

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

**TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO,
FUNÇÃO COMPOSTA E REGRA DA CADEIA**

SANDRA MALTA BARBOSA

Orientador: Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba

Tese de Doutorado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - Área de Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)

2009

517.2 Barbosa, Sandra Malta
B238t Tecnologias da informação e comunicação, função
 composta e regra da cadeia / Sandra Malta Barbosa. - Rio
 Claro : [s.n.], 2009
 199 f. : il., gráfs., quadros

 Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista,
 Instituto de Geociências e Ciências Exatas
 Orientador: Marcelo de Carvalho Borba

 1. Cálculo diferencial. 2. Educação matemática. 3.
 Cálculo integral. 4. Experimentos de ensino. 5. Seres-
 humanos-com-mídias. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba (orientador)
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Profa. Dra. Márcia Maria Fusaro Pinto
FE/Universidade Federal de Minas Gerais/Belo Horizonte (MG)

Profa. Dra. Maria Helena Sebastiana Sahão Bizelli
IQ/UNESP/Araraquara (SP)

Profa. Dra. Edna Maura Zuffi
ICMC/USP/São Carlos (SP)

Prof. Dr. Henrique Lazari
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Sandra Malta Barbosa
Aluna

Rio Claro, 17 de Fevereiro de 2009

Resultado: **APROVADA**

DEDICATÓRIA

A meu filho Lucas,
A meus pais, Roberto e Serafina,
A meus irmãos, Fábio, Paula e Cláudio,
A minhas cunhadas, Renata e Alessandra,
A meus sobrinhos, Gabriel e Henrique,
Pelo amor e apoio incondicionais.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer, neste momento, a todas as pessoas que, de uma forma ou de outra, foram co-responsáveis por minha caminhada na elaboração desta tese.

Agradeço a Deus, que sempre me amparou, fazendo meu caminho ser mais suave, e à minha família que sem a qual eu não existiria.

Ao Professor Marcelo, orientador, pelo apoio, orientação e colaboração ao longo deste doutorado. Aos professores Márcia Maria Fusaro Pinto, Edna Maura Zuffi, Maria Helena Bizelli e Henrique Lazari, pelas leituras cuidadosas, críticas e contribuições.

À Anne Kepple pelo carinho e pela elaboração cuidadosa do Abstract.

Aos amigos do GPIMEM (Sueli, Silvana, Paula Malheiros, Ricardo, Leandro, Orlando, Regina Franchi, Maria Helena, Rúbia, Cláudio, Sílvia, Maurício e Adriana) que, ao longo de quatro anos, ensinaram-me o significado da palavra Grupo que, muitas vezes, se confundia com a palavra Família, pelas leituras, críticas, conversas, debates e, acima de tudo, companheirismo. Em especial, agradeço à Sueli Liberatti Javaroni, por sua leitura assídua, cuidadosa e crítica, pelas longas conversas e apoio nos momentos de angústia.

A todos os alunos voluntários ingressantes em 2007, Andrews, Daiane, Adriano, Vívica, Lucas, Pedro, Victor, Francielle, Willian e Débora, que fizeram parte da coleta de dados, sem os quais essa tese não teria tanto brilho. E um agradecimento especial à Paula Taliari por me ajudar com o estudo piloto.

Aos amigos da PGEM, pelos momentos de reflexão e discussão acerca da Educação Matemática durante as disciplinas, seminários e reuniões discentes. Além, claro, das festas, churrascos e viagens a congressos.

Aos professores da PGEM, que me proporcionaram reflexões e interlocuções ao longo das disciplinas, e também fora delas. Com um carinho especial, à Maria Aparecida Vigianni Bicudo, pelo exemplo de vida e caráter.

Aos funcionários da Seção de Pós-Graduação do IGCE, pela atenção que me dedicaram. Em especial, à querida Inajara, por sua competência e pelo atendimento sempre atencioso. Aos funcionários da Biblioteca da UNESP - Rio Claro, pela disponibilidade e eficiência.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro, e à Universidade Estadual de Londrina, em especial ao Departamento de Matemática, que permitiu minha liberação para que eu pudesse me dedicar integralmente aos meus estudos. Enfim, a todos que, de uma maneira ou de outra, contribuíram direta ou indiretamente para a realização desta tese. Muito obrigada!

RESUMO

Baseando-me na noção de coletivo pensante seres-humanos-com-mídias, o objetivo desta pesquisa foi responder à pergunta diretriz *Como o coletivo, formado por alunos-com-tecnologias, produz o conhecimento acerca de função composta e regra da cadeia, a partir de uma abordagem gráfica?* O processo de visualização implícito nessa pergunta é potencializado pelas Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), que transformam o modo como o conhecimento é produzido, reorganizando a forma de interagir e pensar. Os dados foram coletados com alguns alunos ingressantes no Curso de Matemática da UNESP - Rio Claro durante os “Experimentos de Ensino”. Foram elaborados cinco episódios que apresentaram subsídios para responder à pergunta diretriz desta pesquisa. Tais episódios indicam que a produção do conhecimento dos alunos envolvidos, acerca de função composta e regra da cadeia, ocorreu por meio de elaborações de conjecturas, formuladas durante o processo de visualização potencializado pelas TIC. Tais conjecturas foram confirmadas ou refutadas levando-se em conta o entrelaçamento das representações múltiplas, que permearam todas as atividades, e um coletivo pensante seres-humanos-com-mídias, no qual o ser humano transforma e é transformado pelas mídias em um processo interativo. A partir desses resultados, outras indagações surgiram sobre o papel do professor-pesquisador e sua prática na sala de aula.

Palavras-chave: Educação Matemática, Cálculo Diferencial e Integral, Experimentos de Ensino, Seres-Humanos-Com-Mídias.

ABSTRACT

Based on the notion of thinking collectives of humans-with-media, the objective of this research was to respond to the research question *How does a collective composed of students-with-technologies produce knowledge about the Composition of Functions and the Chain Rule using a graphic approach?* The visualization process implicit in this question is potentiated by Information and Communication Technologies (ICT), which transform the way knowledge is produced, reorganizing interaction and thinking. Data was collected with some university students enrolled within the undergraduate Mathematics Program at UNESP – Rio Claro during “Teaching Experiments”. Five episodes were selected that were particularly informative with respect to the research question. The episodes indicate that students’ knowledge production regarding composition of functions and the chain rule occurred through the elaborations of conjectures formulated during the process of visualization potentiated by the ICT. These conjectures were confirmed or rejected based on the interweaving of multiple representations that permeated all the activities, and a humans-with-media thinking collective, in which the human transforms and is transformed by the media in an interactive process. Based on these findings, new questions emerged regarding the role of the researcher-professor and teaching practice in the classroom.

Key-words: Mathematics Education, Differential and Integral Calculus, Teaching Experiment, Humans-with-media, Composition of Functions, Chain Rule.

SUMÁRIO

	Página
CAPÍTULO 1 - GÊNESE DA PESQUISA	011
1.1 Introdução	011
1.2 A trajetória da pesquisa	013
1.3 Estrutura da tese.....	016
CAPÍTULO 2 - FUNÇÃO COMPOSTA E REGRA DA CADEIA	017
2.1 Função composta	017
2.2 Derivada.....	028
2.3 Regra da cadeia.....	037
CAPÍTULO 3 - TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO (TIC) E O CÁLCULO: UM MOSAICO DE PESQUISAS.....	053
3.1 Inserção das TIC no ensino superior	053
3.2 Inserção das TIC na produção do conhecimento matemático	056
3.3 Visualização.....	059
3.4 Representações múltiplas.....	063
3.5 Contextualizando o presente estudo	065
CAPÍTULO 4 - PRODUÇÃO DO CONHECIMENTO E O CONSTRUCTO SERES- HUMANOS-COM-MÍDIAS	068
4.1 Introdução	068
4.2 A produção do conhecimento	069
4.3 O conhecimento matemático visto como processo.....	070
4.4 Seres-humanos-com-mídias.....	073
4.5 Uma síntese da produção do conhecimento no contexto desta pesquisa.....	080
CAPÍTULO 5 - METODOLOGIA DE PESQUISA E PROCEDIMENTOS	082
5.1 Inserindo-me na metodologia de pesquisa qualitativa	082
5.2 Experimento de ensino	086

5.3	Caminhos trilhados na pesquisa.....	088
5.3.1	Origem.....	088
5.3.2	Elaboração das atividades	090
5.3.3	O mini-curso.....	092
5.3.4	A coleta dos dados	094
5.3.5	A análise dos dados	095
CAPÍTULO 6 - APRESENTAÇÃO E ANÁLISE INICIAL DOS DADOS		097
6.1	Os participantes	097
6.2	Atividade 1.....	099
6.2.1	Episódio 1: propriedades da composição de funções.....	101
6.3	Atividades 2 e 3	116
6.3.1	Episódio 2: obtenção do gráfico de uma função composta.....	120
6.4	Atividade 5.....	123
6.4.1	Episódio 3: enunciação da regra da cadeia	126
6.5	Atividade 7.....	132
6.5.1	Episódio 4: regra da cadeia com funções não polinomiais	134
6.6	Atividade 8.....	142
6.6.1	Episódio 5: a regra da cadeia em um ponto	144
CAPÍTULO 7 - A PRODUÇÃO DO CONHECIMENTO ACERCA DE FUNÇÃO COMPOSTA E REGRA DA CADEIA: APRODUNDANDO A ANÁLISE.....		157
7.1	Introdução	157
7.2	Aprofundando a análise inicial	159
7.2.1	A visualização proporcionada pelas TIC	160
7.2.2	O entrelaçamento das representações múltiplas.....	164
7.2.3	A produção do conhecimento matemático como um processo coletivo	170
7.3	Concluindo.....	173
CAPÍTULO 8 - CONSIDERAÇÕES FINAIS		175
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		180
APÊNDICE		189

ANEXO A - QUESTIONÁRIO	190
ANEXO B - ATIVIDADES	191
B.1 Atividade 1.....	192
B.2 Atividade 2.....	193
B.3 Atividade 3.....	194
B.4 Atividade 4.....	195
B.5 Atividade 5.....	196
B.6 Atividade 6.....	197
B.7 Atividade 7.....	198
B.8 Atividade 8.....	199

CAPÍTULO 1

GÊNESE DA PESQUISA

Neste capítulo, apresento os objetivos e a relevância desta pesquisa, baseando-me em alguns autores que salientam as dificuldades que os alunos sentem ao trabalhar com função composta e regra da cadeia. Ainda, exponho a trajetória que condicionou a construção da pergunta diretriz e finalizo com a apresentação da estrutura da tese.

1.1 Introdução

O projeto de pesquisa que deu origem a esta tese se deve a um caminhar pela Educação Matemática, à minha experiência como professora¹ da disciplina Cálculo Diferencial e Integral de uma variável (CDI) e à revisão bibliográfica. Nessa revisão, busquei outras formas de abordar Função Composta e Regra da Cadeia que não fosse aquela estritamente algébrica.

Assim, esta tese tem por objetivo investigar como o coletivo, formado por alunos e tecnologias, produz o conhecimento acerca de Função Composta e Regra da Cadeia, a partir de uma abordagem gráfica. Incorporar a visualização à produção do conhecimento matemático é uma forma de relacionar as representações gráficas e algébricas.

A regra da cadeia é um tema em que os estudantes apresentam grande dificuldade no contexto da disciplina CDI tratando-a, não raro, como apenas uma manipulação de símbolos.

¹ Docente do Departamento de Matemática, do Centro de Ciências Exatas (CCE), da Universidade Estadual de Londrina (UEL), desde 1996.

Alguns autores (CABRAL, 1992; COTTRILL, 1999; CURY, 2003, 2004; REZENDE, 2003) argumentam que os erros cometidos pelos estudantes no aprendizado da regra da cadeia parecem estar associados com a composição de funções que, na maioria das vezes, representa apenas uma operação que o estudante memoriza.

Segundo Rezende (2003), a não compreensão da regra da cadeia (derivada de uma função composta) torna-se uma das principais barreiras com que os alunos se deparam quando a utilizam em outros tópicos da disciplina CDI. Os erros cometidos parecem ter sempre a mesma característica: o aluno “se esquece” de fazer a composição da função “mais externa” com a função “mais interna”. Por exemplo, “Ao derivar e^{x^2} o aluno não ‘enxerga’ a composição de funções e responde que $\frac{de^{x^2}}{dx} = e^{x^2}$ ” (CABRAL, 1992, p.180).

A dificuldade em identificar e operar com a função composta parece ser um dos maiores complicadores. “É muito comum observarmos nas ‘provas’ de Cálculo de nossos alunos erros como: $\frac{d \sin^2 x}{dx} = 2x \cdot \cos x$ ou $\frac{d \cos \sqrt{x}}{dx} = -\sin x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ” (REZENDE, 2003, p.353). Esse parece ser um dos problemas com os quais muitos professores se defrontam, e vários outros exemplos como esses poderiam ser aqui apresentados. Parece que a função composta é realmente esquecida, ou é apenas estudada quando é tratada como mais uma operação com funções.

A aplicação da regra da cadeia pode ser encontrada em vários tópicos matemáticos, dentre eles, o cálculo de integrais pelo método da substituição. Uma vez que o aluno não consiga identificar e operar com a função composta e sua derivada, o cálculo de algumas integrais poderá ficar comprometido. Como professora da disciplina CDI, também pude perceber as dificuldades que os alunos apresentam em relação à regra da cadeia devido, algumas vezes, à não identificação de uma função composta ou, especificamente, à dificuldade de decompor uma função em outras, nesta tese denominadas de funções componentes.

Com o intuito de utilizar softwares matemáticos no ensino e na aprendizagem da disciplina CDI, buscando integrar a visualização à produção do conhecimento acerca de função composta e regra da cadeia, com uma abordagem gráfica, relacionando as representações gráficas, numéricas e algébricas, iniciei esta pesquisa que passo agora a descrever.

1.2 A Trajetória da Pesquisa

A idéia inicial desta pesquisa era desenvolver um estudo que englobasse toda a disciplina CDI, isto é, eu tinha como ambição “salvar” o ensino e a aprendizagem do Cálculo, utilizando para isso o *software* de geometria dinâmica *Cabri-Géomètre*. Porém, como a disciplina CDI é um campo muito amplo, foi necessária a realização de uma revisão bibliográfica de trabalhos desenvolvidos no contexto da Educação Matemática, que abordavam o estudo de questões que vinculavam aspectos da disciplina CDI com a utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC). A escolha de um tema mais específico foi condicionada por uma interação entre as minhas angústias, baseada em minha experiência como professora da disciplina CDI, e uma troca de informações com meu orientador e o GPIMEM (Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática). Assim, surgiu a idéia de trabalhar com a regra da cadeia. Mas o quê? Como trabalhar tal tema?

O primeiro passo foi procurar em sites de busca, periódicos, anais de congressos e outras teses encontradas em bibliotecas, discussões acerca da temática, com o objetivo de encontrar algum indício de uma abordagem distinta da unicamente algébrica para a regra da cadeia, no contexto da Educação Matemática. Algumas das páginas que achei na Internet tratavam esse assunto de maneira semelhante a dos livros de Cálculo, os chamados livros eletrônicos (*e-books*). São raros os que tratam a regra da cadeia de uma forma diferenciada, ou discutindo este tema na área da Educação Matemática.

Um dos primeiros trabalhos encontrado foi a tese de Cottrill (1999), que discute a compreensão de estudantes sobre o conceito de regra da cadeia no primeiro ano da disciplina CDI e a relação dessa compreensão com a composição de funções. Essa tese é uma continuação do trabalho de Clark et al (1997), que começou como uma tentativa de explorar o entendimento dos estudantes da disciplina CDI em relação à regra da cadeia e suas aplicações. Esse trabalho se baseou na descrição inicial de como o conceito de regra da cadeia pode ser aprendido e uma tentativa foi feita para interpretar os dados usando o fundamento teórico Ação-Processo-Objeto. No entanto, tal fundamento apenas conduziu a uma extensão do fundamento epistemológico Ação-Processo-Objeto-Esquema (APOS) que inclui uma teoria de desenvolvimento de esquemas baseada em idéias de Piaget e Garcia. A Tríade Piagetiana foi sugerida como um mecanismo para descrever o desenvolvimento de esquemas em geral, e a regra da cadeia foi usada apenas como um exemplo.

Cottrill (1999), tentando alcançar uma compreensão de como os estudantes constroem seus conceitos, considera o desenvolvimento histórico da regra da cadeia e a sua demonstração. Segundo o autor, a regra da cadeia surgiu naturalmente no desenvolvimento do Cálculo por Newton e Leibniz quando trabalharam com infinitesimais. Para Newton a regra da cadeia não era um teorema ou um procedimento, mas um algoritmo natural empregado em vários de seus exemplos. De maneira semelhante, a notação de Leibniz levou-o a considerar a regra da cadeia (que nesta época ainda não tinha este nome) como uma simplificação do produto de frações. Foi com Euler e Cauchy que a regra da cadeia (como a conhecemos hoje) tornou-se um teorema a ser provado. Infelizmente, o método da prova para a regra da cadeia é geralmente interpretado como um truque algébrico. Cottrill (1999) salienta, ainda, a falta de um procedimento para produzir o gráfico de uma função composta, dados os gráficos de suas funções componentes. A revisão de literatura sobre as idéias que envolvem a notação de Leibniz e Newton e um procedimento para obtenção do gráfico da função composta, a partir dos gráficos de suas funções componentes, serão apresentados no Capítulo 2.

Apesar de ser um assunto em que os estudantes apresentam grande dificuldade, no contexto da disciplina CDI, um aspecto que chamou a atenção, na revisão bibliográfica, foi o fato de existirem poucos trabalhos que abordam esse tema.

Dessa forma, aliando minha experiência como professora da disciplina CDI, às dificuldades que os alunos apresentam com a regra da cadeia, devido à não identificação de uma função composta e suas funções componentes, e à falta de um procedimento, apontado por Cottrill (1999), para a produção da função composta a partir de uma abordagem gráfica, percebi uma lacuna a ser preenchida e esta se tornou o tema desta tese. Assim, além da regra da cadeia, recomecei a busca também pelo tema função composta, procurando subsídios para uma discussão acerca de sua produção.

Os livros, sites de Cálculo e a maioria dos trabalhos encontrados, que versam sobre função composta, tratam esse tema sob o ponto de vista algébrico. Uma exceção é o *site Visual Calculus / Composition of Function*², que apresenta uma *applet* que gera o gráfico da função composta $f(t)=h(g(t))$ a partir dos gráficos das suas funções componentes g e h , utilizando a inserção do gráfico da função identidade. A idéia é obter o gráfico da função composta $f(t)=h(g(t))$, a partir dos gráficos das funções componentes h e g e do gráfico da função identidade, sem que suas expressões algébricas sejam apresentadas. Esse procedimento será explicitado no Capítulo 2.

² <http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/0/compositions.6/index.html> (HUSCH, 1995-2001).

Foi a partir da exploração dessa *applet* que comecei a refletir sobre a elaboração das atividades acerca de função composta e começaram a se configurar os caminhos que a pesquisa percorreria dali para frente. As informações obtidas, a partir dessa *applet*, iam ao encontro das expectativas de uma abordagem gráfica para a função composta e, conseqüentemente, influenciou e definiu o ponto de partida para a elaboração das atividades sobre a regra da cadeia.

Paralelamente à exploração do procedimento da *applet*, observei que diferentes autores, sejam de livros didáticos de Matemática, do Ensino Médio, ou de livros de Cálculo, trabalham a função composta sob um ponto de vista unicamente algébrico, ou exploram um esquema como o diagrama de Venn. Nenhum autor, dentre os que pesquisei, desenvolve uma abordagem gráfica para a função composta. Apenas no *site* citado anteriormente, que envolve uma *applet*, pude observar uma abordagem que fosse possível obter o gráfico de uma função composta a partir dos gráficos de suas funções componentes. Com isso, foi possível elaborar algumas atividades de maneira dinâmica, utilizando a tecnologia computacional, a qual considero fundamental no processo da produção do conhecimento matemático. Concordo com Borba e Villarreal (2005) que consideram que as mídias informáticas não são apenas assistentes dos humanos ao se produzir o conhecimento matemático, mas sim modificam a natureza, tanto do ser humano como do conhecimento produzido. Esses autores defendem a idéia de que o conhecimento é produzido pelo coletivo pensante seres-humanos-com-mídias que vem ao encontro desta tese.

Penso que a abordagem gráfica é uma alternativa àquela unicamente algébrica apresentada nos diversos livros de Cálculo. Dessa forma, entendo que a visualização, realçada pelas TIC, constitui um elemento fundamental para a produção do conhecimento matemático, não apenas associada às representações numéricas e algébricas, mas também às gráficas.

Desse modo, diante do que foi exposto acima, a pergunta que norteia esta pesquisa e que foi sendo construída ao longo desse processo é:

Como o coletivo, formado por alunos-com-mídias, produz o conhecimento acerca de Função Composta e Regra da Cadeia, a partir de uma abordagem gráfica?

Essa pergunta considera que o conhecimento matemático é produzido a partir de um coletivo, formado por alunos e mídias, e destaca a visualização para abordar a função composta e a regra da cadeia.

1.3 Estrutura da Tese

Esta tese está organizada em oito capítulos, além das referências bibliográficas e dos apêndices.

No capítulo 1, aqui apresentado, fiz referência aos objetivos, à relevância da pesquisa e à sua trajetória, finalizando com a pergunta diretriz.

No capítulo 2, estabeleço uma interlocução com a literatura acerca de função composta e regra da cadeia, enfatizando uma abordagem gráfica no desenvolvimento de composição de funções e uma interpretação gráfica para o estudo da demonstração de regra da cadeia.

No capítulo 3, apresento um “mosaico” de pesquisas que abordam as TIC inseridas no Ensino Superior, especificamente no estudo de Cálculo, e de que maneira o contexto desta pesquisa se insere nesse “mosaico”. Enfatizo, ainda, características da visualização, com algumas de suas concepções, e das representações múltiplas no estudo de funções, potencializadas pelas TIC.

No capítulo 4, apresento algumas idéias acerca da produção do conhecimento, especificamente sobre a produção do conhecimento matemático visto como processo e a interlocução com o constructo teórico seres-humanos-com-mídias.

No capítulo 5, apresento o contexto da pesquisa em que este estudo está inserido, descrevendo a metodologia qualitativa, os procedimentos metodológicos adotados para a coleta dos dados e sua análise e os caminhos trilhados para a elaboração das atividades, enfatizando o papel dos colaboradores nas atividades pilotos.

No capítulo 6, apresento o perfil das duplas participantes, bem como a descrição e análise inicial dos dados. Foram elaborados cinco episódios que buscaram responder os questionamentos desta pesquisa.

No capítulo 7, retomo a pergunta diretriz desta pesquisa com o objetivo de aprofundar a análise e dialogar com a literatura segundo os referenciais adotados.

No capítulo 8, apresento as considerações finais enfatizando o papel do professor-pesquisador e as atividades propostas como sugestão de um repertório que poderá ser compartilhado com outros professores-pesquisadores para que possam aplicar em suas práticas na sala de aula.

CAPÍTULO 2

FUNÇÃO COMPOSTA E REGRA DA CADEIA

Neste capítulo, estabeleço uma interlocução entre algumas pesquisas na área de Educação Matemática, no Ensino Superior, que abordam os temas Função Composta e/ou Composição de Funções, e a Regra da Cadeia. Além disso, exponho como esses conteúdos são apresentados nos livros textos de Cálculo que usualmente são utilizados por professores que lecionam a disciplina CDI, além de outros que, apesar de não serem tão comuns em sala de aula, foram encontrados em Bibliotecas, páginas da web ou e-books (livro eletrônico). Nessa interlocução, enfatizo uma abordagem gráfica para a Composição de Funções, além de uma interpretação gráfica para a demonstração da Regra da Cadeia.

2.1 Função Composta

Assim como operamos com números (adição, subtração, multiplicação e divisão), podemos também operar com funções, isto é, duas funções, h e g , podem ser adicionadas, subtraídas, multiplicadas e divididas de forma a se obter novas funções, $h + g$, $h - g$, $h.g$ e $\frac{h}{g}$ para $g \neq 0$. Para essas funções resultantes (soma, diferença, produto e quociente), o domínio é a intersecção dos domínios das funções h e g , com uma restrição a mais, $g \neq 0$, no caso da função quociente. Outra operação com funções, distinta das quatro anteriores, é a composição de funções. Esse é um assunto tratado, inicialmente, no primeiro ano do Ensino

Médio e, posteriormente, no Ensino Superior, de forma algébrica e, normalmente, ilustrada de modo intuitivo em um diagrama de conjuntos, conforme Figura 2.1.

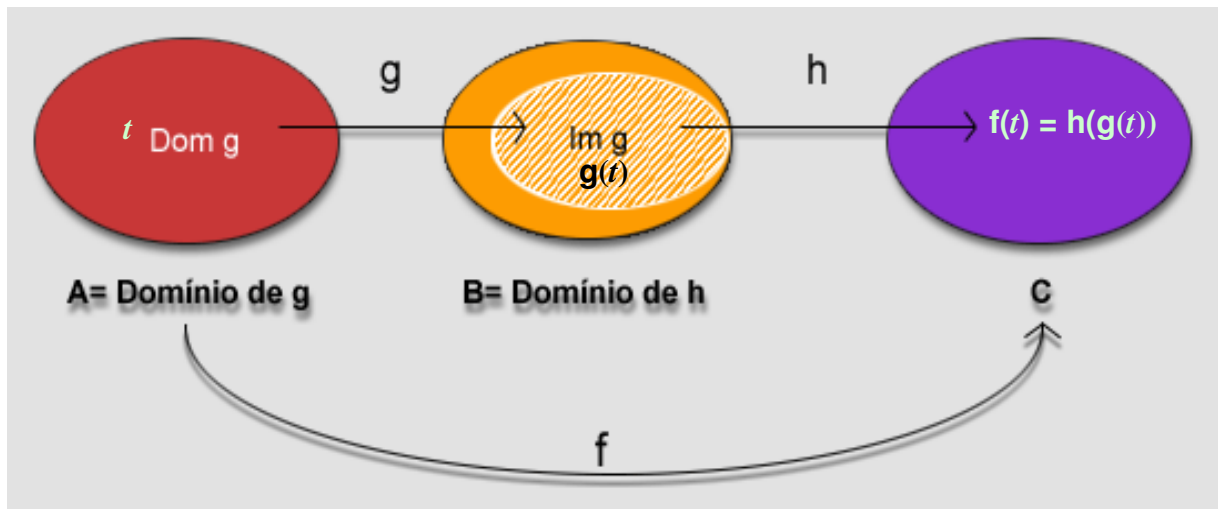


Figura 2.1 - Diagrama para a composição de funções.¹

Segundo esse diagrama, uma função g é aplicada em um elemento t tomado do conjunto A, que é o domínio da função g , resultando na imagem $g(t)$, que pertence a um subconjunto, Im_g , contido no conjunto B. Uma função h , cujo domínio, D_h , é o conjunto B, é aplicada nesse elemento $g(t)$, resultando na imagem $h(g(t))$ que pertence a um conjunto C. Essas operações podem ser feitas de uma forma direta pela função f , isto é, aplicando a função f em um elemento t tomado do conjunto A, obtém-se a imagem $f(t)$.

Podemos observar, por esse diagrama, que essa operação de composição resulta em uma nova função, $f: A \rightarrow C$, chamada função composta, que pode ser denotada por $f(t) = h(g(t))$, com $t \in A$, cujo domínio é igual ao domínio da função g , $D_f = D_g$, desde que $Im_g \subset D_h$. É importante notar que a composição da função h com a função g só será possível se a restrição $Im_g \subset D_h$ for válida.

A definição formal de função composta, encontrada em um livro didático do Ensino Médio (PAIVA, 1995) e em livros de Cálculo (ANTON et al, 2007a; FLEMMING; GONÇALVES, 1992; GUIDORIZZI, 2001; LEITHOLD, 1994; STEWART, 2006; SWOKOWSKI, 1994), pode ser sintetizada da seguinte maneira:

Sejam A, B e C conjuntos e sejam as funções $g: A \rightarrow B$ e $h: B \rightarrow C$. A função $f: A \rightarrow C$ tal que $f(t) = h(g(t))$, com $t \in A$, é chamada de função composta da função h

¹ Figura extraída do site <http://ecalculo.if.usp.br/> (BARUFI, 2001-2008).

com a função g . O domínio da função f é o conjunto de todos os números t , no domínio da função g , tal que $g(t)$ esteja no domínio da função h , ou seja, $Im_g \subset D_h$. É também usual a notação $h \circ g$, isto é, $f(t) = (h \circ g)(t)$, para indicar a composição da função h com a função g .

Outros livros de Cálculo (FINNEY et al, 2002; HOFFMANN; BRADLEY, 2002; HUGHES-HALLETT et al, 2004; SANTOS; BIANCHINI, 2002) não apresentam uma definição formal, como a sintetizada acima, mas tratam operações com funções, incluindo composição, como novas funções, calculadas a partir de antigas, criando famílias de funções pelo deslocamento horizontal (para a direita ou esquerda) ou vertical (para cima ou para baixo) e pelo alongamento (ou pelo achatamento) de gráficos. No caso particular de composição de funções, o tratamento é feito utilizando exemplos empíricos ou com uma metáfora de “linha de montagem” (parecido com o diagrama dado anteriormente), conforme Figura 2.2.

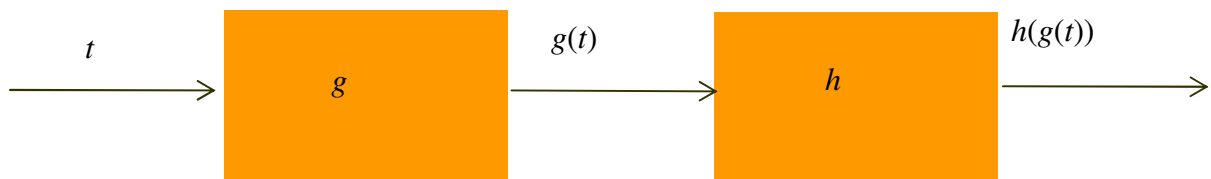


Figura 2.2 - Composição de funções mostrada como uma “linha de montagem”.

A restrição $Im_g \subset D_h$, na definição de função composta, apesar de ser enfatizada nos livros de Cálculo é, por vezes, ignorada. Lucus (2006) investigou o conhecimento de professores iniciantes (pré-serviço) e experientes (em serviço) relacionado ao tópico de composição de funções. O autor entende que o tópico matemático composição de funções pode ser interpretado de duas maneiras: como uma operação matemática (Composição de Funções) e como conceito matemático (Função Composta). Pode-se notar que para o autor existe uma diferença no processo de compor funções e na identificação de uma função composta como resultado. Em seu trabalho, o autor apresenta um recorte de uma entrevista, que foi feita com dois professores: um que estava no último ano da Universidade e outro que já lecionava há dez anos no Ensino Médio, procurando buscar diferenças nos modos de pensar desses professores.

Aos participantes foi pedido que descrevessem os pré-requisitos que os estudantes deveriam saber, antes que lhes fosse ensinado composição de funções, e perguntado sobre a principal idéia que deve ser enfatizada no ensino desse tópico. Depois dessa entrevista, foi

proposta a eles uma atividade na qual deveriam compor duas funções e explicar seus resultados.

Quanto aos pré-requisitos para a composição de funções, eles responderam, de modo semelhante, que os estudantes deveriam ser capazes de manipular, com fluência, expressões algébricas (substituir valores), conhecer a definição de uma função, incluindo a noção de domínio e imagem, e as representações algébricas desse conceito e, finalmente, deveriam ser capazes de usar o gráfico no plano cartesiano. No entanto, nesses pré-requisitos, foram omitidas as representações múltiplas do conceito de função que, no entender de Lucas (2006), parecem ser essenciais, em geral, no ensino de função e, em particular, no ensino de composição de funções.

Quanto à questão sobre a principal idéia que deve ser enfatizada quando se ensina composição de funções, os professores, de modo semelhante, enfatizaram o processo mecânico de calcular a composição de funções, substituindo uma função “dentro de outra”, e a não comutatividade das funções envolvidas, isto é, nem sempre vale a propriedade comutativa para a composição de funções. Porém, quanto a essa pergunta, os professores não mencionaram a definição de função composta, nem mesmo os papéis do domínio e da imagem.

Como os professores mencionaram a noção de domínio e imagem como um pré-requisito para a definição de função, mas nada disseram acerca disso, quando perguntados sobre composição de funções, foi proposta a eles uma atividade para compor duas funções $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2, 2]$, $y \in [0, 2]$ e $h(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, $x \notin (-3, 3)$, $y \in [0, +\infty)$ (LUCAS, 2006, p.4). Podemos notar que não é possível compor as funções h e g , $(h \circ g)(x)$, já que não existe uma intersecção entre a imagem da função g , Im_g , e o domínio da função h , D_h . Apesar disso, tal restrição foi ignorada pelos participantes da pesquisa e, depois que fizeram as devidas substituições para conseguir a função composta $(h \circ g)(x)$, obtiveram como resultado a expressão $(h \circ g)(x) = \sqrt{-x^2 - 5}$. Em seguida, observaram que tal resposta não fazia sentido, já que essa função não está definida para nenhum valor de x , tal que $x \in \mathbb{R}$ (conjunto dos números reais). Além disso, os professores falharam ao tentar dar qualquer explicação para esse resultado. A explicação esperada seria uma consequência direta do papel do domínio e da imagem na composição de funções. Nesse caso, em particular, a explicação seria decorrente da não intersecção da imagem da função g , Im_g , e o domínio da função h , D_h , que não foi notada pelos participantes. O autor conclui, então, que as características

essenciais, ou idéias principais, apresentadas pelos professores denotam uma abordagem mecânica no tratamento de composição de funções. A referência à definição de função, domínio e imagem como um pré-requisito, parece ser um “reflexo mecânico” em oposição ao conhecimento conceitual dos tópicos matemáticos. Apesar de, nos livros de Cálculo, ser enfatizado que a composição da função h com a função g só é possível se a restrição $Im_g \subset D_h$ for válida, parece que essa restrição não é levada em conta diante de uma atividade que se pede para calcular a composição de duas funções.

Ainda, segundo Ayers et al (1988), a maioria dos estudantes, mesmo no Ensino Superior, tem uma compreensão limitada de função com a idéia de uma expressão algébrica, apesar de muitas funções na Matemática, na Física e na Informática serem apresentadas por descrições que não envolvem fórmulas. Dessa forma, o estudante teria que **generalizar** sua noção de função para incluir esses novos objetos. A característica fundamental de função, nesse nível mais geral, envolve algum tipo de **processo** que transforma elementos de um conjunto (domínio) em elementos de algum outro conjunto (imagem). Para esses autores,

entender o conceito de função inclui a habilidade de **interiorizar** este processo, isto é, formar uma representação mental da (possivelmente mental) ação da função. Para executar operações com funções, o estudante tem que considerar funções como objetos mentais. Assim, o processo que foi representado mentalmente para uma função particular deve ser entendido, conscientemente, ou deve ser **encapsulado** em uma única e total entidade. Como resultado, o estudante torna-se capaz de pensar em uma função de ambos os modos, dinamicamente como um processo e estaticamente como um objeto mental (AYERS et al, 1988, p.247, grifo nosso, tradução nossa).

No caso de função composta, $f(t) = (h \circ g)(t)$, duas funções, h e g , são entendidas como objetos mentais individuais que envolvem certos processos específicos. Para formar a composição $(h \circ g)(t)$ dessas duas funções, os processos devem ser produzidos um de cada vez. Os resultados dessas operações separadas serão **coordenados** (se possível) para formar um novo processo mental que consiste em, primeiro, executar o processo da função g , gerando um resultado $g(t)$ e, em seguida, executar o processo da função h sobre esse resultado, gerando outro resultado $h(g(t))$. O novo processo é interiorizado e a representação mental resultante é encapsulada como a nova função $(h \circ g)(t)$. Esses autores baseiam-se na Teoria de Piaget sobre abstração reflexiva (generalização, interiorização, encapsulação e coordenação), como exemplificada no caso de função e composição e

comparam o desempenho de um grupo de estudantes que utilizou lápis e papel com o de outro grupo que usou computadores, enfatizando a manipulação algébrica.

O *site* E-Cálculo², embora apresente algumas representações gráficas para as outras operações com funções, não menciona qualquer representação gráfica para a composição de funções. Nesse *site*, pode ser encontrado uma discussão acerca de questões que se referem à obtenção da função composta, à identificação das funções componentes, à não comutatividade e à relação de domínio e imagem, por meio de exemplos, segundo uma abordagem algébrica, de forma bem parecida com a dos livros de Cálculo usuais.

O *site* *Visual Calculus / Composition of Function*, mencionado no Capítulo 1, apresenta um procedimento, uma *applet*, que enfatiza uma abordagem gráfica na composição de funções para a obtenção do gráfico da função composta, buscando uma alternativa à abordagem estritamente algébrica, encontrada normalmente nos sites e livros de Cálculo habituais. A concepção desse procedimento é gerar o gráfico da função composta $f(t) = h(g(t))$ a partir dos gráficos das funções componentes g e h , isto é, dados os gráficos das funções g e h , a *applet* gera o gráfico da função composta f .

Esse procedimento considera os gráficos das funções g e h e da função identidade em um mesmo plano cartesiano, conforme Figura 2.3.

² <http://ecalculo.if.usp.br/> (BARUFI, 2001-2008).

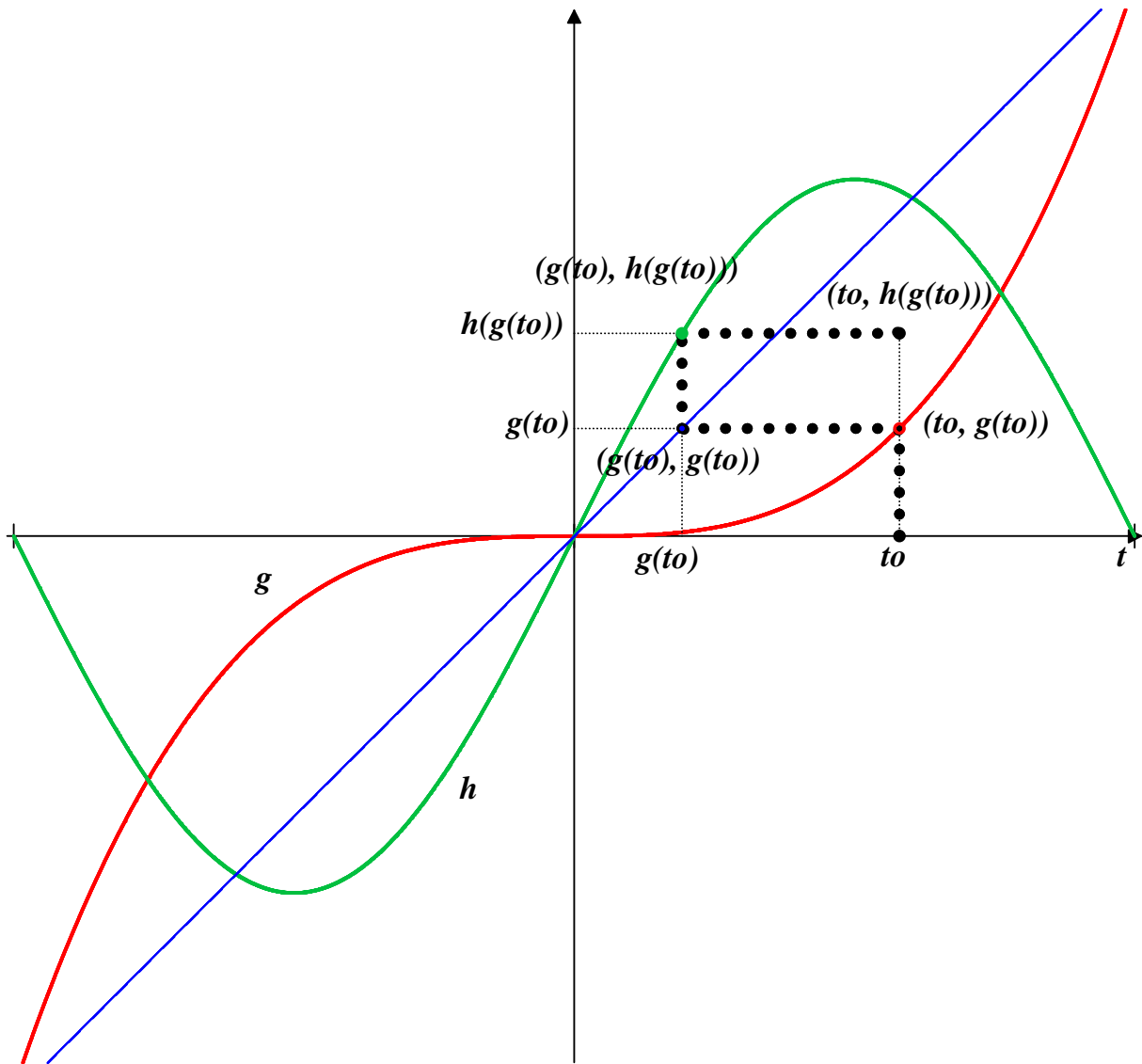


Figura 2.3 - Procedimento para obtenção do gráfico da função composta $f(t) = h(g(t))$, a partir dos gráficos de suas funções componentes g e h .

A partir de um ponto t_0 , escolhido no domínio da função g e representado no eixo das abscissas, é traçado um segmento de reta até o ponto $(t_0, g(t_0))$, pertencente ao gráfico da função g . A partir desse ponto, traça-se um segmento de reta horizontal $y = g(t_0)$ até interceptar o gráfico da função identidade, no ponto $(g(t_0), g(t_0))$. A imagem de $g(t_0)$, pela função h , é $h(g(t_0))$. Com isso, determina-se o ponto $(g(t_0), h(g(t_0)))$, no gráfico da função h . A partir desse ponto, traça-se um segmento de reta horizontal $y = h(g(t_0))$ até interceptar a reta vertical $t = t_0$, obtendo assim o ponto $(t_0, h(g(t_0)))$, que pertence ao gráfico da função composta $f(t) = h(g(t))$, conforme apresentado na Figura 2.3. Ao deslocarmos o ponto t_0 , no eixo das abscissas, obtemos outros pontos $(t, h(g(t)))$ que irão gerar o gráfico da função

composta $f(t) = (h \circ g)(t) = h(g(t))$. Assim, o gráfico da função composta f é gerado a partir dos gráficos das funções componentes g e h . A sequência de quadros apresentados na Figura 2.4 representa o deslocamento do ponto t_0 , no eixo das abscissas, gerando o gráfico da função composta $f(t) = (h \circ g)(t) = h(g(t))$.

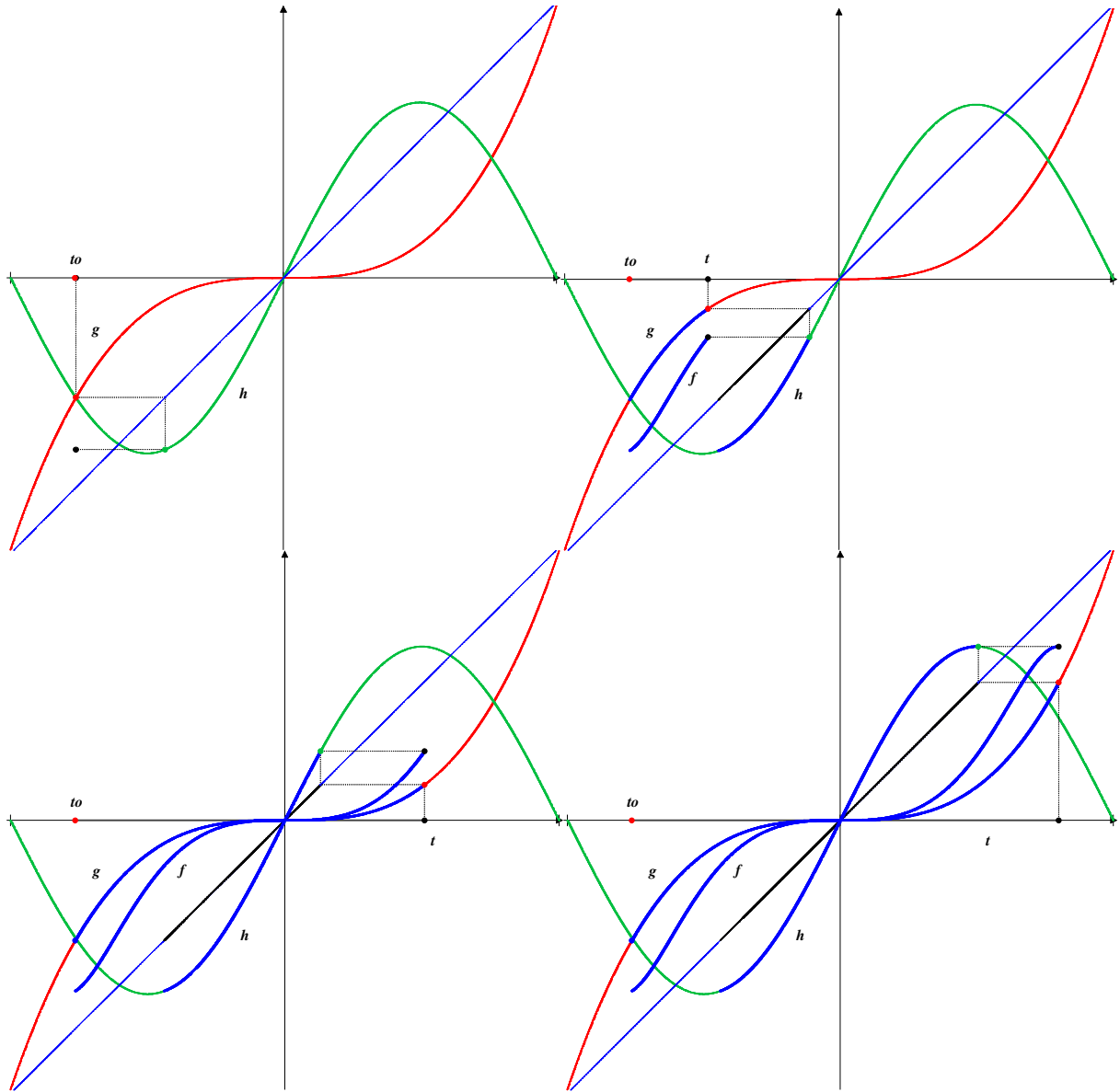


Figura 2.4 - Seqüência de quadros para obtenção do gráfico da função composta f .

Logo, podemos observar que, com esse procedimento obtemos o gráfico de uma função composta $f(t) = h(g(t))$, a partir dos gráficos das suas funções componentes h e g , desde que isso seja possível, isto é, quando $Im_g \subset D_h$, conforme Figura 2.5.

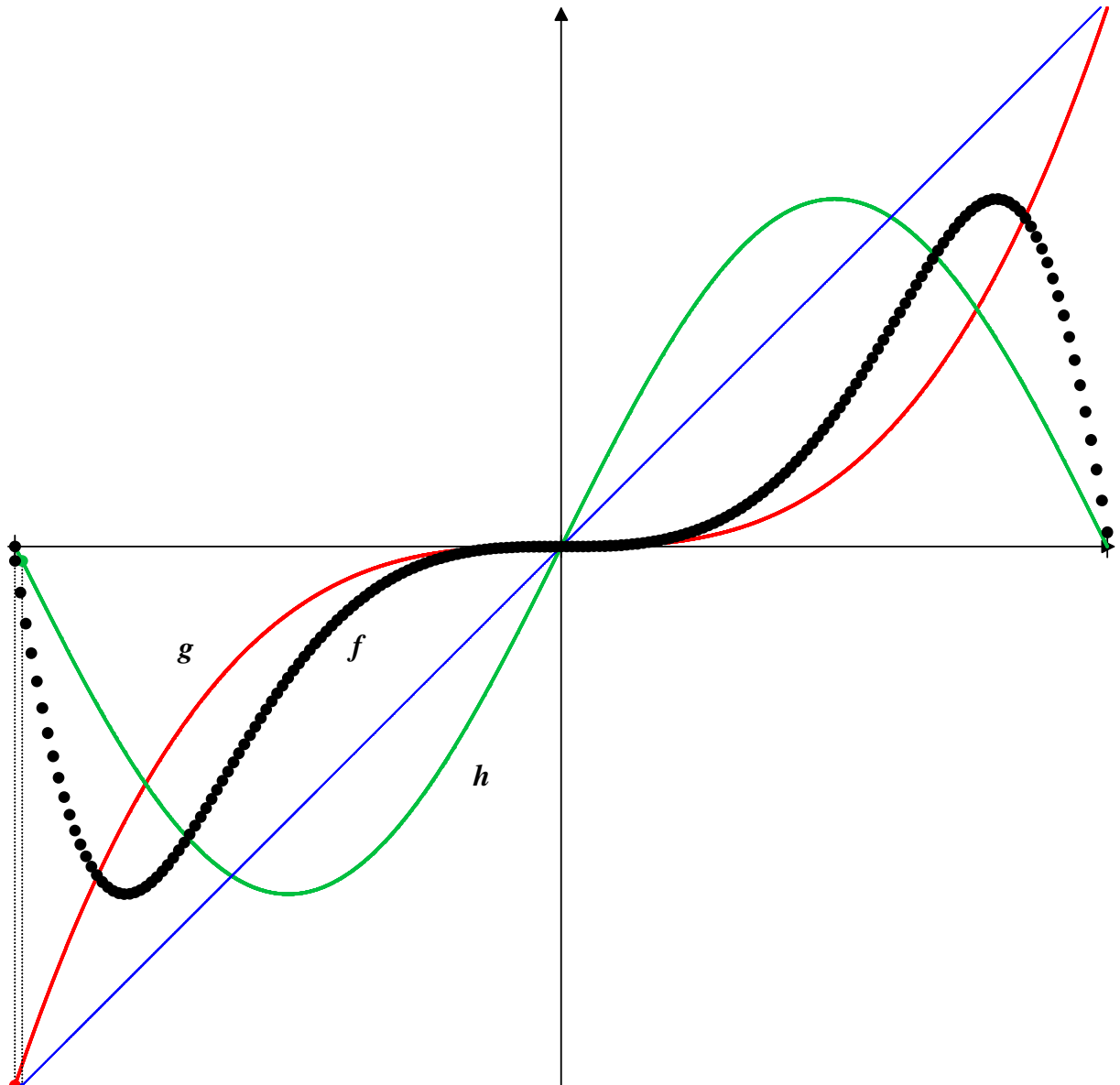


Figura 2.5 - Obtenção do gráfico da função composta $f(t) = h(g(t))$, a partir dos gráficos das funções componentes g e h .

Podemos observar que a função identidade tem o papel de refletir, graficamente, a imagem da função g no domínio da função h . Assim, não será possível obter o gráfico da função composta se a restrição $Im_g \subset D_h$ não ocorrer. Dessa forma, a tentativa da obtenção do gráfico da função composta será infrutífera e poderá levar o estudante a fazer algumas conjecturas, somente a partir das representações gráficas.

Por exemplo, retomando as funções exploradas por Lucas (2006), podemos notar que tanto a função $h(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, quanto a função $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, são funções compostas. Ao aplicarmos o procedimento, mencionado anteriormente, para a obtenção do gráfico da função

composta, notamos que não será possível compor a função h com a função g , como ilustrado na Figura 2.6.

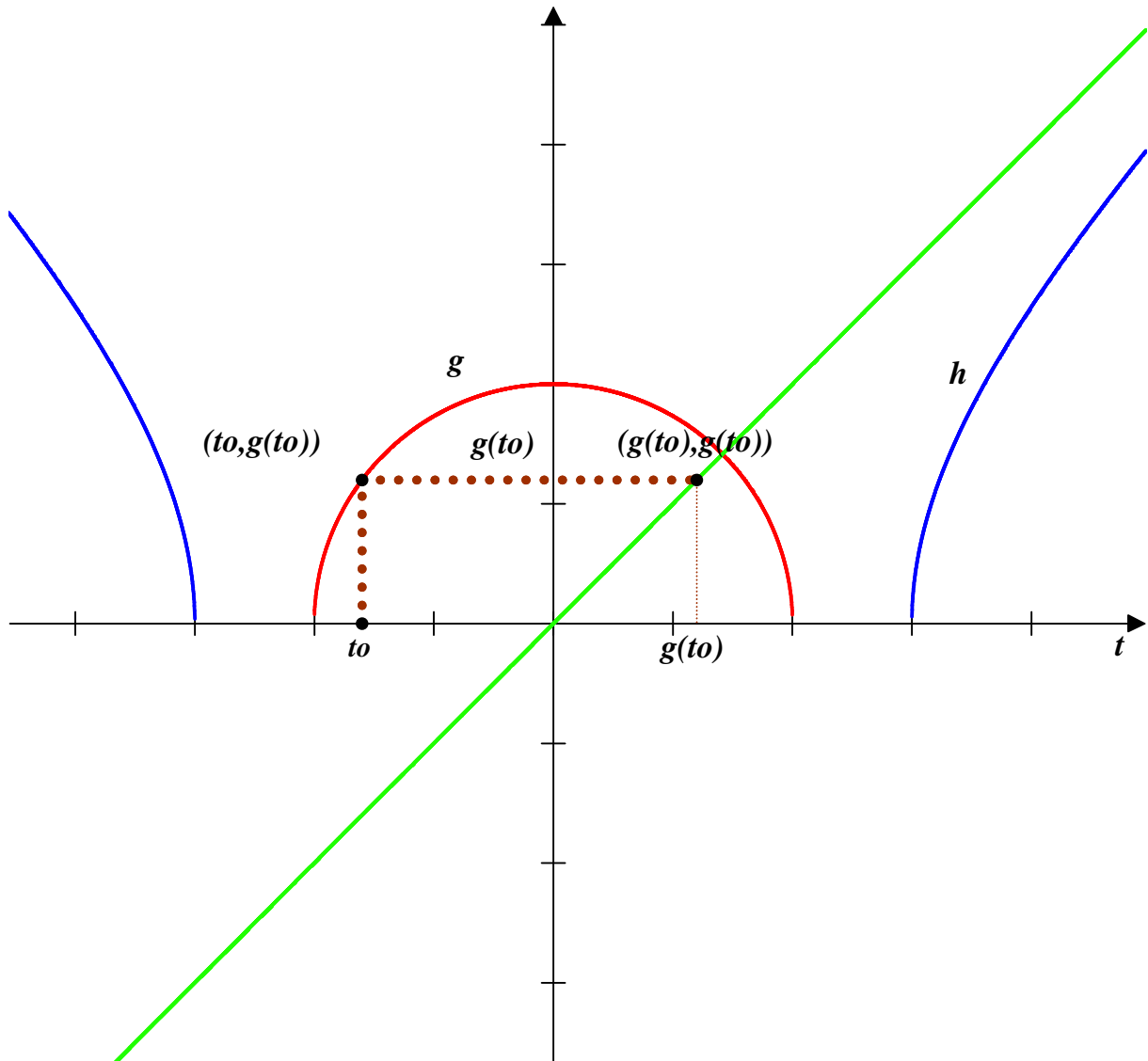


Figura 2.6 - Exemplo dos gráficos das funções h e g proposta por Lucas (2006).

Através dos gráficos, podemos constatar que a imagem $g(t_0)$, de um ponto t_0 do domínio da função g , não está contida no domínio da função h , isto é, $g(t_0) \notin D_h$, e isso pode ser observado pela imagem da função g no gráfico da função identidade, o qual não se pode obter um ponto que possamos aplicar à função h , isto é, não obtemos um ponto no domínio da função h .

Assim, a representação gráfica, nesse caso, enfatiza a necessidade da restrição $Im_g \subset D_h$, mediada pela função identidade e, mesmo antes de se tentar obter o cálculo pela representação algébrica, tal restrição seria notada, podendo ser um recurso para o entendimento da composição de funções a partir de uma abordagem gráfica.

Alguns autores, dentre eles Anton et al (2007a), Hughes-Hallett et al (2004) e Moise (1977), coloquialmente, interpretam função composta como uma “função de uma função” (HUGHES-HALLETT et al, 2004, p.15), ou “função de dentro” (função g) e “função de fora” (função h) (ANTON et al, 2007a, p.51; MOISE, 1977, p.148).

Cabral (1992) mostra que essa interpretação por “esquemas mágicos” para “função de dentro” e “função de fora” é “poderosa” e pode gerar conflitos. A autora cita um exemplo em que o professor pede a uma sala de aula para identificar a função de dentro da função composta e^{x^2} . Um dos alunos responde “ ‘Ah... mas aí não tem nada dentro...’ e outro completa ‘É não tem... está em cima.’ ” (CABRAL, 1992, p.180). A partir desse exemplo, podemos inferir que a linguagem coloquial nem sempre produz um encaminhamento satisfatório para a identificação de uma função composta.

Anton et al (2007a) sugerem que muitos problemas em matemática são abordados pela “decomposição” de funções e que existe mais de uma maneira de expressar uma função como composição. Por meio de um exemplo, esses autores sugerem um procedimento para decomposição de função:

Considere a função f , dada por $f(t) = (t+1)^2$. Para calcular $f(t)$, para um dado valor de t , calcularíamos primeiro $t+1$ e, então, o quadrado do resultado. Essas duas operações são executadas pelas funções $x = g(t) = t+1$ e $h(x) = x^2$. Desta forma, podemos expressar f em termos de h e g escrevendo $f(t) = (t+1)^2 = [g(t)]^2 = h(g(t))$, assim, conseguimos expressar f como a composição $f = h \circ g$ (ANTON et al, 2007a, p.29).

Apesar disso, Cury (2004) argumenta que, embora os alunos entendam o processo algébrico de se determinar a composta de duas ou mais funções, a operação inversa não acontece, isto é, “se indicamos $f(t) = \sqrt{\sin^3(t)}$ e solicitamos as componentes, muitas vezes, os alunos não conseguem sequer entender o pedido” (CURY, 2004, p.134). Não obstante Anton et al (2007a) sugerirem um procedimento para essa decomposição que, no caso do exemplo apresentado por Cury (2004), seria calcular primeiro $\sin^3(t)$ e depois a raiz desse resultado, identificando duas funções componentes $x = g(t) = \sin^3(t)$ e $h(x) = \sqrt{x}$, Cury (2004) entende que os alunos não conseguem identificar tais funções. Cury (2003) argumenta,

ainda, que esse tipo de dificuldade faz com que os alunos cometam erros quando tentam calcular a derivada da função composta, ou seja, utilizam a regra da cadeia.

Tentando amenizar a dificuldade de identificar uma função composta, Paura et al (2007) propuseram um mini-curso com o objetivo de oferecer um enfoque diferenciado à composição e inversão de funções, “desalgebrizando-as”. Os autores elaboraram as atividades levando em conta o procedimento citado anteriormente de forma dinâmica e, com o foco principal na correlação das transformações como translação e contração de gráficos. A partir de uma abordagem gráfica, fizeram a composição do gráfico de uma função qualquer com gráficos de funções lineares e obtiveram novos gráficos de funções, cujos efeitos puderam ser visualmente percebidos. Os autores ressaltaram que tal noção é vital para o desenvolvimento futuro de tópicos da disciplina CDI, um dos quais é a derivação de funções compostas utilizando a regra da cadeia, e que a dificuldade em lidar com função composta pode acarretar em obstáculos de difícil transposição nesse tipo de diferenciação.

Clark et al (1997) também concluíram que a dificuldade em lidar com a regra da cadeia pode ser atribuída às dificuldades dos alunos em lidarem com a composição e decomposição de funções e sugerem que, no ensino do conceito de regra da cadeia, dever-se-ia dar maior ênfase ao reconhecimento de uma função como a composição de outras duas, bem como a relação entre as várias situações de problemas em que a regra da cadeia poderia ser usada. Cottrill (1999) enfatiza que a composição de funções é uma operação fundamental para o entendimento da regra da cadeia e sugere que a dificuldade que os alunos sentem com essa regra se deve à falta de um procedimento para se obter o gráfico de uma função composta a partir dos gráficos das suas funções componentes.

Concluindo essa seção, passo agora, a apresentar e discutir a derivada de uma função e, conseqüentemente, o enunciado e a demonstração do Teorema da Regra da Cadeia, buscando uma interpretação gráfica para a sua demonstração.

2.2 Derivada

A derivada é uma das principais ferramentas matemáticas utilizada para calcular e estudar as taxas de variação de funções. Nos livros de Cálculo I (ANTON et al, 2007a; FINNEY et al, 2002; FLEMMING; GONÇALVES, 1992; GUIDORIZZI, 2001, 2002; HOFFMANN; BRADLEY, 2002; HUGHES-HALLETT et al, 2004; LEITHOLD, 1994; STEWART, 2006; SWOKOWSKI, 1994) pode-se achar uma diferença entre a definição de

“Função Derivada” e “Derivada de uma função em um ponto”. A primeira definição enfatiza um ponto de vista funcional, pois a derivada de uma função, em geral, assume valores diferentes em pontos diferentes, é, também, uma função que estabelece o seguinte:

A função f' definida pela fórmula

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}, \text{ se este limite existir,}$$

é denominada derivada de f em relação a t . O domínio da função derivada, f' , consiste em todos os pontos t do domínio de f para os quais existe o limite. O termo “derivada” é usado porque a função f' deriva da função f por meio de um limite (STEWART, 2006).

Já a segunda definição “Derivada de uma função em um ponto” nos diz a taxa segundo a qual o valor da função está variando naquele ponto. Geometricamente, podemos pensá-la como sendo a inclinação da curva ou o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto.

Alguns autores de livros de Cálculo I (FLEMMING; GONÇALVES, 1992; SWOKOWSKI, 1994; dentre outros) e vários sites³ apresentam a definição para a derivada de uma função em um ponto, que pode ser assim sintetizada:

A derivada de uma função $f(t)$ no ponto t_0 , de seu domínio, denotada por $f'(t_0)$, é o limite dado pela seguinte fórmula

$$f'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \quad (\text{I})$$

desde que este limite exista.

Outros autores (ANTON et al, 2007a; GUIDORIZZI, 2001; SANTOS; BIANCHINI, 2002; dentre outros) enfatizam outra fórmula para expressar a definição de derivada de uma função em um ponto

$$f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, \text{ desde que este limite exista.} \quad (\text{II})$$

Essa definição é equivalente a (I) se considerarmos $\Delta t = t - t_0$ e, observarmos que quando $\Delta t \rightarrow 0$ temos $t \rightarrow t_0$.

Apesar de serem equivalentes, as fórmulas (I) e (II) apresentam abordagens distintas, dependendo do curso ao qual é destinado o livro. Isso fica evidente quando o mesmo autor, Guidorizzi, ao escrever para o curso de Matemática (GUIDORIZZI, 2001) e para o curso de Administração (GUIDORIZZI, 2002) apresenta diferentes fórmulas para cursos distintos.

³ Dentre eles o E-Cálculo, <http://ecalculo.if.usp.br/> (BARUFI, 2001-2008).

Para o curso de Administração, Guidorizzi (2002) introduz a derivada de uma função da seguinte maneira: “A derivada da função $y = f(t)$ é a função $y' = f'(t)$ dada por $f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$,” (GUIDORIZZI, 2002, p.114). Para o curso de Matemática, Guidorizzi (2001) define “Seja f uma função e t_0 um ponto de seu domínio. O limite $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em t_0 e indica-se $f'(t_0)$. Assim $f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$. Se f admite derivada em t_0 , então diremos que f é derivável ou diferenciável em t_0 ” (GUIDORIZZI, 2001, p.137).

Podemos observar que para o curso de Administração, Guidorizzi (2002) não apresenta a derivada de uma função em um ponto, mas a função derivada, e ainda explica que a fórmula

$f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ também pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}, \text{ onde } \Delta y = f(t + \Delta t) - f(t).$$

Podemos notar que o autor utiliza, nessa última fórmula, a notação de Leibniz, e não é por acaso, pois ao se referir à taxa de variação, ele tem a seguinte explicação:

Para Δt suficientemente pequeno $f'(t)$ é aproximadamente a *taxa média de variação* de y entre t e $t + \Delta t$, ou seja, $f'(t) \cong \frac{\Delta y}{\Delta t}$ que é equivalente a $\Delta y \cong f'(t) \cdot \Delta t$. O que significa que no nível t , $f'(t) \cdot \Delta t$ é uma *estimativa* para a variação Δy em y , correspondente à variação Δt em t , com Δt suficientemente pequeno (GUIDORIZZI, 2002, p.135, grifo do autor).

Para explicar a diferencial, para o curso de Administração, o autor utiliza a notação de Leibniz, $\frac{dy}{dt}$, mas diz que “há uma *tentação* muito grande de olhar esta notação como um *quociente*” (GUIDORIZZI, 2002, p.135, grifo do autor). Embora essa notação não seja um quociente, o autor argumenta que os matemáticos gostariam de olhá-la como um quociente e então criaram uma função usando como variáveis as notações dt e dy , e chamaram-na de diferencial. Assim, $\frac{dy}{dt} = f'(t)$, que é a notação de Leibniz para derivada de uma função, poderia ser vista como quociente.

Se queremos que a notação $\frac{dy}{dt}$ vire um quociente, nada mais natural do que a seguinte definição: **Diferencial de uma função:** Seja $y = f(t)$ uma função derivável. A função dada por $dy = f'(t).dt$ denomina-se diferencial da função $y = f(t)$. Nesta função, a variável dy depende das variáveis t e dt . Leibniz chamava dy de *diferencial de y* e dt de *diferencial de t*. Com esta definição, a notação de Leibniz para a derivada pode ser olhada como um quociente: o quociente da diferencial de y pela diferencial de t . Dessa forma, os matemáticos conseguiram fazer a notação $\frac{dy}{dt}$ virar um quociente! (GUIDORIZZI, 2002, p.135-136, grifo do autor).

Vale notar que, no curso de Administração, normalmente os alunos não estão acostumados com a linguagem formal da Matemática e, levando isso em conta, entendo que Guidorizzi (2002) refere-se à diferencial de um modo anedótico sem, com isso, incorrer em uma inverdade.

Graficamente, podemos notar que a diferencial dt é um pequeno acréscimo dado em t , e que gera um acréscimo dy em y , em relação à reta tangente T , conforme Figura 2.7.

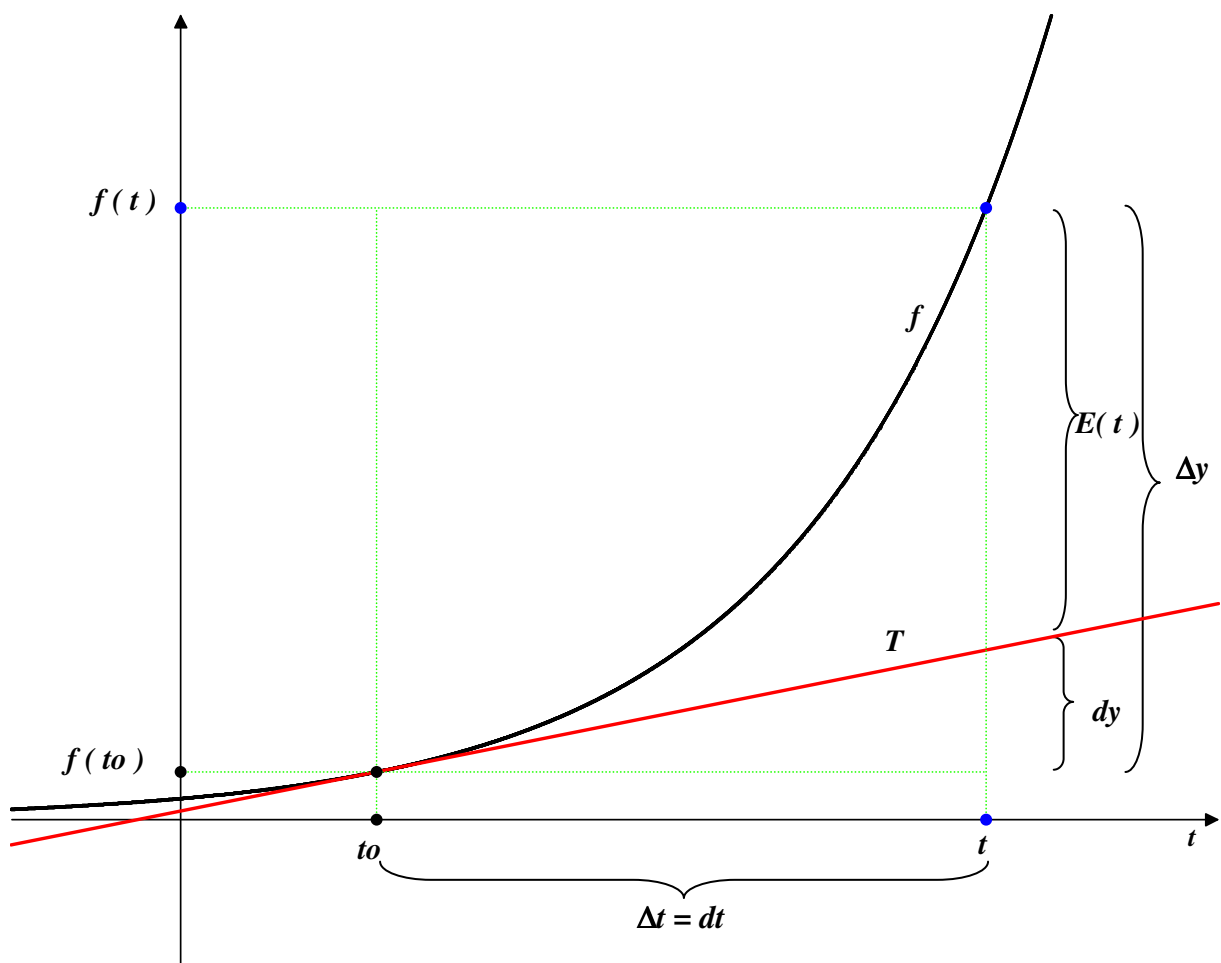


Figura 2.7 - Representação gráfica das diferenciais dt e dy .

Segundo Tall (1993) a notação de Leibniz, $\frac{dy}{dt}$, é quase indispensável em Cálculo, ainda que cause sérios problemas conceituais.

É uma fração, ou um único símbolo indivisível? Qual é a relação entre o dt em $\frac{dy}{dt}$ e dt em $\int f(t)dt$? O dt pode ser cancelado na equação $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$? Dar um significado moderno a essas relações, que permitam uma interpretação significativa consistente em todos os contextos no Cálculo, é possível, mas não é universalmente reconhecido. Por outro lado, a ausência desse significado coerente conduz a conflitos cognitivos a qual é comumente resolvido por manter vários significados de diferenciação em compartimentos separados ($\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$ em diferenciação e dx significa ‘com relação’ a x na integração) (TALL, 1993, p.18, tradução nossa).

Tall (1985) associa geometricamente, ao discutir retas tangentes, a notação de Leibniz ao gradiente e à derivada. Para esse autor, Leibniz é erroneamente interpretado quando se fala apenas na sua notação original. A expressão $\frac{dy}{dt}$ é, inicialmente, considerada como um quociente de quantidades finitas, onde dt é um incremento de t e dy o incremento de y em relação à reta tangente. Somente mais tarde, quando trata de infinitésimos, é que $\frac{dy}{dt}$ seria considerada uma notação para o gradiente de uma função.

Para o curso de Matemática, no entanto, Guidorizzi (2001) apresenta a fórmula $f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ e, a partir de uma interpretação geométrica acerca da reta tangente e seu coeficiente angular, define a derivada de uma função, o erro de aproximação por uma reta tangente e a diferencial.

Uma interpretação gráfica para a definição da derivada de uma função em um ponto, como a inclinação da reta tangente que passa pelo ponto $(t_0, f(t_0))$, pode ser vista no gráfico da Figura 2.8.

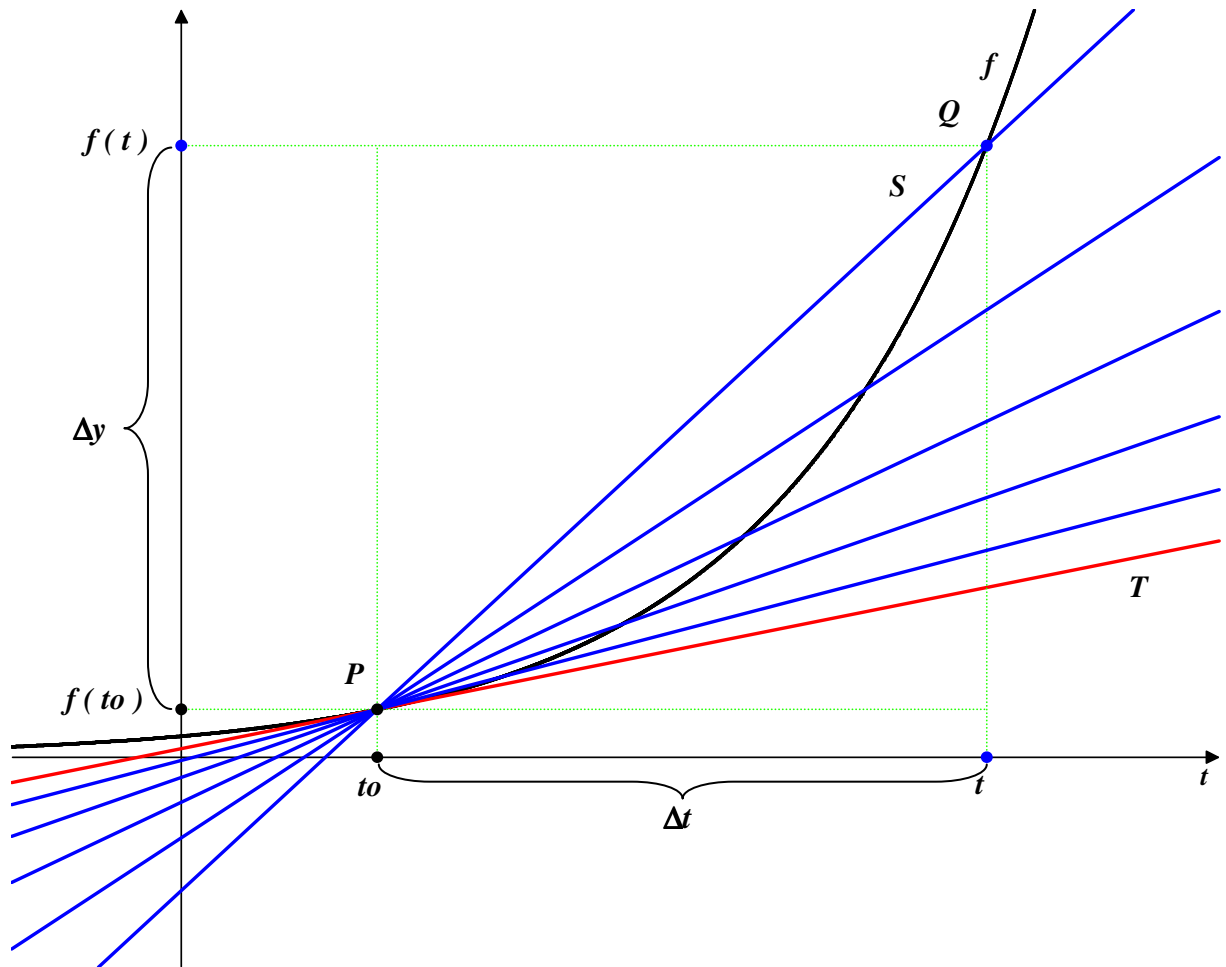


Figura 2.8 - Interpretação gráfica da derivada de uma função em um ponto.

Tomando $t = t_0 + \Delta t$ e $f(t) = f(t_0 + \Delta t)$, conforme Δt se aproxima de zero, o ponto $(t_0 + \Delta t, f(t_0 + \Delta t))$ se aproxima do ponto $(t_0, f(t_0))$ e a reta S continua secante ao gráfico, sendo determinada por dois pontos que se tornam cada vez mais próximos. Na posição limite, quando $\Delta t \rightarrow 0$, temos a reta tangente, T, ao gráfico da função f no ponto $(t_0, f(t_0))$.

Pelo gráfico, a inclinação da reta secante S (ou o coeficiente angular de S) é dada por $\frac{\Delta y}{\Delta t}$, onde $\Delta y = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ e $\Delta t = t - t_0$. Se mantivermos o ponto P fixo e fizermos o ponto Q aproximar-se do ponto P, a inclinação da reta secante S se modificará. À medida que o ponto Q aproxima-se do ponto P, a inclinação da reta secante S varia cada vez menos, ou seja, a taxa de variação entre Δy e Δt tende para um valor constante que chamamos inclinação da reta tangente à curva no ponto P.

Assim, se denominarmos m como sendo essa inclinação temos que

$$m = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \text{ou} \\ Q \rightarrow P}} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}, \text{ que é a derivada da função } f(t) \text{ no ponto } t_0.$$

Até aqui apresentamos a definição de derivada de uma função em um ponto determinado. Generalizando, podemos dizer que uma função f é uma função derivável ou *diferenciável*, se for derivável em cada ponto de seu domínio. Lembrando que, nesse caso, a função tem que ser necessariamente contínua.

Ao observarmos o gráfico de uma função diferenciável, podemos notar que localmente (próximo do ponto $t = t_0$) parece um segmento de reta. Contudo, apesar de não ser, a distância entre a função f e a reta tangente T é tão pequena que não poderia ser detectada a olho nu, como pode ser observado na Figura 2.9.

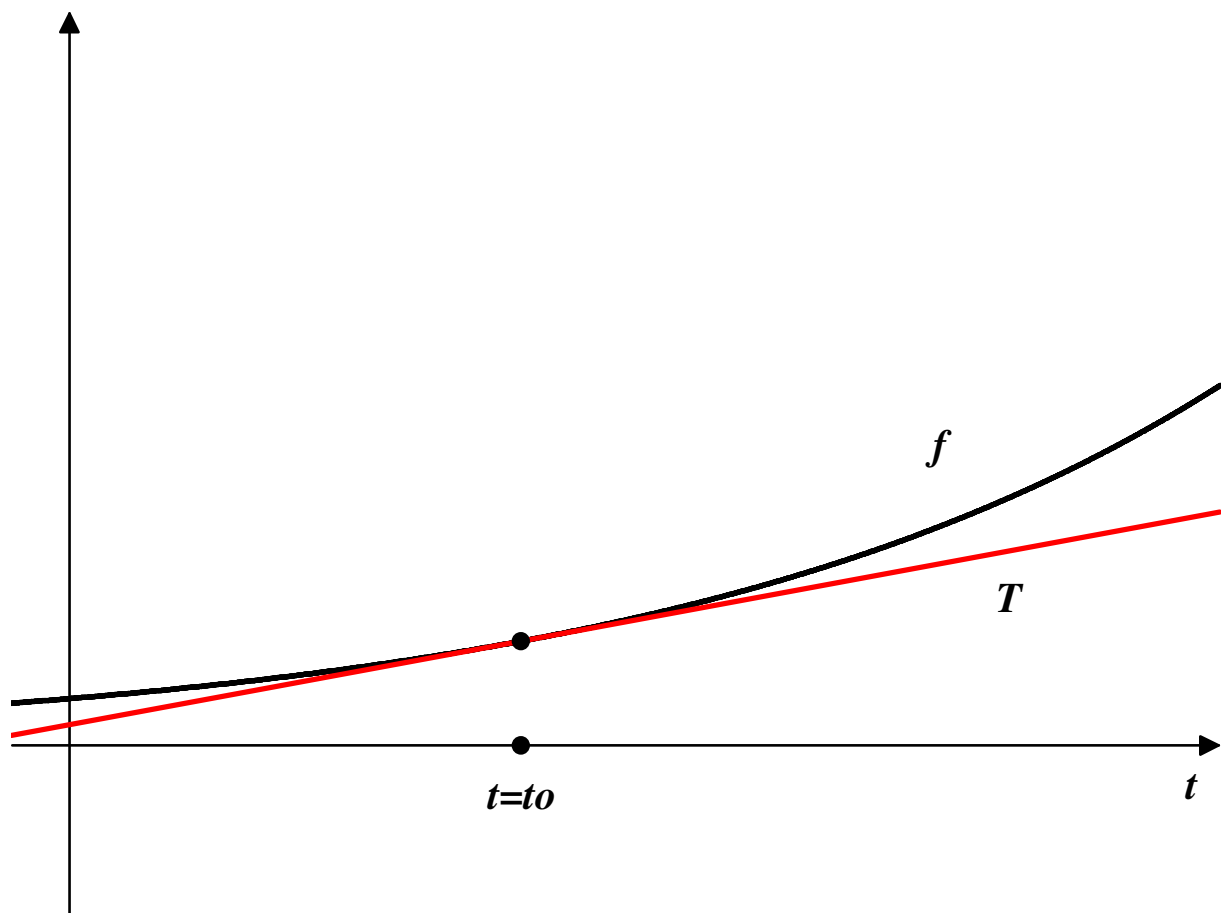


Figura 2.9 - Aproximação pela reta tangente.

Para muitos autores (ANTON et al, 2007a; FINNEY et al, 2002; HUGHES-HALLETT et al, 2004; SANTOS; BIANCHINI, 2002; dentre outros) a reta que melhor aproxima o gráfico da função f , na vizinhança do ponto $(t_0, f(t_0))$, é a reta tangente ao gráfico da função f no ponto t_0 , dada pela equação $T(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$. Isso sugere que se f é diferenciável em t_0 , então para valores de t próximos de t_0 , a aproximação de $f(t)$ pela reta tangente é $f(t) \approx f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$. A expressão $f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$ é chamada de *linearização*.

local de f próximo de $t = t_0$. Existe um erro (uma diferença) nessa aproximação que é definido por $E(t) = f(t) - f(t_0) - f'(t_0)(t - t_0)$. Este resultado será importante na demonstração da regra da cadeia. Uma interpretação gráfica para o erro, $E(t)$, que se comete na aproximação de f pela reta tangente T em $(t_0, f(t_0))$, pode ser observado no gráfico da Figura 2.10.

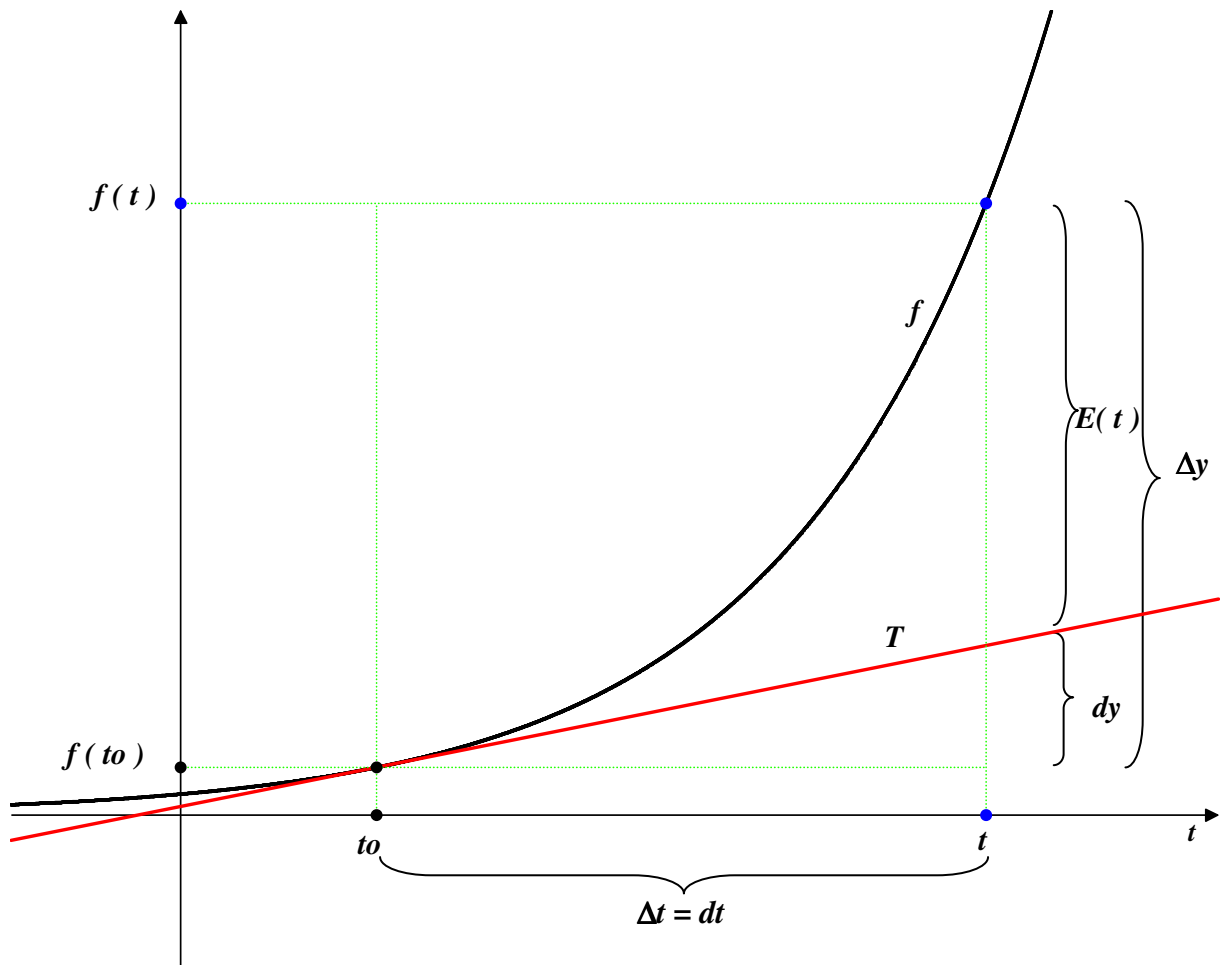


Figura 2.10 - Erro de aproximação $E(t)$.

É importante compreender a distinção entre o incremento de y , Δy (incremento em relação à função f) e a diferencial de y , dy (incremento em relação à reta tangente T). Para observarmos essa diferença, atribuímos às variáveis independentes Δt (incremento de t) e dt (a diferencial de t) o mesmo valor, logo $\Delta t = dt$. Então, Δy representa a variação ocorrida em y (eixo vertical) quando começamos em t_0 e nos movemos ao longo da curva $y = f(t)$, até que sejam percorridas $\Delta t (= dt)$ unidades na direção t (direção do eixo horizontal). Já dy representa a variação em y (eixo vertical) que ocorre quando começamos em t_0 e nos

movemos ao longo da reta tangente até que $dt(=\Delta t)$ unidades sejam percorridas na direção t (direção do eixo horizontal). Assim, como $\Delta t = dt$, temos $\Delta y = dy + E(t)$.

Dessa forma, ao dividirmos $\Delta y = dy + E(t)$ por $\Delta t = dt$, obtemos $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} + \frac{E(t)}{\Delta t}$. O primeiro membro dessa igualdade, $\frac{\Delta y}{\Delta t}$, representa a inclinação da reta secante S, e a primeira parcela do segundo membro, $\frac{dy}{dt}$, a inclinação da reta tangente T. Se provarmos que a segunda parcela do segundo membro, $\frac{E(t)}{\Delta t}$, tende a zero, podemos dizer que a inclinação das retas secantes tende para a inclinação da reta tangente. Assim, teríamos uma “boa aproximação” da função f pela reta tangente T. Para isso chamaremos $\rho(t) = \frac{E(t)}{\Delta t}$.

Logo, devemos mostrar que $\lim_{t \rightarrow t_0} \rho(t) = 0$.

Lembremos que $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} + \frac{E(t)}{\Delta t}$, onde $\Delta y = f(t) - f(t_0)$, $\Delta t = t - t_0$ e $\frac{dy}{dt} = f'(t_0)$.

Assim, $\rho(t) = \frac{E(t)}{\Delta t}$ pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0) + \rho(t), \text{ isto é, } \rho(t) = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - f'(t_0), \quad t \neq t_0.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} \rho(t) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left[\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - f'(t_0) \right] = \lim_{t \rightarrow t_0} \left[\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \right] - f'(t_0) = \\ &= f'(t_0) - f'(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Notemos que $\rho(t)$ é uma função que depende de t e, se definirmos $\rho(t_0) = 0$, essa função será contínua em t_0 , pois $\lim_{t \rightarrow t_0} \rho(t) = 0 = \rho(t_0)$, isto é,

$$\rho(t) = \begin{cases} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} - f'(t_0) & \text{se } t \neq t_0 \\ 0 & \text{se } t = t_0 \end{cases}.$$

Este resultado, que pode ser encontrado em Anton et al (2007a), Guidorizzi (2001) e Hughes-Hallett et al (2004), é **necessário** para a demonstração da regra da cadeia, que será tratada na próxima seção.

2.3 Regra da Cadeia

Alguns autores de livros de Cálculo I (ANTON et al, 2007a; FINNEY et al, 2002; LANG, 1965; LEITHOLD, 1994; STEWART, 2006; SWOKOWSKI, 1994) ao introduzirem o assunto regra da cadeia, argumentam que as regras de derivação, da soma, da diferença, do produto e do quociente aplicam-se a uma gama limitada de funções, pois só podem ser usadas para derivar funções do tipo x^n , $\text{sen } x$, etc., e que não há uma regra, dentre essas, que possa ser aplicada *diretamente* às expressões como $\text{sen}(2x)$, $\sqrt{x^2+1}$, e^{x^2} , etc. Para derivar essas funções, primeiramente seria necessário efetuar algumas transformações; por exemplo, a função $\text{sen}(2x)$ seria transformada em $2\text{sen } x \cdot \cos x$ e, em seguida, seria aplicada a regra do produto.

Isto é,

$$\begin{aligned} D_x(\text{sen}(2x)) &= D_x(2\text{sen } x \cdot \cos x) = 2D_x(\text{sen } x \cdot \cos x) = \\ &= 2[\text{sen } x \cdot (D_x \cos x) + \cos x \cdot (D_x \text{sen } x)] = 2[\text{sen } x \cdot (-\text{sen } x) + \cos x \cdot \cos x] = \\ &= 2[-\text{sen}^2 x + \cos^2 x] = 2\cos(2x). \end{aligned}$$

Dessa forma, os autores buscam incentivar o aluno a procurar um método mais direto para calcular a derivada de $y = \text{sen}(2x)$ e também nos casos em que não é possível fazer essa transformação, como por exemplo, a função $y = \text{sen}(\cos x^2)$. “A chave consiste em encarar y como uma função composta de x ” (SWOKOWSKI, 1994, p.174).

Outros autores (FLEMMING; GONÇALVES, 1992; SANTOS; BIANCHINI, 2002), ao introduzirem o assunto sobre regra da cadeia, consideram duas funções deriváveis, que podem ser compostas e apresentam a regra da cadeia como a derivada dessa composição.

Hughes-Hallett et al (2004) descrevem a função composta $y = f(t) = h(g(t))$, com a função h sendo a “função de fora” e função g a “função de dentro” e separam as funções h e g da seguinte forma $y = h(x)$ e $x = g(t)$. Apesar de não demonstrarem formalmente a regra da cadeia, enunciam-na a partir de pequenas variações, isto é, “uma pequena variação em t , digamos Δt , gera uma pequena variação em x , Δx , que por sua vez, gera uma pequena variação em y , Δy . Se Δt e Δx forem diferentes de zero, temos $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}$.” (HUGHES-

HALLETT et al, 2004, p.106). Para esses autores, como $\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$ e Δt , Δx e Δy são

considerados cada vez menores, no limite temos a regra da cadeia $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$. Como

$\frac{dy}{dx} = h'(x)$, $\frac{dx}{dt} = g'(t)$ e $x = g(t)$, segue que $\frac{d}{dt}h(g(t)) = h'(g(t)) \cdot g'(t)$, fazendo as devidas

substituições. “Em palavras: a derivada de uma função composta é o produto das derivadas das funções ‘de fora’ e ‘de dentro’. A derivada da função ‘de fora’ tem de ser calculada na ‘função de dentro’ ” (HUGHES-HALLETT et al, 2004, p.107). Podemos observar que esses autores combinam as notações de Newton, $f'(t) = [h(g(t))]' = h'(g(t)) \cdot g'(t)$, com a de Leibniz,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Historicamente, Newton e Leibniz, apesar de serem considerados os inventores do Cálculo, tinham perspectivas diferentes. Segundo Brito e Cardoso (1997), no início da Idade Moderna, Descartes realizou estudos sobre retas tangentes às curvas e desenvolveu um método algébrico que consistia em definir reta tangente como uma reta perpendicular a reta normal em um ponto. Porém, esse método se mostrou muito complexo e somente com o advento dos Cálculos Diferencial e Integral de Newton e Leibniz foi possível desenvolver métodos gerais e mais simples de serem aplicados. Cada um deles desenvolveu um Cálculo “diferente” devido às suas compreensões distintas da natureza. Eles conseguiram chegar a métodos mais gerais e notações adequadas, porém não deram fundamentação suficientemente consistente para o Cálculo.

Newton desenvolveu seu Cálculo (a Teoria dos Fluxões) como um instrumento para auxiliar suas pesquisas sobre mecânica. Em sua teoria, utilizava os conceitos “fluentes”, que significa quantidades que fluem (que se modificam, ou variáveis), e “fluxões”, que são as velocidades com que fluem (derivadas). Para ele, as quantidades geométricas são geradas por movimentos contínuos. Por exemplo, um ponto móvel gera uma reta e a quantidade, x , assim gerada era chamada por ele de “fluente” e a sua taxa de variação, indicada por $\dot{x}$, dava-se o nome de “fluxo” de x . Leibniz desenvolveu seu Cálculo baseado na Teoria dos Infinitesimais, como uma linguagem universal que tentava exprimir todas as teorias matemáticas até então conhecidas. Apesar de ambos serem considerados os inventores do Cálculo, persistia o problema dos fundamentos. Foi apenas com Cauchy e Weierstrass, com o desenvolvimento da

Análise como um corpo matemático, é que o Cálculo foi estabelecido tal qual é conhecido atualmente (BOYER, 1993; BRITO; CARDOSO, 1997; EDWARDS, 1979).

A atual formulação da regra da cadeia é um resultado do desenvolvimento da Análise Real. A derivada de uma função composta (regra da cadeia) que, naquela época não tinha esse nome, era intuitivamente óbvia para Newton e Leibniz, como pode ser observado em Edwards (1979).

Os problemas de tangente e de área enfatizam a importância dos procedimentos sistemáticos para diferenciação (o cálculo de $\dot{y}/\dot{x}$, dado que $f(x, y) = 0$) e anti-diferenciação. Newton explorou a facilidade para diferenciação e anti-diferenciação pelos métodos de substituição - equivalente ao que chamamos regra da cadeia e integração por substituição - que é essencialmente “construído” do cálculo de fluxões (EDWARDS, 1979, p.196, tradução nossa).

Um exemplo da “construção” da regra da cadeia, $\dot{y}/\dot{x}$, com o cálculo de fluxões pode ser encontrado em Edwards (1979).

Por exemplo, suponha que queiramos calcular $\dot{y}/\dot{x}$ se $y = (1 + x^n)^{3/2}$. Newton introduzia uma nova variável $z = 1 + x^n$ (*) com fluxão $\dot{z} = nx^{n-1}\dot{x}$. Então $y^2 = z^3$, desse modo segue que $2y\dot{y} = 3z^2\dot{z}$ (**). De (*) e (**) concluímos que,

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{y}/\dot{z}}{\dot{x}/\dot{z}} = \frac{3z^2/2y}{1/nx^{n-1}} = \frac{3nx^{n-1}(1+x^n)^2}{2(1+x^n)^{3/2}} = \frac{3}{2}nx^{n-1}\sqrt{1+x^n}$$

Esta é uma ilustração do procedimento geral que Newton empregava para diferenciar $y = [f(x)]^{m/n}$, onde $f(x)$ é uma função polinomial. Primeiro introduzia uma nova variável $z = f(x)$ com fluxão $\dot{z} = f'(x)\dot{x}$. Então de $y^n = z^m$, segue que $ny^{n-1}\dot{y} = mz^{m-1}\dot{z}$ e, para calcular $\dot{y}/\dot{x}$, divide-se o numerador e o denominador pela nova variável

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{y}/\dot{z}}{\dot{x}/\dot{z}} = \frac{mz^{m-1}/ny^{n-1}}{1/f'(x)} = \frac{mf'(x)[f(x)]^{m-1}}{n[f(x)]^{(m/n)(n-1)}} = \frac{m}{n}[f(x)]^{(m/n)-1}[f'(x)],$$

(EDWARDS, 1979, p.197, tradução nossa).

Podemos notar que, para Newton, a regra da cadeia podia ser calculada indutivamente pela regra da potência, um resultado elementar do Cálculo. Para ele, a regra da cadeia não era considerada um teorema e empregava este algoritmo para resolver vários de seus exemplos.

Esse procedimento também é encontrado em alguns autores de livros de Cálculo (FINNEY et al, 2002; GUIDORIZZI, 2002) que enunciam a regra da cadeia a partir da derivada de $h(x)=x^n=(g(t))^n$. Se n é um inteiro e $h(x)=x^n$, então, pela regra da potenciação temos que $h'(x)=nx^{n-1}$. “Se x é uma função derivável de t , podemos aplicar a Regra da Cadeia, ampliando-a para a Regra da Cadeia para Potências: $\frac{d}{dt}x^n = nx^{n-1} \frac{dx}{dt}$.” (FINNEY et al, 2002, p.184). “Sendo $g(t)$ derivável, é válida a seguinte regra para a derivada de $y=(g(t))^n$, onde $n \neq 0$ é um real qualquer: $y=(g(t))^n \Rightarrow y'=n.(g(t))^{n-1}.g'(t)$ ” (GUIDORIZZI, 2002, p.159).

Para o curso de administração, Guidorizzi (2002) não tem a preocupação com os fundamentos e nem com as diferenças entre a regra da potência e a regra da cadeia, estabelecendo a regra da potência como um caso particular da regra da cadeia. Já para o curso de Matemática (GUIDORIZZI, 2001), ele demonstra formalmente essa regra. Clark et al (1997) argumentam que tal procedimento pode acarretar um entendimento incompleto para a regra da cadeia e que, muitas vezes, os estudantes calculam a derivada de uma função potência, como por exemplo, $f(t)=(1-4t^3)^2$, e não observam a ligação entre essas duas regras.

Enunciados para o teorema da regra da cadeia podem ser encontrados em diversos livros de Cálculo I, tais como, Anton et al (2007a), Finney et al (2002), Flemming e Gonçalves (1992), Guidorizzi (2001), Leithold (1994), Santos e Bianchini (2002), Stewart (2006) e Swokowski (1994), dentre outros. Alguns desses autores utilizam a notação de Leibniz e outros a notação de Newton, dependendo da conveniência para sua demonstração. Em Anton et al (2007a), podemos encontrar uma explicação para este fato.

Quando Newton e Leibniz publicaram suas descobertas de Cálculo, utilizaram notações distintas e, assim, acabaram criando uma grande divisão notacional entre a Grã-Bretanha e o continente europeu, que durou mais de 50 anos. A notação de Leibniz, a saber, $\frac{dy}{dt}$, acabou prevalecendo por

naturalmente sugerir fórmulas, como, por exemplo, a regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}. \text{ (ANTON et al, 2007a, p. 226).}$$

Embora Anton et al (2007a) refiram-se à notação de Leibniz, como sendo melhor que a de Newton, em seu enunciado da regra da cadeia utilizam a notação de Leibniz e, em seguida, argumentam que “o uso da fórmula $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ pode ficar desajeitado em alguns problemas porque envolve muitas variáveis.” (ANTON et al, 2007a, p.210). O enunciado do teorema da regra da cadeia aparece em Anton et al (2007a), porém sua demonstração apenas surge no Apêndice C de Anton et al (2007b).

Segundo Cottrill (1999), Leibniz considerava a regra da cadeia como uma simplificação intuitiva de produtos de frações, isto é, se $y = y(x)$ e $x = x(t)$, então $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$. Leibniz unia o pensamento analítico ao geométrico e a regra da cadeia era definida implicitamente. Os trabalhos de Euler e Cauchy deram o formato para a regra da cadeia como é atualmente conhecido. Foi mudando os objetos do Cálculo, de curvas no espaço para funções arbitrárias, é que a natureza intuitiva da regra da cadeia ficou perdida e se tornou um teorema a ser provado. A demonstração da regra da cadeia, feita por Cauchy, encontrada em Edwards (1979), é:

Seja z uma segunda função de x , limitada pela primeira $y = f(x)$ pela fórmula $z = F(y)$. $F[f(x)]$, ou z , será chamada função de uma função de uma variável x , e se designarmos, simultaneamente, os infinitamente pequenos incrementos de x , y e z , por Δx , Δy , Δz , acharemos $\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta x} = \frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$, então passando o limite, temos $z' = F'(y)y' = F'[f(x)]f'(x)$. (EDWARDS, 1979, p.313, tradução nossa).

Edwards (1979) lembra que Cauchy negligencia a possibilidade de $\Delta y = 0$, o que faria com que essa demonstração fosse falsa.

Segundo Cottrill (1999), freqüentemente na Matemática, a demonstração de um teorema ajuda a conduzir ao conceito fundamental no qual este é construído; isto é, ao experimentar a demonstração, os estudantes constroem um entendimento relacional do teorema. Infelizmente, o método da demonstração do teorema da regra da cadeia é, geralmente, interpretado como

um truque algébrico, multiplicar por 1 ($\Delta y/\Delta y$), como visto na citação de Edwards (1979).

Ainda que $\frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$ seja simplesmente a notação de Leibniz, $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$,

escrita em termos de quocientes diferenciais, a interpretação geométrica fica faltando. Isto pode ser devido à inabilidade de demonstrar a composição de duas funções a partir de seus gráficos. Para Cottrill (1999), as dificuldades apresentadas pelos estudantes, no que diz respeito à regra da cadeia, podem ser explicadas por sua história, isto é, as noções de função e composição vieram depois e obscureceram as idéias intuitivas (ou geométricas) de Newton e Leibniz.

O atual enunciado para a regra da cadeia pode ser encontrado nos diversos autores de livros de Cálculo I (ANTON et al, 2007a; FINNEY et al, 2002; FLEMMING; GONÇALVES, 1992; GUIDORIZZI, 2001; HOFFMANN; BRADLEY, 2002; HUGHES-HALLETT et al, 2004; LEITHOLD, 1994; SANTOS; BIANCHINI, 2002; STEWART, 2006; SWOKOWSKI, 1994), embora nem todos apresentem sua demonstração. Sintetizarei esses enunciados, tentando apresentar como alguns autores (FLEMMING; GONÇALVES, 1992; LEITHOLD, 1994; SANTOS; BIANCHINI, 2002; SWOKOWSKI, 1994) demonstram parcialmente essa regra, de modo algébrico. Paralela a essa demonstração, apresento uma interpretação gráfica, resgatando o procedimento gráfico para a composição de funções.

Teorema: A Regra da Cadeia: Sejam $y = h(x)$ uma função derivável em x e $x = g(t)$ uma função derivável em t . Consideremos a função composta $y = f(t) = h(g(t))$ com $Im_g \subset D_h$. Então f é derivável para todo $t \in D_g$ e $f'(t) = h'(g(t)) \cdot g'(t)$.

Na notação de Leibniz podemos escrever $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$.

Por **hipótese**, existem: $g'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ (g é derivável em t) e

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (h \text{ é derivável em } x, \text{ tal que } x = g(t)).$$

A **tese** a ser demonstrada é que f é derivável e que a derivada pode ser calculada para todo $t \in D_g$, ou seja, que existe $f'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$ e que $f'(t) = h'(g(t)) \cdot g'(t)$, para todo $t \in D_g$.

Demonstração:

Precisamos mostrar que existe o seguinte limite:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(g(t + \Delta t)) - h(g(t))}{\Delta t}$$

Sendo $x = g(t)$, definimos $\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t)$. Então Δx depende de Δt e, quando $\Delta t \rightarrow 0$, temos que $\Delta x \rightarrow 0$. Assim $g(t + \Delta t) = g(t) + \Delta x = x + \Delta x$ e podemos escrever:

$$h(g(t)) = h(x) \quad \text{e} \quad h(g(t + \Delta t)) = h(x + \Delta x).$$

$$\text{Logo, } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta t}.$$

Suponhamos que $\Delta x \neq 0$. Então,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \cdot \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (\text{III})$$

Quando $\Delta t \rightarrow 0$, temos $\Delta x \rightarrow 0$, e utilizando a **hipótese**, temos:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = h'(x) \cdot g'(t) = h'(g(t)) \cdot g'(t), \text{ o que completa a prova no caso em que } \Delta x \neq 0.$$

Entretanto, essa prova não é geral segundo a maioria dos autores, porque para valores arbitrariamente pequenos de Δt poderia acontecer do acréscimo Δx ser igual a zero; isto é, uma pequena mudança em t poderia não causar nenhuma mudança em x , o que invalida a última passagem de (III).

Uma interpretação gráfica intuitiva para essa demonstração encontra-se na Figura 2.11. Consideremos as funções f , g e h crescentes nos intervalos dados, tal que f seja a função composta de h e g . Tomemos um intervalo $(t, t + \Delta t)$ em que a função g é derivável, de maneira que ao aplicarmos a função g a ele, obtemos o seguinte intervalo $(x = g(t), x + \Delta x = g(t + \Delta t))$. Aplicamos a função identidade nesse intervalo e obtemos $(x = g(t), x + \Delta x = g(t + \Delta t))$, que é o intervalo de domínio da função h , sendo h derivável nesse intervalo e tal que $\Delta x \neq 0$. Ao aplicarmos a função h , obtemos $(h(x), h(x + \Delta x))$, que é a imagem da função f , isto é, $(h(g(t)), h(g(t + \Delta t))) = (f(t), f(t + \Delta t))$.

Para valores arbitrariamente pequenos de Δt é suposto que $\Delta x \neq 0$, e isso se verifica para um grande número de funções, porém não para todas, pois poderia acontecer do acréscimo Δx ser igual a zero. Então, quando seria possível que $\Delta x = 0$? Se g for constante a condição de $\Delta x \neq 0$ não é satisfeita, como afirmam Flemming e Gonçalves (1992) que, “neste caso, podemos provar a fórmula facilmente. De fato, se $g(t) = c$, então $g'(t) = 0$ e $f(t) = h(g(t)) = h(c)$ é constante. Assim, $f'(t) = 0 = h'(g(t)).g'(t)$ ” (FLEMMING; GONÇALVES, 1992, p.175-176).

Outra demonstração pode ser encontrada em alguns autores de livros de Cálculo (ANTON et al, 2007b; FINNEY et al, 2002; LEITHOLD, 1994; SANTOS; BIANCHINI, 2002; SWOKOWSKI, 1994), para o caso geral que evite a referida passagem em (III), através de outro argumento, que pode ser assim sintetizada:

A partir da definição da derivada $h'(x)$, temos que $h'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$ se $\Delta x \approx 0$. Mas isso é equivalente a dizer que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + \rho(\Delta x)$, onde $\rho(\Delta x) \rightarrow 0$, quando $\Delta x \rightarrow 0$. Multiplicando a expressão por Δx , obtemos

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x + \rho(\Delta x) \cdot \Delta x. \quad (IV)$$

Podemos observar que começamos supondo que o acréscimo $\Delta x \neq 0$, mas a última equação (IV) é válida mesmo no caso em que $\Delta x = 0$. A partir dela, dividindo ambos os membros por Δt que, com certeza, não é zero pela definição de derivada da função g , temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \rho(\Delta x) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Fazendo $\Delta t \rightarrow 0$, no limite, já que $\rho(\Delta x) \rightarrow 0$, temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \rho(\Delta x) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dy}{dx} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \rho(\Delta x) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \rho(\Delta x) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = h'(x).g'(t) + 0.g'(t) = h'(g(t)).g'(t) \end{aligned}$$

e, portanto, obtemos a **regra da cadeia**.

Alguns autores de livros de Cálculo (ANTON et al, 2007b; LANG, 1965) apresentam esse resultado como outro teorema, sendo mais rigorosos em termos da expressão

$$\Delta y = \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x + \rho(\Delta x) \cdot \Delta x. \quad (IV)$$

Teorema: Se h for diferenciável em x e se $y = h(x)$, então $\Delta y = h'(x).\Delta x + \rho(\Delta x).\Delta x$ onde $\rho(\Delta x) \rightarrow 0$, quando $\Delta x \rightarrow 0$ e $\rho(\Delta x) = 0$ se $\Delta x = 0$.

Demonstração:

Vamos definir

$$\rho(\Delta x) = \begin{cases} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} - h'(x) & \text{se } \Delta x \neq 0 \\ 0 & \text{se } \Delta x = 0 \end{cases}.$$

Notemos que essa função é a mesma que Guidorizzi (2001) apresenta quando aborda derivada e erro de aproximação pela reta tangente.

Se $\Delta x \neq 0$, tem-se que

$$\rho(\Delta x).\Delta x = [h(x + \Delta x) - h(x)] - h'(x).\Delta x. \quad (V)$$

Mas $\Delta y = h(x + \Delta x) - h(x)$, e assim (V) pode ser escrita como

$$\rho(\Delta x).\Delta x = \Delta y - h'(x).\Delta x \quad \text{ou} \quad \Delta y = h'(x).\Delta x + \rho(\Delta x).\Delta x.$$

Se $\Delta x = 0$, a expressão acima ainda é válida. Logo é válida para todos os valores de Δy . Resta mostrar que $\rho(\Delta x) \rightarrow 0$ quando $\Delta x \rightarrow 0$. Mas isso segue a partir da hipótese de que h é diferenciável em x , uma vez que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \rho(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} - h'(x) \right] = h'(x) - h'(x) = 0.$$

Até aqui, os autores preocupam-se muito com a abordagem algébrica e não têm a preocupação de mostrar um gráfico para dar um significado geométrico para $\rho(\Delta x)$, a não ser pelo fato de ser uma aproximação intuitiva de limites, isto é, se $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, então podemos dizer que $\frac{dy}{dx}$ está próximo de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e que esta diferença será denotada por $\rho(\Delta x)$.

De maneira semelhante, Stewart (2006) utiliza esse mesmo recurso, porém ao invés de utilizar $\rho(\Delta x)$ ele define ε como a diferença entre o quociente de diferenças e a derivada da função no ponto a . Isto é, se $y = f(t)$ e se t varia no intervalo de b a $b + \Delta t$, definimos o incremento de y como $\Delta y = f(b + \Delta t) - f(b)$ e, de acordo com a definição da derivada, temos

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(b). \text{ Dessa forma, obtemos}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} - f'(b) \right) = f'(b) - f'(b) = 0.$$

Mas $\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta t} - f'(b)$ implica que $\Delta y = f'(b).\Delta t + \varepsilon.\Delta t$.

Stewart (2006) enfatiza que se definirmos $\varepsilon = 0$ quando $\Delta t = 0$, então ε se torna uma função contínua de Δt . Assim, para uma função diferenciável f , podemos escrever

$$\Delta y = f'(b).\Delta t + \varepsilon.\Delta t \text{ onde } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ quando } \Delta t \rightarrow 0 \quad (\text{VI})$$

e ε é uma função contínua de Δt . “Essa propriedade de funções diferenciáveis é que nos possibilita provar a Regra da Cadeia” (STEWART, 2006, p.223).

Stewart (2006) apresenta a prova da regra da cadeia utilizando a derivada de uma função em um ponto, sem representá-la graficamente, como podemos ver a seguir.

Prova da Regra da Cadeia: Suponha que $x = g(t)$ é diferenciável em b e $y = h(x)$ é diferenciável em $a = g(b)$. Se Δt for um incremento de t e Δx e Δy forem os incrementos correspondentes de x e y , então podemos usar a equação (VI) para escrever

$$\Delta x = g'(b).\Delta t + \varepsilon_1.\Delta t = [g'(b) + \varepsilon_1]\Delta t \quad (\text{VII})$$

onde $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ quando $\Delta t \rightarrow 0$. Da mesma forma

$$\Delta y = h'(a).\Delta x + \varepsilon_2.\Delta x = [h'(a) + \varepsilon_2]\Delta x \quad (\text{VIII})$$

onde $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ quando $\Delta x \rightarrow 0$. Se substituirmos a expressão para Δx , da equação (VII), na equação (VIII), obteremos

$$\Delta y = [h'(a) + \varepsilon_2][g'(b) + \varepsilon_1]\Delta t.$$

Logo,

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = [h'(a) + \varepsilon_2][g'(b) + \varepsilon_1].$$

Podemos observar que, na equação (VII), quando $\Delta t \rightarrow 0$ temos que $\Delta x \rightarrow 0$. Assim, $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ e $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ quando $\Delta t \rightarrow 0$. Portanto,

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [h'(a) + \varepsilon_2][g'(b) + \varepsilon_1] = h'(a).g'(b) = h'(g(b)).g'(b).$$

Isso prova a regra da cadeia.

Guidorizzi (2001) apresenta outra demonstração para a regra da cadeia, onde tenta inserir um gráfico para dar sentido a $\rho(x)$. No entanto, restringe-se ao erro de aproximação, como podemos observar a seguir.

Teorema da Regra da Cadeia: Sejam $y = h(x)$ e $x = g(t)$ duas funções deriváveis, com $Im_g \subset D_h$. O objetivo é provar que a função composta $f(t) = h(g(t))$ é derivável e que vale a regra da cadeia $f'(t) = h'(g(t)) \cdot g'(t)$, $t \in D_g$.

Pela definição de derivada, dizemos que a função f é derivável, ou diferenciável, se for derivável em cada ponto de seu domínio e que a derivada de f , em t_0 , é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa t_0 . Assim, para a regra da cadeia, basta mostrar que a função f é derivável em t_0 e que vale $f'(t_0) = h'(g(t_0)) \cdot g'(t_0)$.

Dessa forma, suponha $y = h(x)$ derivável em x_0 , $x = g(t)$ derivável em t_0 , onde $x_0 = g(t_0)$ e $f(t) = h(g(t))$ com $Im_g \subset D_h$. Vamos provar então que $f'(t_0) = h'(g(t_0)) \cdot g'(t_0)$.

Demonstração:

Consideremos T a equação da reta tangente ao gráfico da função h no ponto $(x_0, h(x_0))$ dada por $T(x) - T(x_0) = h'(x_0)(x - x_0)$. Como $T(x_0) = h(x_0)$ segue que $T(x) = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0)$, conforme ilustrado no gráfico da Figura 2.12.

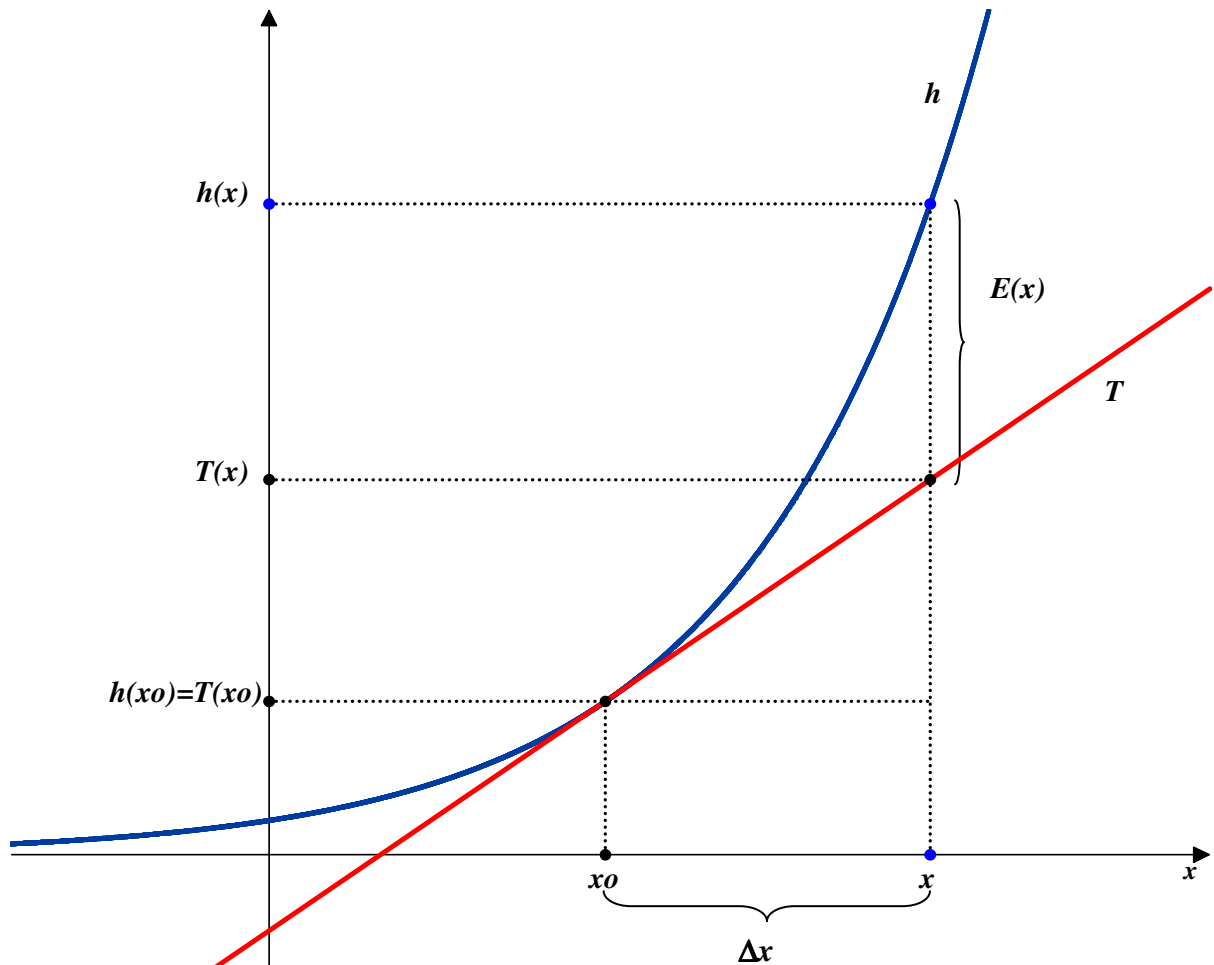


Figura 2.12 - Ilustração da reta tangente à função dada.

Temos então que $h(x) = T(x) + E(x)$, ou,

$$h(x) - h(x_0) = h'(x_0)(x - x_0) + E(x), \quad x \in D_h \quad (\text{IX})$$

onde $E(x)$ é o erro que se comete ao aproximar $h(x)$ por $T(x)$ e

$T(x) = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0)$. Lembrando que $\frac{E(x)}{\Delta x} = \rho(x)$, isto é, $E(x) = \rho(x)(x - x_0)$ e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \rho(x) = 0.$$

Substituindo $x = g(t)$ e $x_0 = g(t_0)$ em (IX) e dividindo ambos os membros por $t - t_0$, $t \neq t_0$, obtemos

$$\frac{h(g(t)) - h(g(t_0))}{t - t_0} = h'(g(t_0)) \cdot \frac{(g(t) - g(t_0))}{t - t_0} + \frac{E(g(t))}{t - t_0}.$$

Calculando o limite em ambos os lados na igualdade acima, observamos que o primeiro membro representará a derivada da função composta $f(t) = h(g(t))$, no ponto t_0 , isto é,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{h(g(t)) - h(g(t_0))}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0)$$

No segundo membro, a primeira parte ficará

$$\lim_{t \rightarrow t_0} h'(g(t_0)) \cdot \frac{(g(t) - g(t_0))}{t - t_0} = h'(g(t_0)) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(g(t) - g(t_0))}{t - t_0} = h'(g(t_0)) \cdot g'(t_0)$$

Por outro lado, de $E(x) = \rho(x) \cdot (x - x_0)$, segue $E(g(t)) = \rho(g(t)) \cdot (g(t) - g(t_0))$.

Temos que $\lim_{t \rightarrow t_0} \rho(g(t)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \rho(x) = 0$.

$$\text{Então, } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{E(g(t))}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \rho(g(t)) \cdot \frac{(g(t) - g(t_0))}{t - t_0} = 0 \cdot g'(t_0) = 0.$$

$$\text{Portanto, } f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{h(g(t)) - h(g(t_0))}{t - t_0} = h'(g(t_0)) \cdot g'(t_0).$$

Devemos enfatizar que, quando falamos do erro de aproximação, $E(x)$, pensamos na diferença entre a função e a sua reta tangente, na vizinhança do ponto de tangência. Quando nos referimos a $\rho(x) = \frac{E(x)}{\Delta x}$ pensamos na diferença entre o coeficiente angular da reta secante e o coeficiente angular da reta tangente, também na vizinhança do ponto de tangência. Nos livros de Cálculo I, geralmente aparece $\rho(x)$, no entanto não fica explicitado qual é o seu significado geométrico.

Uma interpretação gráfica que podemos dar para o fator $\frac{E(g(t))}{t - t_0}$ é pensarmos que é o erro $E(x) = E(g(t))$ que se comete na aproximação da função h pela reta tangente T , dividido pela variação Δt , que está no domínio da função g . Lembrando que a função f é a função composta de h com g , $f(t) = h(g(t))$. Assim esse fator, $\frac{E(g(t))}{t - t_0}$, é a diferença entre o coeficiente angular da reta secante à função f e o coeficiente angular da reta tangente à função f , também na vizinhança do ponto de tangência.

Isto é, o erro que se comete nessa aproximação deveria ser dividido pela variação Δx , já que h está definido em $x = g(t)$. Como estamos lidando com composição de funções, a função g está definida em t . Logo, $\frac{E(g(t))}{t - t_0} = \frac{E(g(t))}{x - x_0} \cdot \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{E(g(t))}{x - x_0} \cdot \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}$, como podemos verificar no gráfico da Figura 2.13.

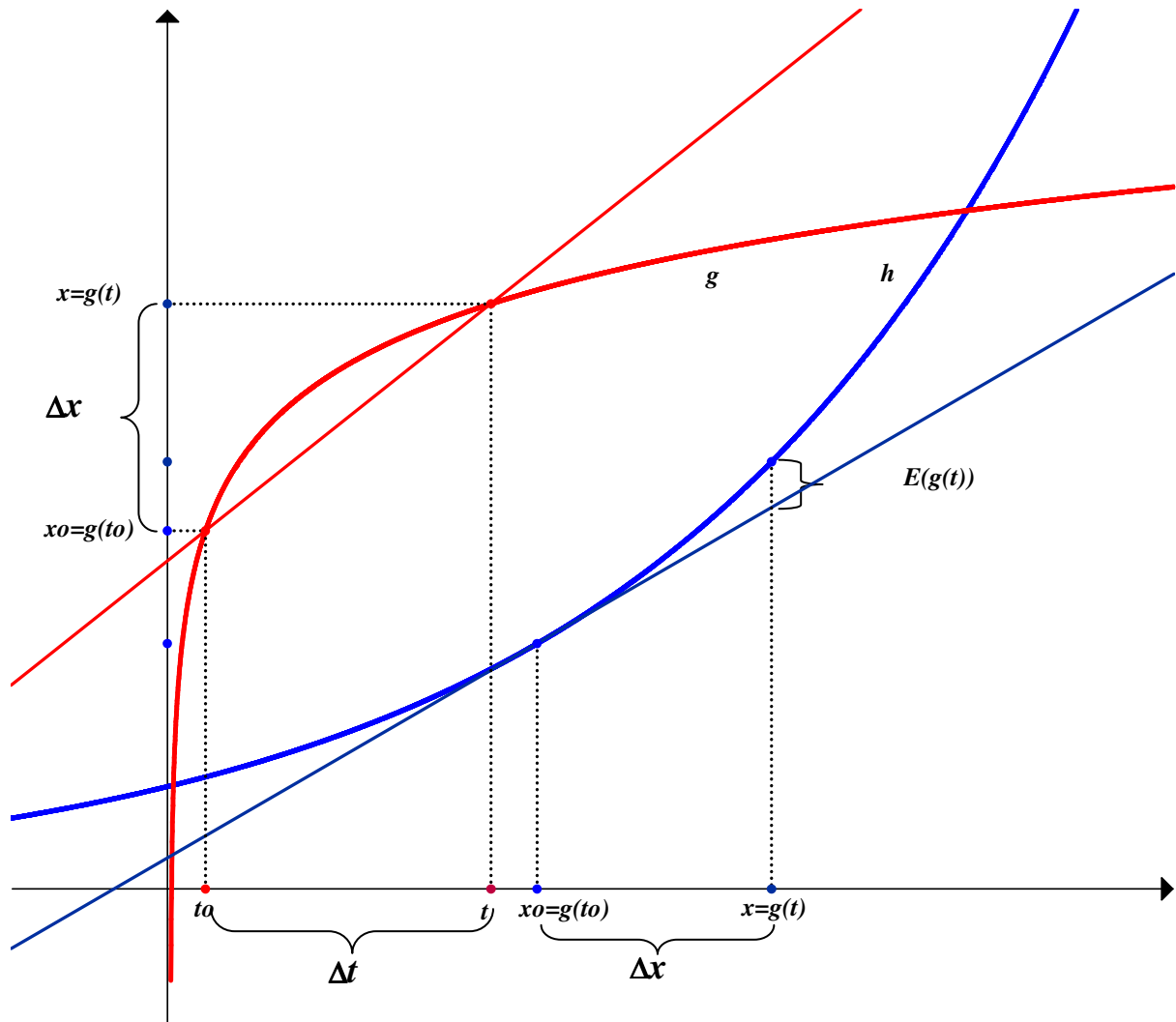


Figura 2.13 - Interpretação gráfica para $\frac{E(g(t))}{t - t_0}$.

Alguns dos autores citados (ANTON et al, 2007a; ANTON et al, 2007b; GUIDORIZZI, 2001) abordam a regra da cadeia de uma forma algébrica, tentando trazer alguns gráficos na demonstração. Outros autores (FINNEY et al, 2002; FLEMMING; GONÇALVES, 1992; LEITHOLD, 1994; SANTOS; BIANCHINI, 2002; SWOKOWSKI, 1994) trazem uma abordagem algébrica e não têm a preocupação em serem formais, procurando enfatizar a aplicabilidade. Guidorizzi (2002) traz uma abordagem aplicada à Administração, não tendo a preocupação com a demonstração, mas desenvolve argumentos de caráter intuitivo. Dessa forma, de acordo com o curso onde é adotado o livro, as abordagens da regra da cadeia e sua demonstração são distintas. Porém, podemos observar que, quando a abordagem traz uma conotação gráfica, a demonstração algébrica não fica isolada e a compreensão da regra da cadeia é estimulada, utilizando-se de várias representações e não apenas a algébrica.

Neste capítulo, apresentei uma revisão da literatura, sobre algumas pesquisas da área de Educação Matemática no Ensino Superior e alguns livros textos de Cálculo, acerca da função composta e regra da cadeia e uma discussão sobre sua demonstração. É importante destacar que foi necessário trazer outros elementos tais como derivada, diferencial, linearização local e uma discussão sobre as notações de Leibniz e Newton.

A partir desse estudo, foi possível notar o predomínio de uma abordagem algébrica em detrimento da abordagem gráfica quando se trabalha com funções compostas e a regra da cadeia. O propósito desse estudo consistiu, então, em tentar entrelaçar uma interpretação gráfica para a demonstração da regra da cadeia, buscando uma alternativa à abordagem estritamente algébrica. Apesar de não ser uma abordagem encontrada nos livros textos de Cálculo, acredito que essa interpretação gráfica, para a regra da cadeia, apoiada no procedimento gráfico para composição de funções, pode potencializar a produção do conhecimento acerca desses tópicos.

CAPÍTULO 3

TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO (TIC) E O CÁLCULO: UM MOSAICO DE PESQUISAS

Neste capítulo, apresento um “mosaico” de algumas pesquisas na área de Educação Matemática, no contexto do Ensino Superior, que analisam questões do ensino e aprendizagem de Cálculo mediado pela inserção das TIC na sala de aula, evidenciando alguns aspectos referentes a essa inserção, tais como visualização e representações múltiplas.

3.1 Inserção das TIC no Ensino Superior

Segundo Pinto (2002), a pesquisa em Educação Matemática sobre o Ensino Superior tem sido desenvolvida há vários anos no Brasil e no exterior. No Brasil, o primeiro encontro de pesquisadores, nesse contexto, ocorreu em 2000, durante o I SIPEM (Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática), onde se constituiu o primeiro Grupo de Trabalho em Educação Matemática no Ensino Superior. De acordo com sua coordenadora, Lílian Nasser, isso se deve ao fato do reconhecimento da Educação Matemática como área de pesquisa, do crescente número de doutores, que estão atuando nas Universidades, e das tentativas de introdução das TIC no cotidiano da sala de aula.

Internacionalmente, a pesquisa nessa área se consolidou a partir da década de 80, com a constituição do grupo *Advanced Mathematical Thinking Group*, durante o encontro anual do *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, em 1985. David Tall, um

dos líderes desse grupo, publicou um livro com o título *Advanced Mathematical Thinking*, em 1991 (TALL, 1991), que alavancou a pesquisa em Educação Matemática, do ponto de vista teórico, no Ensino Superior. Esse livro está dividido, além da introdução, em três partes: *A Natureza do Pensamento Matemático Avançado*, *Teoria Cognitiva do Pensamento Avançado*, *Pesquisas no Ensino e Aprendizagem do Pensamento Avançado de Matemática*, com vários artigos de diversos autores, relatando seus estudos sobre o tema. Segundo Tall (1991), o livro foi destinado a matemáticos e educadores matemáticos, para proporcionar um interesse pelas dificuldades cognitivas experienciadas por estudantes universitários. Para o autor, é essencial entender a natureza do pensamento matemático, caracterizado como um conjunto de competências complexas que os alunos universitários deveriam apresentar, tais como, representar e relacionar objetos matemáticos, elaborar generalizações, levantar conjecturas e demonstrar teoremas.

Pinto (2002) faz um levantamento das pesquisas nessa área, no Brasil, e salienta que, no início, os trabalhos desenvolvidos fundamentaram-se na Psicologia da Educação, mas que abordagens distintas têm se articulado ou vêm sendo trabalhadas sob outros pontos de vistas, como os da Sociologia ou da Filosofia. De maneira geral, as pesquisas têm questionado a matemática que se ensina e o modo que é ensinada nas Universidades, buscando compreender as dificuldades e limitações dos estudantes e da prática docente. Além disso, essas pesquisas buscam elaborar e avaliar alternativas para a sala de aula, ou mesmo discutir uma eventual inadequação de currículos e programas. Nesse trabalho, a autora classifica a produção em Educação Matemática no Ensino Superior, no Brasil, em alguns tópicos, mas salienta não ter registrado, nessa classificação, pesquisas sobre novas tecnologias e ensino à distância e sobre um debate mais amplo acerca da formação de professores, que também dizem respeito à Educação nas Universidades.

A partir dos anos 80, a literatura existente na área de Educação Matemática vem apresentando uma intensa discussão acerca da inserção das TIC, tais como calculadoras e computadores, na sala de aula. Segundo Borba e Penteado (2002), nessa época, havia uma polarização entre os que eram a favor e contra o seu uso. Uma grande maioria argumentava que o custo era muito alto e que haveria um provável fim da profissão docente e uma conseqüente desumanização do aluno. Por outro lado, os que defendiam o uso das TIC, pareciam “endeusar” as máquinas e apontavam o seu uso como a solução dos vários problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem.

Essas idéias têm se modificado desde a década de 80, e apontado para os efeitos positivos, mas também indicam que o uso inadequado de ambientes computacionais pode não

obter resultados desejados, ou até mesmo não ter efeito algum. Hunter et al (1993 *apud* Giraldo et al, 2002) observaram que estudantes, ao usarem o programa *Derive*, por exemplo, não precisavam substituir valores para obter uma tabela e esboçar um gráfico e por isso não desenvolveram a capacidade de cálculo por substituição. Giraldo et al (2002) apontam para os efeitos positivos e concordam que a eficácia dos computadores, no ensino e na aprendizagem da Matemática, não depende de qualquer característica intrínseca dos equipamentos utilizados, mas é consequência da forma como a máquina é empregada. Os autores defendem que “o uso inadequado de ambientes computacionais pode contribuir para a cristalização da concepção de que as limitações da representação são na verdade características do próprio objeto considerado, levando à formação de imagens conceituais¹ restritas” (GIRALDO et al, 2002, p.4). Assim, para esses autores, se os conflitos teórico-computacionais, que são quaisquer situações nas quais uma representação computacional é aparentemente contraditória com a formulação teórica associada, forem enfatizados, ao invés de evitados, as características inerentes a cada forma de representação podem contribuir para o enriquecimento de imagens conceituais.

Pierce e Stacey (2001) indicam que, ao utilizar a informática, o foco do processo de aprendizagem está nos conceitos e não nos procedimentos. Eles relatam que os alunos, que usaram os sistemas de computação algébrica (CAS²) mostraram uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos do que o grupo que frequentou as aulas sem o uso dessas tecnologias. Argumentam ainda que isso se deve ao fato do computador retornar as respostas rapidamente e os alunos poderem avaliá-las. Os alunos utilizaram muitos exemplos com representações múltiplas, ocupando-se com discussões entre eles e o professor. De um modo geral, segundo os autores, parece que o comportamento dos estudantes que utilizaram as TIC foi diferente daqueles que não tinham nenhum contato com elas. Os autores evidenciam, ainda, que a utilização dos computadores conduz os estudantes a modos de pensar e produzir conhecimentos típicos do ambiente informático, que pode ser favorável à compreensão de conceitos matemáticos.

Segundo Habre e Abboud (2005), a disciplina CDI vem sofrendo mudanças fundamentais em seu currículo, com uma ênfase na visualização. Esse modo de representar conceitos matemáticos está ganhando mais força devido aos avanços com as TIC, incluindo o

¹ Imagem conceitual (TALL; VINNER, 1981) consiste de toda estrutura cognitiva, na mente de um indivíduo, associada a certo conceito matemático, constituída de todas as imagens mentais, representações visuais, descrições verbais e impressões associadas a este conceito. Geralmente relacionada à primeira visão ou sensação que vem à mente ao ouvir ou ler uma palavra.

² CAS - Computer algebra system.

desenvolvimento de softwares matemáticos dinâmicos. Esses autores focalizam a compreensão dos estudantes, de um curso de Cálculo Reformado que foi oferecido em duas seções experimentais na Lebanese American University em Beirute, Líbano, acerca de função e de sua derivada. Os resultados mostram que a abordagem geral adotada no curso foi impopular para uma grande maioria dos estudantes, mas vista com bons olhos por outros alunos. As entrevistas e um estudo do desempenho de alguns estudantes sobre perguntas específicas revelaram que, para a maioria deles, a representação algébrica de uma função ainda domina seus pensamentos. No entanto, esses estudantes mostraram um entendimento quase completo de derivada, particularmente a idéia sobre taxa instantânea de variação e/ou mudança do declive de uma curva em um determinado ponto. Além disso, poucos estudantes recorreram aos métodos mecânicos para encontrar a derivada.

Apesar da quantidade de pesquisas envolvendo a informática no ensino e na aprendizagem do Cálculo, com orientações próprias em boa parte de suas características, tais como, referenciais teóricos, objetivos, metodologias, perfil da população pesquisada, conteúdos específicos abordados e tipos de TIC utilizadas, ainda existem lacunas a serem preenchidas. A utilização das TIC, na sala de aula, foi impulsionada a partir da década de 90, com a popularização de plataformas amigáveis e com aplicações nas diversas áreas do conhecimento e em outros setores da sociedade de modo geral. Atualmente, com a utilização de softwares gratuitos, o acesso a essas tecnologias tem sido menos dispendioso.

3.2 Inserção das TIC na Produção do Conhecimento Matemático

Algumas pesquisas sobre o papel das diferentes TIC na produção do conhecimento matemático estão relacionadas com o Ensino Superior. Esses trabalhos abordam as diferentes perspectivas que podem emergir da relação humana com os computadores, formando assim um “mosaico” de pesquisas em torno dessa temática.

Tall (1989) atribui ao computador a função de *generic organizer*. O termo é utilizado para designar ambientes (ou micro mundo) que permitem ao aluno manipular exemplos e, se possível, contra-exemplos de um conceito matemático específico ou sistemas relacionados de conceitos. O *software Graphic Calculus* desenvolvido por Tall (1987) inclui vários *generic organizer* para a exploração dos principais conceitos de Cálculo. Esse ambiente pode ajudar o aluno a ganhar experiências que prepararão sua estrutura cognitiva para que possa refletir sobre a construção de conceitos mais abstratos. O computador pode ser uma fonte rica de

imagens visuais que seriam, por vezes, impossíveis de serem obtidas sem esse recurso. Tall (1992) ilustra esse aspecto, usando a ampliação (*zoom*) para aumentar significativamente partes específicas de um gráfico e, visualmente, analisar a linearidade local (ou não) de um gráfico para complementar a noção de diferenciabilidade (ou não) de uma função em um ponto. Esse autor tem se preocupado com questões em torno das dificuldades encontradas na aprendizagem de conceitos fundamentais de Cálculo, tendo a psicologia cognitiva como pano de fundo para suas análises epistemológicas.

Borba e Villarreal (1998) discutem três teorias (substituição, suplementação e reorganização) sobre como os computadores, ou as calculadoras gráficas, podem se relacionar com a cognição. Enfatizam o tipo de discussão que emerge em uma sala de aula quando as calculadoras gráficas são utilizadas regularmente. Mostram as discussões de um grupo de alunos do curso de Biologia, utilizando as calculadoras gráficas a partir de uma abordagem experimental, acerca do conceito de derivada. A partir de uma pergunta, “É possível fazer o gráfico da função $y = x^2$ usando apenas linhas retas?” (BORBA; VILLARREAL, 1998, p.139), os autores observam uma intensa discussão matemática na sala de aula e conectam essa discussão às três teorias apresentadas.

Villarreal (1999) apresenta um estudo que tem por objetivo caracterizar os processos de pensamento dos estudantes, ao trabalharem com questões matemáticas relacionadas com o conceito de derivada, em um ambiente computacional. Essa autora realizou experimentos de ensino com estudantes do curso de Ciências Biológicas, junto a disciplina Matemática Aplicada, e explorou profundamente a visualização de gráficos, a partir de um sistema computacional, articulando-a com a oralidade. A autora contribuiu no sentido de oferecer descrições do pensamento matemático, das dificuldades dos estudantes e das possibilidades do trabalho coletivo onde seres humanos e computadores interagem. Para a autora, o pensamento matemático é permeado e reorganizado pelas mídias utilizadas que constituem, com os estudantes e a pesquisadora, uma *ecologia cognitiva* particular.

Olímpio (2006) discute, em sua investigação, por meio de experimentos de ensino, compreensões emergentes sobre os conceitos de função, limite, continuidade e derivada, produzidos em um ambiente formado por alunos ingressantes em um curso de Matemática, oralidade, escrita e informática. O autor sugere que os conflitos emergentes na transição da Matemática do Ensino Médio para o Ensino Superior têm suas raízes em uma limitada compreensão do conceito de função. A pesquisa do autor também propõe uma maior e mais intensiva exploração da natureza dinâmica dos conceitos do Cálculo.

Scucuglia (2006) mostra, em sua pesquisa, como a tecnologia³ condicionou o pensamento dos estudantes na investigação do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), realizando experimentos de ensino com alunos do curso de Matemática. Observa que o coletivo pensante, formado por estudantes com calculadoras gráficas, estabeleceu conjecturas sobre o TFC. Com o propósito de chegar à demonstração desse Teorema, o autor utilizou noções intuitivas e notações simplificadas, para depois formalizar a demonstração. Adotou a abordagem experimental-com-tecnologias, que é um processo de exploração, ou experimentação, de conceitos matemáticos com a utilização das TIC, e que possibilitou o envolvimento de estudantes em discussões matemáticas com características dedutivas obtidas de maneira experimental. No contexto dessa pesquisa, o autor evidenciou o modo como entendimentos emergentes na investigação/experimentação com Calculadoras Gráficas podem condicionar a (re)elaboração de conjecturas, argumentações, justificativas e permear harmoniosamente discussões matemáticas gradativamente rigorosas.

Javaroni (2007) analisou as possibilidades de ensino e aprendizagem da introdução às Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) a partir da abordagem qualitativa de alguns modelos matemáticos auxiliada pelas TIC. Foi realizado um curso de extensão onde os alunos investigaram os modelos de um objeto em queda, de crescimento populacional de Malthus, de crescimento populacional de Verhulst e da lei de resfriamento. O processo de visualização em atividades investigativas auxiliadas pelas mídias informáticas, as abordagens algébricas e geométricas com as mídias informáticas e o conhecimento como rede de significados foram temas abordados pela autora. A interação entre os alunos e as mídias utilizadas propiciou novas possibilidades para a abordagem qualitativa dos modelos estudados, levando assim a sugerir a necessidade de repensar o ensino das equações diferenciais ordinárias, enfatizando o aspecto geométrico de modelos matemáticos além do aspecto algébrico.

Farias (2007) apresenta um estudo epistemológico das representações matemáticas mediadas por softwares educativos, em uma perspectiva semiótica. A autora trabalhou com alunos do 1º ano do curso de Matemática, da UNESP - *campus* de Rio Claro, na disciplina CDI, por meio de observações, entrevistas e aplicações de atividades exploratórias-investigativas, que versavam sobre continuidade, derivada de uma função em um ponto e otimização. A aplicação dessas atividades teve por finalidade perceber possíveis dificuldades dos estudantes perante a exploração das representações múltiplas, associadas ao uso de softwares como o Winplot e Maple. A análise da autora indica que, ao explorar o universo de

³ Calculadora Gráfica TI-83.

signos das representações, podem-se agregar valores à constituição do conhecimento de futuros professores de Matemática, ressaltando a importância de se transitar entre as representações múltiplas no processo de investigação e interpretação dos conceitos.

Menk (2005) apresenta uma investigação acerca das possíveis contribuições de um *software* de Geometria Dinâmica na exploração de problemas de Máximos e Mínimos, principalmente aqueles que, de alguma forma, estão relacionados aos conceitos e às propriedades geométricas. Para o desenvolvimento dessa pesquisa, a autora optou por utilizar o *software* Cabri-Géomètre II e realizar experimentos de ensino. Tais escolhas permitiram vivenciar momentos nos quais os alunos, do 2º ano de um curso de Licenciatura em Matemática da cidade de Assis (SP), puderam construir, experimentar, formular, testar, validar ou refutar hipóteses, relacionadas às condições do problema de uma forma dinâmica e diferente da habitualmente utilizada por eles nas aulas da disciplina CDI. Com base nos resultados observados, a autora acredita que esse procedimento possa criar condições que possibilitam facilitar a interpretação, a observação, a análise e a resolução dos problemas considerados. A forma como foram desenvolvidas as atividades, privilegiando a simulação e a visualização, permitiram criar situações nas quais se pôde “ver” o processo de *como* se desenvolveu o raciocínio dos alunos em várias situações.

As pesquisas apresentadas, até aqui, têm analisado questões sobre o ensino e aprendizagem de alguns conceitos fundamentais do Cálculo utilizando as TIC. Além disso, têm indicado que as relações entre os aspectos algébricos, gráficos e numéricos podem ser enfatizadas na produção e compreensão de conceitos e suas aplicações, sugerindo que o papel das habilidades algorítmicas seja deixado a cargo dessas TIC. A visualização e as representações múltiplas serão particularmente analisadas a seguir.

3.3 Visualização

Nesta seção, trago algumas concepções associadas à visualização e seu *status* na comunidade de matemáticos e educadores matemáticos. Ao final, apresento a concepção que será adotada nesta tese.

As imagens foram, muitas vezes, consideradas apenas um apoio para imaginar o gráfico de uma função, dada por sua expressão algébrica. Pautada na escrita estática, as imagens nem sempre foram consideradas parte integrante na produção do conhecimento matemático. Com o advento das TIC, a imagem passou a ser um recurso fundamental, devido ao fato de se

poder manipulá-la de forma dinâmica. A abordagem visual de um conceito matemático, ou de qualquer outra área do conhecimento, pode ser considerada, atualmente, como um dos elementos que caracterizam novos modos ou estilos de produção do conhecimento.

Em Villarreal (1999) e Borba e Villarreal (2005) podemos encontrar uma vasta literatura sobre esse tema. Para esses autores, o componente visual parece ser o principal foco desde que os computadores passaram a ter monitor de vídeo. Segundo esses autores, embora seja um processo bastante privilegiado em ambientes computacionais, a visualização é, muitas vezes, menosprezada pela comunidade de educadores matemáticos. Os autores apresentam em seus trabalhos algumas definições e terminologias associadas à visualização, tais como, habilidade espacial, imagens mentais, imagem visual e visualização.

Por habilidade espacial entende-se a capacidade em gerar, reter e manipular imagens espaciais abstratas. A imagem mental corresponde à percepção de um objeto mesmo quando esse não está presente aos órgãos dos sentidos. A imagem visual é um esquema mental que representa uma informação visual ou espacial, que inclui diferentes tipos de modelos e pinturas na mente (imagens pictóricas), imagens mentais de fórmulas, imagens através de movimento do corpo e imagens dinâmicas.

A visualização é a habilidade de interpretar e entender a informação figural e a capacidade de conceitualizar e transladar relações abstratas e informações não figurais (representações) em termos visuais. Podem-se distinguir, assim, dois processos: interpretação da informação visual e a geração de imagens visuais de informações não figurais (representações).

Muitos conceitos e processos matemáticos podem ser visualizados através de diagramas ou gráficos. A visualização na Matemática é um processo de formação de imagens (mental ou com papel e lápis, material concreto, ou com ajuda das TIC) de conceitos abstratos, para usá-las com o intuito de se obter um melhor entendimento e de estimular a descoberta matemática. É um tipo de raciocínio baseado no uso de elementos visuais e espaciais para resolver problemas ou provar propriedades. É um ato no qual é estabelecida uma conexão entre a construção interna (o que está na mente) e alguma coisa acessada dos sentidos (está fora: papel, computador, etc.).

A visualização, além de ser uma habilidade, também é compreendida como uma linguagem que pode comunicar a Matemática, quando a abordagem algébrica não consegue ser expressa. Também é considerada uma metodologia em que novas conjecturas podem ser feitas e ajudar o desenvolvimento matemático. No entanto, existe uma grande resistência em

reconhecer o papel da visualização na prova formal de teoremas e propriedades da Matemática.

Borba e Villarreal (2005) argumentam que, embora a visualização na Educação Matemática seja enfatizada como um processo que relaciona a compreensão dos estudantes à mídia externa, processo esse primordial para descobertas matemáticas, seu papel ainda é visto como secundário pela comunidade de matemáticos, pois a abordagem visual não alcança o grau de importância que assume a abordagem algébrica nos processos de aprendizagem. Para os autores, a visualização, tanto para a Matemática quanto para a Educação Matemática, é reconhecida, embora com *status* diferente, seja ela apresentada com o uso das TIC ou não.

Dreyfus (1991) argumenta que visualização é um processo pelo qual as representações mentais ganham existência. De acordo com esse autor, o raciocínio visual não significa apenas dar suporte à descoberta de novos resultados e de prová-los, mas deveria ser desenvolvido dentro de uma aceitável maneira de raciocínio, incluindo a prova de teoremas matemáticos.

Para Arcavi (2003), a visão é um ponto central para o ser humano biológico e sócio-cultural. As pessoas têm usado imagens para gravação e comunicação de informações desde a era de pinturas nas cavernas. E muito do que não vemos a olho nu, como alguns micros organismos e várias células, por exemplo, podemos visualizar usando a tecnologia óptica. Porém, existe um “mundo abstrato” que nenhuma tecnologia “visualiza” para nós: a Matemática, como uma criação humana e cultural, que lida com objetos e entidades bastante diferentes de fenômenos físicos, apóia-se na visualização em suas diferentes formas e níveis, seja na geometria ou na representação gráfica de uma função. No entanto, Arcavi (2003) argumenta que, apesar da importância óbvia de imagens visuais em atividades cognitivas humanas, a representação visual permanece uma cidadã de segunda classe na teoria e na prática da Matemática. O autor defende que as formas visuais de representação podem ser importantes como elementos legítimos de provas matemáticas, pois,

visualização é a habilidade, o processo e o produto de criação, interpretação, e o uso da reflexão sobre quadros, imagens, diagramas, em nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com o propósito de descrever e comunicar a informação, enquanto pensamos sobre e desenvolvemos idéias previamente desconhecidas e avançamos nas compreensões (ARCAVI, 2003, p.217, tradução nossa).

Para Guzmán (2002), os conceitos matemáticos, as idéias e os métodos têm uma grande riqueza de relações visuais que são intuitivamente representáveis de modo variado. O uso dessas representações é benéfico do ponto de vista da apresentação para os outros e para a manipulação ao resolver problemas. “Visualização surge desse modo, não só como algo absolutamente natural no nascimento do pensamento matemático, mas também na descoberta de novas relações entre objetos matemáticos e, também, no processo de transmissão e comunicação que é próprio à atividade matemática” (GUZMÁN, 2002, p.2-3, tradução nossa).

Guzmán (2002) argumenta que a visualização humana, até mesmo o fenômeno aparentemente superficial que denominamos “visão”, em seu sentido mais fisiológico, não é um processo que somente envolve os nossos olhos, mas muito mais complexo, pois requer a atividade de nosso cérebro. Talvez na criança recém nascida, o fenômeno seja semelhante ao que acontece a uma máquina fotográfica, contudo, mais tarde os processos cerebrais transformam a imagem em uma verdadeira interpretação mental, o que antes era apenas um fenômeno óptico físico simples. A visualização tem muito mais um peso de interpretação, codificação e decodificação, o qual intervém um mundo inteiro de intercâmbios pessoais e sociais e, uma boa parte deles, arraigado na história da atividade matemática. A visualização não é, então, uma visão imediata das relações, mas uma interpretação do que se apresenta a nossa contemplação que, apenas podemos fazer, quando aprendemos a lidar apropriadamente com o tipo de comunicação que nos oferece.

Assim, nesta pesquisa, a concepção adotada para visualização é a de um processo que associa a compreensão dos estudantes, entre si, e a mídia externa. Desse modo, considero que a visualização é um processo essencial na elaboração de novas conjecturas que podem ser refutadas ou confirmadas. A visualização, realçada pelas TIC, pode alcançar uma nova dimensão, onde a animação, proporcionada pelos recursos computacionais, constitui um elemento primordial, quando as imagens são vistas de forma dinâmica e interpretadas pelos alunos em outras formas de produzir o conhecimento acerca de função composta e regra da cadeia, integrando as representações gráficas, algébricas e numéricas.

Levando em conta o exposto anteriormente, a representação gráfica, potencializada pela visualização, é uma das representações múltiplas que podem transformar a interpretação e o entendimento dos conceitos matemáticos. E são as representações múltiplas que serão o foco da próxima seção.

3.4 Representações Múltiplas

Segundo Allevato (2007), um importante recurso para a verificação de algumas conjecturas, feitas sobre determinados objetos matemáticos, ou sobre a compreensão dos conceitos matemáticos, constitui-se nas várias representações, ou em representações múltiplas. O conjunto de conjecturas e refutações presencia um elevado grau de incerteza que se estabelece em ambientes com as TIC, que pode levar a caminhos não imaginados e, muitas vezes, completamente inesperados. Os alunos têm a possibilidade de se moverem entre as representações algébricas e gráficas de funções, bem como as tabulares.

Algumas pesquisas (ALLEVATO, 2005; PIERCE; STACEY, 2001) revelam que se os alunos estão mais familiarizados com o ambiente computacional, então eles demonstram preferência pela representação gráfica e que as representações numéricas (ou tabulares) são menos, ou pouco, utilizadas. A justificativa para isso se deve ao fato de que alguns softwares permitem passar das representações algébricas às gráficas com mais facilidade, apenas clicando em um ícone. Com relação às representações numéricas (ou tabulares), parece que apenas seriam usadas na fase de introdução conceitual. A representação numérica seria considerada pouco eficiente para a compreensão dos conceitos relacionados ao estudo de funções, apesar de ser reconhecida alguma vantagem, ao se usar planilhas eletrônicas, no estudo de limite de funções.

DeMarois e Tall (1996) consideram o termo faceta para se referirem aos diferentes aspectos que compõem o conceito de função. As facetas de uma função são os vários modos de pensá-la e comunicá-la, incluindo as formas verbais e escritas, os gestos, as formas coloquiais, as notações convencionais, os aspectos numéricos, simbólicos e geométricos. Em relação à composição de funções, esses autores elaboraram algumas questões e entrevistaram uma aluna que já havia completado dois semestres em álgebra. Usaram a entrevista sobre composição de funções para sondarem em profundidade as facetas (representações) numéricas (usando tabelas), geométricas (usando gráficos) e simbólicas (usando expressões algébricas). À aluna foram dadas duas tabelas de valores numéricos associados às duas funções f e g distintas, sem suas expressões algébricas, e foi perguntado um valor numérico da composição entre essas funções. Após muita confusão por parte da aluna, o entrevistador apresentou algumas dicas acerca da função “interna”, mas a aluna se confundiu com o que seria a entrada e saída na tabela e o entrevistador explicou o seu significado. Depois de superada a dificuldade para com essa representação, o entrevistador passou para uma representação

gráfica e, novamente, fez a mesma pergunta em relação ao valor obtido para a composição e a aluna foi incapaz de respondê-la. Porém, quando o entrevistador fez a mesma pergunta, usando a expressão algébrica, apesar de certa confusão, a aluna foi capaz de interpretar a expressão algébrica. Os autores entendem que, embora as expressões algébricas pareçam ser mais complexas, os estudantes operam melhor com essa representação do que com as representações numéricas, dadas por uma tabela, ou geométricas, dadas por um gráfico.

Borba e Scheffer (2004), em consonância com DeMarois e Tall (1996), também consideram que os gestos são interfaces de representações múltiplas e revelam como essas interfaces podem revitalizar a discussão sobre representações múltiplas. Nesse artigo, os autores mostram que as interfaces como sensores (CBR⁴) acoplados ao computador, são apropriadas para uma transformação, quando envolvem a coordenação do corpo em movimento com as representações usuais da Matemática, tais como tabelas, gráficos e expressões algébricas. Os autores entendem, ainda, que tais representações poderiam ser coordenadas e articuladas com os gestos, com a comunicação oral e com outras ações do corpo, ampliando o aspecto epistemológico das representações múltiplas.

Borba e Confrey (1996) afirmam que, tradicionalmente, para as funções, tem sido dada mais ênfase à manipulação algébrica e que existe um relativo isolamento para as abordagens visuais. Ao coordenar representações múltiplas (gráficas, numéricas e algébricas), a Matemática visual ou discreta pode ser usada como recurso para os estudantes que rejeitam a hegemonia da álgebra. Os autores realizaram um experimento, com um aluno do curso de Matemática, que foi desenvolvido a partir de uma sequência de tarefas baseadas em uma abordagem gráfica e com o uso de tabelas, fornecidas pelo *software Function Probe*. A representação gráfica e a tabela foram de encontro, opondo-se, à suposição do aluno, que parecia certa na representação algébrica, se olhada isoladamente. No decorrer do episódio, essa discrepância oferecida pelo computador gerou no aluno um comportamento de busca e investigação.

Em experimentos conduzidos por Villarreal (1999), as representações múltiplas foram bastante usadas nas atividades que envolviam noções de função derivada e de reta tangente. No primeiro momento, os alunos recorreram ao *zoom* para obter uma melhor visualização e, em seguida, valeram-se da abordagem algébrica para tirarem suas dúvidas. Esse exemplo mostra a importância de se trabalhar com representações múltiplas, pois os estudantes

⁴ CBR - *Calculator Based Ranger*: detector sônico de movimento que mede distância, velocidade e aceleração.

produzem novos conhecimentos e atribuem novos significados aos conteúdos a partir das interações com o computador.

Segundo Dreyfus (1991), novas idéias matemáticas são mais bem lembradas e entendidas se o estudante pode conectá-las ao seu conhecimento prévio. A exploração de problemas sob várias perspectivas acrescenta profundidade ao entendimento de conceitos pelos estudantes. Para o autor, não se adquire o apoio necessário para administrar bem a informação a menos que as várias representações sejam corretamente e fortemente conectadas. É necessária a possibilidade de troca de uma representação para outra, sempre que essa for mais eficiente para o que se deseja resolver.

3.5 Contextualizando o Presente Estudo

Podemos observar, pelos trabalhos apresentados até aqui, que as representações múltiplas são percursos pelos quais o aluno poderia transitar e produzir conceitos matemáticos. No entanto, como tradicionalmente os alunos estão, muitas vezes, condicionados pela escrita linear, eles manipulam melhor a representação algébrica e negligenciam as outras, o que pode comprometer a produção do conhecimento como um todo.

Um exemplo desse fato é quando um aluno manipula, algebricamente, a equação $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{x}$ em que a igualdade só é válida para valores de $x \geq 0$. Ao inserir essas expressões, separadamente, no *software* Winplot, o aluno obtém os gráficos das funções $f(x) = \sqrt[4]{x^2}$ e $g(x) = \sqrt{x}$, conforme Figura 3.1.

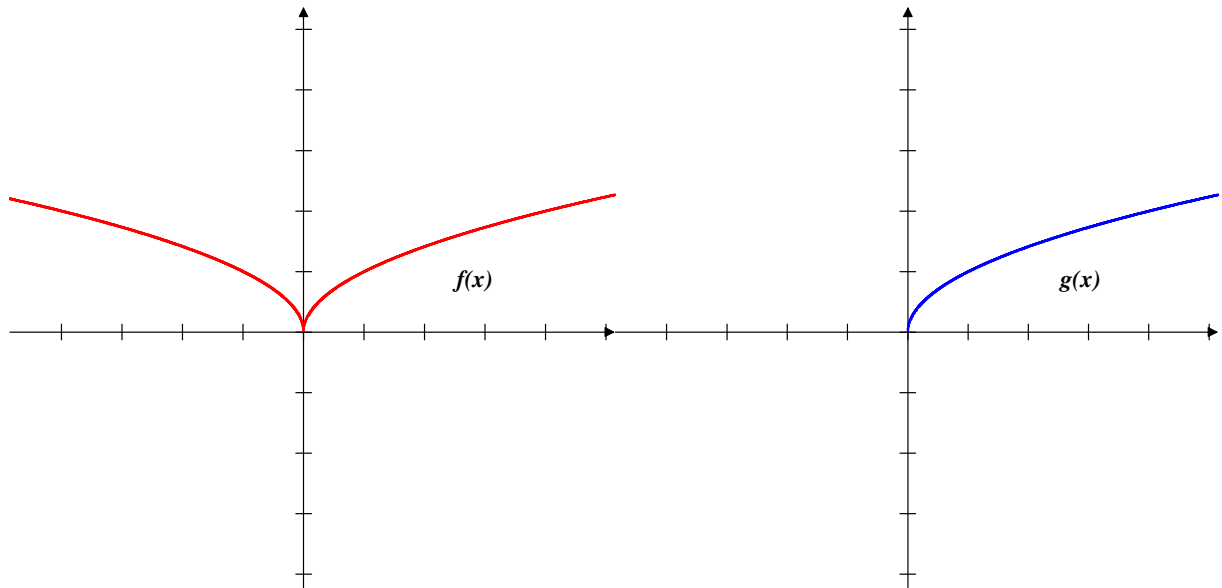


Figura 3.1 - Gráficos das funções $f(x)=\sqrt[4]{x^2}$ e $g(x)=\sqrt{x}$, respectivamente.

Através desses exemplos, o aluno pode associar a representação gráfica à algébrica e, ao trabalhar com funções, pode observar que as funções f e g têm domínios distintos e, por isso, não poderiam ser iguais em todos os pontos.

Considerando o leque de trabalhos apresentados neste capítulo, os quais abordam a inserção do computador no ensino e na aprendizagem da disciplina CDI, trabalhando, especificamente, com os tópicos funções, continuidade, reta tangente, derivada e suas aplicações em otimização, Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) e Equações Diferenciais Ordinárias, busco inserir-me nesse contexto, contribuindo para a formação de um “mosaico” de pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem do Cálculo. À esta tese será dada mais ênfase ao modo como os alunos, juntamente com as TIC, produzem seu conhecimento matemático, especificamente, aos tópicos sobre função composta e regra da cadeia, inseridos na disciplina CDI.

Ainda, como esta pesquisa trata de tópicos específicos da disciplina CDI, procurei trazer autores que os abordam e que realçam as dificuldades dos alunos relacionadas com a manipulação das representações algébricas e numéricas, em detrimento das representações gráficas. Cottrill (1999) enfatiza ainda que muitas das dificuldades, que os alunos apresentam na compreensão de regra da cadeia, podem estar associadas à inabilidade de demonstrar graficamente a composição de funções. Apesar de fazer essa afirmação, esse autor não apresenta uma proposta para minimizar essa dificuldade.

A exploração das atividades investigativas (PONTE et al, 2003), teve o propósito de trazer questões que favorecessem a produção do conhecimento acerca de função composta e

regra da cadeia, proporcionando ricas oportunidades de aprendizagem para os alunos. Segundo Ponte et al (2003), investigar é procurar conhecer o que não se sabe e para isso é necessário que o aluno seja colocado a explorar e a formular questões, a fazer conjecturas, justificando e avaliando os resultados.

Assim, esta tese vem ao encontro dos estudos desses autores supracitados e visa preencher uma lacuna apresentando uma abordagem gráfica para a introdução de regra da cadeia. Cabe ressaltar que, com este estudo empírico, apoiado nessa proposta, pretendo construir uma visão crítica sobre a mesma. Sintetizando esse capítulo, retomo a pergunta de pesquisa que foi se configurando ao longo desta tese:

Como o coletivo, formado por alunos-com-mídias, produz o conhecimento acerca de Função Composta e Regra da Cadeia, a partir de uma abordagem gráfica?

Essa pergunta traz a concepção de que o conhecimento é produzido por um coletivo alunos-com-mídias, onde os tópicos sobre função composta e regra da cadeia serão tomados a partir das representações gráficas, articulando-as com as demais representações.

Penso que a exploração das atividades, com conotações investigativas, está conectada com a interpretação proporcionada pela visualização, que conduz a uma discussão sobre as representações múltiplas. Entendo que essas representações possam se integrar de modo a produzir um novo conhecimento acerca de função composta e regra da cadeia. Busco, dessa forma, abordar tais tópicos de maneira a não se ter apenas a expressão algébrica a ser calculada, permitindo que alunos que tenham dificuldade em lidar com a manipulação algébrica, possam ter diferentes perspectivas em termos de outras representações.

Entendo que as dificuldades inerentes a esses tópicos devem-se ao fato de se dar uma ênfase maior às fórmulas, e não à integração das representações gráficas, numéricas e algébricas, que podem conduzir a novas conjecturas.

Finalizando, pelas pesquisas anteriormente citadas, podemos observar que a produção do conhecimento matemático está intrinsecamente conectada à exploração das representações múltiplas e ao deslocamento entre elas. As TIC potencializam esse deslocamento e modificam o modo de se produzir o conhecimento, que será tratado no próximo capítulo.

CAPÍTULO 4

A PRODUÇÃO DO CONHECIMENTO E O CONSTRUCTO SERES-HUMANOS-COM-MÍDIAS

Neste capítulo, apresento algumas idéias acerca da produção do conhecimento, especificamente sobre a produção do conhecimento matemático visto como processo e a interlocução com o constructo teórico seres-humanos-com-mídias.

4.1 Introdução

O que é conhecimento? O que é conhecer? Como alguém produz conhecimento? Esses, dentre outros questionamentos, permeiam o pensamento de vários dos pesquisadores em Educação. Em particular, em relação à produção do conhecimento matemático, esses são alguns dos questionamentos dos pesquisadores em Educação Matemática.

A psicologia cognitiva tem se desdobrado para entender os processos cognitivos mediante os quais o sujeito do conhecimento gera conhecimento. A sociologia, primordialmente a do conhecimento, tem focado o conhecimento como produto social, cultural, histórico. O materialismo histórico dialético tem mostrado como o sujeito do conhecimento é determinado pelo contexto histórico que é materialmente constituído pelos produtos culturais (BICUDO, 2005, p.21-22).

No Dicionário Aurélio eletrônico - Século XXI (AURÉLIO, 1999), o significado do termo *conhecimento* é dado por “1. Ato ou efeito de conhecer. 2. Idéia, noção. 3. Informação, notícia, ciência. 4. Prática da vida; experiência. 5. Discernimento, critério, apreciação. 6. Consciência de si mesmo; acordo.” Já *conhecer* é definido por “1. Ter noção, conhecimento, informação de; saber. 2. Ser muito versado em; conhecer bem. 3. Travar conhecimento com. 4. Ter relações, convivência com. 5. Ter conhecimento de causa; ter experimentado. 6. Distinguir, reconhecer. 7. Apreciar, julgar, avaliar. 8. Ter indícios certos de; prever. 9. Sentir, experimentar. 10. Estar ou ficar certo, convencido de; reconhecer”.

Podemos observar que os significados são apresentados de maneira cíclica, de modo que um termo leva ao outro, o que não proporciona um esclarecimento de fato. A visão de conhecimento, subjacente a esta tese, será considerada não o que *é* o conhecimento, mas como *é produzido* ou como *é desenvolvido*.

4.2 A Produção do Conhecimento

Para Moran (2006), o conhecimento não é fragmentado, mas sim interdependente e interligado. Conhecer significa compreender todas as dimensões da realidade, captar e expressar essa totalidade de forma ampla e integral. Conhecemos mais e melhor conectando, juntando, relacionando, acessando o nosso objeto de todos os pontos de vistas, por todos os caminhos e integrando-os da forma mais rica possível. Pensar é aprender a raciocinar e a organizar logicamente o discurso, submetendo-o a critérios. “Aprender é passar da incerteza a uma certeza provisória que dá lugar a novas descobertas e a novas sínteses” (MORAN, 2006, p.17). Aprendemos quando vivenciamos, experimentamos, sentimos, relacionamos, estabelecemos vínculos e laços entre o que estava solto, caótico e disperso, integrando-o em um novo contexto, dando-lhe significado e novo sentido.

Aprendemos quando descobrimos novas dimensões de significação que antes nos escapavam, ampliando o círculo de compreensão do que nos rodeia e que nos faz perceber de outra forma. Aprendemos quando estabelecemos pontes entre a reflexão e a ação, entre a experiência e a conceituação, entre a teoria e a prática; quando ambas se alimentam mutuamente [...] Aprendemos pelo pensamento divergente, por meio da tensão e da busca, e pela convergência (MORAN, 2006, p.23).

Para Moran (2006; 2007), o conhecimento se dá no processo de interação, de comunicação, e conhecer é relacionar, integrar, contextualizar e fazer nosso o que vem de fora. Conhecer é ir além da superfície, do previsível, da exterioridade, aprofundando os níveis de descoberta. Para esse autor, o conhecimento se dá no processo rico de interação externo e interno. Por externo, ele entende que é tudo o que nos rodeia, com suas mensagens e informações, e por interno ou interiorização, entende que é a síntese pessoal, uma reelaboração de tudo o que captamos por meio da interação. O conhecimento acontece quando algo faz sentido, quando é experimentado, quando pode ser aplicado de alguma forma ou em algum momento. Sem interligação, o conhecimento dividido em fatias favorece a organização administrativa, não a aprendizagem, que é vista cada vez mais como interdisciplinar. O conhecimento não se impõe, constrói-se.

Ter conhecimento não é apenas ter informação, muito embora a informação seja o primeiro passo para se conhecer. “O conhecimento não se dá pela quantidade de acesso [à informação], mas pelo olhar integrador, pela forma de rever com profundidade as mesmas coisas” (MORAN, 2007, p.50).

4.3 O Conhecimento Matemático Visto como Processo

Segundo Steinbring (2005), uma resposta comum, quando emerge uma questão sobre o caráter ou a natureza epistemológica do conhecimento matemático, é que

a Matemática representa um corpo de conhecimento lógico e objetivo, o qual é produzido ou descoberto na realidade, de acordo com leis internas e objetos ideais pelos pesquisadores matemáticos. Tal visão entende Matemática como um objeto ideal e já existente, e quaisquer influências efetivas de pesquisadores neste ideal são negados (STEINBRING, 2005, p.7, tradução nossa).

Contrário a essa declaração, para o autor, a produção do conhecimento matemático ocorre, fundamentalmente, no contexto da construção social e no processo de interpretação individual. O conhecimento matemático não é previamente dado, mas construído por meios de atividades sociais e interpretações individuais. O conhecimento matemático está conectado com o contexto social da pesquisa ou da aprendizagem. A prática do ensino e da aprendizagem matemática é caracterizada pela variedade de construções e de interpretações

matemáticas. A natureza do conhecimento matemático é sempre olhada no contexto cultural, onde são desenvolvidos os sinais e os símbolos, tanto quanto sua interpretação.

Para Steinbring (2005), na cultura dos profissionais matemáticos, os sinais matemáticos são usados pelos participantes na comunicação de modo bem definido. Já na cultura do ensino, os estudantes têm de ser introduzidos dentro desse uso e, portanto, uma variedade e diversidade de comunicação matemática no processo de ensino e aprendizagem podem ser observadas. Sinais e símbolos matemáticos têm dupla função para o processo comunicativo de ensino e aprendizagem: eles são portadores do conhecimento matemático (eles ajudam a matemática a ser escrita e representada) e são elementos centrais da comunicação na cultura da escola (com suas diferentes formas e modos de uso e interpretação). Os sinais matemáticos adquirem seu próprio significado apenas por meio de uma relação com o contexto. Para o autor, a Matemática, como qualquer outro conhecimento teórico, sempre precisa de um contexto específico no qual se desenvolve, organiza-se, torna-se sistematizada e se conecta ao significado. A Matemática científica e a escolar são semelhantes com relação aos seus contextos sociais e seus *status* epistemológicos fundamentais, mas elas diferem consideravelmente com respeito ao grau de formalização e suas propostas de aprendizagem na Educação Matemática.

Todo conhecimento matemático, seja ele científico ou escolar, necessita do contexto de referência, e, neste sentido, todo conhecimento é um contexto específico. Sobre esta base, a diferença entre matemática científica e escolar encontra-se nos diferentes tipos de contextos de referências usados nestes diferentes contextos de desenvolvimentos sociais. Uma diferença importante diz respeito ao contexto de referência na matemática escolar, a qual deve ser ajustada para a necessidade da aprendizagem e do desenvolvimento cognitivo dos estudantes (STEINBRING, 2005, p.13, tradução nossa).

Segundo o autor, a Matemática é usualmente considerada como uma ciência por excelência, com resultados universais e definitivos expressos como verdades incontestáveis. A unidade da Matemática científica é o resultado do processo de comunicação interativa e histórico-social entre matemáticos, a qual é, de algum modo, orientada na direção de um produto coerente, a matemática uniforme. A esse respeito, distingui-se entre o processo de desenvolvimento e o produto (matemática uniforme). Na pesquisa da matemática científica, o correto é o produto matemático universalmente válido. No entanto, outros desenvolvimentos e campos de aplicação da Matemática podem focar diferentes características, como o processo de desenvolvimento do produto matemático. O deslocamento do produto matemático para o

processo matemático é um tema importante na aprendizagem e na apropriação ativa do conhecimento matemático, especialmente no contexto de mediação do conhecimento na sala de aula.

Steinbring (2005), apoiado na perspectiva de Freudenthal (1973), enfatiza que o caráter do desenvolvimento da Matemática, visto como uma atividade, implica que a aprendizagem torna-se um processo ativo na construção do conhecimento.

O oposto à matemática pronta é a matemática *em status nascente*. Isto é o que Sócrates ensinou. Hoje, desejamos que isso seja um começo real ao invés de ser estilizado; o educando deve, por ele mesmo, reinventar matemáticas... O processo de aprendizagem tem que incluir fases de invenções dirigidas, isto é, de invenções não no sentido objetivo, mas no senso subjetivo, visto da perspectiva do estudante (FREUDENTHAL, 1973, p.114, *apud* STEINBRING, 2005, p.15, grifo do autor, tradução nossa).

Dessa forma, para Steinbring (2005), os processos de desenvolvimento da matemática não são nem uniformes, nem universais e nem homogêneos. As características subjetivas da manutenção do processo, tanto quanto as representações, as notações e as interpretações do conhecimento matemático, são múltiplas, divergentes e parcialmente heterogêneas. No processo do desenvolvimento do conhecimento matemático, o contexto cultural, as influências subjetivas e as dependências são efetivas e inevitáveis, e são as razões para uma diversidade observável e uma não uniformidade do conhecimento emergente. Para o autor, aprender matemática requer olhar a matemática como um processo ativo de construção, o qual, através da interpretação interativa dos conceitos e notações matemáticas, se desenvolve um novo conhecimento. A aprendizagem do estudante não pode ser comparada com a do profissional matemático.

Steinbring (2005) argumenta ainda que a unidade do conhecimento matemático científico, não pode ser transferida para a matemática escolar. Pois, dessa forma, a matemática escolar perderia seu fundo cultural e a matemática se tornaria meros sinais formalísticos e fórmulas. O autor entende que sinais matemáticos, símbolos, princípios e estruturas apenas podem ser significativamente interpretados em uma cultura emergente, que questiona a unidade da matemática no processo de ensino e aprendizagem. “Se o conhecimento matemático (sinais, símbolos, princípios, estruturas, etc.) puder apenas ser interpretado significativamente a partir de um ambiente cultural específico, então não existe apenas uma simples, mas muitas diferentes formas de matemática” (STEINBRING, 2005, p.16, tradução nossa).

Penso que essas muitas diferentes formas de matemática, à qual Steinbring (2005) se refere, com a interpretação interativa dos conceitos e das notações matemáticas, que são caracterizadas pelas representações múltiplas, no caso específico de funções, podem ser potencializadas por um ambiente escolar em que os alunos e professores utilizam as TIC. Dessa forma, o processo de produção do conhecimento, especificamente do conhecimento matemático, modifica-se qualitativamente. A Matemática produzida pelos alunos, quando utilizam papel e lápis, é diferente daquela produzida com a utilização das TIC. Essa noção de matemáticas distintas, utilizando as TIC é um dos princípios resultantes do constructo teórico seres-humanos-com-mídias, que passo agora a descrever.

4.4 Seres-Humanos-Com-Mídias

Ao se constituir um ambiente com computador, existem várias maneiras de usá-lo na produção do conhecimento. Para Borba e Villarreal (2005), os computadores e humanos não são considerados separadamente, constituindo-se unidades disjuntas. Para os autores, os computadores não são apenas assistentes dos humanos ao se fazer matemática, pois eles mudam a natureza do que é feito, sugerindo que diferentes coletivos de humanos com mídias produzem diferentes matemáticas. Por exemplo, a Matemática produzida por humanos com papel e lápis é qualitativamente diferente da produzida por humanos com computadores, a partir de simulações e experimentações.

Borba e Villarreal (2005), ao proporem que a produção do conhecimento ocorre a partir da noção de coletivo pensante seres-humanos-com-mídia, fundamentam-se nas idéias de reorganização de Tikhomirov (1981) e na visão de coletivo pensante de Lévy (1993).

Tikhomirov (1981), um dos seguidores de Vygotsky, apresenta três teorias para caracterizar a relação do ser humano com o computador: substituição, suplementação e reorganização, embora ele critique as duas primeiras.

Na teoria da substituição, os computadores substituiriam o ser humano à medida que esses fossem melhorando em todos os tipos de trabalhos na esfera intelectual. Embora Tikhomirov (1981) concorde que, em alguns casos, o computador pode contribuir em algumas tarefas, isto não quer dizer que ele possa substituir, no mesmo nível, o pensamento humano. A idéia subjacente está em alguns programas de computador, ditos heurísticos. O termo heurístico é uma reflexão de certo estágio no desenvolvimento da teoria de programação para computadores, e designa o número de passos para resolver um determinado problema,

tornando-o mais seletivo e, portanto, mais eficiente, ou seja, limita-se à habilidade de resolver problemas. Tikhomirov (1981) rejeita essa noção, de substituição do pensamento humano, e argumenta que o pensamento humano não tem apenas a habilidade para resolver um determinado problema, mas que o modo desenvolvido para resolvê-lo é fundamentalmente diferente do desenvolvido pelo computador. “A idéia de substituição não expressa, portanto, uma relação real entre o pensamento humano e o trabalho do computador” (TIKHOMIROV, 1981, p.259, tradução nossa).

Na teoria da suplementação, o computador seria um adicional ao pensamento humano, ampliando o volume e a velocidade do processamento da informação, um aumento puramente quantitativo. Tikhomirov (1981) afirma que essa visão, de suplementação, é baseada na teoria da informação, que tem subjacente a idéia que os processos complexos do pensamento consistiriam de vários processos elementares de manipulação de símbolos, no processamento de informação. O autor critica essa teoria, pois ele entende que o pensar emerge da atividade de resolver problemas, e que nem sempre a meta é dada *a priori*. A própria formulação de um problema e a produção do resultado estão entre as mais importantes manifestações da atividade do pensamento humano. “Pensar não é uma simples resolução de problemas: também envolve formulá-los” (TIKHOMIROV, 1981, p.261, tradução nossa).

A teoria da reorganização, proposta por Tikhomirov (1981), baseia-se na idéia de que “a ferramenta não é simplesmente adicionada à atividade humana, mas transforma-a” (TIKHOMIROV, 1981, p.270, tradução nossa). O autor defende que os processos mentais no ser humano mudam quando os processos da atividade prática mudam. “Como resultado do uso do computador, a transformação da atividade humana ocorre e novas formas de atividade emergem” (TIKHOMIROV, 1981, p.271, tradução nossa). O autor argumenta que o computador proporciona novas possibilidades à atividade humana, tais como *feedbacks* e resultados intermediários que não podem ser observados externamente. Assim, o processo de produção do conhecimento é modificado. A estrutura da atividade intelectual humana é alterada pelo uso do computador, reorganizando os processos de criação, de busca e de armazenamento de informações. O autor conclui que “os computadores devem ser adaptados à atividade humana e os humanos devem se adaptar às condições de trabalho com o computador” (TIKHOMIROV, 1981, p.277, tradução nossa), e propõe que os problemas sejam resolvidos conjuntamente por humanos e computadores, formando um sistema próprio humanos-computadores.

Assim como Tikhomirov (1981), Lévy (1993) propõe que não haja uma dicotomia entre a técnica e o ser humano, defendendo a idéia de um coletivo pensante homens-coisas.

Lévy (1993), referindo-se à oralidade, à escrita e à informática como técnicas intelectuais, enfatiza que elas são historicamente datadas. A oralidade estava relacionada à lembrança dos indivíduos e à memória auditiva associada ao manejo da linguagem, bem antes da escrita. Quando uma nova informação ou um novo fato surgia, eram construídas representações, tais como os mitos, para que as sociedades retivessem as informações e as transmitissem de uma geração a outra. Com o surgimento da escrita, e principalmente com a invenção da imprensa, foi possível estender indefinidamente a memória biológica, de uma forma qualitativamente diferente em relação à oralidade. Segundo Lévy (1993), a comunicação puramente escrita elimina a mediação humana e os textos são interpretados de acordo com as circunstâncias e as experiências do leitor. Com a escrita aparece a teoria, tornando a transmissão de representações independentes de ritos ou narrativas, a qual condicionou a forma do pensamento lógico linear.

Para Lévy (1993), assim como ocorre com a oralidade e a escrita, a informática pode ser entendida como outra extensão da memória, qualitativamente diferente das demais tecnologias intelectuais. O conhecimento é produzido pela simulação e pela experimentação. A manipulação dos parâmetros e a simulação de todas as circunstâncias possíveis dão ao usuário de um programa uma espécie de intuição e de imaginação, sobre as relações de causa e efeito presentes em um determinado modelo. O usuário adquire um conhecimento por simulação do sistema modelado, que não se assemelha ao conhecimento teórico, nem a uma experiência prática e nem ao acúmulo de uma tradição oral. Embora Lévy (1993) defenda a tese de que a história das tecnologias intelectuais, a oralidade, a escrita e a informática, condiciona a do pensamento, ele argumenta que uma tecnologia não substitui a outra e que os saberes orais e escritos ainda existem e sempre existirão. As tecnologias intelectuais interagem, ainda que em diferentes situações.

Lévy (1993) enfatiza que a maior parte dos programas computacionais atuais desempenha um papel de tecnologia intelectual, pois eles reorganizam, de uma forma ou de outra, a visão de mundo de seus usuários e modificam seus reflexos mentais. À medida que a informatização avança, melhorando suas interfaces, novas habilidades aparecem e a cognição se transforma. O autor alega que as interfaces têm as mesmas representações e os mesmos comandos sistematicamente usados em várias aplicações, e que elas seduzem o usuário em potencial e o liga cada vez mais ao sistema. Esse princípio contribui para “humanizar a máquina”, ou seja, essas interfaces tornaram os complexos agenciamentos de tecnologias intelectuais e mídias de comunicação mais amigáveis e mais imbricados ao sistema cognitivo

humano. Para o autor nenhum tipo de conhecimento é independente do uso das tecnologias intelectuais.

Segundo Lévy (1993), a cognição é o resultado de redes complexas onde interagem e se interconectam os atores humanos e não humanos, transformando e traduzindo as representações. “Não sou ‘eu’ que sou inteligente, mas ‘eu’ com o grupo humano, do qual sou membro, com minha língua, com toda uma herança de métodos e tecnologias intelectuais... Fora da coletividade, desprovido de tecnologias intelectuais ‘eu’ não pensaria” (LÉVY, 1993, p.135). Para o autor só é possível pensar dentro de um coletivo, pois o pensamento já é a realização desse coletivo. Pensar é um devir coletivo no qual se misturam homens e coisas, pois os artefatos também têm o seu papel nos coletivos pensantes.

Uma premissa comum entre as visões de Tikhomirov (1981) e de Lévy (1993) é que não se deve ter uma dicotomia entre as tecnologias intelectuais e o ser humano na produção do conhecimento. Essa premissa é um dos pilares da noção de coletivos pensantes seres-humanos-com-mídias proposta por Borba e Villarreal (2005).

Para Borba e Villarreal (2005), a teoria de reorganização do pensamento é a que melhor caracteriza a moldagem recíproca, onde não apenas o ser humano é moldado pelos computadores, como também os computadores são impregnados de humanidade. Por reorganização, os autores entendem que os computadores não substituem e nem suplantam o ser humano, eles interagem e são atores do conhecimento, fazem parte de um coletivo que pensa, não sendo simplesmente uma ferramenta neutra ou tendo um papel periférico na produção do conhecimento. Esses autores acreditam que os computadores, com suas diferentes interfaces, estão mudando a natureza do uso da comunicação. “Se víssemos nosso próprio corpo-mente como uma interface, poderíamos propor que parte da reorganização do pensamento está relacionada a diferentes combinações de humanos e interfaces do computador e, cada um desses atores constitui o outro” (BORBA; VILLARREAL, 2005, p.78, tradução nossa).

Borba e Villarreal (2005) enfatizam ainda que as TIC, que são novas extensões da memória, com diferenças qualitativas em relação às outras mídias (oralidade e escrita), alteram a linearidade do raciocínio, para serem pensadas “em outros modos de pensamento, baseado na simulação, experimentação e uma ‘nova’ linguagem que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea” (BORBA; VILLARREAL, 2005, p.22, tradução nossa). Os autores adotam a perspectiva que sugere “que humanos são constituídos por tecnologias que transformam e modificam seu raciocínio e, ao mesmo tempo, esses humanos são constantemente transformados por essas tecnologias” (BORBA;

VILLARREAL, 2005, p.22, tradução nossa). A partir dessa perspectiva, os autores entendem que a visão dicotômica entre seres humanos e tecnologias não faz sentido. Dessa forma, concordo com Borba e Villarreal (2005) que afirmam que

o conhecimento é produzido junto com uma dada mídia ou tecnologia da inteligência. Por esta razão, adotamos a perspectiva teórica que sustenta a noção que conhecimento é produzido por um coletivo composto de seres-humanos-com-mídias, ou seres-humanos-com-tecnologias, e não, como outras teorias sugerem, por apenas um ser humano individual, ou coletivo composto apenas de humanos (BORBA; VILLARREAL, 2005, p.23, tradução nossa).

Esses autores apresentam alguns exemplos matemáticos em que ressaltam aspectos visuais ou experimentais, sob os quais discutem a relação com as mídias e a reorganização do pensamento. Os exemplos apresentados originaram-se de projetos envolvendo pesquisa em sala de aula, entrevistas com estudantes, análise de citações de livros de Matemática e experimentos de ensino.

Apresentarei aqui, dois desses exemplos que envolvem diretamente conceitos de funções e retas tangentes.

O primeiro exemplo, experimentando com parábolas, ocorreu na disciplina Matemática Aplicada para o Curso de Biologia. Os estudantes trabalharam com calculadoras gráficas, e a tarefa proposta foi investigar o que acontecia com os gráficos de funções quadráticas $y = ax^2 + bx + c$ quando os parâmetros a , b e c variavam. Os estudantes tiveram a liberdade para fazer diferentes caminhos em suas investigações e, antes de iniciar as tarefas, o professor conduzia as discussões para sistematizar suas descobertas. Um dos grupos levantou uma conjectura que teve intensa discussão: “Quando b é maior que zero, a parte crescente da parábola irá cruzar o eixo y ... Quando b é menor que zero, a parte decrescente da parábola irá cruzar o eixo y [a estudante gesticulou no ar com a sua mão para ilustrar]” (BORBA; VILLARREAL, 2005, p.126, tradução nossa). A validade dessa conjectura pôde ser demonstrada pela “prova visual”. Essa conjectura, levantada durante a exploração da atividade, em um coletivo de seres-humanos-com-calculadoras-gráficas, criou um ambiente de investigação, mostrando os diferentes papéis de atores em um coletivo estendido, seres-humanos-com-mídias: alguns atores geraram as conjecturas e outros tentaram formulá-las matematicamente e prová-las.

Para Borba e Villarreal (2005), é importante ressaltar que mesmo a simples tarefa de investigar as variações gráficas em uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ quando os coeficientes a , b e c variam, pode tornar-se um interessante problema para alguns estudantes bem como oferecer ao professor a possibilidade de explorar o pensamento matemático dos mesmos. Nesse sentido, enfatizam que esse tipo de exemplo pode ser proposto como uma abordagem pedagógica do tipo experimental-com-tecnologia. Nesse exemplo, as calculadoras tornaram-se importantes atores no coletivo que gerou a conjectura, enquanto que o lápis e o papel foram atores relevantes no momento de provar a conjectura.

O segundo exemplo mostra um experimento de ensino que foi realizado com alunas da disciplina Matemática Aplicada do curso de Biologia, as quais participaram como voluntárias de uma pesquisa de doutorado (VILLARREAL, 1999). O questionamento levantado nesse experimento teve relação com a reta tangente ao gráfico da função $y = x^2$ no ponto $x = 2$, onde a representação gráfica da tangente, na tela do computador, parecia tocar o gráfico de $y = x^2$ em mais de um ponto. Isso provocou a seguinte questão: “A reta tangente pode tocar em vários pontos?” (BORBA; VILLARREAL, 2005, p.151, tradução nossa). Com o gráfico feito com lápis e papel, isto não é problema, pois a reta toca apenas um ponto do gráfico, pois conseguimos controlar a representação. Mas no ambiente computacional, o gráfico é traçado e as discrepâncias surgem.

Para os autores não existe mídia boa ou ruim, mas sim as que podem oferecer oportunidades para entender Matemática, mesmo quando a mídia é criticada por ter imagens discrepantes.

Respostas inesperadas são efeitos da introdução desses novos atores na educação. Para alguns autores, estas respostas inesperadas são desvantagens, ou podem levar a um raciocínio errado ou imagens incontroláveis; para nós, elas representam uma oportunidade de discutir novas questões matemáticas em favor do entendimento matemático, produzir conjecturas interessantes e legitimizar o pensamento dos estudantes que podem desconsiderar o erro em outras mídias. Novas mídias, então, podem proporcionar um caminho para incluir mais pessoas na sala de aula de matemática. (BORBA; VILLARREAL, 2005, p.156, tradução nossa).

Borba e Villarreal (2005) apresentam a voz dos estudantes sobre o papel da visualização e da mídia na sua aprendizagem, levando em consideração que os alunos tinham pouca afinidade com a tecnologia. De acordo com as falas dos estudantes, os autores comentam que os alunos apresentaram um ponto de vista tradicional em relação ao uso do computador, na

qual o papel e o lápis continuam a ser a principal mídia utilizada para estudar e compreender Matemática, e que consideram o computador apenas como um meio de gerar figuras e um apoio para compreensão das mesmas. Os autores concluem que as opiniões apresentadas indicam como a mídia tradicional permeia as atividades matemáticas, apesar de muitas vezes os alunos não se aperceberem como estavam engajados nas atividades usando o computador. Ainda, em suas deduções, os autores indicam que as atitudes e crenças dos estudantes podem ser influenciadas pela tradicional forma de ensinar, imposta pelos professores aos alunos, utilizando as mídias clássicas: papel, lápis, giz, quadro negro e livros textos. Os autores argumentam que os livros também fazem parte do coletivo seres-humanos-com-mídias, e que os livros textos são influenciados pelas concepções dos autores em relação ao ensino e a aprendizagem da Matemática.

Nesse sentido, o ambiente físico, as pessoas, as TIC e o conteúdo interagem na produção do conhecimento matemático. O conhecimento matemático não é estanque, ele é produzido dinamicamente em um processo. Existe, assim, uma relação dialógica em que a mídia condiciona, isto é, transforma o modo como algumas atividades são desenvolvidas.

Já Villarreal (1999) identifica dois estilos diferentes do pensamento e de abordagem para lidar com questões matemáticas em um ambiente computacional: uma abordagem algébrica e uma abordagem visual.

A abordagem algébrica, no pensamento matemático, é caracterizada por preferência pela solução algébrica quando a gráfica é também possível; dificuldade em estabelecer uma interpretação gráfica da solução algébrica; necessidade de examinar algebricamente quando a solução gráfica é solicitada; facilidade de formular conjecturas e refutações ou gerar explicações baseadas nas fórmulas ou equações e, nesse caso, os computadores não são muito usados e os cálculos são feitos no papel ou apenas mentalmente.

A abordagem visual, no pensamento matemático, é caracterizada por uso da informação gráfica para resolver questões matemáticas que poderiam ter abordagem algébrica; dificuldade em estabelecer interpretação algébrica da solução gráfica; facilidade em formular conjecturas e refutações ou dar explicações usando informação gráfica e, nesse caso, os computadores são usados para verificar conjecturas, calcular e decidir questões que têm informação visual como ponto de partida. Embora essas abordagens tenham sido apresentadas de formas separadas, não significa que elas sejam disjuntas ou exclusivas na atividade matemática, ou seja, elas dependem da atividade em questão.

4.5 Uma Síntese da Produção do Conhecimento no Contexto desta Pesquisa

Considerando as visões dos autores apresentados neste capítulo, sintetizarei agora uma conexão, segunda a minha própria visão, entre esses autores. Segundo Moran (2006) a produção do conhecimento ocorre no processo rico de interação externo e interno. O autor entende por externo tudo que nos rodeia e por interno as sínteses pessoais. Para Steinbring (2005) aprender Matemática requer olhá-la como um processo ativo de construção, através da interpretação interativa dos conceitos e notações matemáticas, para se desenvolver um novo conhecimento. Para Borba e Villarreal (2005), o conhecimento é produzido por um coletivo pensante seres-humanos-com-mídias.

Entendo, apoiando-me em Steinbring (2005), que a Matemática é um produto social e que a presumida coerência do conhecimento matemático está relacionada ao tipo de comunicação que os pesquisadores matemáticos mantêm sobre esse conhecimento. Um exemplo disso é a prova formal que ajuda os pesquisadores matemáticos a terem um entendimento em relação às “verdades” matemáticas de modo inequívoco. No entanto, acredito que esses processos de comunicação não são comparáveis àqueles da sala de aula de matemática. Os estudantes têm sua forma própria de comunicarem e argumentarem matematicamente, podendo, muitas vezes, mostrar, por exemplo, com um gesto a concavidade de uma parábola; ou seja, para o estudante a produção do conhecimento não ocorre da mesma forma abstrata que nas comunicações formais do pesquisador matemático.

Concordo com Steinbring (2005), que a prática do ensino e da aprendizagem Matemática é caracterizada pela variedade de construções e interpretações matemáticas, pois o conhecimento matemático não é previamente dado, mas socialmente construído. No contexto da sala de aula, os estudantes têm que ser introduzidos ao uso dos sinais e dos símbolos matemáticos e, portanto, pode-se observar uma variedade e diversidade de comunicação matemática no processo de ensino e aprendizagem. As representações múltiplas, com as suas diferentes formas e modos de usos e interpretações, são elementos centrais na comunicação matemática no contexto da sala de aula.

Dessa forma, não concebo a Matemática como um produto acabado, mas um processo em desenvolvimento, com interpretações múltiplas e divergentes, que inclui fases de invenções vista da perspectiva do estudante. O conhecimento matemático não pode ser concebido por uma mera leitura dos sinais, símbolos e princípios, mas esses têm que ser interpretados de forma interativa. Assim, se o conhecimento matemático puder ser apenas

interpretado em um ambiente cultural específico, por exemplo, em um ambiente utilizando as TIC, então não existe apenas uma única maneira de se produzir Matemática, mas diferentes formas de sua produção.

Participar do processo da sala de aula de matemática é fazer parte de uma cultura específica, na qual se podem observar as muitas habilidades e interpretações que os alunos fazem da Matemática. Com a inserção das TIC, essas interpretações são modificadas pelo uso da animação, ou da simulação. Portanto, as TIC não têm um papel secundário na produção do conhecimento matemático, mas são partes integrantes do ambiente de ensino e de aprendizagem.

Dessa forma, entendo que a produção do conhecimento matemático, que acredito ser dinâmico e pautado no processo, ocorre quando existe uma interação “externo-interno”, e que essa interação pode ser apresentada quando sintetizamos externamente o que pensamos, por exemplo, oralmente, pela escrita em uma folha de papel, ou na tela do computador. A Matemática pode ser modificada quando as TIC são inseridas no ambiente de ensino e aprendizagem de modo interativo pela simulação. O conhecimento matemático é produzido por um coletivo que envolve alunos e professor, com todo o seu arcabouço histórico-cultural, representações matemáticas, por símbolos, por gráficos, por números e pelas tecnologias intelectuais, como a oralidade, a escrita e a informática, caracterizando um coletivo pensante.

Acredito que o conhecimento matemático é produzido diferentemente para cada indivíduo, em um coletivo formado não só por humanos, como também com todas as representações e interfaces permeadas pela informatização. Ainda, que nessa produção, os alunos, por terem modos diferenciados de aprender, não são passivos diante das mídias e interagem com o computador.

CAPÍTULO 5

METODOLOGIA DE PESQUISA E PROCEDIMENTOS

Neste capítulo, apresento o contexto da pesquisa em que este estudo está inserido, o procedimento metodológico que foi adotado para a coleta dos dados e para a escolha dos episódios. Além disso, exponho como foram trilhados os caminhos para a elaboração das atividades, enfatizando o papel dos colaboradores nas atividades piloto.

5.1 Inserindo-me na Metodologia de Pesquisa Qualitativa

Esta pesquisa se insere na área de Educação Matemática, que engloba aspectos pertinentes ao ser humano e se define na fronteira das Ciências Humanas e Exatas. Trata-se de um estudo em que o objeto é pautado na ação e no comportamento humano. Como “não há um modelo único para se construir conhecimentos confiáveis, assim como não há modelos ‘bons’ ou ‘maus’ em si mesmos, e sim modelos adequados ou inadequados ao que se pretende investigar” (ALVES-MAZZOTTI, 1999, p.109), explico, a seguir, qual a abordagem utilizada nesta tese, e por que ela se insere em uma linha de investigação qualitativa.

Historicamente, a origem da investigação qualitativa data do final do século XIX. Nascida da Sociologia e da Antropologia, suas características influenciaram a investigação no campo da Educação. No entanto, o reconhecimento desse tipo de investigação somente ocorreu no final da década de sessenta, do século XX, devido em grande parte aos tumultos sociais, pois “os métodos de investigação qualitativa representavam o espírito democrático em

ascendência” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.38). Muitas mudanças ocorreram desde a sua origem até os dias atuais. Uma dessas mudanças foi o aparecimento do vídeo e do computador na coleta dos dados. Esse contexto histórico se encontra mais detalhado em Alves-Mazzotti (1999), Bogdan e Biklen (1994), Goldenberg (2003) e Vidich e Lyman (2006).

Embora não se tenha uma definição formal, para Bogdan e Biklen (1994), a investigação qualitativa é um termo genérico que agrupa diversas estratégias de investigação que tomam determinadas características em comum. Apesar de algumas pesquisas serem desprovidas de uma ou mais dessas características, elas compartilham o compromisso humanista de estudar o mundo sempre a partir da perspectiva do indivíduo, sendo esse o intérprete do mundo que o cerca.

Ainda que nem todas as pesquisas, de cunho qualitativo, tenham todas essas características, como é o caso desta tese, Bogdan e Biklen (1994) destacam que o investigador é o seu principal instrumento para a coleta; que os dados são descritivos, em forma de palavras ou imagens, e não de números ou quantificáveis; que existe uma preocupação maior pelo processo do que pelos resultados ou produtos, e essa característica é, particularmente, útil para a investigação educacional; que a postura do investigador é indutiva, ou seja, não recolhe “dados ou provas com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos vão se agrupando” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.50); que a importância é dada ao significado, isto é, ao modo como diferentes pessoas dão sentido às suas vidas.

O conjunto de significados, conceitos, crenças ou proposições logicamente relacionadas e que orientam um pensamento ou uma ação, é entendido como paradigma. Apesar de não se ter uma teoria *a priori*, qualquer que seja a investigação, o pesquisador baseia-se em uma orientação teórica, que está relacionada ao modo de entendimento do mundo, das afirmações que as pessoas têm sobre o que é importante e que faz o mundo funcionar (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Para Denzin e Lincoln (2006),

um paradigma abrange quatro conceitos: ética (axiologia), epistemologia, ontologia e metodologia. A *ética* questiona: Como eu serei como pessoa moral no mundo? A *epistemologia* pergunta: Como eu conheço o mundo? Qual é a relação entre o investigador e o conhecido? [...] A *ontologia* levanta questões básicas a respeito da natureza da realidade e da natureza do ser humano no mundo. A *metodologia* concentra-se nos melhores meios para a aquisição do conhecimento sobre o mundo (DENZIN; LINCOLN, 2006, p.163, grifo do autor).

Em 1989, na “Conferência dos Paradigmas Alternativos”, três paradigmas foram apresentados como sucessores ao positivismo: pós-positivismo, teoria crítica e construtivismo¹ (ALVES-MAZZOTTI, 1999; DENZIN; LINCOLN, 2006; LINCOLN; GUBA, 2006). O confronto entre essas perspectivas constituiu um momento importante de afirmação da Educação como campo científico. A perspectiva pós-positivista assumia a possibilidade de formular e resolver problemas da Educação em termos puramente técnicos, independente do pensar e do sentir dos atores educativos. Os outros paradigmas tratavam os processos educativos de forma distinta: o paradigma interpretativo atesta a necessidade de compreender o ponto de vista dos envolvidos nesse processo, ao passo que o paradigma crítico enfatiza a necessidade de uma ação transformadora, envolvendo nessa ação os próprios atores educativos (PONTE, 2005). Atualmente, na investigação qualitativa, os paradigmas não são tão determinados devido a sua estrutura complexa e aberta e, por isso, existem tantas controvérsias e contradições quanto às definições dos paradigmas alternativos ao positivismo.

Segundo Ponte (2005), apesar da pesquisa qualitativa se originar da Sociologia e da Antropologia, a Educação distingue-se dessas de modo profundo. Enquanto que, nas primeiras, o objetivo é descrever os pensamentos dos atores sociais e perceber como atuam em suas comunidades, na Educação o estudo vai além, ou seja, deseja-se saber também como e em que condições as perspectivas e as práticas podem se transformar e assumir novas qualidades. A postura meramente interpretativa revela-se limitada.

É necessário interpretar o outro, conhecer o seu modo de pensar e sentir, mas é igualmente necessário estudar formas de trabalho conjunto que levem a novos horizontes. Em Educação, o investigador não é apenas um espectador do que se passa no terreno da prática educativa, mas também um actor, ao lado de outros actores, na transformação desse terreno e dos próprios participantes (PONTE, 2005, p.112).

Para Ponte (2005), o investigador na Educação é bem mais do que um observador, é também parte integrante da própria pesquisa. E pesquisar significa “ter uma interrogação e andar em torno dela, em todos os sentidos, sempre buscando, suas múltiplas dimensões e andar outra vez e outra ainda, buscando mais sentido, mais dimensões, e outra vez mais...” (BICUDO, 2005, p.8). É essa interrogação, uma inquietação, que faz com que se busque uma forma apropriada de investigar, isto é, uma estratégia. Porém, essa estratégia é apenas uma idéia do que se irá fazer, pois o investigador tem seus próprios conhecimentos e experiências,

¹ Também conhecido como construtivismo social ou interpretativo.

e, apesar de nem sempre possuir uma agenda rígida, deve-se ter em mente que o inesperado pode acontecer e que as hipóteses formuladas podem ser modificadas e reformuladas à medida que se vai avançando na pesquisa (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Essas modificações que poderão ocorrer refletem-se também na interrogação, ou pergunta diretriz, à medida que o investigador faz a leitura de suas referências e da sua coleta dos dados e também afeta o foco em questão podendo transformá-lo. Esse processo é denominado, por Lincoln e Guba (1985), *design* emergente. E isso poderá ser observado nos caminhos trilhados desta pesquisa que serão tratados na seção 5.3, deste capítulo.

Pode-se dizer, então, que esta pesquisa está inserida no paradigma de pesquisa qualitativa, e a pergunta norteadora, ou diretriz, que se constituiu ao longo desta pesquisa é:

Como o coletivo, formado por alunos-com-mídias, produz o conhecimento acerca de Função Composta e Regra da Cadeia, a partir de uma abordagem gráfica?

Para além das questões sobre como proceder e o que enfocar, há outra de fundo que é a visão de conhecimento que o investigador concebe. Os procedimentos adotados e a concepção de conhecimento devem estar em consonância, como afirmam Lincoln e Guba (1985). E particularmente, na pesquisa em Educação, “é também necessário que haja uma visão de Educação que esteja coerente com a de conhecimento e a de metodologia” (ARAÚJO; BORBA, 2004, p.42).

Entendendo que a pesquisa qualitativa alia a visão de conhecimento matemático do investigador aos procedimentos adotados na elaboração de atividades e na coleta dos dados, procuro, no contexto desta pesquisa, trazer para a produção do conhecimento acerca de função composta e regra da cadeia, no contexto da disciplina CDI, uma abordagem gráfica. Entendo que a produção do conhecimento matemático, que acredito ser dinâmico e pautado no processo, pode ser modificada quando as TIC são inseridas no ambiente de ensino e aprendizagem de modo interativo. Assim, a visão de produção do conhecimento, nesta tese, é consistente com a noção de seres-humanos-com-mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005), a qual entende que os seres humanos produzem conhecimento junto com determinadas mídias.

Os procedimentos adotados na elaboração das atividades e na coleta dos dados estão em sintonia com a noção de um coletivo seres-humanos-com-mídias que produz conhecimento. Tanto na elaboração das atividades quanto na coleta dos dados a pesquisadora não agiu sozinha. A elaboração de atividades, como será posteriormente descrito, foi feita pensando com as mídias disponíveis, no caso o *software* Winplot, e com o grupo de pesquisa. Os

procedimentos adotados para a coleta dos dados e para a elaboração das atividades serão agora descritos.

5.2 Experimento de Ensino

No contexto desta pesquisa, o interesse consistiu em investigar como os alunos produziram o conhecimento acerca de função composta e regra da cadeia a partir de uma abordagem gráfica, como elaborariam e discutiriam suas conjecturas, além de outros fatores que poderiam surgir. Com o experimento de ensino eu teria a oportunidade de verificar como os alunos produziram seu próprio conhecimento acerca de tais temas.

O Experimento de Ensino é um procedimento metodológico de coleta dos dados, que consiste em uma série de encontros entre os estudantes e o pesquisador por um determinado período de tempo. Nesses encontros, o pesquisador promove uma investigação sobre o modo como os estudantes produzem seus conhecimentos no processo de exploração de atividades pré-elaboradas. Embora Steffe e Thompson (2000) tenham sugerido que esse período de tempo seja longo, um semestre ou um ano, os experimentos de ensino adotados em algumas pesquisas (BENEDETTI, 2003; MENK, 2005; OLIMPIO, 2006; SCUCUGLIA, 2006; VILLARREAL, 1999) utilizaram uma variação desse procedimento, na qual os alunos puderam ser filmados e observados atentamente em períodos de tempo que dependiam das atividades e dos objetivos propostos por cada pesquisa.

Embora esse procedimento já existisse há algum tempo na pesquisa pedagógica da União Soviética, ele despontou nos EUA por volta de 1970. Um dos motivos pelo qual ele aflorou decorre do fato de que as metodologias experimentais utilizadas em Educação e, conseqüentemente na Educação Matemática, até aquele momento, sofriam forte influência dos modelos de pesquisa usados para as Ciências Naturais. Esses modelos, baseados no “paradigma da agricultura”, serviam-se de experimentos no qual o pesquisador escolhia uma ou mais amostras, dentro de uma população alvo e as submetia a vários tratamentos. Os efeitos de um dos tratamentos eram então comparados com os efeitos dos outros e era feita uma análise dos resultados a fim de se estabelecer significativas diferenças entre esses. Porém, os modelos não ofereciam oportunidades para investigar como os alunos criavam seus significados e que tipos de construções faziam sentido para os mesmos, isto é, consideravam apenas o produto final e não a maneira como essas construções ocorriam, não produzindo os resultados buscados pelos pesquisadores educacionais.

Assim, as versões dos modelos soviéticos dos experimentos de ensino chamaram a atenção, pois incluíam “uma descrição do progresso que os estudantes faziam como resultado da comunicação matemática interativa” (STEFFE; THOMPSON, 2000, p.270, tradução nossa), o que contribuiu para o surgimento de uma nova metodologia de pesquisa para a Educação Matemática. A Metodologia de Experimento de Ensino não surgiu padronizada, nem tem a intenção de se tornar, ao contrário, é uma ferramenta conceitual para ser utilizada na organização de atividades e, derivada da entrevista clínica de Piaget, é voltada para a exploração da matemática dos estudantes, ou seja, a matemática que os estudantes entendem como tal. No entanto, o Experimento de Ensino é mais do que uma entrevista clínica e se diferencia dessa vertente pelo fato de ser direcionado para o progresso dos estudantes e não para o conhecimento corrente dos estudantes, como se dá na entrevista clínica. Seu foco principal é a análise do raciocínio desses estudantes.

Steffe e Thompson (2000) denominam de episódios os encontros que acontecem durante um experimento de ensino. Cada episódio supõe que exista, além da presença do agente de ensino, nesse caso o pesquisador, um método de registro dos dados. Nesta pesquisa, utilizei além do *software* Camtasia Studio, que grava todos os movimentos feitos na tela do computador, sons e imagens captadas por uma *webcam* e uma filmadora fixa, pois a *webcam* poderia perder algum gesto dos alunos devido à sua pouca abertura visual. Assim, houve a possibilidade de registrar todo o processo de cada dupla, capturando as ações realizadas no computador, as imagens e os diálogos entre os alunos e o pesquisador.

Os experimentos propiciam situações em que estudantes e pesquisador podem interagir. Isso faz com que o pesquisador deixe de ser apenas um observador para se envolver e participar de forma efetiva do processo e não apenas tentar explicar a matemática dos alunos por meio de sistemas matemáticos conhecidos. Interpretar o que os alunos dizem e fazem, por meio de um diálogo desencadeado a partir das atividades e questões elaboradas pelo pesquisador, em uma tentativa de entender como eles elaboram seus conceitos matemáticos, é parte essencial no experimento de ensino (STEFFE; THOMPSON, 2000).

Embora as atividades sejam pré-elaboradas com perguntas abertas, os alunos podem fazer algumas conjecturas que vão além das questões propostas. Desse modo, o importante não é apenas verificar se uma determinada hipótese é válida, mas também investigar novas hipóteses que podem surgir durante a realização do experimento. Portanto, o pesquisador deve estar atento para enfrentar situações que não estavam previstas anteriormente e que podem emergir quando se realiza um experimento de ensino. As idéias e os procedimentos dos alunos devem ser respeitados, e o pesquisador deve procurar agir como se ele próprio fosse um dos

estudantes, colocar-se no lugar deles, tentando perceber de que forma agem e pensam em relação aos fatos apresentados. Isso não quer dizer que o pesquisador não tenha algumas hipóteses pré-estabelecidas, porém elas devem ser deixadas de lado durante o desenvolvimento do experimento de ensino.

Para que os experimentos pudessem propiciar uma interação entre os alunos e a pesquisadora, procurei ficar atenta ao que os alunos discutiam, quando trabalhavam em duplas, ao levantarem suas conjecturas e suas dúvidas, a como eles re-elaboravam suas afirmações quando defrontados com os seus obstáculos, as suas limitações e as suas superações, usando uma metodologia que favorecesse a visualização e a conexão entre as representações múltiplas na produção do conhecimento acerca de função composta e regra da cadeia.

Assim foi possível constatar que, quando envolvidos em um experimento de ensino, não foram apenas os estudantes que puderam produzir conhecimento, mas que, também, eu, como professora/pesquisadora, tive muito a aprender com eles. Nesse sentido, Experimento de Ensino pode ser considerado uma metodologia que surge para preencher uma lacuna existente entre a teoria e a prática, pois entendo que a pesquisa é um dos elos entre a teoria e a prática, e um modo de criar possibilidades para a produção do conhecimento.

5.3 Caminhos Trilhados na Pesquisa

5.3.1 Origem

Ao começar esta pesquisa, meu objetivo era melhorar o ensino e a aprendizagem do Cálculo tentando buscar um caminho por meio da tecnologia. No entanto, esse objetivo era muito geral e o fato da disciplina CDI ser muito ampla, teria que ser repensado o assunto, o foco, a relevância e a justificativa, para não reinventar a roda, mas não bastaria apenas isso. Depois de pensado o tema, eu teria que refletir acerca da problemática desse; ou seja: será que outras pessoas também não pensaram nele? De que forma o fizeram? Em que se basearam? Levando em conta que “fazer uma pesquisa significa aprender a pôr ordem nas próprias idéias” (GOLDENBERG, 2003, p.68).

Assim, a partir de uma troca de idéias com meu orientador, de reflexões com o GPIMEM, de minha experiência como professora da disciplina CDI e de algumas buscas, o tema sobre a regra da cadeia foi se delineando. Na revisão bibliográfica acerca do assunto,

não encontrei referências, no âmbito da Educação Matemática, mas vários sites considerados cópias de livros de Cálculo, com algum hipertexto tornando a leitura mais agradável do que as achadas nos livros, porém que não mostravam outra estratégia, ou uma abordagem que não fosse a estritamente algébrica. Entretanto, quando estamos procurando o lugar para onde queremos ir, devemos ser criativos, disciplinados e organizados, baseando-nos no confronto permanente entre o possível e o impossível, entre o conhecimento e a ignorância, pois “nenhuma pesquisa é totalmente controlável, com início, meio e fim previsíveis” (GOLDENBERG, 2003, p.13).

Com uma visão mais ampla e flexível, deparamo-nos com alguns detalhes que não havíamos percebido anteriormente. É, nesse momento, que novas idéias começam a se delinear. Uma delas foi aplicar um questionário² aos alunos que já haviam estudado a regra da cadeia e que ainda estavam no primeiro ano do curso de Matemática, para verificar o que lembravam ou se poderiam explicar, ou mesmo demonstrar o Teorema da Regra da Cadeia, ou sugerir algum exemplo ou aplicação, enfim, procurar indícios das dificuldades apontadas pela literatura estudada. Esse questionário foi elaborado e aplicado, no segundo semestre de 2006, aos alunos, do primeiro ano, da disciplina CDI do curso de Matemática da UNESP de Rio Claro (SP). O levantamento das respostas dos alunos ajudou a delinear a busca por uma abordagem gráfica e não apenas a algébrica.

Para responder a esse questionário, o aluno não necessitava de se identificar. Trinta e quatro estudantes, dentre os quarenta da sala de aula, responderam-no. As respostas foram as mais variadas e, na maioria delas, pude constatar que alguns alunos lembravam-se de alguma derivada relacionada à função composta, outros explicitaram a fórmula, mas quando tiveram que dar um exemplo, não o associaram com a fórmula explicitada. Esses alunos estavam começando a estudar técnicas de integração e algumas poucas respostas acerca da aplicação foram as resoluções de integrais. Em nenhuma resposta, havia indícios sobre a sua demonstração.

Paralelamente, fiz um estudo detalhado sobre a demonstração da regra da cadeia, e que compõe parte do Capítulo 2 desta tese³. O objetivo desse estudo foi apresentar uma discussão sobre algumas das abordagens que diversos autores de livros de Cálculo, bem como alguns autores de sites, trazem para a demonstração da regra da cadeia, e de que maneira trabalham este tema junto aos estudantes que estão ingressando no Ensino Superior, sejam eles de Administração, Matemática, Engenharia, dentre outros.

² Apêndice, Anexo A.

³ Veja também Barbosa (2007).

O estudo feito sobre a demonstração, algumas das respostas dos alunos ao questionário, e o fato de ter me deparado com um site⁴, no qual pude encontrar um procedimento para obtenção de um gráfico da função composta, a partir das suas funções componentes, contribuíram e influenciaram na elaboração das atividades investigativas com ênfase em uma abordagem gráfica para a função composta e a regra da cadeia.

5.3.2 Elaboração das Atividades

As atividades⁵ foram elaboradas por mim com a ajuda do *software* Winplot⁶, que é um programa simples, versátil e razoavelmente fácil de usar. Ele apresenta essencialmente dois ambientes, um com funções de uma variável real e outro com funções de duas variáveis reais, ambientes esses que permitem utilizar a animação para se variar um determinado parâmetro, dentre muitas outras ferramentas. Para esta pesquisa foi utilizado apenas o ambiente com funções de uma variável real.

As atividades tiveram várias versões, com a colaboração do GPIMEM, e contribuições de alguns experimentos piloto com uma aluna da Iniciação Científica (IC), e de alunos que fizeram um mini-curso sobre o *software* Winplot.

O GPIMEM, com sua experiência em pesquisas acerca de Cálculo, com a utilização das TIC e, acima de tudo, em Educação Matemática, foi essencial para que houvesse um refinamento nas atividades elaboradas, por exemplo: uma das atividades, quando ainda estava em elaboração, foi baseada no procedimento de se obter o gráfico da função composta a partir dos gráficos das funções componentes, sem as suas expressões algébricas. Com a observação desses gráficos, pedia-se aos alunos que tentassem esboçar o gráfico da função composta. O objetivo era fazer com que os alunos experimentassem obter o gráfico da função composta, sem qualquer discussão sobre os passos dados, apenas tentando fazer com que eles “enxergassem” o gráfico da função composta ao final da atividade. Com a intervenção e colaboração do GPIMEM, já na segunda versão, eram propostas aos alunos algumas questões, porém os estudantes ainda não sabiam trabalhar com o *software* Winplot, e a atividade não dava instruções para que isso acontecesse. Assim, entre outras contribuições, o GPIMEM sugeriu que eu ministrasse um curso sobre esse *software* para os alunos ingressantes em 2007,

⁴ *Visual Calculus / Composition of Function*,
<http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/0/compositions.6/index.html> (HUSCH, 1995-2001).

⁵ Apêndice, Anexo B.

⁶ <http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html> (PARRIS, 2001).

pois, dessa forma, os estudantes teriam um contato com o *software* e comigo, o que ajudaria quando os convidassem para fazerem parte da pesquisa como voluntários, estabelecendo uma relação de certa confiança.

Outra colaboradora foi a aluna Paula Taliari, da IC, que também fazia parte do grupo GPIMEM, e que estava fazendo a graduação no segundo ano do curso de Matemática, isto é, já havia cursado a disciplina CDI no ano anterior e estava começando a ter contato com as TIC. Paula desenvolveu um estudo piloto realizado com o intuito de avaliar a proposta de atividades sugeridas por outros membros do GPIMEM. A partir desse piloto, as atividades foram reelaboradas. Diferentemente de outros integrantes do GPIMEM, que já eram formados no curso de Matemática e que estavam acostumados a lidar com as TIC, ela tinha um perfil de uma estudante que acabara de concluir a disciplina CDI. Com a perspectiva de aluna, ela desenvolveu uma das versões das atividades, com o meu acompanhamento, para que pudesse se familiarizar com o *software* Winplot. Como ela estava sozinha, muitas vezes tive que interferir e perguntar se a atividade estava clara, ou o que teria que ser mudado. Foi a partir de comentários dela, que percebi o quanto deveria modificar, mais uma vez, a atividade.

Por exemplo, uma das atividades tinha por objetivo levar o aluno a deduzir a fórmula da regra da cadeia de uma forma indutiva, ou seja, dada as funções $f(x)=x^2$ e $g(x)=3x$, era pedido ao aluno que plotasse, no ambiente do *software* Winplot, os gráficos das funções $f(g(x))$, $g'(x)$, $f'(g(x))$, $(f(g(x)))'$ e que apresentasse as suas representações algébricas. Feito isso, o aluno deveria manter a função $f(x)=x^2$, mas trocar a função $g(x)=3x$, inicial, por $g(x)=4x$ e $g(x)=5x$ e calcular novamente as funções dadas acima, agora para essas novas funções de g . Em seguida, o aluno deveria trocar a função $f(x)=x^2$ por $f(x)=x^n$, e a função g por $g(x)=ax$. A intenção era que o aluno percebesse a regra da cadeia indutivamente. Porém, Paula disse “é só compor e derivar”. De fato, era só compor a função $f(x)=x^n$ com a função $g(x)=ax$, obter a função $f(g(x))=a^n x^n$ e derivar, isto é, obter a função $(f(g(x)))'=na^n x^{n-1}$. Então perguntei se ela via alguma relação da derivada que ela havia obtido, $(f(g(x)))'=na^n x^{n-1}$, com a fórmula da regra da cadeia, $(f(g(x)))'=f'(g(x))g'(x)$ que ela já havia dito que sabia. Paula, depois de fazer alguns cálculos, em uma folha de papel, respondeu que não obtinha o mesmo resultado, pois era um pouco diferente, devido ao fato de não ter feito as devidas simplificações.

Tomando por base o comentário de Paula, “é só compor e derivar”, percebi que não bastaria elaborar uma atividade apenas com funções polinomiais e que seria necessária uma atividade que envolvesse outros tipos de funções. Além disso, a observação dela levou-me a pensar em outra atividade sobre a decomposição de funções, outro assunto que os alunos sentem bastante dificuldade. Ao ser pedido para derivar uma função polinomial, $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$, os alunos utilizam-se da regra da potência, mas, coloquialmente, eles a denominam “regra do tombo”. Porém, se essa função está na forma $f(x) = (x^2 + 1)^2$ e se requer que a decomponha em duas outras funções, raramente, os alunos entendem o que está sendo pedido.

Dessa forma, a elaboração das atividades teve que ser repensada e outras idéias surgiram. Eu ainda continuava com um problema: como elaborar uma atividade que não tivesse apenas funções polinomiais, mas que também não necessitasse diretamente da regra da cadeia? A intenção era que o aluno ainda não a tivesse estudado, algebricamente, e não soubesse sequer a fórmula, mas teria que ter visto pelo menos uma introdução sobre derivada.

O objetivo era que, com as atividades, o aluno produzisse seu próprio conhecimento acerca da regra da cadeia, ou que ao menos conseguisse verificar as distinções entre as funções derivadas. Com isso, cada aluno, que tem todo seu arcabouço histórico-cultural, poderia interpretar e produzir seu conhecimento diferentemente, de forma interativa em um coletivo, que é formado não apenas por seres humanos, como também com as interfaces e as representações matemáticas permeadas pelo *software* Winplot. Nesse coletivo, as TIC são protagonistas e não meras figurantes na produção do conhecimento matemático.

Essas angústias e questionamentos foram parcialmente sanados quando estava elaborando o mini-curso sugerido pelo GPIMEM, que passo agora a descrever.

5.3.3 O Mini-Curso

Ao final de 2006, apresentei à professora que iria ministrar a disciplina CDI a proposta de um mini-curso sobre o *software* Winplot, para os alunos ingressantes em 2007. Ela me disse que estavam previstas atividades extras com esses alunos e sugeriu, então, que eu elaborasse um curso com atividades que versassem sobre funções recordando o Ensino Médio. Baseada em atividades que o GPIMEM já havia elaborado em outras pesquisas, adaptei-as para o mini-curso temático, com carga horária prevista de 12 horas. Esse foi

oferecido, logo na segunda semana de aula e fez parte das atividades extras dos alunos e todos os ingressantes deveriam assisti-lo. Como existiam 40 alunos e o laboratório não comportava esse número, foram formadas duas turmas de 20 alunos cada, nas quais eles trabalhariam em duplas.

Foi entregue a cada aluno uma apostila contendo 16 atividades, as quais ao mesmo tempo em que exploravam os comandos do *software* Winplot também apresentavam cunho investigativo, sempre pedindo ao aluno que justificasse, por escrito, cada passagem que executava. Os alunos, em duplas, discutiam as atividades entre eles. Eu os ajudava como monitora, utilizando o projetor multimídia e um *laptop* para facilitar as discussões. Sempre que havia alguma atividade que suscitasse maiores debates era compartilhada com todos e cada um opinava sobre os conceitos envolvidos.

Assim, levando em consideração os comentários dos alunos e os registros escritos das atividades do mini-curso, re-elaborei as atividades para a coleta dos dados. Lembrando que, apesar desses alunos ainda não fazerem parte diretamente da minha pesquisa, eles seriam convidados e, portanto, os comentários e registros escritos fizeram parte do meu diário de campo. A intenção era deixar o aluno se expressar, o que iluminou e enriqueceu bastante a coleta dos dados, posteriormente.

Um dos comentários que surgiu, e que fez com que eu repensasse as atividades, foi acerca da animação proporcionada por um comando do *software* Winplot. Percebi que os alunos se encantavam com a animação e, por conta disso, não raro, esqueciam do desenvolvimento da atividade em si. Com esse tipo de observação, conclui que deveria ficar mais atenta aos detalhes que poderiam surgir nas atividades que eu já havia elaborado para coleta dos dados, bem como com a linguagem adotada.

Com esses três momentos apresentados, pude perceber que a elaboração de uma atividade deve ser pensada e repensada, pois se corre o risco de se ter atividades com respostas únicas, que não geram discussões e, além disso, que podem cair em armadilhas geradas por limitações do *software*, por exemplo.

E, mesmo depois, durante a coleta dos dados, que descreverei ao final deste capítulo, conforme fui aplicando as atividades elaboradas, outras idéias surgiram para organizar diferentes atividades, e isso aconteceu devido ao fato de cada colaborador, que descrevi acima, ter um perfil completamente distinto, cada qual viu as atividades por prismas diferentes. Ao final desse processo, elaborei oito atividades, as quais têm por objetivo privilegiar aspectos investigativos e explorar as características próprias da função composta e da regra da cadeia.

A intenção de mostrar esses momentos foi apresentar os caminhos que tive que trilhar e escolher o que seria ou não acatado nas sugestões, sempre levando em conta o objetivo da pesquisa e norteada pela pergunta diretriz.

5.3.4 A Coleta dos Dados

Depois de elaboradas as atividades, passei a coletar os dados utilizando os “Experimentos de Ensino”. O importante seria investigar como os alunos produziram o conhecimento acerca de função composta e regra da cadeia, a partir de uma abordagem gráfica, e de que maneira elaborariam e discutiriam suas conjecturas, entre outros fatores que poderiam surgir. Em contrapartida, penso que os alunos poderiam ser beneficiados com esse formato, já que eles ainda não haviam tido contato com a função composta segundo uma abordagem gráfica e menos ainda com a regra da cadeia, no curso de Matemática.

Os encontros foram realizados no LIEM (Laboratório de Informática e Ensino de Matemática, sede do GPIMEM, do Departamento de Matemática - UNESP, *campus* de Rio Claro) e contaram com cinco duplas. Cada dupla realizou as oito atividades propostas e, portanto, o tempo de observação variou de dois a quatro encontros, dependendo da dupla e da atividade desenvolvida.

Foram convidados alunos do primeiro ano do curso de Matemática e que já haviam feito o curso sobre o *software* Winplot, descrito anteriormente. Uma aluna que não fez o curso também se prontificou a participar desta pesquisa. Entretanto, antes de convidá-los, aguardei até que a professora da disciplina CDI introduzisse o assunto sobre derivada de funções. Quando, finalmente, ela iniciou o tema acerca de derivada, fiz um convite pessoal aos alunos e marquei uma reunião em um local e horário diferente dos convencionais de aula, para esclarecer o que pretendia com a pesquisa. Nessa reunião, depois de explicada a proposta de pesquisa e do esclarecimento sobre a necessidade de encontros para a efetivação dos experimentos, foram constituídas as duplas e acertados os horários de encontros.

Nesse momento, a UNESP entrou em greve e os alunos que não moravam em Rio Claro voltaram para as suas cidades de origem e tive que, mais uma vez, formar novas duplas, que se dispuseram a fazer parte da pesquisa como voluntários. Assim, com cinco duplas formadas, e com um número de encontros que variavam de acordo com a dupla, a coleta de dados teve uma duração de seis semanas.

As atividades propostas foram entregues às duplas em uma folha de papel onde haviam espaços para as respostas e, eventualmente, eles poderiam fazer suas anotações, além de folhas avulsas e canetas. Dessa forma, os dados desta pesquisa são constituídos pelas anotações escritas dos alunos, nas folhas de atividades e avulsas, pelas gravações do desenvolvimento das atividades feitas pelo *software* Camtasia Studio e por vídeos gravados por uma filmadora fixa, conforme já mencionado anteriormente. Esses vídeos serão apresentados como complementos às imagens feitas com a *webcam*, já que ela captou as imagens da dupla, porém, devido a sua pouca amplitude visual, não gravou as imagens do pesquisador.

Além disso, quando era pedida uma animação nas atividades, o *software* Camtasia Studio apresentava um atraso da imagem em relação ao som. Muitas vezes a imagem não correspondia à fala dos alunos. Assim, os vídeos áudios-visuais, embora fossem, a princípio, complementares à captura de imagens feitas pela *webcam*, mostrou-se importante, pelo menos no que diz respeito ao áudio, na apresentação e na análise inicial dos dados.

A todos os participantes foi explicado qual seria o procedimento de gravação e comentado que não se preocupassem com a filmadora à sua frente. A princípio, isso gerou certo incômodo, mas ao longo do processo, não se perturbaram com a filmagem. Todos permitiram que seus nomes originais fossem utilizados através de uma autorização por escrito.

5.3.5 A Análise

Durante a coleta dos dados elaborei um arquivo de anotações, na qual escrevi, posteriormente aos encontros, as principais observações que ocorreram durante esses. Depois da coleta dos dados iniciei a transcrição de todos os vídeos, procurando integrar as imagens do desenvolvimento das atividades com os diálogos provocados pelas discussões dos alunos ao desenvolverem as atividades propostas. Nessa transcrição também apareceram momentos de minhas intervenções como pesquisadora quando percebia que a dupla não estava atenta à atividade, ou não sabia qual comando do *software* Winplot poderiam utilizar para o desenvolvimento da atividade. Em outra etapa, em cada transcrição, inseri as anotações que havia feito durante a coleta, mesclando as impressões imediatas com as observações mais atentas e aprofundadas, focando o objetivo desta tese.

Para construir os episódios, que serão apresentados no Capítulo 6, procurei mostrar alguns padrões e aspectos que considero relevantes no que diz respeito à produção do

conhecimento acerca de função composta e regra da cadeia. Dessa forma, nem todas as atividades serão apresentadas, bem como, não farão parte dos episódios duplas que repetiram os processos apresentados por outras duplas. Outros episódios mostrarão discussões com mais de uma dupla evidenciando aspectos da produção do conhecimento com a utilização das TIC.

Levando em conta a pergunta de pesquisa, procurei construir episódios que evidenciavam aspectos para respondê-la. No Capítulo 6 optei por apresentar os dados, compostos pelas atividades e pelas discussões de algumas duplas, de forma a não tornar enfadonha a leitura, com o propósito de contribuir para que o leitor possa discordar de minhas interpretações. Dessa forma, os episódios foram organizados a partir das atividades, mescladas com as discussões das duplas que, de alguma forma, chamaram-me a atenção por conter respostas que vinham ao encontro da literatura apresentada e do objetivo desta tese.

Assim, no próximo capítulo, apresentarei o perfil das duplas participantes, bem como a apresentação dos episódios que buscam responder aos questionamentos desta pesquisa. Os episódios foram elaborados com base em respostas de duplas de alunos que de alguma forma davam subsídios à pergunta diretriz. Assim, nem todas as atividades e nem todas as duplas foram utilizadas para a análise dos dados. Isso não inviabiliza a pesquisa, pois embora todas as cinco duplas tenham feito as oito atividades, apenas algumas falas respondem aos questionamentos desta pesquisa.

CAPÍTULO 6

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE INICIAL DOS DADOS

Neste capítulo, apresento o perfil das duplas participantes, a descrição e análise inicial dos dados, buscando responder aos questionamentos desta pesquisa. Os dados são constituídos pelas atividades desenvolvidas pelas duplas de alunos, pelas anotações que eles fizeram nas folhas de papel avulsas e nas folhas das atividades e pelas gravações das ações dos alunos, ao desenvolverem as atividades, captadas por uma *webcam*. As ações podem ser as discussões, os gestos e os apontamentos feitos na tela do computador utilizando o mouse. As gravações foram feitas com o *software* Camtasia Studio, conforme apresentado no Capítulo 4.

6.1 Os Participantes

Os participantes desta pesquisa foram estudantes ingressantes do primeiro ano do curso de Matemática da UNESP - *campus* de Rio Claro (SP), em 2007. Os estudantes já haviam estudado função composta e uma introdução à derivada de função polinomial, regra da potência, coloquialmente conhecida pelos alunos como “regra do tombo”. Nesse período, a UNESP entrou em greve e as aulas foram suspensas, antes que a professora responsável pela disciplina pudesse abordar a regra da cadeia. Dessa forma, os alunos não tinham estudado a regra da cadeia em seu curso regular, ou qualquer outra forma de calcular a derivada de uma função que não fosse a polinomial. Um dos alunos que havia sido transferido de outra

faculdade comentou que se lembrava de ter ouvido falar da regra da cadeia, porém ele apenas enunciou esse fato no decorrer do experimento, o que não alterou a análise. Em relação ao *software* Winplot, com exceção de uma aluna, os demais estavam familiarizados com ele, devido ao mini-curso temático ministrado no início do ano, conforme mencionado no Capítulo 5.

As cinco duplas formadas foram: Adriano e Vívía, Andrews e Daiane, Willian e Débora, Lucas e Pedro, Víctor e Francielle.

Adriano e Vívía. Essa dupla foi formada às vésperas do primeiro experimento, pois outro aluno que seria parceiro de Adriano não pôde comparecer e Vívía manifestou interesse pelo desenvolvimento das atividades. No entanto, como ela não havia participado do mini-curso temático sobre funções utilizando o *software* Winplot, no dia anterior ao combinado para o primeiro encontro da dupla, expliquei a ela alguns dos comandos que seriam necessários para que pudesse desenvolver as atividades. Por esse motivo, Vívía lembrava-se de mais comandos do *software* do que Adriano. Vívía sempre se mostrou mais tímida, e Adriano praticamente conduzia as discussões. Essa foi a primeira dupla que participou dos experimentos.

Andrews e Daiane. A princípio, imaginei que essa dupla, por ser ingressante, não tivesse tido contato com a regra da cadeia. Andrews, no entanto, já tinha ouvido falar, pois no ano anterior, começara um curso de Matemática em uma faculdade particular. Isso só foi possível constatar, em uma de suas falas quando ele estava desenvolvendo uma das atividades. Essa dupla foi a única que não era de Rio Claro e na greve viajou, retornando quase três semanas depois e voltando a participar dos encontros. Daiane, apesar de ser a mais tímida, conduzia, em vários momentos, as discussões.

Willian e Débora. Dessa dupla, Willian era o mais comunicativo e sempre que tinha dúvidas recorria à parceira que, apesar de ser mais calada, ajudava-o com alguns comentários. Essa dupla tinha uma característica de se ater às instruções das atividades. Quando eu interferia com alguma pergunta diferente das que estavam na folha de atividades, Willian respondia que não era isso que estava sendo perguntado na folha e, por essa razão, não iria responder. Era uma dupla que estava mais preocupada com a resposta final do que com o processo em si. Outra preocupação da dupla era finalizar logo as atividades, terminando-as em dois encontros.

Lucas e Pedro. Essa dupla se caracterizou pelo fato de duvidar das respostas que o computador mostrava. Os alunos demonstravam não gostar de trabalhar com o computador e,

ao serem perguntados por que não gostavam de utilizá-lo, respondiam que ele não era preciso, não era exato. Lucas liderava as discussões com mais frequência e, muitas vezes, explicava seu raciocínio a Pedro.

Víctor e Francielle. Essa dupla gostava mais de trabalhar com o computador e testava suas conjecturas, usando outros exemplos que não foram mencionados nas atividades, o que enriqueceu bastante as discussões. Eles se sentiam mais à vontade com o computador do que com lápis e papel, raramente escrevendo alguma coisa, preferindo falar ao invés de escrever.

Durante os experimentos, alguns fatos acontecidos no desenvolvimento das atividades permitiram estruturar cinco episódios que deram respaldo para responder a pergunta diretriz desta pesquisa:

Como o coletivo, formado por alunos-com-mídias, produz o conhecimento acerca de Função Composta e Regra da Cadeia, a partir de uma abordagem gráfica?

Nas próximas seções, reapresento as atividades com o intuito de facilitar a leitura em conjunto com os episódios elaborados decorrentes dessas atividades. Cabe aqui enfatizar que, embora as cinco duplas tenham feito as oito atividades, os episódios nem sempre contarão com todas as duplas, nem mesmo com todas as atividades, pois, os trechos das discussões que foram transcritos e serão mostrados em itálico foram escolhidos pelo fato de fornecerem indícios para responder a pergunta diretriz. Nas discussões que serão apresentadas, foram inseridos comentários meus entre colchetes para o entendimento dos diálogos.

6.2 Atividade 1

A intenção dessa atividade foi trabalhar com a composição de duas funções polinomiais, uma quadrática, $f(x) = ax^2$, e outra linear, $g(x) = bx + c$. A proposta era verificar padrões quando os coeficientes a , b e c são animados, observar aspectos acerca do domínio e da imagem, calcular as expressões algébricas das funções compostas, $f(g(x))$ e $g(f(x))$, e identificar semelhanças e diferenças entre os gráficos das funções compostas.

Com essa atividade, foi possível verificar como os alunos trabalharam com algumas propriedades de composição de funções a partir da análise dos gráficos. As propriedades aqui ressaltadas foram a composição de uma função qualquer com uma função constante

resultando em uma função constante, a não comutatividade e a existência do elemento neutro, que é a função identidade. Além disso, os alunos observaram um padrão de interseção entre as funções compostas $f(g(x))$ e $g(f(x))$ e a função $g(x)=bx+c$ nos eixos x e y , do plano cartesiano, propiciado pela animação de um comando do *software* Winplot.

Uma vez que os alunos já haviam feito o mini-curso temático do *software* Winplot, alguns comandos que apareceram nas atividades eram familiares a eles, porém outros não; por exemplo, os alunos não haviam trabalhado com os comandos de composição e derivação de funções. Algumas particularidades de um desses comandos são necessárias mostrar aqui, para tornar compreensível alguns diálogos. No *menu* **Dois / combinações** aparece uma janela com as operações que podem ser efetuadas com funções: adição (**f + g**), subtração (**f - g**), multiplicação (**f * g**), divisão (**f / g**), potenciação (**f ^ g**) e composição (**f <-- g**). Podemos observar que o comando para composição de funções tem uma notação diferente da usual utilizada na Matemática, conforme Figura 6.1. Esse fato não foi, a princípio, esclarecido para as duplas e isso fez com que cada uma interpretasse esse comando de formas diferentes. Posteriormente, como isso causou certa confusão, foi dito aos alunos que essa notação era equivalente à função composta $f(g(x))$.

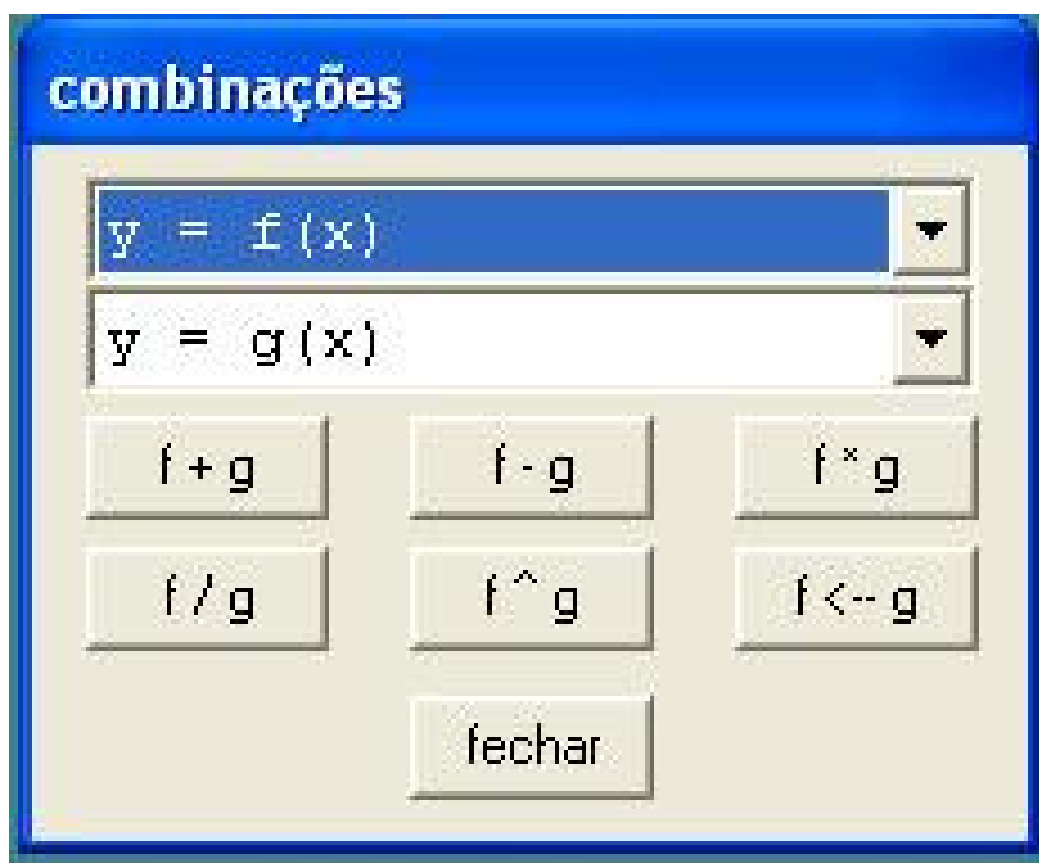


Figura 6.1 - Janela de combinações do *software* Winplot.

Cabe lembrar que o comando para composição de funções (**f <-- g**) ficava fixo e quando era pedido na Atividade 1, item 3), para que os alunos invertem as funções f e g , o comando era o mesmo, porém eles deveriam invertê-las na janela de combinações.

Um roteiro da Atividade 1 é apresentado no Quadro 6.1, para facilitar a leitura.

Atividade 1	
1)	Insira as funções $f(x) = ax^2$, $g(x) = bx + c$ e anime os coeficientes a , b e c .
2)	A partir do menu Dois / combinações , faça combinações de cores diferentes com essas duas funções.
a)	O que você pode observar sobre o gráfico da combinação $f <-- g$ quando os coeficientes a , b e c são animados? (Sugestão: Fixe dois coeficientes e anime o terceiro.)
b)	O que você pode dizer sobre a combinação $f <-- g$ acerca do domínio, imagem e expressão algébrica?
3)	Na janela combinações, inverta as funções f e g , e observe o gráfico. Com esse gráfico, o que você pode dizer sobre a combinação $f <-- g$ acerca do domínio, imagem e expressão algébrica?
4)	Identifique semelhanças e diferenças entre os gráficos que você obteve nos itens 2 e 3.

Quadro 6.1 - Atividade 1.

6.2.1 Episódio 1: Propriedades da Composição de Funções

Esse episódio foi elaborado com o objetivo de destacar como a dupla, formada por Adriano e Vivia, trabalhou com as propriedades de composição de funções a partir de seus gráficos. Nesse episódio, foi possível observar como os alunos identificaram um padrão, propiciado pela animação de um comando do *software* Winplot.

Embora não soubesse o significado do ícone que identificava a composição de funções, $f <-- g$, pois isso não foi explicado *a priori*, Adriano fez a combinação dada pelo comando do *software* Winplot e, ao animar os parâmetros, observou que para $b = 0$, tanto o gráfico da função $g(x)$, quanto o gráfico da função composta $f(g(x))$, gerados pelo comando de combinações, resultavam em gráficos de funções constantes.

Adriano: *Deu uma reta constante [referindo-se tanto ao gráfico da função $g(x)$ quanto ao gráfico da função composta $f(g(x))$]. Mas por que deu uma constante?*

Adriano apenas observou os gráficos, não levando em conta as expressões algébricas dessas funções e também não sabia que o gráfico que ele estava trabalhando era o da função composta $f(g(x))$, pois o comando do *software* Winplot, utilizado para composição de funções, difere da simbologia própria da Matemática. O ícone para a composição de funções, $f(g(x))$, que é dado por $f < - - g$, gerou certa confusão, sendo necessária minha explicação para esse símbolo.

Adriano: *f composta com g? Ahhh você tá botando a g na f. Ah agora entendi o que quer dizer esse símbolo.*

Vívia: *O que é?*

Adriano: *Você tá botando a função g em f... O a e b são os coeficientes da... Entendi agora porque dá uma constante.*

Adriano notou, apenas observando os gráficos, que a composição de uma função quadrática com uma função constante resultava em uma função constante. Diante da dúvida de Vívia, Adriano recorreu à folha de papel para tentar explicar seu raciocínio, compondo algebricamente a função $f(x) = ax^2$ com a função $g(x) = bx + c$, conforme Figura 6.2.

Handwritten derivation:

$$f(g(x)) = a(bx + c)^2 = ab^2x^2 + 2abcx + ac^2$$

Figura 6.2 - Composição da função $f(x) = ax^2$ com a função $g(x) = bx + c$.

Nesse procedimento, Adriano queria mostrar que a composição de uma função quadrática, $f(x) = ax^2$, com uma função linear $g(x) = bx + c$, que se tornou constante quando $b = 0$, gerava uma função também constante. No cálculo algébrico dado pela Figura 6.3, Adriano não considerou, a princípio, $b = 0$, somente ao final disse que se b fosse igual a

zero, a composição seria uma reta constante, e mostrou a Vivia o gráfico gerado pelo *software* Winplot, conforme Figura 6.3.

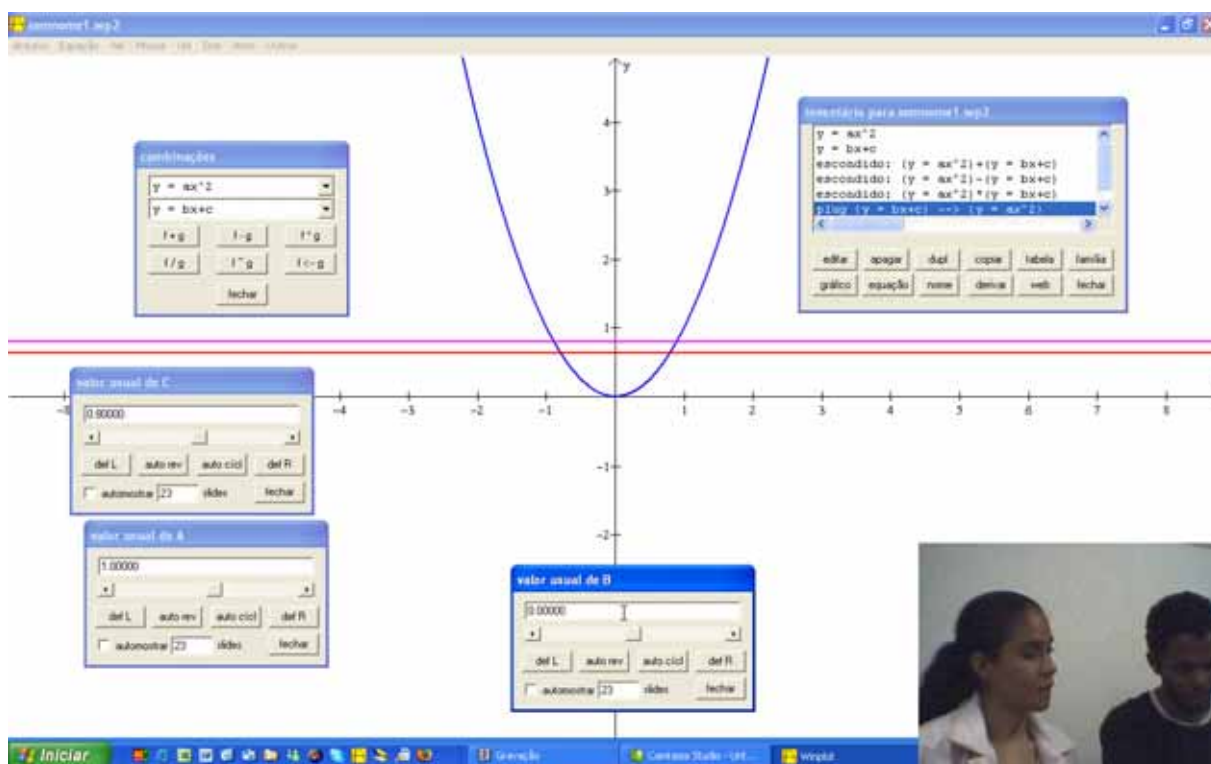


Figura 6.3 - Gráfico das funções $g(x)$ (rosa) e $f(g(x))$ (vermelho) quando $b = 0$.

Adriano: *Se você zerar o b , vai ficar só essa parte que tem o ax^2 , só vai depender dos valores de a e c ... O valor de x não importa.*

É possível notar que o *software* Winplot permitiu a elaboração de uma conjectura acerca de uma propriedade de composição de funções, somente a partir dos gráficos: a composição de uma função qualquer, nesse caso, uma função quadrática, com uma função constante resulta em uma função constante.

Embora Vivia e Adriano fossem alunos do primeiro ano do curso de Matemática e soubessem operar algebricamente com composições de funções, ainda não tinham visto os fundamentos acerca das propriedades dessa operação que, normalmente, são vistos em outras disciplinas desse curso. Assim, não é de se estranhar que as propriedades, de não comutatividade e de existência de elemento neutro (função identidade) para composição de funções, fossem novidades para eles.

O *software* Winplot possibilitou aos alunos elaborarem conjecturas acerca da função identidade e sua propriedade como elemento neutro para a composição de funções. Ao animarem o parâmetro c , fixado $b = 1$, os alunos puderam perceber alguns padrões para o

gráfico da função composta $f(g(x))$. Para $c=0$, Adriano observou que os gráficos da função $f(x)=ax^2$ e da função composta $f(g(x))=a(bx+c)^2$ se sobrepunham.

Adriano: *Ahh ficou a função ax^2 .*

Nesse caso, a função $g(x)=bx+c$, com $b=1$ e $c=0$, tornou-se a função identidade, e, por isso, o gráfico da função composta, $f(g(x))$, era o mesmo da função $f(x)=ax^2$ para qualquer que fosse o valor de a .

A Figura 6.4 mostra que Adriano está variando o parâmetro c , fixados os parâmetros $a=1$ e $b=1$, de modo que o gráfico da função composta $f(g(x))=a(bx+c)^2$, tende a sobrepor o gráfico da função $f(x)=ax^2$.

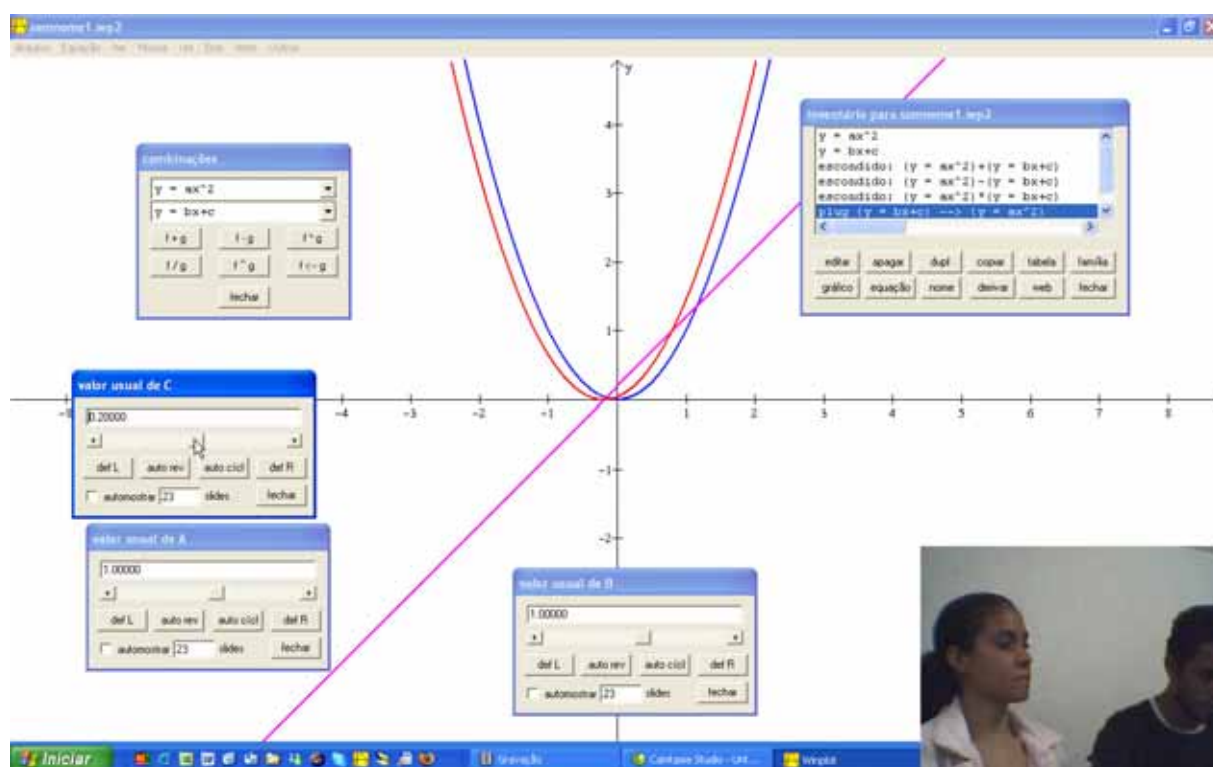


Figura 6.4 - Variação do parâmetro c , fixados $a=1$ e $b=1$.

Adriano: *Ela [parábola, gráfico da função composta $f(g(x))=a(bx+c)^2$] ficou em cima da x^2 [gráfico da função $f(x)=ax^2$].*

Notando que Adriano não havia percebido a propriedade da existência do elemento neutro, para composição de funções, questionei sobre a reta obtida.

Sandra: *Essa reta que você tem aí, que reta que é?*

Adriano: *Essa reta aqui, ela ficou... Deixa eu ver... $y = x$.*

Sandra: *Isso. Você está compondo com a função identidade.*

Adriano: *Isso.*

Mesmo depois de eu ter afirmado que ele estava compondo com uma função identidade, ele não percebeu que toda função ao ser composta com a função identidade resulta na própria função. Particularmente, nesse caso, a função composta é dada por $f(g(x)) = a(bx + c)^2 = ab^2x^2 + 2abcx + ac^2$ e para $c = 0$ temos que $f(g(x)) = ab^2x^2$, ou seja, b poderia assumir os valores 1 ou -1, que não alteraria o gráfico da função composta.

Nesse momento, interfeiri com questionamentos acerca da composição de uma função qualquer com a função identidade.

Sandra: *Por que, quando você coloca b igual a 1, dá a mesma função?*

Adriano: *Porque ela vai ficar... Quando eu aplicar f composta com... com... g , zerar o fator [coeficiente] c , vai ficar na equação o $a... a$ b vezes x quadrado, e o a vai tá multiplicando o b .*

Sandra: *E b é 1.*

Adriano: *E o b é igual a 1. Como a f de x é a x quadrado [$f(x) = ax^2$], vai ficar f composta com $g... V$ ai ficar a mesma função.*

Sandra: *Isso vale para qualquer função?*

Adriano: *Não, não necessariamente. Se eu mudar o valor de b já não vai ser.*

Retomei a pergunta esclarecendo que só teríamos a função identidade se $b = 1$.

Sandra: *Será que vale para tudo? Toda função composta com a identidade vai ser a mesma?*

Adriano: *Ahh creio que não.*

Sandra: *Não?*

Adriano: *Talvez nem sempre.*

Sandra: *Nem sempre?*

Adriano: *Pera aí, deixa eu pensar.*

Adriano para poder “pensar” inseriu uma função cúbica $y = dx^3 + ex^2 + fx + g$, tentando comprovar a hipótese que eu havia levantado. Ao inserir essa função, Adriano se esqueceu de animar os parâmetros d, e, f e g .

Devido à memória do computador, o *software* desenhou um gráfico de uma parábola, e isso se deve ao fato de que, para o *software* Winplot, o parâmetro e não é considerado apenas uma variável, mas a função $\exp(1)$, isto é, o parâmetro e é considerado uma constante de valor 2.71828¹, e os outros parâmetros, d, f e g tomam o valor zero. Assim, quando Adriano inseriu a função cúbica $y = dx^3 + ex^2 + fx + g$, o *software* desenhou o gráfico de uma parábola, a função $y = ex^2 = 2.71828x^2$, e eles não notaram isso, conforme Figura 6.5.

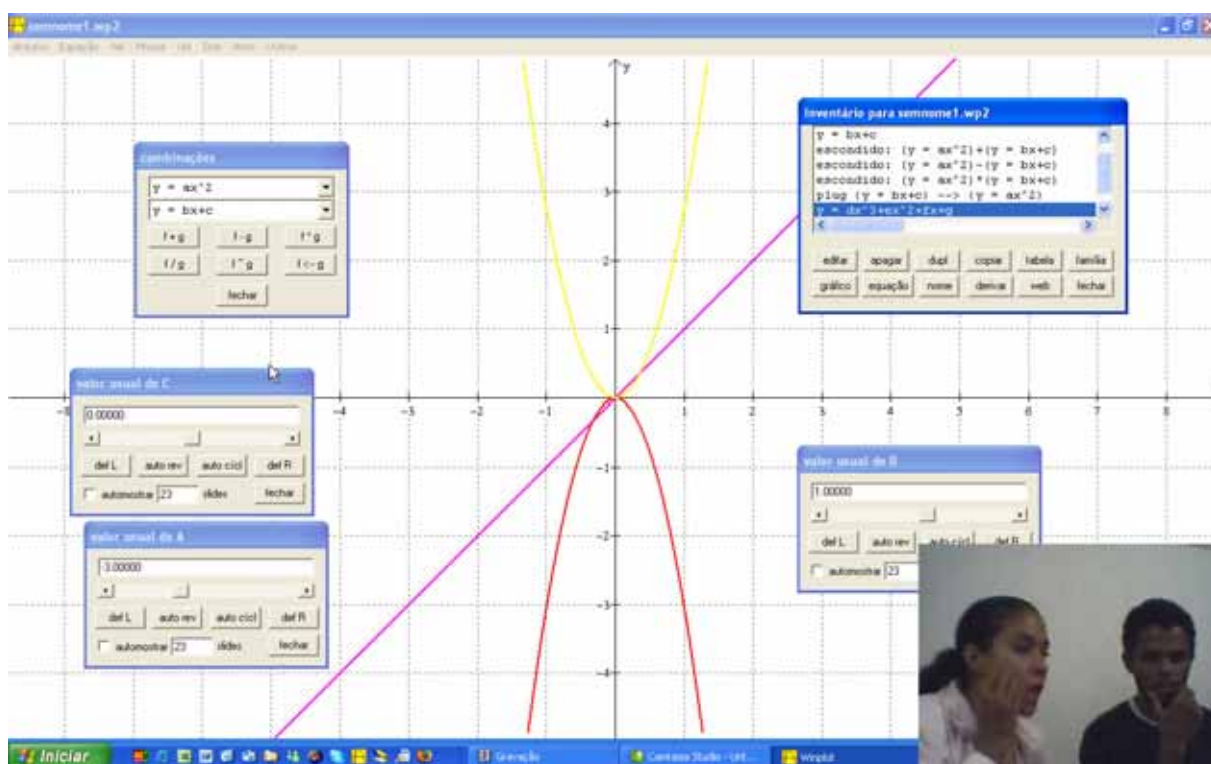


Figura 6.5 - Gráfico de uma parábola, com concavidade para cima.

Apesar de o gráfico ser o de uma função quadrática, e não o de uma função cúbica, os alunos estavam mais preocupados em verificar se, ao comporem essa função com a função identidade, teriam como resultado a própria função inserida. Não se preocuparam com a expressão algébrica, apenas com o gráfico gerado.

Vívia: É a mesma!

Sandra: É a mesma?

¹ Embora o número e seja irracional, o *software* Winplot considera apenas, na visualização, o número 2.71828.

Adriano: *É a mesma função. Igualzinha.*

Vívia: *Mesma coisa.*

Ao animarem os demais parâmetros da função cúbica, d , e , f e g , obtiveram vários gráficos, constatando a propriedade para a composição com a função identidade.

Adriano: *Continua sendo a mesma.*

Vívia: *Independente dos valores.*

Sandra: *Independente de qualquer que seja a função? Quando você compuser com a identidade vai ser sempre a mesma?*

Vívia: *Acho que sim. Parece que sim.*

Adriano: *Aparentemente sim.*

Adriano escreveu em uma folha de papel, conforme Figura 6.6, o cálculo para a composição de uma função cúbica $y = dx^3 + ex^2 + fx + g$ com a função linear $g(x) = bx + c$, substituindo, ao final, os parâmetros com $b=1$ e $c=0$. Adriano, com isso, queria comprovar algebricamente o que ele havia visualizado com os gráficos.

$$\begin{aligned}
 dx^3 + ex^2 + fx + g &= d(bx+c)^3 + e(bx+c)^2 + f(bx+c) + g \\
 &= d(b^2x^2 + 2bcx + c^2)(bx+c) + e(b^2x^2 + 2bcx + c^2) + fbx + fc + g \\
 &= d(b^3x^3 + b^2x^2c + b^2x^2c + 2b^2xc^2 + 2b^2xc^2 + c^3) + e(b^2x^2 + 2bcx + c^2) + fbx + fc + g \\
 &= d(b^3x^3 + 2b^2x^2c + 2b^2xc^2 + c^3) + e(b^2x^2 + 2bcx + c^2) + fbx + fc + g \\
 &= d(b^3x^3 + 3d b^2x^2c + 3d b^2xc^2 + d c^3) + e b^2x^2 + 2bcx + c^2 + fbx + fc + g \\
 &= dx^3 + ex^2 + fx + g
 \end{aligned}$$

Figura 6.6 - Cálculos para função composta.

Pode-se observar, por esse trecho da escrita, que Adriano se preocupou em verificar se os gráficos, mostrados pelo *software* Winplot, estavam de acordo com os cálculos algébricos. Conclui-se, a partir desse pequeno trecho, que a visualização dos gráficos foi importante para “comprovar” sua conjectura. No entanto, Adriano pareceu se sentir mais seguro ao fazer os cálculos algébricos, em uma folha de papel, mesmo que para uma função em particular.

Outra propriedade com a qual foi possível fazer conjecturas, utilizando o *software* Winplot, foi a não comutatividade, isto é, nem sempre vale a propriedade comutativa para a composição de funções. Nesse caso, foi possível verificar que os gráficos das funções compostas, $f(g(x)) = a(bx + c)^2$ e $g(f(x)) = bax^2 + c$, somente se sobrepunham se a função $g(x) = bx + c$ fosse a identidade, isto é, se os parâmetros fossem $b = 1$ e $c = 0$.

Além dessas propriedades, o *software* Winplot possibilitou, por meio da animação dos parâmetros a , b e c , a verificação de um padrão entre os gráficos das funções compostas, $f(g(x)) = a(bx + c)^2$ e $g(f(x)) = bax^2 + c$. Os gráficos dessas funções compostas interceptavam o gráfico da função linear $g(x) = bx + c$ nos eixos x e y , respectivamente.

Adriano: *Olha isso. Essa [gráfico de $g(f(x)) = bax^2 + c$] vai atingir o eixo y onde a reta [gráfico de $g(x) = bx + c$] atinge y e, essa [apontando para o gráfico de $f(g(x)) = a(bx + c)^2$] atinge o eixo x , onde a reta [gráfico de $g(x) = bx + c$] atinge o eixo x .*

Vívia: *É verdade...*

Adriano: *Oh, aqui, a g composta com f [gráfico de $g(f(x)) = bax^2 + c$] vai atingir o... eixo do y no mesmo lugar da reta [apontando, com o mouse, a intersecção no eixo y , conforme Figura 6.7].*

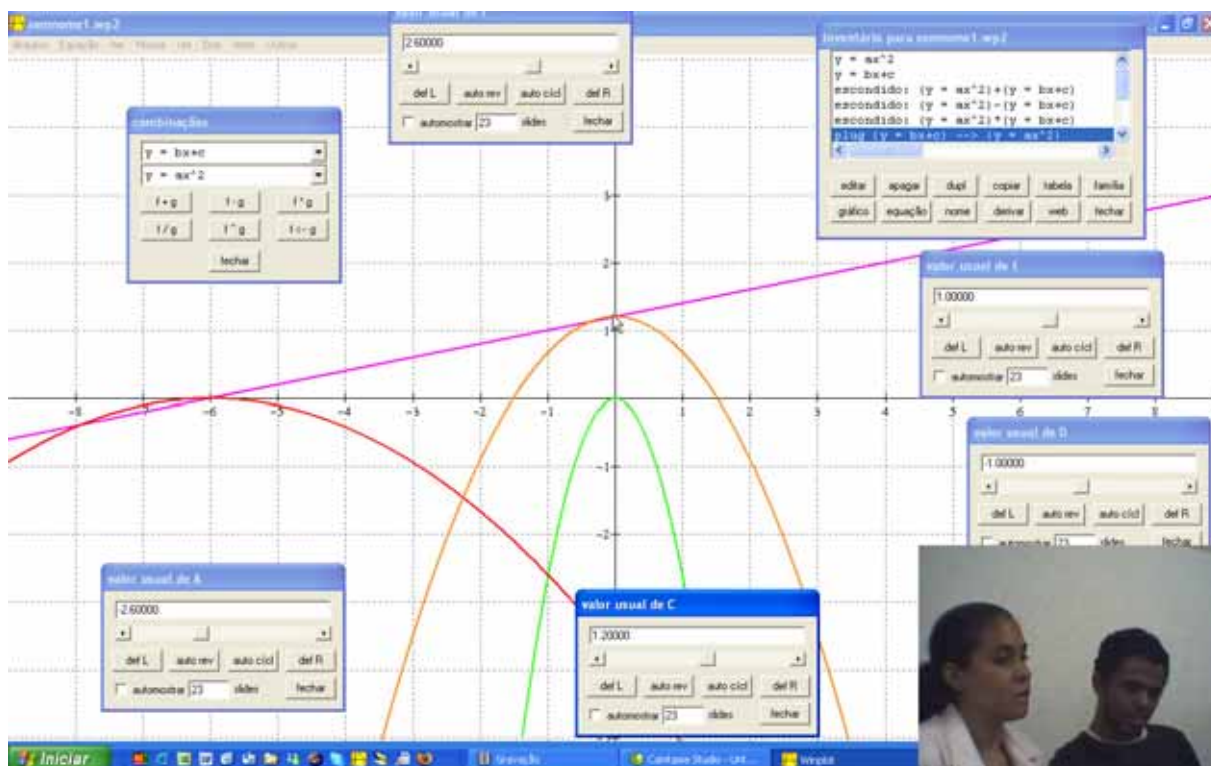


Figura 6.7 - Adriano apontando com o mouse o gráfico da função $g(f(x)) = bax^2 + c$.

Adriano: *E a f com g [gráfico de $f(g(x)) = a(bx+c)^2$] atinge o eixo x no mesmo lugar da reta [ver eixo x da Figura 6.7]. As duas atingem o mesmo ponto [respectivos pontos da reta dada pela função $g(x) = bx + c$].*

Vívia: *Onde a reta cruza tanto o eixo do x quanto o eixo do y.*

Sandra: *Isso vale para qualquer a, qualquer b, qualquer c?*

Adriano constatou, usando a animação de um comando do *software* Winplot, que essa hipótese era válida para qualquer que fosse a variação dos parâmetros a , b ou c , buscando uma generalização do padrão observado.

Com a animação dos parâmetros, possibilitada pelo *software* Winplot, Adriano pôde observar que o gráfico da função composta $g(f(x)) = bax^2 + c$ intercepta o eixo y no mesmo ponto em que esse eixo é interceptado pelo gráfico da função $g(x) = bx + c$. O mesmo raciocínio é válido para o gráfico da função composta $f(g(x)) = a(bx+c)^2$ em relação ao eixo x; ou seja, o gráfico da função composta $f(g(x)) = a(bx+c)^2$ intercepta o eixo x no mesmo ponto em que esse eixo é interceptado pelo gráfico da função $g(x) = bx + c$.

Sugeri a eles usarem outro comando do *software* Winplot, que animaria os três parâmetros simultaneamente, **Anim / Simultânea / lista dos parâmetros**, e que

permite animar quantos parâmetros se queira. Depois de inseridos os parâmetros desejados, deve-se clicar na janela de qualquer um dos parâmetros escolhidos o comando de **auto rev**. Com esse comando, foi possível observar a animação simultânea dos três parâmetros. Embora tal procedimento seja inconveniente, do ponto de vista algébrico, por não ser possível saber o valor exato dos parâmetros, com ele foi possível comprovar a conjectura de Adriano, conforme pode ser visualizado nos gráficos das Figuras 6.8 e 6.9.

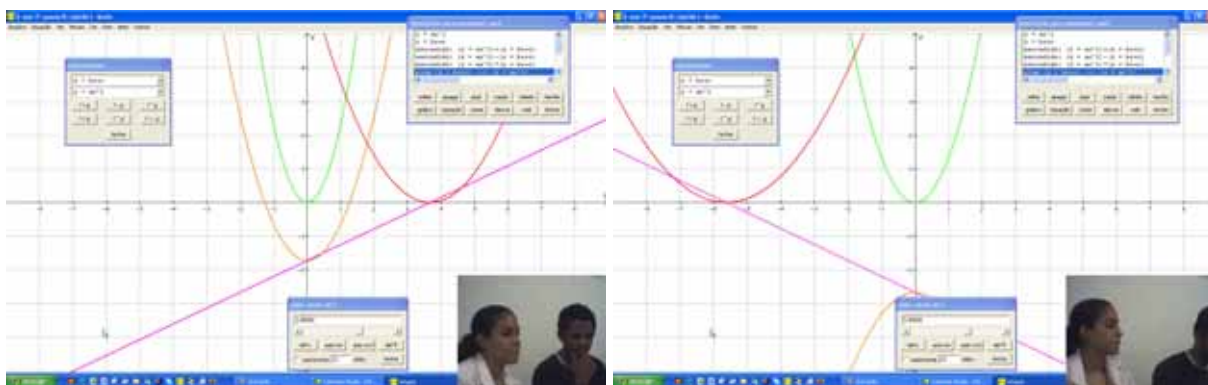


Figura 6.8 - Visualização das interseções dos gráficos das funções compostas com os eixos coordenados quando $a > 0$.

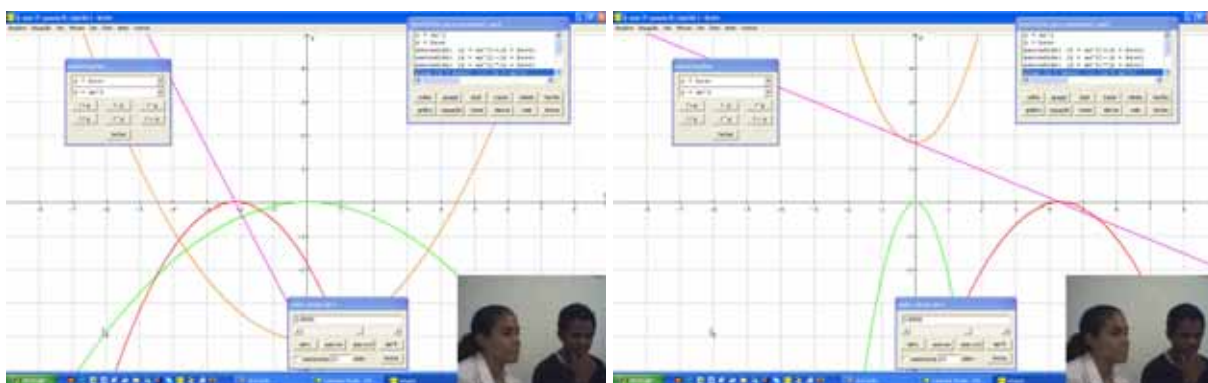


Figura 6.9 - Visualização das interseções dos gráficos das funções compostas com os eixos coordenados quando $a < 0$.

Comprovada essa conjectura, seria necessário testar outras funções diferentes da função quadrática. Adriano testou a função cúbica $f(x) = dx^3 + ex^2 + fx + g$, notando que a propriedade se mantinha, ou seja, que o gráfico da função composta $g(f(x)) = b(dx^3 + ex^2 + fx + g) + c$ interceptava o eixo y no mesmo ponto que esse eixo era interceptado pela reta, dada pelo gráfico da função $g(x) = bx + c$. O mesmo raciocínio era válido para a função composta $f(g(x)) = d(bx + c)^3 + e(bx + c)^2 + f(bx + c) + g$ em relação ao eixo x , conforme Figura 6.10.

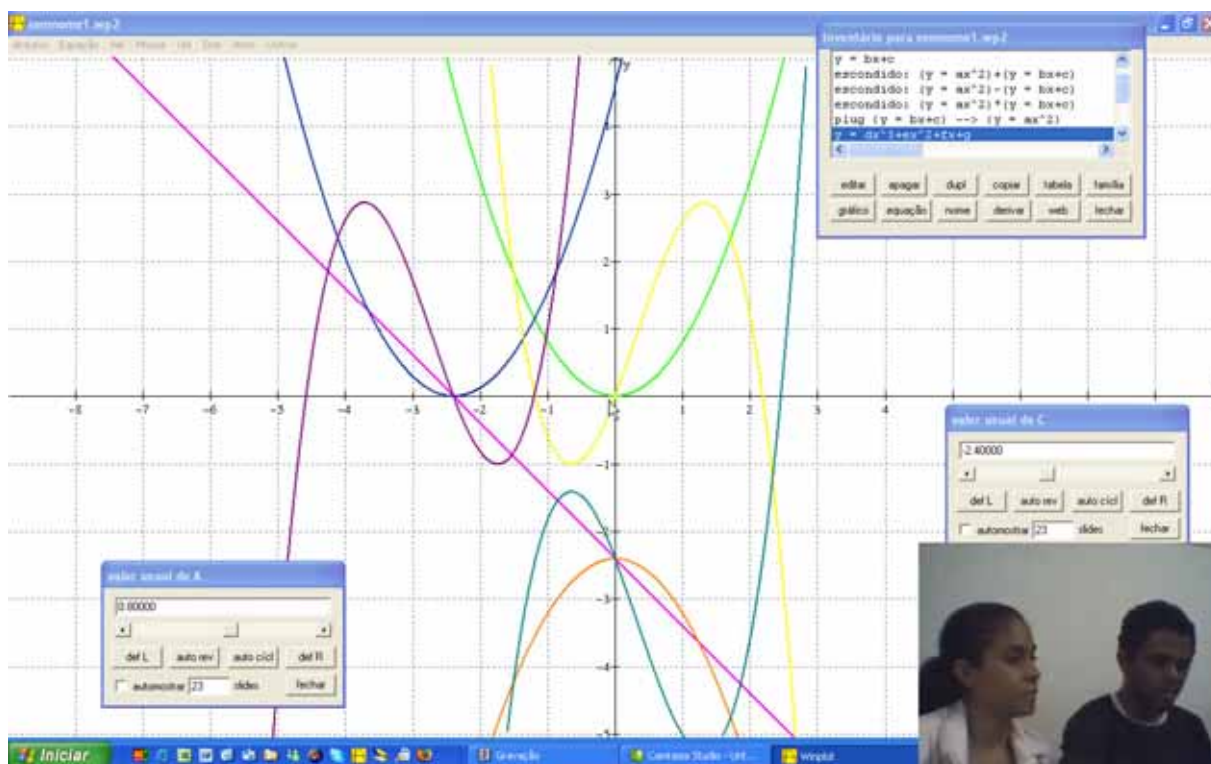


Figura 6.10 - Gráficos de funções compostas cúbicas interceptando os eixos x e y .

No entanto, ao fazer essas composições, Adriano considerou para a função $f(x) = dx^3 + ex^2 + fx + g$ o parâmetro $g = 0$, fazendo com que uma das raízes fosse igual a zero (na origem).

Adriano: *Mas será que só vale quando tem uma raiz aqui?* [apontando para a origem].

Adriano animou o parâmetro g , de tal forma que tivesse um valor distinto de zero, notando que a propriedade não se mantinha, conforme os gráficos da Figura 6.11.

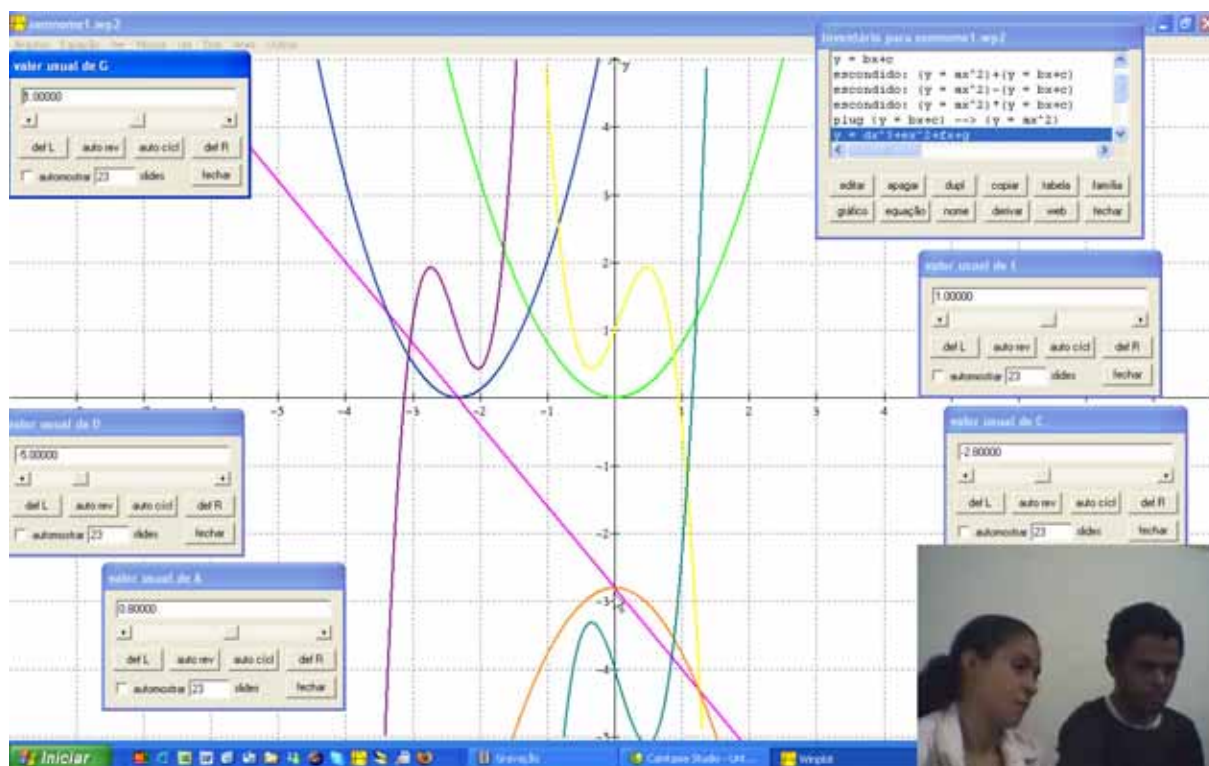


Figura 6.11 - Variação do parâmetro g .

Adriano: *Mas só vale quando g é zero... Se a raiz for diferente já não vale.*

Sugeri colocar outros valores para o parâmetro g .

Adriano: *Para esse g [parâmetro $g = -1$] não vale. Só vale quando uma das raízes for zero.*

Perguntei se com a função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + x$ era válido também, isto é, se valia o mesmo padrão para o termo independente igual a zero. Nesse caso, as funções compostas seriam $f(g(x)) = a(bx + c)^2 + (bx + c)$ e $g(f(x)) = b(ax^2 + x) + c$. Adriano testou os parâmetros e observou que, dessa forma, o padrão foi mantido, conforme Figura 6.12.

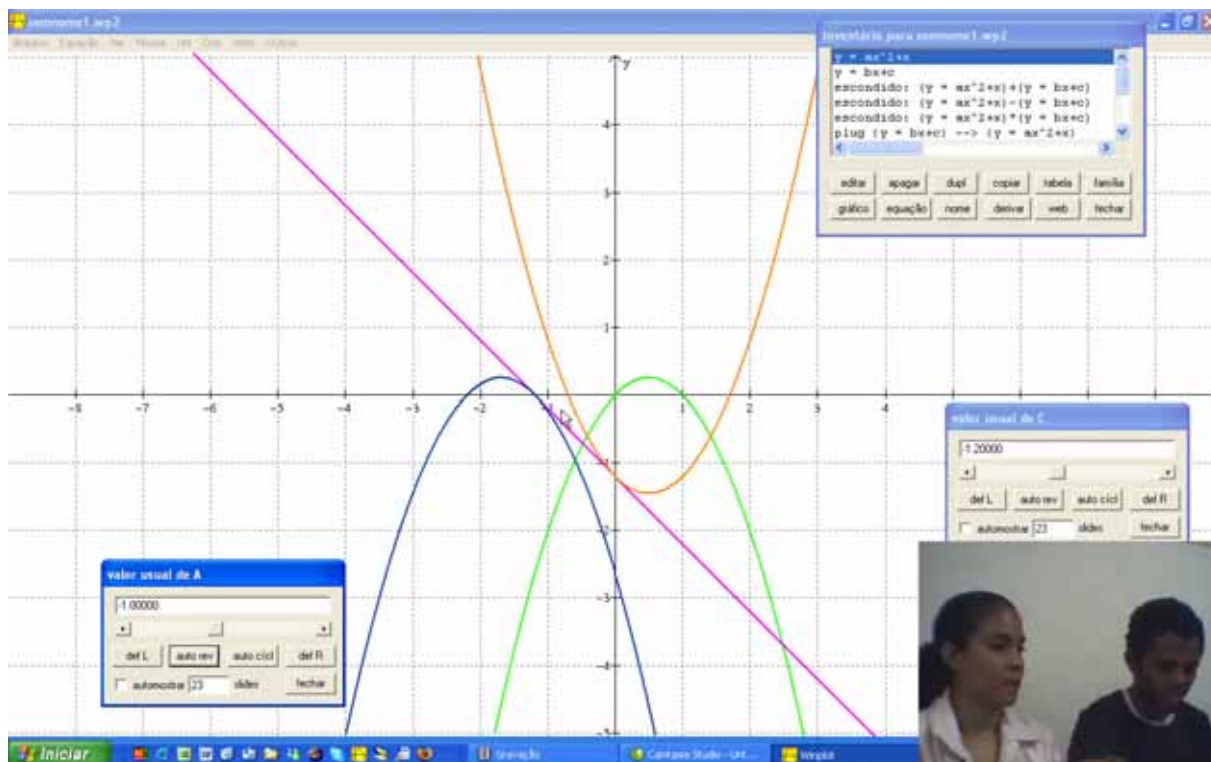


Figura 6.12 - Gráficos das funções compostas $f(g(x)) = a(bx+c)^2 + (bx+c)$ e $g(f(x)) = b(ax^2+x)+c$.

No encontro seguinte, Adriano trouxe, em uma folha de papel separada, uma tentativa de demonstração do que ele havia afirmado sobre o padrão encontrado a partir do *software* Winplot, conforme Figura 6.13.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^2 + bx & a \neq 0 \\
 g(x) &= cx + d & \Rightarrow x = -\frac{d}{c} & c \neq 0 \\
 f(g(x)) &= a(cx+d)^2 + b(cx+d) = a(c^2x^2 + 2cdx + d^2) + bcx + bd \\
 c^2x^2 + 2cdx + d^2 &= 0 & c^2\left(-\frac{d}{c}\right)^2 + 2cd\left(-\frac{d}{c}\right) + \left(-\frac{d}{c}\right)^2 &= 0 \\
 \frac{c^2d^2}{c^2} - \frac{2cd^2}{c} + \frac{d^2}{c^2} &= 0 & \Rightarrow -2d^2 + 2d^2 &= 0 \\
 bcx + bd &= 0 & \Rightarrow bx \cdot \frac{-d}{c} + bd &= 0 \Rightarrow -bd + bd = 0
 \end{aligned}$$

Figura 6.13 - Tentativa de demonstração algébrica.

Podemos notar que Adriano considerou a função $f(x) = ax^2 + bx$, com o coeficiente b genérico, diferente do que ele havia considerado no experimento, na qual a função $f(x) = ax^2 + x$ tinha o coeficiente 1 para a variável x . Mas isso não alterava a generalidade da conjectura.

A esse padrão denominei de Conjectura de Adriano, que pode ser, algebricamente, constatado.

Conjectura: Dadas as funções $f(x) = ax^2$, com $a \neq 0$, e $g(x) = cx + d$, com $c \neq 0$, os gráficos gerados pelas funções compostas, $f(g(x)) = a(cx + d)^2$ e $g(f(x)) = cax^2 + d$, interceptam os eixos y e x , respectivamente, no mesmo ponto em que a reta, gerada pela função $g(x) = cx + d$, intercepta esses eixos.

De fato, o gráfico da função $g(x) = cx + d$, com $c \neq 0$, intercepta o eixo x , quando $g(x) = 0$, no ponto $\left(\frac{-d}{c}, 0\right)$ com $c \neq 0$, e intercepta o eixo y , quando $x = 0$, ou seja, $g(0) = d$, no ponto $(0, d)$. O gráfico da função composta $f(g(x)) = a(cx + d)^2$ intercepta o eixo x , quando $f(g(x)) = a(cx + d)^2 = 0$, com $a \neq 0$, no ponto $\left(\frac{-d}{c}, 0\right)$, com $c \neq 0$. Logo, os gráficos das funções $f(g(x)) = a(cx + d)^2$ e $g(x) = cx + d$ interceptam o mesmo ponto, $\left(\frac{-d}{c}, 0\right)$, no eixo x . O gráfico da função composta $g(f(x)) = cax^2 + d$ intercepta o eixo y , quando $x = 0$, ou seja, $g(f(0)) = d$, no ponto $(0, d)$. Logo, os gráficos das funções $g(f(x)) = cax^2 + d$ e $g(x) = cx + d$ interceptam o mesmo ponto, $(0, d)$, no eixo y .

Para a função $f(x) = ax^2 + bx$, com $a \neq 0$, o raciocínio é análogo. Dadas as funções $f(x) = ax^2 + bx$, com $a \neq 0$, e $g(x) = cx + d$, com $c \neq 0$, os gráficos das funções compostas, $f(g(x)) = a(cx + d)^2 + b(cx + d)$ e $g(f(x)) = c(ax^2 + bx) + d$, interceptam os eixos y e x , respectivamente, no mesmo ponto em que a reta, gerada pela função $g(x) = cx + d$, intercepta esses eixos.

De fato, o gráfico da função $g(x) = cx + d$, com $c \neq 0$, intercepta o eixo x , quando $g(x) = 0$, no ponto $\left(\frac{-d}{c}, 0\right)$ com $c \neq 0$, e intercepta o eixo y , quando $x = 0$, ou seja,

$g(0)=d$, no ponto $(0,d)$. O gráfico da função composta $f(g(x))=a(cx+d)^2+b(cx+d)$ intercepta o eixo x , quando $f(g(x))=a(cx+d)^2+b(cx+d)=(cx+d).(a(cx+d)+b)=0$, com $a \neq 0$, no ponto $\left(\frac{-d}{c},0\right)$, com $c \neq 0$. Logo, as funções $f(g(x))=a(cx+d)^2+b(cx+d)$ e $g(x)=cx+d$ interceptam o mesmo ponto, $\left(\frac{-d}{c},0\right)$, no eixo x . O gráfico da função composta $g(f(x))=c(ax^2+bx)+d$ intercepta o eixo y , quando $x=0$, ou seja, $g(f(0))=d$, no ponto $(0,d)$. Logo, os gráficos das funções $g(f(x))=c(ax^2+bx)+d$ e $g(x)=cx+d$ interceptam o mesmo ponto, $(0,d)$, no eixo y .

Podemos observar que este resultado não é válido se tomarmos uma função quadrática completa, $f(x)=ax^2+bx+e$, com o termo independente diferente de 0, $e \neq 0$. Nesse caso, a conjectura não será válida, isto é, se tomarmos, por exemplo, as funções $f(x)=x^2+x+1$ e $g(x)=x+2$, os gráficos gerados pelas funções compostas, $f(g(x))=(x+2)^2+(x+2)+1$ e $g(f(x))=(x^2+x+1)+2$, não interceptam os eixos y e x , respectivamente, no mesmo ponto em que a reta, gerada pela função $g(x)=x+2$, intercepta esses eixos. Observemos que o gráfico da função $g(x)=x+2$ intercepta os pontos $(0,2)$ e $(-2,0)$ nos eixos y e x , respectivamente. No entanto, esses pontos não pertencem aos gráficos das funções compostas $f(g(x))=(x+2)^2+(x+2)+1$ e $g(f(x))=(x^2+x+1)+2$, conforme Figura 6.14.

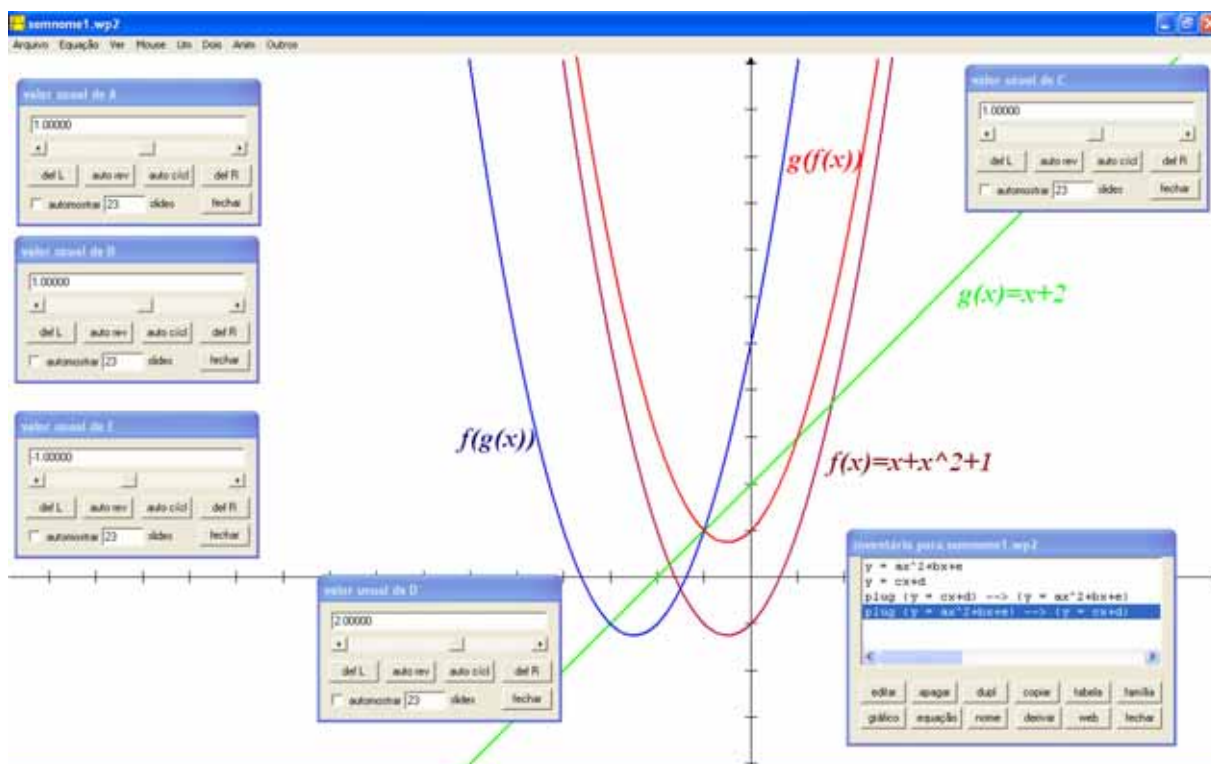


Figura 6.14 - Gráficos das funções composta $f(g(x))$ e $g(f(x))$.

Por tudo que foi apresentado nesse episódio, podemos inferir que a visualização, potencializada pelo *software* Winplot, com o uso da animação, possibilitou que a dupla elaborasse conjecturas, trabalhasse com as propriedades relacionadas à composição de funções, ao mesmo tempo em que integravam as representações gráficas e algébricas.

6.3 Atividades 2 e 3

Embora as Atividades 2 e 3 tenham sido aplicadas separadamente, elas compunham um todo para desenvolver uma mesma idéia, obter os gráficos das funções compostas $f(g(x))$ e $g(f(x))$ a partir dos gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$.

Na primeira parte da Atividade 2, eram dadas as funções f e g , com suas expressões algébricas $f(x)=x^2$ e $g(x)=3x$, bem como seus gráficos em planos cartesianos distintos. A partir daí era pedido para se obter os gráficos das funções compostas, $f(g(x))$ e $g(f(x))$, e uma explicação de como foram obtidos esses gráficos.

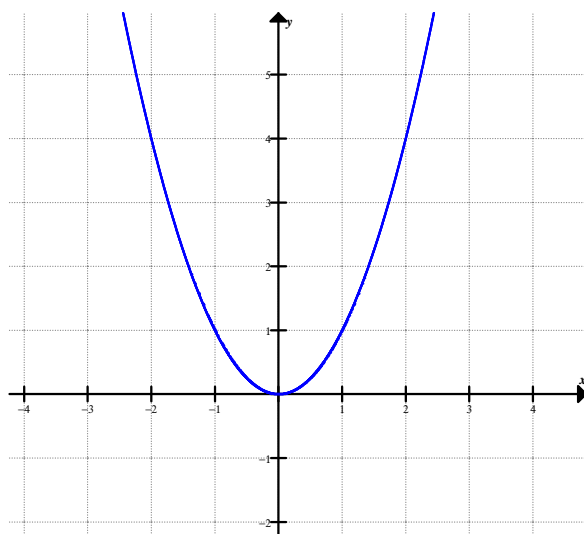
Na segunda parte da Atividade 2, os gráficos de duas funções, $f(x)$ e $g(x)$, eram dados em um mesmo plano cartesiano, porém sem as suas expressões algébricas e, da mesma

maneira, era pedido para se obter os gráficos das funções compostas, $f(g(x))$ e $g(f(x))$, e uma explicação para a obtenção desses gráficos.

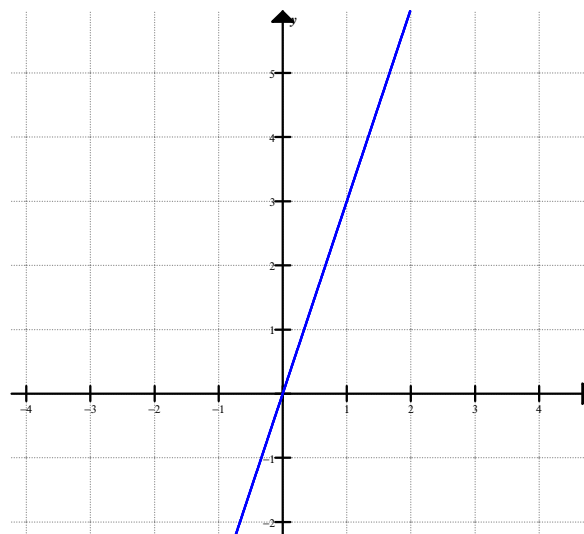
Um roteiro da Atividade 2 é apresentado no Quadro 6.2, para facilitar a leitura.

Atividade 2

- 1) Dados os gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x$, respectivamente,

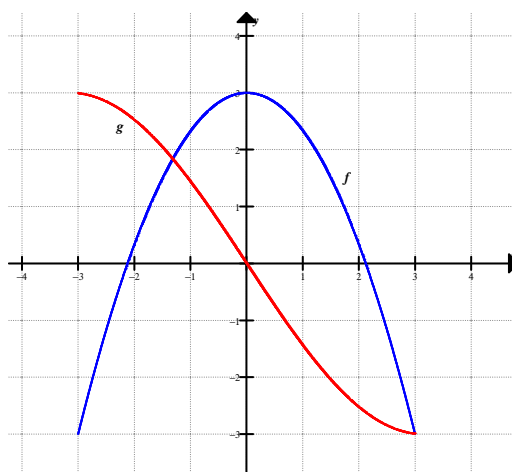


$$f(x) = x^2$$



$$g(x) = 3x$$

- Qual é o gráfico da função composta de f com g ?
 - Qual é o gráfico da função composta de g com f ?
 - Explique como você obteve esses gráficos.
 - Quais as diferenças que você pode observar entre esses dois gráficos?
- 2) Dados os gráficos de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ abaixo:



- a) Qual é o gráfico da função composta de f com g ?
- b) Qual é o gráfico da função composta de g com f ?
- c) Explique como você obteve esses gráficos.

Quadro 6.2 - Atividade 2.

Tal atividade não necessitaria utilizar o *software* Winplot, pois a princípio, ela tinha o propósito de instigar os alunos a perceberem que seria possível obter o gráfico de uma função composta a partir dos gráficos das funções envolvidas na operação de composição, aqui denominadas funções componentes, sem que, necessariamente, fossem dadas por suas expressões algébricas. A maioria das duplas utilizou o *software* Winplot para fazer a primeira parte da atividade. Utilização adequada até então, pois eram dadas as suas expressões algébricas.

No entanto, na segunda parte, todas as duplas, tentaram descobrir as expressões algébricas das funções, $f(x)$ e $g(x)$, dadas apenas por seus gráficos, caracterizando o que entendo ser uma crença entre os alunos: uma função tem que ter uma expressão algébrica.

As duplas tentaram “descobrir”, as expressões algébricas com o intuito de poder obter os gráficos das funções compostas $f(g(x))$ e $g(f(x))$ utilizando o comando de composição do *software* Winplot. Para isso, tentaram adivinhar que tipo de expressão algébrica geraria o gráfico dado, inserindo uma expressão geral, com a variação dos parâmetros para obterem as expressões que mais se aproximavam das funções, $f(x)$ e $g(x)$, dadas apenas por seus gráficos.

Adriano: *Vou fazer uma parecida... Vou tentar jogando uma parecida com as duas... Tentar aproximar esses valores aqui...*

Lucas: *Aí complica... Vai ficar difícil ver esse daqui... Mas eu posso construir a parte algébrica para descobrir?*

O intuito da Atividade 2 era o de introduzir a Atividade 3, instigando o aluno a tentar obter o gráfico de uma função composta a partir dos gráficos de suas funções componentes. Assim, a intenção da Atividade 3 era trabalhar com a composição de duas funções polinomiais, uma quadrática, $f(x) = x^2$, e outra linear, $g(x) = 3x$, a partir de seus gráficos. E se propunha a apresentar como obter o gráfico da função composta $f(g(x))$, a partir dos gráficos das funções g e f , pela animação de um ponto do domínio da função g , dando

continuidade à Atividade 2. Em nenhum momento foi dito às duplas que elas obteriam como resultado o gráfico da função composta e nem mesmo era pedido que calculassem sua expressão algebricamente.

Um roteiro da Atividade 3 é apresentado no Quadro 6.3, para facilitar a leitura.

Atividade 3	
1)	Insira as seguintes funções $f(x)=x^2$, $g(x)=3x$ e $y=x$. Insira o ponto $A(a,0)$ e anime a .
2)	Insira o ponto P, pertencente à função g , com a mesma abscissa do ponto A. Quais são as coordenadas desse ponto? Trace um segmento pontilhado entre os pontos A e P. Anime a . O que você pode dizer sobre a relação entre os pontos A e P?
3)	Insira o ponto Q, pertencente à reta $y=x$, com a mesma ordenada do ponto P. Quais são as coordenadas desse ponto? Trace um segmento pontilhado entre os pontos P e Q. Anime a . O que você pode dizer sobre a relação entre os pontos A, P e Q?
4)	Insira o ponto T, pertencente à função f , com a mesma abscissa do ponto Q. Quais são as coordenadas desse ponto? Trace um segmento pontilhado entre os pontos Q e T. Anime a . O que você pode dizer sobre a relação entre os pontos A, P, Q e T?
5)	Insira o ponto R com mesma abscissa do ponto A e ordenada do ponto T. Quais são as coordenadas desse ponto? Trace um segmento pontilhado entre os pontos T e R. Anime a . O que você pode dizer sobre a relação entre os pontos A, P, Q, T e R?
6)	Ao animar a , que gráfico o ponto R desenha? Qual é a representação algébrica desse gráfico? Que relação existe entre o gráfico desenhado pelo ponto R e os gráficos da função f e g ?
Obs: A partir do ponto R (no inventário), você pode clicar em família. (Sugestão: parâmetro: a, mínimo: -2, máximo: 2, passos: 100, olhar, atraso 500, definir).	
7)	O que você pode dizer sobre a inserção da reta $y=x$?

Quadro 6.3 - Atividade 3.

6.3.1 Episódio 2: Obtenção do Gráfico de uma Função Composta

Esse episódio foi elaborado com o objetivo de mostrar como o diálogo da dupla, formada por Andrews e Daiane, desencadeado pela Atividade 3 e pelo *feedback* proporcionado pelo *software* Winplot, permeou a elaboração de conjecturas acerca da obtenção do gráfico da função composta a partir dos gráficos de suas funções componentes. Uma discussão surgiu também a partir da pergunta sobre o papel da inserção da função identidade na obtenção do gráfico da função composta.

A dupla desenvolveu a atividade, como pedido e obteve o gráfico da função composta $f(g(x))$ gerado pelo ponto R, a partir da animação do parâmetro a , conforme Figura 6.15.

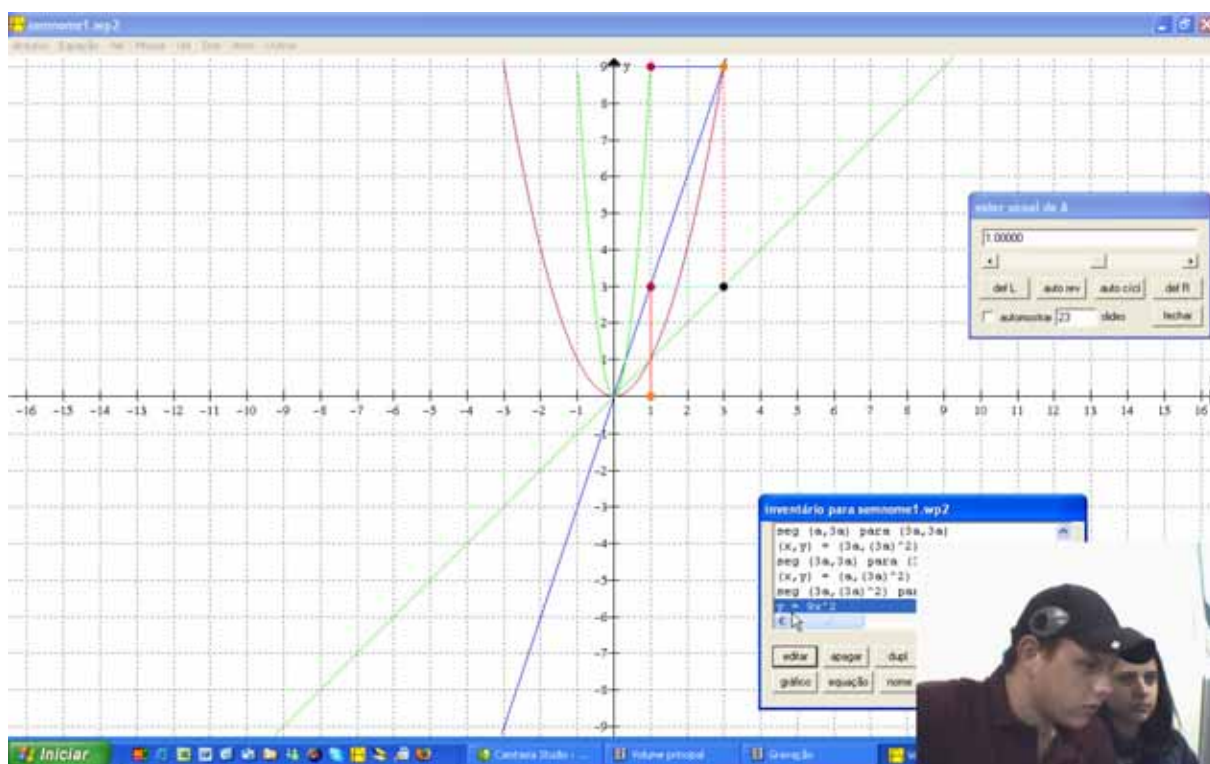


Figura 6.15 - Obtenção do gráfico da função composta $f(g(x))$ (parábola verde).

No entanto, quando perguntados sobre o gráfico que o ponto R desenhava houve uma discussão entre eles.

Andrews: *Eu acho que é y igual a 9x ... Não? Não é?*

Daiane: *Acho que não... 9x, 9x².*

Andrews: *Mas aqui tá no 3, aquela lá é no 3x não é?* [referindo-se à função $g(x)=3x$].

Daiane: *Oh... Essa função azul [função $g(x) = 3x$].*

Andrews: *É $3x$ não é?... Essa aqui tá no 1 [apontou 1 no eixo x e percorreu com o mouse o segmento até o ponto 9] lá no 9... $3x$ quadrado?*

Daiane: *Faz assim o ponto quando x é a , y é $3a$ ao quadrado.*

Daiane sugeriu a Andrews inserir a função $y = 9x^2$, gerando o gráfico que o ponto R desenhava.

Daiane: *É o ponto... As coordenadas do ponto... Quando x é a , y é $(3a)^2$, que é $9a^2$.*

Andrews: *Explica de novo.*

Daiane: *Ali não é $(3a)^2$... Não tem tudo ao quadrado?*

Andrews: *Onde? Aqui?*

Daiane: *Lá, tem x , y no ponto [apontando na janela do inventário as coordenadas do ponto $R(x, y) = (a, (3a)^2)$]... É tudo ao quadrado, não é? Então vai ficar $9a^2$.*

Daiane percebeu, ao utilizar o *software* Winplot, que o ponto R desenhava o gráfico da função $y = (3x)^2 = 9x^2$ devido às suas coordenadas, ao contrário de Andrews que não havia notado isso. Porém, Daiane só notou que o gráfico desenhado pelo ponto R era o gráfico da função composta $f(g(x)) = (3x)^2$ depois que foram questionados sobre a relação existente entre o gráfico desenhado pelo ponto R e os gráficos das funções f e g .

Daiane: *Então seria a composição das duas?*

Sandra: *Composição das duas? De quem com quem?*

Daiane: *Você vai substituir a g na f .*

Andrews: *$(3x)^2$... $9x^2$.*

Daiane: *Isso. Vai ser f ...*

Andrews: *f composta com g .*

Daiane: *f composta com g ... Quer testar?*

Andrews utilizou o comando de combinação para composição de funções obtendo o gráfico da função composta $f(g(x)) = (3x)^2 = 9x^2$.

Podemos notar aqui que, embora o gráfico obtido, pelo ponto R, fosse dado pelas coordenadas desse ponto, a dupla não notou, de imediato, que esse também era o gráfico da função composta $f(g(x)) = (3x)^2 = 9x^2$, obtido pelos gráficos das funções g e f . Andrews nem mesmo havia notado que o ponto R, dado por suas coordenadas gerava o gráfico da função $y = (3x)^2 = 9x^2$. Apenas depois de perguntados sobre a relação que poderia existir entre esses gráficos, foi possível constatar que era o gráfico de uma composição.

Com isso, é possível perceber que a dupla consegue lidar com as expressões algébricas, porém tem dificuldade em relacioná-las com seus gráficos.

Ao serem perguntados sobre a inserção da reta $y = x$, Andrews tentou dar uma explicação.

Andrews: *O que dá pra perceber... Qual que é esse ponto aqui?* [apontando para o ponto $Q(3a, 3a)$]... *Que esses dois pontos aqui* [apontando para os pontos $P(a, 3a)$ e $Q(3a, 3a)$] *eles se movem... digamos na mesma horizontal... e são funções diferentes, isso que dá pra notar... Conforme você vai animando eles, estão sempre na mesma linha, estão sempre alinhados... E o ponto... esse ponto da parábola [ponto $T(3a, 9a^2)$] com o ponto R também. Eles estão sempre alinhados.*

Sandra: *Suponha que eu não tivesse as expressões algébricas.*

Andrews: *Só o desenho?*

Perguntei como se obteria o gráfico da função composta.

Andrews: *Não sei... Eu não consigo falar o porquê que precisa... mas parece que precisa.*

Diante da dúvida de Andrews, sugeri que eles animassem o parâmetro a no intervalo de $[-1, 1]$, e pedi a imagem da função g , e ele respondeu, mostrando no gráfico, que era de $[-3, 3]$; em seguida, perguntei sobre o domínio da função f , e ele respondeu de $[-3, 3]$ apontando os pontos no eixo x . Andrews explicou que percebeu que o parâmetro a sendo animado em um determinado intervalo, obtinha outro intervalo para a imagem da função g e que era o mesmo intervalo para o domínio da função f .

Andrews: *Ahhh... A imagem [do ponto $Q(3a,3a)$] vai ser igual a da g . Então tem tudo a ver!!*

Sandra: *Tem tudo a ver?*

Andrews: *Tem. Porque o domínio da f ... O domínio da identidade é igual ao da f e... a imagem da identidade é igual a imagem da g ... É verdade, vai facilitar nossa... nossa visualização.*

Andrews percebeu que, com isso, a imagem da função g era igual ao domínio da função f , utilizando a função identidade como uma espécie de reflexo, de uma forma visual, embora ele tenha feito certa confusão com o domínio e imagem da função identidade. Foi necessário restringir um intervalo para que o Andrews percebesse o propósito da inserção da função identidade para a obtenção do gráfico da função composta.

Podemos notar, nesse episódio que, embora os alunos tivessem dificuldade, a princípio, em lidar com os gráficos das funções sem suas expressões algébricas, para obtenção de um gráfico de uma função composta, a visualização, proporcionada pelo *software* Winplot, possibilitou a elaboração de conjecturas associadas à obtenção desse gráfico, a partir dos gráficos das funções componentes. As perguntas da atividade instigaram a dupla a relacionar os gráficos das funções f e g , com o gráfico obtido pela animação de um ponto. A animação, proporcionada por um recurso do *software* Winplot, também provocou um esclarecimento sobre a inserção da reta $y = x$, para a obtenção do gráfico da função composta. Além disso, os alunos se deslocaram entre as representações gráficas e algébricas, avaliando as respostas dadas pelo *software* Winplot, para confirmarem suas hipóteses.

6.4 Atividade 5

O objetivo desta atividade foi o de fazer com que o aluno percebesse e enunciasse a fórmula da regra da cadeia, $f'(g(x)).g'(x)$, lembrando que eles não haviam tido contato com essa fórmula anteriormente. Para isso, foi pedido para que o aluno inserisse, utilizando o comando do *software* Winplot, as funções, $f(x)=x^2$ e $g(x)=3x$, e suas respectivas derivadas, $f'(x)$ e $g'(x)$. Devemos lembrar aqui, que os alunos começaram a estudar uma introdução à derivada, sabendo calcular apenas a derivada de funções polinomiais, ou regra da

potência, coloquialmente chamada pelos alunos como “regra do tombo” e, portanto, as derivadas dessas funções eram conhecidas dos alunos.

Utilizando uma abordagem gráfica, a proposta dessa atividade era comparar o gráfico da derivada da função composta, $(f(g(x)))'$, gerado pelo comando de derivar do *software* Winplot, com o gráfico da derivada da função f em relação à função g , $f'(g(x))$. Com isso, poderíamos indicar que a derivada da função composta, $f(g(x))$, não era apenas a derivada da função f em relação à função g , $f'(g(x))$, que é um erro muito comum evidenciado na literatura analisada no Capítulo 1, desta tese.

Depois de evidenciado, graficamente, que a derivada da função composta não era apenas a derivada da função f em relação à função g , era pedido que o aluno completasse uma tabela, onde a função $f(x)=x^2$ era fixada e o coeficiente da função g era variado com números inteiros. Tal tabela tinha por objetivo levar o aluno a perceber uma generalização da regra da cadeia, de forma indutiva, evidenciando o papel da derivada da função g , e não apenas a derivada da função f em relação à função g .

As duplas já estavam familiarizadas com os comandos do *software* Winplot e com as funções que apareciam nessa atividade, mas não sabiam que se tratava da regra da cadeia. No *software* Winplot, existe um comando de derivar uma função, na janela Inventário que, apenas gera o gráfico da função derivada, mas não sua expressão algébrica, conforme Figura 6.16.

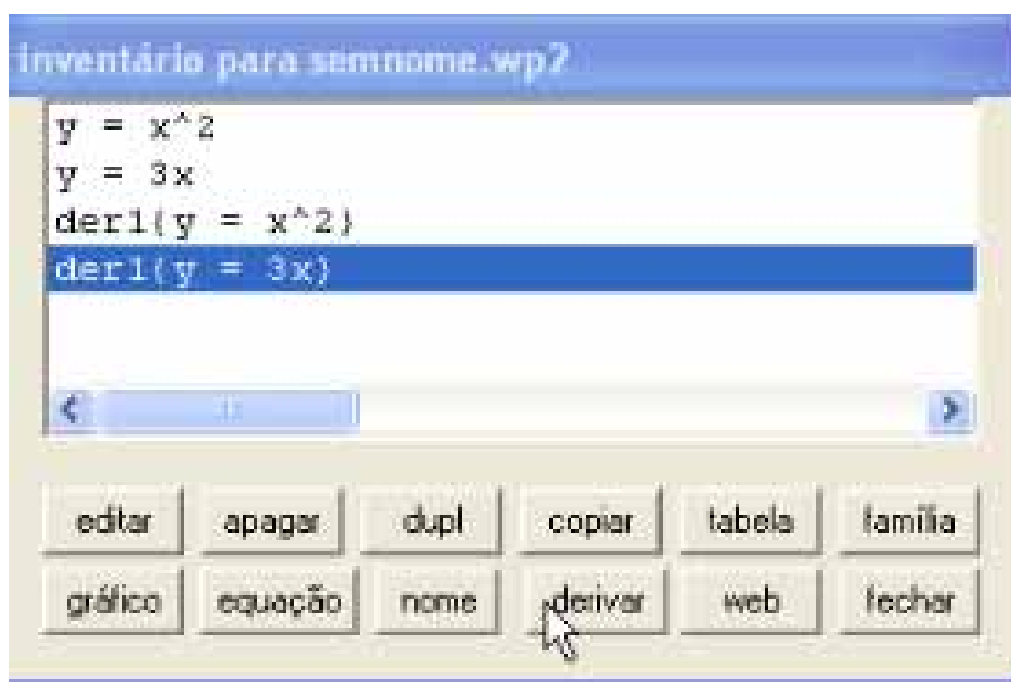


Figura 6.16 - Comando derivar, na janela inventário.

Um roteiro da Atividade 5 é apresentado no Quadro 6.4, para facilitar a leitura.

Atividade 5

- 1) Insira as funções $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x$ e suas respectivas derivadas, $f'(x)$ e $g'(x)$.
- 2) Insira a função composta $f(g(x))$ e, a partir do *menu* **inventário / derivar**, plote o gráfico da derivada da função composta.
- 3) Liste na tabela abaixo, algebricamente, as seguintes funções:

$f(x) =$	$g(x) =$
$f'(x) =$	$g'(x) =$

- 4) A partir da combinação $f \circ g$, plote o gráfico da função composta $f(g(x))$ e responda:
 - a) Qual é a sua representação algébrica?
 - b) O que você pode observar desse gráfico em relação ao gráfico, dado pelo Winplot, da derivada da função composta $f(g(x))$?
 - c) Os gráficos têm a mesma representação gráfica? Justifique sua resposta.
- 5) Mantendo a função $f(x) = x^2$ complete a tabela abaixo:

	$g(x) = 3x$	$g(x) = 4x$	$g(x) = 5x$
$f(g(x))$			
$g'(x)$			
$f'(g(x))$			
$(f(g(x)))'$			

- a) E se a função g fosse $g(x) = ax$, mantendo $f(x) = x^2$, qual seria a função derivada $(f(g(x)))'$?
- b) E se a função g fosse $g(x) = ax$ e a função f fosse $f(x) = x^n$, qual seria a função derivada $(f(g(x)))'$?

Quadro 6.4 - Atividade 5.

6.4.1 Episódio 3: Enunciação da Regra da Cadeia

Esse episódio foi elaborado com o objetivo de mostrar como a comparação dos gráficos das funções $(f(g(x)))'$ e $f'(g(x))$ desconstrói a idéia de que essas funções poderiam ser iguais, que é um erro muito comum evidenciado na literatura conforme apresentado no Capítulo 1; isto é, o gráfico da derivada da função composta permite ao aluno uma desconstrução da idéia de que a derivada de uma função composta é apenas a derivada da função f em relação à função g , $f'(g(x))$. Para construir esse episódio, foram escolhidos alguns diálogos presentes nas discussões das duplas, Victor e Francielle, Andrews e Daiane, Lucas e Pedro, por caracterizarem uma enunciação da regra da cadeia, a partir de uma abordagem gráfica proporcionada pelo comando do *software* Winplot.

A dupla, formada por Victor e Francielle, inseriu as funções $f(x)=x^2$, $g(x)=3x$ e suas respectivas derivadas, $f'(x)=2x$ e $g'(x)=3$ e, a partir do comando de combinações para a composição, obteve o gráfico da função $f(g(x))$. Posteriormente, com o comando derivar, a dupla plotou o gráfico da função $(f(g(x)))'$ e, em seguida, o gráfico da função $f'(g(x))$, em um mesmo plano cartesiano; porém, como o plano cartesiano obtido ficou muito confuso, devido à variedade de gráficos, os alunos deixaram à mostra somente os gráficos das funções $(f(g(x)))'$ e $f'(g(x))$, escondendo os demais, conforme Figura 6.17.

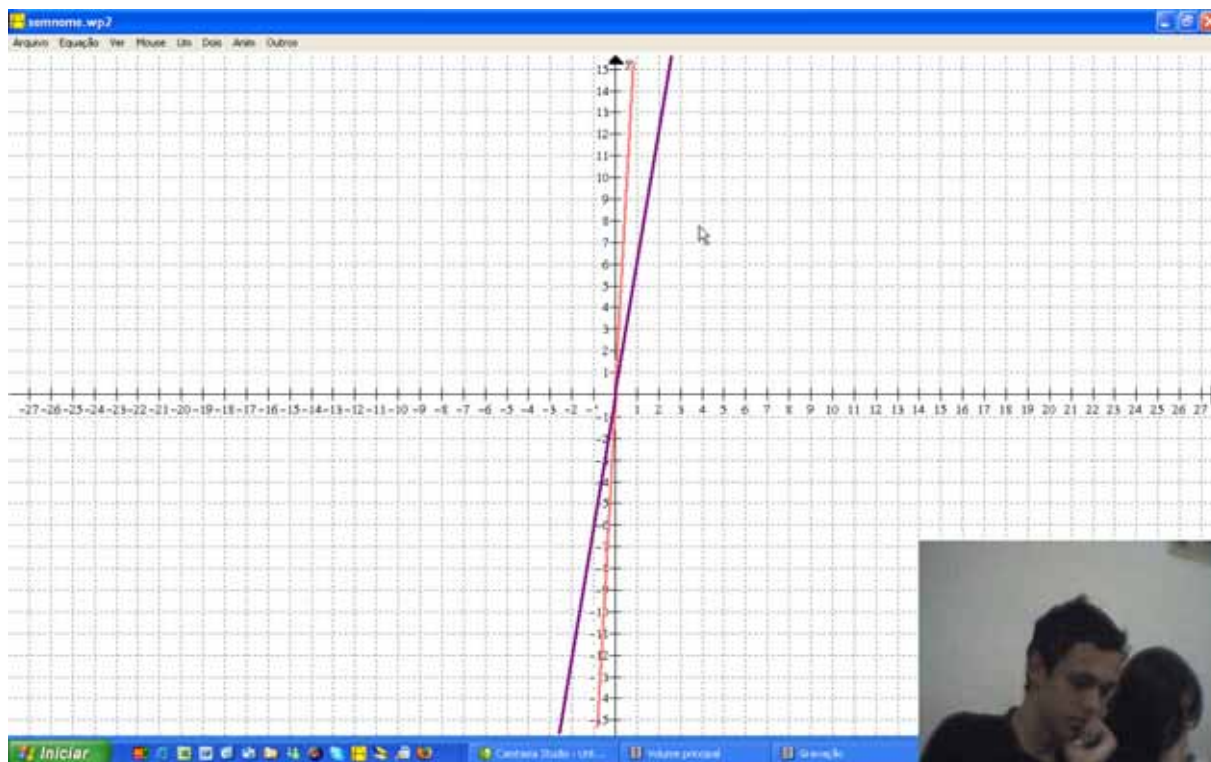


Figura 6.17 - Gráficos das funções $(f(g(x)))'$ (rosa) e $f'(g(x))$ (roxo).

Ao serem questionados sobre a relação entre os gráficos das funções $(f(g(x)))'$ e $f'(g(x))$, Victor respondeu que uma era um terço da outra.

Victor: *Podemos chegar à conclusão [de] que ela [função $f'(g(x))$] é um terço da outra [função $(f(g(x)))'$].*

Sandra: *Que relação existe entre as duas?*

Victor: *O 3... O 3 multiplicando.*

Sandra: *De onde surgiu esse 3?*

Depois de algum tempo, Victor observou a tabela que eles haviam completado no item 3, conforme Figura 6.18, e perguntou se esse 3 seria o da derivada da função $g(x) = 3x$.

3) Liste na tabela abaixo, algebricamente, as seguintes funções:

$f(x) = x^2$	$g(x) = 3x$
$f'(x) = 2x$	$g'(x) = 3$

Figura 6.18 - Tabela de funções obtidas.

Victor: *Seria o 3 da derivada de g ?*

Victor percebeu, pela observação dos gráficos, que as funções, dadas pelas notações $(f(g(x)))'$ e $f'(g(x))$, apesar de serem distintas, tinham uma relação entre elas. Essa relação apenas foi notada quando ele observou a tabela que continha a derivada da função g . Dessa forma, ele enuncia a regra da cadeia a partir da observação dos gráficos, buscando uma relação entre eles e a derivada da função g .

A dupla, formada por Andrews e Daiane, obteve os gráficos pedidos da atividade e, ao ser questionado sobre as diferenças entre os gráficos da função $f'(g(x))$ e o gráfico da derivada da função $f(g(x))$, Andrews comentou algo sobre os coeficientes de inclinação.

Andrews: *As retas... coeficientes de inclinação dela ... o m que é a derivada ... tá diferente... A derivada da composta tá menos... tá mais inclinada... tá mais inclinada do que... a composta da derivada de f com g [conforme pode ser observado na Figura 6.19].*

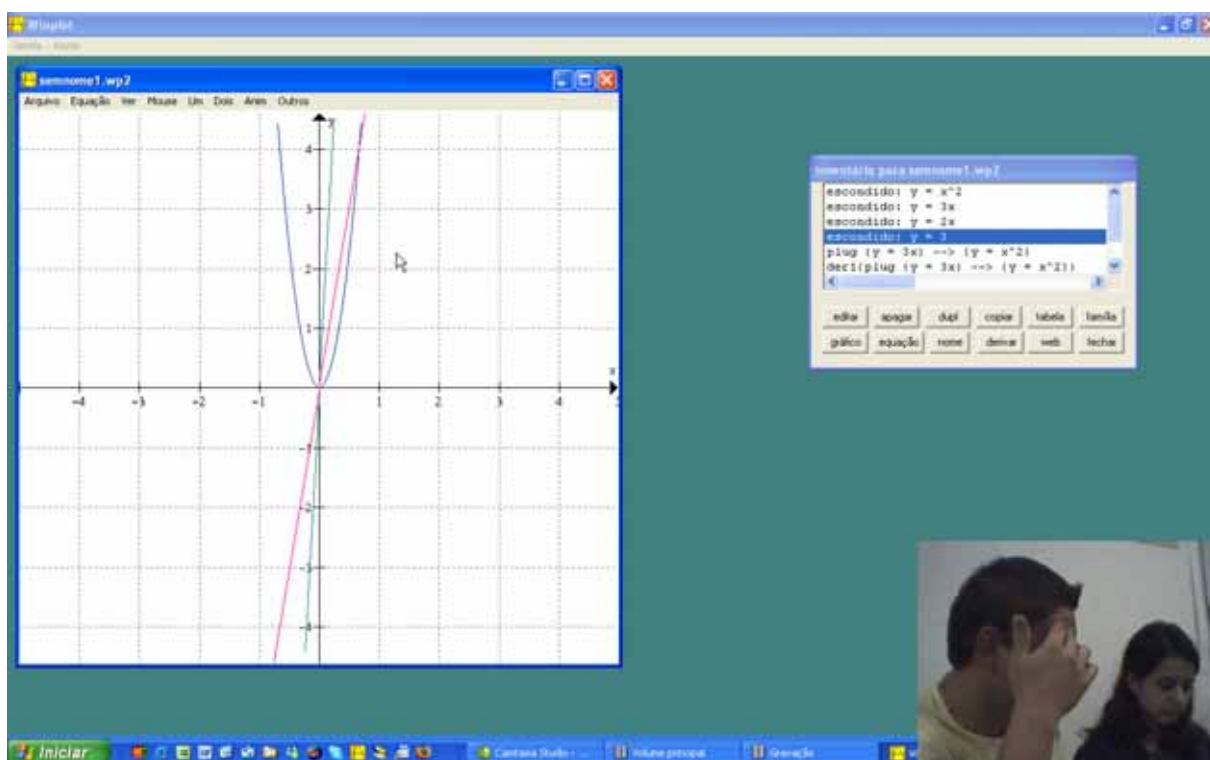


Figura 6.19 - Gráficos das funções $f'(g(x))$ e $(f(g(x)))'$.

Andrews completou sua observação, dizendo que era por causa da inclinação que eles eram distintos. Perguntei se $f'(g(x))$ não era a derivada de função composta, e eles disseram que não, porque os gráficos eram diferentes. No entanto, Andrews questionou sobre a derivada da função g .

Andrews: *A $g(x)$ também não tinha que ter derivada?*

Sandra: *Como assim?*

Andrews: *Aqui dentro teria que também colocar a derivada de $g(x)$... 3.... f da derivada de 3.*

Sandra: *f da derivada de 3?*

Andrews: *O g da derivada de x é 3 [ele quis dizer $g'(x)=3$]... Aí esse 3 eu ia colocar aqui [apontando para a função $f'(x)$]. Então f da derivada de 3 é 6.*

Pelo discurso de Andrews, a derivada da função composta $f(g(x))$ seria $f'(g'(x))=f'(3)=6$. Essa afirmação evidencia outra maneira de como os alunos enxergam a derivada de uma função composta. Entretanto, como eles já haviam obtido o gráfico da derivada da função composta, essa hipótese foi refutada.

Daiane: *Mas aí não vai ser...*

Andrews: *Vai ser uma reta constante.*

Daiane: *Então não é isso também...*

Daiane: *Você tem que fazer a composta das duas depois derivar.*

Sandra: *Como é que é?*

Daiane: *Você faz a composta de f com g . O resultado daí você faz a derivada... Eu faria a composta de f com g que seria $9x^2$.*

Daiane: *Aqui vai dar $9x^2$ e esse resultado a gente faz a derivada.*

Embora a observação do gráfico da derivada da função composta levasse Andrews a repensar o que ele havia dito em relação à derivada da função g , sua parceira Daiane reformulou a questão em termos algébricos, pois as funções pedidas eram polinomiais e geravam uma função composta que Daiane sabia calcular a derivada.

A dupla completou a tabela do item 5), conforme a Figura 6.20.

5) Mantendo a função $f(x) = x^2$ complete a tabela abaixo:

	$g(x) = 3x$	$g(x) = 4x$	$g(x) = 5x$
$f(g(x))$	$9x^2$	$16x^2$	$25x^2$
$g'(x)$	3	4	5
$f'(g(x))$	$6x$	$8x$	$10x$
$(f(g(x)))'$	$18x$	$32x$	$50x$

Figura 6.20 - Tabela do item 5.

A intenção dessa tabela era levar os alunos a perceberem, indutivamente, a fórmula da regra da cadeia, mas isso não aconteceu de imediato, sendo necessária a minha intervenção.

Sandra: *O que você pode observar dessa tabela aqui, para você chegar a esse resultado aqui [derivada da função composta]? Ao invés de você fazer isso aqui [compor] e derivar isso aqui?*

Andrews: *Esse [apontou para a terceira linha da tabela] vezes esse [apontou para a quarta linha]... É a multiplicação desses dois.*

Sandra: *É a multiplicação desses dois?*

Andrews: *Eu acho que é... Eu faço a multiplicação da derivada da f composta com a g de x [$f'(g(x))$] com a derivada de g de x [$g'(x)$].*

Sandra: *Isso.*

Andrews: *Vou falar de novo: Eu faço a derivada da f composta com g , vezes a derivada da g de x ... Ficou até bonito!*

Sandra: *Você acabou de enunciar a regra da cadeia. Isso é chamado regra da cadeia.*

Lembrando que, a princípio, pelo menos eu pensava isso, eles não haviam tido contato com a regra da cadeia anteriormente. Porém, Andrews começara um curso de Matemática em outra faculdade, antes de ser transferido para a UNESP.

Andrews: *Ahhh... Você tá de sacanagem comigo. Nunca entendi isso no outro curso. Nunca entendi a regra da cadeia.*

Sandra: *Você já viu regra da cadeia?*

Andrews: *Já.*

Sandra: *Você acabou de falar ela.*

Andrews: *Nossa, fiquei até emocionado... Agora ganhei o dia!*

Andrews: *A derivada da f composta com a g vezes a derivada de g .*

Embora Andrews tenha dito que já havia visto regra da cadeia em outro curso, ficou evidente que ele não a havia entendido, nem mesmo sequer seu enunciado. Ao observar os gráficos e uma tabela de forma indutiva, ele foi capaz de enunciar a regra da cadeia evidenciando as diferenças entre as notações que estão relacionadas às funções derivadas.

Outra dupla, formada por Lucas e Pedro, recusava-se a utilizar o *software* Winplot para fazer os cálculos das funções derivadas, utilizando apenas a folha de papel. Porém, ao ser questionado sobre a expressão algébrica da função $f'(g(x))$, Lucas calculou-a, $f'(3x) = 2.3x = 6x$, e Pedro comentou que essa expressão era a derivada da função composta.

Pedro: *Seria a derivada da composta.*

Perguntei qual seria a relação entre essas duas funções $(f(g(x)))'$ e $f'(g(x))$ já que pareciam que a princípio seriam derivadas de função composta. Lucas explicou que a primeira ele compunha e depois derivava e que a segunda ele primeiro derivava, e depois compunha com g , que ficava no lugar de x e depois completou que seria multiplicar por 3.

Lucas: *Multiplica por 3.*

Perguntei se esse 3 tinha alguma relação com algumas das funções que eles haviam obtido anteriormente. Lucas, observando a tabela, disse que tinha a ver com a derivada da função g .

Lucas: *Aqui tem uma... Cresce por exemplo... 3, 4 e 5... Multiplicação... É o que a gente tava discutindo... A $g(x)$ muda... Veja!... A derivada da $g(x)$ causa interferência aqui... entre a derivada da composta... e a composta da derivada não é?*

Como não havia ficado claro o que ele dissesse, pedi para repetir e esclarecer como essa interferência acontecia.

Lucas: *Isso. Interfere... é... deixa eu pensar... pelo que dá pra perceber... se eu fizer... a... a derivada de f composta com g... é... vezes a derivada de g(x) dá a minha derivada da composta... do fog.*

Podemos notar pelas 3 duplas apresentadas neste episódio que, somente foi possível enunciar a regra da cadeia a partir da visualização, evidenciando a diferença entre os gráficos das funções $(f(g(x)))'$ e $f'(g(x))$ e pela observação de uma tabela, onde era explicitada a interferência da derivada da função g no cálculo da derivada da função composta $f(g(x))$.

6.5 Atividade 7

O objetivo desta atividade foi levar o aluno a trabalhar com a fórmula da regra da cadeia, $f'(g(x))g'(x)$, com funções não somente polinomiais. Para isso foi pedido para que o aluno inserisse as funções $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3$ e $g(x) = -3\text{sen}(x)$ e calculasse a composição, $f(g(x))$, utilizando o comando de combinação para a composição do *software* Winplot e, em seguida, foi perguntado qual seria sua expressão algébrica. Tal composição resultaria a função composta $f(g(x)) = -\frac{1}{3}(-3\text{sen}(x))^2 + 3 = -3\text{sen}^2(x) + 3$.

Levando em conta que os alunos ainda não sabiam a derivada de funções trigonométricas, a atividade pedia que se derivassem as funções $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3$ e $g(x) = -3\text{sen}(x)$, a partir do comando de derivar do *software* Winplot, obtendo apenas seus gráficos e, em seguida, perguntava quais as expressões algébricas que eles achavam que estavam associadas às derivadas dessas funções. As expressões que eles deveriam obter eram $f'(x) = -\frac{2}{3}x$ e $g'(x) = -3\cos(x)$.

Notemos que a derivada da função $g(x) = -3\text{sen}(x)$ não era conhecida dos alunos. Utilizando uma abordagem gráfica, o objetivo dessa atividade foi comparar o gráfico da derivada da função composta, $(f(g(x)))' = -6\cos(x).\text{sen}(x)$, com o gráfico da derivada da função f em relação à função g , $f'(g(x)) = 2\text{sen}(x)$. Com isso, seria possível mostrar que a derivada da função composta, $f(g(x))$, tem outra componente que não apenas a função

$f'(g(x)) = 2\sin(x)$, mas também a derivada da função g , $g'(x) = -3\cos(x)$, que é uma função fundamental para determinar a regra da cadeia, algebricamente.

Um roteiro da Atividade 7 é apresentado no Quadro 6.5, para facilitar a leitura.

Atividade 7

- 1) Insira as funções $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3$ e $g(x) = -3\sin(x)$ e faça a combinação $f \circ g$ (isto é, $f(g(x))$). Qual é a expressão algébrica que você acha que está associada a essa combinação?
- 2) Derive as funções f e g a partir do menu **inventário / derivar**. Quais são as expressões algébricas que você acha que estão associadas a essas derivadas?
(**Sugestão:** Esconda os gráficos, mas não os apague, para não carregar o desenho.)
- 3) Insira as expressões algébricas que você acha que estão associadas às funções f' e g' , verifique se os gráficos dessas expressões são os mesmos que você obteve no item 2).
- 4) Faça a combinação $f' \circ g$ (isto é, $f'(g(x))$). Qual é a expressão algébrica que você acha que está associada a esta combinação?
- 5) Derive a combinação $f \circ g$ que você obteve no item 1).
- 6) O que você pode observar acerca do gráfico da combinação $f' \circ g$ e o gráfico da derivada da combinação $f \circ g$?
- 7) Liste as expressões algébricas que você obteve até agora na tabela abaixo.

$f(x) =$	$g(x) =$
$f'(x) =$	$g'(x) =$
$f'(g(x)) =$	

- 8) Observando a tabela acima e, fazendo algumas simulações com essas funções a partir do menu **Dois / combinações /**, tente “descobrir”, qual é a expressão algébrica que está associada à derivada da combinação $f \circ g$? Isto é, qual é a expressão algébrica que você acha que está associada à derivada da função composta, $[f(g(x))]'$?

Quadro 6.5 - Atividade 7.

6.5.1 Episódio 4: Regra da Cadeia com Funções Não Polinomiais

Esse episódio foi elaborado com o objetivo de mostrar como os alunos trabalham com a derivada de função composta, sendo uma das funções componentes não polinomial. Aqui, também, a comparação dos gráficos das funções, $(f(g(x)))'$ e $f'(g(x))$, evidencia e desconstrói a idéia de que essas funções poderiam ser iguais. Para a elaboração desse episódio, foram escolhidos alguns diálogos presentes nas discussões das duplas, Victor e Francielle, Lucas e Pedro, por caracterizarem observações acerca da derivada de função composta a partir dos gráficos das funções $(f(g(x)))'$ e $f'(g(x))$.

A dupla, formada por Victor e Francielle, ao ser perguntada sobre a expressão algébrica da função composta $f(g(x))$, dada por seu gráfico, calculou, em uma folha de papel, a sua expressão algébrica, simplificando-a para poder inseri-las no *software* Winplot.

Apesar dos alunos ainda não saberem como calcular a derivada da função $g(x) = -3\sin(x)$, ao observarem o gráfico da derivada dessa função, gerado pelo *software* Winplot, notaram que poderia ser uma função cosseno, inserindo a função $y = -3\cos(x)$ e verificando que gerava o mesmo gráfico.

A dupla fez a combinação $f' \circ -g$, gerando o gráfico da função composta $f'(g(x))$, conforme Figura 6.21.

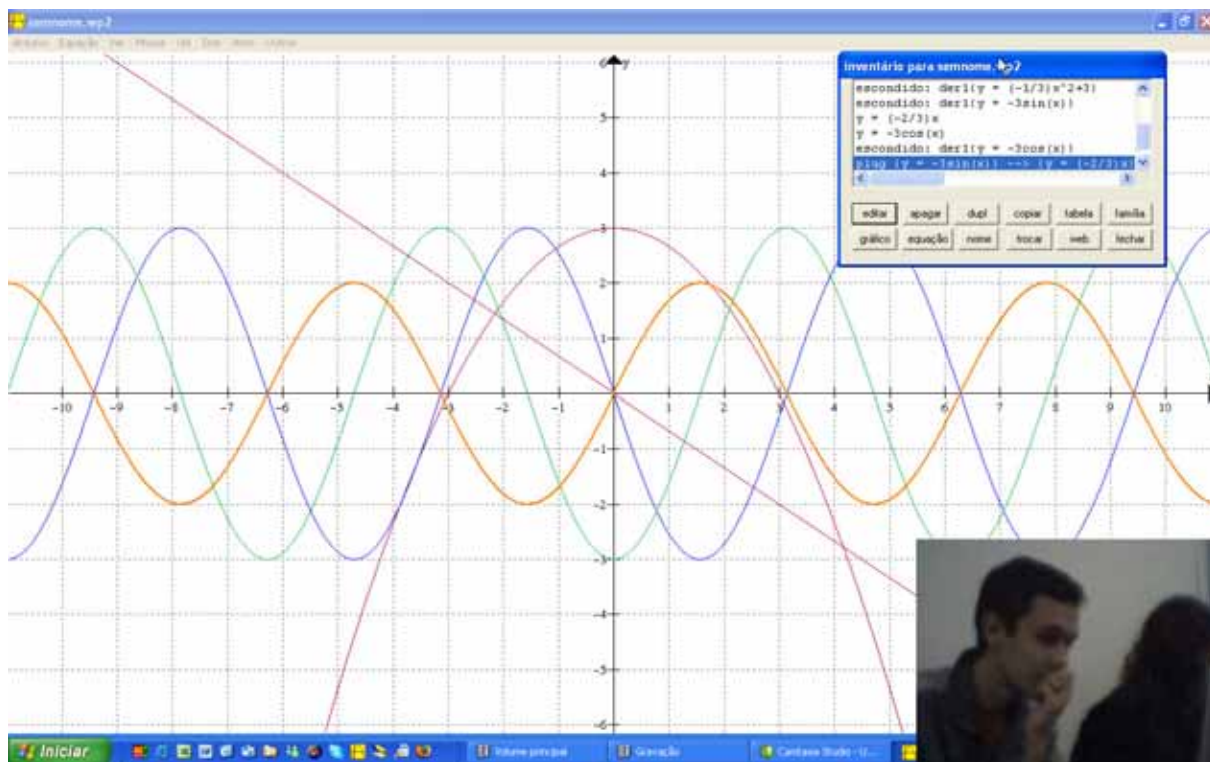


Figura 6.21 - Gráfico da função $f'(g(x))$ (laranja).

Victor, depois de observar esse gráfico, inseriu uma expressão algébrica $y = 2\sin(x)$, sem fazer qualquer cálculo escrito, enquanto Francielle fez os cálculos para obter a expressão algébrica, em uma folha de papel, notando que eram as mesmas, conforme Figura 6.22.

$$\begin{aligned}
 f'(g(x)) &= 2 \sin(x) \\
 f'(-3 \sin(x)) &= \\
 \frac{2}{3} (-3 \sin(x)) &= \\
 \frac{6}{3} \sin(x) &\Rightarrow 2 \sin(x)
 \end{aligned}$$

Figura 6.22 - Cálculo da função composta $f'(g(x))$.

Ao ser pedido para derivar a função composta $f(g(x))$, pelo comando de derivar do *software* Winplot, o gráfico foi gerado, conforme Figura 6.23.

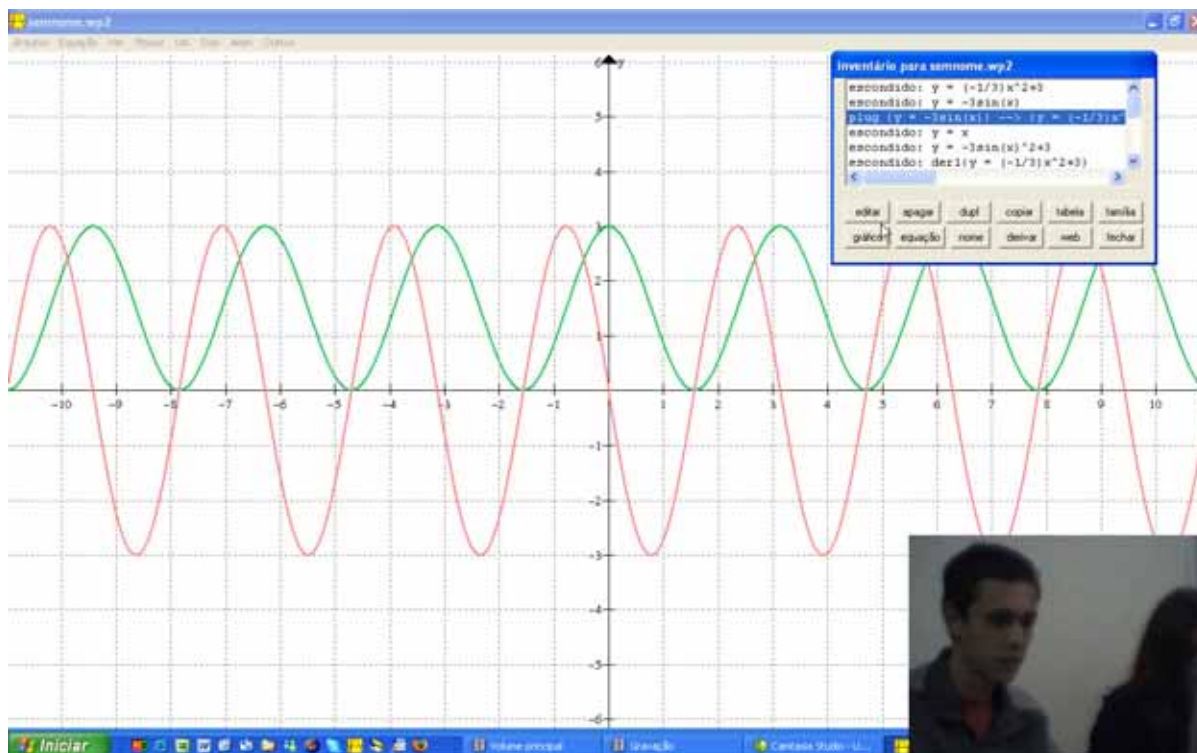


Figura 6.23 - Gráficos das funções $f(g(x)) = 3\cos^2(x)$ (verde) e a sua derivada $[f(g(x))]' = -6\cos(x).\text{sen}(x)$ (rosa)

Para responderem a pergunta sobre o que eles poderiam observar dos gráficos da função $f'(g(x))$ e $(f(g(x)))'$, deixaram à mostra apenas esses gráficos, conforme Figura 6.24.

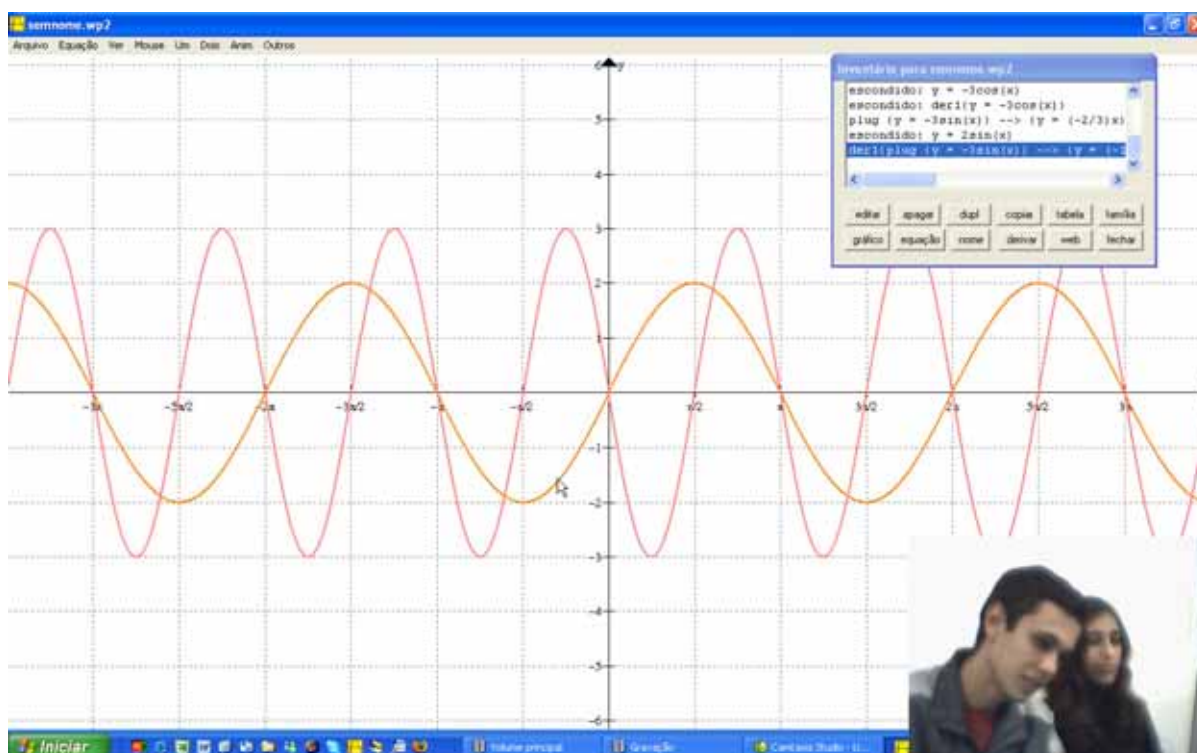


Figura 6.24 - Gráficos das funções $f'(g(x)) = 2\text{sen}(x)$ (laranja) e $(f(g(x)))'$ (rosa).

Victor: *f linha composta com g [$f'(g(x))$].*

Victor: *É a derivada de f composta com g [$(f(g(x)))'$].*

Podemos notar que Victor fala da mesma forma f composta com g , para denotar, tanto $f'(g(x))$ quanto $(f(g(x)))'$, somente pelo gráfico é possível observar que ele verifica a diferença.

Francielle tentou, em uma folha de papel, derivar a expressão algébrica da função composta $f(g(x)) = -3\sin^2(x) + 3$, escrevendo $-3.2\cos(x) = -6\cos(x)$. Podemos observar que Francielle comete um erro que, segundo a literatura é muito comum, pois ela considerou a regra da potência e a derivada da função seno. Perguntei a Francielle de onde ela tinha tirado aquele 6 e ela respondeu que baixou a potência da função seno.

Francielle comentou algo sobre as derivadas, mas não se lembrava como calcular a derivada da função composta e foi ajudada por Victor.

Francielle: *É que eu não estou lembrada mais... se é a derivada de f composta com g... ou se é essa multiplicada por esta...*

Victor: *Como era a derivada de f composta com g?*

Francielle: *Essa daqui [$f'(g(x)) = 2\sin(x)$]...*

Victor: *Seria isso daqui [$f'(g(x)) = 2\sin(x)$], vezes a g linha [$g'(x) = -3\cos(x)$]... Então seria $-6\sin(x).\cos(x)$?*

Victor inseriu a função que acabara de falar, constatando que o gráfico obtido era o mesmo, comentando que era o “teorema da prisão”.

Podemos observar que a dupla deslocou-se de uma representação a outra, mesmo não sabendo calcular a derivada de uma função não polinomial. O fato de a dupla ter obtido o gráfico da derivada da função composta, anteriormente aos cálculos algébricos, instigou a busca por uma expressão algébrica, de acordo com o gráfico obtido e a fórmula da regra da cadeia, que eles já haviam tido contato na Atividade 5.

A dupla, formada por Lucas e Pedro, caracterizava-se por achar o computador “impreciso”. Lucas evidenciava não simpatizar com o computador e, na maioria das vezes, iniciava todos os cálculos na folha de papel, mesmo quando a atividade pedia para trabalhar com o *software* Winplot.

Quando questionados sobre a expressão algébrica da função composta $f(g(x))$, cujo gráfico foi gerado pelo comando de combinação para composição, Pedro tentou analisá-lo.

Pedro: *Uma senóide... Uma cossenóide... Começa no... no... na crista... aqui [apontou com o mouse o ponto de máximo (0,3)] ó... Senóide começaria aqui por baixo [apontando com o mouse o ponto de mínimo, quando a função tocava o eixo x].*

Porém, Lucas, sem ao menos observar o gráfico gerado, calculou a expressão algébrica em uma folha de papel, simplificando o resultado.

Lucas: *Deu $3\cos^2(x)$.*

Perguntei se dava isso mesmo, sugerindo que inserissem a expressão obtida.

Lucas: *Pelas minhas contas deu isso.*

Ao serem perguntados sobre as expressões algébricas das derivadas das funções $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3$ e $g(x) = -3\sin(x)$, Lucas tentou fazer os cálculos em uma folha de papel, no entanto, ele ainda não havia tido contato com a derivada da função $g(x) = -3\sin(x)$.

Sugeri a eles escreverem o que pensavam ser a função derivada, olhando apenas o gráfico gerado.

Lucas: *Eu acho que é -3...*

Pedro: *Tem a ver com o cosseno, mas...*

Lucas escreveu que a derivada da função g era $-3\cos(x)$ e, ao inserirem essa expressão, o gráfico se sobrepôs ao gráfico gerado pelo *software* Winplot.

Observei que Lucas havia tentado calcular a derivada da função seno usando limite, conforme Figura 6.25.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \Rightarrow g'(x) = \frac{-3 \sin(x+h) + 3 \sin(x)}{h}$$

$$g'(x) = \frac{-3(\sin x \cosh + \sinh \cos x) + 3 \sin(x)}{h}$$
~~$$g'(x) = \frac{-3 \sin(x) + 3 \sin(x)}{h}$$~~

$$g'(x) = \frac{-3 \sin(x) \cos(h) + 3 \sin(h) \cos(x) + 3 \sin(x)}{h}$$

Figura 6.25 - Cálculo de Lucas para calcular a derivada da função seno.

Lucas: *Seria legal eu sumir com esse h daqui [referindo-se a variável h no denominador].*

Lucas queria demonstrar, por limite, que a derivada da função $g(x) = 3\sin(x)$ era $g'(x) = -3\cos(x)$, porém eles ainda não haviam visto esse limite, pelo que supus.

Ao ser perguntado sobre a expressão algébrica da função composta $f'(g(x))$, Lucas escreveu a composição em uma folha de papel, obtendo a expressão algébrica $f'(g(x)) = 2\sin(x)$. Ao ser pedido para derivar a combinação de composição, que geraria o gráfico da derivada da função composta ($f(g(x))$), Lucas se adiantou e, sem gerar o gráfico pedido, calculou a expressão algébrica, dizendo que havia feito pela regra da cadeia, conforme Figura 6.26.

$$\textcircled{5} \quad 2\sin(x) \cdot g'(x) = 2\sin(x) \cdot (-3\cos(x)) = -6\sin(x)\cos(x)$$

Figura 6.26 - Cálculo da derivada da função composta $f(g(x)) = 3\cos^2(x)$.

Lucas: *Aqui... Já achei... Derive a combinação de fog que você obteve no item 1) Daí eu peguei o item 4) [expressão algébrica da função $f'(g(x)) = 2\sin(x)$] e usei a regra da cadeia...*

Sandra: *Foi direto?*

Lucas: *É.*

Pedro derivou a função composta $f(g(x))$, utilizando o comando do *software* Winplot para derivar e inseriu a função que Lucas havia obtido, constatando que eram os mesmos gráficos.

Notei que Lucas havia decorado a fórmula da regra da cadeia e, dessa forma, resolvi interferir, reelaborando as perguntas para investigar como ele havia produzido o conhecimento acerca da função composta e regra da cadeia.

Sandra: *A sua função composta era $3\cos^2(x)$. Como você derivaria essa para chegar aqui?* [apontei para a função derivada que ele tinha calculado na folha de papel]. *Agora eu só tenho a função composta.*

Lucas: *Aí eu preciso saber de alguma regrinha.*

Sandra: *Eu só tenho essa função $3\cos^2(x)$, certo? E quero aplicar a regra da cadeia nisso daqui. Como eu faria?*

Lucas: *Eu não tenho como usar a regra da cadeia.*

Sandra: *Então como eu derivaria sem usar a regra da cadeia?*

Notei que para eles a regra da cadeia apenas poderia ser aplicada se eles tivessem duas funções para serem compostas, ou seja, se as funções a serem compostas fossem dadas *a priori*.

Sandra: *Dada uma função composta, que é $3\cos^2(x)$, como que eu derivo essa função, usando a regra da cadeia?*

Lucas: *Usando a regra da cadeia? Mas você falou que eu só tenho essa função... eu não tenho como usar a regra da cadeia com essa função.*

Sandra: *E como eu derivaria então sem usar a regra da cadeia?*

Lucas: *Não faço a mínima idéia... Se eu derivar o seno dá cosseno. Se eu derivar o cosseno dá seno?*

Sandra: *Menos seno.*

Lucas: *Então... aí seria... cairia... Calma aí... Vai ser -seno vezes -seno...*

Lucas estava lidando com a função $3\cos^2(x)$, e por essa fala, mostrou que derivaria o cosseno duas vezes, aplicando um produto; isto é, para ele, a derivada da função $h(x) = \cos^2(x) = \cos(x) \cdot \cos(x)$ seria $h'(x) = -\sin(x) \cdot -\sin(x)$.

Lucas: *É porque, isso daqui é assim [escrevendo a função $3\cos^2(x)$, como $3\cos(x).\cos(x)$]. Daí vai ser isso daqui [escrevendo $3\cos(x).\cos(x) = 3(-\sin(x)).(-\sin(x))$] se eu derivar.*

Lembrei-lhe que, neste caso, ele estaria derivando cada uma das funções, obtendo um produto.

Lucas: *Isso. É um produto. Não posso fazer isso?*

Expliquei-lhes que a derivada do produto era calculada de outra forma, acrescentando ainda que a derivada do produto não seria o produto das derivadas.

Sandra: *Isso aqui é uma função composta [aponte para a função $3\cos^2(x)$]. Como é que eu posso decompor essa função em duas funções conhecidas?*

Lucas: *Humm, verdade!*

Lucas fez algumas tentativas de encontrar funções que ele poderia decompor.

Lucas: *Uma vai ser... é... $3x$ e a outra vai ser $\cos^2(x)$ [escrevendo na folha de papel].*

Lucas percebeu que, da mesma forma, não seria possível e começou a fazer as substituições de outra maneira. Lucas escreveu $f(x) = (3.\cos x).x$ e $g(x) = \cos x$, o que foi contestado por Pedro.

Pedro: *Não, pera aí... Não, não.*

Lucas: *Aí eu faço isso e pronto. Aí eu consigo derivar tudo... fazer ficar tudo bonitinho.*

Lucas escreveu novamente a função decompondo-a em $f(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 6x$ e $g(x) = \cos(x)$, e aplicou uma tentativa que ele chamou de regra da cadeia. Apesar de ele ter escrito $f(g(x))'$, ao tentar calcular, escreveu $f(g(x))' = f'(\cos x)$ e como ele havia calculado a derivada da função f , escreveu $f(g(x))' = 6\cos(x)$, que não era o resultado esperado.

Lucas: *Que não deu o que está ali.*

Perguntei o que estava faltando para ser regra da cadeia.

Lucas: *Ah é verdade, nossa! A derivada disso daqui, que é $-\sin(x)$. Aí vai ficar $-6\sin(x).\cos(x)$.*

Podemos notar que Lucas e Pedro eram avessos ao uso do computador preferindo utilizar somente uma abordagem algébrica. No entanto, ao se depararem com a decomposição de uma função composta se confundiram nos cálculos sendo necessária a minha intervenção, embora soubessem a fórmula da regra da cadeia.

Podemos notar, nesse episódio que, embora os alunos não soubessem calcular derivada de uma função trigonométrica, não tiveram dificuldade em analisar seu gráfico obtido pelo comando do *software* Winplot. Os alunos tinham uma noção do formato dos gráficos obtidos e, a partir deles, tentavam obter sua expressão algébrica, confrontando as representações gráficas e algébricas para o desenvolvimento da atividade proposta. O fato de apenas terem visto a fórmula da regra da cadeia, em uma das atividades anteriores, não foi suficiente para se lembrarem dela. Foi necessária a comparação dos gráficos das funções $f'(g(x))$ e $(f(g(x)))'$, gerados pelo comando do *software* Winplot, para que fosse estabelecida uma relação entre a derivada da função composta com a fórmula da regra da cadeia. Embora a abordagem algébrica ainda tenha sua supremacia, ficou claro que somente seu uso pode evidenciar apenas uma manipulação de símbolos. Foi necessária a confrontação das representações algébricas e gráficas para que houvesse a produção do conhecimento acerca da regra da cadeia.

6.6 Atividade 8

O objetivo dessa atividade foi levar os alunos a trabalharem com a derivada de uma função composta em um determinado ponto a . Esse ponto pertencia ao intervalo do domínio da função g e, a partir da animação desse ponto, levava os alunos a perceberem a fórmula da regra da cadeia para esse ponto, $f'(g(a)).g'(a)$, ou seja, os alunos percebiam a derivada da função composta no ponto a , pela animação em um determinado intervalo.

Essa atividade foi elaborada com uma função trigonométrica, devido ao fato dos alunos conhecerem-na e ser possível trabalhar com suas derivadas, além disso, seria uma função diferente das polinomiais. Dessa forma, foi pedido que os alunos trabalhassem com a escala em radianos. Em seguida, o aluno deveria inserir as funções $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = 3x$ e a reta $y = x$. Assim como foi feito na Atividade 3, os alunos deveriam inserir os pontos que, ao serem animados, geraria o gráfico da função composta, $f(g(x)) = \sin(3x)$. A partir da animação do parâmetro a , no intervalo $[-2\pi/3, 2\pi/3]$, era pedido que o aluno travasse as funções nos intervalos de definição da função, com o intuito do aluno poder visualizar o domínio e a imagem em que as funções estavam definidas.

Como a atividade trabalhava com a função composta e a sua derivada, o aluno deveria derivar, usando o comando do *software* Winplot, as funções $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = 3x$ e $f(g(x))$, obtendo seus gráficos. Depois de animar o parâmetro a , foi pedido que se completasse uma tabela com os valores das funções derivadas, levando os alunos a perceberem a regra da cadeia em um ponto.

Um roteiro da Atividade 8 é apresentado no Quadro 6.6, para facilitar a leitura.

Atividade 8

- 1) Para essa atividade você deverá mudar a configuração da grade em **Ver / Grade**:
 - a) Para o eixo x , utilize a coordenada **pi** no **intervalo** $\pi/6$.
 - b) Para o eixo y , utilize a coordenada usual no **intervalo** 1.
 - c) E para cada um dos pontos e funções inseridas, nomeie-os.
- 2) Insira as funções $F : f(x) = \sin(x)$, $G : g(x) = 3x$ e a reta $y = x$. Assim como proposto na Atividade 3, insira os pontos $A(a,0)$, $P(a,3a)$, $Q(3a,3a)$, $T(3a, \sin(3a))$ e $R(a, \sin(3a))$. Faça a combinação da composta $F \circ G : f \circ g(x)$. Anime o parâmetro a no intervalo $[-2\pi/3, 2\pi/3]$. O que você pode observar sobre os intervalos onde as funções $y = x$, $f(x)$, $g(x)$ e $f \circ g(x)$ estão definidas quando se anima o parâmetro a nesse intervalo?
- 3) Trave os intervalos das funções $y = x$, $f(x)$, $g(x)$ e $f \circ g(x)$, de acordo com o item 2) e dê uma explicação sobre como você obteve esse intervalo.

- 4) A partir do *menu* **inventário / derivar**, derive $f(x)$ e $g(x)$. Pelos gráficos obtidos, quais serão as expressões algébricas dessas funções derivadas? Insira essas funções $DF: f'(x)$ e $DG: g'(x)$. Insira o ponto B, com abscissa a , pertencente ao gráfico da função $f'(x)$, e o ponto C, com abscissa a , pertencente ao gráfico da função $g'(x)$. Anime o parâmetro a . Em que intervalos as funções derivadas estão definidas? Trave essas funções nesses intervalos.
- 5) A partir do *menu* **inventário / derivar**, derive a função composta $FoG: fog(x)$ e obtenha o gráfico de $D(FoG): (fog(x))'$.
- 6) A partir da animação do parâmetro a , complete a tabela abaixo:
- | a | $DG: g'(a)$ | $(DF) \circ G: f'(g(a))$ | $D(FoG): (f(g(a)))'$ |
|-----------|-------------|--------------------------|----------------------|
| $-2\pi/3$ | | | |
| $-\pi/3$ | | | |
| 0 | | | |
| $\pi/3$ | | | |
| $2\pi/3$ | | | |
- 7) Observando a tabela, qual é a expressão algébrica que pode ser atribuída à função, $D(FoG): (fog(x))'$?

Quadro 6.6 - Atividade 8.

6.6.1 Episódio 5: A Regra da Cadeia em um Ponto

Esse episódio foi construído com o objetivo de mostrar como as duplas, Adriano e Vivia, Andrews e Daiane, Lucas e Pedro, ao trabalharem com os gráficos e a animação de um ponto a , perceberam a regra da cadeia nesse ponto, ou seja, perceberam a derivada de uma função composta, $f'(g(a)).g'(a)$, nesse ponto.

A dupla, formada por Adriano e Vivia, depois de completar a tabela do item 6), conforme Figura 6.27, tentou responder a pergunta 7) sobre a expressão algébrica que poderia ser atribuída a função $D(FoG): (fog(x))'$.

6) A partir da animação do parâmetro a , complete a tabela abaixo:

a	$DG : g'(a)$	$(DF) \circ G : f'(g(a))$	$D(F \circ G) : (f(g(a)))'$
$-2\pi/3$	3	1	3
$-\pi/3$	3	-1	-3
0	3	1	3
$\pi/3$	3	-1	-3
$2\pi/3$	3	1	3

Figura 6.27 - Tabela de derivada de regra da cadeia em um ponto a .

Adriano: *É só fazer uma vezes a outra aqui.*

Sandra: *É só fazer uma vezes a outra?*

Adriano: *É sim, é só fazer uma vezes a outra.*

Sandra: *Por quê?*

Adriano: *Pela regra da cadeia é isso que faz...*

Adriano, ao observar a tabela, lembrou-se da fórmula para calcular a derivada da função composta, mas não ficou claro se ele sabia qual seria a expressão algébrica associada à regra da cadeia. Perguntei qual era a função composta e sua derivada. Eles responderam que era $f(g(x)) = \sin(3x)$ e para a derivada $3\cos(3x)$, então questionei.

Sandra: *De onde saiu esse 3 mesmo?*

Adriano: *Da g, derivada da g.*

Sandra: *A derivada do seno não é cosseno?... Mas aqui tá dando $\cos(3x)$!*

Vívia: *A derivada do seno é cosseno.*

Adriano: *Tá certo!*

Sandra: *Mas e a derivada de $\sin(3x)$?*

Adriano: *Teoricamente daria $\cos(3x)$... mas é $3\cos(3x)$.*

Perguntei de onde surgiu aquele 3.

Vívia: *Da g, aqui... da derivada da g.*

Sandra: *Mas aonde tá esse g... no cosseno?*

Vívia escreveu, em uma folha de papel, a composta e sua derivada, conforme pode ser visto na Figura 6.28.

$$f' = \cos(u)$$

$$g' = 3$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cos -2\pi$$

$$\cos(3x)$$

$$\sin(3x) \rightarrow f(g) \cdot (f(g))' \rightarrow 3 \cos(3x)$$

$$f'(g) \cdot g'$$

Figura 6.28 - Cálculo da derivada da função composta $f(g(x)) = \sin(3x)$.

Adriano e Vívia desenvolveram toda a atividade, levando em conta a animação do parâmetro a , e para generalizar o resultado expressaram na forma escrita para concluir que a derivada da função composta $f(g(x)) = \sin(3x)$ em um determinado ponto a é $(f(g(x)))' = 3 \cos(3x)$, no ponto a .

A dupla, formada por Andrews e Daiane, obteve os gráficos das funções derivadas $f'(g(x))$, $g'(x)$, e o gráfico da derivada da função composta, $(f(g(x)))'$, sem suas expressões algébricas, animando o parâmetro a , conforme Figura 6.29 e completou a tabela usando essa animação.

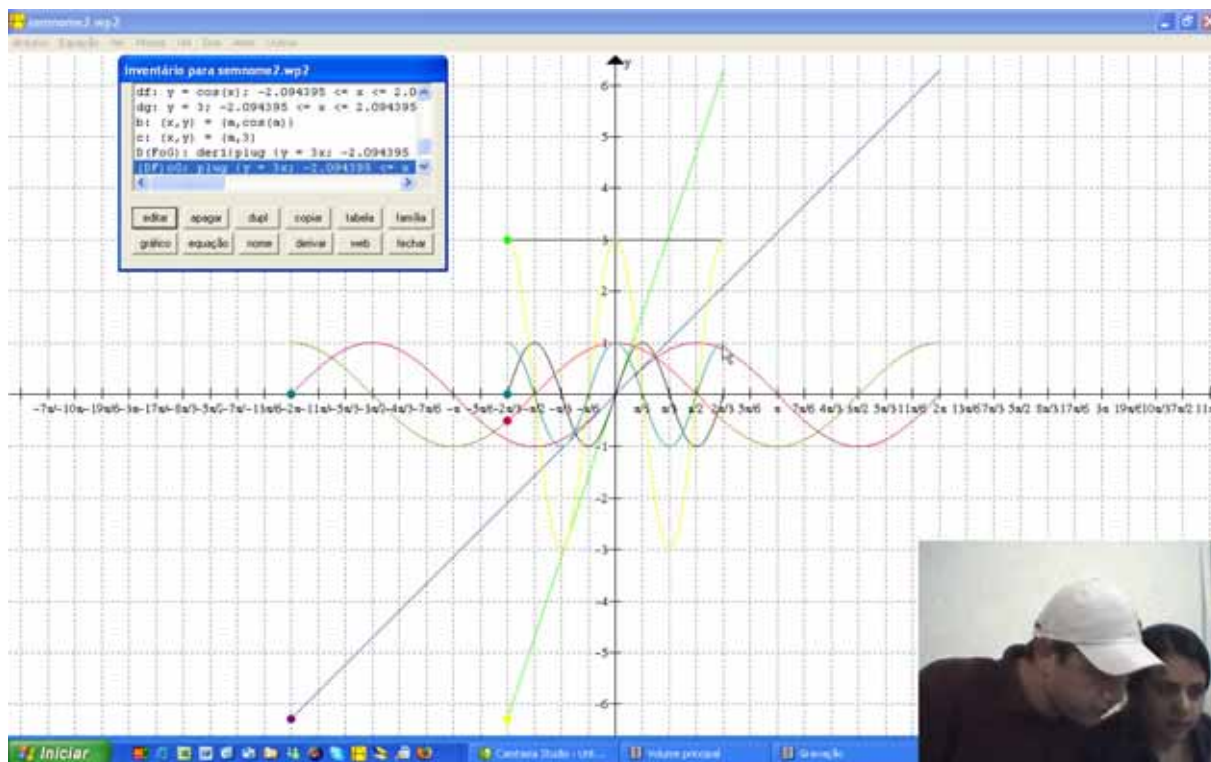


Figura 6.29 - Gráficos das funções $f'(g(x))$, $g'(x)$ e $(f(g(x)))'$, com a animação do parâmetro a .

Ao ser pedida a expressão algébrica que poderia ser atribuída à função $D(FoG):(fog(x))'$, Daiane perguntou se era para analisar ponto a ponto.

Daiane: *Mas aí vai analisar ponto a ponto?*

Daiane chamou à atenção de Andrews para a expressão algébrica e, enquanto ele conversava com ela, escreveu, em uma folha de papel, as expressões algébricas das funções $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = 3x$ e calculou suas derivadas, conforme Figura 6.30.

Andrews: *Qual que é a derivada da g?*

Daiane: *A derivada da g, 3.*

Andrews: *Pera aí. Primeiro eu preciso da derivada da composta... derivada da f, composta com a g...*

Daiane: *A derivada da f é $\cos(x)$.*

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sin(x) \\
 g(x) &= 3x \\
 \cos(x) \\
 f'(g(x)) &= \cos(3x) \\
 f'(3x) \\
 \cos \\
 \cos(3x) \cdot 3 &= 3 \cos(3x) \\
 f(g(x)) \\
 f'(3x) \\
 \sin(3x) \\
 \cos(3x) \\
 g'(x) &= 3 \\
 f'(g(x)) \cdot g'(x) \\
 3 \cdot \cos(3x)
 \end{aligned}$$

Figura 6.30 - Cálculo da expressão algébrica da função $D(FoG): (f \circ g)'$.

Andrews inseriu a função obtida no *software* Winplot, constatando que obtinha o mesmo gráfico, porém tive a impressão de que ele estava fazendo certa confusão, ao explicar oralmente, entre a derivada da função composta e a função composta $f'(g(x))$.

Sandra: Qual era a função composta mesmo?

Andrews: f composta com g ?

Sandra: Isso.

Andrews: $\sin(3x)$... Se eu derivar a função composta... vai ficar $\cos(3x)$... falta aparecer o 3.

Daiane: O 3 é o...

Andrews: A derivada da g , da $g(x)$ é 3... Regra da cadeia é...

Sandra: Mas a função composta qual que é?

Andrews: A composta é essa... $\sin(3x)$ [circulou a função $\sin(3x)$ na folha de papel, conforme Figura 6.30]. Quando eu derivo a composta $\cos(3x)$... derivada da composta vezes a derivada da g ... que é a regra da cadeia... eu chego em $3\cos(3x)$.

Sandra: *Quando você derivou essa daqui [aponte para a função composta $f(g(x)) = \sin(3x)$] dá essa? [aponte para a função $f'(g(x)) = \cos(3x)$]. E esse 3 simplesmente some?*

Andrews: *Não, não sumiu...*

Sandra: *Então a derivada do $\sin(3x)$...?*

Andrews: *O $3x$ eu mantenho, quando eu derivo, eu tiro o seno e ponho o cosseno, o resto eu mantenho.*

Sandra: *E esse 3 depois aparece aqui?*

Andrews: *Porque a derivada de $g(x)$ é 3... e a derivada da composta é $\cos(3x)$... quer dizer a derivada de f composta com g que vai ser $\cos(3x)$.*

Por essa fala pude notar que Andrews se corrigiu para falar da derivada da função composta, e isso foi possível observar quando ele comparou as expressões algébricas com os gráficos obtidos pelo *software* Winplot.

Foi interessante notar que, embora em vários momentos, a dupla, formada por Lucas e Pedro, mencionasse que o computador era “impreciso”, a atitude deles foi mudando, no decorrer dos experimentos, e começaram a interagir com o computador, observando a animação proporcionada pelo *software* Winplot.

Lucas, enquanto animava o parâmetro a , dizia os intervalos em que as funções estavam definidas e discutia com Pedro suas afirmações. No entanto, Lucas anotou, em uma tabela, conforme Figura 6.31, os intervalos, em uma folha de papel, para poder, posteriormente, editar as funções com o intervalo travado.

Lucas: *Agora, vamos ver... A que passa pela reta $3x$.*

Pedro: *Qual ponto você tá analisando? Da reta $3x$ você tá falando? É o ponto $(a, 3a)$.*

Lucas: *O ponto A percorre o eixo x , entre os intervalos $2\pi/3$ e $-2\pi/3$. Esse a gente já fez, [mostrando o ponto $P(a, 3a)$] esse a gente já fez [mostrando com o mouse o ponto $Q(3a, 3a)$].*

Ponto	$f(x) =$ função	Intervalo
T	$\text{seno}(x)$	$-2\pi \cdot a$ a 2π $-2\pi/3$ a $2\pi/3$
P	$3x$	
Q	x	-2π a 2π
R	fog	$-2\pi/3$ a $2\pi/3$
B	$g'(x)$	$-2\pi/3$ a $2\pi/3$
C	$f'(x)$	$-2\pi/3$ a $2\pi/3$

Figura 6.31 - Tabela de pontos, funções e intervalos.

Ao ser pedido para derivar a função composta $f(g(x)) = \text{sen}(3x)$, usando o comando do *software* Winplot, Lucas preferiu calcular à mão.

Lucas: *Eu vou derivar, aqui na mão, mais fácil, que daí a gente já coloca com um...*

Lucas se negava a observar o gráfico e tentou, sem muito sucesso, obter a expressão algébrica. Depois de algumas tentativas, inserindo alguns valores aleatoriamente, Lucas escreveu na folha de papel a função $y = 3\cos(3x)$ e voltou a se referir a derivada da função composta, conforme Figura 6.32.

Lucas: *Agora o fog, pêra aí...*

$$\begin{aligned}
 & 3\cos(3x) \\
 & [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = f'(3x) \cdot 3 = \\
 & \cos 3x \cdot 3 = 3\cos(3x).
 \end{aligned}$$

Figura 6.32 - Cálculo da derivada da função composta $f(g(x)) = \text{sen}(3x)$.

Ao ser pedido para completar a tabela, eles deveriam animar o parâmetro a , de modo a poder visualizar as variações decorrentes do que acontecia com os gráficos em seus

respectivos pontos. No entanto, Lucas perguntou se poderia fazer algebricamente, sem se ater à animação.

Lucas: *Não pode fazer ela algebricamente?*

Respondi que ele poderia fazer como quisesse.

Lucas: *É mais fácil cara! É mais rápido!*

Pedro: *Você quem sabe!*

Pedro animava aleatoriamente o parâmetro a e comentou sobre sua dificuldade com álgebra.

Pedro: *Só que eu tô... Eu bóio um pouco na álgebra! Você sabe né!... Tem coisa que é mais fácil fazer algebricamente e tem coisa que é mais fácil aqui...*

Perguntei se o que ele estava fazendo era mais fácil fazer algebricamente ou numericamente.

Pedro: *Não... Com esse monte de pontos é mais fácil fazer desse jeito [referindo-se à animação]... Observando o gráfico tal... digo: com o Winplot, no braço não seria tão fácil!*

Lucas: *Aqui é mais fácil! É 3, 3, 3, 3 e 3!... Agora, esse daqui! Aqui vai dar 3, sempre 3 [mostrando na tabela a coluna de $DG: g'(a)$] e aqui também! [mostrando na tabela a coluna de $(DF) \circ G: f'(g(a))$] então a gente vai substituir ali e vai ser...*

Perguntei por que ele achava que daria sempre 3 na coluna $(DF) \circ G: f'(g(a))$.

Lucas: *Ué, porque ali vai ser... Ah não... Aí esquece... Porque aqui não é a derivada, tá certo!*

Lucas se confundiu com o fato de compor com uma função constante. Perguntei se eles já não tinham o gráfico daquela função, mas Lucas insistiu em não observar os gráficos obtidos pelo software Winplot.

Lucas: *Então, mas ó! Aí vai $3x$, isso aqui vezes isso aqui vai ser isso! Então vai ser -2π . Aí ó, a gente substitui... Se o a é aqui a gente substitui aqui... Vai ficar $-2\pi/3$. Então g... esse $g(a)$ aqui vai dar -2π ... -2π substituindo no $\cos(x)$, dá $\cos(-2\pi)$ é... que no caso vai dar -1... [levantando o lápis como se quisesse fazer no ar um círculo trigonométrico] vai dar 1, aliás.*

Questionei se seria 1 ou -1.

Lucas: *É a mesma coisa! Dá 1.*

Pedro: *Vê aqui! [mostrando a animação do parâmetro a no gráfico].*

Lucas: *Mas o cos de -2π não é 1 ou -1?*

Sandra: *Sim. Mas qual que é? É 1 ou -1?*

Lucas: *É 1, porque eu tenho aqui... eu posso escrever aqui?... Eu tenho esse daqui... Aqui seria o sentido horário, 2π ... -2π seria no sentido anti-horário, vai dar 1 do mesmo jeito... Aqui seria 1.*

Sugeri a eles verificarem a variação no gráfico. Mas Lucas continuou descrevendo os elementos da tabela.

Lucas: *E aqui você... você faz, aqui é $-\pi/3$. Substitui lá, vai dar $-\pi$, aí você... quando você vem aqui pra... $-\pi$ é esse daqui você vem aqui e faz esse daqui... isso daqui representa o cosseno -1. Isso daqui [referindo-se a derivada com valor 0] você substitui lá dá zero, ou seja, é... cosseno de zero é zero!... Não, cosseno de zero é 1, desculpa!*

Pedro: *Nossa! Eu não concordei com as coisas aí!*

Lucas: *Aí esse daqui é o $\pi/3$... $\pi/3$ substituindo lá da π , cosseno de π é -1. Esse daqui é $2\pi/3$, substituindo lá dá 2π , cosseno de 2π é 1 [enquanto falava ia escrevendo os valores obtidos na tabela]. Agora a derivada de tudo! [referindo-se a última coluna da tabela] Então esse daqui vai ser $-2\pi/3$, aí vai dar -2π , substitui em seno de 2π , que vai dar a mesma coisa que cosseno...*

Lucas começou a se atrapalhar com os cálculos.

Pedro: *Nossa!!*

Lucas: *Não, não, não, não! Pera aí!*

Pedro: *Repete tudo devagar!*

Lucas: *-2π , daí aqui vai dar -2π , isso! Aqui vai dar -2π substitui aqui! Seno de -2π ! Seno de -2π dá aqui. O seno de -2π é zero. A derivada de zero é zero.*

Sandra: *Humm?*

Pedro: *O zero tem derivada?*

Podemos notar que Lucas cometeu um erro muito comum, substituir primeiro a constante antes de calcular a derivada e, com isso, obtém uma constante e, quando deriva resulta em zero.

Lucas: *O a é $-2\pi/3$, certo? Substitui o... o a ta fazendo o papel de x aqui no caso vai! Então substitui esse $-2\pi/3$ aqui... Você faz 3 vezes isso daqui vai dar -2π , certo? Então vai ficar $f(-2\pi)$. $f(-2\pi)$, no caso, vai ser $\sin(-2\pi)$. $\sin(-2\pi)$ é zero. Derivada de zero é zero!*

Percebi, no momento, que eu deveria intervir com outro questionamento.

Sandra: *Você substituiu os pontos primeiro para depois derivar?*

Lucas: *Não... eu não sub...*

Sandra: *Ou você derivou primeiro e depois substituiu o ponto?*

Lucas: *Ah é verdade, tá certo! Foi isso que eu fiz.*

Lucas concordou e corrigiu, porém ainda sem muito sucesso

Lucas: *Então vai ficar $\sin(3a)$ e aí eu vou derivar isso daí! Aí eu derivo isso daqui que, no caso, vai ser $\cos(3a)$. A derivada disso é $\cos(3a)$.*

Perguntei se era aquilo mesmo, porém sem qualquer outro cálculo ele comentou que era mais fácil fazer pela regra da cadeia.

Lucas: *É mais fácil fazer por regra da cadeia, vai! Nossa verdade! Muito mais fácil fazer pela regra da cadeia.*

Questionei por que era mais fácil fazer pela regra da cadeia.

Lucas: *Porque aqui já tá pronto!... Deixa eu ver ó! Nossa! Eu tava fazendo uma coisa muito difícil, dava pra fazer pela regra da cadeia aqui... Dava 3, -3, 3, -3 e 3.*

Lucas: *Ó é o seguinte: Lembra da regra da cadeia? Pra você pegar a derivada do fog, você precisa só adicionar na derivada... fazer vezes... a derivada de g na... derivada da... na derivada de f com g de x. Você faz isso... Então é só fazer isso daqui vezes... esse número que tá aqui [coluna $(DF)_{\circ G} : f'(g(a))$] vezes a derivada de g, e a derivada de g é 3. Então se eu fizer, vai ficar 3, -3, 3, -3 e 3, acabou! Sem nenhum problema!*

Embora Lucas dissesse que era só “fazer pela regra da cadeia”, tive a impressão de que ele apenas decorara a fórmula, já que as colunas da tabela conduziam à lembrança da fórmula da regra da cadeia.

Lucas, por se recusar a identificar as representações numéricas a partir da animação do gráfico para completar uma tabela, que o conduziria a identificar a derivada de uma função composta, apenas completou a tabela e permaneceu no aspecto algébrico. Podemos observar que o fato de Lucas tentar calcular a derivada da função composta, apenas algebricamente levava-o a cometer algumas confusões.

É possível notar, nesse episódio, que as duas primeiras duplas calcularam a derivada de uma função composta em um ponto a partir de uma abordagem gráfica, usando a animação proporcionada pelo *software* Winplot e, a partir da representação gráfica, completaram a tabela com as representações numéricas, generalizando para a representação algébrica. Já a dupla, formada por Lucas e Pedro tentou inverter o processo denotando uma forte conotação algébrica.

Dessa forma, esses cinco episódios foram elaborados a partir das gravações transcritas, que tinham por meta responder à pergunta de pesquisa desta tese,

Como o coletivo, formado por alunos-com-mídias, produz o conhecimento acerca de Função Composta e Regra da Cadeia, a partir de uma abordagem gráfica?

No primeiro episódio, a visualização, potencializada pela mídia informática, proporcionou à dupla elaborar conjecturas acerca das propriedades da composição de funções, tais como: existência de elemento neutro e não comutatividade. Ainda, a visualização

possibilitou a verificação da composição de uma função qualquer com uma função constante, resultando em outra função constante, a partir das representações gráficas. Além disso, tornou perceptível um padrão entre os gráficos das funções compostas $f(g(x))$ e $g(f(x))$ quando os coeficientes são animados, por meio de um recurso do *software* Winplot. O desenvolvimento da atividade inserida nesse episódio só foi possível devido ao recurso computacional. Os alunos pensaram, com esse recurso, na elaboração de suas conjecturas.

No segundo episódio, embora os alunos tivessem dificuldade em lidar com os gráficos de funções sem as suas expressões algébricas, a interpretação, mediada pela visualização, possibilitou a elaboração de conjecturas associadas à obtenção do gráfico da função composta a partir dos gráficos das funções componentes. A animação provocou um esclarecimento sobre a inserção da função identidade para a obtenção desse gráfico. Além disso, as representações gráficas e algébricas foram articuladas pelos alunos ao avaliarem as respostas dadas pelo *software* Winplot, para confirmarem ou refutarem suas hipóteses.

No terceiro episódio, a coordenação entre as representações gráficas e algébricas, proporcionou às duplas enunciarem a regra da cadeia, $f'(g(x)).g'(x)$, desconstruindo a idéia subjacente de que a derivada de uma função composta é dada pela de função $f'(g(x))$. A atividade foi elaborada com funções polinomiais e os alunos desenvolveram-na contrastando as notações e refutando algumas conjecturas a partir dos gráficos gerados pelo *software* Winplot. A visualização gráfica, comparada com a representação algébrica, e a interação entre os alunos, desconstruiu a idéia das notações para a derivada da função composta.

No quarto episódio, embora os alunos não soubessem calcular derivadas de funções que não fosse a polinomial, não tiveram dificuldade em analisar a representação gráfica e confrontá-la com as representações algébricas de modo a produzirem o conhecimento acerca da função composta, derivada e regra da cadeia, quando uma das funções não é polinomial. Embora a abordagem algébrica ainda tenha sua supremacia, ficou claro que somente seu uso pode evidenciar apenas uma manipulação de símbolos.

No quinto episódio, a interação entre a representação numérica, gerada pela animação proporcionada pelo *software* Winplot, e a representação gráfica, permitiu uma generalização acerca da representação algébrica para a derivada de uma função composta em um ponto. Essa generalização foi desencadeada pelas representações múltiplas e pelas atividades anteriores sobre regra da cadeia. A animação proporcionada por um recurso do *software* Winplot foi imprescindível para a articulação das representações gráficas e numéricas,

evidenciando a produção do conhecimento sobre a regra da cadeia junto com uma determinada média.

No próximo capítulo, esses dados serão analisados em profundidade à luz da literatura estudada, sobre visualização, representações múltiplas e produção do conhecimento quando as TIC estão inseridas no ambiente de aprendizagem.

CAPÍTULO 7

A PRODUÇÃO DO CONHECIMENTO ACERCA DE FUNÇÃO COMPOSTA E REGRA DA CADEIA: APROFUNDANDO A ANÁLISE

Neste capítulo, os dados da pesquisa, apresentados por meio de episódios elaborados no Capítulo 6, serão analisados à luz da literatura estudada. Dessa forma, temos uma análise complementar, às apresentadas inicialmente, agora sob outro olhar através das lentes teóricas. Algumas pesquisas que foram apresentadas anteriormente, no decorrer desta tese, serão retomadas, com o objetivo de focar seus principais resultados, integrando-os com as características que foram manifestadas pelos dados em algumas situações.

7.1 Introdução

Alguns autores de livros de Cálculo, tais como Guidorizzi, Anton e Stewart foram importantes para respaldar meus estudos acerca dos tópicos matemáticos abordados, tais como, função composta, derivada e regra da cadeia. Outros como Cottrill e Cury, inspiraram-me na busca de uma alternativa, ainda que parcial, para as dificuldades com os quais os alunos se deparam ao trabalharem com esses tópicos, na disciplina CDI.

As referências bibliográficas sobre visualização e representações múltiplas, com a inserção das TIC na produção do conhecimento no ambiente de ensino e aprendizagem foram

consultadas, revisitadas e incorporadas ao longo de toda a pesquisa e foram apresentadas no Capítulo 3.

O papel das TIC, na produção do conhecimento, especificamente na produção do conhecimento matemático, visto como processo, e sua interlocução com a noção de coletivo pensante seres-humanos-com-mídias, foi a inspiração para a elaboração do Capítulo 4.

A metodologia e os procedimentos adotados, com os experimentos de ensino para a coleta de dados estão em sintonia com a visão de produção de conhecimento, tal como enfatizam Araújo e Borba, e foram apresentados no Capítulo 5.

O processo de análise inicial dos dados vem ocorrendo, desde a elaboração das atividades, perpassando pela própria coleta em andamento e, ao final da coleta dos dados, onde todas as gravações foram transcritas para, em seguida, serem construídos os episódios, apresentados no Capítulo 6. De acordo com Doerr e Wood (2006),

a coleta e a interpretação dos dados não acontecem ao término do experimento, mas a própria coleta em desenvolvimento e a interpretação de dados em todos os níveis devem gerar e refinar princípios, propriedades e produtos que sejam cada vez mais úteis a pesquisadores, professores e outros profissionais. Um dos desafios na implementação de uma pesquisa está em articular as interpretações em cada nível de modo que sejam testadas, revisadas e progressivamente compartilhadas, e generalizadas a novos participantes e novos contextos (DOERR; WOOD, 2006, p.117-118).

Dessa forma, neste capítulo, aprofundarei a análise, buscando caracterizar como o coletivo, formado por alunos e tecnologia, produz o conhecimento acerca de função composta e regra da cadeia, pretendendo posteriormente gerar um produto que seja útil a outros profissionais da área. Esse produto, uma sequência de atividades, utilizando o *software* Winplot, para a produção do conhecimento acerca de função composta e regra da cadeia, está em aperfeiçoamento e poderá ser útil para professores e pesquisadores que se interessem por esses tópicos. O argumento de Cottrill (1999) sobre a dificuldade que os alunos sentem com a regra da cadeia devido à falta de um procedimento para se obter o gráfico de uma função composta, a partir dos gráficos das funções componentes, pôde ser aqui apresentado. Embora seja apenas uma idéia que ainda se encontra no âmbito da pesquisa, utilizando o *software* Winplot, deve ser ainda amadurecida para a prática da sala de aula. Como Doerr e Wood (2006) sugerem, esta tese efetiva parcialmente as idéias de Cottrill (1999) com uma sequência de atividades realizada com alguns alunos e que necessita de mudanças operacionais para um repertório a ser aplicado na sala de aula.

7.2 Aprofundando a Análise Inicial

Após a apresentação e a análise inicial dos dados apresentados no Capítulo 6, algumas situações emergiram para responder à pergunta norteadora desta pesquisa:

Como o coletivo, formado por alunos-com-mídias, produz o conhecimento acerca de Função Composta e Regra da Cadeia, a partir de uma abordagem gráfica?

Essas situações surgiram pelo fato dos alunos estarem envolvidos em um ambiente em que as características relacionadas às TIC estão presentes na produção do conhecimento, tais como, visualização e representações múltiplas.

Durante a elaboração das atividades, foi escolhido o *software* Winplot devido à sua facilidade de manuseio e ao seu forte componente visual dinâmico. Os gráficos são gerados a partir da inserção das expressões algébricas e podem ser alterados rapidamente pelo comando de edição, ou pela variação dos parâmetros. A visualização exerceu, portanto, um papel fundamental desde a elaboração, permeando a coleta dos dados nos experimentos de ensino, e no desenvolvimento das atividades pelos alunos, com a utilização das TIC.

No entanto, embora a visualização tenha seu papel de destaque, algumas duplas sentiram-se mais seguras quando, em suas interpretações, relacionavam os gráficos gerados às suas expressões algébricas. Mesmo quando, na Atividade 2, eram apenas fornecidos os gráficos as duplas queriam “descobrir” suas expressões algébricas. Esse fato pode ter origem nas tendências formalistas, o que talvez, apóie-se na cultura dos cursos de licenciaturas que têm uma visão mais algébrica que, conseqüentemente, levou a visualização a uma posição inferior, assim como entende Guzmán (2002)

Apesar do papel representado tradicionalmente pela visualização, as tendências formalistas que prevaleceram durante uma boa parte do século XX [...], tiveram como consequência um tipo de degradação da visualização levada a uma posição inferior. Visualização foi olhada com desconfiança e suspeita. [...] A atmosfera de desconfiança criada levou alguns matemáticos a defenderem agressivamente um completo abandono da visualização. A influência do formalismo na apresentação de novos resultados e teoremas nos periódicos foi uma norma inevitável. Até mesmo a estrutura de livros textos ao nível universitário e, às vezes até mesmo a níveis secundários e primários (“matemática moderna”) tenderam a estar de acordo com os mesmos padrões. (GUZMÁN, 2002, p.10, tradução nossa).

Entendo que esse formalismo tem trazido conseqüências para o ambiente de ensino e aprendizagem da Matemática, levando os professores e, conseqüentemente, os alunos a pensarem em uma supremacia da álgebra em detrimento das imagens e dos gráficos. Não quero com isso desmerecer a representação algébrica, mas outorgar à abordagem gráfica pelo menos o mesmo *status*.

O entrelaçamento entre as representações múltiplas, proporcionada pelas TIC, pela escrita e pela oralidade esteve presente no decorrer da elaboração das atividades e nos episódios construídos. Uma conseqüência do deslocamento entre essas representações foi a formulação de conjecturas, decorrente das discussões dos alunos ao trabalharem com as TIC e a escrita. O processo de respostas rápidas, proporcionadas pelo *feedback* do *software* Winplot, levou, muitas vezes, à refutação ou à confirmação dessas conjecturas. Outras vezes, algumas idéias, ou crenças foram desconstruídas, quando os alunos comparavam os gráficos com as suas expressões algébricas ou, quando envolvia uma generalização da notação matemática que os alunos estavam acostumados a manipular.

A dinamicidade presente no *software* Winplot proporcionou simulações desencadeando interpretações de padrões e estabeleceu uma ligação com propriedades sobre determinados tópicos que os alunos ainda não tinham conhecimento. Outras vezes, relacionavam o tópico abordado com um conhecimento prévio, interligando-o com outros tópicos de diferentes disciplinas, formando um todo característico da interdisciplinaridade. A produção do conhecimento matemático ocorreu nas discussões com o parceiro e, fundamentalmente, no processo de interpretação individual, expresso na forma oral, na forma escrita, ou na ação de trabalhar com o computador. Esse processo individual não significa um indivíduo sozinho, mas imbricado de todo um coletivo que pensa junto com ele.

Dessa forma, quero aprofundar essas situações que surgiram no decorrer de todo o processo, desde a elaboração das atividades até o final da coleta dos dados e que estão presentes nos episódios construídos: a visualização proporcionada pelas TIC, o entrelaçamento entre as representações múltiplas e a produção do conhecimento matemático como um processo coletivo.

7.2.1 A Visualização Proporcionadas pelas TIC

Para Guzmán (2002), os especialistas, em um campo particular, apropriam-se de uma variedade de imagens visuais e, de modo intuitivo, percebem e manipulam os conceitos e os

métodos mais habituais na área em que eles trabalham. Por meio dessas imagens, os especialistas são capazes de relacionar, de uma maneira versátil, a variedade de fatos e resultados da teoria que é, freqüentemente, muito complexa para ser manipulada de uma maneira mais analítica e lógica. De forma direta, eles selecionam, dentro daquilo que nos parece ser um emaranhado complicado de fatos, os modos mais apropriados de atacar os problemas mais difíceis da área.

Segundo Guzmán (2002), o fato da visualização ser um aspecto muito importante da matemática é algo bastante natural, se levarmos em conta o significado da atividade matemática e a estrutura da mente humana. Nossa percepção humana é fortemente visual e, assim, não é surpreendente que o apoio contínuo em seu aspecto visual esteja arraigado em muitas das tarefas relacionadas ao processo de desenvolvimento matemático, não apenas em geometria, que lida mais diretamente e especificamente com aspectos espaciais, mas também em algumas outras áreas da matemática.

Até mesmo nas atividades matemáticas, nas quais a abstração parece ir além do que é perceptível à nossa visão material, os matemáticos usam, freqüentemente, processos simbólicos, diagramas visuais e muitas outras formas de processos mentais que envolvem a imaginação. Esses processos ajudam a adquirir certa intuição do abstrato, uma familiaridade com o objeto “à mão”. Desse modo, os especialistas parecem saber, com antecedência, como esses diferentes objetos vão reagir quando eles introduzirem algumas mudanças convenientes em alguma parte da estrutura. Assim, a visualização é vista como algo absolutamente natural, não apenas na origem do pensamento matemático, mas também na descoberta de novas relações entre objetos matemáticos e no processo de transmissão e comunicação, próprio da atividade matemática.

A visualização desempenha um papel de interpretação do que está à nossa frente e não uma visão imediata das relações. Mas essa interpretação não surge do nada, ela é constituída a partir de nossos intercâmbios pessoais e sociais, muitas vezes, adquiridos no contexto escolar, e em nossa convivência com as representações matemáticas com a qual estamos habituados a trabalhar.

Exemplo disso no Episódio 1: Propriedades da Composição de Funções, quando Adriano está trabalhando com um símbolo de composição, $f \circ g$, dado pelo comando do *software* Winplot, que é diferente da notação habitual da Matemática, não consegue interpretá-lo e observa a imagem do gráfico obtido, procurando compreender o porquê desse gráfico ser obtido dessa forma, como podemos observar por sua fala.

Adriano: *Deu uma reta constante [referindo-se tanto ao gráfico da função $g(x)$ quanto ao gráfico da função composta $f(g(x))$]. Mas por que deu uma constante?*

Depois de esclarecido o significado desse símbolo, Adriano interpretou o objeto de sua contemplação, descobrindo novas relações entre os objetos matemáticos e comunicando-os à sua parceira por meio do gráfico e da escrita (conforme Figura 7.1), o que ele havia interpretado.

Adriano: *f composta com g? Ahhh você tá botando a g na f. Ah agora entendi o que quer dizer esse símbolo.*

Vívia: *O que é?*

Adriano: *Você tá botando a função g em f... O a e b são os coeficientes da... Entendi agora porque dá uma constante.*

Handwritten notes and equation:

- $a > 0 \rightarrow (+)$
- $a < 0 \rightarrow (-)$
- $b \cdot f(g(x)) \Rightarrow a(bx+c)^2 = a(b^2x + 2bcx + c^2) = ab^2x + 2abcx + ac^2$
- Below the equation, it says "A 206".

Figura 7.1 - Explicação de Adriano, por meio da escrita.

Adriano: *Se você zerar o b, vai ficar só essa parte que tem o ac^2 , só vai depender dos valores de a e c... o valor de x não importa.*

Concordando que a visualização não está apenas na origem do pensamento matemático, mas conduz à descoberta de novas relações entre objetos matemáticos, podemos observar ainda no Episódio 1, que Adriano descobre um padrão entre os gráficos das funções compostas $f(g(x)) = a(bx+c)^2$ e $g(f(x)) = bax^2 + c$, conforme podemos observar por sua fala.

Adriano: *Olha isso. Essa [gráfico de $g(f(x)) = bax^2 + c$] vai atingir o eixo y onde a reta [gráfico de $g(x) = bx + c$] atinge y e, essa [apontando para o gráfico de $f(g(x)) = a(bx+c)^2$] atinge o eixo x, onde a reta [gráfico de $g(x) = bx + c$] atinge o eixo x.*

Vívia: *É verdade...*

Adriano: *Oh, aqui, a g composta com f [gráfico de $g(f(x)) = bax^2 + c$] vai atingir o... eixo do y no mesmo lugar da reta [gráfico da reta $g(x) = bx + c$].*

Nesse episódio, o recurso de animação do *software* Winplot teve um papel fundamental na verificação desse padrão, pois a imagem pode ser manipulada de forma dinâmica e, com isso, foi possível elaborar uma generalização, a partir de uma função em particular.

Embora a visualização seja de fundamental importância para a descoberta de novas relações e a elaboração de conjecturas, a decodificação das imagens nem sempre é imediata, conforme nos alerta Guzmán (2002). Para o autor, a imediação absoluta pretendida de algumas imagens, que parecem ser óbvias para o professor, ou para os especialistas, devido à sua familiaridade adquirida pela prática, nem sempre é nítida para o estudante. Guzmán (2002) chama-nos a atenção para esse fato na seguinte afirmação:

Esta consideração é uma das razões pela qual a introdução da visualização, por exemplo, no ensino e aprendizagem de matemática, não é uma tarefa fácil, que requer a consciência clara que a transparência do processo, talvez real para o professor, por causa da sua familiaridade, adquirida pela prática continuada ao longo de muitos anos, pode estar ausente para aquele que começa com este tipo de processo (GUZMÁN, 2002, p. 3-4, tradução nossa).

Para Guzmán (2002), é verdade que “uma imagem vale mais que mil palavras”, mas isso pressupõe que a imagem seja corretamente decifrada e entendida. Se uma imagem não for devidamente decodificada, ela não passará de uma mera imagem.

Essa dificuldade de interpretação ocorreu no Episódio 2: Obtenção do Gráfico de uma Função Composta, quando perguntado sobre o porque inserir uma reta $y = x$ para a obtenção do gráfico da função composta, foi necessário utilizar um recurso de animação do parâmetro a , em um intervalo $[-1, 1]$, para ser possível a decodificação e estimular o entendimento, como podemos observar pela fala de Andrews.

Andrews: *Ahhh... A imagem [do ponto $Q(3a, 3a)$] vai ser igual a da g . Então tem tudo a ver!!*

Sandra: *Tem tudo a ver?*

Andrews: *Tem. Porque o domínio da f... O domínio da identidade é igual ao da f e... a imagem da identidade é igual a imagem da g... É verdade, vai facilitar nossa... nossa visualização.*

Esse trecho do Episódio 2, denota uma dificuldade da visualização e necessitou da minha interferência como pesquisadora-professora. Assim, desde a elaboração das atividades, tive que ter muito cuidado; pois, se para mim estava claro o processo de como alguns gráficos seriam interpretados, para os alunos poderia não fazer qualquer sentido; por isso foi necessária uma adaptação das noções que eu tinha para uma abordagem gráfica para regra da cadeia, levando em consideração que os gráficos poderiam não ser decodificados pelos alunos. Desse modo, na elaboração das atividades também foram cogitadas conexões entre as representações múltiplas. Logo, foram elaboradas atividades que envolviam as representações gráficas, algébricas e numéricas.

No desenvolvimento das atividades, os alunos se deslocavam entre as representações múltiplas, buscando um entrelaçamento entre elas, para poder produzir o conhecimento acerca da regra da cadeia, com a qual eles ainda não haviam tido contato, como poderá ser esclarecido na próxima seção.

7.2.2 O Entrelaçamento das Representações Múltiplas

Pierce e Stacey (2001) e Allevato (2005) afirmam que no ambiente computacional, os alunos demonstram preferência pela representação gráfica às numéricas, devido, muitas vezes, ao *software* utilizado. A facilidade de se deslocar de uma representação à outra pode causar essa preferência. Concordo em parte com esses autores, pois acredito que o *software* escolhido pode ser um facilitador para se deslocar entre uma ou outra representação, porém entendo que as atividades elaboradas e o conhecimento matemático a ser produzido condicionam seu desenvolvimento.

Exemplo disso no Episódio 5: A Regra da Cadeia em um Ponto, a atividade foi elaborada com o intuito de ser desenvolvida de uma forma essencialmente gráfica. No entanto, a dupla, formada por Andrews e Daiane, foi condicionada a desenvolver a atividade usando as representações numéricas e algébricas. Quando foi pedida a expressão algébrica que poderia ser atribuída à função $D(FoG): (fog(x))'$, Daiane perguntou se era para analisar

ponto a ponto, ou seja, analisar numericamente, e Andrews perguntou pela expressão algébrica.

Daiane: *Mas aí vai analisar ponto a ponto?*

Andrews: *Qual que é a derivada da g?*

Daiane: *A derivada da g, 3.*

Andrews: *Pera aí. Primeiro eu preciso da derivada da composta... derivada da f, composta com a g...*

Borba e Confrey (1996) afirmam que no estudo das funções tem sido dada maior ênfase à manipulação algébrica e defendem que a coordenação das representações múltiplas (gráficas, numéricas e algébricas), pode ser usada como um recurso para os estudantes que rejeitam a hegemonia da álgebra. Para Villarreal (1999), as representações múltiplas são de suma importância na produção de novos conhecimentos e são usadas pelos alunos para confirmarem ou refutarem suas conjecturas, atribuindo novos significados aos tópicos estudados a partir das interações com as mídias.

Esses autores enfatizam que a coordenação das representações múltiplas é uma opção àqueles alunos que têm dificuldade em produzir o conhecimento apenas com as expressões algébricas, como também, uma possibilidade de confirmarem ou refutarem as conjecturas.

No Episódio 3: Enunciação da Regra da Cadeia, a dupla, formada por Andrews e Daiane, observou os gráficos das funções $(f(g(x)))'$ e $f'(g(x))$ e percebeu que eram distintos, desconstruindo uma idéia de que tais notações poderiam ser iguais.

Andrews: *As retas... coeficientes de inclinação dela ... o m que é a derivada ... tá diferente... A derivada da composta tá menos... tá mais inclinada... tá mais inclinada do que... a composta da derivada de f com g.*

Nesse mesmo episódio, a dupla pôde refutar uma conjectura quando contrastou as representações algébricas e gráficas acerca do papel da derivada da função $g(x)$ na regra da cadeia.

Andrews: *A $g(x)$ também não tinha que ter derivada?*

Sandra: *Como assim?*

Andrews: *Aqui dentro teria que também colocar a derivada de $g(x)$... 3.... f da derivada de 3.*

Sandra: *f da derivada de 3?*

Andrews: *O g da derivada de x é 3 [ele quis dizer $g'(x)=3$]... Aí esse 3 eu ia colocar aqui [apontando para a função $f'(x)$] então f da derivada de 3 é 6.*

Daiane: *Mas aí não vai ser...*

Andrews: *Vai ser uma reta constante.*

Daiane: *Então não é isso também...*

Como anteriormente apresentado, as representações múltiplas estavam presentes, desde a elaboração das atividades, condicionando seu desenvolvimento sem, contudo, determiná-lo, procurando explorar as várias facetas que poderiam surgir quando fossem aplicadas aos alunos, na coleta dos dados.

No Episódio 3: Enunciação da Regra da Cadeia, ao serem questionados sobre a relação entre os gráficos das funções $(f(g(x)))'$ e $f'(g(x))$, Victor relacionou os dois gráficos obtidos.

Victor: *Podemos chegar à conclusão [de] que ela [função $f'(g(x))$] é um terço da outra [função $(f(g(x)))'$].*

Sandra: *Que relação existe entre as duas?*

Victor: *O 3... O 3 multiplicando.*

Sandra: *De onde surgiu esse 3?*

Porém, foi associando os gráficos às suas representações algébricas, dada por uma tabela, conforme Figura 7.2, que ele identificou a derivada de função composta com a fórmula da regra da cadeia.

3) Liste na tabela abaixo, algebricamente, as seguintes funções:

$f(x) = x^2$	$g(x) = 3x$
$f'(x) = 2x$	$g'(x) = 3$

Figura 7.2 - Tabela de funções obtidas.

Victor: *Seria o 3 da derivada de g ?*

Aqui, concordando com Villarreal (1999), as abordagens algébricas são preferíveis quando existe uma dificuldade nas interpretações gráficas. Nesse caso, existe a necessidade de uma passagem anterior pelo aspecto algébrico para facilitar a formulação de conjecturas e gerar o enunciado da fórmula da regra da cadeia. No caso desse episódio, o computador apenas foi utilizado para gerar os gráficos e confirmar que os gráficos das derivadas das funções polinomiais eram correspondentes às expressões algébricas obtidas pela escrita, na folha de papel. Isso não implica que essas abordagens devam ser consideradas separadas, pois elas são complementares, dependendo da atividade e do modo como os alunos interagem com elas. Essa interação depende muito de como o aluno também considera as mídias.

Exemplo disso, a dupla, formada por Lucas e Pedro, era reticente ao uso do computador, e, em diversas vezes, ambos salientaram que o computador não era “preciso”. No Episódio 4: Regra da Cadeia com Funções Não Polinomiais, Pedro inseriu os gráficos no *software* Winplot, pois isso era pedido na atividade. Enquanto Pedro observava o gráfico gerado, Lucas fez os cálculos em uma folha de papel, negando-se a inserir a expressão obtida para conferir seus cálculos.

Pedro: *Uma senóide... Uma cossenóide... Começa no... no... na crista... aqui [apontou com o mouse o ponto de máximo (0,3)] ó... Senóide começaria aqui por baixo [apontando com o mouse o ponto de mínimo, quando a função tocava o eixo x].*

Lucas: *Deu $3\cos^2(x)$.*

Lucas: *Pelas minhas contas deu isso.*

No entanto, Lucas estava lidando com algo conhecido: composição de funções. Quando teve que obter uma expressão algébrica para a derivada da função $g(x) = -3\sin(x)$, ele tentou fazer os cálculos em uma folha de papel, porém como ainda não havia tido contato com a derivada dessa função, buscou uma forma de conectá-la a um conhecimento prévio que ele imaginava que seria válido para o cálculo dessa derivada, usando limites, conforme Figura 7.3.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \Rightarrow g'(x) = \frac{-3 \sin(x+h) + 3 \sin(x)}{h}$$

$$g'(x) = \frac{-3(\sin x \cosh + \sinh \cos x) + 3 \sin(x)}{h}$$
~~$$g'(x) = \frac{-3 \sin(x) + 3 \sin(x)}{h}$$~~

$$g'(x) = \frac{-3 \sin(x) \cos(h) + 3 \sin(h) \cos(x) + 3 \sin(x)}{h}$$

Figura 7.3 - Tentativa de Lucas para calcular a derivada da função seno.

Lucas: *Seria legal eu sumir com esse h daqui [referindo-se a variável h no denominador].*

Entendo que a tendência de tratar um problema, inicialmente de forma algébrica, seja uma característica de alunos que têm facilidade em manipular expressões algébricas, mesmo que intuitivamente, mas têm dificuldade em lidar com seus gráficos.

Outra interligação das representações múltiplas ocorreu no Episódio 5: A Regra da Cadeia em um Ponto. Nesse episódio, os alunos, a princípio, obtinham os gráficos e, em seguida, completavam uma tabela numérica, conforme Figura 7.4, usando a animação de um ponto em um determinado intervalo. Pela associação dessa tabela com os gráficos, a dupla, formada por Adriano e Vivia, pôde generalizar e calcular a expressão algébrica para a regra da cadeia.

6) A partir da animação do parâmetro a , complete a tabela abaixo:

a	$DG: g'(a)$	$(DF) \circ G: f'(g(a))$	$D(F \circ G): (f(g(a)))'$
$-2\pi/3$	3	1	3
$-\pi/3$	3	-1	-3
0	3	1	3
$\pi/3$	3	-1	-3
$2\pi/3$	3	1	3

Figura 7.4 - Tabela numérica obtida pela animação do parâmetro a .

Adriano: *É só fazer uma vez a outra aqui.*

Sandra: *É só fazer uma vez a outra?*

Adriano: *É sim, é só fazer uma vez a outra.*

Sandra: *Por quê?*

Adriano: *Pela regra da cadeia é isso que faz...*

DeMarois e Tall (1996) mostraram que uma aluna teve dificuldade em associar uma tabela de valores numéricos de duas funções distintas, sem suas expressões algébricas, com a composição entre essas funções. Nesse caso, os autores entendem que, embora as expressões algébricas pareçam ser mais complexas, os estudantes manipulam melhor essa representação do que as representações numéricas (dadas por uma tabela) ou gráficas. Isso também pode ser comprovado, ainda no Episódio 5, pela dupla, formada por Lucas e Pedro, a qual se recusava a trabalhar com a animação dos gráficos. Nesse episódio, Lucas denotava maior familiaridade com a expressão algébrica, embora tenha se confundido, algumas vezes, com sua manipulação.

O Episódio 5 ilustrou uma característica diferente da apresentada por DeMarois e Tall. As duplas, com exceção de Lucas e Pedro, obtiveram, a princípio, uma tabela de valores numéricos obtidos pela observação da variação de pontos pertencentes a esses gráficos e, a partir dela, fizeram a generalização para obtenção da expressão algébrica da derivada da função composta, a regra da cadeia.

Concordo com Dreyfus (1991) que novas descobertas matemáticas são mais bem lembradas e entendidas se o aluno consegue conectá-las ao seu conhecimento prévio. A exploração da atividade, a partir de várias perspectivas, acrescentou profundidade à produção do novo conhecimento.

Podemos observar nos 5 episódios construídos que, embora a atividade condicionasse um tipo de raciocínio, elas não foram determinantes, pois cada dupla abordou a mesma atividade de diversas maneiras. Todas as duplas, embora fizessem parte da mesma turma, tendo aulas com a mesma professora, interpretaram as atividades cada qual de acordo com suas crenças, concepções, bagagem escolar e estilos de aprendizagem distintos.

No entanto, embora as interpretações fossem distintas, existe um fio condutor comum característico em todos os episódios: as tecnologias intelectuais (a oralidade, a escrita e a informática) permeavam todo o ambiente, formando, nas palavras de Lévy (1993), um coletivo pensante.

7.2.3 A Produção do Conhecimento Matemático como um Processo Coletivo

Segundo Moran (2007), ter conhecimento não é apenas ter informação, muito embora a informação seja o primeiro passo para se conhecer. Para esse autor não é a quantidade de informação que uma pessoa tem que denota que ela tenha conhecimento. Concordo com ele quando afirma que “o conhecimento não se dá pela quantidade de acesso (a informação), mas pelo olhar integrador, pela forma de rever com profundidade as mesmas coisas” (MORAN, 2007, p.50).

Exemplo disso no Episódio 3: Enunciação da Regra da Cadeia, Andrews enunciou a derivada da função composta sem saber que se tratava da fórmula da regra da cadeia. Embora ele tivesse tido contato com essa regra em outra faculdade, ou seja, tinha a informação que existia uma regra com esse nome, porém ele não a havia compreendido, nem mesmo sequer seu enunciado, pois ao enunciá-la, ele se surpreendeu quando eu disse que era essa a regra da cadeia.

Andrews: *Vou falar de novo: Eu faço a derivada da f composta com g , vezes a derivada da g de x ... Ficou até bonito!*

Sandra: *Você acabou de enunciar a regra da cadeia. Isso é chamado regra da cadeia.*

Andrews: *Ahhh... Você tá de sacanagem comigo. Nunca entendi isso no outro curso. Nunca entendi a regra da cadeia.*

Sandra: *Você já viu regra da cadeia?*

Andrews: *Já.*

Sandra: *Você acabou de falar ela.*

Andrews: *Nossa, fiquei até emocionado... Agora ganhei o dia!... A derivada da f composta com a g vezes a derivada de g .*

Pelo que pude perceber da fala de Andrews, embora ele tivesse visto regra da cadeia, para ele, até aquele momento não havia uma relação da fórmula com o objeto que é a derivada da função composta. Concordo com Steinbring (2005), apoiado em Bauersfeld (1995), quando ele afirma que não existe uma correspondência fácil entre os objetos e os símbolos e que a dominância dessa suposta correspondência é a razão para a falha de métodos de ensinamentos tradicionais. O autor concorda com Bauersfeld (1995), que afirma que o professor usa a linguagem como um objeto representado e seus significados para ensinar, mas como “não

existe uma transmissão simples de significados por meio da linguagem, todos os estudantes também aprendem, freqüentemente, a falar pela rotina que deles são esperados a dizer em certas situações definidas” (BAUERSFELD, 1995, p.275-276, *apud* STEINBRING, 2005, p.20, tradução nossa).

Para Steinbring (2005), a produção do conhecimento matemático ocorre, no contexto da construção social e no processo de interpretação individual. Lévy (1993) concorda que o indivíduo pensa, porém imbricado de todo um contexto, “a pessoa pensa, mas é porque uma mega rede cosmopolita pensa dentro dela [...] mesmo com as mãos vazias e sem nos movermos, pensamos com escritas, métodos, regras, compassos, quadros, grafos, oposições lógicas, cantigas algorítmicas, modos de representação e de visualização diversos” (LÉVY, 1993, p.173-174). Assim, embora o processo de interpretação seja individual, o ser humano não interpreta sozinho, mas com todo o contexto externo.

Borba e Villarreal (2005) sustentam que o conhecimento é produzido por um coletivo composto seres-humanos-com-mídias, ou seres-humanos-com-tecnologias, e não, como outras teorias sugerem, por apenas um ser humano individual, ou um coletivo composto apenas de humanos. Entendo que para esses autores não é o ser humano sozinho que pensa, mas o coletivo, formado por humanos e mídias, é que pensa. E, nesse sentido, todo o ambiente físico, as pessoas, as TIC e o conteúdo interagem na produção do conhecimento.

O pensar com a mídia fica evidente no Episódio 1: Propriedades da Composição de Funções. Adriano, assim como todos os alunos voluntários, embora soubesse operar algebricamente com a composição de funções, não havia tido contato com as propriedades acerca dessa operação, como podemos ver pelo seguinte trecho de sua fala.

Sandra: *Será que vale para tudo? Toda função composta com a identidade vai ser a mesma?*

Adriano: *Ahh creio que não.*

Sandra: *Não?*

Adriano: *Talvez nem sempre.*

Sandra: *Nem sempre?*

Adriano: *Pera aí, deixa eu pensar.*

Para poder “pensar”, Adriano inseriu uma função cúbica $y = dx^3 + ex^2 + fx + g$, tentando comprovar a hipótese que eu havia levantado. Podemos observar que, embora Adriano dissesse que iria pensar, ele utilizou o computador e pensou junto, evidenciando o

papel da mídia como uma atriz do elenco principal. Nessa fala, Adriano evidencia um discurso que muitos de nós fazemos quando nos deparamos com uma situação nova: “Deixa eu pensar!”.

Apoiando-me em Lévy (1993), posso dizer que o pensamento é imbricado de um contexto, ou seja, penso com o contexto à minha volta, em um coletivo. Porém, esse pensamento não é a princípio claro, muitas vezes é prolixo. Penso em palavras, em pontos, em imagens, em funções, em gráficos sem, muitas vezes, conectá-los. Essa conexão se dá quando eu tenho que exteriorizar esse pensamento, por meio da oralidade, da escrita, manuscrita ou no teclado de um computador, ou mesmo mostrar no monitor, com ou sem o mouse, algo que estava no meu pensamento. Isso não quer dizer que essa exteriorização seja uma relação isomórfica, ou seja, com a mesma forma. Uma imagem, uma frase que está em minha mente nem sempre é a imagem, ou a frase que eu transporto para a minha fala, ou para o papel ou para a tela do computador. Nesse processo, muitas vezes, existe uma mudança qualitativamente diferente para cada mídia e, dependendo do *feedback*, novamente repenso tudo, em um movimento. Entendo essa mudança, como proposto por Tikhomirov (1981), como sendo uma reorganização, que transforma toda a atividade humana.

No Episódio 2: Obtenção do Gráfico de uma Função Composta, a dupla, formada por Daiane e Andrews, discute sobre o gráfico obtido para a função composta e fica na dúvida sobre uma relação que existe na composição entre duas funções.

Daiane: *Então seria a composição das duas?*

Sandra: *Composição das duas? De quem com quem?*

Daiane: *Você vai substituir a g na f.*

Andrews: $(3x)^2 \dots 9x^2$.

Daiane: *Isso. Vai ser f...*

Andrews: *f composta com g.*

Daiane: *f composta com g... Quer testar?*

Daiane ao perguntar, “Quer testar?”, também sugere a idéia de pensar com o computador. Ela tem uma conjectura acerca de uma relação e quer confirmá-la ou, até mesmo refutá-la e propõe testar, pensando junto com ela. Novamente, observamos que o computador não é um mero instrumento, mas é parte integrante da produção do conhecimento matemático.

Moran (2006; 2007) defende que o conhecimento se dá no processo rico de interação externo e interno. Entendo que essa interação está em sintonia com a noção de seres-

humanos-com-mídias proposta por Borba e Villarreal (2005). É na interação do pensamento do ser humano, imbricado de todo um contexto (LÉVY, 1993), com todas as mídias externas transformando toda a atividade humana, reorganizando (TIKHOMIROV, 1981) o pensamento pelo *feedback*, proporcionado pelas mídias, que ocorre a produção do conhecimento.

7.3 Concluindo

Neste capítulo, foram discutidas situações que se apresentaram na análise inicial dos dados à luz da literatura estudada ao longo desta pesquisa. Essas situações confrontadas com o referencial teórico adotado buscaram responder à pergunta diretriz desta pesquisa:

Como o coletivo, formado por alunos-com-mídias, produz o conhecimento acerca de Função Composta e Regra da Cadeia, a partir de uma abordagem gráfica?

Nesta tese, analisei como o coletivo formado pelos estudantes, tecnologias intelectuais e a pesquisadora, produz o conhecimento matemático de modo interativo. Especificamente, analisei como esse coletivo produz o conhecimento acerca de função composta e regra da cadeia utilizando o *software* Winplot.

Foi possível observar, nos episódios elaborados, que a produção do conhecimento dos alunos envolvidos, acerca desse conhecimento, ocorreu por meio de elaborações das conjecturas, formuladas durante o processo de visualização potencializado pelas TIC. Tais conjecturas foram confirmadas ou refutadas, levando-se em conta o entrelaçamento das representações múltiplas, que permearam todas as atividades, e por um coletivo pensante seres-humanos-com-mídias, no qual o ser humano transforma e é transformado pelas mídias em um processo interativo.

Um dos objetivos desta tese foi incorporar a visualização ao ensino e aprendizagem da função composta e da regra da cadeia, entendendo que essa seja uma alternativa ao aspecto estritamente algébrico. No entanto, a abordagem algébrica tem ainda um papel preponderante junto aos alunos, embora, algumas vezes, esses se desloquem entre as representações múltiplas.

Ainda que não seja o foco desta pesquisa, as concepções dos alunos relacionadas às funções como uma lei de formação também foi mencionada na análise. Entendo que essa concepção está arraigada na cultura da sala de aula e, por isso, o aluno sente dificuldade em analisar um gráfico ou uma tabela quando não se tem uma expressão algébrica.

No decorrer desta pesquisa, outras indagações foram surgindo acerca das atividades propostas e do meu papel como pesquisadora. A partir dessas indagações, apresentarei algumas considerações no próximo capítulo, procurando enfatizar o papel do professor-pesquisador e das atividades como uma sugestão para outros professores em sua prática da sala de aula, no Ensino Superior.

CAPÍTULO 8

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma tese em Educação Matemática é uma síntese linear de vários momentos que ficaram desordenados pelo meio do caminho. O leitor de uma tese tem a impressão de que tudo foi muito organizado e de que essas linhas foram escritas calmamente. Os rascunhos, as anotações feitas nos livros, as várias versões da escrita, as diversas reelaborações das atividades, as várias percepções que ficaram de fora, dentre tantas outras coisas, denotam que a escrita de uma tese não é linear e nem tampouco organizada. É um resumo de quatro anos, ou quem sabe, de uma vida acadêmica, de um trabalho coletivo, que nasce com as primeiras angústias como professora, cresce com a elaboração do projeto de pesquisa e toma corpo com as contribuições do orientador, de colegas, dos participantes voluntários e de muita leitura, mesmo aquelas que não as citamos. É também um trabalho solitário, mas não sozinho, pois no decorrer destes anos a mente já não é a mesma, foi impregnada de todo um contexto.

O papel de um grupo de pesquisa consolidado, como o GPIMEM, no desenvolvimento desta tese foi crucial. Embora eu seja a responsável pelo projeto inicial, pela elaboração das atividades, pela coleta dos dados, pelo desenvolvimento e pela redação final desta tese, as idéias que percorreram todas essas fases foram fortemente influenciadas pela convivência com o grupo de pesquisa.

As contribuições de uma tese não se restringem ao seu resultado final, mas a um repertório de assuntos, desde os tópicos matemáticos abordados, perpassando pelos procedimentos metodológicos e as atividades propostas que, embora tenham um objetivo

intrínseco à tese, também é um produto de compartilhamento para que outros professores possam adaptá-las à sua sala de aula.

Doerr e Wood (2006) defendem que o ensino de matemática precisa se desenvolver no sentido de compartilhar com as visões de aprendizagem, pois os avanços direcionados às mudanças no ensino ainda são muito lentos. As autoras argumentam que “para melhorar o ensino, um repertório de conhecimentos profissionais pedagógicos precisa ser desenvolvido a partir de conhecimentos dos profissionais que atuam na área, de maneira que tal recurso possa ser compartilhado e continuamente aprimorado” (DOERR; WOOD, 2006, p.113). Para as autoras está se tornando cada vez mais evidente o fato de que os estudantes, os professores, as salas de aulas, os currículos, as TIC e os instrumentos de aprendizagem precisam ser pensados como sistemas que se integram de forma complexa.

O desafio com que nos defrontamos enquanto investigadores é desenhar pesquisas que levem em conta a multiplicidade de fatores que interagem influenciando as práticas pedagógicas e que, ao mesmo tempo, apóiem mudanças nessas práticas e contribuam para o desenvolvimento de um repertório comum de conhecimento profissional para o ensino de Matemática (DOERR; WOOD, 2006, p.114).

Nesse sentido, as atividades elaboradas no decorrer desta tese podem ser parte de um repertório, no sentido de apoiar mudanças das práticas pedagógicas no Ensino Superior. Não estou propondo aqui que os professores tomem essas atividades e as aplique diretamente aos seus alunos, mas que possam adaptá-las ao seu cotidiano escolar.

Embora nem todas as atividades, elaboradas e desenvolvidas, tenham feito parte da análise inicial, elas também fazem parte de um repertório de atividades com raciocínios distintos, levando em conta a decomposição de funções que é uma das dificuldades que os alunos enfrentam quando calculam a regra da cadeia e suas aplicações no cálculo de integrais.

No decorrer dos experimentos de ensino, pude notar que essas atividades poderiam ter sido elaboradas de outras formas. A forma alternativa como os alunos desenvolveram as atividades foi fundamental para cogitar uma reelaboração, levando em consideração o papel das mídias, da visualização, da coordenação das representações múltiplas, da produção do conhecimento a partir de um coletivo pensante.

Muitas vezes, surpreendi-me com a maneira dos alunos abordarem as atividades. O fato de ter feito a coleta dos dados a partir de experimentos de ensino proporcionou-me a oportunidade de estar mais perto dos alunos e ouvi-los atentamente. Em vários momentos,

tive que interferir e instigá-los, ou ainda defrontá-los com suas próprias idéias. Outras vezes, empolgava-me com algum resultado que eu não havia imaginado para aquela atividade.

Ao rever os filmes gerados pelo *software* Camtasia Studio para transcrever as falas dos alunos, notei que, não raro, meu semblante falava por mim, mesmo quando ficava calada. Em alguns momentos, percebi que fiquei muito ansiosa, ou empolgada demais, ou frustrada mesmo. O papel de pesquisadora muitas vezes se confundia com o de professora. A pesquisadora se segurava para não interferir muito e a professora queria ensinar.

Segundo D'Ambrosio (2006) é importante abriremos espaços para que o conhecimento do aluno se manifeste e tudo o que fazemos, nossas atitudes, nosso comportamento e as nossas opiniões são registrados pelos alunos. O professor deve se atualizar, pois se insistir no seu papel de fonte e transmissor de conhecimento ficará fadado a ser dispensado pelos alunos, pela escola e pela sociedade em geral. O papel do professor é o de gerenciar, facilitar o processo de aprendizagem, de interagir com os alunos na produção e crítica de novos conhecimentos, e isso é o que, essencialmente, justifica a pesquisa. O autor argumenta que “nenhuma teoria é final, assim como nenhuma prática é definitiva, e não há teoria e prática desvinculadas” (D'AMBROSIO, 2006, p.81).

Toda teoria ocorre em situações ideais e é, na prática, que serão observados e evidenciados alguns pressupostos que não podem ser identificados apenas teoricamente. A pesquisa é o que permite a interface integradora entre teoria e prática. D'Ambrosio (2006) salienta que a pesquisa é algo intrínseco à prática e que não há muita relevância em uma pesquisa desvinculada da prática. O professor, na sala de aula, está em permanente processo de busca e produção de novos conhecimentos, procurando conhecer e entender seus alunos. Dessa forma, as figuras do professor e do pesquisador são indissolúveis, sugerindo que ser pesquisador é próprio de ser professor. “O professor-pesquisador vem se mostrando como o novo perfil do docente. Pesquisador em ambas as direções: buscar o novo, junto com seus alunos, e conhecer o aluno, em suas características emocionais e culturais” (D'AMBROSIO, 2006, p.106).

Assim, entendo que para construir uma teoria em torno da educação é necessário considerar o professor enquanto um ser humano, com suas angústias, seus desejos, seus medos e seus sonhos. E também é necessária uma postura inquisitiva e questionadora que possibilite situações de desequilíbrio e que abale suas convicções e verdades. A investigação do professor-pesquisador se mostra como uma ferramenta que pode potencializar mudanças de atitudes em sua prática e no seu desenvolvimento profissional. Em particular, o professor de matemática deve adquirir um olhar investigativo, instigando seus alunos a buscar caminhos

que levem à descoberta, pois sua pesquisa não é a mesma que a dos pesquisadores em Matemática.

Concordo com Freire (2007) que não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino, pois “o que há de pesquisador no professor não é uma qualidade ou uma forma de ser ou de atuar que se acrescente à de ensinar. Faz parte da natureza da prática docente a indagação, a busca, a pesquisa. O de que se precisa é que, em sua formação permanente, o professor se perceba e se assuma, porque professor, como pesquisador” (FREIRE, 2007, p. 29).

Assim, a proposta desta pesquisa vai ao encontro das idéias de D'Ambrosio (2006) e Freire (2007). As dificuldades encontradas na prática, aliadas aos referenciais teóricos, podem proporcionar um diferencial ao retorno da sala de aula. A produção do conhecimento acerca de função composta e regra da cadeia, a partir de uma abordagem que não seja a estritamente algébrica, com o envolvimento das TIC, pode ajudar outros professores-pesquisadores a proporem diferentes atividades que envolvam diversos tópicos a serem estudados na disciplina CDI.

Entendo que a Educação, particularmente a Educação Matemática, é um campo que é influenciado por vários discursos teóricos e retorna na direção da prática de sala de aula. As pesquisas, em geral, têm duas faces: uma voltada para a teoria e a outra para a prática. Isso não quer dizer que uma substitua a outra; pelo contrário, elas se posicionam e caminham lado a lado, embora tenham posições distintas. Acredito que não existe uma transferência simples de significados entre a pesquisa teórica e a pesquisa da prática. É necessária uma transformação, uma adaptação, pois são contextos distintos. A matemática escolar não é a Matemática. Concordo com Lerman (2004), que argumenta que levar a teoria produzida no contexto da pesquisa para a situação de sala de aula implica uma recontextualização. Porém, isso não é fácil. No entanto, penso que seja possível trabalhar com atividades que incluam a utilização das TIC para a produção do conhecimento matemático, desenvolvidas no âmbito da pesquisa acadêmica.

Claro, não foi intenção, desta tese, propor uma receita a ser seguida, mas mostrar que é possível alternativas para o ensino e a aprendizagem da função composta e da regra da cadeia, com a utilização das TIC, privilegiando também aspectos visuais, e não somente a transmissão do conteúdo formalizado com as representações algébricas.

Entendo, como Moran (2006), que o conhecimento não é fragmentado, mas que está interligado, passando de uma incerteza a uma certeza provisória, em um processo rico de interação entre todos os envolvidos em um ambiente de ensino e aprendizagem. Que o

conhecimento fragmentado é conveniente para uma organização administrativa e não para um ambiente que visa, cada vez mais, uma interdisciplinaridade.

Assim como Steinbring (2005), entendo que a produção do conhecimento matemático ocorre, fundamentalmente, no contexto da sala de aula, onde são desenvolvidos os sinais e os símbolos, tanto quanto sua interpretação e, portanto, uma variedade e diversidade de comunicações matemáticas podem ser observadas e devem ser consideradas da perspectivas do estudante. Essas muitas diferentes formas de comunicação matemática podem ser potencializadas por um ambiente escolar em que os alunos e professores utilizam as TIC, pois acredito que a Matemática produzida pelos alunos, quando utilizam papel e lápis, é diferente daquela produzida com a utilização das TIC.

Não se espera que o professor mude sua prática de uma hora para outra, no entanto, considerando que o conhecimento matemático é produzido no processo de interpretações individuais (STEINBRING, 2005), a partir de um coletivo pensante seres-humanos-com-mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005), que o pensamento já é um coletivo (LÉVY, 1993), que o computador, especificamente, nesse caso, o *software* Winplot, transforma e reorganiza a nossa forma de pensar (TIKHOMIROV, 1981) e que a visualização é um processo intrínseco ao ser humano (GUZMÁN, 2002) faz sentido argumentar em prol das transformações que podem ocorrer em sala de aula no Ensino Superior.

Embora esta tese tenha sido desenvolvida no âmbito acadêmico e aborde temas que considero indispensáveis para a prática docente, no Ensino Superior, estou convencida da importância da reflexão sobre a minha própria prática educativa. Assumindo-me como ser humano que também produz conhecimento, tenho a plena convicção de que ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades e as condições necessárias para a sua produção, ou a sua construção.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEVATO, N. S. G. *Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência*. 2005. 270 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2005.

ALLEVATO, N. S. G. Aspectos emergentes da utilização do computador na educação matemática. In: FRANZONI, M.; ALLEVATO, N. S. G. (Org.) *Reflexões sobre a formação de professores e o ensino de ciências e matemática*. Campinas: Alínea, 2007. Cap.4, p.75-96.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. O método nas ciências sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. *O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa*. 2.ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 1999. Parte II, p. 107-188.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo: um novo horizonte*. 8.ed. Tradução de C. I. Doering. Porto Alegre: Bookman, 2007a. v.1.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo: um novo horizonte*. 8.ed. Tradução de C. I. Doering. Porto Alegre: Bookman, 2007b. v.2.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo pesquisas coletivamente em educação matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) *Pesquisa qualitativa em educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. Cap.1, p.25-45. 120 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. *Education Studies in Mathematics*, Dordrecht, v.52, n.3, p.215-241, 2003.

AURÉLIO, B. H. F. *Dicionário Aurélio eletrônico: século XXI*. 3.ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1999. CD-ROM.

AYERS, T.; DAVIS, G.; DUBINSKY, E.; LEWIN, P. Computer experiences in learning composition of functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, Reston, v.19, n.3, p.246-259, 1988.

BARBOSA, S. M. Abordagens sobre regra da cadeia: uma discussão acerca de sua demonstração. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 9., 2007, Belo Horizonte. *Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática: "Diálogos entre a Pesquisa e a Prática Educativa"*. Belo Horizonte: SBEM, 2007. CD-ROM, p.1-20.

BARUFI, M. C. B. *E-Cálculo*. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2001-2008. Disponível em: <<http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/0/compositions.6/index.html>> Acesso em: 03 mar. 2006.

BAUERSFELD, H. "Language games" in the mathematics classroom: their function and their effects. In: COBB, P.; BAUERSFELD, H. (Eds.) *The emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures*. Hillsdale: Erlbaum, 1995. v.2, p.271-291.

BENEDETTI, F. C. *Funções, software gráfico e coletivos pensantes*. 2003. 316 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2003.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa: significados e a razão que a sustenta. *Revista Pesquisa Qualitativa*, São Paulo, v.1, n.1, p.7-26, 2005.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Tradução de M. J. Alvarez; S. B. Santos; T. M. Baptista. Porto: Porto Editora, 1994. 336 p. (Coleção Ciências da Educação, 12).

BORBA, M.; CONFREY, J. A student's construction of transformations of functions in a multiple representational environment. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, v.31, n.3, p.319-337, 1996.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. Pesquisas em informática e educação matemática. *Educação em Revista*, Belo Horizonte, n.36, p.239-253, 2002.

BORBA, M. C.; SCHEFFER, N. F. Coordination of multiple representations and body awareness. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, v.57, n.3, 2004. Videopaper.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. Graphing calculator and reorganization of thinking: the transition from functions to derivate. In: Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 22., 1998, Stellenbosch, *Proceedings of 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Stellenbosch: PME, 1998. v.2, p.135-143.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer, 2005. 232 p. (Mathematics Education Library, 39).

BOYER, C. B. *Cálculo*. Tradução de H. H. Domingues. São Paulo: Atual, 1993. 93 p. (Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula, 6).

BRITO, A. J.; CARDOSO, V. C. Uma abordagem histórico-pedagógica dos fundamentos do cálculo diferencial: reflexões metodológicas. *Zetetiké*, Campinas, v.5, n.7, p.129-144, 1997.

CABRAL, T. C. B. *Vicissitudes da aprendizagem em um curso de cálculo*. 1992. volume delta. 212 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 1992.

CLARK, J. M.; CORDERO, F.; COTTRILL, J.; CZARNOCHA, B.; DEVRIES, D. J.; ST. JOHN, D.; TOLIAS, T.; VIDAKOVIC, D. Constructing a schema: the case of the chain rule. *Journal of Mathematical Behavior*, Norwood, v.16, n.4, p.345-364, 1997.

COTTRILL, J. F. *Students' understanding of the concept of chain rule in first year calculus and the relation to their understanding of composition of functions*. 1999. 173 p. Tese (Doctor of Philosophy degree in Mathematics Education) - Purdue University, West Lafayette, 1999.

CURY, H. N. Análise de erros em cálculo diferencial e integral: resultados de investigações em cursos de engenharia. In: Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia. 31., 2003, Rio de Janeiro. *Anais do XXXI Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia*. Rio de Janeiro: IME, 2003. CD-ROM, p.1-10.

CURY, H. N. "Professora, eu só errei um sinal!": como a análise de erros pode esclarecer problemas de aprendizagem. In: CURY, H. N. (Org.) *Disciplinas matemáticas em cursos superiores: reflexões, relatos, propostas*. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. Cap.5, p.111-138.

D'AMBROSIO, U. *Educação matemática: da teoria à prática*. 13.ed. Campinas: Papirus, 2006. 120 p. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

DEMAROIS, P.; TALL, D. Facets and layers of the function concept. In: Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 20., 1996, Valencia. *Proceedings of 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Valencia: PME, 1996. v.2, p.297-304.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. Paradigmas e perspectivas em transição. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Org.) *O planejamento da pesquisa qualitativa: teorias e abordagens*. 2.ed. Tradução de S. R. Netz. Porto Alegre: Artmed, 2006. Parte 2, p.163-167.

DOERR, H. M.; WOOD, T. Pesquisa-projeto (design research): aprendendo a ensinar matemática. In: BORBA, M. C. (Org.) *Tendências internacionais em formação de professores de matemática*. Tradução de A. Olimpio Jr. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. Cap.5, p.113-130. 140 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 13).

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. (Ed.) *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. Cap.2, p.25-41. 296 p. (Mathematics Education Library, 11).

EDWARDS, C. H. Jr. *The historical development of the calculus*. New York: Springer-Verlag, 1979.

FARIAS, M. M. R. *As representações matemáticas mediadas por softwares educativos em uma perspectiva semiótica: uma contribuição para o conhecimento do futuro professor de matemática*. 2007. 195 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2007.

FINNEY, R. L.; WEIR, D. M.; GIORDANO, F. R. *Cálculo de George B. Thomas Jr.* 10.ed. Tradução de C. H. Asano. São Paulo: Addison Wesley, 2002. v.1.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A: funções, limite, derivação, integração*. 5.ed. rev. e ampl. São Paulo: Makron, 1992.

FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. 36.ed. São Paulo: Paz e Terra, 2007. 154 p. (Coleção Leitura).

FREUDENTHAL, H. *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1973.

GIRALDO, V.; CARVALHO, L. M.; TALL, D. *Conflitos teórico-computacionais e a formação da imagem conceitual de derivada*. London: The University of Warwick, 2002. Disponível em: <<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003b-giraldo-carv-rj.pdf>> Acesso em: 10 set. 2007.

GOLDENBERG, M. *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais*. 7.ed. Rio de Janeiro: Record, 2003.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v.1.

GUIDORIZZI, H. L. *Matemática para administração*. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

GUZMÁN, M. The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis. In: International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level, 2., 2002, Hersonissos. *Proceedings of 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level*. Hersonissos: University of Crete, 2002. p.1-24. Disponível em: <<http://www.math.uoc.gr/~ictm2/>> Acesso em: 9 mai. 2007.

HABRE, S.; ABBOUD, M. Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior*, Reston, v.25, n.1, p.57-72, 2006.

HOFFMANN, L. D.; BRADLEY, G. L. *Cálculo: um curso moderno e suas aplicações*. 7.ed. Tradução de R. S. Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

HUGHES-HALLETT, D.; GLEASON, A. M.; MCCALLUM, W. G.; PASQUALE, A.; FLATH, D. E.; QUINNEY, D.; LOCK, P. F.; RASKIND, W.; GORDON, S. P.; RHEA, K.; LOMEN, D. O.; TECOSKY-FELDMAN, J.; LOVELOCK, D.; THRASH, J. B.; OSGOOD, B. G.; TUCKER, T. W. *Cálculo de uma variável*. 3.ed. Tradução de R. J. Iorio Jr. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

HUNTER, M.; MONAGHAN, J. D.; ROPER, T. The effect of computer algebra use on students' algebraic thinking. In: SUTHERLAND, R. (Ed.) *Working Papers for ESCR Algebra Seminar*. London: London University, Institute of Education, 1993.

HUSCH, L. S. *Visual calculus: composition of function*. Knoxville: Mathematics Department, University of Tennessee, 1995-2001. Disponível em: <<http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/0/compositions.6/index.html>> Acesso em: 03 mar. 2006.

JAVARONI, S. L. *Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias*. 2007. 231 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2007.

LANG, S. *A first course in calculus*. London: Addison Wesley, 1965.

LEITHOLD, L. *O cálculo com geometria analítica*. 3.ed. Tradução de C. C. Patarra. São Paulo: Harbra, 1994. v.1.

LERMAN, S. Relações entre teoria e prática na educação matemática: lentes diferentes. *Boletim de Educação Matemática (Bolema)*, Rio Claro, ano 17, n.22, p.83-94, 2004.

LÉVY, P. *As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática*. Tradução de C. I. Costa. Rio de Janeiro: Ed. 34, 1993. 208 p. (Coleção Trans).

LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. G. *Naturalistic inquiry*. California: Sage Publications, 1985.

LINCOLN, Y. S.; GUBA, E. G. Controvérsias paradigmáticas, contradições e confluências emergentes. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Org.) *O planejamento da pesquisa qualitativa: teorias e abordagens*. 2.ed. Tradução de S. R. Netz. Porto Alegre: Artmed, 2006. Parte 2, p.169-192.

LUCUS, C. A. Is subject matter knowledge affected by experience? The case of composition of functions. In: Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 30., 2006, Prague, *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Prague: PME, 2006. v.4, p.97-104.

MENK, L. F. F. *Contribuições de um software de geometria dinâmica na exploração de problemas de máximos e mínimos*. 2005. 247 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

MOISE, E. E. *Cálculo: um curso universitário*. Tradução de D. A. Mello; R. G. Watanabe. São Paulo: Edgard Blücher, 1972. v.1.

MORAN, J. M. Ensino e aprendizagem inovadores com tecnologias audiovisuais e telemáticas. In: MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. *Novas tecnologias e mediação pedagógica*. 12.ed. Campinas: Papirus, 2006. Cap.1, p.11-65. 173 p. (Coleção Papirus Educação).

MORAN, J. M. *A educação que desejamos: novos desafios e como chegar lá*. Campinas: Papirus, 2007. 174 p. (Coleção Papirus Educação).

OLÍMPIO, A. Jr. *Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática: uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática*. 2006. 264 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2006.

PAIVA, M. *Matemática*. São Paulo: Moderna, 1995. v.1.

PARRIS, R. *Winplot*. Exeter: Phillips Exeter Academy, 2001. Programa gratuito, escrito originalmente em C++, em inglês, e traduzido para o português, pelo Prof. Adelmo Ribeiro de Jesus. Disponível em: <<http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html>> Acesso em: 09 fev. 2007.

PAURA, A.; FERNANDES, C.; SEGADAS, C.; BISPO, C.; PINTO, G. Desalgebrizando o estudo de funções compostas. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 9., 2007, Belo Horizonte. *Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática: “Diálogos entre a Pesquisa e a Prática Educativa”*, Belo Horizonte: SBEM, 2007. CD-ROM, p.1-18.

PIERCE, R.; STACEY, K. Observations on students' responses to learning in CAS environment. *Mathematics Education Research Journal*, Melbourne, v.13, n.1, p.28-46, 2001.

PINTO, M. M. F. Educação matemática no ensino superior. *Educação em Revista*, Belo Horizonte, n.36, p.223-238, 2002.

PONTE, J. P. O interaccionismo simbólico e a pesquisa sobre nossa própria prática. *Revista Pesquisa Qualitativa*, São Paulo, v.1, n.1, p.107-134, 2005.

PONTE, J. P.; BROCADO, J; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. 152 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

REZENDE, W. M. *O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. 2003. 450 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SANTOS, A. R.; BIANCHINI, W. *Aprendendo cálculo com Maple: cálculo de uma variável*. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

SCUCUGLIA, R. R. S. *A investigação do teorema fundamental do cálculo com calculadoras gráficas*. 2006. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2006.

STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In: LESH, R.; KELLY, A. E. *Research Design in Mathematics and Science Education*. Hillsdale: Erlbaum, 2000. p.267-307.

STEINBRING, H. *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: an epistemological perspective*. Dordrecht: Springer, 2005. 236 p. (Mathematics Education Library, 38).

STEWART, J. *Cálculo*. 5.ed. Tradução de A. C. Moretti; A. C. G. Martins. São Paulo: Cengage Learning, 2006. v.1.

SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com geometria analítica*. 2.ed. Tradução de A. A. Faria. São Paulo: Makron, 1994. v.1.

TALL, D. Chords, tangents and the Leibniz notation. *Mathematics Teaching*, London, v.112, p.48-52, 1985.

TALL, D. Using the computer to represent calculus concepts (Utiliser l'ordinateur pour se représenter des concepts du calcul différentiel et intégral). In: École d'Été de Didactique des Mathématiques, 4., 1986, Orléans. *Recueil des Textes et Comptes Rendus in Actes de la IVème École d'Été de Didactique des Mathématiques*. Paris: IREM, 1987. p.238-264.

TALL, D. Concept images, generic organizers, computers and curriculum change. *For the Learning of Mathematics*, Edmonton, v.9, n.3, p.37-42, 1989.

TALL, D. *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. 296 p. (Mathematics Education Library, 11).

TALL, D. Students' difficulties in calculus. In: International Congress on Mathematical Education, 7., 1992, Quebec. *Proceedings of Working Group on Students' Difficulties in Calculus*. Quebec: ICME-7, 1993. p.13-28.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, v.12, p.151-169, 1981.

TIKHOMIROV, O. K. The psychological consequences of computerization. In: WERTSCH, J. V. (Ed.) *The concept of activity in soviet psychology*. New York: M. E. Sharpe, 1981. p.256-278.

VIDICH, A. J.; LYMAN, S. M. Métodos qualitativos: sua história na sociologia e na antropologia. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. (Org.) *O planejamento da pesquisa qualitativa: teorias e abordagens*. 2.ed. Tradução de S. R. Netz. Porto Alegre: Artmed, 2006. Cap.2, p.49-90.

VILLARREAL, M. E. *O pensamento matemático de estudantes universitários de cálculo e tecnologias informáticas*. 1999. 402 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 1999.

APÊNDICE

ANEXO A - QUESTIONÁRIO

Questionário

Por favor, responda todas as perguntas abaixo da forma que achar mais conveniente.

Este questionário não visa à nota.

- 1) O que significa o termo Regra da Cadeia?
- 2) O que você entende por Regra da Cadeia?
- 3) Do que você se lembra sobre a Regra da Cadeia?
- 4) Como você poderia demonstrar a Regra da Cadeia?
- 5) Qual exemplo você poderia dar sobre a Regra da Cadeia?
- 6) Você poderia sugerir uma aplicação para a Regra da Cadeia?

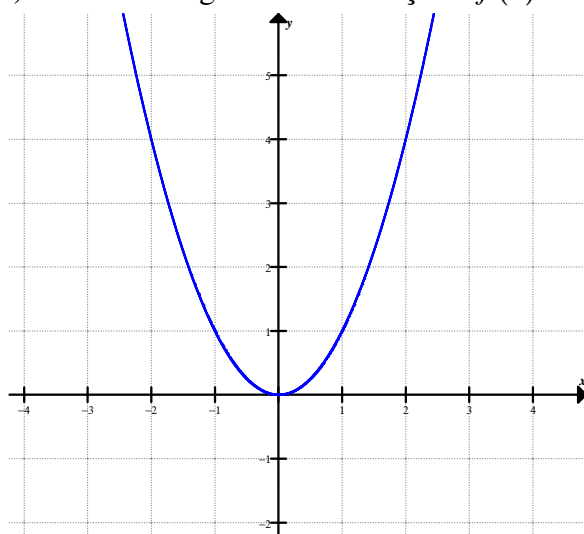
ANEXO B - ATIVIDADES

Atividade 1

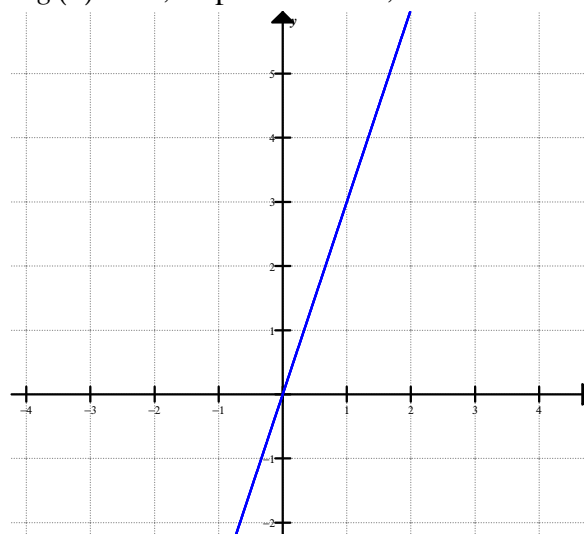
- 1) Insira as funções $f(x) = ax^2$, $g(x) = bx + c$ e anime os coeficientes a , b e c .
- 2) A partir do menu **Dois / combinações**, faça combinações de cores diferentes com essas duas funções.
 - a) O que você pode observar sobre o gráfico da combinação $f < - - g$ quando os coeficientes a , b e c são animados?
(**Sugestão:** Fixe dois coeficientes e anime o terceiro.)
 - b) O que você pode dizer sobre a combinação $f < - - g$ acerca do domínio, imagem e expressão algébrica?
- 3) Na janela combinações, inverta as funções f e g , e observe o gráfico. Com esse gráfico, o que você pode dizer sobre a combinação $f < - - g$ acerca do domínio, imagem e expressão algébrica?
- 4) Identifique semelhanças e diferenças entre os gráficos que você obteve nos itens 2 e 3.

Atividade 2

- 1) Dados os gráficos das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x$, respectivamente,

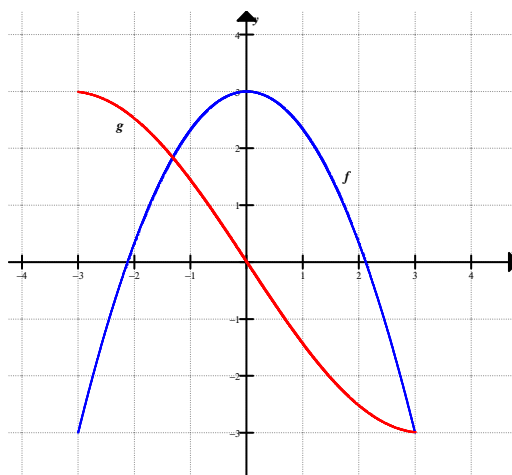


$$f(x) = x^2$$



$$g(x) = 3x$$

- Qual é o gráfico da função composta de f com g ?
 - Qual é o gráfico da função composta de g com f ?
 - Explique como você obteve esses gráficos.
 - Quais as diferenças que você pode observar entre esses dois gráficos?
- 2) Dados os gráficos de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ abaixo:



- Qual é o gráfico da função composta de f com g ?
- Qual é o gráfico da função composta de g com f ?
- Explique como você obteve esses gráficos.

Atividade 3

- 1) Insira as seguintes funções $f(x)=x^2$, $g(x)=3x$ e $y=x$. Insira o ponto $A(a,0)$ e anime a .
- 2) Insira o ponto P, pertencente à função g , com a mesma abscissa do ponto A. Quais são as coordenadas desse ponto? Trace um segmento pontilhado entre os pontos A e P. Anime a . O que você pode dizer sobre a relação entre os pontos A e P?
- 3) Insira o ponto Q, pertencente à reta $y=x$, com a mesma ordenada do ponto P. Quais são as coordenadas desse ponto? Trace um segmento pontilhado entre os pontos P e Q. Anime a . O que você pode dizer sobre a relação entre os pontos A, P e Q?
- 4) Insira o ponto T, pertencente à função f , com a mesma abscissa do ponto Q. Quais são as coordenadas desse ponto? Trace um segmento pontilhado entre os pontos Q e T. Anime a . O que você pode dizer sobre a relação entre os pontos A, P, Q e T?
- 5) Insira o ponto R com mesma abscissa do ponto A e ordenada do ponto T. Quais são as coordenadas desse ponto? Trace um segmento pontilhado entre os pontos T e R. Anime a . O que você pode dizer sobre a relação entre os pontos A, P, Q, T e R?
- 6) Ao animar a , que gráfico o ponto R desenha? Qual é a representação algébrica desse gráfico? Que relação existe entre o gráfico desenhado pelo ponto R e os gráficos da função f e g ?

Obs: A partir do ponto R (no inventário), você pode clicar em família.

(**Sugestão:** parâmetro: a , mínimo: -2, máximo: 2, passos: 100, olhar, atraso 500, definir).

- 7) O que você pode dizer sobre a inserção da reta $y=x$?

Atividade 4

- 1) Insira a função $h(x) = ax^2 + bx + c$, e anime os coeficientes a , b e c .
- 2) Tente “descobrir” as funções que compõem a função h , fazendo algumas simulações a partir do *menu* **Dois / combinações / $f < - - g$** .

Obs.: Essa combinação no Winplot significa a função composta de f com g , isto é, $f(g(x))$.

- 3) A que conclusões você pode chegar sobre essas funções em relação à função h ?
- 4) Dê exemplos de funções que podem compor a função h .

Atividade 5

- 1) Insira as funções $f(x)=x^2$, $g(x)=3x$ e suas respectivas derivadas, $f'(x)$ e $g'(x)$.
- 2) Insira a função composta $f(g(x))$ e, a partir do menu **inventário / derivar**, plote o gráfico da derivada da função composta.
- 3) Liste na tabela abaixo, algebricamente, as seguintes funções:

$f(x)=$	$g(x)=$
$f'(x)=$	$g'(x)=$

- 4) A partir da combinação $f \circ g$, plote o gráfico da função composta $f(g(x))$ e responda:
 - a) Qual é a sua representação algébrica?
 - b) O que você pode observar desse gráfico em relação ao gráfico, dado pelo Winplot, da derivada da função composta $f(g(x))$?
 - c) Os gráficos têm a mesma representação gráfica? Justifique sua resposta.
- 5) Mantendo a função $f(x)=x^2$ complete a tabela abaixo:

	$g(x)=3x$	$g(x)=4x$	$g(x)=5x$
$f(g(x))$			
$g'(x)$			
$f'(g(x))$			
$(f(g(x)))'$			

- a) E se a função g fosse $g(x)=ax$, mantendo $f(x)=x^2$, qual seria a função derivada $(f(g(x)))'$?
- b) E se a função g fosse $g(x)=ax$ e a função f fosse $f(x)=x^n$, qual seria a função derivada $(f(g(x)))'$?

Atividade 6

A tabela abaixo mostra os pontos das funções $f(x)$ e $g(x)$.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4
$g(x)$	-2	2	0	-2	2

- 1) Como você usaria o Winplot para saber alguns pontos das funções composta $f(g(x))$ e $g(f(x))$.
- 2) É possível achar todos os pontos? Justifique sua resposta.
- 3) O que você pode observar sobre o domínio de f e g .
- 4) O que você pode observar sobre o domínio das funções compostas $f(g(x))$ e $g(f(x))$.
- 5) Como você completaria a tabela abaixo sabendo que ela mostra alguns pontos das funções derivadas, $f'(x)$ e $g'(x)$.

x	-2	-1	0	1	2
$f'(x)$	-4	-2	0	2	4
$g'(x)$	9	0	-3	0	9
$f'(g(x))$					

- 6) Observando essas tabelas, dois estudantes fizeram as seguintes afirmações:

I) Os pontos da derivada da função composta são:

x	-2	-1	0	1	2
$[f'(g(x))]$	-36	0	0	0	36

II) As funções f e g são, respectivamente, $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3 - 3x$, definidas no intervalo $[-2, 2]$.

Como você acha que os alunos chegaram a essas conclusões e o que você pode dizer sobre elas? Justifique sua resposta.

Atividade 7

- 1) Insira as funções $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3$ e $g(x) = -3\sin(x)$ e faça a combinação $f \circ g$ (isto é, $f(g(x))$). Qual é a expressão algébrica que você acha que está associada a essa combinação?
- 2) Derive as funções f e g a partir do menu **inventário / derivar**. Quais são as expressões algébricas que você acha que estão associadas a essas derivadas?
(**Sugestão:** Esconda os gráficos, mas não os apague, para não carregar o desenho.)
- 3) Insira as expressões algébricas que você acha que estão associadas às funções f' e g' , verifique se os gráficos dessas expressões são os mesmos que você obteve no item 2).
- 4) Faça a combinação $f' \circ g$ (isto é, $f'(g(x))$). Qual é a expressão algébrica que você acha que está associada a esta combinação?
- 5) Derive a combinação $f \circ g$ que você obteve no item 1).
- 6) O que você pode observar acerca do gráfico da combinação $f' \circ g$ e o gráfico da derivada da combinação $f \circ g$?
- 7) Liste as expressões algébricas que você obteve até agora na tabela abaixo.

$f(x) =$	$g(x) =$
$f'(x) =$	$g'(x) =$
$f'(g(x)) =$	

- 8) Observando a tabela acima e, fazendo algumas simulações com essas funções a partir do menu **Dois / combinações /**, tente “descobrir” qual é a expressão algébrica que está associada à derivada da combinação $f \circ g$? Isto é, qual é a expressão algébrica que você acha que está associada à derivada da função composta, $[f(g(x))]'$?

Atividade 8

- 1) Para essa atividade você deverá mudar a configuração da grade em **Ver / Grade**:
 - a) Para o eixo x , utilize a coordenada **pi** no **intervalo** $\pi/6$.
 - b) Para o eixo y , utilize a coordenada usual no **intervalo** 1.
 - c) E para cada um dos pontos e funções inseridas, nomeie-os.
- 2) Insira as funções $F: f(x) = \sin(x)$, $G: g(x) = 3x$ e a reta $y = x$. Assim como proposto na Atividade 3, insira os pontos $A(a, 0)$, $P(a, 3a)$, $Q(3a, 3a)$, $T(3a, \sin(3a))$ e $R(a, \sin(3a))$. Faça a combinação da composta $F \circ G: f \circ g(x)$. Anime o parâmetro a no intervalo $[-2\pi/3, 2\pi/3]$. O que você pode observar sobre os intervalos onde as funções $y = x$, $f(x)$, $g(x)$ e $f \circ g(x)$ estão definidas quando se anima o parâmetro a nesse intervalo?
- 3) Trave os intervalos das funções $y = x$, $f(x)$, $g(x)$ e $f \circ g(x)$, de acordo com o item 2) e dê uma explicação de como você obteve esse intervalo.
- 4) A partir do menu **inventário / derivar**, derive $f(x)$ e $g(x)$. Pelos gráficos obtidos, quais serão as expressões algébricas dessas funções derivadas? Insira essas funções $DF: f'(x)$ e $DG: g'(x)$. Insira o ponto B, com abscissa a , pertencente ao gráfico da função $f'(x)$, e o ponto C, com abscissa a , pertencente ao gráfico da função $g'(x)$. Anime o parâmetro a . Em que intervalos as funções derivadas estão definidas? Trave essas funções nesses intervalos.
- 5) A partir do menu **inventário / derivar**, derive a função composta $F \circ G: f \circ g(x)$ e obtenha o gráfico de $D(F \circ G): (f \circ g(x))'$.
- 6) A partir da animação do parâmetro a , complete a tabela abaixo:

a	$DG: g'(a)$	$(DF) \circ G: f'(g(a))$	$D(F \circ G): (f \circ g(a))'$
$-2\pi/3$			
$-\pi/3$			
0			
$\pi/3$			
$2\pi/3$			

- 7) Observando a tabela, qual é a expressão algébrica que pode ser atribuída à função, $D(F \circ G): (f \circ g(x))'$?