



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Campus de Rio Claro

# Estabilidade para Equações Discretas Autônomas

**Edilson Zibiani**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora  
**Profa. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato**

**2015**

517.38 Zibiani, Edilson  
Z64e Estabilidade para Equações Discretas Autônomas/ Edilson  
Zibiani- Rio Claro: [s.n.], 2015.  
49 f.: fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.  
Orientadora: Suzinei Aparecida Siqueira Marconato

1. Equações Discretas. 2. Estabilidade. 3. Funções de Liapunov.  
4. Funções Dicotômicas. I. Título

*Aos meus pais,  
Belmiro e Carmen,  
dedico.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por me guiar, proteger, conceder a graça de realizar mais uma etapa fundamental em minha vida e pelas pessoas especiais que colocou em meu caminho, as quais sou imensamente grato.

Agradeço aos meus pais Belmiro e Carmen, pela criação, dedicação, ensinamentos e apoio incondicional em minhas decisões, mesmo as mais difíceis. Verdadeiras bússolas que norteiam minha existência.

Agradeço à Professora Doutora Suzinei Aparecida Siqueira Marconato por sua exímia orientação na realização deste trabalho, pela amizade, compreensão, conselhos, paciência e pela disponibilidade em sempre esclarecer minhas dúvidas. Obrigado por todos os ensinamentos.

Agradeço aos professores do IBILCE pela formação acadêmica, em especial ao Professor Doutor José Roberto Ruggiero e à Professora Doutora Rita de Cássia Pavani Lamas, pela carta de recomendação, pelos estágios realizados e sobretudo pela confortante confiança depositada em meu trabalho durante a graduação.

Agradeço aos professores de Rio Claro pela amizade, compreensão e sobretudo pela formação acadêmica. Aos funcionários do Departamento por serem muito prestativos.

Agradeço aos meus irmãos Erivaldo e Érica pela parceria e pelos cuidados despendidos ao irmão caçula. Suas contribuições, cada qual ao seu modo, foram fundamentais para a conclusão de mais esta etapa. Juntos brincamos na infância, juntos avançamos na idade e juntos conquistaremos todos nossos sonhos.

Agradeço ao meu tio Valdomiro, que com sua infindável alegria, mostra que apesar de todas as dificuldades da vida, podemos sorrir sempre.

Agradeço aos amigos e companheiros de viagem: Mariana, Aline, Débora, Denis, João, Edmar, Thaisa, Érica, Juliano, Renato, Franciéli, Felipe e Williner. Juntos fizemos incríveis viagens e vivemos momentos que jamais serão apagados de nossa memória. Obrigado pela força que cada um proporcionou ao grupo.

Agradeço aos meus avós por sempre acreditarem em meu trabalho.

Agradeço a todos os amigos de graduação, pós-graduação e amigos de longas datas, cujos nomes não ousarei dizer para não esquecer de nenhum. Sou grato pela contribuição direta ou indireta e tenho admiração especial por cada um de vocês.

Agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

*Se cheguei até aqui foi porque  
me apoiei no ombro dos gigantes.  
Isaac Newton*

# Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre estabilidade do equilíbrio nulo de equações discretas autônomas através do Método de Liapunov e do Método das Funções Dicotômicas, que é uma extensão do Método de Liapunov.

**Palavras-chave:** Equações Discretas, Estabilidade, Funções de Liapunov, Funções Dicotômicas.

# Abstract

This work presents a study about stability of the null equilibrium of autonomous discrete equations by Liapunov's Method and Method of Dichotomic Maps, which is an extension of the Liapunov's Method.

**Keywords:** Discrete Equations, Stability, Liapunov Functions, Dichotomic Maps.

# Lista de Figuras

|      |                                                                                                         |    |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1  | Pontos fixos: (i) $f(x) = x^2 - x + 1$ (ii) $f(x) = x^3$ . . . . .                                      | 16 |
| 2.2  | Ponto de equilíbrio estável. . . . .                                                                    | 18 |
| 2.3  | Ponto de equilíbrio instável. . . . .                                                                   | 19 |
| 2.4  | Ponto de equilíbrio assintoticamente estável. . . . .                                                   | 19 |
| 2.5  | Ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. . . . .                                       | 19 |
| 2.6  | Análise gráfica da órbita de $x_0$ . . . . .                                                            | 20 |
| 2.7  | Ponto de equilíbrio instável (semi-estável à esquerda) $f''(x^*) > 0$ . . . . .                         | 24 |
| 2.8  | Ponto de equilíbrio instável (semi-estável à direita), $f''(x^*) < 0$ . . . . .                         | 25 |
| 2.9  | Ponto de equilíbrio instável ( $f'(x^*) = 1, f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) > 0$ ). . . . .                 | 25 |
| 2.10 | Ponto de equilíbrio assintoticamente estável ( $f'(x^*) = 1, f''(x^*) = 0$ e $f'''(x^*) < 0$ ). . . . . | 26 |
| 2.11 | Análise gráfica de $x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n$ . . . . .                                                   | 28 |
| 2.12 | $1 < \mu < 3$ . . . . .                                                                                 | 30 |
| 2.13 | $0 < \mu < 1$ . . . . .                                                                                 | 30 |
| 2.14 | $\mu > 3.57$ . . . . .                                                                                  | 31 |
| 4.1  | Análise do sinal de $\Delta V(x, y)$ em torno do equilíbrio nulo. . . . .                               | 43 |
| 4.2  | Regiões do plano onde $\Delta_2^3 V(x, y) \geq 0$ . . . . .                                             | 45 |



# Sumário

|          |                                                                           |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                                         | <b>8</b>  |
| <b>2</b> | <b>Equações Discretas</b>                                                 | <b>9</b>  |
| 2.1      | Equações Lineares de Primeira Ordem . . . . .                             | 10        |
| 2.1.1    | Casos Especiais de Equações Lineares . . . . .                            | 11        |
| 2.2      | Solução Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias . . . . .            | 12        |
| 2.2.1    | Método de Euler . . . . .                                                 | 13        |
| 2.3      | Método de Newton . . . . .                                                | 14        |
| 2.4      | Pontos de Equilíbrio . . . . .                                            | 15        |
| 2.4.1    | Estabilidade de pontos de equilíbrio . . . . .                            | 17        |
| 2.4.2    | Análise Gráfica . . . . .                                                 | 20        |
| 2.5      | Critérios de estabilidade assintótica para pontos de equilíbrio . . . . . | 21        |
| <b>3</b> | <b>Método Direto de Liapunov</b>                                          | <b>32</b> |
| <b>4</b> | <b>Funções Dicotômicas</b>                                                | <b>36</b> |
|          | <b>Referências</b>                                                        | <b>49</b> |

# 1 Introdução

Equações discretas ou equações de diferenças descrevem sistemas dinâmicos cuja evolução no tempo é medida em intervalos discretos. Em muitas aplicações espera-se que o sistema apresente condições para se ter um estado de equilíbrio. Para isso, buscamos soluções constantes para essas equações obtidas a partir de pontos de equilíbrio, pontos essenciais a que se refere este estudo. Porém, a dificuldade em alguns casos para encontrar soluções explícitas para determinadas equações leva-nos a considerar informações sobre as soluções dessas equações sem realmente resolvê-las. Estamos interessados em saber se as soluções se aproximam ou se afastam da solução constante e devido a esse principal motivo, pautamo-nos no estudo da estabilidade de pontos de equilíbrio.

Este trabalho tem como objetivo estudar alguns resultados que permitem analisar a estabilidade dos pontos de equilíbrio. Abordamos inicialmente um estudo geral sobre equações discretas, em seguida estudamos o Método Direto de Liapunov e por fim o estudo de um método mais abrangente que aborda as Funções Dicotômicas.

O primeiro capítulo aborda a teoria geral sobre equações discretas. Em seguida, apresentamos dois métodos que se utilizam de equações discretas e consistem em determinar soluções numéricas para equações diferenciais. Apresentamos também os conceitos de ponto de equilíbrio, estabilidade de pontos de equilíbrio e análise gráfica de funções relacionadas com equações discretas. Por fim, estabelecemos os critérios de estabilidade para pontos de equilíbrio.

O segundo capítulo aborda o Método Direto de Liapunov que consiste em determinar funções reais nomeadas Funções de Liapunov e investigar a natureza qualitativa de soluções sem realmente determinar as próprias soluções.

No terceiro capítulo apresentamos uma teoria mais abrangente, as Funções Dicotômicas, importante ferramenta para analisar o comportamento da solução de equações discretas e que abrange o Método Direto de Liapunov.

No quarto capítulo demonstramos os teoremas que garantem estabilidade a partir de uma função dicotômica e estabilidade assintótica a partir de uma função estritamente dicotômica e apresentamos exemplos que ilustram os resultados.

## 2 Equações Discretas

Neste capítulo utilizamos a referência [2]. Equações Discretas geralmente descrevem a evolução de certo fenômeno ao longo do tempo, tal como o crescimento da população de um ano para o outro. Por exemplo, se uma determinada população tem gerações discretas, o tamanho da  $(n+1)$ -ésima geração, dada por  $x_{n+1}$ , está relacionado com a  $n$ -ésima geração representada por  $x_n$ . Podemos expressar essa relação por

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2.1)$$

em que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

As equações dadas por  $x_{n+1} - x_n = g(x_n)$  são chamadas de equações de diferenças. Observe que essas equações são equivalentes à (2.1), com  $f(x) = g(x) + x$ . Por isso, equações de diferenças são geralmente consideradas sinônimos de equações discretas.

Partindo de um valor inicial  $x_0$  obtemos, através da relação (2.1), a sequência

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots,$$

e, por conveniência, adotaremos a notação

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0) = f(f(x_0)), x_3 = f^3(x_0) = f(f(f(x_0))), \dots, x_n = f^n(x_0)$$

em que  $f^n(x_0)$  é chamado de  $n$ -ésima iteração de  $x_0$  através de  $f$ . Deste modo,

$$x_{n+1} = f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0)) = f(x_n)$$

e, assim, retomamos (2.1).

O conjunto de todas as iterações de  $x_0$ ,  $\{f^n(x_0) : n \geq 0\}$  com  $f^0(x_0) = x_0$ , é chamado de órbita de  $x_0$  e será denotada por  $O(x_0)$ . A solução de (2.1) que é denotada por  $x_n(x_0)$ , é dada por  $x_0, x_1, \dots$ .

Em alguns casos a função  $f$  que descreve o fenômeno estudado depende, também, da variável  $n$  e, neste caso, temos a equação

$$x_{n+1} = f(n, x_n) \quad (2.2)$$

que é chamada de equação *não autônoma*. No caso (2.1), a equação é chamada *autônoma*.

Neste capítulo, vamos considerar  $f$  definida em  $\mathbb{R}$ , contudo os conceitos apresentados podem ser generalizados para  $f$  definida em  $\mathbb{R}^n$ .

## 2.1 Equações Lineares de Primeira Ordem

Nesta seção estudaremos casos especiais de equações discretas denominadas equações lineares.

Uma equação linear *homogênea* de primeira ordem é dada por

$$x_{n+1} = a(n)x_n, \quad 0 \leq n_0 \leq n, \quad (2.3)$$

com valor inicial  $x_{n_0} = x_0$ , em que  $a$  é uma função real, com  $a(n) \neq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq n_0$ .

Uma equação linear *não homogênea* de primeira ordem é dada por

$$y_{n+1} = a(n)y_n + g(n), \quad 0 \leq n_0 \leq n, \quad (2.4)$$

com valor inicial  $y_{n_0} = y_0$ , em que  $a$  e  $g$  são funções reais, com  $a(n) \neq 0$  e  $g(n) \neq 0$ ,  $n \geq n_0$ .

Podemos obter solução de (2.3) através das seguintes iterações:

$$\begin{aligned} x_{n_0+1} &= a(n_0)x_{n_0} = a(n_0)x_0, \\ x_{n_0+2} &= a(n_0+1)x_{n_0+1} = a(n_0+1)a(n_0)x_0, \\ x_{n_0+3} &= a(n_0+2)x_{n_0+2} = a(n_0+2)a(n_0+1)a(n_0)x_0. \end{aligned}$$

Por indução, temos

$$x_n = x_{n_0+n-n_0} = a(n-1)a(n-2)\dots a(n_0)x_0,$$

ou seja, a solução de (2.3) com valor inicial  $x_{n_0}$  é

$$x_n = \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] x_0. \quad (2.5)$$

Repetindo o processo podemos determinar a solução da equação linear *não homogênea* (2.4)

$$\begin{aligned} y_{n_0+1} &= a(n_0)y_0 + g(n_0), \\ y_{n_0+2} &= a(n_0+1)y_{n_0+1} + g(n_0+1) \\ &= a(n_0+1)a(n_0)y_0 + a(n_0+1)g(n_0) + g(n_0+1). \end{aligned}$$

Usando indução matemática, mostra-se que, para todo  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $n \geq n_0$ ,

$$y_n = \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[ \prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right] g(r). \quad (2.6)$$

De fato, supondo que (2.6) seja válida para  $n = k, k \geq n_0$ , e adotando a notação  $\prod_{i=k+1}^k a(i) = 1$  e  $\sum_{i=k+1}^k a(i) = 0$ , temos

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= a(k) \left[ \prod_{i=n_0}^{k-1} a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1} \left[ a(k) \prod_{i=r+1}^{k-1} a(i) \right] g(r) + g(k) \\ &= \left[ \prod_{i=n_0}^k a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1} \left( \prod_{i=r+1}^k a(i) \right) g(r) + \left( \prod_{i=k+1}^k a(i) \right) g(k) \\ &= \left[ \prod_{i=n_0}^k a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^k \left( \prod_{i=r+1}^k a(i) \right) g(r). \end{aligned}$$

E assim, a fórmula dada em (2.6) é válida para todo  $n \geq n_0$ .

### 2.1.1 Casos Especiais de Equações Lineares

Há dois casos especiais de (2.4) que são importantes em muitas aplicações.

A primeira equação é dada por

$$y_{n+1} = ay_n + g(n), \quad n \geq 0, \quad (2.7)$$

com valor inicial  $y(0) = y_0$ , em que a função  $a(n)$  de (2.4) é constante. Para determinar sua solução, usamos a fórmula (2.6)

$$y_n = a^n y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} g(k). \quad (2.8)$$

O segundo caso especial é dado pela equação

$$y_{n+1} = ay_n + b, \quad n \geq 0, \quad (2.9)$$

com valor inicial  $y(0) = y_0$ , em que  $a(n)$  e  $b(n)$  são funções constantes. Para determinar sua solução, usamos a fórmula (2.8) e obtemos,

$$y_n = \begin{cases} a^n y_0 + b \left[ \frac{a^n - 1}{a - 1} \right], & \text{se } a \neq 1 \\ y_0 + bn, & \text{se } a = 1. \end{cases} \quad (2.10)$$

**Exemplo 2.1.** Uma droga é administrada uma vez a cada quatro horas. Seja  $D_n$  a quantidade de droga no sistema sanguíneo no  $n$ -ésimo intervalo de tempo. Se a quantidade administrada inicialmente é  $D_0$  e, sabendo que o corpo elimina uma certa fração  $p$  da droga em cada intervalo de tempo, determine  $D_n$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n$ .

Solução: Uma vez que a quantidade da droga no sistema sanguíneo do paciente no tempo  $(n+1)$  é igual à quantidade no tempo  $n$  diminuída da fração  $p$  que foi eliminada pelo corpo, acrescida da dosagem  $D_0$ , obtemos a seguinte equação:

$$D_{n+1} = (1 - p)D_n + D_0, \quad (2.11)$$

em que  $0 < 1 - p < 1$ .

Sua solução é determinada usando (2.10),

$$\begin{aligned} D_n &= (1 - p)^n D_0 + D_0 \left[ \frac{(1 - p)^n - 1}{-p} \right] \\ &= (1 - p)^n D_0 - \frac{D_0(1 - p)^n}{p} + \frac{D_0}{p} \\ &= \left[ D_0 - \frac{D_0}{p} \right] (1 - p)^n + \frac{D_0}{p}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \frac{D_0}{p}. \quad (2.12)$$

Observe que, substituindo  $D_0 = 2\text{cm}^3$  e  $p = 0,25$  na equação (2.11), obtemos

$$D_{n+1} = 0,75D_n + 2.$$

A Tabela (2.1) mostra os valores de  $D_n$ , para  $0 \leq n \leq 10$ .

Segue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 8\text{cm}^3$  é a quantidade de “equilíbrio” da droga no corpo do paciente.

|        |   |     |      |      |     |      |      |     |     |      |      |
|--------|---|-----|------|------|-----|------|------|-----|-----|------|------|
| $n$    | 0 | 1   | 2    | 3    | 4   | 5    | 6    | 7   | 8   | 9    | 10   |
| $D(n)$ | 2 | 3,5 | 4,62 | 5,47 | 6,1 | 6,58 | 6,93 | 7,2 | 7,4 | 7,55 | 7,66 |

Tabela 2.1: Valores de  $D_n$ .

Na próxima seção evidenciamos a utilização de equação de diferenças para determinar soluções discretas próximas das soluções contínuas de uma equação diferencial ordinária. Utilizamos a referência [2].

## 2.2 Solução Numérica de Equações Diferenciais Ordinárias

Equações diferenciais têm sido amplamente utilizadas como modelos matemáticos para uma variedade de fenômenos físicos, biológicos, etc. Estes modelos que descrevem

como as populações ou objetos evoluem continuamente no tempo são definidos no conjunto dos números reais. Em contraste, equações de diferenças que descrevem como populações ou objetos evoluem discretamente no tempo são definidas no conjunto dos números inteiros. Na maioria dos casos, não somos capazes de resolver uma equação diferencial dada. Nestes casos, precisamos usar um método numérico para aproximar a solução da equação diferencial. Tal método leva à construção de uma equação de diferenças associada que torna possível uma solução aproximada para o problema. Aqui apresentaremos um método numérico.

### 2.2.1 Método de Euler

Considere o problema de valor inicial, constituído por uma equação diferencial ordinária de primeira ordem e um valor inicial

$$\begin{aligned}x'(t) &= g(t, x(t)), \quad t_0 \leq t \leq b \\x(t_0) &= x_0,\end{aligned}\tag{2.13}$$

em que  $g : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, para garantir existência de solução para (2.13).

Vamos dividir o intervalo  $[t_0, b]$  em  $N$  subintervalos iguais. O tamanho de cada subintervalo é chamado de *passo* e é denotado por  $h = (b - t_0)/N$ . O *passo* define os pontos  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$ , em que  $t_n = t_0 + nh$ . O método de Euler aproxima o valor de  $x'(t)$  por  $(x(t+h) - x(t))/h$ . Assim, substituindo em (2.13),

$$x(t+h) = x(t) + hg(t, x(t)),$$

e para  $t = t_0 + nh$ ,

$$x[t_0 + (n+1)h] = x(t_0 + nh) + hg(t_0 + nh, x(t_0 + nh))$$

para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$ .

Adaptando a notação para equações de diferenças e substituindo  $x(t_0 + nh)$  por  $x_n$ , obtemos

$$x_{n+1} = x_n + hg(n, x_n).\tag{2.14}$$

Deste modo, quanto menor o passo  $h$  mais próxima a solução da equação de diferenças (2.14) estará da solução da equação diferencial (2.13). Para maiores detalhes, sugerimos o livro “Numerical Methods for Ordinary Differential Systems”, de autoria de J.D.Lambert (John Wiley, 1991).

**Exemplo 2.2.** Dado o problema de valor inicial

$$\begin{aligned}x'(t) &= 0,5x(t), \quad t \geq 0 \\x(0) &= 1\end{aligned}$$

estime o valor de  $x(5)$ .

Substituindo o valor de  $x'(t)$  por  $[x(t+h) - x(t)]/h$ , obtemos

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = 0,5x(t) \Rightarrow x(t+h) = x(t) + 0,5hx(t).$$

A equação de diferenças associada obtida pelo Método de Euler é

$$x_{n+1} = x_n + 0,5hx_n, \quad x_0 = 1.$$

Tomando o passo  $h = 1$ ,

$$x_1 = x_0 + 0,5hx_0 = 1 + 0,5 = 1,5.$$

Usando o mesmo procedimento podemos obter o valor desejado:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + 0,5hx_1 = 1,5 + 0,75 = 2,25 \\ x_3 &= x_2 + 0,5hx_2 = 2,25 + 1,125 = 3,375 \\ x_4 &= x_3 + 0,5hx_3 = 3,375 + 1,6875 = 5,0625 \\ x_5 &= x_4 + 0,5hx_4 = 5,0625 + 2,53125 = 7,59375. \end{aligned}$$

Observe que, resolvendo a equação diferencial encontraremos  $x(t) = e^{0,5t}$ , logo  $x(5) = e^{2,5} \approx 12,18$ , o qual difere, em muito, do nosso valor de  $x(5) = 7,59375$ . Podemos melhorar nossa estimativa tomando o passo menor. Para  $h = 0,1$ , efetuaremos um número maior de cálculos (50 passos) para chegar em  $x(5) \approx 11,47$ , porém nota-se uma melhora considerável em nossa aproximação. Para  $h = 0,01$ , o número de passos sobe para 500, entretanto, encontraremos  $x(5) \approx 12,17$ , uma aproximação bem melhor. De fato, quanto menor o tamanho do passo mais nossa estimativa se aproxima do valor real.

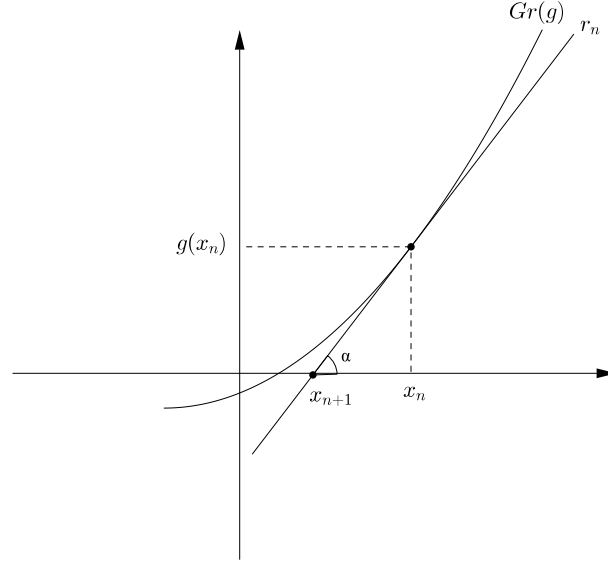
## 2.3 Método de Newton

Este método consiste em encontrar o zero de uma função através de uma sequência dada por uma equação discreta.

Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$  com  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . A partir de um valor arbitrário  $x_n$ , podemos determinar a reta  $r_n$  que é tangente ao gráfico de  $g$  no ponto  $P(x_n, g(x_n))$ .

A reta  $r_n$  intersectará o eixo  $x$  no ponto  $Q(x_{n+1}, 0)$  formando um ângulo  $\alpha$ , conforme a figura:





O coeficiente angular da reta  $r_n$  é dado por

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{g(x_n) - g(x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}} = \frac{g(x_n)}{x_n - x_{n+1}}.$$

Por outro lado, sabemos que  $\operatorname{tg}(\alpha) = g'(x_n)$ , isto é,

$$g'(x_n) = \frac{g(x_n)}{x_n - x_{n+1}} \Leftrightarrow x_n - x_{n+1} = \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}. \quad (2.15)$$

Assim, definimos uma equação discreta que tem como solução uma sequência  $x_1, x_2, x_3, \dots$ , que, se convergir, seu limite  $a$  será um zero da função  $g$ .

De fato, quando  $n \rightarrow \infty$ , de (2.15) temos:

$$a = a - \frac{g(a)}{g'(a)} \Rightarrow g(a) = 0.$$

Agora, sendo  $f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$  note que,  $x^*$  é um zero da função  $g$  se, e somente se,  $x^*$  é um ponto fixo de  $f$ . Retornaremos na página 31 a tratar deste caso.

Na próxima seção evidenciamos a importância dos pontos fixos da função  $f$  de (2.1), os quais, como vimos, podem ser encontrados através do Método de Newton.

## 2.4 Pontos de Equilíbrio

Em muitas aplicações é desejável que todos os estados (soluções) de um sistema tendam para seu estado de equilíbrio. Veremos a seguir uma definição formal de um ponto de equilíbrio.

**Definição 2.1.** Um ponto  $x^*$  no domínio de  $f$  é chamado de ponto de equilíbrio de  $x_{n+1} = f(x_n)$  se é ponto fixo de  $f$ , isto é,  $f(x^*) = x^*$ .

Notemos que um ponto de equilíbrio  $x^*$  de (2.1) gera uma solução constante pois, se  $x_0 = x^*$  (valor inicial) então  $x_1 = f(x_0) = f(x^*) = x^*$ ,  $x_2 = f(x_1) = f(x^*) = x^*$ , e assim por diante.

Graficamente, um ponto de equilíbrio é a abscissa do ponto onde o gráfico de  $f$  intersecta a reta  $y = x$  (Figura 2.1). Por exemplo, existe um ponto de equilíbrio para a equação de diferenças  $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$ , em que  $f(x) = x^2 - x + 1$ . Para determinar esse ponto, resolvemos  $f(x) = x$ , ou seja,  $x^2 - x + 1 = x$  obtendo 1 como o único ponto de equilíbrio (Figura 2.1(i)). A Figura 2.1(ii) ilustra outro exemplo, em que a equação de diferenças é dada por  $x_{n+1} = x_n^3$ , em que  $f(x) = x^3$ . Tomando  $x^3 = x$ , os pontos de equilíbrio são:  $x_1^* = -1$ ,  $x_2^* = 0$ ,  $x_3^* = 1$ .

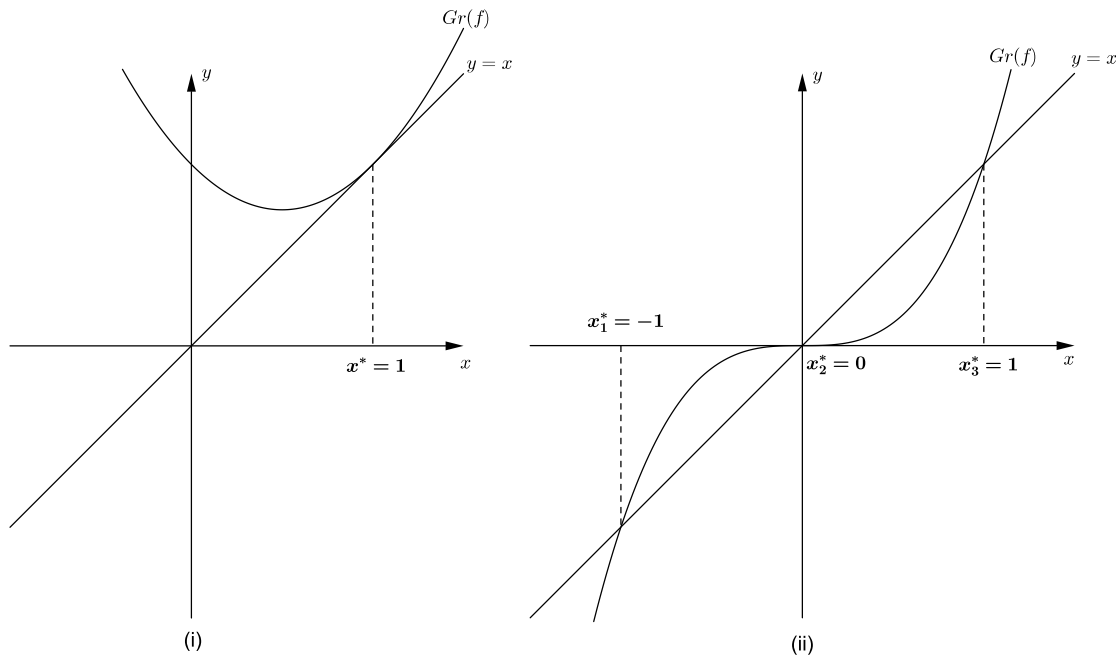


Figura 2.1: Pontos fixos: (i)  $f(x) = x^2 - x + 1$  (ii)  $f(x) = x^3$ .

Como consequência do Teorema do Valor Intermediário temos assegurada a existência de, pelo menos, um ponto fixo para uma função  $f$  sob determinadas condições. Para tanto, vejamos os resultados abaixo, que podem ser encontrados na referência [4].

**Teorema 2.1.** (*Valor Intermediário*). *Suponha que  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função contínua e que  $y_0$  esteja entre  $f(a)$  e  $f(b)$ . Então, existe pelo menos um  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $f(x_0) = y_0$ .*

**Teorema 2.2.** (*Ponto Fixo*). *Suponha que  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  seja uma função contínua. Então existe, pelo menos, um ponto fixo para  $f$  em  $[a, b]$ .*

*Demonstração.* O resultado deste teorema nos diz que o conjunto dos pontos de intersecção do gráfico de  $f$  e a reta  $y = x$  é não vazio. Para demonstrarmos tal fato,

consideremos a função:  $h(x) = f(x) - x$ . Se  $h(a) = 0$ , então  $f(a) = a$  e o teorema está provado. O mesmo ocorrerá se  $h(b) = 0$ . Assim, vamos supor que  $h(a) \neq 0$  e  $h(b) \neq 0$ , isto é,  $f(a) \neq a$  e  $f(b) \neq b$ .

Temos que

- (i)  $f(a) \in (a, b] \Rightarrow a < f(a) \leq b \Rightarrow f(a) - a > 0$ .
- (ii)  $f(b) \in [a, b) \Rightarrow a \leq f(b) < b \Rightarrow f(b) - b < 0$ .

Por (i) e (ii), temos

$$f(b) - b < 0 < f(a) - a \Rightarrow h(b) < 0 < h(a) \Rightarrow 0 \in (h(b), h(a)).$$

Como  $h$  é uma função contínua em  $[a, b]$ , pelo Teorema 2.1 existe um ponto  $c \in [a, b]$  tal que  $h(c) = 0$ , ou seja,  $h(c) = f(c) - c = 0$ . Logo  $c$  é o ponto fixo da  $f$  em  $[a, b]$ .  $\square$

**Observação 2.1.** Este teorema não fornece um método para encontrar o ponto fixo. Ele apenas garante sua existência, o que a princípio, já será suficiente para nossos propósitos.

**Definição 2.2.** Seja  $x_0$  um ponto no domínio de  $f$ . Se existir um inteiro positivo  $r$  e um ponto de equilíbrio  $x^*$  de (2.1) tal que  $f^r(x_0) = x^*$ ,  $f^{r-1}(x_0) \neq x^*$ , então  $x_0$  é um ponto de equilíbrio eventual.

Em outras palavras, um ponto  $x_0$  é dito ponto de equilíbrio eventual se algum  $x_i$  de sua órbita for um ponto fixo. Por exemplo,  $-1$  é ponto de equilíbrio eventual para a função  $f(x) = x^2$ . De fato,  $f(-1) = 1$  e  $1$  é ponto fixo de  $f$ .

**Exemplo 2.3.** Considere a equação  $x_{n+1} = T(x_n)$ , em que

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x), & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Para essa equação de diferenças existem dois pontos de equilíbrio,  $x_1^* = 0$  e  $x_2^* = \frac{2}{3}$ . Se  $x_0 = \frac{1}{4}$ , então  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = 1$  e  $x_3 = 0$ . Portanto,  $\frac{1}{4}$  é um ponto de equilíbrio eventual e  $O(\frac{1}{4}) = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0, 0, \dots\}$ , em que  $O(\frac{1}{4})$  representa a órbita do ponto  $x_0 = \frac{1}{4}$ .

### 2.4.1 Estabilidade de pontos de equilíbrio

Um dos principais objetivos do estudo de um sistema dinâmico é analisar o comportamento de suas soluções próximas a uma solução constante dada por um ponto de equilíbrio. Este estudo constitui a teoria de estabilidade; a seguir, apresentamos suas definições básicas.

**Definição 2.3.** (a) Um ponto de equilíbrio  $x^*$  de (2.1) é estável se dado  $\epsilon > 0$  existir  $\delta > 0$  tal que  $|x_0 - x^*| < \delta$  implica  $|f^n(x_0) - x^*| < \epsilon$  para todo  $n > 0$  (Figura 2.2). Simbolicamente:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |f^n(x_0) - x^*| < \epsilon, \quad n > 0.$$

Se  $x^*$  não é estável, então é chamado ponto de equilíbrio instável (Figura 2.3).

(b) Um ponto de equilíbrio  $x^*$  é chamado de atrator se:

$$\exists \eta > 0 \mid |x_0 - x^*| < \eta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = x^*.$$

Quando o item (b) for válido para todo  $\eta > 0$ ,  $x^*$  é chamado de atrator global.

(c) Um ponto de equilíbrio  $x^*$  é chamado de assintoticamente estável se é estável e atrator (Figura 2.4).

Quando  $x^*$  for estável e atrator global, ele será chamado de ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável (Figura 2.5).

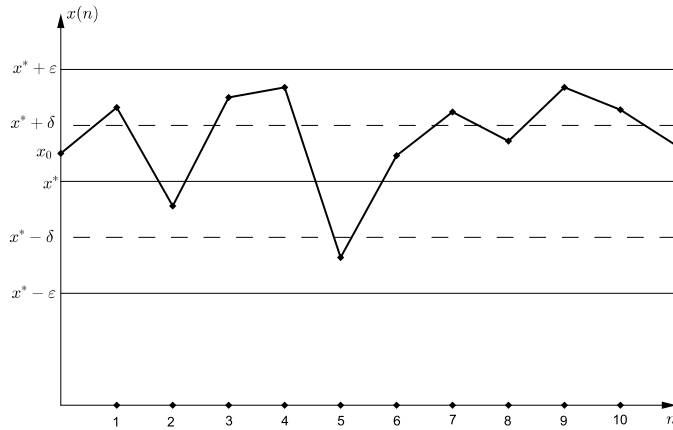


Figura 2.2: Ponto de equilíbrio estável.

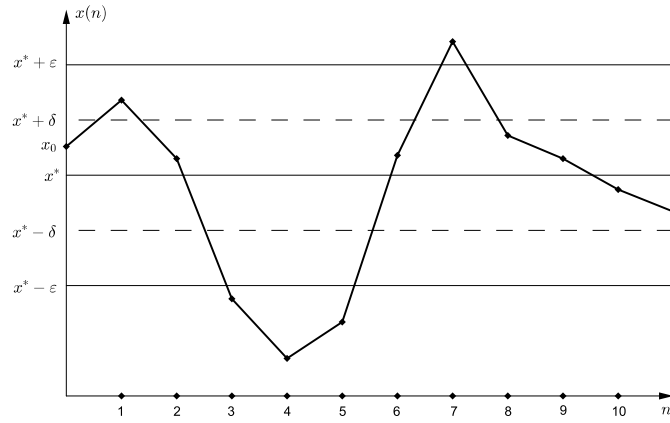


Figura 2.3: Ponto de equilíbrio instável.

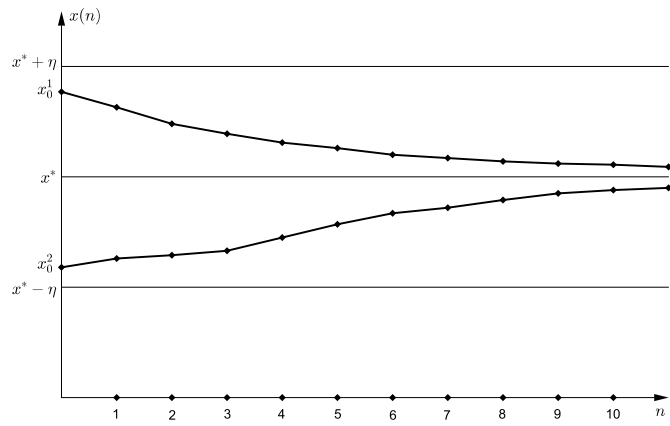


Figura 2.4: Ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

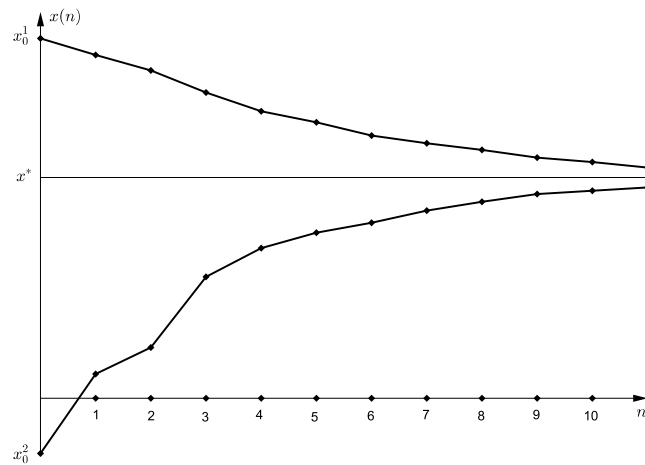


Figura 2.5: Ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

### 2.4.2 Análise Gráfica

Determinar a estabilidade de um ponto de equilíbrio pode ser difícil em muitos casos. Assim, nesta seção apresentaremos uma ferramenta simples para ajudar na compreensão do comportamento das soluções de (2.1) nas proximidades de um ponto de equilíbrio.

A análise gráfica é um método que nos permite, em muitos casos, utilizar o gráfico da função  $f$  de (2.1) para determinarmos o comportamento da órbita de um ponto. Esse processo geométrico consiste em colocar no mesmo conjunto de eixos coordenados os gráficos de  $f$  e da reta  $y = x$ . Sabemos que a órbita de um ponto  $x_0$  qualquer é a sequência de pontos  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ , em que  $x_i = f^i(x_0)$ . Assim, tomamos o ponto  $(x_0, x_0)$  na reta  $y = x$  e, então, traçamos uma reta vertical por  $(x_0, x_0)$  até atingir o gráfico de  $f$ , dessa forma, determinaremos o ponto  $(x_0, f(x_0))$ . Deste ponto, traçamos uma reta horizontal até encontrar o gráfico de  $y = x$ , obtendo assim, o ponto  $(f(x_0), f(x_0))$ , que é o ponto  $(x_1, x_1)$ . Repetindo o processo, para  $x_1$  encontraremos no gráfico de  $f$ , o ponto  $(f(x_0), f(f(x_0))) = (f(x_0), f^2(x_0))$ . Procedendo assim, encontramos todos os pontos que desejamos da órbita de  $x_0$  e podemos visualizar se a órbita se aproxima ou se afasta de algum ponto de equilíbrio de (2.1) (Figura 2.6). Este diagrama recebe o nome de Teia de Aranha ou “Cobweb”.

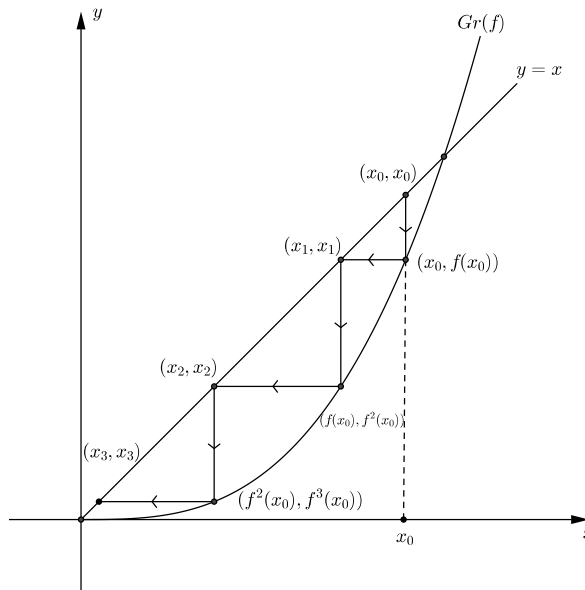


Figura 2.6: Análise gráfica da órbita de  $x_0$ .

## 2.5 Critérios de estabilidade assintótica para pontos de equilíbrio

Nesta seção estudaremos um critério simples, porém bastante útil para analisar a estabilidade assintótica dos pontos de equilíbrio. O teorema a seguir é a nossa principal ferramenta. Os resultados desta seção estão baseados na referência [2].

**Teorema 2.3.** *Seja  $x^*$  um ponto de equilíbrio da equação de diferenças*

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

*em que  $f$  é continuamente diferenciável em  $x^*$ . As afirmações a seguir são verdadeiras:*

*(i) se  $|f'(x^*)| < 1$ , então  $x^*$  é assintoticamente estável.*

*(ii) se  $|f'(x^*)| > 1$ , então  $x^*$  é instável.*

*Demonstração.* [2]. (i) Suponha que  $|f'(x^*)| < M < 1$ . Então existe um intervalo  $J = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$  tal que  $|f'(x)| \leq M < 1$  para todo  $x \in J$ . Caso contrário, para cada intervalo aberto  $I_n = (x^* - \frac{1}{n}, x^* + \frac{1}{n})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , existiria um ponto  $x_n \in I_n$  tal que  $|f'(x_n)| > M$ . Note que  $n \rightarrow \infty$  implica  $x_n \rightarrow x^*$  e, como  $f'$  é contínua em  $x^*$ , segue que

$$M \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = f'(x^*).$$

O que contraria o fato

$$|f'(x^*)| < M.$$

Isto prova nossa afirmação.

Seja  $x_0 \in J$ . Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $\alpha$  entre  $x_0$  e  $x^*$  tal que

$$|f(x_0) - f(x^*)| = |f'(\alpha)| |x_0 - x^*|,$$

como  $\alpha \in J$  então  $|f'(\alpha)| \leq M$ , assim,

$$|f(x_0) - f(x^*)| \leq M |x_0 - x^*|,$$

e, portanto

$$|x_1 - x^*| = |f(x_0) - f(x^*)| \leq M |x_0 - x^*|. \quad (2.16)$$

Como  $M < 1$ , a inequação (2.16) mostra que  $x_1$  está mais perto de  $x^*$  do que  $x_0$ , consequentemente,  $x_1 \in J$ .

Provemos, por indução, a validade de

$$|x_n - x^*| \leq M^n |x_0 - x^*|, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.17)$$

Para cada inteiro positivo  $n$ , denotemos por  $P_n$  a desigualdade (2.17) com  $x_n \in J$ . Por (2.16),  $P_1$  é verdadeira. Suponhamos  $P_n$  verdadeira, e provemos a validade de  $P_{n+1}$ , isto é,

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M^{n+1}|x_0 - x^*|.$$

De fato,

$$|x_{n+1} - x^*| = |f(x_n) - f(x^*)|.$$

Como  $x_n \in J$ , existe  $\beta$  entre  $x_n$  e  $x^*$  tal que

$$|f(x_n) - f(x^*)| = |f'(\beta)||x_n - x^*|.$$

Deste modo,

$$|x_{n+1} - x^*| = |f(x_n) - f(x^*)| = |f'(\beta)||x_n - x^*| \leq M|x_n - x^*| \leq M.M^n|x_0 - x^*|,$$

e, portanto

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M^{n+1}|x_0 - x^*|,$$

com  $x_{n+1} \in J$ .

Logo,  $P_{n+1}$  é verdadeira e a prova está completa.

Para provar a estabilidade de  $x^*$ , dado  $\epsilon > 0$ , tome  $\delta = \epsilon > 0$ . Assim, sempre que  $|x_0 - x^*| < \delta$ , como  $M < 1$ ,

$$|x_n - x^*| \leq M^n|x_0 - x^*| < |x_0 - x^*| < \epsilon, \quad \forall n > 0.$$

Portanto,  $x^*$  é estável. Além disso,

$$0 < |x_n - x^*| \leq M^n|x_0 - x^*|,$$

pelo Teorema do Confronto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x^*| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

Concluimos, então, que  $x^*$  é assintoticamente estável.

(ii) Suponha que  $|f'(x^*)| > M > 1$ . Então existe um intervalo  $J = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$  tal que  $|f'(x)| \geq M > 1$  para todo  $x \in J$ . Queremos mostrar que existe  $\epsilon > 0$  com a seguinte propriedade: para todo  $\delta > 0$  pode-se encontrar algum número  $K \in \mathbb{N}$  com  $|x_0 - x^*| < \delta$  e  $|x_k - x^*| \geq \epsilon$ .

Para  $x_0 \in J$ ,

$$|x_1 - x^*| = |f(x_0) - f(x^*)|.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe  $\alpha$  entre  $x_0$  e  $x^*$  tal que

$$|f(x_0) - f(x^*)| = |f'(\alpha)||x_0 - x^*| \geq M|x_0 - x^*|$$



e, portanto

$$|x_1 - x^*| \geq M|x_0 - x^*|. \quad (2.18)$$

Como  $M > 1$ , a inequação (2.18) mostra que  $x_1$  está mais distante de  $x^*$  do que  $x_0$ . Se  $x_1 \notin J$ , então nossa demonstração está finalizada. Se  $x_1 \in J$ , então repetimos o processo.

Por indução, podemos mostrar que

$$|x_n - x^*| \geq M^n|x_0 - x^*|. \quad (2.19)$$

Como o intervalo  $J$  é limitado e  $M^n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , então para algum número  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k \notin J$ . Sendo  $J = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$ , então existe  $\epsilon = \gamma$  tal que, para todo  $\delta > 0$ , existem  $k \in \mathbb{N}$  e  $x_{0_\delta} \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$  com  $x_k \notin (x^* - \epsilon, x^* + \epsilon)$ . Logo  $x^*$  é instável e o teorema está provado.  $\square$

**Exemplo 2.4.** Para confirmar que o Método de Newton fornece uma sequência  $(x_n)$  que converge para  $x^*$  podemos usar o Teorema 2.3, certificando-se que  $g'(x^*) \neq 0$ .

A partir da equação  $x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = f(x_n)$ , temos que

$$|f'(x^*)| = \left| 1 - \frac{[g'(x^*)]^2 - g(x^*)g''(x^*)}{[g'(x^*)]^2} \right|.$$

De acordo com a seção anterior (2.3),  $x^*$  ponto de equilíbrio de  $f$  implica  $g(x^*) = 0$ , logo  $f'(x^*) = 0$  e pelo Teorema 2.3,  $x^*$  é assintoticamente estável e portanto,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x^*$ .

O próximo resultado analisa o caso em que  $f'(x^*) = 1$ ; o caso  $f'(x^*) = -1$  será analisado posteriormente.

**Teorema 2.4.** *Suponha que para um ponto de equilíbrio  $x^*$  de (2.1),  $f$  possua derivada de ordem 3 no ponto  $x^*$  e que  $f'(x^*) = 1$ . São verdadeiras as afirmações a seguir:*

- (i) *Se  $f''(x^*) \neq 0$ , então  $x^*$  é instável.*
- (ii) *Se  $f''(x^*) = 0$  e  $f'''(x^*) > 0$ , então  $x^*$  é instável.*
- (iii) *Se  $f''(x^*) = 0$  e  $f'''(x^*) < 0$ , então  $x^*$  é assintoticamente estável.*

*Demonstração.* [2]. (i) Como por hipótese  $f''(x^*) \neq 0$ , devemos considerar os dois casos a seguir:

(1) Se  $f''(x^*) > 0$  então  $f'(x)$  é crescente em um intervalo  $J_1 = (x^*, x^* + \gamma)$  para algum  $\gamma > 0$  e para qualquer  $x \in J_1$ ,

$$x > x^* \Rightarrow f'(x) > f'(x^*) = 1 \Rightarrow f'(x) > 1.$$

Vamos supor  $f'(x) \geq M > 1$ ,  $x \in J_1$  e para  $x_0 \in J_1$ , de forma análoga à parte (ii) da prova do Teorema 2.3, concluímos

$$|x_1 - x^*| \geq M|x_0 - x^*|. \quad (2.20)$$

Queremos mostrar que existe  $\epsilon > 0$  com a seguinte propriedade: para todo  $\delta > 0$  pode-se encontrar algum número  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_0 - x^*| < \delta$  e  $|x_k - x^*| \geq \epsilon$ .

Como  $M > 1$ , a inequação (2.20) mostra que  $x_1$  está mais distante de  $x^*$  do que  $x_0$ . Se  $x_1 \notin J_1$  basta tomar  $\epsilon = \gamma$  e teremos que  $x^*$  é instável. Se  $x_1 \in J_1$ , repetindo o processo e usando indução finita, temos

$$|x_n - x^*| \geq M^n |x_0 - x^*|, \quad (2.21)$$

desde que  $x_{n-1} \in J_1$ .

Para  $n \rightarrow \infty$ ,  $M^n \rightarrow +\infty$  pois  $M > 1$  e como  $J_1$  é limitado existirá um  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $x_k \notin J_1$ . Então, existe  $\epsilon = \gamma$  tal que, para todo  $\delta > 0$ , existem  $k \in \mathbb{N}$  e  $x_{0_\delta} \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$  com  $x_k \notin (x^* - \epsilon, x^* + \epsilon)$ . Portanto  $x^*$  é instável (Figura 2.7).

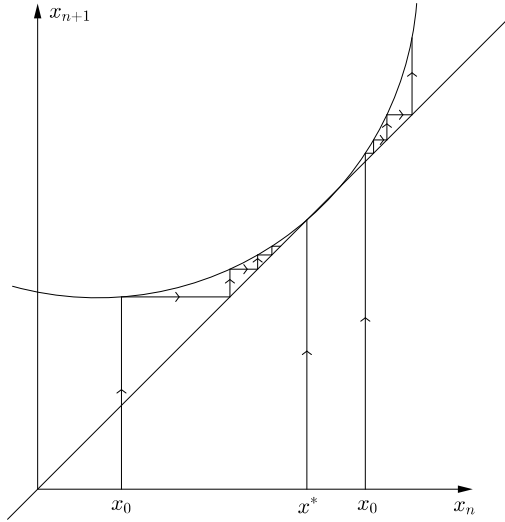


Figura 2.7: Ponto de equilíbrio instável (semi-estável à esquerda)  $f''(x^*) > 0$ .

(2) Se  $f''(x^*) < 0$  então  $f'(x)$  é decrescente em um intervalo  $J_2 = (x^* - \gamma, x^*)$  para algum  $\gamma > 0$  e para qualquer  $x \in J_2$ ,

$$x < x^* \Rightarrow f'(x) > f'(x^*) = 1 \Rightarrow f'(x) > 1.$$

Supondo  $f'(x) \geq M > 1$ ,  $x \in J_2$  e para  $x_0 \in J_2$ , a demonstração da instabilidade de  $x^*$  segue análoga à parte (1) da prova do Teorema 2.4 (Figura 2.8).

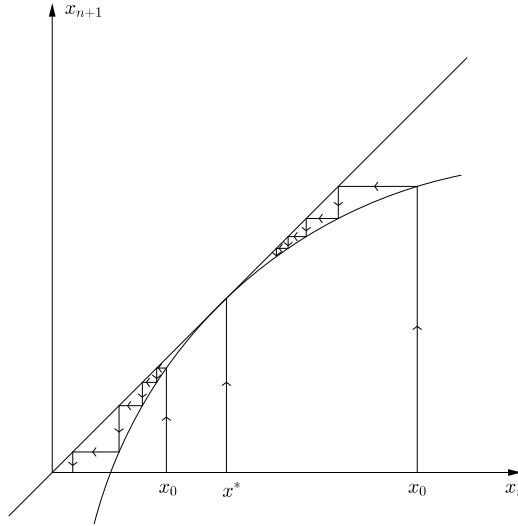


Figura 2.8: Ponto de equilíbrio instável (semi-estável à direita),  $f''(x^*) < 0$ .

(ii) Se  $f''(x^*) = 0$  e  $f'''(x^*) > 0$  então  $f''(x)$  é crescente em um intervalo  $J_1 = (x^*, x^* + \gamma)$  para algum  $\gamma > 0$  e para qualquer  $x \in J_1$ ,

$$x > x^* \Rightarrow f''(x) > f''(x^*) = 0 \Rightarrow f''(x) > 0.$$

Portanto,  $f'(x)$  é crescente em  $J_1$ , ou seja,

$$x > x^* \Rightarrow f'(x) > f'(x^*) = 1 \Rightarrow f'(x) > 1, \quad \forall x \in J_1.$$

Supondo  $f'(x) \geq M > 1$ ,  $x \in J_1$  e para  $x_0 \in J_1$ , a demonstração da instabilidade de  $x^*$  segue análoga à parte (1) da prova do Teorema 2.4 (Figura 2.9).

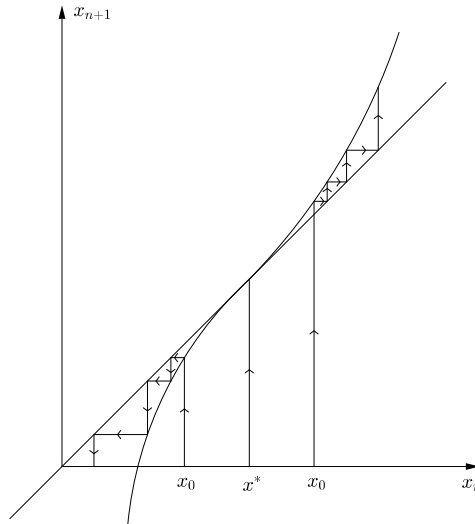


Figura 2.9: Ponto de equilíbrio instável ( $f'(x^*) = 1$ ,  $f''(x^*) = 0$  e  $f'''(x^*) > 0$ ).

(iii) Se  $f''(x^*) = 0$  e  $f'''(x^*) < 0$  então  $f''(x)$  é decrescente em um intervalo  $J = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$ , para algum  $\gamma > 0$ .

Devemos considerar os dois casos a seguir:

(a)  $\forall x \in J_1 = (x^*, x^* + \gamma), x > x^* \Rightarrow f''(x) < f''(x^*) = 0 \Rightarrow f''(x) < 0$ .

Portanto,  $f'(x)$  é decrescente em  $J_1$ , ou seja,

$$x > x^* \Rightarrow f'(x) < f'(x^*) = 1 \Rightarrow f'(x) < 1, \quad \forall x \in J_1.$$

(b)  $\forall x \in J_2 = (x^* - \gamma, x^*), x < x^* \Rightarrow f''(x) > f''(x^*) = 0 \Rightarrow f''(x) > 0$ .

Portanto,  $f'(x)$  é crescente em  $J_2$ , ou seja,

$$x < x^* \Rightarrow f'(x) < f'(x^*) = 1 \Rightarrow f'(x) < 1, \quad \forall x \in J_2.$$

Por (a) e (b),  $f'(x) < 1$  em  $J$ . Supondo  $f'(x) \leq M < 1$  e tomando  $x_0 \in J$ , a demonstração segue análoga à parte (i) da prova do Teorema 2.3, exatamente após aplicar o Teorema do Valor Médio.

Deste modo, concluímos que  $x^*$  é assintoticamente estável (Figura 2.10) e o teorema está provado.

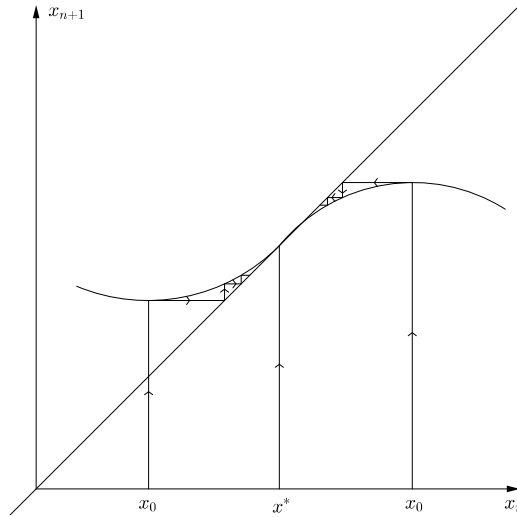


Figura 2.10: Ponto de equilíbrio assintoticamente estável ( $f'(x^*) = 1, f''(x^*) = 0$  e  $f'''(x^*) < 0$ ).

□

Usaremos o resultado anterior para investigar o caso  $f'(x^*) = -1$ . Mas antes disso, precisamos introduzir a noção da derivada Schwarziana de uma função  $f$ .

**Definição 2.4.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^3$  em um ponto  $x$  tal que  $f'(x) \neq 0$ . A derivada Schwarziana de  $f$  no ponto  $x$  é definida como*

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[ \frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2.$$

Note que se  $f'(x^*) = -1$ , então

$$Sf(x^*) = -f'''(x^*) - \frac{3}{2}[f''(x^*)]^2. \quad (2.22)$$

**Teorema 2.5.** *Suponha que para o ponto de equilíbrio  $x^*$  de (2.1),  $f'(x^*) = -1$ . As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *Se  $Sf(x^*) < 0$ , então  $x^*$  é assintoticamente estável.*
- (ii) *Se  $Sf(x^*) > 0$ , então  $x^*$  é instável.*

*Demonstração.* [3]. Seja a equação

$$y_{n+1} = g(y_n), \quad g(y) = f^2(y). \quad (2.23)$$

Antes de prosseguir com a demonstração, convém observar que o ponto de equilíbrio  $x^*$  de  $x_{n+1} = f(x_n)$  também é ponto de equilíbrio de  $y_{n+1} = g(y_n)$ . Por outro lado, o ponto assintoticamente estável  $x^*$  com relação a  $y_{n+1} = g(y_n)$  também é assintoticamente estável com relação a  $x_{n+1} = f(x_n)$ .

Assim, retomando a demonstração do teorema, temos

$$\frac{d}{dy}g(y) = \frac{d}{dy}f(f(y)) = f'(f(y))f'(y).$$

Como, por hipótese,  $f'(x^*) = -1$ ,

$$g'(x^*) = f'(f(x^*))f'(x^*) = f'(x^*)f'(x^*) = 1$$

$$\begin{aligned} g''(x^*) &= f''(f(x^*))f'(x^*)f'(x^*) + f'(f(x^*))f''(x^*) \\ &= f''(x^*)(-1)(-1) + f'(x^*)f''(x^*) = f''(x^*) - f''(x^*) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'''(x^*) &= f'''(f(x^*))f'(x^*)[f'(x^*)]^2 + 2f''(f(x^*))f'(x^*)f''(x^*) \\ &\quad + f''(f(x^*))f'(x^*)f''(x^*) + f'(f(x^*))f'''(x^*) \\ &= f'''(f(x^*))f'(x^*)^3 + 3f'(f(x^*))f''(x^*)f''(f(x^*)) + f'(f(x^*))f'''(x^*) \\ &= f'''(f(x^*))f'(x^*)^3 + 3f'(x^*)f''(x^*)f''(f(x^*)) + f'(f(x^*))f'''(x^*) \\ &= -2f'''(x^*) - 3[f''(x^*)]^2 = 2(-f'''(x^*) - \frac{3}{2}[f''(x^*)]^2) \end{aligned}$$

Assim, por (2.22),

$$g'''(x^*) = 2Sf(x^*).$$

Para finalizar, observemos que, de acordo com o Teorema 2.4, a estabilidade assintótica de  $x^*$  dependerá do sinal de  $Sf(x^*)$ . Deste modo, o teorema está provado.  $\square$

**Exemplo 2.5.** Considere a equação de diferenças  $x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n$ . Os pontos de equilíbrio são 0 e -2 (Figura 2.11). Como  $f'(x) = 2x + 3$ , temos que  $f'(0) = 3$  e pelo Teorema 2.3, temos que o ponto de equilíbrio  $x^* = 0$  é instável. Para o outro ponto de equilíbrio,  $f'(-2) = -1$  e aplicando o Teorema 2.5, obtemos  $Sf(-2) = -2f'''(-2) - \frac{3}{2}[f''(-2)]^2 = -6 < 0$ .

Portanto o ponto de equilíbrio  $x^* = -2$  é assintoticamente estável.

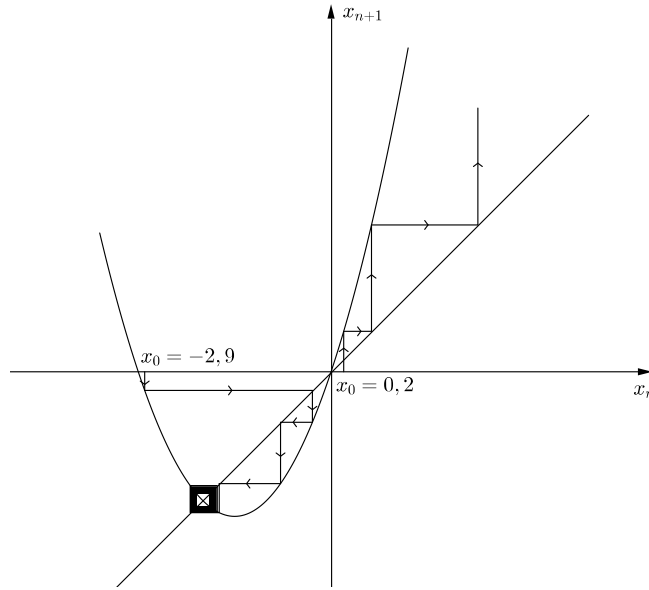


Figura 2.11: Análise gráfica de  $x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n$ .

**Exemplo 2.6.** Consideremos a equação discreta logística

$$y(n+1) = \mu y(n)(1 - y(n)), \quad n \geq 0 \quad (2.24)$$

com  $y(0) = y_0$  e  $\mu > 0$ .

Pela Definição 2.1, encontremos os pontos de equilíbrio para a equação (2.24).

$$\mu y^*(1 - y^*) = y^* \Rightarrow y^*(\mu - \mu y^* - 1) = 0,$$

$$y^* = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\mu - 1}{\mu} = y^*.$$

Os pontos de equilíbrio são  $y_1^* = 0$  e  $y_2^* = \frac{\mu-1}{\mu}$ .

Considerando  $f(y) = \mu y(1 - y)$ , estudaremos abaixo a estabilidade dos pontos de equilíbrio da equação (2.24) utilizando os cr terios da seção 2.5.

1  **Caso** -  $y^* = 0$

$$f'(y) = \mu - 2\mu y \Rightarrow f'(y^*) = \mu.$$

Se  $0 < \mu < 1$ ,  $|f'(y^*)| < 1$ , pelo Teorema 2.3(i),  $y^*$    assintoticamente  st vel.

Se  $\mu > 1$ ,  $|f'(y^*)| > 1$ , pelo Teorema 2.3(ii),  $y^*$    instável.

Se  $\mu = 1$  temos  $f'(y^*) = 1$ ,  $f''(y) = -2$ , ou seja,  $f''(y^*) = -2 \neq 0$  e pelo Teorema 2.4(i),  $y^*$    instável.

2  **Caso** -  $y^* = \frac{\mu - 1}{\mu}, \mu \neq 1$

$$\text{Temos que } f'(y) = \mu - 2\mu y \Rightarrow f'(y^*) = \mu - 2\mu \frac{\mu - 1}{\mu} = 2 - \mu.$$

Pelo Teorema 2.3(i),  $y^*$    assintoticamente  st vel se:

$$|f'(y^*)| < 1 \Leftrightarrow |2 - \mu| < 1 \Leftrightarrow 1 < \mu < 3.$$

Portanto, para  $1 < \mu < 3$ , o ponto fixo  $y^*$    assintoticamente  st vel.

Pelo Teorema 2.3(ii),  $y^*$    instável se:

$$|f'(y^*)| > 1 \Leftrightarrow |2 - \mu| > 1 \Leftrightarrow \mu > 3.$$

Logo, para  $\mu > 3$ , o ponto fixo  $y^*$    instável.

Para  $\mu = 3$  temos  $f'(y^*) = -1$ ,  $f''(y^*) = -6$  e  $f'''(y^*) = 0$ . Neste caso, utilizaremos o Teorema 2.5. Assim, pela equação (2.22)

$$Sf(y^*) = -f'''(y^*) - \frac{3}{2}[f''(y^*)]^2 = -\frac{3}{2}(-6)^2 = -54 < 0$$

logo,  $Sf(y^*) < 0$ , e pelo Teorema 2.5(i), o ponto fixo  $y^*$    assintoticamente  st vel.

Portanto  $y^* = \frac{\mu - 1}{\mu}$    assintoticamente  st vel para  $1 < \mu \leq 3$  e instável para  $\mu > 3$ .

Utilizando a análise gráfica (2.4.2), podemos visualmente observar o que analisamos acima por meio dos teoremas.

Para  $1 < \mu < 3$ , todas as soluções cujo ponto inicial  $y_0$  se encontra no intervalo  $(0,1)$  convergem para o ponto de equilíbrio  $y^* = \frac{\mu-1}{\mu}$  (Figura 2.12).

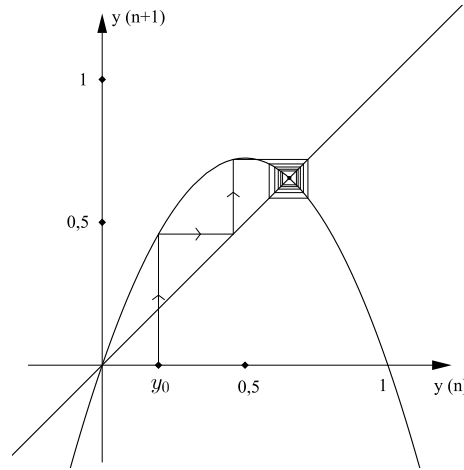


Figura 2.12:  $1 < \mu < 3$ .

Para  $0 < \mu < 1$ , todas as soluções cujo ponto inicial  $y_0$  se encontra no intervalo  $(0,1)$  convergem para o ponto de equilíbrio  $y^* = 0$  (Figura 2.13).

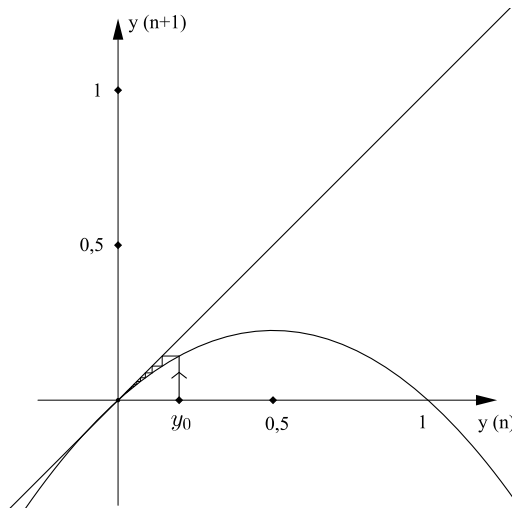


Figura 2.13:  $0 < \mu < 1$ .



Para  $\mu > 3$ , a maioria das soluções cujos pontos iniciais estão no intervalo  $(0,1)$  não convergem para  $y^* = 0$  e nem para  $y^* = \frac{\mu-1}{\mu}$ . Contudo, para  $\mu > 3.57$ , as soluções da equação de diferenças se comportam de maneira caótica (Figura 2.14).

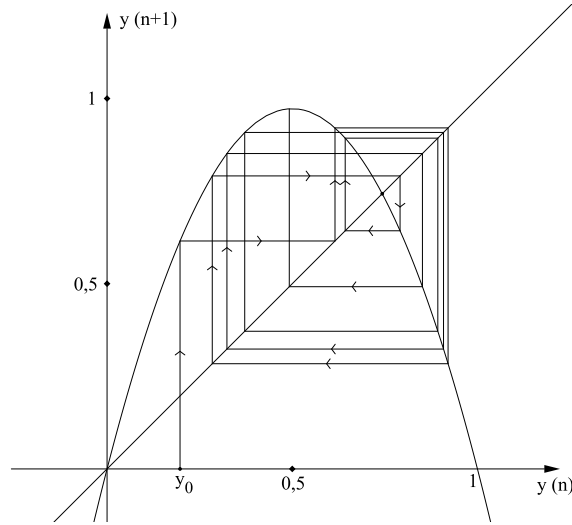


Figura 2.14:  $\mu > 3.57$ .

É importante salientar que as soluções da equação discreta logística dada em (2.24) não apresentam o mesmo comportamento das soluções da equação diferencial logística dada por  $x'(t) = ax(t)(1 - x(t))$ ; o que não será discutido neste trabalho.

### 3 Método Direto de Liapunov

Durante o estudo da teoria geral sobre equações discretas, em muitas ocasiões nos deparamos com a impossibilidade de determinar a solução de uma equação e, então, torna-se interessante o estudo da estabilidade de soluções constantes, ou seja, analisa-se qualitativamente o comportamento da solução, sem explicitá-la.

Em 1892, o matemático russo A.M.Liapunov introduziu um método para estudar a estabilidade das equações diferenciais não lineares. Essa ferramenta, conhecida como Método Direto de Liapunov permite, através da determinação de funções reais que serão nomeadas de Funções de Liapunov, investigar a natureza qualitativa de soluções sem realmente determinar as próprias soluções. Sua grande desvantagem, no entanto, reside na determinação da função adequada para uma dada equação. Nesta seção, vamos apresentar o Método Direto de Liapunov para equações de diferenças.

Iniciaremos nosso estudo com um sistema de equações de diferenças autônomo

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (3.1)$$

em que  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é contínua. Então  $x_{n+1}$  e  $f(x_n)$  são vetores  $m \times 1$ . Considere  $x^*$  um ponto de equilíbrio de (3.1), isto é,  $f(x^*) = x^*$ .

Dada uma função  $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , a variação de  $V$  em relação a (3.1) é assim definida

$$\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x)$$

e

$$\Delta V(x_n) = V(f(x_n)) - V(x_n) = V(x_{n+1}) - V(x_n).$$

Observe que se  $\Delta V(x) \leq 0$ , então  $V$  é não crescente ao longo das soluções de (3.1).

**Definição 3.1.** Uma função  $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de Função de Liapunov em  $H \subset \mathbb{R}^m$  associada à (3.1) se:

(i)  $V$  é contínua em  $H$ .

(ii)  $\Delta V(x) \leq 0$ , sempre que  $x \in H$  e  $f(x) \in H$ .

**Definição 3.2.** A bola aberta em  $\mathbb{R}^m$  de centro  $x$  e raio  $\gamma$ , denotada por  $B(x, \gamma)$ , é definida por

$$B(x, \gamma) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \|y - x\| < \gamma\},$$

em que

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

Considere também,  $B(0, \gamma) = B(\gamma)$ .

**Definição 3.3.** Dizemos que a função  $V$  é semi definida positiva em  $B(x^*, \gamma)$  se  $V(x) \geq 0$ , para todo  $x \in B(x^*, \gamma)$ .

**Definição 3.4.** Dizemos que a função  $V$  é definida positiva em  $B(x^*, \gamma)$  se:

$$(i) \ V(x^*) = 0.$$

$$(ii) \ V(x) > 0, \forall x \in B(x^*, \gamma), \ x \neq x^*.$$

**Teorema 3.1. (Estabilidade de Liapunov).** Se  $V$  é uma função de Liapunov numa vizinhança aberta  $H$  do ponto de equilíbrio  $x^*$  de (3.1) e  $V$  é definida positiva em  $H$ , então  $x^*$  é estável. Se, além disso,  $\Delta V(x) < 0$  sempre que  $x \in H$  e  $f(x) \in H$  e  $x \neq x^*$ , então  $x^*$  é assintoticamente estável.

*Demonstração.* [1]. Escolha  $\alpha_1 > 0$  tal que  $B(x^*, \alpha_1) \subset H$ . Como  $f$  é contínua, existe  $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \alpha_2 < \alpha_1$  tal que  $f(x) \in B(x^*, \alpha_1)$  sempre que  $x \in B(x^*, \alpha_2)$ . Dado  $\epsilon \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \epsilon \leq \alpha_2$ , defina

$$\psi(\epsilon) = \min\{V(x) \mid \epsilon \leq \|x - x^*\| \leq \alpha_1\}.$$

Observe que, pelo Teorema da Conservação do Sinal, existe  $0 < \delta < \epsilon$  tal que  $V(x) < \psi(\epsilon)$ , sempre que  $\|x - x^*\| < \delta$ . De fato, defina  $g(x) = V(x) - \psi(\epsilon)$  em  $H$ , assim,  $g(x^*) = -\psi(\epsilon) < 0$ . Como  $g$  é contínua, pelo Teorema da Conservação do Sinal, existe  $\delta \in \mathbb{R}$ ,  $0 < \delta < \epsilon$  tal que  $g(x) < 0$ , sempre que  $x \in B(x^*, \delta)$ , ou seja,  $g(x) = V(x) - \psi(\epsilon) < 0$ , o que implica  $V(x) < \psi(\epsilon)$ .

Desta forma, se  $x_0 \in B(x^*, \delta)$  então  $x_n \in B(x^*, \epsilon)$ . De fato, se  $x_0 \in B(x^*, \delta)$ , então  $V(x_0) < \psi(\epsilon)$ . Como  $V$  é uma função de Liapunov,  $\Delta V(x) \leq 0$ , logo  $V(x_n) \leq \dots \leq V(x_0) < \psi(\epsilon)$ , então  $x_n \in B(x^*, \epsilon)$ , para todo  $n \geq 0$ . Portanto,  $x^*$  é estável. Caso contrário, existem  $x_0 \in B(x^*, \delta)$  e um  $m \in \mathbb{Z}_+$  tal que  $x_r \in B(x^*, \epsilon)$  para  $1 \leq r \leq m$  e  $x_{m+1} \notin B(x^*, \epsilon)$ . Como  $x_m \in B(x^*, \epsilon) \subset B(x^*, \alpha_2)$  e  $f$  é contínua, segue

que  $x_{m+1} \in B(x^*, \alpha_1)$ , logo  $V(x_{m+1}) \geq \psi(\epsilon)$ . Entretanto,  $\Delta V(x) \leq 0$ , então  $V(x_{m+1}) \leq V(x_m) \leq \dots \leq V(x_0) < \psi(\epsilon)$ , o que é uma contradição. Portanto, concluímos que  $x^*$  é estável.

Para provar que  $x^*$  é assintoticamente estável, assumamos  $x_0 \in B(x^*, \delta)$ , então  $x_n \in B(x^*, \epsilon)$ , para todo  $n \geq 0$ . Se a sequência  $(x_n)$  não convergir para  $x^*$ , então existirá  $\epsilon > 0$  tal que para qualquer  $n_0 \in \mathbb{N}$  existirá um  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > n_0$  tal que  $\|x_n - x^*\| \geq \epsilon$ . Contudo,  $(x_n)$  é limitada, pois se  $M = \|x^*\| + \epsilon$ , temos:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 | x_0 \in B(x^*, \delta) \Rightarrow x_n \in B(x^*, \epsilon)$$

ou seja,

$$\|x_n\| - \|x^*\| \leq \|x_n - x^*\| < \epsilon$$

e, portanto

$$\|x_n\| < \epsilon + \|x^*\| = M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, se  $(x_n)$  é limitada, existe uma subsequência  $(x_{n_k})$  convergente.

Suponha que  $x_{n_k} \rightarrow y$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ . Seja  $E \subset B(x^*, \alpha_1)$  uma vizinhança de  $y$ , com

$$x^* \notin E. \quad (3.2)$$

Defina em  $E$ ,

$$h(x) = \frac{V(f(x))}{V(x)}.$$

Como  $\Delta V(x) < 0$ ,  $V(f(x)) < V(x)$ , logo  $h(x) < 1$ , para todo  $x \in E$ . Como  $y \in E$  então  $h(y) < 1$ . Se  $\eta \in (h(y), 1)$  existe  $\alpha > 0$  tal que  $x \in B(y, \alpha)$  implica  $h(x) < \eta$ . De fato, tome  $0 < \epsilon = \eta - h(y)$ , como  $h$  é contínua, existe  $\alpha > 0$  tal que  $x \in B(y, \alpha)$  implica  $h(x) \in B(h(y), \epsilon)$ . Deste modo,

$$h(y) - \epsilon < h(x) < h(y) + \epsilon \Rightarrow h(x) < h(y) + [\eta - h(y)] \Rightarrow h(x) < \eta.$$

Como  $x_{n_k} \rightarrow y$ , para  $\epsilon = \alpha > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n_k \geq n_0 \Rightarrow x_{n_k} \in B(y, \alpha)$ .

Logo,

$$h(x_{n_k}) < \eta \Rightarrow V(x_{n_{k+1}}) < \eta V(x_{n_k}).$$

Assim, para  $n_k \geq n_0$

$$0 < V(x_{n_k}) < \eta V(x_{n_{k-1}}) < \eta^2 V(x_{n_{k-2}}) < \dots < \eta^{n_k - n_0} V(x_{n_0}).$$

Como  $\eta < 1$ , pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} V(x_{n_k}) = 0. \quad (3.3)$$

Considerando que  $x_{n_k} \rightarrow y$  e  $V$  é contínua em  $H$ , temos:

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} V(x_{n_k}) = V(y). \quad (3.4)$$

Por (3.3) e (3.4) e pela unicidade do limite,  $V(y) = 0$ . Como  $V$  é definida positiva em  $H$  e  $y \in E \subset B(x^*, \alpha_1) \subset H$ , então

$$y = x^*. \quad (3.5)$$

E por (3.2) e (3.5) chegamos a uma contradição. Portanto a sequência  $(x_n)$  converge para  $x^*$ .  $\square$

**Exemplo 3.1.** Considere a equação de diferenças de segunda ordem dada por:

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-1}}{1 + \beta x_n^2}, \quad \beta > 0.$$

Observe que  $x_{n+1}$  depende dos instantes  $x_n$  e  $x_{n-1}$  e substituindo a equação dada por um sistema de duas equações, através da introdução das equações  $a_n = x_{n-1}$  e  $b_n = x_n$ , temos:

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = \frac{\alpha a_n}{1 + \beta b_n^2}, \end{cases}$$

que é equivalente à equação  $z_{n+1} = f(z_n)$  em que  $z_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ , sendo  $(0, 0)$  um ponto de equilíbrio.

Analisando a estabilidade de  $(0, 0)$ , considere a função dada por  $V(a, b) = a^2 + b^2$ , contínua e definida positiva em  $\mathbb{R}^2$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta V(a_n, b_n) &= a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 - a_n^2 - b_n^2 \\ \Delta V(a_n, b_n) &= b_n^2 + \left( \frac{\alpha a_n}{1 + \beta b_n^2} \right)^2 - a_n^2 - b_n^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta V(a_n, b_n) = \left( \frac{\alpha^2}{[1 + \beta b_n^2]^2} - 1 \right) a_n^2 \leq (\alpha^2 - 1) a_n^2.$$

Se  $\alpha^2 < 1$ , então  $\Delta V < 0$ . Portanto, o ponto  $(0, 0)$  é assintoticamente estável se  $|\alpha| < 1$ .

Nem sempre é possível encontrar uma Função de Liapunov e neste caso, vamos apresentar no próximo capítulo, a teoria de Funções Dicotômicas, que abrange Funções de Liapunov.

## 4 Funções Dicotômicas

Vamos agora estudar uma ferramenta para analisar o comportamento da solução de equações discretas que abrange o Método Direto de Liapunov. Os resultados desta seção estão baseados na referência [1]. Neste trabalho vamos nos limitar ao estudo das propriedades de estabilidade e estabilidade assintótica de equações discretas autônomas.

Seja  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  uma função contínua e considere a equação discreta

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

sujeita à condição inicial  $x(0) = x_0$ .

Vamos supor que  $f(0) = 0$  para que a sequência nula seja solução de (4.1) e assim,  $x_0 = 0$  é chamado de equilíbrio nulo de (4.1).

Daqui em diante denotaremos uma certa vizinhança da origem em  $\mathbb{R}^n$  por  $\Omega$  e, se  $A$  é um conjunto,  $\bar{A}$  é seu fecho.

Como visto anteriormente, a variação de  $V$  em relação à (4.1) é dada por  $\Delta V(y) = V(f(y)) - V(y)$ . Este conceito é generalizado como se segue: dados inteiros  $p > 0$  e  $q > 0$ , definimos

$$\Delta_q^p V(y) = V(f^p(y)) - V(f^q(y)),$$

em que  $f^j$  é a  $j$ -ésima iteração de  $f$ .

Observe que  $\Delta V(y) = \Delta_0^1 V(y)$ , e que de acordo com a notação para a solução de (4.1) vista anteriormente,  $x_p(y) = f^p(y)$ , em que entende-se  $y$  como um valor qualquer da órbita  $O(x_0)$ , que pode ser visto como um novo valor inicial. Assim,

$$\Delta_q^p V(y) = V(x_p(y)) - V(x_q(y)).$$

Agora vamos definir função dicotômica  $V$  que, para se ter estabilidade do equilíbrio nulo, não se exige decaimento de  $V(x_n(y))$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Basta que, se de algum passo  $k-1$  para o passo  $k$  a variação de  $V(x_n(y))$  for não negativa, exige-se que, do passo inicial ao passo  $k$ , a variação seja não positiva. E para se ter estabilidade assintótica, basta exigir que, na situação descrita anteriormente, realmente ocorra decaimento do instante inicial ao instante  $k$ . Assim temos a seguinte ideia:

Uma função contínua  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada dicotômica em  $\Omega$  com relação à (4.1), se existir um inteiro  $k \geq 2$  tal que, sempre que  $y \in \Omega$  e  $\Delta_{k-1}^k V(y) \geq 0$  então  $\Delta_0^k V(y) \leq 0$ .

Uma função  $V$  é chamada de estritamente dicotômica em  $\Omega$  com relação à (4.1), se  $V$  é dicotômica e, além disso, satisfaz a seguinte condição: sempre que  $y \in \Omega, y \neq 0$  e  $\Delta_{k-1}^k V(y) \geq 0$  então  $\Delta_0^k V(y) < 0$ .

Dados os inteiros  $p \geq 0$  e  $q \geq 0$  e a função  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , considere os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned}\Omega_+(p, q) &= \{x \in \Omega : \Delta_q^p V(x) > 0\} \\ \Omega_-(p, q) &= \{x \in \Omega : \Delta_q^p V(x) < 0\} \\ \Omega_0(p, q) &= \{x \in \Omega : \Delta_q^p V(x) = 0\} \\ \Omega_-^0(p, q) &= \Omega_-(p, q) \cup \Omega_0(p, q).\end{aligned}$$

Deste modo, vamos agora definir os conceitos de acordo com esta nova notação.

**Definição 4.1.** Uma função contínua  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada dicotômica em  $\Omega$  com relação à (4.1), se existe um inteiro  $k \geq 2$  tal que,  $\bar{\Omega}_+(k, k-1) \subset \Omega_-^0(k, 0)$ .

**Definição 4.2.** Uma função  $V$  dicotômica em  $\Omega$  com relação à (4.1) é chamada estritamente dicotômica em  $\Omega$  com relação à (4.1), se satisfaz as seguintes condições:  $\bar{\Omega}_+^*(k, k-1) \subset \Omega_-(k, 0)$  e  $\Omega_0(k, k-1) \cap \Omega_0(k, 0) = \{0\}$ .

Antes de provar que uma função dicotômica garante estabilidade, necessitamos mostrar alguns resultados:

Dados um ponto  $y \in \mathbb{R}^m$ , um inteiro  $k > 0$  e uma função  $V : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , para cada  $j = 1, 2, \dots$ , definimos no intervalo  $[(j-1)k, jk]$ ,

$$c_j = \max\{V(x_n(y)) \mid (j-1)k \leq n \leq jk\},$$

e

$$j^* = \min\{n \mid (j-1)k \leq n \leq jk \text{ e } c_j = V(x_n(y))\},$$

ou seja,  $j^*$  é o mínimo entre os índices do intervalo  $[(j-1)k, jk]$  nos quais ocorre o valor máximo de  $V(x_n(y))$  neste intervalo.

**Lema 4.1.** Se  $V$  é definida positiva e  $c_j = 0$  para algum  $j$ , então  $x_n(y) = 0$  para  $n > j$  e, portanto,  $c_n = 0$  para  $n > j$ .

*Demonstração.* Se  $c_j = 0$  para algum  $j$ , então  $V(x_{j^*}(y)) = 0$ . Como  $V$  é definida positiva, temos que  $V(x) = 0$  implica  $x = 0$ , assim

$$x_{j^*}(y) = f^{j^*}(y) = 0,$$

deste modo, como  $f(0) = 0$ , para qualquer  $n > j^*$ ,

$$x_n(y) = (f^{n-j^*} \circ f^{j^*})(y) = f^{n-j^*}[f^{j^*}(y)] = 0.$$

Como  $V(x_n(y)) = V(0) = 0$ , para  $n > j^*$ , segue que  $c_n = 0$  para  $n > j^*$  e sendo  $j^*$  o menor valor em que ocorre  $c_j$ , temos que  $c_n = 0$  para  $n > j^*$ .  $\square$

**Lema 4.2.** *Se  $V$  é dicotômica em relação à (4.1),  $j \geq 2$ , então  $c_j \leq c_{j-1}$ .*

*Demonstração.* Temos dois casos a considerar:

Caso 1: Se  $j^* > (j-1)k$  então,

$$j^* - 1 \geq (j-1)k. \quad (4.2)$$

Como  $j^* \in [(j-1)k, jk]$ , por (4.2), temos

$$(j-1)k \leq j^* - 1 < j^* \leq jk.$$

Pela definição de  $j^*$ ,

$$V(x_{j^*}(y)) > V(x_{j^*-1}(y)) \Rightarrow V(x_{j^*}(y)) - V(x_{j^*-1}(y)) > 0, \quad \forall y \in \Omega.$$

Assim,

$$\begin{aligned} V(x_{j^*}(y)) - V(x_{j^*-1}(y)) &= \\ V(x_k(x_{j^*-k}(y))) - V(x_{k-1}(x_{j^*-k}(y))) &> 0 \end{aligned}$$

logo,

$$x_{j^*-k}(y) \in \Omega_+(k, k-1) \subset \bar{\Omega}_+(k, k-1).$$

Como, por hipótese,  $V$  é dicotômica,  $x_{j^*-k}(y) \in \Omega_-^0(k, 0)$ , isto é,

$$\begin{aligned} V(x_k(x_{j^*-k}(y))) - V(x_{j^*-k}(y)) &\leq 0 \Rightarrow \\ V(x_{j^*}(y)) - V(x_{j^*-k}(y)) &\leq 0 \Rightarrow \\ V(x_{j^*}(y)) &\leq V(x_{j^*-k}(y)). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Por outro lado,  $j^* - k \in [(j-2)k, (j-1)k]$  e  $c_{j-1}$  é o valor máximo do conjunto  $\{V(x_n(y)) \mid (j-2)k \leq n \leq (j-1)k\}$  então,

$$V(x_{j^*-k}(y)) \leq c_{j-1}. \quad (4.4)$$

Por (4.3) e (4.4):

$$c_j = V(x_{j^*}(y)) \leq V(x_{j^*-k}(y)) \leq c_{j-1}.$$



Caso 2: Se  $j^* = (j-1)k$ , então  $j^* \in [(j-2)k, (j-1)k]$ , logo

$$c_j = V(x_{j^*}(y)) \leq c_{j-1}.$$

Portanto,  $c_j \leq c_{j-1}$ . □

**Corolário 4.1.** *Se  $V$  é estritamente dicotômica em  $\Omega$  em relação à (4.1) e  $j^* > (j-1)k$ , segue que  $c_j < c_{j-1}$ .*

*Demonstração.* Se  $j^* > (j-1)k$ , analogamente ao Lema 4.2, temos que

$$V(x_k(x_{j^*-k}(y))) - V(x_{k-1}(x_{j^*-k}(y))) > 0.$$

Logo,

$$x_{j^*-k}(y) \in \Omega_+(k, k-1) \subset \bar{\Omega}_+^*(k, k-1).$$

Como, por hipótese,  $V$  é estritamente dicotômica,  $x_{j^*-k}(y) \in \Omega_-(k, 0)$ , isto é,

$$\begin{aligned} V(x_k(x_{j^*-k}(y))) - V(x_{j^*-k}(y)) &< 0 \Rightarrow \\ V(x_{j^*}(y)) - V(x_{j^*-k}(y)) &< 0 \Rightarrow \\ V(x_{j^*}(y)) &< V(x_{j^*-k}(y)). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Por outro lado,  $j^* - k \in [(j-2)k, (j-1)k]$  e  $c_{j-1}$  é o valor máximo do conjunto  $\{V(x_n(y)) \mid (j-2)k \leq n \leq (j-1)k\}$  então,

$$V(x_{j^*-k}(y)) \leq c_{j-1}. \tag{4.6}$$

Por (4.5) e (4.6):

$$c_j = V(x_{j^*}(y)) < V(x_{j^*-k}(y)) \leq c_{j-1}.$$

Portanto,  $c_j < c_{j-1}$ . □

**Lema 4.3.** *Se  $V$  é estritamente dicotômica em  $\Omega$  em relação à (4.1),  $j \geq 3$  e  $c_{j-1} \neq 0$ , então  $c_j < c_{j-2}$ .*

*Demonstração.* De acordo com a hipótese, pelo Lema 4.2,

$$c_j \leq c_{j-1} \leq c_{j-2}. \tag{4.7}$$

Devemos considerar dois casos:

Caso 1: Se  $j^* > (j-1)k$ , pelo Corolário 4.1, segue que  $c_j < c_{j-1}$ . Então, por (4.7) temos  $c_j < c_{j-2}$ .

Caso 2: Se  $j^* = (j-1)k$ , então  $j^* \in [(j-2)k, (j-1)k]$ . Logo  $c_j = V(x_{j^*}(y)) \leq c_{j-1}$ , ou seja,  $c_j < c_{j-1}$  ou  $c_j = c_{j-1}$ .

Se  $c_j < c_{j-1}$ , por (4.7),  $c_j < c_{j-2}$ .

Agora, se  $j^* = (j-1)k$  e  $c_j = c_{j-1}$  novamente devemos considerar dois casos:

Caso 2.1: Se  $(j-1)^* = (j-2)k$ , então:

$$c_{j-1} = c_j = V(x_{j^*}(y)) > V(x_{j^*-1}(y)) \quad \text{ou} \quad V(x_{j^*}(y)) = V(x_{j^*-1}(y)).$$

Se  $V(x_{j^*}(y)) > V(x_{j^*-1}(y))$ , então:

$$\begin{aligned} V(x_{j^*}(y)) - V(x_{j^*-1}(y)) &= V(x_{(j-1)k}(y)) - V(x_{(j-1)k-1}(y)) = \\ V(x_{(j-2)k+k}(y)) - V(x_{(j-2)k+k-1}(y)) &= V(x_{(j-1)^*+k}(y)) - V(x_{(j-1)^*+k-1}(y)) > 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Delta_{k-1}^k V(x_{(j-1)^*}(y)) > 0, \quad \forall y \in \Omega.$$

Logo,  $x_{(j-1)^*}(y) \in \Omega_+(k, k-1) \subset \bar{\Omega}_+^*(k, k-1)$ . Como  $V$  é estritamente dicotômica em  $\Omega$ , então

$$x_{(j-1)^*}(y) \in \Omega_-(k, 0),$$

e assim temos:

$$\Delta_0^k V(x_{(j-1)^*}(y)) < 0.$$

Logo

$$\begin{aligned} V(x_k(x_{(j-1)^*}(y))) - V(x_{(j-1)^*}(y)) &= V(x_{(j-2)k+k}(y)) - V(x_{(j-1)^*}(y)) = \\ V(x_{(j-1)k}(y)) - V(x_{(j-1)^*}(y)) &= V(x_{j^*}(y)) - V(x_{(j-1)^*}(y)) < 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $c_j - c_{j-1} < 0$ , isto é,  $c_j < c_{j-1}$ . Contradição pois, por hipótese,  $c_j = c_{j-1}$ .

Se  $V(x_{j^*}(y)) = V(x_{j^*-1}(y))$ , então:

$$\begin{aligned} V(x_{j^*}(y)) - V(x_{j^*-1}(y)) &= 0 \\ V(x_{(j-1)k}(y)) - V(x_{(j-1)k-1}(y)) &= 0 \\ V(x_{(j-2)k+k}(y)) - V(x_{(j-2)k+k-1}(y)) &= 0 \\ V(x_{(j-1)^*+k}(y)) - V(x_{(j-1)^*+k-1}(y)) &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\Delta_{k-1}^k V(x_{(j-1)^*}(y)) = 0, \quad \forall y \in \Omega.$$

Logo,

$$x_{(j-1)^*}(y) \in \Omega_0(k, k-1). \quad (4.8)$$

Por outro lado,

$$V(x_{(j-1)k}(y)) = V(x_{j^*}(y)) = V(x_{(j-1)^*}(y)).$$

E assim temos

$$\begin{aligned} V(x_{(j-1)k}(y)) - V(x_{(j-1)^*}(y)) &= V(x_{(j-2)k+k}(y)) - V(x_{(j-1)^*}(y)) = \\ V(x_{(j-1)^*+k}(y)) - V(x_{(j-1)^*}(y)) &= V(x_k(x_{(j-1)^*}(y))) - V(x_{(j-1)^*}(y)) = 0. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\Delta_0^k V(x_{(j-1)^*}(y)) = 0, \quad \forall y \in \Omega.$$

Portanto,

$$x_{(j-1)^*}(y) \in \Omega_0(k, 0). \quad (4.9)$$

Deste modo, por (4.8) e (4.9),  $x_{(j-1)^*}(y) \in \Omega_0(k, 0) \cap \Omega_0(k, k-1)$ . Como  $V$  é estritamente dicotômica, então  $x_{(j-1)^*}(y) = 0$ . Portanto,

$$0 = V(x_{(j-1)^*}(y)) = c_{j-1}.$$

Contradição pois, por hipótese,  $c_{j-1} \neq 0$ .

Caso 2.2: Se  $(j-1)^* > (j-2)k$ , então pelo Corolário 4.1,  $c_j = c_{j-1} < c_{j-2}$  e, portanto,  $c_j < c_{j-2}$ .

□

A partir dos resultados apresentados, estamos em condições de enunciar e provar o teorema que garante a estabilidade do equilíbrio nulo, através de Funções Dicotômicas.

**Teorema 4.1.** *Suponha que a função  $V$  seja definida positiva e dicotômica em  $\Omega$  em relação à (4.1). Então, o equilíbrio nulo é estável.*

*Demonstração.* [1]. Sejam  $R > 0$  e  $r > 0$ ,  $r < R$  de forma que  $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| \leq R\} \subset \Omega$  e  $\sup\{\|f(y)\| \in \mathbb{R} \mid \|y\| \leq r\} \leq R$ . Definimos  $\delta = \inf\{|V(y)| \in \mathbb{R} \mid r \leq \|y\| \leq R\}$ . Observemos que  $\delta$  não pode ser zero, pois  $V$  é contínua,  $V(y) = 0$  somente para  $y = 0$  e para os demais,  $V(y) > 0$  e além disso,  $r \leq \|y\| \leq R$ . Assim,  $\delta > 0$ .

Mostremos agora que existe  $0 < \gamma < r$  tal que, para  $\|y\| < \gamma$ ,  $V(y) < \delta$ . Para tanto, definimos  $h(x) = V(x) - \delta$  onde  $h(0) = V(0) - \delta = -\delta < 0$ . Como  $V$  é contínua em zero, pelo Teorema da Conservação do Sinal, existe  $\gamma \in (0, r)$  tal que  $\|y\| < \gamma$  implica  $h(y) < 0$ . Portanto,  $h(y) = V(y) - \delta < 0$ , isto é,  $V(y) < \delta$ , sempre que

$$\|y\| < \gamma < r \leq R. \quad (4.10)$$

Vale também que se  $\|y\| \leq R$  e  $V(y) < \delta$ , então, necessariamente,  $\|y\| < r$  pois se

$$r \leq \|y\| \leq R, \quad |V(y)| \geq \delta. \quad (4.11)$$

Para  $\gamma > 0$  e pela continuidade de  $f$  em zero, existe  $\mu \in (0, r)$  tal que  $\|y\| < \mu$  implica  $\|x_n(y)\| < \gamma < R$ , para  $n = 1, 2, \dots, k$ .

Por (4.10),  $V(x_n(y)) < \delta$ . Logo, por (4.11),  $\|x_n(y)\| < r$ , para  $\|y\| < \mu < r$ , com  $n = 1, 2, \dots, k$ .

Como  $c_1(y) = \max\{V(x_n(y)), 0 \leq n \leq k\} < \delta$ , segue pelo Lema 4.2 que  $c_j(y) \leq c_1(y) < \delta$  para  $j \geq 1$ . Assim,  $V(x_n(y)) < \delta$  para  $n = (j-1)k, \dots, jk$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . E por (4.11), sempre que  $\|y\| < \mu$ , temos que  $\|x_n(y)\| < r$  para  $n = (j-1)k, \dots, jk$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

Logo, para  $r > 0$ , existe  $\mu > 0$  tal que, se  $\|y\| < \mu$ ,  $\|x_n(y)\| < r$  e portanto, o equilíbrio nulo é estável.  $\square$

**Exemplo 4.1.** Considere a equação

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

em que  $a$  e  $b$  são constantes reais.

Para  $a = 1$  e  $b = -1$ , a função  $V(x, y) = x^2 + y^2$  não é de Liapunov em relação à (4.12) devido ao fato de que  $\Delta V(x, y)$  não tem sinal definido numa vizinhança da origem.

De fato, de (4.12), temos:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - y_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta V(x_n, y_n) &= x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 - (x_n^2 + y_n^2) \\ \Delta V(x_n, y_n) &= (x_n - y_n)^2 + x_n^2 - x_n^2 - y_n^2 \\ \Delta V(x_n, y_n) &= (x_n - y_n)^2 - y_n^2. \end{aligned}$$

Para avaliar o sinal de  $\Delta V(x_n, y_n)$  numa vizinhança da origem, verificaremos inicialmente para quais valores  $\Delta V(x_n, y_n) = 0$ , isto é,  $(x_n - y_n)^2 - y_n^2 = 0$ .

Para simplificar a notação, consideremos  $(x - y)^2 - y^2 = 0$ , que é equivalente a  $y^2 = (x - y)^2$ , ou  $|y| = |x - y|$ .

Se  $y \geq 0$  então

$$y = |x - y| = \begin{cases} x - y, & \text{se } x - y \geq 0 \\ y - x, & \text{se } x - y < 0 \end{cases}$$

Para  $(x, y) \in A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x\}$ :

$$y = x - y \Leftrightarrow y = \frac{x}{2}.$$

Para  $(x, y) \in A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, y > x\}$  :

$$y = y - x \Leftrightarrow x = 0.$$

Se  $y < 0$  então

$$y = -|x - y| = \begin{cases} y - x, & \text{se } x - y \geq 0 \\ x - y, & \text{se } x - y < 0 \end{cases}$$

Para  $(x, y) \in A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0, y \leq x\}$  :

$$y = y - x \Leftrightarrow x = 0.$$

Para  $(x, y) \in A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y < 0\}$  :

$$y = x - y \Leftrightarrow y = \frac{x}{2}.$$

Verificaremos a seguir para quais valores  $\Delta V(x, y) < 0$  e para quais  $\Delta V(x, y) > 0$ .

$$\Delta V(x, y) < 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 - y^2 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 < y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2xy < 0 \Leftrightarrow x^2 < 2xy.$$

Se  $x > 0$ ,  $y > \frac{x}{2}$  e se  $x < 0$  então  $y < \frac{x}{2}$ .

$$\Delta V(x, y) > 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 > y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2xy > 0 \Leftrightarrow x^2 > 2xy.$$

Se  $x > 0$ ,  $y < \frac{x}{2}$  e se  $x < 0$  então  $y > \frac{x}{2}$ .

Podemos visualizar as regiões encontradas através da figura abaixo:

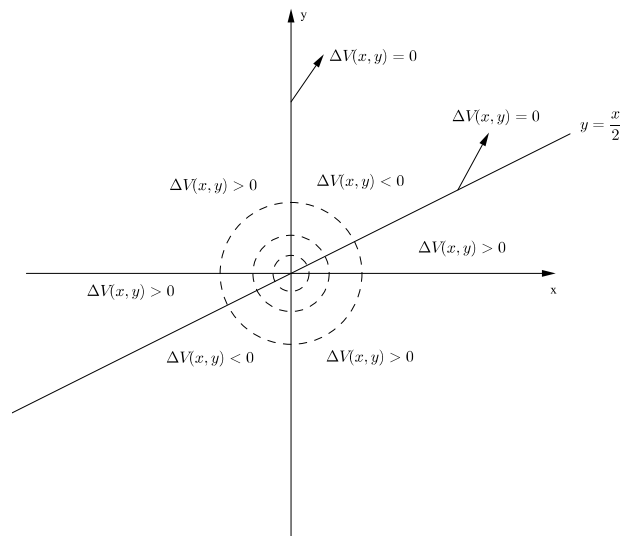


Figura 4.1: Análise do sinal de  $\Delta V(x, y)$  em torno do equilíbrio nulo.

Analisando o sinal de  $\Delta V(x, y)$  numa vizinhança do equilíbrio nulo, verificamos que  $\Delta V(x, y) \leq 0$  não ocorre em toda a vizinhança. Portanto a função  $V$  não é de Liapunov em relação à (4.12) para  $a = 1$  e  $b = -1$ .

Por outro lado, o equilíbrio nulo é estável. Para provarmos isto devemos demonstrar que  $V$  é uma função dicotômica em relação à (4.12) em qualquer vizinhança  $\Omega$  da origem.

Vamos verificar se para  $k = 3$ , a definição de dicotomia está satisfeita. Para tanto, analisemos o sinal de  $\Delta_2^3 V(x, y)$  e de  $\Delta_0^3 V(x, y)$ .

Para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_2^3 V(x, y) \geq 0 &\Leftrightarrow x_3^2 + y_3^2 - (x_2^2 + y_2^2) \geq 0 \Leftrightarrow (x_2 - y_2)^2 + x_2^2 - x_2^2 - y_2^2 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &(x_1 - y_1 - x_1)^2 - x_1^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - (x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq (x - y)^2 \Leftrightarrow |x| \geq |x - y|. \end{aligned}$$

Se  $x \geq 0$  então

$$x \geq |x - y| = \begin{cases} x - y, & \text{se } x - y \geq 0 \\ y - x, & \text{se } x - y < 0 \end{cases}$$

Para  $(x, y) \in A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, x \geq y\}$  :

$$x \geq x - y \Leftrightarrow y \geq 0.$$

Para  $(x, y) \in A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, x < y\}$  :

$$x \geq y - x \Leftrightarrow y \leq 2x.$$

Se  $x < 0$  então

$$x \leq -|x - y| = \begin{cases} y - x, & \text{se } x - y \geq 0 \\ x - y, & \text{se } x - y < 0 \end{cases}$$

Para  $(x, y) \in A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq x < 0\}$  :

$$x \leq y - x \Leftrightarrow y \geq 2x.$$

Para  $(x, y) \in A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 0, x < y\}$  :

$$x \leq x - y \Leftrightarrow y \leq 0.$$

Podemos visualizar, através da figura abaixo, as regiões onde  $\Delta_2^3 V(x, y) \geq 0$ .

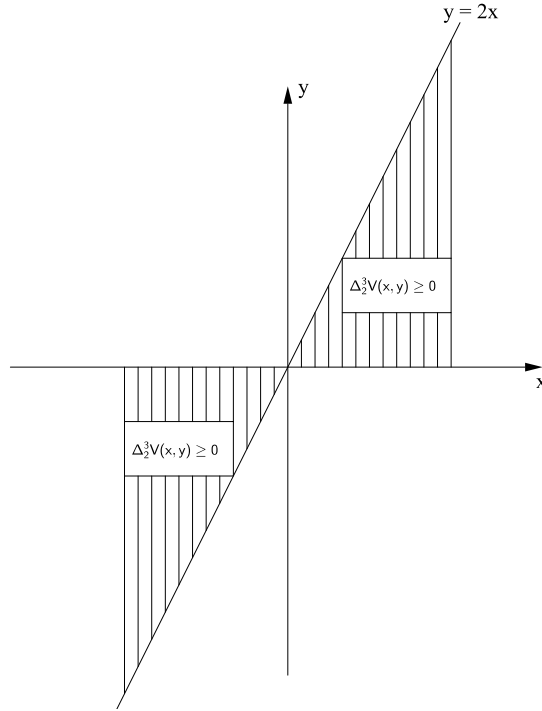


Figura 4.2: Regiões do plano onde  $\Delta_2^3 V(x, y) \geq 0$ .

Para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_0^3 V(x, y) &= x_3^2 + y_3^2 - (x^2 + y^2) = (x_2 - y_2)^2 + x_2^2 - x^2 - y^2 = \\ &= (x_1 - y_1 - x_1)^2 + (x_1 - y_1)^2 - x^2 - y^2 = y_1^2 + (x - y - x)^2 - x^2 - y^2 = x^2 + y^2 - x^2 - y^2 = 0. \end{aligned}$$

Logo,  $\Delta_0^3 V(x, y) = 0$ , para qualquer  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Afirmamos que  $V$  é uma função dicotômica em relação à (4.12) para  $a = 1$  e  $b = -1$ , para qualquer vizinhança  $\Omega$  da origem, com  $k = 3$ , isto é, se  $(x, y) \in \Omega$  e  $\Delta_2^3 V(x, y) \geq 0$  então  $\Delta_0^3 V(x, y) \leq 0$ , ou seja, o conjunto  $\{(x, y) \in \Omega \mid \Delta_2^3 V(x, y) = x^2 - (x - y)^2 \geq 0\}$  está contido no conjunto  $\{(x, y) \in \Omega \mid \Delta_0^3 V(x, y) \leq 0\} = \Omega$ .

Como  $V$  é definida positiva em  $\mathbb{R}^2$  e dicotômica em relação à (4.12), então pelo Teorema 4.1 temos que o equilíbrio nulo é estável.

**Teorema 4.2.** *Se, em adição às hipóteses do Teorema 4.1, a função  $V$  for estritamente dicotômica em  $\Omega$  em relação à (4.1), então o equilíbrio nulo de (4.1) será assintoticamente estável.*

*Demonstração.* [1]. Consideremos  $\mu$  dado no Teorema 4.1 e mostremos que, se  $\|y\| < \mu$  então  $V(x_n(x)) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$  e portanto  $x_n(x) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow +\infty$ , que é o resultado desejado.

Temos que a sequência  $(c_j)$  é decrescente e limitada, pois  $c_j \geq 0$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ . Logo,  $(c_j)$  é convergente, isto é, existe  $c \geq 0$  tal que  $c < c_j$  com  $c_j \rightarrow c$  quando  $j \rightarrow +\infty$ .

Se  $c = 0$ , o resultado está provado.

Vamos então considerar  $c > 0$ . Desde que  $c < \mu$  e o único ponto  $x$  com  $\|y\| < \mu$  em que  $\Delta_{k-1}^k V(y)$  e  $\Delta_0^k V(y)$  valem zero simultaneamente é  $x = 0$ , pela definição de dicotomia estrita, então as hipóteses garantem a existência de  $\rho = \rho(c)$  tal que, ou  $\Delta_{k-1}^k V(y) < -\rho$  ou  $\Delta_0^k V(y) < -\rho$ , para todo  $y$ ,  $c < \|y\| < \mu$ . Pois, se existir  $y$ ,  $c < \|y\| < \mu$  com  $\Delta_{k-1}^k V(y) \geq 0$  e  $\Delta_0^k V(y) \geq 0$ , teríamos uma contradição, considerando que  $\Delta_{k-1}^k V(y) \geq 0$  implicaria em  $\Delta_0^k V(y) < 0$ , pela definição de dicotomia estrita.

Sendo  $(c_j)$  decrescente, afirmamos que o valor  $c_j$  é assumido no instante  $jk$  do intervalo  $[jk, (j+1)k]$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , isto é,  $c_j = V(x_{jk}(y))$ . Como  $jk - 1 \in [(j-1)k, jk]$ , então  $V(x_{jk-1}(y)) \leq c_{j-1}$ .

Logo,  $V(x_{jk-1}(y)) - V(x_{jk}(y)) \leq c_{j-1} - c_j$ , ou seja,

$$V(x_k(x_{jk-k}(y))) - V(x_{k-1}(x_{jk-k}(y))) = V(x_{jk}(y)) - V(x_{jk-1}(y)) \geq c_j - c_{j-1}.$$

Como  $\Delta_{k-1}^k V(x_{jk-k}(y)) < -\rho$ , então  $c_j - c_{j-1} < -\rho$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , isto é:

$$\begin{aligned} c_1 &< c_0 - \rho, \\ c_2 &< c_1 - \rho < c_0 - \rho - \rho = c_0 - 2\rho, \\ c_3 &< c_2 - \rho < c_0 - 2\rho - \rho = c_0 - 3\rho. \end{aligned}$$

Genericamente,  $c_j < c_0 - j\rho$ , o qual concluímos que  $c_j \rightarrow -\infty$  quando  $j \rightarrow +\infty$ , que é uma contradição.

No caso em que  $\Delta_0^k V(y) < -\rho$  para todo  $x$ ,  $c < \|x\| < R$ , obtém-se analogamente a contradição.  $\square$



**Exemplo 4.2.** Seja o sistema

$$\begin{cases} x_n = \sqrt{\mu|x_{n-1}||y_{n-1}|}, & x(0) = x_0, \\ y_n = x_{n-1}, & y(0) = y_0, \quad n = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (4.13)$$

com  $\mu > 0$ .

Mostremos que o equilíbrio nulo de (4.13) é assintoticamente estável, provando que a função definida positiva  $V(x, y) = x^2 + y^2$  é estritamente dicotômica em  $\Omega$ . Vamos verificar se para  $k = 2$ , a definição de dicotomia estrita está satisfeita. Para tanto, analisemos os sinais de  $\Delta_1^2 V(x_0, y_0)$  e  $\Delta_0^2 V(x_0, y_0)$ .

Temos que

$$\begin{aligned} \Delta_1^2 V(x_0, y_0) &= V(x_2, y_2) - V(x_1, y_1) = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 \\ &= \left(\sqrt{\mu|x_1||y_1|}\right)^2 + (x_1)^2 - \left(\sqrt{\mu|x_0||y_0|}\right)^2 - (x_0)^2 \\ &= \mu|x_1||y_1| + x_1^2 - \mu|x_0||y_0| - x_0^2 \\ &= \mu\sqrt{\mu|x_0||y_0|} \cdot |x_0| + \left(\sqrt{\mu|x_0||y_0|}\right)^2 - \mu|x_0||y_0| - x_0^2 \\ &= |x_0| \left(\mu\sqrt{\mu|x_0y_0|} - |x_0|\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_0^2 V(x_0, y_0) &= V(x_2, y_2) - V(x_0, y_0) = x_2^2 + y_2^2 - x_0^2 - y_0^2 \\ &= \left(\sqrt{\mu|x_1||y_1|}\right)^2 + (x_1)^2 - x_0^2 - y_0^2 = \mu|x_1||y_1| + (x_1)^2 - x_0^2 - y_0^2 \\ &= \mu\sqrt{\mu|x_0||y_0|} \cdot |x_0| + \left(\sqrt{\mu|x_0||y_0|}\right)^2 - x_0^2 - y_0^2 \\ &= \mu\sqrt{\mu|x_0y_0|}|x_0| + \mu|x_0y_0| - x_0^2 - y_0^2 \\ &= \sqrt{\mu|x_0y_0|} \left(\mu|x_0| + \sqrt{\mu|x_0y_0|}\right) - x_0^2 - y_0^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_1^2 V(x_0, y_0) \geq 0 &\Leftrightarrow |x_0| \left(\mu\sqrt{\mu|x_0y_0|} - |x_0|\right) \geq 0 \Leftrightarrow \mu\sqrt{\mu|x_0y_0|} - |x_0| \geq 0 \\ &\Leftrightarrow |x_0| \leq \mu\sqrt{\mu|x_0y_0|} \Leftrightarrow |x_0|^2 \leq \left(\mu\sqrt{\mu|x_0y_0|}\right)^2 \Leftrightarrow |x_0|^2 \leq \mu^2\mu|x_0y_0| \\ &\Leftrightarrow |x_0|^2 \leq \mu^3|x_0||y_0| \quad \begin{matrix} x_0 \neq 0 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} |x_0| \leq \mu^3|y_0|. \end{aligned}$$

Notemos que  $\Delta_1^2 V(x, y) \geq 0$  se, e somente se,  $|x| \leq \mu^3|y|$ .

Vamos supor  $\Delta_1^2 V(x, y) \geq 0$  e avaliar os valores de  $\mu$  para os quais  $\Delta_0^2 V(x, y) < 0$ , para que  $V$  seja estritamente dicotômica em relação à (4.13), para  $k = 2$ .

Assim, se  $|x| \leq \mu^3|y|$ , temos:

$$\begin{aligned} \Delta_0^2 V(x, y) &= \sqrt{\mu|xy|} \left(\mu|x| + \sqrt{\mu|xy|}\right) - x^2 - y^2 \leq \sqrt{\mu^4 y^2} \left(\mu^4|y| + \sqrt{\mu^4 y^2}\right) - x^2 - y^2 \\ &= \mu^2|y| (\mu^4|y| + \mu^2|y|) - x^2 - y^2 = (\mu^6 + \mu^4 - 1) y^2 - x^2. \end{aligned}$$

Logo,  $\Delta_0^2 V(x, y) < 0$  se, e somente se,  $\mu^6 + \mu^4 < 1$  ou  $\mu^6 + \mu^4 > 1$  com  $(\mu^6 + \mu^4 - 1) y^2 - x^2 < 0$ , isto é,  $|x| > |y| \sqrt{\mu^6 + \mu^4 - 1}$ , considerando  $\Delta_1^2 V(x, y) \geq 0$ .

Observemos que a segunda condição está descartada, pois:

(i) Se  $\mu \geq 1$ ,  $\sqrt{\mu^6 + \mu^4 - 1} \geq \mu^3$  e para  $(x, y)$  tal que  $|x| \leq \mu^3|y| \leq \sqrt{\mu^6 + \mu^4 - 1}|y|$ , não ocorre  $|x| > \sqrt{\mu^6 + \mu^4 - 1}|y|$ .

(ii) Se  $0 < \mu < 1$ ,  $\mu^3 > \sqrt{\mu^6 + \mu^4 - 1}$  e para  $(x, y)$  tal que  $|x| \leq \sqrt{\mu^6 + \mu^4 - 1}|y| < \mu^3|y|$  não ocorre  $|x| > \sqrt{\mu^6 + \mu^4 - 1}|y|$ .

Assim, para  $\mu > 0$  tal que  $\mu^6 + \mu^4 < 1$ , para qualquer vizinhança  $\Omega$  da origem em  $\mathbb{R}^2$  e para  $k = 2$  na definição de dicotomia estrita, temos que  $\bar{\Omega}_+^*(2, 1) \subset \Omega_-(2, 0)$ .

Para que  $V$  seja estritamente dicotômica em  $\Omega$  em relação à (4.13), resta provar que  $\Omega_0(2, 1) \cap \Omega_0(2, 0) = \{0\}$ .

Seja  $(x, y) \in \Omega_0(2, 1) \cap \Omega_0(2, 0)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \begin{cases} V(x_2, y_2) - V(x_1, y_1) = 0 \\ V(x_2, y_2) - V(x, y) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 = 0 \\ x_2^2 + y_2^2 - x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = x^2 + y^2 \\ x_1^2 + y_1^2 - x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \mu|xy| + x^2 = x^2 + y^2 \\ \mu|xy| - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow |y|(\mu|x| - |y|) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad |y| = \mu|x|. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Da primeira equação do sistema, temos:

$$\begin{aligned} x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 = 0 &\Leftrightarrow \mu|x_1y_1| + x_1^2 - x_1^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow \mu\sqrt{\mu|xy|} \cdot |x| - x^2 = 0 \\ \Leftrightarrow |x|(\mu\sqrt{\mu|xy|} - |x|) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \mu\sqrt{\mu|xy|} \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 = \mu^3|xy| \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad |x| = \mu^3|y|. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Analisando as possibilidades entre (4.14) e (4.15), temos:

- (i)  $y = 0, x = 0$ ,
- (ii)  $y = 0, x = \mu\sqrt{\mu|xy|} \Rightarrow y = 0, x = 0$ ,
- (iii)  $x = 0, |y| = \mu|x| \Rightarrow x = 0, y = 0$ ,
- (iv)  $|x| = \mu^3|y|, |y| = \mu|x| \Rightarrow |y| = \mu^4|y| \Rightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad \mu = 1$ . Se  $y = 0, x = 0$  e a condição  $\mu = 1$  está descartada.

Logo, concluímos que a única solução de  $\Omega_0(2, 1) \cap \Omega_0(2, 0)$  é  $(0, 0)$ , ou seja,  $V$  é estritamente dicotômica em  $\Omega$  em relação à (4.13) se  $\mu > 0$  e  $\mu^6 + \mu^4 < 1$  e pelo Teorema 4.2, o equilíbrio nulo de (4.13) é assintoticamente estável com as condições impostas.

Notemos que  $V$  não é função de Liapunov para (4.13), pois

$$\begin{aligned} \Delta V(x, y) &= V(f(x, y)) - V(x, y) = V(\sqrt{\mu|x||y|}, x) - V(x, y) \\ &= \mu|x||y| + x^2 - x^2 - y^2 = |y|(\mu|x| - |y|) \end{aligned}$$

não tem sinal definido para  $(x, y) \in \Omega$ .

# Referências

- [1] CARVALHO, L.A.V. On the Stability of Discrete Equations and Ordinary Differential Equations. Delay Differential Equations and Dynamical Systems. Nova York: Springer, 1990.
- [2] ELAYDI, S. An Introduction to Difference Equations. Nova York: Springer, 2005.
- [3] SANDEFUR, J.T. Discrete Dynamical Systems - Theory and applications, Oxford: Clarendon Press, 1990.
- [4] LIMA, E.L. Análise Real - Volume 1, 9a.edição. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2007.