

Fábio Secches Bueno

**Campos de Vetores Polinominais Planares:
Análise Detalhada das Singularidades**



1910001395



Campos de Vetores Polinomiais Planares: Análise Detalhada das Singularidades

Fábio Secches Bueno

Orientador: Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva



T. 1395/05

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática do IBILCE - UNESP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

São José do Rio Preto - SP

Fevereiro - 2005

7517.93

B928c

10/02043

04/04/2005

Doação

R\$ 26,00

AUTOR(A)

076/2005

121/05

Bueno, Fábio Secches.

Campos de vetores polinomiais planares: análise detalhada das singularidades / Fábio Secches Bueno – São José do Rio Preto : [s.n.], 2005

116 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Paulo Ricardo da Silva

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Sistemas dinâmicos. 2. Equações diferenciais ordinárias. 3. Campos vetoriais. 4. Variedades (Matemática). 5. Blow-up. 6. Compactificação. I. Silva, Paulo Ricardo. II. Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.938



7 2005/02



Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva que propôs este trabalho, pela disponibilidade no aprofundamento de minhas dúvidas e pela paciência em minha aprendizagem.

Aos professores do Departamento de Matemática da UNESP - B. J. R. Preto, em particular à Profa. Dra. Neusa Karlova Kikina, ao Prof. Dr. Claudio Agostinho Rossi e ao Prof. Dr. Wanderlei Mionari Horita, pela formação, orientação e amizade.

Aos amigos da pós-graduação e graduação, que estiveram presentes em todos os momentos desta jornada e de minha vida social durante a licenciatura.

A Camila pelo carinho, compreensão, incentivo e apoio em todos os momentos desta caminhada.

Aos meus pais, por compreenderem minha ausência durante as horas de estudo em casa e na faculdade, pela apoio e incentivo desinteressado que sempre me transmitiram.

A toda minha família pelo estímo e a torcida para que eu possa chegar certo em todos estes momentos.

A Deus por tudo.

Aos meus pais, Marcos e Maria José
à minha tia Isabel, à minha família,
e à meu avô Pedro, em memória

dedico.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva que projetou este trabalho, pela disponibilidade no atendimento de minhas dúvidas e pela confiança em mim depositada.

Aos professores do Departamento de Matemática da UNESP- S.J.R. Preto, em particular à Profa. Dra. Neuza Kazuko Kakuta, ao Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi e ao Prof. Dr. Wanderlei Minori Horita, pela formação, estímulo e amizade.

Aos amigos da pós-graduação e graduação, que estiveram presentes em todos os momentos desta jornada e de minha vida social durante à faculdade.

À Camila pelo carinho, compreensão, incentivo e apoio em muitos dos momentos desta caminhada.

Aos meus pais, por compreenderem minha ausência durante as horas de estudo em casa e na faculdade, pelo apoio e incentivo inestimado que sempre me transmitiram.

À toda minha família pelo estímulo e torcida para que tudo desse certo em todos estes momentos.

A Deus por tudo.



Resumo

Neste trabalho apresentamos os Fundamentos da Teoria Qualitativa. Realizamos uma análise detalhada do retrato de fase de sistemas polinomiais planares usando variedades invariantes e processos de desingularização.

Além disso, fazemos uma análise do retrato de fase no infinito representando o mesmo no Disco de Poincaré.

Finalmente exibimos um algoritmo no programa P4 para retratos de fase.

Keywords: Compactification, Blowing, Invariant Manifolds, Flows, Phase Portrait.

Palavras-chave: Compactificação, Desingularização, Variedades Invariantes, Fluxos e Retratos de Fase.



Abstract

In this work we present basic effects of Qualitative Theory of Differential Equations. We give a detailed analysis of the phase portrait of planar polynomial differential systems using invariant manifolds and blow-ups.

Moreover, we analyse the phase portrait at infinity using the Poincaré Disc.

Finally we exhibit an algorithm used by P4 program to draw the phase portrait.

Introdução

Keywords: Compactification, Blow-up, Invariant Manifolds, Flows, Phase Portrait.

1.1	Fluxos no Plano	15
1.2	Princípios Esquemas: Campos de Vetores Lineares no Plano	18
1.3	O Teorema do Fluxo Total	22
1.4	Estrutura Local dos Pontos Singulares Hiperbólicos: Teorema de Grobman-Hartman	31
1.5	Estrutura Local de Órbitas Penetrantes e Círculo	32
1.6	Conjunções e-Singular e o Teorema de Poincaré-Bendixon	36
2	Variedades Invariantes	41
2.1	O Teorema da Variedade Estável Local	41
2.2	Singularidades Hiperbólicas e Não Hiperbólicas	49
2.2.1	Selas, Nós, Focos e Centros	49
2.2.2	Singularidades Não Hiperbólicas no $\mathbb{R}^2$	50
2.3	Teoria da Variável Central	62
3	Blow-up Polar e Blow-up Direcional	67
3.0.1	Blow-up Quase-homotético e o Diagrama de Newton	74
4	Compactificação de Poincaré e de Poincaré-Liapunov	87
4.1	Propriedade Energética e Compactificação de Poincaré	90
4.2	Compactificação de Poincaré-Liapunov	99
5	O Programa P4	100
5.1	Tratamento dos exemplos	111

Sumário

Introdução	13
1 Fundamentos da Teoria Qualitativa	15
1.1 Fluxos no Plano	15
1.2 Primeiros Exemplos: Campos de Vetores Lineares no Plano	18
1.3 O Teorema do Fluxo Tubular	28
1.4 Estrutura Local dos Pontos Singulares Hiperbólicos: Teorema de Grobman-Hartman	31
1.5 Estrutura Local de Órbitas Periódicas e Ciclos Limites no Plano	32
1.6 Conjuntos α -limites e ω -limites de uma Órbita: O Teorema de Poincaré-Bendixson	36
2 Variedades Invariantes	41
2.1 O Teorema da Variedade Estável Local	41
2.2 Singularidades Hiperbólicas e Não Hiperbólicas	49
2.2.1 Selas, Nós, Focos e Centros	49
2.2.2 Singularidades Não Hiperbólicas no $\mathbb{R}^2$	59
2.3 Teoria da Variedade Central	63
3 Blow-up Polar e Blow-up Direcional	67
3.0.1 Blow-up Quase-homogêneo e o Diagrama de Newton	74
4 Compactificação de Poincaré e de Poincaré-Liapunov	90
4.1 Projeção Estereográfica e Compactificação de Poincaré	90
4.2 Compactificação de Poincaré-Liapunov	99
5 O Programa P4	100
5.1 Tratamento dos exemplos	111



Introdução

A Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias foi inaugurada por H. Poincaré no memorável trabalho "Sur les courbes définies par une equation différentielle" [1].

A Teoria Qualitativa estuda o Retrato de Fase de sistemas de equações diferenciais ordinárias autônomas, determinando os diferentes tipos de órbitas e de conjuntos limites e ainda investigando a configuração em torno de pontos singulares.

Neste projeto vamos nos restringir ao estudo de sistemas de equações diferenciais polinomiais planares

$$X: \begin{cases} \dot{x} = p(x, y) \\ \dot{y} = q(x, y) \end{cases}$$

Prezamos em chamar nossa atenção ao esboço do retrato de fase em torno dos pontos singulares. Já que em torno dos pontos regulares o Teorema do Fluxo Tubular pode ser aplicado.

Vamos supor, sem perda de generalidade, que o campo apresenta uma singularidade na origem (0,0).

Para analisarmos o retrato de fase em uma vizinhança da origem, inicialmente consideraremos a parte linear do campo $AX(0,0)$ e verificaremos se a singularidade é ou não hiperbólica, calculando os autovalores. Caso seja aplicável o Teorema de Grobman-Hartman.

O primeiro caso onde não temos a hiperbolicidade ocorre quando um dos autovalores da parte linear é não nulo e o outro é nulo $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$. Nesse caso utilizamos o Teorema da Variedade Central e o Princípio da Redução à Variedade Central para analisarmos o retrato de fase. Neste trabalho não trataremos o caso em que ambos os autovalores são imaginários puros.

Para obter, dearmos a análise precisamos tratar do caso onde ambos os autovalores são nulos. Nesse caso usaremos o processo de desingularização conhecido como "BLOW UP".

Uma questão de grande importância para o entendimento do retrato de fase e o estudo do comportamento do campo no infinito. Para campos de vetores polinomiais, isto pode ser feito de pelo menos duas maneiras: uma delas utilizando a Compactificação de Poincaré e a outra utilizando a Compactificação de Poincaré-Lyapunov.

O estudo de campos de vetores polinomiais planares é um estudo riquíssimo. Em uma primeira leitura sobre o assunto poderíamos julgar extremamente restritiva essa abordagem,



Introdução

A Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias foi inaugurada por H. Poincaré no memorável trabalho “Sur les courbes définies par une équation différentielle” [P].

A Teoria Qualitativa estuda o Retrato de Fase de sistemas de equações diferenciais ordinárias autônomas, determinando os diferentes tipos de órbitas e de conjuntos limites e ainda investigando a configuração em torno de pontos singulares.

Neste projeto vamos nos restringir ao estudo de sistemas de equações diferenciais polinomiais planares

$$X : \begin{cases} \dot{x} = p(x, y) \\ \dot{y} = q(x, y) \end{cases}.$$

Iremos concentrar nossa atenção no esboço do retrato de fase em torno dos pontos singulares, já que em torno dos pontos regulares o Teorema do Fluxo Tubular pode ser aplicado.

Vamos supor, sem perda de generalidade, que o campo apresenta uma singularidade na origem $(0, 0)$.

Para analisarmos o retrato de fase em uma vizinhança da origem, inicialmente consideramos a parte linear do campo $JX(0, 0)$ e verificamos se a singularidade é ou não hiperbólica, calculando os autovalores. Caso seja aplicamos o Teorema de Grobman-Hartman.

O primeiro caso onde não temos a hiperbolicidade ocorre quando um dos autovalores da parte linear é não nulo e o outro é nulo: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$. Nesse caso utilizamos o Teorema da Variedade Central e o Princípio da Redução à Variedade Central para analisarmos o retrato de fase. Neste trabalho não trataremos o caso em que ambos os autovalores são imaginários puros.

Para completarmos a análise precisamos tratar do caso onde ambos os autovalores são nulos. Neste caso usaremos o processo de desingularização conhecido como “BLOW UP”.

Outra questão de grande importância para o entendimento do retrato de fase é o estudo do comportamento do campo no infinito. Para campos de vetores polinomiais, isto pode ser feito de pelo menos duas maneiras: uma delas utilizando a Compactificação de Poincaré e a outra utilizando a Compactificação de Poincaré-Lyapunov.

O estudo de campos de vetores polinomiais planares é um estudo riquíssimo. Em uma primeira leitura sobre o assunto poderíamos julgar extremamente restritiva essa abordagem,



mas logo nos convencemos da complexidade dos problemas no plano. Por exemplo, a questão da finitude do número de ciclos de sistemas polinomiais planares e o 16º Problema de Hilbert são problemas que ainda não atingiram seu desenvolvimento definitivo. Podemos ainda relatar estudos sobre problemas relacionados à dinâmica de populações (modelo predador x presa ou o comportamento da população de vírus em algum organismo) na área da biologia, além de diversos problemas na área da Física.

Além da natureza intrínseca do assunto outro fator que nos fez escolhermos este tema foi a recente publicação de um artigo, escrito por Freddy Dumortier e Chris Herssens [DH], sobre um programa computacional, chamado de P4, que essencialmente possibilita a análise detalhada das singularidades e o esboço do retrato de fase de campos polinomiais planares, no Disco de Poincaré.

O programa P4 foi elaborado por 4 matemáticos: Jaume Llibre e Freddy Dumortier, responsáveis pelo suporte matemático e Joan Carlos Artés e Chris Herssens, responsáveis pela elaboração do programa computacional. (Ver [DH]).

Julgo ser de grande valia para o estudo o conhecimento deste programa, pois além de estudar resultados matemáticos profundos, também irei aprender a utilizar uma ferramenta computacional de grande utilidade no meu futuro como pesquisador.



Capítulo 1

Fundamentos da Teoria Qualitativa

1.1 Fluxos no Plano

Neste capítulo apresentaremos os resultados básicos da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Como nosso intuito é chegar em um algoritmo que nos auxilie no esboço do retrato de fase de um campo polinomial, restringiremos nosso estudo à classe dos campos de vetores polinomiais planares. Para isto necessitamos de algumas definições e teoremas que desenvolveremos a seguir.

Um *campo de vetores* polinomial em $\mathbb{R}^2$ é uma aplicação $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $X(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$, com p, q sendo polinômios.

Uma *trajetória* de um campo de vetores polinomial $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida em um intervalo real não degenerado, tal que

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)), \forall t \in I.$$

Uma *trajetória maximal* de um campo de vetores polinomial é uma trajetória $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que, se $\psi : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ for outra trajetória, então:

$$J \subset I \quad \text{e} \quad \gamma|_J = \psi.$$

O estabelecimento da existência e unicidade de trajetórias de um problema de valor inicial é dado pelo resultado seguinte.

Teorema 1.1 (Picard). Sejam $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$, $M > 0$, $k > 0$ e $X : \overline{B((x_0, y_0), r)} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, satisfazendo:

$$(a) \|X(x, y)\| \leq M, \quad \forall (x, y) \in \overline{B((x_0, y_0), r)};$$

$$(b) \|X(x_1, y_1) - X(x_2, y_2)\| \leq k\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \overline{B((x_0, y_0), r)};$$

então, para $0 < a < \frac{r}{M}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, existe uma trajetória $\gamma : [t_0 - a, t_0 + a] \rightarrow \overline{B((x_0, y_0), r)}$ tal que

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)) \quad e \quad \gamma(t_0) = (x_0, y_0).$$

Observemos que um campo de vetores polinomial satisfaz as condições do Teorema de Picard.

De fato,

(a) Do Teorema de Weierstrass, temos que a imagem de uma função contínua X definida em um compacto $\overline{B((x_0, y_0), r)}$ é limitada em $\overline{B((x_0, y_0), r)}$, isto é,

$$\exists M > 0, \|X(x, y)\| \leq M, \quad \forall (x, y) \in \overline{B((x_0, y_0), r)}.$$

(b) Da Desigualdade do Valor Médio segue que se $U \subset \mathbb{R}^2$, U aberto, $X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ é diferenciável e se o segmento de reta fechado $[a, a + h] \subset U$, então

$$|X(a + h) - X(a)| \leq |h| \sup_{0 \leq t \leq 1} |JX(a + th)|.$$

Daí, temos:

$$\begin{aligned} \|X(x_2, y_2) - X(x_1, y_1)\| &\leq \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |JX[(x_1, y_1) + t((x_2, y_2) - (x_1, y_1))]| \right) \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| = \\ &= k \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|. \end{aligned}$$

Assim sendo, dado um ponto em $\mathbb{R}^2$, sempre existe uma trajetória maximal passando por este ponto. Prova-se que o intervalo de definição da trajetória maximal é sempre aberto. A demonstração completa deste teorema está feita em [S2].

Seja $\Omega^X = \{(t, (x, y)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, t \in I(x, y)\}$. O *fluxo* de X é a aplicação $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\varphi(t, (x, y)) = \varphi_{(x, y)}(t),$$

onde $\varphi_{(x, y)}$ é a trajetória que no tempo 0 está em (x, y) , avaliada no tempo t . Conforme ([S1], pg.20, corolário 4) se $I(x, y) = (\alpha, \beta) \neq \mathbb{R}$, então $\varphi(t, (x, y)) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \beta$, se $\beta \neq \infty$ e $\varphi(t, (x, y)) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \alpha$ se $\alpha \neq -\infty$. Agora dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a imagem $\varphi_{(x, y)}(I(x, y))$ da trajetória maximal de X por (x, y) é denominada *órbita* de (x, y) e denotada por

$$O(x, y) = \varphi_{(x, y)}(I(x, y)).$$

O *espaço de fase* de X é o $\mathbb{R}^2$. O *retrato de fase* de X é o espaço de fase munido da decomposição em órbitas do campo.

Considerando $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ um ponto dado, dizemos que este ponto (x, y) é um *ponto regular* de X se $X((x, y)) \neq (0, 0)$; (x, y) é uma *singularidade* de X se $X((x, y)) = (0, 0)$. Analisando as órbitas, temos que $O(x, y)$ é uma *órbita regular* de X se $\varphi_{(x,y)}$ é injetiva, $O(x, y)$ é uma *órbita singular* de X se (x, y) é uma singularidade e $O(x, y)$ é uma *órbita periódica* de X se $\varphi_{(x,y)}$ é periódica (Teorema 2, pg 217, em [S2]).

Vamos fazer um breve comentário histórico. O estudo clássico das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) propunha resolver explicitamente as equações do tipo

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(t, x)$$

$$\frac{d^m x}{dt^m} = x^{(m)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(m-1)})$$

e ao longo dos séculos, foi desenvolvida uma quantidade enorme de técnicas para resolver vários tipos de EDO's. É interessante lembrar, por exemplo, que a função exponencial nasceu como solução do Problema de Cauchy autônomo:

$$\dot{x} = x \quad x(0) = 1.$$

Teorias desenvolvidas para resolver algumas equações, como a da Transformada Integral, em particular a Transformada de Laplace, transformam a EDO em uma equação algébrica: se esta for solúvel então a Transformada Integral Inversa produz as soluções da EDO. Abel (1802-1829), por exemplo, entre tantas outras coisas, trabalhou em tais transformadas; acontece que se a equação algébrica resultante da transformada for de grau maior ou igual a 5, Abel mostrou que não se pode encontrar soluções explícitas por meio de radicais, o que invalida esse tipo de abordagem do problema. Inúmeros casos de EDO's continuam sendo estudados até hoje, mas foi Poincaré (1854-1912) que unificou a teoria das EDO's, desenvolvendo o que se passou a denominar a Teoria Qualitativa. O problema de Poincaré era que para as EDO's da Mecânica Celeste que estudava, os métodos quantitativos não eram suficientes sequer para começar o estudo. O que Poincaré detectou é que, se por um lado a quantidade de EDO's que se pode resolver no sentido estrito é relativamente pequeno, por outro lado, em compensação, com novos conceitos de análise, geometria e topologia, pode-se estudar uma equação no sentido qualitativo, ou seja, entender as leis gerais do comportamento das soluções, mesmo quando estas não são obtidas explicitamente.

1.2 Primeiros Exemplos: Campos de Vetores Lineares no Plano

Nesta seção, vamos estudar, inicialmente os campos de vetores da forma $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dados por $X(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ onde a, b, c, d são constantes reais. Tais campos são denominados *Lineares*.

Encontrar trajetórias de campos de vetores deste tipo é equivalente a resolver o sistema de EDO's lineares com coeficientes constantes

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}.$$

Exemplo 1.2. O sistema linear

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

tem fluxo dado por

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(t, (x, y)) = (xe^{2t}, ye^{-t}).$$

A única singularidade é o ponto $(0, 0)$.

Exemplo 1.3. O sistema linear

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x \\ \dot{y} = \beta y \end{cases}$$

tem fluxo dado por

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(t, (x, y)) = (xe^{\alpha t}, ye^{\beta t}).$$

(i) $\alpha = 0, \beta > 0$ ou $\alpha = 0, \beta < 0$: neste caso o eixo $0X$ é composto de singularidades do sistema.

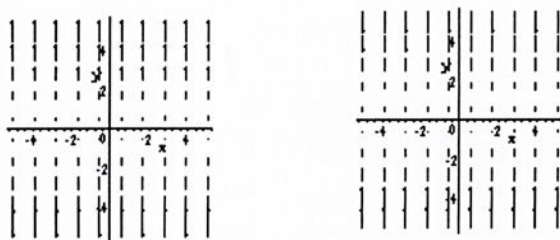


Figura 1.1: $\alpha = 0, \beta > 0$ e $\alpha = 0, \beta < 0$.

(ii) $\alpha > 0, \beta = 0$ ou $\alpha < 0, \beta = 0$: neste caso o eixo $0Y$ é composto de singularidades do sistema.



Figura 1.2: $\alpha > 0, \beta = 0$ e $\alpha < 0, \beta = 0$.

(iii) $\alpha = \beta > 0$ ou $\alpha > \beta > 0$ ou $0 < \alpha < \beta$: neste caso a origem $(0,0)$ é a única singularidade. O primeiro é conhecido como *fonte* e os seguintes *nós repulsores*. Se $\alpha > \beta > 0$ as trajetórias (exceto as que possuem traço contido no eixo $0X$) tangenciam o eixo $0Y$ e se $0 < \alpha < \beta$ as trajetórias (exceto as que possuem traço contido no eixo $0Y$) tangenciam o eixo $0X$.

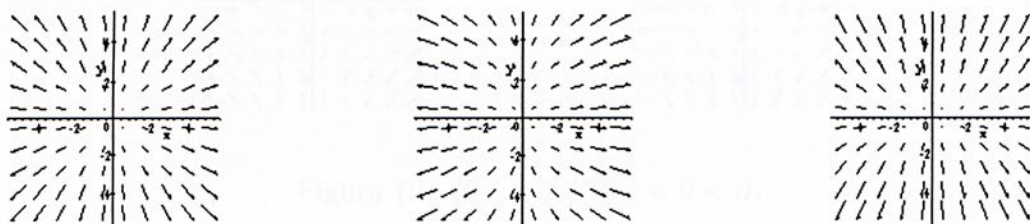


Figura 1.3: $\alpha = \beta > 0$, $\alpha > \beta > 0$ e $0 < \alpha < \beta$.

(iv) $\alpha = \beta < 0$ ou $\alpha < \beta < 0$ ou $\beta < \alpha < 0$: neste caso a origem $(0,0)$ é a única singularidade. O primeiro é conhecido como *poço* e os seguintes *nós atratores*. Se $\alpha < \beta < 0$ as trajetórias (exceto as que possuem traço contido no eixo $0X$) tangenciam o eixo $0Y$ e se $\beta < \alpha < 0$ as trajetórias (exceto as que possuem traço contido no eixo $0Y$) tangenciam o eixo $0X$.

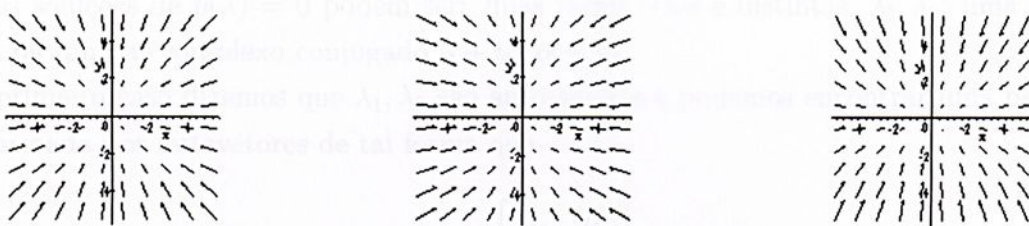


Figura 1.4: $\alpha = \beta < 0$, $\alpha < \beta < 0$ e $\beta < \alpha < 0$.

(v) $\beta < 0 < \alpha$ ou $\alpha < 0 < \beta$: neste caso a origem $(0, 0)$ é a única singularidade. Este caso é conhecido como *sela*. No primeiro caso as trajetórias aproximam-se do eixo $0Y$ quando o parâmetro t aproxima-se de $-\infty$ e aproximam-se do eixo $0X$ quando o parâmetro t aproxima-se de ∞ ; no segundo caso as trajetórias aproximam-se do eixo $0X$ quando o parâmetro t aproxima-se de $-\infty$ e aproximam-se do eixo $0Y$ quando o parâmetro t aproxima-se de ∞ .

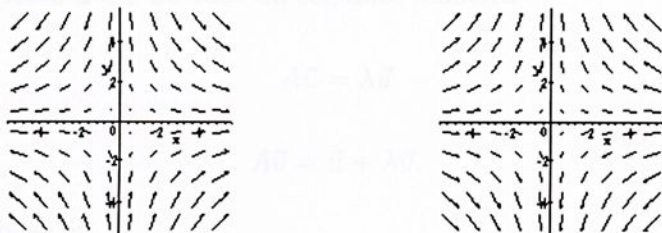


Figura 1.5: $\beta < 0 < \alpha$ e $\alpha < 0 < \beta$.

A NOTAÇÃO MATRICIAL

Para simplificar a notação representaremos os sistemas lineares na forma vetorial, tomando-se

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\dot{X} = AX. \quad (1.1)$$

Nosso objetivo é estudar todos os tipos possíveis de sistemas lineares no plano. Para isso é necessário que façamos uma classificação das matrizes 2×2 . O *polinômio característico* de A é o polinômio dado por

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (\text{tr} A)\lambda + \det A.$$

Assim as soluções de $p(\lambda) = 0$ podem ser: duas raízes reais e distintas, λ_1, λ_2 ; uma raiz real dupla λ ou um par complexo conjugado $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta$.

No primeiro caso dizemos que λ_1, λ_2 são auto-valores e podemos encontrar uma base B do plano formada por autovetores de tal forma que

$$[A]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

No segundo caso temos duas possibilidades. Se a multiplicidade geométrica de λ for igual a 2 então podemos encontrar uma base B do plano formado por autovetores de tal forma que

$$[A]_B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Se a multiplicidade geométrica de λ for igual a 1 então podemos encontrar uma base B do plano formada por vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ obtidos da seguinte maneira

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u}$$

$$A\vec{v} = \vec{u} + \lambda\vec{v}.$$

A matriz de A nesta base é:

$$[A]_B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

No terceiro caso encontramos um vetor de C^2 satisfazendo $A(u + iv) = (\alpha + i\beta)(u + iv)$. Além disso $B = \{u, v\}$ é uma base do plano satisfazendo

$$[A]_B = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Considerando o sistema (1.1), tem-se então os seguintes casos possíveis.

(i) Se $[A]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, então o fluxo de (1.1) é dado por

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(t, (x, y)) = (xe^{\lambda_1 t}, ye^{\lambda_2 t}).$$

(ii) Se $[A]_B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, então o fluxo de (1.1) é dado por

$$\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(t, (x, y)) = ((x + yt)e^{\lambda t}, ye^{\lambda t}).$$

Se $\lambda < 0$, a única singularidade $(0, 0)$ é chamada de *nó impróprio atrator*.

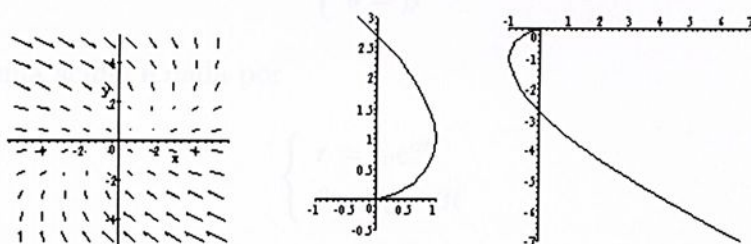


Figura 1.6: campo $x = y = 1, \lambda = -1$ $x = y = -1, \lambda = -1$

Se $\lambda > 0$, a única singularidade $(0, 0)$ é chamada de *nó impróprio repulsor*.

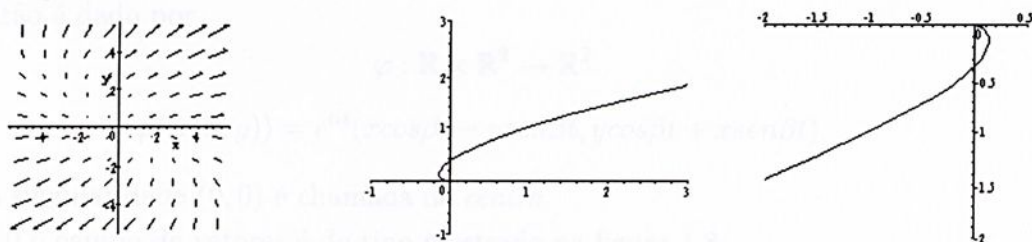


Figura 1.7: campo $x = y = 1, \lambda = 1$ $x = y = -1, \lambda = 1$

(iii) Vamos analisar o caso $[A] = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$.

Vamos utilizar coordenadas polares para encontrarmos explicitamente o fluxo. Começamos com a mudança $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$.

Assim temos

$$\begin{aligned} x = r \cos \theta &\Rightarrow \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ y = r \sin \theta &\Rightarrow \dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Multiplicando a primeira linha por $(\cos \theta)$ e a segunda por $(\sin \theta)$ e em seguida somando as duas linhas obtemos

$$\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta = \dot{r}. \quad (1.3)$$

Multiplicando a primeira linha por $(-\text{sen}\theta)$ e a segunda por $(\text{cos}\theta)$ e em seguida somando as duas linhas obtemos

$$-\dot{x}\text{sen}\theta + \dot{y}\text{cos}\theta = r\dot{\theta}. \quad (1.4)$$

Substituindo (1.2) em (1.3) e em (1.4) obtemos

$$\begin{cases} \dot{r} = \alpha r \\ \dot{\theta} = \beta \end{cases}.$$

A solução do sistema acima é dada por

$$\begin{cases} r = r_0 e^{\alpha t} \\ \theta = \theta_0 + \beta t \end{cases}.$$

Voltando para x e y , temos

$$x(t) = e^{\alpha t}(x_0 \text{cos}\beta t - y_0 \text{sen}\beta t)$$

$$y(t) = e^{\alpha t}(y_0 \text{cos}\beta t + x_0 \text{sen}\beta t).$$

O fluxo então é dado por

$$\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(t, (x, y)) = e^{\alpha t}(x \text{cos}\beta t - y \text{sen}\beta t, y \text{cos}\beta t + x \text{sen}\beta t).$$

Se $\alpha = 0$ a singularidade $(0, 0)$ é chamada de *centro*.

Se $\beta > 0$ o campo de vetores é do tipo mostrado na figura 1.8

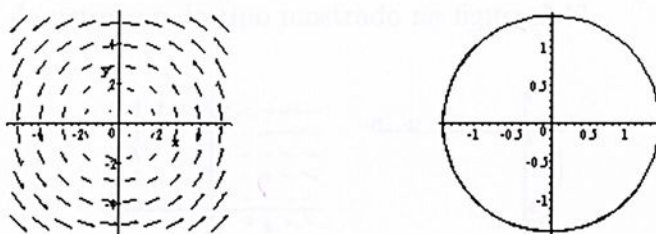


Figura 1.8: campo e $(\text{cost} - \text{sent}, \text{cost} + \text{sent})$

Se $\beta < 0$ o campo de vetores é do tipo mostrado na figura 1.9

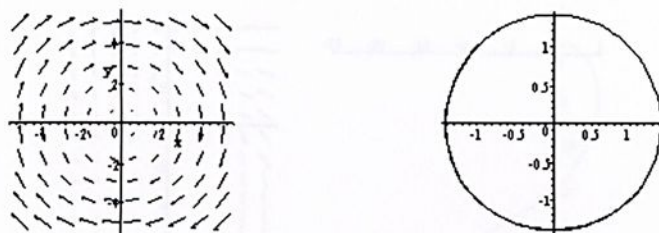


Figura 1.9: campo e $(\cos t + \sin t, \cos t - \sin t)$

Note que a diferença entre as órbitas ou soluções mostradas nas figuras 1.8 e 1.9 está na orientação.

Se $\alpha > 0$ a singularidade $(0, 0)$ é chamada *foco repulsor*, no sentido anti-horário se $\beta > 0$ e no sentido horário se $\beta < 0$.

Se $\beta > 0$ o campo de vetores é do tipo mostrado na figura 1.10

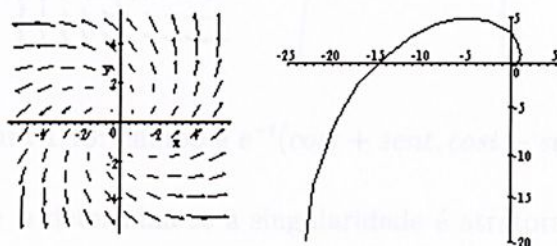


Figura 1.10: campo e $e^t(\cos t - \sin t, \cos t + \sin t)$

Se $\beta < 0$ o campo de vetores é do tipo mostrado na figura 1.11

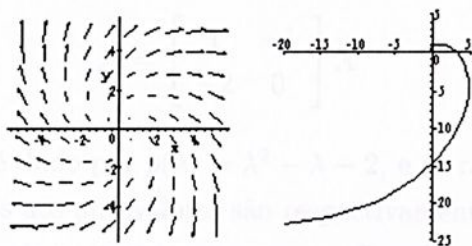


Figura 1.11: campo e $e^t(\cos t + \sin t, \cos t - \sin t)$

Se $\alpha < 0$ a singularidade $(0, 0)$ é chamada de *foco atrator*, no sentido anti-horário se $\beta > 0$ e no sentido horário se $\beta < 0$.

Se $\beta > 0$ o campo de vetores é do tipo mostrado na figura 1.12

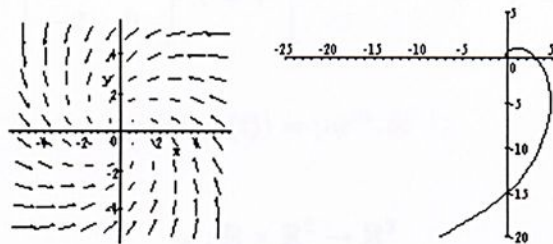


Figura 1.12: campo e $e^{-t}(\cos t - \sin t, \cos t + \sin t)$

Se $\beta < 0$ o campo de vetores é do tipo mostrado na figura 1.13

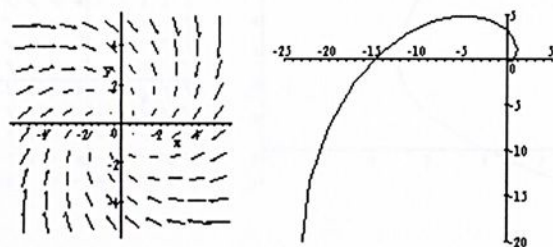


Figura 1.13: campo e $e^{-t}(\cos t + \sin t, \cos t - \sin t)$

Observe que o sinal de α determina se a singularidade é atratora ou repulsora. Já o sinal de β está relacionado com o sentido da rotação.

Exemplos onde A não está na forma canônica:

1) Considere o seguinte sistema

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} X.$$

Seu polinômio característico é dado por $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$, e as raízes deste polinômio são 2 e -1 . Os autovetores associados aos autovalores são respectivamente $(1, -1)$ e $(1, 2)$.

Considerando a base formada por estes autovetores: $B = \{(1, -1), (1, 2)\}$. Temos então

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = PX = P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\dot{Y} = P\dot{X} = P \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} X = P \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} Y.$$

Logo,

$$(y_1(t), y_2(t)) = (ae^{2t}, be^{-t}).$$

E o fluxo é dado por

$$\varphi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(t, (x, y)) = \left(\frac{2x-y}{3}e^{2t} + \frac{x+y}{3}e^{-t}, \frac{2x-y}{3}e^{2t} + 2\frac{x+y}{3}e^{-t} \right).$$

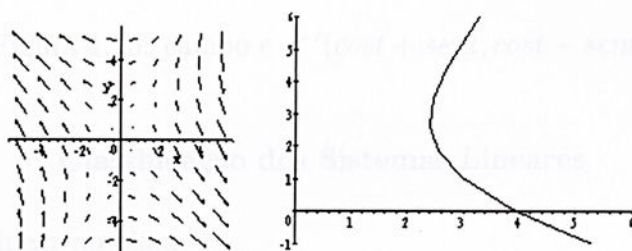


Figura 1.14: campo e $e^{-t}(\cos t + \sin t, \cos t - \sin t)$

2) Considere o seguinte sistema

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X.$$

Seu polinômio característico é dado por $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, e as raízes deste polinômio são $1 + i$ e $1 - i$. O autovetor complexo associado ao autovalor $1 + i$ é $(1 + i, -i)$.

Consideramos a base formada pelas partes real e imaginária: $B = \{(1, 0), (1, -1)\}$. Temos então

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = PX = P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\dot{Y} = P\dot{X} = P \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X = P \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} P^{-1}Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} Y.$$

Logo,

$$(y_1(t), y_2(t)) = (ae^t \cos t - be^t \sin t, be^t \cos t + ae^t \sin t).$$

$$(x_1(t), x_2(t)) = ((a+b)e^t \cos t + (a-b)e^t \sin t, -be^t \cos t - ae^t \sin t)$$

e o fluxo é dado por

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(t, (x, y)) = (xe^t \cos t + (x + 2y)e^t \sin t, ye^t \cos t - (x + y)e^t \sin t).$$

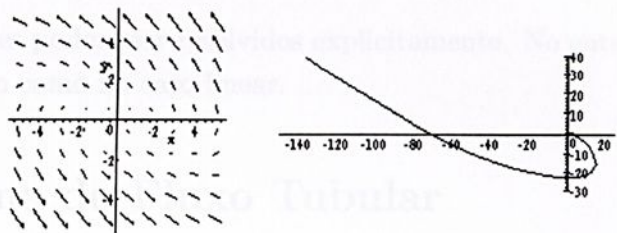


Figura 1.15: campo e $e^{-t}(\cos t + \sin t, \cos t - \sin t)$

Classificação dos Sistemas Lineares

Dado um sistema linear no plano

$$\dot{X} = AX$$

podemos classificar a singularidade $(0,0)$, supondo que esta é a única singularidade, a partir do polinômio característico de A ($\det A \neq 0$).

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (tr A)\lambda + \det A$$

$$\Delta = (tr A)^2 - 4\det A$$

Δ	$\det$	tr	$(0,0)$
> 0	< 0	$\in \mathbb{R}$	SELA
> 0	> 0	< 0	NÓ ATRATOR
> 0	> 0	> 0	NÓ REPULSOR
< 0	$\in \mathbb{R}$	$= 0$	CENTRO
< 0	$\in \mathbb{R}$	< 0	FOCO ATRATOR
< 0	$\in \mathbb{R}$	> 0	FOCO REPULSOR
$= 0$	$\in \mathbb{R}$	> 0	NÓ REPULSOR
$= 0$	$\in \mathbb{R}$	< 0	NÓ ATRATOR

Nosso interesse neste trabalho é o estudo de campos de vetores do tipo

$$X(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$$

onde p e q são polinômios de grau m qualquer.

Equivalentemente, queremos estudar o comportamento das soluções do sistema autônomo

$$\begin{cases} \dot{x} = p(x, y) \\ \dot{y} = q(x, y) \end{cases}.$$

Alguns casos particulares podem ser resolvidos explicitamente. No entanto, não existe nenhum método geral de solução como no caso linear.

1.3 O Teorema do Fluxo Tubular

Nesta seção veremos que o esboço do retrato de fase é trivial numa vizinhança de um ponto regular. Assim podemos concentrar nossa atenção no estudo em vizinhanças de singularidades.

Definição 1.4. Dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, uma secção transversal local (STL) de X em (x_0, y_0) , de classe C^k , é uma aplicação diferenciável $\xi : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^k tal que $A \subseteq \mathbb{R}$ é aberto, $0 \in A$, $\xi(0) = (x_0, y_0)$ e $[\xi'(t)] \oplus [X(\xi(t))] = \mathbb{R}^2$, $\forall t \in A$.

Definição 1.5. Dois campos de vetores polinomiais X, Y definidos em $U, V \subset \mathbb{R}^2$, com U, V sendo abertos, são ditos topologicamente equivalentes quando existir um homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ que leva órbitas de X em órbitas de Y preservando a orientação. Se denotarmos φ e ψ os fluxos de X e Y , respectivamente, dizemos que h é uma conjugação topológica entre X e Y se

$$h(\varphi(t, (x, y))) = \psi(t, h(x, y)).$$

Vamos enunciar e demonstrar um lema que será utilizado na demonstração do nosso próximo teorema:

Lema 1.6. Se $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ é um ponto regular de um campo vetorial polinomial X , então existe uma STL de X em (x_0, y_0) .

Demonstração: Sejam $(x_0, y_0) = v_0 \neq (0, 0)$ e $\pi = [v_0]^\perp$.

Como $\dim \pi = 1$, existe um isomorfismo

$$s : \mathbb{R} \rightarrow \pi$$

de modo que a transformação

$$T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(y) = (x_0, y_0) + s(y)$$

é de classe C^∞ e é um homeomorfismo sobre sua imagem $T(\mathbb{R}) = (x_0, y_0) + \pi$.



Afirmamos que existe $A \subseteq \mathbb{R}$, A aberto, $0 \in A$ tal que $\xi = T/A$ é uma STL de X em (x_0, y_0) .

De fato, seja

$$\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \eta(y) = \langle v_0, X(T(y)) \rangle$$

contínua com $\eta(0) = \langle v_0, X(T(0)) \rangle = \langle v_0, X(x_0, y_0) \rangle = \langle v_0, v_0 \rangle = |v_0|^2 \neq 0$.

Daí,

$$\exists 0 \in A \subseteq \mathbb{R} \quad A: \text{aberto tal que} \quad \eta(y) \neq 0, \forall y \in A.$$

Mas, para $y \in \mathbb{R}$, temos:

$$T'(y) = s'(y) = s,$$

ou seja,

$$\text{Im}(T'(y)) = \text{Im}(s) = \pi,$$

de modo que, para algum $y \in A$, temos:

$$X(T(y)) \notin [v_0]^\perp = \pi,$$

já que $0 \neq \eta(y) = \langle v_0, X(T(y)) \rangle$, ou seja,

$$\text{Im}(T'(y)) \oplus [X(T(y))] = \pi \oplus [X(T(y))] = \mathbb{R}^2.$$

Assim, $\xi = T/A$ é uma STL de X em (x_0, y_0) .

Agora, vamos enunciar e demonstrar o Teorema do Fluxo Tubular, que é o nosso objetivo neste momento:

Teorema 1.7 (Fluxo Tubular). Sejam $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial polinomial e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ um ponto regular de X . Então existe um difeomorfismo de classe C^∞ que conjugua X em uma vizinhança de (x_0, y_0) com o campo constante $Y = (1, 0)$ restrito a uma vizinhança da origem $(0, 0)$.

Geometricamente, temos:

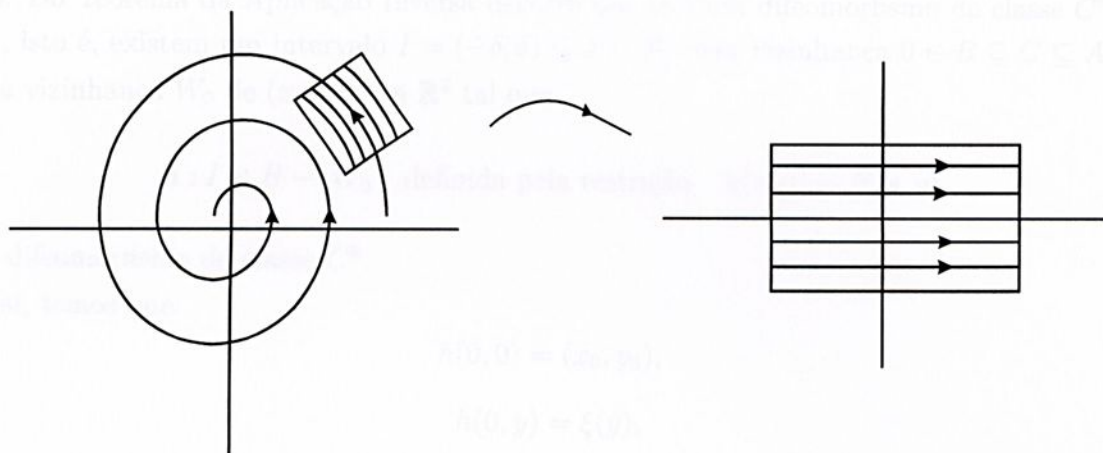


Figura 1.16: interpretação geométrica do Teorema do Fluxo Tubular

Demonstração: Dados $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ um ponto regular, sabemos pelo Lema 1.6, que existe $\xi : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma STL de X em $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Seja $0 \in C \subseteq A$, um aberto e limitado, com $\overline{C} \subseteq A$. Então $\xi(\overline{C}) \subseteq \mathbb{R}^2$ é compacto e podemos encontrar um intervalo $0 \in J \subseteq \mathbb{R}$ tal que $J \times \xi(\overline{C}) \subseteq \Omega^X$ de modo que a aplicação

$$H : J \times C, \quad H(s, y) = \varphi(s, \xi(y))$$

está bem definida e é de classe C^k , com

$$H(0, 0) = \varphi(0, \xi(0)) = (x_0, y_0).$$

Além disso,

$$\frac{\partial H}{\partial s}(0, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, (x_0, y_0)) = X(x_0, y_0)$$

e como

$$H(0, y) = \varphi(0, \xi(y)) = \xi(y), \forall y \in C$$

temos que

$$\frac{\partial H}{\partial y}(0, 0) = \xi'(0).$$

Logo,

$$H'(0, 0)(\lambda, v) = \lambda X(x_0, y_0) + \xi'(0)v$$

o que significa que

$$\text{Im} H'(0, 0) = [X(x_0, y_0)] + \text{Im}(\xi'(y)) = \mathbb{R}^2,$$

ou seja, $H'(0, 0) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear sobrejetiva, e portanto um isomorfismo. Do Teorema da Aplicação Inversa decorre que H é um difeomorfismo de classe C^∞ em $(0, 0)$, isto é, existem um intervalo $I = (-\delta, \delta) \subseteq J \subset \mathbb{R}$, uma vizinhança $0 \in B \subseteq C \subseteq A \subset \mathbb{R}$ e uma vizinhança W_0 de (x_0, y_0) em $\mathbb{R}^2$ tal que

$$h : I \times B \rightarrow W_0 \quad \text{definida pela restrição} \quad h(s, y) = H(s, y)$$

é um difeomorfismo de classe C^k .

Daí, temos que:

$$h(0, 0) = (x_0, y_0),$$

$$h(0, y) = \xi(y),$$

$$h(\{0\} \times B) = \xi(B).$$

Agora como

$$\begin{aligned} h'(s, y)Y(s, y) &= H'(s, y)(1, 0) = \frac{\partial H}{\partial s}(s, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, \xi(y)) = \\ &= X(\varphi(s, \xi(y))) = X(h(s, y)), \quad \forall (s, y) \in I \times B \end{aligned}$$

temos que h conjugua X e Y . ■

1.4 Estrutura Local dos Pontos Singulares Hiperbólicos: Teorema de Grobman-Hartman

Pelo Teorema do Fluxo Tubular, sabemos que existe um difeomorfismo (de classe C^r) que conjugua X em uma vizinhança de um ponto regular (x_0, y_0) com o campo constante $Y = (1, 0)$. Daí, dois campos X e Y são localmente conjugados em torno de pontos regulares. Por esse motivo, temos um conhecimento satisfatório das órbitas de um campo vetorial polinomial planar em torno dos pontos regulares, visto que existe apenas uma classe de conjugação diferencial local.

Se (x_0, y_0) é uma singularidade, a situação é bem mais complicada. Vamos então analisar nesta seção as *singularidades hiperbólicas*, isto é, os pontos onde todos os autovalores da $JX(x_0, y_0)$ tem parte real diferente de 0 e também o Teorema de Grobman-Hartman:

Teorema 1.8 (Grobman-Hartman). Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial polinomial e (x_0, y_0) um ponto singular hiperbólico. Então existem $V \subset \mathbb{R}^2$, com $(x_0, y_0) \in V$ e $W \in \mathbb{R}^2$, com $(0, 0) \in W$ tal que X/V é topologicamente equivalente a $JX(x_0, y_0)/W$.

Geometricamente, temos:

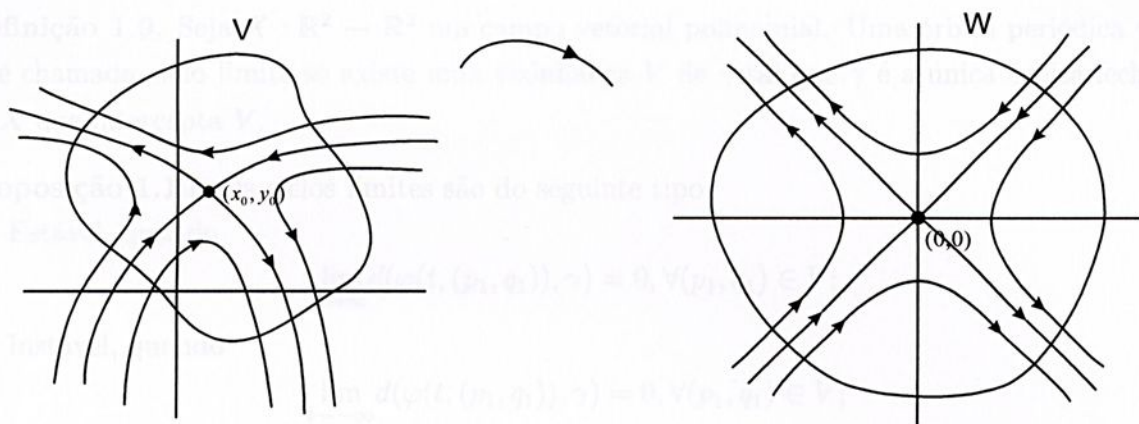


Figura 1.17: Interpretação geométrica do Teorema de Grobman-Hartman

Como a demonstração deste teorema é demasiadamente extensa e além disso não é um dos nossos objetivos neste trabalho, demos apenas uma interpretação geométrica do que ele está dizendo. O leitor encontrará a demonstração em [Pa].

1.5 Estrutura Local de Órbitas Periódicas e Ciclos Limites no Plano

A transformação de Poincaré associada a uma órbita fechada γ de um campo vetorial polinomial planar X é um difeomorfismo π , o qual vamos definir mais a frente. Esta transformação descreve o comportamento do campo X em uma vizinhança de γ .

Sejam $\gamma = \{\varphi(t, (p, q)), 0 \leq t \leq \tau_0\}$ uma órbita periódica de período τ_0 de um campo vetorial polinomial planar X e Σ uma secção transversal a X em (p, q) .

Como o fluxo de X , φ , é contínuo, para todo ponto $(p_1, q_1) \in \Sigma$ próximo de (p, q) a trajetória $\varphi(t, (p_1, q_1))$ está próxima a γ , com $t \in I$, com I um intervalo pré-estabelecido.

Definiremos $\pi(p_1, q_1)$ como sendo o primeiro ponto onde esta órbita irá interceptar Σ . Sendo Σ_0 o domínio de π , teremos que $(p, q) \in \Sigma_0$ e $\pi(p, q) = (p, q)$.

Muitas propriedades de X perto de γ se refletem em π . Por exemplo, as órbitas periódicas de X próximas de γ correspondem aos pontos fixos de π , que são pontos $(p_1, q_1) \in \Sigma_0$ para os quais $\pi(p_1, q_1) = (p_1, q_1)$. O comportamento assintótico das órbitas de X próximo de γ também é descrito por π .

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^n(p_1, q_1) = (p, q) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, (p_1, q_1)), \gamma) = 0.$$

Prova-se que $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma_0$ é um difeomorfismo de classe C^r sobre sua imagem Σ_1 . (Ver [S1]).

Definição 1.9. Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial polinomial. Uma órbita periódica γ de X é chamada ciclo limite se existe uma vizinhança V de γ tal que γ é a única órbita fechada de X que intercepta V .

Proposição 1.10. Os ciclos limites são do seguinte tipo:

(a) Estável, quando

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, (p_1, q_1)), \gamma) = 0, \forall (p_1, q_1) \in V;$$

(b) Instável, quando

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, (p_1, q_1)), \gamma) = 0, \forall (p_1, q_1) \in V;$$

(c) Semi-estável, quando

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, (p_1, q_1)), \gamma) = 0, \forall (p_1, q_1) \in V \cap \text{ext}(\gamma)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, (p_1, q_1)), \gamma) = 0, \forall (p_1, q_1) \in V \cap \text{int}(\gamma),$$

ou o contrário.

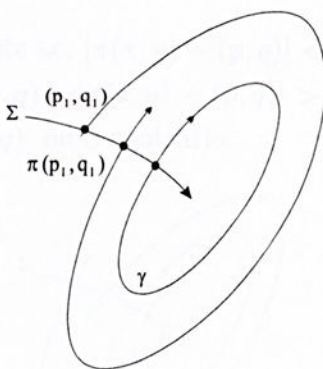


Figura 1.18: Caso (a), ciclo limite estável

Demonstração: Suponha que a vizinhança V não contenha pontos singulares. Sejam $(p, q) \in \gamma$, Σ uma secção transversal a X em (p, q) e $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ a transformação de Poincaré.

Suponha que Σ esteja ordenada, sendo o sentido positivo do exterior de (γ) para o interior de γ .

Dado $(p_1, q_1) \in \Sigma \cap \text{ext}(\gamma)$, temos $\pi(p_1, q_1) > (p_1, q_1)$ ou $\pi(p_1, q_1) < (p_1, q_1)$. Suponhamos que $\pi(p_1, q_1) > (p_1, q_1)$.

Considere a região A limitada por γ , pelo arco de trajetória $(p_1, q_1)\pi(p_1, q_1)$ e pelo segmento $(p_1, q_1)\pi(p_1, q_1) \in \Sigma_0$. A é positivamente invariante, isto é, dado $(x, y) \in A$, $\varphi(t, (x, y)) \in A$,

para todo $t \geq 0$.

Ainda $\varphi(t, (x, y))$ intercepta Σ em uma sequência estritamente monótona de pontos (x_n, y_n) que converge para (p, q) .

Daí concluímos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, (x, y)), \gamma) = 0$$

Agora, se $\pi(p_1, q_1) < (p_1, q_1)$, considere o campo $-X$ que ficará provado que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, (x, y)), \gamma) = 0, \quad \forall (x, y) \in A$$

Podemos provar de maneira análoga se tomarmos $(p_1, q_1) \in \Sigma_0 \cap \text{int}(\gamma)$. Assim, combinando estas possibilidades provamos a proposição. ■

Podemos observar que γ é um ciclo limite se, e somente se, (p, q) é um ponto fixo isolado de π .

Note ainda que:

(a) γ é estável se, e somente se, $|\pi(x, y) - (p, q)| < |(x, y) - (p, q)|$, qualquer que seja $(x, y) \neq (p, q)$, próximo de (p, q) ;

(b) γ é instável se, e somente se, $|\pi(x, y) - (p, q)| > |(x, y) - (p, q)|$, qualquer que seja $(x, y) \neq (p, q)$, próximo de (p, q) ;

(c) γ é semi-estável se, e somente se, $|\pi(x, y) - (p, q)| < |(x, y) - (p, q)|$, qualquer que seja $(x, y) \in \Sigma \cap \text{ext}(\gamma)$, próximo de (p, q) e $|\pi(x, y) - (p, q)| > |(x, y) - (p, q)|$, qualquer que seja $(x, y) \in \Sigma \cap \text{int}(\gamma)$, próximo de (p, q) , ou o contrário.

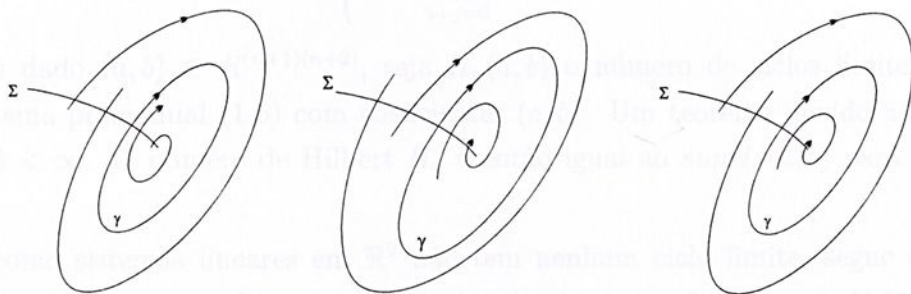


Figura 1.19: (a) estável; (b) instável e (c) semi-estável

O teorema que iremos apresentar agora vai estabelecer uma condição suficiente para que uma órbita periódica seja um ciclo limite estável. Vejamos o que ele nos diz.

Teorema 1.11. Sejam $X = (X_1, X_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial polinomial planar, γ uma órbita periódica de X de período T e $\pi : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma$ a transformação de Poincaré em uma secção transversal Σ em $(p, q) \in \gamma$.

Então,

$$\dot{\pi}(p, q) = \exp \left(\int_0^T \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt \right);$$

onde

$$\operatorname{div} X(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} X_1(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} X_2(x, y).$$

Em particular, se

$$\int_0^T \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt < 0, \quad \gamma \text{ é estável};$$

$$\int_0^T \operatorname{div} X(\gamma(t)) dt > 0, \quad \gamma \text{ é instável}.$$

Demonstração: Ver [S2] pg 229.

Um problema bastante interessante e muito famoso que podemos encontrar dentro desta teoria e que ainda não foi resolvido é o 16º *Problema de Hilbert*. Na virada do século, o famoso matemático mundial David Hilbert apresentou uma lista com 23 notáveis problemas matemáticos para o Segundo Congresso Internacional de Matemática. O 16º Problema de Hilbert pede a determinação do número máximo de ciclos limites, H_n , em um sistema polinomial de n -ésimo grau

$$\begin{cases} \dot{x} = \sum_{i+j=0}^n a_{ij} x^i y^j \\ \dot{y} = \sum_{i+j=0}^n b_{ij} x^i y^j \end{cases} \quad (1.5)$$

Para um dado $(a, b) \in \mathbb{R}^{(n+1)(n+2)}$, seja $H_n(a, b)$ o número de ciclos limites de n -ésimo grau do sistema polinomial (1.5) com coeficientes (a, b) . Um teorema devido a Dulac afirma que $H_n(a, b) < \infty$. O número de Hilbert H_n é então igual ao $\sup H_n(a, b)$ para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^{(n+1)(n+2)}$.

Agora, como sistemas lineares em $\mathbb{R}^2$ não tem nenhum ciclo limite, segue que $H_1 = 0$. Entretanto, mesmo para as classes mais simples de sistemas não lineares, (1.5) com $n = 2$, o número de Hilbert H_2 , não foi determinado. Em 1962, o matemático russo N. V. Bautin provou que qualquer sistema quadrático, (1.5) com $n = 2$, tem no máximo três ciclos limites. E por algum tempo acreditou-se que $H_2 = 3$. Contudo, em 1979, os matemáticos chineses S. L. Shi, L. S. Chen e M. S. Wang produziram exemplos de sistemas quadráticos com quatro ciclos limites. Então, $H_2 \geq 4$. Baseado nestas várias evidências, acreditou-se que $H_2 = 4$ e em 1982, X. Y. Chin declarou ter provado este resultado, entretanto, foram encontrados erros em seu trabalho por Y. L. Cao.



1.6 Conjuntos α -limites e ω -limites de uma Órbita: O Teorema de Poincaré-Bendixson

Sejam $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial polinomial e $\varphi(t) = \varphi(t, (p, q))$ a trajetória de X passando pelo ponto (p, q) definida no seu intervalo maximal $I_{(p,q)} = (\omega_-(p, q), \omega_+(p, q))$.

Se $\omega_+(p, q) = \infty$, definimos o conjunto

$$\omega(p, q) = \{(p_1, q_1) \in \mathbb{R}^2; \exists(t_n), t_n \rightarrow \infty \text{ e } \varphi(t_n, (p, q)) \rightarrow (p_1, q_1), n \rightarrow \infty\}$$

como sendo o conjunto ω -limite de (p, q) .

Se $\omega_-(p, q) = -\infty$, definimos o conjunto

$$\alpha(p, q) = \{(p_1, q_1) \in \mathbb{R}^2; \exists(t_n), t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi(t_n, (p, q)) \rightarrow (p_1, q_1), n \rightarrow \infty\}$$

como sendo o conjunto α -limite de (p, q) .

Observemos que, em termos de α -limites e ω -limites, podemos definir os ciclos no plano como as órbitas periódicas que são α -limites ou ω -limites de todas as trajetórias passando por pontos suficientemente próximos.

No entanto, se $\gamma_{(p,q)}$ é a órbita de X pelo ponto (p, q) e $(p_1, q_1) \in \gamma_{(p,q)}$ então $\omega(p, q) = \omega(p_1, q_1)$.

De fato,

$$(p_1, q_1) \in \gamma_{(p,q)} \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \varphi(t, (p_1, q_1)) = \varphi(t + c, (p, q)).$$

Da mesma forma, temos que $\alpha(p, q) = \alpha(p_1, q_1)$.

Daí, temos que o conjunto ω -limite de uma órbita fechada γ é o conjunto $\omega(p, q)$, para qualquer $(p, q) \in \gamma$ e o conjunto α -limite de uma órbita γ é o conjunto $\alpha(p, q)$, para qualquer $(p, q) \in \gamma$.

Notemos que se $\varphi(t) = \varphi(t, (p, q))$ é a trajetória do campo vetorial polinomial X pelo ponto (p, q) e se $\psi(t) = \psi(t, (p, q))$ é a trajetória do campo vetorial polinomial $-X$ pelo ponto (p, q) , temos que $\psi(t, (p, q)) = \varphi(-t, (p, q))$.

Logo, temos que

$$\omega\text{-limite de } \varphi(t) = \alpha\text{-limite de } \psi(t)$$

$$\omega\text{-limite de } \psi(t) = \alpha\text{-limite de } \varphi(t).$$

Por isso iremos restringir nosso estudo das propriedades gerais dos conjuntos α -limites e ω -limites ao conjunto ω -limite. Faremos isto para facilitar e enunciar o teorema que vem a seguir de uma forma mais resumida.

Teorema 1.12. Sejam $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial polinomial, (p, q) tal que $[0, \infty) \subset I_{(p,q)}$, $\gamma_{(p,q)}^+ = \{\varphi(t, (p, q)), t \geq 0\}$ a semi-órbita positiva do campo X pelo ponto (p, q) . Se $\gamma_{(p,q)}^+$ esta contida em $K \subset \mathbb{R}^2$, K compacto, então:

- (a) $\omega(p, q) \neq \emptyset$;
- (b) $\omega(p, q)$ é compacto;
- (c) $\omega(p, q)$ é invariante por X , isto é, se $(p_1, q_1) \in \omega(p, q)$, então a trajetória de X por (p_1, q_1) esta contida em $\omega(p, q)$;
- (d) $\omega(p, q)$ é conexo.

Resultado análogo pode ser obtido para $\alpha(p, q)$.

Indicamos [Pa] para a prova do teorema acima.

Vamos apresentar nesta seção o Teorema de Poincaré-Bendixson. Mas antes, para facilitar a demonstração deste teorema, vamos estudar alguns lemas.

No que segue, estamos assumindo que $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ é tal que $[0, \infty) \subset I_{(p,q)}$.

Lema 1.13. Sejam $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial polinomial, Σ uma secção transversal a X e $\gamma = \{\varphi(t)\}$ uma órbita de X . Se $(p, q) \in \Sigma \cap \omega(\gamma)$, então (p, q) pode ser expresso como limite de uma seqüência de pontos de Σ , $\varphi(t_n)$, onde $t_n \rightarrow \infty$.

Demonstração: Suponhamos que $\gamma = \{\varphi(t)\} = \{\varphi(t, (p_1, q_1))\}$ e $(p, q) \in \Sigma \cap \omega(\gamma)$.

Consideremos uma vizinhança V de (p, q) e a aplicação $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tau(V \cap \Sigma) = 0$.

Como $(p, q) \in \omega(p, q)$ existe uma seqüência $(\tilde{t}_n)$ tal que $\tilde{t}_n \rightarrow \infty$ e $\varphi(\tilde{t}_n) \rightarrow (p, q)$ quando $n \rightarrow \infty$.

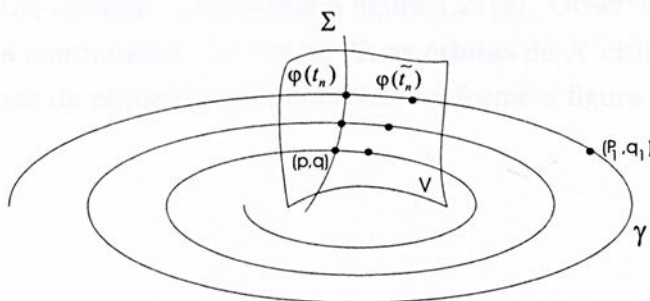


Figura 1.20: interpretação geométrica do Lema 1.13

Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(\tilde{t}_n) \in V$, qualquer que seja $n \geq n_0$. Se $t_n = \tilde{t}_n + \tau(\varphi(\tilde{t}_n))$, qualquer que seja $n \geq n_0$, temos

$$\varphi(t_n) = \varphi(t_n, (p_1, q_1)) = \varphi(\tilde{t}_n + \tau(\varphi(\tilde{t}_n)), (p_1, q_1)) = \varphi(\tau(\varphi(\tilde{t}_n)), \varphi(\tilde{t}_n))$$

e por definição de τ , temos que $\varphi(t_n) \in \Sigma$.

Como τ é contínua, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\tau(\varphi(\tilde{t}_n)), \varphi(\tilde{t}_n)) = \varphi(0, (p, q)) = (p, q)$$

pois,

$$\varphi(\tilde{t}_n) \rightarrow (p, q) \text{ e } \tau(\varphi(\tilde{t}_n)) \rightarrow \tau(p, q) = 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

■

Lema 1.14. Sejam $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial polinomial e Σ uma secção transversal a X . Se γ é uma órbita de X e $(p, q) \in \Sigma \cap \gamma$, então $\gamma_{(p,q)}^+ = \{\varphi(t, (p, q)); t \geq 0\}$ intercepta Σ numa seqüência monótona $(p_1, q_1), (p_2, q_2), \dots, (p_n, q_n), \dots$

Demonstração: Seja $D = \{t \in \mathbb{R}^+, \varphi(t, (p, q)) \in \Sigma\}$. Como D é discreto (pelo Teorema do Fluxo Tubular), podemos ordenar o conjunto

$$D = \{0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots\}.$$

Seja $(p_1, q_1) = (p, q)$. Definamos, caso exista, $(p_2, q_2) = \varphi(t_1, (p_1, q_1))$. Por indução, definiremos $(p_n, q_n) = \varphi(t_{n-1}, (p, q))$.

Se $(p_1, q_1) = (p_2, q_2)$, então γ é uma trajetória fechada de período $\tau = t_1$, e $(p, q) = (p_n, q_n)$, para todo n .

Se $(p_1, q_1) \neq (p_2, q_2)$, digamos $(p_1, q_1) < (p_2, q_2)$ e se existir (p_3, q_3) vamos mostrar que $(p_3, q_3) > (p_2, q_2)$.

De fato, vamos então orientar Σ conforme a figura 1.21(a). Observemos que devido ao fato de Σ ser conexo e pela continuidade do campo X , as órbitas de X cruzam a secção sempre no mesmo sentido, digamos da esquerda para a direita, conforme a figura 1.21(b).

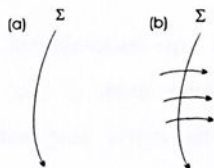


Figura 1.21: (a) orientação de Σ , (b) órbitas de X cruzando Σ .

Como em $\mathbb{R}^2$ vale o Teorema da Curva Fechada de Jordan, que diz o seguinte: "Se J é uma curva fechada, contínua e simples (J é a imagem homeomorfa de um círculo), então $\mathbb{R}^2/J$ tem duas componentes conexas; S_i (limitada) e S_e (não-limitada), as quais tem J como fronteira comum", consideremos então a Curva de Jordan formada pela união do segmento $\overline{(p_1, q_1)(p_2, q_2)} \subset \Sigma$ com o arco $\widehat{(p_1, q_1)(p_2, q_2)}$ da órbita, temos que $\overline{(p_1, q_1)(p_2, q_2)} = \{\varphi(t, (p_1, q_1)); 0 < t \leq t_1\}$, da figura 1.22.

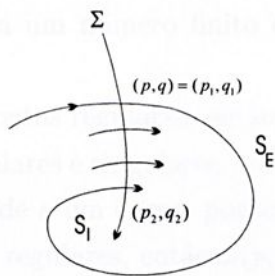


Figura 1.22: Curva de Jordan

Em particular, a órbita γ , a partir de (p_2, q_2) , isto é, para valores de $t > t_1$, fica contido em S_i .

De fato, ela não pode interceptar o arco $\widehat{(p_1, q_1)(p_2, q_2)}$ devido à unicidade das órbitas e não pode interceptar o segmento $\overline{(p_1, q_1)(p_2, q_2)}$, pois iria contrariar o sentido do fluxo.

Daí, caso (p_3, q_3) exista, devemos ter $(p_1, q_1) < (p_2, q_2) < (p_3, q_3)$. Seguindo este raciocínio, obteremos $(p_1, q_1) < (p_2, q_2) < \dots < (p_n, q_n) < \dots$

Portanto, $\{(p_n, q_n)\}$ é uma seqüência monótona.

Caso $(p_2, q_2) < (p_1, q_1)$ a demonstração é análoga. ■

Lema 1.15. Sejam $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial polinomial, Σ uma secção transversal ao campo X em $(p, q) \in \mathbb{R}^2$. Então Σ intercepta $\omega(p, q)$ no máximo em um ponto.

Demonstração: Pelo lema anterior, o conjunto de pontos de $\gamma_{(p,q)}^+$ em Σ tem no máximo um ponto limite, pois o mesmo forma uma seqüência monótona. Daí, o resultado segue do primeiro lema, pois $\Sigma \cap \omega(p, q) = (p, q)$. ■

Lema 1.16. Se o ω -limite de uma trajetória γ não contém singularidades, então $\omega(\gamma)$ é uma órbita fechada. Se $(p, q) \in \gamma$, as órbitas por pontos próximos a (p, q) tem esta mesma órbita fechada como ω -limite.

Demonstração: Seja $(p_1, q_1) \in \omega(\gamma)$. Mostremos que a órbita de (p_1, q_1) é fechada. Tomemos $(x, y) \in \omega(p_1, q_1)$ e, portanto, (x, y) não é uma singularidade. Consideremos uma secção transversal Σ contendo (x, y) . Sabemos por lema anterior que a órbita positiva de (p_1, q_1) intercepta Σ segundo uma seqüência monótona, com $(p_n, q_n) \rightarrow (x, y)$. Como $(p_n, q_n) \in \omega(\gamma)$, temos que $(p_n, q_n) = (x, y)$, para todo n , isto pelo lema anterior. Logo, a órbita de (p_1, q_1) é fechada. Tomando agora um segmento transversal contendo (p_1, q_1) , concluímos, pelo lema 1.12, que $\omega(\gamma)$ se reduz à órbita de (p_1, q_1) . ■

Vamos agora enunciar e demonstrar o Teorema de Poincaré-Bendixson.

Teorema 1.17 (Poincaré-Bendixson). Sejam $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo polinomial e $\varphi(t) = \varphi(t, (p, q))$ uma trajetória de X , definida para qualquer $t \geq 0$, tal que $\gamma_{(p,q)}^+$ esteja contida num compacto $K \subset \mathbb{R}^2$.

Suponha que o campo X possua um número finito de singularidades em $\omega(p, q)$. Então temos as seguintes situações:

- (a) Se $\omega(p, q)$ contém somente pontos regulares, então $\omega(p, q)$ é uma órbita periódica;
- (b) Se $\omega(p, q)$ contém pontos regulares e singulares, então $\omega(p, q)$ é formado por um conjunto de órbitas, onde cada uma delas tende a um desses pontos singulares quando $t \rightarrow \pm\infty$;
- (c) se $\omega(p, q)$ não contém pontos regulares, então $\omega(p, q)$ é um ponto singular.

Demonstração: (a) Por hipótese, temos que $\omega(p, q)$ tem somente pontos regulares e se $(p_1, q_1) \in \omega(p, q)$, então a órbita $\gamma_{(p_1, q_1)} \in \omega(p, q)$.

Sendo $\omega(p, q)$ compacto, temos que $\omega(\gamma_{(p_1, q_1)}) \neq \emptyset$. Daí, do lema 1.14, temos que $\omega(p, q) = \gamma_{(p_1, q_1)}$, que é uma órbita fechada e conseqüentemente periódica.

(b) Como, por hipótese, temos que $\omega(p, q)$ contém pontos regulares e singulares, seja γ uma trajetória regular contida em $\omega(p, q)$. Afirmamos que $\omega(\gamma)$ é uma singularidade. Se $\omega(\gamma)$ possui algum ponto regular (p_1, q_1) , tomemos uma secção transversal Σ a X , passando pelo ponto (p_1, q_1) . Como $\gamma \subset \omega(p, q)$, temos pelo lema 1.13, que γ intercepta apenas um ponto. Pelo lema 1.14, γ é uma trajetória fechada e $\omega(p, q) = \gamma$. Isto é um absurdo, pois $\omega(p, q)$ possui singularidades. Logo, $\omega(\gamma)$ é uma singularidade.

(c) Se $\omega(p, q)$ não contém pontos regulares, então $\omega(p, q)$ é uma singularidade, pois X tem um número finito de singularidades e $\omega(p, q)$ é conexo. ■



Capítulo 2

Variedades Invariantes

2.1 O Teorema da Variedade Estável Local

O Teorema da Variedade Estável é um dos mais importantes resultados da teoria qualitativa local de EDO's. Ele mostra que perto de um ponto hiperbólico (x_0, y_0) , o sistema não linear

$$(\dot{x}, \dot{y}) = X(x, y) = (p(x, y), q(x, y)) \quad (2.1)$$

tem variedades estável e instável S e U tangentes em (x_0, y_0) aos subespaços estável e instável E^S e E^U do sistema linearizado

$$(\dot{x}, \dot{y}) = A(x, y) \quad (2.2)$$

onde $A = JX(x_0, y_0)$.

Mas vamos primeiramente definir subespaços estável, instável e central E^S, E^U e E^C , respectivamente, para um sistema linear do tipo (2.2) acima.

Seja $w_j = u_j + iv_j$ um autovetor generalizado da matriz A correspondente a um autovalor $\lambda_j = a_j + ib_j$, com $j = 1, 2$. Note que se $b_j = 0$, então $v_j = 0$ e $[u_1, v_1] = [u_2, v_2]$ se $b_j \neq 0$. E seja

$$B = \{u_1, v_1\}$$

uma base de $\mathbb{R}^2$.

Definição 2.1. Sejam $\lambda_j = a_j + ib_j$, $w_j = u_j + iv_j$ e B descritos como acima. Então,

$$E^S = [\{u_j, v_j\} / a_j < 0]$$

$$E^C = [\{u_j, v_j\} / a_j = 0]$$

e

$$E^U = [\{u_j, v_j\} / a_j > 0]$$

isto é, E^S, E^U e E^C são os subespaços de $\mathbb{R}^2$ gerados pelas partes real e imaginárias dos autovetores generalizados w_j correspondentes aos autovalores λ_j com partes real negativa, nula e positiva, respectivamente.

As variedades S e U tem a mesma dimensão de E^S e E^U , e se φ é o fluxo do sistema não linear (2.1), então S e U são positiva e negativamente invariantes por φ , respectivamente e satisfazem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, (c_1, c_2)) = (x_0, y_0), \forall (c_1, c_2) \in S$$

e

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, (c_1, c_2)) = (x_0, y_0), \forall (c_1, c_2) \in U.$$

Vamos apresentar estas idéias com um exemplo. Assumiremos que a singularidade (x_0, y_0) está localizada na origem. Se este não for o caso, podemos transladar (x_0, y_0) para a origem.

Teorema 2.2 (Variedade Estável). Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial polinomial e φ o fluxo do sistema não linear (2.1) associado a X . Suponhamos que $X(0, 0) = (0, 0)$ e que $JX(0, 0)$ tenha k autovalores com parte real negativa e $2 - k$ autovalores com parte real positiva. Então, existe uma variedade k -diferenciável S tangente ao subespaço E^S do sistema linear (2.2) na origem tal que para todo $t \geq 0$, $\varphi_t(S) \subset S$ e para todo $(x, y) \in S$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, (x, y)) = (0, 0).$$

Analogamente, existe uma variedade $(2 - k)$ -diferenciável U tangente ao subespaço E^U do sistema linear (2.2) na origem tal que para todo $t \leq 0$, $\varphi_t(U) \subset U$ e para todo $(x, y) \in U$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, (x, y)) = (0, 0).$$

Exemplo 2.3. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = p(x, y) = ax + by + \phi(x, y) \\ \dot{y} = q(x, y) = cx + dy + \psi(x, y) \end{cases},$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi(x, y) \\ \psi(x, y) \end{pmatrix}.$$

Mais precisamente, vamos tomar o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x + \phi(x, y) \\ \dot{y} = \lambda_2 y + \psi(x, y) \end{cases} \quad (2.3)$$

onde $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$.

Assim,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi(x, y) \\ \psi(x, y) \end{pmatrix}.$$

Notemos que se (x, y) é solução de (2.3), então

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} x_0 + \int_0^t e^{\lambda_1(t-s)} \phi(x(s), y(s)) ds$$

$$y(t) = e^{\lambda_2 t} y_0 + \int_0^t e^{\lambda_2(t-s)} \psi(x(s), y(s)) ds.$$

De fato, vamos escrever $x(t)$ de uma maneira diferente

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\lambda_1 t} x_0 + \int_0^t e^{\lambda_1(t-s)} \phi(x(s), y(s)) ds = \\ &= e^{\lambda_1 t} x_0 + \int_0^t e^{\lambda_1 t} e^{-\lambda_1 s} \phi(x(s), y(s)) ds = \\ &= e^{\lambda_1 t} x_0 + e^{\lambda_1 t} \int_0^t e^{-\lambda_1 s} \phi(x(s), y(s)) ds. \end{aligned}$$

Derivando $x(t)$ em relação a t , temos:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \lambda_1 e^{\lambda_1 t} x_0 + e^{\lambda_1 t} e^{-\lambda_1 t} \phi(x(t), y(t)) + \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \int_0^t e^{-\lambda_1 s} \phi(x(s), y(s)) ds = \\ &= \lambda_1 e^{\lambda_1 t} x_0 + \phi(x(t), y(t)) + \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \int_0^t e^{-\lambda_1 s} \phi(x(s), y(s)) ds = \\ &= \lambda_1 (e^{\lambda_1 t} x_0 + e^{\lambda_1 t} \int_0^t e^{-\lambda_1 s} \phi(x(s), y(s)) ds) + \phi(x(t), y(t)) = \\ &= \lambda_1 \underbrace{\left(e^{\lambda_1 t} x_0 + \int_0^t e^{\lambda_1(t-s)} \phi(x(s), y(s)) ds \right)}_{x(t)} + \phi(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Isto é,

$$\dot{x}(t) = \lambda_1 x(t) + \phi(x(t), y(t)).$$

Portanto, temos que $x(t) = e^{\lambda_1 t} x_0 + \int_0^t e^{\lambda_1(t-s)} \phi(x(s), y(s)) ds$ é realmente uma solução de (2.3). Vamos verificar agora que $y(t) = e^{\lambda_2 t} y_0 + \int_0^t e^{\lambda_2(t-s)} \psi(x(s), y(s)) ds$ também é uma solução do sistema (2.3).

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\lambda_2 t} y_0 + \int_0^t e^{\lambda_2(t-s)} \psi(x(s), y(s)) ds = \\ &= e^{\lambda_2 t} y_0 + \int_0^t e^{\lambda_2 t} e^{-\lambda_2 s} \psi(x(s), y(s)) ds = \\ &= e^{\lambda_2 t} y_0 + e^{\lambda_2 t} \int_0^t e^{-\lambda_2 s} \psi(x(s), y(s)) ds. \end{aligned}$$

Derivando $y(t)$ em relação a t , temos:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \lambda_2 e^{\lambda_2 t} y_0 + e^{\lambda_2 t} e^{-\lambda_2 t} \psi(x(t), y(t)) + \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \int_0^t e^{-\lambda_2 s} \psi(x(s), y(s)) ds = \\ &= \lambda_2 e^{\lambda_2 t} y_0 + \psi(x(t), y(t)) + \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \int_0^t e^{-\lambda_2 s} \psi(x(s), y(s)) ds = \\ &= \lambda_2 (e^{\lambda_2 t} y_0 + e^{\lambda_2 t} \int_0^t e^{-\lambda_2 s} \psi(x(s), y(s)) ds) + \psi(x(t), y(t)) = \\ &= \lambda_2 \underbrace{\left(e^{\lambda_1 t} y_0 + \int_0^t e^{\lambda_2(t-s)} \psi(x(s), y(s)) ds \right)}_{y(t)} + \psi(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Isto é,

$$\dot{y}(t) = \lambda_2 y(t) + \psi(x(t), y(t)).$$

Portanto, temos que $y(t) = e^{\lambda_2 t} y_0 + \int_0^t e^{\lambda_2(t-s)} \psi(x(s), y(s)) ds$ é solução de (2.3).

Afirmção: Se $(x(t), y(t))$ é uma solução contida em W^S então

$$y(t) = - \int_t^\infty e^{\lambda_2(t-s)} \psi(x(s), y(s)) ds.$$

De fato, se $(x(t), y(t)) \in W^S$ então $y(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Assim,

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &= \|e^{\lambda_2 t} y_0 + \int_0^t e^{\lambda_2(t-s)} \psi(x(s), y(s)) ds\| = \\ &= \|e^{\lambda_2 t}\| \|y_0 + \int_0^t e^{-\lambda_2 s} \psi(x(s), y(s)) ds\| = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\|e^{-\lambda_2 t}\|} \|y_0 + \int_0^t e^{-\lambda_2 s} \psi(x(s), y(s)) ds\|.$$

Agora quando $t \rightarrow \infty$, temos que $\frac{1}{\|e^{-\lambda_2 t}\|} \rightarrow \infty$. E como $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, temos que

$$y_0 + \int_0^\infty e^{\lambda_2(t-s)} \psi(x(s), y(s)) ds = 0.$$

Logo,

$$y_0 = - \int_0^\infty e^{\lambda_2(t-s)} \psi(x(s), y(s)) ds$$

o que verifica a afirmação.

Assim,

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} x_0 + \int_0^t e^{\lambda_1(t-s)} \phi(x(s), y(s)) ds$$

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\lambda_2 t} \left(- \int_0^\infty e^{-\lambda_2 s} \psi(x(s), y(s)) ds \right) + \int_0^t e^{\lambda_2(t-s)} \psi(x(s), y(s)) ds = \\ &= - \int_0^\infty e^{\lambda_2(t-s)} \psi(x(s), y(s)) ds + \int_0^t e^{\lambda_2(t-s)} \psi(x(s), y(s)) ds. \end{aligned}$$

Então,

$$- \int_t^\infty e^{\lambda_2(t-s)} \psi(x(s), y(s)) ds = - \int_0^\infty e^{\lambda_2(t-s)} \psi(x(s), y(s)) ds + \int_0^t e^{\lambda_2(t-s)} \psi(x(s), y(s)) ds.$$

Logo,

$$\varphi(t, (x, y)) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ds \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix} - \int_t^\infty \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-s)} \end{bmatrix} ds \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix}.$$

Agora, vamos tomar um caso particular, onde $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\phi = -y^2$ e $\psi = x^2$.

Daí, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y^2 \\ \dot{y} = y + x^2 \end{cases}.$$

Portanto, temos

$$\varphi(t, (x, y)) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ds \begin{bmatrix} -y^2 \\ x^2 \end{bmatrix} - \int_t^\infty \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-s)} \end{bmatrix} ds \begin{bmatrix} -y^2 \\ x^2 \end{bmatrix}.$$

Temos que o primeiro valor é dado por

$$\varphi^0(t, (x, y)) = (0, 0).$$

Continuando o processo, podemos obter o restante dos valores substituindo $\begin{bmatrix} -y^2 \\ x^2 \end{bmatrix}$ pelos valores encontrados nas próximas iterações.

Logo, temos

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(t, (x, y)) &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ds \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \int_t^\infty \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{(t-s)} \end{bmatrix} ds \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t}x \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A próxima iteração será

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(t, (x, y)) &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \int_t^\infty \begin{bmatrix} 0 \\ e^{(t-s)}e^{-2s}x^2 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} e^{-t}x \\ 0 \end{bmatrix} - \int_t^\infty x^2 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-3s} \end{bmatrix} ds = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t}x \\ 0 \end{bmatrix} - x^2 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^{-3t}}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}x \\ \frac{-e^{-2t}x^2}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para melhorarmos a aproximação, vamos fazer ainda mais duas iterações

$$\begin{aligned} \varphi^{(3)}(t, (x, y)) &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{e^{-t}x^4}{9} \int_0^t \begin{bmatrix} e^s e^{-4s} \\ 0 \end{bmatrix} ds - e^t x^2 \int_t^\infty \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^{-3t}}{3} \end{bmatrix} ds = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t}x \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{e^{-t}x^4}{9 \cdot 3} \begin{bmatrix} -1 + e^{-3t} \\ 0 \end{bmatrix} - x^2 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^{-3t}}{3} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t}x \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{27} \begin{bmatrix} -(e^{-t}x^4) + e^{-4t}x^4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^{-2t}x^2}{3} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t}x + \frac{1}{27}(e^{-4t} - e^{-t})x^4 \\ \frac{e^{-2t}x^2}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A próxima será

$$\varphi^{(4)}(t, (x, y)) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \frac{e^{-t}x^4}{9} \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-3s} \\ 0 \end{bmatrix} ds -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{e^t x^2}{27^2} \int_t^\infty \left[27^2 e^{-s} (e^{-2s} + 2.27 e^{-2s} (e^{-3s} - 1) x^3 + (e^{-8s} - 2e^{-5s} + e^{-2s}) x^6) \right] ds = \\
& = \left[\begin{matrix} e^{-t} x \\ 0 \end{matrix} \right] - \frac{e^{-t} x^4}{9} \left[\begin{matrix} \frac{e^{-3t}}{3} \\ 0 \end{matrix} \right] - \frac{x^2 e^t}{27^2} \left[\begin{matrix} 0 \\ 27^2 e^{-3t} \left(\frac{1}{3} + \frac{2.27}{3} \left(\frac{e^{-3t}}{2} - 1 \right) x^3 + \frac{1}{3} \left(\frac{e^{-6t}}{3} - e^{-3t} + 1 \right) x^6 \right) \end{matrix} \right] = \\
& = \left[\begin{matrix} e^{-t} x \\ 0 \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} \frac{e^{-4t} x^4}{27} \\ 0 \end{matrix} \right] - \left[\begin{matrix} 0 \\ \frac{e^{-2t} x^2}{3} \left(1 + 2.27 \left(\frac{e^{-3t}}{2} - 1 \right) \right) x^3 + \left(\frac{e^{-6t}}{3} - e^{-3t} + 1 \right) x^6 \end{matrix} \right] = \\
& = \left[\begin{matrix} e^{-t} x + \frac{e^{-4t} x^4}{27} \\ \frac{e^{-2t}}{3} \left(1 + 2.27 \left(\frac{e^{-3t}}{2} - 1 \right) \right) x^5 + \left(\frac{e^{-6t}}{3} - e^{-3t} + 1 \right) x^8 \end{matrix} \right].
\end{aligned}$$

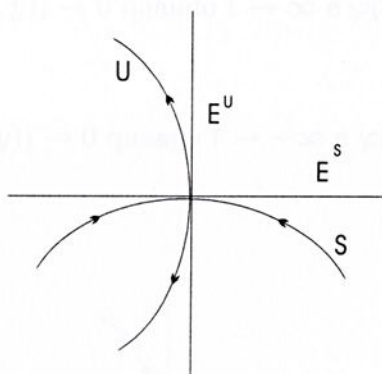


Figura 2.1: Variedades do exemplo 2.3

As variedades estável e instável S e U são definidas somente em uma pequena vizinhança da origem na prova do Teorema da Variedade Estável. S e U são além disso referidas como as variedades estável e instável locais de (2.1) na origem ou simplesmente as variedades estável e instável da origem. Definimos as variedades estável e instável globais de (2.1) em $(0,0)$ deixando os pontos de S correrem o tempo no passado e aqueles de U correrem o tempo no futuro.

Definição 2.4. Seja φ o fluxo do sistema não linear (2.1). As variedades globais estável e instável de (2.1) no $(0,0)$ (na origem) são dadas por

$$W^S(0,0) = \bigcup_{t \leq 0} \varphi(t, S)$$

e

$$W^U(0,0) = \bigcup_{t \geq 0} \varphi(t, U)$$

respectivamente. Pode ser mostrado que as variedades estável e instável globais, $W^S(0,0)$ e $W^U(0,0)$, são únicas e invariantes pelo fluxo φ .

Além disso,

$$\forall (x, y) \in W^S(0,0), \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, (x, y)) = 0$$

e

$$\forall (x, y) \in W^U(0,0), \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, (x, y)) = 0.$$

Pode também ser mostrado (como na prova do Teorema da Variedade Estável) que numa pequena vizinhança, N , de uma singularidade hiperbólica na origem, as variedades locais estável e instável, S e U , de (2.1) na origem são dadas por

$$S = \{(x, y) \in N / \varphi(t, (x, y)) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty \text{ e } \varphi(t, (x, y)) \in N, \forall t > 0\}$$

e

$$U = \{(x, y) \in N / \varphi(t, (x, y)) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi(t, (x, y)) \in N, \forall t \leq 0\},$$

respectivamente.

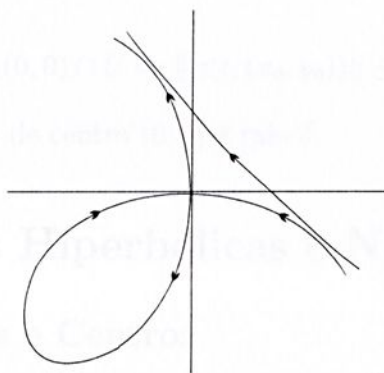


Figura 2.2: trajetória para o sistema no exemplo (2.3).

A figura 2.2 mostra uma trajetória computada numericamente para o sistema no exemplo (2.2). A variedade estável global e a variedade instável global para este exemplo é mostrada na figura 2.3. Note que $W^S(0,0)$ e $W^U(0,0)$ se interceptam em um *laço homoclínico*.

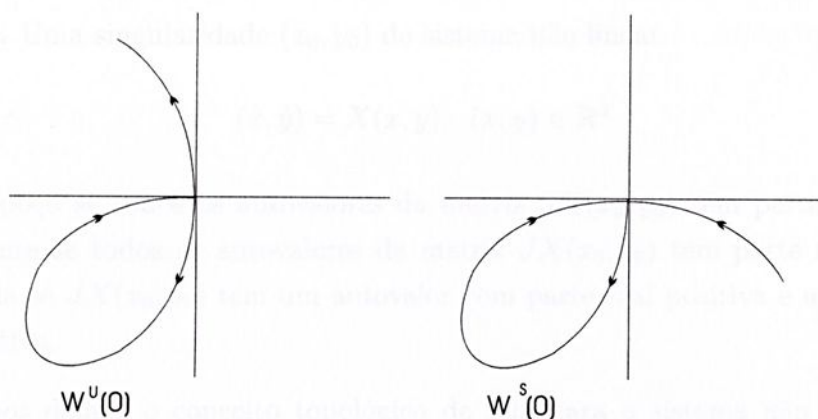


Figura 2.3: A variedade instável global e a variedade estável global para o exemplo 2.2

Com as hipóteses do Teorema da Variedade Estável, se S e U são as variedades estável e instável de (2.1) na origem e se $Re(\lambda_j) < -\alpha < 0 < \beta < Re(\lambda_m)$ para $j = 1, \dots, k$ e $m = k + 1, \dots, 2$ então dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$(x_0, y_0) \in N_\delta(0, 0) \cap S \Rightarrow \|\varphi(t, (x_0, y_0))\| \leq \epsilon e^{-\alpha t}, \forall t \geq 0$$

e

$$(x_0, y_0) \in N_\delta(0, 0) \cap U \Rightarrow \|\varphi(t, (x_0, y_0))\| \leq \epsilon e^{\beta t}, \forall t \leq 0$$

onde $N_\delta(0, 0)$ é uma bola aberta de centro $(0, 0)$ e raio δ .

2.2 Singularidades Hiperbólicas e Não Hiperbólicas

2.2.1 Selas, Nós, Focos e Centros

Como vimos, um sistema linear

$$(\dot{x}, \dot{y}) = A(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.4)$$

apresenta uma sela, um nó, um foco ou um centro na origem se existe uma transformação linear não singular que reduz a matriz A a uma matriz canônica $B = P^{-1}AP$ apresentando uma das seguintes formas

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \text{ ou } B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Definição 2.5. Uma singularidade (x_0, y_0) do sistema não linear

$$(\dot{x}, \dot{y}) = X(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (2.5)$$

é chamada de poço se todos os autovalores da matriz $JX(x_0, y_0)$ tem parte real negativa; é chamada de fonte se todos os autovalores da matriz $JX(x_0, y_0)$ tem parte real positiva; e é chamada de sela se $JX(x_0, y_0)$ tem um autovalor com parte real positiva e um autovalor com parte real negativa.

Agora, vamos definir o conceito topológico de sela para o sistema não linear (2.5) com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e mostrar que se (x_0, y_0) é uma singularidade hiperbólica de (2.5) então ele é uma sela topológica se, e somente se, é uma sela de (2.5); isto é, uma singularidade hiperbólica (x_0, y_0) é uma sela topológica para (2.5) se, e somente se, a origem é uma sela para (2.4) com $A = JX(x_0, y_0)$.

Podemos refinar a classificação dos poços do sistema não linear (2.5) para nós estáveis e focos, e podemos mostrar que uma singularidade hiperbólica (x_0, y_0) é um nó estável ou um foco para o sistema (2.5) se, e somente se, ele é respectivamente um nó estável ou um foco para o sistema linear (2.4) com $A = JX(x_0, y_0)$. Similarmente, uma fonte de (2.5) pode ser tanto um nó instável quanto um foco de (2.5) como definiremos abaixo. Finalmente, definiremos centros e centro-focos para o sistema não linear (2.5) e mostraremos que com a adição de termos não lineares o centro do sistema linear (2.4) pode se tornar um centro, um centro-foco, uma sela ou um foco instável de (2.5).

Vamos então dar definições geométricas precisas para um centro, um centro-foco, um foco estável e instável, um nó estável e instável e para uma sela topológica de um sistema não linear

$$\begin{cases} \dot{x} = p(x, y) \\ \dot{y} = q(x, y) \end{cases} \quad (2.6)$$

Vamos assumir que $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ é uma singularidade isolada do sistema (2.6) que foi transladada para a origem. As soluções do sistema não linear

$$\begin{cases} \dot{r} = p(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + q(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta \\ r \dot{\theta} = q(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta - p(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta \end{cases} \quad (2.7)$$

ou seja,

$$\frac{dr}{d\theta} = F(r, \theta) = \frac{r[p(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + q(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta]}{q(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta - p(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta} \quad (2.8)$$

serão denotadas por $r(t, r_0, \theta_0)$ e $\theta(t, r_0, \theta_0)$, com $r(0) = r_0$ e $\theta(0) = \theta_0$.

Escrevendo o sistema de equações diferenciais (2.7) em coordenadas polares vamos revelar

a natureza da singularidade na origem. Isto é ilustrado pelos três exemplos seguintes

Exemplo 2.6. Escreva o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - xy \\ \dot{y} = x + x^2 \end{cases}$$

em coordenadas polares. Para $r > 0$ temos,

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = \frac{-xy - x^2y + xy + x^2y}{r} = 0$$

e

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2} = \frac{x^2 + x^3 + y^2 + xy^2}{r^2} = 1 + x > 0$$

para $x > -1$. Assim, ao longo de qualquer trajetória deste sistema no semi-plano $x > -1$, $r(t)$ é constante e $\theta(t)$ cresce sem limite quando $t \rightarrow \infty$. Isto é, o retrato de fase numa vizinhança da origem é um centro para este sistema não linear.

Exemplo 2.7. Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x^3 - xy^2 \\ \dot{y} = x - y^3 - x^2y \end{cases}$$

em coordenadas polares. Para $r > 0$ temos,

$$\dot{r} = -r^3$$

e

$$\dot{\theta} = 1.$$

Assim, $r(t) = r_0(1 + 2r_0^2t)^{-1/2}$ para $t > -1/(2r_0^2)$ e $\theta(t) = \theta_0 + t$. Vemos que $r(t) \rightarrow 0$ e $\theta(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. O retrato de fase para este sistema não linear em uma vizinhança da origem é um foco estável.

Exemplo 2.8. Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^3 + xy^2 \\ \dot{y} = x + y^3 + x^2y \end{cases}$$

em coordenadas polares. Para $r > 0$ temos,

$$\dot{r} = r^3$$

e

$$\dot{\theta} = 1.$$

Assim, $r(t) = r_0(1 - 2r_0^2 t)^{-1/2}$ para $t < 1/(2r_0^2)$ e $\theta(t) = \theta_0 + t$. Vemos que $r(t) \rightarrow 0$ e $|\theta(t)| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow -\infty$. O retrato de fase para este sistema não linear em uma vizinhança da origem é um foco instável.

Vamos agora dar as definições geométricas precisas de um centro, um centro-foco, um foco estável e instável, um nó estável e instável e de uma sela topológica para o sistema não linear (2.7). Iremos assumir que $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ é uma singularidade isolada do sistema (2.7) que foi transladada para a origem; $r(t, r_0, \theta_0)$ e $\theta(t, r_0, \theta_0)$ vão denotar as soluções do sistema não linear (2.8) com $r(0) = r_0$ e $\theta(0) = \theta_0$.

Definição 2.9. A origem é chamada de centro para o sistema não linear (2.5) se existe um $\delta > 0$ tal que toda trajetória de (2.5) numa determinada vizinhança $N_\delta(0, 0) - \{(0, 0)\}$ é uma curva fechada com $(0, 0)$ no interior.

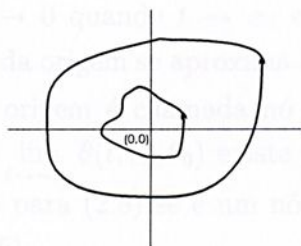


Figura 2.4: centro para (2.5).

Definição 2.10. A origem é chamada de centro-foco para (2.5) se existe uma seqüência de trajetórias fechadas γ_n com γ_{n+1} no interior de γ_n tal que $\gamma_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e tal que toda trajetória entre γ_n e γ_{n+1} se espirala na direção de γ_n ou γ_{n+1} quando $t \rightarrow \pm\infty$.

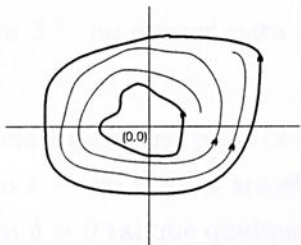


Figura 2.5: centro-foco para (2.5).

Definição 2.11. A origem é chamada de foco estável para (2.5) se existe $\delta > 0$ tal que para $0 < r_0 < \delta$ e $\delta_0 \in \mathbb{R}$, $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$ e $|\theta(t, r_0, \theta_0)| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. É chamado foco instável se $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$ e $|\theta(t, r_0, \theta_0)| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow -\infty$. Qualquer trajetória de (2.5) que satisfaz $r(t) \rightarrow 0$ e $|\theta(t)| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \pm\infty$ é dita espiral na direção da origem quando $t \rightarrow \pm\infty$.

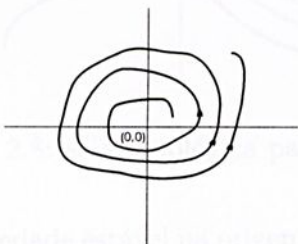


Figura 2.6: foco estável para (2.5).

Definição 2.12. A origem é chamada de nó estável para (2.5) se existe $\delta > 0$ tal que para $0 < r_0 < \delta$ e $\delta_0 \in \mathbb{R}$, $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t, r_0, \theta_0)$ existe; isto é, cada trajetória em uma dada vizinhança da origem se aproxima da origem ao longo de uma tangente bem definida quando $t \rightarrow \infty$. A origem é chamada nó instável se $0 < r_0 < \delta$ e $\delta_0 \in \mathbb{R}$, $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow -\infty$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} \theta(t, r_0, \theta_0)$ existe para qualquer $r_0 \in (0, \delta)$ e $\theta_0 \in \mathbb{R}$. A origem é chamada de nó próprio para (2.5) se é um nó e se todo raio através da origem é tangente a alguma trajetória de (2.5).

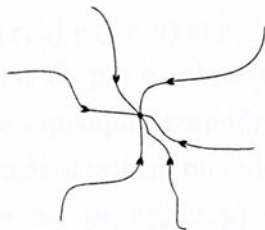


Figura 2.7: nó estável para (2.5).

Definição 2.13. A origem é uma sela topológica para (2.5) se existirem duas trajetórias γ_1 e γ_2 que se aproximam de $(0,0)$ quando $t \rightarrow \infty$ e duas trajetórias γ_3 e γ_4 que se aproximam de $(0,0)$ quando $t \rightarrow -\infty$ e se existir um $\delta > 0$ tal que qualquer outra trajetória que comece numa vizinhança determinada da origem $N_\delta(0,0) - \{(0,0)\}$ afasta-se de $N_\delta(0,0)$ quando $t \rightarrow \pm\infty$. As trajetórias γ_i , $i = 1, \dots, 4$ são chamadas de separatrizes.

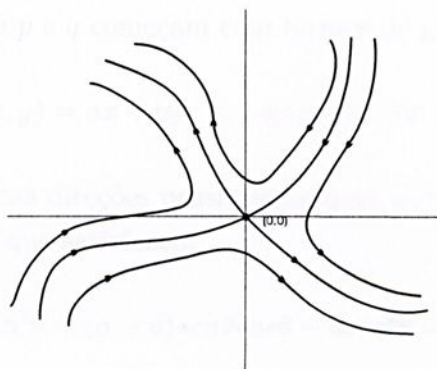


Figura 2.8: sela topológica para (2.5).

Para uma sela topológica, a variedade estável na origem é $S = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{(0, 0)\}$ e a variedade instável na origem é $U = \gamma_3 \cup \gamma_4 \cup \{(0, 0)\}$. Se a trajetória γ_i se aproxima da origem ao longo de um raio fazendo um ângulo θ_i com o eixo- x onde $\theta_i \in]-\pi, \pi]$, para $i = 1, \dots, 4$, então $\theta_2 = \theta_1 \pm \pi$ e $\theta_4 = \theta_3 \pm \pi$. Isto segue por considerarmos as possíveis direções nas quais a trajetória de (2.5), escritas em formas polares (2.7), pode se aproximar da origem.

Os seguintes teoremas, provados em [A], são úteis nesta observação. O primeiro teorema é devido a Bendixson [B].

Teorema 2.14 (Bendixson). Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial polinomial. Se a origem é uma singularidade isolada de (2.5), então ou toda vizinhança da origem contém uma trajetória fechada com $(0, 0)$ no seu interior ou existe uma trajetória se aproximando de $(0, 0)$ quando $t \rightarrow \pm\infty$.

Teorema 2.15. Suponhamos que $p(x, y)$ e $q(x, y)$ em (2.6) sejam polinômios de x e y contendo a origem e que a Expansão de Taylor de p e q sobre $(0, 0)$ comecem com termos de grau m $p_m(x, y)$ e $q_m(x, y)$ com $m \geq 1$. Então qualquer trajetória de (2.6) que se aproxima da origem quando $t \rightarrow \infty$ ou se espirala em direção à origem quando $t \rightarrow \infty$ ou tende para a origem numa direção definida $\theta = \theta_0$ quando $t \rightarrow \infty$. Se $xq_m(x, y) - yp_m(x, y)$ não é identicamente nulo, então todas as direções, θ_0 , satisfazem a equação

$$\cos\theta_0 q_m(\cos\theta_0, \sin\theta_0) - \sin\theta_0 p_m(\cos\theta_0, \sin\theta_0) = 0.$$

Além disso, se uma trajetória de (2.6) se espiraliza em direção à origem quando $t \rightarrow \infty$ então todas as trajetórias de (2.6) numa determinada vizinhança da origem se espiralizam na direção de $(0, 0)$ quando $t \rightarrow \infty$.

Segue deste teorema que se p e q começam com termos de grau um, isto é,

$$p_1(x, y) = ax + by \quad \text{e} \quad q_1(x, y) = cx + dy$$

com $a, b, c, d \neq 0$, então as únicas direções possíveis na qual as trajetórias podem se afastar da origem são dadas por direções que satisfazem

$$bsen^2\theta + (a - d)sen\theta cos\theta - acos^2\theta = 0. \quad (2.9)$$

Para $cos\theta \neq 0$, isto é, se $b \neq 0$, esta equação é equivalente a

$$btg^2\theta + (a - d)tg\theta - c = 0. \quad (2.10)$$

Esta equação tem ao menos duas soluções $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e se $\theta = \theta_1$ é uma solução, então $\theta = \theta_1 \pm \pi$ também são soluções. Encontrar as soluções de (2.10) é equivalente a encontrar as direções determinadas pelos autovetores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

O próximo teorema segue imediatamente do Teorema da Variedade Estável e do Teorema de Grobman-Hartman. Ele estabelece que se a origem é um ponto hiperbólico para o sistema não linear (2.5), então existe uma sela topológica para (2.5) se, e somente se, é uma sela para a sua linearização na origem. Além disso, as direções θ_j ao longo de cada separatriz γ_j que se afasta da origem são soluções de (2.9).

Teorema 2.16. Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo polinomial vetorial do sistema não linear (2.5), com a origem sendo uma singularidade hiperbólica. Então a origem é uma sela topológica para (2.5) se, e somente se, a origem é uma sela para o sistema linear (2.4) com $A = JX(0, 0)$.

Exemplo 2.17. De acordo com o teorema anterior, a origem é uma sela topológica ou uma sela para o sistema não linear

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 3x + 4y - 2xy \end{cases}$$

visto que o determinante da parte linear é -2 . Além disso, as direções nas quais as separatrizes se aproximam da origem quando $t \rightarrow \pm\infty$ são dados pelas soluções de (2.10):

$$2tg^2\theta - 3tg\theta - 3 = 0$$

isto é,

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{3 \pm \sqrt{33}}{4} \right)$$

e temos $\theta_1 \simeq 65,42^\circ$, $\theta_3 \simeq 34,46^\circ$. Em qualquer ponto do eixo positivo x perto da origem, o campo de vetores é definido por este sistema de pontos acima. Desde que $\dot{y} > 0$. Isto determina as direções do fluxo definido pelo sistema acima. O retrato de fase local para a parte linear deste campo de vetores, bem como a parte não linear, está mostrado na figura abaixo.

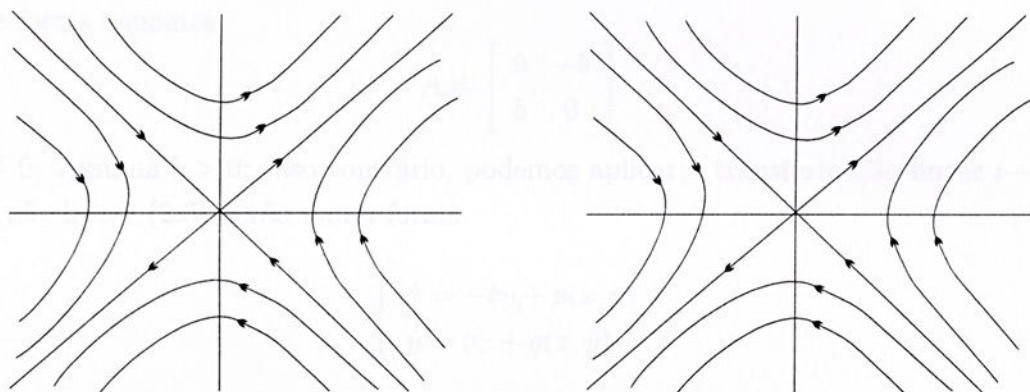


Figura 2.9: Uma sela para o sistema linear e uma sela topológica para o sistema não linear no exemplo 2.17.

O comportamento qualitativo numa vizinhança da origem é o mesmo para cada sistema.

O próximo teorema, provado em [A], mostra que como $p(x, y)$ e $q(x, y)$ são dois polinômios e por isso tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas numa vizinhança da origem, podemos notar que nós e focos de um sistema linear persistem com a adição de termos não lineares.

Teorema 2.18. Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial polinomial. Suponhamos que a origem é uma singularidade hiperbólica de (2.5). A origem é um nó estável (instável) para o sistema não linear (2.5) se, e somente se, é um nó estável (instável) para o sistema linear (2.4) com $A = JX(0, 0)$. E a origem é um foco estável (instável) para o sistema não linear (2.5) se, e somente se, é um foco estável (instável) para o sistema linear (2.4) com $A = JX(0, 0)$.

Observação 2.19. De acordo com o teorema anterior, segue que a origem é um nó próprio para o sistema não linear (2.5) se, e somente se, é um nó próprio para o sistema linear (2.4) com $A = JX(0, 0)$.

Os exemplos de 2.5 a 2.7 acima mostram que um centro para um sistema linear pode tanto continuar um centro quanto pode se tornar um foco estável ou instável com a adição de um

termo não linear. Além disso, podemos encontrar exemplos onde a adição de termos não lineares faz com que o centro se torne um centro-foco; e o próximo teorema mostra que estas são as únicas possibilidades. (Provado em [P])

Teorema 2.20. Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial polinomial com $X(0,0) = (0,0)$. Suponhamos que a origem é um centro para o sistema linear (2.4) com $A = JX(0,0)$. Então a origem pode ser um centro, um centro-foco, ou um foco para o sistema não linear (2.5).

Demonstração: Podemos assumir que a matriz $A = JX(0,0)$ tenha sido transformada na seguinte forma canônica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

com $b \neq 0$. Assuma $b > 0$; caso contrário, podemos aplicar a transformação linear $t \rightarrow -t$. O sistema não linear (2.6) então tem a forma

$$\begin{cases} \dot{x} = -by + p(x, y) \\ \dot{y} = bx + q(x, y) \end{cases}$$

Como X é diferenciável, segue que $\left| \frac{p(x,y)}{r} \right| \rightarrow 0$ e $\left| \frac{q(x,y)}{r} \right| \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$; isto é, $p = O(r)$ e $q = O(r)$ quando $r \rightarrow 0$. Assim, em coordenadas polares temos,

$$\dot{r} = O(r) \text{ e } \dot{\theta} = b + O(r)$$

quando $r \rightarrow 0$. Por isso, existe um $\delta > 0$ tal que $\dot{\theta} \geq \frac{b}{2} > 0$ para $0 < r < \delta$. Assim, para $0 < r_0 < \delta$ e $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $\theta(t, r_0, \theta_0) \geq \frac{bt}{2} + \theta_0 \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$; e $\theta(t, r_0, \theta_0)$ é uma função monótona crescente de t . Seja $t = h(\theta)$ a inversa desta função monótona. Defina $\tilde{r}(\theta) = r(h(\theta), r_0, \theta_0)$ para $0 < r_0 < \delta$ e $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Então $\tilde{r}$ satisfaz a equação diferencial (2.8) que tem a seguinte forma

$$\frac{dr}{d\theta} = F(r, \theta) = \frac{\cos\theta p(\tilde{r}\cos\theta, \tilde{r}\sin\theta) + \sin\theta q(\tilde{r}\cos\theta, \tilde{r}\sin\theta)}{b + (\cos\theta/\tilde{r})q(\tilde{r}\cos\theta, \tilde{r}\sin\theta) - (\sin\theta/\tilde{r})p(\tilde{r}\cos\theta, \tilde{r}\sin\theta)}.$$

Suponha que a origem não é um centro nem um centro-foco para o sistema (2.6). Então para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, não existem trajetórias fechadas de (2.6) numa determinada vizinhança $N_\delta(0,0) - \{(0,0)\}$. Assim, para $0 < r_0 \leq \delta$ e $\theta_0 \in \mathbb{R}$, tanto $\tilde{r}(\theta_0 + 2\pi) < \tilde{r}(\theta_0)$ quanto $\tilde{r}(\theta_0 + 2\pi) > \tilde{r}(\theta_0)$. Vamos assumir que o primeiro caso ocorre. O segundo caso é tratado de maneira semelhante. Se $\tilde{r}(\theta_0 + 2\pi) < \tilde{r}(\theta_0)$ então $\tilde{r}(\theta_0 + 2k\pi) < \tilde{r}(\theta_0 + 2(k-1)\pi)$ para $k = 1, 2, 3, \dots$. Por outro lado, teremos três trajetórias de (2.6) passando pelo mesmo ponto, o que é impossível. A sequência $\tilde{r}(\theta_0 + 2k\pi)$ é monótona decrescente e limitada inferiormente

por zero; além disso, o seguinte limite existe e é não negativo:

$$\tilde{r}_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{r}(\theta_0 + 2k\pi).$$

Se $\tilde{r}_1 = 0$, então $\tilde{\theta} \rightarrow 0$ quando $\theta \rightarrow \infty$; isto é, $r(t, r_0, \theta_0) \rightarrow 0$ e $\theta(t, r_0, \theta_0) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$ e a origem é um foco estável para (2.6). Se $\tilde{r}_1 > 0$, então tomando $|\tilde{F}(r, \theta)| \leq M$ para $0 \leq r \leq \delta$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, a sequência $\tilde{r}(\theta_0 + \theta + 2k\pi)$ é equicontínua em $[0, 2\pi]$.

Além disso, pelo Lema de Áscoli e pelo Teorema 7.25 em [R] existe uma subsequência convergente uniforme $\tilde{r}(\theta_0 + \theta + 2k\pi)$ convergindo para uma solução $\tilde{r}_1(\theta)$ que satisfaz $\tilde{r}_1(\theta) = \tilde{r}_1(\theta_0 + 2k\pi)$; isto é, $\tilde{r}_1(\theta)$ é uma solução periódica não nula de (2.8). Isto contradiz o fato de que não existem trajetórias de (2.6) em $N_\delta(0, 0) - \{(0, 0)\}$ quando a origem não é um centro ou um centro foco de (2.6). Portanto, a origem não é um centro ou um centro-foco de (2.6), $\tilde{r}_1 = 0$ e a origem é um foco para (2.6). ■

Definição 2.21. O sistema (2.6) é dito simétrico com respeito ao eixo- x se ele é invariante pela transformação $(t, y) \rightarrow (-t, -y)$, em outras palavras, $\varphi(t, (x, y)) = -\varphi(-t, (x, -y))$; ele é simétrico com respeito ao eixo- y se ele é invariante pela transformação $(t, x) \rightarrow (-t, -x)$, em outras palavras, $\varphi(t, (x, y)) = -\varphi(-t, (-x, y))$.

Note que o sistema no exemplo (2.4) é simétrico com respeito ao eixo- x , mas não com respeito ao eixo- y .

Teorema 2.22. Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial polinomial com $X(0, 0) = (0, 0)$. Se o sistema não linear (2.5) é simétrico com respeito ao eixo- x ou ao eixo- y , e se a origem é um centro para o sistema linear (2.4) com $A = JX(0, 0)$, então a origem é um centro para o sistema não linear (2.5).

A idéia da prova deste teorema que pode ser vista em [Pe] é a mesma do teorema anterior: qualquer trajetória de (2.6) em $N_\delta(0, 0)$ que cruza o eixo positivo x vai sempre cruzar o eixo negativo x . Se o sistema (2.6) é simétrico com respeito ao eixo- x , então as trajetórias de (2.6) em $N_\delta(0, 0)$ vão ser simétricas com respeito ao eixo- x e daí, todas as trajetórias de (2.6) em $N_\delta(0, 0)$ vão ser fechadas; isto é, a origem vai ser um centro para (2.6).

2.2.2 Singularidades Não Hiperbólicas no $\mathbb{R}^2$

Nesta seção vamos apresentar alguns resultados sobre singularidades não hiperbólicas de sistemas planares. Este trabalho originou-se com Poincaré [P] e foi estendido por Bendixson [B] e mais recentemente por Andronov em [A]. Vamos assumir que a origem é uma singularidade isolada do sistema planar

$$\begin{cases} \dot{x} = p(x, y) \\ \dot{y} = q(x, y) \end{cases} \quad (2.11)$$

onde p e q são polinômios. Aqui daremos alguns resultados estabelecidos em [A] para o caso em que a matriz $A = JX(0, 0)$ tenha um ou dois autovalores zero, mas $A \neq 0$.

Primeiramente, notemos que se p e q começam com termos de grau m , p_m e q_m , então segue do teorema 2.15 da subseção anterior que se a função

$$g(\theta) = \cos\theta q_m(\cos\theta, \sin\theta) - \sin\theta p_m(\cos\theta, \sin\theta)$$

não é identicamente nula, então existe ao menos $2(m+1)$ direções $\theta = \theta_0$ tangenciando trajetórias que se aproximam da origem. Estas direções são dadas por soluções da equação $g(\theta) = 0$. Suponhamos que $g(\theta)$ não é identicamente nula, então as trajetórias de (2.11) que se aproximam da origem ao longo destas linhas tangentes dividem a vizinhança da origem em um número finito de regiões abertas chamadas *setores*. Estes setores serão de três tipos e vamos descrevê-los em definições mais à frente. As trajetórias que "morrem" nas limitações de um setor hiperbólico são chamadas *separatrizes*.

Definição 2.23. Um setor que é topologicamente equivalente ao setor da figura na parte (a) é chamado de setor hiperbólico. Um setor que é topologicamente equivalente ao setor mostrado na figura na parte (b) é chamado de setor elíptico. E um setor que é topologicamente equivalente ao setor mostrado na figura na parte (c) é chamado de setor parabólico.



Figura 2.10: (a) um setor hiperbólico. (b) um setor elíptico. (c) setores parabólicos.

Na "definição" acima, o homeomorfismo estabelecendo a equivalência topológica de um dos setores da figura (2.11) não precisa preservar a direção do fluxo; isto é, cada setor da figura (2.11) com as flechas reversas são setores do mesmo tipo. Por exemplo, a sela tem uma determinada vizinhança consistindo de quatro setores hiperbólicos e quatro separatrizes. E um nó próprio

tem uma determinada vizinhança consistindo de um setor parabólico. De acordo com o teorema 2.14 da subseção anterior, o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^3 + 4xy \end{cases}$$

tem um setor hiperbólico na origem. O retrato de fase para este sistema é mostrado na figura 2.11. Toda trajetória que se aproxima da origem é tangente ao eixo- x .

Uma vizinhança próxima da origem consiste de um setor elíptico, um setor hiperbólico, dois setores parabólicos e quatro separatrizes. Este tipo de singularidade é chamada *singularidade com um domínio elíptico*.

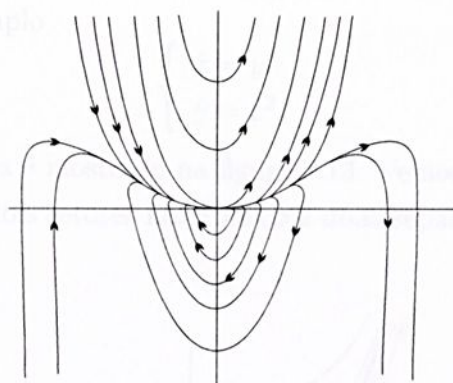


Figura 2.11: Uma singularidade com um domínio elíptico na origem.

Um outro tipo de singularidade não hiperbólica para um sistema planar é uma *sela-nó*. Uma sela-nó consiste de dois setores hiperbólicos e um setor parabólico (bem como três separatrizes e a singularidade por si mesma). De acordo com o teorema 2.13 anterior, o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

tem uma sela-nó na origem. Mesmo sem o teorema 2.13, este sistema é de fácil discussão pois ele pode ser resolvido de forma explícita $x(t) = \left(\frac{1}{x_0 - t}\right)$ e $y(t) = y_0 e^t$. O retrato de fase deste sistema é mostrado na figura 2.12 abaixo.

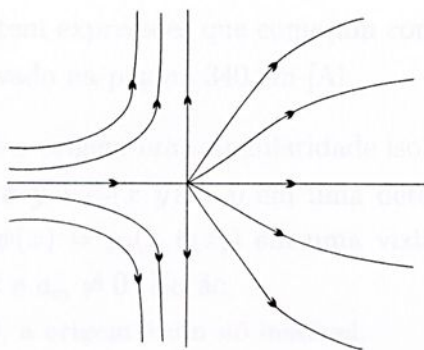


Figura 2.12: Uma sela-nó na origem.

Um outro tipo de comportamento que pode ocorrer em uma singularidade não hiperbólica é ilustrado pelo seguinte exemplo

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 \end{cases}$$

O retrato de fase deste sistema é mostrado na figura 2.13. Vemos que uma determinada vizinhança da origem consiste de dois setores hiperbólico e duas separatrizes. Este tipo de singularidade é chamada de *cúspide*.

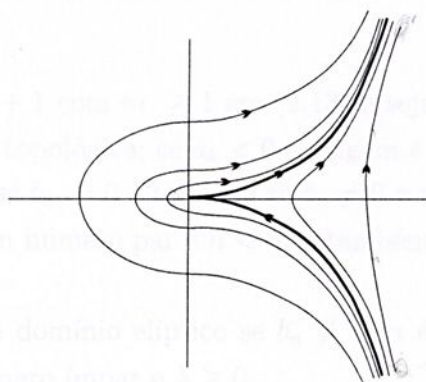


Figura 2.13: Uma cúspide na origem.

Como podemos ver, além dos tipos familiares de singularidades para sistemas polinomiais planares discutidos na subseção anterior, isto é, focos, nós, selas topológicas e centros, os outros únicos tipos de singularidades que podem ocorrer para (2.11) quando $A \neq 0$ são selas-nó, singularidades com domínios elípticos e cúspides. Primeiramente consideramos o caso em que a matriz A tenha autovalores diferentes de zero, isto é, quando $\det A = 0$, mas $\text{tr} A \neq 0$. Neste caso e como mostrado em [A] na pag 338, o sistema (2.11) pode ser colocado na forma,

$$\begin{cases} \dot{x} = p_2(x, y) \\ \dot{y} = y + q_2(x, y) \end{cases} \quad (2.12)$$

onde p_2 e q_2 são polinômios e tem expressões que começam com termos de segundo grau em x e y . O próximo teorema é provado na página 340 em [A].

Teorema 2.24. Consideremos a origem uma singularidade isolada para o sistema (2.12). Seja $y = \theta(x)$ a solução da equação $y + q_2(x, y) = 0$ em uma determinada vizinhança da origem e seja a expansão da função $\psi(x) = p_2(x, \theta(x))$ em uma vizinhança de $x = 0$ com a forma $\psi(x) = a_m x^m + \dots$ onde $m \geq 2$ e $a_m \neq 0$. Então,

- (1) para m ímpar e $a_m > 0$, a origem é um nó instável,
- (2) para m ímpar e $a_m < 0$, a origem é uma sela topológica,
- (3) para m par, a origem é uma sela-nó.

Agora, vamos considerar o caso em que A tenha dois autovalores nulos, isto é, $\det A = 0$, $\text{tr} A = 0$, mas $A \neq 0$. Neste caso é mostrado em [A], pg.356, que o sistema (2.11) pode ser colocado na forma matricial,

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = a_k x^k [1 + h(x)] + b_n x^n y [1 + g(x)] + y^2 R(x, y) \end{cases} \quad (2.13)$$

onde $h(0) = g(0) = 0$, $k \geq 2$, $a_k \neq 0$ e $n \geq 1$. Os dois próximos teoremas estão provados nas pgs.357 – 362 em [A].

Teorema 2.25. Seja $k = 2m + 1$ com $m \geq 1$ em (2.13) e seja $\lambda = b_n^2 + 4(m + 1)a_k$. Então, se $a_k > 0$ a origem é uma sela topológica; se $a_k < 0$ a origem é

- (1) um foco ou um centro se $b_m = 0$ e também se $b_n \neq 0$ e $n > m$ ou se $n = m$ e $\lambda < 0$,
- (2) um nó se $b_n \neq 0$, n é um número par e $n < m$ e também se $b_n \neq 0$, n é um número par, $n = m$ e $\lambda \geq 0$,
- (3) uma singularidade com domínio elíptico se $b_n \neq 0$, n é um número ímpar e $n < m$ e também se $b_n \neq 0$, n é um número ímpar e $\lambda \geq 0$.

Teorema 2.26. Seja $k = 2m$ com $m \geq 1$ em (2.13). Então a origem é

- (1) uma cúspide se $b_n = 0$ e também se $b_n \neq 0$ e $n \geq m$,
- (2) uma sela-nó se $b_n \neq 0$ e $n < m$.

Vimos que se $JX(0, 0)$ tem um autovalor zero, então a singularidade (x_0, y_0) é um nó, uma sela topológica, ou uma sela-nó; e se $JX(0, 0)$ tem dois autovalores zero, então a singularidade (x_0, y_0) é um foco, um centro, um nó, uma sela topológica, uma sela-nó, uma cúspide, ou uma singularidade com domínio elíptico.

Finalmente, e se a matriz $A = 0$? Neste caso, o comportamento próximo da origem pode ser muito complexo. Se p e q começam com termos de grau m , então as separatrizes podem



dividir uma vizinhança da origem em $2(m + 1)$ setores de vários tipos. O número de setores elípticos menos o número de setores hiperbólicos é sempre um número par.

Por exemplo, o sistema quadrático homogêneo

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + xy \\ \dot{y} = \frac{1}{2}y^2 + xy \end{cases}$$

tem o retrato de fase mostrado na figura 2.14 abaixo. Existem dois setores elípticos e dois setores parabólicos na origem. Todos os tipos possíveis de retratos de fase para sistemas quadráticos homogêneos foram classificados pelo matemático russo L.S. Lyagina [Ly]. Para maiores informações sobre o assunto, ver [N/S].

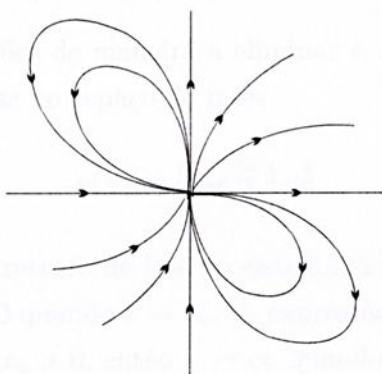


Figura 2.14: Uma singularidade não-hiperbólica com dois setores elípticos e dois setores parabólicos.

2.3 Teoria da Variedade Central

Vamos agora adicionar um resultado importante que estabelece a existência de uma variedade central $W^C(0,0)$ tangente a E^C na origem.

Teorema 2.27 (Variedade Central). Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial polinomial. Suponhamos que $X(0,0) = (0,0)$ e que $JX(0,0)$ tem k autovalores com parte real negativa; j autovalores com parte real positiva e $m = 2 - k - j$ autovalores com parte real zero. Então existe uma variedade central m -dimensional $W^C(0,0)$ tangente ao subespaço central E^C do sistema não linear (2.5) em $(0,0)$, uma variedade estável k -dimensional $W^S(0,0)$ tangente ao subespaço estável E^S do sistema não linear (2.5) em $(0,0)$ e uma variedade instável j -dimensional $W^U(0,0)$ tangente ao subespaço instável E^U do sistema não linear (2.5) em $(0,0)$. Além disso, $W^C(0,0)$, $W^S(0,0)$ e $W^U(0,0)$ são invariantes pelo fluxo φ do sistema linear (2.4).

Exemplo 2.28. Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (2.14)$$

Cada equação deste sistema pode ser integrada separadamente, a partir das condições iniciais $x(0) = x_0$ e $y(0) = y_0$, resultando nas soluções

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$$

e

$$y(t) = y_0 e^{-t}.$$

Combinando estas duas expressões de maneira a eliminar t , obtemos a fórmula $y = y(x)$, que resultam nas trajetórias descritas no espaço de fases

$$y(x) = \left(y_0 e^{\frac{-1}{x_0}} \right) e^{\frac{1}{x}}.$$

Essa fórmula permite esboçar o retrato de fase do sistema (2.14). A expressão $y(t)$ mostra que para qualquer valor de y_0 , $y \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. A expressão $x(t)$ revela que se $x_0 < 0$, temos que $x \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$; e se $x_0 > 0$, então $x \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \frac{1}{x_0}$.

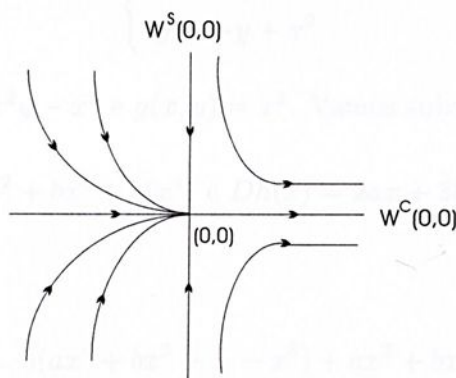


Figura 2.15: retrato de fase do sistema (2.14).

A singularidade desse sistema é o ponto $(0, 0)$. A matriz jacobiana calculada nesse ponto é tal que os autovalores são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$. Portanto, como existe um autovalor com parte real nula, não deve haver equivalência topológica com relação ao sistema linear correspondente.

Teorema 2.29 (Variedade Central Local). Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial polinomial. Suponhamos que $X(0, 0) = (0, 0)$ e que $JX(0, 0)$ tenha um autovalor nulo e um autovalor

negativo. Como $(\dot{x}, \dot{y}) = X(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$, temos

$$\begin{cases} \dot{x} = p(x, y) \\ \dot{y} = q(x, y) \end{cases}$$

mas ele pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = -\alpha y + g(x, y) \end{cases} \quad (2.15)$$

onde $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$.

Além disso, existe $h \in C^w(V_\delta(0, 0))$ que define a variedade central local $W^C_{loc}(0, 0) = \{(x, y)/y = h(x), |x| < \delta\}$ e satisfaz

$$h'(x)[f(x, h(x))] + \alpha h(x) - g(x, h(x)) = 0 \quad (2.16)$$

com fluxo na variedade central

$$\dot{x} = f(x, h(x)). \quad (2.17)$$

Exemplo 2.30. Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 y - x^5 \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases}.$$

Neste caso, temos $f(x, y) = x^2 y - x^5$ e $g(x, y) = x^2$. Vamos substituir a expansão

$$h(x) = ax^2 + bx^3 + o(x^4) \text{ e } Dh(x) = 2ax + 3bx^2 + o(x^3)$$

na equação (2.16) para obter

$$(2ax + 3bx^2 + \dots)(ax^4 + bx^3 + \dots - x^5) + ax^2 + bx^3 + \dots - x^2 = 0$$

Fixando os coeficientes de mesmo grau de x igual a zero, segue que $a - 1 = 0$, $b = 0$, $c = 0$, ...
Então,

$$h(x) = x^2 + o(x^5).$$

Substituindo este resultado na equação (2.17), temos então

$$\dot{x} = x^4 + o(x^5).$$

Capítulo 3

Blow-up Polar e Blow-up Direcional

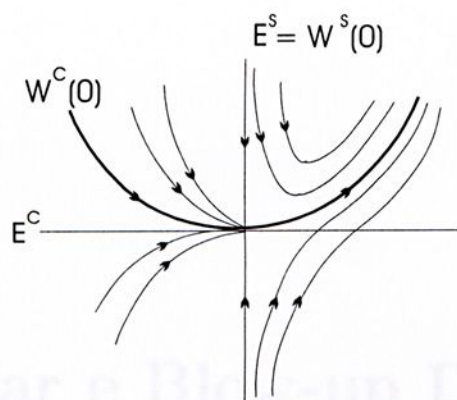


Figura 2.16: retrato de fase do sistema do exemplo 2.30.

No estudo das singularidades existe uma técnica poderosa, o "blow-up". O "blow-up" é utilizado quando temos singularidades não isoladas, isto é, quando analisamos as singularidades de um campo de vetores em torno de uma curva ou superfície. Ele também serve para analisar o comportamento central das trajetórias em relação a uma curva ou superfície. A ideia é "esticar" o espaço em torno da singularidade, permitindo uma análise mais detalhada do comportamento do campo de vetores.

Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores tal que $X(0,0) = (0,0)$. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : S^1 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, r) &\mapsto (rx, ry). \end{aligned}$$

Então podemos definir um campo de vetores $\tilde{X}$ em $S^1 \times \mathbb{R}$ tal que $\Phi_* \tilde{X} = X$, de modo que $(\Phi_* \tilde{X})(\Phi(x, r)) = X(\Phi(x, r))$. Isto é, o campo de vetores $\tilde{X}$ em $S^1 \times \mathbb{R}$ é tal que $\tilde{X}(\Phi(x, r)) = X(\Phi(x, r))$. Não é nada mais do que $\tilde{X}$ escrito em coordenadas polares. Se $\tilde{X}(\Phi(x, r)) = (0,0)$, então $X(\Phi(x, r)) = (0,0)$. Se $\tilde{X}(\Phi(x, r)) \neq (0,0)$, então $X(\Phi(x, r)) \neq (0,0)$.

Na prática, contudo, em vez de Φ , usamos a aplicação $\tilde{\Phi} : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

Na direção radial:

$$(\tilde{\Phi}_r, \tilde{\Phi}_\theta) = (x, y) \quad (3.1)$$

Na direção angular:

$$(\tilde{\Phi}_r, \tilde{\Phi}_\theta) = (x, y) \quad (3.2)$$

Quando $r \neq 0$, (3.1) é o mesmo que (3.2). Quando $r = 0$, (3.1) é a identidade e (3.2) é a projeção de S^1 sobre $\mathbb{R}^2$.

$$(\tilde{\Phi}_r, \tilde{\Phi}_\theta) = (x, y) \mapsto (rx, ry) \mapsto (rx, ry) = (x, y).$$

Capítulo 3

Blow-up Polar e Blow-up Direcional

No estudo das singularidades existe uma técnica poderosa, o “blow-up”. O “blow-up” é utilizado quando temos singularidades não elementares, isto é, quando ambos os autovalores são nulos e o princípio de redução ao comportamento central não se aplica. Ele também serve para estudar pontos fixos de difeomorfismos, mas vamos apresentar essencialmente para singularidades de campos de vetores.

Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial polinomial com $X(0,0) = (0,0)$. Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned}\Phi : S^1 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\theta, r) &\mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta).\end{aligned}$$

Então podemos definir um campo de vetores $\hat{X}$ em $S^1 \times \mathbb{R}$ com $\Phi_*(\hat{X}) = X$, de modo que $D\Phi_*(\hat{X}(\theta, r)) = X(\Phi(\theta, r))$. Isto é chamado de *pull back* de X por Φ . Não é nada mais do que X escrito em coordenadas polares. Se o k -jato (polinômio de Taylor de ordem k) $j_k(X(0,0))$ é zero, então $j_k(\hat{X}(\theta, 0)) = (0,0)$ para qualquer $(\theta, 0) \in S^1 \times \{0\}$.

Na prática, contudo, em vez de utilizarmos coordenadas polares, usamos o chamado “blow-up” direcional.

Na direção do eixo- x :

$$(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}\bar{x}) \text{ denotado por } \hat{X}^x. \quad (3.1)$$

Na direção do eixo- y :

$$(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (\bar{x}\bar{y}, \bar{y}) \text{ denotado por } \hat{X}^y. \quad (3.2)$$

Quando $\{x \neq 0\}$, (3.1) é o mesmo que o “blow-up” polar, a menos de uma mudança analítica de coordenadas: $\theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

$$(\theta, r) \rightarrow (r\cos\theta, tg\theta) \rightarrow (r\cos\theta, tg\theta r\cos\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Quando $\{y \neq 0\}$, (3.2) também será o mesmo que o “blow-up” polar, a menos de uma mudança analítica de coordenadas: $\theta \neq 0, \pi$.

$$(\theta, r) \rightarrow (\cot g \theta, r \operatorname{sen} \theta) \rightarrow (\cot g \theta r \operatorname{sen} \theta, r \operatorname{sen} \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta).$$

Neste caso, com $j_k(X(0,0)) = (0,0)$ e $j_{k+1}(X(0,0)) \neq (0,0)$ podemos ganhar informações considerando $\bar{X}$ como

$$\bar{X} = \frac{1}{r^k} \hat{X}.$$

Então $\bar{X}$ também é um campo de vetores sobre $S^1 \times \mathbb{R}$. Esta divisão não altera as órbitas de $\hat{X}$, nem os seus sentidos, mas somente a parametrização por t .

Para o “blow-up” direcional usamos $\frac{1}{\hat{x}^k} \hat{X}^x$ no caso (3.1) e $\frac{1}{\hat{y}^k} \hat{X}^y$ no caso (3.2). Quando $\{x \neq 0\}$, $\frac{1}{\hat{x}^k} \hat{X}$ e $\frac{1}{\hat{x}^k} \hat{X}^x$ são os mesmos a menos de uma mudança analítica de coordenadas e de uma multiplicação por uma função analítica positiva.

Vamos analisar dois exemplos.

Exemplo 3.1. Neste exemplo, onde vamos utilizar um “blow-up”, obteremos facilmente o retrato de fase numa vizinhança da singularidade.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 2xy \\ \dot{y} = y^2 - xy \end{cases} \quad (3.3)$$

Tomando $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$, no sistema acima, teremos

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta \dot{\theta} \\ \dot{y} = \dot{r} \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta \dot{\theta} \end{cases} \quad (3.4)$$

Agora substituindo $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$ no sistema (3.3), teremos

$$\begin{cases} \dot{x} = r^2 \cos^2 \theta - 2r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta \\ \dot{y} = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta - r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \end{cases} \quad (3.5)$$

Assim, igualando (3.4) a (3.5), temos

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta \dot{\theta} = r^2 \cos^2 \theta - 2r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta \\ \dot{r} \operatorname{sen} \theta + r \cos \theta \dot{\theta} = r^2 \operatorname{sen}^2 \theta - r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \end{cases}.$$

O que precisamos é encontrar $\dot{r}$ e $\dot{\theta}$. Para encontrarmos $\dot{r}$ multiplicamos a primeira equação acima por $\cos \theta$ e a segunda por $\operatorname{sen} \theta$. E para encontrarmos $\dot{\theta}$ multiplicamos a primeira equação



por $\text{sen}\theta$ e a segunda equação por $-\cos\theta$. Assim, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \cos\theta \text{sen}\theta (3\text{sen}\theta - 2\cos\theta) \\ \dot{r} = (\cos^3\theta - 2\cos^2\theta \text{sen}\theta - \cos\theta \text{sen}^2\theta + \text{sen}^3\theta)r \end{cases}$$

Vamos analisar as singularidades. As singularidades com $r = 0$ estão localizados em $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e $\text{tg}\theta = \frac{2}{3}$.

De fato, quando $r = 0$, temos

$$\theta = 0, \pi \Rightarrow \cos\theta \text{sen}\theta (3\text{sen}\theta - 2\cos\theta) = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2} \text{sen}\frac{\pi}{2} (3\text{sen}\frac{\pi}{2} - 2\cos\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$\theta \neq 0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta \text{sen}\theta (3\text{sen}\theta - 2\cos\theta) = 0 \Rightarrow 3\text{sen}\theta = 2\cos\theta \Rightarrow \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = \text{tg}\theta = \frac{2}{3}.$$

Agora, como $\text{tg}\theta = \frac{2}{3}$, temos que os valores destes ângulos, em radianos, são: $\theta = 0,5880$ ou $\theta = 3,7295$.

O autovalor relacionado à direção r é dito *radial* e à direção θ *angular*. Eles são obtidos encontrando a matriz jacobiana $JX(r, \theta)$, para todos os valores de θ obtidos de (3.1) e (3.2) e com $r = 0$ anteriores. Vamos calcular, primeiramente $JX(0, \theta)$ e depois substituímos os valores de θ que temos:

$$JX(0, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial r} & \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^3\theta - 2\cos^2\theta \text{sen}\theta - \cos\theta \text{sen}^2\theta + \text{sen}^3\theta & 0 \\ 0 & -3\text{sen}^3\theta + 6\cos^2\theta \text{sen}\theta + 4\cos\theta \text{sen}^2\theta - 2\cos^3\theta \end{bmatrix}.$$

Para $\theta = 0$, temos:

$$JX(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Para $\theta = \frac{\pi}{2}$, temos:

$$JX\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Para $\theta = \pi$, temos:

$$JX(0, \pi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para $\theta = \frac{3\pi}{2}$, temos:

$$JX\left(0, \frac{3\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Para $\theta = 0,5880$, temos:

$$JX(0; 0,5880) = \begin{bmatrix} -0,33 & 0 \\ 0 & 1,66 \end{bmatrix}.$$

Para $\theta = 3,7295$, temos:

$$JX(0; 3,7295) = \begin{bmatrix} 0,33 & 0 \\ 0 & -1,66 \end{bmatrix}.$$

Assim encontramos,

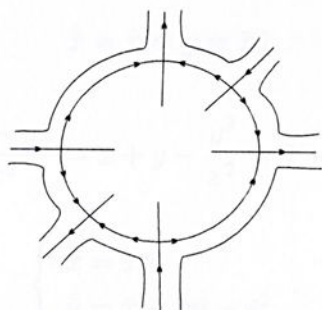


Figura 3.1: retrato de fase após o “blow-up”.

A figura 3.2 representa o retrato de fase após o “blow-down”. Todas as singularidades são hiperbólicas, tipo sela.

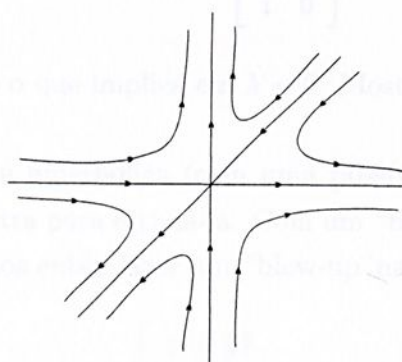


Figura 3.2: retrato de fase após o “blow-down”.

Agora vamos exibir um exemplo onde um “blow-up” não é suficiente para desingularizar a singularidade, mas onde nós precisamos repetir a construção (“blow-up” sucessivo).

Exemplo 3.2. Consideremos o sistema não linear

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 + xy \end{cases}.$$

Um “blow-up” na direção do eixo- y não vai gerar nenhuma singularidade em $\{y = 0\}$; na verdade, as singularidades (assim como seus autovalores) dependem somente do 1-jato não nulo, portanto em $\dot{x} = y$. Nós iremos realizar um “blow-up” na direção do eixo- x , ou seja, vamos tomar

$$\begin{cases} x = \bar{x} \\ y = \bar{y}\bar{x} \end{cases}.$$

Vamos encontrar então $\dot{\bar{x}}$ e $\dot{\bar{y}}$ a partir desta mudança.

Assim,

$$\dot{\bar{x}} = \dot{x} = y = \bar{x}\bar{y}$$

e

$$\dot{\bar{y}} = \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2} = x + y - \frac{y^2}{x^2} = \bar{x} + \bar{x}\bar{y} - \bar{y}^2.$$

Logo, temos

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{x}\bar{y} \\ \dot{\bar{y}} = \bar{x} + \bar{x}\bar{y} - \bar{y}^2 \end{cases}.$$

Vamos analisar as singularidades. Para $\bar{y} = 0$, temos que $\bar{x} = 0$ e para $\bar{x} = 0$ temos que $\bar{y} = 0$. Portanto a única singularidade é $(0, 0)$. Assim,

$$J\bar{X}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e os autovalores são $\lambda^2 - 0 = 0$ o que implica em $\lambda = 0$. Mostrando que a singularidade não é elementar.

Como a singularidade não é hiperbólica (com uma possível redução à variedade central) vamos realizar um “blow-up” extra para estudá-la. Com um “blow-up” na direção do eixo- x não obteremos singularidades. Vamos então fazer um “blow-up” na direção do eixo- y , tomando

$$\begin{cases} \bar{x} = \bar{y}\bar{\bar{x}} \\ \bar{y} = \bar{y} \end{cases}.$$

Vamos encontrar então $\dot{\bar{\bar{x}}}$ e $\dot{\bar{y}}$ a partir desta mudança.

Assim,

$$\dot{\bar{y}} = \dot{\bar{y}} = \bar{x} + \bar{x}\bar{y} - \bar{y}^2 = \bar{y}\bar{\bar{x}} + \bar{y}^2\bar{\bar{x}} - \bar{y}^2$$

e

$$\dot{\bar{\bar{x}}} = \frac{\dot{\bar{x}}\bar{y} - \bar{x}\dot{\bar{y}}}{\bar{y}^2} = \frac{\bar{y}\bar{x}\bar{y} - \bar{y}\bar{\bar{x}}(\bar{x} + \bar{x}\bar{y} - \bar{y}^2)}{\bar{y}^2} = -\bar{\bar{x}}^2 - \bar{y}\bar{\bar{x}}^2 + 2\bar{y}\bar{\bar{x}}.$$

Logo, temos

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = -\bar{x}^2 - \bar{y}\bar{x}^2 + 2\bar{y}\bar{x} \\ \dot{\bar{y}} = \bar{y}\bar{x} + \bar{y}^2\bar{x} - \bar{y}^2 \end{cases}.$$

Vamos analisar as singularidades. Para $\dot{\bar{x}} = 0$, temos

$$\bar{x}(-\bar{x} - \bar{y}\bar{x} + 2\bar{y}) = 0 \Rightarrow \bar{x} = 0 \text{ ou } -\bar{x} - \bar{y}\bar{x} + 2\bar{y} = 0.$$

Tomando $-\bar{x} - \bar{y}\bar{x} + 2\bar{y} = 0$ obtemos a seguinte relação: $\bar{x} = \frac{2\bar{y}}{1+\bar{y}}$. Se substituirmos este valor de $\bar{x}$ em $\dot{\bar{y}} = 0$ obteremos que $\bar{y} = -1$ e este valor não pode ser substituído em $\bar{x}$. Portanto o único valor que podemos tomar para $\bar{x}$ é zero. Dai, temos que $\bar{y} = 0$.

Logo, a única singularidade é $(0, 0)$. Assim,

$$JX(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e os autovalores são $\lambda^2 - 0 = 0$ o que implica em $\lambda = 0$. Mostrando que a singularidade não é elementar.

O 2-jato é agora

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = -\bar{x}^2 + 2\bar{x}\bar{y} \\ \dot{\bar{y}} = \bar{x} - \bar{y}^2 \end{cases}.$$

Como vimos (exemplo anterior), esta singularidade pode ser estudada com um “blow-up” polar.

A sucessão de “blow-ups” é a seguinte:

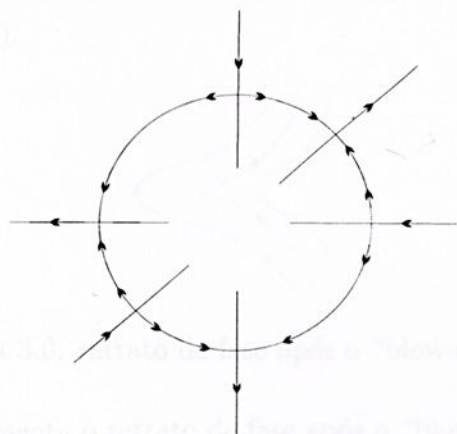


Figura 3.3: retrato de fase no plano $(\bar{x}, \bar{y})$.

A figura 3.3 representa o retrato de fase no plano $(\bar{x}, \bar{y})$ após o “blow-up” polar.

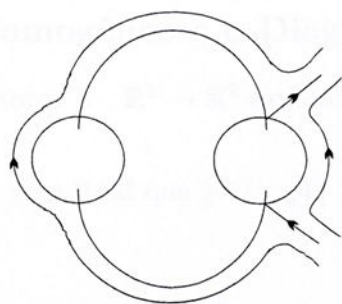


Figura 3.4: retrato de fase no plano $(\bar{x}, \bar{y})$.

Na figura 3.4 encontramos o retrato de fase no plano $(\bar{x}, \bar{y})$, obtido do anterior pela aplicação $(\bar{x} = \cot \theta, \bar{y} = r \sin \theta)$.

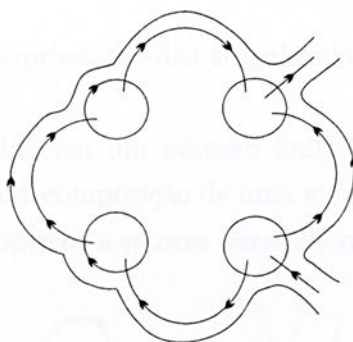


Figura 3.5: retrato de fase no plano (x, y) .

Já na figura 3.5 está representado o retrato de fase no plano (x, y) obtido do anterior pela aplicação $(\bar{x} = r \cos \theta, \bar{y} = t g \theta)$.

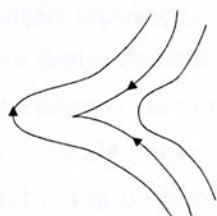


Figura 3.6: retrato de fase após o "blow-down".

Por fim, a figura 3.6 representa o retrato de fase após o "blow-down". Esta é uma singularidade do tipo *cúspide*.

3.0.1 Blow-up Quase-homogêneo e o Diagrama de Newton

Definição 3.3. Um campo de vetores $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfaz a Desigualdade de Lojasiewicz em $(0, 0)$ se

$$\exists k \in \mathbb{N}^* \text{ e } \exists c > 0 \text{ tal que } \|X(x, y)\| \geq c\|(x, y)\|^k$$

em alguma vizinhança de $(0, 0)$.

Um campo de vetores analítico sempre satisfaz a Desigualdade de Lojasiewicz em uma singularidade isolada. Conforme [Du], foi provado que se X satisfaz uma Desigualdade de Lojasiewicz, então existe uma seqüência finita de “blow-ups” produzindo um campo de vetores $\bar{X}^n$ com todas as singularidades elementares.

Como estamos trabalhando com campos polinomiais, todas as conclusões acima são satisfeitas.

Além disso, a posição e as propriedades das singularidades mencionadas acima dependem somente de um jato finito de X .

O “blowing-up locus” é dividido em um número finito de zonas, as quais, depois de um “blow-down”, proporcionam uma decomposição de uma vizinhança da singularidade em setores hiperbólicos (ou selas), setores elípticos e setores parabólicos do tipo atratores ou repulsores.



Figura 3.7: setor hiperbólico, setor elíptico e setor parabólico.

Na figura 3.7 temos uma representação topológica dos possíveis setores.

As linhas invariantes C^∞ na fronteira destes setores, incluindo a singularidade, são chamadas *órbitas características* (ou linhas características), as quais tendem para a singularidade com uma inclinação bem definida quando o tempo tende para $+\infty$ ou $-\infty$.

As linhas C^∞ tendo um contato finito com o “blowing-up locus” dão origem a linhas características de tipo finito; isto significa que as linhas características possuem uma parametrização C^∞ , $\gamma : [0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $j_r \gamma(0, 0) \neq (0, 0)$ para algum $r \in \mathbb{N}$.

Apesar do método do “blow-up” sucessivo ser eficiente no estudo das singularidades isoladas, apresentaremos um método que revela-se mais eficiente no momento da implementação computacional: o “blow-up” quase-homogêneo.

Definição 3.4. Uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de quase-homogênea do tipo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ e grau k se

$$f(r^\alpha x, r^\beta y) = r^k f(x, y), \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

Um campo de vetores $X = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ é chamado de quase-homogêneo do tipo (α, β) e grau $k + 1$ se f_1 é quase-homogênea do tipo (α, β) e grau $k + \alpha$ e f_2 é quase-homogênea do tipo (α, β) e grau $k + \beta$.

Exemplo 3.5. O campo de vetores

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 2xy \\ \dot{y} = y^2 - xy \end{cases}$$

é quase-homogênea do tipo $(1, 1)$ e grau 2.

De fato, da definição anterior temos que $f_1(x, y) = x^2 - 2xy$ e $f_2(x, y) = y^2 - xy$.

Daí,

$$f_1(rx, ry) = r^2x^2 - 2r^2xy = r^2(x^2 - 2xy) = r^2f_1(x, y)$$

é uma função quase-homogênea do tipo $(1, 1)$ e grau 2.

Agora,

$$f_2(rx, ry) = r^2y^2 - r^2xy = r^2(y^2 - xy) = r^2f_2(x, y)$$

também é uma função quase-homogênea do tipo $(1, 1)$ e grau 2.

Logo, o campo de vetores X é quase-homogêneo do tipo $(1, 1)$ e grau 2.

Exemplo 3.6. O campo de vetores

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 \end{cases}$$

é quase-homogêneo do tipo $(2, 3)$ e grau 2.

De fato, da definição anterior temos que $f_1(x, y) = y$ e $f_2(x, y) = x^2$.

Assim,

$$f_1(rx, ry) = r^3y = r^3f_1(x, y)$$

é uma função quase-homogênea do tipo $(2, 3)$ e grau 3.

E,

$$f_2(rx, ry) = (r^2x)^2 = r^4x^2 = r^4f_2(x, y)$$

também é uma função quase-homogênea do tipo $(2, 3)$, mas de grau 4.

Logo, o campo de vetores X é quase-homogêneo do tipo $(2, 3)$ e grau 2.

No caso quase-homogêneo do tipo (α, β) tentaremos o seguinte “blow-up”:

$$\begin{aligned} \Psi : S^1 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((\bar{x}, \bar{y}), r) &\mapsto (r^\alpha \bar{x}, r^\beta \bar{y}) \end{aligned}$$

com $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1$.

Vamos testar isto no campo vetorial $X(x, y) = (y, x^2)$; usando a versão direcional.

Na direção do eixo- x , $\bar{x} = 1$: $(x, y) = (r^2, r^3\bar{y})$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 \end{cases}$$

Como estamos usando a mudança $(x, y) = (r^2, r^3\bar{y})$, temos também que

$$\begin{cases} \dot{x} = 2r\dot{r} \\ \dot{y} = 3r^2\bar{y}\dot{r} + r^3\dot{\bar{y}} \end{cases}$$

Daí,

$$2r\dot{r} = \dot{x} = y = r^3\bar{y} \Rightarrow \dot{r} = \frac{r^2\bar{y}}{2}$$

e

$$3r^2\bar{y}\dot{r} + r^3\dot{\bar{y}} = \dot{y} = x^2 = r^4 \Rightarrow r^2\dot{\bar{y}} = r^4 - 3r^2\bar{y}\dot{r} \Rightarrow \dot{\bar{y}} = \left(1 - \frac{3}{2}\bar{y}^2\right)r.$$

Logo, o novo sistema fica

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{r^2\bar{y}}{2} \\ \dot{\bar{y}} = \left(1 - \frac{3}{2}\bar{y}^2\right)r \end{cases}$$

E como o campo de vetores é de grau 2, dividimos por r e encontramos o sistema

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{r\bar{y}}{2} \\ \dot{\bar{y}} = 1 - \frac{3}{2}\bar{y}^2 \end{cases}$$

As singularidades deste sistema são: $(0, -\sqrt{0,6})$ e $(0, \sqrt{0,6})$.

E calculando a sua matriz jacobiana, temos

$$JX(r, \bar{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial \dot{\bar{y}}}{\partial r} & \frac{\partial \dot{\bar{y}}}{\partial \bar{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{y}}{2} & \frac{r}{2} \\ 0 & -3\bar{y} \end{bmatrix}.$$

Agora, substituindo os valores das singularidades nesta matriz temos,

$$JX(0, -\sqrt{0,6}) = \begin{bmatrix} -2\sqrt{0,6} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{0,6} \end{bmatrix} \text{ e } JX(0, \sqrt{0,6}) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{0,6} & 0 \\ 0 & -3\sqrt{0,6} \end{bmatrix}.$$

Assim, temos o seguinte retrato de fase para o sistema



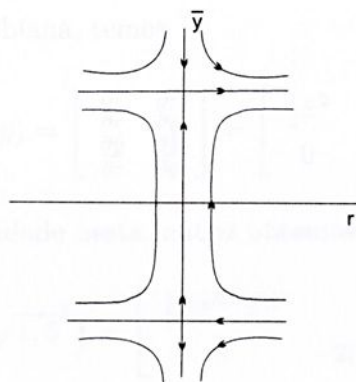


Figura 3.8: retrato de fase do “blow-up” na direção do eixo- x .

Na direção do eixo- y , $\bar{y} = 1$: $(x, y) = (r^2\bar{x}, r^3)$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 \end{cases}.$$

Como estamos usando a mudança $(x, y) = (r^2\bar{x}, r^3)$, temos também que

$$\begin{cases} \dot{x} = 2r\dot{r}\bar{x} + r^2\dot{\bar{x}} \\ \dot{y} = 3r^2\dot{r} \end{cases}.$$

Daí,

$$3r^2\dot{r} = \dot{y} = x^2 = (r^2\bar{x})^2 = r^4\bar{x}^2 \Rightarrow \dot{r} = \frac{r^2\bar{x}^2}{3}$$

e

$$2r\bar{x}\dot{r} + r^2\dot{\bar{x}} = \dot{x} = y = r^3 \Rightarrow r^2\dot{\bar{x}} = r^3 - 2r\bar{x}\dot{r} \Rightarrow \dot{\bar{x}} = \left(1 - \frac{2}{3}\bar{x}^3\right)r^3.$$

Logo, o novo sistema fica

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{r^2\bar{x}^2}{3} \\ \dot{\bar{x}} = \left(1 - \frac{2}{3}\bar{x}^3\right)r^3 \end{cases}.$$

Dividindo outra vez por r , encontramos

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{r\bar{x}^2}{3} \\ \dot{\bar{x}} = 1 - \frac{2}{3}\bar{x}^3 \end{cases}.$$

A singularidade deste sistema é : $(0; \sqrt[3]{1,5})$.

Calculando a sua matriz jacobiana, temos

$$JX(r, \bar{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{r}}{\partial r} & \frac{\partial \dot{r}}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial \dot{\bar{y}}}{\partial r} & \frac{\partial \dot{\bar{y}}}{\partial \bar{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\bar{x}^2 & \frac{2}{3}r\bar{x} \\ 0 & -2\bar{x}^2 \end{bmatrix}.$$

Substituindo o valor da singularidade nesta matriz obtemos,

$$JX(0, \sqrt[3]{1,5}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(\sqrt[3]{1,5})^2 & 0 \\ 0 & -2(\sqrt[3]{1,5})^2 \end{bmatrix}.$$

Logo, o retrato de fase para o sistema é dado por

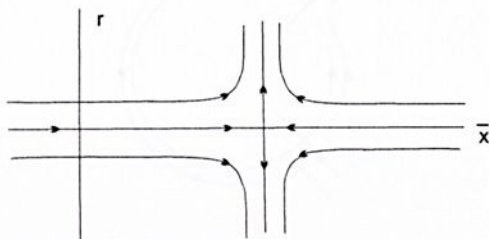


Figura 3.9: retrato de fase do “blow-up” na direção do eixo- y .

Em contraste com o caso homogêneo onde estes cálculos bastariam, nós agora também precisamos olhar para o blow-up na direção $\{\bar{x} = -1\}$. A direção $\{\bar{y} = -1\}$ não precisamos analisar, pois podemos olhar para a direção $\{\bar{y} = 1\}$ mas para $r \leq 0$ que será análoga.

Na direção do eixo- x , $\bar{x} = -1$: $(x, y) = (-r^2, r^3\bar{y})$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 \end{cases}.$$

Como estamos usando a mudança $(x, y) = (-r^2, r^3\bar{y})$, temos também que

$$\begin{cases} \dot{x} = -2r\dot{r} \\ \dot{y} = 3r^2\bar{y}\dot{r} + r^3\dot{\bar{y}} \end{cases}.$$

Daí,

$$-2r\dot{r} = \dot{x} = y = r^3\bar{y} \Rightarrow \dot{r} = -\frac{r^2\bar{y}}{2}$$

e

$$3r^2\bar{y}\dot{r} + r^3\dot{\bar{y}} = \dot{y} = x^2 = r^4 \Rightarrow r^2\dot{\bar{y}} = r^4 - 3r^2\bar{y}\dot{r} \Rightarrow \dot{\bar{y}} = \left(1 + \frac{3}{2}\bar{y}^2\right)r.$$

Logo, o novo sistema fica

$$\begin{cases} \dot{r} = -\frac{r^2 \bar{y}}{2} \\ \dot{\bar{y}} = (1 + \frac{3}{2} \bar{y}^2) r \end{cases}$$

Dividindo este sistema por r , encontramos o campo de vetores

$$\begin{cases} \dot{r} = -\frac{r \bar{y}}{2} \\ \dot{\bar{y}} = 1 + \frac{3}{2} \bar{y}^2 \end{cases}$$

sem singularidades em $r = 0$.

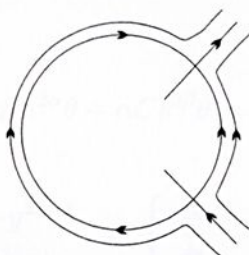


Figura 3.10: retrato de fase do “blow-up” na direção do eixo- x .

A figura completa (em $((\bar{x}, \bar{y}), r)$) resulta na figura 3.10, e as singularidades são ambas hiperbólicas. Temos uma desingularização depois de um “blow-up”.

Aplicando Ψ para

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 + xy \end{cases}$$

vemos que a situação não se altera. De fato, no lugar de usarmos o “blow-up” direcional poderíamos ter trabalhado diretamente com $((\bar{x}, \bar{y}), r)$ ou

$$(r, \theta) \rightarrow (r^2 \cos \theta, r^3 \sin \theta).$$

Depois de uma divisão por r , teríamos

$$(2\cos^2\theta + 3\sin^2\theta)\dot{r} = r\cos\theta\sin\theta(1 + \cos\theta) + O(r^2)$$

$$(2\cos^2\theta + 3\sin^2\theta)\dot{\theta} = (-3\sin^2\theta + 2\cos^3\theta) + O(r)$$

e poderíamos eliminar $(2\cos^2\theta + 3\sin^2\theta)$ para estudos mais à frente.

A seguir apresentamos um método, formulado por Liapunov para a análise de campos de vetores quase-homogêneos do tipo (α, β) .

Consideremos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^{2\alpha-1} \\ \dot{y} = x^{2\beta-1} \end{cases}$$

com $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$ e chamemos as soluções (analíticas) $Cs\theta$ e $Sn\theta$, isto é,

$$\begin{cases} \frac{d}{d\theta} Cs\theta = -Sn^{2\alpha-1}\theta \\ \frac{d}{d\theta} Sn\theta = Cs^{2\beta-1}\theta \end{cases}$$

com $Cs(0) = 1$ e $Sn(0) = 0$.

Claramente,

$$\beta Sn^{2\alpha}\theta + \alpha Cs^{2\beta}\theta = \alpha.$$

De fato,

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^{2\alpha-1} \\ \dot{y} = x^{2\beta-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y^{2\alpha-1} \\ \frac{dy}{dt} = x^{2\beta-1} \end{cases}.$$

Daí temos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{2\beta-1}}{-y^{2\alpha-1}} \Rightarrow x^{2\beta-1}dx = -y^{2\alpha-1}dy.$$

Integrando de ambos os lados, obtemos

$$\frac{x^{2\beta}}{2\beta} + c_1 = -\frac{y^{2\alpha}}{2\alpha} + c_2 \Rightarrow \frac{x^{2\beta}}{\beta} + \frac{y^{2\alpha}}{\alpha} = c \Rightarrow \alpha x^{2\beta} + \beta y^{2\alpha} = c.$$

Como $x(0) = 0$ e $y(0) = 1$, temos que $c = \alpha$. Logo, temos a igualdade.

Temos também que Cs e Sn são periódicas, já que parametrizam os níveis de $f(x, y) = \alpha x^{2\beta} + \beta y^{2\alpha}$. Usamos então a “quase-coordenada polar”

$$\begin{cases} x = r^\alpha Cs\theta \\ y = r^\beta Sn\theta \end{cases}.$$

Exemplo 3.7. No caso

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 \end{cases}$$

usamos $(x = r^2Cs\theta, y = r^3Sn\theta)$ com $3Sn^4\theta + 2Cs^6\theta = 2$, e vamos ver o que encontramos (depois de dividirmos por r).



Como $x = r^2 Cs\theta$ e $y = r^3 Sn\theta$, temos que

$$\begin{cases} \dot{x} = 2r\dot{r}Cs\theta + r^2(-Sn^3\theta)\dot{\theta} \\ \dot{y} = 3r^2\dot{r}Sn\theta + r^3Cs^5\theta\dot{\theta} \end{cases}.$$

Agora, substituindo estes valores de $\dot{x}$ e $\dot{y}$ que acabamos de encontrar nos valores que tínhamos antes, já substituindo (x, y) por $(r^2Cs\theta, r^3Sn\theta)$, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} r^3Sn\theta = 2r\dot{r}Cs\theta - r^2Sn^3\theta\dot{\theta} \\ r^4Cs^2\theta = 3r^2\dot{r}Sn\theta + r^3Cs^5\theta\dot{\theta} \end{cases}.$$

Vamos encontrar $\dot{r}$ e $\dot{\theta}$. Para encontrarmos $\dot{r}$ multiplicamos a primeira equação acima por $rCs^5\theta$ e a segunda por $Sn^3\theta$. Já para encontrarmos $\dot{\theta}$ multiplicamos a primeira equação por $-3rSn\theta$ e a segunda equação por $2Cs\theta$. Fazendo isso temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{1}{2}r^2Sn\thetaCs^2\theta(Cs^3\theta + Sn^2\theta) \\ \dot{\theta} = r\left(-\frac{3}{2}Sn^2\theta + Cs^3\theta\right) \end{cases}.$$

Dividindo ambas as equações por r , obtemos a relação

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{1}{2}rSn\thetaCs^2\theta(Cs^3\theta + Sn^2\theta) \\ \dot{\theta} = Cs^3\theta - \frac{3}{2}Sn^2\theta \end{cases}.$$

Encontramos, é claro, o mesmo retrato que anteriormente. O método não é necessariamente um melhoramento; ele definitivamente será no próximo exemplo.

Exemplo 3.8. Consideremos o campo de vetores

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x^3 \end{cases}$$

ele é quase-homogêneo do tipo $(1, 2)$ e grau 2.

Usando agora $(x = rCs\theta, y = r^2Sn\theta)$ com $2Sn^2\theta + Cs^4\theta = 1$ e

$$\begin{cases} \frac{d}{d\theta}Cs\theta = -Sn\theta \\ \frac{d}{d\theta}Sn\theta = Cs^3\theta \end{cases}$$

com $Cs(0) = 1$ e $Sn(0) = 0$, vamos encontrar qual será a redução do campo.

Como $x = rC\theta$ e $y = r^2S\theta$, temos que

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}C\theta + r(-S\theta)\dot{\theta} \\ \dot{y} = 2r\dot{r}S\theta + r^2C\theta\dot{\theta} \end{cases}.$$

Agora, substituindo estes valores de $\dot{x}$ e $\dot{y}$ que acabamos de encontrar nos valores que tínhamos antes, já substituindo (x, y) por $(rC\theta, r^2S\theta)$, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} -r^2S\theta = \dot{r}C\theta - rS\theta\dot{\theta} \\ r^3C\theta = 2r\dot{r}S\theta + r^2C\theta\dot{\theta} \end{cases}.$$

Vamos encontrar $\dot{r}$ e $\dot{\theta}$. Para encontrarmos $\dot{r}$ multiplicamos a primeira equação acima por $rC\theta$ e a segunda por $S\theta$. Já para encontrarmos $\dot{\theta}$ multiplicamos a primeira equação por $-2rS\theta$ e a segunda equação por $C\theta$. Fazendo isso temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} r\dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = r \end{cases}.$$

Dividindo ambas as equações por r , obtemos a relação

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}.$$

Se usássemos, $(x = r\cos\theta, y = r^2\sin\theta)$, iríamos encontrar

$$\begin{cases} (\cos^2\theta + 2\sin^2\theta)\dot{r} = -r^2\cos\theta\sin^3\theta \\ r^2(\cos^2\theta + 2\sin^2\theta)\dot{\theta} = r^3(2\sin^2\theta + \cos^4\theta) \end{cases}.$$

Multiplicando por $(\cos^2\theta + 2\sin^2\theta)$ e dividindo por r encontramos:

$$\begin{cases} \dot{r} = 2\sin^2\theta + \cos^4\theta \\ \dot{\theta} = -r\cos\theta\sin^3\theta \end{cases}.$$

Este campo de vetores também não possui singularidades em $r = 0$ mas é mais complicado do que o obtido na redução anterior.

Para usarmos $(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$ introduziríamos singularidades e necessitaríamos de “blow-up” sucessivos.

Nos dois exemplos a parte quase-homogênea é determinada de modo que o retrato de fase do “blow-up” não se altera quando adicionarmos termos de “grau maior”, onde o grau é calculado

usando a substituição $(x = r^\alpha \bar{x}, y = r^\beta \bar{y})$. Em ambos os casos os termos não irão afetar a posição das singularidades nem os autovalores das singularidades.

A maneira de detectar se alguma parte quase-homogênea pode ser interessante é baseada no *Diagrama de Newton*.

Para introduzirmos este conceito, é mais conveniente trabalharmos com a forma dual ω ao invés do próprio campo de vetores X . Seja

$$\omega = \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j \geq 1}} a_{ij} x^i y^j dx + \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j \geq 1}} b_{ij} x^i y^j dy.$$

Em $\mathbb{R}^2$, o suporte de ω (que é igual ao suporte de X) é definida como

$$S = \{(i+1, j)/a_{ij} \neq 0\} \cup \{(i, j+1)/b_{ij} \neq 0\}.$$

O poliedro de Newton de ω ou de X é o fecho convexo do conjunto

$$P = \bigcup_{(r,s) \in S} (\{(r, s)\} + \mathbb{R}_+^2).$$

O *Diagrama de Newton de X* é a união γ das faces compactas γ_k do Poliedro de Newton Γ , que enumeramos da esquerda para a direita.

A “parte principal” de ω é definida por

$$\omega_\Delta = \sum_{(i+1, j) \in \gamma} a_{ij} x^i y^j dx + \sum_{(i, j+1) \in \gamma} b_{ij} x^i y^j dy.$$

Foi provado em [Bru] que a componente quase-homogênea determina, a menos de uma conjugação topológica, o retrato de fase do campo original quando a origem é uma singularidade isolada e o campo possui órbitas características, isto é, órbitas tais que a derivada do vetor tangente possui limite quando ela se aproxima da singularidade.

Vejamos alguns exemplos de campos de vetores tendo uma componente quase-homogênea com uma singularidade isolada

Exemplo 3.9. Consideremos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 2xy \\ \dot{y} = y^2 - xy \end{cases}.$$

Passando este sistema de equações para a forma dual, temos

$$\omega = (y^2 - xy)dx - (x^2 - 2xy)dy.$$

Daí, os coeficientes não nulos são: a_{02} , a_{11} , b_{20} e b_{11} .

Logo, o conjunto S é dado por

$$S = \{(1, 2), (2, 1)\} \cup \{(2, 1), (1, 2)\} = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

e o conjunto P é

$$P = \{(1, 2) + \mathbb{R}_+^2\} \cup \{(2, 1) + \mathbb{R}_+^2\}.$$

Assim, temos

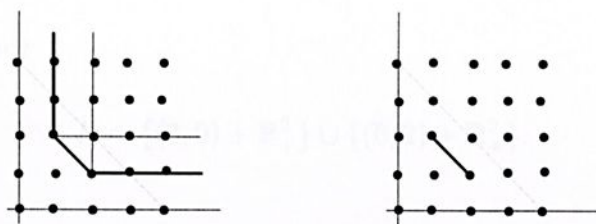


Figura 3.11: Poliedro de Newton e Diagrama de Newton.

Temos que sua componente quase-homogênea é

$$X_{qh}(x, y) = \begin{cases} \dot{x} = x^2 - 2xy \\ \dot{y} = y^2 - xy \end{cases}.$$

E o seu retrato de fase é dado pela figura 3.12 abaixo.

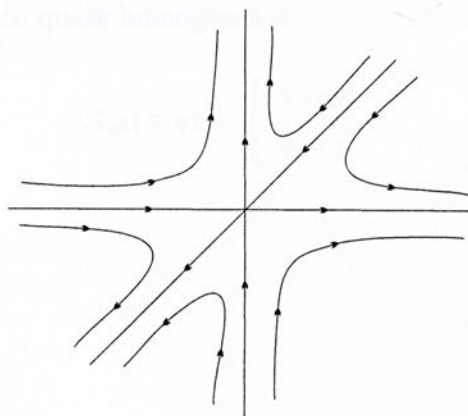


Figura 3.12: Retrato de fase do campo de vetores do exemplo 3.9.

Exemplo 3.10. Consideremos o campo de vetores

$$X : \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 + xy \end{cases}.$$

Passando este campo de vetores para a forma dual, temos

$$\omega = x^2 dx - y dy.$$

Portanto, os coeficientes não nulos são: a_{02} e b_{01} .

Logo, o conjunto S é dado por

$$S = \{(3, 0)\} \cup \{(0, 2)\}$$

e o conjunto P é dado por

$$P = \{(3, 0) + \mathbb{R}_+^2\} \cup \{(0, 2) + \mathbb{R}_+^2\}.$$

Assim, temos

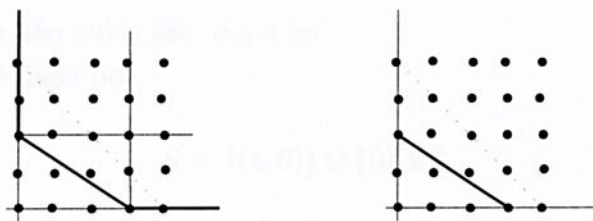


Figura 3.13: Poliedro de Newton e Diagrama de Newton.

Temos que sua componente quase-homogênea é

$$X_{qh}(x, y) = \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 \end{cases}.$$

Exemplo 3.11. Considerando o campo de vetores

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x^3 \end{cases}.$$

$$\omega = x^3 dx + y dy.$$

Logo, o conjunto S é dado por

$$S = \{(4, 0)\} \cup \{(0, 2)\}$$

e o conjunto P é dado por

$$P = \{(4, 0) + \mathbb{R}_+^2\} \cup \{(0, 2) + \mathbb{R}_+^2\}.$$

Figura 3.15: Poliedro de Newton e Diagrama de Newton.

Temos que a componente quase-homogênea é

$$X_{qh}(x, y) = \begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x^3 \end{cases}.$$

Neste último exemplo, a componente quase-homogênea é um centro e depois de um “blow-up” quase-homogêneo não encontramos singularidades em $\{r = 0\}$. Os termos de “ordem superior” irão decidir se lidaremos com um centro ou com um foco atrator (ou repulsor). No Diagrama de Newton podemos também ver o tipo (α, β) da componente quase-homogênea definida por γ_k . Ela corresponde às coordenadas relativamente primas do vetor ortogonal à face γ_k .

Como a origem é uma singularidade isolada, temos ao menos que um dos pontos $(0, s)$ ou $(1, s)$ é um elemento de S e também $(r, 1)$ ou $(r, 0)$ é um elemento de S para algum r . Então sempre existe uma face γ_1 no Diagrama de Newton.

Suponhamos que γ_1 tem equação $\alpha r + \beta s = d$, com $\text{mdc}(\alpha, \beta) = 1$. Para um primeiro passo no processo de desingularização, usamos um “blow up” quase-homogêneo de grau (α, β) .

Denotemos $X_{qh} = \sum_{j \geq d} X_j$ com $X_j(x, y) = (p_j(x, y), q_j(x, y))$ a componente quase-homogênea do tipo (α, β) e grau (quase-homogêneo) j , isto é,

$$p_j(r^\alpha x, r^\beta y) = r^{j+\alpha} p_j(x, y) \text{ e } q_j(r^\alpha x, r^\beta y) = r^{j+\beta} q_j(x, y).$$

Dividimos depois por r^d . Na prática, primeiro fazemos o blow-up no eixo- x positivo do campo de vetores resultando, depois de multiplicarmos o resultado por $\alpha \bar{x}^{-d}$,

$$\bar{X}_+^x : \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \sum_{\delta \geq d} \bar{x}^{\delta+1-d} p_\delta(1, \bar{y}) \\ \dot{\bar{y}} = \sum_{\delta \geq d} \bar{x}^{\delta-d} (\alpha q_\delta(1, \bar{y}) - \beta \bar{y} p_\delta(1, \bar{y})) \end{cases}.$$

Determinamos as singularidades na linha $\{\bar{x} = 0\}$.

(1) Se $\alpha q_d(1, \bar{y}) - \beta \bar{y} p_d(1, \bar{y}) \neq 0$, os pontos $(0, \bar{y}_0)$ satisfazendo a equação $\alpha q_d(1, \bar{y}) - \beta \bar{y} p_d(1, \bar{y}) = 0$ são singularidades isoladas de $\bar{x}$ na linha $\{\bar{x} = 0\}$, para as quais

$$JX_+^x(0, \bar{y}_0) = \begin{pmatrix} p_d(1, \bar{y}_0) & 0 \\ * & \alpha \frac{\partial q_d}{\partial \bar{y}}(1, \bar{y}_0) - \beta(p_d(1, \bar{y}_0)) + \bar{y}_0 \frac{\partial p_d}{\partial \bar{y}}(1, \bar{y}_0) \end{pmatrix},$$

determinando imediatamente os autovalores na diagonal. No caso das singularidades serem hiperbólicas, aplicamos o Teorema de Grobman-Hartman. No caso delas serem semi-hiperbólicas, temos que determinar o comportamento através da variedade central. No caso delas serem não

elementares, introduzimos $\hat{y} = \bar{y} - \bar{y}_0$, e fazemos um novo “blow-up” no eixo- x positivo para este campo de vetores, bem como na direção do eixo- y positiva e negativa com um certo grau (α', β') , determinado do Diagrama de Newton associado ao campo de vetores.

(2) Se $\alpha q_d(1, \bar{y}) - \beta \bar{y} p_d(1, \bar{y}) = 0$, temos uma linha de singularidades. Como

$$JX_x^+(0, \bar{y}_0) = \begin{pmatrix} p_d(1, \bar{y}_0) & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix},$$

todas as singularidades são semi-hiperbólicas, exceto aquelas singularidades $(0, \bar{y}_0)$ para as quais $p_d(1, \bar{y}_0) = 0$. Estas, mais tarde, irão precisar de um outro “blow-up”.

Depois faremos um “blow-up” no eixo- x negativo do campo de vetores e o estudaremos da mesma maneira do caso positivo.

Finalmente, teremos que fazer um “blow-up” no eixo- y nas direções positiva e negativa do campo de vetores, e determinarmos quando $(0, 0)$ é uma singularidade ou não, desde que as outras tenham sido estudadas nos casos anteriores.

É fácil vermos que $(0, 0)$ é uma singularidade se γ_1 está completamente no semi-plano $\{r \geq 0\}$. Se este for o caso, então a singularidade $(0, 0)$ é elementar. Dessa forma, fazemos um “blow-up” na direção do eixo- y positivo do campo de vetores resultando, depois de multiplicarmos por $\beta \bar{y}^{-d}$,

$$\bar{X}_+^y = \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \sum_{\delta \geq d} \bar{y}^{\delta-d} (\beta p_\delta(\bar{x}, 1) - \alpha \bar{x} q_\delta(\bar{x}, 1)) \\ \dot{\bar{y}} = \sum_{\delta \geq d} \bar{y}^{\delta+1-d} q_\delta(\bar{x}, 1) \end{cases}.$$

Assim, $(0, 0)$ é uma singularidade se $p_d(0, 1) = 0$, isto é, se $p_d(x, y) = xF(x, y)$, implicando que γ_1 está completamente no semi-plano $\{r \geq 0\}$. Suponhamos agora que $(0, 0)$ é uma singularidade de $\bar{X}_+^y$, então temos:

$$J\bar{X}_+^y(0, 0) = \begin{pmatrix} \beta \frac{\partial p_d}{\partial \bar{x}}(0, 1) - \alpha q_d(0, 1) & * \\ 0 & q_d(0, 1) \end{pmatrix}.$$

Seja $(0, s)$ a intersecção da linha γ_1 com $r = 0$, então

$$p_d(x, y) = axy^s + G(x, y) \quad \text{e} \quad q_d(x, y) = by^{s+1} + H(x, y)$$

com $a^2 + b^2 \neq 0$, o grau x de $G(x, y) \geq 2$ e o grau x de $H(x, y) \geq 1$.

Assim,

$$\beta \frac{\partial p_d}{\partial \bar{x}}(0, 1) - \alpha q_d(0, 1) = a\beta - b\alpha.$$

Então, se $a\beta - b\alpha \neq 0$, temos que $(0, 0)$ é uma singularidade elementar; se $a\beta - b\alpha = 0$, temos

que $q_d(0, 1) = b \neq 0$, e que $(0, 0)$ também é uma singularidade elementar.

Em [Pel] foi provado que o algoritmo, como apresentado aqui, é mais eficiente que o usual.

Utilizando o programa P4 podem ser estudadas as singularidades no infinito, além das singularidades existentes nas partes compactas do $\mathbb{R}^2$.

No próximo capítulo vamos descrever como um campo de vetores polinomial pode ser estudado no infinito.

Compactificação de Poincaré e de Poincaré-Liapunov

Quando estudamos um campo de vetores, em muitos casos é importante analisar o seu comportamento no infinito. No caso de campos de vetores polinomiais este estudo pode ser feito de duas maneiras, mais especificamente podemos estudar o campo de vetores em um Disco de Poincaré ou em um Disco de Poincaré-Liapunov. No primeiro caso compactificamos $\mathbb{R}^2$ acrescentando um círculo, já no segundo acrescentamos o campo de vetores polinomial para um campo analítico definido em uma esfera. Vamos descrever primeiramente como estudar o $\mathbb{R}^2$ por uma Esfera de Poincaré.

4.1 Projeção Estereográfica e Compactificação de Poincaré

O comportamento de trajetórias distantes da origem pode ser analisado considerando o comportamento de trajetórias próximas de um pólo na esfera (veja a Figura 4.1). Tal ponto da esfera pode ser utilizado-se a Projeção Estereográfica (ver Figura 4.2). Tal ponto geralmente representa uma singularidade muito complexa para o estudo efetuado na esfera.



Figura 4.1: Projeção Estereográfica.

Capítulo 4

Compactificação de Poincaré e de Poincaré-Liapunov

Quando estudamos um campo de vetores, em muitos casos é importante analisar o seu comportamento no infinito. No caso de campos de vetores polinomiais este estudo pode ser feito de duas maneiras, mais especificamente, podemos estender o campo de vetores em um Disco de Poincaré ou em um Disco de Poincaré-Liapunov. No primeiro caso compactificamos o $\mathbb{R}^2$ acrescentando um círculo, já no segundo estendemos o campo de vetores polinomial para um campo analítico definido em uma esfera. Vamos descrever primeiramente como estender o $\mathbb{R}^2$ por uma Esfera de Poincaré.

4.1 Projeção Estereográfica e Compactificação de Poincaré

O comportamento de trajetórias distantes da origem pode ser estudado considerando o comportamento de trajetórias próximas de um *ponto no infinito*, isto é, próximas do pólo norte da esfera unitária utilizando-se a Projeção Estereográfica (ver figura 4.1). Tal ponto geralmente representa uma singularidade muito complicada para o fluxo induzido na esfera.

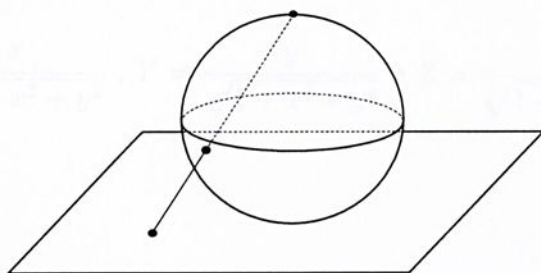


Figura 4.1: Projeção Estereográfica.

A idéia de analisar o comportamento global de sistemas dinâmicos planares usando a projeção estereográfica se deve a Bendixson; deste fato diz-se que a esfera, incluindo a singularidade no infinito, é chamada de *Esfera de Bendixson*.

Entretanto, a melhor forma de estudar o comportamento de trajetórias “no infinito” é usando, a *Esfera de Poincaré*, onde a projeção é feita do centro da esfera

$$S^2 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3; X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}$$

no plano (x, y) tangente a S^2 em um de seus pólos.

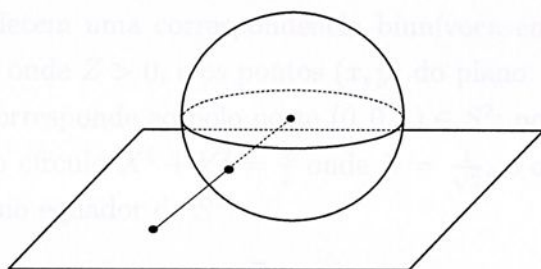


Figura 4.2: Projeção Central.

Este tipo de projeção central foi introduzido por Poincaré e tornou-se melhor porque as *singularidades no infinito* são estendidas ao longo do equador da esfera e são, por essa razão, de natureza mais simples de que o único ponto no infinito da Esfera de Bendixson; mas salientamos que mesmo assim, o comportamento dos pontos no equador da Esfera de Poincaré pode ser complicado.

Se o plano (x, y) estiver tangenciando o pólo norte da esfera S^2 , então por uma relação de congruência de triângulos, teremos que (ver figura 4.4)

$$x = \frac{X}{Z} \quad \text{e} \quad y = \frac{Y}{Z}. \quad (4.1)$$

Da mesma forma

$$X = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad Y = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \quad \text{e} \quad Z = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

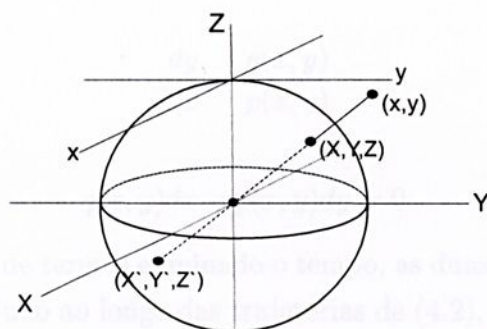


Figura 4.3: Projeção Central do hemisfério superior de S^2 sobre o plano (x, y) .

Essas equações estabelecem uma correspondência biunívoca entre os pontos (X, Y, Z) do hemisfério superior de S^2 , onde $Z > 0$, e os pontos (x, y) do plano.

A origem $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ corresponde ao polo norte $(0, 0, 1) \in S^2$; pontos no círculo $x^2 + y^2 = 1$ correspondem a pontos no círculo $X^2 + Y^2 = \frac{1}{2}$ onde $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}$; e os pontos no infinito do $\mathbb{R}^2$ correspondem aos pontos no equador de S^2 .

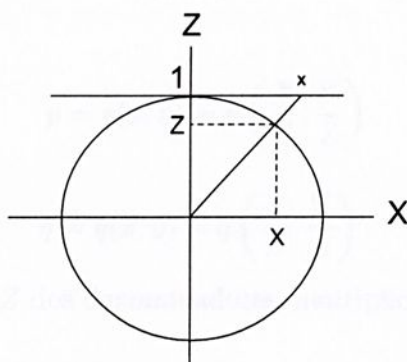


Figura 4.4: Secção da Esfera.

Quaisquer dois pontos antípodas (X, Y, Z) e (X', Y', Z') pertencentes a S^2 , que não estão no equador, correspondem ao mesmo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. É por essa razão que consideramos quaisquer dois pontos antípodas no equador de S^2 como sendo oriundos do mesmo ponto no infinito.

Consideremos um fluxo definido por um sistema dinâmico em $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = p(x, y) \\ \dot{y} = q(x, y) \end{cases} \quad (4.2)$$

onde p e q são funções polinomiais de x e y .

Seja m o grau máximo de p e q . Esse sistema pode ser escrito como uma equação diferencial

da forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q(x, y)}{p(x, y)}$$

ou ainda

$$q(x, y)dx - p(x, y)dy = 0. \quad (4.3)$$

Observe que, em virtude de termos eliminado o tempo, as duas últimas equações fazem com que percamos a direção do fluxo ao longo das trajetórias de (4.2), pois as informações relativas ao tempo são perdidas.

Segue então de (4.1) que

$$dx = \frac{ZdX - XdZ}{Z^2} \quad \text{e} \quad dy = \frac{ZdY - YdZ}{Z^2}. \quad (4.4)$$

Logo, temos que (4.3) pode ser escrito como

$$q(ZdX - XdZ) - p(ZdY - YdZ) = 0$$

onde

$$p = p(x, y) = p\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$$

e

$$q = q(x, y) = q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right).$$

Com o objetivo de eliminar Z dos denominadores, multiplicamos toda a equação acima por Z^m e obtemos

$$Zq^*dX - Zp^*dY - (Yp^* + Xq^*)dZ = 0 \quad (4.5)$$

onde

$$p^*(X, Y, Z) = Z^m p\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$$

e

$$q^*(X, Y, Z) = Z^m q\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$$

são polinômios em (X, Y, Z) .

Essa equação pode ser escrita na forma de um determinante, como segue

$$\begin{vmatrix} dX & dY & dZ \\ X & Y & Z \\ p^* & q^* & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.6)$$



A equação diferencial (4.5) define uma família de trajetórias ou um fluxo em S^2 . Cada trajetória no hemisfério superior de S^2 definida por (4.5) corresponde a exatamente uma trajetória do sistema (4.2) em $\mathbb{R}^2$.

Mais ainda, o fluxo na Esfera de Poincaré definido por (4.5) nos permite estudar o comportamento do fluxo definido por (4.2) no infinito, isto é, podemos estudar o fluxo definido por (4.5) nas vizinhanças do equador de S^2 .

O equador de S^2 consiste de trajetórias regulares e singularidades de (4.5). Isso segue do fato de que para $Z = 0$ em (4.5), temos

$$(Yp^* - Xq^*)dZ = 0$$

donde temos os seguintes casos

$$(Yp^* - Xq^*) \neq 0 \Rightarrow dZ = 0. \quad (4.7)$$

Neste caso temos uma trajetória regular no equador de S^2 .

$$Yp^* - Xq^* = 0. \quad (4.8)$$

Teremos as singularidades de (4.5) no equador de S^2 onde $Z = 0$.

Observamos que o que caracteriza uma singularidade é a nulidade das coordenadas em relação à base $\{dX, dY, dZ\}$.

Se

$$p(x, y) = p_1(x, y) + \dots + p_m(x, y)$$

e

$$q(x, y) = q_1(x, y) + \dots + q_m(x, y),$$

onde p_j e q_j são polinômios homogêneos de grau j em x e y , então

$$Yp^* - Xq^* =$$

$$\begin{aligned} &= Z^m Y p_1 \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z} \right) + \dots + Z^m Y p_m \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z} \right) - Z^m X q_1 \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z} \right) - \dots - Z^m X q_m \left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z} \right) = \\ &= Z^{m-1} Y p_1(X, Y) + \dots + Y p_m(X, Y) - Z^{m-1} X q_1(X, Y) - \dots - X q_m(X, Y) = \\ &= Y p_m(X, Y) - X q_m(X, Y). \end{aligned}$$

onde fizemos $Z = 0$ na última passagem, donde temos também que

$$X^2 + Y^2 = 1.$$

Desse modo, para $Z = 0$, $X = \cos\theta$ e $Y = \sin\theta$, (4.8) é equivalente a

$$\sin\theta p_m(\cos\theta, \sin\theta) - \cos\theta q_m(\sin\theta, \cos\theta) = 0.$$

Fica então provado o seguinte resultado visto em [Pe].

Teorema 4.1. As singularidades no infinito de um sistema polinomial de grau m ocorrem nos pontos $(X, Y, 0)$ sobre o equador da esfera $X^2 + Y^2 = 1$ e

$$Yp_m(X, y) - Xq_m(X, Y) = 0, \quad (4.9)$$

ou equivalentemente em coordenadas polares, teremos que encontrar ângulos θ tais que

$$G_{m+1}(\theta) = \sin\theta p_m(\cos\theta, \sin\theta) - \cos\theta q_m(\sin\theta, \cos\theta) = 0. \quad (4.10)$$

Esta equação tem $m + 1$ pares de raízes θ_j e $\theta_j + \pi$ se G_{m+1} não for identicamente nulo. Se G_{m+1} não é identicamente nulo, então o fluxo no equador da Esfera de Poincaré é orientado no sentido anti-horário se, quando escrito em coordenadas polares, a função G_{m+1} é tal que $G_{m+1}(\theta) > 0$ e caso $G_{m+1}(\theta) < 0$ a orientação será no sentido horário.

O comportamento das singularidades no equador da esfera, ou seja, das singularidades “no infinito,” pode ser determinado projetando a vizinhança deste ponto num plano tangente a S^2 por este ponto. Na realidade, é necessário projetar apenas o hemisfério com $X > 0$ sobre o plano $X = 1$ e projetar o plano $Y > 0$ sobre o plano $Y = 1$ para determinar o comportamento do fluxo em tal singularidade. Isto acontece porque o fluxo em S^2 definido pela equação (4.5) é topologicamente equivalente em pontos antípodas de S^2 se m é ímpar e é topologicamente equivalente, com a direção do fluxo invertida, se m é par.

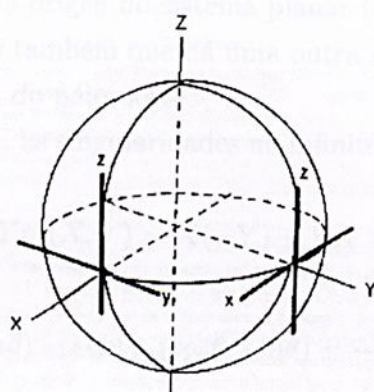


Figura 4.5: Projeção de S^2 nos planos $X = 1$ e $Y = 1$.

Teorema 4.2. O fluxo definido pela equação (4.5) em uma vizinhança de uma singularidade no equador da Esfera de Poincaré S^2 , exceto os pontos $(0, \pm 1, 0)$, é topologicamente equivalente à singularidade definida pelo sistema

$$\begin{cases} \pm \dot{y} = yz^m p\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) - z^m q\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) \\ \pm \dot{z} = z^{m+1} p\left(\frac{1}{z}, \frac{y}{z}\right) \end{cases}, \quad (4.11)$$

sendo que o sinal é determinado pelo fluxo no equador de S^2 segundo o comentário após o Teorema 4.1. Da mesma forma, o fluxo definido pela equação (4.5) em uma vizinhança de uma singularidade no equador de S^2 , exceto nos pontos $(\pm 1, 0, 0)$, é topologicamente equivalente ao fluxo definido pelo sistema

$$\begin{cases} \pm \dot{x} = xz^m p\left(\frac{1}{z}, \frac{x}{z}\right) - z^m q\left(\frac{1}{z}, \frac{x}{z}\right) \\ \pm \dot{z} = z^{m+1} p\left(\frac{1}{z}, \frac{x}{z}\right) \end{cases}, \quad (4.12)$$

sendo que o sinal é determinado como acima.

Demonstração: Para demonstrar este teorema basta observar que se projetarmos o fluxo em S^2 definido pela equação (4.5) sobre o plano $X = 1$ teremos que $X = 1$ e $dX = 0$ e da mesma forma, a projeção do fluxo sobre o plano $Y = 1$ acarreta que $Y = 1$ e que $dY = 0$; daí então basta operarmos com a expressão (4.5) para obtermos as expressões (4.11) e (4.12) ■

Exemplo 4.3. Descreva o fluxo na Esfera de Poincaré S^2 definido pela projeção do sistema planar

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}.$$

Este sistema linear tem uma sela na origem, a qual corresponde à única singularidade do

sistema. A sela está localizada na origem do sistema planar (x, y) e conseqüentemente no pólo norte da esfera; disso concluímos também que há uma outra sela no pólo sul da esfera, por ser este o ponto antípoda, na esfera, do pólo norte.

De acordo com o Teorema 4.1, as singularidades no infinito são determinadas pelas soluções de

$$Xq_1(X, Y) - Yp_1(X, Y) = X(-Y) - YX = -2XY = 0,$$

ou melhor,

$$\cos\theta q_1(\cos\theta, \sin\theta) - \sin\theta p_1(\cos\theta, \sin\theta) = -2\sin\theta\cos\theta = 0.$$

Donde temos que $X = \cos\theta = 0$ e $Y = \sin\theta = \pm 1$ ou $X = \cos\theta = \pm 1$ e $Y = \sin\theta = 0$. Logo, as singularidades no equador de S^2 são:

$$\pm(1, 0, 0) \quad \text{e} \quad \pm(0, 1, 0).$$

Podemos ver também, diante de discussão já feita, que para pontos no equador de S^2 onde $XY > 0$ devemos orientar o fluxo no sentido horário e para pontos onde $XY < 0$ o sentido será anti-horário. Usando a relação $X = \cos\theta$ e $Y = \sin\theta$, temos que para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ a expressão $-2XY$ é negativa e portanto o sentido é horário; procedendo de maneira análoga, descobrimos que o comportamento do fluxo em todo o equador de S^2 , como vemos na figura 4.5.

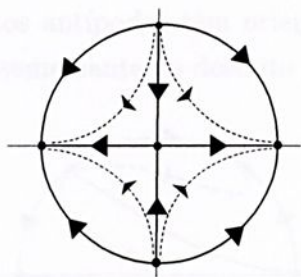


Figura 4.6: exemplo 4.3.

Exemplo 4.4. Determine, na esfera de Poincaré, o retrato de fase do sistema quadrático

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 1 \\ \dot{y} = 5(xy - 1) \end{cases}.$$

Usando o Teorema 4.1, temos que o comportamento no equador é dado por

$$Xq_2(X, Y) - Yp_2(X, Y) = X(5XY) - Y(X^2 + Y^2) = Y(4X^2 - Y^2) = 0$$

e também temos que $X^2 + Y^2 = 1$ pois estamos sobre o equador.

Disto concluímos que os pontos críticos no infinito são:

$$(\pm 1, 0, 0), \quad \pm \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0) \quad \text{e} \quad \pm \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0).$$

Também temos que para $X = 0$ a quantidade acima é negativa se $Y > 0$ e positiva se $Y < 0$, com isso podemos orientar o equador de S^2 .

De acordo com o Teorema 4.2 o comportamento dos pontos críticos $(1, 0, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)$ e $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0)$ é determinado segundo o comportamento dos pontos críticos do sistema

$$\begin{cases} \dot{y} = 4y - 5z^2 - y^3 = yz^2 \\ \dot{z} = -z - zy^2 + z^3 \end{cases}$$

os quais são $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(-2, 0)$, respectivamente. Examinando o comportamento destes pontos, segundo o Teorema de Grobman-Hartman, temos

$$JX(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad JX(\pm 2, 0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Como o comportamento de cada ponto crítico no equador de S^2 é topologicamente equivalente, a menos de orientação, ao respectivo ponto descrito acima e usando a observação feita de que para sistemas de grau par os pontos antípodas têm orientação reversa, temos que o sistema original apresenta comportamento semelhante ao descrito na figura 4.6 como segue

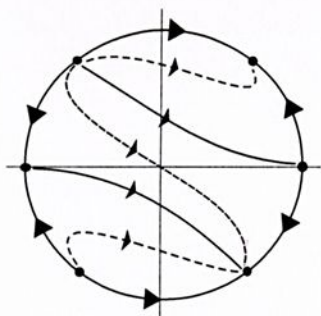


Figura 4.7: exemplo 4.4.

Resumindo, para estendermos algo no infinito para um disco de Poincaré, essencialmente usamos

$$(x, y) = \left(\frac{\cos \theta}{z}, \frac{\sin \theta}{z} \right),$$

e multiplicamos o campo de vetores resultante por s^{m-1} , onde m é o grau do campo de vetores. E é esta descrição que utilizaremos no programa P4.

4.2 Compactificação de Poincaré-Liapunov

As vezes, é melhor trabalharmos com a *Compactificação de Poincaré-Liapunov*, isto é, utilizamos uma compactificação quase-homogênea no infinito, essencialmente dada "próximo" ao infinito por

$$\begin{cases} x = \frac{\cos\theta}{z^\alpha} \\ y = \frac{\sin\theta}{z^\beta} \end{cases}, \quad (4.13)$$

para alguma boa escolha de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. As vezes preferimos não utilizar a função usual $(\cos\theta, \sin\theta)$, mas utilizarmos as funções periódicas $Cs\theta$ e $Sn\theta$, soluções do Problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{d\theta} Cs\theta = -Sn^{2\alpha-1}\theta \\ \frac{d}{d\theta} Sn\theta = Cs^{2\beta-1}\theta \end{cases}, \quad (4.14)$$

com $Cs(0) = 1$, $Sn(0) = 0$ e satisfazendo a relação $\beta Sn^{2\alpha}\theta + \alpha Cs^{2\beta}\theta = \alpha$. Usando tal transformação para uma boa escolha de α e β , faz-se possível em diversos casos que ao invés de tomarmos uma singularidade não elementar no infinito (numa Compactificação de Poincaré) encontramos somente singularidades elementares. Para fazermos estes cálculos é melhor fazermos com cartas diferentes e isto será feito no próximo capítulo.

Capítulo 5

O Programa P4

O programa P4 é um software usado no estudo de campos polinomiais planares (ver [DH]). O programa desenha o retrato de fase tanto no Disco de Poincaré quanto no Disco de Poincaré-Liapunov, ou ainda próximo de uma singularidade, dependendo da necessidade de cada usuário do programa.

Primeiramente ele checa quando o campo de vetores tem um conjunto contínuo de singularidades ou não, isto é, quando as duas componentes do polinômio do campo de vetores tem um fator comum ou não. Se eles tem um fator comum, ele divide este campo de vetores por este fator comum e estuda o novo campo de vetores. As vezes, o pacote computacional algébrico usado não consegue encontrar este termo comum. Nestes casos o P4 trabalhará incorretamente. Se o usuário sabe o fator comum (por intuição ou por um outro pacote computacional algébrico tal como o Maple, Mathematica, Axion,...), ele pode evitar este problema dando este fator, juntamente com o campo de vetores reduzido (isto é, o campo de vetores depois de dividido pelo fator comum), para o P4.

Então, no que segue, seja

$$\begin{cases} \dot{x} = p(x, y) \\ \dot{y} = q(x, y) \end{cases}$$

com $\text{mdc}(p, q) = 1$.

Agora, o programa determinará as singularidades isoladas finitas. Isto pode ser feito por métodos algébricos ou por métodos numéricos. Se o grau do campo de vetores é alto, determinar estas singularidades pode levar muito tempo, nestes casos é melhor utilizar métodos numéricos.

Para cada singularidade (x_0, y_0) , o P4 determina o retrato de fase da seguinte maneira. Primeiramente ele calcula a matriz jacobiana em cada singularidade, isto é,

$$JX(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial p}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial q}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial q}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix},$$



e calcula o valor de seus autovalores λ_1 e λ_2 . Ele distingue diferentes casos, dependendo quando ambos os autovalores são reais, ambos os autovalores são imaginários puros ou quando ambos os autovalores são complexos.

1) λ_1 e λ_2 são reais. Se λ_1 e λ_2 tem o mesmo sinal, então (x_0, y_0) é um nó estável (instável) e está resolvido o problema. Se eles tem sinais diferentes, então (x_0, y_0) é uma sela, e ele calcula uma aproximação de Taylor de ordem n das variedades estável e instável como segue.

Considere as transformações

$$\begin{cases} \bar{x} = x - x_0 \\ \bar{y} = y - y_0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \bar{x} = w_{11}u + w_{21}v \\ \bar{y} = w_{12}u + w_{22}v \end{cases}$$

com (w_{11}, w_{12}) (respectivamente (w_{21}, w_{22})) um autovetor associado ao autovalor λ_1 (respectivamente λ_2).

Usando estas transformações ele obtém o campo de vetores

$$\begin{cases} \dot{u} = \lambda_1 u + p(u, v) \\ \dot{v} = \lambda_2 v + q(u, v) \end{cases} \quad (5.1)$$

com $gr\ p \geq 2$ e $gr\ q \geq 2$. Escrevendo as variedades invariantes como um gráfico $(u, f(u))$ e usando a invariância do fluxo, resultará em

$$f(u) = \sum_{i=2}^n a_i u^i + o(u^n), \quad (5.2)$$

com

$$a_i = \frac{b_i}{(i\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad i = 2, \dots, n$$

onde b_i é o coeficiente de u^i na expressão $q(u, f(u)) - f'(u)p(u, f(u))$. A variedade $(v, g(v))$ é calculada de forma análoga.

Se $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$ então a singularidade (x_0, y_0) é semi-hiperbólica. Neste caso existe uma variedade central que é tangente à linha $v_2(x - x_0) - v_1(y - y_0) = 0$, com (v_1, v_2) um autovetor associado ao autovalor nulo. Para calcular a variedade central, ele simplifica o campo de vetores da mesma forma que no caso da sela. Então o novo campo de vetores satisfaz

$$\begin{cases} \dot{u} = p(u, v) \\ \dot{v} = \lambda_2 v + q(u, v) \end{cases} \quad (5.3)$$

com $gr\ p \geq 2$ e $gr\ q \geq 2$. Ele escreve a variedade central como um gráfico de $(u, f(u))$, e

utilizando a invariância do fluxo, resulta em

$$f(u) = \sum_{i=2}^n a_i u^i + o(u^n),$$

onde a_i é o coeficiente de u^i na expressão $-[q(u, f(u)) - f'(u)p(u, f(u))]/\lambda_2$. Isto resulta no comportamento

$$\dot{u} = c_m u^m + o(u^m).$$

Usando estas informações a origem será

- (i) um nó estável se $c_m < 0$, m ímpar e $\lambda_2 < 0$,
- (ii) um nó instável se $c_m > 0$, m ímpar e $\lambda_2 > 0$,
- (iii) uma sela-nó se m é par,
- (iv) uma sela se $c_m > 0$, m ímpar e $\lambda_2 < 0$ ou $c_m < 0$, m ímpar e $\lambda_2 > 0$.

Se a singularidade é uma sela-nó ou uma sela, então ele pode calcular uma aproximação de Taylor para as variedades instável e estável.

No caso dos dois autovalores serem nulos, o ponto (x_0, y_0) é não elementar. Para estudar o campo de vetores próximo a singularidade, ele desingulariza a singularidade fazendo um “blow-up” quase-homogêneo.

O algoritmo da desingularização consiste na construção de uma lista S de singularidades elementares, junto com a variedade invariante, no “blow-up locus” que será ordenado no sentido anti-horário. Cada elemento de S é da forma

$$[[T_1, \dots, T_m], x, y, Y, sep, type],$$

onde (x, y) é uma singularidade elementar no “blow-up locus”, Y é o campo de vetores após o “blow-up”. A variável m é o número de “níveis de desingularização” que ele precisará e $T_1, \dots, T_m$ são as transformações, isto é, T_i é da forma $(x, y) \mapsto (c_1 x^{d_1} y^{d_2} + x_{i-1}, c_2 x^{d_3} y^{d_4} + y_{i-1})$, com (x_{i-1}, y_{i-1}) a singularidade não elementar no “nível de desingularização” $i - 1$. A variedade sep é a aproximação de Taylor da variedade invariante e $type$ é o tipo da singularidade que temos (ver figura 5.1)

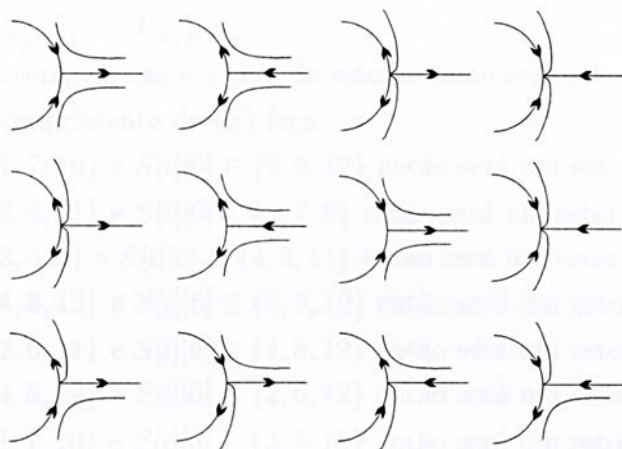


Figura 5.1: diferentes tipos de singularidades no “blow-up locus”.

Na seguinte construção usaremos “Gosub” seguida por um número romano, significando que primeiramente ele elaborará o procedimento indicado pelo número romano, depois continuará com a próxima linha. A construção de S é como segue:

I. Entre com o campo de vetores X com uma singularidade não elementar (x_0, y_0) .

- Se $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ então considere a transformação $\bar{x} = x - x_0, \bar{y} = y - y_0$.
- Determine o Diagrama de Newton e $\gamma_1 : \alpha r + \beta s = d$, com $\text{mdc}(\alpha, \beta) = 1$.
- Seja $N_p = 0, l = 1$ e $T_1 : (x, y) \mapsto (x^\alpha + x_0, x^\beta y + y_0)$.
- Faça um “blow-up” na direção do eixo- x positivo. Resultando em um campo de vetores

Y .

- Gosub II
- Seja $N_n = 0, l = 1$ e $T_1 : (x, y) \mapsto (-x^\alpha + x_0, x^\beta y + y_0)$.
- Faça um “blow-up” na direção do eixo- x negativo. Resultando em um campo de vetores

Y .

- Gosub III
- Se γ_1 está completamente no semi-plano $\{r \geq 0\}$, então

- Seja $T : (x, y) \mapsto (xy^\alpha + x_0, y^\beta + y_0)$.
- Faça um “blow-up” na direção do eixo- y positivo. Resultando em um campo de vetores

Y com $(0, 0)$ uma singularidade elementar. Da mesma maneira como em II construa a lista $V = [[T], 0, 0, Y, \text{sep}, \text{type}]$.

- Seja $T : (x, y) \mapsto (xy^\alpha + x_0, -y^\beta + y_0)$.

- Faça um “blow-up” na direção do eixo- y negativo. Resultando em um campo de vetores Y com $(0, 0)$ uma singularidade elementar. Da mesma maneira como em II construa a lista $V = [[T], 0, 0, Y, \text{sep}, \text{type}]$.

- $S = [W, L_1^p, \dots, L_{N_p}^n, V, L_1^p, \dots, L_{N_n}^n]$.

senão $S = [L_1^p, \dots, L_{N_p}^p, L_1^n, \dots, L_{N_n}^n]$.

- Imprima todas as separatrizes e o tipo de setores como segue.

- Para $i = 2$ até o comprimento de (S) faça

- * Se $S[i-1][6] \in \{1, 7, 10\}$ e $S[i][6] \in \{2, 6, 12\}$ então será um setor hiperbólico.

- * Se $S[i-1][6] \in \{2, 6, 11\}$ e $S[i][6] \in \{1, 7, 9\}$ então será um setor hiperbólico.

- * Se $S[i-1][6] \in \{3, 5, 9\}$ e $S[i][6] \in \{4, 8, 11\}$ então será um setor elíptico.

- * Se $S[i-1][6] \in \{4, 8, 12\}$ e $S[i][6] \in \{3, 5, 10\}$ então será um setor elíptico.

- * Se $S[i-1][6] \in \{2, 6, 11\}$ e $S[i][6] \in \{4, 8, 12\}$ então será um setor atrator.

- * Se $S[i-1][6] \in \{4, 8, 12\}$ e $S[i][6] \in \{2, 6, 12\}$ então será um setor atrator.

- * Se $S[i-1][6] \in \{1, 7, 10\}$ e $S[i][6] \in \{3, 5, 10\}$ então será um setor repulsor.

- * Se $S[i-1][6] \in \{3, 5, 9\}$ e $S[i][6] \in \{1, 7, 9\}$ então será um setor repulsor.

- Determine o tipo de setor entre o último elemento de S e o primeiro.

- Fim.

II. Entre com o campo de vetores Y , o nível de desingularização l e a lista $[T_1, \dots, T_l]$.

(1) Se $x = 0$ não é uma linha de singularidades então determine as singularidades em Y na linha $x = 0$.

- Classifique as singularidades de tal forma que $[y_1, \dots, y_n]$ estejam em ordem crescente.

- Para $i = 1$ até n faça

- Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores de $JY(0, y_i)$.

- Translade o ponto $(0, y_i)$ para a origem. Resultando no campo de vetores $\bar{Y}$.

- Se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ então é necessário fazer um "blow-up" em $\bar{Y}$ na origem. Gosub IV.

Senão

- * Se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ então sep é a aproximação de Taylor da variedade instável e tipo 1.

- * Se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$ então sep é a aproximação de Taylor da variedade instável e tipo 2.

- * Se $\lambda_1 = 0$ então sep é a aproximação de Taylor da variedade central. Dependendo do comportamento da variedade central será tipo 5 ou 6 (respectivamente 7 ou 8) se $\lambda_2 > 0$ (respectivamente $\lambda_2 < 0$).

- * Se $\lambda_2 = 0$ então sep é a aproximação de Taylor da variedade instável (respectivamente estável) de tipo 1, 3, 9 ou 10 (respectivamente 2, 4, 11 ou 12) se $\lambda_1 > 0$ (respectivamente $\lambda_1 < 0$).

- * Se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ será tipo 3. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ então sep é a aproximação de Taylor da órbita que é tangente com a linha $y = vx$, com v um autovetor associado ao autovalor λ_1 . Se $\lambda_1 = \lambda_2$ então sep é a linha $y = 0$.

- * Se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$ será tipo 4. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ então sep é a aproximação de Taylor da órbita que é tangente com a linha $y = vx$, com v um autovetor associado ao autovalor λ_1 . Se $\lambda_1 = \lambda_2$ então sep é a linha $y = 0$.

- * $N_p = N_p + 1$, $L_{N_p}^p = [[T_1, \dots, T_l], 0, y_i, \bar{Y}, sep, type]$.



- Volte

(2) Se $x = 0$ é uma linha de singularidades então determine todas as singularidades não elementares na linha $x = 0$.

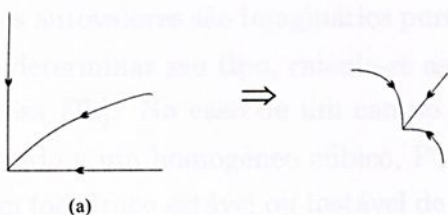
- Classifique as singularidades de tal forma que $[y_1, \dots, y_n]$ estejam em ordem crescente.
- Para $i = 1$ até n faça
 - Translade o ponto $(0, y_i)$ para a origem. Resultando no campo de vetores $\bar{Y}$.
 - Determine o Diagrama de Newton de $\bar{Y}$ e $\gamma_1 : \alpha r + \beta s = d$.
 - Seja $T_{l+1}(x, y) \mapsto (x^\alpha, x^\beta y + y_i)$.
 - Faça um "blow-up" na direção do eixo- x .
 - Gosub II com $l \rightarrow l + 1$.

- Volte

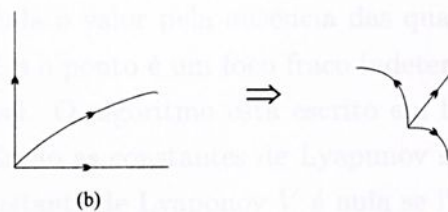
III. O mesmo que II, mas classifique as singularidades em ordem decrescente. Troque as variáveis N_p e $L_{N_p}^p$ com N_n e $L_{N_n}^n$, e II e IV com III e V.

IV. Entre com o campo de vetores $\bar{Y}$, o ponto $(0, y_i)$ e $[T_1, \dots, T_l]$.

- Determine o Diagrama de Newton e $\gamma_1 : \alpha r + \beta s = d$.
- Faça um "blow-up" na direção do eixo- x . Resultando no campo de vetores Y^p .
- Determine o comportamento de Y^p perto da origem.
- Se o comportamento perto da origem é como na figura 5.2(a) então



(a)



(b)

Figura 5.2: segundo "blow-up" na direção eixo- y .

- tipo 4 e sep é a linha $y = x$.
- $N_p = N_p + 1$.
- $L_{N_p}^p = [[T_1, \dots, T_l, (x, y) \mapsto (xy^\alpha, y^\beta + y_i)], 0, 0, y_i, Y^p, sep, type]$.
- Se o comportamento da origem é como na figura 5.2(b) então
 - tipo 3 e sep é a linha $y = x$.
 - $N_p = N_p + 1$.

- $L_{N_p}^p = [[T_1, \dots, T_l, (x, y) \mapsto (xy^\alpha, y^\beta + y_i)], 0, 0, y_i, Y^p, sep, type]$.

• Seja $T_{l+1} : (x, y) \mapsto (x^\alpha, x^\beta y + y_i)$

• Faça um “blow-up” na direção do eixo- x . Resultando no campo de vetores Y .

• Gosub II com $l \rightarrow l + 1$.

• Faça um “blow-up” na direção do eixo- y . Resultando no campo de vetores Y^n .

• Determine o comportamento de Y^n perto da origem.

• Se o comportamento perto da origem é como na figura 9(a) então

- tipo 4 e sep é a linha $y = x$.

- $N_p = N_p + 1$.

- $L_{N_p}^p = [[T_1, \dots, T_l, (x, y) \mapsto (xy^\alpha, -y^\beta + y_i)], 0, 0, y_i, Y^p, sep, type]$.

• Se o comportamento da origem é como na figura 9(b) então

- tipo 3 e sep é a linha $y = x$.

- $N_p = N_p + 1$.

- $L_{N_p}^p = [[T_1, \dots, T_l, (x, y) \mapsto (xy^\alpha, y^\beta + y_i)], 0, 0, y_i, Y^p, sep, type]$.

• Volte

V. O mesmo que IV, mas primeiramente faça um “blow-up” na direção do eixo- y negativo e depois na direção do eixo- y positivo. Troque as variáveis N_p e $L_{N_p}^p$ com N_n e $L_{N_n}^n$, e II com III.

2) Se os autovalores são imaginários puros, então o ponto (x_0, y_0) é um foco fraco ou um centro. Para determinar seu tipo, calcula-se as constantes de Liapunov usando a técnica atribuída a Torregrosa [To]. No caso de um campo de vetores quadrático ou de um campo de vetores linear somado a um homogêneo cúbico, P4 está pronto para determinar quando o ponto é um centro, um foco fraco estável ou instável de uma certa ordem ou não. Em todos os outros casos o P4 calcula o valor pela ausência das quatro primeiras constantes de Lyapunov. Se elas são todas nulas o ponto é um foco fraco indeterminado, no outro caso tem-se um foco fraco estável ou instável. O algoritmo está escrito em linguagem C então os cálculos são feitos numericamente. Então as constantes de Lyapunov são calculadas sob uma certa precisão. Diz-se então que a constante de Lyapunov V é nula se $|V| < 10^{-8}$.

3) No caso dos autovalores serem complexos mas não imaginários puros, o ponto (x_0, y_0) é um foco forte estável (instável) se $Tr(JX_{(x_0, y_0)}) < 0$ (respectivamente $Tr(JX_{(x_0, y_0)}) > 0$).

Agora determinam-se as singularidades no infinito, estudando-se o campo de vetores no Disco de Poincaré. Primeiramente transforma-se o campo de vetores usando a transformação

$$\begin{cases} x = \frac{1}{z_2} \\ y = \frac{z_1}{z_2} \end{cases}$$



Isto resulta no campo de vetores (depois de multiplicar o resultado por z_2^{d-1})

$$\begin{cases} \dot{x} = z_2^d(-z_1 p(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2})) + q(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}) \\ \dot{y} = -z_2^{d+1} p(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}) \end{cases}$$

com d o grau do campo de vetores. Suponha que $q_d(1, z_1) - z_1 p_d(1, z_1) \neq 0$. O ponto $(z_1, 0)$ que satisfaz $q_d(1, z_1) - z_1 p_d(1, z_1) = 0$ são as singularidades no infinito de X . Estes pontos são estudados da mesma forma que nos casos finitos. No caso que $q_d(1, z_1) - z_1 p_d(1, z_1) \equiv 0$, a linha no infinito é uma linha de singularidades. Para estudar as singularidades no infinito dividi-se o campo de vetores por z_2 , e estuda-se este campo de vetores perto da linha $z_2 = 0$.

Depois transforma-se o campo de vetores usando a transformação

$$\begin{cases} x = \frac{z_1}{z_2} \\ y = \frac{1}{z_2} \end{cases}.$$

Com isso obtém-se o campo de vetores (depois de multiplicar o resultado por z_2^{d-1})

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2^d(-z_1 p(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2})) + q(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2}) \\ \dot{z}_2 = -z_2^{d+1} q(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2}) \end{cases}.$$

Falta somente determinar quando $(0, 0)$ é uma singularidade ou não, desde que as outras tenham sido estudadas nas primeiras cartas.

Se existe uma singularidade no infinito que é não elementar, é melhor, as vezes, estudar o campo de vetores em um Disco de Poincaré-Lyapunov de algum grau (α, β) , isto é, usar uma transformação da forma

$$\begin{cases} x = \frac{\cos\theta}{r^\alpha} \\ y = \frac{\sin\theta}{r^\beta} \end{cases}$$

para o estudo "no infinito", que resulta (depois de multiplicar o resultado por r^c)

$$\begin{cases} \dot{r} = -r^{c+1} \sum_{\delta \leq c} r^{-\delta} (\cos\theta p_\delta(\cos\theta, \sin\theta) + \sin\theta q_\delta(\cos\theta, \sin\theta)) \\ \dot{\theta} = r^c \sum_{\delta \leq c} r^{-\delta} (-\beta \sin\theta p_\delta(\cos\theta, \sin\theta) + \alpha \cos\theta q_\delta(\cos\theta, \sin\theta)) \end{cases} \quad (5.4)$$

com

$$\begin{cases} \dot{x} = p_\delta(x, y) \\ \dot{y} = q_\delta(x, y) \end{cases}$$

a componente quase-homogênea do tipo (α, β) e grau quase-homogêneo δ ; c é escolhido de

forma a ser o máximo de δ .

Com uma escolha apropriada de (α, β) encontra-se apenas singularidades elementares no infinito. Para simplificar os cálculos ele prefere trabalhar com cartas.

Primeiramente transforma-se o campo de vetores usando a transformação

$$\begin{cases} x = \frac{1}{z_2^\alpha} \\ y = \frac{z_1}{z_2^\beta} \end{cases}.$$

Com isso obtém-se o campo de vetores (depois de multiplicar o resultado por αz_2^c)

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2^c \sum_{\delta \leq c} (z_2^{-\delta} (\alpha q(1, z_1) - \beta z_1 p_\delta(1, z_1))) \\ \dot{z}_2 = -z_2^{c+1} \sum_{\delta \leq c} (z_2^{-\delta} p_\delta(1, z_1)) \end{cases}. \quad (5.5)$$

Se $\alpha q_c(1, z_1) - \beta z_1 p_c(1, z_1) \neq 0$, então o ponto $(z_1, 0)$ que satisfaz $\alpha q_c(1, z_1) - \beta z_1 p_c(1, z_1) = 0$ são singularidades no infinito de X . Estes pontos são estudados da mesma forma que nos casos finitos. Nos casos em que $\alpha q(1, z_1) - \beta z_1 p_\delta(1, z_1) \equiv 0$, a linha no infinito é uma linha de singularidades. Para estudar o comportamento “no infinito” dividi-se o campo de vetores por z_2 e estuda-se este campo de vetores na linha $z_2 = 0$.

Depois transforma-se o campo de vetores usando a transformação

$$\begin{cases} x = \frac{-1}{z_2^\alpha} \\ y = \frac{z_1}{z_2^\beta} \end{cases}.$$

Com isso obtém-se o campo de vetores (depois de multiplicar o resultado por αz_2^c)

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2^c \sum_{\delta \leq c} (z_2^{-\delta} (\alpha q(-1, z_1) + \beta z_1 p_\delta(-1, z_1))) \\ \dot{z}_2 = -z_2^{c+1} \sum_{\delta \leq c} (z_2^{-\delta} p_\delta(-1, z_1)) \end{cases}. \quad (5.6)$$

Este campo de vetores pode ser estudado da mesma forma que o anterior.

Finalmente consideremos as duas transformações

$$\begin{cases} x = \frac{1}{z_2^\alpha} \\ y = \frac{z_1}{z_2^\beta} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x = \frac{-1}{z_2^\alpha} \\ y = \frac{z_1}{z_2^\beta} \end{cases}.$$

Para estes dois campos de vetores é necessário somente determinar quando o ponto $(0, 0)$ é uma singularidade ou não, desde que os outros tenham sido estudados nas duas primeiras cartas.

Neste estágio pode-se já desenhar uma grande parte do retrato de fase do campo de vetores. Primeiro desenha-se as separatrizes invariantes da seguinte maneira. No caso das singularidades serem uma sela ou uma sela-nó, utiliza-se a aproximação de Taylor da variedade invariante até encontrar-se a fronteira de um círculo de raio ϵ , para um certo $\epsilon \geq 0$. A partir deste ponto, integra-se as separatrizes com o método de Runge-Kutta de ordens 7 e 8. Para prevenir um “overflow” numérico na aproximação de Taylor, normaliza-se os campos de vetores (5.1) e (5.3) antes de calcular a aproximação de Taylor como segue.

Seja a o maior coeficiente em valor absoluto do campo de vetores. Reescalona-se o tempo de tal forma que este coeficiente se torne igual a $1000 \cdot \text{sign}(a)$. No começo da integração numérica das separatrizes tem-se um erro que vem da aproximação de Taylor. Tomamos $\epsilon = 0,01$ e uma ordem de aproximação $n = 6$. Então tem-se um erro de ordem 10^{-14} . Para o programa ter certeza que este erro não é tão grande, faz-se um teste para decidir quando a aproximação de Taylor “aproxima-se” da variedade invariante real ou não. Seja $f(t)$ a aproximação de Taylor da variedade invariante, que é tangente a linha $v = 0$. Suponha que $t_1^2 + f(t_1)^2 = \epsilon^2$ e considere o ponto $(ih, f(ih))$, $i = 1, \dots, 100$, com $h = t_1/100$. Considere o ângulo $\alpha_i = \arctg(\dot{f}(ih))$ e $\beta_i = \arctg\left(\frac{\dot{v}(ih, f(ih))}{\dot{u}(ih, f(ih))}\right)$, $i = 1, \dots, 100$. Se $\|\alpha_i - \beta_i\| < 10^{-18}$, $\forall i = 1, \dots, 100$, aceita-se a aproximação de Taylor, caso contrário, calcula-se a aproximação de Taylor de uma ordem maior e faz-se o teste outra vez. Tomamos por ordem máxima $n = 20$. Neste caso, o erro é de ordem 10^{-42} . Este teste funciona muito bem para as variedades estável e instável, mas para a variedade central pode falhar as vezes, especialmente se o autovalor não nulo, em valor absoluto, é grande.

Se a singularidade é não elementar, dividi-se o ponto em diversas singularidades elementares. Para cada um destes pontos desenha-se a variedade invariante (que corresponde a uma separatriz da singularidade não elementar) como segue. Primeiro utiliza-se a aproximação de Taylor na carta do “blow-up” que corresponde a singularidade elementar, a uma distância ϵ da singularidade. Então estende-se a separatriz nesta carta por integração numérica, a uma distância 1 da singularidade. Depois estende-se, por integração numérica, para o plano real. O número de passos tem que ser decidido de um modo interativo pelo usuário.

Para prevenir um “overflow” numérico quando o programa tiver integrando o campo de vetores, nem sempre integra-se o campo de vetores no plano real e projeta-se na Esfera de Poincaré, ele utiliza cartas diferentes para cobrir a Esfera de Poincaré, como segue. Seja (X, Y, Z)

um ponto da Esfera de Poincaré com $Z > 0$, e seja (θ, φ) uma coordenada esférica do ponto, isto é, $X = \cos\theta\sin\varphi$, $Y = \sin\theta\sin\varphi$ e $Z = \cos\varphi$.

Se $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ transformamos o ponto para o plano real, isto é, considera-se o ponto $(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z})$ e integra-se o campo de vetores original. Se $\varphi > \frac{\pi}{4}$ então considera-se os 4 casos seguintes

(i) Se $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, considera-se o ponto $(z_1, z_2) = (\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X})$ e integra-se o campo de vetores

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2^d(-z_1 p(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}) + q(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2})) \\ \dot{z}_2 = -z_2^{d+1} p(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}) \end{cases} \quad (5.7)$$

(ii) Se $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$, considera-se o ponto $(z_1, z_2) = (\frac{X}{Y}, \frac{Z}{Y})$ e integra-se o campo de vetores

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2^d(p(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2}) - z_1 q(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2})) \\ \dot{z}_2 = -z_2^{d+1} p(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2}) \end{cases} \quad (5.8)$$

(iii) Se $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$, considera-se o ponto $(z_1, z_2) = (\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X})$ e integra-se o campo de vetores

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = (-1)^{d-1} z_2^d(-z_1 p(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}) + q(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2})) \\ \dot{z}_2 = (-1)^d z_2^{d+1} p(\frac{1}{z_2}, \frac{z_1}{z_2}) \end{cases} \quad (5.9)$$

(iv) Se $\frac{5\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{4}$, considera-se o ponto $(z_1, z_2) = (\frac{X}{Y}, \frac{Z}{Y})$ e integra-se o campo de vetores

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = (-1)^{d-1} z_2^d(p(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2}) - z_1 q(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2})) \\ \dot{z}_2 = (-1)^d z_2^{d+1} p(\frac{z_1}{z_2}, \frac{1}{z_2}) \end{cases} \quad (5.10)$$

O modelo de singularidades, tanto as finitas como as infinitas, juntamente com as separatrizes, darão uma boa idéia do retrato de fase global (ver [Ma] e [Ne]). É claro que não vê-se o número exato e a localização das órbitas fechadas, mas tem-se a região em que os ciclos limites ou anéis de órbitas fechadas podem ocorrer. Se tem-se a impressão de que órbitas fechadas ou, especialmente, ciclos limites vão ocorrer, pode-se pedir ao P4 para localizar estes ciclos limites como segue. Primeiramente devemos selecionar dois pontos x e y . Estes dois pontos devem estar próximos à região onde pretende-se encontrar ciclos limites, e a linha L conectando ambos os pontos deve cortar o ciclo limite esperado. O P4 tenta determinar o ciclo limite como segue. Primeiro ele divide a linha em segmentos $[p_i, p_{i+1}]$ de comprimento h e começamos integrando pelo último segmento da linha L até o primeiro. Toda órbita próxima ao ciclo limite supostamente corta a linha L outra vez. Desta forma, detecta-se a existência do ciclo limite quando encontra-se uma mudança na aplicação retorno de Poincaré. O P4 detecta tal mudança como segue. Suponha que a integração começa de um ponto p_i em L , e que a órbita corta a linha L outra vez em um ponto q_i com $p_i < q_i$. O P4 toma agora o ponto p_j mais próximo de q_i com

$p_j > q_i$ e começa a integração na mesma direção. Se esta órbita corta L em um ponto q_j com $q_j < p_j$ então existe um ciclo limite entre os pontos q_i e q_j . Tomamos $h = 10^{-4}$. É claro que, desta forma, a única coisa que podemos dizer é que em uma região de comprimento 10^{-4} existe pelo menos um ciclo limite. As vezes é possível que o P4 não encontre nenhum ciclo limite. A razão é que nestes casos a aplicação retorno de Poincaré é muito próxima da identidade.

No caso em que estuda-se o campo de vetores em um Disco de Poincaré-Liapunov de grau (α, β) , o P4 desenha as órbitas do campo de vetores como segue

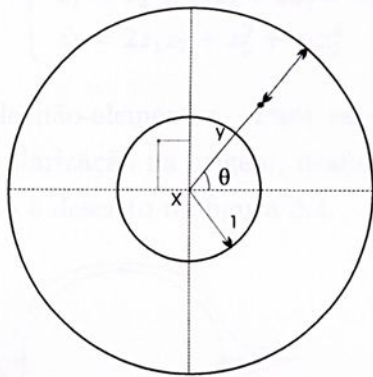


Figura 5.3: representação do disco de Poincaré-Liapunov de grau (α, β) .

Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Se $x^2 + y^2 \leq 1$, então (x, y) vai ser esboçada no interior do círculo unitário em torno da origem, por integração do campo de vetores original (é claro que fazendo a análise detalhada das singularidades finitas como apresentadas no caso da Compactificação de Poincaré). Se $x^2 + y^2 > 1$, o P4 faz a seguinte transformação, $x = \cos\theta/r^\alpha$ e $y = \sin\theta/r^\beta$, para esboçar no anel limitado pelos ciclos limites de raio 1 e pelos ciclos no infinito, integrando o campo de vetores (5.4), para estender a informação próximo das singularidades. Infelizmente, órbitas cruzando o círculo de raio 1 dão a impressão de terem uma derivada descontínua. Isto é devido ao fato do programa P4 estar usando duas transformações diferentes que não se encaixam no caminho diferenciável no círculo unitário.

5.1 Tratamento dos exemplos

Vamos considerar o campo de vetores

$$X : \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - y(1 + 2x) \end{cases} .$$

Primeiro o programa P4 estuda este campo de vetores no Disco de Poincaré. Assim, a origem é uma singularidade do campo de vetores que é um foco estável forte. Para o estudo no infinito,



o P4 primeiro considera o campo de vetores em uma carta U_1 . Este campo de vetores tem a equação

$$X_1 : \begin{cases} \dot{z}_1 = -2z_1 - z_2 - z_1z_2 - z_2^2z_2 \\ \dot{z}_2 = -z_1z_2^2 \end{cases}.$$

Daí, a origem é uma singularidade que é uma sela semi-hiperbólica. Depois ele vai considerar o campo de vetores em uma carta U_2 que tem a equação

$$X_2 : \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + z_1z_2 + 2z_2^2 + z_1^2z_2 \\ \dot{z}_2 = 2z_1z_2 + z_2^2 + z_1z_2^2 \end{cases},$$

cujas origens são singularidades não-elementares. Para saber o comportamento próximo da origem deve-se fazer uma desingularização na origem, usando um “blow-up” quase-homogêneo de grau $(1, 2)$. Este procedimento é descrito na figura 5.4.

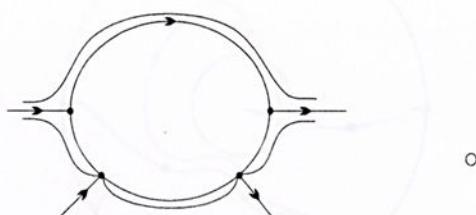


Figura 5.4: “Blow-up” do campo de vetores X_2 próximo à origem.

Usando esta informação, pode-se desenhar o retrato de fase no Disco de Poincaré (ver figura 5.5).

Desde que exista uma singularidade não-elementar no infinito, pode-se estudar o campo de vetores no Disco de Poincaré-Liapunov. Usando um Disco de Poincaré-Liapunov de grau $(1, 2)$ encontra-se 4 singularidades no infinito, dois nós e duas selas semi-hiperbólicas. Usando esta informação, pode-se agora desenhar o retrato de fase no Disco de Poincaré-Liapunov de grau $(1, 2)$ (ver figura 5.6)

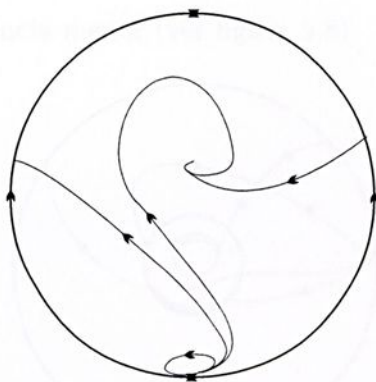


Figura 5.5: Retrato de fase do campo de vetores X no disco de Poincaré.

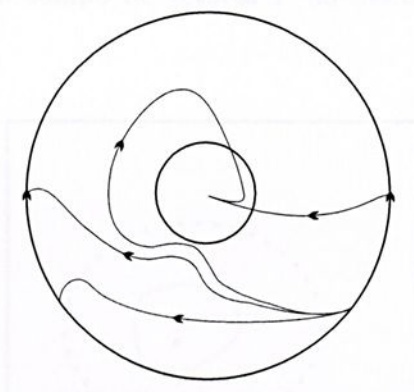


Figura 5.6: Retrato de fase do campo de vetores X no disco de Poincaré-Liapunov de grau $(1, 2)$.

Considere o campo de vetores

$$X_2 : \begin{cases} \dot{x} = y - x^2 \\ \dot{y} = -\frac{1}{20} - x - x^2 \end{cases} .$$

Estudar este campo de vetores no Disco de Poincaré-Liapunov de grau $(1, 2)$. Usando o P4 encontra-se que $((5 + \sqrt{30})/10, (11 + 2\sqrt{30})/20)$ é um ponto de sela e $((5 - \sqrt{30})/10, (11 - 2\sqrt{30})/20)$ é um foco instável forte.

No infinito encontram-se 4 singularidades, dois pontos na carta U_1 , o ponto $(0, 0)$ que é um nó repulsor e $(1, 0)$ que é uma sela-nó e dois pontos na carta U_2 , $(0, 0)$ que é um nó atrator e $(1, 0)$ que é uma sela-nó.

Usando esta informação, pode-se agora desenhar o retrato de fase no Disco de Poincaré-Liapunov de grau $(1, 2)$ (ver figura 5.7). Também descobre-se que o campo de vetores tem

um ciclo limite na circunferência menor (ver figura 5.8).

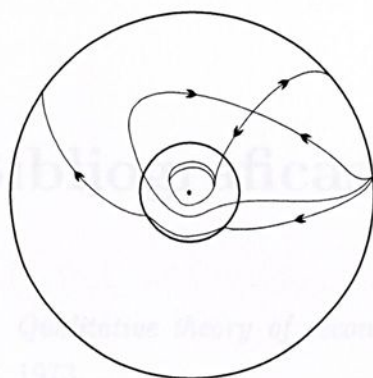


Figura 5.7: Retrato de fase do campo de vetores Y no disco de Poincaré-Liapunov de grau $(1, 2)$.

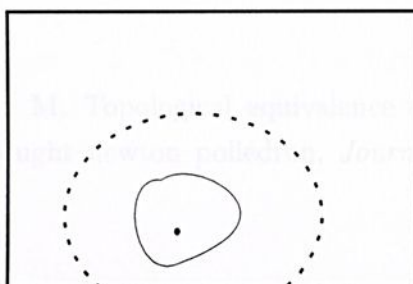


Figura 5.8: Ciclo limite do campo de vetores Y .

Referências Bibliográficas

- [A] ANDRONOV, A. A. CTAL, *Qualitative theory of second-order dynamical systems*. New York: John Wiley and Sons, 1973.
- [B] BENDIXSON, I. Sur les courbes définies par des équations différentieles. *Acta Mathematica*, v. 24, p. 1-88, 1901.
- [Bru] BRUNELLA, M.; MIARI, M. Topological equivalence of a plane vector field with its principal part defined through newton polyhedron. *Journal of Differential Equations*, v. 85, p. 338-366, 1990.
- [DH] DUMORTIER, F.; HERSSENS, C. Tracing phase portraits of planar polynomial vector fields with detailed analysis of the singularities. *Qualitative Theory of Dynamical Systems* v. 1, p. 97-130, 1999.
- [Du] DUFF, G. Limit cycles and rotated vector fields. *Annals of Mathematics*, v. 57, p. 15-31, 1953.
- [Ly] LYAGINA, L. The integral curves of the equation $\dot{y} = (ax^2 + bxy + cy^2)/(dx^2 + exy + fy^2)$. *Uspehi Mathematics Nauk*, v. 6, p. 171-183, 1951.
- [Ma] MARKUS, L. Global structure of ordinary differential equation in the plane. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 76, p. 127-148, 1954.



- [Ne] NEUMANN, D. Classification of continuous flows on 2-manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 48, p. 338-366, 1975.
- [N/S] NEMYTSKII, V.V.; STEPANOV, V.V. *Qualitative Theory of Differential Equations*. Princeton: Princeton University Press, 1960.
- [P] POINCARÉ, H. Mémoire sur les courbes définies par une equation defférentielle. *J.Mathématiques*, v. 7, p. 375-422, 1881.
- [Pa] PALIS, J.; MELO, W. *Introdução aos sistemas dinâmicos*. Rio de Janeiro: IMPA, 1977. (Projeto Euclides)
- [Pe] PERKO, L. *Differential equations and dynamical systems*, 3th edition. New York: Springer-Verlag New York, 2001.
- [Pel] PELLETIER, M. *Contribution a l'étude de quelques singularités de systemes non lineaires*. 1994, 104 f. Tese (PhD), Université de Bourgogne, Bourgogne, 1994.
- [R] RUDIN, W. *Principles of mathematical analysis*. New York: McGraw Hill, 1964.
- [S1] SOTOMAYOR, J. *Curvas definiadas por equações diferenciadas no plano*. Rio de Janeiro: IMPA, 1981. (13º Colóquio Brasileiro de Matemática)
- [S2] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciadas ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979. (Projeto Euclides)
- [To] TORREGROSA, J. *Punts singular i òrbites periodiques per a camps vectorials*. 1998, 196 f. Tese (PhD), Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona, 1998.



