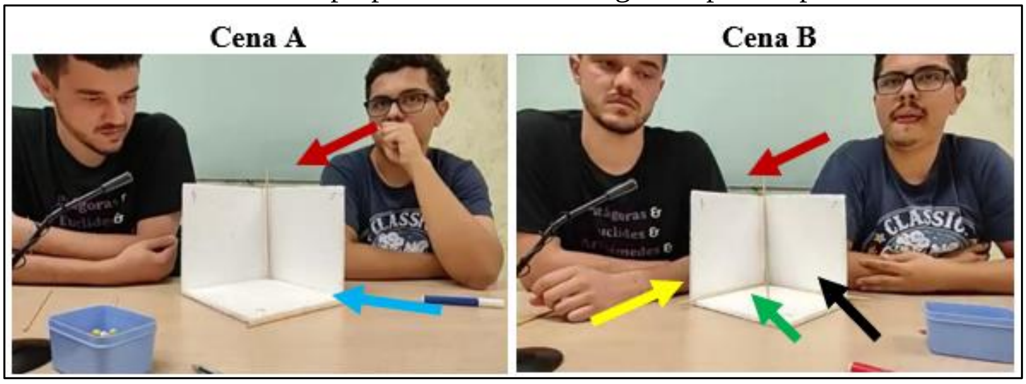
A dupla construiu a representação anterior com pedaços de isopor que disponibilizei aos alunos. Além disso, esse grupo teve uma preocupação em denominar cada pedaço por meio das três letras gregas alfa, beta e gama, sendo que essa última fez referência ao isopor que estava apoiado sobre a mesa. Depois disso, o aluno Leonardo pegou alguns palitos e um deles foi visualizado como o encontro entre os dois isopores apoiados verticalmente sobre a mesa. Leonardo disse: *"Vamos supor que tá na quina, essa reta*". *Então a gente tem que a interseção entre os dois planos: dá uma reta, né?*". Essa linguagem verbal utilizada pelo estudante

[44] Para Dolce e Pompeo (2013), duas retas são ortogonais se, e somente se, são reversas e formam ângulo reto.

aconteceu em concomitância com a produção de gestos dêiticos. O primeiro deles quando o discente apontou para um objeto (palito) que esteve exercendo a função de um ente geométrico (reta). O segundo, deu-se a partir do instante em que Leonardo olhou e direcionou sua mão para os pedaços de isopor e os associou a dois planos, conforme ilustrado na Figura 21.

Dando continuidade ao debate com a dupla, na Figura 22, é possível observar as indicações na Cena A mostrando de forma estática outro palito apoiado horizontalmente na mesa (sinalizado com seta azul). Nas duas situações, a díade de alunos inicialmente sinalizou o fato de o palito que está na vertical (simbolizado com seta vermelha) representar uma reta perpendicular ao plano indicado pelo pedaço de isopor inteiramente apoiado sobre a mesa e, posteriormente, o indicado pela seta azul, encostado completamente em uma das bordas do isopor, é a representação de uma reta que é reversa ao que está na vertical (Cena A).

Figura 22 - Discussão de retas perpendiculares e ortogonais pela dupla Leonardo e Thiago



Fonte: elaborada pelo autor.

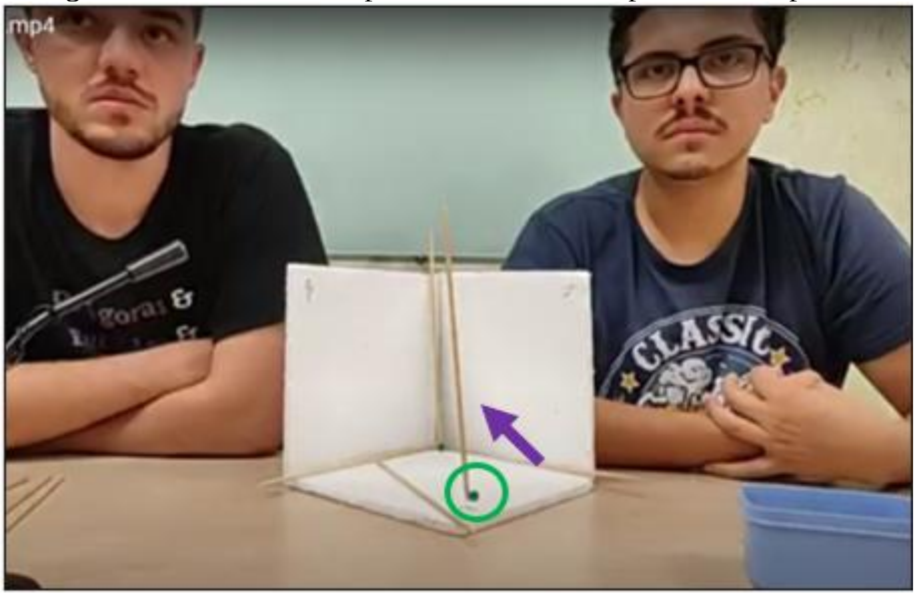
A dupla de alunos acrescentou mais três palitos (Cena B, Figura 22) com a intenção de mostrar que a reta na vertical é perpendicular às outras três contidas no plano gama. Diante desse “vai e vem de palitos”, perguntei: “[45]*E se alguma reta está contida nesse plano gama, mas não passa pelo ponto de intersecção, a reta vertical* (cor vermelha) *é perpendicular a essa reta?* (uma reta qualquer contida no plano gama não interceptando a sinalizada com seta vermelha)*”*. Assim que terminei de falar, Leonardo respondeu: “*Ela pode ser ortogonal, mas ela não pode ser perpendicular”.*

Logo em seguida, Thiago iniciou um movimento de posicionar outro palito (sinalizado com a cor roxa) e supôs ser perpendicular ao plano. Além disso, Thiago informou que o novo palito era paralelo ao que estava no encontro dos dois isopores verticais (Figura 22). Depois

[45] A dupla nomeou cada um dos pedaços de isopor com as três letras gregas: alfa, beta e gama, sendo que o plano inteiramente apoiado sobre a mesa recebeu a terceira identificação.

disso, informou que eles representariam retas paralelas. Quando questionei o motivo desse paralelismo, Thiago declarou: *“Porque elas são perpendiculares, então elas são semelhantes”.* Essa afirmação gerou um silêncio até que Leonardo começou a verbalizar a seguinte explicação: *“é, aqui a gente tem dois pontos* (representados por alfinetes), *traçando uma reta com esses dois pontos; essa reta* (cor vermelha) *e essa reta* (cor roxa) *vai ser perpendicular à nova reta formada. A reta dos pontinhos verdes”* (reta contida no plano gama).

Figura 23 - Discussão de paralelismo de retas por meio de palitos

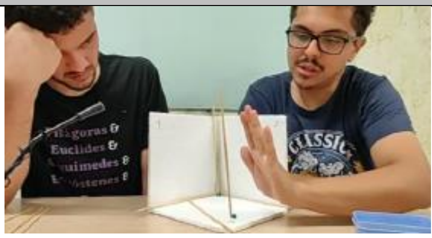


Fonte: elaborada pelo autor.

No contexto anterior, surgiu a noção de que por dois pontos distintos passa uma única reta. No caso precedente, os alfinetes de cor verde representaram a dita reta cujo palito ficou inteiramente sobre o isopor que estava apoiado na mesa. O discente continuou sua explanação dizendo: *“isso aqui vai formar uma reta e essa reta vai ser perpendicular às duas retas r e s”.* Essa nomenclatura foi atribuída pela dupla. Diante desses comentários, indaguei: *“A partir do fato de que elas são perpendiculares ao plano?”*

Nesse momento, o aluno retomou o conceito de ortogonalidade e ao mesmo tempo começou a produzir gestos. No Quadro 36, a seguir, disponibilizo as imagens acompanhadas das falas de Leonardo.

Quadro 36 - Gesto de Leonardo para indicar a projeção

Gestos	Descrição
 A	**Leonardo:** *Daí, nesse caso, está solto aqui. Se a gente projetar essas retas num plano, aqui.*
 B	**Leonardo**: *A gente vai ter uma projeção de retas perpendiculares, não é? Então elas podem ser ortogonais, mas aqui são retas reversas, não são retas concorrentes. Então a gente não pode falar da perpendicularidade. A gente pode falar da ortogonalidade, mas a perpendicularidade, não.*

Fonte: elaborado pelo autor.

O primeiro gesto produzido pelo discente reforça as considerações realizadas acerca do movimento de abrir a palma da mão para representar um plano. Ou seja, esses resultados estão em consonância com a concepção de McNeill (1992) sobre o fato de uma mesma ideia matemática poder ser externalizada por indivíduos distintos por meio de uma mesma dimensão gestual. Depois de considerar uma de suas mãos como se fosse um plano, Leonardo utilizou a outra mão em formato de concha para mostrar o lugar em que deveria ser realizada a projeção. Compreendo que em se tratando dessa segunda situação, é possível inferir que ela foi concebida pelo aluno como um objeto qualquer responsável por realizar a projeção.

A informação construída e comunicada nas duas dimensões gestuais que diferem levemente, por se tratar, em uma primeira situação, de deixar a palma da mão aberta e, na segunda situação, deixá-la em forma de concha, indica coisas diferentes, ideia de plano e objeto responsável por realizar uma projeção, respectivamente.

Diante do exposto, enfatizo a tempestade de conceitos que foram mobilizados para mostrar um dos exemplos referentes ao gesto metafórico, extraídos dos dados desta pesquisa. Vale ressaltar que o motivo de ter denominado essa gesticulação de metafórica não diz respeito somente ao movimento produzido com as mãos, mas a todo um conjunto, incluso, nesse caso, a discussão de noções matemáticas que estão no mundo das ideias. Ou seja, ao verbalizar as expressões "*Se a gente projetar essas retas num plano*", "[...] *a gente vai ter uma projeção de retas perpendiculares, não é?*" e "*Então elas podem ser ortogonais, mas aqui elas são retas reversas, não são retas concorrentes*", o discente fez seu discurso e utilizou, para isso, uma linguagem verbal em sintonia com a corporal para comunicar conceitos do campo da Matemática.

Por fim, no tocante ao gesto de batida, ele foi pouco produzido. Nas vezes em que ocorreu, sempre foi acompanhado por outra dimensão gestual. Para McNeill (1992), geralmente aquele gesto ocorre juntamente com outras dimensões. Para esse autor, é uma gesticulação realizada que tem a função de dar ênfase, demarcar uma fala. Nesse sentido, em determinado momento da gestualidade de Leonardo disponível no VCD do Quadro 36, a expressão verbalizada “aqui” recebeu destaque quando o discente bateu com a sua mão sobre a mesa.

Outro gesto de batida produzido por esse mesmo aluno foi no primeiro encontro que tive com essa dupla. A pergunta que suscitou essa discussão tinha como intenção observar o posicionamento dos alunos acerca da noção de perpendicularismo no plano e no espaço. A ideia do debate teve como foco perceber que a perpendicularidade no plano é um ponto de partida para a compreensão dela no espaço. Para Carvalho (1993), a condução de uma reta, de tal modo que seja perpendicular ao plano da Geometria Euclidiana Plana, possivelmente é a maneira mais intuitiva de promover uma passagem do plano para o espaço.

No tocante a essa noção vista no âmbito do bidimensional, a dupla apresentou certa dificuldade em expor situações preliminares. Os quesitos que comentaram sempre estavam atrelados a como o conceito é apresentado na GEP.

Como forma de relacionar o conceito de perpendicularidade no plano à ideia de congruência, convidei os discentes para produzirem retas perpendiculares por meio de dobras em uma folha de sulfite, realizando vincos com as unhas. Após eles terem realizado essa ação, questionei: *“O que vocês podem concluir sobre as regiões que foram formadas quando foram feitas as duas dobras?”*. Thiago respondeu *“São semelhantes?”, “Possuem o mesmo ângulo, porque as retas são...”*. Enquanto isso, Leonardo ficou em silencio e depois de instantes, disse: *“Acho que vai ser congruente”*. Após esse diálogo, pedi que a dupla fizesse um resumo acerca dessa temática. Entretanto, Thiago insistiu e proferiu *“Só consigo pensar nisso, porque a gente tá lidando no 2D. Se fosse no 3D, aí teria muitas outras variáveis, né”.* Novamente, Leonardo interveio e comentou (Quadro 37):

Quadro 37 - Fala do aluno Leonardo

Leonardo: *Mas talvez a gente chegou, que como a gente tem retas perpendiculares, talvez a gente vai separar o plano em regiões congruentes, porque a gente tem ângulo em comum, esse ângulo aqui, nós temos um lado em comum também e esse lado é comum também. A gente tá falando na folha, né? Se a gente tivesse falando no plano, o plano é infinito.*

Fonte: elaborado pelo autor.

Quando falou da infinitude do plano, o discente começou a realizar gesticulações para comunicar essa noção. Essas gestualidades também foram notadas na pesquisa de Santos (2013, p. 60), que disse “Os gestos indicam continuidade e infinitude quando os alunos atentam para o plano (substantivo) em sua qualidade de ser algo infinito”. Tal contexto também ocorreu para informar a ideia de que a reta é infinita. A intenção até esse momento foi evidenciar o contexto em que foi produzido o gesto de batida.

O significado desse gesto ocorreu quando Leonardo continuou sua exposição *“Mas pensando na folha, a gente tem aqui, esse lado é igual a esse, esse lado que é igual a esse, a gente tá falando de um paralelogramo, é isso, nós temos lados iguais, 90, 90, 90, 90, os lados são todos iguais e a gente dobrando, né, a gente viu que estão na mesma imagem, então talvez a gente chegou à conclusão que retas perpendiculares possivelmente podem dividir o plano em regiões congruentes”.* Durante o instante em que apontava para os locais que, na concepção de Leonardo, havia ângulo reto, produziu quatro batidas rítmicas com uma de suas mãos sobre a mesa. Essas são características do gesto de batida, conforme declarações proferidas por McNeill McNeill (2006). O Quadro 38, a seguir, mostra a imagem e o VCD do momento em que ocorreram esses sons.

Quadro 38 - Gesto de batida produzido pelo aluno Leonardo

Fonte: elaborado pelo autor.

O Código QR anterior exibe o sincronismo gesto-fala, porque ao enfatizar quatro vezes o valor do ângulo reto, Leonardo bateu sobre a mesa com um certo ritmo no local visto como uma indicação desse ângulo. Além disso, segundo McNeill (1992), o gesto de batida geralmente é acompanhado de outro. Nesse caso, o dêitico, tendo em vista que o discente iniciou verbalizando o termo “aqui” e, em seguida, repetiu quatro vezes o valor 90, ou seja, apontou para o devido lugar indicativo de um provável ângulo reto. Em síntese, os gestos de batida são conhecidos por ações de repetições simples, são usados para dar ênfase. Nessa dimensão gestual, a mão se destaca por ter movimentos rítmicos, como se estivesse demarcando a fala.

Cada uma das quatro dimensões gestuais aqui exemplificadas não podem ser consideradas como unicamente pertencentes a uma mesma denominação, ou seja, um gesto pode ser icônico-simbólico e, ao mesmo tempo, metafórico, sendo, nessa situação, conjuntos não disjuntos. Para o primeiro caso, deve-se levar em consideração que o discurso tem um sentido matemático e está em sincronismo com a gesticulação. Todavia, tratando-se desta pesquisa, a linguagem verbal versou de noções abstratas da Matemática, em particular da GEP. Portanto, o gesto também pode receber a denominação de dimensão metafórica. Em síntese, Arzarello, Robutti e Thomas (2015, p. 19, tradução nossa) defendem que "devido à natureza abstrata do assunto, o uso de gesto na aprendizagem da Matemática faz com que a dimensão metafórica seja frequentemente proeminente".

Olhar para as dimensões gestuais no âmbito da Matemática é um assunto que merece atenção, pois como defende Edwards (2003), a categoria estabelecida por McNeill (1992) pode não dar conta do mundo abstrato da Matemática. Segundo essa autora,

> [...] a natureza da matemática como disciplina pode exigir uma categorização ainda mais refinada dos gestos. Isso ocorre, porque enquanto na vida cotidiana os objetos concretos não "referem" a nada além de si mesmos, no ensino de matemática, muitos objetos concretos foram projetados para "representar" objetos matemáticos mais abstratos. Então, quando uma aluna gesticula em círculo ao falar sobre frações, ela pode estar se referindo simplesmente às peças de fração de plástico de que se lembra da escola primária, ou pode estar pensando nessas peças em relação a uma fração ou operação específica. Além disso, fora da matemática, os símbolos escritos não costumam ser manipulados como se fossem objetos (Edwards, 2003, p. 138, tradução nossa).

Esse olhar para as dimensões gestuais no âmbito da Matemática já foi iniciado por Edwards (2003), quando dividiu a iconicidade em icônico-simbólico e em icônico físico. O refinamento e/ou da categorização proposta por McNeill (1992) é relevante para o contexto matemático. No entanto, sob a perspectiva da Educação Matemática, há um trabalho maior para ser feito, ou seja, procurar entender a importância e/ou os significados dessas gesticulações nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática.

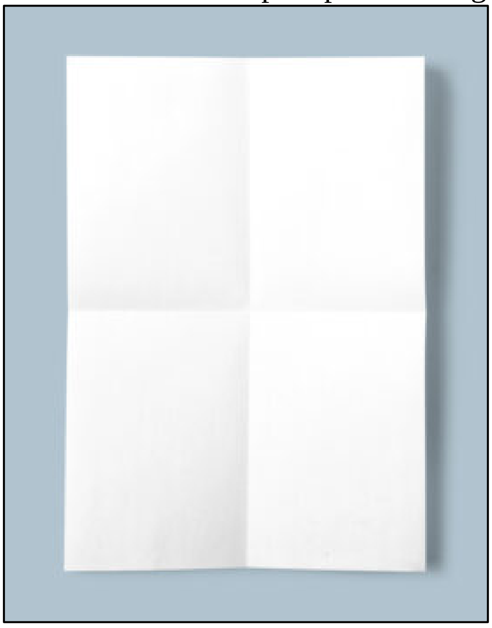
No próximo tópico, apresento uma situação e, a partir dela, destaco as fases dos gestos. Em outros termos, farei uma análise minuciosa de um VCD e, a partir da lente teórica, realizarei identificações de exatos instantes em que as integrantes da dupla estavam com seus braços em repouso, colocando-os em movimentos, externando a parte da gesticulação que contém o significado e, por último, o retorno ao estado estático.

6.4 Fases dos Gestos durante discussões de saberes geométricos

Para compor esta subseção, exploro uma cena composta por diálogos entre a dupla formada por Sandrieli e Iranice. A discussão foi iniciada a partir da interrogação acerca do que as alunas compreendem sobre a ideia de perpendicularismo no plano. Para comunicar e justificar a solução dessa problemática, Sandrieli recorreu aos movimentos de seus braços e mãos, ou seja, de seu próprio corpo. Ela introduziu sua fala e, para reforçá-la e coparticipar do que foi verbalizado, gesticulou ao mesmo tempo em que falou, realizando uma representação do ângulo reto no ar para o caso de retas perpendiculares e, em seguida, fez gesticulações para indicar o perpendicularismo entre reta e plano.

A definição de retas perpendiculares no plano e no espaço é uma relação interessante que me motivou a trazê-la para a discussão entre as duplas nos encontros do experimento de ensino. O debate partiu do momento em que solicitei que os alunos realizassem vincos com as unhas em uma folha de sulfite, de tal modo que o encontro entre eles produzisse quatro ângulos retos, como pode ser observado na Figura 24.

Figura 24 - Folha de sulfite para produzir ângulo reto



Fonte: elaborada pelo autor.

Da Geometria Euclidiana Plana (GP), é possível entender que os dois vincos produziram quatro ângulos retos. Além disso, as regiões originadas são congruentes. A noção de perpendicularismo no espaço diz respeito à posição entre uma reta e um plano. Nesse caso, a noção de perpendicularidade estudada na GP é um caso particular para a ideia teorizada na GE.

Quero salientar que exemplificarei apenas esse caso para ilustrar as fases dos gestos. Essa escolha se deve ao fato da possibilidade de percebê-las durante a subseção em que apresentei as dimensões gestuais por meio de exemplos extraídos dos dados produzidos. Tal como relatado por Jesus (2021), também visualizo a existência de duas situações distintas durante a execução dos gestos, no que concerne ao posicionamento dos alunos participantes em relação aos objetos abstratos discutidos em questão, assim como o sentido atribuído aos gestos realizados.

A primeira trata de fazer idealizações dos objetos como se estivessem se movendo, deslocando-se e representando-se em um plano vertical, colocado à frente do gesticulador. É como se fosse uma tela e/ou até mesmo a lousa da sala de aula. A segunda se refere a um plano horizontal. Nesse caso, Jesus (2021) cita o exemplo de uma mesa e/ou a carteira escolar do estudante. Em síntese, esse autor entende que os corpos se posicionaram fora da cena e, ao mesmo tempo, exerceram a função de expectadores do espetáculo que representaram. A descrição detalhada, na sequência, mostra a execução de dois gestos realizados por Sandrieli, sendo que o primeiro é para indicar a representação entre duas retas perpendiculares e, o segundo, para mostrar o perpendicularismo entre retas e planos. Nos dois contextos, essa aluna produziu tal gesticulação e projeta-a em um plano, vertical ou horizontalmente, imaginado por ela.

No Quadro 39 há a transcrição das interações entre a dupla e eu, assim como a sequência de imagens acerca dos meios utilizados por Sandrieli para comunicar o que está entendendo por perpendicularismo no plano. Para expor seus argumentos, ela entra no campo da formação de duas retas perpendiculares. Vale destacar que a minha intenção foi promover uma conversa inicial sobre essa temática. Nesse sentido, não tive a pretensão de recorrer ao formalismo geométrico na ocasião. Cabe pontuar que, nessa apresentação de imagens, é possível enumerar as fases do movimento, caracterizadas por Kendon (2005) e McNeill (1992; 2005).

Quadro 39 - Sequência de imagens e falas com gestos produzidos por Sandrieli e Iranice

A	B	C
T $_{(06:13)}$: **Fase de repouso 1**  **André:** *O que vocês entendem quando eu falo de perpendicularismo no plano?*	T$_{(06:13)}$:**Fase de preparação.**  *Eu entendo que tá formando um ângulo de noventa graus com o plano.* (As mãos	T $_{(06:14)}$: **Fase de preparação 1**  Os dedos das mãos de Sandrieli cruzaram-se. Enquanto isso aconteceu, sua colega observou

(Os braços de Sandriele ficaram apoiados sobre a mesa e uma das mãos agarrou o outro braço).	cobriram a sua boca).	os movimentos de Sandriele.
D	**E**	**F**
T(06:19): **Fase do golpe**  **Sandrieli:** *É isso o que eu penso, tipo assim.* (Uma de suas mãos ficou com a palma para baixo e a outra tocou a primeira de tal modo que os dedos dessa ficaram verticais).	T(06:23): **Fase do retorno**  **André:** *Forma um ângulo de quem com quem?* **Iranice:** *Pra mim tem que ser duas retas, né? Perpendiculares entre si, pra formar um ângulo de noventa, não é?*  (Aluna iniciou o desenho de uma cruz no ar para indicar retas perpendiculares).	T(06:36): **Fase de preparação 2**  Observação: Esse foi o início da produção do novo gesto, enquanto que na cena E ocorreu o término do primeiro gesto produzido.
G	**H**	**I**
T(06:38): **Fase de execução**  T (06:35): **Sandrieli:** *Mas eu acho que a reta, ela pode ser perpendicular a esse plano, como um plano pode ser perpendicular.*	T (06:38): **Fase do golpe**  (A palma de uma das mãos ficou virada para baixo e apoiada sobre a mesa e, os dedos da outra desceram e ficam apoiados verticalmente sobre a primeira mão).	T (06:38): **Fase do golpe**  Observação: As duas alunas olharam atentamente para o gesto produzido.

Fonte: elaborado pelo autor.

No diálogo anterior, Sandrieli transitou entre a representação de retas perpendiculares por meio de gestos e a de planos perpendiculares[46]. No último caso, identifiquei a fase de *Preparação do gesto 2* (fiz essa enumeração, por se tratar de uma sequência de gesticulações com espaços de milésimos de segundos de uma para a outra). As características dessa fase podem ser constatadas a partir da Cena F, na qual Sandrieli soltou as duas mãos e deixou os

[46] Dois planos α e β são perpendiculares se e somente se um deles conter uma reta perpendicular ao outro (Carvalho, 1993).

cotovelos apoiados sobre a mesa, de tal forma que os antebraços ficaram verticais. A partir daí começou a *Fase de execução do gesto*, momento em que o antebraço direito ficou estendido no ar e sua mão se encurvou para baixo e, simultaneamente, o braço esquerdo se apoiou sobre a mesa e a palma da mão voltada para baixo (cenas G e H). O *Golpe do gesto* pode ser ilustrado nas cenas H e I. Nelas interpretei que Sandriele teve a intenção de comunicar aos presentes no diálogo que uma de suas mãos com os dedos juntos indicaram uma representação de reta, enquanto a outra mão apoiada sobre a mesa representou o plano. Na realidade, no primeiro caso, a acadêmica talvez tenha considerado que um dos braços representava a reta, ao invés de apenas os dedos da mão que tocou o dorso da outra.

Quando Sandriele disse: "*Eu entendo que tá formando um ângulo de noventa graus com o plano"*, não ocorreu gesticulação durante essa fala. Os gestos foram produzidos logo após o término da argumentação realizada por meio da linguagem verbal. Nesse caso, o gesto exerceu a função de um potencializador da fala, um complemento do que está sendo dito no discurso. De acordo com Goksun, Hirsh-Pasek e Golinkoff (2010), o significado da fala é reforçado por meio dos gestos. Nesse contexto, a gestualidade ocorreu após a linguagem verbal, o gesto complementou a informação dita na fala, consoante Arzarello e Edwards (2005).

Em suma, no tocante à classificação de gestos proposta por McNeill (1992), como os gestos icônicos e o discurso estão diretamente relacionados e, além disso, as falas de Sandriele têm um sentido matemático, os dois gestos utilizados são categorizados como *icônico-simbólico*, conforme categoria estabelecida por Edwards (2003), embasando-se em McNeill (1992). Outrossim, como o conceito de ângulo está presente no cotidiano em inúmeras situações, sejam elas na construção civil, na natureza e em outras, o primeiro gesto (ângulo reto) produzido por Sandriele também pode ser visto como *icônico-físico* (Edwards, 2003).

Ademais, esses dois gestos são metafóricos, pois atenderam às características apontadas por Jesus (2021, p. 233). Por exemplo, foram associados a objetos do campo matemático e cumpriram uma função metafórica, desempenhando um papel duplo, em que, de um lado apoiou a compreensão do problema e, de outro, legitimou a formulação da solução concebida e externada através de conceitos matemáticos. Esses gestos produzidos carregaram significados referentes aos entes geométricos *retas* e *planos*. A linguagem corporal expressou noções abstratas da Geometria, ao utilizá-la como modo de expressão para construir, bem como comunicar informações.

No próximo eixo dessa categoria, não me preocupo com as dimensões gestuais. Inicio uma discussão com a intenção de realizar considerações no sentido de mostrar que apesar de haver uma compreensão por parte dos envolvidos no ato comunicativo, tanto do indivíduo que produz o gesto, quanto daquele que está diante da gestualidade, as gesticulações não representam fielmente os conceitos abstratos da Matemática. As noções matemáticas presentes no mundo das ideias carregam um sentido que chamo de denotativo, enquanto o significado gestual foi denominado, nesta pesquisa, de sentido conotativo. Adicionalmente, há a representação do conceito matemático, a qual pode contribuir de forma visual, mostrando as incompatibilidades entre a imagem de uma gestualidade e o objeto abstrato.

6.5 Gestos e a imbricação com conceitos geométricos: denotativo, conotativo e representação

Inicialmente, apresento uma discussão sobre o conceito de *retas reversas*. O debate dos alunos envolvendo esse objeto geométrico gerou conflitos, devido às compreensões distintas das apresentadas nos livros didáticos. O critério para que duas retas quaisquer não estejam contidas em um único *plano* é necessário para mostrar que elas são *reversas*, ou seja, elas não podem estar contidas em um mesmo plano. Esse conceito foi discutido pelos graduandos, utilizando como estratégia a produção de gestos para mostrar que caso duas retas sejam coplanares, elas não são reversas.

Nesse sentido, Renata e Cleonice começou um diálogo interessante acerca desse tema. O gesto produzido foi participante ativo para a construção do argumento dado pelas alunas. A Figura 25 elucida o exato momento em que uma delas expôs tal gesto, por meio de movimentos inclinados de suas duas mãos, de tal modo que a palma de cada uma delas estivesse quase que colada uma à outra. Além disso, essa participante também inclinou seu corpo para comunicar que ele deve seguir a mesma angulação das mãos. Essa ação foi feita para representar a ideia de plano, sendo que duas retas não poderiam estar contidas nele.

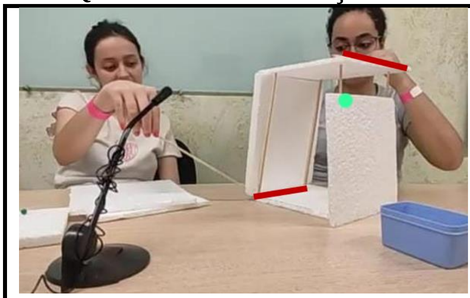
Figura 25 - Gesto para representar a ideia de plano

Fonte: acervo da pesquisa.

O início dessa conversa ocorreu a partir do momento em que uma das integrantes da dupla foi tentar responder à minha pergunta acerca da classificação de retas no espaço. As acadêmicas tinham mencionado apenas o caso de retas perpendiculares. Por esse motivo, perguntei: *vocês falaram perpendiculares, mas existem outras posições de retas que podem mostrar?* Em seguida Cleonice respondeu: "*existem. Tem as retas reversas, que vai ser essa aqui*".

A partir desse momento, as aprendizes começaram um processo de testagem para verificar quais posições deveriam posicionar os palitos de tal forma que não fosse possível formar um plano. No Quadro 40, há um caso de determinação de um plano, e isso ficou perceptível após alguns instantes de observação por parte da dupla. Nessa situação, houve a produção de um gesto para indicar uma das secções do paralelepípedo.

Quadro 40 - Construção da ideia de retas reversas



Fonte: elaborado pelo autor.

Como pode ser percebido na imagem anterior, Renata começou a realizar testagens e esse posicionamento de palitos gerou reflexão por parte de Cleonice, fazendo com que produzisse um gesto com a palma das duas mãos (Figura 25), após meu questionamento "*Porque no caso anterior não são reversas?*" Cleonice respondeu: "*Por que passa um plano aqui ooo!*" Ela mostrou um caso de determinação do plano. Quando realizei a pergunta, houve uma resposta que fez referência ao gesto produzido. Isso mostrou a presença do sincronismo entre gesto e fala, ou seja, uma gestualidade realizada não é separada da linguagem, do discurso, mas é uma parte integrante.

O referido gesto produzido por Cleonice teve função comunicativa, conforme defende Sfard (2009). Esse papel de comunicar foi tanto para a outra integrante da dupla quanto para mim, tendo em vista que ficou nítida a representação do plano a partir do movimento de suas mãos. A gestualidade também foi relevante para essa referida aluna organizar suas ideias e fornecer uma resposta baseada em elementos visuais para todos que fizeram parte do discurso matemático. Além disso, essa gesticulação realizada atende ao que Santos (2013) chama de infinitude da reta e do plano, por meio de movimentos constantes com as palmas das duas mãos.

A atitude tomada por Cleonice está em consonância com o que McNeill (1992) defende, ou seja, o gesto não é somente o balanço dos braços e mãos no ar. Eles são símbolos que têm o poder de emitir significados. Desse modo, como esclarece Costa (2010), há uma relação entre aprendizagem matemática e comunicação e essa inclui, tanto a linguagem verbal, quanto a corporal, ou seja, a não verbal.

No primeiro encontro que realizei com todos os estudantes da turma, havia a seguinte pergunta no roteiro de atividades: *"Na sua opinião, o que são retas reversas? Apresente duas situações do cotidiano que se relaciona com esse conceito"*. O diálogo que darei início foi de autoria de uma tríade de alunas, das quais, duas participaram do experimento de ensino. São exatamente as mesmas, cuja discussão foi realizada anteriormente, isto é, Renata e Cleonice. Após uma das integrantes do trio realizar a leitura do questionamento, houve conversas entre elas acerca do significado desse conceito.

Quadro 41 - Diálogo das alunas Ana Karine, Renata e Cleonice

Renata: *Retas reversas? Eu sei, mas eu não sei não. Não são opostas. (...)* **Karine:** *"Uma tá em um plano e a outra tá em outro plano sabe?"* **Renata**: *Éeeee...* **Karine**: *Mas acho que não precisa ser necessariamente paralelas.* ***Renata:*** *Elas não podem fazer assim?* **Observação**: Nesse momento uma das alunas produziu um gesto que não foi possível associá-lo a sua fala devido a problemas no áudio. **Cleonice**: *Pode.* **Renata:** *Ahhh, mano, a gente aprendeu as retas reversas.* **Karine:** *Coloca o que é, então...* **Cleonice:** *Eu não sei [risos].* **Karine***: São retas que não se intersectam entre si e não são paralelas.*

Fonte: elaborado pelo autor.

Nessa conversa inicial realizada pelas alunas, foi possível identificar uma certa insegurança para afirmar o que são retas reversas. Embora isso tenha acontecido, umas das integrantes comenta sobre a necessidade de as duas retas estarem em planos distintos. No decorrer do diálogo entre elas, Renata revelou que esse conceito já tinha sido aprendido. No entanto, o grupo mostrou dificuldades em expressar verbalmente essa definição. Depois de alguns instantes, uma das discentes recorreu às gestualidades para compartilhar sua ideia acerca desse conceito.

Quadro 42 - Produção de gestos realizados no primeiro encontro com toda a turma

Cleonice: *Tipo assim, ohhh, você tem um plano aqui, tá ligado, tá subindo, só que vc tem um plano aqui atrás, tá ligado? A reta tá aqui, tá subindo infinitamente, só que daí cê tem um plano aqui*.

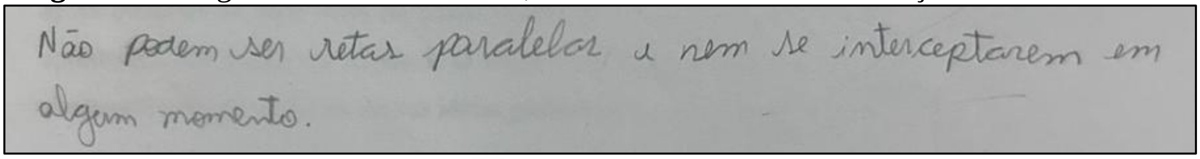
Fonte: elaborado pelo autor.

As três cenas contêm gestos produzidos por Cleonice, estão em sintonia com a linguagem verbal proferida acima. Inicialmente, essa aluna anunciou a presença de um plano verticalmente (segunda imagem). A discente confirmou que a reta está subindo, gesto realizado com o dedo indicador para cima. Além do mais, acrescentou que esse ente geométrico está contido no plano. Em seguida, a participante mostrou a existência de outro plano que, segundo ela, deve ficar do outro lado (terceira imagem) e nele há outra reta. As conversas continuaram e Karine disse: *"que aí tem uma reta aqui"* e Cleonice acrescentou que *"elas nunca vão se intersectar, por isso que eu tô falando que não podem ser planos (...) não precisa ser paralelo"*.

A primeira frase diz respeito a uma reta contida em um dos planos. O segundo comentário está relacionado ao fato de que as retas reversas estão contidas em planos distintos. Após as três cenas, Cleonice realizou movimentos de vai e vem com suas duas mãos. Uma delas com o dedo indicador para cima, e a outra em sentido horizontal. Essa linguagem corporal apresentou uma imbricação com as falas das discentes, tendo em vista que quando produziu gesticulações nos dois sentidos mencionados, o sincronismo entre o gesto e a fala estava presente, o que mostra uma imbricação entre eles. Essas constatações podem ser investigadas no âmbito da Educação Matemática, principalmente pela natureza abstrata que a Matemática apresenta. Assim, a gestualidade exerceu um protagonismo na produção de conhecimento geométrico, bem como na comunicação de saberes da Geometria.

Para encerrar esse debate envolvendo a tríade de estudantes, apresento um recorte da escrita do grupo no roteiro de atividades entregues a cada equipe. O referido trecho da Figura 26 é a resposta dada por essas participantes ao item que gerou tal discussão.

Figura 26 - Registro das alunas Karine, Renata e Cleonice sobre a noção de retas reversas


Não podem ser retas paralelas e nem se interceptarem em algum momento.

Fonte: elaborada pelo autor.

Ao analisar a discussão ocorrida com essa tríade de alunas, durante a fase em que trabalhei com toda a turma e a realizada no experimento de ensino com as estudantes em questão, exceto Karine, percebo que o conceito de retas reversas já estava formado. Nessa afirmação, elas mencionam, nos dois momentos, características do posicionamento dessas retas. Em primeiro lugar, nas falas das participantes (Quadro 41) percebi uma certa insegurança no tocante à definição de retas reversas. E, em segundo, os gestos produzidos também foram relevantes, pois ajudaram as alunas a perceber as características dessas retas.

As discussões anteriores convergem com ideias de estudiosos como Azarello e Edwards (2005) e Edwards (2009), no que concerne ao motivo para se trabalhar investigações abordando a temática dos gestos. Uma razão primordial se refere ao fato de que eles podem trazer revelações de aspectos da formação de conceitos, bem como conexões com metáforas.

No próximo tópico, continuo refletindo sobre o papel da linguagem corporal para coparticipação da construção de conceitos geométricos.

6.5.1 Linguagem corporal: denotativo e conotativo

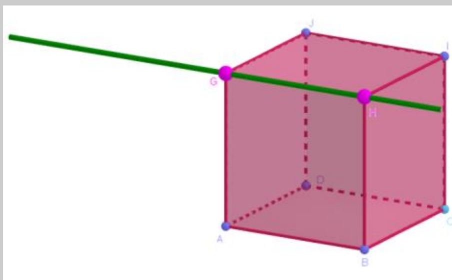
Olhar para possíveis significados dos gestos no âmbito da Matemática é tema relevante que merece ser ponto de discussão das pesquisas que estão no rol da Educação Matemática. Para começar esse debate, apresento uma cena de um diálogo realizado entre mim e a dupla José e Edson, durante o segundo encontro do experimento de ensino. A interrogação que deu norte a essa discussão tratava da explicitação sobre como esses estudantes anunciavam a classificação das retas quanto à sua posição. Eles deveriam supor um cenário no qual estavam diante de amigos frequentando cursos distintos da área de exatas. Desse modo, era necessária uma exposição com situações que pudessem facilitar a compreensão e/ou expressão dessas noções. O discurso iniciou com o reconhecimento do espaço real e do corpo como um personagem relevante para o entendimento dos conteúdos em questão. A fala de Edson trouxe elementos interessantes para discutir: "*Eu acho que o mais importante é usar o espaço que a gente está, pra mostrar; se você está almoçando, se está numa casa, numa sala, num restaurante, você usa o espaço, onde você vai ter todos esses elementos, mesmo se não tiver* *esses elementos, você consegue falar, "ahh eu sou uma reta", "Eu sou uma reta perpendicular ao chão", "você é outra reta*".

Edson assumiu o papel de uma *reta* qualquer, ente matemático abstrato. Ao mesmo tempo, colocou o seu colega como representante de outra *reta*, distinta da anterior. Essa dupla recorreu ao corpo para iniciar uma discussão e compreensão e/ou expressão de noções geométricas espaciais. Esse fato é significativo, tendo em vista que não expus nenhum comentário acerca dessa estrutura física corpórea humana para exemplificar noções da GEP. Em consonância com Feitosa (2018) e Pereira (2010), observo o corpo como elemento essencial para se expressar por meio de uma linguagem não verbal.

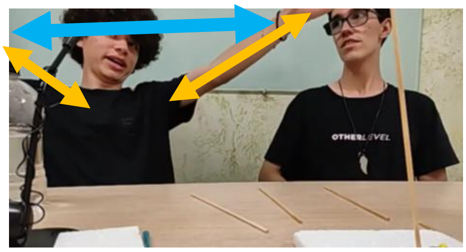
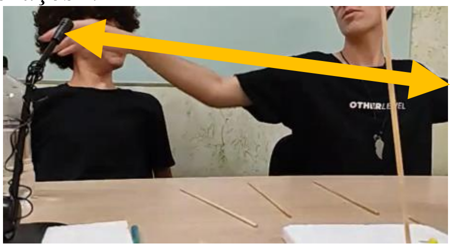
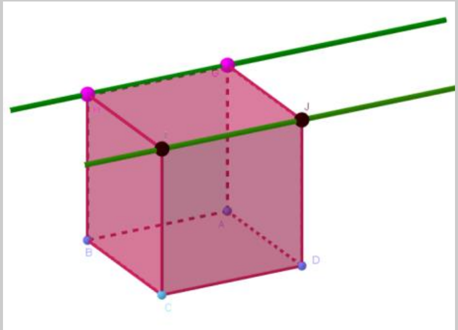
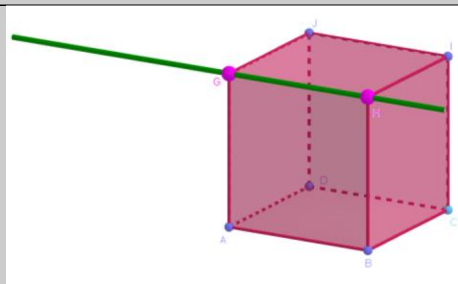
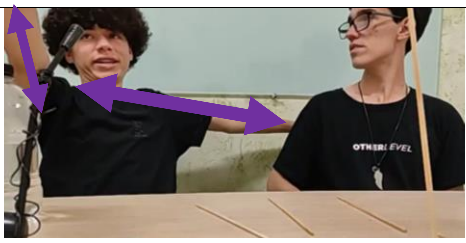
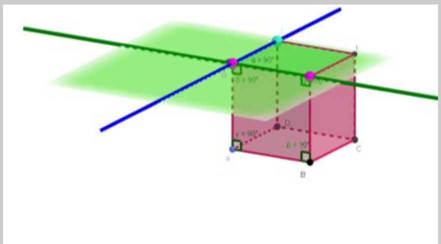
Essa importância que o corpo tem para produção de experiências ocorre muito cedo, até porque os indivíduos adquirem-nas por meio dele, bem como da relação que tecem com o espaço social que os circundam (Vecino, 2005). Sendo assim, a dupla, sem minha intervenção, percebeu essa relevância e utilizou a linguagem corporal para participar, juntamente com o pensamento, com a intenção de promover uma construção de noções geométricas espaciais.

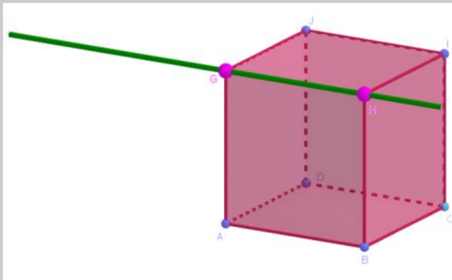
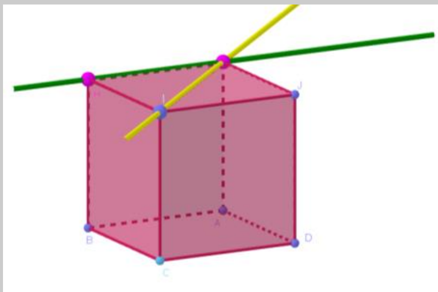
Na sequência, apresento, no Quadro 43[47], um conjunto de imagens e, em seguida, as falas dos integrantes Jose é Edson. Esquematizei esse quadro de tal modo que na primeira coluna exponho a definição matemática formal, que faz relação com a fala dos estudantes e, nesse caso, denomino esse momento de sentido denotativo. Na coluna do meio, disponibilizo os recortes contendo as gestualidades e, ao mesmo tempo, faço algumas linhas sobrepostas aos braços dos alunos para representar a ideia de reta. Esse é o sentido conotativo. Por fim, na terceira coluna, realizo a representação gráfica do ente geométrico discutido. Vale lembrar que esse diálogo foi realizado logo após a fala de Edson exposta anteriormente.

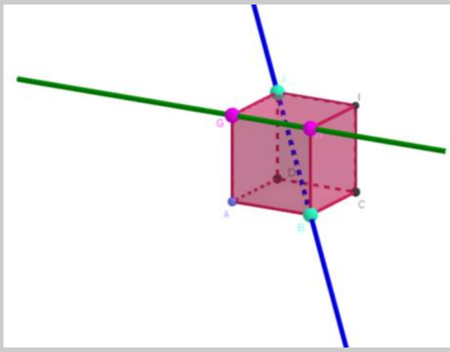
Quadro 43 - Corpo: sentido denotativo e sentido conotativo

<table>
<tr><th colspan="2">Sentido</th><th rowspan="2">Representação gráfica</th></tr>
<tr><th>Denotativo</th><th>Conotativo</th></tr>
<tr><td>CENA A: Por dois pontos do espaço passa uma, e somente uma reta.</td><td>
José: Ou você fala "abre os braços".
Edson: É, você pode abrir os braços.</td><td></td></tr>
</table>

[47] Observo que representei as retas em um paralelepípedo com a intenção de proporcionar uma melhor visualização acerca da propriedade discutida com os alunos. Nesse sentido, os alunos não mencionaram o termo paralelepípedo durante essas discussões. A utilização desse objeto geométrico foi uma escolha didática minha.

CENA B: *Por um ponto fora de uma reta se pode traçar uma única reta paralela a ela.*	 **Edson**: *Você fala para pessoa "estica os braços".*  **José***:* *Aí você estica de frente pra ela, você têm duas paralelas.*	
CENA C: *Por dois pontos do espaço passa uma, e somente uma reta.*	 **Edson**: *Aqui você tem uma reta*	
CENA D: *Retas perpendiculares são todas as retas concorrentes que ao se cruzarem forma regiões de mesma abertura (ângulos retos).*	 **Edson**: *Aqui você tem 02 retas de intersecção de 90 graus. Aqui você tem toda uma abertura.* **Comentários:** Quando o discente falou sobre abertura, realizou movimentos com um dos seus braços, enquanto o outro ficou paralisado. Esses movimentos podem ser percebidos fazendo uma comparação entre a imagem de cima com a de baixo. 	

CENA E: *Se duas retas distintas se intersectam, dizemos que elas são retas concorrentes. Nesse caso, a intersecção entre as retas é formada por um único ponto, dito o ponto de intersecção entre as retas.*	 **José:** *Aí você fala para ele "a pessoa abre assim".* **Comentários:** Nesse momento, solicitei que a dupla explicasse com mais detalhes, pois não tinha entendido. A partir daí, o aluno José pede para Edson abrir os braços. **José**: Abre os braços. Os dois...  **Comentários:** Nesse momento, José solicita que Edson represente uma reta, pois esse discente estava realizando movimentações com um dos braços.  **Comentários**: A partir daí, reinicia o diálogo. **José**: *Se eu abrisse aqui, teria uma intersecção, são concorrentes.* 	 

Duas retas que não pertencem a um mesmo plano são chamadas retas reversas.	**José*:*** *Mas se eu abrir com uma inclinação, já é reversa.*  **Comentários:** Após o término da produção gestual, um dos discentes fez a seguinte afirmação. **Edson:** *E, isso é no caso de a pessoa não querer a explicação a respeito, mais aprofundada; aí, explicaríamos, por exemplo, que retas são reversas se não existem num mesmo plano; e; que são paralelas se existe um plano. Daí, poderíamos aprofundar; mas, mostrar, exemplificar o que são, o corpo humano já basta, resolve.*	

Fonte: elaborado pelo autor.

A partir de um olhar reflexivo, tomando como base o Quadro 43, elenco alguns pontos que seguem a ordem das cenas estabelecidas previamente. Elas podem ser visualizadas no VCD disponível no *Código QR*. Na primeira, cena A, o conceito em discussão foi ideia de reta. A gestualidade por meio dos dois braços esticados foi coparticipante e protagonista do processo de construção dessa noção, assim como da comunicação desse ente geométrico. O significado do gesto também teve papel preponderante, no que concerne a uma melhor visualização do objeto abstrato, tanto por parte de quem produziu, tanto da parte daquele que participou ativamente do discurso matemático, no caso, José.

Vale reforçar que os estudantes estavam incumbidos de expor a classificação das retas para amigos e/ou colegas de outros cursos, com exceção da área de exatas. A dupla recorreu à linguagem corporal para realizar as explicações. Isso ocorreu sem a minha intervenção, pois não mencionei quais estratégias poderiam ser utilizadas. Deixei os alunos livres para expor suas ideias a partir dos recursos que considerassem convenientes e apropriados.

A intenção da gestualidade produzida na Cena A foi tornar concreta a ideia de reta, isso pode ser considerado um cenário significativo, uma vez que essa noção também pode ser entendida por meio de uma linguagem corporal e esse corpo ocupa um espaço sensível. No entanto, foi preciso olhar essa gestualidade sob outra perspectiva, que diz respeito ao fato desses braços esticados não representarem com exatidão uma linha reta, um objeto matemático. Por mais que se tente deixá-los retos, sempre haverá uma angulação em alguma parte. O mesmo ocorreu com a segunda imagem, na qual, o estudante Edson estendeu seus braços como se fosse abraçar alguém. Nesse caso, o ângulo[48] que foi formado entre os dois braços e o tronco do aluno apresentou uma inclinação maior, comparando-se com a primeira situação de gesticulação. Por outro lado, é importante mencionar que a gestualidade produzida comunicou o essencial para que se possa ter a ideia de uma reta.

Na Cena B, José estava apresentando seus argumentos verbais e corporais para auxiliá-lo a comunicar o conceito de retas paralelas, mas, ao mesmo tempo que realizou essa ação, também internalizou a imagem do paralelismo de retas, tornando-a mais visual para todos que estão no discurso matemático. Esse participante supõe outro indivíduo qualquer com os braços abertos defronte para si. Foi notável que José se preocupou com a questão de se preservar uma mesma distância entre duas retas para que elas sejam paralelas, bem como não se encontrarem em algum ponto. A ação de produzir esse gesto pode não ser involuntária, tendo em vista que esse aluno fez o convite para outra pessoa e solicitou que essa abrisse seus braços. Nessas circunstâncias, a linguagem corporal foi corresponsável pelo processo de exposição argumentativa, juntamente com o que o indivíduo pensava no momento. Acerca disso, McNeill (1992, p. 245) expõe: “os gestos, juntamente com a linguagem, ajudam a constituir o pensamento”. Há uma via de mão dupla, em que cada um contribuiu para o processo de construção do conhecimento matemático.

O foco de discussão presente na cena C foi semelhante ao da A, tendo em vista que elas trataram da ideia de reta. Já a cena D foi voltada para o conceito de concorrência, mais especificamente de perpendicularismo entre retas. Edson movimentou todo o seu corpo para mostrar uma abertura entre os dois braços. Em determinada ocasião, disse “*Aqui você tem 02 retas de intersecção de 90 graus”*. Nesse instante, o aluno posicionou os braços de tal modo que eles representassem aproximadamente duas retas perpendiculares. Provavelmente, a imagem mental delas foi produzida já no ensino fundamental, principalmente nos últimos anos, e agora, foi acessada para produzir a gestualidade o que pode mostrar uma imbricação entre pensamento e corpo.

A Cena E foi um momento de muita interação corporal entre os dois estudantes, José e Edson. Os corpos se tocaram e produziram conhecimentos matemáticos com significado. Inicialmente, José solicitou que Edson abrisse seus braços, enfatizando que deveria ser os dois. Ao realizar esse pedido, José inclinou seu corpo para o de Edson e o ajudou a produzir o gesto

[48] É a figura formada por duas semirretas de mesma origem (Morgado, Wagner e Jorge, 1990).

representativo de uma reta. Depois disso, José falou "*Se eu abrisse aqui teria uma intersecção, são concorrentes"*. Foi nesse instante em que os braços dos dois estudantes se tocaram. Essas gestualidades produzidas estiveram em sintonia com o pensamento dos dois discentes. Foi um cenário em que o pensar e o corpo estão dialogando constantemente. Em consonância a essas ideias, Goldin-Meadow (2003, p. 178) pontua que "o ato comunicativo é, portanto, ele próprio um ato de pensamento. É nesse sentido que o gesto molda o pensamento".

A segunda parte da Cena E diz respeito à construção da ideia de retas reversas. O diálogo foi uma continuidade do que ocorreu com o conceito de concorrente. Na ocasião, o estudante José disse "*Mas se eu abrir com uma inclinação, já é reversa"*. Os corpos continuaram se tocando, porém, dessa vez, José inclinou seu corpo para baixo. Essa ação realizada pelo discente foi importante, tendo em vista que a existência das retas reversas só ocorre quando estão contidas em planos distintos. Além disso, esse indivíduo mostrou ter compreendido e/ou expressado as condições mínimas para o caso de retas reversas. Ele revelou, por meio de uma mudança de ângulo de seu corpo, a ideia dos dois planos: um deles passaria pelos braços de José, e o outro, pelos braços de Edson.

Como traz Rodrigues (1983, p. 99), "explícita ou implicitamente, no comportamento corporal há muita expressão", que se traduz em uma linguagem corporal rica e, muitas vezes, mais acessível para entender quaisquer assuntos do dia a dia, sejam informais e/ou formais. No caso de José e Edson, houve uma exploração significativa da linguagem não verbal, Haja vista que cada movimento realizado por meio dela teve a intenção de produzir um gesto coerente com o conceito geométrico. Além disso, as gestualidades realizadas podem ser compreensíveis no âmbito da Matemática e/ou até mesmo em outros contextos. Provavelmente, elas são entendíveis em qualquer parte do mundo, tendo em vista a universalidade dos conceitos matemáticos. Sobre esse assunto, apoio-me na sustentação de Rodrigues (1983, p. 99): "penso geralmente que meus gestos e posturas são universais e naturais (tanto que "falo" por gestos quando não conheço o idioma de meu interlocutor): legitimo a cultura no meu próprio corpo". Entendo que a produção de conceitos matemáticos também pode ser construída por meio de gestos que estão integrados com o pensamento.

Por um lado, há os conceitos matemáticos, como postulados, teoremas, definições e proposições presentes no mundo das ideias que estão sendo denominadas, nesta pesquisa, com sentido denotativo, o qual, de acordo com o dicionário online[49], refere-se ao "sentido literal; diz

---

[49] Disponível em: https://www.dicio.com.br/denotativo/#:~:text=Significado%20de%20Denotativo,(origem%20da%20palavra%20denotativo).. Acesso em: 19 fev. 2024.

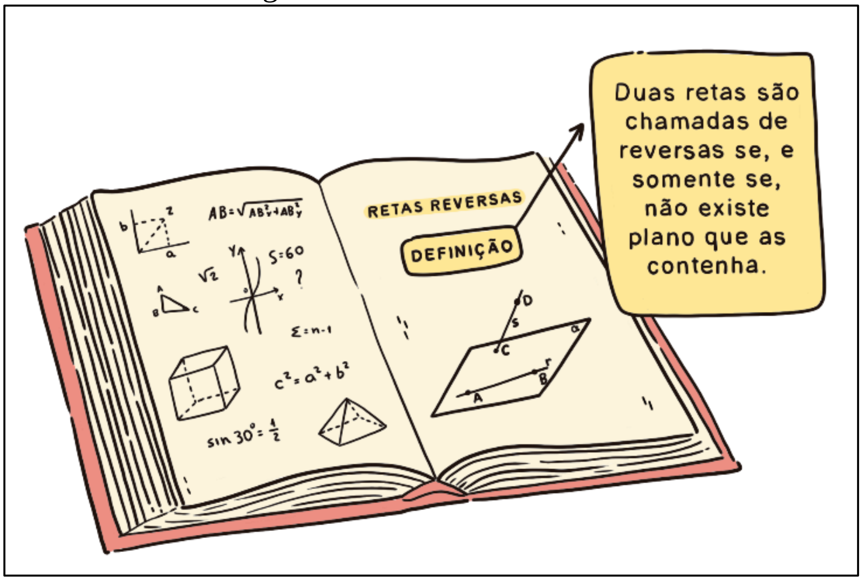
do sentido próprio de uma palavra, daquele que se refere diretamente à coisa”. No caso da primeira coluna, os assuntos explorados fazem referência à ideia de reta, retas paralelas, perpendiculares, concorrentes[50] e reversas. Eles foram discutidos por meio de uma linguagem corporal que teve como intenção reforçar, coparticipar e auxiliar o discurso matemático. Conforme Radford (2005, p. 143), “os gestos ajudam os alunos a tornar suas intenções aparentes, a perceber relações matemáticas abstratas e a tomar consciência de aspectos conceituais de objetos matemáticos”.

Por outro, há as gestualidades que denominei, com base nos dados produzidos, de sentido conotativo, pois conforme dicionário online[51], ele “é usado no sentido figurado, não literal. Alteração ou ampliação do sentido de uma palavra, para além do seu sentido literal, restrito”. Em minha perspectiva, os gestos podem representar, bem como realizar a comunicação dos conceitos matemáticos, mas é uma interpretação partindo do exterior, acerca deles, muitas vezes já conhecidos, realizada pelos indivíduos, tanto daqueles que produzem, quanto dos que estão participando do diálogo. Essa releitura é produzida com base no pensamento do gesticulador durante os momentos de discussão matemática. O importante, nesse contexto, é a possibilidade de tornar mais compreensíveis os entes geométricos abstratos, embora a gestualidade não forneça uma cópia fiel do mundo matemático presente nas mentes das pessoas.

Nesta pesquisa, o sentido denotativo foi entendido como um edifício matemático, no qual a fundação, base invisível antes de começar a construir as paredes, assemelhou-se aos postulados, proposições, definições, teoremas e demonstrações matemáticas. São conceitos que estão na mente das pessoas, não sendo acessíveis por meio dos sentidos, assim como a estrutura que sustenta os prédios enterrada no chão não é visível, mas é de conhecimento de todos que existe essa base. Nesse caso, o denotativo também assumiu o papel de presar pelo rigor matemático. Diante disso, para a compreensão dos objetos matemáticos, requer-se de maneiras para externá-los, comunicá-los e/ou representá-los. Por exemplo, os gestos podem representar uma ideia do campo denotativo, mas eles não têm acesso integral à fundação do prédio. Ela está no mundo das ideias. Na Figura 27, há uma ilustração do edifício matemático construído com base na denotação.

[50] Duas retas são *concorrentes* se, e somente se, elas têm um único ponto em comum (Dolce; Pompeo, 2013).
[51] Disponível em: https://www.dicio.com.br/conotativo/. Acesso em: 19 fev. 2024.

Figura 27 - Sentido denotativo



Fonte: elaborada pelo autor.

Apesar da importância que os gestos têm para a construção de conceitos matemáticos, eles não podem evidenciar com precisão como ocorreu o trabalho de montagem da estrutura dos edifícios. Somente os engenheiros e mestres de obras tiveram acesso a essas informações que estão na mente das pessoas. Nesse contexto, chamo de sentido conotativo uma gestualidade, protagonista na construção de saberes geométricos, produzida com a intenção de entender, divulgar e dialogar sobre um objeto matemático. Entretanto, essa linguagem corporal é um recurso que faz com que o abstrato da Matemática seja mais acessível a todos de uma maneira visual, ou seja, os gestos realizados pelos estudantes durante debates de conteúdos matemáticos não podem ser vistos como o próprio conceito em si, mas como uma das várias formas para exterioriza-los.

As imagens captadas durante os momentos em que os estudantes gesticularam retratam noções do campo geométrico. Entretanto, elas mostram claramente a impossibilidade de se representar o ente matemático de forma ideal. Essas distorções entre o representado e o mundo das ideias podem ser constatadas quando é produzida uma representação gráfica ou geométrica do conceito abstrato. Para o caso desta pesquisa, o corpo, às vezes, estava exercendo a função de uma reta. Em outros momentos, os alunos imaginavam um plano passando por ele. Essa corporeidade ocorreu nas ocasiões em que, por exemplo, de um lado, determinado estudante encenava uma relação interpessoal envolvendo o seu corpo e o do colega, e de outro, quando inclinava a sua estrutura física corpórea para mostrar uma reta concorrente a um plano. Nesse último caso, há uma relação entre o corpo, o meio em que se vive e a Matemática.

Outra discussão referente aos sentidos denotativo e o conotativo diz respeito a uma vertente emergida dessa categoria, a conotatividade que, estando presente na gestualidade, pode desempenhar um papel duplo. Inicialmente, exerceu a função de comunicar um ente matemático ao outro, mas ao mesmo tempo em que fez isso, o indivíduo que realizou o gesto organizou suas ideias de forma síncrona com a sua fala. Nesse caso, a gesticulação conseguiu fazer com que determinado personagem que a produziu, construísse saberes geométricos espaciais com significado. Dessa forma, o gesto foi um protagonista desse processo. Na Figura 28, proponho uma interligação entre linguagem corporal, oral e pensamento.

Figura 28 - Relação entre linguagem oral, corporal e o pensamento

Fonte: elaborada pelo autor.

Na imagem da esquerda, dois personagens estão dialogando sobre alguns conceitos matemáticos por meio da linguagem verbal. Em determinado momento, houve uma produção de gesto realizada pelo rapaz, enquanto isso ocorreu, a moça observou, atentamente, a partir de sua visão e audição, o que estava sendo verbalizado e gesticulado. As setas estão fazendo uma imbricação entre a linguagem verbal, a corporal, o pensamento e o conceito comunicado e construído pelo personagem da imagem da direita. Por outro lado, concomitantemente, a mulher que participou do diálogo também pode ter construído conhecimento a partir das interações ocorridas. Essa vertente pode ser corroborada em Goldin-Meadonw (2014, p. 1), que explica o seguinte: "(1) os gestos que vemos os outros produzirem tem o potencial de mudar nossos pensamentos. (2) os gestos que nós mesmos produzimos têm o potencial de mudar nossos pensamentos, talvez especializando ideias que não são inerentemente espaciais". Ou seja, os gestos podem ter um duplo papel, por um lado para quem está gesticulando, por outro lado, para quem está observando.

Assim, no contexto da Figura 28, há uma relação entre a fala, o gesto e o pensamento. Nesse caso, houve um sincronismo entre fala e gesto, imbricado com o pensamento durante os momentos em que os alunos discutiram noções da Geometria. Essa característica, presente neste trabalho, é sustentada por meio dos diversos pesquisadores que abordam a temática da confluência entre gesto e fala.

O sentido literal, matematizado, isto é, o denotativo, pode se configurar como o esforço produzido por meio da linguagem oral, gestual e o pensamento. Esses três elementos estão trabalhando com a função de mostrar uma ideia tida como perfeita, que está presente no mundo da Matemática. Na imagem anterior, a gesticulação pode indicar um conceito matemático construído pelo gesticulador e comunicado ao interlocutor. Ambos podem produzir conhecimento. Essa noção matemática gesticulada jamais vai ser denotativa. Ela sempre estará no campo da conotatividade. Entretanto, no tocante aos processos de ensino e de aprendizagem, o sentido conotativo pode ser um aliado, uma vez que ele provavelmente indica que o conhecimento está em processo de construção, tanto da parte de quem gesticula, quanto da parte de quem observa.

Por ora, o significado conotativo do gesto é suficiente para o interlocutor discutir sobre conceitos que estão sendo abordados. Além disso, essa gestualidade faz com que o diálogo entre os envolvidos ocorra de maneira fluída, na qual, um produz e o outro visualiza, mas ao mesmo tempo em que tem essa visualização, consegue participar do debate. É um processo no qual os papeis são invertidos. Muitas vezes, no caso desta pesquisa, notei entre algumas duplas participantes do experimento de ensino que determinados alunos tendem a produzir uma quantidade maior de gestos durante os diálogos envolvendo produção matemática. Em uma delas, os dois participantes produziram uma quantidade de gestos quase que iguais.

Para encerrar as discussões desta seção, assinalo que um assunto que merece mais atenção diz respeito ao fato de determinados alunos, quando estão dialogando sobre conceitos matemáticos, tendem a produzir muitos gestos. Outros sujeitos podem discorrer sobre um ente geométrico abstrato utilizando com grande frequência a linguagem verbal, mas, em certas ocasiões, certamente produzirá um gesto em parceria com a fala. Algumas pesquisas em Educação Matemática, como Radford (2009) e Goldin-Meadow (2003) por exemplo, que versam sobre a temática da gestualidade dão indícios de que o aluno que produz gestos com frequência está em um processo de aprendizagem, enquanto aquele que frequentemente se apropria da linguagem verbal oral e/ou escrita já conseguiu compreender a noção matemática discutida.

7 PARA ALÉM DAS MÃOS: IMBRICAÇÕES ENTRE GESTOS E MANIPULAÇÕES

7.1 Os bastidores da categoria

Essa seção foi reservada para a apresentação e discussão dos dados referentes aos contextos nos quais os diálogos entre os alunos possibilitaram a construção de conceitos geométricos espaciais quando esses personagens produziram gestos durante manipulações diversas com a intenção de explicar algum resultado da Geometria Espacial de Posição (GEP). Saliento que as observações, assim como as análises realizadas estão acompanhadas pelos vídeos de curta duração (VCD), presentes no decorrer de todo este texto e que podem ser acessados por meio de *Código Qr*[52].

Ao longo desta seção, utilizo o termo “manipulações” para me referir às ações realizadas pelos discentes em materiais de natureza física tais como: palitos de churrasco, alfinetes, pedaços de isopor, canetas, folhas de sulfite e sólidos geométricos de acrílico, madeira e/ou confeccionados. Entendo, aqui, manipulação como a mobilização do corpo com algum material didático. Diversas manipulações foram observadas, a exemplo, os discentes movimentaram, em sentidos variados, uma e/ou as duas palmas da(s) mão(s) sobre a mesa e um pedaço de isopor e/ou uma face qualquer de um sólido geométrico. Ademais, deslizaram um dos dedos sobre um palito, uma caneta, a borda de um pedaço de isopor, a quina e/ou o encontro de duas faces de um sólido geométrico de acrílico e/ou de madeira. Por fim, estou assumindo a manipulação como uma relação entre alunos e materiais de natureza física, na qual os sentidos desses personagens, principalmente o tato e a visão, são aguçados.

Ao assistir aos trechos dos vídeos contendo ações de manipulações por parte dos alunos, percebi uma imbricação entre elas e as gesticulações. Os arquivos audiovisuais me permitiram inferir que durante os momentos de manipulações em materiais disponíveis no Laboratório de Ensino de Matemática, assim como os confeccionados por mim, também ocorreram gesticulações. Nesse sentido, estou considerando um sistema interligado envolvendo a conjunção: gestos + manipulações em materiais de natureza física + fala + pensamento.

Dando continuidade, exponho que subdividi essa seção em quatro eixos que foram intitulados em: *1) o gesto como parte da representação do conceito matemático, 2) a*

---

[52] Os vídeos de curta duração podem ser acessados de dois modos distintos: primeiro (apontar a câmera e/ou aplicativo de leitura de *Código Qr* para a imagem), segundo (pressionar por alguns segundos a tecla CTRL e, mantendo-a pressionada, clicar com o botão esquerdo do *mouse* sobre a imagem). Esse último caso pode ser feito para as pessoas que preferirem assistir ao vídeo pelo computador durante a leitura do texto.

comunicação estabelecida por meio de gestos: acenar a cabeça, olhar e expressão facial, 3) a inclinação do corpo para comunicar matemática e, por fim, *4) o gesto como externo à representação do conceito matemático: apontar para o ente abstrato.*

Esses eixos foram pensados e concebidos a partir de um trabalho minucioso acerca de um processo de refinamento ao assistir aos 253 VCD, retornado a eles várias vezes com a intenção de identificar manipulações, gesticulações e ambas simultaneamente. Esse quantitativo de material audiovisual foi obtido a partir de um olhar investigativo nas gravações realizadas durante o experimento de ensino. Quando estive debruçado nesses arquivos, procurei realizar movimentos de ir e voltar, sempre que possível, com a finalidade de entender determinada cena envolvendo produção matemática por meio de gestos e manipulações de modo simultâneo. Do total, obtive 27 VCD, desses, alguns estão compondo esta análise. Em específico, em cada um dos VCD é possível identificar pelo menos um eixo dos que foram citados anteriormente. Há casos em que constatei a presença dos quatro eixos. Nesse sentido, quando discuto sobre um determinado VCD, é provável que o leitor perceba a presença de elementos característicos de outros eixos.

Os eixos são compostos por discussões envolvendo os entes primitivos, conceitos e teoremas da GEP que foram comunicados e construídos pelos alunos por meio da fala, dos gestos e das manipulações, sendo que esses meios de expressão ocorreram de maneira integrada ao pensamento.

O assunto tratado no eixo 1 diz respeito às cenas que tiveram como característica a realização de gestos que representaram e/ou comunicaram por meio visual a noção abstrata. Por exemplo, em determinados momentos, os alunos estenderam uma de suas mãos com a palma aberta e afirmaram que se tratava de um *plano.* As gesticulações desse segundo item foram realizadas simultaneamente com manipulações.

No eixo 2, discorro sobre a análise de alguns VCD, nos quais observei os comportamentos de um dos alunos das duplas durante os momentos em que o seu colega gesticulou. Constatei que certo aluno olhava atentamente à gesticulação e, ao mesmo tempo, escutava o que estava sendo dito. Nessas situações, foi possível notar o aceno de cabeça e as expressões faciais durante essas manipulações. Por exemplo, o olhar do observador como se fosse um sinal indicando que compreendeu e/ou expressou o que estava sendo debatido.

Desse modo, percebe-se que houve uma comunicação por meio dos gestos. Além disso, nesse processo dialógico, ambos os colaboradores de uma mesma dupla produziram gestos que apresentaram significados distintos. Por um lado, observei a construção de conceitos matemáticos e a comunicação deles ao outro; por outro, verifiquei que há o sujeito que gesticulou com a intenção de comunicar aos presentes no diálogo de que houve entendimento. Nesse último caso, o aluno não pode ser visto como um participante passivo, uma vez que ele também contribuiu para a continuidade do diálogo.

No eixo 3, analiso alguns VCD nos quais foi possível identificar certa inclinação do corpo com intuito de comunicar conceitos matemáticos. Para elucidar, menciono que um dos alunos rotacionou o tronco do seu corpo para um lado qualquer com a intenção de mostrar onde ocorreu a projeção de dois *semiplanos*, conforme ilustra a Figura 29 no instante em que o discente inclinou o seu corpo para a lousa. Na maioria das vezes, essa ação foi acompanhada por um convite feito ao colega de tal modo que esse também girou o seu corpo, enxergou e entendeu o que foi explicado.

Figura 29 - Inclinação corporal

Fonte: elaborada pelo autor.

Por fim, no eixo 4, discuto situações que foram caracterizadas pela presença de gestos, entendidos aqui, como externos à representação do conceito matemático. Quero enfatizar que esses movimentos ocorreram durante os momentos de manipulações nos materiais de natureza física, sendo que os alunos apontavam para possíveis características dos entes primitivos e/ou estabeleceram relações com conceitos matemáticos a partir do processo de manipulação. Nesses casos, as gesticulações, também entendidas como representações, tiveram também a função de apontar para noções abstratas visualizadas nos materiais.

No Quadro 44, especifico os quatro eixos, assim como a frequência de cada um deles. Esse dado foi quantificado e obtido durante os momentos em que assisti cada um dos 27 VCD. Nesse exercício, internalizei as características observadas em cada eixo para que pudesse identificar qual(is) eixo(s) estava(m) sendo representado(s) nos VCD.

Quadro 44 - Eixos que compõem a segunda categoria e suas frequências

Frequência	Eixo
6	O gesto como parte da representação do conceito matemático.
7	Comunicação estabelecida por meio de gestos: acenar a cabeça, olhar e expressão facial.
17	Inclinação do corpo para comunicar matemática
21	O gesto como externo à representação do conceito matemático: apontar para o ente abstrato.

Fonte: elaborado pelo autor.

A análise do Quadro 44 me permitiu realizar algumas ponderações, quais sejam: a) o eixo do gesto como externo à representação do conceito matemático teve a maior frequência, sua presença foi notada em 21 VCD; b) a segunda maior frequência versou sobre a inclinação do corpo para comunicar matemática; c) a terceira maior frequência, representada por 7 VCD, tratou sobre a comunicação estabelecida por meio de gestos tais como o aceno da cabeça, os olhares e as expressões faciais dos alunos que observaram as gesticulações de seu colega; e d) a menor frequência contou com 6 VCD, referente ao eixo “o gesto como parte da representação do conceito matemático”.

Tais informações conferiram base para realizar algumas escolhas para o processo de análise. Para produzir essa tarefa, senti dificuldade devido ao fato de que, em um mesmo VCD, foi possível encontrar mais de um eixo que integrou essa categoria. Diante disso, fiquei pensando: *como escolher um determinado VCD em detrimento de outro*? Para resolver isso, optei por analisar inicialmente o eixo com menor frequência e, por fim, aquele eixo que teve um maior número de VCD. Essa estratégia foi relevante porque tomo como ponto de partida para iniciar a análise, os eixos que foram menos recorrentes. A escolha em olhar inicialmente para um eixo menor possibilitou estabelecer uma compreensão sobre ele, mais específica, ou seja, ao ir para outros eixos levo a bagagem da análise dos dados, isso pode contribuir para identificar novas nuances em outros eixos.

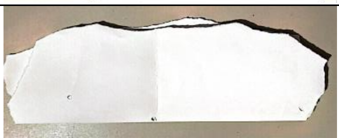
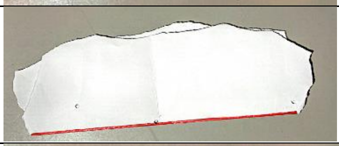
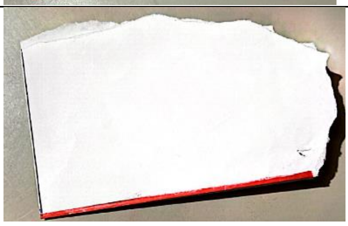
Posto isso, passo a abordar as reflexões oriundas de alguns dos 27 VCD. Pontuo que, ao mesmo tempo em que realizei esse processo, também fiz minhas análises de tal modo que elas fossem entrelaçadas com o referencial teórico. Compartilharei as transcrições das falas dos alunos que podem ser cruzadas com os VCD. Com a intenção de auxiliar o processo de entendimento dessas falas, deixei algumas imagens que retratam os momentos em que ocorreram gestos + fala + manipulações. Essas informações foram organizadas em quadros.

7.2 O gesto como parte da representação do conceito matemático

Antes de iniciar as discussões do eixo *Gesto como parte da representação do conceito matemático*, detalho uma atividade prática desenvolvida durante o experimento de ensino. Essa apresentação foi relevante, tendo em vista que, no decorrer desta análise, fiz referências a esse momento que tratou do Teorema Fundamental do Perpendicularismo (TFP). Na ocasião, disponibilizei folhas de sulfite e solicitei aos alunos que realizassem recortes, dobras e algumas marcações de linhas utilizando canetas de cor azul e vermelha (escolhidas aleatoriamente). A intenção em realizar tal atividade foi auxiliar aos alunos no processo de visualização do TFP.

Registrei, no Quadro 45, algumas imagens seguidas das descrições das ações que os alunos realizaram para a construção do material de natureza física. Vale ressaltar que à medida que eles finalizaram uma etapa, interroguei sobre algumas noções geométricas. Por exemplo, quando produziram a primeira dobra da folha, vincando-a de tal modo que fosse possível compreender e/ou expressar a ideia de *reta*. Nessa ocasião, questionei as duplas acerca dessa noção.

Quadro 45 - Recortes e dobra de uma folha de sulfite para mostrar a ideia do TFP

Imagem	Descrição
	Cada aluno recebeu uma folha de sulfite. Solicitei que eles rasgassem irregularmente as quatro bordas dela. O resultado foi a representação de uma parte de um *plano,* como pode ser visto na imagem.
	Solicitei que realizassem uma dobra vincando com as unhas o comprimento de maior lado da folha, formando a representação de uma *reta.*
	Entreguei uma caneta de cor vermelha e solicitei que fizesse uma linha reta no vinco produzido. Nesse momento conversei com eles acerca da ideia de *reta*.
	Os alunos fizeram uma segunda dobra de tal modo que os lados do vinco anterior coincidissem. Discutimos a ideia da criação de duas semirretas, formando um ângulo reto entre elas e a *reta* formada pela segunda dobra. As duplas seguraram a produção com as duas mãos, deixando-a verticalmente apoiada sobre a mesa e realizando movimentos para frente e para trás. Quando a produção ficou vertical ao *plano*, a linha vermelha estava contida na mesa. Interroguei "*se uma reta é perpendicular a uma reta de um plano, será ela perpendicular ao plano?"* Para constatar que isso não é verdadeiro, pedi que os alunos deixassem a produção um pouco inclinada ao *plano* (mesa).

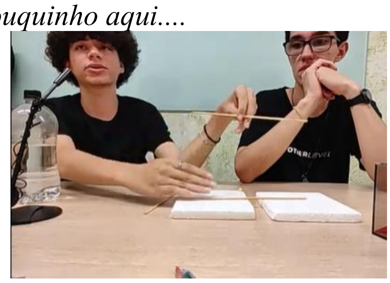
	Nessa segunda dobra, pedi que os alunos contornassem com a caneta azul o vinco formado. Após a conclusão, interroguei *"se uma reta for perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, sera ela perpendicular ao plano?"* Objetivava que os alunos concluíssem que a de cor azul é perpendicular ao *plano* (mesa).
	Por fim, aqui é possível visualizar a produção finalizada sobre a mesa. As linhas foram consideradas como ideias de *retas*, assim como a mesa foi concebida como se fosse uma parte de um *plano*.

Fonte: elaborado pelo autor.

A respeito da noção de perpendicularismo entre reta e plano, Carvalho (1993, p. 42) dispõe que "talvez a forma mais intuitiva de passar do plano para o espaço seja conduzir uma reta perpendicular ao plano da Geometria plana". Sabendo dessa importância, desenvolvi essa atividade prática com a intenção de tornar o TFP mais visual e, possivelmente, mais compreensível.

Para compor o primeiro eixo, compartilho três situações oriundas de contextos distintos, tanto no que concerne ao conceito da GEP dialogado com as duplas, quanto ao dia em que esse debate ocorreu. Saliento que me debrucei unicamente à temática desse eixo. Os outros elementos presentes em cada VCD, deixei em segundo plano. No Quadro 46, resgato os diálogos das duplas José e Edson, Leonardo e Thiago e, por fim, Ana e Luciana.

Quadro 46 - Eixo: o gesto como parte da representação do conceito matemático

Dupla Código Qr	**Diálogos**	
José e Edson (Situação 1)	**Edson**: *Essa reta aqui ela é uma reta paralela a essa.* 	**Edson**: *porque existe um plano que a gente consegue colocar que contém as duas retas, porém, se entortar um pouquinho aqui....* 
	Edson: *você não consegue um único plano que pegue essas duas retas, então, a intersecção delas é nula, e não tem um único plano que contenha as duas ao mesmo tempo; aqui, a intersecção é nula, mas, a gente consegue, pelo teorema de que duas paralelas definem um plano, então, eu sei que a gente consegue um plano aqui; por isso, isso caracteriza que elas são paralelas e não reversas.*	

<table>
<tr>
<td rowspan="2">Ana e Luciana (Situação 2)</td>
<td>Ana: porque, se pensasse, tipo, por exemplo, que pertence a esse, pensando agora nesse negócio de rampa com cimento, pensasse tipo, que essa reta pertence a esse daqui. Ela não é perpendicular a uma reta que tá passando aqui, é?</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Ana: Ela seria ortogonal, mas tipo, perpendicular, perpendicular mesmo é só essa daqui que tá passando aqui.
</td>
<td>Ana: Porque, você vindo pra cá, ela pode até ter um ângulo de 90°, mas, não é perpendicular.
Luciana: Pela sombra né?
Ana: É. Ela num tá encostando.
André: Então, essa será uma saída pra nós?
</td>
</tr>
<tr>
<td>Leonardo e Thiago (Situação 3)</td>
<td>Leonardo: Esse plano aqui. A reta CD é paralela à base, ABV.

Thiago: A base é AB né?
Leonardo: Não. Não é? Num é esse plano com a reta? É o plano com a reta.
Thiago: Certo
Leonardo: Então eu vou ter a reta CD aqui...
Thiago: Tá, são paralelos.</td>
<td>Leonardo: Por que elas nunca vão se encontrar. A reta. A reta nunca vai se encontrar com o plano. Porque o plano faz assim né? Ele vem para cá e para cá. E a reta nunca vai se encontrar com esse plano.
André: Tá, entendi. Vocês concluíram que essa reta CD é paralela ao plano VAB?
Leonardo: Por que elas nunca vão se encontrar. Porque o plano tá aqui... O plano está aqui né: Pra lá, pra cá. E essa reta está aqui. Então, se a reta estivesse assim, ela ia ter um ponto em comum com o plano. Nesse caso ela não tá.</td>
</tr>
</table>

Fonte: elaborado pelo autor.

O gesto como parte da representação do conceito matemático produzido por Edson (Situação 1, Quadro 46), ocorreu em um contexto no qual a dupla estava expondo a sua compreensão e/ou expressão no que diz respeito à definição de *retas* paralelas. Esse aluno iniciou seu discurso e, ao mesmo tempo, realizou manipulações. Ele disse: *"essa reta aqui"*, indicando o material como se fosse um ente matemático primitivo. Posteriormente, como já havia um palito sobre o pedaço de isopor, segurou outro com uma de suas mãos e, em seguida, realizou gesticulações com a palma da outra mão aberta, movimentando-a para cima e para baixo com a intenção de mostrar a determinação de um *plano* (imagens da situação 1, Quadro 46).

Edson desenvolveu essas ações olhando atentamente para mim. Quando finalizou esses argumentos, chamou a atenção para a diferenciação entre *retas* paralelas e *retas* reversas. Esse aluno falou: "*porém, se entortar um pouquinho aqui*". A frase dita foi acompanhada de uma manipulação com o palito que estava suspenso no ar. O movimento foi caracterizado de tal forma que esse material girasse levemente para um dos lados. A intenção de Edson foi mostrar a impossibilidade de determinação de um *plano* com os palitos posicionados daquele jeito. Assim, tratava-se de um caso de *retas* reversas, pois como disse o aluno "*então, a intersecção delas é nula, e não tem um único plano que contenha as duas ao mesmo tempo*". Duas questões merecem ser evidenciadas: a intersecção entre as *retas* é vazia; e não há um *plano* que contenha as duas *retas* simultaneamente. O primeiro argumento também é válido para a definição de *retas* paralelas, como bem disse Edson.

O gesto de Edson com a palma da mão aberta para representar a ideia de *plano* foi realizado em três momentos distintos, a saber, "*porque existe um plano que a gente consegue colocar*", "*você não consegue um único plano que pegue essas*" e "*mas a gente consegue*". Essas gesticulações foram produzidas em concomitância com a fala e a manipulação. Esse cenário corrobora o que Bairral (2017) constatou em seu trabalho. Esse autor, investigou construções de alunos em tela de *tablets* e outros dispositivos móveis, argumentando que gestos, fala e construção em tela formam um sistema linguístico único, não havendo hierarquia de um sobre o outro.

No que concerne a essa categoria, investigo os gestos produzidos juntamente com manipulações em materiais de natureza física. Proponho que nos diálogos em que se verificou essa imbricação entre gesto, fala e manipulação em materiais de natureza física também há um sistema único. Na situação de Edson, houve a gesticulação, a oralidade e a manipulação em materiais de natureza física de maneira integrada e simultânea. Essa integração pode ser explicada com base nos estudos de McNeill (2002). Nesse caso, os três elementos fizeram parte do discurso matemático. Cada um deles carrega significados matemáticos, no entanto, quando faço uma análise dos três de modo interligado, noto a presença da produção do conhecimento matemático, em particular, conceitos da GEP. Além desse autor, Arzarello, Robutti e Thomas (2015, p. 21, *tradução minha*) apontam que "um gesto geralmente não é introduzido sozinho, mas, especialmente em matemática, é frequentemente alinhado sincronicamente com palavras ou outros sinais". Edson iniciou seu discurso por meio da fala, mas, instantes depois, percebi que a oralidade, o gesto e a manipulação estavam ocorrendo ao mesmo tempo.

A ideia de *plano* comunicada por meio de um mesmo gesto nas três afirmações de Edson fez parte da representação do ente primitivo. Quando o aluno verbalizou uma frase remetendo a essa noção, movimentou sua mão para cima e para baixo de tal modo que ela tocou nos dois palitos, *plano* determinado por duas *retas* paralelas. Ao analisar essa gesticulação a partir de estudos de Okumus e Hollebrands (2019), foi possível apresentar algumas considerações. Inicialmente, Edson produziu um gesto dinâmico, pois a mão se movimentou. Além disso, minhas inferências levam a crer que essa movimentação estava se referindo à infinitude do *plano*. Por fim, a gênese desse gesto iniciou com uma mão estática, sendo que o movimento dela para cima e para baixo pode indicar uma infinidade de pedaços de *planos*.

A situação apresentada pode ser explicada a partir do estudo feito por Edwards (2003) nos trabalhos de McNeill (1992), cujos resultados indicam que gestos idênticos são produzidos para os mesmos conceitos matemáticos. Assim, quando os discentes abriam a palma de sua mão deslizando sobre uma superfície qualquer e/ou até mesmo no ar, na maioria das vezes, estavam referindo-se ao *plano* da Geometria Euclidiana.

O caso desse gesto, assim como de outros analisados nessa pesquisa, conforme Scheffer (2001, p. 188), "[...] constituiu-se, especialmente, num tipo de representação utilizada pelos estudantes, que os ajudou a explicitar as ideias". Passos (2000) também está na mesma direção, afirmando que os desenhos, os gestos, a fala, os modelos manipuláveis são tipos de representação. Não estou olhando especificamente o gesto para representar a ideia de *plano*, mas, ao invés disso, o papel exercido pela gesticulação como modo de auxiliar o discurso do aluno, bem como organizar as ideas de seu pensamento durante suas explicações acerca de como está compreendendo e/ou expressando determinado resultado matemático.

O segundo exemplo inserido nesse eixo ocorreu durante a construção do conceito de *retas* perpendiculares e/ou *ortogonais*. A dupla Ana e Luciana (Quadro 46, Situação 2), manipulou palitos e sólidos geométricos. As acadêmicas utilizaram uma representação de prisma triangular e associaram a uma rampa de acessibilidade construída em alvenaria. Elas colocaram um palito vertical (imagens da situação 2, Quadro 46) tocando uma das faces do sólido, (considerando a rampa solta) conforme pode ser constatado na fala "*que essa reta pertence a esse daqui*". E, em seguida, houve a produção de um gesto com o dedo indicador deslizando em linha reta sobre a face inclinada, dando a entender a presença de uma *reta* contida no *plano*, porém, não tocando o palito vertical. Essa ação pode ser percebida na pergunta "*ela não é perpendicular à reta que tá passando aqui, é?*" (primeira imagem do Quadro 46, Situação 2).

Depois, começaram um processo de experimentação com um segundo palito, deslizando-o sobre a face inclinada, de tal modo que esse, ora tocava o palito vertical, ora estava em uma posição central; ora tocava uma das quinas do sólido e, simultaneamente, a mesa. Esses cenários podem ser percebidos na sequência de imagens da Situação 2 do Quadro 46.

A dúvida de Ana residia no fato de uma *reta* que não tocasse o palito vertical. Para ela, não poderia ser uma *reta* perpendicular, uma vez que não houve *ponto* de interseção. Argumentou: "*perpendicular mesmo é só essa daqui que tá passando aqui*". Essa fala ocorreu durante a movimentação do palito de tal maneira que esse tocou o que estava na posição vertical, ou seja, *retas* perpendiculares. Para concluir a definição das *retas* ortogonais, a aluna disse: "*vindo pra cá, ela pode até ter um ângulo de 90º, mas, não é perpendicular*", ou seja, expôs a condição de ortogonalidade entre duas *retas*.

Uma possível lacuna nesse debate pode ter sido a ausência de um questionamento acerca do momento em que as alunas concluíram uma posição entre *retas* perpendiculares. Nessa ocasião, eu deveria ter indagado se aquela disposição também poderia ser um exemplo de *retas* ortogonais, uma vez que, toda *reta* perpendicular implica ser ortogonal, mas o contrário não é verdade. No entanto, durante outras perguntas feitas por mim, entrei nessa temática.

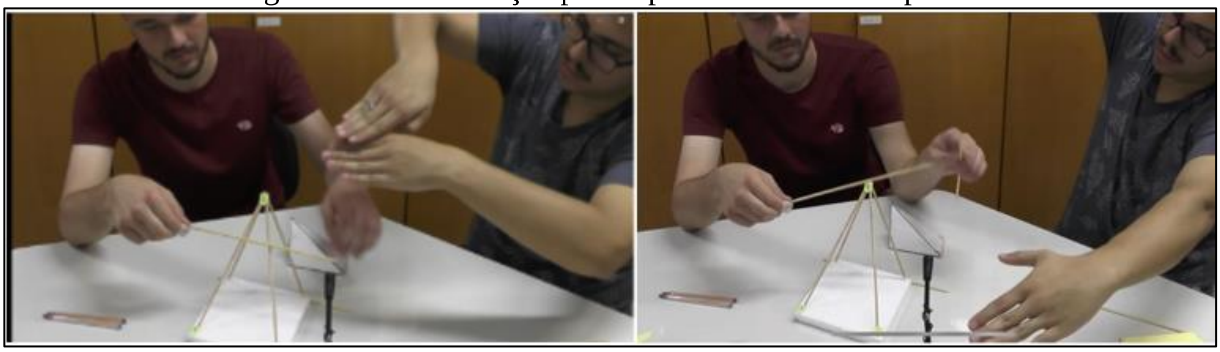
A construção da dupla quando recorreu a um sólido geométrico que representasse um prisma triangular, bem como, posicionou um palito verticalmente sobre uma das faces retangulares permitiu a visualização das distintas posições relativas entre as *retas* que estavam sendo testadas. Esse exemplo pode indicar a potencialidade das manipulações em materiais de natureza física como meio de desenvolver a visualização espacial.

"*Ela não é perpendicular a uma reta que tá passando aqui, é?*" O que revelou essa pergunta feita por Ana? O gesto que acompanhou essa fala foi parte da representação da noção de *reta.* A intenção da aluna foi materializar esse ente abstrato. Nesse sentido, estou de acordo com Bairral (2017, p. 106), quando afirma que "do mesmo modo que os gestos que usamos para nos comunicar, as manipulações que fazemos na tela de um dispositivo móvel constituem uma forma de transparecer e materializar o pensamento no ato comunicativo". Entendo que a manipulação e/ou gesticulação de Ana sobre a superfície da face do prisma pode ter tido a mesma intencionalidade comentada por esse autor. Além do mais, segundo Okumus e Hollebrands (2019), o gesto com o dedo indicador deslizando em linha reta produzido por Ana é dinâmico e, também externalizou um conjunto de pontos, nesse caso, representação de uma *reta*.

Para concluir as discussões desse eixo, compartilho o caso da dupla Leonardo e Thiago. Inicialmente, o *plano* (representado pela *face VAB*) e a *reta* (representada pela *reta* suporte *CD*) foram indicados por meio de gestos dêiticos. No primeiro caso, Leonardo abriu a palma de sua mão e deslizou-a sobre a *face VAB*. Já no segundo, juntou os dedos de uma das mãos, fazendo movimentos com eles para a borda do pedaço de isopor que sinalizava os *pontos C* e *D*. Essas gesticulações também ocorreram em sincronismo com a fala de Leonardo. Na frase: "*Esse plano aqui. A reta CD é paralela à base ABV*" houve uma maior mobilidade dos corpos dos dois alunos, tendo em vista que Leonardo deu uma pausa em sua fala e, a partir daí, a dupla inclinou os troncos dos corpos para identificar os *vértices* que formam a *face ABV*, conforme imagem do Quadro 46, situação 3.

Essas ações dos alunos potencializam a visualização. Na fala "*Então eu vou ter a reta CD aqui*", a *reta* foi concebida como se fosse um palito, tendo em vista que Leonardo fez questão de segurá-lo e colocá-lo ao lado da borda do pedaço de isopor. Depois disso, o estudante fez movimentos com uma de suas mãos para mostrar a *face VAB* (representação do *plano*). Em determinado trecho do diálogo, Leonardo afirmou que o *plano* nunca iria se encontrar com a *reta*. Nesse momento, houve outro gesto para representar o ente *plano* que foi expandido nos quatro sentidos possíveis por meio de suas duas mãos abertas com as palmas para baixo e coladas. Leonardo inclinou-as e começou a verbalizar a expressão "*vai embora para cá*", falada quatro vezes e movimentando-as de acordo com o comando indicado pela voz. A Figura 30 elucida tal gesticulação:

Figura 30 - Gesticulação para representar a ideia de plano



Fonte: elaborada pelo autor.

A infinitude do *plano* nos quatro sentidos pode ser identificada por meio do uso da expressão, *vai embora para cá*. À medida que produziu essa gesticulação, o estudante movimentou a sua mão no sentido indicado por sua fala.

Do recorte que trouxe da dupla Leonardo e Thiago, cinco falas serão interpretadas à luz do referencial teórico, tendo em vista que elas remetem às gesticulações como parte integrante de entes primitivos e/ou de alguns conceitos matemáticos. São elas: "*Esse plano aqui*", "*Num* *é esse plano com a reta? "É o plano com a reta"*, "*A gente está estudando o plano*" e "*vai embora para cá*". Essas frases foram ditas no mesmo instante em que a palma da mão de Leonardo ficou aberta e realizando movimentos como se estivesse deslizando sobre a face da representação de pirâmide. Elas remetem à noção de *plano,* que foi concebido como se fosse uma parte do corpo humano.

A ação intencional por meio do gesto realizada por esse aluno auxiliou seu colega a reconhecer a face do sólido como uma parte do *plano.* Nesse contexto, corroboro a asserção de Bairral (2023, p. 52): "muitas vezes, nosso corpo interage com nossa fala e, juntos, corpo e fala ajudam a quem nos vê e ouve a significar melhor a informação". Assim, a linguagem verbal e o deslizamento da mão sobre uma face imaginária possibilitou uma melhor visualização e comunicação do que estava sendo dito. Além disso, conforme McNeill (1992), os gestos têm significados que são exibidos por si mesmos. Ou seja, a mão de Leonardo foi utilizada para representar um *plano*, por isso o gesto é parte da representação do ente primitivo. O uso recorrente desse membro superior para indicar a ideia de *plano* foi explicado por Sousa (2019, p. 17):

> Também se observa nas figuras planas ou em formas delimitadas por planos, o gestuante auxiliar-se da própria configuração da mão para sugerir a forma destas figuras e, na maioria das vezes, são utilizadas as configurações onde temos evidenciada a palma da mão, disto são exemplo os termos: "Plano", "Face", "Base", "Rampa".

A fala "*vai embora para cá*" repetida quatro vezes e acompanhada pelos movimentos das duas mãos também estava se referindo ao *plano*. Esse gesto também foi dinâmico, conforme entendimento de Okumus e Hollebrands (2019). Por ser um ente abstrato representado através de um gesto, entendo que se tratou de uma dimensão metafórica, conforme dimensões propostas por McNeill (2006). Em consonância com essas ideias, Zhao (2018) chama a atenção para uma das características dessa gesticulação, a saber, ao invés de representar um evento ou algo concreto, o gesto metafórico está relacionado a uma ideia abstrata.

O uso do gesto de Leonardo com suas duas mãos e, em concomitância com a fala "*vai embora para cá*" foi relevante, tendo em vista que os gestos "podem fornecer representações visuais de um objeto matemático que não são ou não podem ser representados na inscrição" Krause (2016, p. 16, *tradução minha*).

A análise dos três casos que compuseram esse eixo evidenciou que em dois deles houve produções de gestos para comunicar a ideia de *plano* por meio de um mesmo gesto. Esse ente foi concebido como se fosse a palma da mão em movimento. Isso pode ser constatado nas falas dos alunos, uma vez que elas são iniciadas no mesmo instante em que se produziu o gesto. No entanto, de acordo com Elia, Gagattsis e Heuvel-Panhuizen (2014), a fala é segmentada e, sua produção, ocorre linearmente ao longo do tempo, enquanto a mensagem do gesto é comunicada de modo imediato. A imagem dele está em função do todo, além disso, não contém significados isolados, já que não pode ser decomposto em partes. Assim, a palma da mão aberta nos contextos de discussão de noções geométricas indicou a ideia de *plano*.

Postas as considerações deste eixo, cabe salientar alguns comentários. Em um contexto de sala de aula no qual há produções gestuais dos alunos durante construção de conceitos matemáticos, recomenda-se que o professor esteja atento à ideia matemática referente à gesticulação produzida, uma vez que, embora essa seja parte da representação do conceito matemático, ela não é o objeto matemático em si. Nesse sentido, o educador pode atenuar essas imprecisões entre gesto e o conceito matemático. Outro ponto a ser levantado diz respeito ao fato de que nem sempre o aluno que visualiza a produção gestual do colega compreende o significado matemático por trás dessa gesticulação. Também é importante a figura do professor nesse cenário, pois tal personagem pode garantir, em termos matemáticos, que as propriedades comunicadas pelos gestos estejam cada vez mais próximas do real.

7.3 Comunicação estabelecida por meio de gestos: acenar a cabeça, olhar e expressão facial

Discuti no eixo *Comunicação estabelecida por meio de gestos: acenar a cabeça, olhar e expressão* facial duas situações ocorridas com as duplas Leonardo e Thiago e José e Edson. No Quadro 47, logo adiante, compartilho as transcrições das falas e dois VCD, sendo uma para cada dupla.

A análise dos dados referentes a esse eixo permitiu perceber um fato curioso no que concerne ao aceno de cabeça. Dos 7 VCD que discuti nessa temática, em 6 deles o gesto foi produzido por Thiago. Os contextos em que a gesticulação foi realizada se referiram a situações em que o colega Leonardo produziu e gesticulou noções abstratas da GEP. Nesses casos, Thiago permaneceu em silêncio e observou atentamente aos movimentos produzidos por Leonardo, sendo que, na maioria das vezes, o aceno de cabeça ocorreu no término da ação realizada por Leonardo. Além disso, os olhares de Thiago estavam direcionados para mim.

Quadro 47 - Diálogo do eixo: comunicação estabelecida por meio de gestos

<table>
<tr><th>Dupla
Código Qr</th><th colspan="2">Diálogos</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Leonardo e Thiago (Situação 4)</td><td>Leonardo: traçar uma reta aqui perpendicular, passando por esse ponto, encontrando esse. Vamos supor que eu passe duas retas perpendiculares aqui. Não vou colocar em cima do ponto pra não ficar tendencioso. Então, aqui a gente tem duas retas perpendiculares a essa reta.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Leonardo: E também perpendiculares à reta aqui de baixo. Não tem como ter outra reta, porque se eu mover para cá, meus ângulos não tem 90º, então não vai configurar uma reta paralela. Então para ser paralela a gente tem que ter um ângulo de 90º, nesse caso.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Leonardo: Então o único caso é esse, porque está limitando esse ponto aqui. Claro que se a gente tirar o ponto, daí fica mais amplo, a gente tem outras possibilidades.</td></tr>
<tr><td>Edson e José (Situação 5)</td><td>Edson: O que você está falando?
José: Essa reta azul, ela é perpendicular ao plano, então ela é perpendicular a todas do plano.
Edson: Ok, todas nesse ponto, né?

José: Não. Ela é perpendicular a todas do plano. Qualquer reta contida no plano, se ela é perpendicular ao plano.</td><td>Edson: Peraí, aí a gente tem que voltar àquela conversa da definição de ortogonalismo e perpendicularismo, mas ok, tô com vocês, ela vai ser perpendicular se a gente usar a noção de perpendicularismo com a de projeção também.
André: Como? Com a noção de projeção você falou? Representando aí, como eu faria?
Edson: Essa reta, ela vai ser perpendicular a essa, porque essa reta é perpendicular ao plano, mas se você está com uma projeção lá naquela.. lá do outro lado, ai como ela é perpendicular a isso daqui e isso daqui está dentro desse plano, imagina que... então agente consegue arrastar essa reta pra uma concorreência com as outras duas e agente sabe que concorrência de retas vai ser um único ponto e justamente é esse ponto e elas vão ser perpendiculares.
André: Mas eu não entendi porque</td></tr>
</table>

		você disse "eu tô com vocês". **Edson:** *Não. Agora eu estou com vocês.* **André:** *E antes não estava porque?* **Edson:** *Porque, alguns livros didáticos distinguem a ideia de ortogonalismo da de perpendicularismo, pra mim, se a gente quiser trabalhar com a ideia de perpendicularismo, tem que existir a ideia de concorrência, e, essa reta claramente não é concorrente a essa, são retas que são reversas.*

Fonte: elaborado pelo autor.

O primeiro exemplo que apresentei para esse eixo foi o da situação 4, Quadro 47, da dupla Leonardo e Thiago e tratou sobre a definição de *retas* paralelas. Os argumentos dos alunos foram apoiados em três resultados da GEP: (I) *se duas retas são perpendiculares, então toda reta paralela a uma delas é perpendicular à outra;* (II) *se duas retas são paralelas, então toda reta perpendicular a uma delas é perpendicular à outra;* e, por fim, (III) *se duas retas são paralelas, então toda reta que forma ângulo reto com uma delas forma ângulo reto com a outra*.

O diálogo iniciou a partir da seguinte indagação: dados dois *pontos* quaisquer, sabemos que eles determinam uma única *reta.* Supondo um terceiro, não alinhado com os anteriores e pensando nas *retas* que passam por esse último de tal modo que ela e/ou elas seja(m) paralela(s) à que é determinada pelos dois *pontos* anteriores, o que vocês entendem desse resultado? Para essa discussão, os alunos utilizaram palitos, isopor e alfinetes que estavam sobre a mesa. Recorreram aos dois alfinetes de cor verde e um palito, depois pegaram outro alfinete de cor branca. Como tinham três *pontos* não colineares, informaram que um segundo *plano* ficaria determinado. Para isso, recorreram a outro pedaço de isopor (primeira imagem da situação 4).

Diante dessas manipulações, os alunos afirmaram que apenas uma *reta* passava por esse *ponto* de tal modo que fosse paralela àquela que era intersecção entre os dois *semiplanos*, além disso, começaram a realizar testes com os palitos para confirmar o que tinha sido dito. Em princípio, os dois palitos estavam a uma mesma distância de um para o outro (primeira imagem da situação 4), isto é, a intenção foi mostrar que eles representavam *retas* paralelas. Um terceiro palito foi pego por Leonardo. O aluno, implicitamente, quis chamar a atenção para o resultado II, ou seja, partiu do fato da existência de duas *retas* paralelas e, posteriormente, pegou outro palito, colocando-o em uma posição de tal modo que aparentasse ser perpendicular às duas *retas*, depois pegou outro palito e fez o mesmo procedimento, como pode ser percebido nas duas primeiras imagens da Situação 4, no Quadro 47.

As manipulações feitas por Leonardo geralmente foram acompanhadas de gesticulações. Por exemplo, na fala "*Então, aqui a gente tem duas retas perpendiculares a essa reta e também perpendiculares à reta aqui de baixo*" ocorreram gestos dêiticos para indicar que os dois palitos colocados por último são perpendiculares aos que já estavam apoiados no pedaço de isopor. Nesse contexto, o gesto de apontar foi utilizado para produzir explicações.

Posto isso, Leonardo afirmou "*Não tem como ter outra reta, porque se eu mover para cá, meus ângulos não tem 90º, então não vai configurar uma reta paralela*". Essa declaração foi para concluir que a *reta* passando pelo alfinete branco era única. O argumento dado pelo aluno foi coerente com o resultado III que tratou dos ângulos retos existentes entre duas *retas* paralelas cortadas por duas perpendiculares. Isso pode ser constatado quando o discente moveu um dos palitos, deixando-os com angulações inferiores e/ou superiores a 90º.

O aceno de cabeça foi um gesto produzido por Thiago sem a ocorrência da fala. Essa situação está em concordância com uma escola de ideias que aponta para casos em que o gesto pode não estar acompanhado da fala. Essa incompatibilidade entre o gesto e fala foi debatida na pesquisa de Elia, Gagattsis e Heuvel-Panhuizen (2014). Esses autores comentam que, na maioria das vezes, os gestos e a linguagem foram usados de maneira simultânea pela criança investigada na pesquisa deles. Por outro lado, conforme os mesmos pesquisadores, houve a produção de um gesto antes da pronúncia da palavra a que esse movimento se referia. De modo geral, no tocante ao conteúdo do gesto e da fala nos casos de incompatibilidade, há duas subcategorias, a saber: gestos que complementam a fala e aqueles que substituem a fala. Ainda, na referida pesquisa, há menção de que essa incongruência entre gesto e fala é relevante, em particular nas situações em que os alunos não dispõem de palavras que externalizam os seus pensamentos.

Conforme McNeill (1992), quando os gestos não vêm acompanhados da fala não pode ser denominado de gesticulação. Entretanto, a intenção comunicacional do aluno para os que estavam presentes naquela cena possibilitou que entendêssemos que o balanço da cabeça para cima e para baixo indicou que Thiago compreendeu e/ou expressou o que estava sendo dito por seu colega Leonardo. Nessas circunstâncias, o aceno de cabeça pode ser entendido como um gesto que substitui a fala. Em síntese, os dados revelaram casos em que ocorreram movimentações da cabeça sem o acompanhamento da fala para indicar que possivelmente houve uma compreensão e/ou expressão acerca do que estava sendo gesticulado e falado pelo colega de dupla.

As falas de Leonardo, "*e também perpendiculares à reta aqui de baixo*", "*meus ângulos não vão ter 90º, então não vai configurar uma reta paralela"* e, "*Então para ser paralela a* *gente tem que ter um ângulo de 90º, nesse caso*” foram os momentos em que Thiago acenou sua cabeça para cima e para baixo, como se estivesse confirmando o pensamento do colega. Ao meu ver, as três vezes em que Thiago produziu esse movimento podem ser relacionadas ao que McNeill (1992, p. 132) expõe: “o gesto nos permite observar os pensamentos à medida que eles ocorrem”. Nesse sentido, o gesto também cumpriu a função comunicacional apontada por Sfard (2009). Além disso, conforme defendido por Pereira (2010), os gestos não podem ser resumidos ao movimento dos braços e mãos e, sim, a mais partes do corpo.

O último exemplo que compartilhei desse eixo envolveu a dupla José e Edson. O dialogo versou sobre o TFP e também foi acompanhado pela produção de gestos, além de manipulações para dar ênfase às gesticulações e à linguagem verbal. Após a conclusão da atividade prática com papel sulfite, José, ao responder um questionamento proposto por mim querendo saber se uma *reta* pertencente ao *plano* (mesa), mas que não passa pelo *ponto* de *intersecção* (cruzamento das linhas vermelhas e azul, Quadro 47), seria perpendicular ao *plano*, disse: “*Essa reta azul, ela é perpendicular ao plano, então ela é perpendicular a todas do plano*”. Depois dessa afirmação, Edson indagou: “*Ok, todas nesse ponto, né?*” (Imagem, Quadro 47, situação 5).

Durante essa fala, Edson produziu um gesto com o dedo indicador com a intenção de apontar para o local onde seria a interseção entre as linhas vermelhas e azul. Essa gesticulação foi um divisor de águas, pois a partir dela houve embate e, além disso, mostrou que “o movimento de apontar é um elemento fundamental da comunicação humana”, conforme discutido em Pereira (2010, p. 70). Feito isso, o aluno olhou fixamente para José enquanto gesticulava. O argumento de Edson residia no fato de que somente os casos de *retas* que passam por esse *ponto* são perpendiculares à *reta* representada pela cor azul. Em seguida, José prosseguiu *“Não. Ela é perpendicular a todas do plano. Qualquer reta contida no plano, se ela é perpendicular ao plano”.*

O argumento dado por José foi embasado no fato de que qualquer que seja um par de *retas* perpendiculares, ele também é ortogonal, no entanto, alguns pares de *retas* ortogonais podem não ser perpendiculares, isso acontece quando elas não se intersectam. Edson refletiu por alguns segundos e afirmou*: “Peraí, aí a gente tem que voltar àquela conversa da definição de ortogonalismo e perpendicularismo, mas ok, tô com vocês, ela vai ser perpendicular se a gente usar a noção de perpendicularismo com a de projeção também*”.

Posteriormente, interroguei *“Com a noção de projeção? Como? Representa aí”*, Edson continuou: *“Essa reta vai ser perpendicular a essa, porque essa reta é perpendicular ao plano, mas, se você está com a projeção naquela lá do outro lado, como ela é perpendicular a isso* *daqui, e isso daqui está dentro desse plano, então a gente consegue arrastar essa reta para a concorrência com as outras duas e, a gente sabe que a concorrência de reta vai ser um único ponto, é, justamente nesse ponto elas vão ser perpendiculares".* No momento em que o aluno mencionou o termo "arrastar", estava se referindo a uma caneta apoiada sobre a mesa, mas não passava pelo *ponto* de intersecção (linhas vermelhas e azul). Com a intenção de instigar os alunos para que expusessem mais detalhes acerca do que estavam pensando a respeito do TFP, continuei o diálogo. Na ocasião, queria saber o motivo de Edson afirmar "*ok, estou com vocês*".

O conceito de *retas* perpendiculares como um caso particular de *retas* ortogonais foi palco de discussão da dupla Edson e José. Nesse diálogo, recordo que o aluno declarou ter realizado estudos em alguns livros de Matemática do ensino superior e notou em certas obras a distinção que os autores fazem entre esses dois conceitos matemáticos. Quando Edson disse "*e essa reta claramente não é concorrente a essa, são retas que são reversas",* estava referindo-se à caneta em uma posição afastada da produção feita com papel sulfite. A caneta e a linha azul (*reta* perpendicular ao *plano* mesa), são, conforme expõe esse aluno, exemplos de *retas* reversas, o que de fato ocorre. Vale ressaltar que a caneta afastada sobre a mesa não pode encontrar a dobra (linha azul). Caso encontrasse haveria um terceiro *plano* contendo as duas.

O foco desse eixo foi o movimento que Edson realizou com seus olhos durante o momento em que José disse: "*Não. Ela é perpendicular a todas do plano*". Nessa ocasião, aquele aluno ficou pensativo e fixou seu olhar para cima. As reflexões que ponho foram direcionadas para esse detalhe, embora sabendo que diversas temáticas poderiam ser exploradas a partir do recorte apresentado. A atitude de Edson me permitiu fazer algumas inferências.

Em primeiro lugar, enfatizo a formação de imagens mentais por Edson, uma vez que elas, segundo Viana (2005, p. 41), "podem envolver representações mentais em qualquer modalidade dos sentidos". Nesse contexto, o aluno pode ter rememorado em seu pensamento a ideia da projeção entre *retas.* Quando ele inclinou seus olhos para cima, provavelmente tenha tido uma visualização da *reta* (caneta apoiada sobre a mesa) sendo arrastada de tal maneira que a linha de cor azul (representação de *reta*) fosse perpendicular à caneta.

Ainda, conforme a pesquisadora anterior, é por meio das imagens mentais que os alunos conseguem tornar presente no pensamento, características do meio ambiente, sendo que aquelas podem ser externas ou até mesmo estar no mundo das ideias. Para Sutherland (1993), as imagens mentais são perceptíveis somente por meio de representações externas, entre elas, a fala, o gesto e a gráfica.

Exposto isso, Edson teve o auxílio dos materiais de natureza física, mas também pode ter acessado mentalmente o seu mundo imaginário para visualizar *retas* e *planos* no *espaço* euclidiano. Assim, provavelmente tenha criado imagens nesse ato de pensar. Em segundo lugar, o movimento dos olhos para cima fez com que o aluno também inclinasse sua cabeça. Essa ação pode ter sido indicativo de um ato de pensamento. Por essa perspectiva, corroboro Pereira (2010) ao defender que expressões fisionômicas também são gestos.

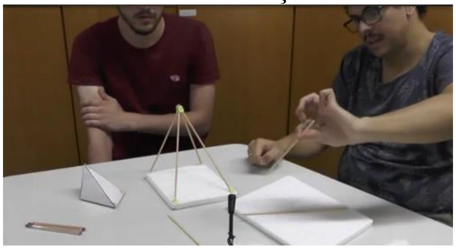
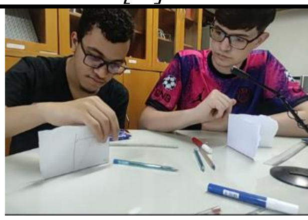
O aceno de cabeça para confirmar ou negar algo, assim como o olhar, interpretado por Carneiro (2013, p. 113), "como sendo uma base para o estabelecimento da comunicação. Ele [olhar] coloca de certa forma a gestualidade e a oralidade em um texto". Ambos (gesto e olhar), tiveram duas funções distintas em um contexto de produção de conhecimentos matemáticos, discutido nesse eixo. A primeira foi mostrar a veracidade dos argumentos postos por Leonardo, bem como dar indícios de que houve compreensão e/ou expressão do assunto comunicado pelo seu colega. A segunda foi a formação de imagens mentais por meio de gestos com os olhos. Além dessas funções, situações em que determinados alunos não realizam o aceno de cabeça também são passíveis de ocorrência, entretanto, isso não é fator decisivo para saber se estão compreendendo algumas propriedades matemáticas. Esses personagens geralmente visualizam e escutam com atenção ao que está sendo dito.

7.4 Inclinação do corpo para produzir matemática

As discussões que trouxe para compartilhar no eixo *Inclinação do corpo para produzir matemática* estão calcadas nas contribuições de três duplas. Leonardo e Thiago, Humberto e Lucas e, José e Edson. No Quadro 48, apresento os dados que me possibilitaram fazer algumas inferências.

Quadro 48 - Diálogo do eixo: Inclinação do corpo para produzir matemática

Duplas **Código Qr**	**Diálogos**	
Leonardo e Thiago	**Leonardo**: *se eu fizer assim e assim; elas podem não estar nesse mesmo plano, mas tem um plano aqui entre elas. Entendeu? É a mesma coisa aqui, por exemplo, pode acontecer se caso a gente tenha uma reta reversa, essa reta reversa, essa reta é reversa a essa. Só que tipo, esse plano ele é paralelo a essa reta.* **André**: *Esse plano aí horizontal é paralelo a essa reta aí? Porque?* **Leonardo**: *É. Porque eles não têm pontos em comum.*	
	Leonardo: *Se eu fizesse assim com a*	**Leonardo:** *Nesse caso, que na*

(situação 6)	*reta, eles teriam de chegar em um ponto que eles teriam que ter um ponto comum, eles teriam uma interseção.* 	*paralela é, a gente não tem a interseção. Então, nesse caso que não tem uma interseção, podemos ter uma reta reversa. Entendeu? Mas como está numa relação entre plano e reta, aqui a gente não tem uma interseção, então elas são paralelas. Ela teria que estar assim, ou assim ou assim. Daí nós chegaríamos a um momento em que elas iam cruzar.* **Thiago**: *Qualquer coisa a mais que 180º que ela estivesse posicionada ou menos que 180º ela já não seria paralela.* **Leonardo**: *É, mas nesse caso aqui eles vão ter pontos em comum e a mesma coisa aqui... ahhh, uma coisa [...].*
Humberto e Lucas (situação 7)	 **Humberto**: *Acho que seria perpendicular* **André:** *Seria o que?* **Humberto:** *Perpendicular a todas as retas do plano* **André**: *E uma reta que não passasse pelo ponto de intersecção?* **Lucas e Humberto:** *Também seria* **André**: *Seria perpendicular?* **Lucas:** *Sim* **André:** *Seria o quê?* **Lucas e Humberto:** *Ortogonal* **André:** *Porque seria ortogonal?* **Lucas**: *A gente poderia...* o aluno fica pensativo por alguns segundos. *A gente poderia. Para afirmar isso! Como essa reta está contida no plano, isso aqui é perpendicular ao plano. A gente poderia fazer um abuso de notação.*	 **Lucas:** *A gente poderia meio que transportar...e ia está continuando.* **Humberto:** *formar um ângulo de 90º* **Lucas:** *Perpendicular.*
	Edson: *Se eu não me engano, agora, a Rúbia definiu o diedro como a projeção ortogonal, como ela definiu, vou tentar puxar aqui: o diedro é justamente você pegar esse negócio, esse ângulo entre planos, e fazer uma projeção ortogonal sobre a parede, essa é a definição de como calcular o diedro, você calcula isso e projeta na parede. Isso, na parede, vai gerar duas retas, que vão estar assim.*	**Edson**: *e aí, existe um teorema que fala que essas retas tem a mesma angulação do diedro. Só que, acho que o processo construtivo de fazer isso é justamente o que o Álvaro falou, você pega a reta de intersecção, pega uma perpendicular e outra perpendicular; num mesmo ponto ou em pontos distintos e fazer a*

José e Edson (Situação 8)		*projeção.* **André**: *Então, quer dizer que pode ser em pontos distintos?* **Edson**: *Só tem que ser perpendicular e na mesma reta. Que é a intersecção. Mas, também, pelo poder da projeção, elas não precisam ser perpendiculares entre si, podem ser ortogonais.*

Fonte: elaborado pelo autor.

No primeiro exemplo que interpretei como a presença da inclinação do corpo para a produção de conhecimentos matemáticos, houve atravessamentos de diversas noções da GEP, a saber, determinação de *planos* por meio de duas *retas* paralelas, *retas* reversas, *reta* paralela a um plano. Trouxe a dupla Leonardo e Thiago, Quadro 48, Situação 6, para principiar as reflexões desse eixo.

O diálogo foi permeado por diversas manipulações. Leonardo recorreu a um palito de churrasco[53], deixando-o sobre o pedaço de isopor e, em seguida, segurou outro palito no ar de tal modo que os dois tivessem uma mesma distância aproximada. Esse acadêmico concebeu os palitos como se fossem representações de *retas*, isso, a meu ver, pode ser constatado no momento em que Leonardo utilizou o pronome "*elas*" para indicar que visualizou *retas* no *espaço*. Ao mesmo tempo em que se referiu ao posicionamento das *retas*, também produziu gestos por meio do dedo indicador tocando algumas vezes levemente no pedaço de isopor para chamar a atenção que esse material representa um *plano*, além disso, comunicou que as duas *retas* não estão contidas no mesmo *plano* (isopor sobre a mesa). Nesse caso, a condição de existência de *retas* paralelas no espaço foi por meio da determinação de outro *plano* com um par de *retas* paralelas contidas em um mesmo *plano*. Para resolver isso, Leonardo pegou outro pedaço de isopor, deixando-o um pouco inclinado e fazendo com que suas bordas tocassem nos dois palitos.

Conforme Carvalho (1993), para definir *retas* paralelas no *espaço* é preciso fazer uma separação em dois casos para o fato de as duas *retas* não possuírem um *ponto* em comum. Segundo o autor, ou elas estão contidas em um mesmo *plano* (paralelas), ou em planos distintos (reversas). Em ambos os casos, elas não possuem pontos em comum. Após a discussão do paralelismo de *retas,* Leonardo fez algumas considerações acerca das *retas* reversas (primeira

[53] No decorrer de todo o texto, exemplifico situações nas quais os alunos manipularam palitos de churrasco, canetas, pedaços de isopor, folhas de sulfite, alfinetes, dentre outros materiais. Nesse contexto, entendo que os participantes estavam considerando as ideias de *retas*, *planos* e *pontos.* É importante chamar atenção para esse fato, tendo em vista que as *retas* e os *planos* são ilimitados e, por fim, o *ponto* não possui forma, nem dimensão.

imagem da situação 6) e, pouco tempo depois, retornou à discussão envolvendo as *retas* paralelas, mostrando situações distintas nas quais o palito poderia encontrar o *plano* (isopor apoiado sobre a mesa).

As falas de Leonardo ocorreram de tal maneira que o seu corpo inclinava seguindo um ritmo conforme realizou manipulações na representação de *reta*. A intenção foi mostrar que, caso o palito tivesse uma angulação diferente de 180º em relação ao *plano* (mesa), tocaria no isopor em determinado ponto, sendo assim, não seriam *retas* paralelas (segunda imagem da situação 6).

Embora seja perceptível que o corpo de Leonardo inclinou quando foi mostrar em que circunstâncias o palito atravessaria o pedaço de isopor, concentrei-me nas inclinações realizadas por Thiago. A primeira delas ocorreu quando aquele aluno disse "*podemos ter uma reta reversa. Entendeu?* Nesse momento, Thiago abaixou sua cabeça para ter uma melhor visualização dos dois palitos candidatos a *retas* reversas. Mas o assunto que estava sendo discutido era a relação entre *retas* e *planos.*

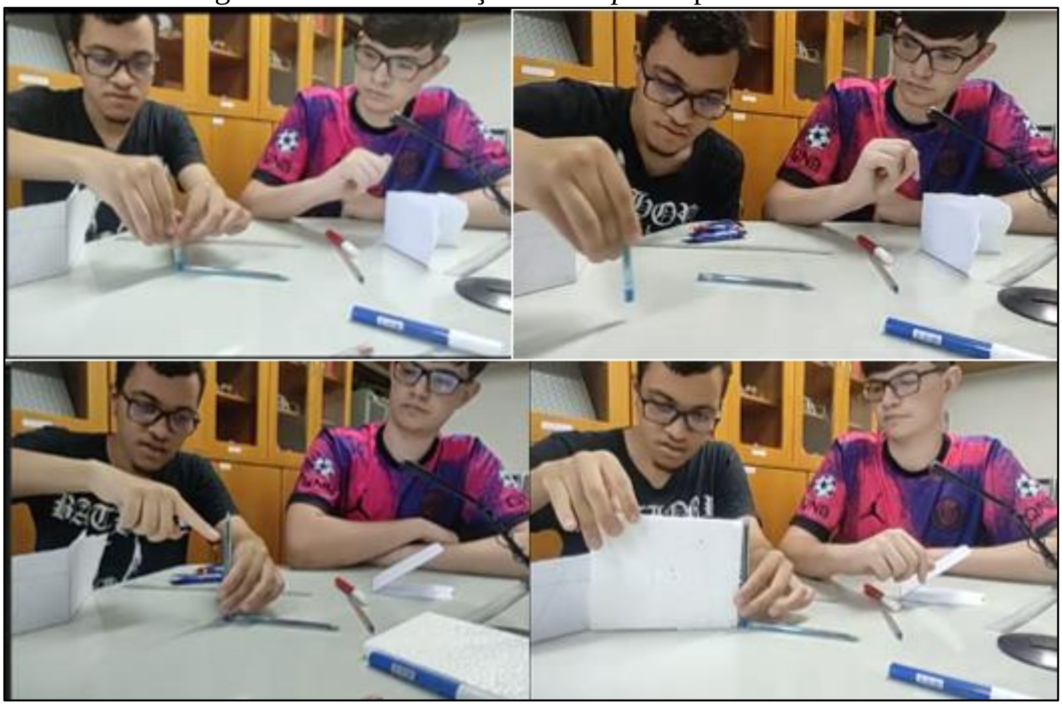
A segunda ocorreu quando Leonardo disse: "*aqui a gente não tem uma interseção, então elas são paralelas*". Thiago inclinou seu corpo para o outro lado com intuito de ver as manipulações e as gesticulações produzidas por seu colega sob outra perspectiva. A postura de Thiago pode ser explicada a partir das ponderações postas por Assis (2020, p. 440, grifo do autor): "o ambiente, as relações geométricas, a compreensão, o corpo e a mente agem todos juntos". Essa integração pode ser vista quando tal aluno deu continuidade ao discurso com a seguinte afirmação *qualquer coisa a mais que 180º que ela estivesse posicionada ou menos que 180º ela já não seria paralela*". Isso foi dito antes da produção de um gesto com a mão apontando para o palito.

Os dois casos são concebidos como gestos e são analisados conforme Amaral *et al.*. (1994), quanto às componentes não manuais. Nesses contextos, segundo os autores, elas são constituídas por: i) alterações das posições corporais (inclinação para trás, para frente e para o lado e rotação do corpo), ii) alterações das expressões faciais (abrir os olhos, erguer as sobrancelhas, franzir a testa, dentre outras) e, iii) posição da cabeça. O item ii) foi analisado no eixo anterior e, o iii) será discutido com mais detalhes nas discussões da dupla Humberto e Lucas.

A inclinação corporal realizada pelos alunos Humberto e Lucas ocorreu de tal maneira que seus corpos se movimentaram sincronicamente, como pode ser observado no início do diálogo da Situação 7, Quadro 48. Nesse eixo, também houve um trabalho integrado envolvendo os gestos, a linguagem verbal e as manipulações. No tocante aos primeiros, a intenção foi indicar a ideia de *plano* com os dedos sobre a mesa. Esse gesto foi realizado um pouco antes da fala de Lucas: "*como essa reta está contida*". Após essa fala, poucos segundos depois houve o gesto com a intenção de comunicar a ideia de *plano*. O sincronismo gesto-fala, defendido por McNeill (1992), foi recorrente na maioria dos dados que compõem esta pesquisa, salvo o caso desse aluno. No que concerne às manipulações, considerei relevante a realização da atividade prática com sulfite para discutir o TFP, um exemplo desse auxílio ocorreu quando Lucas arrastou o pedaço de papel sobre a mesa com a intenção de que o material tocasse em uma das extremidades da caneta (*reta* ortogonal à linha azul).

A discussão do TFP perpassou por diversos conceitos da GEP. Isso ocorreu com a maioria das duplas. À medida que elas entraram em um assunto diferente do que estávamos conversando, sempre procurei interrogá-las com o propósito de que expusessem mais de seus conhecimentos matemáticos. A continuidade do diálogo apresentado no Quadro 48 entrou no resultado de que uma terceira *reta* (representada por uma caneta com a extremidade apoiada sobre a mesa) seria paralela à *reta* de cor azul e, além disso, determinaria um outro *plano*. Na sequência de imagens, a seguir, os alunos realizaram distintas manipulações para mostrar a determinação do *plano*.

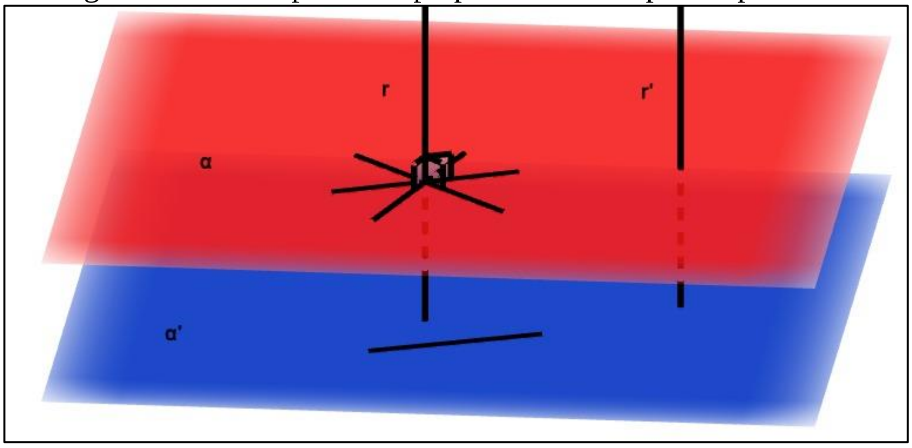
Figura 31 - Determinação de um *plano* por duas *retas*



Fonte: elaborada pelo autor.

As duas imagens da primeira linha registram o momento em que Lucas segurou uma caneta com as mãos e começou a realizar movimentos verticalmente com ela batendo levemente sobre a mesa. Seu objetivo foi chamar a atenção para o fato do resultado de que outras *retas* quaisquer também perpendiculares ao *plano* (mesa) são necessariamente paralelas à *reta* (linha azul). Para Carvalho (1993, p. 43), “duas retas distintas *r* e *r' perpendiculares a um mesmo plano são paralelas; dois planos distintos α e β perpendiculares a uma mesma reta r são paralelos*” (Figura 32).

Figura 32 – Retas paralelas perpendiculares a planos paralelos



Fonte: adaptado de Carvalho (1993, p. 43).

Vale ressaltar que a caneta foi concebida pela dupla como se fosse um ente matemático, a saber, *reta*. Essa ação finalizou quando a referida caneta ficou de frente para a linha azul (*reta*). Nesse instante, houve a produção de um gesto com o dedo indicador para mostrar o *plano* determinado pelas duas representações de *retas* (as duas imagens da segunda linha). Essa gesticulação pareceu não ser suficiente para o processo de visualização, tendo em vista que o aluno recorreu a um pedaço de isopor (ideia de *plano*) para mostrar a determinação desse ente por meio de duas *retas.*

Nesse sentido, de acordo com as considerações postas por Mainali (2021), o uso do pedaço de isopor pode ser visto como uma representação externa, uma vez que, em seus estudos, afirma que esse tipo de representação é o produto físico confeccionado por alunos e/ou professores para ensinar noções matemáticas. Por outro lado, o gesto com o dedo indicador partindo da caneta até a construção feita com papel sulfite para indicar a presença de um *plano*, pode ser entendido como uma representação interna, por exemplo, uma imagem mental (Mainali, 2021). Isso se justifica pelo fato de Lucas (primeira imagem da segunda linha, Figura 31), supor mentalmente a presença de um *plano* passando pela caneta até a linha de cor azul. Esse processo ocorreu no mundo das ideias do aluno, uma vez que ele indicou ter repertório acerca dos entes primitivos.

Algumas considerações merecem ser tecidas acerca dessa última situação. Primeiro, o foco estava na discussão do TFP, porém, conversar sobre esse *teorema* requer tocar em outros conceitos que são necessários para realizar a demonstração dele, a exemplo, a noção de *retas* ortogonais. Um segundo fato diz respeito à apresentação de relações importantes entre paralelismo e perpendicularismo, como é o caso representado pela Figura 32.

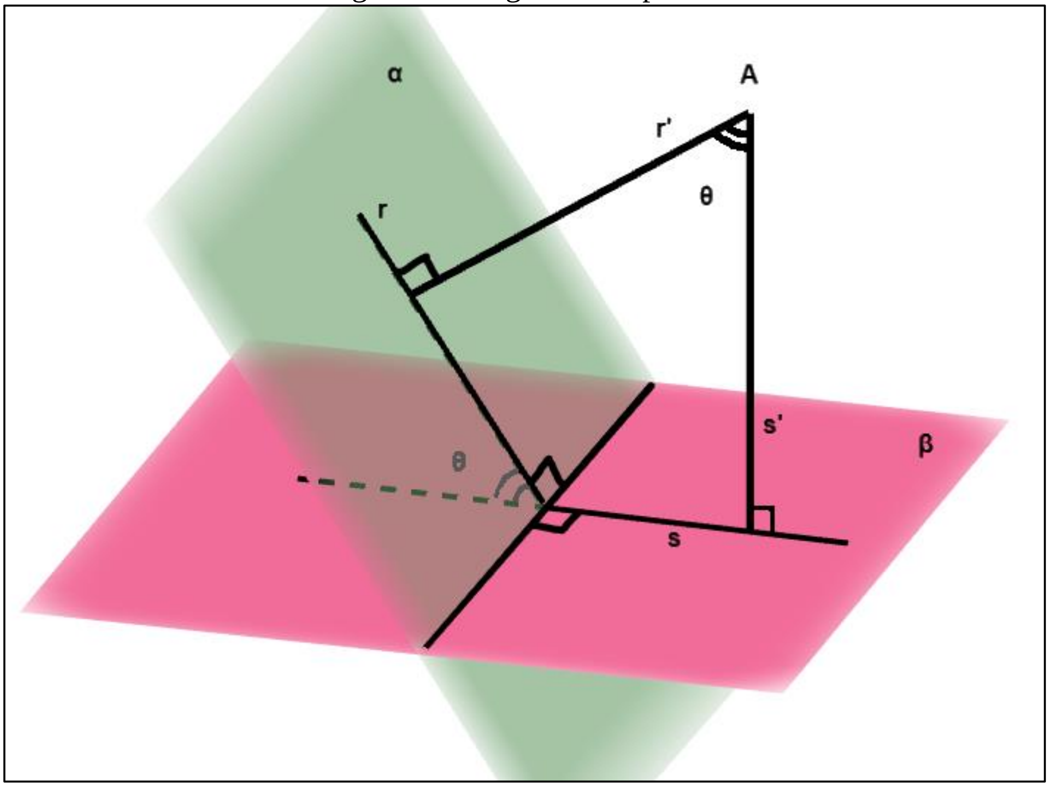
A inclinação corporal realizada por Humberto e Lucas se enquadrou no primeiro e terceiro itens das expressões não manuais propostas por Amaral *et al.*. (1994). Como pode ser visto no VCD (Situação 7, Quadro 48), o diálogo iniciou com os dois alunos baixando os seus corpos. Essa ação teve a intenção de olhar detalhadamente a relação entre a caneta, a linha azul e o *plano* mesa (primeira imagem, situação 7, Quadro 48). O olhar investigativo dos alunos permitiu que eles afirmassem: "*Acho que seria perpendicular a todas as retas do plano*". Eles estavam se referindo à linha azul (representação de *reta*).

Outros dois momentos em que Lucas inclinou seu corpo ocorreram durante duas falas. O primeiro é decorrente de uma indagação feita por mim: "*Por que seria ortogonal?*". A partir desse questionamento, o aluno voltou a baixar sua cabeça e olhou atentamente para o material manipulável confeccionado com papel sulfite. Depois disso, ficou em silêncio e, logo em seguida, iniciou um processo de exposição verbal com a seguinte fala: "*[...] poderia ... pra afirmar isso*". Esse discurso foi acompanhado por gesticulações e manipulações, sendo que essas últimas foram caracterizadas pelo deslizamento da produção confeccionada com papel sulfite, de tal modo que a linha azul contida nela tocasse a ponta da caneta.

Como último exemplo que compõe o eixo "inclinação do corpo para produzir matemática", resgato relatos nos quais os discentes expuseram pensamentos a respeito do conceito de diedro. Eles recorreram a pedaços de isopor para representar semiplanos, realizando manipulações com eles na intenção de visualizar o ângulo entre tais objetos matemáticos.

De acordo com Carvalho (1993, p. 72), "se α e β são secantes, traçamos um plano γ perpendicular à reta de intersecção de α e β, que corta α e β segundo as retas r e s, respectivamente". Segundo esse autor, por definição, a medida do ângulo entre os planos é igual à medida do ângulo entre as retas r e s, sendo um valor entre 0º e 90º (Figura 33):

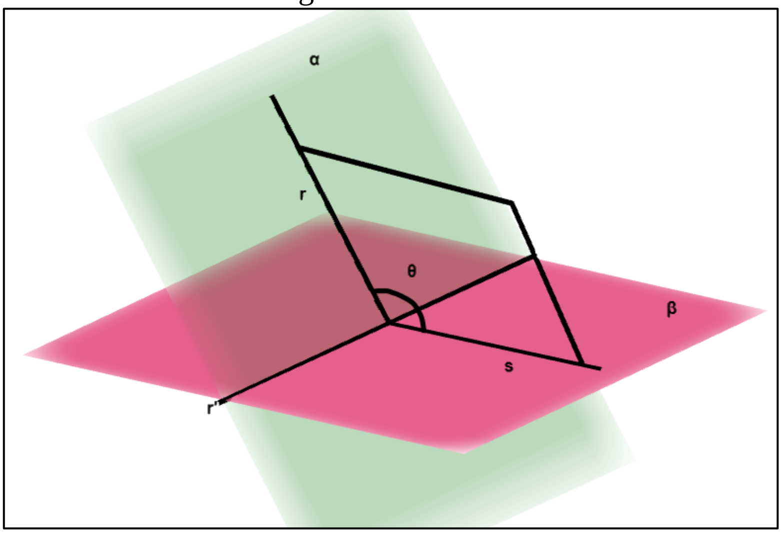
Figura 33 - ângulo entre planos



Fonte: adaptado de Carvalho (1993, p.74)

A dupla José e Edson mencionou o termo *diedro* quando estávamos discutindo sobre quais estratégias seriam utilizadas para encontrar o ângulo entre dois semiplanos. Para Carvalho (1993, p. 73), "um diedro (ou ângulo diedro) é a figura formada por dois semiplanos – chamados de *faces* do diedro – limitados pela mesma reta, chamada de aresta do diedro". A Figura 34 explicita os seguintes elementos: as faces são denominadas por α e β e a *reta r* é a aresta do diedro.

Figura 34 - Diedro



Fonte: adaptado de Carvalho (1993, p. 74).

Conforme esse autor, o processo de medição de um diedro deve ter início pela condução de um plano perpendicular à aresta, a partir daí, deve-se medir o ângulo entre as semirretas determinadas em cada face. Carvalho (1993) chama a atenção para o fato de que a medida de um diedro varia entre 0º e 180º. Outra questão a ser observada é que o ângulo entre dois planos secantes é igual à medida do menor diedro formado por eles.

Diante dessas considerações matemáticas, exponho os argumentos de Edson acerca da definição de diedro (Situação 8, Quadro 48), a partir de rememorações sobre as aulas que teve acerca desse assunto. Ele abordou que tal conceito foi definido pela professora como sendo a projeção ortogonal. Quando comentou "*O diedro é justamente você pegar esse negócio, esse ângulo entre planos*" iniciou um processo de manipulação com dois pedaços de isopores, fazendo com que eles se tocassem, deixando uma certa abertura entre ambos. À medida que falava, direcionava seus olhares em minha direção e, ao mesmo tempo, olhava atentamente para os dois pedaços de isopor.

Em determinado instante afirmou "*e fazer uma projeção ortogonal sobre a parede*". Ao dizer isso, mobilizou todo o seu corpo, girando para a lousa da sala onde estávamos reunidos. Feito isso, também convidou José para mover o tronco do corpo e olhar atentamente para o que estava mostrando. A tomada de decisão de Edson foi intencional. Além disso, ela foi importante, tendo em vista que Neves (2020, p. 97) considera que "a postura corporal do interlocutor também agrega valor ao que está sendo afirmado, influenciando as interpretações em torno do discurso".

Para Bairral (2020), a ação de virar diz respeito à orientação. Além disso, salienta que os movimentos rotacionais do cotidiano tais como os manifestos em atividades esportivas, danças, dentre outros, podem não configurar movimentações como as que são realizadas nos dispositivos de tela sensível ao toque. No entanto, segundo o autor, essas últimas caracterizam as ações atuais dos trabalhos que vem desenvolvendo, principalmente pelo fato de esses movimentos trazerem aspectos novos no que diz respeito ao espacial, sensorial e cognitivo.

O eixo que discuto no momento tem uma certa semelhança com as ideias de Bairral (2020), pois esse autor investiga os movimentos realizados quando participantes estão manipulando dispositivos móveis digitais e, no caso desse eixo, estou olhando as inclinações corporais. No entanto, a maioria delas foi acompanhada por manipulações em materiais de natureza física e/ou em situações que exigiam dos alunos observar determinada relação geométrica.

Dando prosseguimento, com os corpos virados para a lousa, Edson tocou as bordas dos isopores nela com a intenção de deixar representações de *retas*. Não satisfeito com o que tinha feito, ainda recorreu a dois palitos, fazendo com que eles ocupassem as linhas imaginárias deixadas pelos isopores. Essa ação pode ser constatada em sua fala "*Isso, na parede, vai gerar duas retas, que vão estar assim*". Por fim, Edson comentou sobre a existência de um teorema mostrando que a angulação entre as *retas* é a mesma da do diedro.

A inclinação corporal também foi notada na estratégia da dupla Sandriely e Iranice. Essa mobilização do corpo ocorreu acompanhada de manipulações diversas em pedaços de isopores, de tal modo que, em determinado momento, esses tiveram um posicionamento em formato de um livro semi-aberto. A frase "*eu usaria a projeção também*" foi o pontapé para Sandriely simular uma angulação qualquer entre os *planos.* Essa aluna elevou seus braços com os isopores segurados, cada um com uma mão. Depois disso, realizou duas ações para projetá-los: a primeira, em uma das paredes do LEM; e, a segunda, inclinando seu corpo para que fosse possível enxergar os dois pedaços de isopores apoiados verticalmente sobre a mesa. Nesse último caso, ela produziu um gesto com o dedo indicador para marcar o ângulo entre os isopores. Para reforçar essa marcação, pegou uma caneta e contornou as bordas deles (Figura 35).

Figura 35 - Projeção para indicar o diedro

Fonte: elaborada pelo autor.

Os dois últimos casos que discutiram o conceito de diedro me fizeram lembrar das leituras realizadas em alguns trabalhos desenvolvidos por Bairral (2017, 2020, 2023). Eles investigam a produção de gestos e manipulações em telas de dispositivos digitais. Com base nisso, fiquei pensando na possibilidade de transpor algumas ideias para o campo dos materiais de natureza física. Nesse sentido, corroboro sua fala "às vezes, entre outras ações giratórias que realizamos, viramos nosso corpo com o smartphone para compartilhar ou interagir com nosso interlocutor” (Bairral, 2020, p.6).

Parafraseando esse autor, posso entender que, na primeira situação, Edson virou o seu corpo para trás com os palitos e os isopores com a intenção de compartilhar, interagir e/ou comunicar com o seu colega José. O mesmo ocorreu com Sandriely que levantou seus braços segurando os isopores, inclinou sua cabeça e aguçou sua imaginação para produzir a imagem mental de um ângulo que foi projetado na parede do LEM. Também, ela teve a intenção de esticar seu pescoço para ter uma melhor visualização dos isopores projetados verticalmente sobre a mesa.

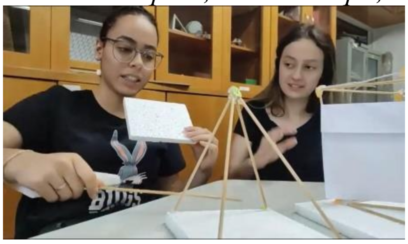
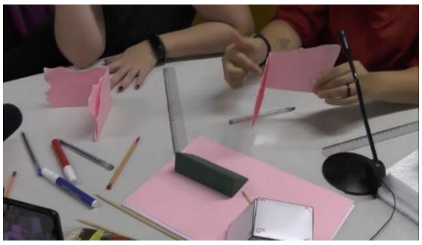
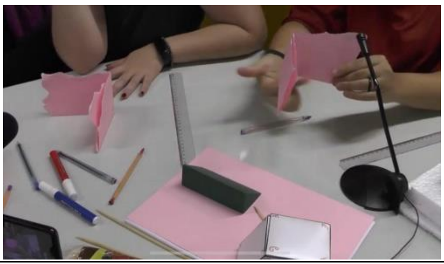
A inclinação corporal durante os momentos de diálogos entre as duplas de alunos também pode ser vista como uma maneira de redimensionar o campo visual e aumentar a compreensão espacial. Essa inclinação no espaço físico (por exemplo, ao usar gestos e inclinações) não só ajuda na visualização de objetos geométricos, mas também modela a experiência matemática. Isso pode ser exemplificado pela inclinação do corpo para compreender e/ou expressar planos ou o uso de gestos amplos para representar entes como linhas e superfícies. O corpo se torna um intermediário entre o conceito abstrato e o entendimento concreto. Nesse sentido, a linguagem corporal pode ser mais uma alternativa que não exige um rigor matemático dos alunos durante os momentos de diálogos entre os pares. Esse é um dos caminhos para uma sistematização do conhecimento matemático por parte desses indivíduos.

7.5 O gesto como externo à representação do conceito matemático

Para compor as discussões deste último eixo que integra essa categoria, *O gesto como externo à representação do conceito matemático*, compartilhei os diálogos ocorridos com três duplas: José e Edson, Renta e Cleonice e, Ana e Luciana. No Quadro 49, resgato os momentos de produção de conhecimentos matemáticos juntamente com os alunos.

Quadro 49 - O gesto como externo à representação do conceito matemático

Dupla **Código Qr**	**Diálogos**	
	José: *Aí, na minha visão, entra aqui a definição de retas paralelas estaria: que a distância menor [silêncio do aluno].*	**José***: Que dado um ponto, a menor distância até a outra reta é constante independente do ponto que você tome nessa reta. Você toma esse ponto, essa distância, você toma aqui, vai ser a mesma distância.*

José e Edson (situação 9)		*E no caso as coincidentes seria um caso especial.* 
Renata e Cleonice (situação 10)	**Cleonice**: *Aqui ó, a reta tá aqui,CD.* 	**Cleonice:** *Aí a gente tem o plano VAB que ele tá inclinadinho assim.* 
	Cleonice: *Aí existe uma distância K entre a reta CD até esse plano* 	**Cleonice:** *e ela nunca. Pra ser paralelo nunca vai mudar essa distância. Então só tem um único plano que vai continuar essa distância entre os dois que vai tá contida essa reta.*
Ana e Luciana (situação 11	**Ana**: *É porque, a reta azul, tem que ser, eu acho, perpendicular a qualquer reta que passe pelo ponto de intersecção.* 	**Ana:** *dessa reta...* 
	Ana: com o *plano...* **André**: É, nós sabemos que o plano ele é... 	**Ana:** *tipo, todas as retas que tão aqui...* **Observação:** *realizou movimentos com a caneta deslizando sobre a mesa. Ofereci um palito. Apontou para a linha de cor azul produzida na folha de sulfite e, ao mesmo tempo, concebeu a mesa como se fosse um plano. Em seguida, aluna continua*:

	Ana: *aí todas as retas que passam, que pertencem a esse plano "mesa" e passam pela reta azul, precisa ser perpendicular a azul pra essa reta ser perpendicular à mesa, qualquer reta que você colocar, aqui, tem que ser perpendicular a essa aqui (que, no caso do papel, é a azul), pra reta azul ser perpendicular às outras, não pode ter nenhum que pertença ao plano que não seja perpendicular a ela*.	

Fonte: elaborado pelo autor.

Compartilho as discussões desse eixo a partir de uma situação referente à definição de *retas* paralelas. Para José, essas *retas* mantêm uma distância constante, considerando cada *ponto* da *reta.* Para expor sua explicação, produziu gestos com o dedo indicador tocando no palito de cima e, em seguida, descendo lentamente até o palito que estava apoiado sobre o isopor (primeira imagem da Situação 9, Quadro 49). Fez isso algumas vezes com a finalidade de mostrar que a distância entre os dois palitos é constante.

Em sua explicação, José recorreu ao uso dos gestos e de manipulações no palito que estava sendo segurado com uma de suas mãos. Essas mobilizações foram iniciadas quando o aluno disse: "*que a distância menor*", essa frase foi acompanhada por um gesto com o dedo indicador saindo de um ponto do palito de cima e descendo até o de baixo; em seguida prosseguiu com sua exposição: "*que dado um ponto*", tocou no palito de cima; continuou: "*a menor distância até a outra reta é constante*", desceu até o palito de baixo; prosseguiu, "*independente do ponto que você tome nessa reta*", deslizou sobre o palito; por fim, disse: "v*ocê toma esse ponto*", tocou no palito; "*essa distância*", movimentou o dedo indicador para cima e para baixo; disse novamente: "*você toma aqui*", tocou em outro ponto; "*vai ser a mesma distância*", movimentou o dedo para cima e para baixo.

Cabe ressaltar que o objeto geométrico, *reta*, já estava sendo representado pelo palito. Nesse eixo, o gesto pode cumprir a função de ratificar uma propriedade que já estava sendo expressa e/ou manifestada por meio do material de natureza física. Assim, a gesticulação foi coadjuvante para a construção do conceito de retas paralelas. Ela auxiliou o aluno nas justificativas para a posição relativa entre *retas*.

As gesticulações produzidas por José apresentam características da dimensão dêitica. Esses movimentos geralmente são realizados com o dedo indicador. Segundo Neves (2020, p. 98), ele é usado para "mostrar algo para o qual se queira fazer referência e associar a um nome, ou conceito". No caso em que ilustro, o aluno representou a noção de distância e/ou segmento de *reta* (movimentou o dedo para cima e para baixo), de *ponto* (tocou no palito diversas vezes) e de *reta* (deslizou o dedo sobre o palito). De acordo com Vigotski (1998, p. 142), “o gesto, como vimos, constitui a primeira representação do significado”. Assim, os gestos produzidos por José foram relevantes para produzir significados sobre como entendeu a definição de *retas* paralelas.

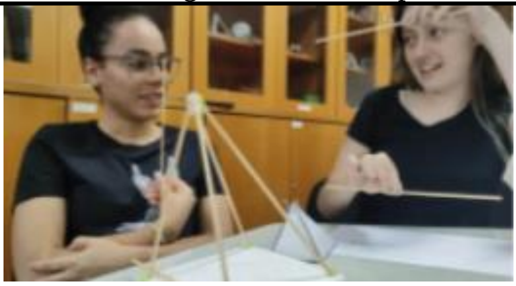
No tocante às manipulações de José, rememoro as pesquisas de Bairral (2017, 2020, 2023) acerca dos benefícios em termos de produção de conhecimento quando alunos deslizam seus dedos sobre dispositivos digitais. Entendo que nas duas situações houve produção de conhecimentos por meio do uso de tecnologias diferentes. No caso desta pesquisa, os alunos também deslizaram seus dedos, mas dessa vez sobre palitos, quinas e/ou bordas do isopor para relacionar a suas noções de conhecimento sobre *reta*, *vértices* e *arestas*, respectivamente. Entretanto, em ambos os casos, defendo a proposição de tarefas que possibilitem a mobilização das distintas linguagens, sejam elas externadas a partir de um trabalho com tecnologias digitais e/ou com materiais de natureza física.

De modo geral, as ações intencionais de José estão em convergência com a fala de Neves (2020, p. 98), “os gestos auxiliam no discurso pela possibilidade de reforçar afirmações, adicionando elementos visuais” durante o momento de sua fala. Ou seja, as gesticulações do aluno permitiram a ele visualizar e descrever a propriedade das *retas* paralelas manterem a distância. Além disso, essas gesticulações foram mais uma linguagem, também considerada de caráter visual e presente no discurso matemático, potencializando a fala de José. Assim, os gestos podem oferecer uma maneira visual e espacial de representar conceitos matemáticos.

Outra situação incluída no eixo *“o gesto como externo à representação do conceito matemático”* é o da dupla Renata e Cleonice, as quais estavam discutindo o resultado de uma *reta* ser paralela a um *plano*. Foi um debate muito significativo, tendo em vista que Cleonice se incomodou com tal propriedade da GEP. Esse incômodo surgiu desde o primeiro encontro com a dupla, comentado na primeira categoria. Cleonice indagou: “*uma reta pode ser paralela a um plano?*”, “*Pra mim, reta e plano não podem ser paralelos, já começa aí*”, “*Na minha cabeça não pode*” e “*Pra mim é plano com plano, reta com reta e ponto com ponto*”. Em outras palavras, para ela, não é possível haver paralelismo entre reta e plano. Além disso, em seu ponto de vista, a relação entre esses entes deve ser tratada unicamente no âmbito interno.

Por outro lado, Renata tentou, por diversas vezes, explicar que esse é um resultado da GEP. A estudante recorreu às manipulações diversas, tanto em palitos, quanto no isopor. O objetivo foi mostrar que em um dos *planos* há uma *reta* que é paralela a outra contida em outro *plano* distinto. Na sequência de imagens apresentadas no Quadro 50, constam as argumentações dadas por Renata à Cleonice, por meio dos materiais de natureza física.

Quadro 50 - Argumentos dados por Renata para o caso de *reta* paralela a um *plano*

	
Renata: *Por que tem uma reta que é paralela a essa.*	**Renata:** *Que está nesse plano.*

Fonte: elaborado pelo autor.

Na cena da segunda imagem, Renata bateu o palito sobre o pedaço de isopor. Ao colocar em prática essa ação, a discente provavelmente expressou indícios de que há uma *reta* contida no *plano* (isopor) que é paralela ao palito segurado com a outra mão. A partir das imagens, e, em particular, das gravações, percebi os olhares fixos de Renata em direção à sua colega. Essa troca de olhares ocorreu à medida em que Renata discursava e manipulava. Assim, a fala e as manipulações de Renata também contribuíram para o entendimento do conceito de paralelismo por meio da visualização por parte de sua colega, mais do que isso, essa habilidade pode ter sido desenvolvida por Renata antes mesmo de tomar essas decisões para facilitar a sua explicação e, consequentemente, ajudar Cleonice.

A fala de Cleonice, Quadro 49, Situação 10, ocorreu em um momento posterior às argumentações de Renata para convencer sua colega sobre ser verdade que uma *reta* pode ser paralela a um *plano.* Foi possível observar, na última parte da exposição, que Cleonice adotou uma postura diferente da anterior (Quadro 50). A aluna também recorreu aos palitos, isopor e gestos para expor o que tinha entendido.

Os palitos e o isopor foram relacionados a entes primitivos (*reta* e *plano*, respectivamente) como forma de expressão e visualização de seu conhecimento. Em determinado momento, Cleonice avançou o seu corpo um pouco para frente para identificar os *vértices* da representação de pirâmide. As gesticulações produzidas durante os momentos em que os alunos estiveram realizando manipulações geralmente ocorrem por meio de inclinações do tronco do corpo como forma de expressão da sua compreensão acerca do geométrico.

Como meio de mostrar que estava convencida da relação de paralelismo entre *reta* e *plano*, Cleonice iniciou sua explicação por meio de um gesto com o seu dedo indicador (terceira imagem do Quadro 49, Situação 10). Ela deslizou a extremidade do dedo sobre a mesa, iniciando a partir do palito até a borda do isopor. A intenção da aluna foi mostrar que considerando cada *ponto* do palito a outro correspondente no isopor, a distância sempre vai ser a mesma, denominada de distância *K*. Os argumentos de Cleonice se referiram a uma noção de paralelismo entre *reta* e *reta* e/ou *reta* e *plano*, levando em conta o fato de que a distância entre um objeto matemático ao outro é sempre a mesma. Essa é uma definição de *retas* paralelas que pode ser interessante para muitos estudantes, principalmente quando eles começam a estudar as características das *retas* reversas, pois aquelas precisam estar contidas em um mesmo *plano*, enquanto as últimas estão em *planos* distintos.

A representação de pirâmide confeccionada com palitos teve papel preponderante na visualização desse sólido, assim como dos elementos que integram esse objeto matemático. Além disso, as manipulações nos materiais de natureza física potencializaram a produção de gestos por parte dos alunos, uma vez que, geralmente, gesticularam com uma mão e a outra teve a função de segurar um palito, um pedaço de isopor, dentre outros recursos, de tal modo que deslizaram dedos e/ou apontavam para possíveis representações de noções abstratas nos materiais, reconhecendo-os como representações de objetos matemáticos.

A gesticulação de Cleonice com o deslizamento do dedo indicador sobre a mesa, saindo de determinado ponto do palito até o seu correspondente no palito que estava em lado oposto, pode ser entendida como uma estratégia para mostrar a noção de distância entre *reta* e *plano*, isto é, para a aluna, uma *reta* é paralela a um *plano* quando as distâncias entre os dois entes são constantes, independentemente do *ponto* a ser escolhido. Esse gesto foi semelhante ao produzido por José, quando também estava falando sobre a ideia de distância. No caso desse aluno, ele movimentou o seu dedo para cima e para baixo.

O embate dessa dupla se referiu ao fato de que Cleonice possivelmente ainda não compreendeu a relação de paralelismo entre *reta* e *plano*. Uma das possíveis justificativas para essa incompreensão pode estar relacionada ao fato de que, na educação básica, pouco se fala dessa relação. Os gestos e as manipulações de Renata foram relevantes para mostrar a veracidade desse resultado. Nesse sentido, corroboro a ideia de Jesus (2021, p. 276): “o uso do recurso gestual na comunicação matemática não é uma ação voltada apenas ao interlocutor, mas é decisiva para a compreensão do próprio enunciador”. Assim, os gestos de Cleonice foram relevantes para que essa aluna organizasse suas ideias e, a partir deles, expusesse um raciocínio para explicar o que tinha compreendido.

No caso da dupla Ana e Luciana. A fala da primeira aluna, assim como suas tomadas de decisões, gesticulações e manipulações realizadas revelaram uma postura de quem conseguiu externar as principais características do TFP. Na primeira imagem do Quadro 49, Situação 11, houve uma mobilização de um gesto para indicar a ideia de *ponto*, ente geométrico que estava sendo visualizado pelas alunas a partir do encontro das duas *semirretas* produzidas com a caneta de cor vermelha. Ana realizou a gesticulação utilizando o seu dedo indicador tocando na quina (*vértice*) da folha dobrada. Posto isso, segundo suas palavras, qualquer *reta* que passava por aquele *ponto* era perpendicular à de cor azul, apresentada logo em seguida.

Na segunda imagem do referido quadro, mesma situação, essa mesma aluna deslizou o seu dedo indicador sobre a segunda dobra. Essa ação objetivou mostrar a presença da ideia de *reta* (produzida com a caneta de cor azul). Por fim, na situação 11, como a aluna estava segurando a produção feita com sulfite com uma de suas mãos, foi necessário mostrar que a *reta*, representada pela cor azul, deveria ser perpendicular ao *plano*, já que passavam duas *retas* (cor vermelha) pelo *ponto* de interseção. O ente *plano* foi (terceira imagem, Quadro 49, Situação 11) representado por meio de um gesto com o dedo indicador movimentando em sentidos opostos e passando pelo *ponto* de interseção das supostas *retas*. Nos três casos, os gestos produzidos ocorreram em concomitância com a linguagem verbal dessa aluna.

Os seguintes gestos foram realizados com o dedo indicador: tocar sobre a quina da folha de sulfite, deslizar sobre o vinco da folha, movimentá-lo para frente e para trás foram utilizados para representar objetos matemáticos, sem a necessidade de uma linguagem materna formal, figural ou escrita na língua natural. Essa representação, conforme Castro (2022, p. 15), "pode estar interligada com os gestos realizados durante a explicação daquele conteúdo por parte de quem fala". Neves (2020) também concorda com essa autora ao afirmar que os gestos são um modo de representação.

As manipulações ocorreram em diversos momentos. Inicialmente, Ana segurou com suas mãos o material manipulável confeccionado com papel sulfite, deixando-a por certo instante apoiada sobre a mesa. Para dar a ideia de uma infinidade de *retas* passando pelo *ponto* de *intersecção* (encontro das duas *semirretas* vermelhas com a azul), ela recorreu a uma caneta, tocando a ponta dessa no referido *ponto* e movimentando-a como se fossem infinitas *retas*. Posteriormente, a dupla apoiou dois palitos sobre a mesa de tal modo que tivessem formato de uma cruz. Depois colocaram outro palito apoiado verticalmente e tocando os dois primeiros. Por fim, encostaram o pedaço de papel sulfite dobrado no palito que estava na vertical, quarta imagem, Quadro 49, Situação 11.

O uso dos palitos e do pedaço de papel sulfite auxiliou a exposição verbal das alunas. Além disso, promoveu uma melhor visualização do TFP[54]. Para Oliveira (2022, p. 136), "a visualização é um processo que se estabelece por práticas vivenciadas que associam o ver, o sentir, o pensar e o representar. Para isso, a ideia presente na memória vai se enriquecendo com imagens manipuláveis". Nesse sentido, essa atividade prática possibilitou desenvolver tais elementos citados pelo autor. Por exemplo, os materiais permitiram visualizar o TFP sob distintas perspectivas a partir das rotações que as alunas realizaram na produção feita com papel sulfite. Além disso, à medida que o diálogo ocorria, elas realizavam manipulações e isso aguçou o tato delas. No que diz respeito aos gestos produzidos, tiveram um papel relevante para um melhor repertório visual, contribuindo para a etapa de representação do que foi discutido. Já as manipulações aguçaram alguns sentidos, como o tato, ao fazer com que a aluna possa experienciar e sentir o *ponto*, objeto matemático, mas sabendo que ele não é palpável.

No final das manipulações e gesticulações, Ana concluiu "*não pode ter nenhuma que pertença ao plano que não seja perpendicular a ela*". Nessa afirmação[55], quis comunicar que até mesmo as *retas* pertencentes ao *plano* (mesa) que não passam pelo *ponto* de *interseção* são ortogonais à *reta* representada pela cor azul. Assim, em particular para esse caso, os gestos podem ter expressado os saberes geométricos da aluna.

Nesse eixo, discuti o gesto como externo à representação do conceito matemático. Os relatos apresentados permitiram concluir que, nesse âmbito, houve uma predominância por gestos dêiticos. Essa presença se deve provavelmente ao fato de que os alunos produzem imagens mentais de algumas noções matemáticas e, diante de materiais de natureza física, externalizam o que estão pensando por meio de gesticulações apontando para as características dos materiais que mais se assemelham aos entes primitivos e/ou conceitos abstratos.

7.6 Discussões gerais

Uma análise global dos eixos discutidos possibilitou algumas considerações. Uma delas diz respeito ao modo como o gesto foi empregado. Ele pode ser codificado como estático ou dinâmico. Nas Situações 9, 10 e 11 considero, a presença de elementos que caracterizam o gesto como dinâmico, uma vez que houve deslizamento de um dos dedos sobre um palito, a superfície

[54] De acordo com Carvalho (1993, 44), "para que uma reta seja perpendicular a um plano basta que ela seja perpendicular a duas retas concorrentes do plano".
[55] A fala da aluna pode ser explicada em Carvalho (1993, p. 44): "a definição de reta perpendicular a um plano exige bastante da reta, pois pede que ela seja ortogonal a todas as retas do plano".

de uma mesa, o vinco formado em uma folha de sulfite, dentre outros exemplos. Além disso, o gesto representou um *ponto* e/ou coleções de *pontos*, nesse caso, a gênese dele foi iniciada com um *ponto*. Assim, segundo os autores, o gesto é denominado de pontual.

Outra consideração vai ao encontro do que é defendido por Arzarello, Robutti e Thomas (2015, p. 20), a saber, "gestos são particularmente interessantes na educação matemática, como um meio de entender melhor as formas de raciocínio dos alunos (ou professores)". Com base nisso, ao imergir nos eixos, como é o caso da Situação 11, percebi a ocorrência de três gestos, um após o outro. Eles tiveram um papel importante para acompanhar os argumentos de Ana acerca do TFP, resultado importante da GEP que é mais compreensível por meio visual.

No decorrer dos quatro eixos apresentados e discutidos, foi constatado o uso de gesticulações e de manipulações para a produção de conhecimentos matemáticos. Os dados revelam aspectos tais como a presença de gestos, acompanhados da fala e, em muitos casos, de manipulações. Esses três elementos podem ocorrer simultaneamente, porém, é preciso evidenciar que o gesto se dá independentemente da manipulação, em alguns casos. Posto isso, para essa categoria, a unidade de análise mínima adotada está pautada no gesto + fala + manipulação. O trabalho realizado por Arzarello, Robutti e Thomas (2015, p. 35) trouxe algumas considerações sobre esse assunto,

> No caso de Vygotsky, a unidade mínima é o "significado da palavra". No caso de McNeill e dos estudos de gestos, a unidade mínima inclui gesto e fala. No entanto, em nossa análise, a unidade mínima envolve todos os recursos semióticos ativados, como fala, gesto, inscrições e assim por diante, bem como signos vindos de dispositivos tecnológicos (como um gráfico).

Embora os resultados do estudo de Arzarello, Robutti e Thomas (2015) tenham sido fruto de uma pesquisa com produção de conhecimento envolvendo dispositivos tecnológicos, transporto a ideia dos autores para o caso desta pesquisa, em particular, dessa categoria que focou nas imbricações entre gestos e manipulações.

A partir do fato de que as gesticulações e as manipulações representam noções abstratas, é preciso destacar que a visualização, segundo Oliveira, Izar e Sattimy (2022a), é uma operação que antecede a fase de registro. Assim, como os dados que compõem essa categoria revelaram o uso de distintas manipulações, assumo que a visualização, antes de qualquer coisa, fez parte do processo de elaboração, construção e entendimento.

Uma das situações em que essa tríade esteve presente foi a 3, Quadro 46, em particular quando Leonardo representou o *plano* por meio do gesto com suas duas mãos, movimentando-as em sentidos opostos, conforme a Figura 30. Na ocasião, a visualização desse ente primitivo ocorreu antes da gesticulação. Além disso, essa habilidade foi desenvolvida, nesse contexto, para mostrar a ausência de intersecção entre o *plano* e a *reta*, já que o assunto tratou do paralelismo entre *retas* e *planos*.

No Quadro 49, situação 9, especificamente na fala de José, "*Aí, na minha visão, entra aqui a definição de retas paralelas*", alguns elementos da visualização também merecem ser pontuados. O uso do termo "*visão*", para essa situação, não diz respeito somente ao ato de "ver" com os olhos. Como arrazoa Henrique (2022), essa palavra transcende os objetos que estão diante dos olhos, ela se refere à formação de imagens mentais. Sob a ótica da visualização matemática, o que pode revelar essa fala de José? Para elaborar uma definição de *retas* paralelas o termo "*Visão*" provavelmente foi substituído por "*pensamento*". Nesse sentido, para José desenvolver tal raciocínio, foi necessário, antes de tudo, visualizar a situação e, posteriormente, conseguir gesticular, bem como manipular.

A utilização e manipulação nos materiais disponíveis durante as discussões ocorridas no experimento permitiram aos alunos visualizar conceitos e resultados da GEP. De acordo com Veloso (1998), essas ações possibilitam o desenvolvimento da visualização que está ligada à formação de imagens mentais, sendo que, quando os alunos têm oportunidades de manusear vários tipos de objetos, elas tornam-se mais claras e, consequentemente, o trabalho para representar ideias matemáticas é mais enriquecedor. Para Kaleff (2008, p. 20), essas experiências relatadas são importantes, uma vez que é mais significativo para os alunos ver o objeto estudado, ao invés de "ver sua imagem mental por meio de sua imaginação".

Essa categoria revela que os momentos de manipulações por parte dos alunos em materiais de natureza física foram relevantes para o desenvolvimento da visualização espacial. Essas ideias também foram identificadas nos trabalhos de Oliveira e Izar (2022), Settimy (2018), Gutíerrez (1996b), dentre outros. Além desses recursos do cotidiano, os professores também podem contar com a ajuda dos gestos produzidos por alunos, uma vez que, segundo Oliveira e Barbosa (2022), o diálogo, os gestos, a escrita e o pictórico permitem ao educador ter acesso ao pensamento do discente. Ou seja, para esses autores, essas distintas linguagens utilizadas para se expressar ajudam a uma identificação prévia acerca do que um indivíduo está pensando.

Nesta pesquisa, o palito e a caneta; o isopor, a superfície da mesa, a folha de sulfite e uma face de um sólido geométrico; o alfinete, a quina de um sólido e o encontro entre três paredes foram concebidos como *retas*, *planos* e *pontos*, respectivamente. Sob a lente teórica de Mainali (2021), esses objetos do cotidiano são representações externas utilizadas pelos alunos para representar noções e resultados da GEP.

A partir do fato de que esses entes primitivos também foram representados por meio de gestos, acompanhados da fala, concordo com as disposições de Vale (2002), Tripathi (2008) e Mainali (2021) quando tratam sobre a relevância em se utilizar distintas representações para um conceito matemático. Nesse contexto, esses estudos também apontaram que esse processo é como se fosse fazer o exame de uma noção abstrata por meio do uso de distintas lentes, sendo que cada uma delas apresenta uma perspectiva diferente, o que permite que a imagem do conceito seja mais significativa.

A produção de conhecimento matemático ocorreu por meio dos gestos, da fala, e das manipulações. Um contexto que fez referência a essa afirmação foi da dupla Renata e Cleonice. O assunto versou sobre o paralelismo entre *retas* e *planos*. Como a última discente não aceitava esse resultado, foi preciso a intermediação de Renata por meio da fala e da manipulação de tal modo que sua colega articulasse e integrasse tais recursos para organizar suas ideias. Essas ações foram relevantes para a visualização e, consequentemente, compreensão e/ou expressão do teorema que trata sobre isso. Cleonice mostrou esse entendimento quando, em momento posterior, gesticulou e fez manipulações para mostrar visualmente a relação entre esses entes primitivos, como pode ser constatado no Quadro 49, Situação 10.

Os distintos modos utilizados por essa dupla, assim como as demais, para representar os entes primitivos, foram discutidos por Lesh, Post e Behr (1987). Os autores discorrem acerca da relevância em transitar entre eles, bem como dentro deles. Para o primeiro caso, os alunos migraram do modo manipulativo para o visual, também entendido como gestual, uma vez que os gestos potencializam o ato de visualização. Para o segundo caso, elenco o momento em que alguns discentes representaram o *plano* por meio de um pedaço de isopor, mas também usaram gestos para essa tarefa. Esses dois casos podem ser considerados visuais tanto para quem gesticulou e manipulou, quanto para o colega que participou do diálogo.

A ação de auscultar os dados dessa categoria proporcionou perceber que os gestos foram promovedores do diálogo e, em muitos casos, da produção de conceitos da GEP, sendo que, em determinadas situações podem ter ocorrido aprendizagens. Assim, gestos + manipulação em materiais de natureza física podem favorecer a aprendizagem. Por exemplo, quando José produziu gestos com o dedo indicador ora deslizando sobre um palito, ora realizando movimentos para cima e para baixo com o objetivo de indicar a distância entre dois palitos, os diálogos foram potencializados por meio das gesticulações, assim como das manipulações.

No tocante às análises dos gestos tanto da primeira categoria, quanto desta, evidencio que os casos apresentados foram de contextos cujo discurso foi o matemático. Dessa forma, exemplos como o de Edson quando abriu os seus braços para representar uma *reta*, o de

Leonardo quando representou o *plano* por meio de suas mãos movimentando-as no ar em sentidos opostos, os deslizamentos das mãos de alguns alunos, sobre uma face qualquer de sólidos geométricos, sobre a superfície da mesa para indicar a ideia de *plano*, assim como do dedo indicador sobre palitos e isopor para comunicar a ideia de *reta* e as inclinações corporais das duplas para ter um melhor ângulo de visão dos elementos matemáticos que estavam sendo discutidos, referem-se a noções do campo da Matemática.

Os casos anteriores podem apresentar significados distintos. As interpretações dessas gesticulações vão depender do contexto em que elas foram produzidas. Sobre esse assunto, Barsalou (2009) atenta que os gestos são situados. Um exemplo dessa temática foi apresentado por Arzarello, Robutti e Thomas (2015), quando ilustraram, em seu trabalho, uma imagem de uma parábola com a concavidade para baixo. Nessa situação, os autores afirmaram que em um contexto discursivo abordando a temática do ar livre, um gesto produzido para esse caso pode estar se referindo a uma colina ou montanha. Por outro lado, se o diálogo tratar sobre Matemática e surgir o termo gráfico, o gesto é como metáfora para criação de significado e faz alusão ao objeto matemático em questão.

De modo geral, as manipulações em concomitância com as gesticulações podem influenciar o aprendizado de alguns conceitos da GEP. Como identifiquei isso em meus dados? Por exemplo, com relação ao eixo inclinação do corpo para comunicar matemática, observei a importância do corpo como mediador no processo de produção matemática que pode ser explorada a partir da cognição corporificada, que vê a interação física com o ambiente como fundamental para a construção de conhecimento. Nos dados ora apresentados, percebi que o corpo atua como uma ferramenta cognitiva, facilitando a visualização de conceitos abstratos por meio de gestos, movimentos e manipulações. A postura corporal, como inclinações e rotações, não só reflete, mas também organiza o pensamento matemático, criando uma experiência multissensorial que integra cognição, percepção espacial e linguagem. Implicações pedagógicas sugerem que atividades que envolvam o corpo, como dramatizações e uso de tecnologias táteis, podem intensificar o aprendizado, destacando o papel central da corporeidade na Educação Matemática.

Os dados dessa categoria revelaram a importância em se promover atividades pautadas em manipulações de materiais de natureza física em contextos de discussões geométricas, em particular da GEP. Esses resultados convergem com pesquisas que focam especificamente nos benefícios, tratando-se de processos de ensino e de aprendizagem, promovidos por práticas dessas naturezas. No entanto, para o caso da discussão que estou promovendo, as gesticulações entraram em cena, sendo produzidas em concomitância com as manipulações para discutir conceitos da GEP. Nesse caso, o olhar para esses dados, assim como a análise feita a partir deles, permitiu-me perceber ausência de estudos que dialogam acerca de gestos acompanhados da fala e da manipulação em materiais da natureza física para produzir conhecimentos da GEP por parte de futuros professores de Matemática.

Encaminhando-me às disposições finais desta seção, exponho que a revelação do que ocorreu nos bastidores dessa categoria foi importante, tendo em vista que, enquanto pesquisador, percebi aspectos não muito explícitos. Eles precisavam ser clarificados para o entendimento deste texto. Além disso, foi a partir desse relato que sistematizei o caminho a ser percorrido para a elaboração dessa análise, assim como rememorar alguns pontos que estão na metodologia.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

The Secret, Rodin (1909)

"As mãos são quase seres vivos [...] Dotados de um espírito livre e vigoroso, de uma fisionomia. Rostos sem olhos e sem voz que, não obstante, vêem e falam... As mãos significam ações: fazer, criar, às vezes, parecem até pensar".

Henri Foncillon

8.1 De volta ao ponto de partida: Uma síntese do trajeto investigativo

À medida que este trabalho se aproxima de sua conclusão, considero oportuno refletir acerca dos principais resultados alcançados e as contribuições para a região de inquérito da Educação Matemática, em particular no que tange à compreensão do papel dos gestos como protagonistas durante discussões acerca de conceitos da GEP.

Inicialmente, quero retomar a questão norteadora desta pesquisa: **Como os gestos influenciam a compreensão e construção de conceitos de geometria espacial de posição por alunos?** Além disso, registro que tal pergunta foi um guia inicial determinante para o êxito alcançado, sendo que foi explorada, dialogada e retomada em diversos momentos desta investigação por meio de exemplos da produção de dados envolvendo os alunos. Não tive como pretensão chegar a respostas fechadas, ao invés disso, procurei compreender as especificidades em profundidade. Vale lembrar que, no decorrer de todo esse processo, deparei-me com novos caminhos e nuances, isso reforça o fato de não ter obrigatoriedade em responder de modo direto essa questão norteadora, até porque essa resposta não é um fim em si mesma, mas um meio para construir conhecimento sobre o tema.

O título desta pesquisa, "**O papel dos gestos no estudo de geometria espacial de posição**", retrata a essência do trabalho aqui realizado. Ele mostra a relevância de investigar os gestos enquanto elementos comunicativos e cognitivos, direcionados para a visualização, discussão e compreensão de conceitos da GEP, vistos como complexos pela maioria dos alunos que iniciam seus estudos mais avançados de Geometria. Ao destacar a relação entre os gestos e o processo de produção de conhecimento, este estudo coloca em discussão e, ao mesmo tempo, mostra a importância de um trabalho em sala de aula que utiliza recursos corporais nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, especialmente na subárea da GEP.

Apresentada essa parte inicial, retomo o objetivo desta pesquisa: **analisar como os gestos realizados durante o processo de discussão dos conceitos de geometria espacial de posição contribuem para a compreensão e/ou expressão desses conceitos por parte dos alunos.** À luz dele, bem como das revelações dos dados analisados por meio da lente teórica adotada e das interpretações que realizei, faço uma viagem por toda esta pesquisa e aponto elementos que considerei relevantes para minha análise. Não tive pretensão em detalhar os fatos aqui comentados, até porque eles já foram citados no decorrer das duas seções que trataram da análise.

8.2 Do corpo ao conceito: algumas ponderações gerais e exemplos de gestos na GEP

8.2.1 O foco não foi somente as dimensões gestuais

Neste estudo, não tive a pretensão de investigar somente as dimensões gestuais, mas tive a intenção de ir além disso. Foquei nos possíveis significados que os gestos emitem quando alunos discutem conceitos do campo da GEP. Para além desse foco, busquei analisar o papel dessas gesticulações de tal modo que elas poderiam estar auxiliando os alunos a organizarem as ideias em suas cabeças em sintonia com o corpo durante momentos que requeriam um maior esforço cognitivo.

Evidencio que inicialmente foram revelados gestos acompanhados da fala, todavia, constatei em alguns momentos a existência de movimentos corporais sem o acompanhamento da oralidade. Foi a partir desse movimento que retornei para observar, mais uma vez, os dados da primeira categoria. Esse exercício me fez notar a presença de gestos sem o acompanhamento da fala. Apesar disso, neste estudo, há uma predominância de gestos em sincronismo com a fala.

8.2.2 Possíveis significados de gestos semelhantes para o caso desta pesquisa

Esta tese corrobora alguns pesquisadores que apontam os significados dos gestos nas mais diversas situações. Uma parcela desses autores investigou gestos idênticos que foram produzidos em realidades diversas, bem como em tempos distintos. Em meu referencial teórico ficou explícito que um mesmo gesto pode apresentar significado diferente, em variados contextos e/ou discursos.

Para o caso desta pesquisa, apresento algumas cenas nas quais os alunos produziram gestos com a intencionalidade de comunicar a ideia de plano. Foram diversos momentos em que isso ocorreu. Nesses casos, as configurações da palma da mão se mostraram de dois modos distintos, a saber: a) dedos esticados e abertos (configuração das mãos: suspensa no ar e voltada para baixo; inclinada; movimentos de círculo com os dedos tocando na superfície da mesa; deslizar sobre a face de um sólido geométrico, tocar uma folha de isopor de modo leve, bem como de maneira brusca), e b) movimentos de ambas as mãos em sentidos opostos e/ou de apenas uma (configuração da(s) mão(s): juntar as duas palmas das mãos, deixando-as um pouco inclinadas e movimentando-as com a intenção de externar a infinitude do plano; posicioná-la verticalmente e movimentá-la para cima e para baixo de tal modo que ela toque um palito que está sobre uma folha de isopor e, quando for para cima, tocar no outro palito que está sendo segurado pelo aluno.

Os casos relatados anteriormente revelam o uso frequente da palma da mão para indicar a ideia de plano, entretanto, as ações executadas pelos alunos ocorreram de modos diversos. Esse cenário mostra que não há um significado predeterminado para os gestos, podendo ocorrer de em um mesmo discurso, determinado gesto comunicar ideias diferentes e, gestos distintos apresentarem significados semelhantes, conforme pondera Assis (2018).

8.2.3 Gesto e visualização

A respeito dos gestos e a correlação deles com a visualização, temática também discutida nesta tese, trago Presmeg (2006, p. 26, tradução minha) para esse diálogo final, em particular quando essa autora mostra a conexão entre o gesto e a imagem visual quando estava atenta ao uso de gestos por professores e seus alunos. A autora entende que o gesto é "[...] um dos indicadores mais seguros da presença de pensamento visual no ensino e na aprendizagem da matemática [...]". Uma fala do aluno José ("*Aí, na minha visão, entra aqui a definição de retas paralelas*") aponta indícios de que esse indivíduo pensou sobre tal propriedade geométrica e, em seguida, gesticulou para indicar que a distância entre os palitos seria a mesma, independentemente de qual ponto escolhesse. Ou seja, houve um encadeamento de ações que foram iniciadas por meio de uma possível representação interna por parte de José, acompanhada pela fala e gesticulação de modo sincrônico.

Os gestos produzidos pela grande maioria dos alunos tiveram importantes implicações para os envolvidos, tanto o gesticulador, quanto o colega que observou o gesto. Nesse sentido, é importante estar atento à dinâmica entre o gesticulador e o observador. A interação entre as duplas de alunos provavelmente contribuiu para o processo de produção de conhecimento matemático. Por um lado, proponho que o gesticulador pode ter usado movimentos de tal modo que ele organizasse e consolidasse seu próprio raciocínio. Por outro lado, os colegas realizavam interpretações desses movimentos e construíam uma visualização mental de noções abstratas debatidas. Assim, os gestos podem exercer papeis relevantes na produção conjunta de significados em um contexto de colaboração tal como o que se identificou na fase do experimento de ensino.

Os diversos momentos em que os alunos discutiram acerca do teorema fundamental do perpendicularismo pode ser um dos exemplos em que os gestos ajudaram a clarear conceitos da

GEP, assim como a promover diálogos construtivos. Nesse sentido, foi perceptível que os gestos deram significados relevantes para uma melhor compreensão e/ou expressão dos conceitos da GEP, dou destaque, aqui, ao conceito de perpendicularidade. Determinados alunos utilizaram a palma da mão para dar significado ao conceito de perpendicularidade. Outros utilizaram seus antebraços para afirmar que entre eles havia um ângulo reto. Também, houve exemplos em que os alunos produziram retas perpendiculares com gestos de tal modo que os dedos de um dos braços tocaram no cotovelo do outro. Nesses, e em outros casos dessa pesquisa, o gesticulador representou fisicamente a interseção entre ângulo reto, enquanto isso, o colega da dupla, às vezes descreveu o que via e/ou até mesmo organizou suas ideias.

Em suma, os gestos produzidos pelos alunos desta pesquisa foram relevantes no sentido de que essas movimentações corporais possibilitaram a compreensão do discurso por aqueles que observavam as gesticulações. Contudo, esses gestos não podem ser considerados como a fórmula mágica, os que são resolvedores da situação. Outro fato corroborado por essa autora também foi percebido nos dados desta tese, a saber, os gestos produzidos pelos alunos foram relevantes para a própria formação do conceito por parte daqueles personagens.

8.3 Rumo ao inédito: Diferenciações e contribuições desta pesquisa

8.3.1 Romper fronteiras: a singularidade desta pesquisa

Na tentativa de apresentar alguns elementos diferenciadores de minha tese em comparação com outros estudos, em particular aqueles que tive mais contato e que compuseram minha revisão de literatura, elenco os que considero relevantes. Em primeiro lugar, este estudo se diferencia dos demais por transcender as abordagens tradicionais que valorizam o discurso verbal e a cultura escrita em sala de aula. Há distintos modos de expressar conceitos matemáticos, e a linguagem corporal é um deles. Os dados desta tese mostraram que os gestos exerceram ferramentas de comunicação e cognição. Em segundo lugar, à luz de minha RL, identifiquei que a maioria dos artigos de periódicos, dissertações e teses analisadas se enquadra em três categorias: métodos de ensino, tecnologias digitais e/ou materiais didáticos. Para o caso desta tese, os gestos estão sendo vistos como uma ponte que pode dar acesso a algumas noções abstratas. Obviamente, esse percurso talvez não seja imediato, pois de acordo com Assis (2018), tanto expressões corporais quanto linguísticas enfrentam a mesma limitação, e dificilmente conseguem abarcar por completo a complexidade de uma ideia abstrata, funcionando como recipientes pequenos diante de um conteúdo vasto.

8.3.2 Desvendando os pilares: elementos que fundam o conhecimento novo

Essa pesquisa traz à tona o papel relevante da comunicação por meio da linguagem corporal durante discussões de conceitos da GEP. Os dados deste estudo revelam que os gestos exerceram papeis que vão além da função comunicativa, podendo exercer funções cognitivas e pedagógicas. Essas considerações me levam a afirmar que essa linguagem corporal não é simplesmente um complemento da linguagem verbal, não se trata unicamente de um adereço. É mais do que isso. Essas gesticulações facilitaram a formação do conceito a ser externado e, além disso, auxiliaram o ato de pensar.

Os gestos produzidos pelos alunos não exerceram unicamente a função de transmitir informações aos que estavam presentes no diálogo. Eles contribuíram para que os futuros professores organizassem e estruturassem suas ideias sobre alguns conceitos da GEP. Em síntese, os gestos não são somente um ornamento da linguagem verbal, eles comunicam e possibilitam que tanto gesticulador quanto observador revejam interna e visualmente o que foi dito sobre alguma noção abstrata e, a partir disso, organizem o seu discurso de modo mais sistemático e levando em conta os pilares da Matemática. Essas são algumas discussões iniciais que deixo para o campo da Educação Matemática. Esse debate pode ser entendido como a ponta do iceberg no que concerne ao conhecimento novo levantado por esta tese.

8.3.3 Além dos limites: possível contribuição para o avanço do referencial teórico

Nesta pesquisa estive focado em olhar a produção de gestos no contexto da GEP por futuros professores de Matemática. Um dos referencias que sustentou minhas discussões foi McNeill (1992) que é um dos clássicos no que concerne ao estudo dos gestos. As produções bibliográficas de tal pesquisador se concentram na relação entre gestos e fala em contextos gerais da comunicação. Para o caso desta tese, faço uma ampliação pelo fato de focar o que já se produziu em termos de conhecimento sobre gestos, mas, dessa vez, olhando especificamente para as propriedades da GEP. Além disso, nos trabalhos do referido autor não constam considerações acerca do papel dos gestos quando futuros professores de Matemática discutem conceitos da Geometria Espacial, embora faça alusão ao ensino de forma geral. Feitas essas ponderações, tais elementos também podem integrar a ponta do iceberg no que diz respeito ao ineditismo desta tese, bem como ao que estou propondo de novo para o campo da Educação Matemática.

8.3.4 Entre visualização e inovação: a distinção desta pesquisa nas discussões sobre visualização

Esta tese pode integrar o rol de trabalhos que se debruçam a estudar a visualização matemática. Sobre essa temática, identifico até o presente momento investigações cuja produção de dados focou na representação por meio de papel, material manipulável, telas de dispositivos digitais, dentre outros meios.

Ao refletir sobre as investigações no âmbito da visualização matemática e, ao mesmo tempo, olhando para elas sob a perspectiva do meu trabalho, proponho alguns pontos para discussão acerca de possíveis diferenciações entre aquelas e esse. O primeiro diz respeito ao fato de que geralmente as pesquisas do primeiro grupo se caracterizam por promover uma discussão na qual a pauta em questão são as representações gráficas, diagramas e/ou modelos digitais de tal modo que esses meios auxiliem a compreensão de conceitos da Geometria Espacial. Para o caso deste trabalho, os dados revelam que os gestos foram concebidos como uma ferramenta cognitiva. Além disso, há uma fusão entre gestos, fala e expressões visuais.

Um segundo elemento está ligado à temática da visualização de conceitos geométricos, em particular os do campo 3D, que é uma preocupação de muitos pesquisadores por tratar-se de uma tarefa árdua para uma boa parte dos alunos, em particular os da educação básica. Esses estudos se preocupam com discussões acerca do uso de ferramentas visuais ou por meios tecnológicos de tal modo que possam minimizar as dificuldades para “enxergar” determinados conceitos na Geometria Espacial. Nesse sentido, esta pesquisa se diferencia das demais, pois mostra que os gestos podem desempenhar um papel de destaque na compreensão e/ou expressão de conceitos da Geometria Espacial que requerem doses maiores de abstrações por parte dos alunos. Essas noções abstratas são difíceis de compreender sem o auxílio de algum recurso de apoio. Nesse sentido, os gestos podem ser um deles.

8.4 Limitações do estudo e recomendações para futuras pesquisas

8.4.1 A formação das duplas: pontos e contrapontos

Ao término desta pesquisa, considero imprescindível voltar ao texto por completo para identificar possíveis limitações que observei após a conclusão desta tese. Registro que esse exercício é relevante e pode oferecer oportunidades para pesquisas futuras de tal modo que elas possam superar os desafios que enfrentei neste trabalho. Em primeiro lugar, chamo atenção às dificuldades percebidas pela decisão tomada no processo de planejamento desta tese no que concerne à formação das duplas. Assim, indico algumas questões referentes a essa dinâmica. Um primeiro item a ser pontuado diz respeito à postura adotada por determinado aluno durante o momento de produção gestual por parte de seu colega. Esse cenário se revelou de modos distintos. Um deles foi caracterizado pelo aceno de cabeça como indício de que compreendeu a gesticulação produzida por seu par. Vale destacar que o movimento para cima e para baixo foi mais presente em algumas duplas e, observando os integrantes dessas, notei que certos alunos realizavam esses movimentos com mais frequência. Nesse contexto pode ter ocorrido o desinteresse momentâneo de certos alunos em discutir os conteúdos com seus colegas. Isso se deve a vários fatores, talvez estivessem cansados, não recordavam das propriedades geométricas que estavam sendo discutidas e/ou até mesmo não se sentiram motivados por algumas das perguntas. Além desses elementos citados, também pode ter ocorrido de não haver afinidade entre os alunos de uma mesma dupla, isso tem forte relação com a seleção dessas duplas.

Em suma, o fato de ter escolhido trabalhar com duplas foi em virtude de achar que esse número seria interessante, uma vez que haveria mais chances de os alunos manifestarem suas opiniões. Na maioria das vezes isso ocorreu, porém foi percebido posturas de lideranças por parte de alguns integrantes. Quando isso aconteceu, o colega acenava com a cabeça e/ou olhava para mim com a intenção de confirmar que tinha compreendido o que estava sendo discutido.

8.4.2 Softwares específicos para pesquisas com produção de dados envolvendo gestos

De um lado, vejo que outro ponto limitante desta pesquisa diz respeito ao uso de *softwares* específicos para a transcrição e a visualização dos vídeos de forma simultânea de tal modo que essas ferramentas pudessem controlar a velocidade e o tempo. Esses recursos possibilitariam identificar muitos detalhes gestuais. De outro lado, entendo que esta tese, em sua gênese, não tinha a pretensão de realizar um estudo exaustivo acerca dos gestos. Para pesquisas dessa natureza, é necessário investir em *softwares* que realizem essas tarefas de transcrição e identificação de sincronismo entre gesto e fala. Sendo assim, além desse item ser uma limitação de meu estudo, recomendo o uso dessas ferramentas digitais para produção de dados em um contexto semelhante ao que tive, isto é, promoção de espaços para discussão de conceitos da Geometria Espacial.

O trabalho de produção de dados desta tese gerou uma grande quantidade de informações de diversas naturezas. Por exemplo, aproximadamente 500 páginas de transcrição, inúmeras capturas de telas para exemplificar gestos, em média 1.320 minutos de gravação em áudio e vídeo e registros por escritos dos alunos. A partir desses dados, chamo a atenção para o grau de dificuldade em identificar a presença da linguagem corporal nos mínimos detalhes, sem falar que essa tarefa seria desenvolvida sem a utilização de ferramentas digitais para minimizar o esforço manual que realizaria. Diante disso, pontuo que a análise de gestos é um processo detalhista e rigoroso, isso é agravado quando há uma grande quantidade de dados, pois demandaria um esforço exorbitante para realizar as interpretações. Por fim, recomendo aos pesquisadores que desejam se debruçar em trabalhos envolvendo análise de gestos em contextos de produção de conhecimento, investir ou tomar emprestado uma variedade de equipamentos. É preciso ter cautela no primeiro caso, uma vez que esses materiais são caros e, muitas vezes, não estão disponíveis em centros universitários, muito menos em escolas de educação básica.

Realizados tais apontamentos, entendo que produções de dados de pesquisas semelhantes à que desenvolvi pode ter uma minimização nos impactos relatados anteriormente se os pesquisadores têm ajuda de técnicos e/ou equipe própria para esses serviços, isto é, recursos humanos que possam contribuir com tarefas técnicas, sejam elas no decorrer da produção e/ou até mesmo em momentos futuros, como transcrições, identificações de possíveis gestos, dentre outros elementos.

8.4.3 Escassez de trabalhos envolvendo gestos e GEP

Este estudo aponta um fato relevante que deve ser levando em conta nas investigações do campo da Educação Matemática: ainda há poucos trabalhos de dissertações e teses envolvendo discussões de conceitos da GEP com futuros professores de Matemática, em particular focando nas implicações da produção de gestos. Esse cenário leva a seguinte problemática: há muito a ser feito e aprofundado no tocante a esta área. Vale salientar que existem alguns artigos de periódicos se debruçando sobre possíveis impactos. No entanto, esses manuscritos abordam temais mais gerais da Geometria Espacial.

Por um lado, tais textos, muitas vezes, são oriundos de pesquisas maiores, como dissertações e teses. Levando em conta esse fator, posso apontar os trabalhos realizados por Assis (2020) após defender seu doutorado. Por outro lado, esse autor se dedicou ao estudo das isometrias com *GeoGebra*, ou seja, não tratou especificamente da GEP. Assim, pontuo a relevância e a necessidade de estudos mais aprofundados em caráter de dissertações e teses abordando as seguintes temáticas: o papel dos gestos na produção de conhecimento matemático, em particular da GEP envolvendo futuros professores de Matemática e, trabalhos com foco na GEP, sendo que esses podem recorrer a diversas estratégias para o seu desenvolvimento.

8.4.4 Alunos surdos, gestos e geometria espacial de posição: uma análise integrada

A GEP está presente na maioria das ementas da disciplina de Geometria Euclidiana Espacial, como é o caso do curso de graduação em Matemática da UNESP, campus de Rio Claro – SP. Essa área da Geometria se caracteriza por uma diversidade de termos e os respectivos conceitos utilizados para o ensino e a aprendizagem da GEP. Diante desse cenário, recomendo, ainda, o desenvolvimento de pesquisas que investiguem se há uma terminologia gestual em Língua Brasileira de Sinais (LIBRAS) para o ensino dessa disciplina voltada a alunos surdos gesticuladores. Caso exista, como um possível desdobramento sugiro recolher, catalogar e/ou listar termos existentes da GEP em uso, bem como seus respectivos gestos em LIBRAS, possivelmente disponíveis em distintas fontes (materiais impressos, digitais, *online* e materiais em *sites* voltados para fins educacionais) e reconhecidos pela comunidade acadêmica surda e intérpretes. Também pode-se investigar termos da GEP candidatos que possam ser incluídos na LIBRAS.

Após esse levantamento, sugiro realizar um comparativo entre os termos encontrados e os respectivos gestos da LIBRAS já catalogados com as gesticulações produzidas pela comunidade surda para os conceitos da GEP encontrados nessas buscas. Essa fase pode ser entendida como uma validação da proposta, incluindo uma possível terminologia em falta.

8.4.5 Pesquisas envolvendo GEP e alunos não videntes

Outra perspectiva de trabalho futuro seria a inclusão de alunos não videntes convidados a discutirem conceitos da GEP e, ao mesmo tempo, analisar se essas pessoas realizam gesticulações para a produção de conhecimentos. É pertinente investigar de modo mais detalhado para tentar entender a maneira como esses alunos conceituam e relacionam propriedades da Geometria Espacial. Trabalhos que invistam nessa temática podem enriquecer as discussões sob a ótica da Educação Matemática. As buscas que realizei revelam poucas pesquisas de doutorado que incluam esses personagens em seus estudos. Por exemplo, Fernandes (2008) trabalhou a Geometria Euclidiana com aprendizes não videntes. Compreender como um aluno sem visão desde o nascimento gesticula para comunicar os conceitos que discuti com meus participantes é significativo para o nosso campo. Identificar possíveis semelhanças e diferenças nessas gesticulações envolvendo os dois grupos seria uma possível tarefa.

8.4.6 Explorando fronteiras: as limitações dos gestos nos processos de ensino e de aprendizagem de conceitos geométricos de natureza mais avançada

Outro debate interessante para ser investigado diz respeito ao fato da ausência de uma reflexão crítica sobre possíveis limitações do uso de gestos e manipulações em conceitos geométricos mais avançados. Seria interessante discutir como essa metodologia pode ser aplicada com conceitos que não são facilmente representáveis fisicamente ou por meio de um material manipulável, ou onde a abstração se torna um obstáculo maior, a exemplo, o estudo dos Espaços Vetoriais e Transformações Lineares. Nesse caso, é preciso ver que a ideia de um espaço vetorial n-dimensional, em particular quando se trabalha em dimensões superiores a três, pode ser bastante abstrata, bem como difícil de se comunicar por meio de gestos, uma vez que nossa intuição visual se restringe a três dimensões. Esse é um dos possíveis casos.

A maioria das leituras que realizei olhou para a produção de gestos em outros campos da Matemática. Alguns trabalhos se debruçaram em investigações acerca da produção de gestos com conteúdos que requerem um grau maior de abstração, por exemplo, a tese de Scheffer (2001). O ponto de discussão que quero levantar se refere a possíveis limitações que as gesticulações podem apresentar quando o conteúdo em questão requer uma carga cognitiva mais elevada.

8.4.7 A cognição em movimento: gestos como ferramentas no ensino

Para além das indicações de possíveis pesquisas futuras, constatei, a partir de estudos e reflexões, outros caminhos a serem trilhados por investigadores que têm a intenção de aprofundar a temática da gestualidade nos processos de ensino e de aprendizagem, em particular no tocante aos conceitos da GEP. Nesse sentido, vejo como relevante para o campo da Educação Matemática a compreensão sobre como a utilização dos gestos pode ser potencializada como ferramenta pedagógica no ensino de Geometria Espacial.

8.4.8 A sinergia entre gestos e manipulações em materiais de natureza física

Tenho notado um número significativo de pesquisas na área da Educação Matemática que se debruçaram a estudar a produção de conhecimento por meio da realização de gestos e toques em telas de dispositivos digitais. Essas investigações já foram comentadas no decorrer desta tese, a exemplo, os trabalhos de Bairral (2017, 2020), Assis e Bairral (2022), Assis, Bairral e Marques (2018) e Freitas e Bairral (2023). Esses autores afirmam que os dispositivos móveis que permitem toques em tela podem ser concebidos como extensões do tipo espacial, sensorial e perceptiva do corpo.

Tomando como referência esses estudiosos, percebo que os materiais manipuláveis utilizados pelos alunos participantes desta pesquisa também permitiram a produção de gestos de tal modo que esses ocorriam simultaneamente ao processo de manipulação, bem como da fala. Ainda, evidencio que o ocorrido no trabalho de Assis (2020, p. 143) no tocante à integração entre gestos e manipulações pôde ser notado nesta investigação. Esse autor expõe que a combinação entre eles e as manipulações realizadas revelaram-se como um meio de encontrar palavras que podem expressar pensamentos.

8.5 Fechando o ciclo: conclusões e caminhos adiante

Esta tese tem implicações diretas e indiretas em minha formação acadêmica, vai possibilitar de imediato novos olhares durante o meu retorno como docente aos anos finais do ensino fundamental. Ciente dos possíveis impactos e das responsabilidades perante a educação básica, vejo que um dos propósitos fundamentais de uma pesquisa é promover transformações, seja no âmbito estrutural ou no comportamental. Nesse sentido, enquanto professor da educação básica e pesquisador, quero revelar, neste espaço, que este trabalho fez com que a minha postura enquanto educador matemático mudasse de um cenário no qual não tinha me atentado para a valorização do corpo na produção de conhecimento matemático, em termos mais específicos, ainda persistia dentro de mim a cultura da escrita matemática como meio de aferição da aprendizagem. O cenário que vislumbro agora é uma sala de aula na qual os meus olhares ficarão atentos aos gestos que os alunos estão produzindo durante as discussões sobre noções abstratas que ocorrerão. Sobre as exigências muito presentes nas aulas de Matemática em valorizar formas de registros pautados em moldes tradicionais, Bairral (2012) recomenda que se atente para outros modos de expressão desde a educação infantil.

Além disso, também vejo como relevante vigiar os meus próprios gestos, pois sei que eles influenciarão os processos de ensino e de aprendizagens. Essas palavras vão ao encontro da contribuição de Goldin-Meadow (2014). Para essa pesquisadora, os gestos realizados por outras pessoas podem influenciar e transformar nossas próprias ideias. Da mesma forma, os gestos que fazemos podem impactar nossa forma de pensar.

Insisto em afirmar que há uma cultura nas aulas de Matemática baseada predominantemente na escrita, em particular no rigor excessivo de uma simbologia que muitas vezes não faz sentido para os alunos. Assim, busco uma Educação Matemática emancipadora. Para isso, é necessário olhar para outros modos que os educandos utilizam para produzir conhecimento, entre eles, a linguagem corporal.

Finalmente, de volta ao objetivo geral desta tese, que é *analisar como os gestos realizados durante o processo de discussão dos conceitos de geometria espacial de posição contribuem para a compreensão e/ou expressão desses conceitos por parte dos alunos*, concluo que os gestos produzidos por esses indivíduos nas duas fases que compuseram esta pesquisa contribuíram com o processo de discussão de alguns conceitos da GEP. As contribuições dessas gesticulações se revelaram de distintos modos.

No que diz respeito à materialização das noções primitivas da Geometria tais como *ponto*, *reta* e *plano*, cabe expor que a concretude do primeiro ente geométrico ocorreu em algumas situações. Para comprovar, trago o caso do aluno José (Quadro 49) que deslizou seu dedo indicador sobre um palito de churrasco por diversos pontos do material manipulável. A concretização do segundo ente se mostrou no momento em que Edson esticou seu braço e, por fim, a concretização do terceiro ente se efetivou quando Leonardo deixou as palmas das duas mãos abertas, movimentando-as em sentidos opostos e meio que inclinadas. Nesse último caso, também foi notada a intenção do aluno em mostrar a infinitude do *plano* quando suas mãos se afastavam uma da outra, de tal modo que cada uma delas deslizasse infinitamente no ar.

Quanto à estruturação das ideias matemáticas dos alunos, cabe registrar que esse fato foi percebido nas entrelinhas no decorrer da análise dos VCD que registraram os momentos em que os alunos utilizaram gestos enquanto explicavam propriedades matemáticas. Foi possível observar de que modo esses gestos foram produzidos para a compreensão e/ou expressão de alguns conceitos da GEP. Assim, esse “como” presente no objetivo geral também se revelou por meio da espacialização das ideias. Um dos casos em que isso ocorreu foi com o aluno Leonardo durante a exposição dos elementos que compõem uma pirâmide de base quadrangular. Ele produziu gestos com os seus dedos juntos tocando em um dos vértices do sólido geométrico e movimentando sua mão para outros lados com a intenção de indicar que o topo da pirâmide poderia se deslocar para outras direções, configurando-se como um caso oblíquo, pela organização da explicação dos alunos e pela conexão entre os conceitos discutidos e suas representações gestuais. Dessa forma, os gestos não apenas acompanharam a fala, mas desempenharam um papel protagonista na estruturação do pensamento matemático dos alunos, apontando sua importância na produção de conhecimento matemático.

Por fim, quanto à representação visual, tátil e gestual, acentuo que a contribuição da produção de gestos nessa vertente se revela quando os estudantes interagem com os elementos geométricos de forma concreta, realizando gestos, como deslizar os dedos sobre a quina e/ou arestas de sólidos, bem como em vincos formados em folhas de sulfite. Tal ação auxilia na compreensão dos conceitos da GEP, uma vez que possibilita a realização de representações visuais, táteis e gestuais. Além disso, os alunos podem fazer conexões entre as abstrações geométricas e a percepção espacial no mundo real. Em síntese, as manipulações físicas desses objetos permitem que os alunos concretizem ideias abstratas.

REFERÊNCIAS

ALIBALI, M. W.; GOLDIN-MEADOW, S. Gesture-speech mismatch and mechanism of learning: what the hands reveal about a childs state of mind. **Cognitive psychology**, v. 25, p. 4, 1993.

ALIBALI, M. W.; NATHAN, M. J.; WOLFGRAM, M. S.; CHURCH, R. B.; JACOBS, S. A.; JOHNSON MARTINEZ, C.; KNUTH, E. J. How teachers link ideas in mathematics instruction using speech and gesture: A corpus analysis. **Cognition and instruction**, v. 32, n. 1, p. 65-100, 2014. Disponível em: https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/07370008.2013.858161. Acesso em: 12 fev. 2023.

ALIBALI, M. W.; YONG, A. G., CROOKS, N. M.; YEO, A.; WOLFGRAM, M. S.; LEDESMA, I. M; KNUTH, E. J. Students learn more when their teacher has learned to gesture effectively. **Gesture,** v. 13, n.2, p. 210-233, 2013. Disponível em: https://psycnet.apa.org/record/2014-23014-005. Acesso em: 20 fev. 2024.

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais.** São Paulo: Pioneira, 1998.

AMARAL, M. A.; COUTINHO, A.; MARTINS, M. R. D. **Para Uma Gramática da Língua Gestual Portuguesa**. Lisboa – PT: Caminho, 1994.

ARAÚJO, A. R. de. **Uma proposta de aplicação do conteúdo de geometria espacial no Ensino Médio**. 2017. 66f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT). Universidade Federal do Piauí, 2017.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. *In:* ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte, Autêntica, 2020.

ARCAVI, A. Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. **For the Learning of Mathematics,** v. 14, n. 3, p. 24-35, 1994. Disponível em: https://flm-journal.org/Articles/BFBFB3A8A2A03CF606513A05A22B. Acesso em: 12 fev. 2024.

ARZARELLO, F.; EDWARDS, L. O gesto e a construção do significado matemático (fórum de pesquisa 2). *In:* Conferência Internacional para a Psicologia da Educação Matemática, 29, 2005, v. 1, **Anais...** Melbourne, 2005.

ARZARELLO, F.; ROBUTTI O, THOMAS, M. Ponto de crescimento e gestos: olhando para dentro dos significados matemáticos. **Educ Stud Matemática.** v. 90, n. 1, p.19-37, 2015. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-015-9611-5. Acesso em: 14 fev. 2024.

ASSIS, C. de. **Relevância dos gestos no discurso matemático do sujeito surdo.** Tese de doutorado. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo. Universidade Anhanguera de São Paulo, 2018, 177p.

ASSIS, A. R. de. **Alunos do Ensino Médio realizando toques em telas e aplicando isometrias com Geogebra**. 2020. 195 f. Tese (Doutorado em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares) - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2020.

BAIRRAL, M. A.; SILVA, M. A. **Instrumentação para o ensino de geometria**. Rio de Janeiro, RJ: CEDERJ, 2005.

BAIRRAL, M. A. (2012). O desenvolvimento do pensamento geométrico na Educação Infantil: Algumas perspectivas conceituais e curriculares. In M. Carvalho & M. A. Bairral (Eds.), **Matemática e Educação Infantil: Investigações e possibilidades de práticas pedagógicas** (pp. 162-186). Petrópolis: Vozes.

BAIRRAL, M. A. As Manipulações em Tela Compondo a Dimensão Corporificada da Cognição Matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática (JIEEM)**, v. 10, n. 2, p. 96-106, 2017.

BAIRRAL, M. Not Only What is Written Counts! Touchscreen Enhancing our Cognition and Language. **Global Journal of Human-Social Science**. v. 20, n. 5, p. 1-10, 2020.

BARBOSA, S. M. **Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia**. 2009. 195f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho. 2009. Disponível em: https://igce.rc.unesp.br/#!/pesquisa/gpimem---pesq-em-informatica-outras-midias-e-educacao-matematica/material-gpimem/teste/. Acesso em: 19 fev. 2024.

BARSALOU, L. W. Simulação, conceituação situada e predição. **Philosophical Transactions of the Royal Society B**, v. 364, n. 1521, p. 1281-1289, 2009.

BENEDETTI, F. C. **Funções, softwares gráficos e coletivos pensantes.** 2003. 316f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, SP, 2003. Disponível em: https://igce.rc.unesp.br/Home/Pesquisa58/gpimem-pesqeminformaticaoutrasmidiaseeducacaomatematica/benedetti_fc_me_rcla.pdf. Acesso em: 14 fev. 2024.

BICUDO, M. A. V.; COSTA, A. P. M. **Leituras em pesquisa qualitativa**. São Paulo: Editora Livraria da Física. 2019. 440p.

BICUDO**,** M. Pesquisa em Educação Matemática. **Pro-Posições,** v. 4, n.1, mar., p.18-23, 1993. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8644379. Acesso em: 12 fev. 2023.

BISHOP, A. J. Review of research on visualization in mathematics education**. Focus on Learning Problems in Mathematics**, v. 11, n. 1-2, p. 7-16, 1989.

BISPO, B. L.; ASSIS, E. S. A utilização de materiais manipuláveis na construção de demonstrações da geometria espacial de posição. **INTERMATHS**, v. 2, n. 2, dez. 2021, p.

268-288. Disponível em: https://periodicos2.uesb.br/index.php/intermaths/article/view/9827. Acesso em: 19 fev. 2024.

BORBA, M. C.; ALMEIDA, H. F. L.; GRACIAS, T. A. S. **Pesquisa em Ensino e Sala de Aula:** Diferentes Vozes em uma Investigação. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking:** Information and Communication Technologies, Modelling, Experimentation and Visualization. Estados Unidos: Springer, 2005, 232 p.

BORSOI, C. **GeoGebra 3D no Ensino Médio: Uma possibilidade para a aprendizagem da geometria espacial.** 2016, 158f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/148179. Acesso em: 14 fev. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRUNER, J. S. **Uma Nova Teoria de Aprendizagem**. 2. ed. Rio de Janeiro: Bloch. 1973. 162 p.

BURATTO, I. C. F. **Historicidade e visualidade:** proposta para uma nova narrativa na Educação Matemática. 2012. 241f. Tese (Doutorado em educação científica e tecnológica). Pós-Graduação em educação científica e tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/30381629.pdf. Acesso em: 14 fev. 2024.

CAMPOS, L. F.; FERNANDES, G. G. Utilização da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas nas aulas de geometria espacial. *In:* Encontro Nacional de Educação Matemática, 2022, **Anais..**. Brasília, On-line, 2022. Disponível em: https//www.even3.com.br/anais/xivenem2022/484528-utilizacao-da-metodologia-de-ensino-aprendizagem-avaliacao-de-matematica-atraves-da-resolucao-de-problemas-nas-au. Acesso em: 4 fev. 2024.

CANDIOTTO, W. C. **Crítica da razão matemática: uma análise do objeto da geometria**. 2016. 194f. Tese (Doutorado em educação). Pós-Graduação em educação científica e tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2016.

CARNEIRO, L. T. **Multimodalidade da linguagem:** constituindo gêneros do discurso. Revista Letras de Hoje, Porto Alegre, v. 48, n. 1, p. 108-115, jan/mar. 2013.

CARVALHO, G. S. **Festival de vídeos digitais e educação matemática crítica**. Tese de doutorado. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. UNESP – Rio Claro, 2023. 317p. Disponível em: https://igce.rc.unesp.br/Home/Pesquisa58/gpimem-pesqeminformaticaoutrasmidiaseeducacaomatematica/geciara-da-silva-carvalho_2023.pdf

CARVALHO, P. C. P. **Introdução à geometria espacial**. Rio de Janeiro: SBEM, 1993. 126p.

CASTRO; L. T. **Os gestos utilizados por professores ao ensinar geometria.** 2022. Dissertação (Mestrado), Universidade Franciscana, Santa Maria, RS, 2022.

CAVALCANTI, D. R. **O lugar dos gestos nas teorizações linguísticas.** 2020. 86f. Dissertação (Mestrado em Linguística) - Programa de Pós-Graduação em Linguística, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2020. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/18671?locale=pt_BR. Acesso em: 14 fev. 2024.

CAVALCANTI, J. D. B.; OLIVEIRA, M. M. de; SILVA, W. J.; ASSIS, T. F. P. S. Algumas considerações sobre a Matemática e seu ensino na perspectiva de estudantes de um curso de Pedagogia. *In:* OLIVEIRA, M. M. de; (Org.). **Formação de professores:** Estratégias Inovadoras no Ensino de Ciências e Matemática. Recife: Editora Universitária da UFRPE, 2012, v. 3, p. 194 -211.

CHEN, C. L.; HERBST, P. A interação entre gestos, discurso e diagramas no raciocínio geométrico dos alunos. **Educ Stud Math**, v. 83, p.285–307, 2013. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-012-9454-2. Acesso em: 14 fev. 2024.

CIFUENTES, J. C**.** Uma via estética de acesso ao conhecimento matemático. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 46, p. 55-72, 2005.

CLEMENT, J. Student's preconceptions in introductory physics. **American Journal of Physics,** v. 50, p. 66-71. 1982.

CLEMENTE, L. L. A model for understanding, using, and Connecting representations. **Teaching Children Mathematics**, v. 11, n. 2, set., p. 97-102. 2004. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/41198445. Acesso em: 12 fev. 2024.

COSTA, A. P. O pensamento geométrico em foco: construindo uma definição. **Revista Eletrônica Ensino Interdisciplinar,** Mossoró-RN, v. 6, n. 16, mar. 2020. Disponível em: https://periodicos.apps.uern.br/index.php/RECEI/article/view/1608. Acesso em: 12 fev. 2024.

COSTA, C. Gesto, janela para exteriorizar o pensamento visual-espacial. *In:* MATOS, J. M. *et. al.* (Org.). **Comunicação no ensino e aprendizagem de Matemática**. Editora: Leonor Santos, 2010.

COSTA, N. M. L. **Funções seno e cosseno:** uma sequência de ensino a partir dos contextos do "mundo experimental" e do computador. 1997. 179f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 1997. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11139. Acesso em: 14 fev. 2024.

COSTA, N. M. L.; PRADO, M. E. B.B. Formação continuada e uma abordagem exploratório-investigativa em geometria espacial de posição. *In:* CIBEM, 2013, 7, **Anais do VII CIBEM,** Montevideo, Uruguay, 2013.

CRAMER, K. Using translation model for curriculum development and classrrom instruction. LESH, R.; DOERR, H. M. (Org.) **Beyond constructivism:** models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching. Editora: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers. New Yorque, 2003.

DANTA, L. R. **Matemática em contextos**: geometria plana e geometria espacial. 1. ed. São Paulo: Ática, 2020.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: Da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996.

D'AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática:** elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

DEL GRANDE, J. J. Percepção espacial e geometria primária. *In:* LINDIQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (Orgs.). **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: Atual, 1994. p. 156-167.

DEL GRANDE, J. J. Spatial sense. **Arithmetic Teacher**. v. 37, n. 6, p. 14-20, 1990.

DESCARTES, R. **O Discurso Sobre o Método**. 1 ed. Curitiba: Hemus, 1978.

DESTEFANI, W. C.; DESTEFANI, J. A; MARINHO, B. M. A geometria de forma lúdica: uma experiência com materiais manipulativos em turma do Ensino Médio. *In:* Encontro Nacional de Educação Matemática, 2019, 13. **Anais...** 2019.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar:** geometria espacial posição e métrica. 7. ed. São Paulo, SP: Atual, 2013. 472 p.

DOMINGOS, A. M. D. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados – a matemática no início do superior**. 2003. Dissertação (Doutorado em Ciências da Educação – Especialidade de Teoria Curricular e Ensino das Ciências) – Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Lisboa, 2003.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. *In*: Tall, D. (Org.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 25–41.

DUFOUR-JANVIER, B., BEDNARZ, N., BELANGER, M. Pedagogical Considerations Concerning the Problem of Representation. *In:* JANVIER, C (org.), **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics**. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 1987. p. 109-122.

DUVAL, R. Representation, vision and visualization: cognitive function in mathematical thinking. Basic issues for learning. *In*: HITT, F.; SANTOS, M. (org.). **Proceeding of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. [*S.l.*], 1999. p. 3-26.

DUVAL, R. **Ver e ensinar matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. *In*: TÂNIA, M. M. (Org.). Campos. 1 ed. São Paulo: PROEM, 2011.

EDWARDS, L.D. **A Natural History of Mathematical Gesture**. Paper presented at the Annual Meeting of the America Educational Research Association Annual Meeting, Chicago, April, 2003.

EDWARDS, L. D. Gestos e integração conceitual na conversa matemática. **Educ Stud Math**, v. 70, n. 2, p. 127–141, 2009. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/40284565. Acesso em: 5 fev. 2024.

ELIA, I., GAGATSIS, A.; HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. O papel dos gestos em fazer conexões entre aspectos de espaço e forma e suas representações verbais nos primeiros anos: resultados de um estudo de caso. **Math Ed Res J**, v. 26, p.735–761, 2014. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s13394-013-0104-5. Acesso em: 14 fev. 2024.

ENGELS, F. **Anti-Dühring**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1976.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação Matemática:** Representação e Construção em Geometria. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999, 227p.

FANTIN, T. Y.; BAIRRAL, M. A. Um Estudo sobre a Produção de Significados dos Alunos do Ensino Médio para Elementos da Geometria. **Revista Cocar**, [*S. l.*], v. 3, n. 5, p. 29-38, 2011. Disponível em: https://periodicos.uepa.br/index.php/cocar/article/view/66. Acesso em: 10 out. 2024.

FAZENDA, I. C. A. **Interdisciplinaridade:** História, Teoria e Pesquisa. 11. ed. Campinas, SP: Papirus, 1994.

FEITOSA, R. A. **Estudos de representações multidimensionais para segmentação das fases dos gestos.** 2018. 104f. Dissertação (Mestrado em Escola de Artes, Ciências e Humanidades) - Programa de Pós-Graduação em Sistemas de Informação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018. Disponível em: https://teses.usp.br/teses/disponiveis/100/100131/tde-14062018-225835/pt-br.php. Acesso em: 14 fev. 2024.

FERNANDES, D. F.; SOARES, M. A. S; MARIANI, R. C. P. Conceitos de geometria espacial de posição: tratamentos figurais mobilizados por futuros professores de Matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática** – RPEM, Campos Mourão, PR, Brasil, v. 9, n. 19, p. 237-261, jul./out., 2020. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/6223.

FERNANDES, D. L. **Geometria espacial de posição sob a ótica dos registros de representação semiótica:** um estudo com licenciando em Matemática. 2019. 184f. Dissertação (Mestrado Educação Matemática e Ensino de Física) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/20811/DIS_PPGEMEF_2019_FERNER_DIENIFER.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 5 fev. 2024.

FERNANDES, D. F.; SOARES, M. A. S; MARIANI, R.de C. P. Geometria Espacial de Posição: análise de duas coleções de livros didáticos do Ensino Médio. **Boletim GEPEM**, n. 74, 2019. Disponível em: https://periodicos.ufrrj.br/index.php/gepem/article/view/170. Acesso em: 14 fev. 2024.

FERNANDES, D. F.; SOARES, M. A. S; MARIANI, R. de C. P. Tratamentos figurais vinculados a conceitos de geometria espacial de posição, mobilizados por futuros professores de Matemática. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 23, n. 2, p. 160-188, 2021. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/54060/37599. Acesso em: 5 fev. 2024

FERNANDES, S. H. A. A. **Das experiências sensoriais aos Conhecimentos matemáticos:** Uma análise das práticas associadas ao ensino e aprendizagem de alunos cegos e com visão subnormal numa escola inclusiva. 2008. 235f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11344. Acesso em: 14 fev. 2024.

FERNER, D. L. **Geometria espacial de posição sob a ótica dos registros de representação semiótica:** um estudo com licenciandos em matemática. 2019. 184f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/20811/DIS_PPGEMEF_2019_FERNER_DIENIFER.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 19 fev. 2024.

FERNER, D.; ROMIO, L. C.; SOARES, M. A. S.; MARIANI, R. C. P. Geometria Espacial: Análise de Uma Coleção de Livros Didáticos do Ensino Médio. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, 12, **Anais**... São Paulo, 2016.

FERREIRA, J. W. de A. **Análise da axiomatização da geometria espacial nos livros didáticos do Ensino Médio.** 2015. 86f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal de Campina Grande, 2015. Disponível em: http://dspace.sti.ufcg.edu.br:8080/jspui/handle/riufcg/2223. Acesso em: 14 fev. 2024.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2012.

FLORES, C. R. **Olhar, saber, representar**: sobre a representação em perspectiva. São Paulo: Musa, 2007.

FLOOD, V. J**.** *et al.* Paying attention to gesture when students talk chemistry: interactional resources for responsive teaching. *Journal of Chemical Education*, [S.l.], v. 92, n. 1, p. 11–22, 2014.

FORJAZ, M. do R. P. D. P. **Gesto:** A repetição e o inefável no desenho. 2008. 192f. Dissertação (Mestrado em prática e teoria do desenho) - Faculdade de Belas Artes, Universidade do Porto, 2008. Disponível em: https://biblioteca.fba.up.pt/docs/Maria_Rosario_Forjaz/ROSARIO_FORJAZ.pdf. Acesso em: 14 fev. 2024.

FREITAS, R.; BAIRRAL, M. A. O pensamento matemático mediante gestos e toques em tela no aplicativo Multibase em tablets. **Bolema**, 2023, v. 37, n. 75. p. 49-69, 2023.

FREITAS, R.; BAIRRAL, M. A. Aprendizagens matemáticas reveladas por meio de toques em tela de tablets ao manipular o aplicativo multibase. **Revista Interinstitucional Artes de Educar**, v. 9, n. 1, p. 67-86, 2023. Disponível em: https://www.e-publicacoes.uerj.br/riae/article/view/74543. Acesso em: 5 fev. 2024.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting mathematics education:** China Lectures. London: Kluwer Academic Publisher, 1973.

GAONA, J. Búsqueda bibliográfica sistemática en educación (matemática). **SocArXiv**, 2022.

GAONA, J.; MANRÍQUEZ, R. Espacio Rizomático Conceptual para análisis y exploración bibliométrica: algoritmo para la creación de grafos a partir de títulos, palabras claves y resúmenes de artículos de investigación científica. **SocArXiv**, 2023.

GIL, A. C. S. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo. Editora Atlas S.A. 2002. 175 p.

GIMÉNEZ, J.; FORTUNY, J. M. **Guías praxis para el profesorado de ESO**. Matemáticas: contenidos, actividades y recursos. Barcelona: Praxis, 1998.

GODINO, J. D.; GONZATO, M.; CAJARAVILLE, J. A.; FERNÁNDEZ, T. (2012). Una aproximación on-tosemiótica a la visualización en educación matemática. **Enseñanza de las Ciencias**, v. 30, n. 2, p. 109-130, 2012.

GOKSUN, T.; HIRSH-PASEK, K.; GOLINKOFF, R. M. How do preschoolers express cause in gesture and speech? **Cognitive Development**, v. 25, p. 56-68. 2010.

GOLDENBERG, M. **A Arte de Pesquisar:** como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. Rio de Janeiro: Record, 1997.

GOLDIN, G. A. Representational systems, learning and problem solving in mathematics. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 17, n. 2, p.137-165. 1998. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0364021399800561. Acesso em: 14 fev. 2024.

GOLDIN-MEADOW, S. **Hearing gesture:** How our hands help us think. Cambridge, MA: Harvard University Press, 2003.

GOLDIN-MEADOW, S. **Hearing gesture:** how our hands help us think. Cambridge, Massachusetts, and London, England: The Belknap Press of Harvard University Press, 2005.

GOUVEIA, C. A. A.; MISKULIN, R. G. S. Dimensões dos Processos de visualização e de representação de uma Atividade Exploratório-Investigativa em Cálculo Diferencial e Integral: Uma Análise Semiótica por meio de Obras Artísticas. **Revista Saber Digital**, v. 5, n. 1, p. 91-107, 2012. Disponível em: https://revistas.faa.edu.br/SaberDigital/article/view/988. Acesso em: 14 fev. 2024.

GUTIÉRREZ, A. Procesos y habilidades en visualización espacial. Memorias del 3er Congreso Internac. Sobre investig. **Educ. Mat**, Valência, 1991.

GUTIÉRREZ, A. **Visualização em geometria:** em busca de uma estrutura. Valência: Universidade de Valência, 1996a.

GUTIÉRREZ, A. Visualization in 3 – dimensional geometry: in search of a framework. *In:* PUIG, L.; GUTIERREZ, A. (eds.), **Proceedings of 20th PME conference**, v. 3, p. 19-26, Valencia: Universitat de València, Departamento de Didàctica de la Matemática, 1996b.

GUTIÉRREZ, A. Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales em la enseñanza de la geometria espacial. **Revista EMA**, v.3, n.3, p.1993-220, 1998.

HENRIQUE, M. P. Visualizando com Toques: retas e ângulos em telas. *In:* BAIRRAL, M. A; OLIVEIRA, G. W. B.; IZAR, S. (Ogs.) **Retratos de Experiência para Visualização em Geometria.** Seropédica: Ed. Da UFRRJ, 2022.

HOFFER, A. R. **Mathematics Resource Project:** Geometry and Visualization. Palo Alto, Calif.: Creative Publications, 1977.

HOFFER, B. A. Geometry is more than proof. **The Mathematics Teacher**, v. 74, n. 1, 1981, p. 11-18. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/27962295. Acesso em: 14 fev. 2024.

HUINKER, D. Representational Competence: A renewed focus for classroom practice in mathematics. **Wisconsin Teacher of Mathematics**. p.4-8. 2015. Disponível em: https://matrixmathshub.co.uk/wp-content/uploads/2020/05/Maths-representations-DHuinker-article.pdf. Acesso em: 14 fev. 2024.

JAPIASSU, H.; MARCONDES, D. **Dicionário básico de filosofia**. Rio de Janeiro: Zahar, 1991.

JESUS, G. F. de. **"Tem outro jeito de fazer, moço!":** apropriação de práticas de numeramento escolares por estudantes de licenciatura em matemática da UNEB – Caetité. 2021. 415f. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de PósGraduação da Faculdade de Educação: Conhecimento e Inclusão Social, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2021, Disponível em: https://repositorio.ufmg.br/bitstream/1843/38032/1/Tese_Gildelson_Felicio_de_Jesus_FAE_UFMG_2021.pdf. Acesso em: 14 fev. 2024.

JOHNSON, E. L. A New Look at the Representations for Mathematical Concepts: Expanding on Lesh's Model of Representations of Mathematical Concepts. ***Fórum de Políticas Públicas Online***, v. 2018, n.1, 2018. Disponível em: https://eric.ed.gov/?id=EJ1191692. Acesso em: 3 maio 2023.

KALEFF, A. M. M. R. **Novas tecnologias no ensino da matemática:** tópicos em ensino de geometria. Rio de Janeiro: Universidade Aberta do Brasil – UAB, 2008.

KALEFF, A. M. M. R. Do fazer concreto ao desenho em geometria: ações e atividades desenvolvidas no laboratório de ensino de geometria na Universidade Federal Fluminense. *In:*

LORENZATO, S. **Laboratório de ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2012, p.113-134.

KALEFF, A. M. M. R.; ROSA, F. M. C. Recursos didáticos manipulativos e tecnológicos para o ensino de Matemática com vistas à inclusão. **Educação Pública.** 2016. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/16/26/recursos-didticos-manipulativos-e-tecnolgicos-para-o-ensino-de-matemtica-com-vistas-incluso. Acesso em: 19 fev. 2024.

KAMEYAMA, E. S. **O uso do Geogebra no ensino de geometria espacial de posição.** 2021. 66f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Pará, Castanhal, PA, 2021.

KAPUT, J. Technology and Matthematics Education**.** University of Massachussettes – Dartmouth. *In:* GROUWS, D. A. **Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning.** National Council of Teachers of Mathematics, 1992.

KENDON, A. Some relationships between body motion and speech. An analysis of an example. *In:* SIEGMAN, A.; POPE, B. (Org.) **Studies in Dyadic Communication. Elmsford**, New York: Pergamon Press, 1972. p. 177-210.

KENDON, A. Gesticulation and speech: Two aspects of the processo of utterance. *In*: **The Relationship of Verbal and Nonverbal Communication**. Berlin, New York: De Gruyter Mouton, 1980, p. 207-227.

KENDON, A. The Study of Gesture: some remarks on its history. **Recherches sémiotiques/semiotic inquiry**, v. 2, p. 45-62, 1982.

KENDON, A. How gestures can become like words. *In:* POYATOS, F. (Org.) **Crosscultural Perspectives in Nonverbal Communication.** Toronto: C. J. Hogrefe, Publishers, 1988. p. 131-141.

KENDON, A. **Gesture:** visible action as utterance. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.

KENDON, A. **Some Reflections on the Relationship between 'Gesture' and 'Sign'** in Gesture 8:3. Ed. JBP Company, Philadelphia, 2008.

KISNER, M. C. F; CARGNIN, C.; Figuras bidimensionais X figuras tridimensionais: qual a diferença na visão de alunos? *In:* Encontro Nacional de Educação Matemática. **Anais..**. Brasília, On-line, 2022. Disponível em: https//www.even3.com.br/anais/xivenem2022/484289-figuras-bidimensionais-x-figuras-tridimensionais--qual-a-diferenca-na-visao-de-alunos. Acesso em: 4 fev. 2024.

KITA, S.; GIJN, I. V.; HULST, H. VAN DER, K. S.; VAN GIJN, I.; VAN DER HULST, H. Movement phases in signs and co-speech gestures, and their transcription by human coders. Gesture and sign language in human-computer interaction, **Springer Berlin Heidelberg**, p. 23-35. 1998.

KRAUSE, C. M. **The Mathematics in Our Hands**: How Gestures Contribute to Constructing Mathematical Knowledge. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2016.

KRAUSS, R. M. Why do we gesture when we speak? **Curr. Dir.Psychol. Sci.** v. 7, p. 54, 1998.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, Intuição e Visualização:** A riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de Cursos de Licenciatura de Matemática. 2009, 294f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2009. Disponível em: https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/19925. Acesso em: 14 fev. 2024.

LEIVAS, J. C. P. Habilidades de visualização com alunos da licenciatura em matemática em geometria espacial. *In:* Simpósio Internacional de Educação Matemática (SIPEM). Sociedade brasileira de Educação Matemática, **Anais...** 2012. Disponível em: http://www.sbemrevista.com.br/files/v_sipem/PDFs/GT04/CC14171090091_A.pdf. Acesso: 3 fev. 2024.

LEIVAS, J. C. P.; BÚRIGO, E. Z. Representações de objetos espaciais por professores em ação de formação continuada. *In:* Conferência interamericana de Educação Matemática, 2011, 13, **Anais...**Recife/Pernambuco, 2011. Disponível em: https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/500. Acesso: 3 fev. 2024.

LESH, R.; LEHRER, R. Models and modeling perspectives on the development of students and teachers. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 5, n. 2-3, p. 109-129, 2003.

LESH, R.; POST, T. R.; BEHR, M. Rep- resentations and Translations among Represen-tations in Mathematics Learning and Problem Solving. *In:* JAVIER, C. (Org.). **Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.** Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum Associates, 1987. p. 33-40.

LIEBAN, D. **Exploring opportunities for connecting physical and digital resources for mathematics teaching and learning**. 2019. 154p. Dissertation (Master's degree) – Linz School of Education Departament of STEM Education in Mathematics, Johannes Kepler Universitat Linz, 2019.

LIMA, A. F. **Do sensível às ideias:** um estudo de geometria a partir de atividades envolvendo espaço e forma. 2015. 254f. Dissertação (Mestrado Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015. Disponível em: https://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/2280. Acesso em: 14 fev. 2024.

LIMA, A. F.; ALMEIDA, J. J. P. Do sensível às ideias: uma proposta de ensino de geometria, dos aspectos empíricos aos dedutivos. **Revista Princípia**, edição especial, João Pessoa/PB, n. 28, dez., 2015. Disponível em: https://periodicos.ifpb.edu.br/index.php/principia/article/view/478. Acesso em: 16 fev. 2024.

LIMA, E. L. Conceituação, manipulação e aplicações: as três componentes do ensino da Matemática. **Revista do Professor de Matemática** v. 41, p.1-6, 1999.

LIMA, P. F.; CARVALHO, J. B. P. de. **Geometria**. Brasília: MEC, 2010, p.135-166.

LIMA, P. F.; CARVALHO, J. B. P. A Geometria escolar hoje: conversas com o professor que ensina matemática. *In*: SILVA, M. C. L.; VALENTE, W. R. **A Geometria nos primeiros anos escolares**: história e perspectivas atuais. 1 ed. Campinas, SP: Papirus, 2014. p. 83-128.

MADEO, R. C. B.; PEREZ, S.M; LIMA, C. A. Gesture phase segmentation using support vector machines. **Expert Systems with Applications,** v. 50, p. 100-115, 2016.

MAINALI, B. Representation in teaching and learning mathematics**. International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology** (IJEMST), v. 9, n. 1, p.1-21. 2021.

MASCHIETTO, M..; BUSSI, M. G. B. Meaning construction through semiotic means: the case of the visual pyramid. *In:* Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education, 2005, 29, **Anais**...v. 2, Melbourne, Austrália, 2005.

MÁXIMO, L. S. **Conhecimentos de visualização espacial:** tarefas de representações visuais com uso de recursos físicos e visuais. 2016. 134f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal do Pernambuco, Recife, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/31343. Acesso em: 14 fev. 2024.

MAZZI, L. C. **As demonstrações matemáticas presentificadas nos livros didáticos do ensino médio:** um foco nos capítulos de geometria. 2019, 160f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas, 2019. Diponível em: https://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/1079817. Acesso em: 14 fev. 2024.

MCNEIL, N. M; EVANS, J.L; ALIBALI, M.W. The Role of Gesture in Children's Comprehension of Spoken Language: Now They Need It, Now They Don't. **Journal of Nonverbal Behavior**, v. 24, p. 131–150, 2000. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1023/A:1006657929803. Acesso em: 27 jun. 2022.

MCNEILL, D. So you think gestures are nonverbal? **Psychological Review 92**, v.3, p. 350–371, 1985.

MCNEILL, D. **Hand and mind**. Chicago: University of Chicago Press, 1992.

MCNEILL, D. **Language and Gesture**. Cambridge University Press. 2000, 419p.

MCNEILL, D. **Gesture and thought.** Chicago: University of Chicago Press, 2002, 332p.

MCNEILL, D. **Gesture and language dialectic**. Chicago: University of Chicago Press, 2005, 25p.

MCNEILL, D. Gesture: a psycholinguistic approach. **The Encyclopedia of language and linguistics**, Jan., p. 58-66, 2006.

MCNEILL, D. **Why We Gesture:** The Surprising Role of Hand Movements in Communication. Cambridge University Press, 2015.

MINAYO, M. C. S. A turbulenta origem da pesquisa qualitativa no Brasil. *In:* BICUDO, M. A. V.; COSTA, A. P. M. (Org). **Leituras em pesquisa qualitativa**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019. 440p.

MISHRA, P.; KOEHLER, M. Technological pedagogical content knowledge: a framework for teacher knowledge. **Teachers College Record**, v. 108, n. 6, p. 1017-1054, 2006.

MISHRA, P.; KOEHLER, M.; MATTHEW, J. What is technological pedagogical content knowledge? **Contemporary Issues in Technology and Teacher Education**, v. 9, n. 1, p. 60-70, 2009.

MORGADO, A. C. WAGNER, E. JORGE, M. **Geometria II**. Rio de Janeiro: F. C. Araújo da Silva, 1990.

MUNIZ, C. (2009). A produção de notações matemáticas e seu significado. In: FÁVERO, M. H.; CUNHA, C. (Eds.). **Psicologia do conhecimento**: diálogo entre as ciências e a cidadania (pp. 115–143). Brasília, Brasil: UNESCO, Instituto de Psicologia da Universidade de Brasília.

MURACA, F. S. **Educação continuada do professor de Matemática:** Um contexto de problematização desenvolvido por meio de atividades exploratório-investigativas envolvendo geometria espacial de posição. 2011. 159f. Dissertação (Mestrado m Educação Matemática), Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.

NASSER, L. O papel da abstração no pensamento matemático avançado. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa:** Comitê Latinoamericano de Matemática Educativa, Colégio Mexicano de Matemática Educativa. v. 26, 2013. Disponível em: https://core.ac.uk/download/pdf/20482633.pdf. Acesso em: 14 fev. 2024.

NCTM. Conselho Nacional de Professores de Matemática. **Os Papéis da Representação na Matemática Escolar.** 2001 Anuário do Conselho Nacional de Professores de Matemática. Reston, Virgínia: NCTM, 2000.

NEMIROVSKY, R. Three conjectures concerning the relationship between body activity and understanding Mathematics. *In:* NEMIROVSKY, R. *et al.*., Perceptuo-Motor Activity and Imagination in Mathematical Learning. **Research Forum, Proceedings of PME 27**, Hawai-I, 2003. p. 101-135.

NEVES, L. X. **Intersemioses em vídeos produzidos por licenciandos em Matemática da UAB.** 2020. 304f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2020. Disponível em: https://igce.rc.unesp.br/Home/Pesquisa58/gpimem-pesqeminformaticaoutrasmidiaseeducacaomatematica/tese_neves_2020.pdf. Accesso em: 14 fev. 2024.

NONAKA, I.; TAKEUCHI, H. **Criação do conhecimento na empresa:** como as empresas japonesas geram a dinâmica da inovação. Rio de Janeiro, RJ: Elsevier, 1997
OKUMUS, S.; HOLLEBRANDS, K. Middle school students' employments of gestures for forming three-dimensional objects using an extrusion or spinning method. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 56, 2019.

OLIVEIRA, A. B. **Geometria espacial de posição:** Uma sequência didática utilizando o GeoGebra. 2019. 135f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, Universidade Estadual do Pará, Belém, PA, 2019. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/564685. Acesso em: 16 fev. 2024.

OLIVEIRA, F. W. S. **O instrumento jacente no plano na transição da geometria plana para a espacial na formação de professores**. 2023. 149f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Estadual do Ceará. Fortaleza, CE, 2023.

OLIVEIRA, G. W. B. **Olhar, Ver, Reparar, Representar**: o desenvolvimento da visualização. 2022. 145 f. Tese (Doutorado em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares) - Instituto de Educação/Instituto Multidisciplinar de Nova Iguaçu, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica/Nova Iguaçu, 2022.

OLIVEIRA, G. W. B.; IZAR, S. Visão e vistas para a visualização. *In:* BAIRRAL, M.; BRAVO, G.; IZAR, S. **Retratos de experiência para visualização em geometria**. v. 9. Rio de Janeiro: Edur UFRJ, 2022.

OLIVEIRA, G. W. B.; IZAR, S. B.; SETTIMY, T. F. de O. Pode Mexer ou é para Enfeitar a Sala? Utilização de Material Manipulável para Ensino de Geometria nos Anos Iniciais do Ensino Fundamenta. **Revista RIPEM,** v. 12, n. 3, p. 73-900, 2022a.

OLIVEIRA, M. K. **Vygotsky,** aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione, 1997, 111p.

OLIVEIRA, R. de.; BARBOSA, A. C. M. A visualização e a construção de conceitos matemáticos dos licenciandos em pedagogia. *In:* BAIRRAL, M..; BRAVO, G..; IZAR, S. (Org.). **Retratos de experiência para visualizar em geometria**. v. 9. Rio de Janeiro: Ed. Edur/UFRJ, 2022.

OLIVEIRA, R. B. LOPES, L. Q. CARDOSO. A interface da geometria plana à espacial: Um estudo a partir dos triângulos e dos sólidos de Platão. *In:* Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, **Anais...** São Paulo, 2016.

OLIVEIRA, R. G. **Geometria espacial de posição**: do concreto ao raciocínio dedutivo com uma passagem pela tecnologia. 2016. 143f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufsm.br/handle/1/10953. Acesso em: 16 fev. 2024.

OLIVEIRA, W. F. S.; CRISTOVÃO, E. M. Geometria espacial nas questões do ENEM: Uma análise a partir dos níveis de Van Hiele. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 27, n. 74, p. 104-116, 2022.

PARZYSZ, B. Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. *In*: Colloque de La Copirelem, 28., 2001, La-Roche-sur-Yon. **Actes**.... La-Roche-sur-Yon, 2003. p. 85-92.

PASSOS, C. L. B**. Representações, Interpretações e Prática Pedagógica**: A geometria na sala de aula. 2000. 348f. Tese (Doutorado) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2000. Disponível em: https://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/183802. Acesso em: 14 fev. 2024.

PATAHUDDIN, S. M.; RAMFUL, A.; LOWRIE, T.; BHOLUA, A. Subtleties in spatial visualization maneuvers: insights from numerical solutions. **The Journal of Mathematical Behavior**, v. 67, p. 1-21, 2022.

PAVLOVIČOVÁ, Gabriela; BOČKOVÁ, Veronika; LAŠŠOVÁ, Katarína. Spatial ability and geometric thinking of the students of teacher training for primary education. **TEM Journal**, v. 11, n. 1, p. 1-10, 2022.

PEREIRA, A. C. C. **Os gestos das mãos e a referenciação:** investigação de processos cognitivos na produção oral. 2010. 148f. Tese (Doutorado em Estudos Linguísticos), Faculdade de Letras, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010. Disponível em: https://repositorio.ufmg.br/handle/1843/LETR-8TELM4. Acesso em: 14 fev. 2014.

PERTINELLI NETO, H. A construção de pesquisas qualitativas e o fazer cinematográfico: contribuições do documentário brasileiro contemporâneo aos estudos de caso. *In:* BICUDO, M. A. V.; COSTA, A. P. M. (Org.). **Leituras em pesquisa qualitativa**. São Paulo, Editora Livraria da Física. 2019. 440p.

PITTALIS, M.; CHRISTOU, C. Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. **Educational Studies in mathematics.** v. 75, n. 2, p. 191-212, 2010.

PLAÇA, J. S. V.; GOBARA, S. T. O uso de um dispositivo de análise fundamentado nos pressupostos da Teoria da Objetivação. *In:* GOBARA, S. T e RADFORD, L (Orgs.). **Teoria da Objetivação:** Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática, São Paulo, Brasil: Livraria da Física, p. 95-115, 2020.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H. Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. **Revista da Educação**, v. 11, n. 2, p. 145- 163, 2002. Disponível em < http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm>. Acesso em: 10/11/2022.

PRESMEG, N. C. Visualization and mathematical giftedness. **Educational Studies in Mathematics,** v. 17, n. 3, p. 297-311, 1986.

PRESMEG, N.C. Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. In: GUTIÉRREZ, A.; BOERO, P. (Eds.). **Handbook of research on the psychology of mathematics education.** Sense Publishers: Rotterda, 2006, p. 205-235.

RADFORD, L. Why do gestures matter? Gestures as semiotic means of objectification. *In*: CHICK, H. L.; VINCENT, J. L. (Org.). **Proceedings of the 29 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. v. 1, p. 143–149. Melbourne, Australia: University of Melbourne, 2005.

RADFORD, L. Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics*, [S.l.], v. 70, n. 2, p. 111–126, 2009.

RESENDE, A. L. C. **Uma proposta para o ensino de geometria espacial de posição.** 2013. 38f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal de São João del-Rei, 2013.

RODRIGUES, D. M. D. **Reflexão de uma prática interdisciplinar e contextualizada para o ensino de Geometria de Posição e sólidos de Platão**. 2019. 186f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2019. Disponível em: https://tede2.uepg.br/jspui/handle/prefix/2981. Acesso em: 24 fev. 2024.

RODRIGUES, J. C. **Tabu do corpo**. 2. ed. Rio de Janeiro: Achiamé, 1975.

RODRIGUES, J. C. **Tabu da Morte**. Rio de Janeiro: Achiamé, 1983.

ROSA, M., & OREY, D. C. A modelagem como um ambiente de aprendizagem para a conversão do conhecimento matemático. **Bolema**, 2012, v. 26, n. 42A. P. 261-290, 2012.

ROTH, W.-M. Gestures: Their Role in Teaching and Learning. **Review of Educational Research**, v. 71, n. 3, p. 365–392. 2001. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/3516003. Acesso em: 14 fev. 2024.

SÁ, L. C.; ROVETTA, O. M. A pandemia sob outra perspectiva: uma experiência com fotografias no ensino não presencial de geometria espacial**. Revista internacional de pesquisa em Educação Matemática (RIPEM**), v. 11, n. 3, p. 41-56, 2021. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/ripem/article/view/2459/1945. Acesso em: 4 fev. 2024.

SALVADEGO, W. N. C. **Interpretação das gesticulações de estudantes no laboratório de química baseada na semiótica de peirce.** 2015. 196f. Tese (Doutorado em ensino de ciências e Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em ensino de ciências e Educação Matemática. Universidade estadual de Londrina, Londrina, PR. 2015. Disponível em: https://pos.uel.br/pecem/wp-content/uploads/2021/08/SALVADEGO-Wanda-Naves-Cocco-1.pdf. Acesso em: 14 fev. 2024.

SANTOS, M. R. **Um estudo fenomenológico sobre o conhecimento geométrico.** 2013. 214f. Tese (Doutorado Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, SP, 2013. Disponível em: https://www.sepq.org.br/producoes/0/4/44. Acesso em: 14 fev. 2024.

SCHEFFER, N. F. **Sensores, Informática e o Corpo:** A Noção de Movimento no Ensino Fundamental. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Júlio de mesquita Filho. 2001. Disponível em: https://igce.rc.unesp.br/#!/pesquisa/gpimem---pesq-em-informatica-outras-midias-e-educacao-matematica/material-gpimem/teste/. Acesso em: 19 fev. 2024.

SCHÖN, D. Formar professores como profissionais reflexivos. *In*: NÓVOA, A (org.). **Os professores e sua formação**. Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1995.

SCUCUGLIA, R. **A investigação do teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas.** 2006. 145f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, SP, 2006.

SETTIMY, T. F. O. **Visualização em sala de aula utilizando recursos didáticos variados**. 2018. 130f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, contextos contemporâneos e demandas populares, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2018.

SHULMAN, L. S. Paradigmas e programas de pesquisa para o estudo do ensino. *In*: WITTROCK M. C. (Org.). **Handbook of research on teaching**. 3. ed. Nova York: Macmillan, 1986.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, Cambridge, v. 57, p. 1-22, 1987.

SFARD, A. What's all the fuss about gestures? A commentary. **Educ Stud Math,** v. 70, p.191-200, 2009.

SILVA, J. B. **Geometria espacial de posição:** uma abordagem axiomática utilizando material concreto para o ensino médio. 2022. 90 f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, 2022.

SILVA, M. C. L.; WAGNER, R. V. **A geometria nos primeiros anos escolares:** história e perspectivas atuais. Papirus Editora, 2014. 144p.

SKEMP, R. **Psicología del aprendizaje de las matemáticas**. 2. ed. Madrid: Ediçiones Morata, 1993.

SOUZA, L. R. As geometrias não euclidianas na compreensão da geometria euclidiana. *In:* Encontro Nacional de Educação Matemática, 2019, 13, **Anais...** Cuiabá, 2019.

SOUZA, V. H. G; GALVÃO, M. E. E. L.; SOUZA, W. R. S. Representações bidimensionais de figuras tridimensionais: um estudo com a visualização. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**. v. 7, 2014. Disponível em: https://jieem.pgsskroton.com.br/article/view/87. Acesso em: 14 fev. 2024.

STEFFE, L.; THOMPSON, P**.** Teaching Experiment Methodology: underlying principles and essential elements. *In:* LESSH, R.; KELLY, E. A. E. (Ed.) **Research Design in mathematics and science education**. Hillsdale, N.J: Erlbaum, 2000. p. 267 – 307.

SUTHERLAND, R. (1993). Consciousness of the unknown: symbolising mathematical experience. **For the Learning of Mathematics**, v. 13, n. 1, p. 43-46, 1993.

TOMASELLO, M. **Origins of Human Communication**. Editora: The MIT Press, 2010, 409p.

TRIPATHI, P. N. Developing mathematical understanding through multiple representations. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v.13, p.438-445. 2008.

TURATO, E. R.; BASTOS, R. A.; VIEIRA, A. S. L.; WEBER, A. As pesquisas qualitativas: desafios de sua cientificidade. *In:* BICUDO, M. A. V.; COSTA, A. P. (Org.). **Leituras em pesquisa qualitativa.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019, v. 1, p. 135-144.

VERGNAUD, G. (2009). A contribuição da psicologia nas pesquisas sobre a educação científica, tecnológica e profissional do cidadão. In: Fávero, M. H. e Cunha, C (Eds.), **Psicologia do conhecimento:** diálogo entre as ciências e a cidadania (p. 39-60). Brasília, Brasil: UNESCO, Instituto de Psicologia da Universidade de Brasília.

VALE, I. **Materiais manipuláveis.** Viana do Castelo: ESEVC-LEM, 2002.

VECINO. F. R. Representación del espacio en el niño. El espacio como modelo de desarrollo de las distintas geometrías. *In:* CHAMORRO, M. del C. **Didáctica de las Matemáticas na Educacion Infantil.** Madrid: Pearson Educación, 2005. p. 255-277.

VELOSO, E. **Geometria:** temas actuais: materiais para professores. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

VIANA, O. A. **O componente espacial da habilidade matemática de alunos do ensino médio e as relações com o desempenho escolar e as atitudes em relação à Matemática e à Geometria.** 2005. 279f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 2005. Disponível em: https://www.repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/358662. Acesso em: 14 fev. 2024.

VIGOTSKI, L. S; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.** São Paulo: Icone, 1998.

VILLARREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas.** 1999. 373f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 1999.

VISEU, F.; ROCHA, H.; MONTEIRO, J. M. Rethinking Digital Technology versus Paper and Pencil in 3D Geometry. **Journal of Learning for Development**, v. 9, n. 2, p. 267-278, 2022.

VYGOTSKY, L. **A Formação Social da Mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

VYGOTSKY, L. S. **Collected works**, v. 4. New York: Plenum, 1997.

XIONG, Y., QUEK, F. Propriedades de frequência de gestos de movimento de mão e análise de discurso multimodal**. Int J Comput Visio,** v. 69, p. 353-371, 2006.

ZHANG, J. J. The nature of external representations in problem solving. **Cognitive Science,** v. 21, n. 2, p. 179-217, 1997.

ZHAO, J. **Using gestures and body movements for thinking and learning.** 2018. 139 f. Tese (Doctor of Philosophy) - Columbia University, New York, 2018. Disponível em: https://academiccommons.columbia.edu/doi/10.7916/D8155VH1. Acesso em: 14 fev. 2024.

ZOGAIB, S. D. **Sentido espacial de crianças na educação infantil:** entre mapas, gestos e falas. 2019. 250f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, 2019. Disponível em: https://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UFES_0fc97b9df81af607822e28ecb9734f69. Acesso em: 20 fev. 2024.

ZULATTO, R. B. A. **A natureza da aprendizagem matemática em um ambiente online de formação continuada de professores.** 2007. 174f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2007. Disponível em: https://igce.rc.unesp.br/Home/Pesquisa58/gpimem-pesqeminformaticaoutrasmidiaseeducacaomatematica/zulatto_rba_dr_rcla.pdf. Acesso em: 14 fev. 2024.

APÊNDICES

APÊNDICE A - BLOCO 1 DE QUESTÕES RETIRADAS DO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA (COLEÇÃO I – PARTE B)

QUESTÃO 1

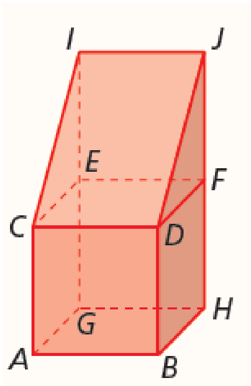
Indique se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

- Se F é uma figura tal que quatro quaisquer de seus pontos são coplanares, então F é uma figura plana, isto é, está contida em um plano.

QUESTÃO 2

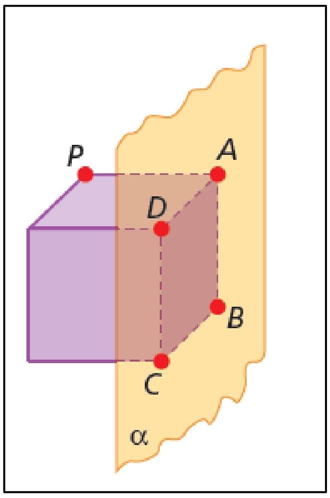
Considerando o cubo *ABCDEFGH* e o prisma *CDEFIJ* representados ao lado, faça o que se pede:

a) Identifique um par de retas paralelas, um par de retas reversas e um par de retas que não sejam paralelas nem reversas.
b) Como relacionar essa tarefa com a geometria plana?
c) De forma podemos fazer uma relação entre a bidimensionalidade e a tridimensionalidade a partir dessa tarefa?



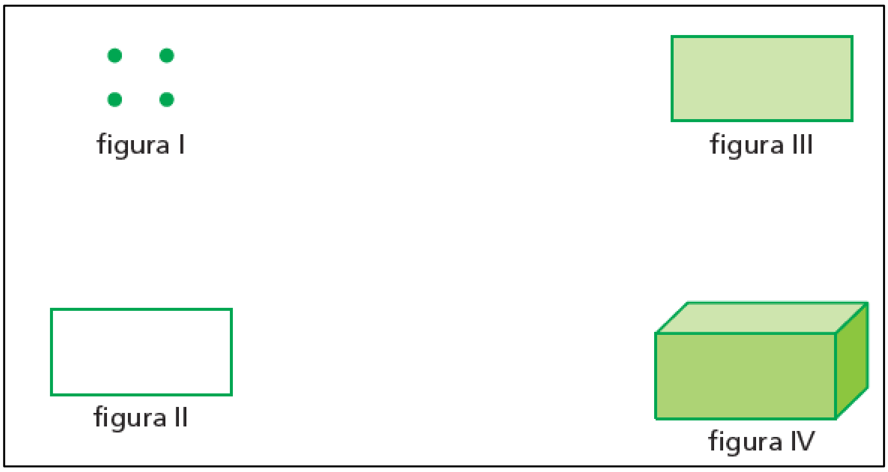
QUESTÃO 3

Observe o excerto seguinte "qualquer conjunto de pontos considerado no espaço, que tenha pelo menos um ponto, é chamado de **figura**. [...] convém lembrar que dois ou mais pontos são denominados **coplanares** se existe um plano que contém todos eles. [...] Na figura ao lado, os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são coplanares, pois pertencem ao plano α. Em linguagem simbólica, indicamos: $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$ e $D \in \alpha$. [...] O ponto *P* não é coplanar com *A*, *B*, *C* e *D*, pois *P* não pertence ao plano α" (Coleção I, p. 45).



Fonte: Coleção I.

Ainda com base no excerto anterior, o autor dessa coleção apresenta a imagem abaixo:



Fonte: Coleção I.

a) Quais as diferenças entre as quatro figuras apresentadas anteriormente?

b) O que você poderia escrever acerca da bidimensionalidade e da tridimensionalidade a partir do que foi exposto nos itens anteriores?

QUESTÃO 4

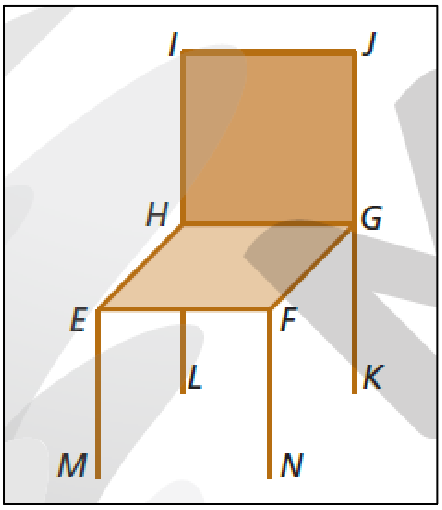
Responda os seguintes itens:

a) Quantos planos podem passar por dois pontos distintos? E quantos planos podem passar por três pontos distintos que não estejam alinhados? E se os três pontos estiverem alinhados?

APÊNDICE B - BLOCO 2 DE QUESTÕES ADAPTADAS DO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA (COLEÇÃO I – PARTE B)

QUESTÃO 1

(UFRN) Na cadeira representada na figura abaixo, o encosto é perpendicular ao assento e este é paralelo ao chão.

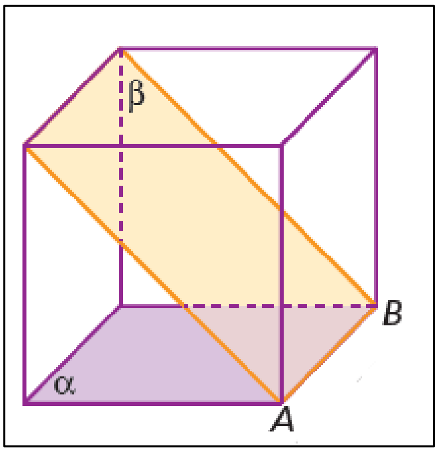


Sendo assim, responda as questões, a seguir.

a) Os planos (EFN) e (FGJ) são paralelos? Justifique.
b) HG é um segmento de reta comum aos planos (EFN) e (EFH)? Justifique.
c) Os planos (HIJ) e (EGN) são paralelos? Justifique.
d) EF é um segmento de reta comum aos planos (EFN) e (EHG)? Justifique.
e) Qual é a posição relativa entre os planos formados por EFG (assento da cadeira) e o plano GHI (encosto da cadeira)?

QUESTÃO 2

Durante a apresentação de um determinado conteúdo, o autor do livro didático apresentou a seguinte figura. Observe-a e, em seguida, responda os itens propostos:



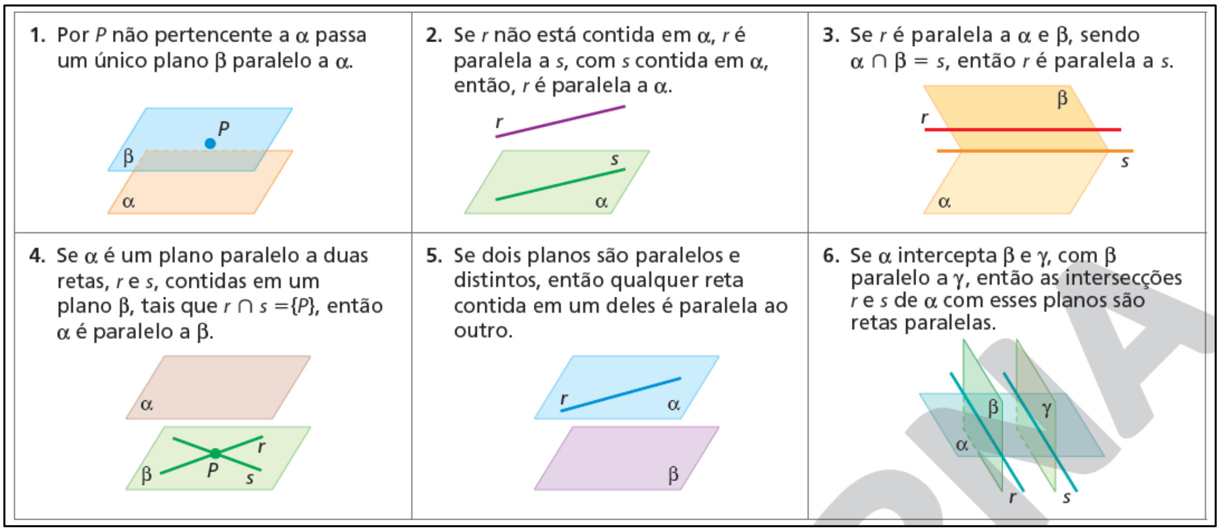
a) Na sua opinião, qual conteúdo o autor do livro está querendo apresentar a partir da exposição dessa figura?

b) O que você achou da figura?

c) Faça desenhos ilustrando possíveis posições de outros planos partindo das arestas que formam as bases do cubo (um desenho para cada situação);

QUESTÃO 3

O autor dessa coleção da qual estamos analisando apresentou as seguintes imagens durante a exposição das propriedades do paralelismo. Observe-as e, em seguida, dê sua opinião acerca do que se pede.

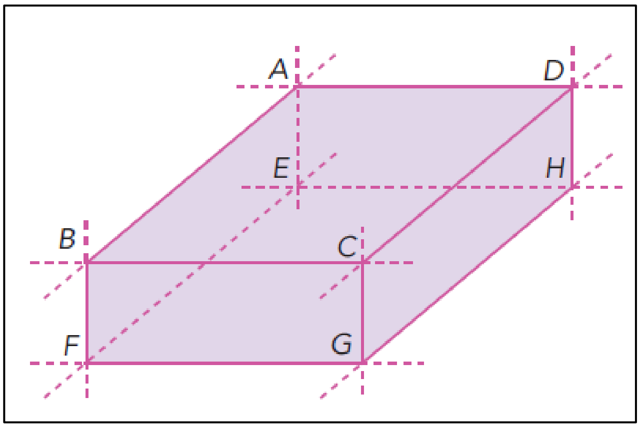


Fonte: Coleção I.

a) O autor do livro didático informou que essas propriedades do paralelismo podem ser demonstradas, no entanto, não apresentou essas demonstrações. Escolha uma das propriedades e faça a demonstração;
b) Escolha uma dentre as 6 propriedades apresentadas e faça comentários acerca da importância dela para a construção de algumas figuras geométricas espaciais. Por exemplo, prismas e pirâmides;
c) O que você achou da forma como o autor dessa coleção apresentou o resumo sobre as propriedades do paralelismo;
d) Escolha uma dentre as 6 propriedades apresentadas e relacione-a com alguma situação ou fato do seu cotidiano;
e) Escolha uma dentre as 6 propriedades apresentadas e faça um desenho.

APÊNDICE C - BLOCO 1 DE QUESTÕES ADAPTADAS DO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA (COLEÇÃO IV – PARTE B)

Observe o paralelepípedo representado, a seguir e, em seguida, responda os itens que o seguem:



Fonte: Coleção IV.

São 12 as arestas do paralelepípedo:

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{EF}$,
$\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{EH}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{AE}$ e $\overline{DH}$

São 6 as faces, determinadas por:

ABCD, FGHE, CDHG, BFGC, ADHE e ABFE.

a) As retas suportes determinadas pelos segmentos AB e GH estão contidos no mesmo plano? Como se chama esses tipos de retas? Justifique.

b) As retas suportes determinadas pelos segmentos BC e EF estão contidas no mesmo plano? Justifique. Como se chamam esses tipos de retas?

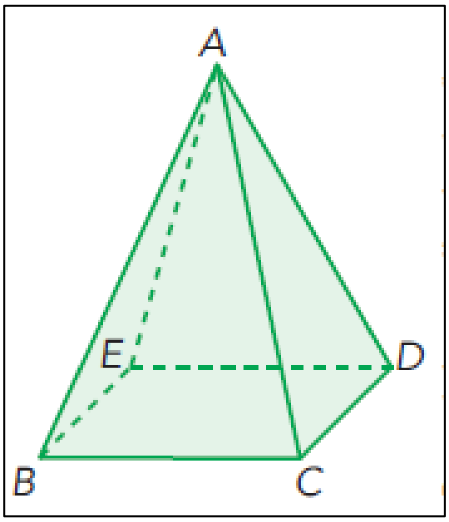
c) Na seção “Reflita” do livro didático que estamos analisando, há a seguinte informação: “as retas suportes determinadas pelos segmentos AC e FH são retas reversas. Justifique”. Qual justificativa você apresentava?

d) Quais conteúdos de geometria plana você identifica nessa tarefa?

e) O que você achou da figura geométrica espacial (representação do paralelepípedo) utilizada pelo autor desse livro didático que estamos analisando?

QUESTÃO 2

Observe a pirâmide de base quadrada representada ao lado e verifique se as retas indicadas em cada item são paralelas, concorrentes ou reversas.



Fonte: Coleção IV.

a) AC e AD

b) AB e ED

c) BC e ED

d) BE e AE

e) BC e AE

f) AE e AC

Sobre essa questão, responda com suas próprias palavras os itens, a seguir:

a) O que você achou dessa questão e da figura geométrica espacial?

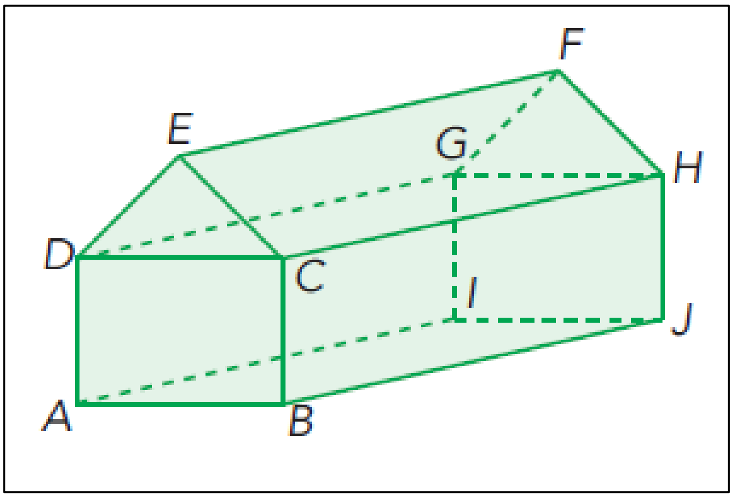
b) Relate as suas experiências da geometria plana que possivelmente contribuíram para a compreensão do que foi solicitado pelo autor do livro didático nos itens *a* até *f*.

c) Faça um desenho da pirâmide regular quadrangular.

APÊNDICE D - BLOCO 2 DE QUESTÕES ADAPTADAS DO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA (COLEÇÃO IV – PARTE B)

QUESTÃO 1

Observe o sólido geométrico representado abaixo. Depois, responda às questões.



Fonte: Coleção IV.

a) Qual é a posição relativa dos planos determinados pelas faces EFHC e DEFG?
b) A reta AI é intersecção de quais planos determinados pelas faces desse sólido geométrico?
c) Qual é o plano determinado por uma das faces do sólido que é paralelo ao determinado pela face ADGI?
d) Qual é a reta de intersecção dos planos secantes determinados por BCHJ e ECHF?
e) Há algum plano determinado por uma das faces do sólido que é paralelo ao plano determinado pela face ABJI? Em caso afirmativo, qual é esse plano?

Sobre essa tarefa faça as seguintes reflexões:

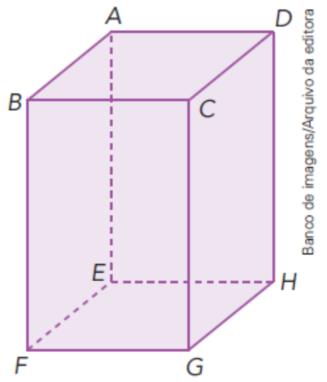
I) O que você achou da tarefa proposta pelo autor do livro didático?

QUESTÃO 2

O autor do livro didático que estamos analisando trouxe o seguinte contexto, conforme verificado na Figura 2, para explicar as posições relativas de uma reta e um plano.

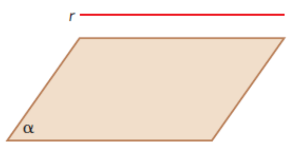
Considerando o paralelepípedo da figura ao lado, observamos que:

- o plano determinado pela face *EFGH* contém as retas $\overleftrightarrow{EH}$, $\overleftrightarrow{HG}$, $\overleftrightarrow{FG}$ e $\overleftrightarrow{EF}$;
- as retas $\overleftrightarrow{BF}$, $\overleftrightarrow{CG}$, $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{DH}$ intersectam o plano determinado pela face *EFGH*;
- as retas $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ são paralelas ao plano determinado pela face *EFGH*.



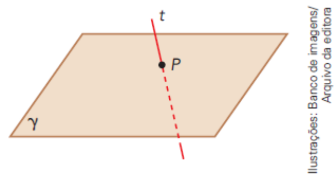
Fonte: Coleção IV.

Em seguida, trouxe a seguinte informação: “Estas são as três posições possíveis de uma reta em relação a um plano, no espaço”:



A reta *r* é paralela ao plano α (*r* e α não têm ponto comum).

A reta *s* está contida no plano β (β e *s* têm em comum todos os pontos de *s*).



A reta *t* intersecta o plano γ em um único ponto *P*. Então, a reta *t* é secante (ou concorrente) ao plano γ. O ponto *P* é chamado traço de *t* em γ.

Fonte: Coleção IV.

A partir dessa exposição feita pelo autor do livro didático, reflita:

a) O que você achou da forma como o autor do livro didático apresentou esse tema?

b) Em relação ao paralelepípedo *ABCDEFGH*, Figura 2, o autor do livro didático informou, ver Figura 4:

Fique atento

$\overleftrightarrow{BD}$ está contida no plano $(ABCD)$.

$\overleftrightarrow{AG}$ intersecta o plano $(EFGH)$.

$\overleftrightarrow{AF}$ não intersecta o plano $(CDHG)$.

$\overleftrightarrow{DF}$ intersecta o plano $(ACGE)$.

Fonte: Coleção IV.

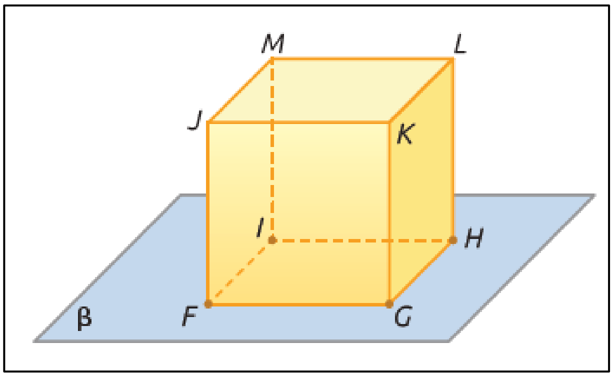
c) O que você achou dessa seção? O que poderia melhorar?

d) Estas três posições possíveis de uma reta em relação a um plano, conforme pode ser verificado na Figura 3, também são válidas na geometria plana? Justifique.

APÊNDICE E - BLOCO 1 DE QUESTÕES ADAPTADAS DO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA (COLEÇÃO IX – PARTE B)

QUESTÃO 1

Observe a imagem de um cubo, em que β é um plano que contém uma de suas faces. De acordo com a figura, podemos afirmar que:



a) Os pontos F e G pertencem ao plano β?
b) As faces do cubo estão contidas no plano β? Justifique sua resposta.
c) Ilustre alguma situação do cotidiano que pode ser relacionada à imagem acima.

QUESTÃO 2

Em cada item, classifique a sentença em verdadeira ou falsa. Em seguida, reescreva cada sentença que você julgou falsa, corrigindo-a para torna-la verdadeira.

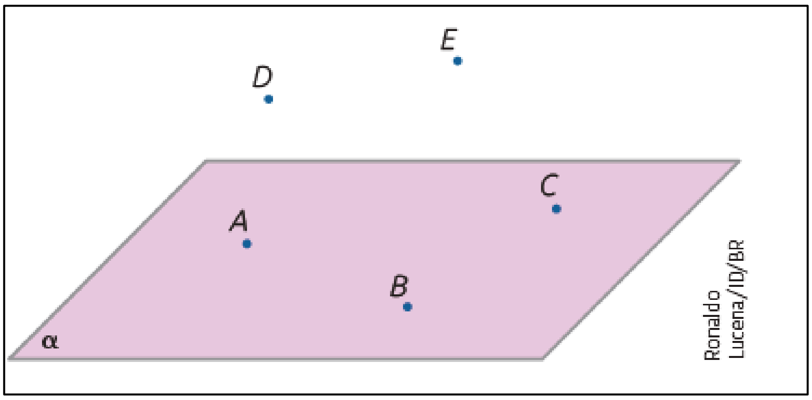
a) Na Geometria Espacial de Posição, o espaço é limitado e é nele que residem as figuras geométricas espaciais.
b) Dois pontos do espaço sempre são colineares.
c) Três pontos do espaço nem sempre são coplanares.
d) Dois pontos distintos determinam uma única reta.
e) Uma reta que não está contida em um plano intersecta esse plano em vários pontos.

Depois que você respondeu a tarefa proposta no livro didático que estamos analisando, reflita sobre os itens, a seguir:

I) O que você achou dessa tarefa?
II) Como se comportam dois e três pontos na geometria plana?
III) De que forma uma reta fica determinada na geometria plana?

QUESTÃO 3

Sejam os pontos *A*, *B*, *C* pertencentes ao plano α e não colineares, e os pontos *D* e *E* não pertencentes ao plano α e não colineares com os pontos *A*, *B* ou *C*.



Fonte: Coleção IX.

a) No máximo, quantos triângulos não contidos no plano α podem ser determinados pelos pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E* como vértices?
b) Podemos afirmar que os pontos *D* e *E* também são não colineares? Justifique sua resposta.
c) No máximo, quantos planos podem ser determinados pelos pontos *A*, *B*, *C* e *E*?

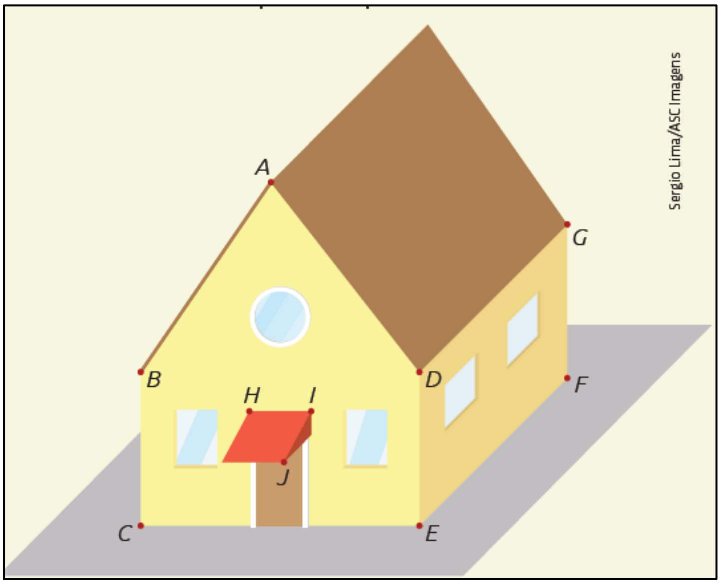
Depois que você respondeu a tarefa anterior, reflita sobre os seguintes itens:

I) O que você achou dessa tarefa?
II) Qual figura geométrica espacial você visualiza a partir da resolução do item c? Desenhe-a.

APÊNDICE F - BLOCO 2 DE QUESTÕES ADAPTADAS DO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA (COLEÇÃO IX – PARTE B)

QUESTÃO 1

Baseando-se na figura da casa, determine a posição relativa entre a reta e o plano informados em cada item. Em seguida, represente em um mesmo esquema o plano e a reta indicados.

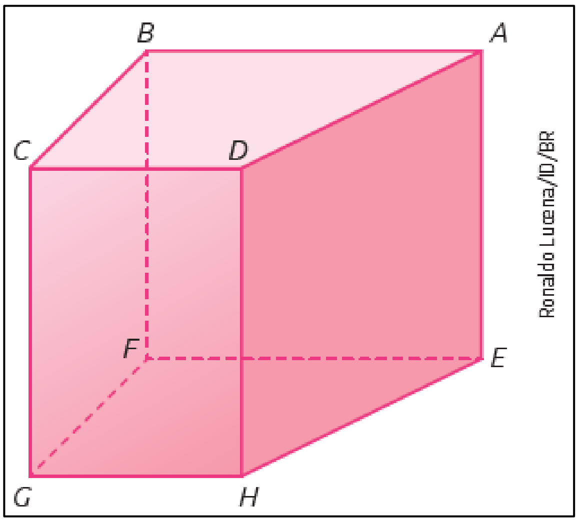


a) Reta r: passa pelos pontos C e E. Plano α: passa pelos pontos A, D e G.
b) Reta s: passa pelos pontos H e I. Plano β passa pelos pontos B, C e E.
c) Reta t: passa pelos pontos E e F. Plano γ (lê-se "gama"): passa pelos pontos H, I e J.
d) Reta u: passa pelos pontos F e G. Plano λ (lê-se "lâmbda"): passa pelos pontos C, D e E.

QUESTÃO 2

Observe a representação do prisma reto de base quadrangular.

Figura 2: Representação do Prisma de base quadrangular



Fonte: Coleção IX.

Considerando os planos que contêm as faces desse prisma, determine:

a) O(s) plano(s) paralelo (s) ao plano que contém a face *ABFE;*

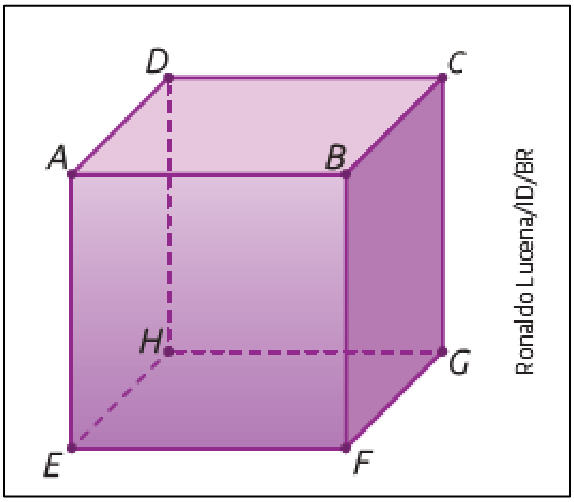
b) O (s) plano (s) secante (s) ao plano que contém a face *ABCD;*

c) A posição relativa entre os planos que contém as faces *ABFE* e *BCGF;*

d) A posição relativa entre os planos que contém as faces *ADHE* e *DCGH*

QUESTÃO 3

Considere os planos e as retas que contêm, respectivamente, as faces e as arestas da representação do cubo.



Fonte: Coleção IX.

a) Quais são os planos paralelos ao plano que contêm a face *ABFE*?

b) O ponto *A* pertence a quais planos?

c) *DH* corresponde à intersecção de quais planos?

APÊNDICE G - BLOCO 1 DE QUESTÕES ADAPTADAS DO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA (COLEÇÃO VIII – PARTE B)

QUESTÃO 1

O “boxe Pense e responda” do capítulo de geometria espacial de posição de uma coleção de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, aprovados pelo PNLD 2021 faz referência a alguns postulados da reta e do plano. Leia-os e, em seguida, responda os itens solicitados pelo autor do livro didático.

R_2: Dois pontos distintos determinam uma única reta que os contém.

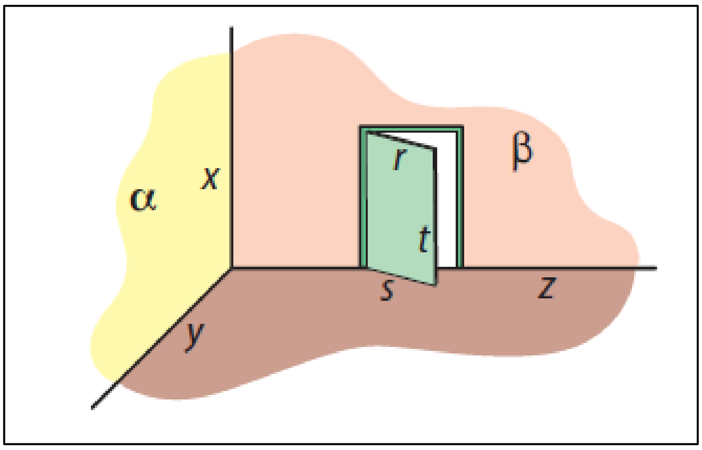
P_2: Toda reta que tem dois pontos distintos em um plano está contida nesse plano.

P_3: Três pontos que não estão em uma mesma reta (não colineares) determinam um único plano.

- Se os pontos não fossem distintos, ainda assim o postulado R_2 seria válido? E no caso do P_2? Justifique.
- No postulado P_3, o que acontece se os pontos forem colineares?

QUESTÃO 2

A Figura 1 mostra uma porta entreaberta e o canto de uma sala.



Fonte: Coleção IV.

Responda o item abaixo:

a) Que posições relativas têm as retas suporte que contêm r e s; s e t; x e r; y e t?

QUESTÃO 3

O "boxe Pense e responda" do capítulo de Geometria Espacial de posição de uma coleção de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, aprovados pelo PNLD 2021 faz referência às retas reversas. Leia-o e responda. Em seguida exponha seus comentários acerca de cada um dos itens abaixo.

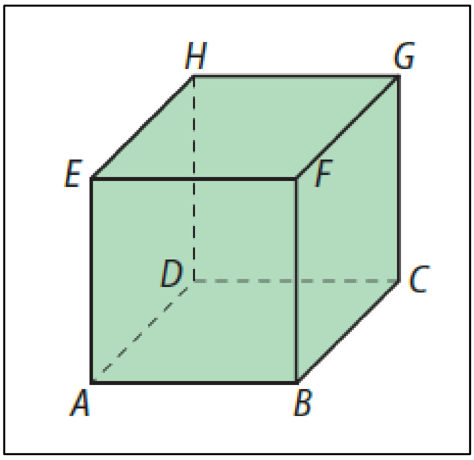
Duas retas reversas têm ponto em comum? Justifique sua resposta.
____
____
____
____
____
____
____

a) Para você, o que são retas reversas?

b) Apresente exemplos do cotidiano nos quais podemos encontrar representações das retas reversas.

QUESTÃO 4

A figura seguinte representa um cubo. Observando-a, determine as posições relativas:



Fonte: Coleção de LD VIII.

a) Das retas EF e FG.

b) Das retas EF e BC.

c) EF e HG.

APÊNDICE H - BLOCO 2 DE QUESTÕES ADAPTADAS DO LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA (COLEÇÃO VIII – PARTE B)

QUESTÃO 1

Considere um ponto *M* em um plano α e uma reta *r*, secante a α, que o “fura” em um ponto distinto de *M*. Reúna-se com seu grupo e faça o que se pede em cada item.

a) Façam um desenho que represente a situação;

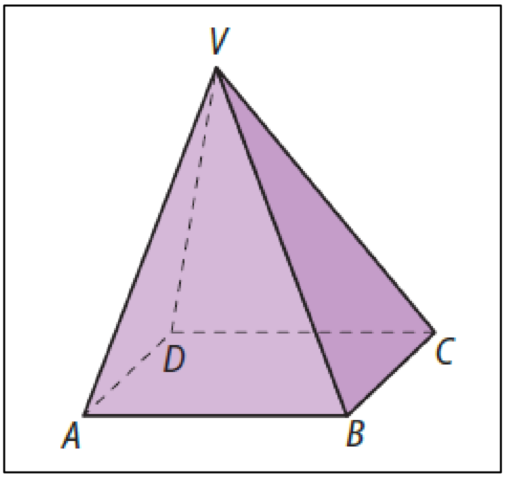
b) Verifiquem se a frase a seguir é verdadeira ou falsa. Justifiquem sua resposta.

Existem infinitas retas contidas em α que passam pelo ponto *M* e pelo ponto de intersecção de *r* e α.

c) Escrevam uma situação do dia a dia na qual você possa relacionar o texto introdutório dessa questão.

QUESTÃO 2

Observando a figura seguinte, responda.



a) Qual é a posição relativa entre os planos VAB e VBC?

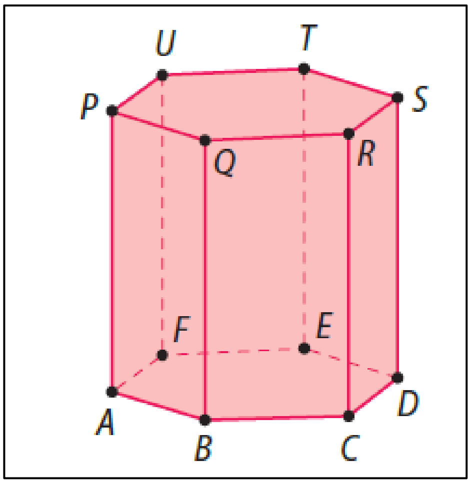
b) Qual é a intersecção dos planos ABC e VBC?

c) Há planos paralelos na figura?

QUESTÃO 3

A figura, a seguir, representa um sólido geométrico chamado prisma reto hexagonal. Nessa figura, temos:

- As bases são os hexágonos regulares ABCDEF e PQRSTU;
- Os planos que contêm as bases são paralelos;
- Os segmentos de retas que unem as bases são paralelos entre si. Por exemplo: AP//CR;
- Os segmentos de reta que unem as bases são perpendiculares às bases.

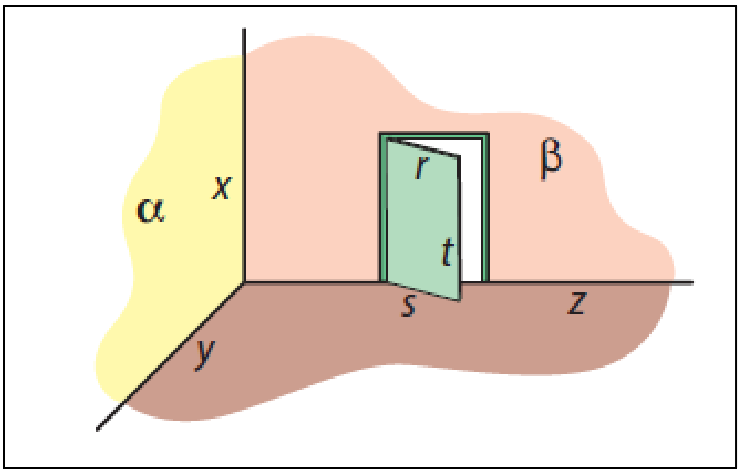


A partir dessas informações, faça o que se pede em cada item.

a) Indique uma reta paralela à reta DE.
b) A reta BC é paralela ao plano que contém o hexágono PQRSTU? Justifique.
c) Sabendo que EF e UF são paralelas ao plano que contém o quadrilátero BCRQ, o que podemos afirmar sobre esse plano e o plano que contém o quadrilátero EFUT? Justifique sua resposta.

QUESTÃO 4

A figura, a seguir, mostra uma porta entreaberta e o canto de uma sala.



a) Que posições relativas têm a reta suporte de *t* e o plano suporte de α? E a reta suporte de *r* e o plano suporte de β?

b) A reta suporte *s* está contida no plano β? Justifique.

APÊNDICE I - QUESTÕES ELABORADAS CONFORME O BLOCO I (COMUM PARA TODOS OS GRUPOS – PARTE A)

QUESTÃO 1

(Questão adaptada do Projeto Livro Aberto de Matemática) Você já deve ter percebido que, em uma estrada ou em um corredor comprido, conforme pode ser visto na Figura 1, os elementos da cena que são paralelos tais como as linhas do acostamento ou as linhas das paredes não são vistos como paralelos e parecem convergir para um ponto.

Fonte: PEXELS e Wikimedia Commons.

Há uma frase popular que pode traduzir esse tipo de situação "Retas paralelas se encontram no infinito". A partir dessa situação, responda os itens abaixo:

a) As retas paralelas na cena tridimensional se encontram? Justifique.
b) Considerando os prolongamentos das projeções em perspectiva de retas paralelas, eles são paralelos ao plano de projeção? Faça um desenho como forma de justificar sua resposta.

QUESÃO 2

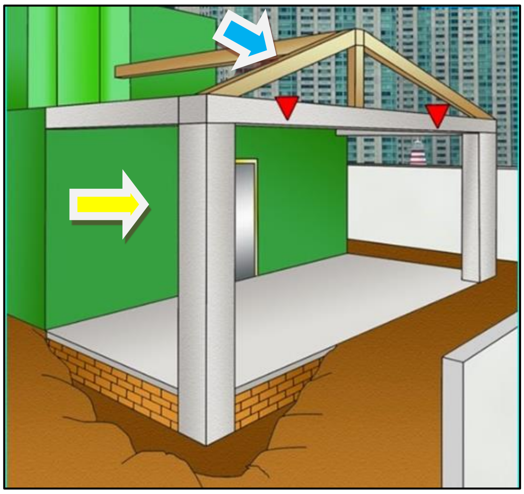
Os conceitos primitivos da geometria (pontos, retas e planos) não têm definições. Em nosso mundo físico, tentamos apresentar alguns exemplos que dão a ideia desses entes geométricos. O ponto não tem dimensão, a reta é de dimensão 1 e o plano é de dimensão 2. Já para a geometria euclidiana, o termo espaço tem definição e é de dimensão 3. Na sua opinião, como ocorre essa passagem das dimensões 0 para 1, 1 para 2 e 2 para 3?

QUESTÃO 3

Na sua opinião, o que são retas reversas? Apresente duas situações do cotidiano que se relacionam com esse conceito. Quais conhecimentos prévios são necessários para compreender a definição de retas reversas?

QUESTÃO 4

Na Figura 2, há um destaque para representações de vigas (assinaladas com setas vermelhas) e colunas (assinalada com seta amarela). Você já deve ter observado construções civis que apresentam essa estrutura. Responda os itens abaixo, conforme a imagem.



Fonte: https://www.meiacolher.com/2014/07/saiba-qual-diferenca-de-coluna-pilar.html

a) As duas colunas localizadas na parte frontal dão a ideia de quais classificações de retas?

b) O encontro da coluna (assinalada com a seta amarela) com a viga (assinalada com as setas vermelhas) dá a ideia de qual classificação de retas?

c) A linha de madeira (assinalada com a seta azul) e a viga (assinalada com as setas vermelhas) dão a ideia quais tipos de retas?

d) Agora, sem se preocupar com detalhes, apresente os tipos de retas e dê a definição com suas próprias palavras, conforme estudou na geometria e que você conhece.

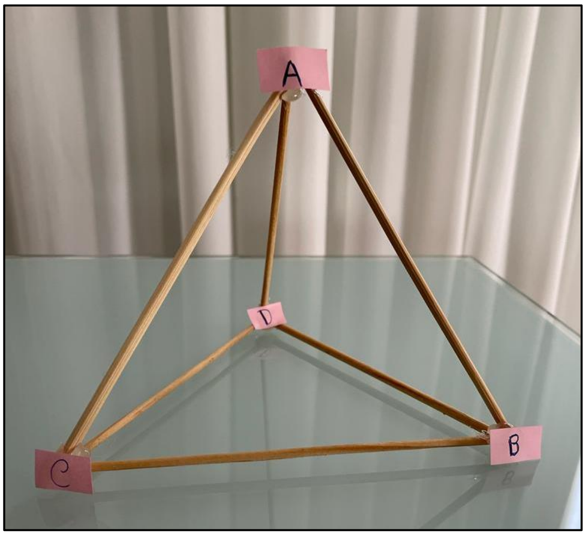
QUESTÃO 5

As posições de duas retas no plano podem ocorrer de duas maneiras. Uma delas se efetiva quando as retas apresentam um ponto em comum. A outro quando essas retas não apresentarem pontos em comum. A partir dessas ideias preliminares, responda os itens abaixo.

a) E no espaço como pode ser os tipos de retas? São os mesmos que há no plano ou surge algum outro tipo? Qual?
b) Quais relações você pode elencar entre essas posições no plano e no espaço?

QUESTÃO 6

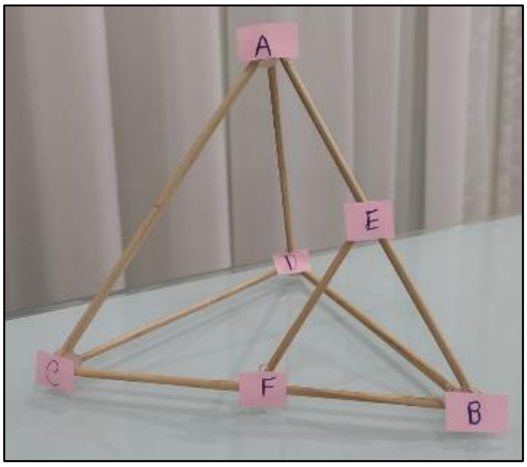
O professor de geometria espacial do ensino médio propôs a realização de uma oficina com materiais manipuláveis (palitos de churrasco, tesoura, régua, canetas e pistola para cola quente). A finalidade dele foi introduzir o capítulo de geometria espacial de posição, mas para isso teve a ideia de propor a construção do tetraedro regular para estudar algumas relações da geometria espacial e plana. Observe, na Figura 3, a construção que um determinado grupo realizou e, em seguida, responda os itens que se pedem:



Fonte: elaborada pelo autor.

a) O professor solicitou que os grupos assinalassem os pontos médios das arestas do tetraedro. Um dos grupos iniciou a marcação e construiu o segmento EF, conforme

Figura 4. Diante dessa situação, vocês percebem alguma relação entre a aresta AC e o segmento de reta EF? Qual?



Fonte: elaborada pelo autor.

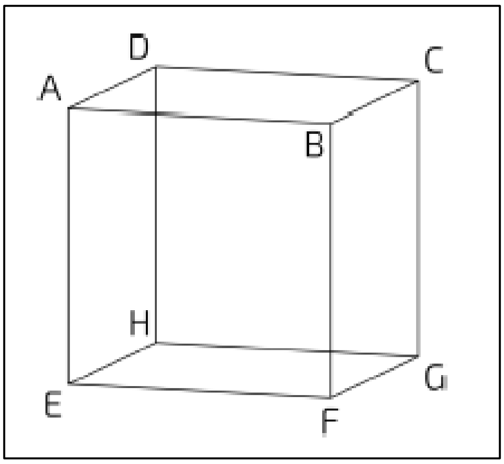
b) Um estudante levantou a mão e disse ao professor e aos colegas que consegue perceber outras relações. Essa afirmação está correta? Na sua opinião, quais seriam elas?

c) A partir das construções dos grupos, o professor fez alguns questionamentos: "interrogou aos estudantes acerca do que aconteceria caso eles colocassem palitos de churrasco nos pontos médios das arestas opostas de um tetraedro". A partir da observação da imagem anterior, o que você responderia a esse professor?

d) Desenhe, ao seu modo, um tetraedro regular e, se possível, faça marcações de algumas das relações discutidas entre o professor e os estudantes do ensino médio.

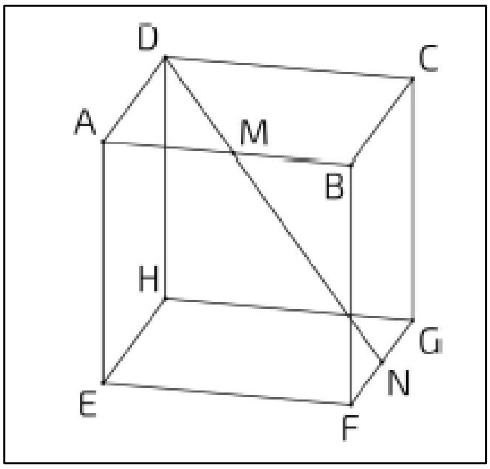
QUESTÃO 7

(Adaptado do Projeto Livro Aberto de Matemática) No livro de Geometria Espacial que Simplício está estudando tinha a seguinte pergunta: "Existem três pontos distintos, cada um em arestas distintas de um cubo e que sejam colineares?" Observe a Figura 5 que estava no livro do estudante:



Fonte: Projeto Livro Aberto de Matemática

Simplício pensa: “Existem sim! Eu construo o ponto médio *M* da aresta *AB* e o ponto médio *N* da aresta *FG*. Traçando o segmento *DN*, vejo que ele passa por *M*. Pronto: os pontos *D*, *M*, e *N* são distintos, cada um está em uma aresta diferente e eles são colineares!”. Observe a Figura 6 que estava no livro do estudante:



Fonte: Projeto Livro Aberto de Matemática.

A partir dessa situação fictícia, responda os itens abaixo:

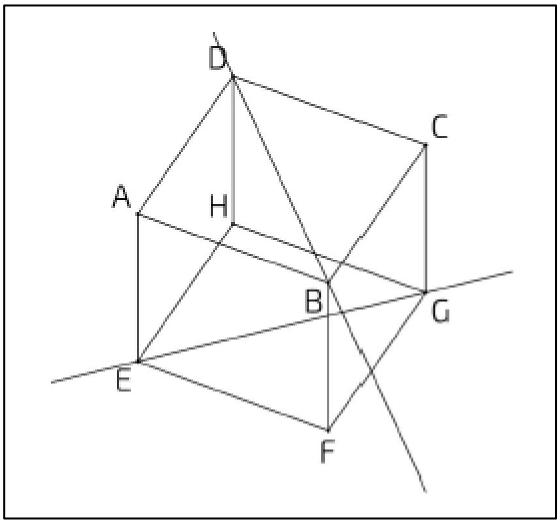
a) Você concorda com a resposta de Simplício? Por que sim? Por que não?

b) O que você achou da figura da representando o cubo?

APÊNDICE J - QUESTÕES ELABORADAS CONFORME O BLOCO 2 (COMUM PARA TODOS OS GRUPOS – PARTE A)

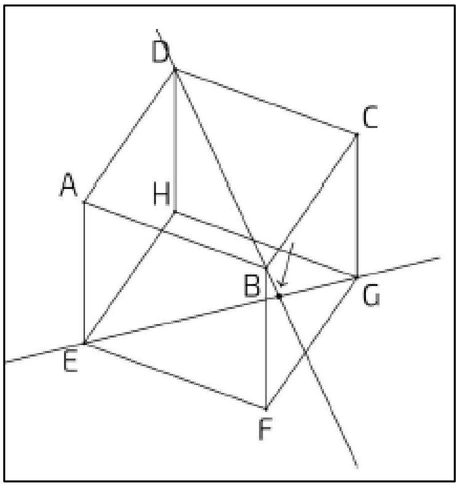
QUESTÃO 1

(Questão retirada do Projeto Livro Aberto de Matemática) Simplício está estudando Geometria Espacial em um livro e se depara com a Figura 1.



Fonte: Projeto Livro Aberto de Matemática.

O livro expõe que *ABCDEFGH E* é uma projeção em perspectiva de um cubo e pergunta quantos pontos de intersecção existem entre as retas *BD* e *EG*. Simplício responde: "Pergunta fácil! Existe um único ponto de intersecção entre *BD e EG*. Este ponto *P* aqui, como podemos ver claramente!".



Fonte: Projeto Livro Aberto de Matemática.

a) Você concorda com a resposta de Simplício? Por que sim? Por que não?

QUESTÃO 2

Um estudante do Ensino Médio foi indagado pelo seu professor de matemática sobre o que resultaria a intersecção de dois planos quaisquer. Para isso, foi solicitado que o jovem fizesse uma representação da situação. No entanto, este disse que não conseguia fazer o desenho, mas prometeu ao seu mestre trazer uma fotografia que indicasse a solução do questionamento feito. Veja, na Figura 3, a interpretação do estudante.

Fonte: elaborada pelo autor.

Responda os itens abaixo:

a) Considerando seus conhecimentos de matemática da educação básica, você acha que o estudante está correto na resposta apresentado ao professor? Justifique sua resposta.
b) Considerando que o estudante apresentou uma resposta equivocada, ajude-o na resolução do problema e indique quais são os casos de intersecção de dois planos. Para isso leve em conta os seus conhecimentos de matemática de anos anteriores. Caso considere pertinente, faça um desenho para ilustrar sua resposta.

QUESTÃO 3

Na Figura 4, temos a imagem de um guarda-roupa. Nela podemos fazer uma relação entre a porta e a parte de trás, entre os lados laterais e entre o teto e a base do móvel. A partir de seus conhecimentos matemáticos da educação básica, principalmente no estudo de planos na área da geometria, responda os itens abaixo:

Fonte: *Google imagens*.

a) Qual é a posição relativa entre as representações de planos formados pela porta (aberta) e a parte de trás do armário?
b) Qual é a posição relativa entre as representações de planos formados pela porta (fechada) e a parte de trás do armário?
c) Qual é a posição relativa entre as representações de planos formados pelo teto do móvel e a sua base?
d) Faça um desenho a sua maneira representando os planos formados pela porta (aberta) e a parte de trás do armário.

QUESTÃO 4

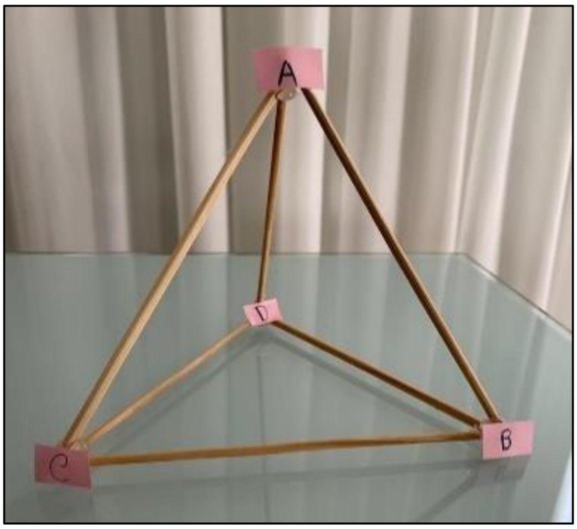
Na Figura 5, temos a imagem de um cavalete, muito utilizado para exposições de telas ou até mesmo para fixação de cartazes escolares. O modelo exibido nesse espaço tem a opção de utilização de ambos os lados do cavalete. Considerando que esse objeto é do mundo no qual habitamos, consequentemente, tridimensional. A partir de seus conhecimentos matemáticos da educação básica, principalmente no estudo de planos na área da geometria, responda os itens abaixo:

Fonte: *Google imagens*.

a) Qual é a posição relativa entre os dois planos que estão localizados em lados opostos?
b) Qual figura geométrica espacial é formada pelos dois planos situados em lados opostos, pelos planos laterais e pelo plano do piso?
c) Faça um desenho a sua maneira representando os planos formados pelos lados opostos do cavalete.

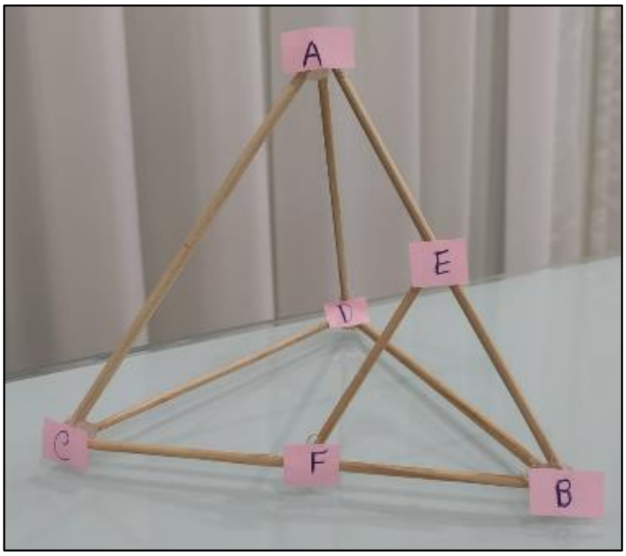
QUESTÃO 5

Observe, na Figura 6, a construção que um determinado grupo realizou na oficina promovida e, em seguida, responda os itens que se pedem:



Fonte: elaborada pelo autor.

e) O professor solicitou que os grupos assinalassem os pontos médios das arestas do tetraedro. Um dos grupos iniciou a marcação e construiu o segmento EF, conforme Figura 7. Depois informou que os pontos H e G são pontos médios das arestas AD e DC, respectivamente. Qual figura geométrica plana é formada a partir desses pontos? Justifique.



Fonte: elaborada pelo autor.

f) Quais são os planos formados pelas faces do tetraedro regular?

g) Um dos estudantes levantou a mão e disse ao professor e aos seus colegas que conseguiu visualizar dois planos secantes no interior do tetraedro regular, isto é, não considerou os planos formados pelas faces sólido geométrico. Na sua opinião, essa afirmação está correta? Caso esteja de acordo, quais são esses planos?

h) A reta suporte formada pela aresta AC está contida no plano formado pela face ABC? Justifique.

APÊNDICE L – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Dados do pesquisador principal

Nome: André Ferreira de Lima

Data de nascimento: 12/12/1981_ R.G.: 2246884
Instituição: Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - Instituto de Geociência e Ciências Exatas/Unesp/Rio Claro
Endereço: Av. 24A, nº 1515 – Bela Vista – 13506-900 – Rio Claro/SP. Fone: (19) 3526-9381

Você está sendo convidado (a) a participar, como voluntário, da pesquisa **"O papel dos gestos no estudo de geometria espacial de posição"**, de responsabilidade do pesquisador Prof. Me. André Ferreira de Lima e sua orientadora Dra. Rúbia Barcelos Amaral, credenciada ao Programa de Pós Graduação em Educação Matemática – PPGEM, pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - Instituto de Geociência e Ciências Exatas/Unesp/Rio Claro.

Leia cuidadosamente o que segue e sinta-se à vontade para sanar qualquer dúvida que tiver. Após ser esclarecido (a) sobre as informações a seguir, caso aceite fazer parte do estudo, assine ao final deste documento, que consta em duas vias. Uma via pertence a você e a outra ao pesquisador responsável. Em caso de recusa, você não sofrerá nenhuma penalidade.

Em anexo, encontra-se uma descrição detalhada da pesquisa desenvolvida pelo Prof. André Ferreira de Lima, aluno regular do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - Unesp Rio Claro, ao nível de doutorado, e orientado pela Professora Dra. Rúbia Barcelos Amaral Schio

Declaro ter sido esclarecido sobre os seguintes pontos

O trabalho tem por objetivo analisar como os gestos realizados durante o processo de discussão dos conceitos de geometria espacial de posição contribuem para a compreensão e/ou expressão desses conceitos por parte dos alunos.

A minha participação nesta pesquisa consistirá em realizar as atividades propostas pelos pesquisadores ao longo dos encontros, participar das discussões em grupo ou plenárias.

Ao participar desse trabalho contribuirei com a comunidade da Educação Matemática, assim como possibilitarei novas discussões acerca do tema. Os dados fornecidos por você podem desencadear reflexões e possíveis aperfeiçoamentos desses materiais por parte dos autores, bem como possibilitar um olhar atento por parte dos professores da Educação Básica, isso porque os dados também podem ser divulgados através de artigos científicos, facilitando o acesso aos que não dispõem de muito tempo para textos mais longos.

Não terei nenhuma despesa ao participar da pesquisa e poderei deixar de participar ou retirar meu consentimento a qualquer momento, sem precisar justificar, e não sofrerei qualquer prejuízo.

Fui informado (a) e estou ciente de que não há nenhum valor econômico, a receber ou a pagar, por minha participação.

Meu nome será mantido em sigilo, assegurando assim a minha privacidade, se assim eu desejar, direito previsto nas resoluções que regem a normatização de realização deste tipo de estudo.

Existem riscos mínimos ao participante, como a possibilidade dele sentir-se constrangido durante os momentos de exposição de alguma opinião/relato no decorrer dos debates ou alguma opinião sobre os temas tratados, bem como algum incômodo em responder o questionário aberto. Nesse sentido, destacamos que o participante poderá, a qualquer momento, pedir para que seja retirada/corrigida toda manifestação que ele tiver durante a coleta de dados. Além disso, está garantido ao participante o seu anonimato na divulgação dos resultados.

Para minimizar tais riscos, serão adotados alguns procedimentos, tais como: respeitar o tempo de cada um, caso ele/ela decida não expor sua opinião e procurar investigá-la através de registros escritos ou em forma de desenhos; mostrar que as informações que eles repassarem não será utilizadas para meios de avaliação; permissão para que o participante possa folhear e fazer um reconhecimento prévio do livro didático, bem como do capítulo de geometria, objeto de investigação; promover gravações de áudio entre os grupos que serão formados cujo critério de formação será por afinidade, possibilidade uma conversa fluida entre os participantes de cada equipe.

Em relação às formas de indenização, esclarecemos acerca do direito de cada participante que decida colaborar com nossa pesquisa de buscar indenização diante de eventuais danos decorrentes da pesquisa.

Após aprovação deste documento pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP), será elaborado em 2 vias, sendo que uma será entregue ao participante da pesquisa e a outra será mantida em arquivo pelo pesquisador.

Qualquer dúvida em relação aos procedimentos da pesquisa, entre em contato com Rúbia Barcelos Amaral Schio, telefone: (19) 9 8124-0642; e-mail: rubia.amaral@unesp.br e/ou André Ferreira de Lima, (83) 9 9927-3872; e-mail: andre.lima@unesp.br , pesquisadores responsáveis pela pesquisa.

Qualquer dúvida adicional você poderá entrar em contrato com o Comitê de Ética em Pesquisa através dos telefones (14) 3880-1608 ou 3880-1609 que funciona de 2ª a 6ª feira das 8:00 às 12.00 e das 13.30 às 17horas, na Chácara Butignolli s/nº em Rubião Júnior Botucatu - São Paulo. Att,CEP FMB/UNESP.

Fui informado que os dados coletados serão utilizados, única e exclusivamente, para fins de pesquisa e que os resultados serão apresentados em reuniões científicas e publicados em formato de tese e artigos. Se você se sente esclarecido sobre a sua participação na pesquisa, seus objetivos, eventuais riscos e benefícios, convido-o a assinar este Termo

Eu, ____, RG nº _______________declaro ter sido informado e concordo em participar, como voluntário, da pesquisa.

☐ Aceito que meu nome verdadeiro seja utilizado.

☐ Exijo que meu nome seja mantido em sigilo.

Rio Claro, _________________de_______________de 2022.

____

Assinatura do participante

Dados sobre o Participante da Pesquisa:

Nome:____

Pseudônimo:____

RG:_______________________________

Fone: _____________________________

Local:_____________________________

Data:______________________________

____

André Ferreira de Lima

Assinatura do responsável pela pesquisa

APÊNDICE M – QUESTIONÁRIO DIAGNÓSTICO

Pesquisa: O papel dos gestos no estudo de geometria espacial de posição

Questionário diagnóstico

Doutorando: André Ferreira de Lima
Orientadora: Dra. Rúbia Barcelos Amaral Schio
Nome do colaborador(a):

Caro colaborador(a):

O seguinte questionário tem por objetivo verificar a percepção sobre a relação entre a bidimensionalidade e a tridimensionalidade, frente ao seu conhecimento de mundo e conhecimentos matemáticos oriundos da educação básica. Assim, os registros de cada um de vocês devem ser pautados nesses itens. Não há necessidade de consultas na internet ou livros didáticos. As respostas desse questionário servirão unicamente para fins acadêmicos. Garantimos o total anonimato dos respondentes em qualquer relatório produzido posteriormente, para isso utilizaremos pseudônimos, se formos referenciá-los.

As informações prestadas não visam estabelecer uma nota conceitual aos participantes. Contamos com a veracidade de seus comentários e agradecemos por reservar um pouco do tempo de vocês para responder o questionário logo a seguir.

QUESTÃO 1

Na imagem abaixo você visualiza uma das obras do artista holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972). Seus trabalhos nos deixam surpresos e, além disso, algumas vezes representam o impossível. Eles são muito utilizados na Arte e, também, em estudos sobre geometria, principalmente nas introduções dos capítulos de livros didáticos de Matemática. Observe uma delas logo a seguir e responda o que se pede:

Fonte: *Google imagens.*

a) O que está acontecendo com os lagartos? Quais elementos geométricos você consegue identificar nessa obra de Arte?

b) Qual relação você estabeleceria entre a bidimensionalidade e a tridimensionalidade a partir da obra dessa obra de Arte?

QUESTÃO 2

Para você, quais as principais dificuldades de representação de objetos geométricos tridimensionais em uma superfície bidimensional?

QUESTÃO 3

Considere a seguinte afirmação “a geometria espacial é uma extensão da geometria plana”. Refute-a. Dê exemplos.

QUESTÃO 4

Para você, o que é geometria espacial de posição? O que se estuda sobre esse tema da geometria?

QUESTÃO 5

Algumas cadeiras, bancos, mesas e tripés para apoiar celulares ou câmeras de filmagem possuem uma característica semelhante, isto é, apresentam apenas três pernas ou pés. Com base nesse relato responda os itens abaixo:

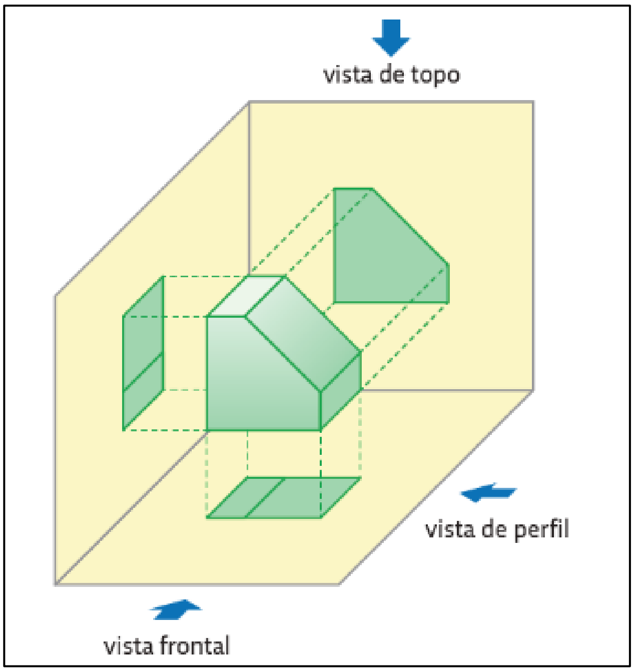
a) Qual o motivo desses objetos terem essa característica em comum? De que forma a geometria espacial pode contribuir para a situação relatada? Expresse suas respostas com suas próprias palavras.

b) Há vantagens de cadeiras e mesas apresentarem quatro pernas? Quais?

c) Sabemos que a geometria espacial faz uma reinterpretação de nossa realidade e a representa por meio de diversas representações. Quais relações você poderia estabelecer entre esses fatos do cotidiano e a geometria espacial? Apresente desenhos para reforçar suas respostas.

QUESTÃO 6

Observe a imagem abaixo e, em seguida, responda o que se pede:



Fonte: Coleção IX.

a) Desenhe a figura geométrica que representa a vista frontal;
b) Desenhe a figura geométrica que representa a vista de perfil;
c) Desenhe a figura geométrica que representa a vista de topo.

QUESTÃO 7

Em sua opinião, como uma figura geométrica espacial qualquer é representada em uma superfície plana? Existem requisitos para obter êxito nessa construção? Se sim, quais são eles?

QUESTÃO 8

Na Figura 1, há um livro aberto, apoiado verticalmente sobre uma mesa totalmente plana. Observe com calma e, em seguida, leia a afirmação logo abaixo.

Fonte: elaborada pelo autor.

"Três pontos não colineares determinam um único plano"

a) A partir da observação da imagem e refletindo sobre a afirmação anterior, quais conteúdos da geometria espacial de posição são apresentados a partir desse contexto?
b) Qual é a relação entre o livro aberto apoiado sobre a mesa e a afirmação?

QUESTÃO 9

Nos itens abaixo, faça um desenho que ilustre:

a) Dois planos paralelos;
b) Dois planos secantes;
c) Uma reta contida em um plano;
d) Uma reta perpendicular a um plano.

QUESTÃO 10:

Eles são "obtidos tomando, para as arestas laterais, retas perpendiculares ao plano da base. Em consequência, as faces laterais são retângulos. Há diversos casos particulares importantes. Quando a base é um polígono regular" (LIMA et al, 2006, p. 236), recebe uma determinada classificação. Para você, de qual figura geométrica espacial estamos falando? Faça um desenho para confirmar sua resposta.

QUESTÃO 11

Elas "são construídas tomando um polígono regular A1, A2 ... A*n* como base e escolhendo como vértice um ponto V situado sobre a perpendicular ao plano do polígono conduzida pelo seu centro O", (LIMA et al, 2006, p. 237). Dependendo do formato da base, recebe denominações distintas. Na sua opinião, de qual figura geométrica espacial estamos falando? Faça um desenho para confirmar sua resposta.

QUESTÃO 12

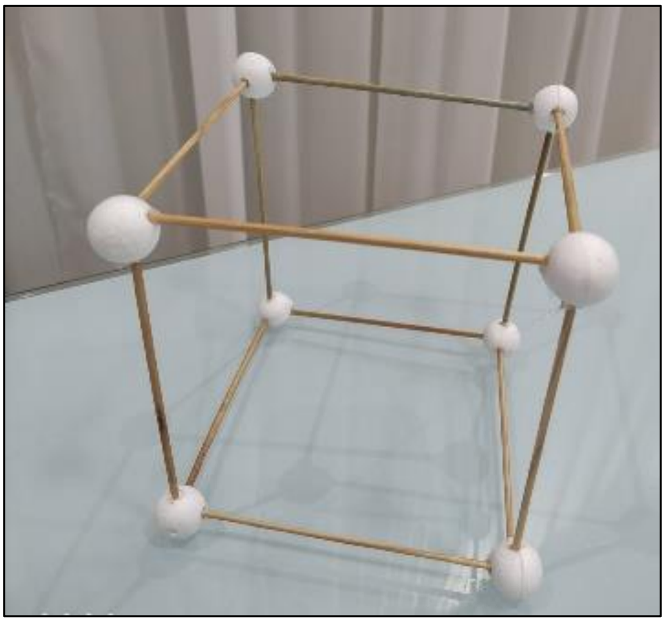
Com o objetivo de alertar as pessoas sobre as inconsistências que podem ocorrer caso um desenho seja feito sem o conhecimento das propriedades das projeções em perspectiva, o pintor (e também cartunista, crítico social e satirista) inglês William Hogarth FRSA (1697-1764) produziu uma gravura intitulada “Sátira sobre a Falsa Perspectiva” a qual apresenta alguns exemplos intencionais de efeitos confusos e equívocos de perspectiva. Observe atentamente a imagem e, em seguida, responda os questionamentos.

Fonte: Projeto Livro aberto de Matemática.

a) Quais são esses elementos estranhos presentes na gravura que você consegue identificar?

QUESTÃO 13

Considere o seguinte experimento com a representação de um cubo vazado. Por exemplo, pode ser o caso da Figura 2. Segurando esse objeto 3D com uma de suas mãos e a outra o celular, de tal forma que o cubo fique entre a parede (anteparo) e o *smartphone* e, em seguida, acionar a luz da lanterna de seu *smartphone.*



Fonte: elaborada pelo autor.

A partir da imaginação desse experimento, responda os itens abaixo:

a) As arestas do cubo vazado têm todas o mesmo tamanho. O mesmo acontece para as sombras destas arestas?

b) Existe alguma configuração para a qual a sombra do cubo vazado seja semelhante à imagem da figura abaixo? Em caso afirmativo, é possível manter esta sombra movendo o cubo vazado em qualquer direção? Qual?

QUESTÃO 14

Para responder a esse questionamento, vamos realizar um experimento antes. Nesse caso, utilizamos os seguintes materiais: fitas apresentando formato retangular, tesoura, caneta, grafite e cola. Observe as nossas orientações para essa construção. Após o término, realize observações, manipulações e, em seguida, responda com seus próprios argumentos, os seguintes pontos:

- Quantos lados tem esse objeto que você construiu? Justifique sua resposta.

APÊNDICE N – QUESTIONÁRIO ONLINE SOBRE PERFIL DOS PARTICIPANTES DO EXPERIMENTO DE ENSINO, ELABORADO NO GOOGLE FORMS

Fase II da pesquisa de doutorado -Colaboradores do Experimento de Ensino

Estimados (as) colaboradores (as) que participaram da Fase II de minha pesquisa de doutorado, venho através desse formulário online solicitar que informem alguns dados acadêmicos/pessoais. Esclareço que essas informações têm o intuito de conhecer um pouco mais de cada um de vocês. Conforme Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) assinado por vocês no início da pesquisa, ressalto que seus nomes não serão divulgados.

*Obrigatório

DADOS PESSOAIS

1. Nome completo*

____

2. Idade*

____

3. Atualmente você está morando em Rio Claro/SP?*

   Marcar apenas uma oval.

Sim

Não

4. Caso tenha respondido “Não” na questão anterior, em qual estado e cidade você está morando ?

____

DADOS ACADÊMICOS

5. Estudou o Ensino Médio em que tipo de escola?*

Marcar apenas uma oval.

Escola pública

Escola particular

Maior parte na escola pública

Maior parte na escola particular

Outro: ______________________________________

6. Em qual ano você finalizou o Ensino Médio?*

____

7. Em qual ano você ingressou na Universidade?*

____

8. O curso de Matemática foi sua primeira opção para ingressar na Unversidade?

Marcar apenas uma oval.

Sim

Não

9. Caso sua resposta tenha sido Sim, diga o motivo que te fez fazer o curso de Matemática.

____
____
____
____
____

10. Você prestou o vestibular/ENEM mais de uma vez?*

Marcar apenas uma oval.

Sim

Não

11. Caso tenha respondido "SIM" na questão anterior, diga quais foram os anos em que prestou o vestibular/ENEM e em qual(is) Universidade(s).

____