Universidade Estadual Paulista

Câmpus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Um modelo matemático de suspensão de pontes

Rodiak Nicolai Figueroa López

Orientador: Prof. Dr. Germán Jesus Lozada Cruz

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Câmpus São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São José do Rio Preto

Março - 2009

RODIAK NICOLAI FIGUEROA LÓPEZ

Um modelo matemático de suspensão de pontes

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Análise Matemática junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Germán Jesus Lozada Cruz
Professor Doutor
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho
Professor Doutor
ICMC - USP - São Carlos

Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos
Professor Doutor
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 20 de março de 2009

Aos meus pais,

Manuel e Felisa,

a minhas queridas irmás,

Milenka e Tatiana,

a minha eterna avó,

Yolita

dedico.

Agradecimentos

A Deus, por que sem vós em minha vida, não teria todas estas maravilhosas oportunidades para ser feliz.

Meus agradecimentos com todo carinho para minha família, meus pais, Manuel e Felisa, às minhas irmãs, Milenka e Tatiana, as minhas tias, Carmelita e Nelly, por serem minha fonte de energia e conselho e pelo apoio, orações e amor. A minha avó, Yolita (In Memorian), por todos os ensinamentos e amor. Amo todos vocês.

Obrigado, Prof. Dr. Germán, pela orientação, paciência e amizade durante este período, por toda a ajuda dada e pelos conhecimentos transmitidos.

Agradeço à banca examinadora: Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho e ao Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos, pela disponibilidade e por toda as sugestões.

Aos professores do Departamento de Matemática do Ibilce, em especial aos professores Drs. Claudio Aguinaldo Buzzi, Adalberto Spezamiglio e a Maria Gorete Carreira Andrade, pela simpatia e ajuda.

Meus agradecimentos ao meu orientador de graduação o professor Dr. Obidio Rubio Mercedes, pela importante contribuição para minha chegada ao Brasil e conselhos, ao professor Dr. Milton Cortés pela ajuda e amizade.

Aos amigos da minha turma de pós-graduação, em especial à Ana Paula, Ana Carolina, Oyran e Ruikson. Para meus amigos Marcus, Juliana, Gobbi, Cibele, Pedrito, Iguer, Eduardo, Junior e Cinthya, pela agradável convivência. Ao meu grande amigo Rafael por todo seu apoio, ajuda e por me aguentar sempre. Também para a Lina por todo o carinho, atenção e paciência, adoro você.

A todos meus amigos em Perú, sempre tenho boas lembranças e muita saudade deles.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste trabalho.

“É somente nas misteriosas equações do amor que qualquer lógica ou razão pode ser encontrada.”

(John Nash)

Resumo

Neste trabalho vamos estudar um modelo matemático que descreve as oscilações não lineares de uma ponte suspensa. Este modelo é dado por um sistema de equações diferenciais parciais que estão acopladas. Basicamente, estudaremos a existência e unicidade da solução fraca do sistema. Usaremos a teoria de operadores maximais monótonos para modelo linear e os semigrupos fortemente contínuos de contração para o modelo não linear.

Palavras chave: Suspensão de Pontes, Soluções Fracas, Teoria de Semigrupos.

Abstract

In this work we study a mathematical model which describes the nonlinear oscillations of a bridge suspended. This model is given by a system of partial differential equations which are coupled. Basically, we study the existence and uniqueness of weak solution of the system. We use the theory of maximal monotone operators to model linear and strongly continuous semigroups of contraction for the nonlinear model.

Keywords: Suspension Bridges, Weak Solution, Semigroups Theory.

Sumário

Introdução

A grande maioria de fenômenos naturais são modelados através das equações diferenciais (sejam estas equações do tipo ordinárias, parciais, estocásticas, funcionais, integro-diferenciais, etc.) por este motivo a importância do seu estudo. Em muitos casos o comportamento assintótico destas equações nos levam a obter informações relevantes dos fenômenos.

Um primeiro passo pra entendermos a dinâmica assintótica de um problema em equações diferencias parciais é a existência e unicidade das soluções.

Neste trabalho temos como objetivo analisar a existência e unicidade das soluções fracas de um modelo de suspensão de pontes, ou seja, um sistema de equações hipérbolicas acopladas

$$\begin{cases} m_b z_{tt} + \alpha z_{xxxx} - F(y-z) = f_1, \quad x \in (0,l), \quad t \geqslant 0, \\ m_c y_{tt} - \beta y_{xx} + F(y-z) = f_2, \quad x \in (0,l), \quad t \geqslant 0, \\ z(0,t) = z(l,t) = 0, z_x(0,t) = z_x(l,t) = 0, \\ y(0,t) = y(l,t) = 0, \\ z(x,0) = z_1(x), \ z_t(x,0) = z_2(x), x \in (0,l), \\ y(x,0) = y_1(x), \ y_t(x,0) = y_2(x), x \in (0,l), \end{cases} \tag{P}$$

onde as constantes m_b, m_c, α, β são positivas, as funções f_1 e f_2 representam as forças externas do sistema, as quais geralmente dependem do tempo e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função de acoplamento do sistema com $F(0) = 0$ (F pode ser linear ou não).

Acontinuação vamos descrever o desenvolvimento de nosso trabalho. No Capítulo 1, colocamos todas as ferramentas que usaremos para estudar o problema (P); isto é, veremos brevemente alguns resultados sobre os espaços de Sobolev e L^p (ver [4]), a teoria de Operadores Maximais Monótonos (ver [4]) e Semigrupos de Operadores Lineares (ver [8], [14]), a relação existente destas teorias, também as equações de primeira ordem semi-linear, finalmente a minimização de funções convexas (ver [15] e [16]).

No Capítulo 2, estudamos a existência e unicidade das soluções fracas do modelo de suspensção de pontes (P). Primeiramente estudamos o modelo linear, isto é, quando $F(\xi) = k\xi$,

$$\begin{cases} m_b z_{tt} + \alpha z_{xxxx} - k(y-z) = 0, \quad x \in (0,l), \quad t \geqslant 0, \\ m_c y_{tt} - \beta y_{xx} + k(y-z) = 0, \quad x \in (0,l), \quad t \geqslant 0, \\ z(0,t) = z(l,t) = 0, z_x(0,t) = z_x(l,t) = 0, \\ y(0,t) = y(l,t) = 0, \\ z(x,0) = z_1(x),\ z_t(x,0) = z_2(x), x \in (0,l), \\ y(x,0) = y_1(x),\ y_t(x,0) = y_2(x), x \in (0,l). \end{cases} \tag{L}$$

Usando a teoria de operadores maximais monótonos, principalmente o Teorema de Hille - Yosida e seguindo o estudo feito nos artigos [3], [9] e as referências [4], [?], [15] e [16] obtemos a existência e unicidade da solução para o problema (L).

Para o estudo do modelo não linear, isto é, do problema

$$\begin{cases} z_{tt} + a^2 z_{xxxx} = F_1(t,x,y,z), \quad x \in (0,l), \quad t \geqslant 0, \\ y_{tt} - b^2 y_{xx} = F_2(t,x,y,z), \quad x \in (0,l), \quad t \geqslant 0, \\ z(0,t) = z(l,t) = 0, z_x(0,t) = z_x(l,t) = 0, \\ y(0,t) = y(l,t) = 0, \\ z(x,0) = z_1(x),\ z_t(x,0) = z_2(x), x \in (0,l), \\ y(x,0) = y_1(x),\ y_t(x,0) = y_2(x), x \in (0,l), \end{cases} \tag{NL}$$

temos usado a teoria de semigrupos, seguindo os artigos [1], [2] e as referências [8] e [14]. Também temos realizado o analise de estabilidade do sistema usando a funcional de Liapunov, seguindo [10].

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo vamos apresentar os resultados necessários para o desenvolvimento de nosso trabalho.

1.1 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto com medida de Lebesgue $|\Omega|$ finita e consideremos $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função.

Definição 1.1.1 *Se p é um número real satisfazendo $1 \leqslant p < \infty$, definimos*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } \int_\Omega |f|^p dx < \infty \right\} \text{ e}$$
$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

Se $p = \infty$, definimos

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } \exists\, c \geqslant 0 \text{ tal que } |f| \leqslant c \text{ q.s. em } \Omega \} \text{ e}$$
$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ c; |f| \leqslant c \text{ q.s. em } \Omega \}.$$

Teorema 1.1.1 *O espaço $L^p(\Omega)$ é um espaço vetorial normado e $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Demonstração: Ver [4], página 57. □

Observação 1.1.1 *Se $f \in L^\infty(\Omega)$, então $|f(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ quase sempre em Ω (ver [4], página 56).*

Notação: Seja $1 \leqslant p \leqslant \infty$; denotamos por p' o **expoente conjugado** de p, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ($p' = 1$ quando $p = \infty$).

Quando $p = 2$ temos o seguinte espaço vetorial

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } \int_\Omega |f|^2 dx < \infty \right\}$$

o qual é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx.$$

Teorema 1.1.2 (Riesz-Fischer) *O espaço $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Demonstração: Ver [4], página 57. □

Teorema 1.1.3 *$L^p(\Omega)$ é um espaço Reflexivo para todo $1 < p < \infty$ e Separável para todo $1 \leqslant p < \infty$.*

Demonstração: Ver [4], página 59. □

Denotemos por $C(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ é contínua}\}$ e por $C_0(\Omega)$ como o espaço das funções contínuas em Ω que tem suporte compacto, isto é

$$C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : \text{existe um compacto } K \subset \Omega \text{ tal que } f(x) = 0, \forall x \in \Omega \backslash K\}.$$

Denotemos por 1_K a função característica do subconjunto $K \subset \Omega$, isto é, $1_K : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$1_K(x) = \begin{cases} 1, & x \in K \\ 0, & x \in \Omega \backslash K. \end{cases}$$

Também denotaremos por $C^k(\Omega)$ o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis em Ω e

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geqslant 0} C^k(\Omega)$$
$$C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$$
$$C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega).$$

Definição 1.1.2 *Seja $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Dizemos que a função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ pertence a $L^p_{loc}(\Omega)$ se $f1_K \in L^p(\Omega)$ para todo compacto $K \subset \Omega$.*

Lema 1.1.1 *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\int_\Omega fu = 0$, $\forall u \in C_0(\Omega)$. Então $f \equiv 0$ quase sempre em Ω.*

Demonstração: Ver [4], página 61. □

Teorema 1.1.4 (Representação de Riesz) *Seja $1 < p < \infty$ e seja $\varphi \in (L^p(\Omega))'$. Então existe um único $u \in L^{p'}$ tal que*

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_\Omega uf, \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

Além disso $\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}$. A aplicação $T : L^{p'}(\Omega) \to (L^p(\Omega))'$ definida por

$$\langle Tu, f \rangle = \int_\Omega uf, \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

é uma isometria sobre $(L^p(\Omega))'$. Isto permite identificar $L^{p'}(\Omega)$ com $(L^p(\Omega))'$.

Demonstração: Ver [4], página 61. □

Teorema 1.1.5 (Densidade) *O espaço $C_0(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leqslant p < \infty$.*

Demonstração: Ver [4], página 62. □

Corolário 1.1.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto qualquer. Então $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leqslant p < \infty$.*

Demonstração: Ver [4], página 71. □

1.1.1 Teoremas de Stampacchia e de Lax-Milgram

Sejam H um espaço de Hilbert real com o produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_H : H \times H \to \mathbb{R}$ e $\mathfrak{a} : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear.

Definição 1.1.3 *A forma bilinear $\mathfrak{a}$ é*

a) ***Contínua*** *se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|\mathfrak{a}(u, v)| \leqslant C\|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H,$$

b) ***Coerciva*** *se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$\mathfrak{a}(v, v) \geqslant \alpha \|v\|_H^2, \quad \forall v \in H.$$

Teorema 1.1.6 (Stampacchia) *Seja $\mathfrak{a} : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua e coerciva. Seja $\boldsymbol{K} \subset H$ um subconjunto convexo, fechado e não vazio. Dado $\varphi \in H'$, existe um único $u \in \boldsymbol{K}$ tal que*

$$\mathfrak{a}(u, v - u) \geqslant \langle \varphi, v - u \rangle, \quad \forall v \in \boldsymbol{K}$$

Além disso, se $\mathfrak{a}$ é simétrica, então u se caracteriza pela propriedade

$$\begin{cases} u \in \boldsymbol{K} \\ \dfrac{1}{2}\mathfrak{a}(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min\limits_{v \in \boldsymbol{K}} \left\{ \dfrac{1}{2}\mathfrak{a}(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}. \end{cases}$$

Demonstração: Ver [4], página 83. □

Corolário 1.1.2 (Lax-Milgram) *Seja $\mathfrak{a} : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua e coerciva. Então, para todo $\varphi \in H'$, existe um único $u \in H$ tal que*

$$\mathfrak{a}(u, v) = \langle \varphi, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Além disso, se $\mathfrak{a}$ é simétrica, então u é caracterizado por

$$\begin{cases} u \in H \\ \dfrac{1}{2}\mathfrak{a}(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min\limits_{v \in H} \left\{ \dfrac{1}{2}\mathfrak{a}(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}. \end{cases}$$

Demonstração: Ver [4], página 84. □

1.2 Os Espaços de Sobolev $W^{m,p}(I)$

Nesta seção vamos considerar $\Omega = (a,b) =: I$ como sendo um intervalo aberto limitado ou não e p um número real satisfazendo $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Definição 1.2.1 *O* ***Espaço de Sobolev*** $W^{1,p}(I)$ *é definido como sendo o conjunto*

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I) : \exists\, g \in L^p(I) \text{ tal que } \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi, \forall \varphi \in C_0^1(I)\}.$$

Pelo Lema 1.1.1, se $u \in W^{1,p}(I)$, duas funções $g_1, g_2 \in L^p(I)$ que satisfazem

$$\int_I u\varphi' = -\int_I g_j\varphi, \quad j = 1,2;$$

para toda $\varphi \in C_0^1(I)$ coincidem em quase todo ponto. Portanto, exceto por modificação em um conjunto de medida nula, g é determinada de modo único e é chamada de Derivada Fraca (ou derivada no sentido de distribução) da função u e escrevemos como $g = u'$.

Quando $p = 2$, costuma-se indicar $W^{1,2}(I)$ por $H^1(I)$ de forma que $W^{1,2}(I) = H^1(I)$.

Observação 1.2.1 *Se $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$ e $u' \in L^p(I)$ (u' é a derivada usual) então $u \in W^{1,p}(I)$. Além disso a derivada usual de u coincide com a derivada de u no sentido de $W^{1,p}(I)$. Em particular se I é limitado, então $C^1(\overline{I}) \subset W^{1,p}(I)$ para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Exemplo 1.2.1 *A função $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x) \in W^{1,p}(I)$ para todo $1 \leqslant p \leqslant \infty$, onde $I = (-1,1)$, $u'(x) = H(x)$ e*

$$H(x) = \begin{cases} 1, & se \quad 0 < x < 1 \\ 0, & se \ -1 < x < 0. \end{cases}$$

De fato, dado $\varphi \in C_0^1(I)$(isto é, $\varphi \in C^1(I)$ e $\varphi(-1) = 0 = \varphi(1)$), temos

$$\begin{aligned} \int_I u(x)\varphi'(x)dx &= \int_{-1}^0 0.\varphi'(x)dx + \int_0^1 x.\varphi'(x)dx \\ &= x.\varphi(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi(x)dx \\ &= \varphi(1) - \int_0^1 \varphi(x)dx, \\ &= -\int_{-1}^0 0.\varphi(x)dx - \int_0^1 1.\varphi(x)dx \\ &= -\int_I H(x)\varphi(x)dx. \end{aligned}$$

Como $\|H\|^p_{L^p(I)} = 1$, *segue* $H \in L^p(I)$.

Mas $H \notin W^{1,p}(I)$, $\forall\, 1 \leqslant p \leqslant \infty$. *De fato, se existe* $g \in L^1_{loc}(I)$ *tal que*

$$\int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)dx = -\int_{-1}^{1} H(x)\varphi'(x)dx = -\int_{0}^{1} \varphi'(x)dx = \varphi(0)$$
$$= \begin{cases} 0, \forall \varphi \in C_0^1(0,1), \ \textit{logo } g = 0 \ \textit{q.s. em } (0,1) \\ 0, \forall \varphi \in C_0^1(-1,0), \ \textit{logo } g = 0 \ \textit{q.s. em } (-1,0), \end{cases}$$

pelo Lema 1.1.1 *segue que* $g = 0$ *quase sempre em* $(-1,1)$ *e portanto* $\varphi(0) = 0$, *para toda* $\varphi \in C_0^1(-1,1)$. *Isto é um absurdo e portanto não existe tal função* g.

O espaço $W^{1,p}(I)$ está dotado da norma $\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)}$ (ou pela norma equivalente $[\|u\|^p_{L^p(I)} + \|u'\|^p_{L^p(I)}]^{1/p}$).

O espaço $H^1(I)$ é dotado do produto escalar

$$\langle u, v\rangle_{H^1(I)} = \langle u, v\rangle_{L^2(I)} + \langle u', v'\rangle_{L^2(I)}; \tag{1.1}$$

o qual define a norma

$$\|u\|_{H^1(I)} = (\|u\|^2_{L^2(I)} + \|u'\|^2_{L^2(I)})^{1/2} \tag{1.2}$$

que é equivalente à norma $W^{1,2}(I)$.

Proposição 1.2.1 *As seguintes propriedades valem*

i) *Para* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *o espaço* $W^{1,p}(I)$ *é um espaço de Banach.*

ii) *Para* $1 < p < \infty$ *o espaço* $W^{1,p}(I)$ *é um espaço de Reflexivo.*

iii) *Para* $1 \leqslant p < \infty$ *o espaço* $W^{1,p}(I)$ *é um espaço de Separável.*

iv) $H^1(I)$ *é um espaço de Hilbert Separável.*

Demonstração: *i)* Seja (u_n) uma seqüência de Cauchy em $W^{1,p}(I)$ então dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_m - u_n\|_{W^{1,p}(I)} < \varepsilon$, $\forall m, n > n_0$. Logo pela definição da norma em $W^{1,p}(I)$, temos

$$\varepsilon > \|u_m - u_n\|_{W^{1,p}(I)} = \|u_m - u_n\|_{L^p(I)} + \|u'_m - u'_n\|_{L^p(I)}, \quad \forall m, n > n_0.$$

Desta última expressão segue que (u_n) e (u_n') são seqüências de Cauchy em $L^p(I)$. Como $L^p(I)$ é um espaço de Banach, então $u_n \to u$ e $u_n' \to g$ em $L^p(I)$. Tem-se

$$\int_I u_n \varphi' = -\int_I u_n' \varphi, \quad \forall \varphi \in C^1(I),$$

pois $u_n \in W^{1,p}(I)$ e quando $n \to \infty$, obtemos

$$\int_I u \varphi' = -\int_I g \varphi, \quad \forall \varphi \in C^1(I).$$

Portanto $u \in W^{1,p}(I)$, $u' = g$ e $\|u_n - u\|_{W^{1,p}(I)} \to 0$.

ii) O espaço produto $E = L^p(I) \times L^p(I)$ é reflexivo (ver [11], página 189). O operador $T : u \in W^{1,p}(I) \to [u, u'] \in E$ é uma isometria de $W^{1,p}(I)$ em E, pois

$$\|Tu\|_E = \big\|[u, u']\big\|_{L^p(I) \times L^p(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)} = \|u\|_{W^{1,p}(I)}.$$

Portanto $T(W^{1,p}(I))$ é um subespaço fechado de E (ver [4], Nota 14, página 45). Assim, $T(W^{1,p}(I))$ é um espaço reflexivo (ver [4], Proposição III.17, página 45). Conseqüentemente $W^{1,p}(I)$ é reflexivo.

iii) Seja o espaço produto $E = L^p(I) \times L^p(I)$ é separável (ver [12], página 238) e a isometria T definida anteriormente, portanto $T(W^{1,p}(I))$ é separável (ver Proposição III.22, [4], página 47). Por conseguinte $W^{1,p}(I)$ é separável.

iv) Como $H^1(I)$ é completo com a norma dada por (1.2) segue que $H^1(I)$ é um espaço de Hilbert. □

Teorema 1.2.1 (Densidade) *Seja* $u \in W^{1,p}$ *com* $1 \leq p < \infty$. *Então existe uma sequencia* (u_n) *em* $C_0^\infty(\mathbb{R})$ *tal que* $u_n\big|_I \to u$ *em* $W^{1,p}(I)$.

Demonstração: Ver [4], página 127. □

Teorema 1.2.2 *Existe uma constante* C *(dependente só de* $|I| \leqslant \infty$*) tal que*

i) $\|u\|_{L^\infty(I)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$, $\forall u \in W^{1,p}(I)$, *para todo* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *dito de outra forma,* $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\overline{I}) \hookrightarrow L^\infty(I)$ *com inclusão continua para* $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Além disso, quando I é limitado.

ii) A inclusão $W^{1,p}(I) \subset C(\overline{I})$ é compacta para $1 < p \leqslant \infty$.

iii) A inclusão $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ é compacta para $1 \leqslant q < \infty$.

Demonstração: Ver [4], página 129. □

Corolário 1.2.1 (Derivação de um Produto) *Sejam $u, v \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Então $uv \in W^{1,p}(I)$ e*

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Além disso, verificamos a formula de integração por partes

$$\int_y^x u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv', \quad \forall x, y \in \overline{I}.$$

Demonstração: Ver [4], página 131. □

Corolário 1.2.2 (Derivação de uma Composta) *Seja $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$ e seja $u \in W^{1,p}(I)$. Então,*

$$G \circ u \in W^{1,p}(I) \quad e \quad (G \circ u)' = (G' \circ u)u'.$$

Demonstração: Ver [4], página 131. □

Definição 1.2.2 *Sejam $m \geqslant 2$ um inteiro e $1 \leqslant p \leqslant \infty$ um número real, definimos $W^{m,p}(I)$ por recorrência como o espaço*

$$W^{m,p}(I) := \{u \in W^{m-1,p}(I) : u' \in W^{m-1,p}(I)\}.$$

Quando $p = 2$, temos $H^m(I) := W^{m,2}(I)$.

Observação 1.2.2 *a) $u \in W^{m,p}(I)$ se, e somente se, existem m funções $g_1, \ldots, g_m \in L^p(I)$ tais que*

$$\int_I uD^j\varphi = (-1)^j \int_I g_j\varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I), \quad \forall j = 1, 2, \ldots, m$$

onde $D^j\varphi$ denota a derivada de ordem j de φ.

b) Quando $u \in W^{m,p}(I)$, denotamos por $u' = g_1$, $(u')' = g_2$, ... $u^{(m)} = g_m$ as derivadas da função u até a ordem m, as quais também serão denotadas por Du, D^2u, ..., $D^m u$.

O espaço $W^{m,p}(I)$ é dotado da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^\alpha u\|_{L^p(I)}.$$

O espaço $H^m(I)$ é dotado do produto escalar

$$\langle u, v\rangle_{H^m(I)} = \langle u, v\rangle_{L^2(I)} + \sum_{\alpha=1}^{m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(I)}.$$

Definição 1.2.3 *Dado $1 \leqslant p < \infty$ denotamos por $W_0^{1,p}(I)$ o fecho de $C_0^1(I)$ em $W^{1,p}(I)$.*

Quando $p = 2$, denotaremos $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$.

O espaço $W_0^{1,p}(I)$ é dotado da norma induzida por $W^{1,p}(I)$; o espaço $H_0^1(I)$ é munido do produto escalar induzido por $H^1(I)$.

Observação 1.2.3 *O espaço $W_0^{1,p}(I)$ é um espaço de Banach separável, é reflexivo para $1 < p < \infty$. O espaço $H_0^1(I)$ é um espaço de Hilbert separável.*

Quando $I = \mathbb{R}$ tem-se que $C_0^1(\mathbb{R})$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R})$ (ver Teorema 1.2.1) em conseqüência $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Observação 1.2.4 *Usando uma seqüencia regularizante (ϱ_n) (ver [4], página 70) podemos verificar que*

a) $C_0^\infty(I)$ é denso em $W_0^{1,p}(I)$.

b) Se $u \in W^{1,p}(I) \cap C_0(I)$ então $u \in W_0^{1,p}(I)$.

Teorema 1.2.3 *Se $u \in W^{1,p}(I)$ então $u \in W_0^{1,p}(I)$ se, e somente se $u = 0$ sobre ∂I.*

Demonstração: Seja $u \in W_0^{1,p}(I) = \overline{C_0^1(I)}$, existe uma seqüencia (u_n) de $C_0^1(I)$ tal que $u_n\big|_I \to u$ em $W^{1,p}(I)$ e como $W^{1,p}(I) \hookrightarrow C(\overline{I})$ segue que $u_n \to u$ uniformemente em $\overline{I}$ e conseqüentemente $u = 0$ em ∂I; pois como

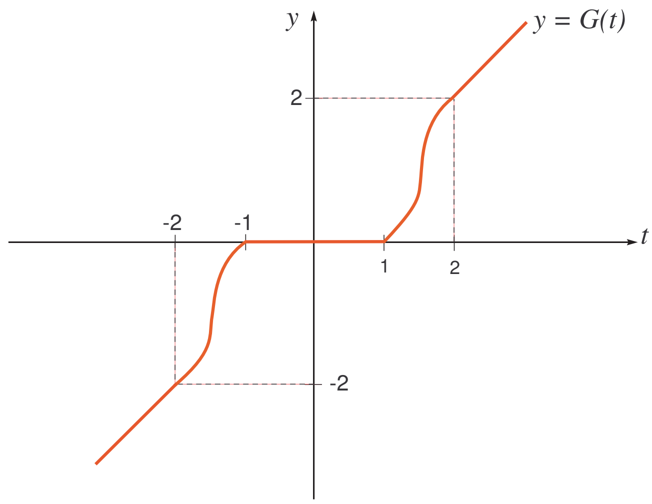
$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |u_n(x) - u(x)| < \epsilon, \forall x \in \overline{I}, \forall n > n_0$$

e $u_n \in C_0^1(I)$, segue que

$$\varepsilon > |u_n(x) - u(x)| = |0 - u(x)| = |u(x)| \Longrightarrow u = 0, \quad \forall x \in \partial I.$$

Reciprocamente, seja $u \in W^{1,p}(I)$ tal que $u = 0$ sobre ∂I. Consideremos uma função $G \in C^1(\mathbb{R})$ definida por

$$G(t) = \begin{cases} 0, \text{ se } |t| \leqslant 1 \\ t, \text{ se } |t| \geqslant 2 \end{cases}$$



tal que $|G(t)| \leqslant |t|$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Note que $G \in C^1(\mathbb{R})$, $G(0) = 0$ e como $u \in W^{1,p}(I)$ do Corolário 1.2.2 segue que $u_n \in W^{1,p}(I)$ onde $u_n = \dfrac{1}{n}G(nu)$.

Por outro lado

$$Supp\,(u_n) := \overline{\{x \in I : u_n(x) \neq 0\}} \subset \{x \in I : |u_n(x)| \geqslant 1/n\},$$

pois

$$u_n(x) = \frac{1}{n}G(nu(x)) = \begin{cases} 0, & \text{se } |n\,u(x)| \leqslant 1 \\ u(x), & \text{se } |n\,u(x)| \geqslant 2. \end{cases}$$

Assim, se $|u(x)| > 1/n$ então $u_n(x) \neq 0$. Então o $Supp\,(u_n)$ é um compacto incluido em I (isto segue do fato que $u = 0$ sobre ∂I e $u(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$, $x \in I$). Por conseguinte $u_n \in W_0^{1,p}(I)$ pois $u_n \in W^{1,p}(I)$ e $u_n \in C_0(I)$.

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (ver [4], página 54) temos

$$\|u_n - u\|^p_{L^p(I)} = \int_I |u_n(x) - u(x)|^p dx \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Note que existe uma constante C independente de $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|G'(nu)\|_{L^\infty(I)} \leqslant C$ e como $u'_n = \frac{1}{n}[G \circ (nu)]' = G'(nu) \cdot u'$, segue que

$$|u'_n| = |G'(nu)||u'| \leqslant C|u'| \text{ q.s. em } I.$$

Do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\|u'_n - u'\|^p_{L^p(I)} = \int_I |u'_n(x) - u'(x)|^p dx \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Portanto $u_n \to u$ em $W^{1,p}(I)$ e segue-se que $u \in W^{1,p}_0(I)$. □

Proposição 1.2.2 (Desigualdade de Poincaré) *Suponhamos que I é limitado. Então existe uma constante C (dependente de $|I|$) tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leqslant C\|u'\|_{L^p(I)}, \quad \forall u \in W^{1,p}_0(I).$$

Dito de outro modo, em $W^{1,p}_0(I)$ a quantidade $\|u'\|_{L^p(I)}$ é uma norma equivalente à norma de $W^{1,p}(I)$.

Demonstração: Se $u \in W^{1,p}_0(I)$ e $I = (a,b)$ então

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \Big|\int_a^x u'(t)dt\Big| \leqslant \int_a^x |u'(t)|dt \leqslant \|u'\|_{L^1(I)}.$$

Assim, $\|u\|_{L^\infty(I)} \leqslant \|u'\|_{L^1(I)}$.

Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, temos

$$|u(x)|^p \leqslant \Big(\int_I |u'|dx\Big)^p \leqslant \Big[\Big(\int_I |1|^{p'}dx\Big)^{1/p'}\Big(\int_I |u'|^p dx\Big)^{1/p}\Big]^p = |I|^{p/p'}\|u'\|^p_{L^p(I)}$$

onde temos usado a desigualdade Hölder (ver [4], página 56).

Então integrando sobre o intervalo I tem-se

$$\int_I |u(x)|^p dx \leqslant |I|^{p/p'}\|u'\|^p_{L^p(I)}\int_I dx = |I|^{(p/p')+1}\|u'\|^p_{L^p(I)} = |I|^p\|u'\|^p_{L^p(I)},$$

disto resulta que

$$\|u\|_{L^p(I)} \leqslant |I|\|u'\|_{L^p(I)}. \tag{1.3}$$

Conseqüentemente,

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leqslant C\|u'\|_{L^p(I)},$$

onde $C := 1 + |I|$. □

Observação 1.2.5 *Se I é limitado, a expressão $\langle u', v'\rangle_{L^2(I)}$ define sobre $H_0^1(I)$ um produto escalar e, a norma associada, isto é, $\|u'\|_{L^2(I)}$, é equivalente à norma de $H^1(I)$.*

Definição 1.2.4 *Dados um inteiro $m \geqslant 2$ e um número real $1 \leqslant p < \infty$, definimos o espaço $W_0^{m,p}(I)$ como o fecho de $C_0^m(I)$ em $W^{m,p}(I)$. Equivalentemente*

$$W_0^{m,p}(I) = \{u \in W^{m,p}(I) : u = Du = \ldots = D^{m-1}u = 0 \text{ sobre } \partial I\}.$$

Observação 1.2.6 *É conveniente distinguir bem entre*

$$W_0^{2,p}(I) = \{u \in W^{2,p}(I) : u = Du = 0 \text{ sobre } \partial I\} \quad e$$

$$W^{2,p}(I) \cap W_0^{1,p}(I) = \{u \in W^{2,p}(I) : u = 0 \text{ sobre } \partial I\}.$$

Definição 1.2.5 (Dual de $W_0^{1,p}(I)$) *Definimos por $W^{-1,p'}(I)$ o **espaço dual** de $W_0^{1,p}(I)$ com $1 \leqslant p < \infty$ e por $H^{-1}(I)$ o espaço dual de $H_0^1(I)$.*

Observação 1.2.7 *a) Da teoria de espaços duais temos as seguinte inclusões*

$$H_0^1(I) \subset L^2(I) \subset H^{-1}(I)$$

com imersões continuas e densas.

b) Se I é limitado, tem-se

$$W_0^{1,p}(I) \subset L^2(I) \subset W^{-1,p'}(I), \text{ para todo } 1 \leqslant p < \infty,$$

com imersões contínuas e densas.

c) Se I não é limitado, tem-se somente

$$W_0^{1,p}(I) \subset L^2(I) \subset W^{-1,p'}(I), \text{ para todo } 1 \leqslant p \leqslant 2,$$

com imersões contínuas e densas.

Os elementos de $W^{-1,p'}(I)$ podem-se representar por meio de funções de $L^{p'}(I)$; mais precisamente, temos

Proposição 1.2.3 *Se $F \in W^{-1,p'}(I)$ então existem $f_0, f_1 \in L^{p'}(I)$ tais que*

$$\langle F, v\rangle = \int_I f_0 v + \int_I f_1 v', \quad \forall v \in W_0^{1,p}(I) \quad e$$
$$\|F\| = \max\{\|f_0\|_{L^{p'}(I)}, \|f_1\|_{L^{p'}(I)}\}.$$

Quando I é limitado, pode-se tomar $f_0 = 0$.

Demonstração: Seja o espaço $E = L^p(I) \times L^p(I)$ munido da norma

$$\|h\|_E = \|h_0\|_{L^p(I)} + \|h_1\|_{L^p(I)}, \quad \text{onde} \quad h = [h_0, h_1].$$

A aplicação $T : W_0^{1,p}(I) \to E$ definida por $Tu = [u, u']$ é uma isometria, pois $\|Tu\|_E = \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)} = \|u\|_{W_0^{1,p}(I)}$.

Seja $G = T(W_0^{1,p}(I))$, munido da norma induzida por E e $S = T^{-1} : G \to W_0^{1,p}(I)$.

A aplicação $G \ni h \mapsto \langle F, Sh\rangle \in \mathbb{R}$ é um funcional linear e continua sobre G. Pelo Teorema de Hahn-Banach (ver [4], Corolário I.2, página 3) podemos estender este funcional a um funcional linear e continua em E, o qual denotaremos por $\Phi : E \to \mathbb{R}$, com $\|\Phi\|_{E'} = \|F\|$.

Como $\Phi \in E' = L^{p'}(I) \times L^{p'}(I)$, segue do Teorema da Representação de Riesz (ver Teorema 1.1.4) que existem $f_0, f_1 \in L^{p'}(I)$ tais que

$$\langle \Phi, h\rangle = \int_I f_0 h_0 + \int_I f_1 h_1, \quad \forall h = [h_0, h_1] \in E.$$

Usando a desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned}
|\langle \Phi, h\rangle| &\leqslant \int_I |f_0 h_0| + \int_I |f_1 h_1| \leqslant \|f_0\|_{L^{p'}(I)}\|h_0\|_{L^p(I)} + \|f_1\|_{L^{p'}(I)}\|h_1\|_{L^p(I)} \\
&\leqslant \max\{\|f_0\|_{L^{p'}(I)}, \|f_1\|_{L^{p'}(I)}\}\|h_0\|_{L^p(I)} + \max\{\|f_0\|_{L^{p'}(I)}, \|f_1\|_{L^{p'}(I)}\}\|h_1\|_{L^p(I)} \\
&= \max\{\|f_0\|_{L^{p'}(I)}, \|f_1\|_{L^{p'}(I)}\}(\|h_0\|_{L^p(I)} + \|h_1\|_{L^p(I)}) \\
&= \max\{\|f_0\|_{L^{p'}(I)}, \|f_1\|_{L^{p'}(I)}\}\|h\|_E.
\end{aligned}$$

Disto segue

$$\|\Phi\|_{E'} = \sup_{\substack{h \in E \\ \|h\|_E \leqslant 1}} |\langle \Phi, h \rangle| \leqslant \max\{\|f_0\|_{L^{p'}(I)}, \|f_1\|_{L^{p'}(I)}\}. \tag{1.4}$$

Tomando $h_0 = \dfrac{|f_0|^{p'-2} f_0}{\|f_0\|_{L^{p'}(I)}^{p'-1}}$ e $h_1 = \dfrac{|f_1|^{p'-2} f_1}{\|f_1\|_{L^{p'}(I)}^{p'-1}}$, temos

$$\begin{aligned} \|\Phi\|_{E'} &= \sup_{\substack{h \in E \\ \|h\|_E \leqslant 1}} |\langle \Phi, h \rangle| \geqslant \langle \Phi, h \rangle = \int_I \Big(\frac{|f_0|^{p'-2} f_0}{\|f_0\|_{L^{p'}(I)}^{p'-1}}\Big) f_0 + \int_I \Big(\frac{|f_1|^{p'-2} f_1}{\|f_1\|_{L^{p'}(I)}^{p'-1}}\Big) f_1 \\ &= \|f_0\|_{L^{p'}(I)} + \|f_1\|_{L^{p'}(I)} \geqslant \max\{\|f_0\|_{L^{p'}(I)}, \|f_1\|_{L^{p'}(I)}\}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

De (1.4) e (1.5), segue que $\|\Phi\|_{E'} = \max\{\|f_0\|_{L^{p'}(I)}, \|f_1\|_{L^{p'}(I)}\}$.

Quando I é limitado dotamos ao espaço $W_0^{1,p}(I)$ da norma $\|u'\|_{L^p(I)}$ (ver Proposição 1.2.2). Aplicamos o mesmo raciocínio da primeira parte com $E = L^p(I)$ e $T : u \in W_0^{1,p}(I) \to u' \in L^p(I)$ e obtemos $\langle F, v \rangle = \displaystyle\int_I f_1 v'$, $\forall v \in W_0^{1,p}(I)$. $\square$

Imersões de Sobolev

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um aberto limitado. Para $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant p \leqslant \infty$ consideremos o espaço de Sobolev $W^{m,p}(I)$. O número **net smoothness** (f) definido por

$$\textit{net smoothness}\,(f) := m - \frac{1}{p}, \quad \forall f \in W^{m,p}(I) \tag{1.6}$$

caracteriza as propriedades de suavidade dos elementos de $W^{m,p}(I)$:

Esta quantidade é fundamental para as relações entre os diferentes espaços de Sobolev.

Teorema 1.2.4 (Imersões de Sobolev) *Seja $k, m \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$ e seja I como acima. Então as seguintes inclusões são continuas*

$$W^{m,p}(I) \subset \begin{cases} W^{k,q}(I), & \textit{se}\; m - \frac{1}{p} \geqslant k - \frac{1}{q},\; q \geqslant p \\ & (\textit{a menos que}\; m - \frac{1}{p} = k, q = \infty) \\ C^{k+\mu}(\overline{I}), & \textit{se}\; 0 \leqslant \mu \leqslant m - k - \frac{1}{p} < 1, \\ & (\textit{a menos que}\; m - \frac{1}{p} \in \mathbb{N}). \end{cases} \tag{1.7}$$

Além disso, para I limitado as inclusões acima são compactas no caso das inequações estritas; $m - \frac{1}{p} > k - \frac{1}{q}$ *ou* $m - \frac{1}{p} > k + \mu$, *respectivamente.*

Demonstração: Ver [5], página 23. □

1.2.1 Problema de Valor de Contorno

Considere o seguinte Problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f \quad \text{em} \quad I = (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

onde f é uma função dada (por exemplo de $C(\overline{I})$, ou de $L^2(I)$). O problema (1.8) é chamado de Problema de Dirichlet homogêneo.

Definição 1.2.6 *Uma* ***Solução Clássica*** *de* (1.8) *é uma função* $u \in C^2(\overline{I})$ *que verifica* (1.8) (*no sentido usual*).

Definição 1.2.7 *Uma* ***Solução Fraca*** *de* (1.8) *é uma função* $u \in H_0^1(I)$ *que verifica*

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int fv, \quad \forall v \in H_0^1(I). \tag{1.9}$$

Proposição 1.2.4 *Para toda* $f \in L^2(I)$, *existe uma única* $u \in H_0^1(I)$ *solução de* (1.9). *Além disso, u é caracterizado por*

$$\min_{v \in H_0^1(I)} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv \right\}.$$

Este é o chamado Principio de Dirichlet.

Demonstração: Ver [4], página 136. □

Observação 1.2.8 *a*) Toda solução clássica é solução fraca. *Isto segue da fórmula de integração por partes do Corolário* 1.2.1.

b) Existência e Unicidade de uma solução fraca, *isto vem da Proposicão* 1.2.4.

c) Regularidade e recuperação da solução clássica. *Se* $f \in L^2(I)$ *e* $u \in H_0^1(I)$ *é uma solução fraca, então* $u \in H^2(I)$. *Com efeito, se* u *é uma solução fraca de* (1.8) *temos*

$$\int_I u'v' = -\int (u-f)v, \quad \forall v \in C_0^1(I) \subset H_0^1(I)$$

e assim $u' \in H^1(I)$ *pois* $u - f = u'' \in L^2(I)$, *isto é,* $u \in H^2(I)$.

Além disso $f \in C(\overline{I})$ *então a solução fraca* $u \in C^2(\overline{I})$. *De fato, se* $f \in C(\overline{I})$ *e* $u \in H_0^1(I)$, *segue que* $u - f \in C(\overline{I})$. *Então* $u'' \in C(\overline{I})$ *e daí* $u \in C^2(\overline{I})$. *A solução fraca* $u \in C^2(\overline{I})$ *é uma solução clássica pois* $\int_I (-u'' + u - f)\varphi = 0$, *para todo* $\varphi \in C_0^1(I)$ *e como* $C_0^1(I)$ *é denso e,* $L^2(I)$ (*ver Corolário* 1.1.1), $-u'' + u = f$ *q.s. em* I. *Como* $u \in C^2(\overline{I})$ *segue que a última igualdade é todo* I.

Regularidade das Soluções Fracas

Dado $x \in \mathbb{R}^n$ escrevemos $x = (x', x_n)$ com $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, $|x'| = \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right)^{1/2}$. Denotemos por

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x', x_n) : x_n > 0\}, \quad Q = \{x = (x', x_n) : |x'| < 1 \text{ e } |x_n| < 1\},$$

$$Q_+ = Q \cap \mathbb{R}_+^n \quad \text{e} \quad Q_0 = \{x = (x', x_n) : |x'| < 1 \text{ e } x_n = 0\}.$$

Para $n = 3$ podemos olhar nas figuras (1.1) e (1.2).

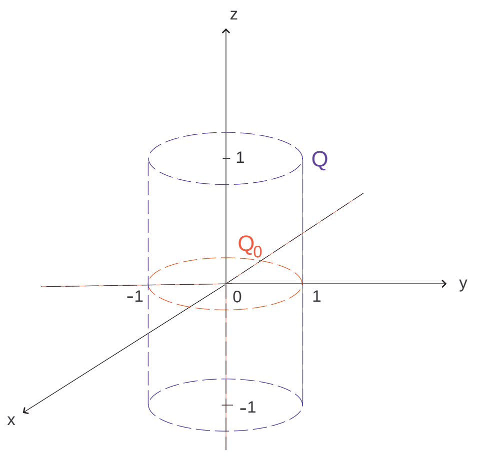


Figura 1.1: Os espaços Q e Q_0.

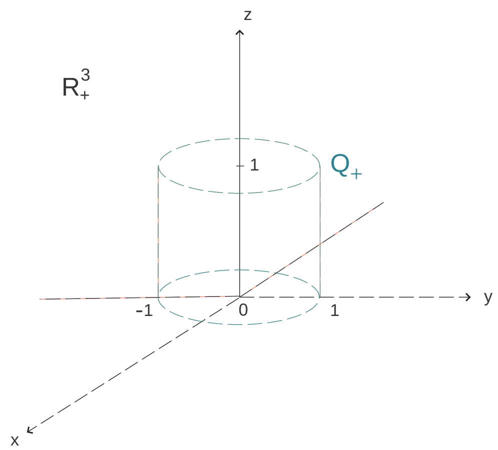


Figura 1.2: Os espaços $\mathbb{R}_+^3$ e Q_+.

Definição 1.2.8 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto. Dizemos que Ω é de* ***Classe*** *C^m, $m \geqslant 1$, se para todo $x \in \Gamma$ existem uma vizinhança U de x em $\mathbb{R}^n$ e uma aplicação bijetiva $H : Q \to U$ tal que*

$$H \in C^m(\overline{Q}), \quad H^{-1} \in C^m(\overline{U}), \quad H(Q_+) = U \cap \Omega \quad e \quad H(Q_0) = U \cap \Gamma.$$

Dizemos que Ω é de classe C^∞ se é de classe C^m para todo m.

Teorema 1.2.5 (Regularidade para o Problema de Dirichlet) *Seja Ω um aberto de classe C^2 com Γ limitada (ou bem $\Omega = \mathbb{R}^n_+$). Seja $f \in L^2(\Omega)$ e seja $u \in H^1_0(\Omega)$ que verifica*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi, \quad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega).$$

Então $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\Omega)}$, onde C é uma constante que só depende de Ω. Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e $f \in H^m(\Omega)$ onde $m \geqslant 1$, então

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \quad com \quad \|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{H^m(\Omega)}.$$

Em particular, se $m > \dfrac{n}{2}$ então $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Por último, se Ω é de classe C^∞ e $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, então $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [4], página 182. □

1.3 Operadores Lineares, Semigrupos e Equações de Evolução

Nesta seção vamos definir os operadores maximais monótonos como também vamos ver alguns teoremas de existência e unicidade de soluções para um problema de Cauchy abstrato num certo espaço de Banach e alguns resultados da Teoria de Semigrupo.

1.3.1 Operadores Lineares Não Limitados

Sejam E, F espaços de Banach reais e $A : D(A) \subset E \to F$ um operador linear.

Definição 1.3.1 *Dizemos que um operador linear A é* ***limitado*** *se existe uma constante $c \geqslant 0$ tal que*

$$\|Au\|_F \leqslant c\|u\|_E, \quad \forall u \in D(A).$$

Se A não é limitado dizemos que A é um operador linear **não limitado**.

Definição 1.3.2 *Seja A um operador linear. Definimos*

i) O ***Gráfico*** *de um operador A como sendo o seguinte conjunto*

$$G(A) = \{(u, Au) : u \in D(A)\} \subset E \times F.$$

ii) A ***Imagem*** *de um operador A como sendo o seguinte conjunto*

$$R(A) = \{Au : u \in D(A)\} \subset F.$$

iii) O ***Núcleo*** *de um operador A como sendo o seguinte conjunto*

$$N(A) = \{u \in D(A) : Au = 0\} \subset E.$$

Definição 1.3.3 *Dizemos que um operador A é* ***fechado*** *se $G(A)$ é fechado em $E \times F$.*

Observação 1.3.1 *Para mostrar que um operador é fechado procedemos da seguinte forma. Toma-se uma seqüência (u_n) em $D(A)$ tal que $u_n \to u$ em E e $Au_n \to f$ em F. Depois trata-se de verificar que*

a) $u \in D(A)$ e

b) $f = Au$.

Definição 1.3.4 *Seja $A : D(A) \subset E \to F$ um operador não limitado com domínio denso. O operador $A^* : D(A^*) \subset F^{'} \to E^{'}$ chama-se* ***Adjunto*** *de A, onde*

$$D(A^*) = \{v \in F^{'} : \exists\, c \geqslant 0, \text{ tal que } |\langle v, Au\rangle| \leqslant c\|u\|_E, \ \forall u \in D(A)\}$$

e A^* é caracterizado pela relação

$$\langle v, Au\rangle_{F',F} = \langle A^*v, u\rangle_{E',E}, \quad \forall u \in D(A), \quad \forall v \in D(A^*).$$

Proposição 1.3.1 *Seja $A : D(A) \subset E \to F$ um operador linear não limitado com domínio denso. Então A^* é fechado, isto é, $G(A^*)$ é fechado em $F' \times E'$.*

Demonstração: Seja $v_n \in D(A^*)$ tal que $v_n \to v$ em F' e $A^*v_n \to f$ em E'. Trata-se de mostrar que $v \in D(A^*)$ e $A^*v = f$. Para isto utilizamos

$$\langle v_n, Au\rangle = \langle A^*v_n, u\rangle, \quad \forall u \in D(A).$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\langle v, Au\rangle = \langle f, u\rangle, \quad \forall u \in D(A).$$

Por conseguinte $v \in D(A^*)$ (pela definição de $D(A^*)$) e $A^*v = f$. □

Seja H um espaço de Hilbert.

Definição 1.3.5 *Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear não limitado.*

*a) Diz-se que A é um operador **Monótono** se*

$$\langle Av, v\rangle \geqslant 0, \quad \forall v \in D(A).$$

*b) Diz-se que A é um operador **Maximal Monótono** se além de cumprir a parte (a), satisfaz que $R(I + A) = H$, isto é,*

$$\forall f \in H, \exists\, u \in D(A) \textit{ tal que } u + Au = f.$$

Proposição 1.3.2 *Seja A um operador maximal monótono. Então*

a) $D(A)$ é denso em H.

b) A é fechado.

c) Para todo $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)$ é bijetivo de $D(A)$ sobre H, $(I + \lambda A)^{-1}$ é um operador limitado e $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(H)} := \sup\limits_{\substack{u \in H \\ \|u\| \leqslant 1}} \|(I + \lambda A)^{-1}u\| \leqslant 1$.

Demonstração: *a*) Seja $f \in H$ tal que $\langle f, v\rangle = 0, \forall v \in D(A)$. Comprovemos que $f = 0$. Com efeito, existe $v_0 \in D(A)$ tal que $v_0 + Av_0 = f$. Tem-se

$$0 = \langle f, v_0\rangle = \langle v_0 + Av_0, v\rangle = \|v_0\|^2 + \langle Av_0, v_0\rangle \geqslant \|v_0\|^2 \geqslant 0.$$

Portanto $v_0 = 0$ e $f = 0$.

b) Para todo $f \in H$ existe um **único** $u \in D(A)$ tal que $u + Au = f$. Com efeito, se $\widetilde{u}$ designa outra solução, então tem-se $(u - \widetilde{u}) + A(u - \widetilde{u}) = 0$. Fazendo o produto escalar com $(u - \widetilde{u})$ e aplicando a monotonia de A se vê que $u - \widetilde{u} = 0$. Por outro lado tem-se $\|u\|^2 + \langle Au, u\rangle = \langle f, u\rangle$ e, por conseguinte aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos $\|u\| \leqslant \|f\|$. O operador

$$\begin{array}{rcll} (I+A)^{-1}: & H & \rightarrow & D(A) \subset H \\ & f & \rightarrow & (I+A)^{-1}f = u, \end{array}$$

é um operador linear limitado de H em H e $\|(I+A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(H)} \leqslant 1$; pois I, A são operadores lineares, como $u = (I+A)^{-1}f$ segue $\|(I+A)^{-1}f\| \leqslant \|f\|$, donde obtemos

$$\sup_{\substack{f \in H \\ \|f\| \leqslant 1}} \|(I+A)^{-1}f\| \leqslant 1.$$

A é fechado. De fato, seja $u_n \in D(A)$ tal que $u_n \to u$ e $Au_n \to f$. Como $u_n = (I+A)^{-1}(I+A)u_n \to (I+A)^{-1}(u+f)$. Segue que $u = (I+A)^{-1}(u+f)$, isto é, $u \in D(A)$ e $u + Au = u + f$.

c) Suponhamos que para algum $\lambda_0 > 0$ tem-se $R(I + \lambda_0 A) = H$. Mostraremos que para todo $\lambda > \dfrac{\lambda_0}{2}$ tem-se $R(I + \lambda A) = H$.

Començamos observando que, analogamente ao item (*b*), para todo $f \in H$ existe $u \in D(A)$ único tal que $u + \lambda_0 Au = f$. O operador

$$\begin{array}{rcll} (I+\lambda_0 A)^{-1}: & H & \rightarrow & D(A) \subset H \\ & f & \rightarrow & (I+\lambda_0 A)^{-1}f = u, \end{array}$$

é um operador limitado e tem-se $\|(I+\lambda_0 A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(H)} \leqslant 1$. Agora vamos resolver a equação

$$u + \lambda Au = f, \quad \text{com} \quad \lambda > 0. \tag{1.10}$$

Multiplicando (1.10) por $\dfrac{\lambda_0}{\lambda}$ temos

$$\frac{\lambda_0}{\lambda}u + \lambda_0 Au = \frac{\lambda_0}{\lambda}f,$$

disto segue

$$u + \lambda_0 Au = \frac{\lambda_0}{\lambda}f + (1 - \frac{\lambda_0}{\lambda})u,$$

ou também

$$u = (I + \lambda_0 A)^{-1}\Big[\frac{\lambda_0}{\lambda}f + (1 - \frac{\lambda_0}{\lambda})u\Big]. \tag{1.11}$$

Se $\left|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right| < 1$, isto é, $\lambda > \frac{\lambda_0}{2}$, então (1.11) admite uma única solução graças ao Teorema do Ponto Fixo de Banach (ver [4], página 83). Com efeito, seja a aplicação $F : H \to H$, dada por

$$F(u) = (I + \lambda_0 A)^{-1}\Big[\frac{\lambda_0}{\lambda}f + (1 - \frac{\lambda_0}{\lambda})u\Big], \quad u \in H.$$

F é uma contração. De fato, dados u_1,$u_2 \in H$, temos

$$\begin{aligned}\|F(u_1) - F(u_2)\| &= \Big\|(I + \lambda_0 A)^{-1}\Big[(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda})(u_1 - u_2)\Big]\Big\| \\ &= \Big\|(I + \lambda_0 A)^{-1}\Big\|_{\mathscr{L}(H)}\Big\|(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda})(u_1 - u_2)\Big\| \\ &\leqslant \Big|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\Big|\Big\|u_1 - u_2\Big\|.\end{aligned}$$

Logo para F ser uma contração devemos ter $\Big|1 - \dfrac{\lambda_0}{\lambda}\Big| < 1$. Disto segue que $\lambda > \dfrac{\lambda_0}{2} > 0$. Então pelo Teorema de Ponto Fixo de Banach existe um único ponto $u \in H$ tal que $F(u) = u$.

Sendo A é maximal monótono então $I + A$ é sobrejetivo ($\lambda_0 = 1$). Pelo anterior $I + \lambda A$ é sobrejetivo para $\lambda > \frac{1}{2}$ e, portanto, também para $\lambda > \frac{1}{2^2} > \cdots > \frac{1}{2^n} > 0$. Conseqüentemente $I + \lambda A$ é sobrejetivo para todo $\lambda > 0$. □

Definição 1.3.6 *Seja A um operador maximal monótono. Definimos o* ***Resolvente*** *de A como sendo o operador*

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}, \quad \forall \lambda > 0$$

e, a ***Regulização Yosida*** *de A como sendo o operador*

$$A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda), \quad \forall \lambda > 0.$$

Note que $\|J_\lambda\|_{\mathscr{L}(H)} \leqslant 1$.

Proposição 1.3.3 *Seja A um operador maximal monótono. Verifica-se*

a) $A_\lambda v = A(J_\lambda v)$, $\forall v \in H$ *e* $\forall \lambda > 0$.

b) $A_\lambda v = J_\lambda(Av)$, $\forall v \in D(A)$ *e* $\forall \lambda > 0$.

c) $\|A_\lambda v\| \leqslant \|Av\|$, $\forall v \in D(A)$ *e* $\forall \lambda > 0$.

d) $\lim\limits_{\lambda \to 0} J_\lambda v = v$, $\forall v \in H$.

e) $\lim\limits_{\lambda \to 0} A_\lambda v = Av$, $\forall v \in D(A)$.

f) $\langle A_\lambda v, v\rangle \geqslant 0$, $\forall v \in H$ *e* $\forall \lambda > 0$.

g) $\|A_\lambda v\| \leqslant \frac{1}{\lambda}\|v\|$, $\forall v \in H$ *e* $\forall \lambda > 0$.

Demonstração: $a)$ Seja $J_\lambda v = (I + \lambda A)^{-1} v$, $\forall v \in H$, $\forall \lambda > 0$. Daí $v = (I + \lambda A)(J_\lambda v)$. Logo $v = (J_\lambda v) + \lambda A(J_\lambda v)$ e portanto $A_\lambda v = A(J_\lambda v)$.

$b)$ Tem-se

$$Av = \frac{1}{\lambda}[(I + \lambda A)v - v] = \frac{1}{\lambda}(I + \lambda A)(v - J_\lambda v)$$

e daí

$$J_\lambda A v = \frac{1}{\lambda}(v - J_\lambda v).$$

$c)$ Da parte (b) temos

$$\|A_\lambda v\| = \|J_\lambda(Av)\| \leqslant \|J_\lambda\|\|Av\| \leqslant \|Av\|.$$

$d)$ Suponhamos que $v \in D(A)$. Então

$$\|v - J_\lambda v\| = \lambda\|A_\lambda v\| \leqslant \|Av\|,$$

por (c). Portanto $\lim\limits_{\lambda \to 0} J_\lambda v = v$.

Passemos ao caso geral. Seja $v \in H$ e seja $\epsilon > 0$. Como $\overline{D(A)} = H$ (pela Proposição 1.3.2) existe $v_1 \in D(A)$ tal que $\|v - v_1\| \leqslant \epsilon$. Tem-se

$$\begin{aligned}
\|J_\lambda v - v\| &\leqslant \|J_\lambda v - J_\lambda v_1\| + \|J_\lambda v_1 - v_1\| + \|v_1 - v\| \\
&\leqslant \|J_\lambda(v - v_1)\| + \|J_\lambda v_1 - v_1\| + \|v_1 - v\| \\
&= \|v - v_1\| + \|J_\lambda v_1 - v_1\| + \|v_1 - v\| \\
&\leqslant 2\|v - v_1\| + \|J_\lambda v_1 - v_1\| \\
&\leqslant 2\epsilon + \|J_\lambda v_1 - v_1\|.
\end{aligned}$$

Desta última expressão temos

$$\sup \|J_\lambda v - v\| \leqslant 2\epsilon + \lambda \sup \|Av_1\|$$

Portanto

$$\limsup_{\lambda \to 0} \|J_\lambda v - v\| \leqslant 2\epsilon, \quad \forall \epsilon > 0$$

e, assim

$$\lim_{\lambda \to 0} \|J_\lambda v - v\| = 0.$$

e) Colocando $w = Av \in H$ com $v \in D(A)$. Temos

$$\|A_\lambda v - Av\| = \|J_\lambda(Av) - Av\| = \|J_\lambda(w) - w\|.$$

Disto segue

$$\lim_{\lambda \to 0} \|A_\lambda v - Av\| = \lim_{\lambda \to 0} \|J_\lambda(w) - w\| = 0, \ \forall w \in H.$$

Então

$$\lim_{\lambda \to 0} \|A_\lambda v - Av\| = 0.$$

f) $\forall v \in H$ e $\forall \lambda > 0$ temos

$$\begin{aligned}
\langle A_\lambda v, v\rangle &= \langle A_\lambda v, v - J_\lambda v\rangle + \langle A_\lambda v, J_\lambda v\rangle \\
&= \langle A_\lambda v, \lambda A_\lambda v\rangle + \langle A(J_\lambda v), J_\lambda v\rangle \\
&= \lambda \|A_\lambda v\|^2 + \langle A(J_\lambda v), J_\lambda v\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, da monotonia de A segue

$$\langle A_\lambda v, v\rangle \geqslant \lambda \|A_\lambda v\|^2 \geqslant 0. \tag{1.12}$$

g) De (1.12) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que

$$\lambda \|A_\lambda v\|^2 \leqslant |\langle A_\lambda v, v\rangle| \leqslant \|A_\lambda v\|\|v\|.$$

Portanto

$$\|A_\lambda v\| \leqslant \frac{1}{\lambda}\|v\|.$$

□

Observação 1.3.2 *Da Proposição* 1.3.3 *segue que* $(A_\lambda)_{\lambda>0}$ *é uma familia de operadores* ***limitados*** *que "aproximam" A quando $\lambda \to 0$. Note que $\|A_\lambda\|_{\mathscr{L}(H)}$ explota quando $\lambda \to 0$.*

Definição 1.3.7 *Um operador $A : H \to H'$ é* ***Coercivo*** *se* $\dfrac{\langle Au, u\rangle_{H',H}}{\|u\|_H} \to +\infty$ *quando* $\|u\|_H \to +\infty$, *onde H é um espaço de Hilbert reflexivo.*

1.3.2 Semigrupos de Operadores Lineares

Seja E um espaço de Banach real ou complexo e $\mathscr{L}(E) = \{T : E \to E : T \text{ é linear contínuo}\}$ o espaço dos operadores lineares contínuos de E em E com a norma usual

$$\|T\|_{\mathscr{L}(E)} = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_E}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|_E=1}} \|Tx\|_E.$$

Definição 1.3.8 *Um* ***semigrupo de operadores lineares*** *em E é uma familia $\{T(t) : t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(E)$ tal que*

i) $T(0) = I$ *(Identidade em $\mathscr{L}(E)$);*

ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, *para todo* $t, s \geqslant 0$.

Definição 1.3.9 *Dizemos que o semigrupo $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é* ***uniformemente contínuo*** *se* $\lim\limits_{t\to 0^+} \|T(t) - I\|_{\mathscr{L}(E)} = 0$, *isto é, $T(t)x \to x$, quando $t \to 0^+$ uniformemente para $\|x\|_E \leqslant 1$.*

Definição 1.3.10 *Dizemos que o semigrupo* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *é* ***fortemente contínuo*** *(ou* C^0 *− semigrupo) se*

$$\lim_{t \to 0^+} T(t)x = x, \text{ para cada } x \in E. \tag{1.13}$$

A equação (1.13) é equivalente a

$$\lim_{t \to 0^+} \|T(t)x - x\|_E = 0, \text{ para cada } x \in E.$$

Definição 1.3.11 *Se* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *é um semigrupo fortemente contínuo em* E*, seu* ***gerador infinitesimal*** *é o operador* $A : D(A) \subset E \to E$*, definido por*

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t},$$

onde

$$D(A) = \{x \in E : \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe}\}.$$

Observação 1.3.3 *Denotamos* $Ax = \lim_{t \to 0^+} \dfrac{T(t)x - x}{t} = \dfrac{d^+}{dt} T(t)x\Big|_{t=0}, \ \forall x \in D(A).$

No que segue, as demonstrações dos teoremas, corolários e lemas podem ser vistas nos livros [8], [14], [16] e [18].

Teorema 1.3.1 *Se* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *é um semigrupo fortemente contínuo, então existem constantes* $\omega \geqslant 0$ *e* $M \geqslant 1$ *tal que*

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(E)} \leqslant Me^{\omega t}, \ \forall t \geqslant 0. \tag{1.14}$$

Corolário 1.3.1 *Se* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *é um semigrupo fortemente contínuo, então para cada* $x \in E$*, a função* $t \to T(t)x$ *é continua de* $\mathbb{R}^+$ *em* E*.*

Teorema 1.3.2 *Seja* $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ *um semigrupo fortemente contínuo e* A *seu gerador infinitesimal. Então*

a) para cada $x \in E$*,*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

b) para cada $x \in E$,

$$\int_0^t T(s)x ds \in D(A) \quad e \quad A(\int_0^t T(s)x ds) = T(t)x - x.$$

c) para cada $x \in D(A)$ e $t \geqslant 0$, $T(t)x \in D(A)$ e

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \text{ para } t > 0.$$

d) para cada $x \in D(A)$ e $t, s \geqslant 0$ tem-se

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau.$$

Corolário 1.3.2 *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geqslant 0\}$, então $D(A)$ é denso em E e A é um operador linear fechado.*

Teorema 1.3.3 *Sejam A o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ e $D(A^n)$ o domínio de A^n. Então $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ é denso em E.*

Definição 1.3.12 *Dizemos que um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ é um* ***semigrupo uniformemente limitado*** *se no Teorema 1.3.1 temos $\omega = 0$. Se, além disso tivermos que $M = 1$, o semigrupo é chamado de* ***semigrupo de contrações****.*

Definição 1.3.13 *Se A é um operador linear em E, não necessariamente limitado. Dizemos que o* ***Conjunto Resolvente*** *$\rho(A)$ de A é o conjunto de todos os números complexos λ, para os quais $\lambda I - A$ é inversível e $(\lambda I - A)^{-1}$ é um operador linear limitado em E.*

A familia $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$, é chamada de ***Resolvente*** *de A.*

Teorema 1.3.4 (Hille-Yosida) *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ se, e somente se,*

i) A é fechado e $\overline{D(A)} = E$;

ii) o conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém $\mathbb{R}^+$ e para todo $\lambda > 0$ e temos ainda

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathscr{L}(E)} \leqslant \frac{1}{\lambda}. \tag{1.15}$$

Lema 1.3.1 *Suponha que A satisfaz as condições (i) e (ii) do Teorema 1.3.4 e seja $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$. Então*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \text{ para todo } x \in E. \tag{1.16}$$

Definição 1.3.14 *Para cada $\lambda > 0$, a **Aproximação de Yosida** A_λ de A é definida por*

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I. \tag{1.17}$$

Lema 1.3.2 *Suponha que A satisfaz as condições (i) e (ii) do Teorema 1.3.4. Se A_λ é a Aproximação de Yosida de A, então*

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax, \text{ para todo } x \in D(A). \tag{1.18}$$

Lema 1.3.3 *Suponha que A satisfaz as condições (i) e (ii) do Teorema 1.3.4. Se A_λ é a Aproximação de Yosida de A, então A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo de contrações $\{e^{tA_\lambda} : t \geqslant 0\}$. Além disso, para cada $x \in E$, $\lambda, \mu > 0$, temos*

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\|_E \leqslant t\|A_\lambda x - A_\mu x\|_E, \text{ para todo } t \geqslant 0. \tag{1.19}$$

Corolário 1.3.3 *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações $\{T(t) : t \geqslant 0\}$. Se A_λ é a aproximação de Yosida, então*

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x, \text{ para todo } x \in E. \tag{1.20}$$

Corolário 1.3.4 *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações $\{T(t) : t \geqslant 0\}$. O conjunto resolvente de A contém o semi-plano $\{\lambda : \mathrm{Re}(\lambda) > 0\}$ e para tais λ tem-se*

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathscr{L}(E)} \leqslant \frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)}. \tag{1.21}$$

Seja E um espaço de Banach real ou complexo e E' seu dual. Denotaremos o valor de $x' \in E'$ em $x \in E$ por $\langle x', x\rangle$ ou $\langle x, x'\rangle$. Para cada $x \in E$ definimos o conjunto dualidade $F(x) \subseteq E'$ por

$$F(x) = \{x' \in E' : \mathrm{Re}\langle x', x\rangle = \|x\|_E^2 = \|x'\|_{E'}^2\}. \tag{1.22}$$

O Teorema de Hahn-Banach nos garante que $F(x) \neq \emptyset$ (ver [4], página 3).

Definição 1.3.15 *Um operador A é* ***Dissipativo*** *se para todo $x \in D(A)$ existe um $x' \in F(x)$ tal que* $\mathrm{Re}\langle Ax, x'\rangle \leqslant 0$.

Observação 1.3.4 *Quando E é um espaço de Hilbert, um operador A é dissipativo é equivalente a dizer que $-A$ é um operador monótono.*

O seguinte resultado nos da uma caracterização dos operadores dissipativos.

Teorema 1.3.5 *Um operador A é dissipativo se, e somente se,*

$$\|(\lambda I - A)x\|_E \geqslant \lambda \|x\|_E, \text{ para todo } x \in D(A) \text{ e } \lambda > 0. \tag{1.23}$$

Teorema 1.3.6 (Lumer-Phillips) *Seja A um operador linear em E com domínio denso.*

i) Se A é dissipativo e existe um $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem, $R(\lambda_0 I - A)$, de $\lambda_0 I - A$ é E, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações em E.

ii) Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações sobre E, então $R(\lambda I - A) = E$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo. Além disso, para todo $x \in D(A)$ e todo $x' \in F(x)$, $\mathrm{Re}\langle Ax, x'\rangle \leqslant 0$.

Corolário 1.3.5 *Seja A um operador linear fechado e densamente definido. Se A e A^* são dissipativos, então A é gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações em E.*

1.3.3 Equações de Evolução de Primeira e Segunda Ordem

Nesta seção apresentamos as equações de evolução abstratas de primeira e segunda ordem em um espaço de Hilbert.

Equação de Primeira Ordem Homogênea

Teorema 1.3.7 (Hille-Yosida) *Seja A um operador maximal monótono em um espaço de Hilbert H. Então para todo $u_0 \in D(A)$ existe uma única função*

$$u \in C^1([0,\infty); H) \cap C([0,\infty); D(A))$$

tal que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \quad \text{em } [0,\infty) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.24}$$

Além disso, verifica-se

$$\|u(t)\| \leqslant \|u_0\| \quad e \quad \left\|\frac{du}{dt}(t)\right\| = \|Au(t)\| \leqslant \|Au_0\|, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Demonstração: Ver [4], página 105. □

Observação 1.3.5 *O domínio $D(A)$ está munido da norma do gráfico $\|v\| + \|Av\|$ ou da norma Hilbertiana equivalente $(\|v\|^2 + \|Av\|^2)^{1/2}$.*

Definição 1.3.16 *Definimos o espaço*

$$D(A^k) = \{v \in D(A^{k-1}) : Av \in D(A^{k-1})\}, \quad k \text{ (inteiro)} \geqslant 2.$$

O espaço $D(A^k)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$\langle u, v \rangle_{D(A^k)} = \sum_{j=0}^{k} \langle A^j u, A^j v \rangle$$

e a norma associada é

$$\|u\|_{D(A^k)} = \left(\sum_{j=0}^{k} \|A^j u\|^2 \right)^{1/2}.$$

Os resultados seguintes nos garante que a solução u do problema (1.24) será mais regular se hipóteses adicionais forem feitas sobre o dado inicial u_0.

Teorema 1.3.8 *Se $u_0 \in D(A^k)$ com $k \geqslant 2$ então a solução u do problema* (1.24) *obtida no Teorema* 1.3.7 *verifica*

$$u \in C^{k-j}([0,+\infty); D(A^j)) \quad \text{para} \quad j = 0, 1, \ldots, k.$$

Demonstração: Ver [4], página 111. □

Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear não limitado com $\overline{D(A)} = H$. Se fazemos a identificação $H' = H$ podemos considerar A^* como um operador não limitado em H, isto é graças à Definição 1.3.4.

Definição 1.3.17 *Dizemos que*

- *A é **simétrico**, se* $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle, \quad \forall u, v \in D(A)$.
- *A é **auto-adjunto**, se* $A^* = A$.

Proposição 1.3.4 *Seja A um operador maximal monótono. A é simétrico se, e somente se, A é auto-adjunto.*

Demonstração: Ver [4], página 113. □

Observação 1.3.6 *Se A é um operador monótono, inclusive simétrico, então A^* não é necessariamente monótono; mas temos as seguintes equivalências*

$$\begin{aligned} A \text{ maximal monótono} &\Longleftrightarrow A^* \text{ maximal monótono} \\ &\Longleftrightarrow A \text{ fechado, } D(A) \text{ denso}, A \text{ e } A^* \text{ são monótonos.} \end{aligned}$$

Teorema 1.3.9 *Seja A um operador maximal monótono e auto-adjunto, então para todo $u_0 \in H$, existe uma única função*

$$u \in C([0,\infty); H) \cap C^1((0,\infty); H) \cap C((0,\infty); D(A))$$

tal que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \quad \text{em } (0,\infty) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.25}$$

Além disso, verifica-se

$$\|u(t)\| \leqslant \|u_0\| \quad e \quad \left\|\frac{du}{dt}(t)\right\| = \|Au(t)\| \leqslant \frac{1}{t}\|u_0\|, \quad \forall t > 0;$$

$$u \in C^k((0,+\infty); D(A^l)) \quad \forall k, l \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Ver [4], página 114. □

Observação 1.3.7 *Para $t \geqslant 0$ consideramos a aplicação linear $S_A(t) : D(A) \to D(A)$, definida por $S_A(t)u_0 =: u(t)$, onde $u(t)$ é a solução do Problema de Cauchy* (1.24) *obtida no Teorema* 1.3.7. *Dado que $\|S_A(t)u_0\| = \|u(t)\| \leqslant \|u_0\|$, pode-se extender $S_A(t)$ por continuidade e densidade a um operador linear contínuo de H em H. Denotamos também esta extensão por $S_A(t)$. Podemos mostrar que $S_A(t)$ tem as seguintes propriedades*

a) Para cada $t \geqslant 0$, $S_A(t) : H \to H$ é um operador contínuo e $\|S_A(t)\|_{\mathscr{L}(H)} \leqslant 1$.

b) $S_A(0) = I_H$.

c) $S_A(t+s) = S_A(t) \circ S_A(s), \quad \forall t, s \geqslant 0$.

d) $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\geqslant 0}} \|S_A(t)u_0 - u_0\|_H = 0, \quad \forall u_0 \in H$.

Uma familia $\{S(t) : t \geqslant 0\}$ de operadores de $\mathscr{L}(H)$ definida para cada valor do parâmetro $t \geqslant 0$ e que satisfaz as propriedades acima é por definição um Semigrupo Fortemente Contínuo de Contrações.

Demonstra-se (pelo Teorema 1.3.7) que reciprocamente, dado um semigrupo fortemente contínuo de contrações $S(t)$, existe um operador A maximal monótono único tal que $S(t) = S_A(t)$ para todo $t \geqslant 0$.

Estabelecemos assim uma correspondência bijetiva entre os operadores maximais monótonos e os semigrupos fortemente contínuos de contracções (ver [4], página 110).

O seguinte resultado nos mostra a relação entre os operadores maximais monótonos e o gerador infinitesimal de semigrupos fortemente contínuos de contrações.

Corolário 1.3.6 *Uma condição necessaria e suficiente para que $-A : D(A) \subset H \to H$ seja o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações $\{e^{-tA} : t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(E)$ é que A seja um operador maximal monótono.*

Demonstração: Ver [16], página 26. □

Em outras o Teorema 1.3.9 pode ser escrito sob o ponto de vista da teoria de semigrupos da seguinte forma

Teorema 1.3.10 *Seja $-A$ o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações $\{e^{-tA} : t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(E)$. Então, para todo $u_0 \in H$, existe uma única função*

$$u \in C([0,\infty); H)$$

tal que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \quad \textit{em } [0,\infty) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.26}$$

Demonstração: Ver [8], página 111. □

Observação 1.3.8 *Do Teorema 1.3.10 podemos ver que só precisamos que o operador A seja maximal monótono e, assim, temos a existência e unicidade de uma solução fraca.*

Equação de Primeira Ordem Semi-Linear

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{u}(t) + Au(t) = f(t, u(t)),\ t > t_0 \\ u(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{1.27}$$

onde $-A : D(A) \subset E \to E$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) := e^{-tA} : t \geqslant 0\}$ de operadores lineares de um espaço de Banach E nele mesmo, $f : U \subset \mathbb{R} \times E \to E$ é uma função contínua sendo U um subconjunto aberto e $(t_0, u_0) \in U$.

Definição 1.3.18 *Uma **Solução Fraca** de* (1.27) *é uma função contínua* $u : [t_0, t_1] \to E$ *que satisfaz a equação integral*

$$u(t) = e^{-A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(t-s)} f(s, u(s))ds, \quad \textit{para } t \in [t_0, t_1]. \tag{1.28}$$

Definição 1.3.19 *Uma **Solução Forte** de* (1.27) *é uma função de classe* $C^1((t_0, t_1), E)$, $u : (t_0, t_1) \to E$ *tal que* $(t, u(t)) \in U$ *e* $u(t) \in D(A)$ *para* $t_0 < t < t_1$ *e satisfaz* (1.27) *em* (t_0, t_1).

Teorema 1.3.11 *Suponhamos que $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{e^{-At} : t \geqslant 0\}$ no espaço de Banach E, $U \subset \mathbb{R} \times E$ aberto e $f : U \to E$ contínua e localmente Lipschitz com relação à segunda variável. Então, para todo $(t_0, u_0) \in U$, existem $t_1 > t_0$ e uma solução fraca $u : [t_0, t_1] \to E$ de (1.27). Além disso, se $v : [t_0, t_2] \to E$ é uma solução fraca de (1.27), temos $u(t) = v(t)$, para $t_0 \leqslant t \leqslant \min\{t_1, t_2\}$.*

Demonstração: Das hipóteses sobre f, existem $\delta > 0$ e constantes $L, M > 0$ tais que; $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\delta$, $\|u-u_0\|_E \leqslant \delta$ implica $(t,u) \in U$, $\|f(t,u)\|_E \leqslant M$. Se ainda, $\|v-u_0\|_E \leqslant \delta$, então

$$\|f(t,u) - f(t,v)\|_E \leqslant L\|u - v\|_E.$$

Como $-A$ é gerador infinitesimal de $\{e^{-At} : t \geqslant 0\}$ segue $\|e^{-A\tau}\|_{\mathscr{L}(E)} \leqslant M_0$ em $0 \leqslant \tau \leqslant \delta$, $\|e^{-A\tau}u_0 - u_0\|_E \leqslant \dfrac{\delta}{2}$ quando $0 \leqslant \tau \leqslant \epsilon$. Escolhamos $t_1 > t_0$ tal que

$$0 < t_1 - t_0 \leqslant \min\{\frac{\delta}{2MM_0}, \frac{1}{2M_0L}, \delta, \epsilon\}.$$

Seja $C = \{u : [t_0, t_1] \to E : u$ é contínua e $\|u(t) - u_0\|_E \leqslant \delta$ para $t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$. Definindo $\rho(u,v) = \sup\limits_{t_0 \leqslant t \leqslant t_1} \|u(t) - v(t)\|_E$, para $u, v \in C$, segue que (C, ρ) é um espaço métrico completo. A aplicação $F : C \to C$ dada por

$$(Fu)(t) = e^{-A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(t-s)}f(s,u(s))ds, \quad \text{para } t \in [t_0, t_1],$$

é contínua.

Então, para $u \in C$ e $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, temos

$$\begin{aligned}
\big\|(Fu)(t) - u_0\big\|_E &\leqslant \big\|e^{-A(t-t_0)}u_0 - u_0\big\|_E + \int_{t_0}^{t} \big\|e^{-A(t-s)}f(s,u(s))\big\|_E ds \\
&\leqslant \frac{\delta}{2} + \int_{t_0}^{t} M_0 M ds \leqslant \frac{\delta}{2} + M_0M(t - t_0) \\
&\leqslant \frac{\delta}{2} + M_0M(\frac{\delta}{2MM_0}) = \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.
\end{aligned}$$

Disto segue que $F(C) \subset C$. Por outro lado, se $u, v \in C$ e $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, então

$$\begin{aligned}
\big\|(Fu)(t) - (Fv)(t)\big\|_E &\leqslant \int_{t_0}^{t} \big\|e^{-A(t-s)}\big(f(s,u(s)) - f(s,v(s))\big)\big\|_E ds \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} \big\|e^{-A(t-s)}\big\|_E \big\|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\big\|_E ds \\
&\leqslant M_0 L \int_{t_0}^{t} \rho(u,v) ds = M_0 L \rho(u,v)(t - t_0) \\
&\leqslant M_0 L \rho(u,v)(\frac{1}{2M_0 L}) \leqslant \frac{1}{2}\rho(u,v).
\end{aligned}$$

Logo $\rho(Fu, Fv) \leqslant \dfrac{1}{2}\rho(u,v)$, para quaisquer $u, v \in C$. Portanto F tem um único ponto fixo em C, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach. Este ponto fixo $u(t) = (Fu)(t)$ é a solução desejada da equação integral (1.28).

Sejam $v : [t_0, t_2] \to E$ outra solução de (1.27) e $t_3 = \min\{t_1, t_2\}$. Consideremos o conjunto $I = \{t \in [t_0, t_3] : u(s) = v(s), \text{ para } t_0 \leqslant s \leqslant t\}$. Então, $I \neq \emptyset$ e limitado superiormente. Seja $\alpha = \sup I$. Como I é fechado, $\alpha \in I$. Se $\alpha > t_3$, então $(\alpha, u(\alpha)) \in U$ e pela parte anterior, existe $\delta > 0$ tal que o problema $\dot{w} + Aw = f(t, w)$ com a condição inicial $w(\alpha) = u(\alpha)$ tem solução única w definida em $[\alpha, \alpha + \delta]$. Como u e v são soluções do problema acima, temos $u(t) = v(t) = w(t)$, para $t \in [\alpha, \alpha + \delta]$, o que contradiz a hipótese de $\alpha = \sup I$. Logo, $\alpha = t_3$. □

Teorema 1.3.12 *Sejam $-A : D(A) \subseteq E \to E$ o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações $\{T(t) : t \geqslant 0\} \subset \mathscr{L}(E)$ e $f : \mathbb{R}_+ \times E \to E$ contínua. Suponhamos que f é localmente Lipschitz com relação à segunda variável. Além disso, suponhamos que existem duas funções contínuas $h, k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, tal que*

$$\|f(\tau, v)\|_E \leqslant k(\tau)\|v\|_E + h(\tau), \ \forall (\tau, v) \in \mathbb{R}_+ \times E.$$

Então para cada $(t_0, u_0) \in \mathbb{R}_+ \times E$, o Problema (1.27) tem uma única solução $u \in C([t_0, \infty), E)$.

Demonstração: Ver [18], página 261. □

Existem outros resultados os quais nos garantem a dependência continua com relação aos dados iniciais do problema de valor inicial (1.27). Maiores detalhes podem ser vistos em [10], [14] e [18].

1.3.4 Sistemas Dinâmicos e Estabilidade de Liapunov

Definição 1.3.20 *Um* ***Sistema Dinâmico*** *em um espaço métrico completo C é uma familia de aplicações $\{S(t) : C \to C, t \geqslant 0\}$ tal que*

i) Para cada $t \geqslant 0$, $S(t)$ é contínua de C em C;

ii) Para cada $x \in C$, $t \to S(t)x$ é contínua;

iii) $S(0) = I$, I é a identidade de C;

iv) $S(t)(S(s)x) = S(t+s)x$, para todo $x \in C$ e $t, s \geqslant 0$.

Definição 1.3.21 *Seja $\{S(t), t \geqslant 0\}$ um sistema dinâmico sobre C e para cada $x \in C$, seja $\gamma(x) = \{S(t)x, t \geqslant 0\}$ é a* ***Órbita*** *(ou semi-órbita positiva) através de x. Dizemos que x é um* ***Ponto de Equilíbrio*** *se $\gamma(x) = \{x\}$.*

Definição 1.3.22 *Uma órbita $\gamma(x)$ (em alguns casos, o ponto x) é* ***Estável*** *, se $\gamma(y) \to \gamma(x)$ quando $y \to x$, $y \in C$, uniformemente em $t \geqslant 0$; isto é, se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que para todo $t \geqslant 0$, $dist(\gamma(x), \gamma(y)) < \epsilon$ sempre que $dist(x, y) < \delta(\epsilon)$, $y \in C$. Uma órbita é* ***Instável*** *se não é estável. Uma órbita $\gamma(x)$ é* ***Assintoticamente Estável Uniformemente*** *se é estável e também existe uma vizinhança $V = \{y \in C : dist(x, y) < r\}$ tal que $dist(\gamma(x), \gamma(y)) \to 0$ quando $t \to +\infty$, uniformemente para $y \in V$.*

Definição 1.3.23 *Seja $\{S(t), t \geqslant 0\}$ um sistema dinâmico sobre C. O* ***Funcional de Liapunov*** *é uma função contínua $V : C \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\dot{V}(x) = \overline{\lim_{t \to 0^+}} \frac{1}{t} \big\{ V(S(t)x) - V(x) \big\} \leqslant 0, \quad \forall x \in C.$$

Não excluímos a possibilidade $\dot{V}(x) = -\infty$.

Teorema 1.3.13 *Sejam $\{S(t), t \geqslant 0\}$ um sistema dinâmico sobre C e 0 um ponto de equilíbrio em C. Suponhamos que V é uma função de Liapunov sobre C que satisfaz $V(0) = 0$, $V(x) \geqslant c(\|x\|)$ para $x \in C$, $\|x\| = dist(x, 0)$, onde $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua estritamente crescente, $c(0) = 0$ e, $c(r) > 0$ para $r > 0$. Então 0 é estável.*

Além disso, suponhamos que $\dot{V}(x) \leqslant -c_1(\|x\|)$*, onde* $c_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é também uma função contínua, crescente e positiva, com* $c_1(0) = 0$*. Então 0 é assintoticamente estável uniformemente.*

Demonstração: Ver [10], página 84. □

Equação de Segunda Ordem

Vamos a introduzir um exemplo onde vamos usar a teoria de operadores maximais monótonos para transformar um problema de equações diferenciais parciais para um problema de equação de evolução de segunda ordem e estudar a existência e unicidade das soluções deste problema.

Consideremos o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + ku_t = 0, \quad 0 < x < l,\ t \geqslant 0 \text{ e } k > 0 \\ u(x,t) = 0, x = 0, l,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = v_0(x), \quad x \in (0,l). \end{cases} \tag{1.29}$$

Veremos que o problema (1.29) é bem posto fazendo uma redução de ordem para um sistema de primeira ordem e em seguida aplicando o Teorema 1.3.7.

Sejam V e H espaços de Hilbert com $V \hookrightarrow H$ e V denso em H e sejam $A : D(A) \subset H \to H$ é um operador maximal monotóno e $B : V \to H$ é um operador linear contínuo e monótono em H. O problema (1.29) pode ser escrito como uma equação de evolução

$$u^{''}(t) + Bu^{'}(t) + Au(t) = 0, \quad t > 0. \tag{1.30}$$

Sejam $\mathfrak{a} : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear, contínua, simétrica e coerciva em V e $A : D(A) \subset H \to H$ um operador não limitado em H. O operador A é um operador maximal monótono obtido de $\mathfrak{a}$, V e H (ver [16], página 19) com

$$\mathfrak{a}(u,v) = \langle Au, v\rangle_H, \quad u \in D(A),\ v \in V. \tag{1.31}$$

Note que $\mathfrak{a}$ define um produto escalar em V cuja norma é equivalente à norma em V. Tomamos $\mathfrak{a}$ como um produto escalar em V.

Seja $B : V \to H$ contínuo e linear e, suponha B monótono em H:

$$\langle Bu, u \rangle_H \geq 0, \quad u \in V.$$

O espaço $\mathcal{H} = V \times H$ com o produto escalar

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{H}} = \mathfrak{a}(u_1, v_1) + \langle u_2, v_2 \rangle_H, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2), \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathcal{H}$$

é um espaço de Hilbert. Definimos o operador $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dado por

$$\mathbb{A}\mathbf{u} = (-u_2, Au_1 + Bu_2), \quad \mathbf{u} \in D(\mathbb{A}),$$

com domínio $D(\mathbb{A}) = D(A) \times V$.

Este operador aparece quando escrevemos (1.30) como um sistema de primeira ordem

$$\begin{cases} u^{'} - v = 0 \\ v^{'} + Au + Bv = 0. \end{cases}$$

A funçaõ $\mathbf{u}(t) = (u(t), v(t))$, $t > 0$, é uma solução da equação

$$\mathbf{u}^{'}(t) + \mathbb{A}\mathbf{u}(t) = 0, \quad t > 0, \tag{1.32}$$

no espaço $\mathcal{H}$. Recíprocamente, a primeira componente da solução de (1.32) satisfaz a equação de segunda ordem (1.30).

Vamos mostrar que o problema de Cauchy para (1.32) é bem posto. Pelo Teorema 1.3.7 é suficiente mostrar que $\mathbb{A}$ é maximal monótono em $\mathcal{H}$. Primeiramente notemos que para $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in D(\mathbb{A})$ temos

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle (-u_2, Au_1 + Bu_2), (u_1, u_2) \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= a(-u_2, u_1) + \langle Au_1 + Bu_2, u_2 \rangle_H \\ &= -a(u_1, u_2) + \langle Au_1, u_2 \rangle_H + \langle Bu_2, u_2 \rangle_H \\ &= \langle Bu_2, u_2 \rangle_H \geqslant 0. \end{aligned}$$

Assim, $\mathbb{A}$ é monótono. Note a dependência deste cálculo na escolha do produto escalar em V e $\mathcal{H}$. Vemos também que $\mathbb{A}$ é monótono exatamente quando B é monótono.

Vamos mostrar que $R(\lambda I + \mathbb{A}) = \mathcal{H}$. Dado $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in \mathcal{H}$ buscamos um $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in D(\mathbb{A})$ tal que $\lambda\mathbf{u} + \mathbb{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$, isto é,

$$u_1 \in D(A), \quad u_2 \in V : \ \lambda u_1 - u_2 = f_1, \quad \lambda u_2 + Au_1 + Bu_2 = f_2.$$

Este sistema é equivalente a

$$\begin{aligned} u_1 \in D(A) : \ (\lambda^2 I + \lambda B + A)u_1 &= (\lambda + B)f_1 + f_2, \\ u_2 &= \lambda u_1 - f_1. \end{aligned}$$

Assim é suficiente mostrar que a imagem de $\lambda^2 I + \lambda B + A$ é todo H. Se a forma bilinear $\widetilde{a}(\cdot, \cdot)$ definida em V por

$$\widetilde{a}(u, v) = \lambda^2 \langle u, v\rangle_H + \lambda\langle Bu, v\rangle_H + \mathfrak{a}(u, v); \quad u, v \in V$$

é contínua e coerciva o resultado desejado segue do Corolário 1.1.2, isto é, para cada $h \in H$ existe um único

$$u \in V : \quad \widetilde{a}(u, v) = \langle h, v\rangle_H, \quad v \in V,$$

e isto é equivalente a

$$u \in D(A) : (\lambda^2 I + \lambda B + A)u = h.$$

Assim, $\mathbb{A}$ é um operador maximal monótono em $\mathcal{H}$.

A Equação da Onda

Consideremos o seguinte problema: encontrar uma função $u : \bar{I} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \ \text{em } Q = I \times]0, \infty[\\ u = 0, \quad \text{sobre} \quad \Sigma = \Gamma \times]0, \infty[\\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \text{em } I \\ u_t(x, 0) = v_0(x), \quad \text{em } I \end{cases} \tag{1.33}$$

onde x é a variável espacial, t é a variável tempo, u_0, v_0 são as condições iniciais e Γ é a fronteira ∂I.

A equação (1.33) é chamada de Equação da Onda com condições de contorno do tipo Dirichlet, esta equação é um modelo da propagação de ondas (acústica, eletromagnética, etc.) em um meio elástico homogêneo I.

A condição $u = 0$ sobre Σ expressa que o material que vibra está fixo na fronteira ∂I. As condições iniciais representam o estado inicial do sistema; a configuração inicial $u_0(x)$ e a velocidade inicial $v_0(x)$.

Teorema 1.3.14 (Existência e Unicidade da Solução Fraca) *Suponhamos que* $u_0 \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$ *e que* $v_0 \in H_0^1(I)$. *Então existe uma única solução do Problema* (1.33) *com*

$$u \in C([0, +\infty[; H^2(I) \cap H_0^1(I)) \cap C^1([0, +\infty[; H_0^1(I)) \cap C^2([0, +\infty[; L^2(I)).$$

Demonstração: Consideremos u como sendo uma função definida em $[0, +\infty[$ que toma valores no espaço $L^2(I)$; isto é, para todo $t \geq 0$ fixo, $u(t)$ designa a aplicação $x \to u(x,t)$. Fazendo $v = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, podemos escrever o Problema (1.33) em forma de um sistema de primeira ordem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - v &= 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - u_{xx} &= 0, \end{cases} \tag{1.34}$$

e escrevendo $U = (u, v)$ de forma que (1.34) passa a ser:

$$\frac{dU}{dt} + AU = 0, \quad \text{onde} \quad AU = (-v, -u_{xx}).$$

Vamos aplicar o Teorema 1.3.7 no espaço $H = H_0^1(I) \times L^2(I)$, munido do produto escalar:

$$\langle U_1, U_2 \rangle_H = \int_I \Big\{ (u_1)_x (u_2)_x + u_1 u_2 + v_1 v_2 \Big\} dx,$$

onde $U_1 = (u_1, v_1), U_2 = (u_2, v_2) \in H$.

Consideremos o operador não limitado $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$, definido por $AU = (-v, -u_{xx})$ com

$$D(A) = (H^2(I) \cap H_0^1(I)) \times H_0^1(I).$$

Observemos que as condições de contorno estão incorporadas à definição do espaço H e também que $v = \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ sobre Σ.

Mostraremos que $A+I$ é um operador maximal monótono em H (ou seja A é um operador maximal monótono):

- $A+I$ *é Monótono.* Se $U=(u,v)\in D(A)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\langle (A+I)U,U\rangle_H &= \langle AU,U\rangle_H + \|U\|_H^2\\
&= -\int_I v_x u_x - \int_I vu - \int_I u_{xx}v + \int_I |u|^2 + \int_I |v|^2 + \int_I |u_x|^2\\
&= -\int_I vu + \int_I |u|^2 + \int_I |v|^2 + \int_I |u_x|^2\\
&\geqslant -\int_I \frac{|u|^2+|v|^2}{2} + \int_I (|u|^2+|v|^2) + \int_I |u_x|^2\\
&= \int_I \frac{|u|^2+|v|^2}{2} + \int_I |u_x|^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

- $A+I$ *é Maximal.* Vamos provar que $R(A+2I)=H$. De fato, dado $F=(f,g)\in H$, temos que resolver a equação $AU+2U=F$, isto é, o sistema

$$\begin{cases} -v+2u=f, \text{ em } I,\\ -u_{xx}+2v=g, \text{ em } I; \end{cases} \tag{1.35}$$

  com $u\in H^2(I)\cap H_0^1(I)$ e $v\in H_0^1(I)$. De (1.35) deduzimos

$$-u_{xx}+4u=2f+g\in L^2(I). \tag{1.36}$$

  Usando o Teorema 1.2.5 deduzimos que a equação (1.36) possui uma única solução $u\in H^2(I)\cap H_0^1(I)$. Então $v\in H_0^1(I)$ pois $v=2u-f$ onde $u,f\in H_0^1(I)$.

Como $U_0=(u_0,v_0)\in D(A)$, do Teorema 1.3.7 segue que existe uma solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt}+AU = 0 \quad em \quad [0,+\infty[,\\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

com $U=(u,v)\in C^1([0,+\infty[;H)\cap C([0,+\infty[;D(A))$. Assim,

$$\begin{aligned}
&u\in C^1([0,+\infty[;H_0^1(I))\cap C([0,+\infty[;H^2(I)\cap H_0^1(I)) \text{ e}\\
&v\in C^1([0,+\infty[;L^2(I))\cap C([0,+\infty[;H_0^1(I)).
\end{aligned}$$

Disto segue que

$$u \in C([0,+\infty[; H^2(I) \cap H_0^1(I)) \cap C^1([0,+\infty[; H_0^1(I)) \cap C^2([0,+\infty[; L^2(I)).$$

□

1.4 Minimização de Funções Convexas

Sejam H um espaço de Hilbert real separável, $K \subset H$ um subconjunto não vazio e $F : H \to (-\infty, +\infty] =: \mathbb{R}_\infty$ uma função.

Definição 1.4.1 *Dizemos que uma seqüencia $(x_n) \subset H$ **converge fracamente** para $x \in H$ se $\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle_H = \langle x, y\rangle_H$, para todo $y \in H$.*

Definição 1.4.2 *A função $F : H \to \mathbb{R}_\infty$ é **semi-contínua inferior fracamente** em $x \in H$ se para toda seqüencia $(x_n) \subset H$ que converge fracamente para $x \in H$ tem-se $F(x) \leqslant \liminf_{n\to\infty} F(x_n)$.*

Definição 1.4.3 *A função $F : H \to \mathbb{R}_\infty$ é **convexa** se seu domínio D_F é convexo e para todo $x, y \in D_F$ e $t \in [0,1]$ temos*

$$F(tx + (1-t)y) \leqslant tF(x) + (1-t)F(y). \tag{1.37}$$

Definição 1.4.4 *A função $F : K \to \mathbb{R}_\infty$ é **Gateaux diferenciável** ou simplesmente G-diferenciável em $x \in K$ se K é convexo e existe $F'(x) \in H'$ tal que*

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\big[F(x + t(y-x)) - F(x)\big] = F'(x)(y-x),\ \forall\, y \in K. \tag{1.38}$$

Teorema 1.4.1 (Kachurovskii) *Sejam K convexa em H e $F : K \to \mathbb{R}_\infty$ uma função G-diferenciável para cada $x \in K$, $K = dom(F)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) F é convexa,

b) Para todo $x, y \in K$ temos $F'(x)(y-x) \leqslant F(y) - F(x)$,

c) Para todo $x, y \in K$ temos $(F'(x) - F'(y))(x-y) \geqslant 0$.

Demonstração: Ver [15], página 173. □

Corolário 1.4.1 *Seja $F : K \to \mathbb{R}_\infty$ uma função G-diferenciável e convexa então F é semi-contínua inferiormente em K.*

Demonstração: Ver [15], página 174. □

Proposição 1.4.1 (Weierstrass) *Sejam K convexo fechado e $F : H \to \mathbb{R}_\infty$ uma função convexa e semi-contínua inferior fracamente com dom$(F) \cap K \neq \emptyset$. Se*

$$\lim_{\substack{x \in K \\ \|x\| \to +\infty}} F(x) = +\infty, \tag{1.39}$$

então existe um ponto de mínimo $x_0 \in K$ tal que $F(x_0) \leqslant F(y)$, $\forall y \in K$.

Demonstração: Ver [16], página 156. □

Capítulo 2

Dinâmica de Modelos de Suspensão de Pontes

Uma ponte suspensa é um tipo de ponte sustentada por um arco invertido formado por cabos de aço, do qual se suspende o tabuleiro da ponte mediante tirantes verticais de suspensão (Figuras 2.1 e 2.2). As primeiras pontes suspensas modernas, com plataformas niveladas, são datadas do século XIX, porém existem relatos desse modelo de ponte desde o século III.

Figura 2.1: Ponte Suspensa Clifton.

Figura 2.2: Ponte Suspensa Akashi-Kaikyo.

As pontes de suspensão simples, que são utilizadas por pedestres ou por rebanhos de animais, são construídas seguindo os modelos das antigas pontes de corda Incas. Outro tipo de pontes são as pontes estaiadas, que são um tipo de ponte suspensa por cabos constituída de um ou mais mastros, donde partem cabos de sustentação para os tabuleiros da ponte (Figura 2.3).

Figura 2.3: Ponte Estaiada Charilaos Trikoupis

Um modelo matemático simplificado de uma ponte em suspensão é dado por um sistema acoplado de equações diferenciais parciais da seguinte forma

$$\begin{cases} m_b z_{tt} + \alpha z_{xxxx} - F_0(y-z) = m_b \mathrm{g} + f_1, \quad x \in (0,l), \quad t \geqslant 0, \\ m_c y_{tt} - \beta y_{xx} + F_0(y-z) = m_c \mathrm{g} + f_2, \quad x \in (0,l), \quad t \geqslant 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde a primeira equação descreve as vibrações do leito da ponte no plano vertical e a segunda equação descreve as vibrações do cabo principal que está suspenso por todos os cabos amarrados a partir do leito da ponte. As constantes m_b e m_c são as massas por unidade de comprimento do leito da ponte e o cabo, respectivamente; α, β são a rigidez da flexão da estrutura e o coeficiente força de tensão do cabo, respectivamente e g representa a gravidade. A função F_0 representa a força retida a qual é executada pelo leito da ponte e pelos cabos suspensos a qual é transmitida através dos cabos amarrados, produzindo assim o acoplamento entre os dois. As funções f_1 e f_2 representam forças externas como também forças não conservativas, que geralmente dependem do tempo.

Denotemos por z_s e y_s os deslocamentos estáticos (posições de equilíbrio) os quais são as soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} \alpha z_{xxxx} - F_0(y-z) = m_b \mathrm{g}, \quad x \in (0,l) \\ -\beta y_{xx} + F_0(y-z) = m_c \mathrm{g}, \quad x \in (0,l). \end{cases} \tag{2.2}$$

Subtraindo a equação (2.2) da equação (2.1), obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} m_b \widetilde{z}_{tt} + \alpha \widetilde{z}_{xxxx} - F(\widetilde{y} - \widetilde{z}) = f_1, \quad x \in (0,l), \quad t \geqslant 0, \\ m_c \widetilde{y}_{tt} - \beta \widetilde{y}_{xx} + F(\widetilde{y} - \widetilde{z}) = f_2, \quad x \in (0,l), \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

onde $\widetilde{z} = z - z_s$, $\widetilde{y} = y - y_s$ e a função F é dada por:

$$F(\zeta) = F_0(\zeta + y_s - z_s) - F_0(y_s - z_s).$$

Podemos ver facilmente que $F(0) = 0$. No transcorrer deste trabalho vamos assumir que os deslocamentos, denotados por z, y ao invés de $\widetilde{z}$, $\widetilde{y}$ são medidos em relação às posições estáticas. Usaremos a equação (2.3) como o modelo geral para a suspensão de pontes.

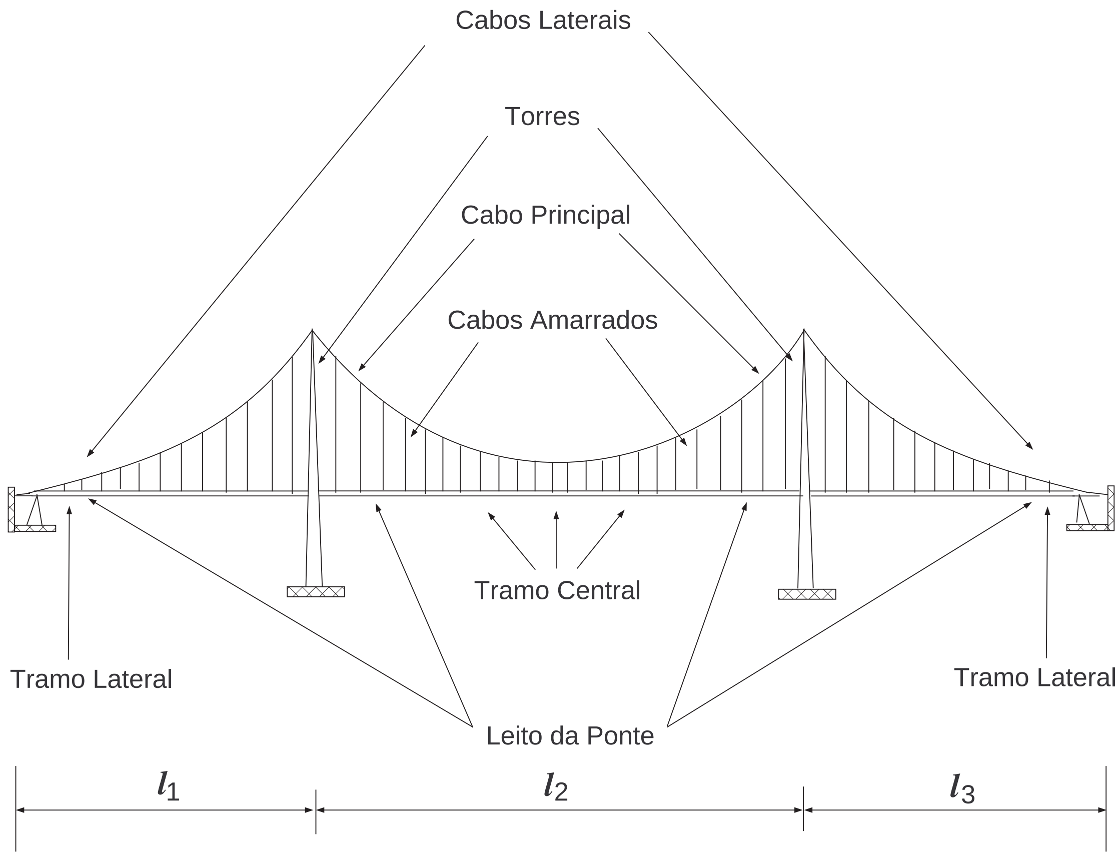


Figura 2.4: Geometria da Ponte Suspensa

Para entendermos melhor o modelo geral de suspensão de pontes, primeiro vamos estudar o modelo linear.

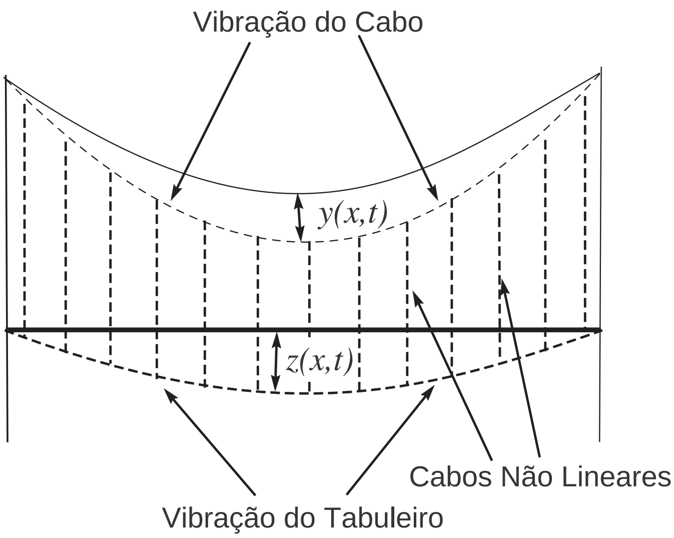


Figura 2.5: Vibração do Tabuleiro e do Cabo

2.1 Modelo Linear Abstrato

Um modelo linear é obtido através da sustentação do leito da ponte com os cabos amarrados conectados a dois cabos principais colocados simetricamente (suspensos), um acima e outro abaixo do leito da ponte. Na ausência de forças externas ($f_1 = f_2 = 0$), a dinâmica linear de uma ponte suspensa em torno da posição de equilíbrio pode ser descrita pelo seguinte sistema de EDPs acoplado linearmente

$$\begin{cases} m_b z_{tt} + \alpha z_{xxxx} - k(y-z) = 0, \quad x \in (0,l), \quad t \geqslant 0, \\ m_c y_{tt} - \beta y_{xx} + k(y-z) = 0, \quad x \in (0,l), \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Neste caso, $F(\xi) = k\xi$, onde k denota o coeficiente de rigidez dos cabos (amarrados) ligando o leito da ponte ao cabo suspenso.

Condições de contorno

Assumindo que o tabuleiro da ponte está fixo nas extremidades, as condições de fronteira são dadas por

$$\begin{cases} z(0,t) = z(l,t) = 0, \\ y(0,t) = y(l,t) = 0, \\ z_x(0,t) = z_x(l,t) = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

No caso que o tabuleiro da ponte está pendurada em ambas as extremidades as condições de fronteira são dadas por

$$\begin{cases} z(0,t) = z(l,t) = 0, \\ y(0,t) = y(l,t) = 0, \\ z_{xx}(0,t) = z_{xx}(l,t) = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Outras combinações, tais como a ponte pendurada em um lado e fixado no outro, também são usadas.

Condições iniciais

As condições iniciais são dadas

$$\begin{cases} z(x,0) = z_1(x), \quad z_t(x,0) = z_2(x), \\ y(x,0) = y_1(x), \quad y_t(x,0) = y_2(x). \end{cases} \tag{2.7}$$

onde z_1, z_2, y_1, y_2 são funções de valor real definidas sobre $(0,l)$.

2.1.1 Existência e Unicidade de Solução

O problema (2.4) com as condições de contorno (2.5) e as condições inicias (2.7) pode ser escrito no seguinte sistema

$$\begin{cases} m_b z_{tt} + \alpha z_{xxxx} - k(y-z) = 0, \quad x \in (0,l), \quad t \geqslant 0, \\ m_c y_{tt} - \beta y_{xx} + k(y-z) = 0, \quad x \in (0,l), \quad t \geqslant 0 \\ z(0,t) = z(l,t) = 0, z_x(0,t) = z_x(l,t) = 0 \\ y(0,t) = y(l,t) = 0, \\ z(x,0) = z_1(x),\ z_t(x,0) = z_2(x), x \in (0,l) \\ y(x,0) = y_1(x),\ y_t(x,0) = y_2(x), x \in (0,l), \end{cases} \tag{2.8}$$

onde as constantes m_b, m_c, α, β e k são positivas.

Fazendo $u = (z, y)$, o sistema (2.8) pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{cases} u_{tt} + Cu = 0,\ (x,t) \in (0,l) \times [0,\infty) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t \in [0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x),\ x \in (0,l) \\ u_t(x,0) = v_0(x),\ x \in (0,l), \end{cases} \tag{2.9}$$

onde

$$\begin{aligned} Cu &= (az_{xxxx} - p(y-z), -by_{xx} + q(y-z)) \\ a^2 &= \frac{\alpha}{m_b},\ b^2 = \frac{\beta}{m_c},\ p = \frac{k}{m_b},\ q = \frac{k}{m_c} \\ u_0(x) &= (z_1(x), y_1(x)),\ v_0(x) = (z_2(x), y_2(x)). \end{aligned}$$

Consideremos os espaços de Hilbert

$$\begin{aligned} H &:= L^2(0,l) \times L^2(0,l), \\ V &:= H_0^2(0,l) \times H_0^1(0,l), \\ W &:= (H^4(0,l) \cap H_0^2(0,l)) \times (H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)), \end{aligned}$$

munidos com os produtos escalares

$$\begin{aligned}
\langle(\phi_1,\psi_1),(\phi_2,\psi_2)\rangle_H &:= \int_0^l (m_b\phi_1\phi_2 + m_c\psi_1\psi_2)dx,\\
\langle(\phi_1,\psi_1),(\phi_2,\psi_2)\rangle_V &:= \int_0^l (\alpha(\phi_1)_{xx}(\phi_2)_{xx} + \beta(\psi_1)_x(\psi_2)_x + k(\psi_1-\phi_1)(\psi_2-\phi_2))dx,\\
\langle(\phi_1,\psi_1),(\phi_2,\psi_2)\rangle_W &:= \int_0^l (\zeta(\phi_1)_{xxxx}(\phi_2)_{xxxx} + \theta(\phi_1)_{xxx}(\phi_2)_{xxx} + \xi(\psi_1)_{xx}(\psi_2)_{xx})dx\\
&\qquad + \langle(\phi_1,\psi_1),(\phi_2,\psi_2)\rangle_V, \qquad \zeta,\theta,\xi>0;
\end{aligned}$$

com as normas

$$\begin{aligned}
\|(\phi,\psi)\|_H^2 &:= \int_0^l (m_b|\phi|^2 + m_c|\psi|^2)dx,\\
\|(\phi,\psi)\|_V^2 &:= \int_0^l (\alpha|\phi_{xx}|^2 + \beta|\psi_x|^2 + k|\psi-\phi|^2)dx,\\
\|(\phi,\psi)\|_W^2 &:= \int_0^l (\zeta|\phi_{xxxx}|^2 + \theta|\phi_{xxx}|^2 + \xi|\psi_{xx}|^2)dx + \|(\phi,\psi)\|_V^2,
\end{aligned}$$

respectivamente.

A norma $\|(\phi,\psi)\|_V^2$ definida em V é uma norma equivalente em $H^2(0,l)\times H^1(0,l)$ e, conseqüentemente a norma $\|(\phi,\psi)\|_W^2$ definida em W é uma norma equivalente em $H^4(0,l)\times H^2(0,l)$. Portanto temos as imersões densas e compactas $W\subset V\subset H$ pelo Teorema de Rellich (ver [4]). Identificando H com seu dual H', obtemos o diagrama

$$W\subset V\subset H = H'\subset V'\subset W'$$

com imersões densas e compactas.

Podemos olhar a equação (2.9) como uma EDO de segunda ordem no espaço H

$$\begin{cases}
u_{tt} + Cu = 0,\ t\in[0,\infty),\\
u(0) = u_0,\\
u_t(0) = v_0,
\end{cases} \tag{2.10}$$

onde o operador C é definido da seguinte forma

$$\begin{aligned}
&C:\ D(C)\subset H\to H\\
&D(C) = \{u=(z,y)\in H : z_{xxxx}, y_{xx}\in L^2(0,l),\ z=z_x=y=0 \text{ em } \{0,l\}\} \qquad (2.11)\\
&Cu = (a^2 z_{xxxx} - p(y-z), -b^2 y_{xx} + q(y-z))
\end{aligned}$$

Proposição 2.1.1 *O domínio do operador C definido em (2.11) é dado por*

$$D(C) = [H^4(0,l) \cap H_0^2(0,l)] \times [H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)] = W.$$

Demonstração: Vamos provar que

$$D(C) \subset [H^4(0,l) \cap H_0^2(0,l)] \times [H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)].$$

De fato, se $u = (z, y) \in D(C)$ então

$$Cu = (a^2 z_{xxxx} - p(y - z), -b^2 y_{xx} + q(y - z)) \in H.$$

Isto é, $a^2 z_{xxxx} - p(y - z) \in L^2(0,l)$ e $-b^2 y_{xx} + q(y - z) \in L^2(0,l)$. Como $z, y \in L^2(0,l)$ temos $z_{xxxx}, y_{xx} \in L^2(0,l)$ e conseqüentemente $z \in H^4(0,l)$ e $y \in H^2(0,l)$. Pelas condições de contorno (2.5) segue que $z \in H_0^2(0,l)$ e $y \in H_0^1(0,l)$. Portanto $u \in [H^4(0,l) \cap H_0^2(0,l)] \times [H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)]$.

Agora provaremos que

$$[H^4(0,l) \cap H_0^2(0,l)] \times [H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)] \subset D(C).$$

De fato, se $u \in [H^4(0,l) \cap H_0^2(0,l)] \times [H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)]$ então

$$\begin{cases} z \in H^4(0,l) \quad \text{e} \quad z \in H_0^2(0,l) \\ y \in H^2(0,l) \quad \text{e} \quad y \in H_0^1(0,l). \end{cases}$$

Logo, temos

$$\begin{cases} z_{xxxx} \in L^2(0,l) \quad \text{e} \quad z = z_x = 0 \quad \text{em} \quad x \in \{0,l\} \\ y_{xx} \in L^2(0,l) \quad \text{e} \quad y = 0 \quad \text{em} \quad x \in \{0,l\}. \end{cases}$$

Portanto $u \in D(C)$. □

Proposição 2.1.2 *O operador C é maximal monótono e simétrico.*

Demonstração: Primeiro mostraremos que C é monótono. Seja $u = (z, y) \in D(C)$, então

$$
\begin{aligned}
\langle Cu, u\rangle_H &= \big\langle (a^2 z_{xxxx} - p(y-z), -b^2 y_{xx} + q(y-z)), (z,y)\big\rangle_H \\
&= \int_0^l \big(m_b(a^2 z_{xxxx} - p(y-z))z + m_c(-b^2 y_{xx} + q(y-z))y\big)\, dx \\
&= \int_0^l \big(m_b\, a^2 z_{xxxx} z - m_b\, p(y-z)z - m_c\, b^2 y_{xx} y + m_c\, q(y-z)y\big)\, dx \\
&= \int_0^l (\alpha z_{xxxx} z - k(y-z)z - \beta y_{xx} y + k(y-z)y)\, dx \\
&= \int_0^l \big(\alpha z_{xxxx} z - \beta y_{xx} y + k(y-z)^2\big)\, dx \\
&= \int_0^l \big(\alpha |z_{xx}|^2 + \beta |y_x|^2 + k|y-z|^2\big)\, dx = ||u||_V^2 \geqslant 0,
\end{aligned}
$$

onde na última igualdade usamos duas vezes integração por partes juntamente com as condições de contorno.

Por outro lado, C é um operador simétrico. De fato, se $u = (z, y), \tilde{u} = (\tilde{z}, \tilde{y}) \in D(C)$, então

$$
\begin{aligned}
\langle Cu, \tilde{u}\rangle_H &= \big\langle (a^2 z_{xxxx} - p(y-z), -b^2 y_{xx} + q(y-z)), (\widetilde{z},\widetilde{y})\big\rangle_H \\
&= \int_0^l \big(m_b(a^2 z_{xxxx} - p(y-z))\widetilde{z} + m_c(-b^2 y_{xx} + q(y-z))\widetilde{y}\big)\, dx \\
&= \int_0^l \big(m_b\, a^2 z_{xxxx} \widetilde{z} - m_b\, p(y-z)\widetilde{z} - m_c\, b^2 y_{xx} \widetilde{y} + m_c\, q(y-z)\widetilde{y}\big)\, dx \\
&= \int_0^l (\alpha z_{xxxx} \widetilde{z} - k(y-z)\widetilde{z} - \beta y_{xx} \widetilde{y} + k(y-z)\widetilde{y})\, dx \\
&= \int_0^l (\alpha z_{xxxx} \widetilde{z} - \beta y_{xx} \widetilde{y} + k(y-z)(\widetilde{y} - \widetilde{z}))\, dx \\
&= \int_0^l (\alpha (z_{xx})(\widetilde{z}_{xx}) + \beta (y_x)(\widetilde{y}_x) + k(y-z)(\widetilde{y} - \widetilde{z}))\, dx \\
&= \int_0^l (\alpha z \widetilde{z}_{xxxx} - \beta y \widetilde{y}_{xx} + k(y-z)(\widetilde{y} - \widetilde{z}))\, dx = \langle u, C\tilde{u}\rangle_H .
\end{aligned}
$$

Mostremos agora que C é maximal, isto é, $R(I + C) = H$. Em outras palavras dado $h \in H$ queremos achar $u \in D(C)$ tal que $(I + C)u = h$. Na verdade vamos provar que

$I + C : V \to H$ é sobrejetivo. Seja $h \in H$ fixo arbitrariamente. Resolver a equação $u + Cu = h$ é equivalente a resolver o seguinte problema variacional: encontrar $u \in V$ tal que

$$\begin{aligned} \langle u + Cu, v\rangle_H &= \langle h, v\rangle_H,\ \forall\, v \in V, \\ \langle u, v\rangle_H + \langle Cu, v\rangle_H &= \langle h, v\rangle_H,\ \forall\, v \in V. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Consideremos a forma bilinear $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por

$$a(u, v) := \langle u + Cu, v\rangle_H, \quad u, v \in V.$$

A forma bilinear $a(\cdot,\cdot)$ é induzida pelo operador $I + C$ e é simétrica.

É fácil ver que operador $I + C$ é um operador monótono e simétrico.

Consideremos agora o funcional $F : V \to \mathbb{R}$ definido por

$$\begin{aligned} F(v) &:= \frac{1}{2}\, a(v, v) - \langle h, v\rangle_H \\ &= \frac{1}{2}\|v\|_H^2 + \frac{1}{2}\|v\|_V^2 - \langle h, v\rangle_H, \quad v \in V. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Resolver o problema variacional (2.12) é equivalente a resolver o problema de minimização

$$F(u) = \min_{v \in V} F(v).$$

- *F é G-diferenciável*, usando a Definição 1.4.4. De fato,

$$\begin{aligned} F'(u)w &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\Big\{\frac{1}{2}\langle (u + tw) + C(u + tw), u + tw\rangle_H - \langle h, u + tw\rangle_H \\ &\quad - \frac{1}{2}\langle u + Cu, v\rangle_H + \langle h, v\rangle_H\Big\} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\Big\{\frac{1}{2}\langle u, u\rangle_H + \frac{t}{2}\langle u, w\rangle_H + \frac{t}{2}\langle w, u\rangle_H + \frac{t^2}{2}\langle w, w\rangle_H + \frac{1}{2}\langle Cu, u\rangle_H \\ &\quad + \frac{t}{2}\langle Cu, w\rangle_H + \frac{t}{2}\langle Cw, u\rangle_H + \frac{t^2}{2}\langle Cw, w\rangle_H - \langle h, u\rangle_H - t\langle h, w\rangle_H \\ &\quad - \frac{1}{2}\langle u, u\rangle_H - \frac{1}{2}\langle Cu, u\rangle_H + \langle h, u\rangle_H\Big\} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \Big\{\frac{1}{2}\langle u, w\rangle_H + \frac{1}{2}\langle w, u\rangle_H + \frac{t}{2}\langle w, w\rangle_H + \frac{1}{2}\langle Cu, w\rangle_H + \frac{1}{2}\langle Cw, u\rangle_H \\ &\quad + \frac{t}{2}\langle Cw, w\rangle_H - \langle h, w\rangle_H\Big\} \\ &= \langle u, w\rangle_H + \langle Cu, w\rangle_H - \langle h, w\rangle_H \\ &= \langle u + Cu - h, w\rangle_H = (u + Cu - h)w, \quad \forall u, w \in V. \end{aligned}$$

Desta última igualdade concluímos que $F'(u) = u + Cu - h$ e com isto provamos que F é G-diferenciável.

Vamos mostrar agora que F é convexa. Com efeito, dados $u, v \in V$ então

$$\begin{aligned}(F'(u) - F'(v))(u - v) &= \langle (u + Cu - h) - (v + Cv - h), u - v\rangle_H \\ &= \langle u - v, u - v\rangle_H + \langle C(u - v), u - v\rangle_H \\ &= \|u - v\|_H^2 + \langle C(u - v), u - v\rangle_H \geqslant 0,\end{aligned}$$

pelo Teorema 1.4.1.

Pelo Corolário 1.4.1 concluímos que F é semi-contínuo inferiormente em V.

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz na equação (2.13) temos

$$F(u) \geqslant \frac{1}{2}\|u\|_V^2 - \|h\|_H\|u\|_V. \tag{2.14}$$

De (2.14) segue que $F(u) \to +\infty$ se $\|u\|_V \to +\infty$. Da Proposição 1.4.1 concluímos que F atinge um mínimo em V, isto é, existe um $v \in V$ tal que $F'(v) = 0$. Disto segue que $(I + C)v = h$. Portanto C é maximal. □

Observação 2.1.1 *A demonstração do Teorema* 2.1.2 *segue as idéias da demonstração do Lema* 2.2 *da referência* [*3*].

Observação 2.1.2 *Segue da Proposição* 2.1.2 *que o operador* C *é auto-adjunto pela Proposição* 1.3.4.

Observemos que na equação (2.10) estamos olhando para u como sendo uma função $u : [0, \infty) \to H$ que a cada $t \in [0, \infty)$ faz corresponder $u(t) \in H$. Isto é,

$$\begin{array}{rcccccl} u: & [0,\infty) & \to & H & & & \\ & t & \to & u(t): & (0,l) & \to & \mathbb{R} \\ & & & & x & \to & u(t)x := u(x,t). \end{array}$$

O problema (2.10) pode ser escrito como um sistema de primeira ordem

$$\begin{cases} u_t - v = 0 \\ v_t + Cu = 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Observemos que a graças à condição de contorno temos

$$v = u_t = (z_t, y_t) = 0 \quad \text{sobre} \quad \{0, l\} \times (0, \infty). \tag{2.16}$$

Fazendo $U = (u, v)$ o sistema (2.15) fica equivalente ao seguinte problema de Cauchy abstrato no espaço $\mathcal{H} := V \times H$

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + \mathbf{A}U = 0, \quad t \in [0, \infty) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{2.17}$$

onde $U_0 = (u_0, v_0)$ e $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é definido por $\mathbf{A}U = (-v, Cu)$.

O espaço $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert munido do produto escalar

$$\big\langle (\phi_1, \psi_1), (\phi_2, \psi_2) \big\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle_V + \langle \psi_1, \psi_2 \rangle_H.$$

O domínio do operador $\mathbf{A}$ é dado por

$$\begin{aligned} D(\mathbf{A}) &= \{U \in \mathcal{H} : \mathbf{A}U \in \mathcal{H}\} = \{U = (u, v) \in V \times H : (-v, Cu) \in V \times H\} \\ &= \{U = (u, v) \in V \times H : v \in V \text{ e } Cu \in H\} \\ &= \{U = (u, v) \in V \times V : Cu \in H\}. \end{aligned}$$

Lema 2.1.1 *O operador $\mathbf{A}$ é Maximal Monótono em $\mathcal{H}$.*

Demonstração: **i) $\mathbf{A}$** *é Monótono.* De fato, se $U \in D(\mathbf{A})$, temos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}U, U \rangle_{\mathcal{H}} &= \big\langle (-v, Cu), (u, v) \big\rangle_{\mathcal{H}} = \langle -v, u \rangle_V + \langle Cu, v \rangle_H \\ &= \big\langle (-z_t, -y_t), (z, y) \big\rangle_V + \big\langle (a^2 z_{xxxx} - p(y - z), -b^2 y_{xx} + q(y - z)), (z_t, y_t) \big\rangle_H \\ &= \int_0^l (-\alpha z_{txx} z_{xx} - \beta y_{tx} y_x + k(-y_t + z_t)(y - z) + m_b(a z_{xxxx} - p(y - z)) z_t \\ &\quad + m_c(-b y_{xx} + q(y - z)) y_t) dx \\ &= \int_0^l (-\alpha z_{txx} z_{xx} - \beta y_{tx} y_x - k(y_t - z_t)(y - z) + \alpha z_{xxxx} z_t - k(y - z) z_t \\ &\quad - \beta y_{xx} y_t + k(y - z) y_t) dx \\ &= \int_0^l (\alpha z_{xxx} z_{tx} + \beta y_{xx} y_t - k(y_t - z_t)(y - z) + \alpha z_{xxxx} z_t + k(y - z)(y_t - z_t) \\ &\quad - \beta y_{xx} y_t) dx \\ &= \int_0^l (-\alpha z_{xxxx} z_t + \alpha z_{xxxx} z_t) dx = 0, \end{aligned}$$

onde na antepenúltima e penúltima igualdade usamos integração por partes e as condições de contorno (2.16).

ii) $\mathbf{A}$ *é Maximal.* De fato, vamos mostrar que $R(I+\mathbf{A}) = \mathcal{H}$, isto é, dado $F = (f,g) \in \mathcal{H}$ temos que mostrar que existe $U = (u,v) \in D(\mathbf{A})$ tal que $(I+\mathbf{A})U = F$. Esta última igualdade é equivalente a encontrar

$$u, v \in V: \; u - v = f, \; v + Cu = g.$$

Em outras palavras queremos encontrar

$$\begin{aligned} u \in V: \; (I+C)u &= f + g, \\ v &= u - f. \end{aligned}$$

Assim é suficiente mostrar que a imagem de $I + C$ é todo H, pois se existe um $v \in V$ satisfazendo $(I+C)v = g - Cf$.

Como $u = v + f$, segue que $U = (u,v) \in V \times V$, $Cu = g - v \in H$ (daqui $U \in D(\mathbf{A})$) e, $(I+\mathbf{A})U = F$.

A sobrejetividade de $I + C : V \to H$ segue da Proposição 2.1.2. Portanto o operador $\mathbf{A}$ é maximal. □

Lema 2.1.2 *Para o operador* $\mathbf{A}$ *temos* $D(\mathbf{A}) = W \times V$ *e* $D(A)$ *é denso em* $\mathcal{H}$.

Demonstração: Dado $U = (u,v) \in D(\mathbf{A})$ segue que $u, v \in V$ e $Cu \in H$. Definindo $f := Cu$, temos

$$\begin{aligned} \langle f, w\rangle_H &= \langle Cu, w\rangle_H, \; \forall w \in V \\ \langle (f_1,f_2),(w_1,w_2)\rangle_H &= \langle (a^2 z_{xxxx} - p(y-z), -b^2 y_{xx} + q(y-z)), (w_1,w_2)\rangle_H \\ \int_0^l (m_b f_1 w_1 + m_c f_2 w_2)dx &= \int_0^l (m_b(a^2 z_{xxxx} - p(y-z))w_1 + m_c(-b^2 y_{xx} + q(y-z))w_2)dx \\ \int_0^l (m_b f_1 w_1 + m_c f_2 w_2)dx &= \int_0^l ((\alpha z_{xxxx} - k(y-z))w_1 + (-\beta y_{xx} + k(y-z))w_2)dx, \end{aligned}$$

onde temos usado $f = (f_1, f_2)$, $u = (z, y)$ e $w = (w_1, w_2)$.

Da última igualdade segue que $u = (z, y)$ é uma solução fraca do problema elíptico

$$\begin{cases} z_{xxxx} - \dfrac{k}{\alpha}(y - z) = \dfrac{m_b}{\alpha} f_1 \quad \text{em } (0, l), \\ -y_{xx} + \dfrac{k}{\beta}(y - z) = \dfrac{m_c}{\beta} f_2 \quad \text{em } (0, l), \\ z \ = \ y \ = \ z_x \ = \ 0 \quad \text{em } \{0, l\}. \end{cases}$$

Como $f = (f_1, f_2) \in H$ então $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(0, l)$, onde

$$\varphi_1 = \frac{k}{\alpha} y + \frac{m_b}{\alpha} f_1 \quad \text{e} \quad \varphi_2 = \frac{k}{\beta} z + \frac{m_c}{\beta} f_2.$$

Logo aplicando a teoria de regularidade para os seguintes problemas elíptico

$$\begin{cases} z_{xxxx} + \dfrac{k}{\alpha} z = \varphi_1 \quad \text{em } (0, l), \\ z \ = \ z_x \ = \ 0 \quad \text{em } \{0, l\}, \\ \varphi_1 \in L^2(0, l), z \in H_0^2(0, l) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -y_{xx} + \frac{k}{\beta} y = \varphi_2 \quad \text{em } (0, l), \\ y \ = \ 0 \quad \text{em } \{0, l\}, \\ \varphi_2 \in L^2(0, l), y \in H_0^1(0, l), \end{cases}$$

concluímos que $z \in H^4(0, l)$ e $y \in H^2(0, l)$ (ver [6] e Teorema 1.2.5, respectivamente). Portanto $u = (z, y) \in W$.

Por outro lado, dado $U = (u, v) \in W \times V$ temos $u \in W$ e $v \in V$. Vamos mostrar que $Cu \in H$. Com efeito, pela definição do operador C, se $u \in W = D(C) \subset V$ então $Cu \in H$. Disto segue que $U = (u, v) \in D(\mathbf{A})$ e portanto $D(\mathbf{A}) = W \times V$.

Como as inclusões $W \hookrightarrow V \hookrightarrow H$ são densas, segue que a inclusão $D(\mathbf{A}) \hookrightarrow \mathcal{H}$ é densa. $\square$

Teorema 2.1.1 (Existência e Unicidade) *Dado* $(z_1, y_1, z_2, y_2) \in V \times H$, *o problema* (2.8) *tem uma única solução fraca*

$$(z, y) \in C([0, \infty), V) \cap C^1([0, \infty), H).$$

Além disso, se $(z_1, y_1, z_2, y_2) \in W \times V$, *então*

$$(z, y) \in C([0, \infty), W) \cap C^1([0, \infty), V) \cap C^2([0, \infty), H).$$

Demonstração: Como o problema (2.8) é equivalente ao problema (2.17) e $\mathbf{A}$ é um operador maximal monótono pelo Lema 2.1.1, vamos aplicar Corolário 1.3.6 e o Teorema 1.3.10 para o problema de Cauchy (2.17) com $U_0 = (z_1, y_1, z_2, y_2) \in \mathcal{H}$. Então existe uma única solução $U \in C([0,\infty), \mathcal{H})$, isto é,

$$
\begin{aligned}
(u,v) &\in C([0,\infty), V \times H) \\
u &\in C([0,\infty), V) \text{ e } v \in C([0,\infty), H) \\
u &\in C([0,\infty), V) \text{ e } u_t \in C([0,\infty), H) \\
u &\in C([0,\infty), V) \cap C^1([0,\infty), H) \\
(z,y) &\in C([0,\infty), V) \cap C^1([0,\infty), H).
\end{aligned}
$$

Assim provamos a primeira parte do teorema.

Por outro lado, se $U_0 \in D(\mathbf{A})$ e o operador $\mathbf{A}$ é maximal monótono, segue do Teorema 1.3.7 que existe uma única solução

$$U \in C([0,\infty), D(\mathbf{A})) \cap C^1([0,\infty), \mathcal{H}),$$

isto é,

$$
\begin{aligned}
&(u,v) \in C([0,\infty), W \times V) \cap C^1([0,\infty), V \times H) \\
&(u,v) \in C([0,\infty), W \times V) \text{ e } (u,v) \in C^1([0,\infty), V \times H) \\
&u \in C([0,\infty), W) \text{ e } v \in C([0,\infty), V) \text{ e } u \in C^1([0,\infty), V) \text{ e } v \in C^1([0,\infty), H) \\
&u \in C([0,\infty), W) \text{ e } u_t \in C([0,\infty), V) \text{ e } u \in C^1([0,\infty), V) \text{ e } u_t \in C^1([0,\infty), H) \\
&u \in C([0,\infty), W) \cap C^1([0,\infty), V) \cap C^2([0,\infty), H) \\
&(z,y) \in C([0,\infty), W) \cap C^1([0,\infty), V) \cap C^2([0,\infty), H).
\end{aligned}
$$

Com isto provamos a segunda parte do teorema. □

2.1.2 Análise da Energia do Sistema Linear

Seja o funcional $E : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, definido por

$$E(U(t)) := \frac{1}{2}\int_0^l \Big\{ m_b|z_t|^2 + m_c|y_t|^2 + \alpha|z_{xx}|^2 + \beta|y_x|^2 + k|y-z|^2 \Big\} dx, \tag{2.18}$$

onde $U(t) = e^{-\mathbf{A}t}U_0 = (z(\cdot,t), y(\cdot,t), z_t(\cdot,t), y_t(\cdot,t)) \in \mathcal{H}$ é uma solução de (2.17) ou, equivalentemente, do sistema (2.8).

Como $\{e^{-\mathbf{A}t}, t \geqslant 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo de contrações, pois o operador A é maximal monótono, segue que $\{e^{-\mathbf{A}t}, t \geqslant 0\}$ é um sistema dinâmico sobre $\mathcal{H}$.

Vemos que 0 é um ponto de equilíbrio de $\mathcal{H}$, pois $\gamma(0) = \{e^{-\mathbf{A}t}\,0, t \geqslant 0\} = \{0\}$.

O funcional E é um funcional de Liapunov, pois E é contínuo, $E(0) = 0$. Derivando E ao longo da soluçao $U(t)$ com relação a t e usando as condições de contorno (2.5), obtemos

$$\begin{aligned}
\dot{E}(U(t)) &= \frac{1}{2}\int_0^l \frac{d}{dt}\Big\{ m_b|z_t|^2 + m_c|y_t|^2 + \alpha|z_{xx}|^2 + \beta|y_x|^2 + k|y-z|^2 \Big\} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^l 2\Big\{ m_b z_t z_{tt} + m_c y_t y_{tt} + \alpha z_{xx} z_{xxt} + \beta y_x y_{xt} + k(y-z)(y_t - z_t) \Big\} dx \\
&= \int_0^l \Big\{ m_b z_t z_{tt} + m_c y_t y_{tt} + \alpha z_{xxxx} z_t - \beta y_{xx} y_t + k(y-z)(y_t - z_t) \Big\} dx \\
&= \int_0^l \Big\{ \big(m_b z_{tt} + \alpha z_{xxxx} - k(y-z)\big) z_t + \big(m_c y_{tt} - \beta y_{xx} + k(y-z)\big) y_t \Big\} dx \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Também temos

$$E(U(t)) \geqslant c(\|U(t)\|_{\mathcal{H}}),$$

onde $c(\|U(t)\|_{\mathcal{H}}) := \dfrac{1}{4}\|U(t)\|^2_{\mathcal{H}}$, a qual é uma função contínua e estritamente crescente, com $c(0) = 0$. Então do Teorema 1.3.13 segue que a origem 0 é estável.

De (2.19) segue que o sistema é conservativo.

2.2 Modelo Não Linear Abstrato

Nesta seção vamos considerar o sistema geral (2.3) com as condições de fronteira (2.5). O sistema (2.3) sera visto como uma EDO abstrata em um espaço de Hilbert adequado. A formulação abstrata tem muitas vantagens, como veremos a seguir. Primeiramente escrever a equação (2.3) da seguinte forma

$$\begin{cases} z_{tt} + a^2 z_{xxxx} = F_1(t,x,y,z), & x \in (0,l), \quad t \geqslant 0, \\ y_{tt} - b^2 y_{xx} \quad = F_2(t,x,y,z), & x \in (0,l), \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

onde

$$\begin{aligned} F_1(t,x,y,z) &= \frac{1}{m_b}(\,F(y-z) + f_1(z_t)), \\ F_2(t,x,y,z) &= \frac{1}{m_c}(-F(y-z) + f_2(y_t)). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Consideremos os espaços H e V como segue

$$\begin{aligned} H &= L^2(0,l) \times L^2(0,l), \\ V &= H_0^2(0,l) \times H_0^1(0,l), \end{aligned} \tag{2.22}$$

com seus respectivos produtos internos e suas normas dadas por

$$\begin{aligned} \big\langle(\phi_1,\phi_2),(\psi_1,\psi_2)\big\rangle_H &:= \big\langle\phi_1,\psi_1\big\rangle_{L^2(0,l)} + \big\langle\phi_2,\psi_2\big\rangle_{L^2(0,l)}, \\ \big\langle(\phi_1,\phi_2),(\psi_1,\psi_2)\big\rangle_V &:= \big\langle(\phi_1)_{xx},(\psi_1)_{xx}\big\rangle_{L^2(0,l)} + \big\langle(\phi_2)_x,(\psi_2)_x\big\rangle_{L^2(0,l)}, \\ \|(\phi_1,\phi_2)\|_H^2 &:= \|\phi_1\|_{L^2(0,l)}^2 + \|\phi_2\|_{L^2(0,l)}^2, \\ \|(\phi_1,\phi_2)\|_V^2 &:= \|(\phi_1)_{xx}\|_{L^2(0,l)}^2 + \|(\phi_2)_x\|_{L^2(0,l)}^2. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Pela desigualdade de Poincaré as normas

$$\|v\|_{H^m(0,l)}^2 = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha v\|_{L^2(0,l)} \quad \text{e}$$

$$\|v\|_{H_0^m(0,l)}^2 = \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha v\|_{L^2(0,l)}$$

são equivalentes e daí o espaço V é um espaço de Hilbert. Note que a imersão $V \hookrightarrow H$ é contínua, densa e compacta. Se V' denota o dual topológico de V e identificando

H com seu dual temos $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$, com as inclusões compactas. Note que $V' = H^{-2}(0,l) \times H^{-1}(0,l)$, onde $H^{-s}(0,l)$, $s > 0$, denota o espaço de Sobolev com expoente negativo, para mais detalhes ver página 131 em [13].

Consideremos a forma bilinear $\mathfrak{c} : V \times V \to \mathbb{R}$, definida por

$$\mathfrak{c}(u,v) = a^2 \langle (u_1)_{xx}, (v_1)_{xx} \rangle_{L^2(0,l)} + b^2 \langle (u_2)_x, (v_2)_x \rangle_{L^2(0,l)}, \tag{2.24}$$

para todo $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in V$.

Lema 2.2.1 *A forma bilinear $\mathfrak{c}$ é contínua, simétrica e coerciva*

Demonstração: Para $d = a^2 + b^2$, temos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{c}^2(u,v) &= a^4 |\langle (u_1)_{xx}, (v_1)_{xx} \rangle|^2_{L^2(0,l)} + b^4 |\langle (u_2)_x, (v_2)_x \rangle|^2_{L^2(0,l)} \\
&\quad + 2a^2b^2 |\langle (u_1)_{xx}, (v_1)_{xx} \rangle|_{L^2(0,l)} |\langle (u_2)_x, (v_2)_x \rangle|_{L^2(0,l)} \\
&\leqslant a^4 \|(u_1)_{xx}\|^2_{L^2(0,l)} \|(v_1)_{xx}\|^2_{L^2(0,l)} + b^4 \|(u_2)_x\|^2_{L^2(0,l)} \|(v_2)_x\|^2_{L^2(0,l)} \\
&\quad + 2a^2b^2 \|(u_1)_{xx}\|_{L^2(0,l)} \|(v_1)_{xx}\|_{L^2(0,l)} \|(u_2)_x\|_{L^2(0,l)} \|(v_2)_x\|_{L^2(0,l)} \\
&\leqslant a^4 \|(u_1)_{xx}\|^2_{L^2(0,l)} \|(v_1)_{xx}\|^2_{L^2(0,l)} + b^4 \|(u_2)_x\|^2_{L^2(0,l)} \|(v_2)_x\|^2_{L^2(0,l)} \\
&\quad + a^4 \|(u_1)_{xx}\|^2_{L^2(0,l)} \|(v_2)_x\|^2_{L^2(0,l)} + b^4 \|(v_1)_{xx}\|^2_{L^2(0,l)} \|(u_2)_x\|^2_{L^2(0,l)} \\
&\leqslant (a^4 + b^4) \Big(\|(u_1)_{xx}\|^2_{L^2(0,l)} \|(v_1)_{xx}\|^2_{L^2(0,l)} + \|(u_2)_x\|^2_{L^2(0,l)} \|(v_2)_x\|^2_{L^2(0,l)} \\
&\quad + \|(u_1)_{xx}\|^2_{L^2(0,l)} \|(v_2)_x\|^2_{L^2(0,l)} + \|(v_1)_{xx}\|^2_{L^2(0,l)} \|(u_2)_x\|^2_{L^2(0,l)} \Big) \\
&\leqslant (a^2 + b^2)^2 \|u\|^2_V \|v\|^2_V.
\end{aligned}$$

Assim $\mathfrak{c}(u,v) \leqslant d \|u\|_V \|v\|_V$, $\forall\, u, v \in V$, com isto mostramos que $\mathfrak{c}$ é contínua.

Para mostrar que $\mathfrak{c}$ é simétrica temos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{c}(u,v) &= a^2 \langle (u_1)_{xx}, (v_1)_{xx} \rangle_{L^2(0,l)} + b^2 \langle (u_2)_x, (v_2)_x \rangle_{L^2(0,l)} \\
&= a^2 \langle (v_1)_{xx}, (u_1)_{xx} \rangle_{L^2(0,l)} + b^2 \langle (v_2)_x, (u_2)_x \rangle_{L^2(0,l)} \\
&= \mathfrak{c}(v,u).
\end{aligned}$$

Similarmente, para $d_0 = \min\{a^2, b^2\}$ temos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{c}(u,u) &= a^2\langle (u_1)_{xx}, (u_1)_{xx}\rangle_{L^2(0,l)} + b^2\langle (u_2)_x, (u_2)_x\rangle_{L^2(0,l)} \\
&\geqslant \min\{a^2, b^2\}\big(\langle (u_1)_{xx}, (u_1)_{xx}\rangle_{L^2(0,l)} + \langle (u_2)_x, (u_2)_x\rangle_{L^2(0,l)}\big) \\
&= d_0(\|(u_1)_{xx}\|^2_{L^2(0,l)} + \|(u_2)_x\|^2_{L^2(0,l)}\big) \\
&= d_0\|u\|^2_V, \quad \forall\, u \in V;
\end{aligned}$$

isto mostra a coercividade. □

Assim, existe um operador linear $A \in \mathscr{L}(V, V')$ tal que

$$\mathfrak{c}(u,v) = \langle Au, v\rangle_{V',V}, \quad \forall u, v \in V.$$

O operador $A : D(A) \subset H \to H$ é realizaçõa do operador

$$Au = \begin{pmatrix} a^2(u_1)_{xxxx} \\ -b^2(u_2)_{xx} \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

com a condição de fronteira (2.5) e o domínio do operador A é definido por

$$D(A) = \{(u_1, u_2) \in H : (u_1)_{xxxx}, (u_2)_{xx} \in L^2(0,l),\ u_1 = (u_1)_x = u_2 = 0 \text{ em } \{0, l\}\}.$$

Do Lema 2.2.1 segue que o operador A é coercivo, pois

$$\langle Au, u\rangle_{V',V} = \mathfrak{c}(u,u) \geqslant d_0\|u\|^2_V,$$

então, $\dfrac{\langle Au, u\rangle_{V',V}}{\|u\|_V} \to +\infty$ quando $\|u\|_V \to +\infty$.

Seja $I = [0, \infty) \subset \mathbb{R}$. Consideremos o operador $\widetilde{F} : I \times H \to H$ definido por

$$\widetilde{F}(t,u) = \begin{pmatrix} F_1(t, ., u_1(t, .), u_2(t, .)) \\ F_2(t, ., u_1(t, .), u_2(t, .)) \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

Agora definimos $u(t)$ para $t \geqslant 0$, como

$$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(t, .) \\ y(t, .) \end{pmatrix}$$

as quais são funções definidas em $(0, l)$. Assim estamos em condições de ver o sistema (2.20) como uma equação diferencial de segunda ordem abstrata no espaço de Hilbert H da seguinte forma

$$\begin{cases} u_{tt} + Au = \widetilde{F}(t, u), \quad t \geqslant 0, \\ u(0) = u_0, \\ u_t(0) = v_0, \end{cases} \tag{2.27}$$

onde $\{u_0, v_0\}$ são dados por (2.7) e $\widetilde{F} : I \times H \to H$ satisfaz as seguintes hipóteses
$H1)$ $\widetilde{F}$ é uma função contínua.
$H2)$ $\widetilde{F}$ é uma função Lipschitziana com relação à segunda variável.

Lema 2.2.2 *O domínio do operador A definido em* (2.25) *é dado por*

$$D(A) = [H^4(0, l) \cap H_0^2(0, l)] \times [H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l)] = W.$$

Demonstração: Similar à demonstração da Proposição 2.1.1. □

Proposição 2.2.1 *O operador A definido em* (2.25) *é monótono e simétrico.*

Demonstração: Primeiro mostraremos que A é monótono. Seja $u = (z, y) \in D(A)$, então

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle_H &= \big\langle (a^2 z_{xxxx}, -b^2 y_{xx}), (z, y) \big\rangle_H \\ &= \int_0^l a^2 z_{xxxx} z dx - \int_0^l b^2 y_{xx} y dx \\ &= a^2 \int_0^l |z_{xx}|^2 dx + b^2 \int_0^l |y_x|^2 dx \\ &= a^2 \|z_{xx}\|^2_{L^2(0,l)} + b^2 \|y_x\|^2_{L^2(0,l)} \geqslant 0, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos duas vez integração por partes junto com as condições de contorno.

Mostremos que A é um operador simétrico. De fato, se $u = (z, y), \tilde{u} = (\tilde{z}, \tilde{y}) \in D(A)$, então

$$\begin{aligned}
\langle Au, \tilde{u}\rangle_H &= \left\langle (a^2 z_{xxxx}, -b^2 y_{xx}), (\tilde{z}, \tilde{y})\right\rangle_H \\
&= \int_0^l \left(a^2 z_{xxxx}\tilde{z} - b^2 y_{xx}\tilde{y}\right) dx = \int_0^l a^2 z_{xx}\tilde{z}_{xx} dx + \int_0^l b^2 y_x \tilde{y}_x dx \\
&= \int_0^l \left(a^2 z\tilde{z}_{xxxx} - b^2 y\tilde{y}_{xx}\right) dx = \langle (z, y), (a^2\tilde{z}_{xxxx}, -b^2\tilde{y}_{xx})\rangle_H \\
&= \langle u, A\tilde{u}\rangle_H.
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.2.2 *O operador A definido em* (2.25) *é fechado.*

Demonstração: Seja $(z_n, y_n) \subset D(A)$ uma seqüência tal que $(z_n, y_n) \to (z, y)$ e $A(z_n, y_n) \to (\eta, \zeta)$. Isto é,

$$\begin{gathered}
z_n \to z \text{ em } H^4(0, l) \cap H_0^2(0, l) \hookrightarrow L^2(0, l), \\
y_n \to y \text{ em } H^2(0, l) \cap H_0^1(0, l) \hookrightarrow L^2(0, l), \\
a^2(z_n)_{xxxx} \to \eta \text{ e } -b^2(y_n)_{xx} \to \zeta \text{ em } L^2(0, l).
\end{gathered}$$

Sabemos que o operador Laplaciano é um operador fechado (ver [7], página 160), assim temos a convergência $a^2(z_n)_{xxxx} \to a^2 z_{xxxx}$ e $-b^2(y_n)_{xx} \to -b^2 y_{xx}$ em $L^2(0, l)$. Logo, pela unicidade do limite temos $\eta = a^2 z_{xxxx}$ e $\zeta = -b^2 y_{xx}$, ou seja, $A(z, y) = (\eta, \zeta)$ e também $(z, y) \in D(A)$, pois $D(A)$ é denso em H. □

Observação 2.2.1 *O operador A é maximal monótono pela Observação* 1.3.6.

2.2.1 Existência e Unicidade de Solução

O problema (2.27) pode ser visto como

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & -I \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{F}(t, u) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

ou equivalentemente

$$\begin{cases} \dot{U}(t) + \mathcal{A}U(t) = \mathcal{F}(t, U(t)), \quad t \geqslant 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{2.28}$$

onde $U = (u, u_t) = (u, v)$.

O problema (2.28) esta definido sobre o espaço $\mathcal{H} = V \times H$, que é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$\big\langle (\phi_1, \phi_2), (\psi_1, \psi_2) \big\rangle_{\mathcal{H}} := \mathfrak{c}(\phi_1, \psi_1) + \big\langle \phi_2, \psi_2 \big\rangle_H.$$

O operador linear $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é dado por $\mathcal{A}(u, v) = (-v, Au)$ com domínio definido por

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) &= \{U \in \mathcal{H} : \mathcal{A}U \in \mathcal{H}\} \\ &= \{U = (u, v) \in V \times H : (-v, Au) \in V \times H\} \\ &= \{U = (u, v) \in V \times H : v \in V \text{ e } Au \in H\} \\ &= \{U = (u, v) \in V \times V : Au \in H\}. \end{aligned}$$

O operador não linear $\mathcal{F} : I \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é definido por $\mathcal{F}(t, U) = (0, \widetilde{F}(t, u))$.

Lema 2.2.3 *O domínio do operador $\mathcal{A}$ é $D(\mathcal{A}) = W \times V$ e $D(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$.*

Demonstração: Dado $U = (u, v) \in D(\mathcal{A})$ segue que $u, v \in V$ e $Au \in H$. Definindo $f := Au$, temos

$$\langle f, w \rangle_H = \langle Au, w \rangle_H, \ \forall w \in V$$

$$\langle (f_1, f_2), (w_1, w_2) \rangle_H = \langle (a^2 z_{xxxx}, -b^2 y_{xx}), (w_1, w_2) \rangle_H$$

$$\int_0^l f_1 w_1 dx + \int_0^l f_2 w_2 dx = \int_0^l a^2 z_{xxxx} w_1 dx - \int_0^l b^2 y_{xx} w_2 dx,$$

onde temos usado $f = (f_1, f_2)$, $u = (z, y)$ e $w = (w_1, w_2)$.

Da última igualdade segue que $u = (z, y)$ é uma solução fraca do problema elíptico

$$\begin{cases} z_{xxxx} = \dfrac{f_1}{a^2} \quad \text{em } (0, l), \\ -y_{xx} = \dfrac{f_2}{b^2} \quad \text{em } (0, l), \\ z \ = \ y \ = \ z_x \ = \ 0 \quad \text{em } \{0, l\}. \end{cases}$$

Como $f = (f_1, f_2) \in H$ então $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(0,l)$, onde $\varphi_1 = \dfrac{f_1}{a^2}$ e $\varphi_2 = \dfrac{f_2}{b^2}$.

Logo aplicando a teoria de regularidade para os seguintes problemas elíptico

$$\begin{cases} z_{xxxx} = \varphi_1 \quad \text{em } (0,l), \\ z \ = \ z_x \ = \ 0 \quad \text{em } \{0,l\}, \\ \varphi_1 \in L^2(0,l), z \in H_0^2(0,l) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -y_{xx} = \varphi_2 \quad \text{em } (0,l), \\ y \ = \ 0 \quad \text{em } \{0,l\}, \\ \varphi_2 \in L^2(0,l), y \in H_0^1(0,l), \end{cases}$$

segue que $z \in H^4(0,l)$ e $y \in H^2(0,l)$. Portanto $u = (z,y) \in W$.

Por outro lado, dado $U = (u,v) \in W \times V$ temos $u \in W$ e $v \in V$. Vamos mostrar que $Au \in H$. Com efeito, pela definição do operador A, se $u \in W = D(A) \subset V$ então $Au \in H$. Disto segue que $U = (u,v) \in D(\mathcal{A})$ e portanto $D(\mathcal{A}) = W \times V$.

Como as inclusões $W \hookrightarrow V \hookrightarrow H$ são densas, segue que a inclusão $D(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{H}$ é densa.

□

Proposição 2.2.3 *O operador $-\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações $\{T(t) := e^{-\mathcal{A}t} : t \geqslant 0\}$ no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.*

Demonstração: O operador $\mathcal{A}$ é fechado. De fato, seja (u_n, v_n) uma seqüência de $D(\mathcal{A})$ tal que $(u_n, v_n) \to (u,v)$ e $\mathcal{A}(u_n, v_n) \to (\widetilde{u}, \widetilde{v})$. Então, $u_n \to u$ em W, $v_n \to v$ em V, $-v_n \to \widetilde{u}$ em V e $Au_n \to \widetilde{v}$ em H. Disto segue que $\widetilde{u} = -v$. Como $u_n \in D(A)$ e A é um operador fechado, temos $u \in D(A)$ e $Au = \widetilde{v}$. Logo, $(\widetilde{u}, \widetilde{v}) = (-v, Au) = \mathcal{A}(u,v)$.

O domínio $D(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{H}$, pelo Lema 2.2.3.

Agora mostraremos que $-\mathcal{A}$ e $(-\mathcal{A})^*$ são dissipativos. Com efeito, dado $U = (u,v)$,

$\widetilde{U} = (\widetilde{u}, \widetilde{v}) \in D(\mathcal{A})$, temos

$$\begin{aligned}
\langle -\mathcal{A}U, \widetilde{U}\rangle_{\mathcal{H}} &= \big\langle (v, -Au), (\widetilde{u}, \widetilde{v})\big\rangle_{\mathcal{H}} = \mathfrak{c}(v, \widetilde{u}) + \big\langle -Au, \widetilde{v}\big\rangle_{H} \\
&= \mathfrak{c}((z_t, y_t), (\widetilde{z}, \widetilde{y})) + \big\langle (-a^2 z_{xxxx}, b^2 y_{xx}), (\widetilde{z}_t, \widetilde{y}_t)\big\rangle_{H} \\
&= a^2 \int_0^l z_{txx}\widetilde{z}_{xx}dx + b^2 \int_0^l y_{tx}\widetilde{y}_x dx - a^2 \int_0^l z_{xxxx}\widetilde{z}_t dx + b^2 \int_0^l y_{xx}\widetilde{y}_t dx \\
&= a^2 \int_0^l z_t\widetilde{z}_{xxxx}dx - b^2 \int_0^l y_t\widetilde{y}_{xx} dx - a^2 \int_0^l z_{xx}\widetilde{z}_{txx} dx - b^2 \int_0^l y_x\widetilde{y}_{tx} dx \\
&= \big\langle v, A\widetilde{u}\big\rangle_{H} + \mathfrak{c}(u, -\widetilde{v}) = \big\langle (u, v), (-\widetilde{v}, A\widetilde{u})\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \langle U, \mathcal{A}\widetilde{U}\rangle_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Disto, segue que $(-\mathcal{A})^* = \mathcal{A}$, e

$$\begin{aligned}
\langle -\mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} &= \big\langle (v, -Au), (u, v)\big\rangle_{\mathcal{H}} = \mathfrak{c}(v, u) + \big\langle -Au, v\big\rangle_{H} \\
&= \mathfrak{c}((z_t, y_t), (z, y)) + \big\langle -A(z, y), (z_t, y_t)\big\rangle_{H} \\
&= \mathfrak{c}((z_t, y_t), (z, y)) + \big\langle (-a^2 z_{xxxx}, b^2 y_{xx}), (z_t, y_t)\big\rangle_{H} \\
&= a^2 \int_0^l z_{txx} z_{xx}dx + b^2 \int_0^l y_{tx} y_x dx - a^2 \int_0^l z_{xxxx} z_t dx + b^2 \int_0^l y_{xx} y_t dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, $-\mathcal{A}$ e $(-\mathcal{A})^*$ são dissipativos. Pelo Corolário 1.3.5 segue que $-\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações em $\mathcal{H}$. □

Observação 2.2.2 *Do Corolário* 1.3.6 *segue que o operador $\mathcal{A}$ é maximal monótono.*

Teorema 2.2.1 (Existência e Unicidade) *Suponhamos que $\mathcal{F}$ satisfaz as seguintes hipóteses*

(1) $\|\mathcal{F}(t, \zeta)\|_{\mathcal{H}} \leqslant K(1 + \|\zeta\|_{\mathcal{H}})$.

(2) *$\mathcal{F}$ é uma função contínua.*

(3) *$\mathcal{F}$ é localmente Lipschitziana com relação à segunda variável.*

Então para cada $U_0 \in \mathcal{H}$ o problema de Cauchy (2.28) *tem uma única soluçao fraca $U \in C([0, +\infty), \mathcal{H})$.*

Demonstração: De $(H1)$ segue que $\mathcal{F}$ é uma função contínua. Também de $(H2)$ segue que existe uma constante $\widetilde{K} > 0$ tal que

$$\|\widetilde{F}(t,\phi) - \widetilde{F}(t,\psi)\|_H \leqslant \widetilde{K}\|\phi - \psi\|_H, \quad \forall \phi, \psi \in H. \tag{2.29}$$

• *$\mathcal{F}$ é Lipschitziana.* De fato, dados $u = (\phi, \dot{\phi}), v = (\psi, \dot{\psi}) \in \mathcal{H} = V \times H$, temos

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(t,u) - \mathcal{F}(t,v)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|(0, \widetilde{F}(t,\phi)) - (0, \widetilde{F}(t,\psi))\|_H^2 \\ &= \mathfrak{c}(0,0) + \|\widetilde{F}(t,\phi) - \widetilde{F}(t,\psi)\|_H^2 \\ &= \|\widetilde{F}(t,\phi) - \widetilde{F}(t,\psi)\|_H^2.\end{aligned}$$

Fazendo $\phi = (z,y)$ e $\psi = (\eta, \zeta)$, como $\phi, \psi \in V = H_0^2(0,l) \times H_0^1(0,l)$, segue que $z, \eta \in H_0^2(0,l)$ e $y, \zeta \in H_0^1(0,l)$. Usando a Desigualdade de Poincaré (Proposição 1.2.2) para $y, \zeta \in H_0^1(0,l)$, concluímos que existem umas constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned}\|y\|_{L^2(0,l)} &\leqslant \|y\|_{H^1(0,l)} \leqslant C_1\|y_x\|_{L^2(0,l)}; \\ \|\zeta\|_{L^2(0,l)} &\leqslant \|\zeta\|_{H^1(0,l)} \leqslant C_2\|\zeta_x\|_{L^2(0,l)}.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Agora, para $z, \eta \in H_0^2(0,l)$, existem constantes $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned}\|z\|_{L^2(0,l)} &\leqslant \delta_1\|z_{xx}\|_{L^2(0,l)}; \\ \|\eta\|_{L^2(0,l)} &\leqslant \delta_2\|\eta_{xx}\|_{L^2(0,l)}.\end{aligned} \tag{2.31}$$

Como para qualquer $\theta \in H_0^2(0,l)$ temos

$$|\theta_x(s)| = |\theta_x(s) - \theta_x(0)| = \Big|\int_0^s \theta_{xx}(\tau)d\tau\Big| \leqslant \int_0^l |\theta_{xx}(\tau)|d\tau,$$

segue que

$$|\theta_x(s)|^2 \leqslant \Big[\int_0^l |\theta_{xx}|(\tau)d\tau\Big]^2 \leqslant |l|\|\theta_{xx}\|_{L^2(0,l)}^2,$$

e assim

$$\|\theta_x\|_{L^2(0,l)} \leqslant |l|\|\theta_{xx}\|_{L^2(0,l)}.$$

Logo, usando a desigualdade (1.3) obtemos

$$\|\theta\|_{L^2(0,l)} \leqslant \vartheta\|\theta_{xx}\|_{L^2(0,l)},$$

onde $\vartheta := |l|^2$.

Finalmente da parte direita de (2.29) e do mesmo raciocínio utilizando na obtenção as desigualdades (2.30) e (2.31), obtemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{K}^2\|\phi-\psi\|_H^2 &= \widetilde{K}^2\|z-\eta\|_{L^2(0,l)}^2+\widetilde{K}^2\|y-\zeta\|_{L^2(0,l)}^2\\
&\leqslant \widetilde{K}^2\delta^2\|(z-\eta)_{xx}\|_{L^2(0,l)}^2+\widetilde{K}^2C^2\|(y-\zeta)_x\|_{L^2(0,l)}^2\\
&\leqslant \widetilde{K}^2\max\left\{\frac{\delta^2}{a^2},\frac{C^2}{b^2}\right\}\Big(a^2\|(z-\eta)_{xx}\|_{L^2(0,l)}^2+b^2\|(y-\zeta)_x\|_{L^2(0,l)}^2\Big)\\
&\leqslant \widetilde{K}^2\max\left\{\frac{\delta^2}{a^2},\frac{C^2}{b^2}\right\}\Big(\mathfrak{c}(\phi-\psi,\phi-\psi)+\|\phi_t-\psi_t\|_H^2\Big)\\
&= \widetilde{K}^2\max\left\{\frac{\delta^2}{a^2},\frac{C^2}{b^2}\right\}\|u-v\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Assim temos mostrado que $\mathcal{F}$ é Lipschitziana (global) sempre que $\widetilde{F}$ o é. Logo, $\mathcal{F}$ é localmente Lipschitziana.

Da Proposição 2.2.3 segue-se que $-\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações $\{T(t) := e^{-\mathcal{A}t} : t \geqslant 0\}$ no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

Do Teorema 1.3.11, para todo $U_0 \in \mathcal{H}$ a solução do problema (2.28) é dado por

$$U(t) = T(t)U_0 + \int_0^t T(t-s)\mathcal{F}(s,U(s))ds, \quad t \in [0, t_{max}).$$

Como $\|\mathcal{F}(t,U(t))\|_{\mathcal{H}} \leqslant K(1+\|U\|_{\mathcal{H}})$ da hipótese (1), usando o Teorema 1.3.12 e tomando $k(t) = K = h(t)$, segue que $t_{max} = +\infty$. Portanto existe uma única solução $U \in C([0,+\infty),\mathcal{H})$. □

2.2.2 Análise da Energia do Sistema Não Linear

Modelo Não Linear

Se um dos conjuntos de cabos amarrados (estadias) acima ou abaixo do leito da ponte é removido, o sistema linear estudado anteriormente se transforma em um sistema não linear (sem forças externas) e pode ser descrito da seguinte forma

$$\begin{cases} m_b z_{tt} + \alpha z_{xxxx} - k\Psi(y-z) = 0, \quad x \in (0,l), \quad t \geqslant 0, \\ m_c y_{tt} - \beta y_{xx} + k\Psi(y-z) = 0, \quad x \in (0,l), \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.32}$$

onde $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função definida por

$$\Psi(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{se } \xi > 0, \\ 0, & \text{se } \xi \leqslant 0. \end{cases} \tag{2.33}$$

Este sistema (2.32) esta sujeito ao mesmo conjunto de condições de contorno (2.5) e as iniciais (2.7).

Consideramos o funcional $E : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, definido por

$$E(U(t)) = \frac{1}{2}\int_0^l \Big\{ m_b|z_t|^2 + m_c|y_t|^2 + \alpha|z_{xx}|^2 + \beta|y_x|^2 + k|\Psi(y-z)|^2 \Big\} dx, \tag{2.34}$$

onde $U(t) = e^{-t\mathcal{A}}u_0 = (z(\cdot,t), y(\cdot,t), z_t(\cdot,t), y_t(\cdot,t)) \in \mathcal{H}$ é uma solução de (2.32), sendo $\{e^{-t\mathcal{A}}, t \geqslant 0\}$ um semigrupo fortemente contínuo de contrações.

Vemos que 0 é um ponto de equilíbrio de $\mathcal{H}$, pois $\gamma(0) = \{e^{-t\mathcal{A}}\,0, t \geqslant 0\} = \{0\}$.

O funcional E é uma funcional de Liapunov, pois E é contínua, $E(0) = 0$, derivando E ao longo da soluçao $u(t)$ com relação a t e usando as condições de contorno (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{E}(U(t)) &= \frac{1}{2}\int_0^l \frac{d}{dt}\Big\{ m_b|z_t|^2 + m_c|y_t|^2 + \alpha|z_{xx}|^2 + \beta|y_x|^2 + k|\Psi(y-z)|^2 \Big\} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l 2\Big\{ m_b z_t z_{tt} + m_c y_t y_{tt} + \alpha z_{xx} z_{xxt} + \beta y_x y_{xt} + k\Psi(y-z)\frac{d}{dt}\Psi(y-z) \Big\} dx \\ &= \int_0^l \Big\{ m_b z_t z_{tt} + m_c y_t y_{tt} + \alpha z_{xxxx} z_t - \beta y_{xx} y_t + k\Psi(y-z)(y_t - z_t) \Big\} dx \\ &= \int_0^l \Big\{ \big(m_b z_{tt} + \alpha z_{xxxx} - k\Psi(y-z)\big) z_t + \big(m_c y_{tt} - \beta y_{xx} + k\Psi(y-z)\big) y_t \Big\} dx \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Também temos

$$E(U(t)) \geqslant c(\|U(t)\|_{\mathcal{H}}),$$

onde $c(\|U(t)\|_{\mathcal{H}}) := \frac{1}{4}\|U(t)\|^2_{\mathcal{H}}$, a qual é uma função contínua e estritamente crescente, com $c(0) = 0$. Então do Teorema 1.3.13 segue que a origem 0 é estável.

De (2.35) segue que o sistema é conservativo.

Observação 2.2.3 *Note que ainda neste caso trabalhamos com a norma do caso linear.*

Modelo Não Linear Geral

Em geral a função F do modelo (2.3) pode ser considerada como uma função com seu gráfico situado no primeiro e terceiro quadrante do plano $\mathbb{R}^2$. Porém do ponto de vista físico, o problema só faz sentido se F é uma função não decrescente de seu argumento. Em qualquer caso vamos a considerar o correspondente sistema homogêneo

$$\begin{cases} z_{tt} + a^2 z_{xxxx} - \dfrac{1}{m_b} F(y-z) = 0, \quad x \in (0,l), \quad t \geqslant 0, \\ y_{tt} - b^2 y_{xx} + \dfrac{1}{m_c} F(y-z) = 0, \quad x \in (0,l), \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.36}$$

Este sistema não linear geral (2.36) esta sujeito ao mesmo conjunto de condições de fronteira (2.5) e as iniciais (2.7). Para facilitar nosso trabalho vamos considerar neste caso $m_b = m_c = m$.

Definimos a função $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$G(\zeta) = \int_0^\zeta F(\xi) d\xi. \tag{2.37}$$

Consideramos o espaço $\mathcal{H}$ e o funcional $E : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ definido por

$$E(U(t)) = \frac{1}{2} \int_0^l \Big\{ |z_t|^2 + |y_t|^2 + a^2 |z_{xx}|^2 + b^2 |y_x|^2 + \frac{2}{m} G(y-z) \Big\} dx, \tag{2.38}$$

onde $U(t) = S(t)U_0 = (z(\cdot,t), y(\cdot,t), z_t(\cdot,t), y_t(\cdot,t)) \in \mathcal{H}$ é uma solução de (2.36) e $\{S(t), t \geqslant 0\}$ é o semigrupo fortemente contínuo de contrações em $\mathcal{H}$.

Vemos que 0 é um ponto de equilíbrio de $\mathcal{H}$, pois $\gamma(0) = \{S(t)0, t \geqslant 0\} = \{0\}$.

O funcional E é uma funcional de Liapunov, pois E é contínua, $E(0) = 0$. Derivando E ao longo da soluçao $U(t)$ com relação a t e usando as condições de contorno (2.5), obtemos

$$\begin{aligned} \dot{E}(U(t)) &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{d}{dt} \Big\{ |z_t|^2 + |y_t|^2 + a^2 |z_{xx}|^2 + b^2 |y_x|^2 + \frac{2}{m} G(y-z) \Big\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l 2 \Big\{ z_t z_{tt} + y_t y_{tt} + a^2 z_{xx} z_{xxt} + b^2 y_x y_{xt} + \frac{1}{m} F(y-z)(y-z)_t \Big\} dx \\ &= \int_0^l \Big\{ z_t z_{tt} + y_t y_{tt} + a^2 z_{xxxx} z_t - b^2 y_{xx} y_t + \frac{1}{m} F(y-z)(y_t - z_t) \Big\} dx \\ &= \int_0^l \Big\{ \big(z_{tt} + a^2 z_{xxxx} - \frac{1}{m} F(y-z) \big) z_t + \big(y_{tt} - b^2 y_{xx} + \frac{1}{m} F(y-z) \big) y_t \Big\} dx \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Também temos

$$E(U(t)) \geqslant c(\|U(t)\|_{\mathcal{H}}),$$

onde $c(\|U(t)\|_{\mathcal{H}}) := \dfrac{1}{4}\|U(t)\|^2_{\mathcal{H}}$, a qual é uma função contínua e estritamente crescente, com $c(0) = 0$. Então do Teorema 1.3.13 segue que a origem 0 é estável.

De (2.39) segue que o sistema é conservativo.

Modelo Geral com Amortecimento Dinâmico

Em todos os modelos anteriormente descritos temos desprezado o amortecimento aerodinâmico para melhor entendimento do modelo. Considerando o modelo (2.3) e incluído o amortecimento aerodinâmico obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} z_{tt} + a^2 z_{xxxx} - \dfrac{1}{m}F(y-z) + \dfrac{1}{m}f_1(z_t) = 0, \quad x \in (0,l), \quad t \geqslant 0, \\ y_{tt} - b^2 y_{xx} + \dfrac{1}{m}F(y-z) + \dfrac{1}{m}f_2(y_t) = 0, \quad x \in (0,l), \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{2.40}$$

Este sistema geral com amortecimento (2.40) esta sujeito ao mesmo conjunto de condições de fronteira (2.5) e as iniciais (2.7).

Para facilitar nosso trabalho neste caso também vamos supor que $m_b = m_c = m$.

Usando o funcional de energia (2.38) e derivando este ao longo da solução (z, y) de (2.40) podemos verificar que

$$\begin{aligned} \dot{E}(U(t)) &= \frac{1}{2}\int_0^l \frac{d}{dt}\Big\{|z_t|^2 + |y_t|^2 + a^2|z_{xx}|^2 + b^2|y_x|^2 + \frac{2}{m}G(y-z)\Big\}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l 2\Big\{z_t z_{tt} + y_t y_{tt} + a^2 z_{xx} z_{xxt} + b^2 y_x y_{xt} + \frac{1}{m}F(y-z)(y-z)_t\Big\}dx \\ &= \int_0^l \Big\{z_t z_{tt} + y_t y_{tt} + a^2 z_{xxxx} z_t - b^2 y_{xx} y_t + \frac{1}{m}F(y-z)(y_t - z_t)\Big\}dx \\ &= \int_0^l \Big\{\big(z_{tt} + a^2 z_{xxxx} - \frac{1}{m}F(y-z)\big)z_t + \big(y_{tt} - b^2 y_{xx} + \frac{1}{m}F(y-z)\big)y_t\Big\}dx \\ &= -\frac{1}{m}\int_0^l \Big\{f_1(z_t)z_t + f_2(y_t)y_t\Big\}dx. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Desta última igualdade segue que se $f_i(\xi)\xi \geqslant 0$ para todo $i = 1, 2$, então $\dot{E}(t) \leqslant 0$. Conseqüentemente o sistema (2.40) é estável.

Precisamos de um resultado semelhante ao Principio da Invariância de Lasalle para concluir que o sistema é assintoticamente estável se $f_i(\zeta)\zeta \geqslant 0$, para todo $i = 1, 2$.

Sejam $\mathcal{H}$, G como antes e $V : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ o funcional de Liapunov definido por

$$V(z_1, y_1, z_2, y_2) = \frac{1}{2}\int_0^l \Big\{m_b|z_2|^2 + m_c|y_2|^2 + \alpha|(z_1)_{xx}|^2 + \beta|(y_1)_x|^2 + \frac{2}{m}G(y_1 - z_1)\Big\}dx. \quad (2.42)$$

Teorema 2.2.2 *Consideremos o sistema* (2.40) *e suponhamos que as seguintes afirmações valem*

(A1) $f_i(0) = 0$, $f_i(\zeta)\zeta > 0$ *para* $\zeta \neq 0$, $i = 1, 2$;

(A2) $F(\xi)\xi \geqslant 0$ *para* $\xi \in \mathbb{R}$,

então o sistema é assintoticamente estável.

Demonstração: Observe que

$$\begin{aligned} E(t) :&= E(U(t)) = \frac{1}{2}\int_0^l \Big\{m_b|z_t|^2 + m_c|y_t|^2 + \alpha|z_{xx}|^2 + \beta|y_x|^2 + \frac{2}{m}G(y - z)\Big\}dx \\ &= V(z, y, z_t, y_t). \end{aligned}$$

De (2.41) e de $(A1)$ temos

$$\dot{E}(t) = \frac{d}{dt}V(z, y, z_t, y_t) = -\frac{1}{m}\int_0^l \Big\{f_1(z_t)z_t + f_2(y_t)y_t\Big\}dx < 0 \quad (2.43)$$

sempre que $z_t \neq 0$ ou $y_t \neq 0$.

Assim, $E(t)$ com $t \geqslant 0$ é uma função não negativa monótona decrescente em t. Logo $\lim_{t\to\infty} E(t) = r_0$, para algum $r_0 \geqslant 0$.

Se $r_0 = 0$ o resultado é imediato.

Se $r_0 > 0$, então ao longo de qualquer solução do sistema (2.40) que começa na fronteira do conjunto, $E_{r_0} = \{(z_1, y_1, z_2, y_2) \in \mathcal{H} : V \leqslant r_0\}$, $\dot{E} < 0$, o sistema contínua dissipando energia e avança em direção à origem.

Mostraremos que $\dot{E}$ pode se anular em um intervalo $J = [t_0, t_0 + \tau]$, isto é, $\dot{E}(t) = 0$ em $t \in J$, e o decaimento de energia ainda permanece, se o estado estacionário é atingido.

Vamos mostrar isto pelo absurdo. Suponhamos que $\dot{E}$ se anula no intervalo J, sem ter atingido o estado estacionário. De (2.43), usando $(A1)$ segue que $z_t = 0, y_t = 0$ em J, e daí z, y devem satisfazer o sistema

$$\begin{cases} a^2 z_{xxxx} - \dfrac{1}{m} F(y - z) = 0, \quad x \in (0, l), \\ -b^2 y_{xx} + \dfrac{1}{m} F(y - z) = 0, \quad x \in (0, l), \end{cases} \tag{2.44}$$

junto com as condições de fronteira (2.5), (2.6).

Seja z^0, y^0 uma solução não trivial do sistema (2.44).

Multiplicando a primeira equação por z^0 e a segunda por y^0 do sistema (2.44) e integrando de 0 a l, obtemos

$$\begin{cases} a^2 \displaystyle\int_0^l z^0_{xxxx} z^0 dx - \dfrac{1}{m} \int_0^l F(y^0 - z^0)\, z^0 dx = 0, \quad x \in (0, l), \\ -b^2 \displaystyle\int_0^l y^0_{xx} y^0 dx + \dfrac{1}{m} \int_0^l F(y^0 - z^0)\, y^0 dx = 0, \quad x \in (0, l). \end{cases} \tag{2.45}$$

Usando integração por partes e as condições de fronteira no sistema (2.45) temos

$$\begin{cases} a^2 \displaystyle\int_0^l |z^0_{xx}|^2 dx - \dfrac{1}{m} \int_0^l F(y^0 - z^0)\, z^0 dx = 0, \quad x \in (0, l), \\ b^2 \displaystyle\int_0^l |y^0_x|^2 dx + \dfrac{1}{m} \int_0^l F(y^0 - z^0)\, y^0 dx = 0, \quad x \in (0, l). \end{cases} \tag{2.46}$$

Somando as duas equações do sistema (2.46), e aplicando a definição de norma e produto escalar em $L^2(0, l)$ temos

$$a^2 \|z^0_{xx}\|^2_{L^2(0,l)} + b^2 \|y^0_x\|^2_{L^2(0,l)} + \frac{1}{m} \big\langle F(y^0 - z^0), (y^0 - z^0) \big\rangle_{L^2(0,l)} = 0. \tag{2.47}$$

De $(A2)$, obtemos

$$\big\langle F(y^0 - z^0), (y^0 - z^0) \big\rangle_{L^2(0,l)} = \int_0^l F(y^0(\xi) - z^0(\xi))(y^0(\xi) - z^0(\xi)) d\xi \geqslant 0.$$

Logo,

$$a^2 \|z^0_{xx}\|^2_{L^2(0,l)} + b^2 \|y^0_x\|^2_{L^2(0,l)} = -\frac{1}{m} \big\langle F(y^0 - z^0), (y^0 - z^0) \big\rangle_{L^2(0,l)} \leqslant 0.$$

Isto implica que $z^0_{xx} = 0$ e $y^0_x = 0$ em $(0, l)$, assim $z^0(x) = k_1 x + k_2$ e $y^0(x) = k_3$ em $(0, l)$, onde k_1, k_2 e k_3 são constantes arbitrarias. Usando as condições de fronteira obtemos $z^0 = 0$ e $y^0 = 0$ em $(0, l)$. Esta contradição mostra o resultado. $\square$

Amortecimento estrutural e aerodinâmico

Na presença dos amortecimentos viscoso e estrutural, f_1 é uma função de z_t, z_{txx} e z_{txxxx}. Podemos supor que f_1 é uma função linear, isto é

$$f_1(z_t, z_{txx}, z_{txxxx}) = \gamma_1 z_t - \gamma_{12} z_{txx} + \gamma_{13} z_{txxxx}$$

onde os coeficientes γ_{12}, γ_{13} dependem das propriedades metalúrgicas dos materiais de construção enquanto γ_1 depende da geometria do leito da ponte, por exemplo, area de superfície, forma, etc.

Para o cabo suspenso o amortecimento estrutural é desprecível. Podemos supor que o amortecimento viscoso é linear, isto é, f_2 é dado por

$$f_2(y_t) = \gamma_2 y_t.$$

Das considerações físicas temos $\gamma_1, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_2 \geqslant 0$. Substituindo as funções f_1 e f_2 no sistema (2.40) temos

$$\begin{cases} z_{tt} + a^2 z_{xxxx} - \dfrac{1}{m} F(y-z) + \dfrac{1}{m} f_1(z_t, z_{txx}, z_{txxxx}) = 0, \quad x \in (0,l), \quad t \geqslant 0, \\ y_{tt} - b^2 y_{xx} \ + \dfrac{1}{m} F(y-z) + \dfrac{1}{m} f_2(y_t) = 0, \quad x \in (0,l), \quad t \geqslant 0. \end{cases}$$

Considerando o funcional E definido em (2.38) temos

$$\begin{aligned} \dot{E}(U(t)) &= -\frac{1}{m} \int_0^l \Big\{ f_1(z_t, z_{txx}, z_{txxxx}) z_t + f_2(y_t) y_t \Big\} dx \\ &= -\frac{1}{m} \int_0^l \Big\{ (\gamma_1 z_t - \gamma_{12} z_{txx} + \gamma_{13} z_{txxxx}) z_t + (\gamma_2 y_t) y_t \Big\} dx \\ &= -\frac{1}{m} \int_0^l \Big\{ \gamma_1 |z_t|^2 - \gamma_{12} z_{txx} z_t + \gamma_{13} z_{txxxx} z_t + \gamma_2 |y_t|^2 \Big\} dx \\ &= -\frac{1}{m} \int_0^l \Big\{ \gamma_1 |z_t|^2 + \gamma_{12} |z_{tx}|^2 + \gamma_{13} |z_{txx}|^2 + \gamma_2 |y_t|^2 \Big\} dx \leqslant 0. \end{aligned}$$

Daí o sistema é assintoticamente estável com respeito à origem (ver [1], [2]).

Referências Bibliográficas

[1] AHMED, N. U.; HARBI, H. Mathematical analysis of dynamic models of suspension bridges. **SIAM Jounal on Applied Mathematics**, Philadelphia, v. 58, n. 3, p. 853 - 874, 1998.

[2] AHMED, N. U.; HARBI, H. Stability of suspension bridge I: aerodynamic and structural damping. **Mathematical Problems in Engineering**, New York, v. 4, p. 73-98, 1998.

[3] AASSILA, M. Stability of dynamic models of suspension bridges. **Mathematische Nachrichten**, Weinheim, v. 235, p. 5-15, 2002.

[4] BRÉZIS, H. **Analisis funcional:** teoria y aplicaciones. Madrid: Alianza Universidad Textos, 1984.

[5] CHOLEWA, J. W.; DLOTKO, T. **Global attractors in abstract parabolic problems**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

[6] DENG, Y.; LI, Y. Branches of solutions to semilinear biharmonic equations on $\mathbb{R}^N$. **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Section A. Mathematics**, Edinburgh, v. 136A, p. 733-758, 2006.

[7] EIDELMAN, Y.; MILMAN, V.; TSOLOMITIS, A. **Functional analysis:** an introduction. Providence: American Mathematical Society, 2004.

[8] ENGEL, K. J.; NAGEL, R. **A short course on operator semigroups**. New York: Springer, 2006.

[9] GUESMIA, A. Energy decay for a damped nonlinear coupled system, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, San Diego, v. 239, p. 38-48, 1999.

[10] HENRY, D. **Geometric theory of semilinear parabolic equations**. Berlin: Springer-Verlag, 1981.

[11] KELLEY, J.L.; NAMIOKA I. **Linear topological spaces**. New York: Springer-Verlag, 1963.

[12] LAGES, E. **Elementos de topologia geral**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1970.

[13] MUÑOZ, J. E. **Teoria das distribuções e equações diferenciais parciais**. Rio de Janeiro: LNCC, 1999. (Monografias do LNCC. Série de Textos Avançados).

[14] PAZY, A. **Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations**. New York: Springer-Verlag, 1983.

[15] SHOWALTER, R. E. **Hilbert space methods for partial differential equations**. Austin: Pitman Publishing, 1977. (Monographs and Studies in Mathematics).

[16] SHOWALTER, R. E. **Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations**. Providence: American Mathematical Society, 1997. (Mathematical Surveys and Monographs, n. 49).

[17] SOTOMAYOR, J. M. **Lições de equações diferenciais ordinárias**. Rio de Janeiro: IMPA; [Brasilia]: CNPq, [c1979]. (Projeto Euclides).

[18] VRABIE, I. I. **C_0-semigroups and applications**. Amsterdam: Elsevier, 2003.

Índice Remissivo