



Paulo Henrique Ortega

# Aspectos Clássicos da Eletrodinâmica de Podolsky

São Paulo

29 de Abril de 2014



Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

---

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.010/14

Aspectos Clássicos da  
Eletrodinâmica de Podolsky

Paulo Henrique Ortega

Orientador

*Prof. Bruto Max Pimentel Escobar*

Coorientador

*Prof. Carlos Alberto Bonin*

29 de Abril de 2014

*Dedico este trabalho,*

*À minha mãe Maria, que é meu exemplo de força e perseverança.*

*Ao meu irmão Ricardo, que me ensinou que, por mais que a vida seja dura, devemos continuar lutando sempre.*

*Ao meu amigo Luiz Henrique, que me mostrou que irmãos não são só de sangue.*

## Agradecimentos

Agradeço à minha mãe Maria e ao meu irmão Ricardo por todo amor e confiança que sempre me deram. Devo minha vida a eles e tenho certeza que sem eles eu não chegaria onde cheguei.

Agradeço ao meu orientador Prof. B. M. Pimentel e ao meu coorientador Prof. C. A. Bonin pela paciência e pelos ensinamentos cedidos a mim durante estes dois anos de trabalho. Suas inestimáveis amizades levarei comigo por toda a vida.

Agradeço à Laura Inês Marques Candia, amiga querida por toda a família, por sua ajuda no início de meu mestrado. Sem ela este sonho não seria realizado.

Agradeço aos meus grandes amigos Bruno Gindri, Fabiana Andrade de Oliveira, Fabrício Caffarena, Fernando Oliveira Martins, Gabriel Nicolaev, João Lúcio França Maciel, Luiz Henrique Lemes Marques, Mariano Filho, Mayara Guimarães e Paolla Loubet que me mostraram que as maiores riquezas que uma pessoa pode ter são a amizade e a parceria daqueles que o consideram um irmão.

Agradeço aos meus novos amigos do IFT Ana Lúcia, Anderson, Carlisson, Daneele, Daniel Reyes, Ernany, Fagner, George, Guilherme, Henrique, Jhosep, Jonathan, Natália, Nathaly, Mario, Pablo, Patrice, Pedro, Renato, Segundo, Tatiana e Thiago Peixoto por fazerem minha passagem pelo IFT muito mais agradável. Obrigado por participarem desta fase de minha formação, acrescentando para meu conhecimento em Física e me enriquecendo como ser humano.

Agradeço ao IFT pela imensa infraestrutura e recursos disponibilizados a mim. Agradeço a todos os funcionários do IFT e, em especial, à Neila e à Rosane por toda a atenção dedicada para com os alunos.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro durante meu mestrado.

*"A coisa mais indispensável a um homem é reconhecer o uso que deve fazer de seu próprio conhecimento".*

*(Platão)*

## Resumo

A Eletrodinâmica Generalizada foi desenvolvida por Boris Podolsky em 1942 e trata-se de uma generalização da teoria de Maxwell, na qual é acrescentando na lagrangiana de Maxwell um termo que envolve a segunda derivada do campo eletromagnético. Atualmente chamada de Eletrodinâmica de Podolsky, foi mostrado que esta teoria é a única generalização de segunda ordem invariante de gauge possível para a Eletrodinâmica de Maxwell, tornando esta teoria uma alternativa para o estudo dos fenômenos eletromagnéticos. Neste contexto, nosso trabalho tem como objetivo investigar os aspectos clássicos da Eletrodinâmica de Podolsky. Inicialmente, estudamos o formalismo lagrangiano para teorias de segunda ordem, aplicando posteriormente à teoria de Podolsky. Em seguida, prosseguimos para o estudo da teoria de multipolos sob a perspectiva da Eletrodinâmica de Podolsky, aplicando os resultados obtidos em alguns exemplos da Eletrostática e Magnetostática, além de realizarmos a expansão multipolar para esta teoria que, até onde sabemos, não tinha sido obtida. Por último, abordamos os conceitos básicos da teoria de Radiação, obtendo a função de Green da equação do quadripotencial eletromagnético de Podolsky e também os potenciais de Liénard-Wiechert-Podolsky.

**Palavras-chave:** Eletrodinâmica de Podolsky; Funções de Green; Expansão Multipolar;

**Área de Conhecimento:** Eletromagnetismo.

## Abstract

The Generalized Electrodynamics was developed by Boris Podolsky in 1942 and it is a generalization of Maxwell's theory where Podolsky added a new term to the Maxwell's Lagrangean with a second derivative of the electromagnetic field. It was shown that Podolsky's Electrodynamics is the only possible generalization of a second gauge invariant to Maxwell's Electrodynamics. In this context, our work aims a study of some classical properties of Podolsky's Electrodynamics. We study multipole theory in Podolsky's Electrodynamics applying the results to some examples in Electrostatic and Magnetostatic. We also find the multipolar expansion in this study, which was something that, to our knowledge, has not been done so far. Lastly, we approach the basic concepts of the Radiation Theory and we obtain the Green's Function of the Podolsky's Electromagnetic four-potential and the Liénard-Wiechert-Podolsky's potentials.

**Keywords:** Podolsky's Electrodynamics; Green's Functions; Multipolar Expansion;

**Knowledge Area:** Electromagnetism.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Teoria de Campos para Lagrangianas com Derivadas de Segunda Ordem nos Campos</b>	<b>13</b>
2.1	Introdução	13
2.2	Os operadores $\delta$ e $\bar{\delta}$ , suas relações com o operador diferencial covariante e a variação de um elemento infinitesimal de hipervolume	14
2.3	A variação da Ação por transformações globais	17
2.4	Transformações a ponto fixo: As equações de Euler-Lagrange	18
2.4.1	As Equações de Podolsky	20
2.4.2	A Conservação da Carga Elétrica	22
2.5	Transformações de Simetria e o Teorema de Noether	23
2.5.1	Transformações de Poincaré	26
2.5.2	Translações Espaço-temporais: Tensor Energia-Momento	27
2.5.3	O Tensor Energia-Momento da Eletrodinâmica de Podolsky	29
2.5.4	Transformações de Lorentz e Rotações: Tensor Momento Angular e Tensor Spin	32
2.5.5	Os Tensores Momento Angular Orbital e Spin da Eletrodinâmica de Podolsky	34
<b>3</b>	<b>Teoria de Multipolos na Eletrodinâmica de Podolsky</b>	<b>36</b>
3.1	Introdução	36
3.2	As Equações de Podolsky para o caso estático e a Condição de Coulomb Generalizada	37
3.3	A Eletrostática de Podolsky	38
3.3.1	A Carga Puntual	38
3.3.2	O Dipolo Elétrico	43
3.3.3	Expansão Multipolar na Eletrostática	47
3.3.4	Exemplo: Expansão Multipolar do Potencial Escalar Elétrico de um Disco Carregado	52
3.4	A Magnetostática de Podolsky	56
3.4.1	Correntes Estacionárias	56
3.4.2	Alguns Exemplos	58
3.4.3	Expansão Multipolar na Magnetostática	63
3.4.4	Exemplo: Expansão Multipolar do Potencial Vetorial Magnético de uma Espira Circular com Corrente.	68

<b>4</b>	<b>Teoria da Radiação na Eletrodinâmica de Podolsky</b>	<b>72</b>
4.1	Introdução	72
4.2	Condição de Lorenz Generalizada e a Equação para o Quadripotencial Eletromagnético de Podolsky	73
4.3	As Funções de Green Retardada e Avançada da Equação do Quadripotencial Eletromagnético de Podolsky	76
4.3.1	Funções de Green e Causalidade	76
4.3.2	Funções de Green Retardada e Avançada da Equação do Quadripotencial Eletromagnético de Maxwell	78
4.3.3	Funções de Green Retardada e Avançada da Equação de Klein-Gordon-Fock	83
4.3.4	O limite de $m \rightarrow +\infty$ da função de Green retardada da equação do campo eletromagnético de Podolsky.	89
4.4	Os Potenciais de Liénard-Wiechert-Podolsky	92
<b>5</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>95</b>
5.1	Conclusões sobre os resultados	95
5.2	Perspectivas futuras	99
	<b>Referências</b>	<b>102</b>
	<b>APÊNDICE A A Função de Green da Equação do Potencial Escalar Elétrico de Podolsky</b>	<b>105</b>
A.1	Introdução	105
A.2	Função de Green da Equação do Potencial Escalar Elétrico de Podolsky	105
	<b>APÊNDICE B A Função de Green da Equação de Helmholtz Modificada</b>	<b>110</b>
B.1	Introdução	110
B.2	A Equação de Helmholtz Modificada e sua Função de Green	110
B.2.1	Obtenção da Função de Green da EHM por Transformada de Fourier	111
B.2.2	Obtenção da Função de Green da EHM por Expansão em Série de Harmônicos Esféricos	115
	<b>APÊNDICE C A Função de Green da Equação do Potencial Escalar Elétrico de Podolsky para a Expansão Multipolar</b>	<b>122</b>
C.1	Introdução	122
C.2	Função de Green para a Expansão Multipolar	122
	<b>ANEXO A Algumas Definições Importantes</b>	<b>126</b>
A.1	Introdução	126
A.2	O Sistema de Unidades	126

A.3	O Espaço Quadridimensional de Minkowski . . . . .	126
A.4	O Espaço Euclidiano Tridimensional . . . . .	128
A.5	Os Espaços dos Momentos Tridimensional e Quadridimensional . . . . .	128
<b>ANEXO B</b>	<b>O Teorema da Adição de Harmônicos Esféricos . . . . .</b>	<b>130</b>
B.1	Introdução . . . . .	130
B.2	O Teorema da Adição de Harmônicos Esféricos . . . . .	130

---

## CAPÍTULO 1

---

# INTRODUÇÃO

---

Quando Joseph-Louis Lagrange, em 1788, desenvolveu uma nova formulação da mecânica que denominou por “mecânica analítica” [1], ele baseou a mesma na existência de uma função escalar  $L$ , hoje chamada de *função de Lagrange* ou apenas *Lagrangiana*, que depende das posições e das velocidades do sistema de partículas em questão. O fato de que a dependência da lagrangiana de um sistema é, com exceção das posições das partículas, no máximo nas velocidades das mesmas partículas surge pois as equações de Lagrange, que fornecem as equações de movimento do sistema, são deduzidas a partir da segunda lei de Newton [2]. A princípio, o fato de que inúmeros fenômenos físicos são bem descritos por equações diferenciais de segunda ordem é uma coincidência. Desta forma, qualquer generalização da função de Lagrange para que inclua a dependência em derivadas de ordem superior da posição é válida, pois diferentes formalismos permitem diferentes maneiras de se visualizar um determinado problema.

Em 1850, Ostrogradski generalizou o formalismo de Lagrange e de Hamilton estendendo-os para qualquer ordem de derivadas da posição [3]. Ele também mostrou que as equações de Euler-Lagrange sempre podem ser substituídas por um conjunto equivalente de equações diferenciais de primeira ordem, além de generalizar a forma dos momentos canonicamente conjugados.

Motivado pelo trabalho de Ostrogradski, Podolsky generalizou a Eletrodinâmica de Maxwell acrescentando na lagrangiana de Maxwell um termo que envolve a segunda derivada do campo eletromagnético multiplicado por uma constante com dimensão de inverso de energia ao quadrado, hoje chamada de parâmetro de Podolsky [4]. Neste caso, a Eletrodinâmica de Maxwell é vista como o limite da teoria de Podolsky quando a constante de Podolsky tende a zero. Sua justificativa para tal generalização é baseada em que a única maneira de generalizar a teoria de Maxwell de modo a manter a linearidade da

mesma é acrescentando termos na lagrangiana que envolvem derivadas de ordem superior nos campos. Ele também comenta que as divergências na região do ultravioleta são melhores tratadas quando se consideram equações diferenciais de ordem superior a dois. Em trabalhos seguintes, Podolsky e Kikuchi constroem a versão quântica de sua teoria, estendendo o método de Heisenberg-Pauli para teorias de segunda ordem [5].

Isto motivou os físicos a estudarem teorias de ordem superior. Em 1978, Mušik estudou o formalismo canônico obtendo o teorema de Liouville generalizado [6]. Em 1984, Baker *et al.* argumentaram que, para grandes distâncias e em regime de acoplamento forte, a teoria de Yang-Mills podia ser aproximada por uma teoria efetiva, cuja lagrangiana continha um termo que envolve a segunda derivada do campo de gauge [7]. Em 1987, Galvão e Pimentel estudaram a estrutura canônica da Eletrodinâmica de Podolsky, obtendo um resultado muito interessante: a condição de Lorenz não é a condição de gauge correta para a Eletrodinâmica de Podolsky [8]. Os motivos pelos quais eles defendem esta ideia são baseados no fato que o campo eletromagnético de Podolsky apresenta cinco graus de liberdade físicos – dois relacionados a um modo não-massivo e três relacionados a um modo massivo – e 8 graus de liberdade aparentes. A condição de Lorenz não contemplava estes outros três graus de liberdade relacionados ao modo massivo, se mostrando então incorreta. Outro motivo apontado é que a condição de Lorenz quebrava a invariância da teoria por transformações de Lorentz, não preservando a evolução temporal do sistema. Neste trabalho eles obtiveram a condição de gauge correta, chamando-a de *condição de Lorenz generalizada*, fazendo a análise de vínculos à la Dirac da teoria de Podolsky.

Outros trabalhos envolvendo a Eletrodinâmica de Podolsky também foram realizados. Em 1996, Frenkel resolveu o problema de 4/3 da eletrodinâmica clássica partindo da hipótese que o campo eletromagnético satisfaz a lagrangiana de Podolsky [9]. Como resultado adjacente, ele calculou a autoenergia de uma carga puntual, mostrando que de fato é finita. Em 2006, Cuzinatto *et al.* obtiveram um resultado muito importante: a Eletrodinâmica de Podolsky é a única teoria de segunda ordem que é invariante pelos grupos de Lorentz e  $U(1)$  local, fazendo dela a única generalização de segunda ordem para a Eletrodinâmica de Maxwell [10]. Em 2010, Bonin *et al.* realizaram um estudo da Eletrodinâmica de Podolsky a temperatura finita [11]. Eles mostraram que isto implicaria em uma nova expressão para a lei de Stefan-Boltzmann, alterando a constante de  $\sigma$ . A nova “constante”  $\sigma$  é dada pela constante de Stefan-Boltzmann usual acrescida de uma correção que depende explicitamente da temperatura e da constante de Podolsky, esta que é igual a raiz quadrada da metade do inverso do parâmetro de Podolsky. Eles também obtiveram um limite experimental inferior da constante de Podolsky, argumentando que se existe tal correção na constante de Stefan-Boltzmann, esta deve ser no máximo igual ao erro experimental de medida da mesma constante. A dependência na temperatura foi tratada utilizando o valor da temperatura da radiação cósmica de fundo de

microondas, este que tem um espectro de um corpo negro muito bem acurado. O limite obtido foi  $m \gtrsim 4 \text{ MeV}$ . Um limite mais recente foi obtido por Bufalo *et al.* em [12], estudando o momento magnético do elétron. O valor obtido foi  $m \gtrsim 3,7595 \times 10^{10} \text{ eV}$ . A Eletrodinâmica de Podolsky também foi aplicada para o estudo do problema de Landau não-comutativo [13] e o Efeito Casimir [14], mostrando que é possível a investigação dos fenômenos físicos por meio de teoria de ordem superior.

Nestas circunstâncias, o objetivo deste trabalho é realizar um estudo clássico da Eletrodinâmica de Podolsky. Dividimos o trabalho de maneira que seja possível a análise da Eletrodinâmica de Podolsky em diferentes aspectos. No primeiro capítulo fazemos um estudo do formalismo lagrangiano para teoria de segunda ordem. Obtemos as equações de Euler-Lagrange e estendemos o teorema de Noether para tais teorias. Uma aplicação à Eletrodinâmica de Podolsky é realizada neste capítulo, obtendo as equações de Podolsky, que são as equações de movimento para o campo eletromagnético de Podolsky, além dos tensores Energia-Momento e de Momento Angular Total da teoria. O segundo capítulo consiste do estudo da teoria de multipolos sob a perspectiva da teoria de Podolsky. Este capítulo é dividido em três seções: a primeira seção comenta sobre as equações de Podolsky em termos do potencial escalar elétrico e do potencial vetorial magnético. A segunda seção aborda a Eletrostática de Podolsky, aplicando em alguns exemplos e realizando a expansão multipolar para o potencial escalar elétrico, que é verificada para o caso de um disco carregado uniformemente. A terceira seção investiga a Magnetostática de Podolsky, também aplicando para alguns exemplos e realizando a expansão multipolar do potencial vetorial magnético. O terceiro capítulo aborda os conceitos básicos da teoria de Radiação, obtendo a função de Green da equação do quadripotencial eletromagnético de Podolsky e também os potenciais de Liénard-Wiechert-Podolsky. O último capítulo é o de Conclusões e Perspectivas, no qual comentamos sobre os resultados obtidos e propomos alguns temas que podem ser estudados por meio da Eletrodinâmica de Podolsky. Os detalhes que julgamos importante foram colocados em formato de apêndices e também fizemos dois anexos: um sobre as definições que utilizamos e outro sobre o teorema da adição de harmônicos esféricos, resultado que utilizamos em um dos apêndices.

---

 CAPÍTULO 2
 

---



---

# TEORIA DE CAMPOS PARA LAGRANGIANAS COM DERIVADAS DE SEGUNDA ORDEM NOS CAMPOS

---

## 2.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos o formalismo lagrangiano para uma teoria de campos cuja densidade de lagrangiana possua derivadas de ordens superiores nos campos. Limitar-nos-emos ao caso em que a densidade de lagrangiana da teoria tenha até segundas derivadas nos campos, ou melhor, consideraremos o caso de uma densidade de lagrangiana do tipo  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i, \partial_\mu \partial_\nu \varphi_i)$ .<sup>1</sup> A Eletrodinâmica de Podolsky, objeto de estudo desta dissertação, é uma teoria cuja densidade de lagrangiana possui segundas derivadas nos campos. Isto mostra que este estudo preliminar será muito útil.

Para tanto, estabeleceremos sob quais circunstâncias o *funcional de Ação* de um determinado sistema físico será invariante por transformações globais de coordenadas, isto é, transformações cujo parâmetro independe do ponto do espaço-tempo. Para isso, definiremos dois operadores que ajudarão a destacar os efeitos da transformação sob o funcional de Ação. Em seguida, tomaremos dois tipos especiais de transformações e veremos suas implicações. Para os dois tipos de transformações adotados, faremos uma aplicação para a Eletrodinâmica de Podolsky.

---

<sup>1</sup> Para este tipo de densidade de lagrangiana daremos o nome de *densidade de lagrangiana de segunda ordem* por simplicidade

## 2.2 Os operadores $\delta$ e $\bar{\delta}$ , suas relações com o operador diferencial covariante e a variação de um elemento infinitesimal de hipervolume

Seja  $A : \mathcal{F}_\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\mathcal{F}_\Omega$  é o conjunto das funções de classe  $C^4$  em  $\Omega$ , este que é um subconjunto fechado, limitado e simplesmente conexo do espaço de Minkowski<sup>2</sup>, e  $\mathbb{R}$  é o conjunto dos números reais. Diremos que  $A$  é o *funcional de Ação*<sup>3</sup> de um dado sistema físico se a relação que o define é dada por

$$A[\varphi_i] = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i, \partial_\mu \partial_\nu \varphi_i), \quad (2.1)$$

com  $\mathcal{L}$  a densidade de lagrangiana do sistema físico em questão e  $\varphi_i \equiv \varphi_i(x)$  é um campo de  $\mathcal{F}_\Omega$ . O índice subscrito  $i$  indica o tipo do campo. O princípio de Ação de Hamilton estabelece que a evolução do sistema físico é tal que extremiza o funcional de Ação. Entende-se por *extremizar* obter as condições nas quais  $\delta A = 0$ . No caso geral, a variação da Ação é feita por meio de variações nos campos e nos eventos nos quais os campos são calculados.

Seja uma transformação infinitesimal nos eventos e nos campos da forma

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad (2.2)$$

$$\varphi_i(x) \longrightarrow \varphi'_i(x') = \varphi_i(x) + \delta \varphi_i(x), \quad (2.3)$$

sendo que  $\delta x^\mu$  e  $\delta \varphi_i$  são funções de  $x$ ,  $\delta \varphi_i$  é chamado de *variação total* de  $\varphi_i$  com  $\delta \varphi_i \ll 1$  e as distâncias espacial e temporal entre  $x^\mu$  e  $\delta x^\mu$  são arbitrariamente pequenas. Chamaríamos qualquer função de  $\delta x^\mu$  ou  $\delta \varphi_i$  de *infinitésimo*.

A variação na Ação é dada da seguinte maneira

$$\delta A[\varphi_i] = \int_{\Omega} (\delta \mathcal{L}) d^4x + \int_{\Omega} \mathcal{L} \delta (d^4x). \quad (2.4)$$

É preciso atenção com o operador  $\delta$ , pois o mesmo é afetado pela variação  $\delta x^\mu$ , como veremos mais à frente. Para ajudar no desenvolvimento de nosso estudo, definiremos a *variação na forma* de  $\varphi_i$ , que denotaremos por  $\bar{\delta} \varphi_i$  e é dada por

$$\bar{\delta} \varphi_i(x) = \varphi'_i(x) - \varphi_i(x). \quad (2.5)$$

Para uma transformação infinitesimal,  $\bar{\delta} \varphi_i \ll 1$ . Note que esta variação é realizada sob o mesmo evento  $x$ . Assim, a informação que  $\bar{\delta} \varphi_i$  nos dá é o quanto a forma funcional do

<sup>2</sup> Para saber as definições utilizadas neste trabalho, veja o Anexo A.

<sup>3</sup> Também chamado apenas de *Ação*.

campo  $\varphi_i$  mudou após uma transformação do tipo  $\varphi_i \longrightarrow \varphi'_i$ , calculando a diferença entre a forma final e a inicial de  $\varphi_i$  para o mesmo evento. A maneira que  $\bar{\delta}$  atua em uma função  $F : \mathcal{F}_\Omega \rightarrow \mathcal{F}_\Omega$  tal que  $F = F(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i, \partial_\mu \partial_\nu \varphi_i)$  é dada por

$$\bar{\delta}F = \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} \bar{\delta}\varphi_i + \frac{\partial F}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} \bar{\delta}(\partial_\mu \varphi_i) + \frac{\partial F}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \varphi_i)} \bar{\delta}(\partial_\mu \partial_\nu \varphi_i). \quad (2.6)$$

Determinaremos como escrever  $\delta\varphi_i$  em termos de  $\bar{\delta}\varphi_i$ . Substituindo a eq.(2.2) em (2.3) temos

$$\varphi'_i(x') = \varphi'_i(x + \delta x) = \varphi'_i(x) + \partial_\mu \varphi'_i(x) \delta x^\mu, \quad (2.7)$$

sendo que na passagem acima fizemos uma expansão de Taylor em torno de  $x = 0$  e truncamos a série nos termos lineares em  $\delta x^\mu$ . Usando (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} \varphi'_i(x') &= (\varphi_i(x) + \bar{\delta}\varphi_i(x)) + \partial_\mu (\varphi_i(x) + \bar{\delta}\varphi_i(x)) \delta x^\mu, \\ &= \varphi_i(x) + \bar{\delta}\varphi_i(x) + \partial_\mu \varphi_i(x) \delta x^\mu, \end{aligned} \quad (2.8)$$

pois excluimos os produtos de infinitésimos. Comparando (2.3) e (2.8) temos que

$$\delta\varphi_i(x) = \bar{\delta}\varphi_i(x) + \delta x^\mu \partial_\mu \varphi_i(x). \quad (2.9)$$

Note que a variação total de  $\varphi_i$  é, desta maneira, separada em duas partes: a parte referente a  $\bar{\delta}\varphi_i$  é relacionada com as alterações na forma funcional do próprio campo, enquanto que  $\delta x^\mu$  é devido às alterações do argumento dos campos. Isto motiva a seguinte definição para o operador  $\delta$ .

$$\delta = \bar{\delta} + \delta x^\mu \partial_\mu. \quad (2.10)$$

Assim, de acordo com as transformações (2.2) e (2.3), dado  $F : \mathcal{F}_\Omega \rightarrow \mathcal{F}_\Omega$ , então a variação total de  $F$  é

$$\delta F = \bar{\delta}F + \delta x^\mu \partial_\mu F. \quad (2.11)$$

Repare que se  $\delta x^\mu = 0$ , então  $\delta = \bar{\delta}$ , como deveria ser.

Para estudarmos outras propriedades de  $\delta$  e  $\bar{\delta}$ , consideremos a eq.(2.2). Sabemos que  $x^\mu = x'^\mu - \delta x^\mu$ . Desta forma, denotando o operador diferencial covariante com relação às coordenadas  $x'$  por  $\partial'_\mu$ , é possível mostrar que

$$\partial'_\nu x^\mu = \delta_\nu^\mu - \partial_\nu (\delta x^\mu). \quad (2.12)$$

Para obtermos a expressão acima, utilizamos a mesma expressão recursivamente e descartamos o produto de infinitésimos. Desta forma,

$$\partial'_\mu = \partial'_\mu x^\alpha \partial_\alpha = (\delta_\mu^\alpha - \partial_\mu (\delta x^\alpha)) \partial_\alpha = \partial_\mu - \partial_\mu (\delta x^\alpha) \partial_\alpha. \quad (2.13)$$

Aplicando (2.13) em (2.8) temos

$$\begin{aligned}\partial'_\mu \varphi'_i(x') &= (\partial_\mu - \partial_\mu(\delta x^\alpha) \partial_\alpha) (\varphi_i(x) + \bar{\delta} \varphi_i(x) + \partial_\beta \varphi_i(x) \delta x^\beta), \\ &= \partial_\mu \varphi_i(x) + \partial_\mu (\bar{\delta} \varphi_i(x)) + \partial_\mu \partial_\beta \varphi_i(x) \delta x^\beta,\end{aligned}\quad (2.14)$$

onde novamente descartamos o produto de infinitésimos.

Com isso, identificamos a variação total de  $\partial_\mu \varphi_i$  como

$$\delta(\partial_\mu \varphi_i(x)) = \partial_\mu (\bar{\delta} \varphi_i(x)) + \partial_\mu \partial_\beta \varphi_i(x) \delta x^\beta. \quad (2.15)$$

Utilizando (2.9), temos que

$$\partial_\mu (\delta \varphi_i(x)) = \partial_\mu (\bar{\delta} \varphi_i(x)) + \partial_\mu \partial_\beta \varphi_i(x) \delta x^\beta + \partial_\beta \varphi_i(x) \partial_\mu (\delta x^\beta). \quad (2.16)$$

Calculando a diferença entre (2.15) e (2.16) obtemos

$$\begin{aligned}\delta(\partial_\mu \varphi_i(x)) - \partial_\mu (\delta \varphi_i(x)) &= \partial_\alpha \varphi_i(x) \partial_\mu (\delta x^\alpha), \\ [\delta, \partial_\mu] \varphi_i(x) &= \partial_\alpha \varphi_i(x) \partial_\mu (\delta x^\alpha),\end{aligned}\quad (2.17)$$

ou seja,  $\delta$  comuta com  $\partial_\mu$  somente se  $\delta x^\alpha$  independe de  $x$ . Vejamos o caso de  $\bar{\delta}$  e  $\partial_\mu$ . Aplicando (2.10) em  $\partial_\mu \varphi_i$ , temos

$$\delta(\partial_\mu \varphi_i(x)) = \bar{\delta}(\partial_\mu \varphi_i(x)) + \delta x^\nu \partial_\nu \partial_\mu \varphi_i(x). \quad (2.18)$$

Subtraindo (2.15) de (2.18) e usando o fato de que  $\varphi_i$  é de classe  $C^4$ , temos que

$$\begin{aligned}\bar{\delta}(\partial_\mu \varphi_i(x)) - \partial_\mu (\bar{\delta} \varphi_i(x)) &= 0, \\ [\bar{\delta}, \partial_\mu] \varphi_i(x) &= 0,\end{aligned}\quad (2.19)$$

que mostra que  $\bar{\delta}$  comuta sempre com  $\partial_\mu$ .

Analisaremos agora a variação de um elemento infinitesimal de hipervolume. Sabemos do Cálculo Diferencial e Integral de funções de várias variáveis que, dada uma transformação de coordenadas como (2.2), um elemento de hipervolume  $d^4x$  se transforma como

$$d^4x \longrightarrow d^4x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4x = d^4x + \delta(d^4x), \quad (2.20)$$

sendo que  $\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|$  é o determinante Jacobiano da transformação e é dado por

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'^0}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^0}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^1}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^2}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial x'^3}{\partial x^0} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^1} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^2} & \frac{\partial x'^3}{\partial x^3} \end{vmatrix}. \quad (2.21)$$

O determinante pode ser escrito como

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\pi} \partial_\alpha x'^0 \partial_\beta x'^1 \partial_\gamma x'^2 \partial_\pi x'^3. \quad (2.22)$$

Na expressão acima,  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\pi}$  são as componentes do tensor de *Levi-Civita* de quarta ordem, que são nulas para quaisquer dois índices iguais, são totalmente antissimétricas e  $\epsilon^{0123} = +1$ . A eq.(2.2) nos fornece

$$\partial_\lambda x'^\sigma = \partial_\lambda (x^\sigma + \delta x^\sigma) = \partial_\lambda x^\sigma + \partial_\lambda (\delta x^\sigma) = \delta_\lambda^\sigma + \partial_\lambda (\delta x^\sigma). \quad (2.23)$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| &= \epsilon^{\alpha\beta\gamma\pi} \partial_\alpha x'^0 \partial_\beta x'^1 \partial_\gamma x'^2 \partial_\pi x'^3, \\ &= 1 + \partial_\mu (\delta x^\mu), \end{aligned} \quad (2.24)$$

sempre excluindo o produto de infinitésimos. Desta forma, usando (2.20), temos

$$\begin{aligned} d^4x + \delta(d^4x) &= \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4x, \\ &= (1 + \partial_\mu (\delta x^\mu)) d^4x, \\ &= d^4x + \partial_\mu (\delta x^\mu) d^4x. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\delta(d^4x) = \partial_\mu (\delta x^\mu) d^4x. \quad (2.25)$$

Com estes resultados, continuaremos com o processo de extremização da Ação (2.1).

## 2.3 A variação da Ação por transformações globais

Como vimos na eq.(2.4), a variação da ação depende de como o operador  $\delta$  atua em funções do campos e em hipervolumes infinitesimais. Devido à definição de  $\delta$ , sua aplicação sobre a Ação destacará a participação de cada uma das transformações infinitesimais ( $x \rightarrow x'$  e  $\varphi_i \rightarrow \varphi'_i$ ), como veremos a seguir. Isto permitirá analisar o comportamento de  $\delta A$  pelas transformações (2.2) e (2.3) de maneira independente uma da outra, evidenciando em cada caso resultados interessantes. Daremos continuidade ao estudo de  $\delta A$  por transformações globais.

Seja  $\delta A$  dada por (2.4). Das eq.(2.10), (2.6) e (2.25), temos que

$$\delta A[\varphi_i] = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} \bar{\delta} \varphi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} \bar{\delta} (\partial_\mu \varphi_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \varphi_i)} \bar{\delta} (\partial_\mu \partial_\nu \varphi_i) + \partial_\mu (\delta x^\mu \mathcal{L}) \right) d^4x. \quad (2.26)$$

Usando a comutatividade dos operadores  $\bar{\delta}$  e  $\partial_\mu$  e a regra de derivação de um produto de funções, temos que

$$\begin{aligned} \delta A[\varphi_i] &= \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} \right) + \partial_\nu \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \varphi_i)} \right) \right) \bar{\delta} \varphi_i \right. \\ &\quad + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} \bar{\delta} \varphi_i \right) + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \varphi_i)} \bar{\delta} (\partial_\nu \varphi_i) \right) - \partial_\mu \left( \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \varphi_i)} \right) \bar{\delta} \varphi_i \right) \\ &\quad \left. + \partial_\mu (\delta x^\mu \mathcal{L}) \right] d^4 x. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Usamos novamente a comutatividade de  $\bar{\delta}$  e  $\partial_\mu$  e o fato de  $\varphi_i$  ser de classe  $C^4$ . Logo,

$$\begin{aligned} \delta A[\varphi_i] &= \int_{\Omega} \left\{ \partial_\mu \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} - \partial_\nu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \varphi_i)} \right) \right) \bar{\delta} \varphi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \varphi_i)} \bar{\delta} (\partial_\nu \varphi_i) + \delta x^\mu \mathcal{L} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_i)} \right) + \partial_\nu \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \varphi_i)} \right) \right] \bar{\delta} \varphi_i \right\} d^4 x. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Note que, com isso, podemos separar  $\delta A$  em partes proporcionais a  $\delta x^\mu$  e  $\bar{\delta} \varphi_i$ , mostrando que a análise pode ser feita de maneira independente para cada transformação – apenas  $x \rightarrow x'$  ou apenas  $\varphi_i \rightarrow \varphi'_i$ .

Existem diversos tipos de transformações globais, mas estamos interessados em dois tipos especiais: as *transformações a ponto fixo*, que são caracterizadas por  $\delta x^\mu = 0$ , com  $\delta(\varphi_i)|_{\partial\Omega} = 0$  e  $\delta(\partial_\mu \varphi_i)|_{\partial\Omega} = 0$ , e as *transformações de simetria* que são caracterizadas por serem elementos de um *grupo de transformações*. As transformações de simetria estudadas neste trabalho fazem parte de grupos unitários contínuos, isto é, grupos cujos os parâmetros que determinam um elemento do grupo são contínuos. A unitariedade é requerida para garantir conexão com o elemento identidade do grupo. Neste trabalho será destacado o *Grupo de Poincaré*, que é o grupo das isometrias do espaço de Minkowski. A imposição da extremização da Ação em cada caso trará resultados interessantes e por isso estudaremos estes casos nas seções seguintes.

## 2.4 Transformações a ponto fixo: As equações de Euler-Lagrange

As transformações a ponto fixo, como são chamadas, são transformações caracterizadas da seguinte forma:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu, \quad \delta(\varphi_i(x)) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.29)$$

$$\varphi_i(x) \longrightarrow \varphi'_i(x') = \varphi_i(x) + \delta\varphi_i(x), \quad \delta(\partial_\mu \varphi_i(x)) \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.30)$$

Como consequência da definição,  $\delta x^\mu = 0$  e  $\bar{\delta}\varphi_i = \delta\varphi_i$ . O nome faz referência ao seu análogo na mecânica clássica puntual. As condições  $\delta(\varphi_i)|_{\partial\Omega} = 0$  e  $\delta(\partial_\mu\varphi_i)|_{\partial\Omega} = 0$  dizem que as mesmas quantidades são nulas na borda do hipervolume  $\Omega$ . Exploraremos como este tipo de transformação afeta o funcional de Ação. Usando a eq.(2.28), temos que

$$\begin{aligned} \delta A[\varphi_i] &= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i} - \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)} \right) + \partial_\nu \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\varphi_i)} \right) \right] \delta\varphi_i d^4x \\ &+ \int_{\Omega} \partial_\mu \left[ \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)} - \partial_\nu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\varphi_i)} \right) \right) \delta\varphi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\varphi_i)} \delta(\partial_\nu\varphi_i) \right] d^4x. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Usando o teorema de Gauss-Ostrogradsky na segunda integral temos

$$\begin{aligned} \delta A[\varphi_i] &= \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i} - \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)} \right) + \partial_\nu \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\varphi_i)} \right) \right] \delta\varphi_i d^4x \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left[ \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)} - \partial_\nu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\varphi_i)} \right) \right) \delta\varphi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\varphi_i)} \delta(\partial_\nu\varphi_i) \right] \cdot d^3\sigma_\mu. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Devido a imposição de que  $\delta(\varphi_i)|_{\partial\Omega} = 0$  e  $\delta(\partial_\mu\varphi_i)|_{\partial\Omega} = 0$ , então a segunda integral é nula. O que resta é somente

$$\delta A[\varphi_i] = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i} - \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)} \right) + \partial_\nu \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\varphi_i)} \right) \right] \delta\varphi_i d^4x. \quad (2.33)$$

Impondo a extremização da Ação,  $\delta A = 0$ , temos que

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i} - \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)} \right) + \partial_\nu \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\varphi_i)} \right) \right] \delta\varphi_i d^4x = 0. \quad (2.34)$$

Como  $\delta\varphi_i$  é uma função arbitrária em  $\Omega$ , então pelo Lema Fundamental do Cálculo das Variações [2] temos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_i} - \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)} \right) + \partial_\nu \partial_\mu \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_\nu\varphi_i)} \right) = 0. \quad (2.35)$$

Estas são as famosas *Equações de Euler-Lagrange* para uma densidade de lagrangiana de segunda ordem. A conclusão que se chega é que se a Ação (2.1) é submetida a um conjunto de transformações como das eq.(2.29) e (2.30), de tal forma que  $\delta A = 0$ , então a densidade de lagrangiana satisfará as equações de Euler-Lagrange. A partir destas equações é possível obter as equações de movimento para  $\varphi_i$ . Devido à ordem da derivada do campo na densidade de lagrangiana e o último termo das equações de Euler-Lagrange, vemos que as equações de movimento serão, no máximo, de quarta ordem nas derivadas em  $\varphi_i$ . Vejamos uma aplicação desse estudo na Eletrodinâmica de Podolsky.

### 2.4.1 As Equações de Podolsky

Seja  $A_P$  o funcional de Ação da Eletrodinâmica de Podolsky

$$A_P[A^\mu] = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}_P(A^\mu, \partial_\nu A^\mu, \partial_\nu \partial_\lambda A^\mu), \quad (2.36)$$

com  $\mathcal{L}_P$  a densidade de lagrangiana de Podolsky e  $A^\mu = (\varphi, \mathbf{A})$  o quadripotencial eletromagnético com  $\varphi$  o potencial escalar elétrico e  $\mathbf{A}$  o potencial vetorial magnético. O campo  $A^\mu$  é chamado de campo eletromagnético de Podolsky. Estamos considerando que  $A^\mu$  é de classe  $C^4$  em  $\Omega$ . Se houverem fontes de campo eletromagnético,  $\mathcal{L}_P$  é dada por [4]

$$\mathcal{L}_P = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + a \partial_\mu F^{\mu\nu} \partial_\sigma F^\sigma{}_\nu - J_\mu A^\mu, \quad (2.37)$$

sendo que  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  são as componentes do tensor de Faraday,  $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$  é a quadridensidade de corrente, com  $\rho$  a densidade de carga e  $\mathbf{J}$  a densidade de corrente de carga,  $a$  é chamado de *parâmetro de Podolsky*, que é constante, real e com dimensão de inverso de energia ao quadrado. A mesma teoria sem fontes de campo eletromagnético equivale a tomarmos  $J^\mu = 0$ . Note que o tensor de Faraday é antissimétrico, pois  $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ . Note, também, que a densidade de lagrangiana de Podolsky é idêntica à densidade de lagrangiana de Maxwell, exceto pelo termo proporcional a  $\partial_\mu F^{\mu\nu}$ . A saber, a densidade de lagrangiana de Maxwell com fontes é dada pela seguinte expressão [15]

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J_\mu A^\mu. \quad (2.38)$$

Devido ao formato da eq.(2.37), vemos que

$$\lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{L}_P = \mathcal{L}_M. \quad (2.39)$$

Este limite servirá como “teste” para o que desenvolvermos usando a teoria de Podolsky, quando compararmos aos resultados obtidos pela teoria de Maxwell.

Encontraremos agora as equações de movimento para a Eletrodinâmica de Podolsky. Sejam as equações de Euler-Lagrange para a densidade de lagrangiana de Podolsky

$$\frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial A_\sigma} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial (\partial_\mu A_\sigma)} \right) + \partial_\nu \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu A_\sigma)} \right) = 0. \quad (2.40)$$

É possível mostrar que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial A_\sigma} = -J^\sigma, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial (\partial_\mu A_\sigma)} = -F^{\mu\sigma}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu A_\sigma)} = 2a (\eta^{\mu\nu} \partial_\alpha F^{\alpha\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \partial_\alpha F^{\alpha\nu}). \quad (2.41)$$

Portanto,

$$(1 + 2a\Box) \partial_\mu F^{\mu\sigma} = J^\sigma. \quad (2.42)$$

com  $\square$  o operador *d'Alembertiano*. Note que no limite de  $a \rightarrow 0$  o lado esquerdo da eq.(2.42) retorna

$$\lim_{a \rightarrow 0} (1 + 2a\square)\partial_\mu F^{\mu\sigma} = \partial_\mu F^{\mu\sigma}. \quad (2.43)$$

Logo,

$$\partial_\mu F^{\mu\sigma} = J^\sigma,$$

ou seja, no limite de  $a \rightarrow 0$  as equações de movimento da Eletrodinâmica de Podolsky recaem sobre as de Maxwell, como esperado [15]. A eq.(2.42) fornece apenas as equações que possuem termos de fontes. Precisamos obter as equações que não possuem tais termos. Note que a definição do tensor de Faraday é a mesma na teoria de Maxwell e na de Podolsky. Desta forma,  $F_{\mu\nu}$  satisfaz a *identidade de Bianchi*

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0. \quad (2.44)$$

Pode-se mostrar que a identidade de Bianchi reproduz as equações de movimento que não possuem termos de fontes.

Para escrevermos as eq.(2.42) e (2.44) em termos dos campos elétrico e magnético  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , tomaremos as seguintes definições

$$(\mathbf{E})^i \equiv F^{i0}, \quad (2.45)$$

$$(\mathbf{B})^i \equiv -\frac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk}, \quad (2.46)$$

sendo que  $\epsilon^{ijk}$  são as componentes do tensor de *Levi-Civita* de terceira ordem, que são totalmente antissimétricas e  $\epsilon^{123} = +1$ . Desta forma,

$$(1 + 2a\square)\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad (2.47)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.48)$$

$$(1 + 2a\square)\left(\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = \mathbf{J}, \quad (2.49)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (2.50)$$

As equações (2.47), (2.48), (2.49) e (2.50) são chamadas de *Equações de Podolsky*. Juntamente com a força de Lorentz

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.51)$$

elas resumem todo o conteúdo teórico da Eletrodinâmica Clássica de Podolsky. Note que as equações com fontes são diferentes das equações de Maxwell com fontes. Por isso, na Eletrodinâmica de Podolsky, a forma como as fontes criam os campos é diferente comparado a Maxwell. Note, também, que no limite de  $a \rightarrow 0$ , as equações de Podolsky

recaem nas equações de Maxwell [16]. A invariância do operador d'Alembertiano  $\square$  por transformações de Lorentz faz com que as equações de Podolsky também sejam invariantes por transformações de Lorentz. Daremos um destaque maior para estas equações nos capítulos posteriores.

## 2.4.2 A Conservação da Carga Elétrica

A conservação da carga elétrica é observada nos mais diferentes processos (colisões de partículas, decaimentos, produção de partículas, etc) [17] e por isso é uma das simetrias fundamentais da Física. Sendo assim, qualquer que seja uma teoria sobre fenômenos eletromagnéticos, esta deve ser condizente com a conservação de carga elétrica. Veremos como obtê-la na Eletrodinâmica de Podolsky.

Podemos retirar uma informação muito interessante da eq.(2.42) . Como os operadores  $\partial_\sigma$  e  $\square$  comutam, então

$$(1 + 2a\square)\partial_\sigma\partial_\mu F^{\mu\sigma} = \partial_\sigma J^\sigma. \quad (2.52)$$

Devido à antissimetria de  $F^{\mu\sigma}$ , o lado esquerdo da equação é nulo. Desta forma,

$$\partial_\sigma J^\sigma = 0. \quad (2.53)$$

A eq.(2.53) nos diz que a quadridensidade de corrente é conservada. A conservação de  $J^\mu$  implica na conservação de carga elétrica por evolução temporal. Isto é fácil de ser verificado explicitando o somatório

$$0 = \partial_\sigma J^\sigma = \partial_0 J^0 + \partial_i J^i = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}, \quad (2.54)$$

que é a equação de continuidade para as fontes de campo eletromagnético. Esta equação diz que a carga elétrica é conservada *localmente*. A conservação local implica na conservação *global* de carga. Para obter a conservação global de carga, integramos a expressão em  $\Xi \equiv \mathbb{R}^3$  e, supondo que a corrente  $\mathbf{J}$  é nula no infinito, mostra-se que

$$\frac{dQ}{dt} = 0, \quad \text{com} \quad Q = \int_{\Xi} \rho d^3x. \quad (2.55)$$

A conservação da carga elétrica também está relacionada com o fato da Ação de Podolsky ser invariante por *transformações de gauge*. Explicaremos isso melhor. Considere a seguinte transformação no campo eletromagnético

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \Lambda(x), \quad \Lambda(x)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.56)$$

com  $\Lambda$  uma função arbitrária de classe  $C^2$ . Estamos tomando  $\delta x^\mu = 0$ . Abrindo para cada componente, a transformação de gauge para os campos  $\varphi$  e  $\mathbf{A}$  é

$$\varphi \longrightarrow \varphi' = \varphi - \frac{\partial \Lambda(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \quad (2.57)$$

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda(\mathbf{x}, t). \quad (2.58)$$

Da maneira que são definidos os campos elétrico e magnético em termos das componentes do tensor de Faraday, é possível mostrar que

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.59)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.60)$$

Sendo assim, é possível mostrar que, sob as transformações (2.57) e (2.58),

$$\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{E}' = \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}' = \mathbf{B}, \quad (2.61)$$

ou seja, os campos elétrico e magnético, que são os campos físicos da teoria, são invariantes por transformações de gauge. Esta invariância deve levar a alguma simetria. Veremos de qual se trata. Com a eq.(2.56), é possível mostrar que

$$F^{\mu\nu} \longrightarrow F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}. \quad (2.62)$$

Desta forma,

$$\mathcal{L}_P \longrightarrow \mathcal{L}'_P = \mathcal{L}_P + J_\mu \partial^\mu \Lambda. \quad (2.63)$$

A invariância da Ação (2.36), isto é,  $A_P \longrightarrow A'_P = A_P$  impõe que

$$\int_{\Omega} d^4x J_\mu \partial^\mu \Lambda = 0. \quad (2.64)$$

Usando integração por partes, o teorema de Gauss-Ostrogradsky, a condição  $\Lambda|_{\partial\Omega} = 0$  e a arbitrariedade de  $\Lambda$  chegamos a conclusão que

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (2.65)$$

que é a equação para conservação de carga elétrica.

## 2.5 Transformações de Simetria e o Teorema de Noether

As transformações de simetria são elementos de um grupo de transformações. Um grupo é um conjunto de elementos no qual é definido uma operação com estes elementos. Esta operação deve ser fechada, isto é, a operação de dois elementos do grupo resulta em outro elemento do grupo e deve ser associativa. Também é requerido a existência do elemento neutro e do elemento inverso. Para mais detalhes sobre a teoria de grupos, veja a referência [18].

O nome simetria faz referência a invariância da Ação por essas transformações. Essas transformações são caracterizadas por parâmetros relacionados ao grupo que, nos

casos que estamos estudando, são constantes, isto é, independem do ponto no espaço-tempo. Nosso desejo é estudar qual é o efeito destas transformações sobre a Ação. Para isso é necessário escrever as variações nos campos e nas coordenadas quando se trata de uma transformação de simetria. Vejamos como isto é realizado.

Sabemos que transformações de simetria nos campos e nas coordenadas, quando são elementos de um grupo unitário e contínuo  $G$ , podem ser expressas da seguinte maneira

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = [\exp(i\omega^b T_b)]^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (2.66)$$

$$\varphi_i(x) \longrightarrow \varphi'_i(x') = [\exp(i\omega^b T_b)]_{ij} \varphi_j(x), \quad (2.67)$$

sendo que  $T_b$  são os geradores de  $G$  e  $\omega^b$  os parâmetros que determinam um elemento de  $G$ . O número complexo  $i$  faz com que os geradores sejam hermitianos. Neste caso, a soma implícita no índice latino  $b$  vai de 1 até  $n$ , com  $n$  o número de geradores. Vale ressaltar que a transformação (2.66) age no espaço de Minkowski e a transformação (2.67) age no espaço de configuração, o espaço das funções  $\varphi_i$ , sendo, portanto, uma representação do grupo  $G$ . Os geradores  $T_b$  podem mudar ou não suas expressões quando atuam no espaço de configuração. Isto dependerá do campo em questão. Para mais detalhes sobre teoria de representação de grupos, veja a referência [18].

Para o caso de transformações infinitesimais ( $(\omega^b)^2 \ll \omega^b$ ), podemos aproximar a exponencial até a primeira ordem de sua série de Taylor.

$$\begin{aligned} x^\mu \longrightarrow x'^\mu &= [\mathbf{1} + i\omega^b T_b]^\mu{}_\nu x^\nu = \left( \delta^\mu{}_\nu + i\omega^b (T_b)^\mu{}_\nu \right) x^\nu, \\ &= x^\mu + \Gamma^\mu{}_{(b)} \omega^b, \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) \longrightarrow \varphi'_i(x') &= [\mathbf{1} + i\omega_b T^b]_{ij} \varphi_j(x) = \left( \delta_{ij} + i\omega_b (T^b)_{ij} \right) \varphi_j(x), \\ &= \varphi_i(x) + \Psi_{i(b)} \omega^b, \end{aligned} \quad (2.69)$$

com  $\Gamma^\mu{}_{(b)}$  e  $\Psi_{i(b)}$  funções de  $x$ . Os parênteses em torno do índice subscrito  $b$  é para enfatizar de que se trata de um índice relacionado ao gerador da transformação. Deste modo, fazemos a identificação

$$\delta x^\mu = \Gamma^\mu{}_{(b)} \omega^b \quad \text{e} \quad \delta \varphi_i = \Psi_{i(b)} \omega^b. \quad (2.70)$$

Usando a eq.(2.9), temos que

$$\begin{aligned} \bar{\delta} \varphi_i(x) &= \delta \varphi_i(x) - \delta x^\mu \partial_\mu \varphi_i(x) = \Psi_{i(b)} \omega^b - \Gamma^\mu{}_{(b)} \omega^b \partial_\mu \varphi_i(x), \\ &= \left( \Psi_{i(b)} - \Gamma^\mu{}_{(b)} \partial_\mu \varphi_i(x) \right) \omega^b = \Phi_{i(b)} \omega^b. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Todo o processo já realizado sobre a variação da Ação se mantém inalterado na substituição de  $\delta x^\mu$  e  $\delta \varphi_i$  pelas expressões dadas em (2.70). Assim, podemos substituir

diretamente (2.70) e (2.71) em (2.28).

$$\begin{aligned} \delta A[\varphi_i] &= \int_{\Omega} \left\{ \partial_{\mu} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi_i)} - \partial_{\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \varphi_i)} \right) \right) \Phi_{i(b)} \omega^b + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \varphi_i)} \partial_{\nu} \Phi_{i(b)} \omega^b + \Gamma^{\mu}_{(b)} \omega^b \mathcal{L} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi_i)} \right) + \partial_{\nu} \partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \varphi_i)} \right) \right] \Phi_{i(b)} \omega^b \right\} d^4 x. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Fazendo as seguintes definições

$$\Pi^{\mu i} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi_i)} - \partial_{\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \varphi_i)} \right), \quad (2.73)$$

$$\tilde{\Pi}^{\mu \nu i} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \varphi_i)}, \quad (2.74)$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_i} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i} - \partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi_i)} \right) + \partial_{\nu} \partial_{\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \partial_{\nu} \varphi_i)} \right), \quad (2.75)$$

obtemos

$$\delta A[\varphi_i] = \int_{\Omega} \left\{ \partial_{\mu} \left[ \Pi^{\mu i} \Phi_{i(b)} + \tilde{\Pi}^{\mu \nu i} \partial_{\nu} \Phi_{i(b)} + \Gamma^{\mu}_{(b)} \mathcal{L} \right] + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_i} \Phi_{i(b)} \right\} \omega^b d^4 x. \quad (2.76)$$

Ao impormos a invariância da Ação  $\delta A = 0$ , a arbitrariedade de  $\omega^b$  faz com que o termo entre chaves seja nulo. Assim,

$$-\partial_{\mu} \left[ \Pi^{\mu i} \Phi_{i(b)} + \tilde{\Pi}^{\mu \nu i} \partial_{\nu} \Phi_{i(b)} + \Gamma^{\mu}_{(b)} \mathcal{L} \right] = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_i} \Phi_{i(b)}. \quad (2.77)$$

Se a densidade de lagrangiana  $\mathcal{L}$  satisfaz as equações de Euler-Lagrange, então  $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi_i} = 0$  e

$$-\partial_{\mu} \left[ \Pi^{\mu i} \Phi_{i(b)} + \tilde{\Pi}^{\mu \nu i} \partial_{\nu} \Phi_{i(b)} + \Gamma^{\mu}_{(b)} \mathcal{L} \right] = 0. \quad (2.78)$$

Isto motiva a definição da quadridensidade de corrente  $J_{(b)}^{\mu}$

$$J_{(b)}^{\mu} = -\Pi^{\mu i} \Phi_{i(b)} - \tilde{\Pi}^{\mu \nu i} \partial_{\nu} \Phi_{i(b)} - \Gamma^{\mu}_{(b)} \mathcal{L}, \quad (2.79)$$

cuja divergência é nula,

$$\partial_{\mu} J_{(b)}^{\mu} = 0. \quad (2.80)$$

A eq.(2.80) sintetiza o conteúdo físico do Teorema de Noether. Se a Ação (2.1) é submetida a um conjunto de transformações dadas por (2.68) e (2.69) e a densidade de lagrangiana satisfaz as equações de Euler-Lagrange dadas por (2.35), então aparecerão  $n$  quadridensidades de correntes conservadas dadas pela eq.(2.79), com  $n$  o número de geradores do grupo de transformação. Uma demonstração rigorosa do teorema de Noether é encontrada na referência [19]. A referência original do teorema de Noether é dada em [20].

A eq.(2.80) fornece um resultado muito importante. Para ver isso, tomemos um hipervolume  $W$  no espaço-tempo ilimitado nas direções do tipo-espaço. Denominaremos a borda desta região por  $\Sigma$  que está no infinito e é do tipo-tempo. Considere também que  $W$  seja limitado no tempo por duas hipersuperfícies  $S_1$  e  $S_2$  do tipo-espaço. Assim,  $\partial W = \Sigma \cup S_1 \cup S_2$ . Integrando a eq.(2.80) em  $W$  temos

$$0 = \int_W d^4x \partial_\mu J_{(b)}^\mu = \int_{\partial W} d^3\sigma_\mu J_{(b)}^\mu = \int_\Sigma d^3\sigma_\mu J_{(b)}^\mu + \int_{S_1} d^3\sigma_\mu J_{(b)}^\mu - \int_{S_2} d^3\sigma_\mu J_{(b)}^\mu. \quad (2.81)$$

Na primeira passagem utilizamos o teorema de Gauss-Ostrogradsky. O sinal negativo é devido a orientação da hipersuperfície. Supondo que a quadridensidade de corrente é nula em  $\Sigma$ , que equivale a dizer que ela tende a zero suficientemente rápida no infinito, então a integral em  $\Sigma$  é nula e sobra apenas que

$$\int_{S_1} d^3\sigma_\mu J_{(b)}^\mu = \int_{S_2} d^3\sigma_\mu J_{(b)}^\mu. \quad (2.82)$$

Isto significa que a integral  $\int_{S_n} d^3\sigma_\mu J_{(b)}^\mu$  em que  $S_n$  é uma hipersuperfície do tipo-espaço é independente de  $S_n$ , desde a quadridensidade de corrente se anule no infinito. Desta forma

$$\begin{aligned} 0 &= \int_W d^4x \partial_\mu J_{(b)}^\mu = \int_{\Xi} d^3x \partial_\mu J_{(b)}^\mu = \int_{\Xi} d^3x \left( \frac{\partial J_{(b)}^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_{(b)} \right), \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Xi} d^3x J_{(b)}^0 + \int_{\Xi} d^3x \nabla \cdot \mathbf{J}_{(b)} = \frac{\partial \mathcal{Q}_{(b)}}{\partial t} + \int_{\partial \Xi} d^2s \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}_{(b)}, \end{aligned} \quad (2.83)$$

com  $\Xi \equiv \mathbb{R}^3$ . Na última passagem utilizamos o teorema da divergência de Gauss. Como a quadridensidade de corrente é nula no infinito, então a última integral é nula e temos

$$\frac{\partial \mathcal{Q}_{(b)}}{\partial t} = 0, \quad \text{com} \quad \mathcal{Q}_{(b)} = \int_{\Xi} d^3x J_{(b)}^0, \quad (2.84)$$

ou seja, a integral em todo o espaço da componente zero da quadridensidade de corrente é conservada no tempo. A esta quantidade é dado o nome de *carga*. Vejamos agora o caso em que  $G$  é o grupo de Poincaré.

### 2.5.1 Transformações de Poincaré

As transformações de Poincaré são as transformações entre sistemas de referências inerciais (transformações de Lorentz) unidas às translações no espaço-tempo que preservam a métrica de Minkowski. A lei de formação é a composição de transformações. As transformações de Poincaré juntamente com a lei de composição de transformações formam o *Grupo de Poincaré*. Este grupo possui dez parâmetros independentes: quatro relacionados com translações espaço-temporais, três relacionados com rotações em torno

de qualquer um dos três eixos espaciais (ângulos de Euler) e três relacionados aos boosts nos três eixos espaciais. Uma transformação de Poincaré genérica é escrita da seguinte forma

$$U(a, \omega) = \exp \left( -ib^\mu P_\mu + \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} \right), \quad (2.85)$$

sendo que  $P_\mu$  são os geradores das translações espaço-temporais e  $M_{\alpha\beta}$  os geradores das rotações espaciais e boosts. Sabe-se que  $\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}$ . Isto faz com que os parâmetros  $b$  e  $\omega$  contabilizem 10 parâmetros independentes. Pode-se mostrar que os geradores  $P_\mu$  e  $M_{\alpha\beta}$  se comportam como quadrivetores e tensores de segunda ordem sob transformações de Lorentz, respectivamente. Os geradores satisfazem as seguintes relações de comutação

$$[P_\tau, P_\mu] = 0. \quad (2.86)$$

$$\frac{1}{i} [M_{\varphi\pi}, P_\mu] = \eta_{\varphi\mu} P_\pi - \eta_{\pi\mu} P_\varphi. \quad (2.87)$$

$$\frac{1}{i} [M_{\mu\nu}, M_{\varphi\pi}] = \eta_{\nu\pi} M_{\mu\varphi} + \eta_{\mu\varphi} M_{\nu\pi} - \eta_{\mu\pi} M_{\nu\varphi} - \eta_{\nu\varphi} M^{\mu\pi}. \quad (2.88)$$

As equações acima formam a álgebra de Poincaré, que é uma álgebra de Lie. A eq.(2.86) diz que as translações espaço-temporais comutam. As eq.(2.87) e (2.88) dizem que rotações e boosts não comutam com translações e nem com outras rotações e boosts. Para mais detalhes sobre o grupo de Poincaré, veja as referências [21, 22].

Vejamos um detalhe importante sobre a eq.(2.85). Ela nos mostra que podemos tratar translações separadamente de boosts e rotações, tomando ocasionalmente  $b^\mu = 0$  ou  $\omega^{\alpha\beta} = 0$ . Por isso, trabalharemos com cada transformação separadamente. Vejamos primeiro o caso de translações espaço-temporais.

## 2.5.2 Translações Espaço-temporais: Tensor Energia-Momento

Considere uma translação espaço-temporal dada por<sup>4</sup>

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = [\exp(-ib^\alpha P_\alpha)]^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (2.89)$$

$$\varphi_i(x) \longrightarrow \varphi'_i(x') = \varphi_i(x). \quad (2.90)$$

O parâmetro da transformação é  $b^\mu$ . Para o caso de uma translação infinitesimal, as distâncias espacial e temporal entre  $x^\mu$  e  $b^\mu$  são arbitrariamente pequenas. Sendo assim, podemos expandir a exponencial em série de Taylor em torno do zero e truncá-la no termo linear em  $b^\mu$ .

$$\begin{aligned} x^\mu \longrightarrow x'^\mu &= (\mathbb{1} - ib^\alpha P_\alpha \mathbb{1})^\mu{}_\nu x^\nu = (\delta^\mu{}_\nu - ib^\alpha P_\alpha \delta^\mu{}_\nu) x^\nu, \\ &= x^\mu + b^\mu, \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$\varphi_i(x) \longrightarrow \varphi'_i(x') = \varphi_i(x), \quad (2.92)$$

<sup>4</sup> Os campos são tensores ou espinores. Desta forma, são inalterados por translações espaço-temporais

onde usamos  $P_\alpha = i\partial_\alpha$  [15]. Assim, de acordo com a eq.(2.70), se  $\delta x^\mu = \Gamma^\mu{}_\nu b^\nu$  e  $\delta\varphi_i = \Psi_{i\mu} b^\mu$ , então

$$\Gamma^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu \quad \text{e} \quad \Psi_{i\mu} = 0. \quad (2.93)$$

Logo,  $\Phi_{i\nu} = -\partial_\nu\varphi_i(x)$  e temos a conservação do seguinte tensor densidade de corrente  $\Theta^\mu{}_\nu \equiv J_\nu{}^\mu$

$$\Theta^\mu{}_\nu = \Pi^{\mu i}\partial_\nu\varphi_i + \tilde{\Pi}^{\mu\xi i}\partial_\xi\partial_\nu\varphi_i - \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L}. \quad (2.94)$$

Definindo  $\Theta^{\mu\nu} = \eta^{\nu\rho}\Theta^\mu{}_\rho$  temos que

$$\Theta^{\mu\nu} = \Pi^{\mu i}\partial^\nu\varphi_i + \tilde{\Pi}^{\mu\xi i}\partial^\nu\partial_\xi\varphi_i - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}. \quad (2.95)$$

Como termos que são divergências totais não mudam o tensor densidade de corrente<sup>5</sup>, então  $\Theta^{\mu\nu}$  pode ser escrito como

$$\Theta^{\mu\nu} = \psi^{\mu i}\partial^\nu\varphi_i + \tilde{\psi}^{\mu i}\partial^\nu\dot{\varphi}_i - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (2.96)$$

com

$$\psi^{\mu i} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_i)} - 2\partial_k\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\partial_k\varphi_i)}\right) - \partial_0\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\dot{\varphi}_i)}\right) \quad (2.97)$$

e

$$\tilde{\psi}^{\mu i} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\dot{\varphi}_i)}. \quad (2.98)$$

Na expressão acima,  $\dot{Z}$  significa derivada parcial de  $Z$  com relação ao tempo. A vantagem da eq.(2.96) é visto quando expressarmos as quantidades (cargas) conservadas. Ambas as eq.(2.95) e (2.96) são equivalentes. Assim, a conveniência da situação que dirá qual expressão usaremos.

O tensor densidade de corrente da eq.(2.95) é usualmente chamado de *tensor de Energia-Momento canônico* do campo  $\varphi_i$ .<sup>6</sup> A carga conservada é dada por

$$P^\beta = \int_{\Xi} d^3x \Theta^{0\beta}. \quad (2.99)$$

A invariância no tempo desta carga é associada a conservação do quadrimomento linear do campo  $\varphi_i$ . A componente  $\Theta^{00}$  é a *densidade de Hamiltoniana canônica* do sistema. A integral em todo o espaço é a Hamiltoniana do sistema.

$$H_C = \int_{\Xi} d^3x \left( \pi^i\dot{\varphi}_i + \tilde{\pi}^i\ddot{\varphi}_i - \mathcal{L} \right), \quad (2.100)$$

<sup>5</sup> Esta afirmação se baseia em que as quantidades físicas (cargas) são obtidas por integrais das componentes da quadridensidade de corrente. Desta forma, termos que são divergências totais sempre podem ser descartados sob o argumento de que, ao se efetuar a integração, as primitivas de tais termos são nulas na superfície em que se é feito a integração.

<sup>6</sup> Rigorosamente, deveríamos chamá-lo de tensor densidade de Energia-Momento, mas suprimiremos a palavra ‘densidade’ para a expressão não fique demasiadamente carregada.

com  $\pi^i \equiv \psi^{0i}$  e  $\tilde{\pi}^i = \tilde{\psi}^{0i}$ , os momentos canonicamente conjugados aos campos  $\dot{\varphi}_i$  e  $\ddot{\varphi}_i$ , que são considerados variáveis independentes [8].

Se a densidade de lagrangiana não depende explicitamente do tempo, então a hamiltoniana do sistema é igual a energia total. A energia total do sistema é uma quantidade positiva. Portanto, uma condição que garante que a energia seja sempre positiva é que para campos não-nulos

$$\Theta^{00} \Big|_{\varphi_i \neq 0} > 0. \quad (2.101)$$

Já a integral da componente  $\Theta^{0j}$  é o momento linear do campo  $\varphi_i$ . Sua expressão é dada por

$$P^j = \int_{\Xi} d^3x \left( \pi^i \partial^j \varphi_i + \tilde{\pi}^i \partial^j \dot{\varphi}_i \right). \quad (2.102)$$

Com as eq.(2.95) e (2.96) em mãos, podemos calcular o tensor Energia-Momento para a densidade de lagrangiana de Podolsky.

### 2.5.3 O Tensor Energia-Momento da Eletrodinâmica de Podolsky

A ideia de como obter o tensor de Energia-Momento é a mesma aplicada na Subseção 2.5.2 fazendo a associação  $\varphi_i \equiv A_\mu$ . Desta forma, usando a eq.(2.95), o tensor Energia-Momento é dado por

$$\Theta_P^{\alpha\beta} = \Pi_P^{\alpha\nu} \partial^\beta A_\nu + \tilde{\Pi}_P^{\alpha\xi\nu} \partial^\beta \partial_\xi A_\nu - \eta^{\alpha\beta} \mathcal{L}_P. \quad (2.103)$$

Precisamos calcular as quantidades  $\Pi_P^{\alpha\nu}$  e  $\tilde{\Pi}_P^{\alpha\xi\nu}$ . Usando as eq.(2.73) e (2.74), tais quantidades em termos dos campos  $A_\nu$  são

$$\Pi_P^{\alpha\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial(\partial_\alpha A_\nu)} - \partial_\rho \left( \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial(\partial_\alpha \partial_\rho A_\nu)} \right). \quad (2.104)$$

$$\tilde{\Pi}_P^{\alpha\xi\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial(\partial_\alpha \partial_\xi A_\nu)}. \quad (2.105)$$

Definindo o seguinte tensor

$$\Upsilon_{\pi \theta}^{\rho \nu} = \eta^\rho_\pi \eta^\nu_\theta - \eta^\nu_\pi \eta^\rho_\theta \quad (2.106)$$

e utilizando a eq(2.41) pode-se mostrar que

$$\Pi_P^{\alpha\nu} = F^{\nu\alpha} + 2a\eta^{\alpha\pi} \partial_\rho \partial_\gamma F^{\theta\gamma} \Upsilon_{\pi \theta}^{\rho \nu}. \quad (2.107)$$

$$\tilde{\Pi}_P^{\alpha\xi\nu} = 2a\eta^{\alpha\pi} \partial_\gamma F^{\gamma\theta} \Upsilon_{\pi \theta}^{\xi \nu}. \quad (2.108)$$

Assim, o tensor Energia-Momento da Eletrodinâmica de Podolsky é dado por

$$\begin{aligned} \Theta_P^{\alpha\beta} = & F^{\nu\alpha}\partial^\beta A_\nu - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + 2a\left(\eta^{\alpha\pi}\partial_\rho\partial_\gamma F^{\theta\gamma}\Upsilon^\rho{}_\pi{}^\nu{}_\theta\partial^\beta A_\nu \right. \\ & \left. + \eta^{\alpha\pi}\partial_\gamma F^{\gamma\theta}\Upsilon^\xi{}_\pi{}^\nu{}_\theta\partial^\beta\partial_\xi A_\nu + \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}\partial_\mu F^{\mu\nu}\partial_\sigma F^\sigma{}_\nu\right). \end{aligned} \quad (2.109)$$

Observe que no limite de  $a \rightarrow 0$ ,  $\Theta_P^{\alpha\beta} \rightarrow \Theta_M^{\alpha\beta}$ , sendo que  $\Theta_M^{\alpha\beta}$  é o tensor Energia-Momento de Maxwell [15].

Um detalhe importante é que o tensor Energia-Momento não é simétrico nos índices  $\alpha$  e  $\beta$ . A simetria nos índices não é uma regra a ser cumprida, mas é desejável em algumas áreas da Física – por exemplo, gravitação.<sup>7</sup> O método de simetrização, que envolve o uso de termos de divergência total conhecido como processo de *Belinfante*, não funciona com teorias que apresentam derivadas de ordem superior nos campos. Para estes tipos de teorias, o procedimento a ser realizado encontra-se em [23]. Para a Eletrodinâmica de Podolsky, o tensor simétrico é dado por [24]

$$\begin{aligned} \Theta_{P_s}^{\alpha\beta} = & F^{\mu\alpha}F^\beta{}_\mu + \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + 2a\left(-\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_\mu F^{\mu\nu}\partial_\sigma F^\sigma{}_\nu - F^{\alpha\mu}\square F^\beta{}_\mu - F^{\beta\mu}\square F^\alpha{}_\mu \right. \\ & \left. - F^{\alpha\mu}\partial_\mu\partial_\nu F^{\nu\beta} - F^{\beta\mu}\partial_\mu\partial_\nu F^{\nu\alpha} + \partial_\mu F^{\mu\alpha}\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\right). \end{aligned} \quad (2.110)$$

Note que também no limite de  $a \rightarrow 0$ ,  $\Theta_{P_s}^{\alpha\beta} \rightarrow \Theta_{M_s}^{\alpha\beta}$ , sendo que  $\Theta_{M_s}^{\alpha\beta}$  é o tensor Energia-Momento de Maxwell simétrico [25].

O quadrimomento linear do campo  $A_\mu$ , que é conservado por evolução temporal, é dado pela seguinte expressão

$$\begin{aligned} P^\beta = & \int_{\Xi} d^3x \Theta_{P_s}^{0\beta} = \int_{\Xi} d^3x \left[ F^{\mu 0}F^\beta{}_\mu + \frac{1}{4}\eta^{0\beta}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + 2a\left(-\frac{1}{2}\eta^{0\beta}\partial_\mu F^{\mu\nu}\partial_\sigma F^\sigma{}_\nu \right. \right. \\ & \left. \left. - F^{0\mu}\square F^\beta{}_\mu - F^{\beta\mu}\square F^0{}_\mu - F^{0\mu}\partial_\mu\partial_\nu F^{\nu\beta} - F^{\beta\mu}\partial_\mu\partial_\nu F^{\nu 0} + \partial_\mu F^{\mu 0}\partial_\sigma F^{\sigma\beta}\right)\right]. \end{aligned} \quad (2.111)$$

O momento linear do campo eletromagnético é obtido de  $P^i$ . Usando a regra de derivação de um produto de funções e eliminando os termos que são divergências totais, temos

$$P^i = \int_{\Xi} d^3x \left[ F^{\mu 0}F^i{}_\mu + 2a\left(-F^{0\mu}\square F^i{}_\mu - F^{i\mu}\square F^0{}_\mu + \partial_\mu F^{i\mu}\partial_\sigma F^{\sigma 0}\right)\right]. \quad (2.112)$$

<sup>7</sup> As equações de Einstein para a gravitação igualam quantidades referentes a geometria do espaço (métrica e o tensor de Ricci) a quantidades relacionadas a matéria (tensor Energia-Momento). Tanto a métrica como o tensor de Ricci são tensores de segunda ordem simétricos. Por isso é desejável que o tensor energia-momento também seja simétrico.

Em termos dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , temos que

$$\mathbf{P} = \int_{\Xi} d^3x \left\{ \mathbf{E} \times \mathbf{B} + 2a \left[ \mathbf{E} \times \square \mathbf{B} + \square \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \nabla \cdot \mathbf{E} \left( \dot{\mathbf{E}} - \nabla \times \mathbf{B} \right) \right] \right\}, \quad (2.113)$$

sendo que  $\dot{\mathbf{Z}}$  indica significa a derivada parcial de  $\mathbf{Z}$  com relação ao tempo.

Assim, identificamos o vetor de Poynting da Eletrodinâmica de Podolsky

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} + 2a \left[ \mathbf{E} \times \square \mathbf{B} + \square \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \nabla \cdot \mathbf{E} \left( \dot{\mathbf{E}} - \nabla \times \mathbf{B} \right) \right], \quad (2.114)$$

que recai no vetor de Poynting da Eletrodinâmica de Maxwell no limite de  $a \rightarrow 0$ .

A hamiltoniana da Eletrodinâmica de Podolsky é obtida de  $P^0$ .

$$H = \int_{\Xi} d^3x \left[ F^{\mu 0} F^0_{\mu} + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + 2a \left( -\frac{1}{2} \partial_{\mu} F^{\mu\nu} \partial_{\sigma} F^{\sigma}_{\nu} - F^{0\mu} \square F^0_{\mu} - F^{0\mu} \square F^0_{\mu} - F^{0\mu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} F^{\nu 0} - F^{0\mu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} F^{\nu 0} + \partial_{\mu} F^{\mu 0} \partial_{\sigma} F^{\sigma 0} \right) \right]. \quad (2.115)$$

Escrevendo  $H$  em termos dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , obtemos

$$H = \int_{\Xi} d^3x \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{B}^2 + \mathbf{E}^2 + 2a \left[ \left( \dot{\mathbf{E}} - \nabla \times \mathbf{B} \right)^2 + \left( \nabla \cdot \mathbf{E} \right)^2 + 4\mathbf{E} \cdot \square \mathbf{E} + 4\mathbf{E} \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) \right] \right\}. \quad (2.116)$$

Ela também pode ser escrita da seguinte forma

$$H = \int_{\Xi} d^3x \left[ \pi^{\mu} \dot{A}_{\mu} + \tilde{\pi}^{\mu} \ddot{A}_{\mu} - \mathcal{L} \right], \quad (2.117)$$

com

$$\pi^{\mu} = F^{\mu 0} - 2a \left( \partial_0 \partial_{\lambda} F^{\lambda \mu} - \eta^{k\mu} \partial_k \partial_{\lambda} F^{\lambda 0} \right). \quad (2.118)$$

$$\tilde{\pi}^{\mu} = 2a \left( \partial_{\lambda} F^{\lambda \mu} - \eta^{0\mu} \partial_{\lambda} F^{\lambda 0} \right). \quad (2.119)$$

Neste formato, a hamiltoniana explicita os pares canônicos  $(\pi^{\mu}, A_{\mu})$  e  $(\tilde{\pi}^{\mu}, \dot{A}_{\mu})$  – que são importantes na formulação hamiltoniana da Eletrodinâmica de Podolsky [8].

A densidade de energia do campo eletromagnético fornece uma informação sobre o parâmetro de Podolsky. Para extraí-la, restringir-nos-emos ao caso eletrostático ( $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ ;  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ ). Sendo assim,

$$\begin{aligned} \Theta_{P_s}^{00} &= \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{E}^2 + 2a \left[ \left( \nabla \cdot \mathbf{E} \right)^2 + 4\mathbf{E} \cdot \left( \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \right) \right] \right\}, \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{E}^2 + 2a \left[ \left( \nabla \cdot \mathbf{E} \right)^2 + 4\mathbf{E} \cdot \nabla \times \left( \nabla \times \mathbf{E} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Segundo a eq.(2.50), para o caso eletrostático,  $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ . Logo,

$$\Theta_{P_s}^{00} = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{E}^2 + 2a \left( \nabla \cdot \mathbf{E} \right)^2 \right\}. \quad (2.121)$$

Sabemos que para os casos em que o campo elétrico  $\mathbf{E}$  é não-nulo, então  $\Theta_{P_s}^{00} > 0$ . Assim,

$$a > - \frac{\mathbf{E}^2}{2 \left( \nabla \cdot \mathbf{E} \right)^2}. \quad (2.122)$$

A eq.(2.122) mostra que o parâmetro  $a$  tem um limite inferior. Este limite depende das configurações de campos de cada problema em particular. Como assumimos que  $a$  era um parâmetro *constante* e real, isto quer dizer que  $a$  independente da configuração particular do campo. Observando que o lado direito da inequação é sempre negativo, então para satisfazermos a independência de  $a$  quanto ao campo, basta que o parâmetro satisfaça

$$a > 0. \quad (2.123)$$

Estudaremos agora o caso em que as transformações infinitesimais sejam transformações de Lorentz e rotações.

## 2.5.4 Transformações de Lorentz e Rotações: Tensor Momento Angular e Tensor Spin

Considere a seguinte transformação de Poincaré

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \left[ \exp \left( \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} \right) \right]^\mu_\nu x^\nu. \quad (2.124)$$

$$\varphi_i(x) \longrightarrow \varphi'_i(x') = \left[ \exp \left( \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} \right) \right]_{ij} \varphi_j(x) \quad (2.125)$$

Relembrando as eq.(2.68) e (2.69), vemos que o parâmetro da transformação é  $\omega^{\alpha\beta}$ . Como  $\omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}$ , então  $\Psi_{i\alpha\beta} = -\Psi_{i\beta\alpha}$  e  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = -\Gamma^\mu_{\beta\alpha}$ . Sendo assim, definiremos que  $\delta x^\mu = \frac{1}{2} \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}$  e  $\delta \varphi_i = \frac{1}{2} \Psi_{i\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}$ . O fator  $\frac{1}{2}$  serve para evitar contagem dupla. No caso de uma transformação infinitesimal, podemos expandir a exponencial e truncá-la no primeiro termo da expansão

$$\begin{aligned} x^\mu \longrightarrow x'^\mu &= \left( \mathbb{1} + \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} \right)^\mu_\nu x^\nu = \left( \delta^\mu_\nu + \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} (M_{\alpha\beta})^\mu_\nu \right) x^\nu, \\ &= x^\mu + \omega^{\mu\nu} x_\nu. \end{aligned} \quad (2.126)$$

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) \longrightarrow \varphi'_i(x') &= \left( \mathbb{1} + \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} M_{\alpha\beta} \right)_{ij} \varphi_j(x) = \left( \delta_{ij} + \frac{i}{2} \omega^{\alpha\beta} (M_{\alpha\beta})_{ij} \right) \varphi_j, \\ &= \varphi_i + \frac{1}{2} \Psi_{i\alpha\beta} \omega^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (2.127)$$

onde usamos  $(M_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = i\eta_{\alpha\nu}\eta^\mu{}_\beta - i\eta_{\beta\nu}\eta^\mu{}_\alpha$  [15] e  $(M_{\alpha\beta})_{ij}$  depende do campo em questão. Por inspeção, vemos que

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = \eta^\mu{}_\alpha x_\beta - \eta^\mu{}_\beta x_\alpha. \quad (2.128)$$

Disso tiramos que  $\Phi_{i\alpha\beta} = \Psi_{i\alpha\beta} + x_\alpha \partial_\beta \varphi_i(x) - x_\beta \partial_\alpha \varphi_i(x)$  e temos o seguinte tensor de corrente  $\Delta^\mu{}_{\alpha\beta} \equiv J_{\alpha\beta}{}^\mu$

$$\begin{aligned} \Delta^\mu{}_{\alpha\beta} &= -\Pi^{\mu i} \Phi_{i\alpha\beta} - \tilde{\Pi}^{\mu\nu i} \partial_\nu \Phi_{i\alpha\beta} - \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \mathcal{L}, \\ &= -\Pi^{\mu i} \Psi_{i\alpha\beta} - \Pi^{\mu i} x_\alpha \partial_\beta \varphi_i(x) + \Pi^{\mu i} x_\beta \partial_\alpha \varphi_i(x) - \tilde{\Pi}^{\mu\nu i} \partial_\nu \Psi_{i\alpha\beta} \\ &\quad - \tilde{\Pi}^{\mu\nu i} \eta_{\nu\alpha} \partial_\beta \varphi_i(x) - \tilde{\Pi}^{\mu\nu i} x_\alpha \partial_\nu \partial_\beta \varphi_i(x) + \tilde{\Pi}^{\mu\nu i} \eta_{\nu\beta} \partial_\alpha \varphi_i(x) + \tilde{\Pi}^{\mu\nu i} x_\beta \partial_\nu \partial_\alpha \varphi_i(x) \\ &\quad + \eta^\mu{}_\beta x_\alpha \mathcal{L} - \eta^\mu{}_\alpha x_\beta \mathcal{L}, \\ &= -\Pi^{\mu i} \Psi_{i\alpha\beta} - \tilde{\Pi}^{\mu\nu i} \left( \partial_\nu \Psi_{i\alpha\beta} + \Upsilon_{\nu\alpha}{}^\gamma{}_\beta \partial_\gamma \varphi_i \right) + \Theta^\mu{}_\alpha x_\beta - \Theta^\mu{}_\beta x_\alpha, \end{aligned} \quad (2.129)$$

que, pelo teorema de Noether,

$$\partial_\mu \Delta^\mu{}_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.130)$$

Para o tensor  $\Delta^\mu{}_{\alpha\beta}$  damos o nome de *tensor Momento Angular Total*. Note que podemos separar  $\Delta^\mu{}_{\alpha\beta}$  como a soma de dois tensores

$$\Delta^\mu{}_{\alpha\beta} = L^\mu{}_{\alpha\beta} + S^\mu{}_{\alpha\beta} \quad (2.131)$$

com

$$L^\mu{}_{\alpha\beta} = \Theta^\mu{}_\alpha x_\beta - \Theta^\mu{}_\beta x_\alpha, \quad (2.132)$$

que é chamado de *tensor Momento Angular Orbital* devido a sua forma lembrar  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ . O que sobra é somente

$$S^\mu{}_{\alpha\beta} = -\Pi^{\mu i} \Psi_{i\alpha\beta} - \tilde{\Pi}^{\mu\nu i} \left( \partial_\nu \Psi_{i\alpha\beta} + \Upsilon_{\nu\alpha}{}^\gamma{}_\beta \partial_\gamma \varphi_i \right) \quad (2.133)$$

que recebe o nome de *tensor Spin*. O nome Spin se deve ao fato de que em Teoria Quântica de Campos este tensor é associado com o spin do campo. Como  $\partial_\mu \Delta^\mu{}_{\alpha\beta} = 0$ , então

$$\partial_\mu S^\mu{}_{\alpha\beta} = \Theta_{\alpha\beta} - \Theta_{\beta\alpha}, \quad (2.134)$$

pois  $\partial_\mu \Theta^\mu{}_\nu = 0$ . A parte antissimétrica do tensor Energia-Momento quebra a conservação do tensor Spin. No caso em que  $\varphi_i$  é um campo escalar, o tensor Energia-Momento canônico é simétrico e, conseqüentemente,  $\partial_\mu S^\mu{}_{\alpha\beta} = 0$ .

## 2.5.5 Os Tensores Momento Angular Orbital e Spin da Eletrodinâmica de Podolsky

A maneira de como se obter os tensores Momento Angular Orbital e Spin foi apresentada na Subseção 2.5.4. A exigência é fazer a associação  $\varphi_i \equiv A_\mu$  e determinar  $\Psi_{i\alpha\beta}$ . Como o campo eletromagnético de Podolsky é um campo vetorial, então uma transformação infinitesimal em  $A_\mu$  – boost e rotação – é feita da seguinte maneira

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu + \omega^{\mu\nu} A_\nu. \quad (2.135)$$

com  $\omega$  o parâmetro da transformação. Desta forma, identificamos  $\Psi_{\mu\alpha\beta}$  como

$$\begin{aligned} \Psi_{\mu\alpha\beta} &= \delta^\mu_\alpha A_\beta - \delta^\mu_\beta A_\alpha, \\ &= \Upsilon^\mu_{\alpha\beta} A_\gamma. \end{aligned} \quad (2.136)$$

O tensor Momento Angular Orbital é obtido utilizando a eq.(2.103)

$$\begin{aligned} L_P^{\mu\alpha\beta} &= \Theta_P^{\mu\alpha} x^\beta - \Theta_P^{\mu\beta} x^\alpha, \\ &= \Upsilon^\alpha_{\xi\gamma} \Theta_P^{\mu\xi} x^\gamma, \\ &= F^{\nu\mu} \partial^\xi A_\nu \Upsilon^\alpha_{\xi\gamma} x^\gamma - \frac{1}{4} \eta^{\mu\xi} F^{\kappa\nu} F_{\kappa\nu} \Upsilon^\alpha_{\xi\gamma} x^\gamma + 2a \left( \eta^{\mu\pi} \partial_\rho \partial_\gamma F^{\theta\gamma} \Upsilon^\rho_{\pi\theta} \partial^\xi A_\nu \right. \\ &\quad \left. + \eta^{\mu\pi} \partial_\gamma F^{\gamma\theta} \Upsilon^\lambda_{\pi\theta} \partial^\xi \partial_\lambda A_\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\xi} \partial_\kappa F^{\kappa\nu} \partial_\sigma F^\sigma_\nu \right) \Upsilon^\alpha_{\xi\gamma} x^\gamma \end{aligned} \quad (2.137)$$

e a carga associada a  $L^{0\alpha\beta}$  é

$$\tilde{L}^{\alpha\beta} = \int_{\Xi} d^3x \left[ \pi^\mu (\partial^\alpha A_\mu x^\beta - \partial^\beta A_\mu x^\alpha) + \tilde{\pi}^\mu (\partial^\alpha \dot{A}_\mu x^\beta - \partial^\beta \dot{A}_\mu x^\alpha) \right]. \quad (2.138)$$

com  $\pi^\mu$  e  $\tilde{\pi}^\mu$  dados por

$$\pi^\mu = F^{\mu 0} - 2a (\partial_0 \partial_\lambda F^{\lambda\mu} - \eta^{k\mu} \partial_k \partial_\lambda F^{\lambda 0}). \quad (2.139)$$

$$\tilde{\pi}^\mu = 2a (\partial_\lambda F^{\lambda\mu} - \eta^{0\mu} \partial_\lambda F^{\lambda 0}). \quad (2.140)$$

O tensor Spin é obtido de (2.133). Usando a eq.(2.136) temos que

$$\begin{aligned} S^\mu_{\alpha\beta} &= -\Pi^{\mu\rho} \Upsilon_{\rho\alpha}{}^\gamma{}_\beta A_\gamma - \tilde{\Pi}^{\mu\nu\rho} \left( \Upsilon_{\rho\alpha}{}^\gamma{}_\beta \partial_\nu A_\gamma + \Upsilon_{\nu\alpha}{}^\gamma{}_\beta \partial_\gamma A_\rho \right), \\ &= F^{\mu\rho} \Upsilon_{\rho\alpha}{}^\gamma{}_\beta A_\gamma + 2a \left( \eta^{\mu\pi} \Upsilon_{\rho\alpha}{}^\gamma{}_\beta \Upsilon^\lambda_{\pi\theta} \partial_\lambda \partial_\sigma F^{\sigma\theta} A_\gamma - \eta^{\mu\pi} \Upsilon^\nu_{\pi\theta} \Upsilon_{\rho\alpha}{}^\gamma{}_\beta \partial_\sigma F^{\sigma\theta} \partial_\nu A_\gamma \right. \\ &\quad \left. - \eta^{\mu\pi} \Upsilon^\nu_{\pi\theta} \Upsilon_{\nu\alpha}{}^\gamma{}_\beta \partial_\sigma F^{\sigma\theta} \partial_\gamma A_\rho \right) \end{aligned} \quad (2.141)$$

e a carga associada a  $S^0_{\alpha\beta}$  é

$$\tilde{S}_{\alpha\beta} = \int_{\Xi} d^3x \left[ \pi^\mu \Upsilon_{\mu\alpha}{}^\gamma{}_\beta A_\gamma + \tilde{\pi}^\mu \Upsilon_{\mu\alpha}{}^\gamma{}_\beta \dot{A}_\gamma \right] \quad (2.142)$$

Em ambos os casos, os tensores  $L^{\mu\alpha\beta}$  e  $S^{\mu\alpha\beta}$  no limite de  $a \rightarrow 0_+$  recaem nas expressões obtidas pela Teoria de Maxwell.

Com isto, encerramos este capítulo. As teorias de campos com derivadas de ordens superiores nos campos são estudadas há muito tempo e, apesar da dificuldade intrínseca ao lidar com elas, vários resultados já foram obtidos. Este capítulo mostrou que é possível um formalismo lagrangiano para teorias de segunda ordem. A referência [8] constrói todo o formalismo hamiltoniano para tais teorias. Com a definição dos pares canônicos  $(\pi^\mu, A_\mu)$  e  $(\tilde{\pi}^\mu, \dot{A}_\mu)$ , a construção de uma formulação hamiltoniana para a Eletrodinâmica de Podolsky se torna natural. Ainda em [8], a análise de vínculos da Eletrodinâmica de Podolsky é realizada, obtendo todas as condições necessárias para se reduzir os graus de liberdade aparentes da teoria, além da obtenção do gauge de Lorenz generalizado, que veremos com mais detalhes posteriormente. Em [26] o formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares descritos por lagrangianas de segunda ordem é o objeto de estudo. Também é realizada uma aplicação à Eletrodinâmica de Podolsky. A referência [10] mostrou um resultado importante: A teoria de Podolsky é a única teoria de campos de segunda ordem possível que seja linear e invariante pelos grupos de Poincaré e  $U(1)$  local. Em outras palavras, todas as teorias de segunda ordem lineares e invariantes pelos grupos de Poincaré e  $U(1)$  sobre Eletrodinâmica são equivalentes à Eletrodinâmica de Podolsky, fazendo dela a única generalização possível da Eletrodinâmica de Maxwell. Desta forma, teorias de segunda ordem se mostram alternativas para a descrição da Natureza.

---

**CAPÍTULO 3**

---

---

# TEORIA DE MULTIPOLOS NA ELETRODINÂMICA DE PODOLSKY

---

## 3.1 Introdução

Neste capítulo faremos um estudo sobre a teoria Eletrostática e Magnetostática de Podolsky. O interesse pelo regime (independente do tempo) é inerente à gama de fenômenos eletromagnéticos que podem ser investigados sem levar em conta a dependência temporal dos mesmos. Atualmente, todos estes fenômenos são descritos pela Eletrostática e Magnetostática de Maxwell e é natural neste trabalho estendermos esta descrição para a teoria de Podolsky.

A primeira seção deste capítulo consiste em determinar como as equações de Podolsky são escritas em termos do potenciais escalar elétrico e vetorial magnético no caso estático e qual é a fixação de calibre adequada para este caso. Em seguida, teremos mais duas grandes seções: uma sobre a Eletrostática de Podolsky e outra sobre a Magnetostática de Podolsky.

Na seção sobre Eletrostática estudaremos as quantidades relacionadas à carga puntual tais como seu potencial elétrico, seu campo elétrico, o fluxo de seu campo elétrico, entre outros. Um breve modelo para uma carga puntual é estudada nesta parte. Ainda nesta seção estudaremos o dipolo elétrico e suas propriedades. O dipolo elétrico servirá como ensaio para o estudo dos multipolos elétricos, importantes na aproximação de potenciais e campos de distribuições de cargas que, em geral, são difíceis de serem modelados. Mostraremos como é feita a expansão multipolar na Eletrostática de Podolsky e aplicaremos para o caso de um disco com uma densidade superficial de carga constante.

Na seção sobre Magnetostática explicaremos sobre as correntes estacionárias, que

são fontes de campos magnéticos estáticos. Em seguida, obteremos o potencial vetorial magnético de algumas configurações de corrente, como por exemplo, o potencial vetorial magnético devido a um fio infinito e a uma casca esférica girante carregada eletricamente. Faremos também a expansão multipolar do potencial vetorial magnético e aplicaremos para uma espira circular delgada com uma corrente constante.

## 3.2 As Equações de Podolsky para o caso estático e a Condição de Coulomb Generalizada

As equações de Podolsky são as equações que descrevem toda a dinâmica dos campos elétrico e magnético de Podolsky. Juntamente com a força de Lorentz, elas descrevem como a matéria interage com o campo eletromagnético. Elas são dadas pelas eq. (2.47), (2.48), (2.49) e (2.50) e sabemos que para o caso estático ( $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$ ;  $\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{0}$ ) são escritas da seguinte forma

$$(1 - 2a\nabla^2)\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.2)$$

$$(1 - 2a\nabla^2)\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}, \quad (3.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (3.4)$$

Do modo que são definidos os campos elétrico e magnético em termos das componentes do tensor de Faraday, é possível mostrar que, no caso estático,

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (3.5)$$

com  $\varphi$  o potencial escalar elétrico e  $\mathbf{A}$  o potencial vetorial magnético.

Desta forma, escrevendo as equações de Podolsky com fontes em termos dos potenciais  $\varphi$  e  $\mathbf{A}$  temos

$$(2a\nabla^2 - 1)\nabla^2\varphi = \rho, \quad (3.6)$$

$$\nabla[(1 - 2a\nabla^2)\nabla \cdot \mathbf{A}] + (2a\nabla^2 - 1)\nabla^2\mathbf{A} = \mathbf{J}. \quad (3.7)$$

A invariância de gauge da Eletrodinâmica de Podolsky permite que façamos a seguinte escolha

$$(1 - 2a\nabla^2)\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (3.8)$$

A eq.(3.8) é chamada de *condição de Coulomb generalizada*. A imposição desta condição está relacionada com o fato de que o campo de Podolsky apresenta graus de liberdade aparentes. Para reduzi-los aos graus de liberdade físicos, é necessário impor condições sobre os campos. A condição correta, que foi obtida por Galvão e Pimentel em [8], é a

condição de Lorenz generalizada, que se reduz à condição de Coulomb generalizada no caso estático. Desta forma, motivados por (2.123), as equações de Podolsky sob a condição de Coulomb generalizada são

$$\left(\frac{1}{m^2}\nabla^2 - 1\right)\nabla^2\varphi = \rho, \quad (3.9)$$

$$\left(\frac{1}{m^2}\nabla^2 - 1\right)\nabla^2\mathbf{A} = \mathbf{J}, \quad (3.10)$$

com

$$m = \sqrt{\frac{1}{2a}}. \quad (3.11)$$

A constante  $m$  tem dimensão de inverso de comprimento e é chamada de *constante de Podolsky*. O inverso desta constante, que tem dimensão de comprimento, é uma escala de comprimento característica da teoria, sendo chamada de *comprimento de Podolsky*. A constante  $m$  tem um limite inferior relacionado com o limite de detecção dos experimentos. O valor obtido mais recente para este limite é  $m > 3,7595 \times 10^{10}$  eV e foi determinado em [12]. Devido à expressão que define  $m$ , o limite de  $a \rightarrow 0_+$  equivale a  $m \rightarrow +\infty$ . Veremos agora quais as implicações que a Eletrostática de Podolsky impõe sobre os potenciais e campos de partículas e distribuições contínuas de cargas.

### 3.3 A Eletrostática de Podolsky

A Eletrostática, como o próprio nome sugere, é o ramo da Eletrodinâmica que estuda as propriedades e o comportamento de corpos carregados em repouso. Os corpos carregados variam entre corpos extensos até corpos minúsculos. Iniciaremos nosso estudo analisando as propriedades da carga puntual.

#### 3.3.1 A Carga Puntual

A carga puntual, que denotaremos por  $Q$ , é uma partícula puntual carregada eletricamente cuja densidade de carga é do tipo delta de Dirac. Para uma carga puntual em um ponto  $P \in \mathbb{R}^3$ , este que é localizado por um vetor  $\tilde{\mathbf{r}}$ , sua densidade de carga  $\rho$  é

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}). \quad (3.12)$$

A eq.(3.12) nos diz que em qualquer ponto do espaço, exceto  $P$ , não existe carga elétrica. A constante  $q$  é a *quantidade de carga elétrica* da carga puntual  $Q$ . Esta constante é um

número real<sup>1</sup> e é obtida pela integração em todo o espaço da densidade de carga  $\rho$

$$\text{Quant. de carga de } Q = \int_{\Xi} \rho(\mathbf{r}) d\tau = \int_{\Xi} q\delta(\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}) d\tau = q. \quad (3.13)$$

A quantidade de carga  $q$  também é chamada de *carga* devido a uma carga puntual. Por muitas vezes denota-se uma carga puntual pela sua quantidade de carga.

Neste estágio é possível determinarmos o potencial elétrico de uma carga puntual. Sabemos que o potencial escalar elétrico devido a uma carga puntual em um ponto localizado por um vetor  $\mathbf{r}$  satisfaz a eq.(3.9), com  $\rho$  dado pela eq.(3.12). Esperamos que o mesmo tenha domínio em todo o espaço e que tenda a zero quando a distância entre o ponto onde se calcula o potencial e a localização da carga for arbitrariamente grande. Podemos traduzir nossas expectativas da seguinte forma

$$\text{Domínio de } \varphi = \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.14)$$

com  $r \equiv \|\mathbf{r}\|$ . Estas são *condições de contorno* e estão bem definidas, no sentido que podemos utilizar o *método das Funções de Green* para resolver a eq.(3.9). Segundo este método, a solução da eq.(3.9) é dada por

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{\Xi} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\tau', \quad (3.15)$$

sendo que o sobrescrito  $'$  indica que a integração é realizada na variável  $\mathbf{r}'$  e  $G$  é a função de Green da eq.(3.9) que satisfaz

$$\left( \frac{1}{m^2} \nabla^2 - 1 \right) \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.16)$$

com as mesmas condições de contorno de  $\varphi$ . O operador  $\left( \frac{1}{m^2} \nabla^2 - 1 \right) \nabla^2$  atua somente na variável  $\mathbf{r}$ . A resolução da equação diferencial de  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  é feita utilizando o método da Transformada de Fourier e o cálculo completo se encontra no Apêndice A. Assim, utilizando o resultado (A.25), temos que

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{(1 - \exp(-m\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|))}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}. \quad (3.17)$$

Desta forma, utilizando as eq.(3.17) e eq.(3.12), é possível mostrar que o potencial calculado em um ponto localizado por  $\mathbf{r}$  devido a uma carga puntual localizada em  $P$  é

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi} \left( \frac{1}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} - \frac{\exp(-m\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|)}{\|\mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}\|} \right). \quad (3.18)$$

<sup>1</sup> Em 1913, Robert A. Millikan publicou “On the elementary electrical charge and the Avogadro constant” que mostrou que a quantidade de carga elétrica é múltiplo de uma *carga elétrica elementar*, denotada por  $e$ , cujo valor medido foi  $e = 4,774 \pm 0,009 \times 10^{-10}$  ESU. Este fato mostra que a carga elétrica é *quantizada*. Como isto não muda a análise feita neste trabalho, então descreveremos a quantidade de carga elétrica por um número real. Para detalhes sobre o experimento de Millikan, veja a referência [27].

Note que  $\varphi$  satisfaz os seguintes limites

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.19)$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r}, \quad (3.20)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \varphi(\mathbf{r}) = q \frac{m}{4\pi}, \quad (3.21)$$

de modo que, nas expressões anteriores, tomamos a carga puntual localizada na origem do sistema de coordenadas, sem perda de generalidade.<sup>2</sup>

A eq.(3.19) nos diz que o potencial vai a zero para pontos muito distantes da carga puntual, como esperado. A eq.(3.20) mostra que o potencial elétrico devido a uma carga puntual na teoria de Podolsky se comporta como o potencial elétrico na teoria de Maxwell no limite da constante  $m$  indo a infinito. Já a eq.(3.21) contém uma informação valiosa: o potencial elétrico de Podolsky devido a uma carga puntual é finito sobre a carga. Este é um resultado interessante pois sabemos que, fisicamente, o potencial elétrico não deve ser ilimitado sobre a carga. Este resultado ajudará a resolver outros problemas como veremos mais a frente.

A partir da expressão para o potencial escalar elétrico da carga puntual, podemos calcular o campo elétrico gerado por esta carga. Se  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , então

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi} \left[ \frac{1}{r^2} - m^2 \frac{\exp(-mr)}{mr} \left( 1 + \frac{1}{mr} \right) \right] \hat{\mathbf{r}}, \quad (3.22)$$

com  $\hat{\mathbf{r}}$  um vetor unitário na direção de  $\mathbf{r}$ .

Tomando  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}}$ , é possível mostrar os seguintes limites para  $E(\mathbf{r})$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} E(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.23)$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} E(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2}, \quad (3.24)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} E(\mathbf{r}) = \frac{q}{8\pi} m^2, \quad (3.25)$$

de modo que a análise feita sobre as eq.(3.19) e (3.20) também é válida no caso da norma do campo elétrico. A eq.(3.25) mostra que o campo elétrico gerado pela carga puntual quando calculado sobre a carga é finito. Isto merece ser destacado pois o campo elétrico é um observável, isto é, pode ser mensurável.

Com a expressão do campo elétrico da carga puntual, podemos calcular o fluxo deste campo por uma casca esférica. Para isso, considere uma casca esférica  $S$  de raio  $R$ , centrada na origem, orientada positivamente. Escolhemos esta superfície devido à simetria

<sup>2</sup> Daqui em diante, tomaremos a carga puntual sempre localizada na origem, a menos que seja mencionada sua posição.

esférica do campo. Propondo uma parametrização em coordenadas esféricas para a casca esférica para facilitar os cálculos e denotando por  $\hat{\mathbf{n}}$  um campo de versores normais a  $S$ , é possível mostrar que

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\sigma = q [1 - \exp(-mR)(1 + mR)]. \quad (3.26)$$

A eq.(3.26) nos diz que o fluxo depende explicitamente da superfície.

Podemos nos perguntar qual é a energia necessária para reunir um conjunto de  $n$  cargas pontuais? A resposta é obtida da mesma forma que na teoria de Maxwell, pois a interação entre cargas elétricas e o campo eletromagnético de Podolsky é a mesma que na teoria de Maxwell. Sendo assim, seja  $W$  o trabalho necessário para mover carga puntual  $q$  de um ponto  $A$  do espaço até ponto  $B$  submetida a um potencial elétrico  $\varphi$ . Isto quer dizer que  $W = q[\varphi(B) - \varphi(A)]$ . Se o ponto  $A$  é tomado como referência (em geral, no infinito) e  $\varphi$  é devido a um conjunto  $n - 1$  cargas pontuais com cargas  $q_2, \dots, q_n$ , então

$$W = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n q_i q_j \frac{[1 - \exp(-m\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|)]}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}, \quad (3.27)$$

sendo que  $\mathbf{r}_k$  é o vetor que localiza a carga puntual  $q_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  e  $q_1 \equiv q$ . Podemos escrever de uma maneira mais elegante da seguinte forma

$$W = \frac{1}{8\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n q_i q_j \frac{[1 - \exp(-m\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|)]}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}, \quad (3.28)$$

de forma que o fator  $1/2$  foi introduzido para evitar contagem dupla. Podemos retirar  $q_i$  do somatório em  $j$  e teremos

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi(\mathbf{r}_i), \quad (3.29)$$

com  $\varphi(\mathbf{r}_i)$  o valor do potencial em  $\mathbf{r}_i$  devido a todas as cargas pontuais  $q_j$ ,  $j \neq i$ . Esta expressão pode ser estendida para o caso de distribuições contínuas de cargas fazendo a correspondência  $\sum \leftrightarrow \int$  e  $q \leftrightarrow dq$ . Desta forma, se  $\rho$  for a densidade de carga de um volume carregado e finito  $\Psi$ , então

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Psi} \rho(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}') \, d\tau', \quad (3.30)$$

com  $\varphi$  o potencial no interior de  $\Psi$ . Podemos definir a *densidade de carga em todo o espaço*, denotada por  $\tilde{\rho}$  e definida da seguinte forma

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}') = \begin{cases} \rho(\mathbf{r}'), & \text{se } \mathbf{r}' \in \Psi \\ 0, & \text{se } \mathbf{r}' \notin \Psi \end{cases}. \quad (3.31)$$

Logo,

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Xi} \tilde{\rho}(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{r}') d\tau', \quad (3.32)$$

com  $\Xi = \mathbb{R}^3$ .<sup>3</sup>

Neste ponto surge um possível modelo para uma carga puntual, como o elétron. A quantidade a ser analisada é a energia necessária para formar tal carga. O modelo mais simples para uma carga puntual é tratá-la como uma esfera carregada com uma distribuição de cargas esfericamente simétrica. Tomaremos o caso em que a densidade de carga é constante. Vejamos este cálculo agora.

Seja uma esfera de raio  $R$  carregada eletricamente e com densidade de carga constante  $\rho_0$ . Para calcularmos a energia para formar a carga, precisamos do potencial no interior da esfera. Isto é obtido da eq.(3.15),

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Xi} \frac{(1 - \exp(-m\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|))}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \rho(\mathbf{r}') d\tau', \quad (3.33)$$

sendo que

$$\rho(\mathbf{r}') = \rho_0 \Theta(R - r'), \quad (3.34)$$

$r \leq R$  e  $\Theta$  é a função de Heaviside definida do seguinte modo

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}. \quad (3.35)$$

Uma integração em coordenadas esféricas resulta em

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = & \frac{Q}{8\pi R} \left[ 3 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 6 \left( \frac{\cosh(mr)}{mr} - \frac{\sinh(mr)}{(mr)^2} \right) \left( \frac{\exp(-mr)}{mr} \right) \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right. \\ & + 6 \left( \frac{\sinh(mr)}{mr} \right) \left( \frac{\exp(-mR)}{mR} \right) \left( 1 + \frac{1}{mR} \right) \\ & \left. - 6 \left( \frac{\sinh(mr)}{mr} \right) \left( \frac{\exp(-mr)}{mr} \right) \left( 1 + \frac{1}{mr} \right) \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right], \end{aligned} \quad (3.36)$$

com  $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$ . Substituindo (3.36) em (3.32) com  $\rho(\mathbf{r}') = \rho_0 \Theta(R - r')$  e realizando a integral, temos que

$$\begin{aligned} W = & \frac{3Q^2 m}{80\pi} \left[ \frac{\exp(-2mR)}{(mR)^6} \right] \left[ 4(mR)^5 \exp(2mR) - 10(mR)^3 \exp(2mR) + 30(mR) \right. \\ & \left. + 15 + 15(mR)^2 \exp(2mR) + 15(mR)^2 - 15 \exp(2mR) \right]. \end{aligned} \quad (3.37)$$

<sup>3</sup> Para não carregar a notação, a partir de agora denotaremos a densidade de carga em todo o espaço apenas por  $\rho$ .

Uma carga puntual pode ser vista como o limite de uma esfera carregada com seu raio tendendo a zero. Tomando este limite sobre (3.37) e usando a regra de L'Hôpital obtemos que a energia armazenada em uma carga puntual é

$$W_{carga} = \frac{Q^2 m}{8\pi}, \quad (3.38)$$

que é finita. Note que a finitude da energia do campo está relacionada diretamente com a constante de Podolsky e fica cada vez maior a medida que  $m$  cresce. O mesmo resultado seria obtido se usássemos a eq.(2.116) para o caso eletrostático e o campo elétrico de uma carga puntual dado em (3.22). Neste caso, a interpretação é que a energia da carga está armazenada no campo eletromagnético. Este é um dos grandes resultados da Eletrodinâmica de Podolsky.

### 3.3.2 O Dipolo Elétrico

O dipolo elétrico consiste em duas cargas puntuais  $Q_1$  e  $Q_2$  com cargas  $+q$  e  $-q$ , respectivamente, separadas por uma distância fixa  $2d$ . Pode-se traçar um segmento de reta que une as duas cargas puntuais. Assim, o ponto médio deste segmento é tomado como a origem de um eixo coordenado, que é paralelo ao segmento de reta. Desejamos calcular o potencial elétrico produzido por este sistema em um ponto  $P$  do espaço. Este ponto é localizado por um vetor  $\mathbf{r}$  que faz um ângulo  $\theta$  com o eixo coordenado. Este sistema pode ser visualizado na fig.(1).

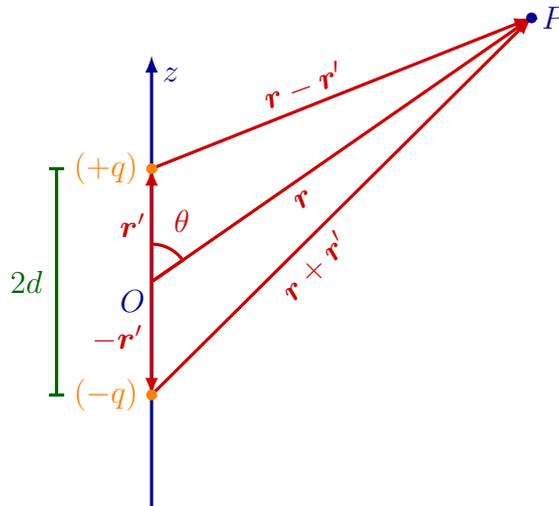


Figura 1 – O dipolo elétrico.

Para calcularmos o potencial em  $P$ , utilizaremos o princípio da superposição que nos diz que o potencial em  $P$  será o potencial devido a carga puntual  $Q_1$  adicionado ao potencial devido a carga puntual  $Q_2$ . Isto é válido pois as equações da Eletrodinâmica de Podolsky são lineares. Sendo assim, temos que

$$\varphi_d(\mathbf{r}) = \varphi_1(\mathbf{r}) + \varphi_2(\mathbf{r}), \quad (3.39)$$

de forma que o índice subscrito  $d$  indica o potencial de dipolo e  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  representam os potenciais gerados pelas cargas  $Q_1$  e  $Q_2$ , respectivamente. Utilizando a eq.(3.18), temos que

$$\varphi_d(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi} \left[ \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} - \frac{1}{\|\mathbf{r} + \mathbf{r}'\|} + \frac{\exp(-m\|\mathbf{r} + \mathbf{r}'\|)}{\|\mathbf{r} + \mathbf{r}'\|} - \frac{\exp(-m\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right], \quad (3.40)$$

com  $\mathbf{r}' = d\hat{\mathbf{z}}$ .

Note que eq.(3.40) é exata, isto é, ela fornece exatamente o valor do potencial em  $P$ . Contudo, nosso interesse se volta para regiões do espaço muito distantes do dipolo elétrico e gostaríamos de analisar como é o potencial em tais regiões. Neste contexto aparece a seguinte pergunta: Como é possível dizer que determinado ponto  $P$  do espaço está muito distante de uma distribuição de cargas genérica de tamanho finito? A resposta para esta pergunta é que se a **maior distância** entre dois elementos carregados da distribuição de cargas (cargas pontuais ou elementos infinitesimais de volume carregado, no caso de distribuições contínuas de carga) é **muito menor** que a **mínima distância** entre o ponto  $P$  e um elemento carregado da distribuição de cargas, então é razoável dizer que  $P$  está muito afastado da distribuição de cargas. Esta é a chamada *Condição de Aproximação Multipolar* e será usada intensivamente neste capítulo. Podemos sintetizá-la da seguinte forma

**Condição de Aproximação Multipolar - Caso Eletrostático 1.** *Seja uma distribuição de cargas que se encontra em um determinado volume finito  $W$  do espaço, este que é simplesmente conexo. O volume  $W$  é o menor volume que contém todos os elementos de carga. As distâncias (euclidianas) entre dois pontos arbitrários  $a$  e  $b$  de  $W$  e entre um ponto arbitrário  $c$  de  $W$  e um ponto  $P$  do espaço são denotadas por  $d(a, b)$  e  $d(c, P)$ , respectivamente. Para os casos que trataremos estas distâncias são números reais positivos. Sejam também dois conjuntos  $X$  e  $Y$  definidos como*

$$X = \{d(w_1, w_2) \mid w_1, w_2 \in W\}, \quad Y = \{d(w_3, P) \mid w_3 \in W \text{ e } P \in \mathbb{R}^3\}.$$

*Desta forma, quando o ponto  $P$  satisfizer a seguinte relação*

$$\frac{\max X}{\min Y} \ll 1, \quad (3.41)$$

*diremos que  $P$  está muito afastado de  $W$ .*

A ideia intuitiva desta condição é comparar o “tamanho” da distribuição de cargas com a distância desta até o ponto onde se deseja calcular o potencial.

Aplicando a condição de aproximação multipolar para o dipolo elétrico, temos que

$$\frac{2r'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \ll 1. \quad (3.42)$$

Podemos melhorar esta expressão. Sabemos que dados dois números reais  $x$  e  $y$ , tais que  $x > 0$ ,  $y > 0$  e  $x > y$ , então  $x^2 > y^2$ . Assim, como  $r' > 0$  e  $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| > 0$ , então temos que

$$4r'^2 \ll \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^2. \quad (3.43)$$

Utilizando a definição de norma, temos que a expressão (3.43) é equivalente a

$$3 \left( \frac{r'}{r} \right)^2 + 2 \left( \frac{r'}{r} \right) \cos(\theta) \ll 1, \quad (3.44)$$

com  $\theta$  o ângulo entre  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$ . Sabe-se que o módulo da função cosseno é menor ou igual a unidade. Desta forma, valem as seguintes inequações

$$3 \left( \frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \left( \frac{r'}{r} \right) \leq 3 \left( \frac{r'}{r} \right)^2 + 2 \left( \frac{r'}{r} \right) \cos(\theta) \leq 3 \left( \frac{r'}{r} \right)^2 + 2 \left( \frac{r'}{r} \right). \quad (3.45)$$

Portanto, se  $r$  e  $r'$  satisfizerem a seguinte inequação

$$3 \left( \frac{r'}{r} \right)^2 + 2 \left( \frac{r'}{r} \right) \ll 1, \quad (3.46)$$

então a condição de aproximação multipolar (3.42) será satisfeita.

Sabemos que  $r'/r > 0$ , pois  $r > 0$  e  $r' > 0$ . Assim, como  $3(r'/r) > 2(r'/r)$ , então basta que  $r$  e  $r'$  satisfaçam

$$3 \left( \frac{r'}{r} \right)^2 + 3 \left( \frac{r'}{r} \right) \ll 1, \quad (3.47)$$

para que a condição de aproximação multipolar (3.42) seja mantida. A inequação dada em (3.47) é equivalente a

$$\left( \frac{r'}{r} \right) + 1 \ll \frac{r}{3r'}. \quad (3.48)$$

Pelo fato de que  $r'/r + 1 > 1$ , pois  $r'/r > 0$ , mostra-se que a seguinte inequação

$$\frac{r'}{r} \ll 1 \quad (3.49)$$

garante que a condição de aproximação multipolar dada em (3.42) seja realizada.

Desta forma, podemos expandir  $\varphi_d(\mathbf{r})$  em uma série de Taylor de  $r'/r$  em torno de zero e aproximá-la até os termos lineares  $r'/r$ . Para tanto, sabemos que da definição de norma

$$\frac{1}{\|\mathbf{r} \pm \mathbf{r}'\|} = \frac{1}{r \sqrt{1 + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 \pm 2 \left( \frac{r'}{r} \right) \cos(\theta)}} \quad (3.50)$$

e também

$$\frac{\exp(-m\|\mathbf{r} \pm \mathbf{r}'\|)}{\|\mathbf{r} \pm \mathbf{r}'\|} = \frac{1}{r} \frac{\exp\left[-mr\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \pm 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos(\theta)}\right]}{\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \pm 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos(\theta)}}. \quad (3.51)$$

Expandindo as expressões das eq.(3.50) e (3.51) em séries de Taylor de  $r'/r$  em torno de zero, temos que

$$\frac{1}{\|\mathbf{r} \pm \mathbf{r}'\|} \approx \frac{1}{r} \left[1 \mp \left(\frac{r'}{r}\right)\cos(\theta)\right] \quad (3.52)$$

e

$$\frac{\exp(-m\|\mathbf{r} \pm \mathbf{r}'\|)}{\|\mathbf{r} \pm \mathbf{r}'\|} \approx \frac{\exp(-mr)}{r} \left[1 \mp (1 + mr)\left(\frac{r'}{r}\right)\cos(\theta)\right]. \quad (3.53)$$

Substituindo (3.53) e (3.52) em (3.40) é possível mostrar que

$$\varphi_d(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi} \frac{2q}{r} \left\{ \left(\frac{r'}{r}\right) - 3(mr)\left(\frac{mr'}{3}\right) \left[ \left(\frac{\exp(-mr)}{mr}\right) \left(1 + \frac{1}{mr}\right) \right] \right\} \cos(\theta). \quad (3.54)$$

O formato desta expressão é muito interessante, como será visto em breve. Entretanto, podemos escrevê-la da seguinte forma

$$\varphi_d(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{1}{r}\right) - m \left[ \exp(-mr) \left(1 + \frac{1}{mr}\right) \right] \right\} \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}. \quad (3.55)$$

com  $\hat{\mathbf{r}}$  um vetor unitário na direção de  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{p}$  o vetor *momento de dipolo elétrico* da distribuição de cargas, que é dado como

$$\mathbf{p} = 2r'q\hat{\mathbf{z}}. \quad (3.56)$$

Para o potencial do dipolo elétrico, é possível mostrar os limites

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi_d(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.57)$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \varphi_d(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (3.58)$$

O campo elétrico do dipolo elétrico é obtido de  $\mathbf{E}_d(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi_d(\mathbf{r})$ . Sob a condição de aproximação multipolar, temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_d(\mathbf{r}) \approx & \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left[ (3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}) + (mr)^2 \left(\frac{\exp(-mr)}{mr}\right) \left(1 + \frac{1}{mr}\right) \mathbf{p} \right. \\ & \left. - (mr)^3 \left(\frac{\exp(-mr)}{mr}\right) \left(1 + \frac{3}{mr} + \frac{3}{mr}\right) (\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \right] \end{aligned} \quad (3.59)$$

que naturalmente satisfaz os seguintes limites

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_d(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (3.60)$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_d(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}]. \quad (3.61)$$

que são resultados obtidos via Eletrostática de Maxwell.

Podemos investigar qual é a energia potencial de um dipolo elétrico na presença de um potencial elétrico externo. Para tanto, denotaremos o potencial elétrico externo por  $\varphi_{ext}(\mathbf{r})$  e este será medido de um referencial  $O'$ . As cargas  $Q_1$  e  $Q_2$  são localizadas neste referencial pelos vetores  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r} - 2\mathbf{r}'$ . Desta forma, temos que

$$U = q\varphi_{ext}(\mathbf{r}) - q\varphi_{ext}(\mathbf{r} - 2\mathbf{r}'). \quad (3.62)$$

Usando a condição de aproximação multipolar, podemos expandir  $\varphi_{ext}(\mathbf{r} - 2\mathbf{r}')$  em uma série de Taylor em torno de zero e truncar a série até os termos lineares em  $\mathbf{r}'$ . Assim,

$$\varphi_{ext}(\mathbf{r} - 2\mathbf{r}') = \varphi_{ext}(\mathbf{r}) - 2\mathbf{r}' \cdot \nabla \varphi_{ext}(\mathbf{r}). \quad (3.63)$$

Logo, observando que podemos escrever  $\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi_{ext}(\mathbf{r})$ , temos

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}). \quad (3.64)$$

O estudo do dipolo elétrico na Eletrostática de Podolsky serve como ensaio para o que virá na próxima seção: o estudo da expansão multipolar para o caso de densidade genérica de cargas.

### 3.3.3 Expansão Multipolar na Eletrostática

Como já mencionado, a motivação para estudarmos a expansão multipolar é a possibilidade de analisarmos o comportamento de um potencial, cuja análise seja complicada, por aproximações conhecidas, como o potencial devido a um monopolo elétrico (carga puntual) ou o potencial devido a um dipolo elétrico. Para realizar as aproximações, é necessário impor a condição de aproximação multipolar na função de Green dada pela eq.(3.17), entre outros detalhes. Nosso ponto de partida é o potencial elétrico devido a uma distribuição genérica de cargas.

Seja um potencial  $\varphi$  devido a uma densidade de carga genérica  $\rho$ . Sabemos que  $\varphi$  satisfaz a eq.(3.9). A maneira de se resolver tal equação é pelo método das Funções de Green. A solução geral para esta equação diferencial, como mostrado na eq.(3.15), é

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{\Psi} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d\tau', \quad (3.65)$$

com  $\Psi$  o volume (finito) que contém a distribuição de carga e

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} - \frac{\exp(-m\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right]. \quad (3.66)$$

Existem duas questões que precisam ser discutidas. A primeira é sobre a condição de aproximação multipolar para o caso genérico e a segunda é sobre a implementação desta condição. Trataremos as duas questões a seguir.

Sabemos que da definição da condição de aproximação multipolar,  $\max X$  é a maior distância entre dois pontos quaisquer de  $\Psi$ . Sendo  $\Psi$  um volume finito, o mesmo sempre pode ser encerrado dentro de uma esfera de raio finito. Seja  $W$  a esfera com menor diâmetro que encerra completamente  $\Psi$ . Conseqüentemente, o diâmetro de  $W$  é igual a  $\max X$ . Desta forma, para determinar a condição de aproximação multipolar, trocaremos de análise feita sob um volume genérico  $\Psi$  pela análise sob uma esfera  $W$ .

Agora, seja  $R_d$  o raio da esfera  $W$ . Chamaremos  $R_d$  de raio da distribuição de cargas. A condição de aproximação multipolar aplicada neste caso resulta

$$\frac{2R_d}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \ll 1. \quad (3.67)$$

Para os casos em que o centro da esfera é *próximo*<sup>4</sup> da origem do sistema de coordenadas de  $\mathbf{r}'$ , temos que  $r' \lesssim R_d$  e podemos escrever

$$\frac{2r'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \ll 1. \quad (3.68)$$

Como mostrado anteriormente, a inequação (3.68) é equivalente a

$$\frac{r'}{r} \ll 1. \quad (3.69)$$

Esta é a condição de aproximação multipolar para o caso de uma distribuição genérica de cargas.

A outra questão é sobre a implementação da aproximação multipolar na Função de Green. Na teoria de Maxwell, a implementação segue o seguinte roteiro: Primeiro, procura-se uma representação da Função de Green em termos de uma série, a fim de truncá-la. A busca por esta representação resulta em uma série de potências em  $r'/r$ , fazendo com que a própria expressão da condição de aproximação multipolar para o caso genérico seja suficiente para truncar a soma. Na teoria de Podolsky, a busca por uma representação da Função de Green resulta em uma série em que a condição de aproximação multipolar não pode ser aplicada diretamente, nos obrigando a obter expressões que sejam equivalentes da condição de aproximação multipolar, a fim de utilizarmos a série obtida. Detalharemos isto agora.

Para implementar a condição de aproximação multipolar, nosso primeiro passo é

<sup>4</sup> Para este caso estamos definindo *próximo* da seguinte maneira: Sejam  $O$  o centro da esfera  $W$  e  $O'$  a origem do sistema de coordenadas  $\mathbf{r}'$ . Se  $d(O, O') \ll R_d$ , então diremos que  $O$  está próximo de  $O'$ .

escrever  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  em termos de uma série. Da teoria de funções especiais, nossa busca retornou as seguintes expansões

$$\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = \frac{1}{r_{>}} \sum_{l=0}^{+\infty} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^l P_l(\cos \gamma), \quad (3.70)$$

e

$$\frac{\exp(-m\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = m \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) i_l(mr_{<}) k_l(mr_{>}) P_l(\cos \gamma), \quad (3.71)$$

sendo que  $r_{>} \equiv$  Maior de  $(r, r')$ ,  $r_{<} \equiv$  Menor de  $(r, r')$ ;  $i_l$  e  $k_l$  são as Funções Esféricas Modificadas de Bessel de ordem  $l$  de primeira e segunda espécie, respectivamente;  $P_l$  é o Polinômio de Legendre de grau  $l$  e  $\gamma$  é o menor ângulo entre  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$ . A demonstração completa da eq.(3.71) se encontra no Apêndice B desta dissertação.

Muitas são as representações destas funções especiais, mas as que nos interessam são apresentadas abaixo.

$$i_l(x) = 2^l x^l \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(s+l)!}{s! [2(s+l)+1]!} x^{2s}, \quad (3.72)$$

$$k_l(y) = \frac{\exp(-y)}{y} \sum_{r=0}^l \frac{(l+r)!}{r!(l-r)!} \frac{1}{(2y)^r}, \quad (3.73)$$

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l} (z^2 - 1)^l. \quad (3.74)$$

É possível mostrar que tanto  $i_l$  quanto  $P_l$  têm paridade  $(-1)^l$ , indicando que, para  $l$  par ou ímpar, serão polinômios (finitos ou infinitos) cujas potências serão pares ou ímpares, respectivamente. Para uma referência sobre as Funções de Bessel e os Polinômios de Legendre a nível desta dissertação, veja a referência [28]. Referências completas sobre Funções de Bessel e Polinômios de Legendre são encontradas em [29,30], respectivamente. Assim, concluímos que uma representação da função de Green em termos de uma série infinita é

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{+\infty} \left[ \left( \frac{r'}{r} \right)^l - (2l+1)(mr) i_l(mr') k_l(mr) \right] P_l(\cos \gamma). \quad (3.75)$$

A eq.(3.75) mostra que as Funções de Bessel separam as variáveis  $r$  e  $r'$ , nos impossibilitando de aplicar a condição de aproximação multipolar diretamente. Contudo, ainda podemos utilizar a eq.(3.75). O que precisamos determinar é uma forma equivalente de aplicar a condição de aproximação multipolar. Obviamente, esta maneira equivalente é feita por meio da aplicação de uma expressão diferente de (3.69). Nossa busca resultou nas seguintes expressões

$$mr' \ll 1 \quad \text{e} \quad mr \gtrsim 1. \quad (3.76)$$

Observe que (3.76) impõe um limite superior para  $r'$  e um limite inferior para  $r$ . Estes limites indicam que o raio da distribuição de cargas deve ser muito menor que o comprimento de Podolsky, enquanto que  $r$  só pode ser maior ou da ordem do mesmo comprimento. Estas expressões apresentam uma regime – de comprimento – para uma eventual verificação experimental, que claramente se relaciona com o comprimento característico da teoria.

Mesmo com a expressão da condição de aproximação multipolar determinando relações para  $mr'$  e  $mr$  separadamente, ainda assim não podemos fazer a expansão multipolar. Isto porque não conseguimos garantir que, dado um valor para o contador  $l$ , o termo de ordem  $l$  é muito maior que o de ordem  $l + 1$ , isto é, não conseguimos mostrar que

$$\frac{T_l(r, r')}{T_{l+1}(r, r')} \gg 1, \quad (3.77)$$

com

$$T_l(r, r') = \left[ \left( \frac{r'}{r} \right)^l - (2l + 1)(mr)i_l(mr')k_l(mr) \right] P_l(\cos \gamma), \quad l \in \mathbb{N}. \quad (3.78)$$

A fim de usarmos esta representação da função de Green, é preciso reorganizar a série. Todo o processo de reorganização da série se encontra no Apêndice C deste trabalho. Realizado o processo de reorganização da série, temos que  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  pode ser escrita como

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{+\infty} V_l(r, r', m), \quad (3.79)$$

com

$$\begin{aligned} V_l(r, r', m) = & \left( \frac{r'}{r} \right)^l P_l(\cos \gamma) \\ & - (mr)(mr')^l \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \frac{2^{\bar{n}} (2\bar{n} + 1) \left( \lfloor \frac{l}{2} \rfloor - n + \bar{n} \right)!}{\left( \lfloor \frac{l}{2} \rfloor - n \right)! \left[ 2 \left( \bar{n} + \lfloor \frac{l}{2} \rfloor - n \right) + 1 \right]!} k_{\bar{n}}(mr) P_{\bar{n}}(\cos \gamma), \end{aligned} \quad (3.80)$$

com

$$\bar{n} = 2n + \left[ \frac{1 - (-1)^l}{2} \right] \quad \text{e} \quad \left[ \frac{l}{2} \right] = \frac{2l - 1 + (-1)^l}{4}. \quad (3.81)$$

Deste modo, a implementação da condição de aproximação multipolar se torna possível. Como comentado, (3.76) garante diretamente o truncamento sob a justificativa que  $(r'/r)^l \gg (r'/r)^{l+1}$ , na parte de  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  que independe de  $m$ . Na parte de  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  que depende de  $m$  temos que os Polinômios de Legendre não contribuem para a análise, pois  $|P_l(\cos \gamma)| \leq 1$ ,  $\forall l \in \mathbb{N}$ ,  $\forall \gamma \in \mathbb{R}$ . Assim, quando analisa-se o termo de ordem  $l$  da soma infinita, o que se tem é  $(mr')^l$  multiplicado por um somatório (em  $n$ , para diferenciar de

$l$ ) de constantes multiplicativas que dependem de  $n$  e  $l$ , e as funções  $k_n$ . Disso segue que, como  $k_n$  é decrescente para qualquer  $n$ , basta analisarmos  $k_n$  em seu maior valor, o que equivale a calcularmos  $k_n$  no menor valor possível de seu domínio. Este valor é definido pela condição de aproximação multipolar e corresponde a  $r$  da ordem do comprimento de Podolsky. Após organizar a expressão, restam apenas  $(mr')^l$  multiplicado por constantes que dependem de  $l$ . Apesar do comportamento crescente destas constantes com relação a  $l$ , a condição de aproximação multipolar aplicada em  $(mr')^l$  faz com que o termo  $l$  ainda seja muito maior que o termo de  $l + 1$ . Desta forma, mostra-se que  $V_l \gg V_{l+1}$ .

Portanto, podemos escrever  $\varphi(\mathbf{r})$  da seguinte forma

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{+\infty} \int_{\Xi} V_l(r, r', m) \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad (3.82)$$

e, sem perda de generalidade, voltamos a integração para todo o espaço, motivados pela eq.(3.31).

Podemos explorar alguns termos desta série. O termo que corresponde ao contador  $l = 0$  é chamado de *Monopolo* elétrico e dado por

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \int_{\Xi} [1 - (mr)k_0(mr)] \rho(\mathbf{r}') d\tau', \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{[1 - \exp(-mr)]}{r} \int_{\Xi} \rho(\mathbf{r}') d\tau', \\ &= \frac{q}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} - \frac{\exp(-mr)}{r} \right], \end{aligned} \quad (3.83)$$

com  $q = \int_{\Xi} \rho(\mathbf{r}') d\tau'$  a quantidade de carga da distribuição. O nome é escolhido por causa de sua semelhança ao potencial de uma carga puntual localizada na origem e é também análoga à eq.(3.18). O primeiro termo não-nulo da expansão é chamado de termo *dominante* da expansão multipolar.

O termo correspondente a  $l = 1$  é chamado de *Dipolo* elétrico.

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \int_{\Xi} \left[ \left( \frac{r'}{r} \right) \cos(\gamma) - (mr)(mr')k_1(mr) \cos(\gamma) \right] \rho(\mathbf{r}') d\tau', \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{1}{r} \right) - m \exp(-mr) \left( 1 + \frac{1}{mr} \right) \right] \int_{\Xi} r' \cos(\gamma) \rho(\mathbf{r}') d\tau'. \end{aligned} \quad (3.84)$$

De imediato, vemos que

$$r' \cos(\gamma) = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'. \quad (3.85)$$

Logo,

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{1}{r} \right) - m \exp(-mr) \left( 1 + \frac{1}{mr} \right) \right] \hat{\mathbf{r}} \cdot \int_{\Xi} \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau', \quad (3.86)$$

pois a integral é na variável  $\mathbf{r}'$ . Definiremos a seguinte integral como o *momento de dipolo* da distribuição

$$\mathbf{p} = \int_{\Xi} \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau'. \quad (3.87)$$

Deste modo, O termo de dipolo elétrico da distribuição é dado então por

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \left[ \left( \frac{1}{r} \right) - m \exp(-mr) \left( 1 + \frac{1}{mr} \right) \right] \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}, \quad (3.88)$$

que é a mesma expressão obtida na eq.(3.55). Os termos referentes a  $l = 2$  e  $l = 3$  são chamados de *Quadrupolo* elétrico e *Octopolo* elétrico da distribuição de cargas, e assim continuam.

Um comentário sobre o momento de dipolo da distribuição de cargas é que a eq.(3.87) é uma generalização do conceito desenvolvido na seção 3.3.2 . Isto fica claro quando identificamos a densidade de carga do dipolo da fig.(1) como

$$\rho_d(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}' - d\hat{\mathbf{z}}) - q\delta(\mathbf{r}' + d\hat{\mathbf{z}}). \quad (3.89)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int_{\Xi} \mathbf{r}' \rho_d(\mathbf{r}') d\tau' = \int_{\Xi} \mathbf{r}' [q\delta(\mathbf{r}' - d\hat{\mathbf{z}}) - q\delta(\mathbf{r}' + d\hat{\mathbf{z}})] d\tau' = qd\hat{\mathbf{z}} - q(-d\hat{\mathbf{z}}), \\ &= 2qd\hat{\mathbf{z}}, \end{aligned} \quad (3.90)$$

que é o mesmo momento de dipolo obtido em (3.56).

Para testarmos a eq.(3.82), consideraremos um exemplo simples. Calcularemos os potenciais referentes aos termos de monopolo, dipolo e quadrupolo para um disco carregado, cuja densidade superficial de carga seja uniforme.

### 3.3.4 Exemplo: Expansão Multipolar do Potencial Escalar Elétrico de um Disco Carregado

Considere um disco carregado de espessura desprezível e raio  $R$ , com uma densidade superficial de carga constante  $\sigma$ . O disco se encontra no plano  $x - y$  do sistema de coordenadas adotado e seu centro coincide com a origem do sistema de coordenadas. Veja a fig.(2).

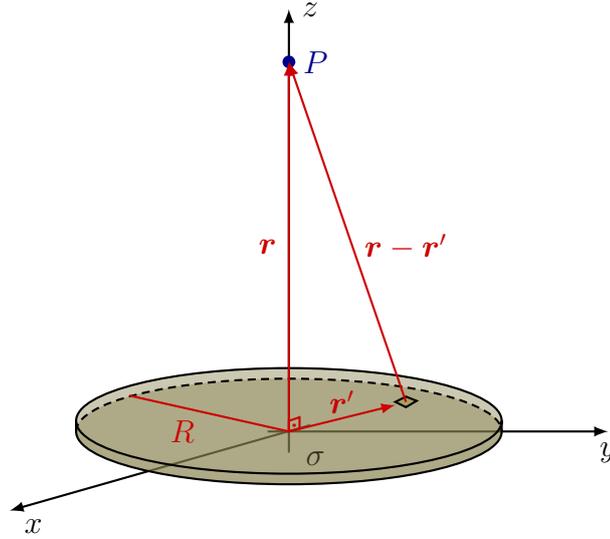


Figura 2 – Disco carregado.

Desejamos calcular o potencial em  $P$  que, por simplicidade, se encontra no eixo de simetria do disco, que coincide com o eixo  $z$ . Como sempre, o vetor  $\mathbf{r}$  localiza o ponto no qual queremos calcular o potencial e  $\mathbf{r}'$  localiza um elemento de carga. A maneira de se obter é dada pela eq.(3.15). Explicitamente,

$$\varphi_{disco}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Xi} \left( \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} - \frac{\exp(-m\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) \rho(\mathbf{r}') d\tau'. \quad (3.91)$$

com

$$\rho(\mathbf{r}') = \sigma \Theta(R - r') \delta(z), \quad (3.92)$$

e  $\Theta$  é a função de Heaviside. Desta forma, uma integração em coordenadas cilíndricas resulta em

$$\varphi_{disco}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{2\pi R} \left[ \frac{\sqrt{R^2 + r^2}}{R} - \frac{r}{R} + \frac{\exp(-m\sqrt{R^2 + r^2}) - \exp(-mr)}{mR} \right]. \quad (3.93)$$

com  $Q = \pi R^2 \sigma$ . Note que eq.(3.93) é exata, isto é, ela fornece exatamente o valor do potencial em  $P$ . Entretanto, nosso interesse é analisar o comportamento de  $\varphi_{disco}$  em regiões do espaço muito distantes do disco. Isto quer dizer que devemos fazer a expansão multipolar para o potencial do disco. Para tanto, precisamos da condição de aproximação multipolar para o disco. A aplicação da condição multipolar resulta

$$\frac{2R}{r} \ll 1. \quad (3.94)$$

Como  $R < 2R$ , então podemos escrever

$$\frac{R}{r} \ll 1. \quad (3.95)$$

Esta é a condição de aproximação multipolar para o disco.

A fim de aplicar a condição (3.95), reescreveremos a eq.(3.93) da seguinte forma

$$\varphi_{disco}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{R} \left[ \left( \frac{r}{R} \right) \sqrt{1 + \left( \frac{R}{r} \right)^2} - \left( \frac{r}{R} \right) + \frac{\exp \left[ -mr \sqrt{1 + \left( \frac{R}{r} \right)^2} \right] - \exp(-mr)}{mR} \right]. \quad (3.96)$$

Desta forma, expandindo (3.96) em séries de Taylor de  $R/r$  e truncando nos termos de potência 4 em  $R/r$  sob a condição de aproximação multipolar, temos que

$$\varphi_{disco}(\mathbf{r}) \approx \frac{Q}{4\pi r} [1 - \exp(-mr)] - \frac{Q}{16\pi r} [1 - \exp(-mr) (1 + mr)] \left( \frac{R}{r} \right)^2. \quad (3.97)$$

O termo proporcional a  $(R/r)^0$  da eq.(3.97) é associado ao termo de monopolo elétrico. Já o termo proporcional a  $(R/r)^1$  é nulo, ou seja,  $\varphi_{disco}$  não possui o termo de dipolo elétrico. O termo proporcional  $(R/r)^2$  é associado ao termo de quadrupolo elétrico.

Podemos comparar a eq.(3.97) com o potencial obtido pela eq.(3.82). Para isso, precisamos calcular os termos de monopolo, dipolo e quadrupolo da expansão. Vejamos estes cálculos agora.

Seja o potencial devido ao disco dado pela eq.(3.82) que denotaremos por  $\tilde{\varphi}_{disco}$ . Desejamos escrever este potencial truncando até de quadrupolo. Para tanto, precisamos impor a condição de aproximação multipolar dado em (3.76). Desta forma, aplicando a condição de aproximação multipolar (3.76) em (3.82) temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{disco}(\mathbf{r}) \approx & \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \left( \int_{\Xi} V_0(r, r', m) \rho(\mathbf{r}') d\tau' + \int_{\Xi} V_1(r, r', m) \rho(\mathbf{r}') d\tau' \right. \\ & \left. + \int_{\Xi} V_2(r, r', m) \rho(\mathbf{r}') d\tau' \right), \end{aligned} \quad (3.98)$$

Calcularemos primeiro o termo de monopolo. Logo, usando a eq.(3.80)

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{disco}^{(0)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \int_{\Xi} V_0(r, r', m) \rho(\mathbf{r}') d\tau', \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \int_{\Xi} \left( \left( \frac{r'}{r} \right)^0 P_0(\cos \gamma) - (mr)(mr')^0 k_0(mr) P_0(\cos \gamma) \right) \rho(\mathbf{r}') d\tau', \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \int_{\Xi} [1 - (mr)k_0(mr)] \rho(\mathbf{r}') d\tau', \end{aligned}$$

$$\tilde{\varphi}_{disco}^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r} [1 - (mr)k_0(mr)] \int_{\Xi} \rho(\mathbf{r}') d\tau'. \quad (3.99)$$

A integral da eq.(3.99) é resolvida em coordenadas cilíndricas

$$\int_{\Xi} \rho(\mathbf{r}') d\tau' = \sigma\pi R^2 = Q. \quad (3.100)$$

Logo, usando a eq.(3.73), temos

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{disco}^{(0)}(\mathbf{r}) &= \frac{Q}{4\pi r} [1 - (mr)k_0(mr)], \\ &= \frac{Q}{4\pi r} \left[ 1 - (mr) \left( \frac{\exp(-mr)}{mr} \right) \right], \\ &= \frac{Q}{4\pi r} [1 - \exp(-mr)] \end{aligned} \quad (3.101)$$

Agora, o termo de dipolo. Usando (3.80) temos

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{disco}^{(1)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \int_{\Xi} V_1(r, r', m) \rho(\mathbf{r}') d\tau', \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \int_{\Xi} \left[ \left( \frac{r'}{r} \right) P_1(\cos \gamma) - (mr)(mr')k_1(mr)P_1(\cos \gamma) \right] \rho(\mathbf{r}') d\tau'. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Note na fig.(2) que  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ . Logo  $P_1(\cos \gamma) = 0$  e

$$\tilde{\varphi}_{disco}^{(1)}(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.103)$$

Usando a eq.(3.80), o termo de quadrupolo é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{disco}^{(2)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \int_{\Xi} V_2(r, r', m) \rho(\mathbf{r}') d\tau', \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \int_{\Xi} \left[ \left( \frac{r'}{r} \right)^2 P_2(\cos \gamma) - \frac{1}{3}(mr)(mr')^2 k_2(mr)P_2(\cos \gamma) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6}(mr)(mr')^2 k_0(mr)P_0(\cos \gamma) \right] \rho(\mathbf{r}') d\tau'. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Como  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , então  $P_2(\cos \gamma) = -\frac{1}{2}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{disco}^{(2)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{r^2} \int_{\Xi} r'^2 \left( -\frac{1}{2} \right) \rho(\mathbf{r}') d\tau' - \frac{1}{3} m^3 r k_2(mr) \int_{\Xi} r'^2 \left( -\frac{1}{2} \right) \rho(\mathbf{r}') d\tau' \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6} m^3 r k_0(mr) \int_{\Xi} r'^2 \rho(\mathbf{r}') d\tau' \right], \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \left[ -\frac{1}{2r^2} + \frac{1}{6} m^3 r k_2(mr) - \frac{1}{6} m^3 r k_0(mr) \right] \int_{\Xi} r'^2 \rho(\mathbf{r}') d\tau'. \end{aligned} \quad (3.105)$$

A integral da eq.(3.105) é resolvida em coordenadas cilíndricas

$$\int_{\Xi} r'^2 \rho(\mathbf{r}') d\tau' = \frac{\sigma \pi R^4}{2} = \frac{QR^2}{2}. \quad (3.106)$$

Logo, usando a eq.(3.73), temos

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{disco}^{(2)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi r} \left[ -\frac{1}{2r^2} + \frac{1}{6} m^3 r k_2(mr) - \frac{1}{6} m^3 r k_0(mr) \right] \frac{QR^2}{2}, \\ &= -\frac{Q}{16\pi r} \left[ 1 - \frac{1}{3} (mr)^3 k_2(mr) + \frac{1}{3} (mr)^3 k_0(mr) \right] \left( \frac{R}{r} \right)^2, \\ &= -\frac{Q}{16\pi r} \left[ 1 - \frac{1}{3} (mr)^3 \left[ \left( \frac{\exp(-mr)}{mr} \right) \left( 1 + \frac{3}{mr} + \frac{3}{(mr)^2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} (mr)^3 \left( \frac{\exp(-mr)}{mr} \right) \right] \left( \frac{R}{r} \right)^2, \\ &= -\frac{Q}{16\pi r} [1 - \exp(-mr) (1 + mr)] \left( \frac{R}{r} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Agrupando os resultados (3.101), (3.103) e (3.107) em (3.98) temos

$$\tilde{\varphi}_{disco}(\mathbf{r}) \approx \frac{Q}{4\pi r} [1 - \exp(-mr)] - \frac{Q}{16\pi r} [1 - \exp(-mr) (1 + mr)] \left( \frac{R}{r} \right)^2. \quad (3.108)$$

Portanto, sob a condição de aproximação multipolar,  $\tilde{\varphi}_{disco} = \varphi_{disco}$ , como queríamos mostrar. Este fato mostra que a expansão multipolar usando a eq.(3.82) sob a condição de aproximação multipolar (3.76) fornece a expansão multipolar correta. A eq.(3.82) também serve para distribuições discretas de cargas, de modo que sua veracidade já foi testada nas diversas configurações de cargas pontuais do tipo dipolo elétrico e quadrupolo elétrico (linear e quadrado).

## 3.4 A Magnetostática de Podolsky

Nossa atenção se volta agora para a Magnetostática de Podolsky. Este ramo da Eletrodinâmica se propõe a estudar as propriedades de corpos que possuem correntes estacionárias de cargas. As correntes estacionárias são fontes de campos magnéticos estáticos no tempo. Iniciaremos agora o estudo das propriedades de uma corrente estacionária.

### 3.4.1 Correntes Estacionárias

Uma corrente elétrica, que denotaremos por  $I$ , é definida como a quantidade de cargas por unidade de tempo que passa em um determinado ponto. Quando uma corrente elétrica não varia com o tempo, dizemos que se trata de uma *corrente estacionária*. Se uma configuração de carga, caracterizada por uma densidade linear de carga  $\lambda$ , percorre

uma porção de um fio de comprimento  $l$  com uma velocidade  $\mathbf{v}$ , então a corrente  $I$  é dada por

$$I = \lambda v, \quad (3.109)$$

pois se o tempo para percorrer  $l$  é  $\Delta t$ , então a quantidade de carga que passar por  $l$  é  $\lambda v \Delta t$ . Daremos o nome para este tipo de corrente estacionária de *corrente linear*.<sup>5</sup>

Quando uma corrente  $\mathbf{I}$  flui por uma superfície  $S$ , ela é descrita por uma *densidade superficial de corrente*  $\mathbf{K}$ , definida da seguinte forma: Suponha que  $S$  seja dividida em inúmeras “tiras” paralelas ao fluxo de corrente. A largura das tiras é  $dl_{\perp}$ , sendo que  $\perp$  indica que este lado da tira é perpendicular ao fluxo de corrente. Como  $\mathbf{I}$  está distribuída por  $S$ , então uma tira de largura  $dl_{\perp}$  terá uma corrente  $d\mathbf{I}$ . Desta forma, a densidade superficial de corrente é definida como

$$\mathbf{K} = \frac{d\mathbf{I}}{dl_{\perp}}. \quad (3.110)$$

Em outras palavras,  $\mathbf{K}$  é o vetor de corrente por unidade de comprimento perpendicular ao fluxo. Particularmente, se a densidade superficial de carga que se move por  $S$  é  $\sigma$  e sua velocidade é  $\mathbf{v}$ , então

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}. \quad (3.111)$$

Para este tipo de corrente estacionária daremos o nome de *corrente superficial*.

Agora, considere uma corrente  $\mathbf{I}$  que flui por um volume  $V$ . A densidade de corrente volumétrica  $\mathbf{J}$  é definida do seguinte modo: Suponha que  $V$  seja dividido em inúmeros “filetes” paralelos ao fluxo de corrente. A área da base destes filetes é  $da_{\perp}$ , sendo que  $\perp$  indica que esta área é perpendicular ao fluxo de corrente. Como  $\mathbf{I}$  está distribuída por  $V$ , então um filete com a área da base  $da_{\perp}$  terá uma corrente  $d\mathbf{I}$ . Desta forma, a densidade volumétrica de corrente é definida como

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{I}}{da_{\perp}}, \quad (3.112)$$

ou seja,  $\mathbf{J}$  é o vetor de corrente por unidade de área perpendicular ao fluxo. No caso especial de  $\mathbf{I}$  ser descrita por uma densidade volumétrica de cargas  $\rho$  com uma velocidade  $\mathbf{v}$ , então

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}. \quad (3.113)$$

Daremos o nome para este tipo de corrente estacionária de *corrente volumétrica*. Vejamos agora alguns exemplos.

<sup>5</sup> As correntes estacionárias são, na verdade, vetores. No caso de uma corrente linear, o trajeto do fluxo de cargas é determinado pelo formato do fio e, por isso, pode-se tomar apenas a norma de  $\mathbf{I} \equiv I$ . Nos casos de correntes *superficiais* ou *volumétricas* será necessário indicá-la como um vetor para que não haja problemas de notação.

### 3.4.2 Alguns Exemplos

Neste ponto é possível determinarmos o potencial vetorial magnético de algumas configurações de correntes. Sabemos que o potencial vetorial magnético devido a uma densidade de corrente  $\mathbf{J}^6$  satisfaz a eq.(3.10). Esperamos que o mesmo tenha domínio em todo o espaço e que tenda a zero quando a distância entre o ponto onde se calcula o potencial e a localização da carga for arbitrariamente grande. Nossas expectativas se traduzem da seguinte forma

$$\text{Domínio de } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (3.114)$$

Estas condições de contorno estão bem definidas e podemos utilizar o *método das Funções de Green* para resolver a eq.(3.10). Note que a eq.(3.10) é idêntica a eq.(3.9) fazendo a correspondência  $\varphi \leftrightarrow \mathbf{A}$  e  $\rho \leftrightarrow \mathbf{J}$ , e que as condições de contorno impostas as duas equações são iguais. Desta forma, ambas as equações possuem a mesma função de Green e a solução de (3.10) é dada por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_{\Xi} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau', \quad (3.115)$$

com  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  dada pela eq.(3.17). Novamente, o sobrescrito ' indica que a integração é feita na variável  $\mathbf{r}'$ .

Vejam alguns exemplos. Considere uma carga puntual  $q$  localizada em um ponto  $P$  do espaço por um vetor  $\mathbf{r}_0$  e com velocidade  $\mathbf{v}$ , constante. Desta forma, a densidade de corrente é

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{v}. \quad (3.116)$$

Logo, substituindo (3.116) em (3.115), temos que

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi} \left( \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} - \frac{\exp(-m\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|} \right) \mathbf{v}, \quad (3.117)$$

ou seja,  $\mathbf{A}$  é proporcional a  $\mathbf{v}$  e sua constante de proporcionalidade é o potencial elétrico devido a carga puntual. De (3.5) podemos calcular o campo magnético gerado por uma carga puntual com velocidade  $\mathbf{v}$ , constante. Como  $\mathbf{A} = \varphi(\mathbf{r})\mathbf{v}$ , então

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times [\varphi(\mathbf{r})\mathbf{v}], \\ &= \varphi(\mathbf{r})(\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times \nabla\varphi(\mathbf{r}), \\ &= \mathbf{v} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (3.118)$$

sendo que  $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ , pois  $\mathbf{v}$  é constante e  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r})$  é o campo elétrico gerado pela carga puntual. Pode-se mostrar que a eq.(3.118) é uma aproximação para cargas

<sup>6</sup> Aqui, a escolha do tipo de corrente foi arbitrária. Poderíamos ter também uma corrente superficial ou ainda uma corrente linear.

não-relativísticas ( $v \ll 1$ ) em condições nos quais o retardamento pode ser desprezado.

Consideraremos agora um fio infinito pelo qual flui uma corrente  $\mathbf{I}$ . O fio se encontra sobre o eixo  $z$  do sistema de coordenadas adotado e desejamos calcular o potencial vetorial magnético a uma distância  $r$  do fio. Veja a fig.(3).

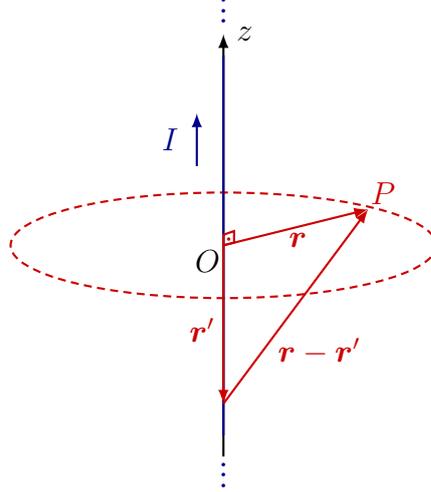


Figura 3 – Fio infinito.

Na fig.(3), o vetor  $\mathbf{r}' = -z\hat{\mathbf{z}}$  localiza um elemento de corrente e  $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$  localiza o ponto no qual queremos calcular o potencial vetorial magnético. A corrente  $\mathbf{I}$  está no mesmo sentido que o versor  $\hat{\mathbf{z}}$ . O sinal negativo em  $\mathbf{r}'$  foi colocado apenas para manter a coerência com a figura, não fazendo diferença para o resultado final, pois a integral varrerá toda a reta real.

Sendo assim, o potencial vetorial magnético  $\mathbf{A}$  é dado por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Xi} \left[ \frac{1 - \exp(-m\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right] \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau', \quad (3.119)$$

com

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = I \frac{\delta(r')}{2\pi r'} \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.120)$$

Utilizando coordenadas cilíndricas, é possível mostrar que<sup>7</sup>

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{I}{2\pi} [\ln(\alpha r) + 2K_0(mr)] \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.121)$$

sendo que  $\alpha$  é uma constante arbitrária com dimensão de inverso de comprimento e  $K_0$  é a função modificada de Bessel de segunda espécie.<sup>8</sup> Pela arbitrariedade de  $\alpha$ , a tomaremos

<sup>7</sup> Este exemplo possui um particular problema. O potencial vetorial magnético é ilimitado quando  $r$  tende a infinito, ao contrário das condições de contorno que impusemos. Isto acontece pela presença do logaritmo natural na expressão. Fisicamente falando, isto não é um problema, já que o que se é mensurável é o campo magnético. Como isto acontece neste exemplo em específico, manteremos as condições de contorno que propusemos.

<sup>8</sup> Para detalhes sobre as funções de Bessel, consulte as referências [28, 29].

com valor 1. Se  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A(r)\hat{\mathbf{z}}$ , então podemos visualizar o comportamento de  $A(r)$  por meio do gráfico dado pela fig.(4).

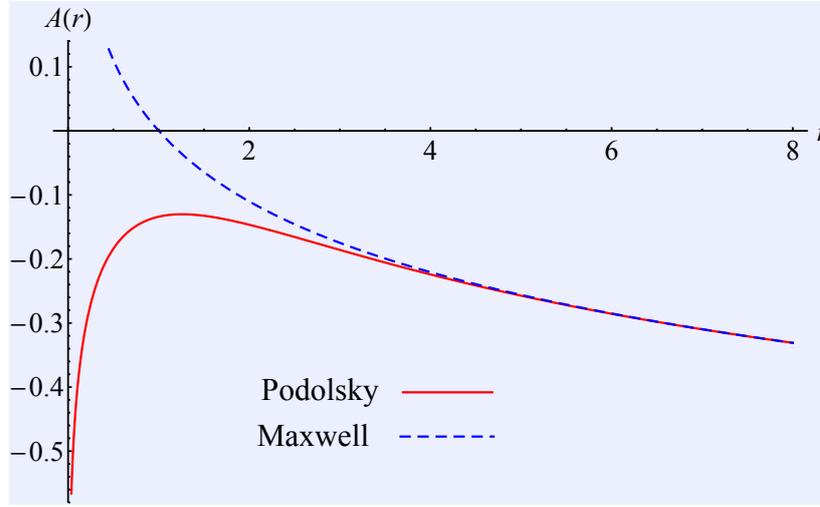


Figura 4 – Gráfico da  $A$  em função da distância  $r$ . As escalas são tais que  $m = 1$  e  $I = 1$ .

Veja que o gráfico da fig.(4) mostra que  $A$  possui um máximo. Este fato refletirá sobre o campo magnético, como veremos.

Utilizando a eq.(3.121), é possível mostrar que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} A(\mathbf{r}) = -\infty, \quad (3.122)$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} A(\mathbf{r}) = -\frac{I}{2\pi} \ln(r), \quad (3.123)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} A(\mathbf{r}) = -\infty. \quad (3.124)$$

O limite de  $m \rightarrow +\infty$  retorna o resultado obtido via teoria de Maxwell. O limite de  $r \rightarrow +\infty$  é um resultado condizente com a teoria de Maxwell. O limite de  $r \rightarrow 0$  se mostra totalmente diferente: é mesmo limite na teoria de Maxwell com sinal oposto, como mostrado na fig.(4).

Usando a eq.(3.5), podemos determinar o campo magnético  $\mathbf{B}$ . Deste modo, encontramos que

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi r} [1 - 2(mr)K_1(mr)] \hat{\phi}, \quad (3.125)$$

com  $\hat{\phi}$  o versor na direção angular. Evidentemente, se  $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(r)\hat{\phi}$ , então  $B(r)$  satisfaz os seguintes limites

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} B(\mathbf{r}) = 0, \quad (3.126)$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} B(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi r}, \quad (3.127)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} B(\mathbf{r}) = -\infty. \quad (3.128)$$

A grande diferença do esperado é o comportamento de  $B$  no limite de  $r \rightarrow 0$ . Pela teoria de Maxwell,  $B$  cresce indefinidamente perto do fio, enquanto que na teoria de Podolsky o campo  $B$  decresce indefinidamente. O comportamento de  $B$  pode ser visto na fig.(5).

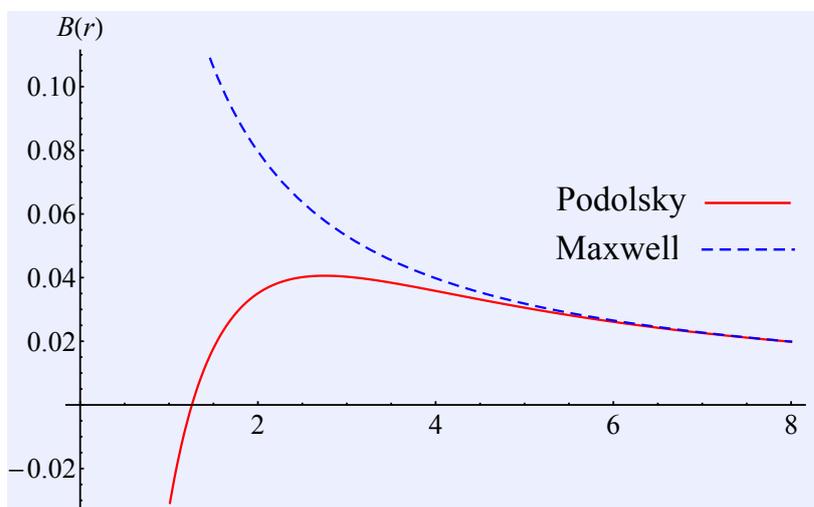


Figura 5 – Gráfico de  $B$  em função da distância  $r$ . As escalas são tais que  $m = 1$  e  $I = 1$ . O ponto de máximo é dado por  $r_{max} \approx 2,7524429118662$ . O erro na aproximação é menor que  $0,21 \times 10^{-15}$ .

Note que  $B$  possui um ponto de máximo dado por  $r_{max} \approx 2.7524429118662$ . Isto faz com que este exemplo seja um caso que possibilita uma eventual verificação experimental da teoria de Podolsky.

Considere agora uma casca esférica de raio  $R$  e com densidade superficial de cargas constante  $\sigma$ . A casca gira em torno de si com uma velocidade angular constante  $\omega$ . Desejamos calcular o potencial vetorial magnético devido a essa configuração em um ponto  $P$  localizado pelo vetor  $\mathbf{r}$ , este que faz um ângulo  $\theta$  com o eixo de rotação. Veja a fig.(6).

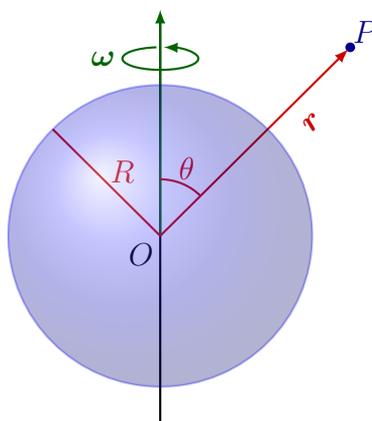


Figura 6 – Casca esférica girante.

A maneira mais prática de se adotar o sistema de coordenadas é tomando o vetor

$\mathbf{r}$  na direção do eixo  $z$  e o vetor  $\boldsymbol{\omega}$  no plano  $x - z$ , fazendo um ângulo de  $\theta$  com  $\mathbf{r}$ . Veja a fig.(7).

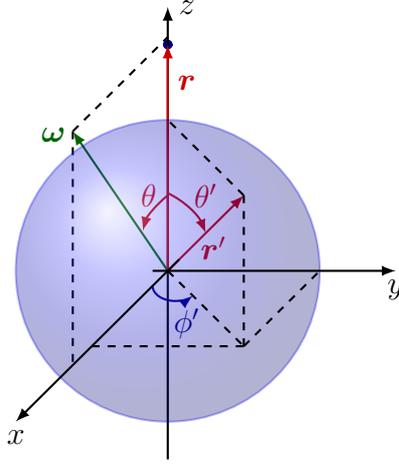


Figura 7 – Sistema de coordenadas adotado.

Sendo assim, o potencial vetorial magnético  $\mathbf{A}$  é dado por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Xi} \left[ \frac{1 - \exp(-m\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right] \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau', \quad (3.129)$$

com

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \delta(r' - R) \mathbf{K}(\mathbf{r}'). \quad (3.130)$$

A função delta serve para limitar a corrente sobre a superfície da casca esférica. Como colocado na subseção 3.4.1, se  $\mathbf{K}$  é devido ao movimento de uma porção de cargas com densidade  $\sigma$  e velocidade  $\mathbf{v}$ , então  $\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}$ . Para o nosso caso,  $\mathbf{K}$  muda em cada ponto da casca esférica, pois cada elemento de carga da casca tem uma velocidade  $\mathbf{v}'$  dada por  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ . Desta forma,

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \sigma \delta(r' - R) (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'). \quad (3.131)$$

Os vetores  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\mathbf{r}'$  são dados neste sistema de coordenadas por

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \sin(\theta) \hat{\mathbf{x}} + \omega \cos(\theta) \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.132)$$

$$\mathbf{r}' = R \sin(\theta') \cos(\phi') \hat{\mathbf{x}} + R \sin(\theta') \sin(\phi') \hat{\mathbf{y}} + R \cos(\theta') \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.133)$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r}') = & R\sigma\omega\delta(r' - R) [-\sin(\theta') \sin(\phi') \cos(\theta) \hat{\mathbf{x}} + \sin(\theta') \sin(\phi') \sin(\theta) \hat{\mathbf{z}} \\ & + (\sin(\theta') \cos(\phi') \cos(\theta) - \cos(\theta') \sin(\theta)) \hat{\mathbf{y}}]. \end{aligned} \quad (3.134)$$

Para  $r \geq R$ , uma integração em coordenadas esféricas nos mostra que o potencial vetorial magnético é dado por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{Q\omega R}{12\pi r} \left[ \left( \frac{R}{r} \right) - 3(mr)k_1(mr)i_1(mR) \right] (\hat{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{r}}), \quad (3.135)$$

com  $Q = 4\pi R^2\sigma$ . Em termos das coordenadas angulares de  $\mathbf{r}$  temos que

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{Q\omega R}{12\pi r} \left[ \left( \frac{R}{r} \right) - 3(mr)k_1(mr)i_1(mR) \right] \sin(\theta)\hat{\phi}, \quad (3.136)$$

com  $\hat{\phi}$  o versor na direção polar. É possível mostrar que  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  satisfaz os seguintes limites

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (3.137)$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{Q\omega}{12\pi} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \sin(\theta)\hat{\phi}, \quad (3.138)$$

como esperado. O campo magnético  $\mathbf{B}$  é obtido da eq.(3.5)

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ &= \frac{Q\omega R}{6\pi r^2} \left[ \left( \frac{R}{r} \right) - 3(mr)k_1(mr)i_1(mR) \right] \hat{\mathbf{z}} + \frac{Q\omega R}{12\pi r} \left[ \left( \frac{3R}{r^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - i_1(mR)m \left( (mr)k_0(mr) + 2(mr)k_2(mr) + 3k_1(mr) \right) \right] \sin(\theta)\hat{\phi}. \end{aligned} \quad (3.139)$$

Evidentemente,  $\mathbf{B}$  satisfaz os seguintes limites

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (3.140)$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{Q\omega}{6\pi} \left( \frac{R^2}{r^3} \right) \hat{\mathbf{z}} + \frac{Q\omega}{4\pi} \left( \frac{R^2}{r^3} \right) \sin(\theta)\hat{\phi}. \quad (3.141)$$

Analisando a eq.(3.139), vemos que, para  $\theta = 0$ , a componente  $\phi$  do campo magnético  $\mathbf{B}$  é nula, restando apenas a componente  $z$ , como esperado.

Para muitas configurações de correntes, o potencial vetorial magnético é muito difícil de ser obtido. Desta forma, a aproximação do potencial por meio da expansão multipolar se torna necessário. Como na Eletrostática, também é possível fazer a expansão multipolar na Magnetostática de Podolsky. Na próxima subseção, veremos como é construída a expansão multipolar para a Magnetostática e quais são os resultados que podemos retirar dela.

### 3.4.3 Expansão Multipolar na Magnetostática

A expansão multipolar na Magnetostática de Podolsky segue exatamente o mesmo roteiro realizado na subseção 3.3.3 sobre a expansão multipolar na Eletrostática de Podolsky.

Seja  $\mathbf{A}$  o potencial vetorial magnético devido a uma densidade de corrente  $\mathbf{J}$ . Sabemos que ambos se relacionam pela eq.(3.10). A solução desta equação é obtida pelo método das funções de Green. A aplicação deste método para resolver a eq.(3.10) mostra que o potencial vetorial magnético  $\mathbf{A}$  é dado pela eq.(3.115) com a função de Green dada

pela eq.(3.17).

Para implementar a expansão multipolar, é necessário definir a condição de aproximação multipolar para a Magnetostática. Para este caso, a condição é definida analogamente ao caso Eletrostático, fazendo a correspondência entre *elementos de cargas* e *elementos de correntes*. Enunciaremos agora a condição de aproximação multipolar para a Magnetostática.

**Condição de Aproximação Multipolar - Caso Magnetostático 1.** *Seja uma distribuição de correntes estacionárias que se encontra em um determinado volume finito  $W$  do espaço, este que é simplesmente conexo. O volume  $W$  é o menor volume que contém todos os elementos de correntes. As distâncias (euclidianas) entre dois pontos arbitrários  $a$  e  $b$  de  $W$  e entre um ponto arbitrário  $c$  de  $W$  e um ponto  $P$  do espaço são denotadas por  $d(a, b)$  e  $d(c, P)$ , respectivamente. Para os casos que trataremos estas distâncias são números reais positivos. Sejam também dois conjuntos  $X$  e  $Y$  definidos como*

$$X = \{d(w_1, w_2) \mid w_1, w_2 \in W\}, \quad Y = \{d(w_3, P) \mid w_3 \in W \text{ e } P \in \mathbb{R}^3\}.$$

*Desta forma, quando o ponto  $P$  satisfizer a seguinte relação*

$$\frac{\max X}{\min Y} \ll 1, \quad (3.142)$$

*diremos que  $P$  está muito afastado de  $W$ .*

Estando definido a condição de aproximação multipolar, é necessário analisar dois pontos para prosseguirmos: o primeiro ponto é referente a expressão que define a condição de aproximação multipolar para o caso de distribuições genéricas de correntes, enquanto que o segundo está relacionado com a implementação de tal condição na função de Green (3.17).

Sobre o primeiro ponto, a maneira de se obter a expressão que determinar a condição de aproximação multipolar para o caso de distribuições genéricas de correntes segue exatamente a mesma ideia apresentada na subseção 3.3.3, que utiliza a esfera de menor diâmetro que engloba todos os elementos de corrente. Para os casos no qual a origem do sistema de coordenadas adotado é próximo do centro desta esfera, mostra-se que a condição de aproximação multipolar para o caso de distribuições genéricas de correntes é

$$\frac{r'}{r} \ll 1. \quad (3.143)$$

O segundo ponto se refere a implementação da condição de aproximação multipolar na função de Green (3.17). Tal implementação depende de uma representação da função

de Green em termos de uma série infinita. A busca por esta representação nos levou a seguinte expressão

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi r} \sum_{l=0}^{+\infty} \left[ \left( \frac{r'}{r} \right)^l - (2l+1)(mr)i_l(mr')k_l(mr) \right] P_l(\cos \gamma), \quad (3.144)$$

como explicado na subseção 3.3.3. De imediato, vemos que não é possível aplicar a condição de aproximação multipolar diretamente pois a série não é uma soma de termos proporcionais a  $r'/r$ . Para utilizarmos esta representação, é necessário reescrever a condição de aproximação multipolar. Isto nos leva a

$$mr' \ll 1 \quad \text{e} \quad mr \gtrsim 1. \quad (3.145)$$

Mesmo a condição de aproximação multipolar determinando relações para  $mr'$  e  $mr$  separadamente, ainda assim não podemos fazer a expansão multipolar. Isto porque não conseguimos garantir que, dado um valor para o contador  $l$ , o termo de ordem  $l$  é muito maior que o de ordem  $l+1$ . A fim de usarmos esta representação da função de Green, é preciso reorganizar a série. A maneira de como fazer isto se encontra no Apêndice C, onde todo o processo é descrito detalhadamente. A reorganização da série resulta na seguinte expressão

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi r} \sum_{l=0}^{+\infty} V_l(r, r', m), \quad (3.146)$$

com

$$\begin{aligned} V_l(r, r', m) &= \left( \frac{r'}{r} \right)^l P_l(\cos \gamma) \\ &\quad - (mr)(mr')^l \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \frac{2^{\bar{n}} (2\bar{n}+1) \left( \lfloor \frac{l}{2} \rfloor - n + \bar{n} \right)!}{\left( \lfloor \frac{l}{2} \rfloor - n \right)! \left[ 2 \left( \bar{n} + \lfloor \frac{l}{2} \rfloor - n \right) + 1 \right]!} k_{\bar{n}}(mr) P_{\bar{n}}(\cos \gamma) \end{aligned} \quad (3.147)$$

e

$$\bar{n} = 2n + \left[ \frac{1 - (-1)^l}{2} \right] \quad \text{e} \quad \left[ \frac{l}{2} \right] = \frac{2l - 1 + (-1)^l}{4}. \quad (3.148)$$

Desta forma, utilizando os mesmos argumentos da subseção 3.3.3, pode-se mostrar que  $V_l \gg V_{l+1}$ .

Portanto, podemos escrever

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r} \sum_{l=0}^{+\infty} \int_{\Xi} V_l(r, r', m) \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau'. \quad (3.149)$$

Podemos explorar alguns termos desta expansão. O termo que corresponde ao contador  $l = 0$  é chamado de *Monopolo* magnético e dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi r} \int_{\Xi} (1 - (mr)k_0(mr)) \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau', \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1 - \exp(-mr)}{r} \right) \int_{\Xi} \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau'. \end{aligned} \quad (3.150)$$

Mostraremos que este termo, na verdade, é nulo. Sabemos que a Eletrodinâmica de Podolsky é uma teoria na qual a conservação da carga elétrica aparece naturalmente, como mostrado na subseção 2.4.2. Esta simetria é descrita pela equação da continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (3.151)$$

Para o caso estático, a eq.(3.151) se reduz para

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (3.152)$$

A eq.(3.152) indica que as linhas de campo de  $\mathbf{J}$  são fechadas, isto é, as correntes existentes estão em circuitos fechados. Desta forma, podemos dizer que a corrente em um elemento infinitesimal de volume é igual a um circuito de corrente fechada. Formalmente,

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau' = \oint_{\Gamma_j} I_{\Gamma_j} d\mathbf{l}_{\Gamma_j}, \quad (3.153)$$

sendo que  $\Gamma_j$  é um caminho fechado no interior de  $d\tau'$ . Assim, a corrente resultante da soma de todos os elementos infinitesimais  $d\tau'$  em  $\Xi$  é equivalente a uma soma infinita de circuitos fechados.

$$\int_{\Xi} \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau' = \sum_{j=0}^{+\infty} \oint_{\Gamma_j} I_{\Gamma_j} d\mathbf{l}_{\Gamma_j}. \quad (3.154)$$

Como  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , então  $I_{\Gamma_j}$  é constante em cada circuito, pois não há acúmulos de carga. Sendo assim,

$$\int_{\Xi} \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau' = \sum_{j=0}^{+\infty} I_{\Gamma_j} \oint_{\Gamma_j} d\mathbf{l}_{\Gamma_j}. \quad (3.155)$$

Como a integral de linha de um caminho fechado é nula,  $\oint_{\Gamma_j} d\mathbf{l}_{\Gamma_j} = \mathbf{0}$ , então

$$\int_{\Xi} \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau' = \mathbf{0} \quad (3.156)$$

e

$$\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (3.157)$$

Isto quer dizer que nenhum potencial tem uma contribuição do tipo monopolo.<sup>9</sup>

O termo corresponde a  $l = 1$  é chamado de *Dipolo* magnético.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi r} \int_{\Xi} \left[ \left( \frac{r'}{r} \right) \cos(\gamma) - (mr)(mr')k_1(mr) \cos(\gamma) \right] \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau', \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1 - \exp(-mr)(1 + (mr))}{r^3} \right) \int_{\Xi} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau'. \end{aligned} \quad (3.158)$$

Usando a equação da continuidade para o caso estático, o teorema da divergência e o fato que  $\mathbf{J}$  tende a zero suficientemente rápido no infinito, pode-se mostrar que

$$\int_{\Xi} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau' = -\frac{1}{2} \int_{\Xi} \mathbf{r} \times (\mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}')) d\tau'. \quad (3.159)$$

Desta forma, podemos escrever

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1 - \exp(-mr)(1 + mr)}{4\pi} \left( \frac{\overline{\mathbf{m}} \times \mathbf{r}}{r^3} \right), \quad (3.160)$$

com

$$\overline{\mathbf{m}} = \frac{1}{2} \int_{\Xi} \mathbf{r}' \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau' \quad (3.161)$$

O vetor  $\overline{\mathbf{m}}$  é chamado de *momento de dipolo magnético*. Usando  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ , é possível mostrar que o campo magnético do termo de dipolo magnético é

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left\{ \left[ 1 + \exp(-mr) \left( 1 + (mr) - \frac{1}{3}(mr)^2 \right) \right] 3(\overline{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \right. \\ &\quad \left. - \left[ 1 + 5 \exp(-mr) \left( 1 + (mr) - \frac{1}{5}(mr)^2 \right) \right] \overline{\mathbf{m}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.162)$$

Evidentemente, o campo magnético do termo de dipolo satisfaz os seguintes limites.

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (3.163)$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r^3} \left\{ 3(\overline{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} - \overline{\mathbf{m}} \right\}, \quad (3.164)$$

<sup>9</sup> Este fato está ligado com o divergente de um campo magnético ser nulo sempre, indicando que não existem monopolos magnéticos. Apesar disso, sistemas compostos que se comportam como monopolos magnéticos existem, como é o caso de condensados de Bose-Einstein preparados com átomos ultra-frios girantes. Neste caso, a força de Coriolis desempenha um papel semelhante a força de Lorentz, criando campos magnéticos sintéticos de tal forma que uma partícula carregada na presença deste campo se comporta da mesma maneira que em um campo eletromagnético real. Deste modo, os monopolos magnéticos são identificados como pontos no espaço que servem como fontes deste campos magnéticos sintéticos. Para detalhes sobre este assunto, consulte a referência [31].

que recaem nos limites esperados.

Os termos referentes a  $l = 2$  e  $l = 3$  são chamados de *Quadrupolo* magnético e *Octopolo* magnético da distribuição de cargas, e assim continuam. Consideraremos agora um exemplo simples. Calcularemos o potencial referente ao termo de dipolo para uma espira circular com uma corrente  $\mathbf{I}$ .

### 3.4.4 Exemplo: Expansão Multipolar do Potencial Vetorial Magnético de uma Espira Circular com Corrente.

Considere uma espira circular delgada de raio  $R$  com uma corrente  $\mathbf{I}$ . A espira se encontra no plano  $x - y$  do sistema de coordenadas adotado e seu centro coincide com a origem do sistema. A corrente circula no sentido anti-horário para quem a vê sobre algum ponto da parte positiva do eixo  $z$ . Veja a fig.(8).

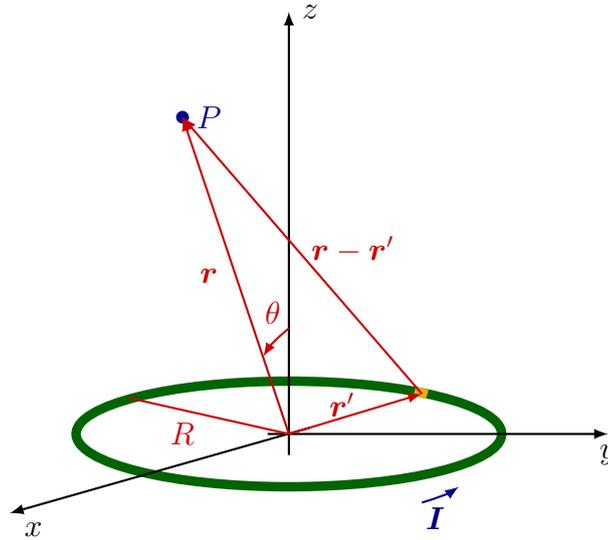


Figura 8 – Espira Circular com uma corrente  $\mathbf{I}$ .

Desejamos calcular o potencial em  $P$ , cujo vetor que o localiza – vetor  $\mathbf{r}$  – faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $z$ . O vetor  $\mathbf{r}'$  localiza um elemento de corrente. O potencial vetorial magnético  $\mathbf{A}$  é dado por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Xi} \left[ \frac{1 - \exp(-m\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right] \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau', \quad (3.165)$$

com

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = I \frac{\delta(r' - R)}{R} \delta\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right) (-\sin(\phi')\hat{\mathbf{x}} + \cos(\phi')\hat{\mathbf{y}}). \quad (3.166)$$

Efetuando as integrais referentes às coordenadas radial e azimutal obtemos

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{IR}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 - \exp(-m\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR\sin(\theta)\cos(\gamma)})}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR\sin(\theta)\cos(\gamma)}} \cos(\gamma) d\gamma \hat{\phi}. \quad (3.167)$$

Definindo  $k$  da seguinte maneira

$$k = \sqrt{\frac{4rR}{r^2 + R^2 + 2rR \sin(\theta)}} \quad (3.168)$$

e fazendo algumas mudanças de variáveis, é possível mostrar que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = & \frac{IR}{\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin(\theta)}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\gamma)}} d\gamma - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(\gamma)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\gamma)}} d\gamma \right. \\ & + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp(-m\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\gamma)}\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin(\theta)})}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\gamma)}} d\gamma \\ & \left. - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp(-m\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\gamma)}\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin(\theta)}) \sin^2(\gamma)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\gamma)}} d\gamma \right] \hat{\phi}. \end{aligned} \quad (3.169)$$

As duas primeiras integrais são integrais elípticas, enquanto que as duas últimas – que envolvem exponenciais – não são integrais conhecidas. Sendo assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = & \frac{IR}{\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin(\theta)}} \left[ \left( \frac{2}{k^2} - 1 \right) \mathbb{K}(k) - \frac{2}{k^2} \mathbb{E}(k) \right. \\ & + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp(-m\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\gamma)}\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin(\theta)})}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\gamma)}} d\gamma \\ & \left. - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp(-m\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\gamma)}\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin(\theta)}) \sin^2(\gamma)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\gamma)}} d\gamma \right] \hat{\phi}, \end{aligned} \quad (3.170)$$

em que  $\mathbb{K}$  e  $\mathbb{E}$  são as integrais elípticas completas de primeira e segunda espécie, respectivamente [32]. Apesar da eq.(3.170) ser exata, ela não é muito prática no que se trata de analisarmos o comportamento do potencial  $\mathbf{A}$ , pois a mesma não está escrita em termos de funções conhecidas. Uma possibilidade de seu uso seria visto se nossa forma de análise se baseasse em cálculos numéricos.

Este é um exemplo claro que nem sempre é possível obter a expressão exata de um potencial, seja o potencial escalar elétrico ou o potencial vetorial magnético. Sendo assim, a maneira que atacaremos este problema será por meio da expansão multipolar. Prosseguiremos com esta ideia calculando o termo de dipolo da expansão.

Considere a expansão multipolar para a densidade de corrente dada em (3.166). Aproximaremos o potencial  $\mathbf{A}$  pelo termo de dipolo da expansão

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi} \frac{1 - \exp(-mr)(1 + mr)}{r^2} (\bar{\mathbf{m}} \times \hat{\mathbf{r}}), \quad (3.171)$$

com  $\bar{\mathbf{m}}$  dado pela eq.(3.161). Nosso trabalho consiste em determinar  $\bar{\mathbf{m}}$ . Como  $\mathbf{r}'$  e  $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$  são coplanares com relação ao plano  $x - y$ , então a componente  $z$  de cada um deles é nula e  $\bar{\mathbf{m}} = \bar{m}_z \hat{\mathbf{z}}$ , com

$$\bar{m}_z = \frac{1}{2} \int_{\Xi} [r'_x J_y(\mathbf{r}') - r'_y J_x(\mathbf{r}')] d\tau'. \quad (3.172)$$

Logo, resolvendo a integral em coordenadas esféricas

$$\bar{\mathbf{m}} = I\pi R^2 \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.173)$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &\approx \frac{IR^2}{4} \frac{1 - \exp(-mr)(1 + mr)}{r^2} (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{r}}), \\ &\approx \frac{IR^2}{4} \frac{1 - \exp(-mr)(1 + mr)}{r^2} \sin(\theta) \hat{\phi}, \end{aligned} \quad (3.174)$$

que satisfaz os seguintes limites

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (3.175)$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{IR^2}{4} \frac{1}{r^2} \sin(\theta) \hat{\phi}. \quad (3.176)$$

De  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  é possível encontrar o campo magnético aproximado da espira devido ao termo de dipolo de sua expansão multipolar. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &\approx \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}), \\ &\approx \frac{IR^2}{2} \left( \frac{1 - \exp(-mr)(1 + mr)}{r^3} \right) \hat{\mathbf{z}} \\ &\quad + \frac{IR^2}{4} \left\{ \frac{\left[ 3 - 3 \left( 1 + mr + \frac{1}{3}(mr)^2 \right) \right] \exp(-mr)}{r^3} \right\} \sin(\theta) \hat{\phi}. \end{aligned} \quad (3.177)$$

Pode-se mostrar que  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  satisfaz os seguintes limites

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (3.178)$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{IR^2}{2} \frac{1}{r^3} \hat{\mathbf{z}} + \frac{3IR^2}{4} \frac{1}{r^3} \sin(\theta) \hat{\phi}. \quad (3.179)$$

que são os limites obtidos via teoria de Maxwell. Analisando a eq.(3.177), vemos que, para  $\theta = 0$ , a componente  $\phi$  do campo magnético  $\mathbf{B}$  é nula, restando apenas a componente  $z$ , como esperado.

Com este exemplo encerramos o capítulo sobre a teoria de Multipolos na Eletrodinâmica de Podolsky. Como mostramos, a teoria de Podolsky para o caso estático descreve muitos fenômenos eletromagnéticos, resolvendo até alguns insolúveis na teoria

de Maxwell, como o problema da autoenergia de uma carga puntual, desenvolvida na subseção 3.3.1.

Um problema da teoria de Maxwell, que também é resolvido pela teoria de Podolsky apesar de não ser discutido neste trabalho, é o *problema do 4/3*. Resumidamente, o problema do 4/3 aparece no seguinte contexto: considere que um elétron seja uma esfera de raio  $R$  com sua carga distribuída uniformemente sobre sua superfície. Considerando que a origem da massa do elétron seja de natureza eletromagnética, pode-se mostrar que a massa do elétron obtida pela equação de Abraham-Lorentz [33, 34] é  $m_{AL} = \frac{4}{3}W_{carga}$ , com  $W_{carga}$  a autoenergia do elétron. Pela teoria da relatividade, devido à relação entre massa e energia, a massa do elétron seria  $m_E = W_{carga}$ , ou seja, difere por um fator multiplicativo de 4/3 do valor obtido pela equação de Abraham-Lorentz. Em seu trabalho, Abraham também destacou que sem um potencial de origem não-eletrostática o elétron explodiria, devido à repulsão de seus elementos de cargas. Na tentativa de resolver o problema, Poincaré introduziu um termo não-eletromagnético nas equações da energia e do momento, de modo a contrabalancear a repulsão interna do elétron e ajustar o termo de massa [35]. Este termo atua como uma pressão que se opõe a repulsão eletrônica e o valor de sua massa efetiva é  $-\frac{W_{carga}}{3}$  [36]. Apesar da explicação de Poincaré ser válida, ela não determina a origem dessa pressão não-eletromagnética, sendo que a mesma não é a única explicação possível para o problema.<sup>10</sup>

A maneira que a teoria de Podolsky resolve este problema foi desenvolvido por Frenkel em [9]. Partindo das equações de Podolsky, Frenkel mostrou que no limite do raio do elétron indo a zero obtém-se a igualdade entre  $m_{AL}$  e  $m_E$ , sem a necessidade de incluir termos de origem indeterminada. Ele mostra também que o limite de  $m \rightarrow +\infty$  retorna os valores de massa obtidos pela teoria de Maxwell. Ainda neste artigo, o problema da autoenergia do elétron aparece como um resultado adjacente à solução do problema do 4/3.

Desta forma, vemos que é possível tratar vários exemplos seguindo as ideias aqui apresentadas. Uma tema interessante é a análise de fenômenos eletromagnéticos na matéria. Apesar de interessante, este tema por si só já é um grande trabalho, fugindo do escopo desta dissertação, que é apresentar as principais ideias da Eletrodinâmica de Podolsky.

<sup>10</sup> Rohrlich contestou a explicação feita por Poincaré para o problema do 4/3, afirmando que a equação de Abraham-Lorentz não descreve a dinâmica de uma partícula puntual eletricamente carregada. Para detalhes sobre seu modelo, veja as referências [37, 38].

---

**CAPÍTULO 4**

---

---

# TEORIA DA RADIAÇÃO NA ELETRODINÂMICA DE PODOLSKY

---

## 4.1 Introdução

A teoria de Radiação tem como objeto de estudo o comportamento dos campos elétrico e magnético produzidos pelo movimento de cargas aceleradas. As características destes campos dependem fortemente da dinâmica das cargas envolvidas, fazendo com que as equações que descrevem o movimento destas cargas tenham um papel essencial na descrição quantitativa da radiação produzida tais cargas. Deste modo, este capítulo visa apresentar as ideias preliminares da teoria de Radiação do ponto de vista da Eletrodinâmica de Podolsky.

A primeira seção consiste na obtenção da equação do quadripotencial eletromagnético de Podolsky, que veremos se relaciona com a invariância de gauge da Eletrodinâmica de Podolsky. Apresentaremos a condição de Lorenz generalizada e o gauge de radiação generalizado, utilizados em problemas tipicamente relacionados à teoria de Radiação.

A segunda seção apresenta o cálculo completo das funções de Green retardada e avançada da equação do quadripotencial eletromagnético de Podolsky. Para tanto, a causalidade é discutida e implementada na Eletrodinâmica de Podolsky. O cálculo das funções de Green retardada e avançada na teoria de Podolsky requer a obtenção de duas outras funções de Green: da equação do campo eletromagnético de Maxwell e da equação de Klein-Gordon-Fock. Por fim, analisa-se o limite de  $m \rightarrow +\infty$ , para a função de Green retardada de Podolsky.

A última seção é uma aplicação dos resultados obtidos no capítulo, obtendo os potenciais de Liénard-Wiechert-Podolsky para uma carga puntual em movimento.

## 4.2 Condição de Lorenz Generalizada e a Equação para o Quadripotencial Eletromagnético de Podolsky

A Eletrodinâmica de Podolsky é descrita pela densidade de lagrangiana dada em (2.37). Sabemos que as equações de movimento para o campo eletromagnético de Podolsky são obtidas das equações de Euler-Lagrange dadas em (2.35), fazendo a correspondência  $\varphi_i \leftrightarrow A^\mu$ . Deste modo, motivados pela eq.(3.11), as equações que possuem termos de fontes são

$$\left(1 + \frac{1}{m^2} \square\right) \partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu. \quad (4.1)$$

Em (4.1),  $\square$  é o operador *d'Alembertiano*,  $F^{\mu\nu}$  são as componentes do tensor de Faraday e  $J^\nu$  são as componentes da quadridensidade de corrente, este que descreve as fontes de campo eletromagnético. Como  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ , temos que

$$\left(1 + \frac{1}{m^2} \square\right) (\square \eta^{\nu\sigma} - \partial^\nu \partial^\sigma) A_\sigma = J^\nu. \quad (4.2)$$

O objetivo é determinar uma expressão para  $A_\sigma$ . Nossa tentativa é utilizar o método das Funções de Green. Segundo este método, a solução para (4.2) é

$$A_\sigma(x) = \int_{\Omega} G_{\sigma\mu}(x, x') J^\mu(x') d^4x', \quad (4.3)$$

com  $\Omega = \mathcal{M}^{41}$ . O sobrescrito ' indica que a integração é realizada na variável  $x'$ . Nosso trabalho consiste em determinar  $G_{\sigma\mu}$ . Sabemos que  $G_{\sigma\mu}$  é a função de Green da eq.(4.2). Portanto,  $G_{\sigma\mu}$  satisfaz

$$\left(1 + \frac{1}{m^2} \square\right) (\square \eta^{\nu\sigma} - \partial^\nu \partial^\sigma) G_{\sigma\rho}(x, x') = \delta(x - x') \delta^\nu_\rho. \quad (4.4)$$

O operador  $(1 + \frac{1}{m^2} \square) (\square \eta^{\nu\sigma} - \partial^\nu \partial^\sigma)$  atua somente sobre a variável  $x$ . Para tentarmos resolver (4.4), usaremos o método da Transformada de Fourier. Suponha que  $G_{\sigma\mu}$  possua uma transformada de Fourier.

$$G_{\sigma\rho}(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\Omega_k} \tilde{G}_{\sigma\rho}(k) \exp[ik \cdot (x - x')] d^4k, \quad (4.5)$$

em que  $\Omega_k = \mathcal{K}^4$ . Agora nosso trabalho é determinar  $\tilde{G}_{\sigma\rho}(k)$ , se existir. A função delta em quatro dimensões possui a seguinte representação

$$\delta(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\Omega_k} \exp[ik \cdot (x - x')] d^4k. \quad (4.6)$$

<sup>1</sup> Em todas as expressões,  $\mathcal{M}^4$  denota o espaço de Minkowski e  $x$  e  $x'$  são quadrivetores deste espaço. Para detalhes sobre este espaço e seus elementos, consulte o Anexo A.

Sendo assim, substituindo (4.5) e (4.6) em (4.4), obtemos

$$\tilde{G}_{\sigma\rho}(k) \left[ \left( -\|k\|^2 + \frac{1}{m^2}\|k\|^4 \right) \eta^{\mu\sigma} + \left( 1 - \frac{1}{m^2} \right) k^\mu k^\sigma \right] = \delta^\mu{}_\rho \quad (4.7)$$

em que  $\|k\|$  é a magnitude no quadrivetor  $k$ . A eq.(4.7) é uma equação tensorial. Desta forma, como  $\tilde{G}_{\sigma\rho}$  é um tensor de segunda ordem no espaço  $\mathcal{K}^4$ , então podemos propor um *ansatz* em que  $\tilde{G}_{\sigma\rho}$  é escrito como uma combinação de tensores de segunda ordem característicos do espaço  $\mathcal{K}^4$ . A combinação de tensores de segunda ordem mais geral possível é

$$\tilde{G}_{\sigma\rho}(k) = A(k)\eta_{\sigma\rho} + B(k)k_\sigma k_\rho, \quad (4.8)$$

sendo que  $A$  e  $B$  são funções a serem determinadas. Substituindo (4.8) em (4.7), a dependência em  $B$  da transformada da função de Green desaparece, restando somente o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} A(k) \left( -\|k\|^2 + \frac{1}{m^2}\|k\|^4 \right) = 1 \\ A(k) \left( 1 - \frac{1}{m^2}\|k\|^2 \right) = 0 \end{cases}, \quad (4.9)$$

que não possui solução, isto é, não existe  $A$  que satisfaça o sistema de equações anterior. Como o *ansatz* proposto na eq.(4.8) é a forma mais geral que  $\tilde{G}_{\sigma\rho}$  poderia ter, então a conclusão que se chega é que não existe  $G_{\sigma\rho}$ .

Devemos tomar outro caminho. Este caminho é inspirado na invariância de gauge da Eletrodinâmica de Podolsky. Considere a seguinte transformação de gauge no campo eletromagnético de Podolsky

$$A^\mu(x) \longrightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) - \partial^\mu \Lambda(x), \quad (4.10)$$

com  $\Lambda$  dado por

$$\Lambda(x) = \int_{\Omega} G(x, x') \left( 1 + \frac{1}{m^2} \square' \right) \nabla' \cdot \mathbf{A}' d^4 x'. \quad (4.11)$$

O sobrescrito  $'$  indica que tanto a integração como a derivação atuam somente sobre a variável  $x'$ . A função  $G$  satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\left( 1 + \frac{1}{m^2} \square \right) \nabla^2 G(x, x') = \delta(x - x') \quad (4.12)$$

e o operador  $(1 + \frac{1}{m^2} \square) \nabla^2$  atua somente na variável  $x$ . Sendo assim, é possível mostrar que  $A'^\mu$  satisfaz a seguinte expressão [8]

$$\left( 1 + \frac{1}{m^2} \square \right) \square A'^\mu = J^\mu. \quad (4.13)$$

Devemos entender melhor o significado disto. A transformação de gauge dada em (4.10) faz com que o campo transformado satisfaça a eq.(4.13). Como a Eletrodinâmica de Podolsky é invariante por transformações de gauge, isto é, a Física descrita pela teoria de Podolsky não muda por transformações de gauge, então o campo  $A^\mu$  também satisfaz uma equação análoga. Explicitamente,

$$\left(1 + \frac{1}{m^2} \square\right) \square A^\mu = J^\mu. \quad (4.14)$$

A eq.(4.14) deriva de (4.2) por meio da imposição da seguinte condição

$$\left(1 + \frac{1}{m^2} \square\right) \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (4.15)$$

A eq.(4.15) é chamada de *condição de Lorenz generalizada*. Note que, para o caso estático, a condição de Lorenz generalizada é igual à condição de Coulomb generalizada, mostrado na seção 3.2. Se  $A^\mu$  não satisfizer a eq.(4.14), então sempre podemos tomar a transformação de Gauge dada em (4.10) para que o campo  $A^\mu$  transformado satisfaça a eq.(4.14). A eq.(4.13) é chamada de *equação do quadripotencial eletromagnético de Podolsky*. O conjunto das seguinte condições

$$A^0 = 0, \quad (4.16)$$

$$\left(1 + \frac{1}{m^2} \square\right) \nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (4.17)$$

$$\dot{A}^0 = 0, \quad (4.18)$$

é chamado de *gauge de radiação generalizado*. Note que no limite de  $m \rightarrow +\infty$ , as eq.(4.14) e (4.15) recaem aos seus análogos na teoria de Maxwell.

Vale destacar um ponto relacionado com a natureza da função  $\Lambda$ . Para que as considerações feitas sobre a transformação de gauge (4.10) estejam corretas, a função  $\Lambda$  precisa ser um escalar de Lorentz, isto é,  $\Lambda$  precisa ser uma função escalar sob transformações de Lorentz. Para mostrarmos isto, considere um quadripotencial  $A^\mu$  que satisfaça a condição de Lorenz generalizada. Desejamos fazer uma transformação de gauge como da eq.(4.10) de modo que o quadripotencial transformado também satisfaça a condição de Lorenz generalizada. Desta maneira, se  $A'^\mu(x) = A^\mu(x) - \partial^\mu \Lambda(x)$ , então

$$\left(1 + \frac{1}{m^2} \square\right) \partial_\mu A'^\mu = \left(1 + \frac{1}{m^2} \square\right) \partial_\mu A^\mu - \left(1 + \frac{1}{m^2} \square\right) \square \Lambda. \quad (4.19)$$

Por hipótese, tanto  $A^\mu$  quanto  $A'^\mu$  satisfazem a condição de Lorenz generalizada. Portanto,

$$\left(1 + \frac{1}{m^2} \square\right) \square \Lambda = 0. \quad (4.20)$$

Note que o lado direito da eq.(4.20) é zero, enquanto que o operador que atua em  $\Lambda$  é invariante por transformações de Lorentz. Isto mostra que, de fato,  $\Lambda$  é invariante por transformações de Lorentz.

Nosso trabalho agora consiste em determinar soluções para a equação do quadripotencial eletromagnético de Podolsky que satisfaçam a condição de Lorenz generalizada.

## 4.3 As Funções de Green Retardada e Avançada da Equação do Quadripotencial Eletromagnético de Podolsky

### 4.3.1 Funções de Green e Causalidade

Como foi dito, nosso trabalho se resume em obter soluções para a eq.(4.14) que satisfaçam a eq.(4.15). Utilizaremos o método das funções de Green para obter tais soluções. Sabemos que, segundo este método, o quadripotencial eletromagnético de Podolsky é dado por

$$A^\mu(x) = \int_{\Omega} G(x, x') J^\mu(x') d^4x', \quad (4.21)$$

com  $G$  a função de Green da equação do quadripotencial eletromagnético de Podolsky e que satisfaz

$$\left(1 + \frac{1}{m^2} \square\right) \square G(x, x') = \delta(x - x'). \quad (4.22)$$

Algumas questões precisam ser discutidas neste ponto. Observando a eq.(4.21), notamos que  $x = (t, \mathbf{x})$  é o evento no qual será medido  $A^\mu$  e  $x' = (t', \mathbf{x}')$  é o evento onde se encontra o elemento infinitesimal de quadricorrente  $J^\mu(x') d^4x'$ . Sendo assim, se desejarmos não violar a *causalidade*, a detecção do quadripotencial  $A^\mu$  em  $x$  (efeito) deverá ser **posterior** ao de criação do mesmo potencial em  $x'$  (causa). Isto é garantido pela seguinte expressão

$$t - t' > 0. \quad (4.23)$$

Sob estas condições, dizemos que o quadripotencial  $A^\mu$  é *retardado*, pois os acontecimentos ocorridos em  $x'$  demorarão um tempo  $t - t'$  para chegar em  $x$ . Para os casos no qual  $t - t' \leq 0$ , devemos ter  $A^\mu = 0$ . Para que isto ocorra, basta que tenhamos

$$G_R(x, x') = 0, \quad t - t' \leq 0 \quad (4.24)$$

e o subscrito  $R$  serve para indicar que  $G$  é uma função de Green *retardada*.

Se ao invés da eq.(4.23) tivéssemos que  $t - t' < 0$ , então a criação do quadripotencial em  $\boldsymbol{x}'$  aconteceria posteriormente à medição do mesmo quadripotencial em  $\boldsymbol{x}$ , isto é, mediríamos primeiramente o quadripotencial em  $\boldsymbol{x}$  e posteriormente o mesmo quadripotencial medido seria criado em  $\boldsymbol{x}'$ . Esta é, obviamente, uma possibilidade não-física, pois viola a causalidade. Apesar disso, é uma possibilidade matemática, no sentido que não existem restrições matemáticas que impeçam tal caso. Para esta situação, devemos ter  $A^\mu = 0$  para  $t - t' \geq 0$ , que é obtido fazendo

$$G_A(x, x') = 0, \quad t - t' \geq 0. \quad (4.25)$$

Nesta situação,  $G_A$  é chamada de função de Green *avançada* e  $A^\mu$  de quadripotencial eletromagnético *avançado*.

Com isso em mente, obteremos as funções de Green retardada e avançada da equação do quadripotencial eletromagnético de Podolsky simultaneamente. Para resolvermos a eq.(4.22) usaremos o método da Transformada de Fourier. Suponha que  $G(x, x')$  possua uma transformada de Fourier.

$$G(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\Omega_k} \tilde{G}(k) \exp[ik \cdot (x - x')] d^4k. \quad (4.26)$$

A função delta de Dirac em termos de uma integral de Fourier é dada pela eq.(4.6). Substituindo (4.26) e (4.6) em (4.22), obtemos

$$\tilde{G}(k) = \frac{m^2}{\|k\|^2 (\|k\|^2 - m^2)}. \quad (4.27)$$

Utilizando o método das frações parciais [39] é possível mostrar que

$$\tilde{G}(k) = \tilde{G}_M(k) - \tilde{G}_{KGF}(k), \quad (4.28)$$

com

$$\tilde{G}_M(k) = -\frac{1}{\|k\|^2} \quad \text{e} \quad \tilde{G}_{KGF}(k) = -\frac{1}{\|k\|^2 - m^2}. \quad (4.29)$$

As funções  $\tilde{G}_M$  e  $\tilde{G}_{KGF}$  são as transformadas de Fourier das funções de Green da equação do quadripotencial eletromagnético de Maxwell e da equação de Klein-Gordon-Fock, respectivamente.

Disso segue diretamente que

$$G(x, x') = G_M(x, x') - G_{KGF}(x, x'), \quad (4.30)$$

isto é, as funções de Green retardada e avançada da equação do campo eletromagnético de Podolsky é dada pela diferença entre as funções de Green retardada e avançada da equação do quadripotencial eletromagnético de Maxwell ( $G_M$ ) e as funções de Green retardada e avançada da equação de Klein-Gordon-Fock ( $G_{KGF}$ ). Para prosseguirmos, obteremos as funções de Green retardadas e avançadas de cada uma destas equações.

### 4.3.2 Funções de Green Retardada e Avançada da Equação do Quadripotencial Eletromagnético de Maxwell

Esta subseção segue a referência [16] com algumas modificações. Considere a equação para o quadripotencial eletromagnético de Maxwell

$$\square A^\mu = J^\mu. \quad (4.31)$$

Desejamos obter as funções de Green retardada e avançada da eq.(4.31). Sabemos que a função de Green  $G_M$  da eq.(4.31) satisfaz

$$\square G_M(x, x') = \delta(x - x') \quad (4.32)$$

e a discussão sobre cada tipo de função de Green (retardada e avançada) segue a mesma ideia apresentada na seção 4.3.1. Resolveremos a eq.(4.32) utilizando o método da Transformada de Fourier. Suponha que  $G_M$  possua uma transformada de Fourier

$$G_M(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\Omega_k} \tilde{G}_M(k) \exp[ik \cdot (x - x')] d^4k. \quad (4.33)$$

com  $\Omega_k = \mathcal{K}^4$ . A função delta de Dirac em termos de uma integral de Fourier é dada pela eq.(4.6). Substituindo (4.33) e (4.6) em (4.32), obtemos

$$\tilde{G}_M(k) = -\frac{1}{\|k\|^2}, \quad (4.34)$$

que é exatamente a eq.(4.29). Note que  $\tilde{G}_M$  não está definido para os casos  $\|k\|^2 = 0$ . Isto traz problemas na determinação da função de Green e por isso procederemos de uma maneira diferente.

Suponha que tenhamos a seguinte função

$$D_\pm(x, x' : \epsilon) = \exp[\pm\epsilon(t - t')] G_{M_\pm}(x, x'), \quad (4.35)$$

sendo que o subscrito (+) indica que  $G_{M_+}$  se relaciona com a função de Green avançada e (-) enfatiza que  $G_{M_-}$  se relaciona com a função de Green retardada.

Rigorosamente, temos que as funções de Green retardada e avançada, que denotaremos por  $G_{M_R}$  e  $G_{M_A}$  respectivamente, para satisfazerem as eq.(4.24) e (4.25), devem ser escritas como

$$G_{M_R}(x, x') = \Theta(t - t') G_{M_-}(x, x'), \quad (4.36)$$

$$G_{M_A}(x, x') = \Theta(t' - t) G_{M_+}(x, x'), \quad (4.37)$$

em que  $\Theta$  é a função de Heaviside.

Deste modo, nosso objetivo é determinar  $G_{M_{\pm}}$ . De (4.35), vemos que  $G_{M_{\pm}}$  é obtida no limite de  $\epsilon \rightarrow 0_+$

$$G_{M_{\pm}}(x, x') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0_+} D_{\pm}(x, x' : \epsilon). \quad (4.38)$$

Devemos obter  $D_{\pm}$ . Pode-se mostrar que  $D_{\pm}(x, x' : \epsilon)$  satisfaz

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} \mp \epsilon \right)^2 - \nabla^2 \right] D_{\pm}(x, x' : \epsilon) = \delta(x - x'). \quad (4.39)$$

Desta forma, proporemos uma solução de (4.39) por meio da técnica da Transformada de Fourier. Suponha que  $D_{\pm}(x, x' : \epsilon)$  possua uma transformada de Fourier, isto é,

$$D_{\pm}(x, x' : \epsilon) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\Omega_k} \tilde{D}_{\pm}(k : \epsilon) \exp[ik \cdot (x - x')] d^4k. \quad (4.40)$$

Deste modo, substituindo (4.40) e (4.6) em (4.39), obtemos

$$\tilde{D}_{\pm}(k : \epsilon) = -\frac{1}{\|k\|^2 \pm 2i\epsilon k_0 - \epsilon^2}. \quad (4.41)$$

Logo,

$$D_{\pm}(x, x' : \epsilon) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\Omega_k} \frac{\exp[ik \cdot (x - x')]}{\|k\|^2 \pm 2i\epsilon k_0 - \epsilon^2} d^4k. \quad (4.42)$$

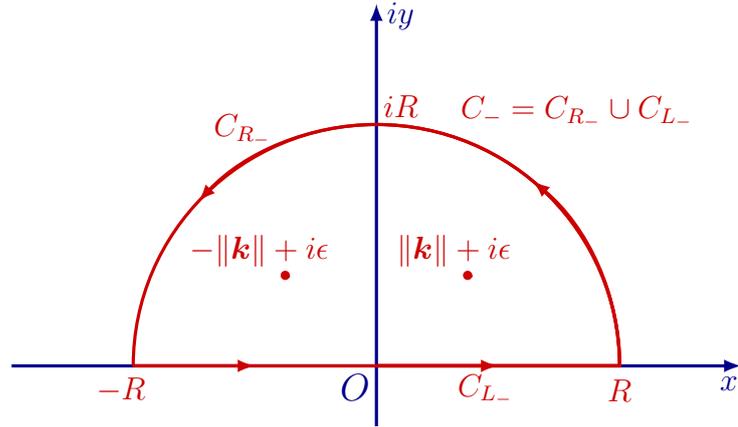
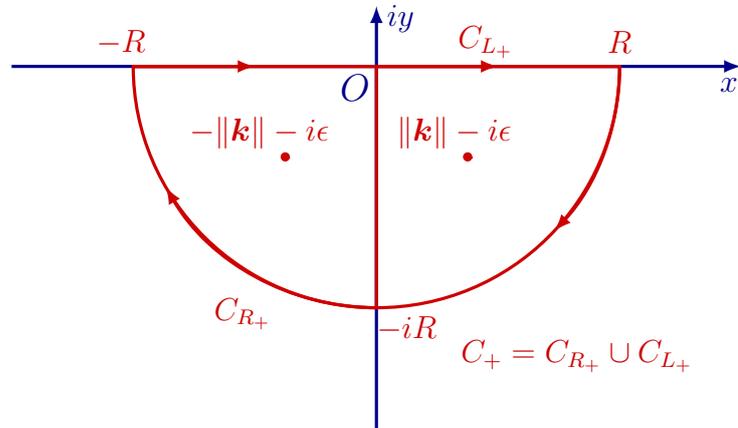
A maneira mais simples de se obter  $D_{\pm}$  é resolvendo primeiramente a integral na variável  $k_0$ . Explicitando tal integral

$$D_{\pm}(x, x' : \epsilon) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\Xi_k} \exp[-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[ik_0(t - t')]}{k_0^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon k_0 - \epsilon^2} dk_0 \right\} d^3k. \quad (4.43)$$

Sendo assim, definiremos  $I_{\pm}$  como

$$I_{\pm} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[ik_0(t - t')]}{k_0^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon k_0 - \epsilon^2} dk_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[ik_0(t - t')]}{[k_0 - (\mp i\epsilon + \|\mathbf{k}\|)][k_0 - (\mp i\epsilon - \|\mathbf{k}\|)]} dk_0. \quad (4.44)$$

Observe que o integrando de  $I_+$  tem polos simples em  $k_0 = \pm\|\mathbf{k}\| - i\epsilon$ , com  $t - t' < 0$ , e que o integrando de  $I_-$  tem polos simples em  $k_0 = \pm\|\mathbf{k}\| + i\epsilon$ , com  $t - t' > 0$ . Sendo assim, resolveremos cada integral, levando-as ao plano complexo. Denotando por  $C_{\pm}$  os dois contornos de integração escolhidos que auxiliarão a resolver  $I_{\pm}$ , as mesmas podem ser vistas nas fig.(9) e (10).


 Figura 9 – Contorno de integração  $C_-$ .

 Figura 10 – Contorno de integração  $C_+$ .

Assim, nosso trabalho consiste em resolver a seguinte integral

$$T_{\pm} = \oint_{C_{\pm}} \frac{\exp[iz(t-t')]}{z^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon z - \epsilon^2} dz. \quad (4.45)$$

que veremos que está relacionada com  $I_{\pm}$  no limite de  $R \rightarrow +\infty$ .

As soluções de  $T_+$  e  $T_-$  são dadas pelo Teorema dos Resíduos [40]

$$\begin{aligned} \oint_{C_{\pm}} \frac{\exp[iz(t-t')]}{z^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon z - \epsilon^2} dz &= \mp 2\pi i \left[ \text{Res} \left( \frac{\exp[iz(t-t')]}{z^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon z - \epsilon^2} : -\|\mathbf{k}\| \mp i\epsilon \right) \right. \\ &\quad \left. + \text{Res} \left( \frac{\exp[iz(t-t')]}{z^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon z - \epsilon^2} : +\|\mathbf{k}\| \mp i\epsilon \right) \right], \\ &= \pm 2\pi \exp[\pm\epsilon(t-t')] \frac{\sin[\|\mathbf{k}\|(t-t')]}{\|\mathbf{k}\|}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Como  $C_{\pm} = C_{L_{\pm}} \cup C_{R_{\pm}}$ , então podemos fazer

$$\oint_{C_{\pm}} \frac{\exp[iz(t-t')]}{z^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon z - \epsilon^2} dz = \int_{C_{L_{\pm}}} \frac{\exp[iz(t-t')]}{z^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon z - \epsilon^2} dz \mp \int_{(\mp C_{R_{\pm}})} \frac{\exp[iz(t-t')]}{z^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon z - \epsilon^2} dz, \quad (4.47)$$

sendo que  $(+C_{R_-})$  indica que foi tomado o sentido original de integração na curva  $C_{R_-}$  e  $(-C_{R_+})$  indica que foi tomado o sentido inverso de integração na curva  $C_{R_+}$ . Uma das formas paramétricas de  $C_{L_{\pm}}$  e  $(+C_{R_-})$  e  $(-C_{R_+})$  são dadas abaixo

$$C_{L_{\pm}} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = k_0, -R \leq k_0 \leq R\}, \quad (4.48)$$

$$(+C_{R_-}) = \{z \in \mathbb{C} \mid z = R \exp(i\theta), 0 \leq \theta \leq \pi\}, \quad (4.49)$$

$$(-C_{R_+}) = \{z \in \mathbb{C} \mid z = R \exp(i\theta), \pi \leq \theta \leq 2\pi\}. \quad (4.50)$$

Utilizando estas parametrizações e tomando o limite de  $R \rightarrow +\infty$ , temos que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_{L_{\pm}}} \frac{\exp[iz(t-t')]}{z^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon z - \epsilon^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[ik_0(t-t')]}{k_0^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon k_0 - \epsilon^2} dk_0 \quad (4.51)$$

e

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{(\mp C_{R_{\pm}})} \frac{\exp[iz(t-t')]}{z^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon z - \epsilon^2} dz = 0, \quad (4.52)$$

onde nas integrais em  $(\mp C_{R_{\pm}})$  usamos o lema de Jordan [40].<sup>2</sup>

Deste modo, tomando o limite de  $R \rightarrow +\infty$  em ambos os lados da eq.(4.47) e utilizando os resultados de (4.46), (4.51) e (4.52), temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[ik_0(t-t')]}{k_0^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon k_0 - \epsilon^2} dk_0 = \pm 2\pi \exp[\pm\epsilon(t-t')] \frac{\sin[\|\mathbf{k}\|(t-t')]}{\|\mathbf{k}\|}. \quad (4.53)$$

Portanto,

$$D_{\pm}(x, x' : \epsilon) = \mp \frac{\exp[\pm\epsilon(t-t')]}{(2\pi)^3} \int_{\Xi_k} \frac{\exp[-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \sin[\|\mathbf{k}\|(t-t')]}{\|\mathbf{k}\|} d^3k. \quad (4.54)$$

Usando a eq.(4.38), temos que

$$G_{M_{\pm}}(x, x') = \mp \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Xi_k} \frac{\exp[-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \sin[\|\mathbf{k}\|(t-t')]}{\|\mathbf{k}\|} d^3k. \quad (4.55)$$

<sup>2</sup> Observe que em  $(+C_{R_-})$ , temos que  $t - t' > 0$ , enquanto que em  $(-C_{R_+})$ , temos que  $t - t' < 0$ , justificando a aplicação do lema de Jordan.

Agora nosso trabalho consiste em resolver a integral da eq.(4.55). Adotando coordenadas esféricas e resolvendo as integrais angulares, obtemos

$$G_{M_{\pm}}(x, x') = \mp \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin[\|\mathbf{k}\| \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|] \sin[\|\mathbf{k}\| (t - t')] d\|\mathbf{k}\| \quad (4.56)$$

e os limites vão de  $-\infty$  até  $+\infty$  pois o integrando é uma função par na variável de integração.

Utilizando a soma e a diferença de arcos para o cosseno, pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} \sin[\|\mathbf{k}\| \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|] \sin[\|\mathbf{k}\| (t - t')] &= \frac{1}{2} \{ \cos[\|\mathbf{k}\| ((t - t') - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|)] \\ &\quad - \frac{1}{2} \{ \cos[\|\mathbf{k}\| ((t - t') + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|)] \}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Dada a seguinte representação para a função delta de Dirac

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(kx) dk \quad (4.58)$$

e utilizando a eq.(4.57), conclui-se que

$$G_{M_{\pm}}(x, x') = \mp \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \{ \delta[(t - t') - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|] - \delta[(t - t') + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|] \}. \quad (4.59)$$

Note que no caso de  $G_{M_-}$ , temos que  $t - t' > 0$ . Consequentemente temos que  $(t - t') + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| > 0$  e  $\delta[(t - t') + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|] = 0$ , sobrando apenas

$$G_{M_-}(x, x') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \delta[(t - t') - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|]. \quad (4.60)$$

O mesmo ocorre para o caso de  $G_{M_+}$ . Como  $t - t' < 0$ , então temos que  $(t - t') - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| < 0$  e  $\delta[(t - t') - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|] = 0$ , restando

$$G_{M_+}(x, x') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \delta[(t - t') + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|]. \quad (4.61)$$

Desta forma, usando as eq.(4.36) e (4.37), temos que

$$G_{M_R}(x, x') = \frac{\Theta(t - t')}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \delta[(t - t') - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|], \quad (4.62)$$

$$G_{M_A}(x, x') = \frac{\Theta(t' - t)}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \delta[(t - t') + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|], \quad (4.63)$$

Sabendo que

$$\begin{aligned} \delta[\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2] &= \delta[(t - t')^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2], \\ &= \frac{1}{2\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \{ \delta[(t - t') - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|] + \delta[(t - t') + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|] \} \end{aligned} \quad (4.64)$$

e que  $(t - t') + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| > 0$  para o caso retardado e  $(t - t') - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| < 0$  para o caso avançado, temos

$$G_{MR}(x, x') = \frac{\Theta(x_0 - x'_0)}{2\pi} \delta[\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2], \quad (4.65)$$

$$G_{MA}(x, x') = \frac{\Theta(x'_0 - x_0)}{2\pi} \delta[\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2], \quad (4.66)$$

sendo que voltamos para notação na qual  $t = x_0$  e  $t' = x'_0$ . As eq.(4.65) e (4.66) são as funções de Green retardada e avançada da equação do campo eletromagnético de Maxwell. Para darmos continuidade, obteremos agora as funções de Green retardada e avançada da equação de Klein-Gordon.

### 4.3.3 Funções de Green Retardada e Avançada da Equação de Klein-Gordon-Fock

A obtenção da função de Green da equação de Klein-Gordon-Fock segue um roteiro parecido ao feito na subseção 4.3.2 tendo como base a referência [41]. Considere a equação de Klein-Gordon-Fock

$$(\square + m^2) \psi(x) = F(x). \quad (4.67)$$

com  $m \neq 0$ . Desejamos obter as funções de Green retardada e avançada da eq.(4.67).

Sabemos que a função de Green  $G_{KGF}$  da eq.(4.67) satisfaz

$$(\square + m^2) G_{KGF}(x, x') = \delta(x - x') \quad (4.68)$$

e toda a discussão realizada sobre cada tipo de função de Green (retardada e avançada) segue a mesma ideia apresentada na seção 4.3.1. Resolveremos a eq.(4.32) utilizando o método da Transformada de Fourier. Suponha que  $G_{KGF}$  possua uma transformada de Fourier

$$G_{KGF}(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\Omega_k} \tilde{G}_{KGF}(k) \exp[ik \cdot (x - x')] d^4k. \quad (4.69)$$

com  $\Omega_k = \mathcal{K}^4$ . A função delta de Dirac em termos de uma integral de Fourier é dada pela eq.(4.6). Substituindo (4.69) e (4.6) em (4.68), obtemos

$$\tilde{G}_{KGF}(k) = -\frac{1}{\|k\|^2 - m^2}, \quad (4.70)$$

que é exatamente a eq.(4.29). Note que  $\tilde{G}_{KGF}$  não está definido para os casos  $\|k\| = \pm m$ . Isto traz problemas na determinação da função de Green e por isso procederemos de uma maneira diferente.

Suponha que tenhamos a seguinte função

$$D_{\pm}(x, x' : \epsilon) = \exp[\pm\epsilon(t - t')] G_{KGF_{\pm}}(x, x'), \quad (4.71)$$

em que o subscrito (+) indica que  $G_{KGF_{+}}$  está relacionada com a função de Green avançada e (-) enfatiza que  $G_{KGF_{-}}$  está relacionada com a função de Green retardada.

Como no caso anterior, temos que as funções de Green retardada e avançada, que denotaremos por  $G_{KGF_R}$  e  $G_{KGF_A}$  respectivamente, para satisfazerem as eq.(4.24) e (4.25), devem ser escritas como

$$G_{KGF_R}(x, x') = \Theta(t - t') G_{KGF_{-}}(x, x'), \quad (4.72)$$

$$G_{KGF_A}(x, x') = \Theta(t' - t) G_{KGF_{+}}(x, x'). \quad (4.73)$$

Deste modo, nosso objetivo é obter  $G_{KGF_{\pm}}$ . De (4.71), vemos que  $G_{KGF_{\pm}}$  é obtida no limite de  $\epsilon \rightarrow 0_{+}$

$$G_{KGF_{\pm}}(x, x') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0_{+}} D_{\pm}(x, x' : \epsilon). \quad (4.74)$$

Devemos obter  $D_{\pm}$ . Pode-se mostrar que  $D_{\pm}(x, x' : \epsilon)$  satisfaz

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} \mp \epsilon \right)^2 - \nabla^2 + m^2 \right] D_{\pm}(x, x' : \epsilon) = \delta(x - x'). \quad (4.75)$$

Sendo assim, proporemos uma solução de (4.75) por meio do método da Transformada de Fourier. Suponha que  $D_{\pm}(x, x' : \epsilon)$  possua uma transformada de Fourier, isto é,

$$D_{\pm}(x, x' : \epsilon) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\Omega_k} \tilde{D}_{\pm}(k : \epsilon) \exp[ik \cdot (x - x')] d^4k. \quad (4.76)$$

Assim, substituindo (4.76) e (4.6) em (4.75), obtemos

$$\tilde{D}_{\pm}(k : \epsilon) = -\frac{1}{\|k\|^2 \pm 2i\epsilon k_0 - m^2 - \epsilon^2}. \quad (4.77)$$

Logo,

$$D_{\pm}(x, x' : \epsilon) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\Omega_k} \frac{\exp[ik \cdot (x - x')]}{\|k\|^2 \pm 2i\epsilon k_0 - m^2 - \epsilon^2} d^4k. \quad (4.78)$$

A maneira mais simples de se obter  $D_{\pm}$  é resolvendo primeiramente a integral na variável  $k_0$ . Explicitando tal integral

$$D_{\pm}(x, x' : \epsilon) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\Xi_k} \exp[-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[ik_0(t - t')]}{k_0^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon k_0 - m^2 - \epsilon^2} dk_0 \right\} d^3k.$$

(4.79)

Deste modo, definiremos  $I_{\pm}$  como

$$\begin{aligned}
 I_{\pm} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp [ik_0(t-t')]}{k_0^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon k_0 - m^2 - \epsilon^2} dk_0, \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp [ik_0(t-t')]}{[k_0 - (\mp i\epsilon + \beta)][k_0 - (\mp i\epsilon - \beta)]} dk_0,
 \end{aligned}
 \tag{4.80}$$

com  $\beta = \sqrt{\|\mathbf{k}\|^2 + m^2}$ . Observe que o integrando de  $I_+$  tem polos simples em  $k_0 = \pm\beta - i\epsilon$ , com  $t - t' < 0$ , e que o integrando de  $I_-$  tem polos simples em  $k_0 = \pm\beta + i\epsilon$ , com  $t - t' > 0$ . Sendo assim, resolveremos cada integral, estendendo-as ao plano complexo. Denotando por  $C_{\pm}$  os dois contornos de integração escolhidos que auxiliarão a resolver  $I_{\pm}$ , as mesmas podem ser vistas nas fig.(11) e (12).

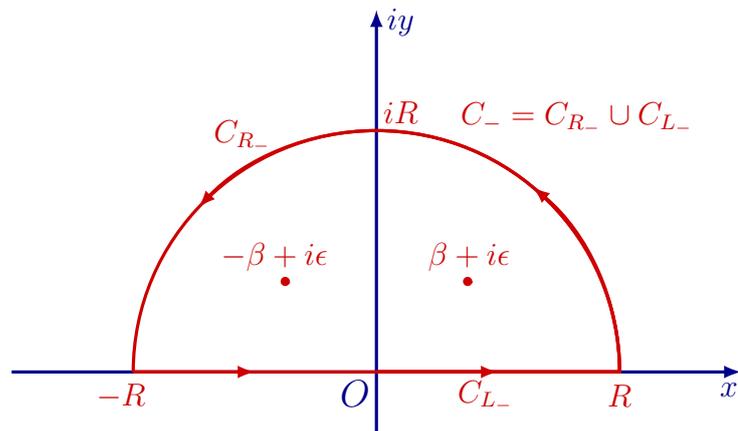


Figura 11 – Contorno de integração  $C_-$ .

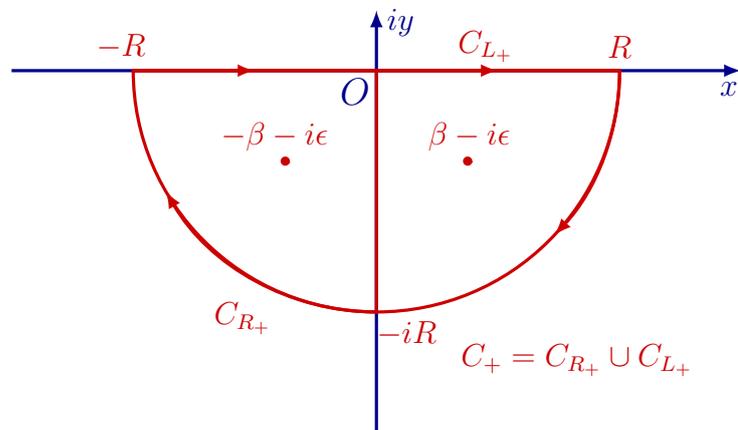


Figura 12 – Contorno de integração  $C_+$ .

Desta forma, nosso trabalho consiste em resolver a seguinte integral

$$T_{\pm} = \oint_{C_{\pm}} \frac{\exp[iz(t-t')]}{z^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon z - m^2 - \epsilon^2} dz. \quad (4.81)$$

As soluções de  $T_+$  e  $T_-$  são dadas pelo Teorema dos Resíduos [40]

$$\begin{aligned} \oint_{C_{\pm}} \frac{\exp[iz(t-t')]}{z^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon z - m^2 - \epsilon^2} dz &= \mp 2\pi i \left[ \text{Res} \left( \frac{\exp[iz(t-t')]}{z^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon z - m^2 - \epsilon^2} : -\beta \mp i\epsilon \right) \right. \\ &\quad \left. + \text{Res} \left( \frac{\exp[iz(t-t')]}{z^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon z - m^2 - \epsilon^2} : +\beta \mp i\epsilon \right) \right], \\ &= \mp 2\pi i \exp[\pm\epsilon(t-t')] \\ &\quad \times \left( \frac{\exp[i\beta(t-t')] - \exp[-i\beta(t-t')]}{2\beta} \right). \end{aligned} \quad (4.82)$$

Como  $C_{\pm} = C_{L_{\pm}} \cup C_{R_{\pm}}$ , então podemos fazer

$$\begin{aligned} \oint_{C_{\pm}} \frac{\exp[iz(t-t')]}{z^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon z - m^2 - \epsilon^2} dz &= \int_{C_{L_{\pm}}} \frac{\exp[iz(t-t')]}{z^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon z - m^2 - \epsilon^2} dz \\ &\quad \mp \int_{(\mp C_{R_{\pm}})} \frac{\exp[iz(t-t')]}{z^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon z - m^2 - \epsilon^2} dz, \end{aligned} \quad (4.83)$$

de modo que  $(+C_{R_-})$  denota que foi tomado o sentido original de integração na curva  $C_{R_-}$  e  $(-C_{R_+})$  indica que foi tomado o sentido inverso de integração na curva  $C_{R_+}$ . Uma das formas paramétricas de  $C_{L_{\pm}}$  e  $(+C_{R_-})$  e  $(-C_{R_+})$  são dadas abaixo

$$C_{L_{\pm}} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = k_0, -R \leq k_0 \leq R\}, \quad (4.84)$$

$$(+C_{R_-}) = \{z \in \mathbb{C} \mid z = R \exp(i\theta), 0 \leq \theta \leq \pi\}, \quad (4.85)$$

$$(-C_{R_+}) = \{z \in \mathbb{C} \mid z = R \exp(i\theta), \pi \leq \theta \leq 2\pi\}. \quad (4.86)$$

Utilizando estas parametrizações e tomando o limite de  $R \rightarrow +\infty$ , temos que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_{L_{\pm}}} \frac{\exp[iz(t-t')]}{z^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon z - m^2 - \epsilon^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[ik_0(t-t')]}{k_0^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon k_0 - m^2 - \epsilon^2} dk_0 \quad (4.87)$$

e

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{(\mp C_{R_{\pm}})} \frac{\exp[iz(t-t')]}{z^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon z - m^2 - \epsilon^2} dz = 0, \quad (4.88)$$

sendo que nas integrais em  $(\mp C_{R_{\pm}})$  usamos o lema de Jordan [40].

Deste modo, tomando o limite de  $R \rightarrow +\infty$  em ambos os lados da eq.(4.83) e utilizando os resultados de (4.82), (4.87) e (4.88), temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp [ik_0(t-t')]}{k_0^2 - \|\mathbf{k}\|^2 \pm 2i\epsilon k_0 - m^2 - \epsilon^2} dk_0 = \mp 2\pi i \exp [\pm \epsilon(t-t')] \times \left( \frac{\exp [i\beta(t-t')] - \exp [-i\beta(t-t')]}{2\beta} \right). \quad (4.89)$$

Portanto,

$$D_{\pm}(x, x' : \epsilon) = \pm \frac{i \exp [\pm \epsilon(t-t')]}{(2\pi)^3} \int_{\Xi_k} d^3k \left\{ \exp [-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \times \left( \frac{\exp [i\sqrt{\|\mathbf{k}\|^2 + m^2}(t-t')] - \exp [-i\sqrt{\|\mathbf{k}\|^2 + m^2}(t-t')]}{2\sqrt{\|\mathbf{k}\|^2 + m^2}} \right) \right\}. \quad (4.90)$$

Usando a eq.(4.74), temos que

$$G_{KGF_{\pm}}(x, x') = \pm \frac{i}{(2\pi)^3} \int_{\Xi_k} d^3k \left\{ \exp [-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \times \left( \frac{\exp [i\sqrt{\|\mathbf{k}\|^2 + m^2}(t-t')] - \exp [-i\sqrt{\|\mathbf{k}\|^2 + m^2}(t-t')]}{2\sqrt{\|\mathbf{k}\|^2 + m^2}} \right) \right\}. \quad (4.91)$$

Agora nosso trabalho consiste em resolver a integral da eq.(4.91). Adotando coordenadas esféricas e resolvendo as integrais angulares, obtemos

$$G_{KGF_{\pm}}(x, x') = \pm \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|} \int_{-\infty}^{+\infty} d\|\mathbf{k}\| \left\{ \frac{\exp \left[ i \left( \sqrt{\|\mathbf{k}\|^2 + m^2}(t-t') + \|\mathbf{k}\| \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \right) \right]}{\sqrt{\|\mathbf{k}\|^2 + m^2}} \|\mathbf{k}\| + \frac{\exp \left[ -i \left( \sqrt{\|\mathbf{k}\|^2 + m^2}(t-t') + \|\mathbf{k}\| \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \right) \right]}{\sqrt{\|\mathbf{k}\|^2 + m^2}} \|\mathbf{k}\| \right\}. \quad (4.92)$$

Denotando por  $\|\mathbf{R}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$ , note que podemos escrever

$$G_{KGF_{\pm}}(x, x') = \mp \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{R}\|} \left\{ \frac{\partial}{\partial \|\mathbf{R}\|} \left[ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\|\mathbf{k}\| \left( \frac{\exp \left[ i \left( \sqrt{\|\mathbf{k}\|^2 + m^2}(t-t') + \|\mathbf{k}\| \|\mathbf{R}\| \right) \right]}{\sqrt{\|\mathbf{k}\|^2 + m^2}} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \|\mathbf{R}\|} \left[ \frac{(-i)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\|\mathbf{k}\| \left( \frac{\exp \left[ -i \left( \sqrt{\|\mathbf{k}\|^2 + m^2}(t-t') + \|\mathbf{k}\| \|\mathbf{R}\| \right) \right]}{\sqrt{\|\mathbf{k}\|^2 + m^2}} \right) \right] \right\}. \quad (4.93)$$

Sendo assim, definindo  $F(\|\mathbf{R}\|)$  por

$$F(\|\mathbf{R}\|) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \left[ i \left( \sqrt{\xi^2 + m^2} (t - t') + \xi \|\mathbf{R}\| \right) \right]}{\sqrt{\xi^2 + m^2}} d\xi, \quad (4.94)$$

temos que

$$G_{KGF_{\pm}}(x, x') = \mp \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{R}\|} \left( \frac{\partial F(\|\mathbf{R}\|)}{\partial \|\mathbf{R}\|} + \frac{\partial \bar{F}(\|\mathbf{R}\|)}{\partial \|\mathbf{R}\|} \right), \quad (4.95)$$

sendo que  $\bar{F}$  denota o complexo conjugado de  $F$ . Sendo assim, nosso trabalho se resume em determinar  $F$ . Fazendo  $\xi = m \sinh \varphi$ , a eq.(4.94) se torna

$$F(\|\mathbf{R}\|) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [im (\cosh(\varphi)(t - t') + \sinh(\varphi)\|\mathbf{R}\|)] d\varphi. \quad (4.96)$$

A integral da eq.(4.96) depende do comportamento de  $t - t'$  e  $\|\mathbf{R}\|$ . As situações possíveis são mostradas abaixo.

- (1)  $t - t' > 0$  e  $t - t' > \|\mathbf{R}\|$ ;
- (2)  $t - t' > 0$  e  $t - t' < \|\mathbf{R}\|$ ;
- (3)  $t - t' < 0$  e  $|t - t'| > \|\mathbf{R}\|$ ;
- (4)  $t - t' < 0$  e  $|t - t'| < \|\mathbf{R}\|$ ;

Em cada caso, tomaremos as seguintes definições.

- (1')  $t - t' = \sqrt{\lambda} \cosh \varphi_0$  e  $\|\mathbf{R}\| = \sqrt{\lambda} \sinh \varphi_0$ ;
- (2')  $t - t' = \sqrt{-\lambda} \sinh \varphi_0$  e  $\|\mathbf{R}\| = \sqrt{-\lambda} \cosh \varphi_0$ ;
- (3')  $t - t' = -\sqrt{\lambda} \cosh \varphi_0$  e  $\|\mathbf{R}\| = \sqrt{\lambda} \sinh \varphi_0$ ;
- (4')  $t - t' = -\sqrt{-\lambda} \sinh \varphi_0$  e  $\|\mathbf{R}\| = \sqrt{-\lambda} \cosh \varphi_0$ ;

sendo que  $\varphi_0 > 0$  e  $\lambda = (t - t')^2 - \|\mathbf{R}\|^2$ . Fazendo as alterações, temos que, em cada caso, a integral se torna

$$\begin{aligned} (1'') \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [im\sqrt{\lambda} \cosh(\varphi + \varphi_0)] d\varphi = i\pi J_0(m\sqrt{\lambda}) - \pi N_0(m\sqrt{\lambda}); \\ (2'') \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [im\sqrt{-\lambda} \sinh(\varphi + \varphi_0)] d\varphi = 2K_0(m\sqrt{-\lambda}); \\ (3'') \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [-im\sqrt{\lambda} \cosh(\varphi - \varphi_0)] d\varphi = -i\pi J_0(m\sqrt{\lambda}) - \pi N_0(m\sqrt{\lambda}); \\ (4'') \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [-im\sqrt{-\lambda} \sinh(\varphi - \varphi_0)] d\varphi = 2K_0(m\sqrt{-\lambda}); \end{aligned}$$

de modo que  $J_0$  é função de Bessel de primeira espécie,  $N_0$  é função de Bessel de segunda espécie ou função de Neumann e  $K_0$  é função de Bessel modificada de primeira espécie, todas de ordem zero. Para referências sobre as funções de Bessel, consulte [28] e [29].

Deste modo, podemos condensar estes resultados da seguinte expressão

$$F(\|\mathbf{R}\|) = -\frac{1}{2} \left[ \text{sgn}(t - t') J_0(m\sqrt{\lambda}) + i N_0(m\sqrt{\lambda}) \right] \Theta(\lambda) + \frac{i}{\pi} K_0(m\sqrt{-\lambda}) \Theta(-\lambda), \quad (4.97)$$

sendo que  $\text{sgn}$  é a função sinal. Lembre que a dependência de  $F$  em  $\|\mathbf{R}\|$  aparece em  $\lambda$ , pois  $\lambda = (t - t')^2 - \|\mathbf{R}\|^2$ . Substituindo em (4.95) e utilizando a regra da cadeia para funções compostas temos

$$G_{KGF_{\pm}}(x, x') = \frac{1}{2\pi} \left[ \delta(\lambda) - \Theta(\lambda) \frac{m}{2\sqrt{\lambda}} J_1(m\sqrt{\lambda}) \right], \quad (4.98)$$

com  $J_1$  função de Bessel de primeira espécie e de ordem 1. A função sinal desaparece devido aos sinais para cada uma das situações ( $t - t' > 0$  e  $t - t' < 0$ ).

Lembrando que  $\lambda = (t - t')^2 - \|\mathbf{R}\|^2 = (t - t')^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2 = \|x - x'\|^2$ , podemos escrever

$$G_{KGF_{\pm}}(x, x') = \frac{1}{2\pi} \left[ \delta(\|x - x'\|^2) - \frac{m\Theta(\|x - x'\|^2)}{2\sqrt{\|x - x'\|^2}} J_1(m\sqrt{\|x - x'\|^2}) \right]. \quad (4.99)$$

Utilizando as eq.(4.72) e (4.73) temos que as funções de Green retardada e avançada da equação de Klein-Gordon são

$$G_{KGF_R}(x, x') = \frac{\Theta(x_0 - x'_0)}{2\pi} \left[ \delta(\|x - x'\|^2) - \frac{m\Theta(\|x - x'\|^2)}{2\sqrt{\|x - x'\|^2}} J_1(m\sqrt{\|x - x'\|^2}) \right], \quad (4.100)$$

$$G_{KGF_A}(x, x') = \frac{\Theta(x'_0 - x_0)}{2\pi} \left[ \delta(\|x - x'\|^2) - \frac{m\Theta(\|x - x'\|^2)}{2\sqrt{\|x - x'\|^2}} J_1(m\sqrt{\|x - x'\|^2}) \right], \quad (4.101)$$

Com estes resultados, podemos determinar as funções de Green retardada e avançada da equação do quadripotencial eletromagnético de Podolsky.

#### 4.3.4 O limite de $m \rightarrow +\infty$ da função de Green retardada da equação do campo eletromagnético de Podolsky.

Com as funções de Green das equações do campo eletromagnético de Maxwell e de Klein-Gordon-Fock é possível obter as funções de Green retardada e avançada da equação

do quadripotencial eletromagnético de Podolsky. De (4.30), temos que

$$G_R(x, x') = G_{M_R}(x, x') - G_{KGF_R}(x, x'), \quad (4.102)$$

$$G_A(x, x') = G_{M_A}(x, x') - G_{KGF_A}(x, x'). \quad (4.103)$$

Utilizando os resultados (4.65), (4.66), (4.100) e (4.101), obtemos que

$$G_R(x, x') = \frac{\Theta(x_0 - x'_0)}{4\pi} \frac{m\Theta(\|x - x'\|^2)}{\sqrt{\|x - x'\|^2}} J_1 \left( m\sqrt{\|x - x'\|^2} \right), \quad (4.104)$$

$$G_A(x, x') = \frac{\Theta(x'_0 - x_0)}{4\pi} \frac{m\Theta(\|x - x'\|^2)}{\sqrt{\|x - x'\|^2}} J_1 \left( m\sqrt{\|x - x'\|^2} \right). \quad (4.105)$$

Estas são as funções de Green da equação do quadripotencial eletromagnético de Podolsky. Vejamos alguns detalhes sobre estas expressões. Na eq.(4.104), temos  $\Theta(x_0 - x'_0)$ , garantindo a preservação da causalidade. Na eq.(4.105) a causalidade é violada devido ao termo  $\Theta(x'_0 - x_0)$ . Em ambas as expressões, a presença do termo  $\Theta(\|x - x'\|^2)$  faz com que as funções de Green sejam nulas se  $x - x'$  não for um quadrivetor do tipo tempo. Desta forma, a função  $G_R$  é a função de Green correta para a descrição dos fenômenos físicos. Exploraremos esta função agora.

Um resultado sobre esta função de Green é que a mesma deve satisfazer o seguinte limite

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} G_R(x, x') = \frac{\delta[(t - t') - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|]}{4\pi\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|}, \quad (4.106)$$

isto é, a função de Green retardada para o quadripotencial eletromagnético de Podolsky recai em seu análogo na teoria de Maxwell no limite de  $m \rightarrow +\infty$ . Obviamente, estamos considerando a situação  $t - t' > 0$ . Para mostrarmos este resultados, tomaremos  $t' = 0$  e  $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ , por simplicidade. Esta parte tem como base a referência [9].

Seja  $F$  uma função analítica em todos os pontos  $x$  tais que  $|x| < R$ ,  $R > 0$ . A constante  $R$  é chamada de raio de convergência da função  $F$ . Sob estas condições, sabemos que ela admite uma expansão em série de Taylor

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d^n F(0)}{dx^n} \frac{x^n}{n!}. \quad (4.107)$$

Sabemos também que das propriedades da função delta de Dirac<sup>3</sup>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n \delta(x)}{dx^n} G(x) dx = (-1)^n \frac{d^n G(0)}{dx^n}. \quad (4.108)$$

<sup>3</sup> Rigorosamente, a função  $\delta$  é uma *distribuição*. As distribuições podem ser vistas como funcionais que levam certas funções chamadas *funções testes* a um numero real ou complexo. Para detalhes sobre a teoria de distribuições, veja a referência [42].

Esta propriedade é demonstrada utilizando integração por partes e a propriedade de filtragem da delta, desde que a derivada  $n$ -ésima de  $G$  esteja definida em  $x = 0$ . Deste modo, temos que

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d^n F(0)}{dx^n} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n \delta(x')}{dx'^n} F(x') dx' \right] \frac{x^n}{n!} \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{d^n \delta(x')}{dx'^n} \frac{x^n}{n!} \right] F(x') dx' \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x' - x) F(x') dx'. \tag{4.109}
 \end{aligned}$$

Assim, determinamos uma representação para a função delta de Dirac em termos de uma expansão em série de Taylor.

$$\delta(x' - x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{d^n \delta(x')}{dx'^n} \frac{x^n}{n!}. \tag{4.110}$$

Substituindo  $x' = t$  e  $x = \|\mathbf{x}\|$ , temos a seguinte representação para a função de Green retardada dada em (4.62)

$$G_{MR}(x, 0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{d^n \delta(t)}{dt^n} \frac{\|\mathbf{x}\|^{n-1}}{n!}. \tag{4.111}$$

Motivados pela eq.(4.111), podemos propor que a função de Green retardada da equação do quadripotencial eletromagnético de Podolsky seja escrita como

$$G_R(x, 0) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{d^n \delta(t)}{dt^n} \frac{\|\mathbf{x}\|^{n-1}}{n!} f_n(m\|\mathbf{x}\|), \tag{4.112}$$

e no limite de  $m \rightarrow +\infty$ ,  $f_n \rightarrow 1$ . Sendo assim, nosso trabalho consiste em determinar  $f_n$ . Igualando as eq.(4.104) e (4.112)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{d^n \delta(t)}{dt^n} \frac{\|\mathbf{x}\|^{n-1}}{n!} f_n(m\|\mathbf{x}\|) = \frac{m\Theta(t^2 - \|\mathbf{x}\|^2)}{\sqrt{t^2 - \|\mathbf{x}\|^2}} J_1 \left( m\sqrt{t^2 - \|\mathbf{x}\|^2} \right). \tag{4.113}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por  $t^k$ , com  $k \in \mathbb{N}$ , e integrando no tempo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n \delta(t)}{dt^n} t^k dt \right] \frac{\|\mathbf{x}\|^{n-1}}{n!} f_n(m\|\mathbf{x}\|) = m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Theta(t^2 - \|\mathbf{x}\|^2) J_1 \left( m\sqrt{t^2 - \|\mathbf{x}\|^2} \right)}{\sqrt{t^2 - \|\mathbf{x}\|^2}} t^k dt. \tag{4.114}$$

Observe que a integral do lado esquerdo da equação resulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n \delta(t)}{dt^n} t^k dt = (-1)^n \frac{d^n t^k}{dt^n} \Big|_{t=0} = (-1)^n k! \delta_{nk}, \tag{4.115}$$

sendo que  $\delta_{nk}$  é a delta de *Kronecker*. Isto porque se  $k < n$ , então  $\frac{d^n t^k}{dt^n} = 0$  e se  $k > n$ , então  $\frac{d^n t^k}{dt^n} \Big|_{t=0} = 0$ , sobrando apenas  $k = n$  que resulta  $\frac{d^n t^k}{dt^n} \Big|_{t=0} = k!$ . Deste modo, obtemos

$$f_k(m\|\mathbf{x}\|) = m\|\mathbf{x}\|^{1-k} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(t^2 - \|\mathbf{x}\|^2) \frac{J_1\left(m\sqrt{t^2 - \|\mathbf{x}\|^2}\right)}{\sqrt{t^2 - \|\mathbf{x}\|^2}} t^k dt. \quad (4.116)$$

Observe que a presença do termo  $\Theta(t^2 - \|\mathbf{x}\|^2)$  faz com que a região de integração de  $t$  reduza para os valores em que  $t > \|\mathbf{x}\|$ , além de mostrar que, de fato,  $x$  é um quadri vetor do tipo tempo. Desta maneira,

$$f_k(m\|\mathbf{x}\|) = m\|\mathbf{x}\|^{1-k} \int_{\|\mathbf{x}\|}^{+\infty} \frac{J_1\left(m\sqrt{t^2 - \|\mathbf{x}\|^2}\right)}{\sqrt{t^2 - \|\mathbf{x}\|^2}} t^k dt. \quad (4.117)$$

Fazendo a seguinte mudança de variável

$$z = \sqrt{\left(\frac{t}{\|\mathbf{x}\|}\right)^2 - 1} \quad (4.118)$$

obtemos

$$f_k(m\|\mathbf{x}\|) = m\|\mathbf{x}\| \int_0^{+\infty} J_1(m\|\mathbf{x}\|z) \left[\sqrt{z^2 + 1}\right]^{k-1} dz. \quad (4.119)$$

Para os valores de  $k = 0, 1, 2, 3$  temos que

$$f_0(m\|\mathbf{x}\|) = 1 - \exp(-m\|\mathbf{x}\|), \quad (4.120)$$

$$f_1(m\|\mathbf{x}\|) = 1, \quad (4.121)$$

$$f_2(m\|\mathbf{x}\|) = 1 - \frac{1}{m\|\mathbf{x}\|} \exp(-m\|\mathbf{x}\|), \quad (4.122)$$

$$f_3(m\|\mathbf{x}\|) = 1. \quad (4.123)$$

No limite de  $m \rightarrow +\infty$ , temos que  $f_i \rightarrow 1$ , como esperado.

Com a função de Green retardada em mãos, aplicaremos em um caso especial: obteremos os potenciais de Liénard-Wiechert devido a uma carga se movendo na descrição da Eletrodinâmica de Podolsky. Veremos como isto é realizado na próxima seção.

## 4.4 Os Potenciais de Liénard-Wiechert-Podolsky

Como sabemos, a função de Green retardada da equação do quadripotencial eletromagnético de Podolsky é dada pela diferença entre as funções de Green retardadas da

equação do campo eletromagnético de Maxwell e da equação de Klein-Gordon-Fock. Isto faz com que o potencial também seja escrito em duas partes, isto é,

$$A^\mu(x) = A_M^\mu(x) - A_{KGF}^\mu(x), \quad (4.124)$$

com

$$A_M^\mu(x) = \int_{\Omega} \frac{\Theta(x_0 - x'_0)}{2\pi} \delta[\|x - x'\|^2] J^\mu(x') d^4x' \quad (4.125)$$

e

$$A_{KGF}^\mu(x) = \int_{\Omega} \frac{\Theta(x_0 - x'_0)}{2\pi} \left[ \delta(\|x - x'\|^2) - \frac{m\Theta(\|x - x'\|^2)}{2\sqrt{\|x - x'\|^2}} J_1\left(m\sqrt{\|x - x'\|^2}\right) \right] J^\mu(x') d^4x'. \quad (4.126)$$

Note que a dependência na constante de Podolsky fica exclusivamente na parte referente ao quadripotencial retardado de Klein-Gordon-Fock. Isto mostra que podemos ver o quadripotencial de Podolsky como o quadripotencial de Maxwell corrigido, de modo que as correções são dadas pelo quadripotencial que é solução da equação de Klein-Gordon-Fock.

Ao subtrairmos o quadripotencial relacionado à equação de Klein-Gordon-Fock do campo eletromagnético de Podolsky, o resultado mostra que as contribuições que aparecem exclusivamente no cone de luz do quadrivetor  $x'$  se cancelam, sobrando apenas

$$A^\mu(x) = \int_{\Omega} \frac{\Theta(x_0 - x'_0)}{4\pi} \frac{m\Theta(\|x - x'\|^2)}{\sqrt{\|x - x'\|^2}} J_1\left(m\sqrt{\|x - x'\|^2}\right) J^\mu(x') d^4x'. \quad (4.127)$$

Obviamente, no limite de  $m \rightarrow +\infty$ , os potenciais retardados mostrados na eq.(4.127) se comportam como os potenciais retardados da teoria de Maxwell para o eletromagnetismo. Exploraremos a eq.(4.127).

Considere o caso de uma partícula com carga  $q$  se movendo no espaço-tempo com velocidade  $v(\tau)$ , com  $\tau$  o tempo próprio da carga. Sendo assim, temos que a quadridensidade de corrente é dada por

$$J^\mu(x) = q \int v^\mu(\tau) \delta(x - r(\tau)) d\tau, \quad (4.128)$$

sendo que  $r(\tau) = (r_0(\tau), \mathbf{r}(\tau))$  é o quadrivetor posição da carga e  $v(\tau) = (v_0(\tau), \mathbf{v}(\tau))$  a quadri-velocidade da carga.

Substituindo em (4.127), temos que a função delta filtra a integral em  $x'$ , sobrando apenas

$$A^\mu(x) = q \int \frac{\Theta(x_0 - r_0(\tau))}{4\pi} \frac{m\Theta(\|x - r(\tau)\|^2)}{\sqrt{\|x - r(\tau)\|^2}} J_1\left(m\sqrt{\|x - r(\tau)\|^2}\right) v^\mu(\tau) d\tau. \quad (4.129)$$

Observe que  $\Theta(\|x - r(\tau)\|^2)$  nos diz que a integral só é diferente de zero se  $x - r(\tau)$  for um quadrivetor do tipo tempo. A causalidade da teoria é especificada pelo termo  $\Theta(x_0 - r_0(\tau))$ . Sendo assim, temos que a parte não-nula da integral é realizada em um intervalo  $I$  tal que para qualquer  $\tilde{\tau} \in I$ ,  $\|x - r(\tilde{\tau})\|^2 > 0$ , com  $x_0 > r_0(\tilde{\tau})$ . Desta forma,

$$A^\mu(x) = \frac{qm}{4\pi} \int_I \frac{J_1\left(m\sqrt{\|x - r(\tilde{\tau})\|^2}\right)}{\sqrt{\|x - r(\tilde{\tau})\|^2}} v^\mu(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau}. \quad (4.130)$$

Os potenciais dados pela eq.(4.130) são chamados de *potenciais de Liénard-Wiechert-Podolsky*. Estes potenciais necessitam da especificação do quadrivetor posição para obtê-los. No limite de  $m \rightarrow +\infty$  o potencial retorna para o caso de Maxwell.

Com isto finalizamos este capítulo. Como foi dito, nosso intuito foi apresentar as ideias preliminares da teoria de Radiação sob o aspecto da Eletrodinâmica de Podolsky. De fato, o que foi mostrado aqui é apenas uma parcela de todo o conteúdo necessário para se estudar os fenômenos radiativos. Apesar disso, a determinação das funções de Green retardada e avançada da equação do quadripotencial eletromagnético de Podolsky demonstrada neste trabalho permite a obtenção de muitos outros resultados como os potenciais para uma carga com velocidade constante ou uma carga submetida a uma força constante ou mesmo descrever a pressão de radiação, que utiliza o vetor de Poynting obtido no capítulo 2. Uma aplicação desta teoria considerando fontes localizadas de campos elétricos e magnéticos, cuja dependência temporal seja harmônica, também é uma possibilidade. Desta forma, a Eletrodinâmica de Podolsky se mostra como uma possibilidade para a descrição de sistemas radiativos.

---

## CAPÍTULO 5

---

# CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

---

## 5.1 Conclusões sobre os resultados

No capítulo 2 vimos que é possível construir um formalismo lagrangiano e hamiltoniano para sistemas descritos por densidades de lagrangianas que dependem das segundas derivadas nos campos. Essencialmente, o roteiro desenvolvido para a construção de tais formalismos segue as mesmas ideias que para teorias com densidade de lagrangianas que dependam apenas da primeira derivada nos campos, com exceção a alguns detalhes destacados no trabalho.

Como mostrado, realizamos o estudo considerando qualquer tipo de campo, de tal forma que a aplicação na Eletrodinâmica de Podolsky foi incorporada aos poucos na exposição do capítulo. Inicialmente, obtivemos as equações de Euler-Lagrange a partir da invariância do funcional de Ação sob transformações a ponto fixo. O modo de se obter tais equações é análogo ao caso usual, com a ressalva de que na situação considerada nesta dissertação foi necessário acrescentar que a variação da derivada covariante dos campos seja nula na borda do hipervolume considerado. Desta forma, constatou-se que as equações obtidas carregam um termo que depende explicitamente da derivada da densidade de lagrangiana com relação as segundas derivadas nos campos, como era de se esperar.

O teorema de Noether também foi estendido para este tipo de teoria. A presença de um termo na quadridensidade de corrente conservada que explicita a dependência da densidade de lagrangiana com relação a derivada de segunda ordem nos campos é explícita e surge quando transformamos o funcional de Ação por meio de um grupo de transformações. Quando o grupo de transformações em questão é o grupo de Poincaré, os tensores Energia-Momento e de Spin tem novas expressões. Obviamente, se a dependência nas derivadas de segunda ordem nos campos fosse negligenciada, as expressões para estes tensores seriam as mesmas obtidas pela teoria de campos usual, como comentado

no trabalho.

Além disso, constatamos que existe a possibilidade de se construir todo o formalismo hamiltoniano para tais teorias. Como a referência [8] ensina, com a definição dos pares canônicos  $(\pi^i, \varphi_i)$  e  $(\tilde{\pi}^i, \dot{\varphi}_i)$ , a construção de uma formulação hamiltoniana para teoria de segunda ordem se torna natural. Para o caso de teorias que apresentam vínculos, é necessário um estudo minucioso sobre estes vínculos. Por isso, optamos por não abordar este tema no presente trabalho, pois o mesmo necessita de um fino estudo sobre classificação de vínculos e isto foge do objetivo do trabalho.

Comentaremos agora sobre os resultados obtidos no capítulo 2 devido à aplicação do estudo desenvolvido sobre teoria de campos de segunda ordem na Eletrodinâmica de Podolsky. O primeiro resultado foi a obtenção das equações de movimento para o campo eletromagnético de Podolsky. Utilizando as equação de Euler-Lagrange tomando a correspondência  $\varphi_i \leftrightarrow A^\mu$ , obtivemos as equação de movimento para o campo eletromagnético de Podolsky e comparamos com as equações de Maxwell por meio do limite do parâmetro de Podolsky indo a zero. Outro resultado obtido foi a conservação da carga elétrica, simetria fundamental da natureza. Constatamos que a invariância de gauge da teoria de Podolsky implica na conservação da carga elétrica, assim como na teoria de Maxwell. Vimos também que os tensores Energia-Momento e Spin da Eletrodinâmica de Podolsky possuem formas distintas dos seus equivalentes na teoria de Maxwell, como era esperado. Em especial, constatamos que o tensor Energia-Momento canônico não é simétrico, sendo que também não pode ser simetrizado pelo do método de Belinfante. O modo de se obter o tensor Energia-Momento simétrico de uma teoria de segunda ordem é apresentado em [24], sendo que seu desenvolvimento seria muito trabalhoso e iria além dos objetivos desta dissertação.

Outros resultados sobre a Eletrodinâmica de Podolsky foram apenas comentados, pois uma abordagem simplificada não exaltaria a relevância dos resultados e uma rigorosa fugiria do escopo deste trabalho. Nesta lista, o resultado mais relevante, que foi obtido por Cuzinatto, Melo e Pompeia em [10], é que a Eletrodinâmica de Podolsky é a única teoria de campos com derivadas de segunda ordem nos campos que é simultaneamente linear, invariante de gauge  $U(1)$  e de Lorentz. Todas as outras teorias invariantes por estes grupos diferem da Eletrodinâmica de Podolsky por um termo de superfície. Este fato faz com que a Eletrodinâmica de Podolsky seja a única generalização possível com derivadas de segunda ordem nos campos para a Eletrodinâmica de Maxwell.

O capítulo 3 compreende o estudo da teoria de Multipolos sob a perspectiva da Eletrodinâmica de Podolsky. Neste capítulo observamos que a descrição de fenômenos estáticos pela Eletrodinâmica de Podolsky é uma possibilidade. Definindo os campos

elétrico e magnético em termos dos potenciais escalar elétrico e vetorial magnético, verificamos que a condição de Coulomb tem uma expressão diferente na teoria de Podolsky. Esta nova condição leva o nome de condição de Coulomb generalizada e a mesma equivale a condição de Lorenz generalizada, obtida por [8], para o caso estático. As equações resultantes da imposição da condição de Coulomb generalizada carregam um termo que considera derivadas de quarta ordem nos campos. Isto mostra que o modo com que os campos são criados é diferente quando comparado com a Eletrodinâmica de Maxwell. Apesar disso, as equações para o potencial escalar elétrico e as componentes do potencial vetorial magnético ainda são idênticas ao fazermos a associação  $\varphi \leftrightarrow (\mathbf{A})_i$  e  $\rho \leftrightarrow (\mathbf{J})_i$ , um resultado semelhante obtido pela teoria de Maxwell.

No estudo da Eletrostática de Podolsky observamos que o primeiro resultado distinto com relação à teoria de Maxwell é o limite do potencial escalar elétrico devido a uma carga puntual para a distância entre a carga e o ponto onde se calcula o potencial indo a zero. Utilizando a Eletrostática de Maxwell, constata-se que este limite é infinito, enquanto que utilizando a teoria de Podolsky obtemos que o limite resulta em um valor finito, diretamente relacionado com a constante de Podolsky. Este fato se propaga para as outras quantidades relacionadas à carga puntual como, por exemplo, quando analisam-se os limites para seu campo elétrico. Um outro fato importante decorrente da finitude do potencial escalar elétrico de uma carga sobre ela mesma é o cálculo da autoenergia desta mesma carga. Na teoria de Maxwell, este cálculo resulta em um valor infinito, o que fisicamente não é de se esperar. Neste trabalho, apresentamos o modelo mais simples para uma carga puntual e, utilizando a teoria de Podolsky, vimos que este cálculo retornou um valor finito, também diretamente relacionado com a constante de Podolsky. Este é um grande resultado da Eletrodinâmica de Podolsky.

Ainda na seção sobre Eletrostática, realizamos o estudo dos multipolos elétricos. Esta parte contém o cerne da expansão multipolar: a condição de aproximação multipolar. Verificamos que é possível determinar com clareza o quão distante está um ponto do espaço com relação a um corpo carregado, se compararmos a mínima distância entre o ponto onde se deseja calcular o potencial e um ponto do corpo carregado com a máxima distância entre dois pontos da distribuição de cargas. Utilizando a condição de aproximação multipolar, realizamos a expansão multipolar, que segue um roteiro levemente parecido com o que é executado na teoria de Maxwell. Para tanto, buscamos uma representação da função de Green da equação do potencial escalar elétrico em termos de uma série infinita. Após encontrarmos a representação adequada para a função em questão, precisou-se ainda reorganizar da série de modo a implementar a condição de aproximação multipolar. Apesar da dificuldade intrínseca que a Eletrodinâmica de Podolsky apresenta, obtivemos com sucesso a expressão que define a expansão multipolar. Para verificarmos a fórmula obtida, realizamos a expansão multipolar para um disco carregado uniformemente, usando

o fato que o potencial elétrico para esta configuração de carga, quando calculado sobre o eixo de simetria, pode ser obtido exatamente. Fazendo a expansão multipolar da expressão exata do potencial e calculando o potencial utilizando a série obtida foi constatado que resultavam nas mesmas expressões. Apesar de não serem expressas neste trabalho, outras configurações de cargas, como o dipolo elétrico e os quadrupolos elétricos linear e quadrado, foram analisadas e verificou-se que a expressão para a expansão multipolar também descreve com precisão os potenciais destas configurações de carga.

A seção sobre Magnetostática de Podolsky seguiu um roteiro similar ao executado na seção sobre Eletrostática. Primeiramente, discutimos sobre as correntes estacionárias, estas que são fontes de campos magnéticos estáticos. Em seguida, obtivemos o potencial vetorial e o campo magnético de algumas configurações de correntes. O exemplo mais notável foi o fio infinito, pois este mostrou um comportamento em regiões próximas do fio bem distinto do esperado pela Magnetostática de Maxwell. Pela teoria de Podolsky, o campo magnético do fio infinito possui um máximo em regiões próximas ao fio. Isto faz com que esta configuração de corrente seja candidato a uma possível verificação experimental da teoria de Podolsky.

Continuando na seção sobre Magnetostática, construímos a expansão multipolar para o potencial vetorial magnético, que de fato é análogo ao realizado para o potencial escalar elétrico. Definimos a condição de aproximação multipolar para a Magnetostática, fazendo a correspondência entre elementos de cargas com elementos de correntes. Posteriormente, como a função de Green é a mesma para as equações dos potenciais escalar elétrico e vetorial magnético, temos que a representação obtida da função de Green em questão em termos de uma série infinita é idêntica ao caso Eletrostático. Em seguida, verificamos os dois primeiros termos da expansão multipolar e constatamos que o termo referente ao monopolo magnético é nulo, como era de se esperar. Fizemos uma aplicação dos resultados obtidos no cálculo do potencial vetorial magnético de uma espira circular delgada com uma corrente estacionária. O resultado obtido da aplicação foi satisfatório, pois o mesmo retornou os limites que eram esperados.

Sobre os resultados do capítulo 4, nosso objetivo foi introduzir os conceitos básicos da teoria da Radiação. No início, quando tentamos resolver a equação para o quadripotencial eletromagnético de Podolsky sem a imposição da condição de Lorenz generalizada, constatamos que simplesmente não existe uma solução pelo método das funções de Green. Isto mostrou o porquê de se impor a condição de Lorenz generalizada. Sem a imposição da mesma não seria possível obter tal quadripotencial. Além disso, a imposição da condição de Lorenz se mostrou natural, quando verificou-se que ao aplicar uma transformação de gauge no quadripotencial, a equação que o quadripotencial transformado satisfaz é exatamente a equação do quadripotencial com a imposição da condição de Lorenz generalizada.

Ainda sobre o capítulo 4, conseguimos implementar a causalidade na teoria, do mesmo modo que é realizado na Eletrodinâmica de Maxwell. Isto possibilitou a busca pelas funções de Green retardada e avançada da equação do quadripotencial eletromagnético de Podolsky. Esta busca retornou que as funções de Green procuradas são dadas pela diferença entre a função de Green da equação do campo eletromagnético de Maxwell e da equação de Klein-Gordon-Fock. Desta forma, nosso objetivo se voltou para a obtenção de tais funções de Green, tornando-se o assunto de duas seções. Obtidas de maneira semelhante, optamos por explicitar o cálculo destas funções de Green para que o leitor não tenha dúvidas sobre o processo de obtenção das mesmas. Quando encontramos as funções de Green retardada e avançada da equação do quadripotencial eletromagnético de Podolsky, verificamos um limite importante da teoria: o limite de  $m \rightarrow +\infty$ . Obviamente, aplicamos este limite sobre a função de Green retardada, pois ela é a única que possui interesse físico. A importância deste limite se dá pelo fato que se o campo eletromagnético que conhecemos é o de Podolsky, então este limite explica o porquê de não o reconhecermos. Para verificarmos este limite, usamos a sugestão proposta por Frenkel em [9], escrevendo a função de Green de maneira semelhante a uma das representações da função delta. Infelizmente, não conseguimos mostrar que todas as funções  $f_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , que aparecem na representação da função de Green tendem a 1 quando  $m$  tende ao infinito, mas pelo menos para os quatro primeiros  $f_i$  o limite é verificável diretamente. Encerrando o capítulo 4, comentamos que o quadripotencial eletromagnético de Podolsky pode ser visto como o quadripotencial de Maxwell corrigido pelo quadripotencial solução da equação de Klein-Gordon-Fock e obtivemos os potenciais de Liénard-Wiechert-Podolsky para uma carga puntual em movimento. Obviamente, as expressões exatas destes potenciais exigem o conhecimento do quadrivetor posição da partícula, de modo que nossa ideia foi apenas apresentá-las neste trabalho.

De um modo geral podemos concluir que a Eletrodinâmica de Podolsky descreveu satisfatoriamente os fenômenos eletromagnéticos abordados nesta dissertação. O fato é que a Eletrodinâmica de Podolsky, além de descrever os fenômenos eletromagnéticos quantitativamente, também resolve problemas da Eletrodinâmica de Maxwell, tudo a nível clássico. Por isso, isto é suficiente para que esta generalização da teoria de Maxwell receba a atenção da comunidade científica. As possibilidades sobre novos temas e perspectivas sobre a teoria são apresentadas na próxima seção.

## 5.2 Perspectivas futuras

Tendo em vista o que foi desenvolvido neste trabalho, acreditamos que algumas perspectivas futuras possam ser consideradas. Antecipando uma pergunta, as propostas que apresentaremos agora ainda não foram investigadas, sendo que nosso embasamento

para propô-las reside apenas na ideia de extensão do que foi realizado nesta dissertação. Comentaremos sobre cada uma delas a seguir, separando-as por capítulo.

Sobre o tema apresentado no capítulo 2, vimos que a Eletrodinâmica de Podolsky tem como simetria interna é conservação da carga elétrica. Esta simetria aparece devido à invariância da teoria de Podolsky pelo grupo  $U(1)$  local, que é um grupo abeliano. Nossa proposta é tratar de teorias de campo de segunda ordem cujas simetrias internas estejam relacionadas a invariância da teoria por grupos não-abelianos. Isto é interessante pois, por exemplo, se o grupo em questão for o  $SU(3)$  local, teremos uma generalização da Cromodinâmica Quântica para uma teoria de segunda ordem. Para o caso do grupo  $SU(2) \otimes U(1)$ , a generalização possível para teorias de ordem superior seria da teoria Eletrofaca. Estas são possibilidades de generalizações que podem trazer um entendimento melhor sobre os fenômenos físicos analisados.

Sobre o tema abordado no capítulo 3, a proposta para estudos futuros é a obtenção das equações de Podolsky em meios materiais. Como a referência [16] mostra para o caso de Maxwell, a dedução depende do cálculo de valores médios dos campos elétricos e magnéticos das cargas e correntes envolvidas. Em geral, o número de elementos do tipo fonte (carga ou corrente) é da ordem do número de Avogadro, fazendo com que seja necessário calcular a média das densidades de fontes. Nossa ideia é a realização deste processo para a Eletrodinâmica de Podolsky. A obtenção das equações de Podolsky em meios materiais permitiria a análise de uma gama de fenômenos, como por exemplo analisar o comportamento da luz em meios materiais ou ainda efeitos de polarização e magnetização. Outros fenômenos próprios da matéria condensada poderiam ser investigados por meio destas equações. Desta forma, a concretização desta proposta abriria muitas possibilidades de análises de fenômenos por meio da aplicação da Eletrodinâmica de Podolsky.

Sobre o tema abordado no capítulo 4, nossa proposta é que uma aplicação dos resultados obtidos seja realizada. A baixa profundidade alcançada neste trabalho na teoria de Radiação sob a perspectiva da Eletrodinâmica de Podolsky faz com que nossa proposta de tema seja a simples aplicação dos resultados obtidos em diferentes sistemas. Apesar deste fato, a obtenção da função de Green da equação do quadripotencial eletromagnético de Podolsky mostrada neste trabalho permite que todos os resultados inerente a teoria de Radiação sejam investigados, além de possibilitar uma formulação covariante da teoria de Radiação. Dentre os sistemas plausíveis de serem estudados, destacamos três em especial. O primeiro sistema consiste de uma partícula carregada com velocidade constante. Esperamos que este sistema não irradie, mas sua confirmação é necessária. O segundo sistema que é interessante de se abordar é o caso de uma partícula submetida a uma força constante. Sabemos que a dinâmica de tal partícula é regida pela equação de Abraham-Lorentz. Deste modo, estudar a radiação devido a esta partícula pode mostrar

a validade ou não desta equação, já que outros cientistas afirmam que tal equação não descreve corretamente a dinâmica de uma partícula carregada eletricamente [37, 38]. O terceiro sistema sugerido é caracterizado por correntes que oscilam harmonicamente no tempo. Este tipo de sistema é interessante pois o mesmo pode ser uma primeira aproximação na descrição de antenas. Além disso, a realização desta proposta possibilita uma compreensão maior da Eletrodinâmica de Podolsky.

---

## REFERÊNCIAS

---

- 1 LAGRANGE, J. **Mécanique Analytique**. 1. ed. Paris: Mallet-Bachelier, 1853.
- 2 LEMOS, N. **Mecânica Analítica**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004.
- 3 OSTROGRADSKI, M. Mémoire sur les équations différentielles relatives au problème des isopérimètres. **Mem. Acad. St. Petersb.**, v. 4, p. 385–517, 1850.
- 4 PODOLSKY, B. A Generalized Electrodynamics Part I—Non-Quantum. **Phys. Rev.**, v. 62, n. 1-2, p. 68–71, 1942.
- 5 PODOLSKY, B.; KIKUCHI, C. A Generalized Electrodynamics Part II—Quantum. **Phys. Rev.**, v. 65, n. 7-8, p. 228–235, 1944.
- 6 MUŠICKI, D. On the canonical formalism with the derivatives of higher order. **Nouv. Ser.**, v. 23, p. 141–153, 1978.
- 7 BAKER, M.; BALL, J. S.; ZACHARIASEN, F. A non-perturbative calculation of the infrared limit of the axial gauge gluon propagator—I. **Nucl. Phys. B**, v. 186, n. 3, p. 531–559, 1981.
- 8 GALVÃO, C. A. P.; PIMENTEL, B. M. The canonical structure of Podolsky generalized electrodynamics. **Can. J. Phys.**, v. 66, n. 5, p. 460–466, 1988.
- 9 FRENKEL, J. 4/3 problem in classical electrodynamics. **Phys. Rev. E**, v. 54, n. 5, p. 5859–5862, 1996.
- 10 CUZINATTO, R. R.; MELO, C. A. M. de; POMPEIA, P. J. Second order gauge theory. **Ann. Phys.**, v. 322, n. 5, p. 1211–1232, 2007.
- 11 BONIN, C. A.; BUFALO, R.; PIMENTEL, B. M.; ZAMBRANO, G. E. R. Podolsky electromagnetism at finite temperature: Implications of the Stefan-Boltzmann law. **Phys. Rev. D**, v. 81, n. 2, p. 025003(1)–025003(6), 2010.
- 12 BUFALO, R.; PIMENTEL, B. M.; ZAMBRANO, G. E. R. Renormalizability of generalized quantum electrodynamics. **Phys. Rev. D**, v. 86, n. 12, p. 125023(1)–125023(8), 2012.
- 13 MACEDA, M.; MACÍAS, A. Noncommutative Landau problem in Podolsky's generalized electrodynamics. **Phys. Rev. D**, v. 79, n. 8, p. 087703(1)–087703(4), 2009.

- 14 BLAZHYEVSKA, M. The Casimir effect in the electrodynamics of Podolsky. **J. Phys. Stud.**, v. 16, n. 3, p. 3001(1)–3001(4), 2012.
- 15 ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. G. Vários títulos. In: **Classical Fields**. São Paulo: Instituto de Física Teórica, 2004. cap. 2-6, p. 39–156.
- 16 JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**. 3. ed. Hoboken: John Wiley & Son, Inc., 1998.
- 17 PERKINS, D. H. **Introduction to High Energy Physics**. 1. ed. Reading: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1972.
- 18 HAMERMESH, M. **Group Theory and Its Application to Physical Problems**. New York: Dover Publications, Inc., 1989.
- 19 KONOPLEVA, N. P.; POPOV, V. N. **Gauge Fields**. Newark: Harwood Academic Publishers, 1981.
- 20 NOETHER, E. Invariante Variationsprobleme. **Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen**, p. 235–257, 1918.
- 21 WEINBERG, S. **The Quantum Theory of Fields - Foundations**. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- 22 OMNÈS, R. **Introduction to Particle Physics**. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 1971.
- 23 BARUT, A. O. **Electrodynamics and Classical Theory of Fields & Particles**. New York: Dover Publications, Inc., 1964.
- 24 BONIN, C. A. **A Quantização da Eletrodinâmica de Podolsky em Equilíbrio Termodinâmico no Formalismo de Matsubara-Fradkin**. Tese (Doutorado) — Instituto de Física Teórica, São Paulo, 2011.
- 25 MONTESINOS, M.; FLORES, E. Symmetric energy-momentum tensor in Maxwell, Yang-Mills, and Proca theories obtained using only Noether's theorem. **Rev. Mex. Fis.**, v. 52, n. 1, p. 29–36, 2006.
- 26 PIMENTEL, B. M.; TEIXEIRA, R. G. Hamilton-Jacobi formulation for singular systems with second-order Lagrangians. **Il Nuovo Cimento B**, v. 111, n. 7, p. 841–854, 1996.
- 27 MILLIKAN, R. A. On the elementary electrical charge and the Avogadro constant. **Phys. Rev. Lett.**, v. 2, n. 2, p. 109–143, 1913.
- 28 ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. **Mathematical Methods for Physicists**. 5. ed. San Diego: Academic Press, 2001.
- 29 WATSON, G. N. **A Treatise on the Theory of Bessel Functions**. Cambridge: Cambridge University Press, 1922.
- 30 BATEMAN, H. **Higher Transcendental Functions**. Pasadena: California Institute of Technology, 1981.

- 31 RAY, M. W.; RUOKOKOSKI, E.; KANDEL, S.; MOTTONEN, M.; HALL, D. S. Observation of Dirac monopoles in a synthetic magnetic field. **Nature**, v. 505, p. 657–660, 2014.
- 32 GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. **Table of Integrals, Series and Products**. 7. ed. San Diego: Academic Press, 2007.
- 33 LORENTZ, H. A. **The Theory of Electrons**. 2. ed. New York: G. E. Stechert & Company, 1916.
- 34 ABRAHAM, M. Prinzipien der Dynamik des Elektrons. **Annalen der Physik**, v. 315, p. 105–179, 1902.
- 35 POINCARÉ, M. H. Sur la dynamique de l'électron. **Rendiconti del Circolo matematico di Palermo**, v. 21, p. 129–175, 1906.
- 36 MEDINA, R. Radiation reaction of a classical quasi-rigid extended particle. **J. Phys. A: Math. Gen.**, v. 39, p. 3801–3816, 2006.
- 37 ROHRLICH, F. Self-Energy and Stability of the Classical Electron. **Am. J. Phys.**, v. 28, p. 639–643, 1960.
- 38 ROHRLICH, F. **Classical Charged Particles**. 3. ed. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007.
- 39 GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo - Vol. 1**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2001.
- 40 ABLOWITZ, M. J.; FOKAS, A. S. **Complex Variables: Introduction and Applications**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- 41 BOGOLIUBOV, N. N.; SHIRKOV, D. V. **Introduction to the Theory of Quantized Fields**. 3. ed. Hoboken: John Wiley & Son, Inc., 1980.
- 42 BUTKOV, E. **Mathematical Physics**. 1. ed. Reading: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1973.
- 43 CRAWFORD, P. Os Sistemas de Unidades e a era de Planck. In: **O Universo Primordial**. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2008. cap. 1, p. 1–9.

---

## APÊNDICE A

---

# A FUNÇÃO DE GREEN DA EQUAÇÃO DO POTENCIAL ESCALAR ELÉTRICO DE PODOLSKY

---

### A.1 Introdução

Por meio da função de Green é possível obter a solução de equação diferencial não-homogênea. Existem diversas maneiras de se obter a função de Green de uma equação diferencial, tornando o método versátil e interessante de ser aplicado.

Nas equações da Eletrodinâmica, os casos não-homogêneos representam a presença de fontes de campos elétrico e magnético, isto é, indicam a existência de cargas e correntes. Como o método das funções de Green não exige a distinção do tipo de fonte em questão, esta arbitrariedade permite explorar várias configurações de cargas e/ou correntes.

Este apêndice apresenta o cálculo da função de Green da equação do potencial escalar elétrico de Podolsky, que é parte importante na Teoria de Multipolos.

### A.2 Função de Green da Equação do Potencial Escalar Elétrico de Podolsky

Considere a equação para o potencial escalar elétrico de Podolsky.

$$\left(\frac{1}{m^2}\nabla^2 - 1\right)\nabla^2\varphi = \rho, \quad \varphi = \varphi(\mathbf{r}), \quad (\text{A.1})$$

com  $m$  a constante de Podolsky,  $\varphi$  o potencial escalar elétrico e  $\rho$  a densidade de carga. As condições de contorno sobre o potencial  $\varphi$  são que o domínio do mesmo seja  $\mathbb{R}^3$  e que

tenda a zero quando  $r$  tende ao infinito,  $r \equiv \|\mathbf{r}\|$ .

Sabemos que a função de Green  $G$  da eq.(A.1) satisfaz

$$\left(\frac{1}{m^2}\nabla^2 - 1\right)\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (\text{A.2})$$

O operador  $\left(\frac{1}{m^2}\nabla^2 - 1\right)\nabla^2$  atua somente sobre a variável  $\mathbf{r}$ . As condições de contorno impostas para  $\varphi$  recaem sobre a função de Green  $G$ . Assim, nosso trabalho consiste em resolver a eq.(A.2) sob as condições de contorno mencionadas acima. Estas condições de contorno permitem tentarmos uma solução de (A.2) por transformada de Fourier [28].

Pode-se mostrar que o operador  $\left(\frac{1}{m^2}\nabla^2 - 1\right)\nabla^2$  é invariante por translações. Desta forma, a função de Green dependerá apenas da diferença entre os vetores  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$ , isto é,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Assim,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  e  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  dadas em termos de suas transformadas de Fourier são

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega_k} \tilde{G}(\mathbf{k}) \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d^3k, \quad (\text{A.3})$$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega_k} \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d^3k, \quad (\text{A.4})$$

com  $\Omega_k \equiv \mathbb{K}^3$ .<sup>1</sup> Nosso trabalho consiste em determinar  $\tilde{G}(\mathbf{k})$ . Substituindo as eq.(A.3) e (A.4) em (A.2) obtemos

$$\tilde{G}(\mathbf{k}) = \frac{m^2}{k^2(k^2 + m^2)}. \quad (\text{A.5})$$

com  $k = \|\mathbf{k}\|$ . Assim,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{m^2}{(2\pi)^3} \int_{\Omega_k} \frac{\exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d^3k}{k^2(k^2 + m^2)}. \quad (\text{A.6})$$

Devido à relação estreita entre  $\mathbb{K}^3$  e  $\mathbb{R}^3$ , esta integral se torna mais fácil usando coordenadas esféricas. Desta forma, a integral se torna

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{m^2}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\exp[ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| \cos(\theta_k)]}{k^2(k^2 + m^2)} k^2 \sin(\theta_k) d\theta_k d\varphi_k dk, \\ &= \frac{m^2}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi_k \int_0^{+\infty} \frac{1}{k^2 + m^2} \left( \int_0^\pi \exp[ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| \cos(\theta_k)] \sin(\theta_k) d\theta_k \right) dk. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Para detalhes sobre o espaço  $\mathbb{K}^3$ , veja o Anexo A.

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{m^2}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{k^2 + m^2} \left( \frac{2 \sin(k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) dk, \\
 &= \frac{2m^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k(k^2 + m^2)} dk, \\
 &= \frac{m^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k(k^2 + m^2)} dk.
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Observe que a nossa integral é a parte imaginária da seguinte integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k(k^2 + m^2)} dk = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k(k^2 + m^2)} dk}_0 + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k(k^2 + m^2)} dk, \tag{A.8}$$

pois a integral envolvendo  $\cos(k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)$  é nula devido ao integrando ser uma função ímpar em um intervalo de integração simétrico. Assim,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k(k^2 + m^2)} dk = -i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k(k^2 + m^2)} dk \tag{A.9}$$

e

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{m^2}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k(k^2 + m^2)} dk. \tag{A.10}$$

Para resolvermos esta integral, vamos estendê-la ao plano complexo. Observe que o integrando tem polos simples em  $k = 0, \pm im$  e que  $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| > 0$ . Assim, o contorno de integração  $C$  escolhido é dado por

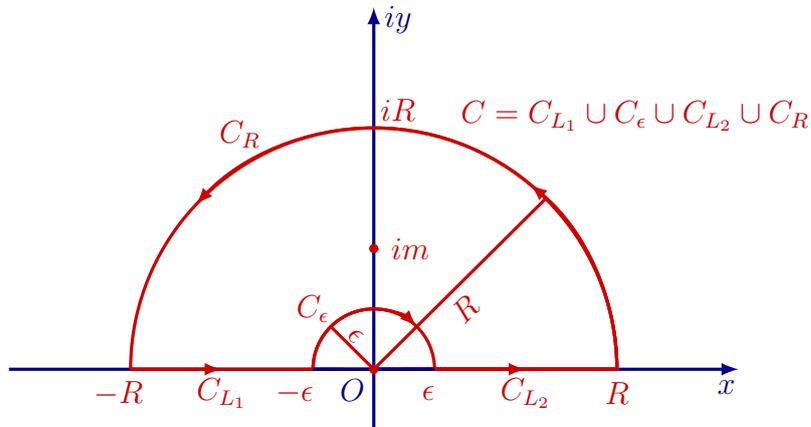


Figura 13 – Contorno de integração.

Agora, nosso problema se resume a resolver a seguinte integral  $I$  sobre o contorno  $C$  da fig.(13)

$$I = \oint_C \frac{\exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z(z^2 + m^2)} dz, \quad (\text{A.11})$$

tomando os limites de  $R \rightarrow +\infty$  e  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Pelo Teorema dos Resíduos [40] temos que

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z(z^2 + m^2)} dz &= 2\pi i \text{Res} \left( \frac{\exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z(z^2 + m^2)} : im \right), \\ &= 2\pi i \left( \frac{\exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z(z + im)} \right) \Big|_{z=im}, \\ &= -\frac{\pi i}{m^2} \exp(-m\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Como  $C = C = C_{L_1} \cup C_\epsilon \cup C_{L_2} \cup C_R$ , então podemos fazer

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z(z^2 + m^2)} dz &= \int_{C_{L_1}} \frac{\exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z(z^2 + m^2)} dz - \int_{(-C_\epsilon)} \frac{\exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z(z^2 + m^2)} dz \\ &\quad + \int_{C_{L_2}} \frac{\exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z(z^2 + m^2)} dz + \int_{C_R} \frac{\exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z(z^2 + m^2)} dz, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

sendo que  $(-C_\epsilon)$  indica que foi tomado o sentido inverso de integração na curva  $C_\epsilon$ . Uma das formas paramétricas das curvas  $C_{L_1}$ ,  $(-C_\epsilon)$ ,  $C_{L_2}$  e  $C_R$  são dadas abaixo

$$C_{L_1} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = k, -R \leq k \leq -\epsilon\}; \quad (\text{A.14})$$

$$(-C_\epsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \epsilon \exp(i\theta), 0 \leq \theta \leq \pi\}; \quad (\text{A.15})$$

$$C_{L_2} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = k, \epsilon \leq k \leq R\}; \quad (\text{A.16})$$

$$C_R = \{z \in \mathbb{C} \mid z = R \exp(i\theta), 0 \leq \theta \leq \pi\}; \quad (\text{A.17})$$

Utilizando estas parametrizações e tomando os limites de  $R \rightarrow +\infty$  e  $\epsilon \rightarrow 0$  temos que

$$\lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{C_{L_1}} \frac{\exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z(z^2 + m^2)} dz = \int_{-\infty}^0 \frac{\exp(ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k(k^2 + m^2)} dk \quad (\text{A.18})$$

e

$$\lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{C_{L_2}} \frac{\exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z(z^2 + m^2)} dz = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k(k^2 + m^2)} dk. \quad (\text{A.19})$$

Temos também que, pelo lema de Jordan [40],

$$\lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{C_R} \frac{\exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z(z^2 + m^2)} dz = 0. \quad (\text{A.20})$$

Segundo a referência [40], a integral em  $(-C_\epsilon)$  é

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \int_{(-C_\epsilon)} \frac{\exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z(z^2 + m^2)} dz &= i\pi \text{Res} \left( \frac{\exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z(z^2 + m^2)} : 0 \right), \\
 &= i\pi \left( \frac{\exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{(z^2 + m^2)} \right) \Big|_{z=0}, \\
 &= \frac{i\pi}{m^2}.
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

Logo, tomando os limites de  $R \rightarrow +\infty$  e  $\epsilon \rightarrow 0$  em ambos os lados da eq.(A.13) e usando (A.12), (A.18), (A.19), (A.20) e (A.21), temos

$$\begin{aligned}
 -\frac{\pi i}{m^2} \exp(-m\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) &= \int_{-\infty}^0 \frac{\exp(ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k(k^2 + m^2)} dk - \frac{i\pi}{m^2}, \\
 &+ \int_0^{+\infty} \frac{\exp(ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k(k^2 + m^2)} dk + 0, \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k(k^2 + m^2)} dk - \frac{i\pi}{m^2}.
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

Logo, obtemos o resultado da integral desejada.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k(k^2 + m^2)} dk = \frac{i\pi}{m^2} (1 - \exp(-m\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)). \tag{A.23}$$

Substituindo a eq.(A.23) em (A.10), temos

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{m^2}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k(k^2 + m^2)} dk, \\
 &= \frac{m^2}{(2\pi)^2 i} \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \frac{i\pi}{m^2} (1 - \exp(-m\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)).
 \end{aligned} \tag{A.24}$$

Portanto, a função de Green da equação do potencial escalar elétrico é dada por

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{(1 - \exp(-m\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|))}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}. \tag{A.25}$$

---

## APÊNDICE B

---

# A FUNÇÃO DE GREEN DA EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ MODIFICADA

---

### B.1 Introdução

A equação de Helmholtz e sua versão modificada aparecem em vários problemas de interesse físico, justificando a importância de se estudar as soluções das mesmas.

Por exemplo, a equação de Helmholtz,  $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$ , aparece como a parte espacial da equação da onda e também como a equação de Schrödinger independente do tempo para o caso de *espalhamento*. A sua versão modificada,  $\nabla^2\psi - k^2\psi = 0$ , surge como a parte espacial da equação da difusão e como a equação de Schrödinger independente do tempo para *estados ligados*.

Apesar disso, nossa atenção está voltada para um resultado interessante que podemos extrair por meio da função de Green da equação de Helmholtz modificada, como veremos a seguir.

### B.2 A Equação de Helmholtz Modificada e sua Função de Green

Nosso problema consiste em determinar a função de Green da equação de Helmholtz Modificada (EHM)

$$\nabla^2\psi - \sigma^2\psi = 0, \tag{B.1}$$

com  $\nabla^2$  o operador Laplaciano e  $\sigma$  uma constante real não-nula. A função de Green  $G$  da EHM satisfaz a seguinte equação

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \sigma^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (\text{B.2})$$

sendo que  $\nabla^2 - \sigma^2$  atua somente na variável  $\mathbf{r}$ . As condições de contorno para  $G$  na variável  $\mathbf{r}$  são

$$(i) \lim_{r \rightarrow +\infty} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad \text{e} \quad (ii) \text{Domínio de } G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathbb{R}^3, \quad (\text{B.3})$$

com  $r \equiv \|\mathbf{r}\|$ .

Sendo assim, obteremos esta função de Green por dois métodos diferentes:

- (a) via *Transformada de Fourier*;
- (b) via *Expansão em Série de Harmônicos Esféricos*;

O emprego do método (a) é apoiado na condição de contorno (i) que garante que  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  é absolutamente integrável em  $\mathbb{R}^3$  [28]. Já o emprego do método (b) requer apenas que  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  satisfaça condições suficientes de continuidade.

Veremos mais adiante que  $\nabla^2 - \sigma^2$  é não-singular, isto é, a transformada de Fourier da função de Green não tem polos no eixo real. Isto garante que a função de Green é única, de onde poderemos obter uma relação muito importante entre as duas formas da função de Green.

### B.2.1 Obtenção da Função de Green da EHM por Transformada de Fourier

Para começarmos, faremos a seguinte análise. Como o OHM se comporta por translações? Essa questão parece um tanto fora de contexto, mas se justifica no fato de que se o OHM for invariante por translações, a função de Green dependerá apenas da diferenças de suas variáveis, isto é,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Isso ajuda a delimitar a forma que a função de Green terá. Sendo assim, se fizermos uma transformação de coordenadas  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a}$  constante, temos então

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = x + a_x \implies \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \implies \frac{\partial}{\partial x'^2} = \frac{\partial}{\partial x^2}, \\ y &\rightarrow y' = y + a_y \implies \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial y}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \implies \frac{\partial}{\partial y'^2} = \frac{\partial}{\partial y^2}, \\ z &\rightarrow z' = z + a_z \implies \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial z}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \implies \frac{\partial}{\partial z'^2} = \frac{\partial}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Como  $\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$ , então  $\nabla'^2 = \nabla^2$ . Portanto  $\nabla^2$  é invariante por translações.

Sendo assim, apoiados na condição (i), escreveremos  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  e  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  em termos de suas transformadas de Fourier

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\Omega_k} \tilde{G}(\mathbf{k}) \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d^3k, \quad (\text{B.4})$$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega_k} \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d^3k, \quad (\text{B.5})$$

com  $\Omega_k \equiv \mathbb{K}^3$ .<sup>1</sup> Para determinar  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  precisamos encontrar  $\tilde{G}(\mathbf{k})$ . Assim, substituindo em (B.2) obtemos que

$$\tilde{G}(\mathbf{k}) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{k^2 + \sigma^2}, \quad (\text{B.6})$$

com  $k = \|\mathbf{k}\|$ . Veja que  $\tilde{G}(\mathbf{k})$  não possui polos no eixo real, mostrando que  $G$  é única sob as condições (B.3). Desta forma,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\Omega} \frac{\exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d^3k}{k^2 + \sigma^2}. \quad (\text{B.7})$$

Esta integral no espaço  $\mathbb{K}^3$  em coordenadas cartesianas  $(k_x, k_y, k_z)$  é dada por

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[ik_x(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_x + ik_y(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_y + ik_z(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_z]}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \sigma^2} dk_x dk_y dk_z. \quad (\text{B.8})$$

Esta integral se torna mais fácil de se resolver em um sistema de coordenadas esféricas. Isto é feito propondo a seguinte mudança de variável

$$k_x = k \sin(\theta_k) \cos(\varphi_k); \quad k_y = k \sin(\theta_k) \sin(\varphi_k); \quad k_z = k \cos(\theta_k). \quad (\text{B.9})$$

com  $0 \leq \theta_k \leq \pi$ ,  $0 < \varphi_k \leq 2\pi$  e  $k \geq 0$ . Deste modo, a integral se torna

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\exp[ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| \cos(\theta_k)]}{k^2 + \sigma^2} k^2 \sin(\theta_k) d\theta_k d\varphi_k dk, \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi_k \int_0^{+\infty} \frac{k^2}{k^2 + \sigma^2} \left( \int_0^\pi \exp[ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| \cos(\theta_k)] \sin(\theta_k) d\theta_k \right) dk, \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{k^2}{k^2 + \sigma^2} \left( \int_0^\pi \exp[ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| \cos(\theta_k)] \sin(\theta_k) d\theta_k \right) dk. \end{aligned}$$

A integral entre parênteses é resolvida fazendo  $u = k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| \cos(\theta_k)$ . Logo,

$$\int_0^\pi \exp[ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| \cos(\theta_k)] \sin(\theta_k) d\theta_k = \frac{2 \sin(k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}. \quad (\text{B.10})$$

<sup>1</sup> Para detalhes sobre o espaço  $\mathbb{K}^3$ , consulte o Anexo A.

Portanto,

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\frac{2}{(2\pi)^2 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \int_0^{+\infty} \frac{k \sin(k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k^2 + \sigma^2} dk, \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \sin(k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k^2 + \sigma^2} dk. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Observe que a nossa integral é a parte imaginária da seguinte integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \exp(ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k^2 + \sigma^2} dk = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \cos(k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k^2 + \sigma^2} dk}_0 + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \sin(k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k^2 + \sigma^2} dk. \quad (\text{B.12})$$

Como a integral envolvendo  $\cos(k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)$  é nula devido ao integrando ser uma função ímpar em um intervalo de integração simétrico, temos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \sin(k\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k^2 + \sigma^2} dk = -i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \exp(ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k^2 + \sigma^2} dk, \quad (\text{B.13})$$

e assim,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{i}{(2\pi)^2 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \exp(ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k^2 + \sigma^2} dk. \quad (\text{B.14})$$

Note que o integrando tem polos simples em  $k = \pm i|\sigma|$ . Desta forma, para resolvermos esta integral, considere o seguinte contorno de integração  $C$

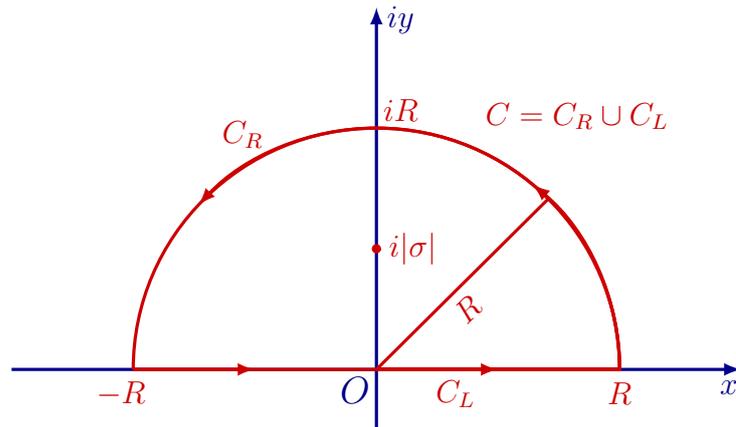


Figura 14 – Contorno de integração.

Assim, nosso problema é substituído pela resolução da integral  $I$

$$I = \oint_C \frac{z \exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z^2 + \sigma^2} dz, \quad (\text{B.15})$$

que veremos a seguir que está relacionada com a integral na expressão da função de Green da eq.(B.14).

A solução da eq.(B.15) é dada pelo Teorema dos Resíduos [40]

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{z \exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z^2 + \sigma^2} dz &= 2\pi i \text{Res} \left( \frac{z \exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z^2 + \sigma^2} : i|\sigma| \right), \\ &= 2\pi i \left( \frac{z \exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z + i|\sigma|} \right) \Big|_{z=i|\sigma|}, \\ &= i\pi \exp(-|\sigma|\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|). \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Como  $C = C_R \cup C_L$ , então podemos fazer

$$\oint_C \frac{z \exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z^2 + \sigma^2} dz = \int_{C_R} \frac{z \exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z^2 + \sigma^2} dz + \int_{C_L} \frac{z \exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z^2 + \sigma^2} dz. \quad (\text{B.17})$$

sendo  $C_R$  e  $C_L$  são dadas na fig.(14). Uma das formas paramétricas das curvas  $C_L$  e  $C_R$  são dadas abaixo

$$C_L = \{z \in \mathbb{C} \mid z = k, -R \leq k \leq R\}, \quad C_R = \{z \in \mathbb{C} \mid z = R \exp(i\theta), 0 \leq \theta \leq \pi\}. \quad (\text{B.18})$$

Assim, usando estas parametrizações, temos

$$\int_{C_L} \frac{z \exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z^2 + \sigma^2} dz = \int_{-R}^R \frac{k \exp(ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k^2 + \sigma^2} dk \quad (\text{B.19})$$

e

$$\int_{C_R} \frac{z \exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z^2 + \sigma^2} dz = \int_0^\pi \frac{R \exp(i\theta) \exp[iR \exp(i\theta)\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|]}{R^2 \exp(2i\theta) + \sigma^2} iR \exp(i\theta) d\theta. \quad (\text{B.20})$$

Ao analisarmos o módulo da integral da eq.(B.20), vemos que<sup>2</sup>

$$\left| \int_{C_R} \frac{z \exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z^2 + \sigma^2} dz \right| \leq \frac{R [1 - \exp(-R\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)]}{(R^2 - \sigma^2) \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}. \quad (\text{B.21})$$

Assim, pode-se mostrar que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_L} \frac{z \exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z^2 + \sigma^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \exp(ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k^2 + \sigma^2} dk, \quad (\text{B.22})$$

<sup>2</sup> Esta parte é feita aplicando a desigualdade triangular para integrais. Para prosseguir, é necessário verificar que  $|R^2 + \sigma^2|^{-1} \leq (R^2 - \sigma^2)^{-1}$ . Depois, como  $\sin(\theta)$  é simétrico com relação ao eixo  $x = \pi/2$ , troca-se o intervalo de integração de  $[0, \pi]$  para  $[0, \pi/2]$  e multiplica-se a integral por 2. Feito isso, usa-se que  $\sin(\theta) \geq 2\theta/\pi$  em  $[0, \pi/2]$  e efetua-se a integral com esta substituição, resultado na expressão dada.

que é a integral que desejamos resolver, e que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{C_R} \frac{z \exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z^2 + \sigma^2} dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{R [1 - \exp(-R\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)]}{(R^2 - \sigma^2) \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = 0. \quad (\text{B.23})$$

Isto equivale a dizer que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} \frac{z \exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z^2 + \sigma^2} dz = 0. \quad (\text{B.24})$$

Usando (B.16) e (B.17) temos

$$i\pi \exp(-|\sigma|\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) = \int_{C_R} \frac{z \exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z^2 + \sigma^2} dz + \int_{C_L} \frac{z \exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z^2 + \sigma^2} dz. \quad (\text{B.25})$$

Podemos tomar o limite de  $R \rightarrow +\infty$  e usar as eq.(B.22) e (B.24).

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow +\infty} i\pi \exp(-|\sigma|\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} \frac{z \exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z^2 + \sigma^2} dz + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_L} \frac{z \exp(iz\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{z^2 + \sigma^2} dz, \\ i\pi \exp(-|\sigma|\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) &= 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \exp(ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k^2 + \sigma^2} dk. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \exp(ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k^2 + \sigma^2} dk = i\pi \exp(-|\sigma|\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|) \quad (\text{B.26})$$

Portanto,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  é dada então por

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{i}{(2\pi)^2 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \exp(ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{k^2 + \sigma^2} dk, \\ &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-|\sigma|\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

## B.2.2 Obtenção da Função de Green da EHM por Expansão em Série de Harmônicos Esféricos

Agora, obteremos a função de Green da EHM por expansão em série de Harmônicos Esféricos. Formalmente, propomos que  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  seja escrita em coordenadas esféricas, isto é,  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(r, \theta, \varphi, r', \theta', \varphi')$ , que na base dos Harmônicos Esféricos, é dada por

$$G(r, \theta, \varphi, r', \theta', \varphi') = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} C_{ml}(r, r', \theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (\text{B.28})$$

com  $r, r' \geq 0$ ;  $0 \leq \theta, \theta' \leq \pi$ ;  $0 < \varphi, \varphi' \leq 2\pi$  e  $Y_l^m$  são os Harmônicos Esféricos que satisfazem

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \bar{Y}_l^m(\theta, \varphi) Y_{l'}^{m'}(\theta, \varphi) \sin(\theta) d\varphi d\theta = \delta_{ll'} \delta^{mm'} \quad (\text{Ortonormalidade}) \quad (\text{B.29})$$

e

$$\sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \bar{Y}_l^m(\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi) = \frac{\delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi')}{\sin(\theta)} \quad (\text{Completeza}) \quad (\text{B.30})$$

com  $\bar{Y}_l^m$  o complexo conjugado de  $Y_l^m$  e as coordenadas sem linha são referentes ao vetor  $\mathbf{r}$  enquanto que as coordenadas com linha são referentes ao vetor  $\mathbf{r}'$ . As condições de contorno impostas a  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  recaem sobre  $C_{ml}(r, r', \theta', \varphi')$ . Para trabalharmos, delimitaremos a região de interesse de  $\mathbb{R}^3$  como sendo todos os pontos exterior a uma esfera centrada na origem e de raio  $a$ , e as condições de contorno são

$$(i) \lim_{r \rightarrow +\infty} C_{ml}(r, r', \theta', \varphi') = 0; \quad (ii) C_{ml}(a, r', \theta', \varphi') = 0, \quad \forall l, m; \quad (\text{B.31})$$

e depois tomaremos o limite de  $a \rightarrow 0$  para cobrir todo o  $\mathbb{R}^3$ .

Com as condições de contorno bem estabelecidas, obteremos a função de Green. O operador Laplaciano em coordenadas esféricas é dado por

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (\text{B.32})$$

e a função Delta por

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi')}{r^2 \sin(\theta)}. \quad (\text{B.33})$$

Sendo assim, substituindo em (B.2) temos

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - \sigma^2) G(r, \theta, \varphi, r', \theta', \varphi') &= \frac{\delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi')}{r^2 \sin(\theta)}, \\ \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} (\nabla^2 - \sigma^2) C_{ml}(r, r', \theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi) &= \frac{\delta(r - r')}{r^2} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \bar{Y}_l^m(\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi), \\ \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} (\nabla^2 - \sigma^2) C_{ml}(r, r', \theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi) &= \frac{\delta(r - r')}{r^2} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \bar{Y}_l^m(\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi), \end{aligned}$$

onde usamos a relação de completeza dos Harmônicos Esféricos. Logo,

$$\sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left[ (\nabla^2 - \sigma^2) C_{ml}(r, r', \theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi) - \frac{\delta(r - r')}{r^2} \bar{Y}_l^m(\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi) \right] = 0. \quad (\text{B.34})$$

Usando (B.32) e (B.31), é possível mostrar que<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \nabla^2 C_{ml}(r, r', \theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi) &= \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} C_{ml}(r, r', \theta', \varphi') \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} C_{ml}(r, r', \theta', \varphi') \right] \\ &\times Y_l^m(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Desta forma temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left[ (\nabla^2 - \sigma^2) C_{ml}(r, r', \theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi) - \frac{\delta(r-r')}{r^2} \bar{Y}_l^m(\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi) \right], \\ 0 &= \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left[ \frac{1}{r^2} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} C_{ml}(r, r', \theta', \varphi') \right) - \left( \sigma^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) C_{ml}(r, r', \theta', \varphi') \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta(r-r')}{r^2} \bar{Y}_l^m(\theta', \varphi') \right] Y_l^m(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Como os Harmônicos Esféricos formam um conjunto linearmente independente, então

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} C_{ml}(r, r', \theta', \varphi') \right) - (r^2 \sigma^2 + l(l+1)) C_{ml}(r, r', \theta', \varphi') = \delta(r-r') \bar{Y}_l^m(\theta', \varphi'), \quad \forall l, m.$$

Observe que a única dependência do índice  $m$ , além de que as únicas partes que dependem dos ângulos  $\theta'$  e  $\varphi'$  são em  $C_{ml}(r, r', \theta', \varphi')$  e  $\bar{Y}_l^m(\theta', \varphi')$ . Sendo assim, podemos propôr o seguinte *ansatz*

$$C_{ml}(r, r', \theta', \varphi') = D_l(r, r') \bar{Y}_l^m(\theta', \varphi'). \quad (\text{B.37})$$

Assim, temos

$$r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} D_l(r, r') + 2r \frac{\partial}{\partial r} D_l(r, r') - (r^2 \sigma^2 + l(l+1)) D_l(r, r') = \delta(r-r'), \quad \forall l \quad (\text{B.38})$$

e as condições de contorno recaem sobre  $D_l(r, r')$ .

$$(i) \lim_{r \rightarrow +\infty} D_l(r, r') = 0 \quad \text{e} \quad (ii) D_l(a, r') = 0, \quad \forall l. \quad (\text{B.39})$$

Fazendo uma mudança de variável  $x = |\sigma|r$  e  $x' = |\sigma|r'$  e denotando  $D_l(x, x') = |\sigma| E_l(x, x')$  temos que

$$x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_l(x, x') + 2x \frac{\partial}{\partial x} E_l(x, x') - (x^2 + l(l+1)) E_l(x, x') = \delta(x-x') \quad \forall \quad (\text{B.40})$$

<sup>3</sup> Esta parte é feita abrindo  $\nabla^2 C_{ml}(r, r', \theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi)$ . Como  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  não depende de  $r$ , ele é visto como constante com respeito às derivadas com relação a  $r$ , e por isso pode ser retirado da derivada. O mesmo ocorre com  $C_{ml}(r, r', \theta', \varphi')$  com relação às derivadas com relação a  $\theta$  e  $\varphi$ . Para prosseguir, é necessário verificar que  $L^2 Y_l^m(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_l^m(\theta, \varphi)$ , onde  $L^2 = -\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$  (a notação  $L^2$  é usada devido a relação que este operador e o operador de Casimir da Mecânica Quântica da teoria de Momento Angular). Sendo assim, substituindo-se  $L^2 Y_l^m(\theta, \varphi)$  por  $l(l+1) Y_l^m(\theta, \varphi)$  na expressão para  $\nabla^2 C_{ml}(r, r', \theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi)$  e se obtém a expressão dada.

Vemos que, para a variável  $x$ , a eq.(B.40) homogênea tem a seguinte forma

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} F(x) + 2x \frac{d}{dx} F(x) - (x^2 + l(l+1)) F(x) = 0. \quad (\text{B.41})$$

Esta é equação de Bessel esférica modificada de ordem  $l$ . As soluções desta equação são as funções  $i_l$  e  $k_l$  cujas formas são dadas

$$i_l(x) = i^{-l} j_l(ix), \quad (\text{B.42a})$$

$$k_l(x) = -i^l h_l^{(1)}(ix), \quad (\text{B.42b})$$

com  $j_l$  a função esférica de Bessel de ordem  $l$  e de primeira espécie e  $h_l^{(1)}$  é a função de Hankel de primeira espécie e de ordem  $l$ . Existem outras definições, e uma muito usada é dada em termos das funções  $I_{l+1/2}$  e  $K_{l+1/2}$  que são soluções da equação de Bessel modificada.

$$i_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} I_{l+1/2}(x) \quad \text{e} \quad k_l(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} K_{l+1/2}(x), \quad (\text{B.43})$$

com

$$I_l(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{\Gamma(l+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{(2n+k)} \quad \text{e} \quad K_l(x) = \lim_{k \rightarrow l} \frac{\pi}{2} \frac{I_{-k}(x) - I_k(x)}{\sin(k\pi)}. \quad (\text{B.44})$$

As formas assintóticas de  $i_l(x)$  e  $k_l(x)$  serão de grande utilidade neste apêndice. Elas são dadas por [28]

$$i_l(x) \approx \frac{\exp(x)}{2x}, \quad \text{e} \quad k_l(x) \approx \frac{\exp(-x)}{x}, \quad \text{se } x \gg \frac{l(l+1)}{2}, \quad (\text{B.45})$$

e

$$i_l(x) \approx \frac{x^l}{(2l+1)!!}, \quad \text{e} \quad k_l(x) \approx \frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}, \quad \text{se } x \ll 1, \quad (\text{B.46})$$

sendo que  $k!!$  significa o duplo fatorial de  $k$ .

As funções  $i_l$  e  $k_l$  são duas funções linearmente independentes. Isto porque pode-se mostrar que o wronskiano  $W$  destas duas funções é<sup>4</sup>

$$W [i_l(x), k_l(x)] (x) = \begin{vmatrix} i_l(x) & k_l(x) \\ i_l'(x) & k_l'(x) \end{vmatrix} = -\frac{1}{x^2} \neq 0 \quad (\text{B.47})$$

<sup>4</sup> Analisando uma equação diferencial da forma  $p(t)y'' + q(t)y' + r(t)y = 0$ , o wronskiano de duas soluções desta equação diferencial é dada pela equação diferencial  $p(t)W' + q(t)W = 0$ , cuja solução é proporcional a  $\exp[\int q(t)/p(t)dt]$ . Sendo assim, aplica-se este método ao caso anterior e verifica-se que  $W[i_l(x), k_l(x)] = C/x^2$ , onde  $C$  é a constante de proporcionalidade. Depois, usa-se da definição do Wronskiano em termos do determinante simbólico para o caso de  $x \gg l(l+1)/2$  e para o caso  $x \ll 1$  e constata-se que  $C = -1$ .

Voltando a eq.(B.40), constatamos que  $E_l(x, x')$  é a função de Green da equação de Bessel modificada. Existem diversas formas de se obter a função de Green de um determinado operador. A que usaremos está baseada no estudo de operador diferenciais lineares de segunda ordem, já que a equação esférica de Bessel modificada é desta forma. Estes operadores têm a forma geral

$$L = f_0(t) \frac{d^2}{dt^2} + f_1(t) \frac{d}{dt} + f_2(t). \quad (\text{B.48})$$

com  $f_0$ ,  $f_1$  e  $f_2$  funções, geralmente contínuas. Se  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são duas soluções linearmente independentes de  $Lx(t) = 0$ , isto é,  $Lx_j(t) = 0$  e  $\sum_j \alpha^j x_j = 0$ , com  $\alpha^j = 0$  para  $j = 1, 2$ , então a função de Green deste operador é dada por

$$G(t, t') = \begin{cases} a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) & , t > t' \\ a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) + \frac{x_2(t')x_1(t) - x_1(t')x_2(t)}{f_0(t')W(t')} & , t < t' \end{cases}, \quad (\text{B.49})$$

com  $W(t') = W[x_1(t'), x_2(t')]$ . As constantes  $a_1$  e  $a_2$  são determinadas pelas condições de contorno. Assim, para o nosso caso, temos

$$E_l(x, x') = \begin{cases} a_1 i_l(x) + a_2 k_l(x) & , x > x' \\ a_1 i_l(x) + a_2 k_l(x) + i_l(x')k_k(x) - k_l(x')i_l(x) & , x < x' \end{cases}. \quad (\text{B.50})$$

Em termos de  $D_l(r, r')$  temos

$$D_l(r, r') = \begin{cases} (a_1 i_l(|\sigma|r) + a_2 k_l(|\sigma|r)) |\sigma| & , r > r' \\ (a_1 i_l(|\sigma|r) + a_2 k_l(|\sigma|r) + i_l(|\sigma|r')k_k(|\sigma|r) - k_l(|\sigma|r')i_l(|\sigma|r)) |\sigma| & , r < r' \end{cases} \quad (\text{B.51})$$

Aplicando a condição de contorno (i) da eq.(B.39) na parte em que  $r > r'$  e usando a forma assintótica de  $i_l(|\sigma|r)$  e  $k_l(|\sigma|r)$  para  $r \gg l(l+1)/(2|\sigma|)$ , temos

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} D_l(r, r') &= \lim_{r \rightarrow +\infty} (a_1 i_l(|\sigma|r) + a_2 k_l(|\sigma|r)) |\sigma|, \\ &= a_1 |\sigma| \lim_{r \rightarrow +\infty} i_l(|\sigma|r) + a_2 |\sigma| \lim_{r \rightarrow +\infty} k_l(|\sigma|r), \\ &= a_1 |\sigma| \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\exp(|\sigma|r)}{2|\sigma|r} + a_2 |\sigma| \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\exp(-|\sigma|r)}{|\sigma|r}, \\ &= a_1 |\sigma| (+\infty) + a_2 |\sigma| (0), \\ &= a_1 |\sigma| (+\infty) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

Assim, devemos fazer  $a_1 = 0$ . Desta forma,  $D_l(r, r')$  fica

$$D_l(r, r') = \begin{cases} a_2 |\sigma| k_l(|\sigma|r) & , r > r' \\ (a_2 k_l(|\sigma|r) + i_l(|\sigma|r')k_k(|\sigma|r) - k_l(|\sigma|r')i_l(|\sigma|r)) |\sigma| & , r < r' \end{cases} \quad (\text{B.53})$$

Aplicando agora a condição de contorno (ii) da eq.(B.39) na parte em que  $r < r'$ , obtemos

$$D_l(a, r') = (a_2 k_l(|\sigma|a) + i_l(|\sigma|r') k_k(|\sigma|a) - k_l(|\sigma|r') i_l(|\sigma|a)) |\sigma| = 0. \quad (\text{B.54})$$

Logo,

$$a_2 = \frac{k_l(|\sigma|r') i_l(|\sigma|a) - i_l(|\sigma|r') k_k(|\sigma|a)}{k_l(|\sigma|a)}. \quad (\text{B.55})$$

Substituindo em  $D_l(r, r')$  temos

$$D_l(r, r') = \begin{cases} \frac{k_l(|\sigma|r)}{k_l(|\sigma|a)} [k_l(|\sigma|r') i_l(|\sigma|a) - i_l(|\sigma|r') k_l(|\sigma|a)] |\sigma| & , r > r' \\ \frac{k_l(|\sigma|r')}{k_l(|\sigma|a)} [k_l(|\sigma|r) i_l(|\sigma|a) - i_l(|\sigma|r) k_l(|\sigma|a)] |\sigma| & , r < r' \end{cases} \quad (\text{B.56})$$

ou de maneira mais compacta

$$D_l(r, r') = \frac{k_l(|\sigma|r_>)}{k_l(|\sigma|a)} [k_l(|\sigma|r_<) i_l(|\sigma|a) - i_l(|\sigma|r_<) k_l(|\sigma|a)] |\sigma| \quad (\text{B.57})$$

com  $r_> \equiv$  Maior de  $(r, r')$  e  $r_< \equiv$  Menor de  $(r, r')$ . Assim,

$$\begin{aligned} C_{ml}(r, r', \theta', \varphi') &= |\sigma| \frac{k_l(|\sigma|r_>)}{k_l(|\sigma|a)} [k_l(|\sigma|r_<) i_l(|\sigma|a) - i_l(|\sigma|r_<) k_l(|\sigma|a)] \bar{Y}_l^m(\theta', \varphi'), \\ &= \left[ \frac{i_l(|\sigma|a)}{k_l(|\sigma|a)} |\sigma| k_l(|\sigma|r_<) k_l(|\sigma|r_>) - |\sigma| k_l(|\sigma|r_>) i_l(|\sigma|r_<) \right] \bar{Y}_l^m(\theta', \varphi'). \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

Ao tomarmos o limite de  $a \rightarrow 0$  em  $C_{ml}(r, r', \theta', \varphi')$  temos

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} C_{ml}(r, r', \theta', \varphi') &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[ \frac{i_l(|\sigma|a)}{k_l(|\sigma|a)} |\sigma| k_l(|\sigma|r_<) k_l(|\sigma|r_>) \right. \\ &\quad \left. - |\sigma| k_l(|\sigma|r_>) i_l(|\sigma|r_<) \right] \bar{Y}_l^m(\theta', \varphi'), \\ &= \left[ \left( \lim_{a \rightarrow 0} \frac{i_l(|\sigma|a)}{k_l(|\sigma|a)} \right) |\sigma| k_l(|\sigma|r_<) k_l(|\sigma|r_>) \right. \\ &\quad \left. - |\sigma| k_l(|\sigma|r_>) i_l(|\sigma|r_<) \right] \bar{Y}_l^m(\theta', \varphi'). \end{aligned}$$

Para resolver este limite, usaremos a forma assintótica de  $i_l(|\sigma|r)$  e  $k_l(|\sigma|r)$  para  $r \ll 1/|\sigma|$ .

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{i_l(|\sigma|a)}{k_l(|\sigma|a)} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(|\sigma|a)^l (|\sigma|a)^{l+1}}{(2l+1)!! (2l-1)!!} = \frac{|\sigma|^{2l+1}}{(2l+1)!! (2l-1)!!} \lim_{a \rightarrow 0} a^{2l+1} = 0. \quad (\text{B.59})$$

Logo,

$$\lim_{a \rightarrow 0} C_{ml}(r, r', \theta', \varphi') = -|\sigma| i_l(|\sigma|r_<) k_l(|\sigma|r_>) \bar{Y}_l^m(\theta', \varphi').$$

Portanto, a função de Green do OHM é dada por

$$G(r, \theta, \varphi, r', \theta', \varphi') = - \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{+l} |\sigma| i_l(|\sigma| r_{<}) k_l(|\sigma| r_{>}) \bar{Y}_l^m(\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (\text{B.60})$$

As coordenadas angulares de  $\mathbf{r}$  são  $\theta$  e  $\varphi$ , e de  $\mathbf{r}'$  são  $\theta'$  e  $\varphi'$ . Sendo assim, podemos utilizar o teorema da adição dos Harmônicos Esféricos apresentado no Anexo B. Este teorema nos diz que

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \bar{Y}_l^m(\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (\text{B.61})$$

sendo  $P_l$  o polinômio de Legendre de grau  $l$  e  $\gamma$  o menor ângulo entre os vetores  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$ . Logo,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = - \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(2l+1)}{4\pi} |\sigma| i_l(|\sigma| r_{<}) k_l(|\sigma| r_{>}) P_l(\cos \gamma). \quad (\text{B.62})$$

Comparando com a eq.(B.27) temos que

$$-\frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-|\sigma| \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = - \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(2l+1)}{4\pi} |\sigma| i_l(|\sigma| r_{<}) k_l(|\sigma| r_{>}) P_l(\cos \gamma), \quad (\text{B.63})$$

ou melhor

$$\frac{\exp(-|\sigma| \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = |\sigma| \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) i_l(|\sigma| r_{<}) k_l(|\sigma| r_{>}) P_l(\cos \gamma). \quad (\text{B.64})$$

Esta é uma expressão muito conhecida que utilizaremos na Expansão Multipolar na Eletrodinâmica de Podolsky.

---

## APÊNDICE C

---

# A FUNÇÃO DE GREEN DA EQUAÇÃO DO POTENCIAL ESCALAR ELÉTRICO DE PODOLSKY PARA A EXPANSÃO MULTIPOLAR

---

### C.1 Introdução

No capítulo 3 vimos que, dada a função de Green da equação do potencial escalar elétrico de Podolsky em termos de uma série infinita, a aplicação da condição de aproximação multipolar para o caso genérico se mostrou difícil devido à forma da série. Restaram-nos duas opções: (1) abandonarmos a série obtida e procurar por outra que seja possível implementar a condição de aproximação multipolar ou (2) reescrever a condição de aproximação multipolar de modo que podemos utilizar a série obtida.

A opção escolhida foi a segunda. Entretanto, a nova forma da condição de aproximação multipolar ainda impôs que para a mesma ser aplicável, seria necessário reescrever a série que representa a função de Green.

Este apêndice mostra como reescrever a função de Green da equação do potencial escalar elétrico de Podolsky de modo a implementar a expansão multipolar.

### C.2 Função de Green para a Expansão Multipolar

Considere a equação para o potencial escalar elétrico de Podolsky.

$$\left(\frac{1}{m^2}\nabla^2 - 1\right)\nabla^2\varphi = \rho, \quad \varphi = \varphi(\mathbf{r}), \quad (\text{C.1})$$

com  $m$  a constante de Podolsky,  $\varphi$  o potencial escalar elétrico e  $\rho$  a densidade de carga. Como vimos no Apêndice A, a função de Green  $G$  da eq.(C.1) é dada por

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1 - \exp(-m\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right]. \quad (\text{C.2})$$

A maneira de escrever  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  em termos de uma série infinita decorre da teoria de funções especiais. De [28] e do Apêndice B, é possível mostrar que  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  pode ser expressa por

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{+\infty} \left[ \left( \frac{r'}{r} \right)^l - (2l+1)(mr)i_l(mr')k_l(mr) \right] P_l(\cos \gamma). \quad (\text{C.3})$$

A condição de aproximação multipolar reescrita é dada por

$$mr' \ll 1 \quad \text{e} \quad mr \gtrsim 1. \quad (\text{C.4})$$

Para implementar esta condição de aproximação multipolar precisamos reescrever a eq.(C.3). A aplicação de (C.4) na parte de  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  que independe de  $m$  já garante o truncamento sob a justificativa que  $(r'/r)^l \gg (r'/r)^{l+1}$ . Já a parte de  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  que depende de  $m$  precisa ser reescrita. Para tanto, note que podemos separá-la em duas partes

$$\frac{\exp(-m\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{+\infty} \left[ i_{2l}(mr')F_{2l}(r, r', m) + i_{2l+1}(mr')F_{2l+1}(r, r', m) \right], \quad (\text{C.5})$$

com

$$F_l(r, r', m) = (2l+1)(mr)k_l(mr)P_l(\cos \gamma), \quad l \in \mathbb{N}. \quad (\text{C.6})$$

Analisaremos primeiramente a soma que envolve  $F_{2l}(r, r', m)$ . Explicitando a soma

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{+\infty} i_{2l}(mr')F_{2l}(r, r', m) &= \left[ i_{2,0}(mr')F_{2,0}(r, r', m) + i_{2,1}(mr')F_{2,1}(r, r', m) \right. \\ &\quad + i_{2,2}(mr')F_{2,2}(r, r', m) + \cdots + i_{2,p}(mr')F_{2,p}(r, r', m) \\ &\quad \left. + \cdots \right], \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

sendo que o ponto entre dois números representa a multiplicação ordinária e  $p \in \mathbb{N}$ . A função de Bessel  $i_l$  pode ser escrita de maneira compacta do seguinte modo

$$i_l(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} C_{(l,s)} x^{2s+l}, \quad (\text{C.8})$$

com

$$C_{(l,s)} = \frac{2^l (s+l)!}{s! [2(s+l)+1]!}. \quad (\text{C.9})$$

Um detalhe interessante é que a menor potência de  $x$  da série de  $i_l$  é igual a  $l$ . Isto nos ajudará no que se segue.

Assim, substituindo (C.8) em (C.7) temos que

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{+\infty} i_{2l}(mr')F_{2l}(r, r', m) = & \left\{ [C_{(2,0,0)}(mr')^{2,0} + C_{(2,0,1)}(mr')^{2,1} + C_{(2,0,2)}(mr')^{2,2} \right. \\ & + \dots] F_{2,0}(r, r', m) + [C_{(2,1,0)}(mr')^{2,1} + C_{(2,1,1)}(mr')^{2,2} \\ & + C_{(2,1,2)}(mr')^{2,3} + \dots] F_{2,1}(r, r', m) + [C_{(2,2,0)}(mr')^{2,2} \\ & + C_{(2,2,1)}(mr')^{2,3} + C_{(2,2,2)}(mr')^{2,4} + \dots] F_{2,2}(r, r', m) \\ & + \dots + [C_{(2p,0)}(mr')^{2p} + C_{(2p,1)}(mr')^{2(p+1)} \\ & \left. + \dots] F_{2p}(r, r', m) + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (C.10)$$

A maneira de reescrevermos a série consiste em separar os termos possuem potências iguais de  $(mr')$ . Explicitamente

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{+\infty} i_{2l}(mr')F_{2l}(r, r', m) = & \left\{ (mr')^{2,0} [C_{(2,0,0)}F_{2,0}(r, r', m)] + (mr')^{2,1} [C_{(2,0,1)}F_{2,0}(r, r', m) \right. \\ & + C_{(2,1,0)}F_{2,1}(r, r', m)] + (mr')^{2,2} [C_{(2,0,2)}F_{2,0}(r, r', m) \\ & + C_{(2,1,1)}F_{2,1}(r, r', m) + C_{(2,2,0)}F_{2,2}(r, r', m)] + \dots \\ & + (mr')^{2p} [C_{(2,0,p)}F_{2,0}(r, r', m) + C_{(2,1,p-1)}F_{2,1}(r, r', m) \\ & \left. + \dots + C_{(2p,0)}F_{2p}(r, r', m)] + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (C.11)$$

Observe que podemos escrever os termos entre colchetes em termos de um somatório

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{+\infty} i_{2l}(mr')F_{2l}(r, r', m) = & \left\{ (mr')^{2,0} \sum_{n=0}^0 C_{(2n,0-n)} F_{2n}(r, r', m) \right. \\ & + (mr')^{2,1} \sum_{n=0}^1 C_{(2n,1-n)} F_{2n}(r, r', m) \\ & + (mr')^{2,2} \sum_{n=0}^2 C_{(2n,2-n)} F_{2n}(r, r', m) + \dots \\ & \left. + (mr')^{2p} \sum_{n=0}^p C_{(2n,p-n)} F_{2n}(r, r', m) \right] + \dots \left. \right\}. \end{aligned} \quad (C.12)$$

Portanto,

$$\sum_{l=0}^{+\infty} i_{2l}(mr')F_{2l}(r, r', m) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^l (mr')^{2l} C_{(2n,l-n)} F_{2n}(r, r', m). \quad (C.13)$$

A mesma ideia pode ser aplicada na parte relacionada a  $F_{2l+1}(r, r', m)$ . Desta forma, encontra-se

$$\sum_{l=0}^{+\infty} i_{2l+1}(mr')F_{2l+1}(r, r', m) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^l (mr')^{2l+1} C_{(2n+1,l-n)} F_{2n+1}(r, r', m). \quad (C.14)$$

Logo, vemos que a parte da função de Green que depende de  $m$  é dada por

$$\frac{\exp(-m\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^l \left[ (mr')^{2l} C_{(2n,l-n)} F_{2n}(r,r',m) + (mr')^{2l+1} C_{(2n+1,l-n)} F_{2n+1}(r,r',m) \right]. \quad (\text{C.15})$$

Explicitando  $C_{(l,s)}$  e  $F_l(r,r',m)$  temos que

$$\frac{\exp(-m\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|)}{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|} = m \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^l \left[ (mr')^{2l} \frac{2^{2n}(4n+1)(l+n)!}{(l-n)!(2l+2n+1)!} k_{2n}(mr) P_{2n}(\cos \gamma) + (mr')^{2l+1} \frac{2^{2n+1}(4n+3)(l+n+1)!}{(l-n)!(2l+2n+3)!} k_{2n+1}(mr) P_{2n+1}(\cos \gamma) \right]. \quad (\text{C.16})$$

Portanto, a função de Green  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  pode ser expressa como

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{+\infty} \left[ \left( \frac{r'}{r} \right)^l P_l(\cos \gamma) \right. \\ &\quad - (mr) \sum_{n=0}^l \left( (mr')^{2l} \frac{2^{2n}(4n+1)(l+n)!}{(l-n)!(2l+2n+1)!} k_{2n}(mr) P_{2n}(\cos \gamma) \right) \\ &\quad \left. - (mr) \sum_{n=0}^l \left( (mr')^{2l+1} \frac{2^{2n+1}(4n+3)(l+n+1)!}{(l-n)!(2l+2n+3)!} k_{2n+1}(mr) P_{2n+1}(\cos \gamma) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

De maneira compacta, podemos reescrever  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  do seguinte modo

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{+\infty} V_l(r, r', m), \quad (\text{C.18})$$

com

$$\begin{aligned} V_l(r, r', m) &= \left( \frac{r'}{r} \right)^l P_l(\cos \gamma) \\ &\quad - (mr)(mr')^l \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} \frac{2^{\bar{n}}(2\bar{n}+1) \left( \lfloor \frac{l}{2} \rfloor - n + \bar{n} \right)!}{\left( \lfloor \frac{l}{2} \rfloor - n \right)! \left[ 2 \left( \bar{n} + \lfloor \frac{l}{2} \rfloor - n \right) + 1 \right]!} k_{\bar{n}}(mr) P_{\bar{n}}(\cos \gamma), \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

com

$$\bar{n} = 2n + \left[ \frac{1 - (-1)^l}{2} \right] \quad \text{e} \quad \left[ \frac{l}{2} \right] = \frac{2l - 1 + (-1)^l}{4}. \quad (\text{C.20})$$

---

## ANEXO A

---

# ALGUMAS DEFINIÇÕES IMPORTANTES

---

### A.1 Introdução

Este anexo tem como propósito fazer algumas definições de modo a evitar qualquer tipo de dúvida. Definiremos o sistema de unidades utilizado no trabalho pois existe uma gama de sistemas de unidades existentes na Física. Também definiremos os espaços nos quais trabalharemos, a fim de evitar qualquer ambiguidade. As definições propostas aqui serão utilizadas em todo o trabalho.

### A.2 O Sistema de Unidades

Com relação ao sistema de unidades utilizado, usaremos o *Sistema Natural de Unidades* em conjunto com o Sistema de Unidades de *Heaviside–Lorentz* que normalizam os valores de  $c$ ,  $\hbar$  e  $\epsilon_0$  e as tomam adimensionais, isto é,  $c = \hbar = \epsilon_0 = 1$ . Para mais informações sobre sistemas de unidades, consulte a referência [43].

### A.3 O Espaço Quadridimensional de Minkowski

O espaço no qual trabalharemos é o chamado espaço de *Minkowski* que será denotado por  $\mathcal{M}^4$ . Os elementos deste espaço são chamados de *quadrivetores*. Existem dois tipos de quadrivetores: *covariantes* e *contravariantes*. Definiremos *quadrivetor contravariante* como

$$x = (t, \mathbf{x}) \tag{A.1}$$

e *quadrivetor covariante* como

$$x = (t, -\mathbf{x}) \tag{A.2}$$

com  $t$  o instante de tempo em que  $x$  acontece e  $\mathbf{x}$  é vetor cartesiano que localiza espacialmente  $x$ .

Em geral representa-se um quadrivetor (e tensores de ordem mais alta) pelas suas componentes. Assim, o quadrivetor contravariante  $x$  é representado por  $x^\mu$ , com  $\mu = 0, 1, 2, 3$  e índices **sobrescritos**. O quadrivetor covariante  $x$  é representado por  $x_\mu$ , com  $\mu = 0, 1, 2, 3$  e índices **subscritos**. A menos que seja especificado, neste trabalho os índices (sobrescritos ou subscritos) denotados por letras gregas tomarão todos valores de 0 até 3. No caso de índices representados por letras latinas, os mesmos tomarão valores de 1 até 3. De imediato, vemos que  $x^0 = x_0 = t$  e  $x^i = -x_i$ .

O tensor métrico do espaço de Minkowski, também chamado de *métrica*, diz como se calcula o produto interno neste espaço. A métrica, simbolizada por  $\boldsymbol{\eta}$ , é dada pelo seguinte arranjo  $4 \times 4$ .

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Como o quadrivetor  $x$ , a métrica também é simbolizada por um elemento genérico da matriz  $\boldsymbol{\eta}$  que o representa, isto é,  $\boldsymbol{\eta} \equiv \eta_{\mu\nu}$ . Diz-se que a métrica  $\eta_{\mu\nu}$  tem a *assinatura*  $(+, -, -, -)$  devido ao sinal de suas componentes na diagonal principal.

A inversa da métrica  $\boldsymbol{\eta}^{-1}$  é dada por

$$\boldsymbol{\eta}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

e denotada também por  $\eta^{\mu\nu}$ . Obviamente,  $\boldsymbol{\eta}$  e  $\boldsymbol{\eta}^{-1}$  satisfazem  $\boldsymbol{\eta}^{-1}\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^{-1} = \mathbb{1}_4$ , onde  $\mathbb{1}_4$  é a matriz identidade de ordem 4.

O produto interno entre dois quadrivetores  $x$  e  $y$  é dado por

$$x \cdot y = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 \quad (\text{A.5})$$

e a magnitude de um quadrivetor  $x$ , denotada por  $\|x\|$ , satisfaz

$$\|x\|^2 = x \cdot x = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2. \quad (\text{A.6})$$

Utilizaremos a *convenção da soma de Einstein*, que consiste em omitir o símbolo de somatório e interpretar dois índices iguais do mesmo lado da equação como indicador deste somatório. Usando isto, a eq.(A.6) fica

$$\|x\|^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu. \quad (\text{A.7})$$

Os dois tipos de quadrivetores, contravariante e covariantes, se conectam pela métrica,

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \quad \text{e} \quad x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu. \quad (\text{A.8})$$

O operador diferencial covariante  $\partial_\mu$  é dado da seguinte maneira

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right). \quad (\text{A.9})$$

Analogamente temos que

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu = \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right). \quad (\text{A.10})$$

Assim, o operador *d'Alembertiano*  $\square$  é dado por

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (\text{A.11})$$

## A.4 O Espaço Euclidiano Tridimensional

Também usaremos o espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3$ , o espaço Euclidiano tridimensional cuja métrica é a *delta de Kronecker*  $\delta_{ij}$ , mas como as definições neste espaço não são ambíguas, então não faremos definições extras.

## A.5 Os Espaços dos Momentos Tridimensional e Quatridimensional

Um espaço que será muito utilizado, principalmente quando usarmos a transformada de Fourier, é o *espaço dos momentos*. Neste trabalho denotaremos o espaço dos momentos tridimensional por  $\mathbb{K}^3$  e o quatridimensional por  $\mathcal{K}^4$ . O espaço  $\mathcal{K}^4$  tem as mesmas propriedades do  $\mathcal{M}^4$ , com a única diferença que as componentes de qualquer quadrivetor – covariante ou contravariante – tem dimensão de inverso de comprimento. Analogamente, o espaço  $\mathbb{K}^3$  é idêntico ao espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , novamente com a única diferença que as componentes de qualquer vetor deste espaço tem dimensão de inverso de comprimento.

Uma definição importante sobre o espaço dos momentos é que tomaremos os versores deste espaço, seja tridimensional ou quadridimensional, de modo que coincidam com os versores do espaço de Minkowski ou Euclidiano, dependendo do caso em questão. No caso em três dimensões é fácil traduzir esta definição. A definição diz que o par de vetores unitários  $\hat{\mathbf{a}}$  e  $\hat{\mathbf{k}}_a$ ,  $\hat{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^3$  e  $\hat{\mathbf{k}}_a \in \mathbb{K}^3$ . com  $a = x, y, z$ , têm mesma direção e sentido, para cada par  $\hat{\mathbf{a}}$  e  $\hat{\mathbf{k}}_a$ . Esta definição permite o cálculo do produto interno de maneira usual entre os elementos dos espaços diferentes, isto é, o produto interno entre elementos de  $\mathcal{M}^4$  e  $\mathcal{K}^4$ , e também entre elementos de  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{K}^3$ , são realizados de maneira análoga ao efetuado entre elementos de mesmo espaço.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Obviamente, não estamos falando do produto interno entre elementos de um espaço tridimensional com elementos de um espaço quadridimensional.

---

ANEXO B

---

## O TEOREMA DA ADIÇÃO DE HARMÔNICOS ESFÉRICOS

---

### B.1 Introdução

Ao usar o métodos de separação de variáveis [28] na equação de Helmholtz, a equação diferencial que descreve a parte angular tem como solução funções chamadas de *Harmônicos Esféricos*. Estas funções são ortonormais, podendo assim determinar uma representação em série de qualquer função cujo domínio seja  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$ . Neste anexo, demonstraremos um teorema que relaciona uma soma de Harmônicos Esféricos com um Polinômio de Legendre.

### B.2 O Teorema da Adição de Harmônicos Esféricos

**Teorema B.1.** Seja  $Y_l^m$  o Harmônico Esférico de grau  $l$  e ordem  $m$  e  $P_l$  um Polinômio de Legendre de grau  $l$ . Sendo assim, vale a relação

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l \overline{Y_l^m}(\varphi', \theta') Y_l^m(\varphi, \theta), \quad (\text{B.1})$$

sendo que  $\overline{Y_l^m}$  é o complexo conjugado de  $Y_l^m$ ,  $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$  e  $l \in \mathbb{N}$ .

*Prova:*

Suponha dois vetores  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$  com  $\|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}'\| = 1$ . Eles podem ser escritos em coordenadas cartesianas como

$$\mathbf{r} = \cos \varphi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}, \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{r}' = \cos \varphi' \sin \theta' \hat{\mathbf{x}} + \sin \varphi' \sin \theta' \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta' \hat{\mathbf{z}}, \quad (\text{B.3})$$

com  $\theta, \theta' \in [0, \pi]$  e  $\varphi, \varphi' \in [0, 2\pi]$ .

Desejamos calcular o produto escalar entre eles. Ao fazermos isso encontramos

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'). \quad (\text{B.4})$$

Lembrando que  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = \|\mathbf{r}\| \|\mathbf{r}'\| \cos \gamma$ , onde  $\gamma$  é o ângulo entre  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$  e  $\gamma \in [0, \pi]$ , então

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'), \quad (\text{B.5})$$

pois  $\|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}'\| = 1$ . Sendo assim, podemos fazer

$$P_l(\cos \gamma) = P_l(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')) = F_l(\theta, \theta', \varphi, \varphi'). \quad (\text{B.6})$$

Como  $(\theta, \varphi), (\theta', \varphi') \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ , então podemos expandir  $F_l(\theta, \theta', \varphi, \varphi')$  em uma série de Harmônicos Esféricos. Assim,

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n A_{ml}^n(\theta', \varphi') Y_n^m(\theta, \varphi). \quad (\text{B.7})$$

Veremos que o único termo que interessa da soma em  $n$  é o termo de  $n = l$ . Para isso, notamos que

$$\mathbf{L}^2 Y_l^m(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad \forall l, m. \quad (\text{B.8})$$

onde  $\mathbf{L}^2$  é um operador diferencial linear e escalar dado por

$$\mathbf{L}^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (\text{B.9})$$

e

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} (-1)^m P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (\text{B.10})$$

com

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x). \quad (\text{B.11})$$

Sempre podemos fazer uma rotação no sistema de coordenadas cartesianas.

$$(x, y, z) \xrightarrow{R} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \quad (\text{B.12})$$

com  $R$  a matriz de rotação e  $RR^T = \mathbb{1}$ . Nesse sistema temos que

$$\mathbf{r} = F(\bar{\theta}, \bar{\varphi}) \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{r}' = H(\bar{\theta}', \bar{\varphi}') \hat{\mathbf{r}}', \quad (\text{B.13})$$

com  $F^2(\bar{\theta}, \bar{\varphi}) = H^2(\bar{\theta}', \bar{\varphi}') = 1$ , pois as rotações mantêm invariante o produto escalar e consequentemente a norma de um vetor. Os ângulos  $\bar{\theta}$  e  $\bar{\theta}'$  são os ângulos azimutais dos

vetores  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$  respectivamente, medidos a partir do sistema girado e, analogamente, os ângulos  $\bar{\varphi}$  e  $\bar{\varphi}'$  são seus ângulos polares. Fazendo uma transformação específica tomando  $\bar{\theta} = \gamma$  e  $\bar{\theta}' = 0$  temos

$$\bar{\mathbf{L}}^2 Y_l^m(\gamma, \bar{\varphi}) = l(l+1)Y_l^m(\gamma, \bar{\varphi}), \quad \forall l, m. \quad (\text{B.14})$$

onde  $\bar{\mathbf{L}}^2$  é o operador  $\mathbf{L}^2$  calculado nas coordenadas  $\bar{\theta}$  e  $\bar{\varphi}$ . Em particular, para  $m = 0$ , temos

$$\bar{\mathbf{L}}^2 P_l(\cos \gamma) = l(l+1)P_l(\cos \gamma), \quad \forall l, \quad (\text{B.15})$$

onde usamos as eq.(B.10) e (B.11).

Sabemos que pelo fato de  $\mathbf{L}^2$  ser um operador escalar, então  $\mathbf{L}^2 \xrightarrow{R} \bar{\mathbf{L}}^2 = \mathbf{L}^2$ . Assim,

$$\mathbf{L}^2 P_l(\cos \gamma) = l(l+1)P_l(\cos \gamma), \quad \forall l. \quad (\text{B.16})$$

Usando a eq.(B.7) temos

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2 P_l(\cos \gamma) &= \mathbf{L}^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n A_{ml}^n(\theta', \varphi') Y_n^m(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n A_{ml}^n(\theta', \varphi') \mathbf{L}^2 Y_n^m(\theta, \varphi), \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n A_{ml}^n(\theta', \varphi') n(n+1) Y_n^m(\theta, \varphi) = l(l+1)P_l(\cos \gamma), \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n A_{ml}^n(\theta', \varphi') l(l+1) Y_n^m(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

isto é,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n A_{ml}^n(\theta', \varphi') n(n+1) Y_n^m(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n A_{ml}^n(\theta', \varphi') l(l+1) Y_n^m(\theta, \varphi). \quad (\text{B.18})$$

Como  $Y_n^m(\theta, \varphi) \neq 0 \neq A_{ml}^n(\theta', \varphi')$ , então  $n(n+1) = l(l+1)$ ,  $\forall n$ . Sendo  $n, l \in \mathbb{N}$ , então a solução para esta equação é  $n = l$ . Desta forma, apenas termos de  $n = l$  aparecerão na expressão para  $P_l(\cos \gamma)$  e assim

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m=-l}^l A_{ml}(\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (\text{B.19})$$

Veja que também poderíamos ter adotado a expansão

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m=-l}^l A'_{ml}(\theta, \varphi) Y_l^m(\theta', \varphi') \quad (\text{B.20})$$

sem nenhum problema. Note, também, que devido ao fato de  $P_l(\cos \gamma) \in \mathbb{R}$  então também valem

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m=-l}^l \bar{A}_{ml}(\theta', \varphi') \bar{Y}_l^m(\theta, \varphi) \quad (\text{B.21})$$

e

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m=-l}^l \bar{A}'_{ml}(\theta, \varphi) \bar{Y}_l^m(\theta', \varphi'). \quad (\text{B.22})$$

Isto indica que  $A_{ml}(\theta', \varphi')$  é proporcional a  $\bar{Y}_l^m(\theta', \varphi')$  e assim podemos fazer

$$P_l(\cos \gamma) = \sum_{m=-l}^l B_{lm} \bar{Y}_l^m(\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (\text{B.23})$$

sendo  $B_{ml}$  uma constante. Agora precisamos determinar  $B_{ml}$ . Para isso, usaremos as relações de ortogonalidade dos Harmônicos Esféricos

$$\iint_D \bar{Y}_l^m(\theta, \varphi) Y_l^{m'}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'} \delta^{mm'}, \quad (\text{B.24})$$

com  $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ . Aplicando na eq.(B.23) temos

$$B_{ml} \bar{Y}_l^m(\theta', \varphi') = \iint_D \bar{Y}_l^m(\theta, \varphi) P_l(\cos \gamma) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (\text{B.25})$$

$$B_{ml} Y_l^m(\theta, \varphi) = \iint_D Y_l^m(\theta', \varphi') P_l(\cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\varphi'. \quad (\text{B.26})$$

Para determinar  $B_{ml}$  analisaremos a expansão de uma função arbitrária em termos dos Harmônicos Esféricos. Seja  $S(\theta, \varphi)$  dada por

$$S(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n T_m^n Y_n^m(\theta, \varphi). \quad (\text{B.27})$$

Usando a relação de ortogonalidade dos Harmônicos Esféricos obtemos

$$T_m^l = \iint_D \bar{Y}_l^m(\theta, \varphi) S(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (\text{B.28})$$

Quando fazemos  $\theta = 0$ , temos

$$S(0, \varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n T_m^n Y_n^m(0, \varphi). \quad (\text{B.29})$$

Entretanto,

$$Y_l^m(0, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} (-1)^m P_l^m(1) e^{im\varphi} \quad (\text{B.30})$$

e então

$$P_l^m(x=1) = \left( (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \right) \Big|_{x=1} = \begin{cases} 0, & m \neq 0 \\ 1, & m = 0 \end{cases}. \quad (\text{B.31})$$

Assim,

$$Y_l^m(0, \varphi) = \begin{cases} 0, & m \neq 0 \\ \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}, & m = 0 \end{cases} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0}. \quad (\text{B.32})$$

Disso tiramos que resta apenas o termo de  $m = 0$  na expansão cujo coeficiente é dado por

$$T_0^l = \iint_D \overline{Y}_l^0(\theta, \varphi) S(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \iint_D P_l(\cos \theta) S(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (\text{B.33})$$

Observe que quando consideramos a rotação  $(x, y, z) \xrightarrow{R} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  temos que a eq.(B.25) se torna

$$B_{ml} \overline{Y}_l^m(\bar{\theta}', \bar{\varphi}') = \iint_D \overline{Y}_l^m(\bar{\theta}, \bar{\varphi}) P_l(\cos \gamma) \sin \bar{\theta} d\bar{\theta} d\bar{\varphi}. \quad (\text{B.34})$$

Para o caso específico de  $\bar{\theta} = \gamma$  e  $\bar{\theta}' = 0$  temos

$$B_{ml} \overline{Y}_l^m(0, \bar{\varphi}') = \iint_D \overline{Y}_l^m(\gamma, \bar{\varphi}) P_l(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma d\bar{\varphi}. \quad (\text{B.35})$$

Devido a eq.(B.32) temos

$$B_{ml} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0} = \iint_D \overline{Y}_l^m(\gamma, \bar{\varphi}) P_l(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma d\bar{\varphi} \quad (\text{B.36})$$

Analisando o lado direito da eq.(B.36) vemos que

$$B_{ml} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0} = T_0^l \quad (\text{B.37})$$

onde nesse caso

$$S(\gamma, \varphi) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \overline{Y}_l^m(\gamma, \varphi). \quad (\text{B.38})$$

Assim,

$$\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \overline{Y}_l^m(\gamma, \varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n T_m^n Y_n^m(\gamma, \varphi). \quad (\text{B.39})$$

Esta expressão vale para qualquer par  $(\gamma, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ . Assim, para  $\gamma = 0$  temos

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_l^m(0, \varphi) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n T_m^n Y_n^m(0, \varphi), \\
\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \overline{Y}_l^m(0, \varphi) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^n T_m^n \overline{Y}_n^m(0, \varphi), \\
\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_l^m(0, \varphi) &= \sum_{m=-n}^n T_m^l \overline{Y}_l^m(0, \varphi), \\
\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0} &= \sum_{m=-n}^n T_m^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0}, \\
\delta_{m0} &= T_0^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}, \\
T_0^l &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \delta_{m0}.
\end{aligned} \tag{B.40}$$

Logo,

$$\delta_{m0} B_{ml} = T_0^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \delta_{m0} = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{m0}. \tag{B.41}$$

Assim, para a eq.(B.41) ser satisfeita para qualquer  $m$ , temos que

$$B_{ml} = \frac{4\pi}{2l+1}. \tag{B.42}$$

Portanto,

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l \overline{Y}_l^m(\varphi', \theta') Y_l^m(\varphi, \theta). \tag{B.43}$$