



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Câmpus de São José do Rio Preto

Willian Pereira Nunes

**Região de deslize de sistemas suaves por partes**

São José do Rio Preto  
2019

Willian Pereira Nunes

## **Região de deslize de sistemas suaves por partes**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientador: Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva  
Coorientador: Prof. Dr. Daniel Cantergiani  
Panazzolo

São José do Rio Preto  
2019

N972r Nunes, Willian Pereira  
Regiões de deslize de sistemas suaves por partes /  
Willian Pereira Nunes. -- São José do Rio Preto, 2019  
81 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista  
(Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências  
Exatas, São José do Rio Preto

Orientador: Paulo Ricardo da Silva

Coorientador: Daniel Cantergiani Panazzolo

1. Sistemas dinâmicos por partes. 2. Regiões de  
deslize. 3. Teoria de Fenichel. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca  
do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto.  
Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Willian Pereira Nunes

## **Região de deslize de sistemas suaves por partes**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

### **Comissão Examinadora**

Prof. Dr. Daniel Cantergiani Panazzolo  
Université Haut-Alsace - França  
Co-orientador

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi  
UNESP – São José do Rio Preto

Prof. Dr. Douglas Duarte Novaes  
UNICAMP – Campinas

Prof. Dr. Francisco Braun  
UFSCAR – São Carlos

Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello  
UNIFEI – Itajuba

São José do Rio Preto  
9 de abril de 2019

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço ao Prof. Paulo Ricardo pela orientação e ajuda durante o desenvolvimento do trabalho e ao Prof. Daniel pela hospitalidade durante minha estada na França e valiosas contribuições ao trabalho.

Agradeço a minha família e a minha namorada Altimare por todo apoio e confiança, que me ajudaram, de certa forma, na conclusão deste trabalho.

Aos amigos e colegas de pós graduação, pelas valiosas conversas e apoio ao longo deste trabalho. Em particular a Laura pela grande ajuda em várias etapas e ao André e Lucas, por várias conversas proveitosas e várias horas sobre a lousa discutindo ideias.

Aos professores e funcionários do IBILCE, pela ajuda e atenção.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, à qual agradeço.

## RESUMO

Neste trabalho, consideramos campos de vetores suaves por partes  $X$  definidos em  $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ , onde  $\Sigma$  é uma variedade de comutação com auto-interseção. Uma dupla regularização de  $X$  é uma família de dois parâmetros de campos vetoriais suaves  $X_{\varepsilon, \eta}$ ,  $\varepsilon, \eta > 0$ , satisfazendo que  $X_{\varepsilon, \eta}$  converge uniformemente para  $X$  em cada subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$  quando  $\varepsilon, \eta \rightarrow 0$ . Definimos a região de deslize na parte não regular de  $\Sigma$  como sendo o limite de variedades invariantes de  $X_{\varepsilon, \eta}$ . Como a dupla regularização fornece um sistema *slow-fast*, a teoria GSP (Teoria da Perturbação Singular Geométrica) é a nossa principal ferramenta.

Palavras chave: Sistemas dinâmicos por partes. Regiões de deslize. Teoria de Fenichel.

## **ABSTRACT**

*In this work we consider piecewise smooth vector fields  $X$  defined in  $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ , where  $\Sigma$  is a self-intersecting switching manifold. A double regularization of  $X$  is a 2-parameter family of smooth vector fields  $X_{\varepsilon,\eta}$ ,  $\varepsilon, \eta > 0$ , satisfying that  $X_{\varepsilon,\eta}$  converges uniformly to  $X$  in each compact subset of  $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$  when  $\varepsilon, \eta \rightarrow 0$ . We define the sliding region on the non regular part of  $\Sigma$  as a limit of invariant manifolds of  $X_{\varepsilon,\eta}$ . Since the double regularization provides a slow-fast system, the GSP-theory (geometric singular perturbation theory) is our main tool.*

*Keywords: Piecewise dynamical systems. Slide regions. Fenichel's theory.*

# Lista de Figuras

1	Convenção de Filippov (Superfície codimensão 1 à esquerda e codimensão 2 à direita).	10
1.1	Região de deslize (verde), ponto de saída (vermelho) e região de costura (azul).	12
2.1	Tipos possíveis de $m$ -cruz em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ .	17
2.2	Esboço de uma função de transição monótona.	19
2.3	Relação entre as cartas do blow-up direcional e o blow-up polar, figura retirada de [20].	21
2.4	Deslize com $n = 2, m = 1$ .	22
3.1	Sequência de variedades lentas $S_2^0 \subseteq S_1$ .	29
3.2	Esboço do quadrilátero $\mathcal{Q}$ para os tempos $t_0, t_1, t_2$ e $t_3$ .	34
4.1	Gráfico de $D(x_3)$ .	38
4.2	Retas $r_1$ em azul, $r_2$ em vermelho e os pontos de equilíbrio $P$ e $Q$ .	42
4.3	Blow-up direcional no plano $x_3 = cte$ com campos vetoriais $X_{++}$ em preto, $X_{-+}$ em vermelho, $X_{--}$ em azul, $X_{+-}$ em roxo, o campo vetorial laranja é a combinação convexa entre $X_s$ e no quadrado temos o sistema $x_1x_2$ .	45
4.4	Esboço do retrato de fase de (4.22) com $K = 1$ .	47
4.5	Diagrama de bifurcação de (4.34).	52
4.6	Valor dos autovalores de $K = \varepsilon/\eta$ vai para $\infty$ .	54
4.7	Valor dos autovalores quando $K = \varepsilon/\eta \rightarrow 0$ .	54
4.8	Esboço do retrato de fase de $X$ no plano $z = z_0$ com campos vetoriais $X_{++}$ em preto, $X_{-+}$ em vermelho, $X_{--}$ em azul e $X_{+-}$ em roxo.	55
4.9	Gráfico da solução por partes começando em $(0.5, 0.5)$ .	56
4.10	Bacia de atração de $\Sigma_{00}$ (hachurada) e de $\Sigma_{-0}$ (não hachurada).	56
4.11	Esboço do campo em $I^3$ .	61
5.1	Gráfico das expressões do campo regularização (curva em vermelho) e campo momento (curva em azul).	65

5.2	Esboço da variedade lenta dada pela intersecção das superfícies $\dot{x} = \dot{y} = 0$ , ( $\dot{x} = 0$ em laranja, $\dot{y} = 0$ em azul) feito com $\varphi_1 \approx \bar{x}$ e $\varphi_2 \approx \bar{y}$ .	67
5.3	Quadrilátero $Q$ do sistema (5.10).	69
6.1	Curva em vermelho $h(x) = 0$ , curvas tracejadas representa a faixa de corte e curva em azul é a variedade de descontinuidade resultante.	71
6.2	Variedade lenta do sistema suave (6.12) ( $F = 0$ em azul e $G = 0$ em amarelo).	74
6.3	Variedade lenta do sistema (6.20) para $I = 1$ ( $F = 0$ em azul e $G = 0$ em amarelo).	76
6.4	Gráficos da equação que define a dinâmica do deslize da regularização $\dot{z} =$ $\gamma(x, y(x), z(x))$ , para diferentes valores de $I$ .	77
6.5	Gráficos da equação que define a dinâmica sobre a variedade lenta $\dot{z} = 4(x -$ 1.6) $- (bx^2 - x^3 - 5x^2 + I + 1)$ , para diferentes valores de $I$ .	78

# Sumário

<b>1</b>	<b>Descontinuidade em Variedades Suaves</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares e abordagens para o problema</b>	<b>16</b>
2.0.1	Blow-up	20
2.1	Perturbação singular	22
<b>3</b>	<b>Abordagens para o problema de deslize da 2-cruz</b>	<b>25</b>
3.1	Regularização com escalas de tempo	25
3.2	Campo deslizando Momento	29
<b>4</b>	<b>Deslize via regularização para descontinuidades de codimensão superior</b>	<b>35</b>
4.1	Estudo da 2-cruz	35
4.1.1	Curva regularizante linear	36
4.1.2	Curvas regularizantes não lineares	39
4.2	Sobre o sistema quadrático (4.13)	47
4.3	Estudo da 3-cruz em $\mathbb{R}^4$	55
<b>5</b>	<b>Comparação entre os campos</b>	<b>62</b>
5.1	Unicidade dos campos de Filippov sem singularidades	62
5.2	Relação entre campo momento e regularizante	66
<b>6</b>	<b>Relação entre pinching e campos descontínuos</b>	<b>70</b>
6.0.1	Pinching e Perturbações Singulares.	70
	<b>Referências</b>	<b>79</b>

# Introdução

A teoria de sistemas diferenciais com descontinuidade tem sido amplamente desenvolvida nos últimos anos, impulsionada por várias aplicações na engenharia, física, teoria de controle e biologia. Um dos textos referência nessa teoria se deve a A. F. Filippov [16], onde foram estabelecidas várias convenções de modo a estender a teoria qualitativa dos sistemas suaves para sistemas descontínuos. Nos sistemas descontínuos, existe uma hipersuperfície separando o espaço de fase, com diferentes campos vetoriais em cada um dos "lados". Um dos sistemas diferenciais descontínuos mais estudados são aqueles cuja hipersuperfície de descontinuidade possui codimensão 1, dividindo assim, pelo menos localmente, o espaço de fase em dois. De modo geral a superfície pode possuir qualquer codimensão.

A teoria de Filippov se baseou em observações de modelos da teoria de controle, como os sistemas com *delay* de qualquer tipo e alguns modelos *dry friction*, com o objetivo de descrever matematicamente o comportamento observado. A maior dificuldade em estudar os sistemas descontínuos reside no comportamento das trajetórias sobre a superfície de descontinuidade, pois o campo se torna multivalorado. Para contornar essa dificuldade e ainda modelar apropriadamente os fenômenos de interesse, Filippov convencionou regiões especiais no conjunto de descontinuidade, as chamadas regiões de deslize, costura e escape. A região de costura não apresenta problemas para se entender a dinâmica, enquanto que a região de deslize (escape) já é mais complicada.

A proposta de Filippov para se estudar a região de deslize (escape) consiste em tomar o envoltório convexo dos vetores dos campos sobre a descontinuidade e escolher um vetor neste envoltório que seja tangente a superfície de descontinuidade, ver Figura 1. O campo definido nessa região, construído desta forma é chamado de campo deslizante de Filippov. Essa convenção se mostrou bem adequada para modelar estes sistemas e rendeu muitos trabalhos ao longo dos anos, como por exemplo [1], [33], [17] e [30]. Uma outra ferramenta utilizada para estudar os sistemas descontínuos foi introduzida em [31], chamada de regularização Sotomayor-Teixeira, que consiste em aproximar um sistema diferencial descontínuo por sistemas contínuos. Posteriormente, em [6], [22] e [23] foi utilizada a teoria de perturbação singular nos sistemas regularizados via regularização Sotomayor-Teixeira e observou-se que, a dinâmica da perturbação singular é topologicamente equivalente à dinâmica descrita por Filippov na região de deslize.

Os trabalhos citados têm como objeto de estudo sistemas com descontinuidade de codimensão 1. No entanto, a convenção de Filippov não é tão eficiente quando a descontinuidade possui codimensão maior que 1, pois perde-se, de modo geral, a unicidade na escolha do vetor do envoltório convexo. Alguns trabalhos, como [I] e [II], se dedicaram a escolher um campo deslizante, dentre as infinitas possibilidades resultantes da convenção de Filippov e analisar os aspectos pertinentes.

O objetivo desta tese é definir o deslize de sistemas descontínuos através de uma regularização e analisar a relação desta definição com a teoria de Filippov. Uma das vantagens dessa definição é que o deslize fica atrelado a escolha de uma regularização, tornando o estudo mais abrangente e com mais ferramentas, uma vez que o sistema regularizado é suave.

A tese é estruturada da seguinte forma. No capítulo 1, apresentamos um retrospecto sobre o deslize em superfícies de codimensão 2. No capítulo 2, apresentamos os resultados essenciais que serão utilizados ao longo da tese e uma abordagem ao problema do deslize em codimensão 2 presente em [II], chamada de campo deslizante momento. O capítulo 3 contém os resultados acerca da definição de deslize via regularização para descontinuidades de codimensão 2 e 3. No capítulo 4, comparamos a nossa definição com o campo deslizante momento. Por fim, no capítulo 5, tratamos brevemente sobre a técnica do *pinching* e como ela relaciona sistemas diferenciais suaves com sistemas diferenciais descontínuos.

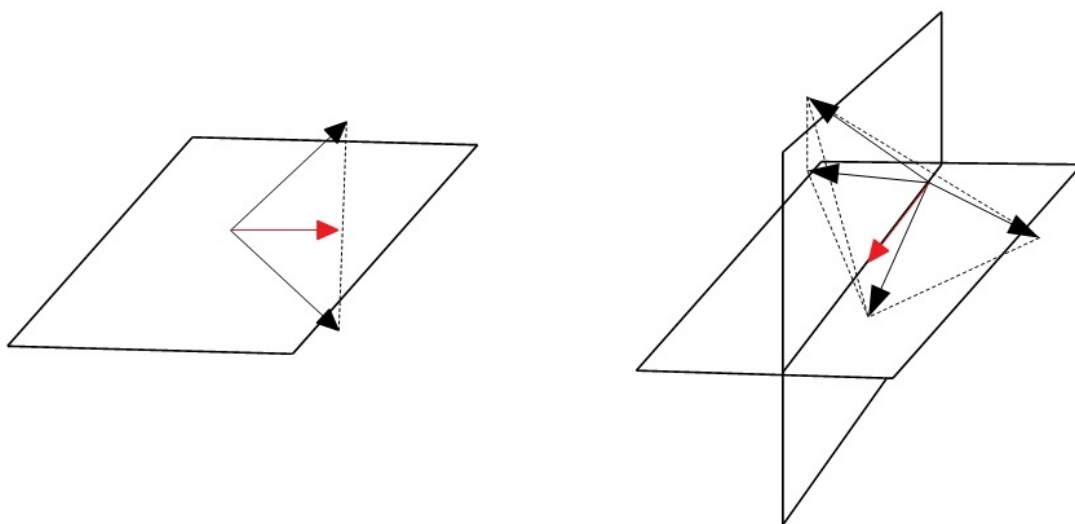


Figura 1: Convenção de Filippov (Superfície codimensão 1 à esquerda e codimensão 2 à direita).

# 1 Descontinuidade em Variedades Suaves

Seja  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  uma variedade de dimensão  $m$  suave, com  $m \leq n$ . Estamos interessados em estudar sistemas dinâmicos suaves por partes, a partir do fluxo de sistemas do tipo

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

com descontinuidades sendo  $\Sigma$  de codimensão  $r$ , onde  $r = n - m$ . O caso mais estudado é quando a variedade de descontinuidade  $\Sigma$  possui **codimensão um**. Mais precisamente,  $\Sigma = f^{-1}(0)$ , onde  $0$  é um valor regular de uma função suave  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definida em um aberto  $U$  que contém  $\Sigma$ . Neste caso, o campo vetorial  $X$  é dado por

$$X = \left( \frac{1 + \operatorname{sgn}(f)}{2} \right) X_1 + \left( \frac{1 - \operatorname{sgn}(f)}{2} \right) X_2, \quad (1.1)$$

onde  $X_1$  e  $X_2$  são campos vetoriais suaves definidos em  $\mathbb{R}^n$ .

Suponha que o campo  $X$  seja multivalorado em  $\Sigma$ . Para definir o fluxo de  $X$  é necessário adotar algumas convenções [\[1\]](#) em  $\Sigma$ :

- (i)  $\Sigma_c = \{x \in \Sigma : (X_1 f \cdot X_2 f)(x) > 0\}$  é a região de costura;
- (ii)  $\Sigma_d = \{x \in \Sigma : (X_1 f \cdot X_2 f)(x) < 0\}$  é a região de deslize.

De acordo com a convenção de Filippov, ver [\[16\]](#), para  $x \in \Sigma_d$ , a trajetória permanece em  $\Sigma_d$  e um fluxo deslizante de um campo vetorial da classe de Filippov  $X^S : \Sigma_d \rightarrow \mathbb{R}^n$ , que é a combinação convexa de  $X_1$  e  $X_2$  e pertence ao fibrado tangente de  $T\Sigma$ . Mais precisamente

$$X^S = (1 - \alpha)X_1 + \alpha X_2, \quad \alpha = \frac{X_1 f}{X_1 f - X_2 f}.$$

A teoria de Filippov também fornece condições de saída de primeira ordem: quando  $\alpha = 0$ , espera-se que o fluxo deixe  $\Sigma$  para entrar em  $\mathcal{M}_1 = f^{-1}(0, +\infty)$  pelo campo

<sup>1</sup>Como é usual, denotamos  $Xf = \nabla f \cdot X$ .

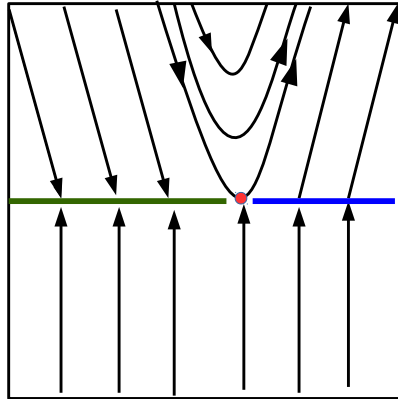


Figura 1.1: Região de deslize (verde), ponto de saída (vermelho) e região de costura (azul).

vetorial  $X_1$  ou quando  $\alpha = 1$  espera-se que o fluxo entre em  $\mathcal{M}_2 = f^{-1}(-\infty, 0)$  pelo campo vetorial  $X_2$ . Um exemplo de um ponto de saída de primeira ordem é a dobra, ver Figura 1.1.

A principal abordagem que usaremos ao longo do texto é a *teoria geométrica de perturbação singular (teoria GSP)*, que será detalhada na seção 2.1. A conexão entre esses assuntos aparecerá no Capítulo 4.

A regularização Sotomayor-Teixeira [31] (*ST-regularização*), é uma família de campos vetoriais suaves definida através de uma *função de transição* <sup>(2)</sup>  $X_\varepsilon$  que depende de um parâmetro  $\varepsilon \geq 0$  e tal que  $X_\varepsilon$  converge uniformemente para  $X_0 = X$  em cada conjunto compacto de  $M \setminus \Sigma$  para  $\varepsilon$  tendendo a zero.

Fixemos um sistema de coordenadas  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$  tal que  $\Sigma = \{x_1 = 0\}$ . A ST-regularização de  $X$  é uma família de 1 parâmetro  $X_\varepsilon$  dada por

$$X_\varepsilon(x) = \left( \frac{1}{2} + \frac{\varphi_\varepsilon(x_1)}{2} \right) X_1(x) + \left( \frac{1}{2} - \frac{\varphi_\varepsilon(x_1)}{2} \right) X_2(x), \quad (1.2)$$

onde  $\varphi_\varepsilon(x_1) = \varphi(x_1/\varepsilon)$ , para  $\varepsilon > 0$ . Definiremos de maneira mais apropriada o que seria uma função de transição através da definição 2.0.2.

Considere um blow-up direcional dado por  $\bar{x}_1 = x_1/\varepsilon$ . As trajetórias de (1.2) são soluções de

$$\varepsilon \dot{\bar{x}}_1 = \alpha(\bar{x}_1, x_2, \varepsilon), \quad \dot{x}_2 = \beta(\bar{x}_1, x_2, \varepsilon), \quad (1.3)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são funções suaves.

O sistema (1.3) é um problema de perturbação singular, o que nos permite aplicar a teoria GSP para obter informações acerca do retrato de fase para  $\varepsilon \sim 0$  (veja por exemplo [6, 22, 23, 24, 25]). No artigo [23] prova-se que a dinâmica do sistema reduzido

<sup>2</sup>por definição, ela é uma função  $C^\infty$   $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(t) = -1$  para  $t \leq -1$ ,  $\varphi(t) = 1$  para  $t \geq 1$  e  $\varphi'(t) > 0$  para  $-1 < t < 1$ .

na variedade crítica é equivalente à dinâmica do deslize do campo vetorial deslizando quando  $\Sigma$  é suave. Em resumo, no caso de codimensão um, a abordagem de Filippov e a perturbação singular resultam na mesma descrição do campo vetorial em  $\Sigma$ .

Quando o conjunto de descontinuidade  $\Sigma$  possui codimensão superior, isto é, maior do que um, as regiões de deslize não estão bem definidas. De fato, para  $i = 1, 2$  considere funções suaves  $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  com 0 sendo um valor regular para ambas as funções. Denote  $\Sigma_1 = f_1^{-1}(0)$ ,  $\Sigma_2 = f_2^{-1}(0)$  e  $\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ . Assuma que  $\Sigma_1 \pitchfork \Sigma_2$ , temos então que, localmente, o retrato de fase fica dividido em quatro regiões

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{++} &: f_1 > 0, f_2 > 0, & \mathcal{M}_{+-} &: f_1 > 0, f_2 < 0, \\ \mathcal{M}_{--} &: f_1 < 0, f_2 < 0, & \mathcal{M}_{-+} &: f_1 < 0, f_2 > 0 \end{aligned}$$

e  $\mathcal{M} = \bigcup_{i,j \in \{+,-\}} \mathcal{M}_{ij}$ . Também usaremos a seguinte notação

$$\Sigma_1^\pm = \{x : f_1(x) = 0, f_2(x) \gtrless 0\}, \Sigma_2^\pm = \{x : f_2(x) = 0, f_1(x) \gtrless 0\}.$$

O objetivo é definir uma região de deslize em  $\Sigma$  para sistemas não suaves

$$\dot{x} = X_{\pm\pm}(x), \quad x \in \mathcal{M}_{\pm\pm}, \quad (1.4)$$

onde  $X_{\pm\pm} : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$  são campos vetoriais suaves. A notação  $\mathcal{M}_{\pm\pm}$  se refere a alguma das regiões  $\mathcal{M}_{s_1 s_2}$ , com  $s_1, s_2 \in \{+, -\}$ .

Inspirado pela definição de Filippov para o caso genérico, a tentativa natural é selecionar um campo deslizando da combinação convexa de  $X_{\pm\pm}$  e que seja tangente a  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  respectivamente:

$$X \in \left\{ \lambda_1 X_{++} + \lambda_2 X_{+-} + \lambda_3 X_{-+} + \lambda_4 X_{--}, \quad \sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1 \right\}, \quad (1.5)$$

$Xf_i = 0, i = 1, 2$ , para todo  $x \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ . Em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} X_{++}f_1 & X_{+-}f_1 & X_{-+}f_1 & X_{--}f_1 \\ X_{++}f_2 & X_{+-}f_2 & X_{-+}f_2 & X_{--}f_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

Claramente, o sistema (1.6) é um sistema indeterminado, o que indica que a necessidade de ser tangente a  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  não é suficiente para garantir a unicidade na escolha da combinação convexa de  $X_{\pm\pm}$ .

O problema em definir a dinâmica em um variedade de codimensão 2 foi amplamente estudado por muitos autores, com diferentes abordagens. A regularização foi introduzida pela primeira vez em [31] e a abordagem de perturbação singular foi usada posteriormente em [22], [23] e [24]. Em [13], a regularização foi usada para estudar a

dinâmica do sistema por partes em uma vizinhança de  $\Sigma_{00}$ , quando  $\Sigma_{00}$  deixa de ser atrator. Em [1], encontramos a primeira exposição sistemática da técnica de mistura (*blending technique*). Uma generalização das convenções de Fillipov foi introduzida em [19], com o objetivo de incorporar a dinâmica dos comutadores em comportamento, como impactos, movimento stick-slip ou relés elétricos na teoria padrão. Mais tarde, essa nova noção de deslize, chamada de dinâmica oculta, foi estudada em [18]. O objetivo em comum desses trabalhos é semelhante, definir um campo vetorial deslizante apropriado que descreve com precisão a dinâmica observada nos modelos de sistemas por partes.

A questão central do nosso trabalho é decidir quando ocorre o deslize (ou escape). Em [28] os autores propõem uma nova definição para deslize e costura, vinculada à regularização considerada.

**Definição 1.0.1.** Seja  $X$  um campo vetorial não suave definido em  $\mathbb{R}^n$  com variedade de descontinuidade  $\Sigma$  e  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p) \in (\mathbb{R}^+)^p$ . Uma regularização com  $p$ -parâmetros é uma família de campos vetoriais  $X_\varepsilon$  definidos em  $\mathbb{R}^n$  que satisfaz que  $X_\varepsilon \rightarrow X$  uniformemente (na topologia  $C^\infty$ ) para cada conjunto compacto  $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Por simplicidade e conveniência, diremos que  $X_\varepsilon$  é uma  $p$ -regularização de  $X$ . Um exemplo de uma 1-regularização é a ST-regularização (1.2).

**Definição 1.0.2.** Seja  $X_\varepsilon$  uma  $p$ -regularização de  $X$ . Dizemos que  $x \in \Sigma$  é um ponto de deslize se existir uma vizinhança aberta  $U \subset \mathbb{R}^n$  de  $x$  e uma família de variedades suaves  $S_\varepsilon \subset U$  definidas para todo  $\varepsilon \in (\mathbb{R}^+)^p$  tal que:

1. Para cada  $\varepsilon$ ,  $S_\varepsilon$  é invariante pela  $p$ -regularização  $X_\varepsilon$ .
2. Para cada subconjunto compacto  $K \subset U$ , com  $x \in K$ , a sequência  $S_\varepsilon \cap K$  converge para  $\Sigma \cap K$  para  $\varepsilon$  tendendo a zero na métrica de Hausdorff dada sobre conjuntos compactos de  $\mathcal{M}$ .

O conjunto de todos os pontos de deslize é chamado de *conjunto deslizante* e será denotado por  $\Sigma_d^r$ . Essa definição está bem fundamentada pelo Teorema 2.1.1, que veremos adiante.

Os resultados que iremos provar ao longo deste texto são os seguintes:

- Se a descontinuidade  $\Sigma$  possui codimensão 2, então a 2-regularização com curva regularizante<sup>3</sup> linear fornece um problema de perturbação singular e teoria Fenchel garante a existência de uma sequência de variedades invariantes convergindo para  $\Sigma_d^r$ . Ver Teorema 4.1.1.

---

<sup>3</sup>Definição que discutiremos no Capítulo 2 na definição 2.0.8

- Se a descontinuidade  $\Sigma$  possui codimensão 2, então a 2-regularização com uma curva regularizante qualquer fornece um problema de perturbação singular e a existência de uma sequência de variedades invariantes convergindo para  $\Sigma_d^r$  é garantida pelo *Teorema* [4.1.2](#).
- Se a descontinuidade  $\Sigma$  possui codimensão 1 e a regularização é a de Sotomayor-Teixeira, então  $\Sigma_d = \Sigma_d^r$ . Ver *Teorema* [3.1.1](#) e *Teorema* [6.0.1](#)

## 2 Preliminares e abordagens para o problema

Neste Capítulo, definiremos conceitos e notações que serão base para a tese. Nas seções subsequentes, definiremos apropriadamente o que entendemos por uma  $m$ -cruz, um  $m$ -campo suave por partes, blow-up e regularização. Dedicaremos uma seção para introduzir alguns conceitos da teoria de perturbação singular.

**Definição 2.0.1.** Sejam  $0 < m \leq n$  números inteiros.

(a) O subconjunto  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  definido por

$$\Sigma = \left\{ x : \prod_{k=1}^m x_k = 0 \right\}$$

é chamado uma  $m$ -cruz, ver Figura [2.1](#).

(b) Um campo  $m$ -cruz suave por partes definido em  $\mathbb{R}^n$  é um campo vetorial em  $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$  do tipo

$$X = \frac{1}{2^m} \sum_s L_s(\text{sgn}(x)) X_s$$

onde  $\{X_s\}$  é uma  $2^m$  coleção de campos vetoriais suaves,  $s = (s_1, \dots, s_m) \in \{-, +\}^m$ ,  $\text{sgn}(x) = (\text{sgn}(x_1), \dots, \text{sgn}(x_m)) \in \{-1, 1\}^m$  e

$$L_s(y) = \prod_{k=1}^m (1 + s_k y_k).$$

Por exemplo, um campo 1-cruz suave por partes definido em  $\mathbb{R}^2$  é

$$X = \frac{1}{2} [(1 + \text{sgn}(x_1))X_+ + (1 - \text{sgn}(x_1))X_-]$$

e um campo 2-cruz suave por partes definido em  $\mathbb{R}^3$  é

$$X = \frac{1}{4} [aX_{++} + bX_{+-} + cX_{-+} + dX_{--}],$$

onde

$$a = (1 + \operatorname{sgn}(x_1))(1 + \operatorname{sgn}(x_2)),$$

$$b = (1 + \operatorname{sgn}(x_1))(1 - \operatorname{sgn}(x_2)),$$

$$c = (1 - \operatorname{sgn}(x_1))(1 + \operatorname{sgn}(x_2)),$$

e

$$d = (1 - \operatorname{sgn}(x_1))(1 - \operatorname{sgn}(x_2)).$$

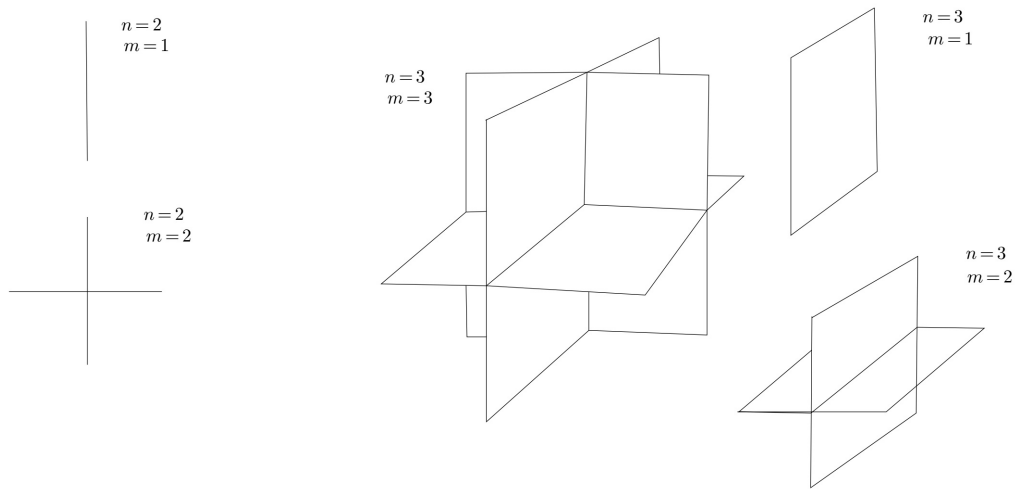


Figura 2.1: Tipos possíveis de  $m$ -cruz em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .

De modo a uniformizar notação, daqui em diante consideraremos a seguinte estratificação de  $\mathbb{R}^n$  para um  $m$ -campo suave

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_s \Sigma_d,$$

onde a união é tomada sobre todos os vetores sinais sobre todos os vetores, isto é,  $s = (s_1, \dots, s_m) \in \{0, -1, 1\}^m$  e

$$\Sigma_d = \{x : \operatorname{sgn}_0(x_1) = s_1, \dots, \operatorname{sgn}_0(x_n) = s_n\},$$

com  $\operatorname{sgn}_0(x)$  sendo a função sinal estendida para 0 por  $\operatorname{sgn}_0(0) = 0$ . Cada  $\Sigma_d$  é uma subvariedade de codimensão igual ao número  $z(s)$  de zeros no vetor sinal  $s$ . Note que, isso induz uma estratificação na  $m$ -cruz

$$\Sigma = \bigcup_{z(s)>0} \Sigma_d,$$

onde a união é tomada sobre todos os vetores sinais  $s$  tais que  $z(s) > 0$ . Denotaremos

por  $M_s$  as regiões delimitadas pelos  $\Sigma_d$ .

Considere o sistema

$$\dot{x} = X(x), \quad X_s(x) \in M_s, \quad (2.1)$$

onde cada  $X_s$  é um campo vetorial suave. A definição de solução que usaremos se deve a Filippov, ver [16]. Existem funções absolutamente contínuas  $x(t)$ , para  $t \in [0, T]$ , tal que  $\dot{x}(t) \in \mathcal{F}(x(t))$  para quase todo  $t \in [0, T]$ , com  $\mathcal{F}(x)$  sendo o envoltório convexo dos valores de  $X(x)$  obtidos aproximando  $x$  para as regiões  $M_s$ ,  $s \in \{-1, 1\}^m$ . Formalmente,

$$\mathcal{F}(x) = \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\mu(S)=0} \bar{C}o(X(B(x, \delta) \setminus S)), \quad (2.2)$$

onde  $\mu$  é a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^n$ . Sob condições adequadas (limitação e semicontinuidade superior de  $\mathcal{F}$ ), a existência de soluções é garantida, mas a unicidade nem sempre, dependendo da forma que os campos vetoriais interagem na vizinhança dos bordos das regiões  $M_i$ . Uma escolha usual para o conjunto solução é a combinação convexa dos campos  $X_s$  em  $\Sigma_d$  e o campo solução aquele que pertence ao fibrado tangente de  $\Sigma_d$ . Uma das vantagens dessa escolha é a unicidade do campo quando  $\Sigma_d$  tem codimensão 1, que nos permite, por exemplo, classificar singularidades e bifurcações, por exemplo ver [17]. No entanto, um problema citado em [19] é que, entre o conjunto geral dado por (2.2) e o conjunto gerado pela combinação convexa, existe uma quantidade significativa de soluções não pertencentes ao conjunto das combinações convexas, porém tão válidas quanto. Por esse motivo, surge então a necessidade de buscar outras formas de definir campos deslizantes satisfazendo (2.2) e que sejam mais gerais que a combinação convexa.

Nesta tese discutiremos a definição de deslize através de uma regularização. Para definirmos o campo deslizante através da regularização de um  $m$ -campo suave por partes, serão necessárias algumas definições.

**Definição 2.0.2.** Seja  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. Dizemos que  $\varphi$  é uma função de transição, se  $\varphi(x) = -1$ , para  $x \leq -1$  e  $\varphi(x) = 1$ , para  $x \geq 1$ . Além disso, se  $\varphi'(x) > 0$  para  $-1 < x < 1$ , diremos que é uma função de transição monótona, ver Figura 2.2.

Para evitar ambiguidade, utilizaremos a notação  $\psi$  para nos referirmos a uma função de transição e  $\varphi$  para uma função de transição monótona.

**Definição 2.0.3.** Dada uma função de transição  $\psi$ , a regularização de um campo  $m$ -cruz suave por partes  $X$ , é uma família de campos vetoriais suaves

$$X_\varepsilon^\varphi = \frac{1}{2^m} \sum_s L_s \left( \psi_1 \left( \frac{x_1}{\varepsilon_1} \right), \dots, \psi_m \left( \frac{x_m}{\varepsilon_m} \right) \right) X_s, \quad (2.3)$$

com  $s \in \{-1, 1\}^m$  e  $\varepsilon \in (\mathbb{R}_+)^m$ , tal que  $X_0 = X$ .

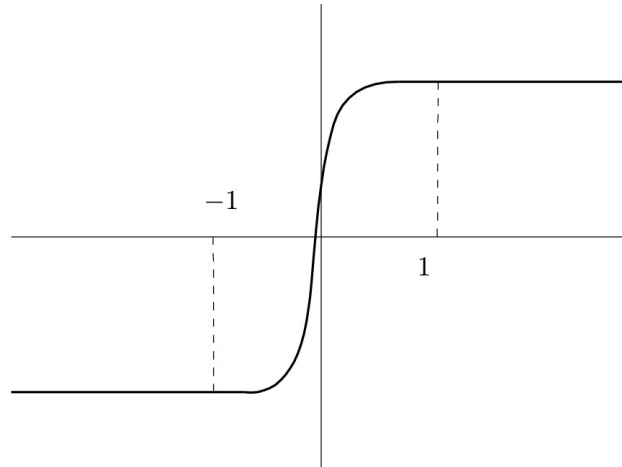


Figura 2.2: Esboço de uma função de transição monótona.

Quando temos um campo 1-cruz, a regularização induzida por uma função de transição monótona é a conhecida regularização Sotomayor-Teixeira.

Daqui em diante, iremos nos concentrar em um estudo local dos campos 2-cruz suaves por partes, isto é, numa vizinhança  $U \subset \mathbb{R}^n$  da origem.

Primeiramente descreveremos alguns resultados para campos 1-cruz.

**Definição 2.0.4.** Seja uma função suave  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Definimos a derivada de Lie de  $f$  em relação a um campo 1-cruz suave por partes  $X$  como sendo  $Xf(p) = \langle X(p), \nabla f(p) \rangle$ ,  $p \in U$ , onde  $\langle, \rangle$  denota o produto interno usual.

Considerando os conjuntos

$$\Sigma_+ = \{x \in U : x_1 > 0\} \text{ e } \Sigma_- = \{x \in U : x_1 < 0\}$$

podemos discutir sobre a definição de trajetória  $\psi_X(t, p)$  passando por um ponto  $p \in U$  e para isso utilizaremos algumas definições. O conjunto 1-cruz pode ser definido de maneira equivalente como sendo a imagem inversa da função  $f(\mathbf{x}) = x_1$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Com o auxílio da derivada de Lie, podemos definir as convenções de Filippov para as possíveis interações de um campo 1-cruz sobre  $\Sigma$ .

**Definição 2.0.5.** Seja  $X$  um campo 1-cruz definido em  $U$ .

- i. O conjunto  $\Sigma_c = \{x \in \Sigma : (X_+f(p))(X_-f(p)) > 0\}$  é chamado região de costura.
- ii. O conjunto  $\Sigma_d = \{x \in \Sigma : (X_+f(p))(X_-f(p)) < 0\}$  é chamado região de deslize.

**Observação 1.** Não faremos distinção neste texto sobre regiões de deslize e escape, uma vez que topologicamente eles são semelhantes, mudando apenas que no deslize as trajetórias evoluem em  $\Sigma$  para  $t > 0$  e no escape é para  $t < 0$ .

A dinâmica de deslize que aparece no conjunto  $\Sigma_d$  e o campo associado a essa dinâmica é chamado de campo vetorial deslizante. A proposta de Filippov para o campo deslizante é considerar a combinação convexa entre os campos  $X_+$  e  $X_-$ ,

$$X_s(p) = (1 - \alpha)X_+(p) + \alpha X_-(p),$$

com  $\alpha \in [-1, 1]$  escolhido de tal forma que  $X_s \in T_\Sigma$ .

No artigo [23], provou-se que para 1-campo suave por partes definido em  $\mathbb{R}^n$ , a regularização Sotomayor-Teixeira pode ser transformada em um problema de perturbação singular e, após um blow-up polar, o sistema obtido possui uma variedade lenta homeomorfa à região de deslize, com o campo deslizante e o sistema reduzido topologicamente equivalentes.

Vamos definir então alguns tipos de blow-up que serão úteis na nossa discussão.

### 2.0.1 Blow-up

**Definição 2.0.6.** Seja  $F$  um campo vetorial  $C^\infty$  definido em  $\mathbb{R}^n$  com  $F(0) = 0$ . Considere a transformação polar generalizada

$$\begin{aligned} \phi : S^{n-1} \times I &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (z_1, \dots, z_n, r) &\rightarrow \phi(z_1, \dots, z_n, r) = (rz_1, \dots, rz_n), \end{aligned}$$

onde  $\sum_{k=1}^n z_k^2 = 1$  e  $I$  é um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$  com  $0 \in I$ . O blow-up polar  $\hat{F}$  do campo vetorial  $F$  é o campo vetorial definido em  $S^{n-1} \times I$  definido por

$$\hat{F}(z_1, \dots, z_n, r) := \left( D\phi_{(z_1, \dots, z_n, r)}^{-1} \circ F \circ \phi \right) (z_1, \dots, z_n, r) \quad (2.4)$$

para  $r \neq 0$  e por extensão contínua de (2.4) para  $r = 0$ .

O próximo teorema mostra que o blow-up fornece um campo vetorial bem definido em  $S^{n-1} \times \{r = 0\}$ , tal como diz a definição. A demonstração pode ser encontrada em [20].

**Proposição 2.0.1.** Seja  $F$  um campo vetorial  $C^\infty$  definido em  $\mathbb{R}^n$  com  $F(0) = 0$ . Então, o blow-up polar  $\hat{F}$  da Definição 2.0.6 é um campo vetorial  $C^\infty$  em  $S^{n-1} \times I$ .

O principal objetivo do blow-up é estudar singularidades degeneradas com métodos hiperbólicos. Embora o blow-up polar transforme o problema de estudar a singularidade degenerada em um mais simples, as contas envolvidas são, de modo geral, difíceis de manipular. Por este motivo, vamos nos concentrar num estudo mais local.

**Definição 2.0.7.** Seja  $F$  um campo vetorial  $C^\infty$  definido em  $\mathbb{R}^n$  com  $F(0) = 0$ . Defina  $\mu_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  como sendo

$$\mu_i(x_1, \dots, x_n) = (x_i x_1, \dots, x_i x_{i-1}, x_i, x_i x_{i+1}, \dots, x_i x_n).$$

Então definimos o blow-up direcional de  $F$  na direção  $x_i$  por

$$\hat{F}_i(x_1, \dots, x_n) := ((D\mu_i)_x^{-1} \circ F \circ \mu_i)(x).$$

Observe que, o blow-up direcional possui um problema semelhante ao blow-up polar, que é não estar bem definido em todo domínio, no caso o conjunto  $D = \{x_i = 0\}$ , pois não podemos inverter a função  $\mu_i$  em  $D$ . No entanto, o mesmo argumento da Proposição [2.0.1](#) pode ser usado para estender o campo vetorial para  $D$ .

O próximo resultado afirma que podemos obter a mesma informação do blow-up polar, usando o blow-up direcional.

**Proposição 2.0.2.** Seja  $F$  um campo vetorial  $C^\infty$  definido em  $\mathbb{R}^n$  com  $F(0) = 0$ . Considere  $\hat{F}$  o blow-up polar de  $F$  e  $\hat{F}_i$  o blow-up direcional na direção  $x_i$ . Então, dada uma vizinhança  $V \subset \mathbb{R}^n$  suficientemente pequena da origem, podemos obter  $U \subset S^1 \times (-1/2, \infty)$  tal que  $\hat{F}$  e  $\hat{F}_i$  são equivalentes através de um difeomorfismo  $C : U \rightarrow V$ .

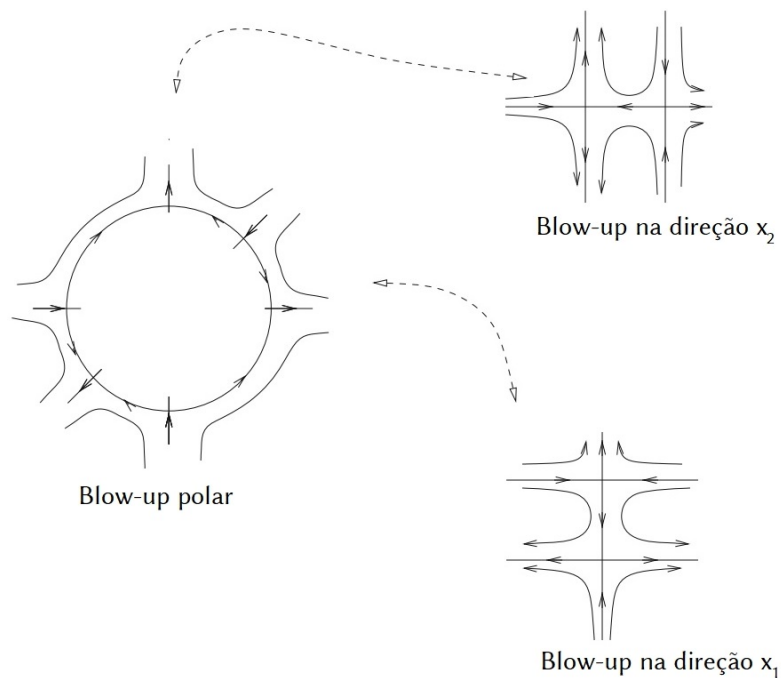


Figura 2.3: Relação entre as cartas do blow-up direcional e o blow-up polar, figura retirada de [\[20\]](#).

Com base no artigo [\[23\]](#) e [\[28\]](#), propomos uma definição para região de deslize baseada na regularização.

**Definição 2.0.8.** Seja  $\Sigma_d$  um dos estratos de  $\Sigma$ . Dizemos que uma curva  $\varepsilon(\mu)$  no espaço de parâmetros  $(\mathbb{R}_+)^m$  tal que  $\lim_{\mu \rightarrow 0} \varepsilon(\mu) = 0$ , produz um deslize ao longo de  $\Sigma_d$  se existir uma variedade suave  $S$  de codimensão  $z(s)$  no espaço produto  $(\mu, x) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n$  tal que:

- i.  $S \cap \{\mu = 0\} = \Sigma_d$ ;
- ii. Para cada  $\mu > 0$ ,  $S_\mu$  é uma variedade invariante para o campo vetorial induzido  $X_{\varepsilon(\mu)}^\varphi$ .

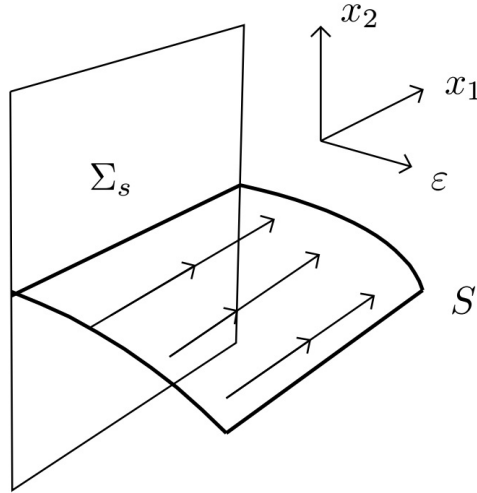


Figura 2.4: Deslize com  $n = 2$ ,  $m = 1$ .

Chamaremos  $\varepsilon(\mu)$  de curva regularizante e por simplicidade na notação, ocultaremos o parâmetro  $\mu$ . No caso  $m = 1$  para a regularização Sotomayor-Teixeira, provaremos no Capítulo 6 que as definições de deslizamento de Filippov e o deslizamento da Definição 2.0.8 são equivalentes.

Nesta tese trabalharemos apenas com uma das cartas direcionais do blow-up direcional, uma vez que o estudo das regiões de deslizamento é apenas local.

Usando essa nova definição, o deslizamento dependerá da regularização escolhida, uma vez que o fluxo do sistema reduzido dependerá da regularização, o que generaliza a ideia para uma  $m$ -cruz, a dinâmica deslizante na  $m$ -cruz será a mesma da variedade  $S$  e a denotaremos por  $X_{reg}^{sl}$ .

Na próxima seção discutiremos alguns aspectos da teoria de perturbação singular, que serão úteis para o nosso texto e para enunciar precisamente o teorema do artigo [23].

## 2.1 Perturbação singular

Seja  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  um conjunto aberto. Um problema de perturbação singular em  $\mathcal{U}$  é um sistema diferencial que pode ser escrito da forma

$$x_1' = \alpha(x_1, x_2, \varepsilon), \quad \varepsilon x_2' = \beta(x_1, x_2, \varepsilon), \tag{2.5}$$

com  $\alpha, \beta$  funções suaves,  $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ ,  $\varepsilon_0 > 0$  suficientemente pequeno e  $(x_1, x_2) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . De maneira equivalente, após um reescalonamento do tempo do tipo  $\tau = t/\varepsilon$ , no sistema (2.5), obtemos

$$\dot{x}_1 = \varepsilon\alpha(x_1, x_2, \varepsilon), \quad \dot{x}_2 = \beta(x_1, x_2, \varepsilon). \quad (2.6)$$

Os sistemas (2.5) e (2.6) são chamados de *sistema lento* e *sistema rápido*, respectivamente. Quando  $\varepsilon = 0$  em (2.5) e (2.6), nós obtemos dois problemas limites distintos, o *problema reduzido*

$$x'_1 = \alpha(x_1, x_2, 0), \quad 0 = \beta(x_1, x_2, 0), \quad (2.7)$$

e o *layer problem*

$$\dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = \beta(x_1, x_2, 0). \quad (2.8)$$

Sob certas condições,  $\beta(x_1, x_2, 0) = 0$  define uma variedade  $\mathcal{S}$ , que é chamada *variedade lenta*, onde (2.7) define um sistema dinâmico. Mas, ao mesmo tempo  $\mathcal{S}$  é o conjunto de pontos de equilíbrio de (2.8). Então, combinando de maneira apropriada essas informações sobre as dinâmicas limite, obtemos resultados acerca da dinâmica do problema perturbado, para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.

Considere o sistema (2.6) junto com  $\dot{\varepsilon} = 0$ ,

$$\dot{x}_1 = \varepsilon\alpha(x_1, x_2, \varepsilon), \quad \dot{x}_2 = \beta(x_1, x_2, \varepsilon), \quad \dot{\varepsilon} = 0, \quad (2.9)$$

definido em  $\mathcal{U} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ . O campo vetorial associado a (2.9) será denotado por

$$F(x_1, x_2, \varepsilon) = (\varepsilon\alpha(x_1, x_2, \varepsilon), \beta(x_1, x_2, \varepsilon), 0),$$

com  $(x_1, x_2, \varepsilon) \in \mathcal{U} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ . Calculando os autovalores da linearização  $LF(x_1, x_2, 0)$ , com  $(x_1, x_2) \in \mathcal{S}$ , temos que  $\lambda = 0$  é um autovalor trivial de multiplicidade algébrica  $n + 1$ . Os autovalores restantes são chamados de autovalores não triviais. Denotamos o número de autovalores não triviais localizados no lado esquerdo do eixo imaginário, no eixo imaginário e a direita do eixo imaginário por  $k^s$ ,  $k^c$  e  $k^u$ , respectivamente.

Seja  $\mathcal{S}_r \subset \mathcal{S}$  um aberto onde os autovalores não triviais são não nulos. A variedade  $\mathcal{S}_r$  pode ser caracterizado por

$$\mathcal{S}_r = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{S} : \text{rank } D_{x_2}\beta(x_1, x_2, 0) = m\}.$$

$\mathcal{S}_r$  pode ser parametrizado, localmente, resolvendo a equação  $\beta(x_1, x_2, 0) = 0$ , usando o Teorema da Função Implícita. Seja  $\mathcal{S}_h \subset \mathcal{S}_r$  o conjunto aberto onde todos os autovalores não triviais possuem parte real não nula, i.e, os conjuntos compactos  $K \subset \mathcal{S}_h$  são

variedades normalmente hiperbólicas invariantes de (2.8).

O teorema a seguir é um resultado clássico, atribuído a Fenichel e a prova pode ser encontrada em [15, 32].

**Teorema 2.1.1.** Seja  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$  um conjunto aberto. Seja  $X(x_1, x_2, \varepsilon)$ ,  $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$  uma família de campos vetoriais suaves em  $\mathcal{U}$  e seja  $\mathcal{S}$  a subvariedade de  $\mathcal{U}$  consistindo de pontos de equilíbrio de  $X_0$ . Seja  $\mathcal{N} \subset \mathcal{S}_h$  uma variedade  $j$ -dimensional compacta invariante normalmente hiperbólica do sistema reduzido  $X_R$ , com uma variedade  $j + j^s$ -dimensional localmente estável  $W^s$  e uma variedade  $j + j^u$ -dimensional localmente instável  $W^u$ . Então, existe  $\varepsilon_1 > 0$  tal que:

- i-) Existe uma família de variedades suaves  $\mathcal{N}_\varepsilon$  com  $\varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$  tal que  $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}$  e  $\mathcal{N}_\varepsilon$  é uma variedade localmente invariante normalmente hiperbólica de  $X^\varepsilon$ ;
- ii-) Existe uma família de variedade suaves  $(j + j^s + k^s)$ -dimensional  $\mathcal{N}_\varepsilon^s$  com  $\varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$  e uma família de variedades suaves  $(j + j^u + k^u)$ -dimensional  $\mathcal{N}_\varepsilon^u$  com  $\varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$  tal que, para  $\varepsilon > 0$ , as variedades  $\mathcal{N}_\varepsilon^s$  e  $\mathcal{N}_\varepsilon^u$  são, localmente, variedades estável e instável de  $\mathcal{N}_\varepsilon$ .

O próximo teorema pode ser encontrado em [23].

**Teorema 2.1.2.** Seja um campo 1-cruz suave definido em  $0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ . Se para qualquer  $q \in \Sigma$  tivermos que  $q$  não é ponto de tangência, então existe um problema de perturbação singular

$$\theta' = \alpha(r, \theta, \rho), \rho' = r\beta(r, \theta, \rho), \quad (2.10)$$

com  $r \geq 0$ ,  $\theta \in (0, \pi)$ ,  $\rho \in \Sigma$  e  $\alpha$  e  $\beta$  de classe  $C^r$  tal que as seguintes afirmações são verdadeiras:

- a A região de deslize  $\Sigma_d$  é homeomorfa a variedade lenta  $\alpha(0, \theta, \rho) = 0$  de (2.10).
- b O campo deslizando  $X^{sl}$  e o problema reduzido de (2.10) são topologicamente equivalentes.

No próximo capítulo discutiremos brevemente sobre algumas abordagens para o problema do deslize na 2-cruz.

# 3 Abordagens para o problema de deslize da 2-cruz

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados anteriores sobre o estudo do deslize na 2-cruz. As notações presentes nas seções deste capítulo serão as mesmas usadas nos trabalhos citados.

## 3.1 Regularização com escalas de tempo

O conteúdo desta seção pode ser encontrado em [24]. Para facilitar a leitura e uma consulta ao material original, será mantido a mesma notação do texto original.

Considere  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \subset \mathbb{R}^3$ , onde  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  são variedades de codimensão um de  $\mathbb{R}^3$  com  $0 \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ . Localmente ao redor de  $0 \in \mathbb{R}^3$ , o conjunto  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  separa o  $\mathbb{R}^3$  em quatro quadrantes abertos:  $M_1, \dots, M_4$ . Nesta abordagem, consideramos  $\Sigma$  como sendo a descontinuidade dos sistemas, também chamada de variedade de comutação.

Seja  $X = (X_i), i = 1, \dots, 4$ , um 2-campo vetorial  $C^\kappa$ , com  $\kappa \geq 1, \kappa = \infty$  ou  $\kappa = \omega$ , definido em  $\mathbb{R}^3$ . Considere o sistema diferencial descontínuo associado ao 2-campo

$$\rho' = X(\rho) = X_i(\rho), \quad \rho \in M_i, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (3.1)$$

com cada  $X_i \in M_i, i = 1, \dots, 4$ .

Trabalharemos com a notação usada no artigo [24],  $\Sigma^* = \Sigma \setminus (\Sigma_1 \cap \Sigma_2)$  a parte regular de  $\Sigma$ . Em  $\Sigma^*$  a definição de solução satisfaz, nas regiões de 1-cruz,  $\Sigma_{1,2}^\pm$ , a convenção de Filippov. Considere  $M_i$  and  $M_j, i \neq j$  as regiões com bordo em comum. De acordo com a convenção, pode existir genericamente uma região de deslize  $\Sigma^{sl} \subset \Sigma^*$  tal que qualquer órbita que encontra  $\Sigma^{sl}$  permanece tangente a  $\Sigma^*$  para tempo positivo. Essa região é parte de  $\Sigma^*$ , onde cada  $X_i$  e  $X_j$  apontam na direção de  $\Sigma^*$ , para tempo positivo, analogamente para tempo negativo.

Em  $\Sigma^{sl} \cup \Sigma^{es}$ , onde  $\Sigma_e$  é o deslize para tempo negativo, o fluxo desliza em  $\Sigma^*$  e está bem definido pelo campo deslizante de Filippov. A região de costura  $\Sigma^c \subset \Sigma^*$  é parte de  $\Sigma^*$  onde o fluxo cruza  $\Sigma^*$  e o bordo entre três regiões é o lugar dos pontos onde o

campo vetorial é tangente a  $\Sigma^*$ . Um dos objetivos é entender quando o fluxo deslizante em  $\Sigma^*$  pode ser estendido até a 2-cruz.

O campo vetorial de deslize  $X_s$  é definido em  $q \in \Sigma_{kj} \cap (\Sigma^{sl} \cup \Sigma^{es})$  pela  $X_s(q) = m - q$  com  $m$  sendo o ponto onde o segmento que une  $q + X_k(q)$  e  $q + X_j(q)$  atravessa  $\Sigma_{kj}$ .

Denotamos

$$\widehat{\Sigma}_1 = \{(\theta, x, y); \theta \in (0, \pi), (x, y) \in \mathbb{R}^2\},$$

e

$$\widehat{\Sigma}_2 = \{(\Psi, x, z); \Psi \in (0, \pi), (x, z) \in \mathbb{R}^2\}.$$

A partir destas notações, podemos enunciar o seguinte teorema.

**Teorema 3.1.1.** Considere  $X = (X_1, \dots, X_4)$  um campo 2-cruz suave por partes. Então, existe um problema de perturbação singular

$$\theta' = \alpha_i(r, \theta, x, y), \quad x' = r\beta_i(r, \theta, x, y), \quad y' = r\sigma_i(r, \theta, x, y), \quad i = 1, 2; \quad (3.2)$$

$$\Psi' = \gamma_i(u, \Psi, x, z), \quad x' = u\delta_i(u, \Psi, x, z), \quad z' = u\nu_i(u, \Psi, x, z), \quad i = 1, 2; \quad (3.3)$$

e um **problema de perturbação singular com três escalas de tempo**

$$u\psi' = r\zeta(r, u, \theta, \Psi, x), \quad \theta' = \xi(r, u, \theta, \Psi, x), \quad x' = r\phi(r, u, \theta, \Psi, x) \quad (3.4)$$

com  $r, u \geq 0$ ,  $\theta, \Psi \in [0, \pi]$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $\alpha_i, \beta_i, \sigma_i, \gamma_i, \delta_i, \nu_i, \zeta, \xi, \phi \in C^\kappa$  para  $i = 1, 2$ , satisfazendo:

- A região de deslize  $(\Sigma^{sl} \cup \Sigma^{es}) \cap \Sigma_1$  é homeomorfa a variedade lenta  $\{\alpha_i(0, \theta, x, y) = 0\}$  de (3.2), com  $i = 1$  em  $\widehat{\Sigma}_1 \cap \{y > 0\}$  e com  $i = 2$  em  $\widehat{\Sigma}_1 \cap \{y < 0\}$ . O campo vetorial deslizante  $X^\Sigma$  é topologicamente equivalente ao problema reduzido  $\alpha_i(0, \theta, x, y) = 0$ ,  $x' = \beta_i(0, \theta, x, y)$  e  $y' = \sigma_i(0, \theta, x, y)$ .
- A região de deslize  $(\Sigma^{sl} \cup \Sigma^{es}) \cap \Sigma_2$  é homeomorfa a variedade lenta  $\{\gamma_i(0, \psi, x, z) = 0\}$  de (3.3), com  $i = 1$  em  $\widehat{\Sigma}_2 \cap \{z > 0\}$  e com  $i = 2$  em  $\widehat{\Sigma}_2 \cap \{z < 0\}$ . O campo vetorial de deslize  $X^\Sigma$  é topologicamente equivalente ao problema reduzido  $\gamma_i(0, \Psi, x, z) = 0$ ,  $x' = \delta_i(0, \Psi, x, z)$  e  $z' = \nu_i(0, \Psi, x, z)$ .
- O problema de perturbação singular (3.4) é o blow-up da regularização dos sistemas (3.2) para  $i = 1, 2$ . A variedade lenta é dada por  $S_1^0 = \{\zeta(0, 0, \theta, \Psi, x) = 0\}$ . Mais ainda, o fluxo lento é o limite, para  $r, u \downarrow 0$ , das trajetórias de outra perturbação singular das trajetórias expressas por

$$r\theta' = \xi(r, u, \theta, \Psi, x), \quad x' = \phi(r, u, \theta, \Psi, x). \quad (3.5)$$

A variedade lenta de (3.5) é o conjunto em  $\mathbb{R}^\ell$  dado por

$$S_2^0 = \{\xi(0, 0, \theta, \Psi, x) = 0, \zeta(0, 0, \theta, \Psi, x) = 0\} \subseteq SM^1.$$

Os conjuntos dados por  $\alpha_i(0, \theta, x, y) = 0$ ,  $\gamma_i(0, \Psi, x, z) = 0$  e  $\zeta(0, 0, \theta, \Psi, x) = 0$  são chamados *variedades lentas* e eles serão denotados por  $SM$ .

A prova do Teorema [3.1.1](#), para sistemas definidos em  $\mathbb{R}^\ell$ , pode ser encontrada em [\[24\]](#). Para ilustrar a demonstração do teorema, vamos reproduzir os passos da prova no seguinte exemplo em  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemplo.** Considere  $X = (X_1, \dots, X_4)$  onde  $X_1 = (-x, -1, -1)$ ,  $X_2 = (-x, 2, -3)$ ,  $X_3 = (-x, 1, 2)$  e  $X_4 = (-x, -3, 1)$  e a função de transição  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\varphi(s) = \frac{2}{\pi} \arctg(s)$ .

A  $\varphi_y$ -regularização de  $X$  é a família a um parâmetro dada por

$$\begin{aligned} X_\varepsilon^{12} &= (1/2) [(1 + \varphi(y/\varepsilon)) X_1 + (1 - \varphi(y/\varepsilon)) X_2] = \\ &= \left(-x, \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right), -2 + \varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

para  $z > 0, \varepsilon > 0$ , e

$$\begin{aligned} X_\varepsilon^{43} &= (1/2) [(1 + \varphi(y/\varepsilon)) X_4 + (1 - \varphi(y/\varepsilon)) X_3] = \\ &= \left(-x, -1 - 2\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right), \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

para  $z < 0, \varepsilon > 0$ .

A  $\varphi_z$ -regularização de  $X$  é a família a um parâmetro dada por

$$\begin{aligned} X_a^{14} &= (1/2) [(1 + \varphi(z/a)) X_1 + (1 - \varphi(z/a)) X_4] = \\ &= \left(-x, -2 + \varphi\left(\frac{z}{a}\right), -\varphi\left(\frac{z}{a}\right)\right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

para  $y > 0, a > 0$ , e

$$\begin{aligned} X_a^{23} &= (1/2) [(1 + \varphi(z/a)) X_2 + (1 - \varphi(z/a)) X_3] = \\ &= \left(-x, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{z}{a}\right), -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\varphi\left(\frac{z}{a}\right)\right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

para  $y < 0, a > 0$ .

Tomando o blow-up nas variáveis  $y$  e  $\varepsilon$  em  $X_\varepsilon^{12}$  e  $X_\varepsilon^{43}$  com  $y = u \cos \psi, \varepsilon = u \sin \psi$ ; depois, um blow-up nas variáveis  $z$  e  $a$  em  $X_a^{14}$  e  $X_a^{23}$  com  $z = r \cos \theta, a = r \sin \theta$ . Denotando  $\lambda(s) = \varphi(\cotg s)$ ,  $S_\alpha = -\sin(\alpha)$  nós temos:

$$X_u^{12} : \quad u\psi' = S_\psi \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda(\psi) \right), \quad x' = -x, \quad z' = -2 + \lambda(\psi),$$

$$X_u^{43} : \quad u\psi' = S_\psi (-1 - 2\lambda(\psi)), \quad x' = -x, \quad z' = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda(\psi),$$

$$X_r^{14} : \quad r\theta' = -S_\theta \lambda(\theta), \quad x' = -x, \quad y' = -2 + \lambda(\theta),$$

$$X_r^{23} : \quad r\theta' = S_\theta \left( -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\lambda(\theta) \right), \quad x' = -x, \quad y' = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\lambda(\theta).$$

Reescalando  $X_r^{14}$  e  $X_r^{23}$ , fazendo a regularização  $\varphi_y$  e blow up  $y = u \cos \psi$ ,  $\varepsilon = u \sin \psi$ , obtemos

$$\begin{aligned} u\psi' &= rS_\psi \left( -\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\lambda(\theta) - \frac{7}{4}\lambda(\psi) + \frac{1}{4}\lambda(\theta)\lambda(\psi) \right), \\ \theta' &= S_\theta \left( -\frac{1}{4} - \frac{7}{4}\lambda(\theta) + \frac{1}{4}\lambda(\psi) + \frac{3}{4}\lambda(\theta)\lambda(\psi) \right), \\ x' &= -rx. \end{aligned}$$

A variedade lenta  $S_1^0$  é dada implicitamente por  $-1 + 3\lambda(\theta) - 7\lambda(\psi) + \lambda(\theta)\lambda(\psi) = 0$ . Essa superfície pode ser parametrizada por  $(\theta, \psi(\theta), x)$  com  $\theta \in [0, \pi]$ . A variedade lenta  $S_2^0$  é representada por

$$\begin{cases} -1 + 3\lambda(\theta) - 7\lambda(\psi) + \lambda(\theta)\lambda(\psi) = 0, \\ -1 - 7\lambda(\theta) + \lambda(\psi) + 3\lambda(\theta)\lambda(\psi) = 0. \end{cases}$$

Essa curva é parametrizada por  $(\theta_0, \psi_0, x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , com  $\lambda(\psi_0) = \frac{11-4\sqrt{11}}{2}$  e  $\lambda(\theta_0) = \frac{3-\sqrt{11}}{2}$ . Como  $x' = -x$ , temos que o fluxo lento em  $S_2^0$  possui um ponto singular atrator  $(\theta_0, \psi_0, 0)$ . Ver figura [3.1](#).

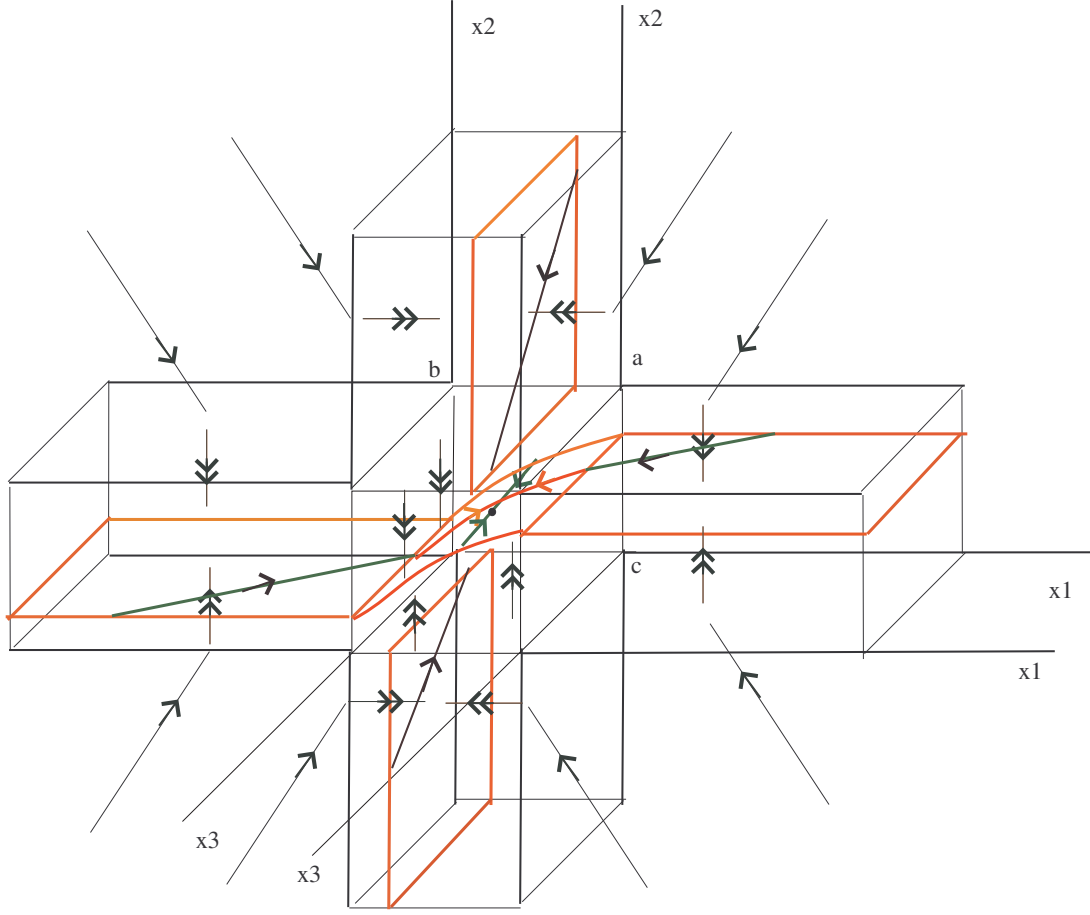


Figura 3.1: Sequência de variedades lentas  $S_2^0 \subseteq S_1$ .

### 3.2 Campo deslizante Momento

Nesta seção apresentaremos brevemente uma outra abordagem para o campo deslizante. O conteúdo descrito nesta seção pode ser encontrado em [11]. No capítulo 5, retomaremos o assunto, comparando com os resultados do capítulo 4.

Considere quatro campos suaves  $X_{++}, X_{-+}, X_{--}, X_{+-}$  definidos em  $\mathbb{R}^n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-2}\}$  e o campo 2-cruz suave por partes

$$X = \frac{1}{4} [aX_{++} + bX_{+-} + cX_{-+} + dX_{--}], \tag{3.10}$$

onde

$$\begin{aligned} a &= (1 + \operatorname{sgn}(x))(1 + \operatorname{sgn}(y)), & b &= (1 + \operatorname{sgn}(x))(1 - \operatorname{sgn}(y)), \\ c &= (1 - \operatorname{sgn}(x))(1 + \operatorname{sgn}(y)), & d &= (1 - \operatorname{sgn}(x))(1 - \operatorname{sgn}(y)). \end{aligned}$$

Sejam  $h_{1,2} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funções definidas por  $h_1(x, y, z) = x$  e  $h_2(x, y, z) = y$ . Denotamos  $\Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : h_1^{-1}(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{R}^n$  e  $\Sigma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : h_2^{-1}(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ . Então,  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  é o conjunto de descontinuidade e o espaço de

fase fica dividido, pelo menos localmente, em quatro regiões denotadas por

$$M_{++} : x > 0, y > 0, \quad M_{+-} : x > 0, y < 0,$$

$$M_{--} : x < 0, y < 0, \quad M_{-+} : x < 0, y > 0.$$

Usaremos também a seguinte notação

$$\Sigma_1^\pm = \{(x, y, z) : h_1^{-1}(x, y, z) = 0, y \gtrless 0\}, \quad \Sigma_2^\pm = \{(x, y, z) : h_2^{-1}(x, y, z) = 0, x \gtrless 0\}.$$

Nos conjuntos  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , os campos deslizantes são definidos pela convenção de Filippov, dados por

$$\begin{aligned} f_{\Sigma_1^+} &= (1 - \alpha^+)X_{-+} + \alpha^+X_{++}, & \alpha^+ &= \left[ \frac{\nabla h_1 X_{-+}}{\nabla h_1 (X_{-+} - X_{++})} \right]_{\mathbf{x} \in \Sigma_1^+} \\ f_{\Sigma_1^-} &= (1 - \alpha^-)X_{--} + \alpha^-X_{+-}, & \alpha^- &= \left[ \frac{\nabla h_1 X_{--}}{\nabla h_1 (X_{--} - X_{+-})} \right]_{\mathbf{x} \in \Sigma_1^-} \\ f_{\Sigma_2^+} &= (1 - \beta^+)X_{+-} + \beta^+X_{++}, & \beta^+ &= \left[ \frac{\nabla h_1 X_{+-}}{\nabla h_2 (X_{+-} - X_{++})} \right]_{\mathbf{x} \in \Sigma_2^+} \\ f_{\Sigma_2^-} &= (1 - \beta^-)X_{--} + \beta^-X_{-+}, & \beta^- &= \left[ \frac{\nabla h_1 X_{--}}{\nabla h_2 (X_{--} - X_{-+})} \right]_{\mathbf{x} \in \Sigma_2^-}. \end{aligned}$$

O conjunto de descontinuidade de codimensão 2 é  $\Sigma = \Sigma_{00} = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ . Motivado pelo caso regular, a tentativa mais natural para encontrar um campo deslizante é selecionar um campo, dentre a combinação convexa de  $X_{++}, X_{-+}, X_{--}$  e  $X_{+-}$ , que seja tangente a  $\Sigma$ , ou seja,

$$X \in \left\{ \sum_{s \in \{-, +\}^2} \lambda_s X_s, \quad \sum_{s \in \{-, +\}^2} \lambda_s = 1 \right\}, \quad X \cdot \nabla h_1 = X \cdot \nabla h_2 = 0, \quad (3.11)$$

ou em notação matricial

$$\begin{bmatrix} X_{++} \cdot \nabla h_1 & X_{+-} \cdot \nabla h_1 & X_{-+} \cdot \nabla h_1 & X_{--} \cdot \nabla h_1 \\ X_{++} \cdot \nabla h_2 & X_{+-} \cdot \nabla h_2 & X_{-+} \cdot \nabla h_2 & X_{--} \cdot \nabla h_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Como já argumentamos anteriormente, o sistema (3.12) é indeterminado. A abordagem discutida em [11], consiste em escolher dentre as possibilidades resultantes do sistema (3.12) um campo deslizante. Vamos fixar algumas notações antes de enunciar o resultado principal.

Considere  $w_s(\mathbf{x}) = (\nabla h_1 X_{s_1 s_2}, \nabla h_2 X_{s_1 s_2})$ , as componentes do campo ortogonal a  $\Sigma$ ,  $s \in \{-, +\}^2$ . De modo a simplificar a escrita, vamos associar a cada par de  $\{-, +\}^2$  um número da seguinte forma:  $1 = --, 2 = +-, 3 = -+$  e  $4 = ++$ .

O caso de interesse são as trajetórias começando próximas e chegando transversalmente a  $\Sigma$ .

**Definição 3.2.1.** Dizemos que  $\Sigma$  é parcialmente atrator ou atrator através de deslize, se as condições abaixo são satisfeitas:

- (a)  $w_k(x)$  não tem o mesmo sinal de  $(x, y)$ , para  $\mathbf{x} \in M_k, k = 1, 2, 3, 4$ .
- (b) pelo menos uma das condições é satisfeita em  $\Sigma$  e numa vizinhança de  $\Sigma$ :
  - (1<sup>+</sup>)  $w_2^i - w_4^i > 0$  juntamente com (1<sub>a</sub><sup>+</sup>) :  $(1 - \alpha^+) w_2^j + \alpha^+ w_4^j < 0$ ;
  - (1<sup>-</sup>)  $w_3^i - w_1^i > 0$  juntamente com (1<sub>a</sub><sup>-</sup>) :  $(1 - \alpha^-) w_1^j + \alpha^- w_3^j < 0$ ;
  - (2<sup>+</sup>)  $w_4^j - w_3^j > 0$  juntamente com (2<sub>a</sub><sup>+</sup>) :  $(1 - \beta^+) w_3^i + \beta^+ w_4^i < 0$ ;
  - (2<sup>-</sup>)  $w_1^j - w_2^j > 0$  juntamente com (2<sub>a</sub><sup>-</sup>) :  $(1 - \beta^-) w_1^i + \beta^- w_2^i < 0$ ;
- (c) se qualquer um dos (1<sup>±</sup>) ou (2<sup>±</sup>) for válido, então (1<sub>a</sub><sup>±</sup>) ou (2<sub>a</sub><sup>±</sup>) devem ser satisfeitos também.

Na definição acima, as variáveis  $\alpha^\pm$  e  $\beta^\pm$  estão bem definidas quando as condições (1<sup>±</sup>), (2<sup>±</sup>) são válidas.

**Definição 3.2.2.** Nas condições de atratividade da Definição 3.2.1, dizemos que uma solução de (3.12) é admissível se as constantes  $\lambda_k, k = 1, 2, 3, 4$ , são não negativas e dependem suavemente de  $\mathbf{x} \in \Sigma$ .

**Definição 3.2.3.** Seja um campo  $X$  tal como em (3.12) e os campos de Filippov em  $X_{\Sigma_{1,2}^\pm}$ , onde o deslize está bem definido. Dizemos que  $x \in \Sigma$  é um *ponto de saída de primeira ordem* se um (e apenas um) dos campos  $X_{\Sigma_{1,2}^\pm}$  é tangente a  $\Sigma$ . O correspondente  $X_{\Sigma_{1,2}^\pm}$  é chamado campo vetorial de saída.

**Observação 2.** Nos pontos de saída de primeira ordem,  $\Sigma$  deixa de ser atrator via deslize.

Nestas condições, uma proposta de solução admissível para (3.12) seria considerar uma condição extra, expressa como uma nova linha no sistema dada por  $d = [d_1, -d_2, -d_3, d_4]$ , onde  $d_i = \|w_i\|, i = 1, \dots, 4$  é a norma usual. Chamaremos esse novo sistema

$$M\lambda = N, \tag{3.13}$$

de método momento, onde

$$M = \begin{bmatrix} W \\ \mathbf{1}^T \\ d^T \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} w_1^i & w_2^i & w_3^i & w_4^i \\ w_1^j & w_2^j & w_3^j & w_4^j \end{bmatrix}, \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O campo vetorial resultante desse sistema é chamado de campo momento, denotado por  $X_m^{sl}$ .

Consideremos uma configuração geométrica, dada por um quadrilátero  $\mathcal{Q}$  definido no plano, determinado por  $w_1, w_2, w_4$  e  $w_3$  nesta ordem. A ideia é reinterpretar uma solução admissível de Filippov como uma a se obter colocando "pesos" nos vértices de  $\mathcal{Q}$ , de modo que a origem seja o baricentro de  $\mathcal{Q}$  relativo a  $\lambda$ .<sup>1</sup> Daqui pra frente, sempre que nos referirmos a  $\mathcal{Q}$ , estamos falando deste quadrilátero.

O próximo resultado é uma consequência simples da caracterização de atratividade de  $\Sigma$  dada pela Definição 3.2.1 e de como definimos  $\mathcal{Q}$ .

**Lema 3.2.1.** Seja  $\mathcal{Q}$  definido para  $x \in \Sigma$ .

- (a) Se  $\Sigma$  é atrator, então a origem está no interior de  $\mathcal{Q}$ . Em particular, se a origem não pertence a  $\mathcal{Q}$ , então  $\Sigma$  não pode ser atrator.
- (b) Se  $x$  é um ponto genérico de saída de primeira ordem, então a origem pertence a um (e apenas um dos lados) de  $\mathcal{Q}$ .

A importância de  $\mathcal{Q}$  é justamente no primeiro item do Lema anterior, pois ele estabelece quando  $\Sigma$  não é atrator.

**Definição 3.2.4.** O quadrilátero  $\mathcal{Q}$  é chamado não degenerado se, e somente se, as duas condições abaixo são satisfeitas:

- (a) Os vértices não estão todos alinhados, ou equivalentemente, no máximo três vértices estão alinhados;
- (b) Se um dos vértices de  $\mathcal{Q}$  é a origem, então não pode haver outros dois vértices alinhado com ele. Em particular, dois vértices não podem ser a origem simultaneamente.

Com isso estamos em condição de enunciar o resultado principal, cuja prova e resultados auxiliares podem ser encontrados em [11].

**Teorema 3.2.1.** Seja  $\Sigma$  a descontinuidade do campo 2-cruz,  $w_i, i = 1, \dots, 4$  e  $\mathcal{Q}$  definidos tal como já visto. Suponha que  $\mathcal{Q}$  é não degenerado, que  $w_i \neq 0, i = 1, \dots, 4$  e que  $0 \in \bar{\mathcal{Q}}$ , para  $x \in \Sigma$ . Então, a matriz  $M$  do método momento em (3.13) é não singular e a solução momento  $\lambda_M$  é admissível, para  $x$  variando em  $\Sigma$ .

**Corolário 3.2.1.** Se  $\mathcal{Q}$  é não degenerado e  $0 \in \text{int}(\mathcal{Q})$ , então todas as componentes de  $\lambda_M$  são positivas.

**Exemplo 3.2.1.**

<sup>1</sup>Neste contexto, podemos reinterpretar (3.13) como uma exigência de equilíbrio físico sobre os momentos proporcionados pelos pesos  $\lambda$  em relação à origem, daí vem o nome proposto ao método.

Considere o seguinte campo 2-cruz  $X$  dado por

$$X_{+++} = \begin{bmatrix} 2z - 1 \\ z \\ x - 1 \end{bmatrix}, X_{+-} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ xy - 1 \end{bmatrix}, X_{--} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, X_{-+} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ y - 1 \end{bmatrix},$$

com

$$W = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -\frac{3}{2} & 2z - 1 \\ -2 & -1 & 1 & z \end{bmatrix}.$$

Considere a condição inicial  $(0, 0, 1)$  e o intervalo de tempo  $0 \leq t \leq 1$ . Na Figura [3.2](#), analisamos o quadrilátero  $\mathcal{Q}$  em quatro intervalos de tempo distintos,  $t_0 = 1$ ,  $t_1 = 1/2$ ,  $t_2 = 1/3$  e  $t_3 = 0$ . Observe que, para  $t_0$ ,  $t_1$  e  $t_2$  estamos nas condições do Teorema [3.2.1](#), porém em  $t_2$  a origem está sobre um dos lados de  $\mathcal{Q}$ , implicando que temos um ponto de saída de primeira ordem. Para verificar essas condições no campo momento, vamos calcular todos os  $\lambda_M$  e o campo resultante.

Resolvendo o sistema [\(3.13\)](#) para o exemplo, obtemos que

$$X(0, 0, z) = (0, 0, X_3(0, 0, z)), \quad (3.14)$$

onde

$$\begin{aligned} X_3 = K_1 & (13325\sqrt{13}\sqrt{2}z^4 - 15828\sqrt{2}\sqrt{13}z^3 - 5603\sqrt{13}\sqrt{5z^2 - 4z + 1}z^3 \\ & + 2917\sqrt{2}\sqrt{13}z^2 + 9132\sqrt{13}\sqrt{5z^2 - 4z + 1}z^2 + 16056\sqrt{2}\sqrt{5z^2 - 4z + 1}z^2 \\ & + 630\sqrt{13}\sqrt{2}z - 2875\sqrt{13}\sqrt{5z^2 - 4z + 1}z - 5230\sqrt{2}\sqrt{5z^2 - 4z + 1}z \\ & + 246\sqrt{13}\sqrt{5z^2 - 4z + 1} + 588\sqrt{2}\sqrt{5z^2 - 4z + 1} - 278041z^2 + 62045z \\ & - 19214\sqrt{2}\sqrt{5z^2 - 4z + 1}z^3 + 271835z^4 + 78559z^3 - 144\sqrt{13}\sqrt{2} - 1798) \end{aligned}$$

com  $K_1 = -2/390815z^4 + 294378z^3 - 577717z^2 + 116940z - 2116$ . Com base no quadrilátero e também olhando cada uma das entradas de  $\lambda_M$ , no intervalo  $(1/3, \infty)$ , notamos que o campo em questão é o campo da solução admissível e o ponto  $(0, 0, 1/3)$  é um ponto de saída de primeira ordem cujo campo de saída é dado por

$$f_{\Sigma_1^+} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3z - 1}{2(z - 1)} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Em essência, o campo vetorial momento é um campo da classe de Filippov, cuja principal vantagem é detectar esses pontos de saída de primeira ordem. Alguns outros aspectos sobre este campo são discutidos em [\[11\]](#), no entanto para o nosso propósito o campo está bem estabelecido.

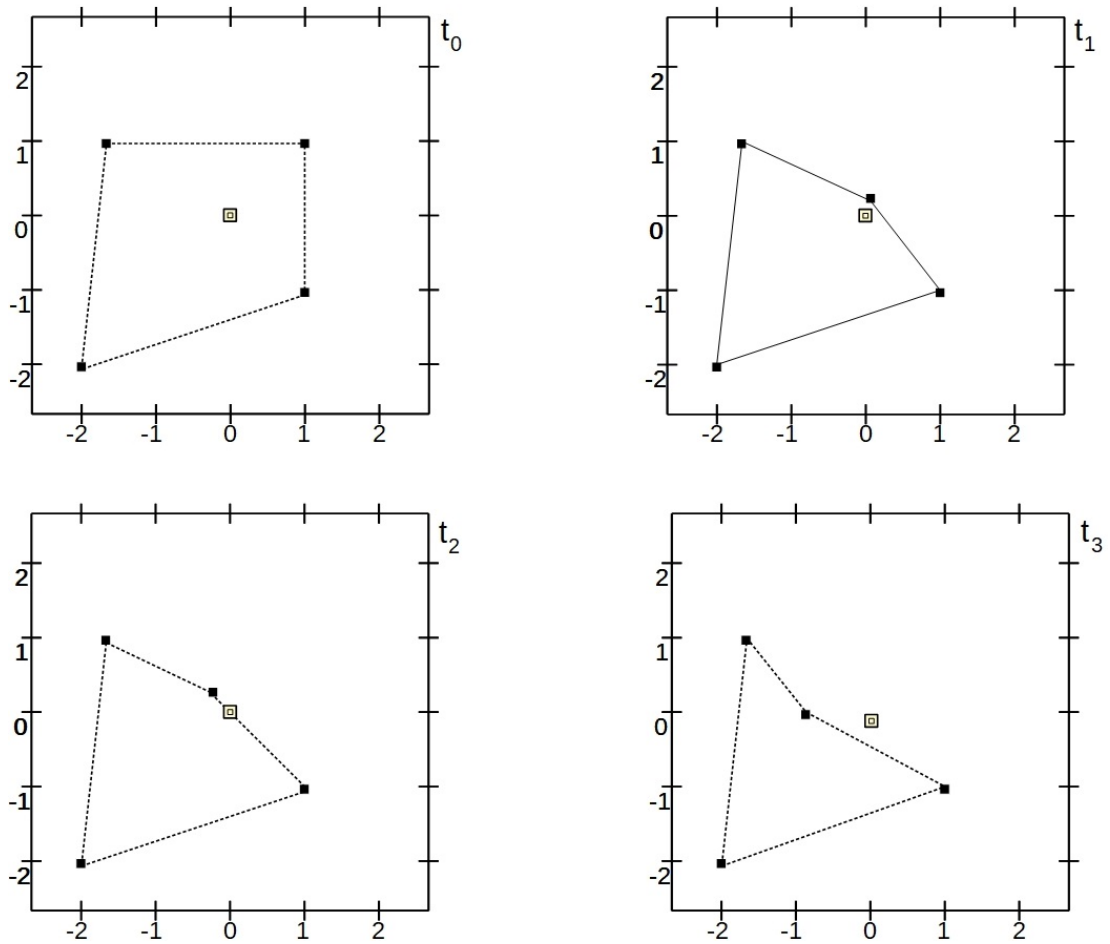


Figura 3.2: Esboço do quadrilátero  $Q$  para os tempos  $t_0, t_1, t_2$  e  $t_3$ .

# 4 Deslize via regularização para descontinuidades de codimensão superior

Neste capítulo, apresentaremos os resultados desenvolvidos no doutorado para o problema do deslize num campo  $m$ -cruz suave por partes definido em  $\mathbb{R}^n$  com  $n > m$ . A menos que se escreva o contrário, todo o estudo deste capítulo é local numa vizinhança da origem.

Vamos começar com um campo 2-cruz suave por partes e em seguida estender os resultados para um campo 3-cruz.

## 4.1 Estudo da 2-cruz

Para efeito de simplificação, assumiremos sem perda de generalidade que  $n = 3$  e

$$X = \frac{1}{4} \sum_{s \in \{-,+\}^2} L_s(\text{sgn}(\mathbf{x})) X_s, \quad (4.1)$$

onde  $X_s(\mathbf{x}) = (f_s(\mathbf{x}), g_s(\mathbf{x}), h_s(\mathbf{x}))$  são campos suaves e  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . Os resultados serão equivalentes para um campo  $n$ -cruz definido em  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Seja  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de transição monótona. Considere a 2-regularização

$$X_{\varepsilon, \eta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4} \left( \sum_{s \in \{-,+\}^2} \left( 1 + s_1 \varphi \left( \frac{x_1}{\varepsilon} \right) \right) \left( 1 + s_2 \varphi \left( \frac{x_2}{\eta} \right) \right) X_s(\mathbf{x}) \right) \quad (4.2)$$

e o seu sistema diferencial associado

$$\begin{aligned}
x'_1 &= \frac{1}{4} \left( \sum_{s \in \{-,+\}^2} \left( 1 + s_1 \varphi \left( \frac{x_1}{\varepsilon} \right) \right) \left( 1 + s_2 \varphi \left( \frac{x_2}{\eta} \right) \right) f_s(\mathbf{x}) \right), \\
x'_2 &= \frac{1}{4} \left( \sum_{s \in \{-,+\}^2} \left( 1 + s_1 \varphi \left( \frac{x_1}{\varepsilon} \right) \right) \left( 1 + s_2 \varphi \left( \frac{x_2}{\eta} \right) \right) g_s(\mathbf{x}) \right), \\
x'_3 &= \frac{1}{4} \left( \sum_{s \in \{-,+\}^2} \left( 1 + s_1 \varphi \left( \frac{x_1}{\varepsilon} \right) \right) \left( 1 + s_2 \varphi \left( \frac{x_2}{\eta} \right) \right) h_s(\mathbf{x}) \right).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Observemos que, para regularizar uma 2-cruz, é necessário utilizar dois parâmetros. Então, a forma como estes parâmetros se relacionam a medida que tendem a zero, influenciará na existência do deslize. Tal como na definição [2.0.8](#), dividiremos as possibilidades para os parâmetros em três casos:

- i.  $\lim_{\varepsilon, \eta \rightarrow 0} \varepsilon/\eta = K$ , com  $K > 0$ ;
- ii.  $\lim_{\varepsilon, \eta \rightarrow 0} \varepsilon/\eta = 0$ ;
- iii.  $\lim_{\varepsilon, \eta \rightarrow 0} \varepsilon/\eta = \infty$

Iremos nos referir ao item  $i$  como o caso linear e os outros itens como caso não linear.

A região de deslize em  $\Sigma_d$ , para  $s = (s_1, s_2) \neq (0, 0)$ , foi estudada amplamente utilizando a convenção de Filippov. Nas próximas subseções, estudaremos a definição de deslize via regularização para  $\Sigma_{00} = \Sigma$ , utilizando diferentes curvas regularizantes.

### 4.1.1 Curva regularizante linear

Considere a 2-regularização de  $X$  com um parâmetro  $\varepsilon$ , isto é, escolhamos uma curva regularizante do tipo  $(\varepsilon, K\varepsilon)$ , com  $K > 0$ . Logo, no sistema [\(4.3\)](#) substituímos  $\eta$  por  $K\varepsilon$ .

**Teorema 4.1.1.** Considere um campo 2-cruz suave por partes [\(4.1\)](#). Então, existe uma função suave  $D(x_3)$  satisfazendo que: Se  $D(x_3) \neq 0$  então  $(0, 0, x_3) \in \Sigma_{00}$  é um ponto de deslize de acordo com a regularização [\(4.2\)](#), com  $\eta = K\varepsilon$ .

*Demonstração.* Considere o sistema regularizado [\(4.3\)](#). Fazendo o blow-up  $x_1 \rightarrow \varepsilon x_1$  e  $x_2 \rightarrow K\varepsilon x_2$ , obtemos

$$\varepsilon x'_1 = X_1(\mathbf{x}, \varepsilon), \quad \varepsilon x'_2 = X_2(\mathbf{x}, \varepsilon) \quad x'_3 = X_3(\mathbf{x}, \varepsilon), \tag{4.4}$$

onde

$$\begin{aligned} X_1(\mathbf{x}, \varepsilon) &= \frac{1}{4} \left( \sum_{s \in \{-,+\}^2} (1 + s_1 \varphi(x_1)) (1 + s_2 \varphi(x_2)) f_s(\varepsilon x_1, K \varepsilon x_2, x_3) \right), \\ X_2(\mathbf{x}, \varepsilon) &= \frac{1}{4K} \left( \sum_{s \in \{-,+\}^2} (1 + s_1 \varphi(x_1)) (1 + s_2 \varphi(x_2)) g_s(\varepsilon x_1, K \varepsilon x_2, x_3) \right), \\ X_3(\mathbf{x}, \varepsilon) &= \frac{1}{4} \left( \sum_{s \in \{-,+\}^2} (1 + s_1 \varphi(x_1)) (1 + s_2 \varphi(x_2)) h_s(\varepsilon x_1, K \varepsilon x_2, x_3) \right), \end{aligned}$$

com  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . O sistema (4.4) é o sistema lento e o seu campo vetorial correspondente é denotado por  $X_\varepsilon(\mathbf{x}, \varepsilon) = (X_1(\mathbf{x}, \varepsilon), X_2(\mathbf{x}, \varepsilon), X_3(\mathbf{x}, \varepsilon))$ .

Para  $\mathbf{x}_0 \in S = \{X_1(\mathbf{x}, 0) = 0\} \cap \{X_2(\mathbf{x}, 0) = 0\}$ , defina a matriz

$$D_0(x_0) := D_{(x_1, x_2)}(X_1, X_2)(\mathbf{x}_0, 0).$$

Provemos que  $D(x_0) = \text{tr}(D_0) \cdot \det(D_0) \neq 0$  implica que  $(0, 0, x_3)$  é um ponto de deslize  $X$ .

Tomando  $\varepsilon = 0$ ,  $S$  é a variedade lenta do sistema (4.4). Seja  $S_r \subset S$  o conjunto aberto de  $S$  dado por  $S_r = \{\mathbf{x} \in S : \text{rank } D_{(x_1, x_2)}(X_1, X_2)(\mathbf{x}, 0) = 2\}$ . A matriz  $D_0$  é definida por

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial X_1(\mathbf{x}_0, 0)}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1(\mathbf{x}_0, 0)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial X_2(\mathbf{x}_0, 0)}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2(\mathbf{x}_0, 0)}{\partial x_2} \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

A hipótese implica que o posto de  $D_0$  é 2 e os autovalores de  $D_0$  possuem partes reais não nulas. Em outras palavras,  $\mathbf{x}_0 \in S_h \subset S_r$ . Como  $S_h$  é um aberto existe uma vizinhança  $\mathbf{x}_0 \in V$  tal que o fecho  $V \subset S_h$ . Usando o Teorema 2.1.1, temos que existe uma família  $C^{r-1}$  de variedades  $V_\varepsilon$  com  $\varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$  tal que  $V_0 = V$  e  $V_\varepsilon$  é uma variedade invariante normalmente hiperbólica de  $X(\mathbf{x}, \varepsilon)$ , provando que  $(0, 0, x_3)$  é um ponto de deslize para  $X$ .

□

### Exemplo 4.1.1.

Seja  $X$  um campo 2-cruz suave por partes definido em  $\mathbb{R}^3$ , dado por  $X(x) = X_{\pm\pm}(x)$  onde

$$\begin{aligned} X_{++}(x) &= (-1 + x^2, -1 + y^2, z + 1), & X_{+-}(x) &= (-1 + xy, 1 - zy, z + 1), \\ X_{--}(x) &= (1, 1 + z^2, z + 1), & X_{-+}(x) &= (1 + x + z, -1, z + 1), \end{aligned}$$

Considere a dupla regularização de  $X$  com função de transição monótona e o blow-up direcional  $x \rightarrow \varepsilon x$ ,  $y \rightarrow \varepsilon y$ . O sistema lento tal como (4.4) é dado por

$$\begin{aligned}\varepsilon x' &= X_1(\mathbf{x}, \varepsilon), \\ \varepsilon y' &= X_2(\mathbf{x}, \varepsilon), \\ z' &= X_3(\mathbf{x}),\end{aligned}\tag{4.6}$$

$\mathbf{x} = (x, y, z)$ , onde

$$X_1(\mathbf{x}) = \frac{(A_1(x, y, z, \varepsilon)\varphi(x_2) + A_2(x, y, z, \varepsilon))\varphi(x_1) + A_3(x, y, z, \varepsilon)\varphi(x_2) + A_4(x, y, z, \varepsilon)}{4},$$

$$X_2(\mathbf{x}) = \frac{(B_1(x, y, z, \varepsilon)\varphi(x_2) + B_2(x, y, z, \varepsilon))\varphi(x_1) + B_3(x, y, z, \varepsilon)\varphi(x_2) + B_4(x, y, z, \varepsilon)}{4},$$

e  $X_3(\mathbf{x}) = z + 1$ ,  $A_i, B_i$  funções,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Veremos quais pontos de  $\Sigma$  são pontos de deslize. Calculando a variedade lenta  $S$  e calculando a função  $D(x_3)$ , com auxílio computacional, obtemos que os pontos  $p = (0, 0, x_3) \in \Sigma$ , tal que  $x_3 \in (0, 0.8736696149)$ , a função  $D(x_3)$  é não nula, ver Figura 4.1. Logo, pelo Teorema 4.1.1 este ponto  $p$  é ponto de deslize.

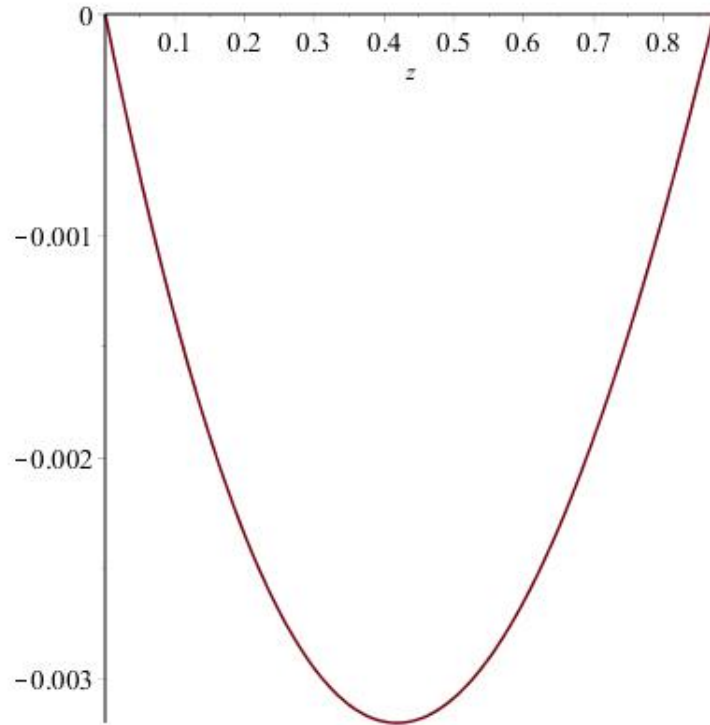


Figura 4.1: Gráfico de  $D(x_3)$ .

### 4.1.2 Curvas regularizantes não lineares

Nesta seção, consideremos inicialmente os campos  $X_s$  do sistema (4.1) como sendo campos vetoriais constantes,  $s \in \{+, -\}^2$ , e daí estendemos os resultados para campos  $X_s$  suaves que satisfaçam  $X_s(0, 0, 0) \neq 0$ , para todo  $s \in \{+, -\}^2$ .

Suponha que  $X_s = (a_s, b_s, c_s)$ , com  $a_s, b_s, c_s \in \mathbb{R}$ ,  $s = (s_1, s_2) \in \{-, +\}^2$ . Dada uma função de transição  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , considere a 2-regularização

$$X_{\varepsilon, \eta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4} \left( \sum_s \left( 1 + s_1 \varphi \left( \frac{x_1}{\varepsilon} \right) \right) \left( 1 + s_2 \varphi \left( \frac{x_2}{\eta} \right) \right) X_s(\mathbf{x}) \right), \quad (4.7)$$

com  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . Tomemos  $(\varepsilon, \eta)$  uma curva de regularização arbitrária. Primeiramente, tomemos um blow-up direcional  $x_1 \rightarrow \varepsilon x_1$  e  $x_2 \rightarrow \eta x_2$ . O sistema diferencial correspondente é

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{1}{\varepsilon} \sum_s (1 + s_1 \varphi(x_1)) (1 + s_2 \varphi(x_2)) a_s, \\ x_2' &= \frac{1}{\eta} \sum_s (1 + s_1 \varphi(x_1)) (1 + s_2 \varphi(x_2)) b_s, \\ x_3' &= \sum_s (1 + s_1 \varphi(x_1)) (1 + s_2 \varphi(x_2)) c_s, \\ \varepsilon' &= 0, \quad \eta' = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Notemos que, no sistema *slow-fast* acima as primeiras duas equações determinam as variedades críticas, enquanto que a terceira descreve o fluxo na variedade. Nosso objetivo é determinar sequências de variedades invariantes convergindo para a variedade crítica, por este motivo nossa análise depende essencialmente das duas primeiras equações. Vamos nos referir a estas duas equações como sistema  $x_1 x_2$

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{1}{\varepsilon} \sum_s (1 + s_1 \varphi(x_1)) (1 + s_2 \varphi(x_2)) a_s, \\ x_2' &= \frac{1}{\eta} \sum_s (1 + s_1 \varphi(x_1)) (1 + s_2 \varphi(x_2)) b_s. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Analisando a dinâmica de (4.9), obteremos condições para a existência de variedades invariantes, definindo assim o deslize para o sistema  $X$ . Para uma vizinhança de  $(0, 0)$ , assumiremos que as funções de transição são a identidade identidade, isto é,  $\varphi(x_1) = x_1$  e  $\varphi(x_2) = x_2$ . Usando esta hipótese, com uma reparametrização do tempo  $t = \varepsilon \tau$ , o sistema (4.9) é equivalente à

$$\dot{x}_1 = \sum_s (1 + s_1 x_1) (1 + s_2 x_2) a_s, \quad \dot{x}_2 = \frac{\varepsilon}{\eta} \sum_s (1 + s_1 x_1) (1 + s_2 x_2) b_s. \quad (4.10)$$

ou de maneira equivalente,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 (x_1 - \alpha_1) (x_2 - \beta_1) - \delta_1, \\ \dot{x}_2 &= \frac{\varepsilon}{\eta} \lambda_2 (x_1 - \alpha_2) (x_2 - \beta_2) - \delta_2, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde  $\lambda_1 = (a_{++} - a_{-+} - a_{+-} + a_{--})/4$ ,  $\lambda_2 = (b_{++} - b_{-+} - b_{+-} + b_{--})/4$ ,  $\alpha_1 = -(a_{++} + a_{-+} - a_{+-} - a_{--})/\lambda_1$ ,  $\beta_1 = -(a_{++} - a_{-+} + a_{+-} - a_{--})/\lambda_1$  e  $\delta_1 = (\lambda_1 \alpha_1 \beta_1 - (a_{++} + a_{-+} + a_{+-} + a_{--}))/4$ .

O sistema (4.10) é um sistema polinomial de grau no máximo 2. Supondo que  $\lambda_1 = (a_{++} - a_{-+} - a_{+-} + a_{--})/4 = 0$  e  $\lambda_2 = (b_{++} - b_{-+} - b_{+-} + b_{--})/4 = 0$ , temos então que o sistema (4.10) é linear e pode ser escrito como

$$\dot{x}_1 = Ax_1 + A_2x_2, \quad \dot{x}_2 = \frac{\varepsilon}{\eta} (B_1x_1 + B_2x_2). \quad (4.12)$$

**Proposição 4.1.1.** Seja  $X$  um campo vetorial tal como (4.12).

- i. Se  $\varepsilon/\eta \rightarrow k$ , quando  $\varepsilon, \eta \rightarrow 0$ , com  $k > 0$ , então a natureza da estabilidade da origem não se altera, para todos  $\varepsilon, \eta$ .
- ii. Se  $\varepsilon/\eta \rightarrow \infty$ , então a estabilidade da origem depende do sinal de  $B_1$  e  $A_1B_2 - A_2B_1$ .
- iii. Se  $\varepsilon/\eta \rightarrow 0$ , então o sistema possui uma linha de equilíbrios.

*Demonstração.* A linearização do sistema (4.12) é

$$L = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{\varepsilon}{\eta} B_1 & \frac{\varepsilon}{\eta} B_2 \end{bmatrix},$$

com traço e determinante dados por

$$\text{Tr}(L) = A_1 + \frac{\varepsilon}{\eta} B_2, \quad \det(L) = \frac{\varepsilon}{\eta} (A_1B_2 - A_2B_1).$$

Suponha o item (i), traço e determinante não se alteram quando  $\varepsilon, \eta \rightarrow 0$ , o que implica que a estabilidade permanece a mesma. Supondo item (ii),  $\text{Tr}(L)$  tende à  $\pm\infty$  e  $\det(L)$  tende à  $\pm\infty$ . Portanto, se  $\text{sgn}(A_1B_2 - A_2B_1) = -1$ , a origem é uma sela, caso contrário, se  $\text{sgn}(A_1B_2 - A_2B_1) = 1$ , a origem é assintoticamente estável ou instável, dependendo de  $\text{sgn}(B_2)$ . O item (iii) é óbvio.  $\square$

Considerando agora  $\lambda_1 \neq 0$  e  $\lambda_2 \neq 0$ , temos que o sistema (4.10) é quadrático

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1(x_1 - \alpha_1)(x_2 - \beta_1) - \delta_1, \\ \dot{x}_2 &= \frac{\varepsilon}{\eta} \lambda_2(x_1 - \alpha_2)(x_2 - \beta_2) - \delta_2, \end{aligned} \quad (4.13)$$

**Proposição 4.1.2.** Se o sistema (4.13) possui dois pontos de equilíbrio distintos, então um deles será uma sela.

*Demonstração.* A linearização do sistema (4.13) é dada por

$$L(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \lambda_1 (x_2 - \beta_1) & \lambda_1 (x_1 - \alpha_1) \\ \frac{\varepsilon \lambda_2 (x_2 - \beta_2)}{\eta} & \frac{\varepsilon \lambda_2 (x_1 - \alpha_2)}{\eta} \end{bmatrix}$$

e seu determinante

$$\det(x_1, x_2) = -\frac{\lambda_1 \varepsilon \lambda_2 (\beta_1 x_1 - \beta_1 \alpha_2 - x_1 \beta_2 + \alpha_1 \beta_2 - \alpha_1 x_2 + x_2 \alpha_2)}{\eta}.$$

Se o sistema (4.13) possuir dois pontos de equilíbrio distintos  $P_1, P_2$ , então  $\alpha_1 \neq \alpha_2$  e  $\beta_1 \neq \beta_2$ . Logo,  $\det(x_1, x_2) = 0$  define uma reta passando pelos pontos  $(\alpha_1, \beta_1)$  e  $(\alpha_2, \beta_2)$ . Note que, para qualquer  $\varepsilon, \eta$ , a razão entre os parâmetros não muda a inclinação da reta. Então, a intersecção  $\dot{x}_1 = 0$  e  $\dot{x}_2 = 0$ , que fornece os equilíbrios, ocorre em lados opostos de  $\det(x_1, x_2) = 0$ , isto é,  $\det(P_1) \det(P_2) < 0$ , provando assim que um deles é uma sela.  $\square$

Aplicando a translação  $x_1 \rightarrow x_1 - \alpha_1$ ,  $x_2 \rightarrow x_2 - \beta_1$  e um reescalonamento  $\tau_1 = \tau/\lambda_1$  em (4.13), temos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 x_2 - \delta_1, \\ \dot{x}_2 &= \frac{\varepsilon}{\eta} C (x_1 - \alpha_2) (x_2 - \beta_2) - \delta_2, \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde  $C = \lambda_2/\lambda_1$  e  $\alpha_1, \alpha_2$  diferentes dos originais, mas com mesma notação por simplicidade.

**Proposição 4.1.3.** Seja  $X$  o campo vetorial de (4.14) tendo dois pontos de equilíbrio  $P$  e  $Q$ , com  $P$  sendo o ponto de equilíbrio não sela.

- i. Se  $\varepsilon/\eta \rightarrow k$ , quando  $\varepsilon, \eta \rightarrow 0$ , com  $k > 0$ , então as estabilidades de  $P$  e  $Q$  não se alteram para quaisquer  $\varepsilon, \eta$ ;
- ii. Se  $\varepsilon/\eta \rightarrow 0$  ou  $\varepsilon/\eta \rightarrow \infty$  quando  $\varepsilon, \eta \rightarrow 0$ , então  $P$  é assintoticamente estável ou instável. Mais ainda, se  $P$  é assintoticamente estável (instável) para  $\varepsilon/\eta \rightarrow 0$ , então ele é assintoticamente instável (estável) para  $\varepsilon/\eta \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* A linearização do sistema (4.14) dependendo de  $x_1$  e  $x_2$  é dada por

$$J = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ \frac{\varepsilon C (x_2 - \beta_2)}{\eta} & \frac{\varepsilon C (x_1 - \alpha_2)}{\eta} \end{bmatrix}.$$

Observe que o traço e o determinante são dados, respectivamente, por

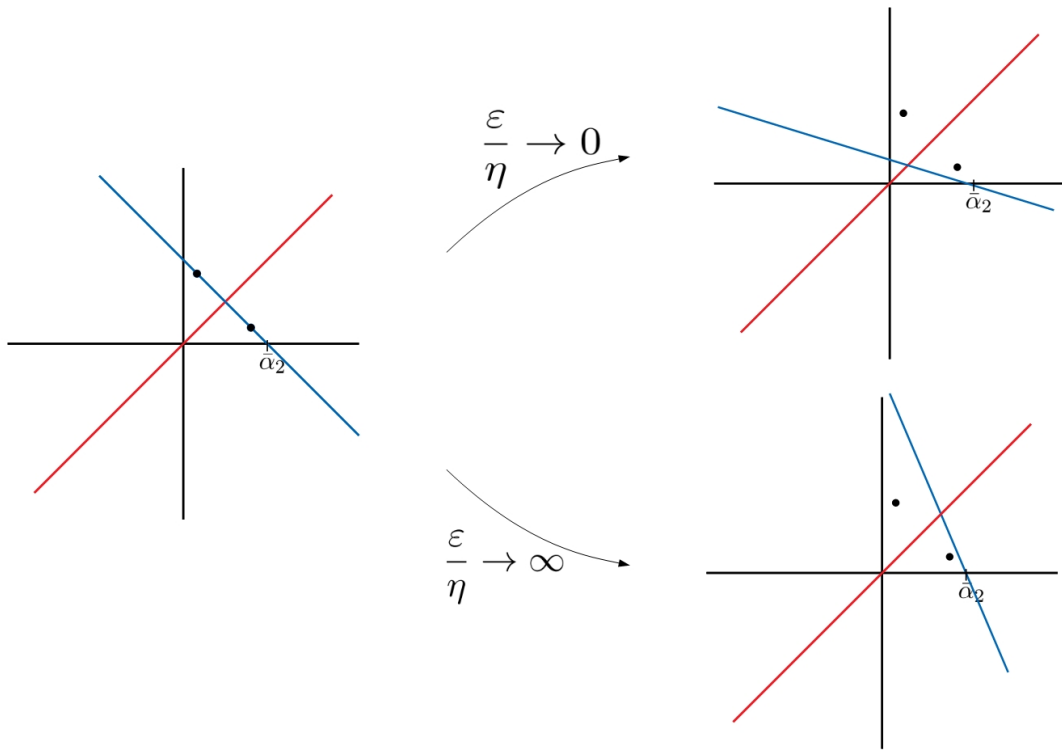


Figura 4.2: Retas  $r_1$  em azul,  $r_2$  em vermelho e os pontos de equilíbrio  $P$  e  $Q$ .

$$\text{Tr}(x_1, x_2) = x_2 + \frac{\varepsilon C(x_1 - \alpha_2)}{\eta} \text{ e } \det(x_1, x_2) = \frac{\varepsilon C(\beta_2 x_1 - \alpha_2 x_2)}{\eta}.$$

Quando  $\text{Tr}(x_1, x_2) = 0$  e  $\det(x_1, x_2) = 0$ , temos definidas duas retas no plano  $x_1 x_2$ , que denotaremos, respectivamente, por  $r_1, r_2$ , ver Figura 4.2. A reta  $r_2$  independe dos parâmetros  $\varepsilon$  e  $\eta$ , mas a inclinação de  $r_1$  depende do quociente  $\varepsilon/\eta$ . Logo, a estabilidade de  $P$  depende da sua posição em relação à reta  $r_1$ , o que implica que os parâmetros irão influenciar na estabilidade de  $P$ . Supondo **i**, a inclinação de  $r_1$  não se altera quando  $\varepsilon, \eta \rightarrow 0$ , isto é, a estabilidade de  $P$  depende da sua posição em relação a  $r_1$ , mas não se altera quando  $\varepsilon, \eta \rightarrow 0$ . Agora, suponha **ii** com  $\varepsilon/\eta \rightarrow 0$ . Neste caso,  $r_1$  tende a  $x_2 = 0$  para  $\varepsilon$  e  $\eta$  suficientemente pequenos, o que implica que o ponto  $P$  será assintoticamente estável ou instável. Se  $\varepsilon/\eta \rightarrow \infty$ , a posição de  $P$  não se altera, mas  $r_1$  tende a  $x_1 = \alpha_2$ , o que implica que, para valores suficientemente pequenos de  $\varepsilon$  e  $\eta$ , a estabilidade é oposta ao outro caso, como podemos ver na Figura 4.2, provando assim o teorema. □

Observe que, a prova da Proposição 4.1.3, item **i**, poderia ter sido feita usando o Teorema 2.1.1. Para apenas um equilíbrio, o teorema também é válido e a prova se procede da mesma forma.

**Teorema 4.1.2.** Seja  $X$  um campo 2-cruz suave por partes constante definido em  $\mathbb{R}^3$  e gerado por  $X_s = (a_s, b_s, c_s)$  com  $a_s, b_s, c_s \in \mathbb{R}$ ,  $s = (s_1, s_2) \in \{-, +\}^2$ . Suponha

que os pontos de equilíbrio do sistema  $x_1x_2$  associado a uma regularização de  $X$  estão localizados em  $(-1, 1)^2$ .

- i. Se o sistema  $x_1x_2$  é linear, os pontos de  $\Sigma_{00}$  são pontos de deslize apenas para curvas regularizantes do tipo  $\varepsilon/\eta \rightarrow k$  ou  $\varepsilon/\eta \rightarrow \infty$ .
- ii. Para sistema  $x_1x_2$ :
  - a. Se o sistema  $x_1x_2$  possuir dois pontos de equilíbrio, então todo ponto de  $\Sigma_{00}$  é um ponto de deslize de  $X$ , para qualquer  $\varepsilon, \eta$ .
  - b. Se o sistema  $x_1x_2$  possui apenas um ponto de equilíbrio e é assintoticamente estável (instável) quando  $\varepsilon, \eta \rightarrow 0$ , então todo ponto de  $\Sigma_{00}$  é um ponto de deslize de  $X$ .

*Demonstração.* Suponha o item **i**, de acordo com a Proposição [4.1.1](#), para curvas regularizantes do tipo  $\varepsilon/\eta \rightarrow k$  ou  $\varepsilon/\eta \rightarrow \infty$ , nós temos que a origem é assintoticamente estável (instável) ou sela. Logo, existem pelo menos duas variedades invariantes, as variedades estável e instável da sela, para o sistema  $x_1x_2$ .

Suponha o item **ii**. Primeiramente suponhamos que existam dois pontos de equilíbrio para o sistema  $x_1x_2$ . De acordo com a Proposição [4.1.2](#), um destes pontos é uma sela para quaisquer  $\varepsilon, \eta$ , então a conclusão é semelhante ao item **i**, provando o item **a**.

Suponha agora que temos apenas um ponto de equilíbrio e é assintoticamente estável. Considere uma curva regularizante linear do tipo  $(\varepsilon, K\varepsilon)$ ,  $K > 0$ . De acordo com a Proposição [4.1.3](#) item **i**, o equilíbrio permanece assintoticamente estável quando  $\varepsilon, \eta$  tendem a zero. Logo, temos variedades invariantes estáveis para o sistema  $x_1x_2$ , o que gera um deslize ao longo de  $\Sigma_{00}$ . Consideremos agora uma curva regularizante satisfazendo  $\varepsilon/\eta \rightarrow 0$  ou  $\varepsilon/\eta \rightarrow \infty$ , quando  $\varepsilon, \eta$  tende a zero. De acordo com a Proposição [4.1.3](#) item **ii**, a estabilidade do equilíbrio pode mudar, mas para  $\varepsilon, \eta$  suficientemente pequenos, o ponto será assintoticamente estável ou instável, dependendo do sistema  $x_1x_2$ , o que implica que teremos uma variedade invariante estável (instável) para o sistema  $x_1x_2$ , produzindo assim um deslize ao longo de  $\Sigma_{00}$ . A conclusão é a mesma para um ponto de equilíbrio assintoticamente instável.

□

Os próximos dois resultados são enunciados para uma 1-cruz, mas podem ser utilizados para uma  $m$ -cruz aplicando-se sucessivamente os resultados.

**Lema 4.1.1.** Seja  $F$  um campo 1-cruz suave por partes definido em  $\mathbb{R}^3$  dado por  $F(\mathbf{x}) = F_s(\mathbf{x})$ , onde  $F_s(\mathbf{x}) = (f_s(\mathbf{x}), g_s(\mathbf{x}), h_s(\mathbf{x}))$ ,  $s \in \{+, -\}$ . Suponha que a origem não é um ponto de equilíbrio para  $F_s$  e que  $f_s \neq 0$ , numa vizinhança da origem,  $s \in \{-, +\}$ . Então, para uma vizinhança da origem,  $F$  é topologicamente equivalente a um campo 1-cruz suave por partes constante  $X$ .

*Demonstração.* Usando o Teorema do Fluxo Tubular, temos que existem vizinhanças  $U_s$  e  $V_s$  de 0, a origem, tal que a restrição de  $F_s$  a  $U_s$  e  $Y = (1, 0, 0)$  a  $V_s$  são topologicamente equivalentes, usando a função  $g_s : U_s \rightarrow V_s$ . Considere  $X_s = F_s(0)$ , um campo vetorial constante não nulo,  $s \in \{-, +\}$ . Usando  $X_s$ , temos o campo 1-cruz suave por partes  $X$ . Sabemos que,  $X_s(0) \neq 0$ , então novamente usando o Teorema do Fluxo Tubular existem vizinhanças da origem  $W_s$  e  $R_s$  de 0, tal que a restrição de  $X_s$  a  $W_s$  e  $Y = (1, 0, 0)$  a  $R_s$  são topologicamente equivalentes usando a função  $h_s : U_s \rightarrow V_s$ . Considere  $V = (\cap_s V_s) \cap (\cap_s R_s)$ ,  $s \in \{-, +\}$ , não vazio. Logo, temos que, localmente,  $F_s$  é topologicamente equivalente a  $X_s$ , portanto o campo 1-cruz suave por partes  $F$  é localmente topologicamente equivalente ao campo 1-cruz suave por partes constante  $X$ . □

**Teorema 4.1.3.** Sejam  $F$  e  $X$  campos 1-cruz suave por partes, gerados pelos campos  $F_s$  e  $X_s$ , definidos numa vizinhança  $U \subset \mathbb{R}^3$  da origem. Se  $X_s = F_s(0) = (a_s, b_s, c_s)$  e  $a_s b_s \neq 0$ , para todo  $s \in \{-, +\}^2$ , então as regiões de deslize via a regularização da Proposição 4.1.3 de  $F$  e  $X$  são equivalentes em  $U$ .

*Demonstração.* De acordo com o Lema 4.1.1,  $F$  e  $X$  são localmente topologicamente equivalentes e temos que existe  $\varepsilon > 0$ , tal que  $\|F_s - X_s\| < \varepsilon/2$ , na topologia  $C^0$ . Dada uma função de transição  $\varphi$ , considere a regularização  $F_{\varepsilon, \eta}$  e  $X_{\varepsilon, \eta}$ . Observe que,  $\|F_{\varepsilon, \eta}(x) - X_{\varepsilon, \eta}(x)\|$  é dada por

$$\left\| \left( \left( \frac{1 + \varphi(x/\varepsilon)}{2} \right) (F_+(x) - X_+(x)) + \left( \frac{1 - \varphi(x/\varepsilon)}{2} \right) (F_-(x) - X_-(x)) \right) \right\|.$$

Pela definição de função transição,

$$\|F_{\varepsilon, \eta}(x) - X_{\varepsilon, \eta}(x)\| \leq \left( \frac{\varepsilon}{2} \right) + \left( \frac{\varepsilon}{2} \right) = \varepsilon. \tag{4.15}$$

Uma vez que os campos vetoriais são próximos, o mesmo ocorre para as variedades invariantes de  $X_{\varepsilon, \eta}$  e  $f_{\varepsilon, \eta}$ . Portanto, se a regularização  $X_{\varepsilon, \eta}$  satisfaz as hipóteses do Teorema 4.1.2,  $X$  possui região de deslize, o que implica que  $F$  possui uma região equivalente a ela. □

**Exemplo 4.1.2.**

Seja

$$X(x_1, x_2, x_3) = -\operatorname{sgn}(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} - \operatorname{sgn}(x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \tag{4.16}$$

um campo 2-cruz suave por partes definido em  $\mathbb{R}^3$ . Dada uma função de transição  $\varphi$ , considere a 2-regularização

$$X_{\varepsilon, \eta} = \frac{1}{4} \sum_{s \in \{-, +\}^2} (1 \pm \varphi(x_1/\varepsilon)) (1 \pm \varphi(x_2/\eta)) X_s. \tag{4.17}$$

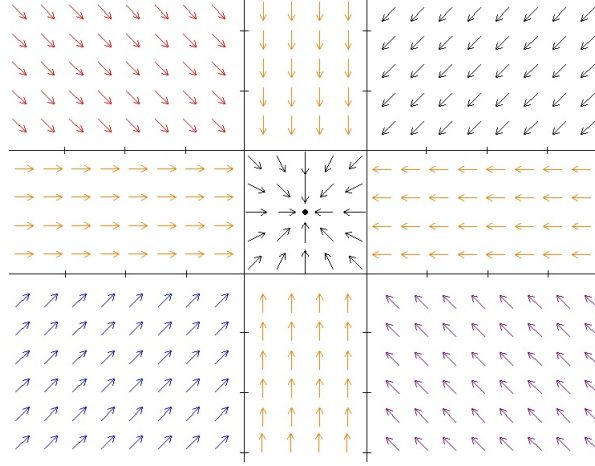


Figura 4.3: Blow-up direcional no plano  $x_3 = cte$  com campos vetoriais  $X_{++}$  em preto,  $X_{-+}$  em vermelho,  $X_{--}$  em azul,  $X_{+-}$  em roxo, o campo vetorial laranja é a combinação convexa entre  $X_s$  e no quadrado temos o sistema  $x_1x_2$ .

Observe a Figura 4.3 para uma ilustração do campo  $X_{\varepsilon,\eta}$  visto de frente com a origem sendo o eixo  $x_3$ .

Tomando o blow-up direcional  $x_1 \rightarrow \varepsilon x_1, x_2 \rightarrow \eta x_2$ :

$$x'_1 = -\frac{\varphi(x_1)}{\varepsilon}; \quad x'_2 = -\frac{\varphi(x_2)}{\eta}; \quad x'_3 = 1. \tag{4.18}$$

Para valores suficientemente pequenos de  $\varepsilon, \eta$ , o sistema (4.18) é topologicamente equivalente a

$$x'_1 = -\frac{x_1}{\varepsilon}; \quad x'_2 = -\frac{x_2}{\eta}; \quad x'_3 = 1. \tag{4.19}$$

Note que a terceira equação não afeta a dinâmica do sistema (4.19). É fácil ver que, o único ponto de equilíbrio do sistema  $x_1x_2$  é a origem e é assintoticamente estável, para todos  $\varepsilon$  e  $\eta$ . Então para quaisquer  $p \in \Sigma$  é um ponto de deslize e todas as trajetórias de (4.18) são atraídas para  $\Sigma$ .

**Exemplo 4.1.3.**

Considere o campo 2-cruz suave por partes  $X$  dado por

$$X_{++} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, X_{+-} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, X_{--} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, X_{-+} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

com  $\Sigma$  sendo a 2-cruz. Considere a 2-regularização monótona de  $X$  dada por

$$X_{\varepsilon,\eta} = \frac{1}{4} \sum_{s \in \{-,+\}^2} (1 \pm \varphi(x_1/\varepsilon)) (1 \pm \varphi(x_2/\eta)) X_s. \tag{4.20}$$

Tomando o blow-up direcional  $x_1 \rightarrow \varepsilon x_1$ ,  $x_2 \rightarrow \eta x_2$  e considerando função de transição  $\varphi(x_1) \approx x_1$  e  $\varphi(x_2) \approx x_2$ , obtemos o sistema

$$\varepsilon x'_1 = 2x_1x_2 + \frac{1}{2}; \quad \eta x'_2 = 2x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1; \quad x'_3 = -1, \quad (4.21)$$

ou equivalentemente através de um reescalonamento do tempo

$$x'_1 = 2x_1x_2 + \frac{1}{2}; \quad x'_2 = K(2x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1); \quad x'_3 = -1, \quad (4.22)$$

onde  $K = \varepsilon/\eta$ . Estudaremos o sistema  $x_1x_2$  para verificar se existem regiões de deslize para o sistema  $X$ .

É fácil ver que, os pontos de equilíbrio de (4.22) são  $P_1 = (1/(\sqrt{5}-1), -\sqrt{5}/4+1/4)$  e  $P_2 = (-1/(1+\sqrt{5}), \sqrt{5}/4+1/4)$ . Para o sistema sem os parâmetros, temos que os autovalores da linearização de  $P_1$  são imaginários puros,  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt[4]{5}$ . Calculando os coeficientes de Liapunov do sistema, obtemos que os três primeiros coeficientes são nulos, logo pelo Teorema de Bautin [14],  $P_1$  é um centro. O ponto de equilíbrio  $P_2$  é do tipo sela, pela Proposição 4.1.2, ver Figura 4.4. Verifiquemos então como as curvas regularizantes influenciam na estabilidade dos pontos.

Pela Proposição 4.1.3 item i, para uma curva linear a estabilidade não se altera. Considere agora uma curva regularizante tal que  $\varepsilon/\eta$  tende a 0 quando  $\varepsilon, \eta$  tendem a 0. Observe que, os autovalores  $\lambda_{1,2}$  associados a  $P_1$  são dados por

$$\left[ \begin{array}{l} 1/4 K\sqrt{5} - K/4 - 1/4\sqrt{5} + 1/4 + 1/4\sqrt{6K^2 - 2K^2\sqrt{5} - 12K - 12K\sqrt{5} + 6 - 2\sqrt{5}} \\ 1/4 K\sqrt{5} - K/4 - 1/4\sqrt{5} + 1/4 - 1/4\sqrt{6K^2 - 2K^2\sqrt{5} - 12K - 12K\sqrt{5} + 6 - 2\sqrt{5}} \end{array} \right].$$

Quando  $K = 1$ , os autovalores são imaginários puros, mas a medida que  $K$  tende a 0, os autovalores possuem parte reais negativas e partes imaginárias não nulas até  $K_0$  dado por

$$K_0 = -\frac{3 + 3\sqrt{5} + 2\sqrt{10 + 6\sqrt{5}}}{\sqrt{5} - 3} \approx 0.03940575613,$$

caracterizando um foco atrator. A partir de  $K_0$ , a parte imaginária é nula, logo o ponto se torna um nó atrator, que é um equilíbrio assintoticamente estável e isso permanece enquanto  $\varepsilon, \eta$  tendem a 0. Esta conclusão já era esperada pela Proposição 4.1.3 item ii. Se tomarmos uma curva regularizante do tipo  $K$  tendendo ao infinito, o equilíbrio será assintoticamente instável quando  $K$  for suficientemente grande, para  $\varepsilon, \eta$  suficientemente pequenos.

Portanto, pelo Teorema 4.1.2 todo ponto de  $\Sigma$  é ponto de deslize.

Observe que, foi feita uma afirmação não trivial acerca da estabilidade de um ponto de equilíbrio, utilizando-se o Teorema de Bautin. Na próxima seção, estudaremos com mais detalhes o sistema planar que decide a existência da região deslizante.

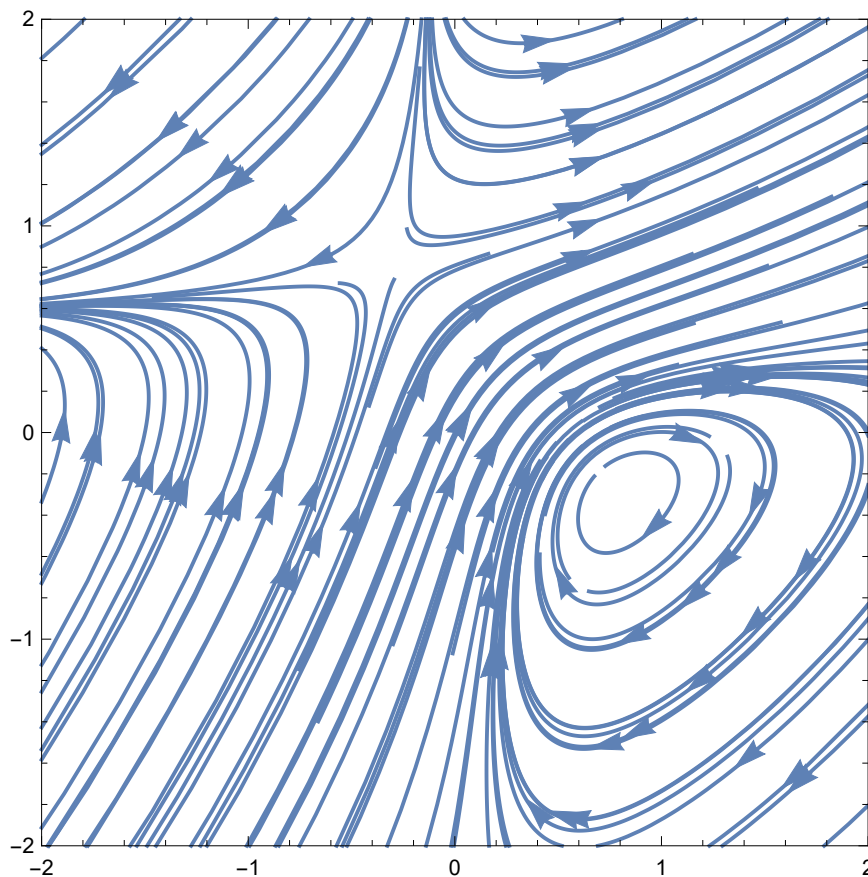


Figura 4.4: Esboço do retrato de fase de (4.22) com  $K = 1$ .

## 4.2 Sobre o sistema quadrático (4.13)

Nesta seção, estudaremos o sistema (4.13) com parâmetros  $\varepsilon = \eta = 1$ . Para simplificar a notação, escreveremos o sistema da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x' &= A(x - a)(y - b) - B = F(x, y), \\ y' &= C(x - c)(y - d) - D = G(x, y). \end{aligned} \quad (4.23)$$

O primeiro teorema estabelece classes de equivalência afins para o sistema (4.23), dependendo das constantes  $A, B, C$  e  $D$ .

**Teorema 4.2.1.** O sistema (4.23) é afim equivalente, usando um reescalonamento da variável independente se necessário, a um dos sistemas abaixo:

- (I) ( $a \neq c, b \neq d$ ):  $x' = xy - B, \quad y' = C(x - 1)(y - 1) - D.$
- (II) ( $a \neq c, b = d$ ):  $x' = xy - B, \quad y' = C(x - 1)y - D.$
- (III) ( $a = c, b \neq d$ ):  $x' = xy - B, \quad y' = Cx(y - 1) - D.$
- (IV) ( $a = c, b = d, B \neq 0$ ):  $x' = xy - 1, \quad y' = xy - D.$
- (V) ( $a = c, b = d, B = 0, D \neq 0$ ):  $x' = xy, \quad y' = Cxy - 1.$

(VI) ( $a = c, b = d, B = D = 0$ ):  $x' = xy, \quad y' = Cxy$ .

*Demonstração.* Considere a mudança de variáveis  $x \rightarrow ux + v, y \rightarrow wy + r$  com  $u, v, w$  e  $r$  constantes arbitrárias, temos que

$$\begin{aligned} x' &= wA \left( x - \left( \frac{a-v}{u} \right) \right) \left( y - \left( \frac{b-r}{w} \right) \right) - B \\ y' &= uC \left( x - \left( \frac{c-v}{u} \right) \right) \left( y - \left( \frac{d-r}{w} \right) \right) - D. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Faremos a prova com o sistema (I) e os outros seguirão de forma análoga. Escolhendo  $v = a$  e  $r = b$ . Considerando  $t \rightarrow wAt$  o sistema (4.23) se torna

$$\begin{aligned} x' &= xy - \frac{B}{wA}, \\ y' &= \frac{uC}{wA} \left( x - \left( \frac{c-a}{u} \right) \right) \left( y - \left( \frac{d-b}{w} \right) \right) - \frac{D}{wA}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Como  $a \neq c$  e  $b \neq d$ , podemos tomar  $u = c - a$  e  $w = d - b$ . Daí,

$$x' = xy - \bar{B}, \quad y' = \bar{C}(x-1)(y-1) - \bar{D}, \quad (4.26)$$

onde  $\bar{B}, \bar{C}$  e  $\bar{D}$  são constantes. A prova para os outros sistemas é análoga.  $\square$

Os próximos resultados fornecem informações a respeito das dinâmicas dos sistemas (II), (III) e (I).

**Proposição 4.2.1.** Considere o sistema diferencial (II).

- i. Para  $B \neq D$ , o único ponto de equilíbrio é  $P = (BC/(BC - D), (BC - D)/C)$  e para  $B = D = 0$ , todos os pontos  $(x, 0)$  com  $x \in \mathbb{R}$  são pontos de equilíbrio.
- ii. Se  $D < 0$  e  $B = (D + C\sqrt{-D})/C$ , então
  - a. Quando  $C > 0$ , o ponto de equilíbrio  $P$  é uma sela,
  - b. Quando  $C < 0$ , o ponto de equilíbrio  $P$  é um foco atrator.

*Demonstração.* A prova do item (i) segue de alguns cálculos sem complexidade. Para o item (ii), usando a mudança  $x \rightarrow x + (BC/(BC - D))$  e  $y \rightarrow y + ((BC - D)/C)$ , obtemos

$$\begin{aligned} x' &= uv + u\sqrt{-D_1} + \frac{D_1 v}{C\sqrt{-D_1}} + v, \\ y' &= Cuv + C\sqrt{-D_1}u + \frac{D_1 v}{\sqrt{-D_1}} \end{aligned} \quad (4.27)$$

com o ponto de equilíbrio  $P$  agora na origem. A linearização na origem é dada por

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{-D_1} & \frac{D_1 + C\sqrt{-D_1}}{C\sqrt{-D_1}} \\ C\sqrt{-D_1} & C \left( -1 + \frac{D_1 + C\sqrt{-D_1}}{C\sqrt{-D_1}} \right) \end{bmatrix}$$

com autovalores  $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{C\sqrt{-D_1}}$ . Para o item **a**, temos que os autovalores são reais e de sinais opostos, provando que  $P$  é uma sela. Para o item **b**, os autovalores são complexos e conjugados com parte real nula, para todo  $C < 0$ . Então, calculando os coeficientes de Liapunov para definir a estabilidade de  $P$ , obtemos a seguinte expressão para o primeiro coeficiente

$$L_1 = - \left( \frac{\sqrt{-D}C^2(C^2 + 4)}{-3C^4D - 2C^3\sqrt{-D} - 6C^2D + 3C^2 - 6C\sqrt{-D} - 3D} \right).$$

Com o auxílio computacional, obtém-se que  $L_1$  se anula apenas quando  $C = D = 0$ , mas como estamos supondo  $C < 0$  e  $D < 0$ , temos que  $L_1$  não se anula e possui um sinal fixo para estes parâmetros. Substituindo um valor arbitrário, obtemos que  $L_1 < 0$ , provando que  $P$  é atrator.  $\square$

Outros aspectos da dinâmica do sistema (II) não são complicadas de se analisar. Para sistemas do tipo (III), o mesmo problema aparece, quando  $CB < 0$  e  $D = CB - \sqrt{-CB}$ , o equilíbrio é um foco atrator e a prova é similar.

**Teorema 4.2.2.** Considere o sistema diferencial do tipo (I). Se  $B = B_1 + C^2/(1+C)^2$ ,  $D = D_1 + C/(1+C)^2$  e  $C \neq 1$ , então ele é topologicamente equivalente a

$$x' = x, \quad y' = \beta_1 + \beta_2x + x^2 + sxy + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}^3\|), \quad (4.28)$$

onde  $s = \text{sgn}(a_{20}(0) + b_{11}(0))$ .

*Demonstração.* O sistema (I) com novos parâmetros

$$\begin{aligned} x' &= xy - \left( B_1 + \frac{C^2}{(1+C)^2} \right), \\ y' &= C(x-1)(y-1) - \left( D_1 + \frac{C}{(1+C)^2} \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Sem perda de generalidade, assumiremos  $C > 1$  fixo. Observe que, quando  $B_1 = D_1 = 0$ , (4.29) possui um ponto de equilíbrio dado por  $P = (C/(1+C), C/(1+C))$  e a linearização em  $P$  tem a forma

$$L = \begin{bmatrix} \frac{C}{1+C} & \frac{C}{1+C} \\ -\frac{C}{1+C} & -\frac{C}{1+C} \end{bmatrix},$$

a qual possui dois autovalores nulos e é uma matriz não nula. Aplicando a translação  $x \rightarrow x - C/(1+C)$ ,  $y \rightarrow y - C/(1+C)$  e com o reescalonamento  $\tau \rightarrow \tau(1+C)/C$  em (4.29), obtemos:

$$\begin{aligned} x' &= - \left( \frac{-Cxy + B_1C - xC - yC - xy + B_1}{C} \right) = F(x, y), \\ y' &= \frac{xyC^2 + Cxy - CD_1 - xC - yC - D_1}{C} = G(x, y). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Considere a função

$$(x, y, B_1, D_1) \rightarrow (F(x, y), G(x, y), Tr(L(x, y)), \det(L(x, y)))$$

e o determinante da sua linearização é dado por  $-C(C-1)$ , que é não nulo, logo a função é regular para  $(x, y, B_1, D_1) = (0, 0, 0, 0)$ .

Tomando a seguinte sequência de mudanças de coordenadas:

- $x \rightarrow x + \frac{y}{1+C}, y \rightarrow \left(\frac{C}{1+C}\right)y - x;$
- $y \rightarrow y + \left(\frac{B_1C - D_1}{C}\right), x \rightarrow x - \left(\frac{\alpha_2}{2\alpha_1}\right),$

onde

$$\alpha_1 = \frac{-C^3 - 2C^2 - C}{C^2} \text{ and } \alpha_2 = \frac{B_1C^3 - C^2D_1 - B_1C + D_1}{C^2},$$

obtemos o sistema

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= b_{0,0} + b_{0,1}y + b_{2,0}x^2 + b_{1,1}xy + y^2, \end{aligned} \tag{4.31}$$

onde

- $b_{0,0} = b_{0,0}(B_1, C, D_1);$
- $b_{0,1} = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{(C+1)^2}{C} \right) B_1 - \left( \frac{(C+1)^2}{C} \right) D_1 \right);$
- $b_{2,0} = -\frac{(C-1)^2}{C};$
- $b_{1,1} = \frac{C^2 - 1}{C}.$

Para  $B_1 = D_1 = 0$ , temos que  $b_{2,0} \neq 0$  e  $a_{2,0} + b_{1,1} \neq 0$  onde  $a_{2,0} = 0$  é o coeficiente de  $x^2$  na primeira equação. De acordo com o Teorema 8.4 em [21], o sistema pode ser escrito na forma normal da família de Bogdanov-Takens (4.28).

□

**Observação 3.** A prova do teorema é semelhante para  $C < 1$ .

**Exemplo 4.2.1.**

Seja  $X$  uma família a 2 parâmetros de campos 2-cruz suaves por partes definidos em  $\mathbb{R}^3$ , dado por

$$\begin{aligned} X_{++} &= \left( \frac{5}{36} - \frac{\alpha}{4}, -\frac{1}{18} - \frac{\beta}{4}, 1 \right), & X_{+-} &= \left( -\frac{13}{36} - \frac{\alpha}{4}, -\frac{1}{18} - \frac{\beta}{4}, 1 \right), \\ X_{--} &= \left( \frac{5}{36} - \frac{\alpha}{4}, \frac{35}{18} - \frac{\beta}{4}, 1 \right), & X_{-+} &= \left( -\frac{13}{36} - \frac{\alpha}{4}, -\frac{1}{18} - \frac{\beta}{4}, 1 \right), \end{aligned}$$

com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Relembremos que  $M_{\pm\pm}$  são as regiões onde  $X_{\pm\pm}$  estão definidos. Tomando o blow-up direcional  $x \rightarrow \varepsilon x$ ,  $y \rightarrow \eta y$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon x' &= -\frac{4}{9} + \varphi(x)\varphi(y) - \alpha, \\ \eta y' &= -2\varphi(x) - 2\varphi(y) + \frac{16}{9} - \beta + 2\varphi(x)\varphi(y), \\ z' &= 1.\end{aligned}\tag{4.32}$$

Para valores suficientemente pequenos de  $\varepsilon, \eta$ , usando a função de transição como a identidade no sistema (4.32) temos que

$$\begin{aligned}\varepsilon x' &= -\frac{4}{9} + xy - \alpha, \\ \eta y' &= -2x - 2y + \frac{16}{9} - \beta + 2xy.\end{aligned}\tag{4.33}$$

Primeiramente, considere  $\varepsilon = \eta = 1$  para analisar a bifurcação que aparece quando  $\alpha = \beta = 0$ . Considerando a seguinte sequência de mudança de coordenadas:

- $x \rightarrow x + \frac{2}{3}; y \rightarrow y + \frac{2}{3};$
- $t \rightarrow \frac{3}{2}t;$
- $x \rightarrow x + \frac{y}{3}, y \rightarrow \frac{2}{3}y - x;$
- $y \rightarrow y + \alpha - \frac{\beta}{2}, x \rightarrow x + \frac{1}{6}\alpha - \frac{\beta}{12};$

obtemos

$$\begin{aligned}x' &= y, \\ y' &= \mu + \nu y - \frac{9}{2}x^2 + \frac{3}{2}xy + y^2,\end{aligned}\tag{4.34}$$

onde

$$\mu = -\frac{3}{2}\beta + \frac{9}{8}\alpha^2 - \frac{9}{8}\alpha\beta + \frac{9}{32}\beta^2 - \frac{3}{2}\alpha \text{ e } \nu = \frac{9}{4}\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right).$$

Observe que, o sistema (4.34) é a forma normal da bifurcação de Bogdanov-Takens de codimensão 2. Calculando os pontos de equilíbrio de (4.34), temos que para  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $36\alpha^2 - 36\alpha\beta + 9\beta^2 - 48\alpha - 48\beta > 0$ , o sistema possui pontos de equilíbrio (exceto quando ambos parâmetros são 0, quando temos apenas um único equilíbrio). Usando as expressões locais para as curvas  $H$  e  $C$  obtemos o diagrama de bifurcação mostrado na Figura 4.5.

Para os parâmetros na região I não há singularidades. A curva  $S$  é uma curva de bifurcações sela-nó genéricos e, portanto, há uma sela e um equilíbrio estável em II. De II para III passamos pela curva  $H$ , que denota uma linha de bifurcações genéricas de Hopf. Por conseguinte, em III há um ponto de sela, um ponto de equilíbrio repulsor e

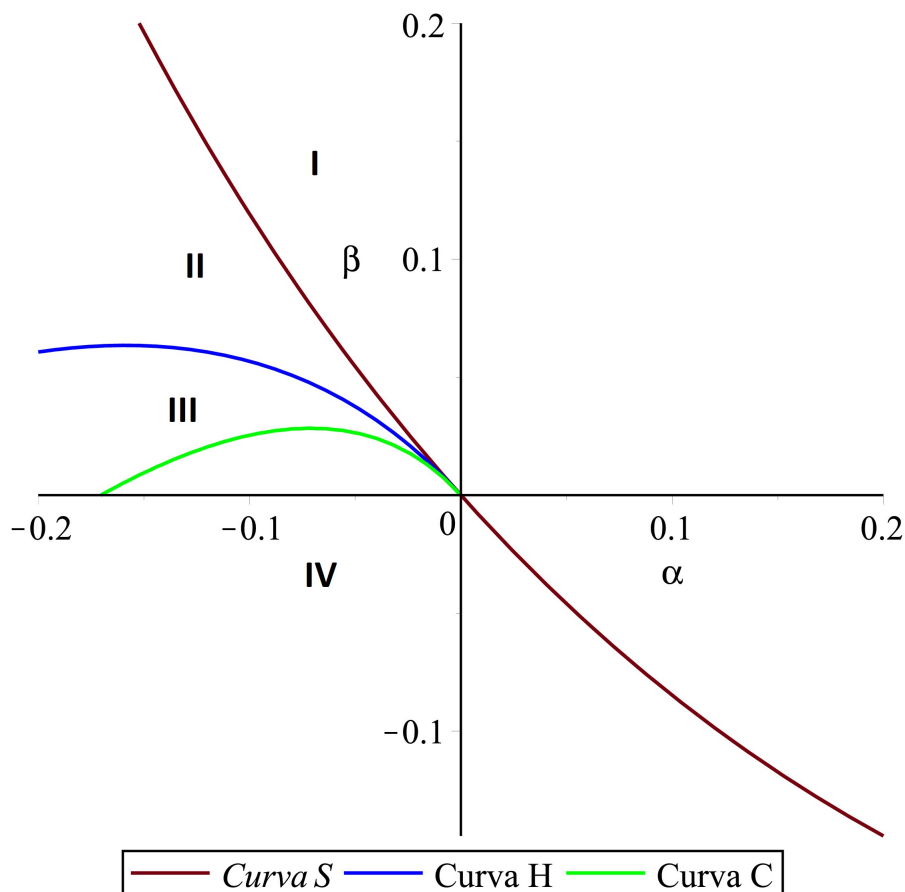


Figura 4.5: Diagrama de bifurcação de (4.34).

um ciclo limite atrator em torno do último. O ciclo limite desaparece em uma conexão homoclínica na sela (global) à medida que passamos de III para IV pela curva  $C$ . Finalmente o equilíbrio atrator e o ponto de sela IV colapsam em uma bifurcação sela-nó quando passamos de volta para I via  $S$ .

Consideremos novamente os parâmetros  $\varepsilon$  e  $\eta$  para o sistema  $xy$ . Como vimos anteriormente, nós temos três possibilidades para a interação entre os parâmetros,  $\varepsilon/\eta = 0$ ,  $\varepsilon/\eta = \infty$  ou  $\varepsilon/\eta = k$ ,  $k > 0$ . Para as duas primeiras interações, a bifurcação Bogdanov-Takens de codimensão 2 não ocorre, portanto o deslize será decidido pelo Teorema 4.1.3. Mas, para a interação  $\varepsilon/\eta = 1$ , a bifurcação fica bem definida e o retrato de fase para cada um dos parâmetros nas regiões descritas pela Figura 4.5 permanece sem se alterar quando  $\varepsilon, \eta \rightarrow 0$ . Então, vamos verificar para quais parâmetros teremos uma região de deslize (tempo positivo):

- Se  $\alpha, \beta \in I$ , o sistema  $xy$  não possui pontos de equilíbrio, o que implica que  $X$  não possui uma região de deslize.
- Se  $\alpha, \beta \in S$ , o sistema  $xy$  possui um equilíbrio do tipo sela-nó, atrator no lado do nó.  $\Sigma_{+0}$  possui apenas regiões de costura e qualquer trajetória começando em

$M_{++}$  cruza  $\Sigma_{+0}$  e é atraída para  $\Sigma_{0-}$  ou diretamente para  $\Sigma_{00}$ . Se a trajetória intercepta  $\Sigma_{0-}$ , ele desliza para  $\Sigma_{00}$ . Para uma trajetória começando em  $M_{-+}$ , ele é atraído para  $\Sigma_{-0}$  e depois disso desliza se afastando de  $\Sigma_{00}$ . Para uma trajetória começando em  $M_{--}$  três possibilidades podem ocorrer: ou é atraída para  $\Sigma_{-0}$  para  $\Sigma_{00}$  ou para  $\Sigma_{0-}$ .

- Se  $\alpha, \beta \in II$ , o sistema  $xy$  possui uma sela e um nó atrator; se  $\alpha, \beta \in H \cup III$  o sistema  $xy$  possui um ponto de sela e um foco (bifurcação de Hopf), com ciclo limite repulsor na região III. Para todos os casos  $\Sigma_{+0}$  possui apenas regiões de costura e qualquer trajetória começando em  $M_{++}$  cruza  $\Sigma_{+0}$  e é atraída para  $\Sigma_{0-}$  ou diretamente para  $\Sigma_{00}$ . Se a trajetória intercepta  $\Sigma_{0-}$ , ele desliza para  $\Sigma_{00}$ . Para uma trajetória começando em  $M_{-+}$ , ele é atraído para  $\Sigma_{-0}$  e depois disso desliza se afastando de  $\Sigma_{00}$ . Para uma trajetória começando em  $M_{--}$  três possibilidades podem ocorrer: ou é atraída para  $\Sigma_{-0}$  para  $\Sigma_{00}$  ou para  $\Sigma_{0-}$ .
- Se  $\alpha, \beta \in C \cup IV$  ou  $\alpha = \beta = 0$ , as trajetórias de  $X$  são descritas no caso anterior.

#### Exemplo 4.2.2.

Seja  $X$  o campo 2-cruz suave por partes definido em  $\mathbb{R}^3$ , dado por  $X(x, y, z) = X_{\pm\pm}(x, y, z)$  onde

$$\begin{aligned} X_{++} &= \left( \frac{259}{1800}, \frac{13969}{351900} - \frac{\sqrt{13519}}{1173}, 1 \right), & X_{+-} &= \left( -\frac{641}{1800}, \frac{13969}{351900} - \frac{\sqrt{13519}}{1173}, 1 \right), \\ X_{--} &= \left( \frac{259}{1800}, \frac{717769}{351900} - \frac{\sqrt{13519}}{1173}, 1 \right), & X_{-+} &= \left( -\frac{641}{1800}, \frac{59}{900} - \frac{\sqrt{13519}}{1173}, 1 \right), \end{aligned}$$

Dada a função de transição  $\varphi$  considere  $x \rightarrow \varepsilon x$  e  $y \rightarrow \eta y$ . Temos que

$$\begin{aligned} \varepsilon x' &= xy - \frac{191}{450}, \\ \eta y' &= \left( \frac{189919}{87975} - \frac{4\sqrt{13519}}{1173} - 2(x + y + xy) \right), \\ z' &= 1, \end{aligned} \tag{4.35}$$

Através de um cálculo simples, é fácil verificar que o sistema possui dois pontos de equilíbrio. Analisemos então a influência exercida pelos parâmetros na estabilidade do ponto de equilíbrio não sela. Considere o ponto de equilíbrio não sela  $P = (P_1, P_2)$ , onde

$$P_1 = -\frac{74681}{15(21\sqrt{2}\sqrt{13519} - 2100\sqrt{2} + 10\sqrt{13519} - 8820)}$$

e

$$P_2 = -\frac{\sqrt{13519}}{1173} + \frac{294}{391} - \frac{7\sqrt{27038}}{3910} + \frac{70\sqrt{2}}{391}.$$

Considere a linearização do sistema  $xy$  em  $P$ .

- i. Para  $\varepsilon/\eta \rightarrow 1$  quando  $\varepsilon, \eta \rightarrow 0$ , os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são ambos negativos, implicando que  $P$  é um nó atrator.
- ii. Para  $\varepsilon/\eta \rightarrow \infty$  quando  $\varepsilon, \eta \rightarrow 0$ , os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são ambos negativos, implicando que  $P$  é um nó atrator, ver Figura 4.6.

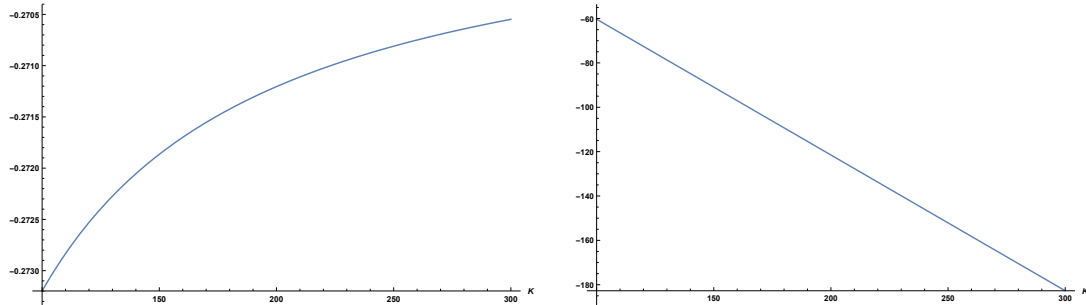


Figura 4.6: Valor dos autovalores de  $K = \varepsilon/\eta$  vai para  $\infty$ .

- iii. Para  $\varepsilon/\eta \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon, \eta \rightarrow 0$  os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são ambos positivos, implicando que  $P$  é um nó repulsor, ver Figura 4.7.

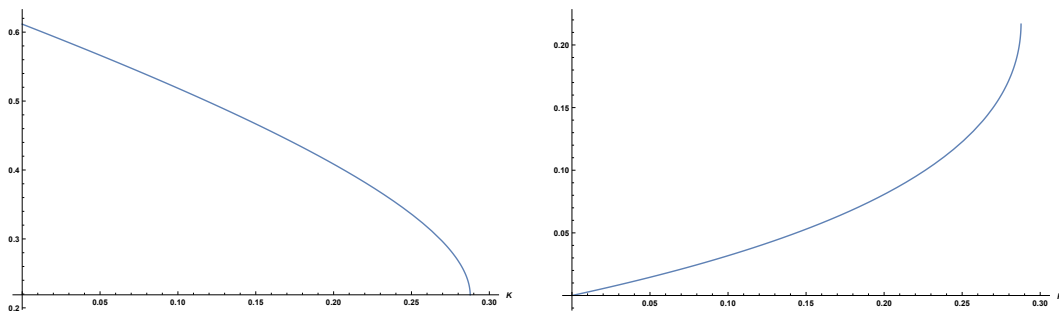


Figura 4.7: Valor dos autovalores quando  $K = \varepsilon/\eta \rightarrow 0$ .

Observe que estes resultados são consistentes com a Proposição 4.1.3. Daí, a origem é um ponto de deslize.

### Exemplo 4.2.3.

Seja  $X$  o campo 2-cruz suave por partes definido em  $\mathbb{R}^3$ , dado por

$$\begin{aligned} X_{++} &= \left( \frac{277}{1800}, -\frac{59}{900}, 1 \right), & X_{+-} &= \left( -\frac{623}{1800}, -\frac{59}{900}, 1 \right), \\ X_{--} &= \left( \frac{277}{1800}, \frac{1741}{900}, 1 \right), & X_{-+} &= \left( -\frac{623}{1800}, -\frac{59}{900}, 1 \right), \end{aligned}$$

obtido do Exemplo 4.2.1, com  $\alpha = -6/100$  e  $\beta = 4/100$  (região III). Consideremos a

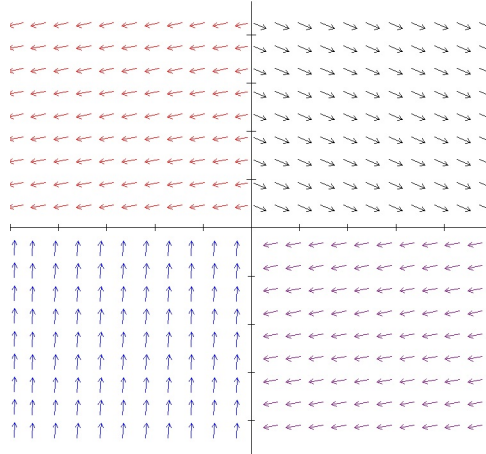


Figura 4.8: Esboço do retrato de fase de  $X$  no plano  $z = z_0$  com campos vetoriais  $X_{++}$  em preto,  $X_{-+}$  em vermelho,  $X_{--}$  em azul e  $X_{+-}$  em roxo.

condição inicial  $P_1 = (0.5, 0.5)$ . A trajetória de  $X_{++}$  começando em  $P_1$  é

$$x(t) = (277/1800)t + 1/2, \quad y(t) = -(59/900)t + 1/2. \quad (4.36)$$

Depois de  $t = 450/59$ , a trajetória chega em  $\Sigma_{+0}$  no  $P_2 = (395/236, 0)$  e como visto anteriormente,  $\Sigma_{+0}$  é uma região de costura. Então, tomamos a trajetória de  $X_{+-}$  por  $P_2$  quando  $t = 450/59$

$$x(t) = -(623/1800)t + 509/118, \quad y(t) = -(59/900)t + 1/2. \quad (4.37)$$

Depois de  $t = 458100/36757$  a solução chega em  $\Sigma_{0-}$ , que é a variedade deslizante. Calculando o campo deslizante de Filippov em  $\Sigma_{0-}$ ,

$$X_{0-}^{sl} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1187}{900} \end{bmatrix}$$

e a sua trajetória começando em  $P_3 = (0, -395/1246)$  em  $t = 458100/36757$ , obtemos

$$x(t) = 0, \quad y(t) = (1187/900)t - 1977/118. \quad (4.38)$$

Finalmente, depois de  $t = \frac{1779300}{140066}$  a solução chega e desliza em  $\Sigma_{00}$ , como esperado.

A reta  $(x(t), y(t)) = (\frac{277t}{1800} - \frac{277}{3482}, \frac{1741t}{900} - 1)$  localizada no terceiro quadrante, Figura 4.10, delimita a bacia de atração de  $\Sigma_{00}$  (região hachurada) e de  $\Sigma_{-0}$  (região não hachurada).

### 4.3 Estudo da 3-cruz em $\mathbb{R}^4$

Seja um 3-campo vetorial definido em  $\mathbb{R}^4$ , dado por  $X(x) = X_s(x)$ , onde  $X_s = (f_s(x), g_s(x), h_s(x))$  são campos suaves com a origem sendo um ponto não singular,

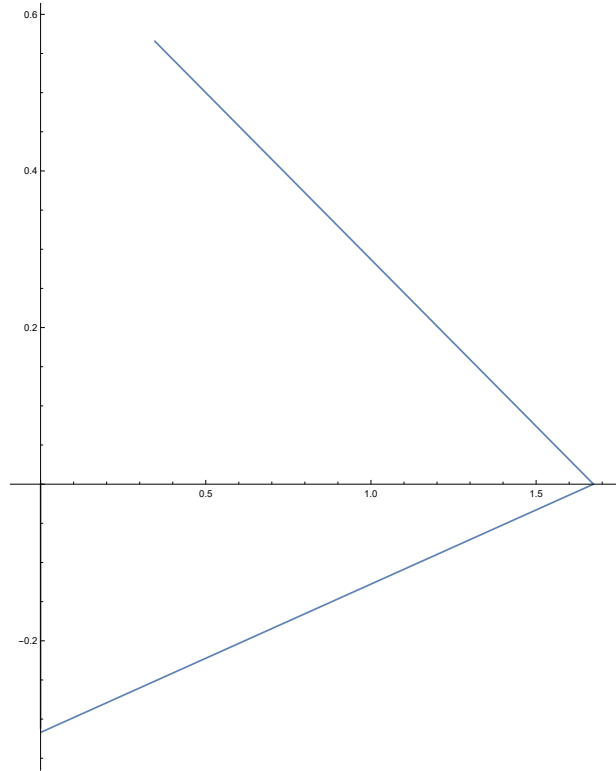


Figura 4.9: Gráfico da solução por partes começando em  $(0.5, 0.5)$ .

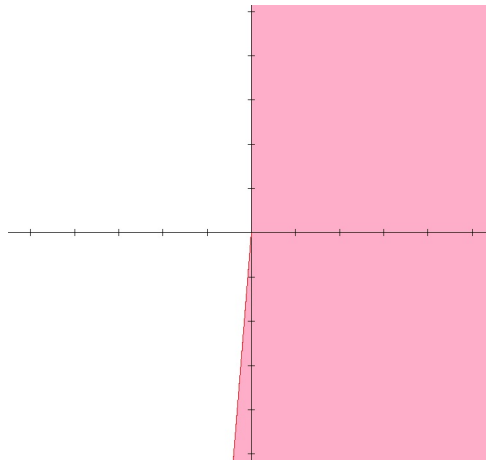


Figura 4.10: Bacia de atração de  $\Sigma_{00}$  (hachurada) e de  $\Sigma_{-0}$  (não hachurada).

$s \in \{+, -\}^3$ . Considere a 3-regularização de  $X$  dada por

$$X_\varepsilon = \frac{1}{8} \sum_{s \in \{+, -\}^3} (1 + s_1 \varphi(x_1/\varepsilon_1)) (1 + s_2 \varphi(x_2/\varepsilon_2)) (1 + s_3 \varphi(x_3/\varepsilon_3)) X_s. \quad (4.39)$$

Tal como na seção anterior, vamos analisar o sistema  $x_1 x_2 x_3$  para definirmos as condições para o deslize. Fazendo um blow-up direcional  $x_1 \rightarrow x_1/\varepsilon_1$ ,  $x_2 \rightarrow x_2/\varepsilon_2$  e  $x_3 \rightarrow x_3/\varepsilon_3$ , considerando a equivalência topológica  $\varphi(x_i) \approx x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , obtemos, já

escrevendo na forma de sistema diferencial,

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{1}{8\varepsilon_1} \sum_{s \in \{+, -\}^3} (1 + s_1 x_1) (1 + s_2 x_2) (1 + s_3 x_3) f_s(x); \\ x'_2 &= \frac{1}{8\varepsilon_2} \sum_{s \in \{+, -\}^3} (1 + s_1 x_1) (1 + s_2 x_2) (1 + s_3 x_3) g_s(x); \\ x'_3 &= \frac{1}{8\varepsilon_3} \sum_{s \in \{+, -\}^3} (1 + s_1 x_1) (1 + s_2 x_2) (1 + s_3 x_3) h_s(x). \end{aligned} \tag{4.40}$$

Para definirmos as condições para o deslize numa vizinhança da origem, primeiro precisamos estabelecer um critério para garantir a existência de pontos de equilíbrio no conjunto  $I^3 = [-1, 1]^3$ . Em seguida, classificar as possíveis estabilidades destes equilíbrios, de modo a obtermos variedades invariantes e, por fim, verificarmos como as curvas regularizantes influenciam no deslize.

O teorema a seguir fornece uma condição para garantir a existência de equilíbrios em  $I^3$  para o sistema (4.40).

**Teorema 4.3.1** (Poincaré-Miranda). Seja  $G = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| < L, 1 \leq i \leq n\}$  e suponha que a função  $F = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é contínua no fecho  $\bar{G}$  de  $G$  tal que  $F(x) \neq 0$ , para  $x$  no bordo  $\delta G$  de  $G$  e ainda

- i.  $f_i(x_1, x_2, \dots, -L, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq 0$  para  $1 \leq i \leq n$  e
- ii.  $f_i(x_1, x_2, \dots, L, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0$  para  $1 \leq i \leq n$ .

Então,  $F(x) = 0$  possui solução em  $G$ .

A prova deste teorema pode ser encontrada em [34].

No nosso caso, o conjunto  $G$  é  $I^3$  e a função  $F$  é o campo associado ao sistema (4.40). Agora que temos uma ferramenta que nos fornece condições para a existência dos pontos de equilíbrio, precisamos determinar a estabilidade destes equilíbrios. Uma forma de garantir isso é olhando para os autovalores da linearização de (4.40) no equilíbrio, que são as raízes do polinômio característico associado à matriz da linearização.

**Proposição 4.3.1** (Routh-Hurwitz). Dado um polinômio  $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ . Se  $a, b, c$  são positivos e  $ab > c$  então  $P(x) = 0$  é estável, isto é, todas as raízes possuem partes reais negativas.

A prova dessa proposição pode ser encontrada em [29].

Sabemos que, se um equilíbrio do sistema (4.40) for assintoticamente estável, teremos então, localmente, um deslize na 3-cruz, pela definição 2.0.8. Suponhamos então que o sistema possua um número finito de equilíbrios em  $I^3$ . Verifiquemos agora as

possíveis curvas regularizantes e de que forma elas influenciam a estabilidade do equilíbrio.

Consideremos as seguintes curvas, que representam algumas possibilidades para  $\varepsilon_i$  suficientemente pequenos,  $i = 1, 2, 3$ :

- i.  $\alpha_1 = (\varepsilon_1, k_1\varepsilon_1, k_2\varepsilon_1)$ ,  $k_1 \neq 0$  e  $k_2 \neq 0$ ;
- ii.  $\alpha_2 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_2)$ , com  $\varepsilon_2/\varepsilon_1, \varepsilon_3/\varepsilon_1, \varepsilon_3/\varepsilon_2 \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rightarrow 0$ ;
- iii.  $\alpha_3 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_2)$ , com  $\varepsilon_2/\varepsilon_1, \varepsilon_3/\varepsilon_1, \varepsilon_2/\varepsilon_3 \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rightarrow 0$ ;
- iv.  $\alpha_4 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_2)$ , com  $\varepsilon_1/\varepsilon_2, \varepsilon_3/\varepsilon_2, \varepsilon_3/\varepsilon_1 \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rightarrow 0$ ;
- v.  $\alpha_5 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_2)$ , com  $\varepsilon_1/\varepsilon_2, \varepsilon_3/\varepsilon_2, \varepsilon_1/\varepsilon_3 \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rightarrow 0$ ;;
- vi.  $\alpha_6 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_2)$ , com  $\varepsilon_1/\varepsilon_3, \varepsilon_2/\varepsilon_3, \varepsilon_2/\varepsilon_1 \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rightarrow 0$ ;
- vii.  $\alpha_7 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_2)$ , com  $\varepsilon_1/\varepsilon_3, \varepsilon_2/\varepsilon_3, \varepsilon_1/\varepsilon_2 \rightarrow 0$  quando  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rightarrow 0$ ;

Vamos analisar a influência das curvas regularizantes na estabilidade dos pontos equilíbrios. Suponha que o sistema (4.40) possua um ponto de equilíbrio  $p_0$  em  $I^3$  e seja

$$J(p_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(p_0) & \frac{\partial}{\partial y} f(p_0) & \frac{\partial}{\partial z} f(p_0) \\ \frac{\partial}{\partial x} g(p_0) & \frac{\partial}{\partial y} g(p_0) & \frac{\partial}{\partial z} g(p_0) \\ \frac{\partial}{\partial x} h(p_0) & \frac{\partial}{\partial y} h(p_0) & \frac{\partial}{\partial z} h(p_0) \end{bmatrix} \begin{matrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{matrix} \quad (4.41)$$

a linearização do sistema (4.40) calculada em  $p_0$ . Considere o polinômio característico de  $J$ ,  $Q_{p_0}(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$ , onde os coeficientes  $a, b$  e  $c$  são dados por

$$a = - \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x} f(p_0)\right) \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \left(\frac{\partial}{\partial y} g(p_0)\right) \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \left(\frac{\partial}{\partial z} h(p_0)\right) \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2},$$

$$b = - \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3} \left( \left( \left( \frac{\partial}{\partial y} g(p_0) \right) \frac{\partial}{\partial z} h(p_0) - \left( \frac{\partial}{\partial y} h(p_0) \right) \frac{\partial}{\partial z} g(p_0) \right) \varepsilon_1 \right. \\ \left. + \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} f(p_0) \right) \frac{\partial}{\partial z} h(p_0) - \left( \frac{\partial}{\partial x} h(p_0) \right) \frac{\partial}{\partial z} f(p_0) \right) \varepsilon_2 \right. \\ \left. + \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} f(p_0) \right) \frac{\partial}{\partial y} g(p_0) - \left( \frac{\partial}{\partial x} g(p_0) \right) \frac{\partial}{\partial y} f(p_0) \right) \varepsilon_3 \right),$$

$$c = \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} g(p_0) \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} f(p_0) \right) \frac{\partial}{\partial z} h(p_0) - \left( \frac{\partial}{\partial x} g(p_0) \right) \left( \frac{\partial}{\partial z} f(p_0) \right) \frac{\partial}{\partial y} h(p_0) \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial}{\partial x} f(p_0) \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} h(p_0) \right) \frac{\partial}{\partial z} g(p_0) - \left( \frac{\partial}{\partial x} f(p_0) \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} g(p_0) \right) \frac{\partial}{\partial z} h(p_0) \right. \\ \left. - \left( \frac{\partial}{\partial x} h(p_0) \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} f(p_0) \right) \frac{\partial}{\partial z} g(p_0) + \left( \frac{\partial}{\partial x} h(p_0) \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} g(p_0) \right) \frac{\partial}{\partial z} f(p_0) \right),$$

Se as partes reais dos autovalores forem negativas, temos então que, o equilíbrio é assintoticamente estável, o que implica que temos variedades invariantes se aproximando da origem e portanto temos uma região de deslize na 3-cruz. Suponha que a Proposição [4.3.1](#) seja satisfeita quando  $\varepsilon_i = 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Para a curva regularizante  $\alpha_1$ , fica claro que as condições de Routh-Hurwitz não se alteram, restando então analisar as outras curvas regularizantes  $\alpha_j$ ,  $j = 2, \dots, 7$ .

Observe que, para qualquer curva regularizante os parâmetros  $\varepsilon_i$  não alteram o sinal de  $c$ . Para verificar a desigualdade  $ab > c$  a medida que os parâmetros tendem a 0 é suficiente garantir que  $c/ab \rightarrow 0$ , quando  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rightarrow 0$  para as curvas regularizantes  $\alpha_j$ ,  $j = 2, \dots, 7$ . Daí, temos que  $c/ab$  é dado por

$$\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 (f_x g_y h_z - f_x g_z h_y - f_y g_x h_z + f_y g_z h_x + f_z g_x h_y - f_z g_y h_x)}{(\varepsilon_2 \varepsilon_3 f_x + g_y \varepsilon_1 \varepsilon_3 + h_z \varepsilon_1 \varepsilon_2) (f_x f_z h_z \varepsilon_2 - f_z^2 h_x \varepsilon_2 + f_x g_y \varepsilon_3 - f_y g_x \varepsilon_3 + g_y h_z \varepsilon_1 - g_z h_y \varepsilon_1)},$$

onde  $f_*$ ,  $g_*$ ,  $h_*$  são as derivadas parciais em relação a  $x$ ,  $y$  ou  $z$  calculadas em  $p_0$ . Como o denominador possui termos cúbicos em maior quantidade que o numerador, segue que para as curvas  $\alpha_i$ ,  $i = 2, \dots, 7$ ,  $c/ab \rightarrow 0$  e, portanto, a desigualdade se mantém. Resta agora analisar a influência das curvas regularizantes no sinal de  $a$  e  $b$ .

Tome, por exemplo, a curva  $\alpha_2$ . Temos que  $\varepsilon_1$  tende a zero mais rápido que as outras componentes da curva regularizante, o que implica que o sinal de  $a$  depende de  $\partial f(p_0)/\partial x$ . Logo, se  $|\partial f(p_0)/\partial x| \geq |\partial g(p_0)/\partial y|$  e  $|\partial f(p_0)/\partial x| \geq |\partial h(p_0)/\partial z|$ , então para  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$  suficientemente pequenos, o sinal de  $a$  depende do sinal de  $\partial f(p_0)/\partial x$ . Para o coeficiente  $b$  o sinal depende do termo

$$\left( - \left( \frac{\partial}{\partial x} g(p_0) \right) \frac{\partial}{\partial y} f(p_0) + \left( \frac{\partial}{\partial x} f(p_0) \right) \frac{\partial}{\partial y} g(p_0) \right), \quad (4.42)$$

uma vez que  $\varepsilon_2$  tende a zero mais rápido que  $\varepsilon_3$ . Portanto, se  $\partial f(p_0)/\partial x < 0$  e [\(4.42\)](#) for negativo, então  $a > 0$  e  $b > 0$ , implicando que o equilíbrio é assintoticamente estável. A conclusão para as outras curvas regularizantes é semelhante, mudando os termos que definem os sinais para valores suficientemente pequenos dos parâmetros  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$ , veja Tabela [4.1](#).

Portanto, quando os equilíbrios do sistema [\(4.40\)](#) são hiperbólicos, temos algumas condições para garantir a existência da região de deslize. O mesmo vale para um campo 3-cruz definido em  $\mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 3$ , com a dinâmica sobre a cruz dada pelos termos do sistema sem os parâmetros, caso que só ocorre quando  $n > 3$ .

### Exemplo 4.3.2.

	$a > 0$	$b > 0$
$\alpha_2$	$\partial_x f(P) < 0$	$\partial_x f(P)\partial_y g(P) - \partial_x g(P)\partial_y f(P) < 0$
$\alpha_3$	$\partial_x f(P) < 0$	$\partial_x f(P)\partial_z h(P) - \partial_x h(P)\partial_z f(P) < 0$
$\alpha_4$	$\partial_y g(P) < 0$	$\partial_x f(P)\partial_y g(P) - \partial_x g(P)\partial_y f(P) < 0$
$\alpha_5$	$\partial_y g(P) < 0$	$\partial_y g(P)\partial_z h(P) - \partial_y h(P)\partial_z g(P) < 0$
$\alpha_6$	$\partial_z h(P) < 0$	$\partial_x f(P)\partial_z h(P) - \partial_x h(P)\partial_z f(P) < 0$
$\alpha_7$	$\partial_z h(P) < 0$	$\partial_y g(P)\partial_z h(P) - \partial_y h(P)\partial_z g(P) < 0$

Tabela 4.1: Condições para cada curva regularizante

Seja  $X$  um 3-campo suave definido em  $\mathbb{R}^4$  dado por  $X(\mathbf{x}) = X_{\pm\pm\pm}(\mathbf{x})$ , onde

$$\begin{aligned} X_{++++} &= (-1, -1, -1, w), & X_{+++-} &= (2/3, -1, 0, w), \\ X_{+--+} &= (-1, 1, 1, w), & X_{+---} &= (-1, 1, 1/3, w), \\ X_{-++-} &= (1, 3, -1, w), & X_{--+-} &= (1, -1, -1, w), \\ X_{----} &= (1, 0, -1, w), & X_{-+-} &= (1, 1, -1, w), \end{aligned}$$

com  $\mathbf{x} = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ . A regularização de  $X$  é dada por,

$$X_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3} = \frac{1}{8} \sum_{\pm, \pm, \pm} (1 \pm \varphi(x/\varepsilon_1)) (1 \pm \varphi(y/\varepsilon_2)) (1 \pm \varphi(z/\varepsilon_3)) X_{\pm, \pm, \pm}. \quad (4.43)$$

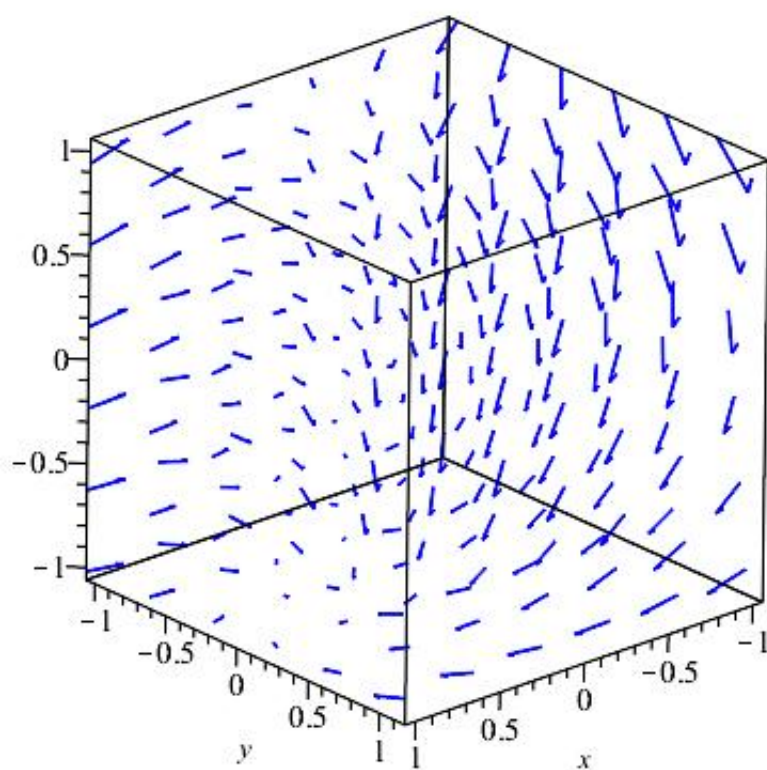
Fazendo o blow-up direcional  $\bar{x} = x/\varepsilon_1, \bar{y} = y/\varepsilon_2$  e  $\bar{z} = z/\varepsilon_3$ , juntamente com a equivalência local  $\bar{x} \equiv \varphi(\bar{x})$ , obtemos o seguinte sistema (sem a barra por simplicidade de notação)

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \dot{x} &= \frac{1}{24} (-19x - 5z + 5 + 5xy - 5xz - 5yz - 5xyz + 5y), \\ \varepsilon_2 \dot{y} &= -\frac{1}{8} (3x + 3z - 5xy - 3xz + 5yz + 3 - 5xyz - 3y), \\ \varepsilon_3 \dot{z} &= \frac{1}{24} (13x - z - 11 - 7xy - 1xz - 5yz - 5xyz - 7y), \\ \dot{w} &= w. \end{cases} \quad (4.44)$$

Considere o sistema  $xyz$  que é o reduzido de (4.44). O único ponto de equilíbrio é dado por  $P = (5/7, 0, -1)$  e o polinômio característico da linearização em  $P$  é dado por

$$Q = \lambda^3 + \frac{(6\varepsilon_2\varepsilon_1 + 84\varepsilon_3\varepsilon_1 + 49\varepsilon_3\varepsilon_2)\lambda^2}{84\varepsilon_3\varepsilon_1\varepsilon_2} + \frac{(147\varepsilon_2 + 51\varepsilon_1 + 343\varepsilon_3)\lambda}{588\varepsilon_3\varepsilon_1\varepsilon_2} + \frac{3}{14\varepsilon_3\varepsilon_1\varepsilon_2}.$$

É fácil ver que,  $Q$  satisfaz a condição de Routh-Hurwitz para todo  $\varepsilon_i, i = 1, 2, 3$ , ver Figura 4.11, logo para qualquer curva regularizante, existe uma região de deslize contendo a origem.

Figura 4.11: Esboço do campo em  $I^3$ .

## 5 Comparação entre os campos

Neste capítulo apresentaremos algumas considerações acerca da semelhança entre a definição de campo momento discutida na seção 3.2 e a definição de deslize via regularização do capítulo 4. Toda a discussão será feita para 2-campos vetoriais definidos em  $\mathbb{R}^3$  e quando nos referirmos à regularização utilizaremos a curva regularizante do tipo linear.

### 5.1 Unicidade dos campos de Filippov sem singularidades

O resultado que será discutido nesta seção, bem como as definições e notações, foram apresentadas por [13] e se referem a campos deslizantes sem singularidades no  $\mathbb{R}^3$  da classe de Filippov.

Considere a definição abaixo de um ponto de saída de primeira ordem, que é equivalente a definição 3.2.3.

**Definição 5.1.1.** Suponha que uma solução deslizando sobre  $\Sigma$  encontre um ponto  $x \in \Sigma$ , onde uma e, apenas uma das condições abaixo seja satisfeita:

- (i) Saindo para  $\Sigma_2^-$  ou  $\Sigma_2^+$ :  $\nabla h_1(x)f_{\Sigma_2}^-(x) = 0$  ou  $\nabla h_1(x)f_{\Sigma_2}^+(x) = 0$ ;
- (ii) Saindo para  $\Sigma_1^-$  ou  $\Sigma_1^+$ :  $\nabla h_2(x)f_{\Sigma_1}^-(x) = 0$  ou  $\nabla h_2(x)f_{\Sigma_1}^+(x) = 0$ .

Então, dizemos que o ponto é um ponto de saída genérico de primeira ordem.

Note que esta definição depende apenas dos campos deslizantes  $f_{\Sigma_1}^\pm$  e  $f_{\Sigma_2}^\pm$ . Assumiremos e, nenhum campo de Filippov em  $\Sigma$  possua equilíbrio. Quando essa suposição não se verifica, dinâmicas diferentes podem ser observadas.

**Exemplo 5.1.1.**

Considere o seguinte campo 2-cruz  $X$  dado por

$$X_{++} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/4 \end{bmatrix}, X_{+-} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}, X_{--} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, X_{-+} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1/4 \end{bmatrix},$$

com  $\Sigma$  sendo a 2-cruz. Calculando a classe da campos de Filippov, obtemos

$$\mathcal{F}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c - 1/4 \end{bmatrix},$$

com  $c \in [0, 0.5]$ . Consideramos aqui apenas campos suaves, então  $c$  pode ser qualquer função suave de  $x_3$ . Por exemplo, suponha as seguintes escolhas de  $c$ :

- (i)  $1/10$ ,
- (ii)  $c = -\arctg(x_3)/2\pi + 1/4$ ,
- (iii)  $c = 1/4$  e
- (iv)  $c = 2/5$ .

Escolhendo  $c$  dos itens (i) e (iv),  $X_\Sigma$  não possui nenhum equilíbrio, porém orientações diferentes. Para o item (ii), a origem é um equilíbrio assintoticamente estável para  $X_\Sigma$  e por fim, para o item (iii), todo ponto em  $\Sigma$  é ponto de equilíbrio para  $X_\Sigma$ .

**Exemplo 5.1.2.**

Considere o seguinte campo 2-cruz  $X$  dado por

$$\begin{aligned} X_{++} &= \begin{bmatrix} 1 - 3x_1/4 \\ x_2 - 1 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix}, & X_{+-} &= \begin{bmatrix} 1 - 3x_1/4 \\ -x_2/2 \\ -x_2 \end{bmatrix}, \\ X_{--} &= \begin{bmatrix} 1 - 3x_1/4 \\ 1 - x_2/2 \\ (x_1 + x_2)/2 \end{bmatrix}, & X_{-+} &= \begin{bmatrix} -1/4 - 3x_1/4 + x_3/2 \\ 1 - x_2/2 \\ x_1/2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

com  $\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 1\}$  atratora e é atingida pelo deslize de  $\Sigma_1^+$  para  $x_3 < 3/2$  e em  $x_3 = 3/2$  temos um ponto de saída de primeira ordem para  $\Sigma_1^+$ . Calculando a família de campos de Filippov, obtemos

$$\mathcal{F}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\lambda_2 + \frac{2 - x_3}{5 - 2x_3} \end{bmatrix},$$

onde  $\lambda_2$ , que pode ser uma função suave de  $x_3$ , deve satisfazer  $0 \leq \lambda_2 \leq 1/2$ . Os coeficientes da combinação convexa de Filippov devem satisfazer:  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1/2$ ,  $\lambda_3 = (3 - 2x_3)/2(5 - 2x_3)$  e  $\lambda_4 = 1/(5 - 2x_3)$ . Escolhendo valores diferentes para  $\lambda_2$ , obtemos comportamentos distintos, por exemplo:

- (i)  $\lambda_2 = 1/4$  resulta em um campo com equilíbrio no ponto de saída  $x_3 = 3/2$ ;
- (ii)  $\lambda_2 = 1/8$  resulta em um campo com equilíbrio em  $x_3 = 11/6$ , que é depois do ponto de saída;

- (iii)  $\lambda_2 = 3/8$  resulta em um campo com equilíbrio em  $x_3 = 1/2$ , que é antes do ponto de saída;
- (iv)  $\lambda_2 = -8x_3(x_3 - 3/2)$  resulta em um campo com dois equilíbrios antes do ponto de saída.

**Definição 5.1.2.** Diremos que dois campos da classe de Filippov, isto é,  $X_\Sigma, Y_\Sigma \in \mathcal{F}(x)$ , são orbitalmente equivalentes se existir uma reparametrização do tempo levando o campo  $X_\Sigma$  no campo  $Y_\Sigma$ .

Esta definição nos diz que soluções associadas a campos diferentes têm a mesma órbita, mas com tempos diferentes. Observe que, se  $X_\Sigma$  é orbitalmente equivalente a  $Y_\Sigma$ , então

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = X_\Sigma \Leftrightarrow \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = Y_\Sigma = \omega X_\Sigma \text{ e } \omega = \frac{dt}{d\tau}. \quad (5.1)$$

Daí, usando (5.1) podemos relacionar os campos  $X_\Sigma$  e  $Y_\Sigma$  da seguinte forma

$$X_\Sigma = \lambda_1 X_{++} + \lambda_2 X_{+-} + \lambda_3 X_{-+} + \lambda_4 X_{--}, \quad (5.2)$$

$$\omega X_\Sigma = \lambda_1 \omega X_{++} + \lambda_2 \omega X_{+-} + \lambda_3 \omega X_{-+} + \lambda_4 \omega X_{--}, \quad (5.3)$$

$$Y_\Sigma = \nu_1 X_{++} + \nu_2 X_{+-} + \nu_3 X_{-+} + \nu_4 X_{--}, \quad (5.4)$$

onde  $\nu_i = \omega \lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Com base nas definições apresentadas, estamos em condição de enunciar o teorema que relaciona os campos de Filippov.

**Teorema 5.1.1.** Seja  $\Gamma$  um segmento conexo de  $\Sigma$  e considere a inclusão diferencial em  $\Gamma$

$$\dot{x} \in \mathcal{F}(x), x \in \Gamma \text{ e } \dot{x} \in T_\Gamma, \quad (5.5)$$

onde  $\mathcal{F}$  é o envoltório convexo dos campos  $X_{++}$ ,  $X_{+-}$ ,  $X_{-+}$  e  $X_{--}$ . Suponha que, não há nenhum equilíbrio em  $\Sigma \cap \Gamma$  para quaisquer um dos campos de  $\mathcal{F}$ . Então, os sistemas  $\dot{x} = X_\Sigma(x)$  em  $\mathcal{F}(x) \cap T_\Gamma$  são orbitalmente equivalentes.

*Demonstração.* Seja  $n(x) = \nabla h_1(x) \times \nabla h_2(x)$ ,  $x \in \Gamma \cap \Sigma$ , onde  $\nabla h_1(x), \nabla h_2(x)$  são as normais de  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , respectivamente. Então, para  $x \in \Gamma$ , qualquer elemento de  $\mathcal{F}$  pode ser representado da forma  $X_\Sigma(x) = \gamma(x)n(x)$ , para alguma função suave  $\gamma$ . Por hipótese, não há equilíbrios o que implica  $\gamma(x) \neq 0$  e então todos os campos possuem a mesma orientação. De fato, se dois campos tivessem orientações opostas em  $\Gamma$ , então teria um terceiro, combinação convexa destes de modo que iria possuir um equilíbrio em algum ponto de  $\Gamma$ , o que contraria a hipótese. Seja então,  $X_\Sigma(\cdot) = \gamma_1(\cdot)n(\cdot)$  e  $Y_\Sigma(\cdot) = \gamma_2(\cdot)n(\cdot)$  campos quaisquer. Logo,

$$Y_\Sigma(x) = \omega(x)X_\Sigma(x),$$

onde  $\omega(x) = \gamma_2(x)/\gamma_1(x)$  e  $\omega(x) > 0, \forall x \in \Gamma$ . Obviamente,  $\omega$  é uma função suave para todo  $x \in \Gamma$ , provando o resultado.  $\square$

Pela definição de deslize via regularização, a dinâmica do sistema reduzido, no caso dos parâmetros lineares, é equivalente a algum dos campos de Filippov. Logo, quando a dinâmica regularizada e o campo momento, não possuem equilíbrios, pelo Teorema [5.1.1](#), ambos os campos serão localmente orbitalmente equivalentes.

### Exemplo 5.1.3.

Considere novamente o campo do Exemplo [3.2.1](#) da seção [3.2](#) e tome sua regularização com uma função de transição  $\varphi$ , com curva regularizante  $(\varepsilon, \varepsilon)$ . Parametrizando a variedade lenta, obtemos a seguinte expressão para o campo  $X_{reg}^{sl}$

$$C \left( \frac{z(4z - 3 + 2\sqrt{9z^2 - 32z + 32})}{2z - 7} - 18z + 5 \frac{4z - 3 + 2\sqrt{9z^2 - 32z + 32}}{2z - 7} - 15 \right),$$

onde  $C = 1/(13z + 14)$ .

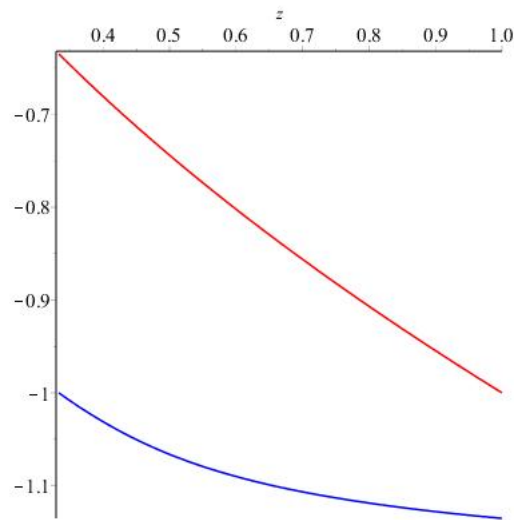


Figura 5.1: Gráfico das expressões do campo regularização (curva em vermelho) e campo momento (curva em azul).

Fazendo o gráfico das expressões dos campos momento e o campo regularização, ver Figura [5.1](#), notamos que, localmente, as dinâmicas são as mesmas, ambas com o mesmo sinal e sem singularidades.

Uma pergunta natural que surge é a seguinte: será que os campos deslizantes momento e regularização são sempre equivalentes? Na próxima seção vamos tentar responder a essa pergunta.

## 5.2 Relação entre campo momento e regularizante

Nesta seção, trabalharemos com a 2-regularização com curva regularizante linear. Primeiramente, vamos ver alguns exemplos para entendermos melhor como as definições de campos deslizantes se relacionam.

### Exemplo 5.2.1.

Seja  $X$  um campo 2-cruz suave por partes definido em  $\mathbb{R}^3$ , dado por

$$\begin{aligned} X_{++}(\mathbf{x}) &= (-1, -1, -1), & X_{+-}(\mathbf{x}) &= (-1, 2, xy - 1), \\ X_{--}(\mathbf{x}) &= (z - 1, z, x - 1), & X_{-+}(\mathbf{x}) &= (2, -1, y - 1). \end{aligned}$$

Considere o sistema (1.6) para o exemplo

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & z - 1 & 2 \\ -1 & 2 & z & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

resolvendo o sistema, obtemos que o único campo de Filippov definido em  $\Sigma$  é dado por  $\dot{z} = -1$ . Considere agora a regularização do campo  $X$  dada por

$$X_{\varepsilon, \eta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4} \left( \sum_{s \in \{-, +\}^2} \left( 1 + s_1 \varphi \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \left( 1 + s_2 \varphi \left( \frac{y}{\eta} \right) \right) X_s(\mathbf{x}) \right), \quad (5.6)$$

com  $\varphi$  uma função de transição monótona. Calculando a regularização com uma curva regularizante linear do tipo  $(\varepsilon, \varepsilon)$  e realizando um blow-up direcional  $x = \bar{x}\varepsilon$ ,  $y = \bar{y}\varepsilon$  e  $z = \bar{z}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{\bar{x}} &= -3/4 \varphi_1 \varphi_2 - 3/4 \varphi_1 + 3/4 \varphi_2 - 1/4 + 1/4 z \varphi_1 \varphi_2 - 1/4 z \varphi_1 - 1/4 z \varphi_2 + z/4; \\ \varepsilon \dot{\bar{y}} &= -1/2 \varphi_1 \varphi_2 + 1/2 \varphi_1 - \varphi_2 + 1/4 z \varphi_1 \varphi_2 - 1/4 z \varphi_1 - 1/4 z \varphi_2 + z/4; \\ \dot{\bar{z}} &= ((-1/4 xy + x/4 - y/4) \varphi_2 + 1/4 xy - y/4 - x/4) \varphi_1 - 1 + x/4 + y/4 \\ &\quad + (-1/4 xy + y/4 - x/4) \varphi_2 + 1/4 xy, \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde  $\varphi_1 = \varphi(\bar{x})$  e  $\varphi_2 = \varphi(\bar{y})$ . Quando  $\varepsilon = 0$ , as duas primeiras equações do sistema anterior definirão uma variedade lenta  $S$ , ver Figura 5.2. Resolvendo em termos de  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , obtemos uma parametrização para  $S$  em termos de  $z$ . Usando a parametrização para  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , obtemos que em  $\Sigma$  o campo regularizado é dado por  $X_{reg}^{sl} = -1$ , ou seja, neste caso ambas as definições são as mesmas.

### Exemplo 5.2.2.

Seja  $X$  o campo 2-cruz suave por partes definido em  $\mathbb{R}^3$ , dado por

$$\begin{aligned} X_{++}(\mathbf{x}) &= \left( -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -z \right), & X_{+-}(\mathbf{x}) &= \left( -1, \frac{3}{2}, z^2 \right), \\ X_{--}(\mathbf{x}) &= \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, z \right), & X_{-+}(\mathbf{x}) &= (-4, -3, z - z^2). \end{aligned}$$

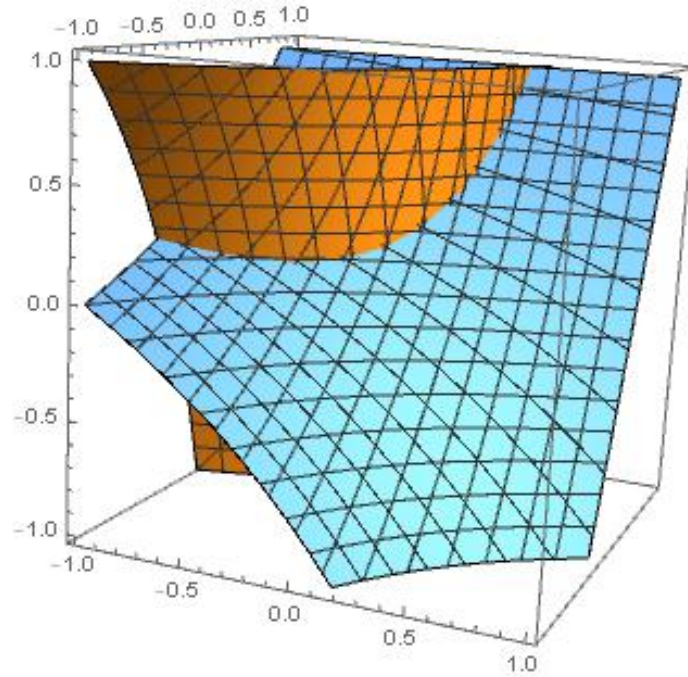


Figura 5.2: Esboço da variedade lenta dada pela intersecção das superfícies  $\dot{x} = \dot{y} = 0$ , ( $\dot{x} = 0$  em laranja,  $\dot{y} = 0$  em azul) feito com  $\varphi_1 \approx \bar{x}$  e  $\varphi_2 \approx \bar{y}$ .

É fácil ver que o campo  $X$  possui regiões de deslize em  $\Sigma_1^+$  e  $\Sigma_2^-$ , ou seja, estamos em condições de estudar o deslize em  $\Sigma$ .

Calculando o campo momento usando o sistema (1.6) para o sistema  $X$ , obtemos a expressão  $X_m^{sl} = (0, 0, z/2)$ . Por outro lado, regularizando o sistema com uma função de transição  $\varphi$ , fazendo o blow-up direcional e parametrizando a variedade lenta, obtemos a seguinte expressão para o campo regularização

$$X_{reg}^{sl} = \left( 0, 0, - \left( \frac{52}{235} + \frac{1053}{253} \right) z^2 + \left( -\frac{46\sqrt{366}}{235} + \frac{1049}{235} \right) z \right) \quad (5.8)$$

independente da curva regularizante adotada. Claramente a dinâmica descritas pelos campos não são equivalentes, uma vez que  $X_m^{sl}$  tem um ponto de equilíbrio e  $X_{reg}^{sl}$  tem dois equilíbrios. Podemos concluir então que, a terceira componente dos campos  $X_{\pm\pm}$ , vai influenciar de maneira significativa na dinâmica deslizante de  $\Sigma$ .

Veremos então quais condições precisamos impor, para que ambas as definições coincidam.

**Proposição 5.2.1.** Seja  $X$  um campo 2-cruz suave por partes definido em  $\mathbb{R}^3$ , dado por

$$\begin{aligned} X_{++} &= \left( -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, h_{++}(x, y, z) \right), & X_{+-} &= \left( -1, \frac{3}{2}, h_{+-}(x, y, z) \right), \\ X_{--} &= \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, h_{--}(x, y, z) \right), & X_{-+} &= \left( -4, -3, h_{-+}(x, y, z) \right), \end{aligned}$$

onde os  $h_i(x, y, z)$  são funções suaves. Se  $h_{--}(x, y, z) = -(17/3)h_{++} + (56/9)h_{+-} + (4/9)h_{-+}(x, y, z)$ , então os campos momento e regularização são os mesmos.

A prova segue de uma computação simples dos campos.

Antes de enunciarmos o próximo resultado introduzimos as seguintes notações.

$$\begin{aligned}
 A_1(\mathbf{x}) &= - \left( \frac{-f_1g_3 + f_1g_4 + f_3g_1 - f_3g_4 - f_4g_1 + f_4g_3}{f_2g_3 - f_2g_4 - f_3g_2 + f_3g_4 + f_4g_2 - f_4g_3} \right) (\mathbf{x}), \\
 A_2(\mathbf{x}) &= - \left( \frac{f_1g_2 - f_1g_4 - f_2g_1 + f_2g_4 + f_4g_1 - f_4g_2}{f_2g_3 - f_2g_4 - f_3g_2 + f_3g_4 + f_4g_2 - f_4g_3} \right) (\mathbf{x}), \\
 A_3(\mathbf{x}) &= - \left( \frac{-f_1g_2 + f_1g_3 + f_2g_1 - f_2g_3 - f_3g_1 + f_3g_2}{f_2g_3 - f_2g_4 - f_3g_2 + f_3g_4 + f_4g_2 - f_4g_3} \right) (\mathbf{x}).
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

**Proposição 5.2.2.** Seja  $X$  um campo 2-cruz suave por partes definido em  $\mathbb{R}^3$ , dado por  $X(\mathbf{x}) = X_{\pm\pm}(\mathbf{x}) = (f_{\pm\pm}, g_{\pm\pm}, h_{\pm\pm})(\mathbf{x})$ . Suponha que numa vizinhança  $V$  da origem, as definições de deslize pela regularização e campo momento estejam bem definidas. Se  $h_{--}(\mathbf{x}) = (A_1h_{++} + A_2h_{+-} + A_3h_{-+})(\mathbf{x})$ , com  $A_1, A_2$  e  $A_3$  dadas por (5.9), então os campos deslizantes momento e regularização são equivalentes.

*Demonstração.* Uma vez que  $X$  satisfaz as hipóteses do campo momento em  $V$ , temos que  $\Sigma$  possui uma região parcialmente atratora tal como na Definição 3.2.1, o que garante também em contra partida a existência do deslize via regularização. Suponha, sem perda de generalidade, que existam regiões de deslize em  $\Sigma_1^-$  ou  $\Sigma_2^-$ . Considere então  $h_{--}(\mathbf{x}) = (A_1h_{++} + A_2h_{+-} + A_3h_{-+})(\mathbf{x})$ . Como as funções  $f_{\pm}, g_{\pm}$  satisfazem as hipóteses da atração parcial, temos que os sinais não se concordam para anular o denominador das funções  $A_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , e, portanto, estão bem definidos.

Calculando tanto o campo momento quanto o campo da regularização, obtemos

$$X_m^{sl} = X_{reg}^{sl} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{f_2 g_3 h_4 - f_2 g_4 h_3 - f_3 g_2 h_4 + f_3 g_4 h_2 + f_4 g_2 h_3 - f_4 g_3 h_2}{f_2 g_3 - f_2 g_4 - f_3 g_2 + f_3 g_4 + f_4 g_2 - f_4 g_3} \end{bmatrix}$$

para  $(0, 0, z) \in \Sigma \cap V$ , provando assim a equivalência entre os campos.  $\square$

Com isso, estabelecemos uma classe de campos 2-cruz onde as definições são equivalentes e um exemplo mostrando que isso não ocorre de modo geral. No próximo exemplo, vamos ver que o campo momento não resolve totalmente a ambiguidade da unicidade da escolha de um campo da classe de Filippov.

### Exemplo 5.2.3.

Seja  $X$  um campo 2-cruz suave por partes definido em  $\mathbb{R}^3$ , dado por

$$\begin{aligned}
 X_{++}(\mathbf{x}) &= (-1, -1, h_1(\mathbf{x})), & X_{+-}(\mathbf{x}) &= (1, -1, h_2(\mathbf{x})), \\
 X_{--}(\mathbf{x}) &= (1, 1, h_3(\mathbf{x})), & X_{-+}(\mathbf{x}) &= (-1, 1, h_3(\mathbf{x})),
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

onde  $h_i(\mathbf{x})$  são funções suaves. Considere a matriz formada pelas componentes ortogonais a  $\Sigma$

$$W = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observe que o exemplo satisfaz a Definição 3.2.1, que, de forma equivalente, significa

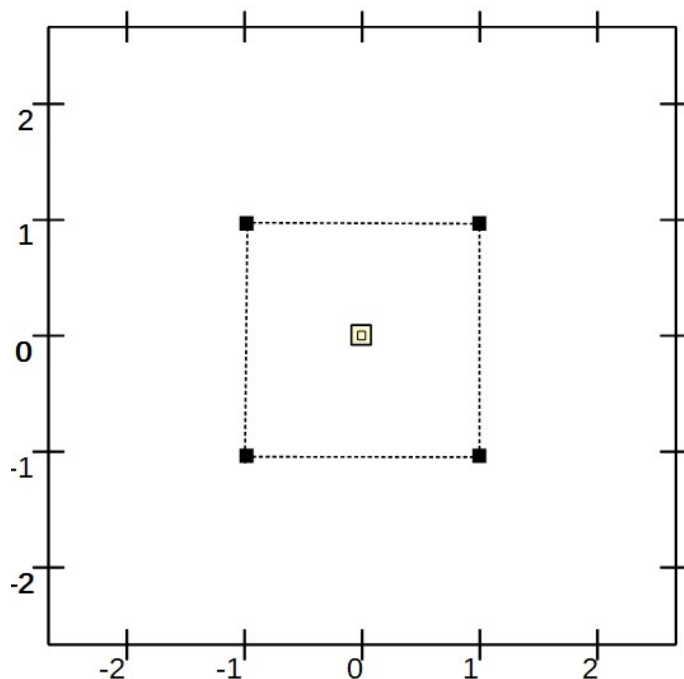


Figura 5.3: Quadrilátero  $\mathcal{Q}$  do sistema (5.10).

possuir um quadrilátero  $\mathcal{Q}$  não degenerado, ver Figura 5.3. Mas, o sistema (1.6) para o exemplo não possui solução única, uma vez que a matriz  $M$  do sistema (3.13) dada por

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

possui posto 3, ou seja, a linha extra não garantiu a unicidade.

Verifiquemos, então, como a definição de deslize via regularização se aplica no mesmo sistema. Calculando o campo deslizando regularizado com curva regularizante linear em  $\varepsilon$  e fazendo o blow-up direcional, obtemos

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} &= -\phi_2; \\ \varepsilon \dot{y} &= -\phi_1; \\ \dot{z} &= ((h_1/4 - h_2/4 - h_4/4 + h_3/4) \phi_2 + h_1/4 + h_2/4 - h_4/4 - h_3/4) \phi_1 \\ &+ (h_1/4 - h_2/4 + h_4/4 - h_3/4) \phi_2 + h_1/4 + h_2/4 + h_4/4 + h_3/4. \end{cases} \quad (5.11)$$

Quando  $\varepsilon = 0$ , temos a variedade lenta dada por  $(x_0, y_0, z)$ , onde  $\phi_1(x_0) = \phi_2(y_0) = 0$  e a dinâmica é dada por  $X_{reg}^{sl}(\mathbf{x}) = 1/4 (h_1 + h_2 + h_3 + h_4) (\mathbf{x})$ . Assim, temos que a regularização fornece uma escolha de um campo deslizando, dependendo da curva regularizante.

# 6 Relação entre pinching e campos descontínuos

Neste capítulo discutiremos sobre a técnica do *pinching*, que é uma abordagem relacionando campos suaves com campos descontínuos. Foi introduzida primeiramente e estudada em [4] e posteriormente em [9] e [27]. O objetivo aqui é comentar os resultados descritos em [27], adaptando para a teoria de perturbação singular, mostrando assim uma recíproca do Teorema 2.1.2, que foi citado na seção 2.1 e estender para o problema do deslize na 2-cruz.

Considere um sistema diferencial

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x}), \tag{6.1}$$

definido em  $\mathbb{R}^n$ , onde  $F$  é uma função de classe  $C^1$  pelo menos. Suponhamos que exista uma função suave  $h : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $U$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$ , tal que  $\nabla h(p) \neq 0$  para todo ponto de  $U$  e  $\Sigma = \{\mathbf{x} \in U : h(\mathbf{x}) = 0\}$  é uma variedade invariante pelo fluxo de (6.1), isto é,  $Fh = F(p) \cdot \nabla h(p) = 0$ , para todo ponto de  $\Sigma$ . Seja  $a > 0$  pequeno e considere os conjuntos

$$\Sigma_{\uparrow\downarrow} = \{x \in U : h(x) = \pm a\}$$

definindo uma faixa ao redor de  $\Sigma$ , que chamaremos de faixa de corte. Associamos, então, para cada vetor de  $\Sigma_{\uparrow}$ , um único vetor de  $\Sigma_{\downarrow}$ , de modo que a variedade  $h(x) = 0$  torna-se uma variedade de descontinuidade  $\Sigma$ , com campos dados por

$$\dot{x} = \begin{cases} F(\mathbf{x} + a\nabla h(\mathbf{x})), & h(x) > 0, \\ F(\mathbf{x} - a\nabla h(\mathbf{x})), & h(x) < 0, \end{cases} \tag{6.2}$$

ver Figura 6.1. O pinching, relaciona um sistema suave por partes com um sistema suave clássico, no entanto, o parâmetro  $a$  não é arbitrário, veja no Exemplo 3 em [27], onde é observado que se o parâmetro  $a$  não for adequado o sistema descontínuo produz uma interpretação errônea da dinâmica do sistema suave original.

## 6.0.1 Pinching e Perturbações Singulares.

**Perturbação singular com  $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ .**

Considere um sistema diferencial dado por

$$\varepsilon \dot{x} = F(x, y, \varepsilon), \quad \dot{y} = G(x, y, \varepsilon), \tag{6.3}$$

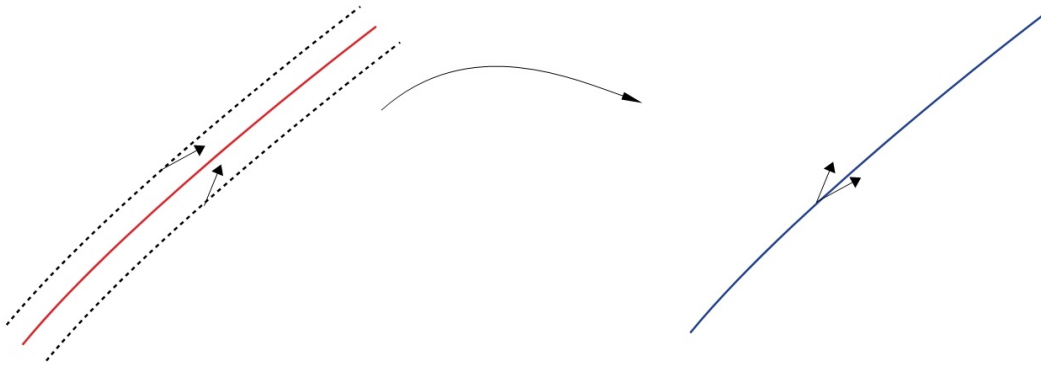


Figura 6.1: Curva em vermelho  $h(x) = 0$ , curvas tracejadas representa a faixa de corte e curva em azul é a variedade de descontinuidade resultante.

com  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ , e  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno. Vamos supor que a variedade lenta  $S$  esteja bem definida quando  $\varepsilon = 0$  e que existam pontos normalmente hiperbólicos em  $S$ . Uma vez que estamos interessados em um estudo local, consideraremos o sistema (6.3) definido em uma vizinhança da origem. Seja o sistema

$$\varepsilon \dot{x} = x = \tilde{F}(x, y), \quad \dot{y} = \tilde{G}(x, y, \varepsilon), \quad (6.4)$$

equivalente a (6.3), em uma vizinhança  $U$  da origem. Usando o Teorema 2.1.1 para o sistema (6.4), existe uma variedade invariante  $S_\varepsilon$  próxima de  $S_0$  na topologia  $C^1$  e o fluxo sobre  $S_\varepsilon$  é topologicamente equivalente ao fluxo do sistema reduzido.

Seja então  $a \geq \varepsilon > 0$  e a partir dele considere o sistema *pinching* associado a (6.4) dado por

$$\dot{x} = \begin{cases} (\tilde{F}(\mathbf{x} + a\nabla h(\mathbf{x})), \tilde{G}(\mathbf{x} + a\nabla h(\mathbf{x}))) = X^+(x, y), & h(x) > 0, \\ (\tilde{F}(\mathbf{x} - a\nabla h(\mathbf{x})), \tilde{G}(\mathbf{x} - a\nabla h(\mathbf{x}))) = X^-(x, y), & h(x) < 0; \end{cases} \quad (6.5)$$

onde  $h(\mathbf{x}) = x$  e  $\Sigma = \{h(x) = 0\}$ . Observe que, no sistema (6.5),  $\varepsilon$  não é um parâmetro, mas sim um valor fixo menor que  $a$ . O próximo teorema é uma versão para sistema de perturbação singular do resultado descrito em [27].

**Teorema 6.0.1.** A dinâmica de Filippov do sistema (6.5) é equivalente a do sistema reduzido (6.4).

*Demonstração.* Seja  $\Sigma = \{x \in U : h(x) = x = 0\}$ . Suponha que exista uma região de deslize  $\Sigma_a$  para o sistema (6.5). Considere o campo de Filippov dado por

$$X^{sl}(x, y) = \left(\frac{1+\lambda}{2}\right) X^+(x, y) + \left(\frac{1-\lambda}{2}\right) X^-(x, y), \quad (6.6)$$

com  $\lambda \in [-1, 1]$ . Como  $\Sigma$  é o hiperplano  $(0, y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ , temos então que, para  $\lambda = 0$ , o campo deslizante é dado por  $X^{sl}(0, y) = (0, (G_+(a, y) + G_-(a, y))/2)$ .

Por outro lado, considere o sistema reduzido dado por (6.4). Uma vez que  $\tilde{G}(x, y)$  é contínua, o sinal da função se mantém para pequenas variações em  $x$  e  $y$ . Logo, a dinâmica descrita pelo campo de Filippov e a dinâmica descrita pelo sistema reduzido são equivalentes, provando o Teorema.  $\square$

Observe que esse teorema serve como uma recíproca do Teorema 2.1.2, uma vez que relaciona campos suaves com campos descontínuos, usando perturbação singular.

**Perturbação singular com**  $x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}^{n-2}$ .

Seja o sistema

$$\varepsilon \dot{x} = F(x, y, \varepsilon), \quad \dot{y} = G(x, y, \varepsilon), \quad (6.7)$$

com  $x \in \mathbb{R}^2, y \in \mathbb{R}^{n-2}$  e  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno. Suponhamos que, quando  $\varepsilon = 0$ , o sistema reduzido

$$0 = F(x, y, \varepsilon), \quad \dot{y} = G(x, y, \varepsilon), \quad (6.8)$$

possua a variedade lenta  $S$  dada pela intersecção transversal de  $S_1 = \{F_1(x, y) = 0\}$  e  $S_2 = \{F_2(x, y) = 0\}$ . Novamente, pelo Teorema 2.1.1, existe uma variedade invariante  $S_\varepsilon$  próxima de  $S_0$  na topologia  $C^1$  e o fluxo sobre  $S_0$  é topologicamente equivalente ao fluxo do sistema reduzido. Diferentemente do anterior, para realizar o *pinching* no sistema (6.7), precisamos de dois parâmetros,  $a$  e  $b$ . Nosso objetivo é utilizar a teoria de Fenichel, tomaremos  $a = b$ .

Consideremos, então,  $a \geq \varepsilon$  e seja

$$\dot{x} = (\tilde{F}(\mathbf{x} \pm a\sigma(x)), \tilde{G}(\mathbf{x} \pm a\sigma(x)), h_1(x) \geq 0, h_2(x) \geq 0), \quad (6.9)$$

onde  $\sigma(x) = \nabla h_1(\mathbf{x}) + \nabla h_2(\mathbf{x})$ ,  $h_1(x) = \{x = 0\}$ ,  $h_2(x) = \{y = 0\}$  e  $\Sigma = \{h_1(x) = 0\} \cap \{h_2(x) = 0\}$ . Tal como antes, estamos considerando  $\tilde{F} = (x, y)$  e  $\tilde{G}$ , de modo que o sistema seja localmente equivalente ao sistema (6.7).

Podemos, então, enunciar o seguinte teorema, que é uma extensão do Teorema 6.0.1.

**Teorema 6.0.2.** Para  $a$  suficientemente pequeno, a dinâmica de Filippov do sistema (6.9) é equivalente à do sistema reduzido (6.7).

A prova é semelhante à do Teorema 6.0.1. É importante salientar que, quando nos referimos a dinâmica de Filippov no Teorema 6.0.2, estamos falando da dinâmica associada a 2-regularização monótona de (6.9). Logo, da forma como definimos o deslize via a regularização na Definição 2.0.8, fica claro a equivalência entre o campo suave e o descontínuo 2-cruz, tal como ocorreu com a 1-cruz.

**Exemplo 6.0.1.**

Seja o sistema

$$\varepsilon \dot{x} = -x = F(\mathbf{x}), \quad \varepsilon \dot{y} = -y = H(\mathbf{x}), \quad \dot{z} = -z = H(\mathbf{x}), \quad (6.10)$$

definido em  $\mathbb{R}^3$ . É fácil ver que o conjunto  $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$  é a variedade lenta de (6.10) quando  $\varepsilon = 0$ . Verifiquemos a existência de pontos normalmente hiperbólicos em  $S$ . Calculando a matriz

$$D_{x,y}(x, y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (6.11)$$

obtemos que ela não possui autovalores imaginários para qualquer ponto de  $S$ , ou seja, todo ponto é normalmente hiperbólico. Logo, pelo Teorema [2.1.1](#), existe uma variedade invariante  $S_\varepsilon$  próxima de  $S_0 = S$  na topologia  $C^1$  e o fluxo sobre  $S_0$  é topologicamente equivalente ao fluxo do sistema reduzido.

Seja um parâmetro  $a \geq \varepsilon_0$ , com  $\varepsilon_0$  de tal modo a existir a variedade  $S_{\varepsilon_0}$  e seja

$$\dot{x} = (F(\mathbf{x} \pm a\sigma(x)), G(\mathbf{x} \pm a\sigma(x)), H(\mathbf{x} \pm a\sigma(x))), \quad h_1(x) \geq 0, h_2(x) \geq 0, \quad (6.12)$$

onde  $\sigma(x) = \nabla h_1(\mathbf{x}) + \nabla h_2(\mathbf{x})$ ,  $h_1(x) = \{x = 0\}$ ,  $h_2(x) = \{y = 0\}$  e  $\Sigma = \{h_1(x) = 0\} \cap \{h_2(x) = 0\}$ . O campo associado a [\(6.12\)](#) é dado por

$$\begin{aligned} X_{++} &= (-x + \alpha, -y + \beta, -z), & X_{+-} &= (-x + \alpha, -y - \beta, -z), \\ X_{--} &= (-x - \alpha, -y - \beta, -z), & X_{-+} &= (-x - \alpha, -y + \beta, -z). \end{aligned}$$

Neste caso, é fácil ver que as trajetórias estão apontando para  $\Sigma$  e, portanto, podemos calcular o campo de Filippov, que neste caso é único e é dado por  $\dot{z} = -z$ .

Calculemos agora a 2-regularização monótona de [\(6.13\)](#) com curva regularizante linear em termos de  $\eta$  e fazendo o blow-up direcional, obtemos

$$\eta \dot{x} = \alpha \phi_1 - x, \quad \eta \dot{y} = \alpha \phi_2 - y, \quad \dot{z} = -z, \quad (6.13)$$

cujos sistema reduzido é dado por

$$0 = \alpha \phi_1 - x, \quad 0 = \alpha \phi_2 - y, \quad \dot{z} = -z. \quad (6.14)$$

Parametrizando a variedade lenta de [\(6.13\)](#), obtemos que a dinâmica do sistema reduzido é dada por  $\dot{z} = -z$ , que é equivalente a dinâmica do sistema suave [\(6.10\)](#) em  $S$ , o que era esperado pelo Teorema [6.0.2](#) e também equivalente ao campo de Filippov, como já argumentamos no capítulo anterior.

### Exemplo 6.0.2.

Seja o sistema

$$\varepsilon \dot{x} = F(\mathbf{x}), \quad \varepsilon \dot{y} = G(\mathbf{x}), \quad \dot{z} = H(\mathbf{x}), \quad (6.15)$$

definido em  $\mathbb{R}^3$ , onde  $F(\mathbf{x}) = zx - y - x(x^2 + y^2)$ ,  $G(\mathbf{x}) = x + zy - y(x^2 + y^2)$  e  $H(\mathbf{x}) = 1$ . Quando  $\varepsilon = 0$ , a variedade lenta  $S$  é definida por  $zx - y - x(x^2 + y^2) = 0$  e  $x + zy - y(x^2 + y^2) = 0$ , ver Figura [6.2](#), e através de uma conta simples obtemos que  $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$ . Calculando a matriz

$$D_{x,y}(x, y) = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 1 & z \end{bmatrix}, \quad (6.16)$$

temos que os autovalores são dados por  $\lambda_{1,2} = z \pm i$  e concluímos que com exceção do ponto  $z = 0$ , todos são normalmente hiperbólicos. Consideremos então uma vizinhança  $U$  de um ponto  $p_0 = (0, 0, z_0) \in S$ , com  $z_0 > 0$ , sem perda de generalidade. Pelo Teorema [2.1.1](#), existe uma variedade invariante  $S_\varepsilon$  próxima de  $S_0 = S$  na topologia  $C^1$  e o fluxo sobre  $S_0$  é topologicamente equivalente ao fluxo do sistema reduzido, que neste exemplo é dado por  $\dot{z} = 1$ .

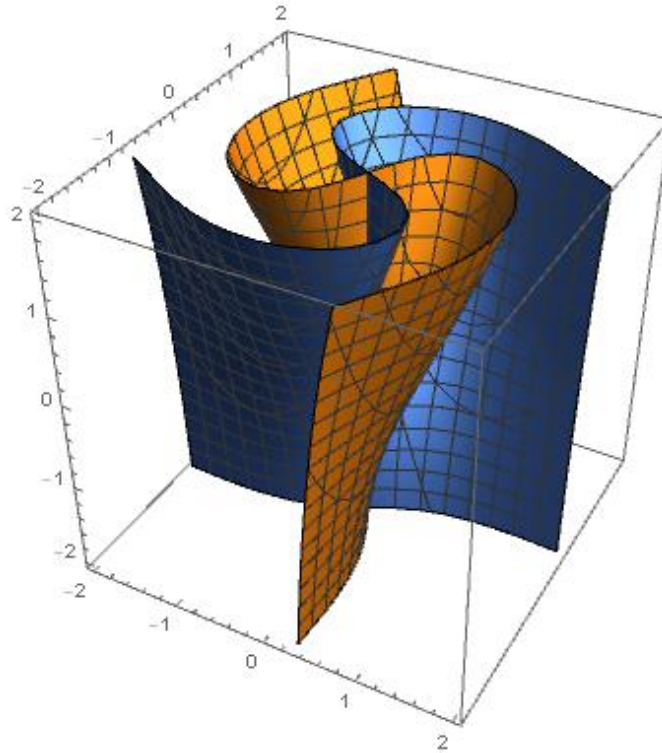


Figura 6.2: Variedade lenta do sistema suave (6.12) ( $F = 0$  em azul e  $G = 0$  em amarelo).

Seja um parâmetro  $a \geq \varepsilon_0$ , com  $\varepsilon_0$  de tal modo a existir a variedade  $S_{\varepsilon_0}$  e seja

$$\dot{x} = (F(\mathbf{x} \pm a\sigma(x)), G(\mathbf{x} \pm a\sigma(x)), H(\mathbf{x} \pm a\sigma(x))), h_1(x) \geq 0, h_2(x) \geq 0, \quad (6.17)$$

um sistema definido em  $U$ , onde  $\sigma(x) = \nabla h_1(\mathbf{x}) + \nabla h_2(\mathbf{x})$ ,  $h_1(x) = \{x = 0\}$ ,  $h_2(x) = \{y = 0\}$  e  $\Sigma = \{h_1(x) = 0\} \cap \{h_2(x) = 0\}$ . Fazendo a 2-regularização e um blow-up direcional em  $x$  e  $y$ , obtemos um problema de perturbação singular com parâmetro  $a$  dado por

$$a\dot{x} = \alpha(x, y, z), \quad a\dot{y} = \beta(x, y, z), \quad \dot{z} = 1. \quad (6.18)$$

Parametrizando a variedade lenta e substituindo nas funções de transição, obtemos que a dinâmica de deslize da regularização é dada por  $\dot{z} = 1$ , que é a mesma do sistema suave.

### Exemplo 6.0.3.

Seja o sistema

$$x' = F(\mathbf{x}), \quad y' = G(\mathbf{x}), \quad z' = \varepsilon H(\mathbf{x}), \quad (6.19)$$

definido em  $\mathbb{R}^3$ , onde  $F(\mathbf{x}) = y - ax^3 + bx^2 + I - z$ ,  $G(\mathbf{x}) = c - dx^2 - y$  e  $H(\mathbf{x}) = (s(x - x_0) - z)$ . O sistema (6.19) é conhecido como modelo Hindmarsch-Rose, que é uma redução do modelo de Hodgkin-Huxley, um modelo utilizado para estudar uma rede neural viva e suas interações tais como quiescência (o estado de não disparar), spikes tônico, estouro e irregular (ou caótico). Não estamos interessados aqui em analisar toda

a riqueza dinâmica deste sistema, mas um estudo deste sistema pode ser encontrado em [2].

Diferentes escolhas podem ser adotadas para os parâmetros de (6.19), porém seguindo [2], adotaremos

$$a = 1, \quad c = 1, \quad d = 5, s = 4 \quad \text{e} \quad x_0 = 1.6$$

e com isso o sistema (6.19) se torna uma família a três parâmetros,  $(b, \varepsilon, I)$ . Estudaremos o problema de perturbação singular que surge com o parâmetro  $\varepsilon$ .

Comecemos verificando como os parâmetros  $b$  e  $I$  influenciam na existência da variedade lenta. Reparametrizando (6.19),

$$\varepsilon \dot{x} = F(\mathbf{x}), \quad \varepsilon \dot{y} = G(\mathbf{x}), \quad \dot{z} = H(\mathbf{x}), \quad (6.20)$$

que é o sistema lento. Observe que, quando  $\varepsilon = 0$ , a variedade lenta  $S$  é definida por  $\{F(\mathbf{x}) = 0\} \cap \{G(\mathbf{x}) = 0\}$ , ver Figura 6.3, cuja parametrização em termos de  $x$  é dada por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x, y = -5x^2 + 1, z = bx^2 - x^3 - 5x^2 + I + 1\} \quad (6.21)$$

e está bem definida para quaisquer parâmetros  $b, \varepsilon$  e  $I$ . Calculando a matriz

$$D_{x,y}(x, y) = \begin{bmatrix} -3x^2 + 2x & 1 \\ -10x & -1 \end{bmatrix}, \quad (6.22)$$

cujos autovalores são dados por

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3x^2 + x - 1 \pm \sqrt{9x^4 - 12x^3 - 2x^2 - 36x + 1}}{2}.$$

Note que, para qualquer  $x$ , os autovalores possuem partes reais não nulas, portanto todo ponto de  $S$  é normalmente hiperbólico. Consideremos então uma vizinhança  $U$  de um ponto  $p_0 \in S$ . Pelo Teorema 2.1.1, existe uma variedade invariante  $S_\varepsilon$  próxima de  $S_0 = S$  na topologia  $C^1$  e o fluxo sobre  $S_0$  é topologicamente equivalente ao fluxo do sistema reduzido, que neste exemplo é dado por  $\dot{z} = 4(x - 1.6) - (bx^2 - x^3 - 5x^2 + I + 1)$ . Seja um parâmetro  $a \geq \varepsilon_0$ , com  $\varepsilon_0$  de tal modo a existir a variedade  $S_{\varepsilon_0}$  e seja

$$\dot{x} = (F(\mathbf{x} \pm a\sigma(x)), G(\mathbf{x} \pm a\sigma(x)), H(\mathbf{x} \pm a\sigma(x))), h_1(x) \geq 0, h_2(x) \geq 0, \quad (6.23)$$

um sistema definido em  $U$ , onde  $\sigma(x) = \nabla h_1(\mathbf{x}) + \nabla h_2(\mathbf{x})$ ,  $h_1(x) = \{x = 0\}$ ,  $h_2(x) = \{y = 0\}$  e  $\Sigma = \{h_1(x) = 0\} \cap \{h_2(x) = 0\}$ . Fazendo a 2-regularização e um blow-up direcional em  $x$  e  $y$ , obtemos um problema de perturbação singular com parâmetro  $a$  dado por

$$a\dot{x} = \alpha(x, y, z), \quad a\dot{y} = \beta(x, y, z), \quad \dot{z} = \gamma(x, y, z). \quad (6.24)$$

Parametrizando a variedade lenta de (6.24), substituindo no sistema, obtemos que a dinâmica sobre a variedade lenta é dada por  $\dot{z} = \gamma(x, y(x), z(x))$ . Considere  $\varepsilon_0 = 0.01$ ,  $b = 1$  e  $\tilde{p}_0$  na variedade lenta de (6.24), com  $x = 0.5$ , de modo a calcularmos numericamente as equações. Plotando o gráfico das dinâmicas lentas de (6.23) e (6.24) com  $I$  variando, ver figuras 6.4 e 6.5, notamos que as dinâmicas são exatamente as mesmas, mesmo quando  $I$  varia, o que já era esperado pelo Teorema 6.0.2.

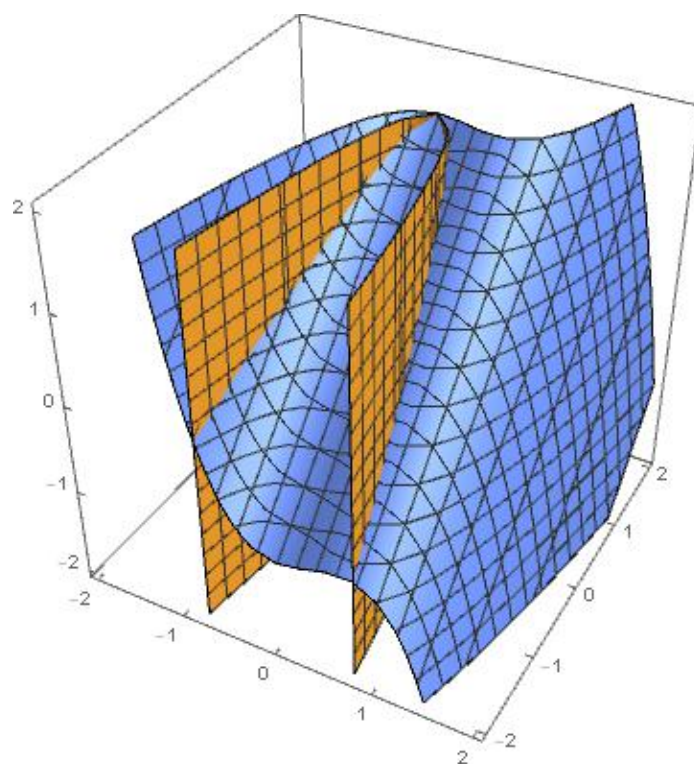


Figura 6.3: Variedade lenta do sistema (6.20) para  $I = 1$  ( $F = 0$  em azul e  $G = 0$  em amarelo).

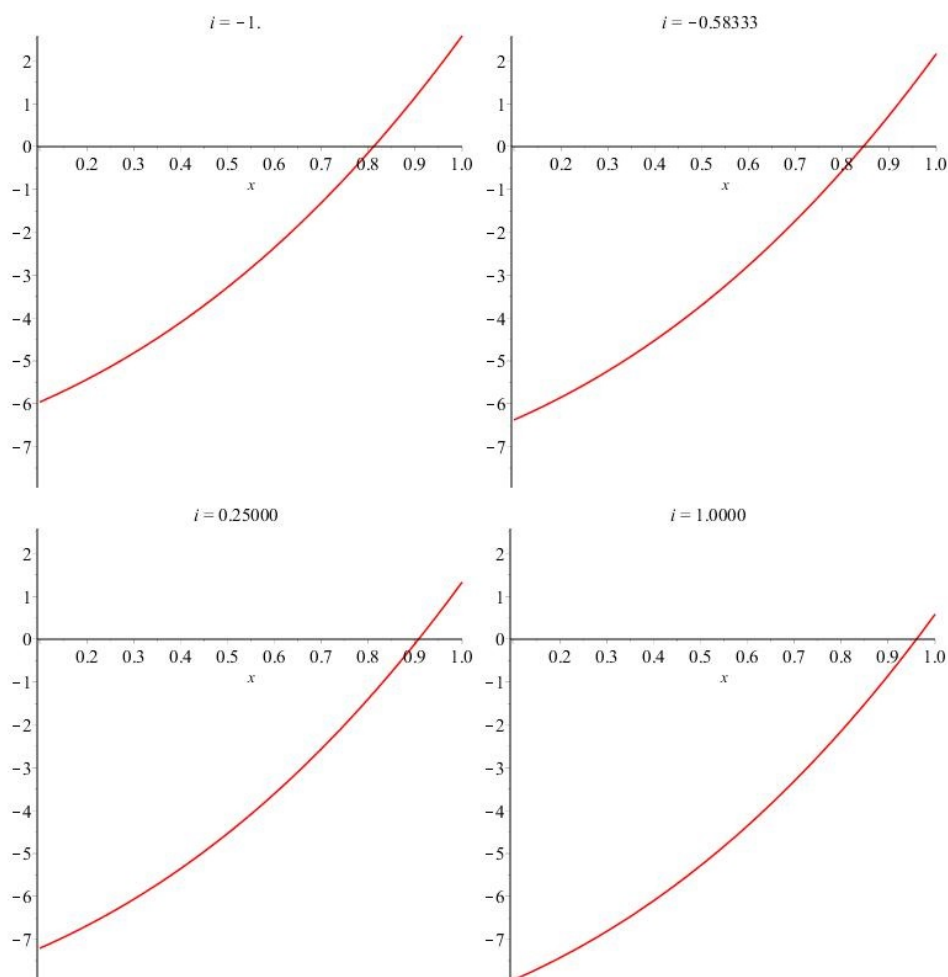


Figura 6.4: Gráficos da equação que define a dinâmica do deslize da regularização  $\dot{z} = \gamma(x, y(x), z(x))$ , para diferentes valores de  $I$ .

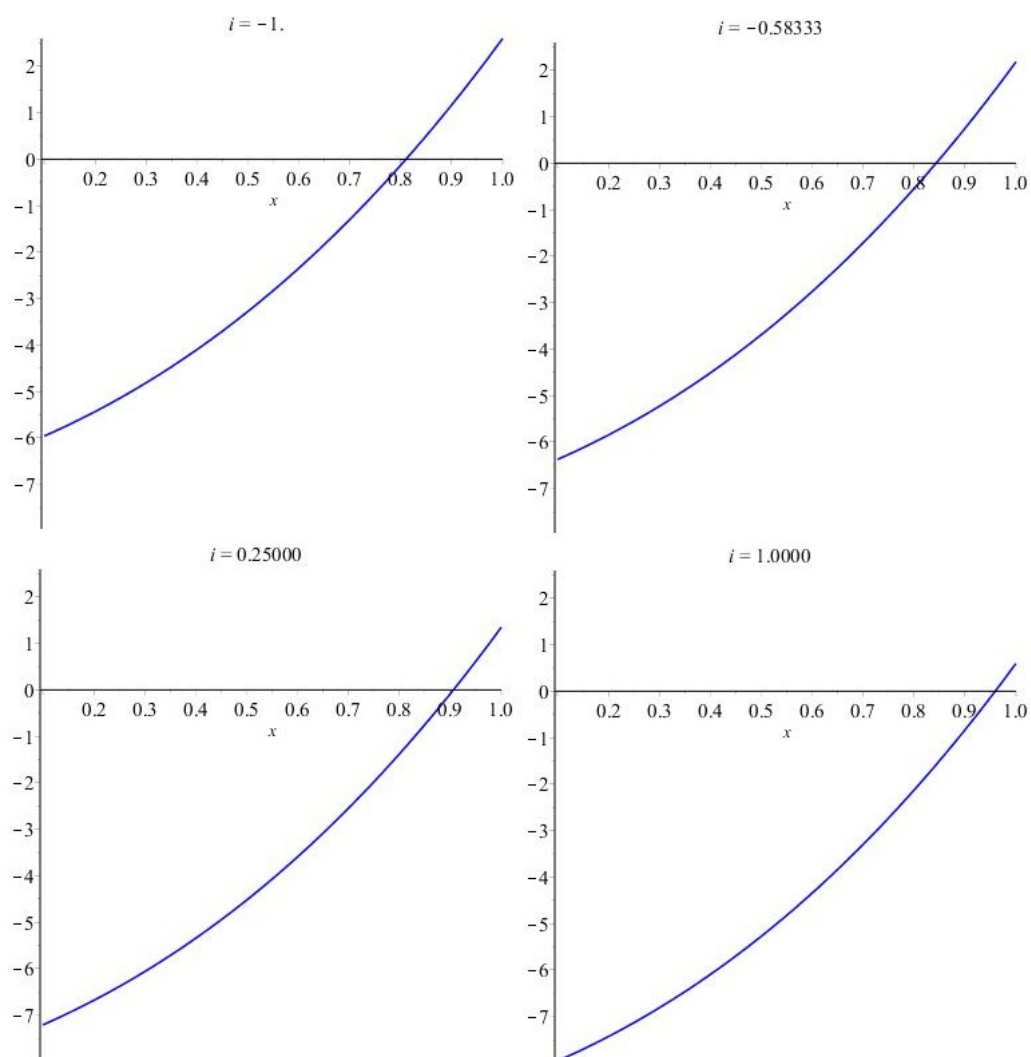


Figura 6.5: Gráficos da equação que define a dinâmica sobre a variedade lenta  $\dot{z} = 4(x - 1.6) - (bx^2 - x^3 - 5x^2 + I + 1)$ , para diferentes valores de  $I$ .

# Referências

- [1] Alexander, J.C., Seidman, T. I. (1998). Sliding modes in intersecting switching surfaces. I. Blending, *Houston J. Math.* **24**, 545–569.
- [2] Barrio, R., Ibáñez, S., Pérez, L. (2017). Hindmarsh-Rose model: Close and far to the singular limit, *Phys. Lett. A*, **381**, 597–603.
- [3] Bierstone, E., Milman, P. D. (1997). Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant, *Invent. Math.*, **128**, 207–302.
- [4] Broucke, M.E., Pugh, C.C., Simic, S.N. (2001). Structural stability of piecewise smooth systems, *Comput. Appl. Math*, **20**, 51–89.
- [5] Buzzi, C., Carvalho, T., and da Silva, P.R. (2013). Closed poly-trajectories and Poincaré index of non-smooth vector fields on the plane, *J. Dyn. Control Syst.* **19**, 173–193.
- [6] Buzzi, C., Silva, P.R., and Teixeira, M.A. (2006). A Singular approach to discontinuous vector fields on the plane, *J. Differential Equations* **231**, 633–655.
- [7] Cartan, H. (1957). Varietes analytiques reelles et varietes analytiques complexes, *Bull. Soc. Math. France*, **85**, 77–99.
- [8] Dumortier, F. (1977). Singularities of Vector Fields, *J. Differential Equations*, **23**, 53–106.
- [9] Desroches, M., Jeffrey, M.R. (2011). Canards and curvature: nonsmooth approximation by pinching, *Nonlinearity*, **24**, 1655–1682.
- [10] Diecci, L. (2015). Sliding motion on the intersection of two manifolds: spirally attractive case, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **26**, 65–74.
- [11] Diecci, L., Difonzo, F. (2015). The Moments Sliding Vector Field on the Intersection of Two Manifolds, *J. Dynam. Differential Equations* **29**, 169–201.
- [12] Diecci, L., Elia, C., Lopez, L. (2013). A Filippov sliding vector field on an attracting codimension 2 discontinuity surface, and a limited loss-of-attractivity analysis *J. Differential Equations* **254**, 1800–1832.
- [13] Diecci, L., Elia, C. (2016). Piecewise smooth systems near a co-dimension 2 discontinuity manifold: Can one say what should happen? *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* **9**, 1039–1068.

- 
- [14] Ribeiro, J. D. (2014). O problema foco-centro em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , *Dissertação de Mestrado*, UNIFEI - Itajubá.
- [15] Fenichel, N. (1979). Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations, *J. Differential Equations* **31**, 53–98.
- [16] Filippov, A.F. (1988). *Differential equations with discontinuous right-hand sides*, Translated from the Russian. Mathematics and its Applications (Soviet Series), 18. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, x+304 pp. ISBN: 90-277-2699-X.
- [17] Guardia, M., Seara, T. M., Teixeira, M.A. (2011) *Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov Systems*, *J. Differential Equations* **250**, 1967–2023.
- [18] Guglielmi, N., Hairer, E. (2015). Classification of hidden dynamics in discontinuous dynamical systems, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **14**, 1454–1477.
- [19] Jeffrey, M.D. (2014). Hidden dynamics in models of discontinuity and switching, *Phys. D* **274**, 34–45.
- [20] Kuehn, C. (2015). *Multiple Time Scale Dynamics*. Applied Mathematical Sciences, 191. Springer, Cham, 2015. xiv+814 pp. ISBN: 978-3-319-12315-8; 978-3-319-12316-5.
- [21] Y. Kuznetsov (2004). *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Applied Mathematical Sciences, 112. Springer-Verlag, New York, 1995. xvi+515 pp. ISBN: 0-387-94418-4.
- [22] Llibre, J., Silva, P.R. and Teixeira, M.A. (2007). Regularization of discontinuous vector fields via singular perturbation, *J. Dynam. Differential Equations* **19**, 309–331.
- [23] Llibre, J., Silva, P.R. and Teixeira, M.A. (2008). Sliding vector fields via slow fast systems, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **15**, 851–869.
- [24] Llibre, J., Silva, P.R. and Teixeira, M.A. (2009). Study of Singularities in non smooth dynamical systems via Singular Perturbation, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* **8** 508-526.
- [25] Llibre, J., Silva, P.R. and Teixeira, M.A. (2015). Sliding vector fields for non-smooth dynamical systems having intersecting switching manifolds, *Nonlinearity* **28**, 493-507.
- [26] Nev, O.A. and van den Berg, H.A. (2018). Microbial metabolism and growth under conditions of starvation modelled as the sliding mode of a differential inclusion, *Dyn. Syst.* **33**, 93–112.
- [27] Novaes, D.D and Jeffrey, M. (2015). Regularization of hidden dynamics in piecewise smooth flows, *J. Differential Equations* **259**, 4615–4633.
- [28] Panazzolo, D.C and Silva, P.R. (2017). Regularization of discontinuous foliations: Blowing up and sliding conditions via Fenichel theory, *J. Differential Equations* **263**, 8362–8390.

- 
- [29] Rahman, Q. I.; Schmeisser, G. (2002) Analytic theory of polynomials. London Mathematical Society Monographs. New Series, 26. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2002. xiv+742 pp. ISBN: 0-19-853493-0.
- [30] Seidman, T.I. (2007) Some aspects of modeling with discontinuities. *Int. J. Evol. Equ.* **3**, 419–433.
- [31] Sotomayor, J. and Teixeira, M.A. (1996). Regularization of discontinuous vector fields, *International Conference on Differential Equations (Lisboa, 1995)*, 207–223, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998.
- [32] Szmolyan, P. (1991). Transversal Heteroclinic and Homoclinic Orbits in Singular Perturbation Problems, *J. Differential Equations* **92**, 252–281.
- [33] Utkin, V. I. (1992). Sliding Modes in Control Optimization, Translated and revised from the 1981 Russian original. Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag, Berlin, 1992. xvi+286 pp. ISBN: 3-540-53516-0
- [34] Vrahatis, M.N. (1989). A Short Proof and a Generalization of Miranda’s Existence Theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **107**, 701–703.