UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Um estudo sobre a conjectura de Markus-Yamabe para tempo contínuo e discreto

Leonardo Ulian de Lima

Orientador: Prof. Dr. Pedro Toniol Cardin
Co-orientadora: Profª. Drª. Tatiana Miguel Rodrigues



Presidente Prudente, agosto de 2026.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Um estudo sobre a conjectura de Markus-Yamabe para tempo contínuo e discreto

Leonardo Ulian de Lima

Orientador: Prof. Dr. Pedro Toniol Cardin

Co-orientadora: Prof[a]. Dr[a]. Tatiana Miguel Rodrigues

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP como pré-requisito para obtenção do título de Mestre.

Presidente Prudente, agosto de 2026.

L732e

Lima, Leonardo Ulian de

Um estudo sobre a conjectura de Markus-Yamabe para tempo contínuo e discreto / Leonardo Ulian de Lima. -- Presidente Prudente, 2026

74 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente

Orientador: Pedro Toniol Cardin

Coorientadora: Tatiana Miguel Rodrigues

1. conjectura de Markus–Yamabe. 2. estabilidade global. 3. matriz Jacobiana. 4. sistemas dinâmicos contínuos. 5. sistemas dinâmicos discretos. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Dados fornecidos pelo autor(a).

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Presidente Prudente

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Um estudo sobre a conjectura de Markus-Yamabe para tempo contínuo e discreto

AUTOR: LEONARDO ULIAN DE LIMA
ORIENTADOR: PEDRO TONIOL CARDIN
COORIENTADORA: TATIANA MIGUEL RODRIGUES

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. PEDRO TONIOL CARDIN (Participaçao Virtual)
Departamento de Matemática / UNESP / Câmpus de Ilha Solteira - FEIS

Prof. Dr. MURILO RODOLFO CANDIDO (Participaçao Virtual)
Departamento de Matemática e Computação / UNESP / Câmpus de Presidente Prudente - FCT

Prof. Dr. FRANCISCO BRAUN (Participaçao Virtual)
Departamento de Matemática / Universidade Federal de São Carlos

Bauru, 20 de agosto de 2026.

Dedico a todos que participaram da minha jornada acadêmica, sobretudo à minha família, aos meus amigos e aos meus professores.

Agradecimentos

“ Agradeço, primeiramente, a Deus.

Agradeço imensamente à minha família, sobretudo aos meus pais, Marisa e Osmar, e ao meu irmão, Lucas, por todo o apoio, amor, carinho e incentivo aos meus estudos desde sempre. Chegar até aqui não seria possível sem vocês. Agradeço, igualmente, àqueles que passaram a fazer parte da minha família, principalmente à minha namorada, Maria Clara, à minha cunhada, Rafaela, e à minha querida sobrinha e afilhada, Theodora.

Agradeço a todos os meus amigos, que seriam muitos para nomear aqui. No entanto, todos foram muito importantes para mim durante esta jornada.

Agradeço aos meus professores da educação básica, da graduação e do mestrado. Todos foram essenciais para o meu aprendizado e amadurecimento, tanto como aluno quanto como cidadão.

Agradeço à UNESP e ao POSMAC, bem como a todos os seus colaboradores e funcionários, por fornecerem toda a estrutura e o suporte necessários para que eu pudesse chegar até aqui.

Por fim, registro minha enorme gratidão ao meu orientador, Pedro, e à minha coorientadora, Tatiana, por toda a paciência, ajuda, orientação e pelos valiosos conselhos ao longo do desenvolvimento deste trabalho. ”

"O estudo foi, para mim, o remédio soberano contra os desgostos da vida, não havendo nenhum desgosto de que uma hora de leitura não me tenha consolado."

Barão de Montesquieu.

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo estudar a Conjectura de Markus–Yamabe nos contextos contínuo e discreto, a qual relaciona propriedades da matriz Jacobiana com a estabilidade global da origem em sistemas dinâmicos. Inicialmente, são apresentados resultados preliminares e ferramentas fundamentais da teoria de sistemas dinâmicos necessários ao desenvolvimento do trabalho. No caso contínuo, estuda-se a validade da conjectura nas dimensões um e dois, bem como se apresenta um contraexemplo polinomial clássico que mostra sua falha em dimensões maiores ou iguais a três. No contexto discreto, investigamos a conjectura para diferentes classes de aplicações, estabelecendo sua validade no caso unidimensional, para aplicações triangulares e para aplicações polinomiais bidimensionais, além da apresentação de contraexemplos polinomiais e racionais em dimensões superiores. Os resultados estudados evidenciam as diferenças entre os casos contínuo e discreto, bem como as limitações da conjectura em dimensões mais elevadas. Por fim, abordamos as conclusões e considerações finais do trabalho.

Palavras-Chave: *Conjectura de Markus–Yamabe; estabilidade global; matriz Jacobiana; sistemas dinâmicos contínuos; sistemas dinâmicos discretos.*

Abstract

This dissertation aims to study the Markus–Yamabe Conjecture in both the continuous and discrete settings, relating properties of the Jacobian matrix to the global stability of the origin in dynamical systems. Initially, preliminary results and fundamental concepts from the theory of dynamical systems that are necessary for the development of this work are presented. In the continuous setting, the validity of the conjecture is investigated in dimensions one and two, and a classical polynomial counterexample demonstrating its failure in dimensions greater than or equal to three is presented. In the discrete setting, the conjecture is studied for different classes of maps, establishing its validity in the one-dimensional case, for triangular maps, and for two-dimensional polynomial maps, as well as presenting polynomial and rational counterexamples in higher dimensions. The results highlight the differences between the continuous and discrete settings, as well as the limitations of the conjecture in higher dimensions. Finally, concluding remarks and final considerations are presented.

Keywords: *Markus–Yamabe Conjecture; global stability; Jacobian matrix; continuous dynamical systems; discrete dynamical systems.*

Lista de Figuras

1.1 Retrato de fase do sistema $(x, y)' = (y, -x)$. 8
1.2 Retrato de fase da equação $x' = 2x$. 8
1.3 Retrato de fase do sistema diferencial $(x', y') = (-y + x(1 - x^2 - y^2), x + y(1 - x^2 - y^2))$. 9
1.4 Retrato de fase do campo vetorial $F(x, y) = (-x + y, -x - y^3)$. 11

2.1 Retrato de fase da EDO (2.1) sob as condições do Teorema 2.1. 21
2.2 Região R cuja fronteira é formada por arcos de trajetórias de F e F^*. . 23
2.3 Semi-trajetórias positivas diferentes partindo do mesmo ponto. 24

Conteúdo

Resumo **i**

Abstract **ii**

Lista de Figuras **iii**

Introdução **1**

1 Preliminares **3**

1.1 Conceitos de cálculo 3

1.2 Sistemas dinâmicos contínuos 5

1.2.1 Conceitos gerais 5

1.2.2 Estabilidade 9

1.3 Sistemas dinâmicos discretos 11

1.3.1 Conceitos gerais 12

1.3.2 Estabilidade de Lyapunov 13

1.4 Resultados auxiliares 15

2 Conjectura de Markus-Yamabe Contínua **20**

2.1 Caso unidimensional 20

2.2 Caso bidimensional 21

2.3 Contra-exemplo polinomial para $n \geqslant 3$ 27

3 Conjectura de Markus-Yamabe Discreta **29**

3.1 Caso unidimensional 29

3.2 Caso triangular 31

3.3 Caso polinomial bidimensional 36

3.4 Contra-exemplos 51
3.4.1 Contra-exemplo polinomial para $n \geqslant 3$ 51
3.4.2 Contra-exemplo racional para $n \geqslant 2$ 53

Considerações Finais **60**

Bibliografia **63**

Introdução

O estudo da estabilidade de pontos de equilíbrio constitui um dos temas centrais da teoria dos Sistemas Dinâmicos, desempenhando um papel fundamental na compreensão do comportamento assintótico de modelos provenientes da matemática e de diversas áreas das ciências aplicadas. Em particular, determinar condições sob as quais a estabilidade local de um ponto de equilíbrio implica sua estabilidade global é um problema clássico e de grande relevância. Nesse contexto, a Conjectura de Markus–Yamabe surgiu como uma tentativa de fornecer um critério suficiente para a estabilidade global da origem em sistemas dinâmicos definidos em espaços euclidianos.

A versão contínua da Conjectura de Markus–Yamabe pode ser enunciada da seguinte forma: seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1, tal que $F(0) = 0$. Se, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, todos os autovalores da matriz Jacobiana $JF(x)$ possuem parte real estritamente negativa, então a origem é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável do sistema dinâmico gerado por F.

A conjectura foi formulada por Markus e Yamabe (1960). Pouco tempo depois, Olech (1961) mostrou que o problema da estabilidade global poderia ser reformulado como um problema de injetividade global de aplicações diferenciáveis no $\mathbb{R}^2$, estabelecendo uma importante conexão entre a teoria da estabilidade e propriedades globais de aplicações diferenciáveis. Esse resultado abriu caminho para a demonstração da conjectura no caso bidimensional, obtida independentemente por Gutiérrez (1993), Glutsyuk (1994) e Fessler (1995). Por outro lado, em dimensões maiores ou iguais a três, a conjectura mostrou-se falsa, sendo conhecidos diferentes contraexemplos.

Além da formulação para sistemas contínuos, La Salle (1976) propôs uma versão análoga da conjectura para sistemas dinâmicos discretos, atualmente conhecida como Conjectura de Markus–Yamabe discreta. Nessa formulação, a condição espectral imposta

à matriz Jacobiana consiste em exigir que todos os seus autovalores tenham módulo estritamente menor que um em cada ponto do domínio. Assim como ocorre no caso contínuo, a validade da conjectura depende da dimensão do espaço e da classe de aplicações considerada, havendo resultados positivos para determinadas classes de aplicações e contraexemplos em dimensões superiores.

O objetivo principal deste trabalho é apresentar um estudo sistemático da Conjectura de Markus–Yamabe em suas versões contínua e discreta, reunindo resultados clássicos de validade e de não validade e oferecendo uma visão unificada dos principais resultados conhecidos sobre o tema. Para isso, o trabalho está organizado da seguinte forma.

No Capítulo 1, são apresentados resultados preliminares e ferramentas fundamentais da teoria dos sistemas dinâmicos em tempo contínuo e discreto, incluindo definições, conceitos de estabilidade, propriedades de campos vetoriais e aplicações diferenciáveis, bem como resultados clássicos da teoria qualitativa das equações diferenciais e dos sistemas dinâmicos discretos.

No Capítulo 2, estuda-se a versão contínua da Conjectura de Markus–Yamabe, demonstrando sua validade nos casos unidimensional e bidimensional e apresentando um contraexemplo polinomial clássico que evidencia sua falha em dimensões maiores ou iguais a três.

No Capítulo 3, é abordada a versão discreta da conjectura. São apresentados resultados que estabelecem sua validade no caso unidimensional, para aplicações triangulares e para aplicações polinomiais bidimensionais, bem como contraexemplos polinomiais e racionais que mostram as limitações da conjectura em dimensões maiores ou iguais a três e dois, respectivamente.

Por fim, no Capítulo 4, são apresentadas as conclusões do trabalho, destacando os principais resultados estudados, bem como algumas perspectivas para o aprofundamento da pesquisa sobre a Conjectura de Markus–Yamabe e suas possíveis extensões.

Capítulo

1

Preliminares

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos e resultados preliminares necessários ao desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente, são revisados os conceitos de matriz Jacobiana e matriz Hessiana utilizados ao longo da dissertação, e também o conhecido Teorema de Green. Em seguida, são apresentados alguns conceitos e resultados básicos da teoria dos sistemas dinâmicos contínuos e, por fim, da teoria dos sistemas dinâmicos discretos.

1.1 Conceitos de cálculo

Nesta seção são apresentados alguns conceitos e resultados fundamentais de cálculo diferencial que serão utilizados ao longo deste trabalho. A exposição baseia-se, principalmente, nas referências Stewart (2013) e Guidorizzi (2019).

Definição 1.1. *A matriz*

$$JF(a) = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a)\right] \in M_n,$$

é chamada de ***matriz Jacobiana*** *da aplicação $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ no ponto $a \in \mathbb{R}^n$, onde $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x))$.*

Exemplo 1.2. *Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (2x + y^2, -x^2 + y)$. Temos que*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(2x + y^2) = 2; \\
\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(-x^2 + y) = -2x \\
\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}(2x + y^2) = 2y; \\
\frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}(-x^2 + y) = 1.
\end{aligned}$$

Então sua matriz Jacobiana será

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 2y \\ -2x & 1 \end{pmatrix}.$$

Definição 1.3. *Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e $a \in \mathbb{R}^n$. A matriz*

$$HF(a) = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \, \partial x_j}(a) \right] \in M_n,$$

*é chamada de **matriz Hessiana** de F no ponto a.*

Exemplo 1.4. *Seja a função $F(x, y) = 3x^2 + y^3 - 3xy + 1$, calculando suas derivadas parciais de segunda ordem obtemos*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) &= 6; \\
\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) &= 6y; \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) &= -3; \\
\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) &= -3.
\end{aligned}$$

Desse modo, a matriz Hessiana de F é dada por

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

1.2 Sistemas dinâmicos contínuos

Nesta seção abordaremos aspectos mais básicos da teoria dos Sistemas Dinâmicos, tomando por referência Barreira e Valls (2012), Scárdua (2015).

1.2.1 Conceitos gerais

Definição 1.5. *Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, um* ***campo vetorial*** *de classe C^r, $r \geqslant 0$, em U é uma aplicação $F : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^r. Ao campo vetorial F associamos a equação diferencial autônoma*

$$x' = F(x). \tag{1.1}$$

Definição 1.6. *Sejam $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in U$. O sistema*

$$\begin{cases} x' = F(x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

é chamado de ***problema de valor inicial*** *(PVI) associado à equação diferencial autônoma* (1.1)*, com condição inicial x_0.*

Definição 1.7. *Uma função $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to U \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^1 que satisfaz*

$$\varphi'(t) = F(\varphi(t)), \qquad t \in I,$$

é chamda de ***solução*** *da equação* (1.1)*. Nesse caso, o conjunto imagem $\gamma = \varphi(I) = \{\varphi(t) \in U : t \in I\} \subset U$ é também chamada de* ***trajetória*** *ou* ***curva integral*** *do campo vetorial F, ou ainda, de* ***órbita*** *do sistema* (1.1)*.*

Se para toda solução $\psi : I_1 \to \mathbb{R}^n$ com $I \subset I_1$ e $\psi|_I = \varphi$, temos que $I = I_1$, então, φ é dita uma ***solução maximal*** *da equação* (1.1) *e I é chamado* ***intervalo maximal*** *de φ.*

Uma solução $\varphi : I \to U$ da equação (1.1) *é chamada de* ***solução do problema de valor inicial*** (1.2) *se $t_0 \in I$ e $\varphi(t_0) = x_0$.*

Definição 1.8. *Chamamos $\bar{x} \in U$ de* ***ponto de equilíbrio*** *da equação* (1.1) *sempre que $F(\bar{x}) = 0$, caso contrário, $\bar{x}$ é dito* ***ponto regular*** *da equação.*

Exemplo 1.9. *Tomando o campo vetorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $F(x, y) = (-x, -y)$, temos que o sistema diferencial autônomo associado é*

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y. \end{cases}$$

Podemos observar que $F(x, y) = 0$, se e somente se, $(x, y) = (0, 0)$, assim a origem é o único ponto de equilíbrio, por consequência, qualquer ponto $(x, y) \neq (0, 0)$ é um ponto regular.

Para uma condição inicial $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, a solução do sistema é

$$\varphi(t) = (x_0 e^{-t}, y_0 e^{-t}),$$

que está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, portanto, φ é uma solução maximal do sistema.

Proposição 1.10. *Se $\bar{x}$ é um ponto de equilíbrio de* (1.1)*, então $\bar{x}$ é uma órbita dessa equação.*

Demonstração: De fato, é necessário apenas notar que a função constante $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi(t) = \bar{x}$ é uma solução para a equação (1.1). ∎

Definição 1.11. *Uma órbita $\gamma = \{\varphi(t) : t \in I\}$ é dita* ***periódica*** *se existe $T > 0$ tal que $\varphi(t + T) = \varphi(t)$, onde $t, t + T \in I$.*

Definição 1.12. *Dada uma órbita $\gamma = \{\varphi(t) : t \in I\}$, os conjuntos $\gamma^+ = \{\varphi(t) : t \in I \cap \mathbb{R}^+\}$ e $\gamma^- = \{\varphi(t) : t \in I \cap \mathbb{R}^-\}$ são chamados de* ***semi órbita positiva*** *e* ***semi órbita negativa*** *da órbita γ, respectivamente.*

Definição 1.13. *Dado $p \in U$, denotamos por $\varphi_p(t)$ a trajetória de F passando por $p = \varphi_p(0)$, definida no intervalo maximal $(\omega_-(p), \omega_+(p))$. Supondo $\omega_+(p) = \infty$, definimos o conjunto*

$$\omega(p) = \{q \in U : \exists t_n \to \infty \text{ onde } \lim_{n\to\infty} \varphi_p(t_n) = q\}.$$

Agora, supondo $\omega_-(p) = -\infty$, definimos

$$\alpha(p) = \{q \in U : \exists t_n \to -\infty \text{ onde } \lim_{n\to\infty} \varphi_p(t_n) = q\}.$$

*Os conjuntos $\alpha(p)$ e $\omega(p)$ são chamados, respectivamente, α-**limite** e ω-**limite** de p.*

Observação 1. *Para um ponto de equilíbrio $\bar{x}$, temos $\alpha(\bar{x}) = \omega(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$.*

Definição 1.14. *O esboço de um conjunto representativo de órbitas de uma equação diferencial indicando o seu movimento para t crescente é chamado **retrato de fase** da equação. Esta representação nos permite obter informações qualitativas das soluções da equação mesmo não conhecendo essas soluções de forma explícita.*

Exemplo 1.15. *Seja o sistema diferencial*

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x. \end{cases}$$

Podemos verificar que o único ponto de equilíbrio do sistema é a origem, além disso, vale que

$$(x^2 + y^2)' = 2xx' + 2yy' = -2yy' + 2yy' = 0,$$

ou seja, $x^2 + y^2 = r^2$, onde $r \geqslant 0$, logo, as soluções do sistema, exceto a origem, são circunferências orientadas com centro em $(0, 0)$. Para determinarmos o sentido do movimento basta verificá-lo em um ponto qualquer da órbita. Sendo o campo vetorial $F(x, y) = (y, -x)$, temos, por exemplo $F(1, 0) = (0, -1)$, o que fornece o movimento no sentido horário. A seguir temos o retrato de fase do sistema.

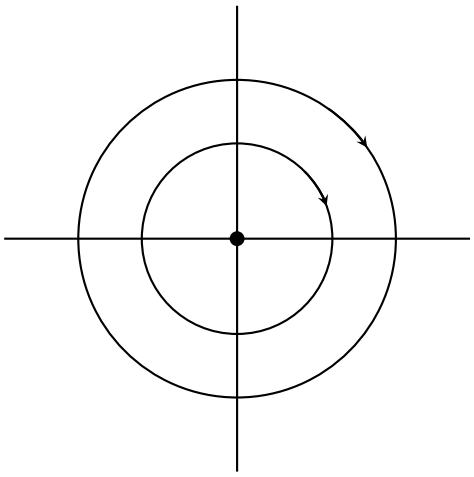


Figura 1.1: Retrato de fase do sistema $(x, y)' = (y, -x)$.

Exemplo 1.16. *Seja a equação diferencial dada por* $x' = 2x$. *Não é difícil verificar que sua solução é dada por* $\varphi(t) = e^{2t}\varphi(0)$. *Assim, obtemos o seguinte retrato de fase mostrado na figura abaixo. Esta equação diferencial possui três órbitas, o ponto de equilíbrio* $\bar{x} = 0$ *e os eixos* $\mathbb{R}^+$ *e* $\mathbb{R}^-$, *além disso, podemos verificar que, se* $p \neq 0$ *então* $\alpha(p) = 0$ *e* $\omega(p) = \varnothing$.

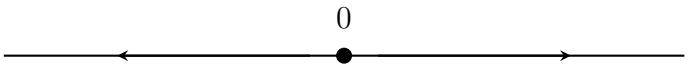


Figura 1.2: Retrato de fase da equação $x' = 2x$.

Exemplo 1.17. *Seja o sistema diferencial*

$$(x', y') = (-y + x(1 - x^2 - y^2), x + y(1 - x^2 - y^2)),$$

realizando a mudança de variáveis para as coordendas polares $x = r\cos(\theta)$ *e* $y = r\,sen(\theta)$, *obtemos* $(r', \theta') = (r(1 - r^2), 1)$. *O sistema possui o seguinte retrato de fase*

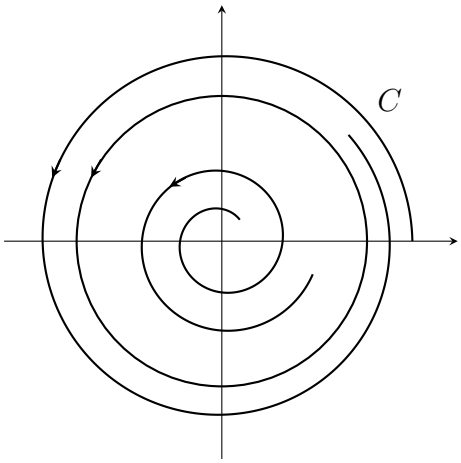


Figura 1.3: Retrato de fase do sistema diferencial $(x', y') = (-y + x(1 - x^2 - y^2), x + y(1 - x^2 - y^2))$.

Observamos que o único ponto de equilíbrio é a origem, além disso, a circunferência unitária C centrada na origem é uma órbita periódica. Se p é um ponto interior a C, então $\alpha(p) = \{0\}$. Se p é exterior a C, então $\alpha(p) = \varnothing$ e, se $p \in C$, então $\alpha(p) = C$. Além disso, para todo $p \neq 0$, $\omega(p) = C$.

1.2.2 Estabilidade

Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo, consideremos a equação diferencial (1.1). Também vamos supor que exista uma única solução do PVI

$$\begin{cases} x' = F(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Para cada $x_0 \in U$ e $t \geqslant 0$.

Definição 1.18. *Uma solução $\varphi_{x_1}(t)$ de (1.1) é **localmente estável** se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $||x_0 - x_1|| < \delta$, então, $\varphi_{x_0}(t)$ está bem definida e $||\varphi_{x_0}(t) - \varphi_{x_1}(t)|| < \epsilon$, para todo $t \geqslant 0$. Caso contrário a solução é dita **instável**.*

Observação 2. *Em outras palavras, dizer que uma solução φ é estável significa que qualquer outra solução com condição inicial suficientemente próxima, permanece próxima de φ.*

Definição 1.19. *Uma solução $\varphi_{x_1}(t)$ de (1.1) é **localmente assintoticamente estável** (ou um **atrator local**) se $\varphi_{x_1}(t)$ é estável e existe um $\alpha > 0$ tal que, se*

$||x_0 - x_1|| < \alpha$, *então*

$$\lim_{t\to\infty} ||\varphi_{x_0}(t) - \varphi_{x_1}(t)|| = 0,$$

isto é, além de permanecerem próximas, as soluções tendem a se aproximar cada vez mais.

Observação 3. *Quando as condições da definição anterior são válidas para qualquer condição inicial $x_0 \in U$, então a solução $\varphi_{x_1}(t)$ é dita* ***globalmente assintoticamente estável*** *(ou um* ***atrator global****) do sistema* (1.1).

Para analisar a estabilidade de pontos de equilíbrio utilizaremos a teoria das funções de Lyapunov.

Definição 1.20. *A aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, é dita* ***localmente Lipschitz*** *se, para qualquer compacto $K \subset U$, existe $L > 0$ tal que*

$$||F(a) - F(b)|| \leqslant L||a - b||,$$

onde $a, b \in K$.

Exemplo 1.21. *Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $F(x) = Ax$, onde A é uma matriz constante e não nula de ordem n, então, se $u, v \in \mathbb{R}^n$*

$$||F(u) - F(v)|| = ||Au - Av|| = ||A(u - v)|| \leqslant ||A||.||u - v||,$$

sendo $||A|| = \sup_{x\neq 0} \dfrac{||Ax||}{||x||}$ a norma da matriz A. Portanto, F é localmente Lipschitz.

Vamos considerar agora que o campo vetorial F da equação (1.1) seja localmente Lipschitz. Dada uma aplicação diferenciável $V : U \to \mathbb{R}$, definiremos uma nova aplicação $\dot{V} : U \to \mathbb{R}$ por

$$\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot F(x).$$

Definição 1.22. *Seja $\bar{x}$ um ponto de equilíbrio de F, dizemos que $V : U \to \mathbb{R}$ é uma* ***função de Lyapunov*** *para $\bar{x}$ se existe um aberto $U_1 \subset U$ que contém $\bar{x}$ tal que*

(I) $V(\bar{x}) = 0$ e $V(x) > 0$ para $x \in U_1 - \{\bar{x}\}$;

(II) $\dot{V}(x) \leq 0$ para $x \in U_1$.

Caso $\dot{V}(x) < 0$ *para* $x \in U_1 - \{\bar{x}\}$, V *é dita uma* ***função de Lyapunov estrita****.*

Teorema 1.23. *Para* $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *uma aplicação localmente Lipschitz e* $\bar{x}$ *um ponto de equilíbrio de* F *são válidos os seguintes resultados.*

(I) Se existe uma função de Lyapunov para $\bar{x}$*, então* $\bar{x}$ *é estável;*

(II) Se existe uma função de Lyapunov estrita para $\bar{x}$*, então* $\bar{x}$ *é assintoticamente estável;*

Demonstração: Ver Teorema 3.18 de (BARREIRA; VALLS, 2012). ∎

Exemplo 1.24. *Seja o campo vetorial* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dado por* $F(x, y) = (-x+y, -x-y^3)$*, onde a origem é o único ponto de equilíbrio. Tomando a função* $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $V(x, y) = x^2 + y^2$*, podemos verificar que* $V(0, 0) = 0$ *e* $V(x, y) > 0$ *sempre que* $(x, y) \neq (0, 0)$*, além disso*

$$\dot{V}(x, y) = (2x, 2y) \cdot (-x + y, -x - y^3) = -2x^2 + 2xy - 2xy - 2y^4 = -2(x^2 + y^4),$$

logo, $\dot{V}(x, y) < 0$*, para qualquer ponto regular de* F*. Portanto,* V *é uma função de Lyapunov estrita para a origem e segue do Teorema 1.23 que o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável.*

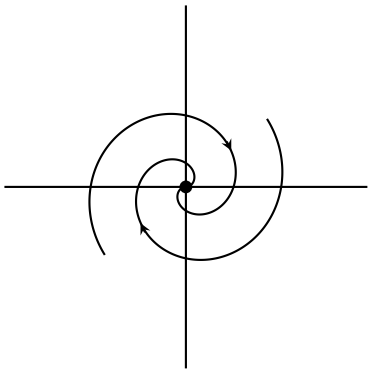


Figura 1.4: Retrato de fase do campo vetorial $F(x, y) = (-x + y, -x - y^3)$.

1.3 Sistemas dinâmicos discretos

Nesta seção trataremos das definições e resultados preliminares para o Capítulo 3 sobre Sistemas Dinâmicos em tempo discreto tomando por referência Backes, Baraviera e

Branco (2023), Devaney (1989), Bonomo (2008). Em toda a seção temos que $F : U \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$.

1.3.1 Conceitos gerais

Definição 1.25. *A equação*

$$x^{(n+1)} = F(x^{(n)}), \tag{1.3}$$

onde $n \in \mathbb{N}$, é chamada de ***equação de diferenças****. Uma sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ que satisfaz a equação* (1.3)*, para todo $n \in \mathbb{N}$, é uma solução para a equação. À equação* (1.3) *associamos o sistema dinâmico discreto*

$$\begin{cases} x^{(n+1)} = F(x^{(n)}) \\ x^{(0)} = x_0; \end{cases}$$

onde $x^{(0)} \in U$.

Definição 1.26. *Definiremos a* ***órbita positiva*** *de um ponto p pelo conjunto*

$$\gamma^+(p) = \{p, F(p), F^2(p), \dots\},$$

onde $F^n(p) = F(F^{n-1}(p))$ e $n \geqslant 2$.

Definição 1.27. *Um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ é um* ***ponto fixo*** *de F se $F(x^*) = x^*$.*

Um ponto $x \in \mathbb{R}^n$, onde $F^m(x) = x$ é chamado ***ponto periódico*** *de F com período m. O conjunto de todas as iterações de um ponto periódico constitui uma* ***órbita periódica*** *de F.*

Definição 1.28. *Dizemos que ponto fixo x^* é um* ***atrator local*** *da equação* (1.3) *se existe uma vizinhança $U \subset \mathbb{R}^n$ de x^*, tal que $F^n(x) \to x^*$ quando $n \to \infty$, para cada $x \in U$. Se $U = \mathbb{R}^n$, então x^* é um* ***atrator global*** *da equação* (1.3).

Exemplo 1.29. *Considere a aplicação $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{3}\right)$ e sua equação de diferenças associada*

$$\left(x^{(n+1)}, y^{(n+1)}\right) = F\left((x^{(n)}, y^{(n)})\right).$$

Observa-se que a origem é o único ponto fixo de F. Além disso, para toda condição inicial $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \mathbb{R}^2$, observamos pelas iterações que

$$F(x^{(0)}, y^{(0)}) = \left(\frac{x^{(0)}}{2}, \frac{y^{(0)}}{3}\right)$$

$$F^2(x^{(0)}, y^{(0)}) = \left(\frac{x^{(0)}}{2^2}, \frac{y^{(0)}}{3^2}\right)$$

$$\vdots$$

$$F^n(x^{(0)}, y^{(0)}) = \left(\frac{x^{(0)}}{2^n}, \frac{y^{(0)}}{3^n}\right).$$

Mas, $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{(0)}}{2^n} = 0$ *e* $\lim_{n\to\infty} \frac{y^{(0)}}{3^n} = 0$, *por isso, segue que*

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x^{(0)}, y^{(0)}) = (0, 0),$$

para todo $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \mathbb{R}^2$. Portanto, a origem é um atrator global do sistema dinâmico discreto associado, além disso, para qualquer condição inicial, a sua órbita tem a seguinte forma

$$\gamma^+(x^{(0)}, y^{(0)}) = \left\{(x^{(0)}, y^{(0)}), \left(\frac{x^{(0)}}{2}, \frac{y^{(0)}}{3}\right), \left(\frac{x^{(0)}}{2^2}, \frac{y^{(0)}}{3^2}\right), \ldots, (0, 0)\right\}.$$

1.3.2 Estabilidade de Lyapunov

Definição 1.30. *Um ponto de equilíbrio $\bar{x}$ é* ***estável*** *no sentido de Lyapunov se para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $F^n(B(\bar{x}, \delta)) \subset B(\bar{x}, \epsilon)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, se*

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x) = \bar{x},$$

para qualquer $x \in B(\bar{x}, \delta)$, então $\bar{x}$ é ***assintoticamente estável****.*

Exemplo 1.31. *Considere a aplicação $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \frac{x}{1+x^2}$ e o sistema dinâmico discreto associado. O único ponto de equilíbrio do sistema é $\bar{x} = 0$, além disso,*

$$\begin{aligned}
&|F(x)| = \left|\frac{x}{1+x^2}\right| \leqslant |x| \\
&|F^2(x)| = \left|F\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\right| \leqslant \left|\frac{x}{1+x^2}\right| = |F(x)| \leqslant |x| \\
&|F^3(x)| = |F(F^2(x))| \leqslant |F^2(x)| \leqslant |F(x)| \leqslant |x| \\
&\vdots \\
&|F^n(x)| \leqslant |x|,
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim, tomando $\epsilon = \delta > |x|$, obtemos $F^n(B(0,\delta)) \subset B(0,\epsilon)$. Portanto, a origem é estável no sentido de Lyapunov. Também podemos verificar a estabilidade assintótica. Como $F^n(x)$ é limitada e monótona, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, então é convergente, assim, existe $\lim_{n\to\infty} F^n(x) = L$. Como F é contínua,

$$\lim_{n\to\infty} F(F^n(x)) = F\left(\lim_{n\to\infty} F^n(x)\right) = F(L) = \frac{L}{1+L^2},$$

de onde segue que

$$L = \frac{L}{1+L^2} \Rightarrow L = 0.$$

Portanto, $\lim_{n\to\infty} F^n(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definição 1.32. *Dizemos que $V : U \to \mathbb{R}$ é uma **função de Lyapunov** para o sistema dinâmico discreto gerado por F em U se:*

1. *V é contínua em U.*
2. *$\dot{V}(x) := V(F(x)) - V(x) \leqslant 0$ para todo $x \in U$.*

Definição 1.33. *Uma função $V : U \to \mathbb{R}$ é dita **definida positiva** com respeito ao ponto de equilíbrio $\bar{x}$ de F se:*

1. *$V(\bar{x}) = 0$.*
2. *Existe $\eta > 0$ tal que $V(x) > 0$ para qualquer $x \in B(\bar{x},\eta) - \{\bar{x}\}$.*

Teorema 1.34 (Teorema de Estabilidade de Lyapunov)**.** *Se $\bar{x}$ é um ponto de equilíbrio de F, V é uma função de Lyapunov para F em alguma vizinhança de $\bar{x}$ e V é definida positiva com respeito a $\bar{x}$, então $\bar{x}$ é um ponto de equilíbrio estável.*

Demonstração: Ver Teorema 2.1.2 em (BONOMO, 2008). ∎

Corolário 1.35 (Teorema de Estabilidade Assintótica de Lyapunov)**.** *Se V e $-\dot{V}$ são definidas positivas com respeito a $\bar{x}$, então $\bar{x}$ é assintoticamente estável.*

Demonstração: Ver Corolário 2.1.1 em (BONOMO, 2008). ∎

Exemplo 1.36. *Seja o sistema dinâmico discreto*

$$(x^{(n+1)}, y^{(n+1)}) = F(x^{(n)}, y^{(n)}),$$

onde $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é definida por

$$F(x, y) = \left(\frac{y}{1 + x^2 + y^2}, \frac{x}{1 + x^2 + y^2} \right).$$

O único ponto de equilíbrio do sistema é a origem, vamos mostrar que o mesmo é assintoticamente estável. Para isso, tomemos a aplicação $V(x, y) = x^2 + y^2$. Pode-se verificar que V é uma função de Lyapunov e definida positiva com relação a origem, pois V é contínua em todo o plano, $V(0, 0) = 0$, $V(x, y) > 0$ quando $(x, y) \neq (0, 0)$. Além disso,

$$\dot{V}(x, y) = \frac{y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} - x^2 - y^2 = \frac{(x^2 + y^2)[1 - (1 + x^2 + y^2)^2]}{(1 + x^2 + y^2)^2} \leqslant 0,$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Como $-\dot{V}$ também é definida positiva com respeito a origem, segue do Corolário 1.35 que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

1.4 Resultados auxiliares

Nesta seção serão enunciados alguns resultados importantes que serão utilizados ao longo dos capítulos 2 e 3, usamos como referência Demuner (2005), Barreira e Valls (2012), Scárdua (2015), Hadamard (1906) e Stewart (2013).

Teorema 1.37 (Teorema de Green)**.** *Sejam C uma curva fechada simples, suave por partes, orientada no sentido anti-horário, e R a região fechada delimitada por C. Se $F = (f_1, f_2)$ é um campo vetorial de classe C^1 em um domínio D que contém R, então*

$$\int_C f_1\,dx + f_2\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Demonstração: Ver seção 16.4 em (STEWART, 2013). ∎

Teorema 1.38. *Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial diferenciável com $F(0) = 0$. Se todos os autovalores da matriz Jacobiana $JF(0)$ têm parte real negativa, então 0 é um atrator local da equação diferencial* (1.1)*.*

Demonstração: Ver Teorema 1.4.11 em (DEMUNER, 2005) ou Teorema 4.9 em (BARREIRA; VALLS, 2012). ∎

Definição 1.39. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos. Uma aplicação bijetiva $f : U \to V$ contínua, cuja inversa também é contínua chama-se* ***homeomorfismo*** *entre U e V.*

Exemplo 1.40. *Considere a bola aberta unitária*

$$B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}.$$

Vejamos que essa bola é homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. De fato, a aplicação $F : \mathbb{R}^n \to B(0,1)$ dada por

$$F(x) = \frac{x}{1 + |x|},$$

é contínua e possui inversa $F^{-1} : B(0,1) \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$F^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|},$$

a qual também é contínua. Portanto, f é um homeomorfismo entre $\mathbb{R}^n$ e $B(0,1)$.

Definição 1.41. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos. Uma aplicação bijetiva $f : U \to V$ diferenciável, cuja inversa também é diferenciável chama-se* ***difeomorfismo*** *entre U e V.*

Exemplo 1.42. *Seja a aplicação $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (x + y, x - y)$. Para verificar que F é um difeomorfismo, vamos determinar sua inversa. Seja*

$$F(x, y) = (u, v),$$

então $u = x + y$ e $v = x - y$. Somando as duas equações, obtemos $u + v = 2x$, de onde segue que $x = (u + v)/2$. Subtraindo as duas equações, obtemos $u - v = 2y$, logo $y = (u - v)/2$. Assim, a inversa de F é dada por

$$F^{-1}(u, v) = \left(\frac{u + v}{2}, \frac{u - v}{2}\right).$$

Como F e F^{-1} são aplicações polinomiais de classe C^∞, segue que F é um difeomorfismo.

O próximo teorema se deve a Černavskii (1965).

Teorema 1.43. *Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $F : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável tal que, para todo $x \in U$, os autovalores de $JF(x)$ são diferentes de zero. Então F é um difeomorfismo local.*

Demonstração: Ver Teorema 2.1.4 em (DEMUNER, 2005). ∎

O próximo resultado aborda o Teorema de Poincaré-Bendixson que será importante para a demonstração da Conjectura de Markus-Yamabe no $\mathbb{R}^2$.

Teorema 1.44. *Seja $\varphi : [0, +\infty) \to U$ uma curva integral do campo vetorial planar $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pelo ponto $p \in U$, tal que a semi-órbita positiva φ_p^+ esteja contida em um conjunto compacto $K \subset U$. Suponha ainda que $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$, para todo $0 \leqslant t_1 < t_2 < +\infty$, e que o campo F possua um número finito de pontos de equilíbrio em $\omega(\varphi_p)$. Então, valem as seguintes afirmações:*

(I) se $\omega(\varphi_p)$ contém somente pontos regulares, então $\omega(\varphi_p)$ é uma órbita periódica;

(II) se $\omega(\varphi_p)$ não contém pontos regulares, então $\omega(\varphi_p)$ é um ponto de equilíbrio;

(III) se $\omega(\varphi_p)$ contém pontos regulares e pontos de equilíbrio, então $\omega(\varphi_p)$ consiste em pontos de equilíbrio $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e de uma sequência de semi-órbitas

$$\{\psi(t) : -\infty \leqslant \alpha_- < t < \alpha_+ \leqslant +\infty\}$$

do campo F, onde $\psi : \mathbb{R} \to U$, tais que essas semi-órbitas não contêm pontos singulares, mas

$$\psi(\alpha_+) = \lim_{t\to\alpha_+} \psi(t) \quad \Big(\textit{resp. } \psi(\alpha_-) = \lim_{t\to\alpha_-} \psi(t)\Big)$$

existe e pertence ao conjunto $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.

Demonstração: Ver Teorema 4.2 em (HARTMAN, 1964) ou Teorema 2.5.1 em (SCÁRDUA, 2015). ∎

Agora, abordaremos um teorema que se deve a Hadamard (1906) e será muito importante no capítulo 3 deste trabalho para o contra-exemplo racional da Conjectura de Markus-Yamabe Discreta em dimensão $n \geqslant 2$.

Antes de enunciar o teorema precisamos da definição de função própria.

Definição 1.45. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto, dizemos que f é uma* ***função própria*** *se $f^{-1}(K)$ é compacto. Equivalentemente, f é própria se $\lim_{||x||\to\infty} ||f(x)|| = \infty$, com $x \in \mathbb{R}^n$, ou seja, se para qualquer $M > 0$, existe $R > 0$ tal que $||f(x)|| > M$ sempre que $||x|| > R$.*

Teorema 1.46 (Teorema de Hadamard)**.** *Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^2 com $\det JF(x)$ não nulo para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$. Então, F é um difeomorfismo global se, e somente se, F é própria.*

Demonstração: Ver Teorema A em (GORDON, 1972). ∎

Exemplo 1.47. *Retomando a aplicação do Exemplo 1.42, $F(x, y) = (x + y, x - y)$. Temos que*

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

assim, $\det JF(x, y) = -2 \neq 0$, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Agora, vamos verificar que F é própria, de fato

$$||F(x, y)||^2 = (x + y)^2 + (x - y)^2 = 2||(x, y)||^2,$$

logo, $||F(x,y)|| = \sqrt{2}\ ||(x,y)||$. *Assim*

$$\lim_{||(x,y)||\to\infty} ||F(x,y)|| = \lim_{||(x,y)||\to\infty} \sqrt{2}\ ||(x,y)|| = \sqrt{2} \lim_{||(x,y)||\to\infty} ||(x,y)|| = \infty.$$

Portanto, F *é um difeomorfismo global.*

Capítulo

2

Conjectura de Markus-Yamabe Contínua

Neste capítulo, exploramos a conjectura de Markus-Yamabe para sistemas em tempo contínuo, apresentando a demonstração para os casos unidimensional e bidimensional, e também mostraremos um contraexemplo para o caso $n \geqslant 3$.

2.1 Caso unidimensional

Primeiramente, mostremos que a conjectura é válida quando $n = 1$.

Teorema 2.1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(0) = 0$ e suponha que $f'(x)$ é negativo, para todo $x \in \mathbb{R}$. Então, a origem é um atrator global da EDO*

$$x' = f(x). \tag{2.1}$$

Demonstração: Para a demonstração do caso unidimensional, utilizaremos um tratamento qualitativo para equações diferenciais. De fato, como $f'(x) < 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então f é uma função estritamente decrescente. Uma vez que $f(0) = 0$, segue que $f(x) > 0$ para $x < 0$ e $f(x) < 0$ para $x > 0$. Logo, $x' > 0$ para $x < 0$ e $x' < 0$ para $x > 0$. Portanto, a solução $x(t)$ da EDO (2.1) é crescente para $x < 0$ e decrescente para

$x > 0$. Ou seja, para qualquer condição inicial, o conjunto ω-limite da órbita é a origem.

■

O retrato de fase está esboçado na figura 2.1

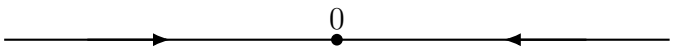


Figura 2.1: Retrato de fase da EDO (2.1) sob as condições do Teorema 2.1.

2.2 Caso bidimensional

Nesta subseção, apresentamos a demonstração da Conjectura de Markus-Yamabe no caso planar, esta demonstração se deve a Gutiérrez (1993) e também está presente em Demuner (2005). Para isso, iniciamos com alguns resultados auxiliares, onde assumimos a hipótese de que $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$, é um campo vetorial diferenciável tal que $F(0) = 0$ e todos os autovalores da matriz Jacobiana $JF(x, y)$ tem parte real negativa, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Denotaremos o conjunto desses autovalores por $Spec(F)$. Vale observar que apenas a diferenciabilidade do campo F não garante necessariamente a unicidade de solução começando em um ponto $p \in \mathbb{R}^2$, porém como veremos no Lema 2.3, vale a unicidade sob as hipóteses anteriores.

Utilizaremos neste capítulo a notação $F^* : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ para designar o campo vetorial ortogonal de F, ou seja,

$$F^*(x, y) = (-g(x, y), f(x, y)).$$

Também denotaremos arcos de trajetórias de F e F^*, conectando os pontos $p, q \in \mathbb{R}^2$, por $[p, q]$ e $[p, q]^*$, respectivamente.

Note que, o comprimento $L(p, q)$ do arco $[p, q]^*$ é dado por

$$L(p, q) = \int_{[p,q]^*} \|F\| ds,$$

onde ds é o elemento de comprimento do arco e $|\cdot|$ é a norma Euclidiana do $\mathbb{R}^2$. Naturalmente, $L(p, q) > 0$ se $p \neq q$.

Lema 2.2. *Seja R a região compacta cuja fronteira é formada pelos arcos de trajetórias $[p_1, q_1], [p_2, q_2]$ de F e $[p_1, p_2]^*, [q_1, q_2]^*$ de F^*. Então,*

$$L(q_1, q_2) - L(p_1, p_2) < 0.$$

Demonstração: Da definição de traço de uma matriz, segue que

$$\iint_R \operatorname{tr}(JF)(x,y)dxdy = \iint_R \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) dxdy = \iint_R \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \left(-\frac{\partial g}{\partial y}\right)\right) dxdy.$$

Utilizando o teorema de Green, obtemos

$$\iint_R \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \left(-\frac{\partial g}{\partial y}\right)\right) dxdy = \int_{\partial R} f\,dy - g\,dx.$$

Expandindo a integral para cada um dos arcos que compõem R

$$\int_{\partial R} f\,dy - g\,dx = \int_{[p_1,q_1]} f\,dy - g\,dx + \int_{[q_1,q_2]^*} f\,dy - g\,dx - \int_{[p_2,q_2]} f\,dy - g\,dx - \int_{[p_1,p_2]^*} f\,dy - g\,dx.$$

Consideremos agora um arco de trajetória de F. Se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ é uma parametrização C^1 desse arco, então

$$x'(t) = f(x(t), y(t)), \quad y'(t) = g(x(t), y(t)).$$

Assim, ao longo de γ,

$$f\,dy - g\,dx = fg\,dt - gf\,dt = 0. \tag{2.2}$$

Portanto, as integrais de linha ao longo dos arcos $[p_1, q_1]$ e $[p_2, q_2]$ são nulas.

Analogamente, seja $\gamma^*(t) = (x(t), y(t))$, uma parametrização C^1 de um arco de trajetória do campo F^*, então

$$x'(t) = -g(x(t), y(t)), \quad y'(t) = f(x(t), y(t)).$$

Assim, ao longo de γ^*,

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-g, f) = F^*(x, y).$$

Logo,

$$(-g)\,dx + f\,dy = g^2\,dt + f^2\,dt = \|F\|^2\,dt. \tag{2.3}$$

Recordemos que o elemento de comprimento de arco de uma curva C^1 é dado por

$$ds = \|\gamma'(t)\|\,dt = \|F^*\|\,dt.$$

Por outro lado, como $\|F^*(x,y)\| = \|F(x,y)\|$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, segue que

$$dt = \frac{ds}{\|F\|}. \tag{2.4}$$

Consequentemente, segue de (2.2), (2.3) e (2.4) que

$$\int_{\partial R} f\,dy - g\,dx = \int_{[q_1,q_2]^*} \|F\|\,ds - \int_{[p_1,p_2]^*} \|F\|\,ds = L(q_1,q_2) - L(p_1,p_2).$$

Por fim, temos que os autovalores de $JF(x,y)$ possuem parte real negativa, logo $\operatorname{tr}(JF)(x,y) < 0$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, assim

$$\iint_R \operatorname{tr}(JF)(x,y)dxdy = L(q_1,q_2) - L(p_1,p_2) < 0.$$

■

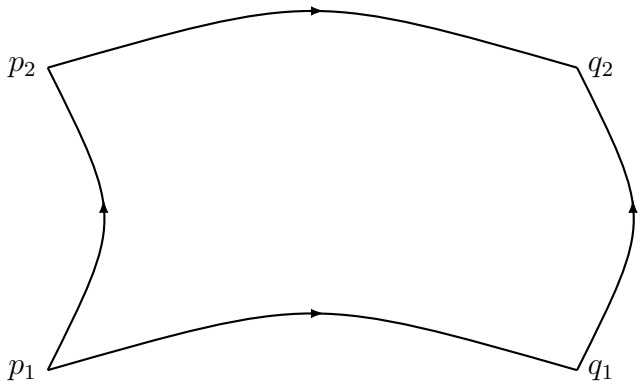


Figura 2.2: Região R cuja fronteira é formada por arcos de trajetórias de F e F^*.

Lema 2.3. *Para todo $p \in \mathbb{R}^2$, existe apenas uma semi-trajetória positiva que começa em p.*

Demonstração: Vamos supor, por contradição, a existência de duas semi-trajetórias positivas diferentes α_p^+ e σ_p^+ do campo F iniciando em p. Como 0 é um atrator local da equação $x' = F(x)$, então $p \neq 0$. Do Teorema 3.7 F é injetivo, logo, segue que $F(p) \neq 0$. Considere a região compacta cuja fronteira é formada pelos arcos de trajetórias $[p, q_1] \subset \alpha_p^+$ e $[p, q_2] \subset \sigma_p^+$ do campo F e o arco de trajetória $[q_1, q_2]^*$ de F^*, veja a figura 2.3.

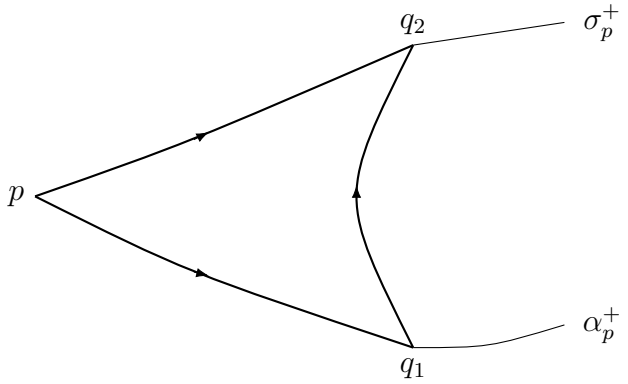


Figura 2.3: Semi-trajetórias positivas diferentes partindo do mesmo ponto.

Como $q_1 \neq q_2$, então $L(q_1, q_2) > 0$, porém, pelo lema 2.2, tomando $p_1 = p_2 = p$, temos que $L(q_1, q_2) < 0$. Desta contradição, concluímos que $\alpha_p^+ = \sigma_p^+$. ∎

Lema 2.4. *O campo vetorial F não possui trajetórias fechadas. Para todo $p \in \mathbb{R}^2$, o conjunto ω-limite de p é a origem ou o conjunto vazio.*

Demonstração: Vamos supor, por contradição, a existência de uma trajetória fechada σ do campo vetorial F. Seja D a região de $\mathbb{R}^2$ limitada por σ, então, temos, pelo lema 2.2 e pela definição de traço de uma matriz

$$\iint_D \operatorname{tr}(JF)(x,y)dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) dxdy < 0.$$

Por outro lado, pelo teorema de Green, temos

$$\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) dxdy = \int_\sigma f dy - g dx = 0,$$

isto implica em

$$0 = \int_\sigma f dy - g dx = \iint_D \text{traço}(JF)dxdy < 0.$$

Desta contradição, concluímos que F não possui trajetórias fechadas. Além disso, utilizando o teorema de Poincaré-Bendixson segue que as únicas duas possibilidades para o conjunto ω-limite de p são o conjunto vazio ou o ponto de equilíbrio localizado na origem. ∎

Para o próximo resultado, precisamos estabelecer algumas notações. Tomando A e B, subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, a distância entre eles é dada por

$$d(A,B) = inf\{|p-q| : p \in A; q \in B\}.$$

Além disso, dado um arco $[p,q]^*$ de F^*, o seu comprimento será denotado por $\ell(p,q)^*$.

Lema 2.5. *Sejam W uma vizinhança aberta e limitada da origem e $p_1 \in \mathbb{R}^2 - W$. Se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno e existe $\delta > 0$ tal que, se $[p_1, q_1]$ é um arco de trajetória de F, onde $[p_1,q_1] \cap W = \varnothing$, e $[p_1,p_2]^*$ (respectivamente $[p_2,p_1]^*$) é um arco de trajetória de F^*, onde $\ell(p_1,p_2)^* < \delta$, então existem arcos de trajetórias $[p_2,q_2]$ de F e $[q_1,q_2]^*$ (respectivamente $[q_2,q_1]^*$) de F^* tais que $\ell(q_1,q_2)^* < \epsilon$.*

Demonstração: Seja $R(p_1,q_1,q_2,p_2)$ a região cuja fronteira ∂R é dada pelos arcos de trajetórias $[p_1,q_1],[p_2,q_2]$ de F e $[p_1,p_2]^*,[q_1,q_2]^*$ de F^*, onde $[p_1,q_1] \cap W = \varnothing$ e $\ell(p_1,p_2)^* < \epsilon$, veja a Figura 2.2.

Sejam $U = B(p_1,r) \subset W^c$, $\Delta = \sup\{|F(p)| : p \in U\}$ e V uma vizinhança aberta da origem tal que $\overline{V} \subset W$. Mostraremos a seguir que as seguintes afirmações são válidas.

1. Existe $\lambda > 0$ tal que $|F(p)| > \lambda$, para todo $p \in \mathbb{R}^2 - V$.

2. Dados $0 < \epsilon < d(V, \mathbb{R}^2 - W)$ e $0 < \delta < \min.\{r, \epsilon\,\frac{\epsilon\lambda}{\Delta}\}$, vale que $\ell(q_1,q_2)^* < \epsilon$.

Para mostrar a afirmação 1, segue do Teorema 1.43 que F é um homeomorfismo local, logo F leva abertos em abertos, por isso, $F(V)$ é aberto. Além disso, como $0 \in V$ e $F(0) = 0$, então $0 \in F(V)$. Assim, existe $\lambda > 0$ tal que $B(0,\lambda) \subset F(V)$. Dado $p \in \mathbb{R}^2 - V$, vamos supor que $F(p) \in B(0,\lambda)$, logo, $F(p) \in F(V)$ e isto implica que $F(q) = F(p)$, para algum $q \in V$, o que é uma contradição, pois F é injetivo pelo Teorema 3.7. Portanto, $F(p) \notin B(0,\lambda)$, e então, $|F(p)| > \lambda$. Isso conclui a prova da afirmação 1.

Para a prova da afirmação 2, notemos inicialmente que de fato $d(V, \mathbb{R}^2 - W) > 0$, pois $V \subset W$ é limitado e $\mathbb{R}^2 - W$ é fechado. Primeiro, vamos mostrar que $[q_1, q_2]^* \cap V = \varnothing$. Supondo que isso não ocorra, então existe $q \in [q_1, q_2]^* \cap V$. Usando o lema 2.3, obtemos $p \in [p_1, p_2]^*$ tal que $[p, q]$ é um arco de trajetória de F. Como $q_1 \notin W$, então $\ell(q_1, q)^* > \epsilon$. Além disso, pelo lema 2.2, $L(q_1, q) < L(p_1, p)$. Logo,

$$\lambda\epsilon < \lambda\ell(q_1, q)^* \leqslant L(q_1, q) < L(p_1, p) \leqslant \Delta\ell(p_1, p)^* < \Delta\delta < \epsilon\lambda,$$

o que é uma contradição, assim $[q_1, q_2]^* \cap V = \varnothing$. Desta forma, usando o mesmo raciocínio

$$\lambda\ell(q_1, q_2)^* \leqslant L(q_1, q_2) < L(p_1, p_2) \leqslant \Delta\ell(p_1, p_2)^*.$$

Por consequência

$$\ell(q_1, q_2)^* < \frac{\Delta}{\lambda}\ell(p_1, p_2)^* < \frac{\Delta\delta}{\lambda} < \epsilon.$$

■

Observação 4. *A prova de que a região $R(p_1, q_1, q_2, p_2)$ existe e está bem definida será omitida devido a sua complexidade e falta de prazo para desenvolvê-la neste trabalho, porém pode ser vista no Lema* 5.1.5 *em (DEMUNER, 2005).*

Corolário 2.6. *Seja $\mathcal{W}^s = \{p \in \mathbb{R}^2 : \omega(p) = \{0\}\}$, então $\mathcal{W}^s$ é um subconjunto aberto e não vazio do $\mathbb{R}^2$.*

Com estes resultados, podemos demonstrar a conjectura de Markus-Yamabe para $n = 2$, ou seja, apresentamos a prova do seguinte resultado.

Teorema 2.7. *Seja $F : (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo vetorial diferenciável tal que $F(0) = 0$ e os autovalores da matriz Jacobiana $JF(x)$ possuem parte real negativa. Então, para todo $p \in \mathbb{R}^2$, existe apenas uma semi-trajetória positiva começando em p, além disso, o conjunto ω-limite de p é a origem.*

Demonstração: Do lema 2.3 temos que, para todo $p \in \mathbb{R}^2$, a trajetória de F começando em p existe e é única, assim, resta provar que o conjunto ω-limite de p é sempre a origem, isto é $\mathcal{W}^s = \mathbb{R}^2$. O corolário 2.6 garante que $\mathcal{W}^s$ é aberto e não vazio, logo, devido a $\mathbb{R}^2$ ser conexo, basta mostrar que $\mathbb{R}^2 - \mathcal{W}^s$ é um subconjunto aberto de

$\mathbb{R}^2$. Se $\mathbb{R}^2 - \mathcal{W}^s = \varnothing$, então não há o que mostrar. Caso contrário, existe $p_1 \in \mathbb{R}^2 - \mathcal{W}^s$, assim, tomemos $\alpha^+_{p_1}$, a semi-trajetória positiva de F começando por p_1. Segue do lema 2.4 que $\alpha^+_{p_1}$ não é limitada. Seja V uma vizinhança limitada da origem, de forma que $\overline{V} \subset \mathcal{W}^s$, observamos que $\alpha^+_{p_1} \cap V = \varnothing$. Pelo lema 2.5, temos que para $0 < \epsilon < d(\alpha^+_{p_1}, V)$ suficientemente pequeno, existe $\delta > 0$ tal que, se $[p_1, p_2]^*$ é um arco de trajetória de F^* com $\ell(p_1, p_2)^* < \delta$, então, para todo $q_1 \in \alpha^+_{p_1}$, existem arcos de trajetórias $[p_2, q_2]$ de F e $[q_1, q_2]$ de F^*, onde $\ell(q_1, q_2)^* < \epsilon$, isso implica em $\mathbb{R}^2 - \mathcal{W}^s$ ser aberto. ∎

2.3 Contra-exemplo polinomial para $n \geqslant 3$

Mostraremos agora um contra-exemplo obtido por Cima et al. (1997) para a Conjectura de Markus-Yamabe para o caso $n \geqslant 3$.

Teorema 2.8. *Sejam $n \geqslant 3$ e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o campo vetorial polinomial definido por*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (-x_1 + x_3 d(x)^2, -x_2 - d(x)^2, -x_3, -x_4, \ldots, -x_n),$$

onde $d(x) = (x_1 + x_2 x_3)^2$. Então, F é um contra-exemplo da conjectura de Markus-Yamabe.

Demonstração: Inicialmente, precisamos verificar se os autovalores de $JF(x)$ possuem parte real negativa. De fato,

$$JF(x) = \begin{pmatrix} -1 + 2x_3 d(x) & 2x_3^2 d(x) & d(x)^2 + 2x_2 x_3 d(x) & 0 & \ldots & 0 \\ -2d(x) & -1 - 2x_3 d(x) & -2x_2 d(x) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{pmatrix},$$

pode-se verificar que os autovalores λ de $JF(x)$ são todos iguais a -1.

Agora, precisamos encontrar uma solução para o sistema

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_3 d(x)^2 \\ x_2' = -x_2 - d(x)^2 \\ x_3' = -x_3 \\ \vdots \\ x_n' = -x_n \end{cases}$$

para $x_3, x_4, \ldots, x_n$, não é difícil verificar que as soluções todas iguais a e^{-t}. Para encontrar as soluções para as duas primeiras linhas do sistema, vamos supor que ambas sejam algum tipo de exponencial, assim, supomos que $x_1(t) = ae^t$ e $x_2(t) = be^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$. Fazendo as substituições encontraremos os valores de $a = 18$ e $b = -12$. Desse modo, obtemos a solução

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 18e^t \\ x_2(t) &= -12e^{2t} \\ x_3(t) &= e^{-t} \\ &\vdots \\ x_n(t) &= e^{-t} \end{aligned}$$

que obviamente tende ao infinito para $t \to \infty$. Portanto, o campo vetorial F é um contra-exemplo para a Conjectura de Markus-Yamabe em dimensão $n \geqslant 3$. ∎

Capítulo

3

Conjectura de Markus-Yamabe Discreta

Neste capítulo, apresentaremos a conjectura de Markus-Yamabe em tempo discreto (DMYC), tomando por referência Cima, Gasull e Mañosas (1999) e Ribeiro (2007). Inicialmente, mostraremos a validade da conjectura para o caso unidimensional, para aplicações triangulares e para aplicação polinomiais no $\mathbb{R}^2$; em seguida, mostramos dois contra-exemplos.

3.1 Caso unidimensional

Inialmente, mostraremos a validade da conjectura discreta no caso unidimensional.

Teorema 3.1. *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, onde $F(0) = 0$ e para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $|F'(x)| < 1$. Então, 0 é um atrator global para o sistema dinâmico discreto*

$$x^{(m+1)} = F(x^{(m)}),\ \forall x^{(0)} \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Seja $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ e a sequência definida por

$$x^{(m+1)} = F\left(x^{(m)}\right), \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, para cada $x \in \mathbb{R}$, com $x \neq 0$, existe $\xi \in (0, x)$ tal que $F(x) - F(0) = F'(\xi)(x - 0)$. Como $F(0) = 0$, segue que

$$|F(x)| = |F'(\xi)||x|.$$

Pela hipótese, $|F'(x)| < 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, logo

$$|F(x)| < |x|,$$

para todo $x \neq 0$. Aplicando essa desigualdade à sequência $x^{(m)}$, sempre que $x^{(m)} \neq 0$, temos

$$|x^{(m+1)}| < |x^{(m)}|.$$

Assim, a sequência $|x^{(m)}|$ é decrescente e limitada inferiormente por zero. Portanto, existe $L \geq 0$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} |x^{(m)}| = L.$$

Vamos supor, por absurdo, que $L > 0$. Pela continuidade de F', existe $q \in [0, 1)$ tal que

$$|F'(x)| \leq q, \qquad \forall x \in I.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, aplicando-o aos pontos $x^{(m)}$ e 0, existe um ponto ξ_m entre $x^{(m)}$ e 0 tal que

$$F\left(x^{(m)}\right) - F(0) = F'(\xi_m)\left(x^{(m)} - 0\right).$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} x^{(m+1)} &= F\left(x^{(m)}\right) = F\left(x^{(m)}\right) - F(0) \\ \Rightarrow \left|x^{(m+1)}\right| &= \left|F\left(x^{(m)}\right) - F(0)\right| = |F'(\xi_m)|\left|x^{(m)}\right|. \end{aligned}$$

Como $|F'(x)| \leq q$, segue que $|F'(\xi_m)| \leq q$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \left|x^{(m+1)}\right| &\leq q \left|x^{(m)}\right| \\ \Rightarrow \left|x^{(m)}\right| &\leq q^m \left|x^{(0)}\right|. \end{aligned}$$

Como $0 \leq q < 1$, temos que $q^m \to 0$ quando $m \to \infty$. Então $\lim_{m\to\infty} |x^{(m)}| = 0$. Logo $L = 0$, assim,

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = 0,$$

para qualquer $x^{(0)} \in \mathbb{R}$, assim, concluímos que toda órbita do sistema converge para a origem. Portanto, 0 é um atrator global do sistema dinâmico discreto. ∎

3.2 Caso triangular

O próximo resultado mostra a validade da conjectura discreta de Markus-Yamabe para aplicações triangulares do $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.2. *Dizemos que a aplicação $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é triangular se possuir a seguinte forma*

$$F(x) = (F_1(x_1),\ F_2(x_1, x_2),\ \ldots,\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Definição 3.3. *Uma aplicação $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dita triangularizável se existir uma transformação linear invertível $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que a aplicação conjugada*

$$\widetilde{F} = A^{-1} \circ F \circ A,$$

é triangular, isto é,

$$\widetilde{F}(x_1, \ldots, x_n) = \left(\widetilde{F}_1(x_1), \widetilde{F}_2(x_1, x_2), \ldots, \widetilde{F}_n(x_1, \ldots, x_n)\right).$$

Exemplo 3.4. *Seja* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *a aplicação dada por* $F(x, y) = (2x + y, x + 2y)$. *Tomemos a transformação linear*

$$A(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

que possui inversa dada por

$$A^{-1}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Assim, $(F \circ A)(u, v) = F(u - v, v) = (2u - v, u + v)$.

Aplicando A^{-1}, *obtemos* $(A^{-1} \circ F \circ A)(u, v) = A^{-1}(2u - v, u + v) = (3u, u + v)$. *Portanto, como* $A^{-1} \circ F \circ A$ *é triangular, segue que* A *triangulariza* F.

Teorema 3.5. *Seja* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *uma aplicação triangular de classe* C^1, *onde todos os autovalores de sua matriz Jacobiana possuem módulo menor que 1 em cada* $x \in \mathbb{R}^n$. *Se* $F(0) = 0$, *então, 0 é um atrator global para o sistema dinâmico discreto gerado por* F.

Demonstração: Note que a hipótese dada sobre os autovalores implica em $\left|\frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x)\right| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, pois F é triangular. Vamos fazer a seguinte afirmação

Afirmação 3.6. *Seja* $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *uma aplicação triangular de classe* C^1 *tal que*

$$\left|\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x)\right| < 1, \ \left|\frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x)\right| < 1, \ \ldots \ , \ \left|\frac{\partial F_m}{\partial x_m}(x)\right| < 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^m$ *e* $F(0) = 0$.

Fixando $x^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ *e tomando a sequência* $x^{(k+1)} = F(x^{(k)})$. *Então, existem* $k_0 \in \mathbb{N}$ *grande o suficiente,* $M \in \mathbb{R}^+$ *e* $K \in (0, 1)$ *tais que*

$$|x_i^{(k+k_0)}| \leqslant MK^k, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m \ e \ k \in \mathbb{N}$$

Notemos que da prova da afirmação segue diretamente a prova do teorema. Provaremos a afirmação através do princípio da indução finita sobre a dimensão m. Inicialmente, note que, para $m = 1$ a demonstração segue do Teorema 3.1. Supondo que a afirmação é verdadeira para $m = s - 1$, mostraremos sua validade para $m = s$.

Novamente, vamos fixar $x^{(0)} \in \mathbb{R}^s$. Tomando a aplicação

$$\hat{F}(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1}) = (F_1(x_1), F_2(x_1, x_2), \ldots, F_{s-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{s-1})).$$

Pela hipótese de indução, temos $k_0 \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{R}^+$ e $K \in (0,1)$ tais que

$$\left|x_i^{(k+k_0)}\right| \leq MK^k, \quad \text{para todo } i = 1, 2, \ldots, s-1 \text{ e para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Para facilitar a notação, trocaremos $x^{(0)}$ por $x^{(k_0)}$, obtendo

$$\left|x_i^{(k)}\right| \leqslant MK^k, \tag{3.1}$$

assim, temos que

$$\begin{aligned}
x_s^{(k)} &= F_s\Big(x^{(k-1)}\Big) \\
&= F_s\Big(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \ldots, x_s^{(k-1)}\Big) \\
&= \int_0^{x_s^{(k-1)}} \frac{\partial F_s}{\partial x_s}\Big(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \ldots, x_{s-1}^{(k-1)}, t\Big)\, dt \\
&\quad + \int_0^{x_{s-1}^{(k-1)}} \frac{\partial F_s}{\partial x_{s-1}}\Big(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \ldots, x_{s-2}^{(k-1)}, t, 0\Big)\, dt \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \int_0^{x_1^{(k-1)}} \frac{\partial F_s}{\partial x_1}\Big(t, 0, \ldots, 0\Big)\, dt \\
&= F_s\Big(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \ldots, x_s^{(k-1)}\Big) - F_s\Big(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \ldots, x_{s-1}^{(k-1)}, 0\Big) \\
&\quad + F_s\Big(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \ldots, x_{s-1}^{(k-1)}, 0\Big) - F_s\Big(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \ldots, x_{s-2}^{(k-1)}, 0, 0\Big) \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + F_s\Big(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, 0, \ldots, 0\Big) - F_s\Big(x_1^{(k-1)}, 0, \ldots, 0\Big) \\
&\quad + F_s\Big(x_1^{(k-1)}, 0, \ldots, 0\Big) - F_s\Big(0, 0, \ldots, 0\Big).
\end{aligned}$$

Tomando o módulo e utilizando a desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned}\left|x_s^{(k)}\right| \leqslant & \left| \int_0^{x_s^{(k-1)}} \frac{\partial F_s}{\partial x_s}\Big(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \ldots, x_{s-1}^{(k-1)}, t\Big)\, dt \right| \\ & + \left| \int_0^{x_{s-1}^{(k-1)}} \frac{\partial F_s}{\partial x_{s-1}}\Big(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \ldots, x_{s-2}^{(k-1)}, t, 0\Big)\, dt \right| \\ & + \cdots \\ & + \left| \int_0^{x_1^{(k-1)}} \frac{\partial F_s}{\partial x_1}\Big(t, 0, \ldots, 0\Big)\, dt \right|.\end{aligned}$$

Agora, pela hipótese indução, a sequência $\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{s-1}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada, ou seja, existe uma bola aberta $B \subset \mathbb{R}^{s-1}$ que contém esta sequência. Por isso, seja $R > 0$ tal que

$$R = \max\left\{ \left| \frac{\partial F_s}{\partial x_i}\Big(y_1, y_2, \ldots, y_{s-1}, 0\Big) \right| \ ; \ (y_1, y_2, \ldots, y_{s-1}) \in \overline{B} \text{ e } i = 1, 2, \ldots, s-1 \right\}.$$

Assim, podemos concluir que

$$\left|x_s^{(k)}\right| \leqslant \left|x_s^{(k-1)}\right| + R\left(\left|x_{s-1}^{(k-1)}\right| + \left|x_{s-2}^{(k-1)}\right| + \cdots + \left|x_1^{(k-1)}\right|\right). \tag{3.2}$$

Utilizando as equações (3.1) e (3.2), teremos

$$\begin{aligned}\left|x_s^{(k)}\right| &\leqslant \left|x_s^{(k-1)}\right| + (s-1)MRK^{k-1} \\ &\leqslant \left|x_s^{(k-2)}\right| + (s-1)MRK^{k-2} + (s-1)MRK^{k-1} \\ &\leqslant \ldots \\ &\leqslant \left|x_s^{(0)}\right| + (s-1)MR + (s-1)MRK^1 + \cdots + (s-1)MRK^{k-1}.\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $C = (s-1)MR$

$$\left|x_s^{(k)}\right| \leqslant \left|x_s^{(0)}\right| + C\left(K^{k-1} + K^{k-2} + \cdots + 1\right) \leqslant \left|x_s^{(0)}\right| + \frac{C}{1-K}. \tag{3.3}$$

Logo, notamos que a sequência $\{x_s^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada. Como, por hipótese, o mesmo vale para $\{x_i^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, onde $i = 1, 2, \ldots, s-1$, então, existe $L > 0$ tal que

$$\left|x_i^{(k)}\right| \leqslant L, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, s.$$

Dessa forma, definimos

$$D = \max\left\{\left|\frac{\partial F_s}{\partial x_s}\Big(y_1, y_2, \ldots, y_s\Big)\right| \ ; \ |y_i| \leq L, \ i = 1, 2, \ldots, s\right\},$$

e podemos garantir que $D < 1$, pois $\left|\frac{\partial F_s}{\partial x_s}\Big(y_1, y_2, \ldots, y_s\Big)\right| < 1$.

Munidos desta nova estimativa, podemos concluir, utilizando a equação (3.2) que

$$\left|x_s^{(k)}\right| \leqslant D\left|x_s^{(k-1)}\right| + R\left(\left|x_{s-1}^{(k-1)}\right| + \left|x_{s-2}^{(k-1)}\right| + \cdots + \left|x_1^{(k-1)}\right|\right). \tag{3.4}$$

O que implica em

$$\begin{aligned}
\left|x_s^{(k)}\right| &\leqslant D\left(D\left|x_s^{(k-2)}\right| + K^{k-2}C\right) + K^{k-1}C \\
&\leqslant D\left[D\left(D\left|x_s^{(k-3)}\right| + K^{k-3}C\right) + K^{k-2}C\right] + K^{k-1}C \\
&\leqslant \ldots \\
&\leqslant D^k\left|x_s^{(0)}\right| + C\left(K^{k-1} + DK^{k-2} + \cdots + D^{k-1}\right) \\
&\leq D^k\ \left|x_s^{(0)}\right| + kC\left(\max\{K, D\}\right)^{k-1} \\
&\leq \left(\max\{D, K\}\right)^{k-1} D\left|x_s^{(0)}\right| + kC\left(\max\{K, D\}\right)^{k-1} \\
&\leq \left(\max\{K, D\}\right)^{k-1}\left(D\left|x_s^{(0)}\right| + kC\right) \\
&\leq \left(\max\{K, D\}\right)^{k-1}\left(\max\{K, D\}\left|x_s^{(0)}\right| + kC\right) \\
&\leq \left(\max\{K, D\}\right)^{k}\left(\left|x_s^{(0)}\right| + \frac{kC}{\max\{K, D\}}\right).
\end{aligned}$$

Por fim, fazendo as substituições $\hat{M} = \left|x_s^{(0)}\right| + \frac{kC}{\max\{K,D\}}$ e $\hat{K} = \max\{K, D\} < 1$, concluímos que

$$\left|x_s^{(k)}\right| \leqslant \hat{M}\hat{K}^k. \tag{3.5}$$

Demonstrando, portanto, a afirmação e, por consequência, o teorema. ∎

3.3 Caso polinomial bidimensional

Nesta sessão buscaremos mostrar a validade da Conjectura discreta para aplicações polinomiais no $\mathbb{R}^2$, inicialmente, enunciaremos alguns resultados auxiliares e em seguida, demonstraremos um resultado que confirma a veracidade para a conjectura. Essa demonstração se deve originalmente a Cima et al. (1997) e está presente em Ribeiro (2007).

O centro da demonstração está apoiado no seguinte Teorema de Fernandes, Gutierrez e Rabanal (2004)

Teorema 3.7. *Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável. Se para algum $\varepsilon > 0$ $Spec(F) \cap [0, \varepsilon) = \varnothing$, então F é injetiva.*

Observação 5. *Notemos que deste Teorema podemos concluir que qualquer aplicação do $\mathbb{R}^2$ tem, no máximo, um único ponto fixo. Isso vem da seguinte verificação: Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação com assim como na Conjectura discreta de Markus-Yamabe e G é uma aplicação tal que $G = F - I$, onde I é a aplicação identidade, então como os autovalores de F possuem módulo menor que um, os autovalores de G possuem parte real negativa. Assim, pelo Teorema 3.7, G é injetiva. Por fim, se $x \in \mathbb{R}^2$ é um ponto fixo de F, então $G(x) = 0$, como G é injetiva, então esse ponto fixo é único. Por fim, a existência deste ponto fixo é dada através do seguinte Teorema de Białynicki-Birula e Rosenlicht (1962)).*

Teorema 3.8 (Bialynicki-Birula, Rosenlicht)**.** *Se $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, com $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, é uma aplicação polinomial injetiva, então F é sobrejetiva.*

Lema 3.9. *Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial em que os autovalores da matriz Jacobiana $JF(x, y)$ possuem módulo menor que um, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Então o polinômio característico de $JF(x, y)$ possui coeficientes constantes.*

Demonstração: Tomando $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, sejam $\lambda_1(x, y)$ e $\lambda_2(x, y)$ os autovalores de $JF(x, y)$. O polinômio característico de $JF(x, y)$ é

$$p_{(x,y)}(\lambda) = \lambda^2 - (\lambda_1(x, y) + \lambda_2(x, y))\lambda + (\lambda_1(x, y)\lambda_2(x, y)),$$

Pela hipótese, obtemos que

$$|\lambda_1(x,y) + \lambda_2(x,y)| \leqslant |\lambda_1(x,y)| + |\lambda_2(x,y)| < 2$$

e

$$|\lambda_1(x,y)\lambda_2(x,y)| < 1.$$

Além disso, como F é polinomial, as entradas de $JF(x,y)$ são polinômios em x e y, logo, λ_1 e λ_2 são constantes. Como

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(JF(x,y)) \ \text{ e } \ \lambda_1\lambda_2 = \det(JF(x,y)),$$

segue que $\mathrm{tr}(JF(x,y))$ e $\det(JF(x,y))$ também são constantes. ∎

Para o próximo resultado, precisaremos da definição a seguir.

Definição 3.10. *Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação polinomial dada por*

$$F(x) = \Big(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_p(x)\Big).$$

Dizemos que F é homogênea de grau m se cada componente F_i é um polinômio homogêneo de grau m, isto é, se

$$F_i(tx) = t^m F_i(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $i = 1, \ldots, p$.

Lema 3.11. *Seja $F(x,y) = \Big(P(x,y), Q(x,y)\Big) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ uma função onde P é polinomial homogênea de grau $d > 1$ e Q é polinomial homogênea de grau $l > 1$ tal que*

$$\det(JF(x,y)) = 0,$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{C}^2$.

Então, existem $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{C}$, tais que

$$Q^m(x,y) = cP^n(x,y).$$

Demonstração: Inicialmente, notemos que as aplicações $P : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ e $Q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ podem ser reescritas da seguinte forma

$$P(x,y) = x^d f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{e} \quad Q(x,y) = x^l g\left(\frac{y}{x}\right),$$

onde $f\left(\frac{y}{x}\right) = P\left(1, \frac{y}{x}\right)$ e $g\left(\frac{y}{x}\right) = Q\left(1, \frac{y}{x}\right)$ são funções polinomiais em uma variável.

Calculando as derivadas parciais de F obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= dx^{d-1} f\left(\frac{y}{x}\right) - yx^{d-2} f'\left(\frac{y}{x}\right) \\
\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= x^{d-1} f'\left(\frac{y}{x}\right) \\
\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= lx^{l-1} g\left(\frac{y}{x}\right) - yx^{l-2} g'\left(\frac{y}{x}\right) \\
\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) &= x^{l-1} g'\left(\frac{y}{x}\right).
\end{aligned}$$

No entanto, por hipótese, $\det JF(x,y) = 0$, o que nos leva à seguinte equação diferencial:

$$df\left(\frac{y}{x}\right) g'\left(\frac{y}{x}\right) = lg\left(\frac{y}{x}\right) f'\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3.6}$$

Tomando $t = y/x$, obtemos

$$df(t)g'(t) = lg(t)f'(t).$$

Para $g(t) \neq 0$, temos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)^l}{g(t)^d}\right) = \frac{f(t)^{l-1} g(t)^{d-1}}{g(t)^{2d}} \left(lf'(t)g(t) - df(t)g'(t)\right).$$

Logo, pela equação (3.6)

$$lf'(t)g(t) - df(t)g'(t) = 0,$$

consequentemente,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f(t)^l}{g(t)^d}\right) = 0,$$

e, portanto, existe uma constante $C \in \mathbb{C}$, tal que $f(t)^l = Cg(t)^d$.

Tomando $d = mk$ e $l = nk$, com $k \in \mathbb{N}$, temos

$$f(t)^{nk} = Cg(t)^{mk}.$$

Como m e n são primos entre si, pela unicidade da fatoração de polinômios, existe uma constante $c \in \mathbb{C}$ tal que

$$g(t)^m = cf(t)^n.$$

Assim,

$$g^m\left(\frac{y}{x}\right) = cf^n\left(\frac{y}{x}\right).$$

Observando que $ml = dn$, concluímos que

$$\begin{aligned} Q^m(x,y) &= x^{ml}g^m\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= cx^{dn}f^n\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= cP^n(x,y). \end{aligned}$$

■

Antes do próximo teorema, enunciaremos e demonstraremos uma proposição que será utilizada em sua prova.

Proposição 3.12. *Seja $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ uma função polinomial quadrática, então existe uma mudança de variáveis afim no plano complexo, de forma que*

$$F(u,v) = uv + p(v),$$

sendo $p(v)$ um polinômio de uma variável.

Demonstração: Tomando F na forma de um polinômio quadrático genérico, temos

$$F(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + k, \tag{3.7}$$

onde os coeficientes pertencem ao conjunto dos complexos.

Tomando a seguinte mudança de coordenadas

$$x = r_1u + r_2v + r_3 \tag{3.8}$$

$$y = s_1u + s_2v + s_3, \tag{3.9}$$

onde $r_i, s_i \in \mathbb{C}$, para $i = 1, 2, 3$.

Substituindo em (3.7), obtemos

$$\begin{aligned} F(u,v) = {} & u^2\left(ar_1^2 + br_1s_1 + cs_1^2\right) + uv\left(2ar_1r_2 + br_1s_2 + br_2s_1 + 2cs_1s_2\right) \\ & + v^2\left(ar_2^2 + br_2s_2 + cs_2^2\right) + u\left(2ar_1r_3 + br_1s_3 + br_3s_1 + 2cs_1s_3 + dr_1 + es_1\right) \\ & + v\left(2ar_2r_3 + br_2s_3 + br_3s_2 + 2cs_2s_3 + dr_2 + es_2\right) \\ & + ar_3^2 + br_3s_3 + cs_3^2 + dr_3 + es_3 + k. \end{aligned}$$

Assim, para que F assuma a forma indicada pela proposição, é suficiente que

$$\begin{cases} ar_1^2 + br_1s_1 + cs_1^2 = 0 \\ 2ar_1r_3 + br_1s_3 + br_3s_1 + 2cs_1s_3 + dr_1 + es_1 = 0 \\ 2ar_1r_2 + br_1s_2 + br_2s_1 + 2cs_1s_2 = 1. \end{cases}$$

Notemos que o sistema não possui apenas uma solução, mas uma possibilidade é $r_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $r_2 = \frac{1}{2(ar_1+b)}$, $r_3 = -\frac{dr_1+e}{2ar_+b}$, $s_1 = 1$, $s_2 = 0$ e $s_3 = 0$. ∎

O próximo resultado é devido a Dillen (1991).

Teorema 3.13. *Seja $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ uma função polinomial complexa em duas variáveis, se o determinante da matriz Hessiana de F for constante, então existe uma transformação afim no plano onde F assume a seguinte forma*

$$F(x, y) = xy + Q(x),$$

onde Q é uma função polinomial de uma variável.

Demonstração: Seja F uma aplicação polinomial onde $\det \mathrm{H}(F(x,y)) = c$, $c \in \mathbb{C}$. Como $F \in \mathbb{C}[x,y]$, podemos usar uma mudança de variáveis linear para que $c \leqslant 0$, assim, vamos supor que $c \leqslant 0$.

Se F for quadrática, temos, pela Proposição 3.12, que o resultado é válido, portanto, vamos supor que F tenha grau $n > 2$.

Escrevendo F em termos de suas parcelas homogêneas, obtemos

$$F(x,y) = \sum_{i=0}^{n} Q_i(x,y),$$

onde cada Q_i é uma aplicação homogênea de grau i.

Notemos que, o termo de maior grau do $\det \mathrm{H}(F(x,y))$ será um polinômio de grau no máximo $2n-4 > 0$ e este corresponde ao $\det \mathrm{H}(Q_n(x,y))$, logo este será o polinômio nulo, pois por hipótese $\det \mathrm{H}(F(x,y))$ é constante.

Agora, mostremos que existe uma mudança de variáveis onde $Q_n(x,y)$ assuma a forma γu^n, para alguma constante γ. De fato, seja $h(x,y) = \left(\frac{\partial Q_n}{\partial x}(x,y), \frac{\partial Q_n}{\partial y}(x,y)\right)$, pelo Lema 3.11 podemos concluir que

$$\frac{\partial Q_n}{\partial x}(x,y) = \xi \frac{\partial Q_n}{\partial y}(x,y),$$

para algum $\xi \in \mathbb{C}$, pois podemos escolher os expoentes iguais a 1, visto que as derivadas parciais $(Q_n)_x$ e $(Q_n)_y$ possuem o mesmo grau.

Tomando a mudança de variáveis $v = x - \xi y$ e $u = \xi x + y$, observamos que $\frac{\partial x}{\partial v}(x,y) = \frac{1}{\xi^2+1}$ e $\frac{\partial y}{\partial v}(x,y) = -\frac{\xi}{\xi^2+1}$, o que, junto da Regra da Cadeia nos permite concluir que

$$\frac{\partial Q_n}{\partial v} = \frac{\partial Q_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial Q_n}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{\xi^2+1}\left(\frac{\partial Q_n}{\partial x} - \xi \frac{\partial Q_n}{\partial y}\right) = 0,$$

portanto, Q_n é uma aplicação homogênea de grau n que não depende de v, logo, pode ser escrita como $Q_n(u,v) = \gamma u^n$.

Agora, vamos escrever F como uma aplicação polinomial em v com coeficientes em $\mathbb{C}[u,v]$

$$F(u,v) = \sum_{i=0}^{m} F_i(u) v^i.$$

Podemos observar que $m < n$, pois como foi visto, o termo de grau n de F não depende de v e isso implica que $F_0(u)$ tem grau n. Assim, temos duas possibilidades para m. Primeiramente, vamos analisar para $m = 1$, neste caso

$$F(u, v) = F_0(u) + F_1(u)v,$$

onde é fácil notar que $\det \mathrm{H}(F(u, v)) = -\left(\frac{\partial F_1}{\partial u}(u)\right)^2 = c$ e, portanto, $F_1(u) = \sqrt{-c}u + K$, onde K é uma constante. Desse modo

$$F(u, v) = (\sqrt{-c}u + K)v + F_0(u).$$

Tomando $v^* = \sqrt{-c}v$ e $u^* = u + \frac{K}{\sqrt{-c}}$, conseguimos escrever a aplicação da forma desejada, ou seja,

$$F(u^*, v^*) = u^*v^* + F_0^*(u^*),$$

onde $F_0^*(u^*) = F_0(u^* - \frac{K}{\sqrt{-c}})$.

Agora, analisemos para $m > 1$. Podemos escrever a matriz Hessiana da aplicação da seguinte forma

$$\mathrm{H}(F) = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{m} F_i''(u)v^i & \sum_{i=0}^{m} iF_i'(u)v^{i-1} \\ \sum_{i=0}^{m} iF_i'(u)v^{i-1} & \sum_{i=0}^{m} i(i-1)F_i(u)v^{i-2} \end{pmatrix}.$$

Podemos notar que no determinante da matriz, o coeficiente do termo de maior grau em v $(2m - 2)$ deve ser igual a zero, pois $m > 1$ e por hipótese $\det \mathrm{H}(F)$ é constante, logo

$$m(m-1)F_m(u)F_m''(u) - m^2(F_m'(u))^2 = 0$$

$$\Rightarrow (m-1)F_m(u)F_m''(u) = m(F_m'(u))^2.$$

Resolvendo esta equação diferencial obtemos

$$F_m(u) = (\alpha u + \beta)^{1-m}. \tag{3.10}$$

No entanto, pela hipótese, $F_m(u)$ é polinomial, assim, $\alpha = 0$ e $F_m(u)$ é constante.

Vamos mostrar agora a seguinte afirmação

Afirmação 3.14. *O grau de F_i é sempre menor ou igual a $m-i$, para todo $i = 0, 1, \ldots, m$.*

Para provar essa afirmação utilizaremos o Princípio da Indução Finita da seguinte forma, se vale para $i \in \{m, m-1, \ldots, m-s+1\}$, então a afirmação é verdadeira para $i = m-s$.

De fato, já mostramos sua validade para $i = m$, logo, nossa hipótese de indução será que o grau de F_i é menor ou igual a $m-i$ quando $m \geqslant i > m-s$. Com a matriz Hessiana de F podemos verificar que

$$\det \mathrm{H}(F) = \sum_{i,j=0}^{m} j\left((j-1)F_i''(u)F_j(u) - iF_i'(u)F_j'(u)\right)v^{i+j-2}.$$

Analisando o coeficiente de v^{2m-s-2}, isto é, quando $i+j = 2m-s$, temos que, se $2m-s-2 = 0$ ($m = s = 2$, pois $m > 1$ e $s \leqslant m$) então o coeficiente é constante e, se $2m-s-2 \neq 0$, então o coeficiente é nulo, pois $\det \mathrm{H}(F)$ é constante.

Tomando $i = m-k$ e $j = m-s+k$, este coeficiente pode ser escrito da seguinte forma

$$\sum_{k=0}^{s}(m-s+k)\left((m-s+k-1)F_{m-k}''(u)F_{m-s+k}(u) - (m-k)F_{m-k}'(u)F_{m-s+k}'(u)\right).$$

Notemos que quando $k = 0$, a parcela

$$(m-s)\left((m-s-1)F_m''(u)F_{m-s}(u) - m\left(F_{m-s}'(u)F_m'(u)\right)\right) = 0,$$

pois $F_m(u)$ é constante.

Quando $0 < k < s$, $F_{m-k}(u)$ e $F_{m-s+k}(u)$ possuem grau menor que k e $s-k$, respectivamente, devido a hipótese de indução. Além disso, o grau de $F_{m-k}''(u)\cdot F_{m-s+k}(u)$ e de $F_{m-k}'(u)\cdot F_{m-s+k}'(u)$ é menor ou igual a $s-2$.

E quando $k = s$, a parcela da soma é

$$m\left((m-1)F_{m-s}''(u)F_m(u) - (m-s)\left(F_m'(u)F_{m-s}'(u)\right)\right) = m(m-1)F_{m-s}''(u)F_m(u).$$

Como $\det \mathrm{H}(F)$ é constante e F_m é constante, segue que o grau de $F''_{m-s}(u)$ é menor ou igual a $s-2$, pois todos os demais termos tem no máximo grau $s-2$ e deve haver cancelamento na soma, assim, F_{m-s} deve ter grau menor ou igual a s.

Por fim, vamos mostrar a validade para os casos onde $s \in \{0,1\}$. Se $s=0$ precisamos mostrar que o grau de $F_m(u)$ é menor ou igual a zero, porém, isso já é garantido pelo fato de F_m ser constante (igualdade 3.10). Quando $s=1$, precisamos mostrar que o grau de $F_{m-1}(u)$ é menor ou igual a 1. De fato, precisamos analisar o coeficiente de v^{2m-3}, pois as únicas possibilidades são i e j serem iguais a m e $m-1$. Assim, o coeficiente em questão tem uma das seguintes formas

$$(m-1)\left((m-2)F''_m(u)F_{m-1}(u) - mF'_m(u)F'_{m-1}(u)\right),$$

ou

$$m\left((m-1)F''_{m-1}(u)F_m(u) - (m-1)F'_{m-1}(u)F'_m(u)\right).$$

Como as derivadas de $F_m(u)$ são iguais a zero e esses coeficientes devem ser nulos, pois $\det \mathrm{H}(F)$ é constante, temos que

$$m(m-1)F''_{m-1}(u)F_m(u) = 0 \Rightarrow F''_{m-1}(u) = 0,$$

portanto, o grau de $F_{m-1}(u)$ deve ser menor ou igual a um. Assim a prova da afirmação fica completa, mas isso gera um absurdo, pois o grau de $F_0(u) = n > m$. Logo, $m=1$ e $F(u^*, v^*) = u^*v^* + F_0^*(u^*)$. ∎

Agora, enunciaremos os dois últimos resultados necessários para a prova do Teorema principal, o primeiro se deve a Jörgens (1954) e o segundo é um resultado de Álgebra Linear.

Teorema 3.15. *Se F é uma aplicação definida em todo o $\mathbb{R}^2$ tal que sua matriz Hessiana tem determinante constante positivo, então F é quadrática.*

Lema 3.16. *Se $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma aplicação linear, então existe uma mudança de coordenadas em $\mathbb{R}^2$ de forma que A assuma uma das duas formas*

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad ou \quad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

onde λ_1 *e* λ_2 *são autovalores de* A *e* $\varepsilon \geqslant 0$.

O próximo Teorema confirma a validade da conjectura discreta de Markus-Yamabe para aplicações polinomiais no $\mathbb{R}^2$.

Teorema 3.17. *Seja* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *uma aplicação polinomial tal que, para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *a matriz Jacobiana* $JF(x, y)$ *possui autovalores com módulo menor que um. Então* F *possui um único ponto fixo, o qual é um atrator global para o sistema dinâmico discreto gerado por* F.

Demonstração: Primeiramente, notemos que a existência e unicidade do ponto fixo vem do Teorema 3.7. Por isso, apenas devemos mostrar que este ponto fixo é um atrator global para o sistema dinâmico discreto gerado por F.

Seja $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, pelo Lema 3.9 temos que

$$t_1(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y),$$

e

$$t_2(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y)\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y),$$

são constantes, por isso, os denotaremos apenas por t_1 e t_2. Seja $G(x, y) = F(x, y) - \left(\frac{t_1}{2}\right) I(x, y)$ tal que $G(x, y) = (\overline{P}(x, y), \overline{Q}(x, y))$.

Podemos verificar que

$$\overline{t_1} = \frac{\partial \overline{P}}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial \overline{Q}}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) - t_1 = t_1 - t_1 = 0,$$

e

$$\begin{aligned}
\overline{t_2} =& \frac{\partial \overline{P}}{\partial x}(x, y)\frac{\partial \overline{Q}}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial \overline{P}}{\partial y}(x, y)\frac{\partial \overline{Q}}{\partial x}(x, y) \\
=& \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) - \frac{t_1}{2}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{t_1}{2}\right) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \\
=& t_2 - \frac{t_1^2}{4}.
\end{aligned}$$

Como $\overline{t_1} = 0$, vamos observar que existe um polinômio $h(x, y)$ que possui derivadas parciais tais que $\overline{P}(x, y) = -h_y(x, y)$ e $\overline{Q}(x, y) = h_x(x, y)$. De fato

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\int \overline{P}(x,y)dy + \int \overline{Q}(x,y)dx\right) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\int \overline{P}(x,y)dy\right) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\int \overline{Q}(x,y)dx\right) \\ &= \frac{\partial \overline{P}}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial \overline{Q}}{\partial y}(x,y) = \overline{t_1} = 0.\end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned}&\int \overline{P}(x,y)dy + \int \overline{Q}(x,y)dx = \varphi(x) + \psi(y) \\ \Rightarrow &-\int \overline{P}(x,y)dy + \varphi(x) = \int \overline{Q}(x,y)dx - \psi(y) = h(x,y).\end{aligned}$$

Portanto, a existência do polinômio $h(x, y)$ está bem definida, além disso,

$$Dh(x,y) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y), \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\overline{Q}(x,y), -\overline{P}(x,y)\right),$$

e a matriz Hessiana de $h(x, y)$ é

$$\mathrm{H}h(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \overline{Q}}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial \overline{Q}}{\partial y}(x,y) \\ -\dfrac{\partial \overline{P}}{\partial x}(x,y) & -\dfrac{\partial \overline{P}}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix},$$

onde seu determinante é igual a $\overline{t_2}$.

Vamos analisar as possibilidades para $\overline{t_2}$. Primeiramente, tomemos $\overline{t_2} > 0$, pelo Teorema 3.15, temos que $h(x, y)$ é quadrática, assim, $G(x, y)$ e $F(x, y)$ são aplicações polinomiais de grau um. Desse modo, $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são polinômios de grau um.

Vamos supor que o ponto fixo seja a origem, pois esta não é uma hipótese restritiva visto que basta uma mudança de coordenas do tipo translação para validá-la. Neste caso,

$$F(x,y) = (\alpha_1 x + \alpha_2 y, \beta_1 x + \beta_2 y) = A(x,y),$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} = JF(x,y).$$

Pelo Lema 3.16, existe uma mudança de coordenadas onde a matriz da aplicação F assuma uma das seguintes formas

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

onde λ_1 e λ_2 são autovalores de F e $\varepsilon \geqslant 0$.

Com o auxílio da função de Lyapunov $V(x, y) = x^2 + y^2$, verificamos que, no primeiro caso

$$V(A_1(x, y)) = (\lambda_1 x)^2 + (\lambda_2 y)^2 \leqslant \max\{\lambda_1, \lambda_2\}(x^2 + y^2) < x^2 + y^2 = V(x, y),$$

pois os módulos dos autovalores são menores que um. No segundo caso, temos

$$\begin{aligned} V\Big(A_2(x, y)\Big) &= (\lambda_1 x + \varepsilon y)^2 + (\lambda_1 y)^2 \\ &= \lambda_1^2 x^2 + (\varepsilon^2 + \lambda_1^2) y^2 + 2\varepsilon\lambda_1 xy \\ &\leqslant \lambda_1^2 x^2 + (\varepsilon^2 + \lambda_1^2) y^2 + 2\varepsilon\lambda_1 (x^2 + y^2) \\ &\leqslant (\lambda_1^2 + \varepsilon^2) x^2 + (\varepsilon^2 + \lambda_1^2) y^2 + 2\varepsilon\lambda_1 (x^2 + y^2) \\ &\leqslant \Big[(\lambda_1^2 + \varepsilon^2) + 2\varepsilon\lambda_1\Big](x^2 + y^2) \\ &= (\lambda_1 + \varepsilon)^2 \; V(x, y), \end{aligned}$$

para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Como

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (\lambda_1 + \varepsilon)^2 = \lambda_1^2 < 1,$$

podemos tomar ε pequeno o suficiente tal que

$$(\lambda_1 + \varepsilon)^2 < 1.$$

Portanto, do corolário 1.35 temos que em ambos os casos a origem é um atrator global para o sistema dinâmico discreto gerado por F.

Agora, analisando o caso onde $\overline{t_2} < 0$. Neste caso, podemos supor que o grau de $h(x, y)$ é maior que dois, pois $\det \mathrm{H}(h) = \overline{t_2} \neq 0$ e se $h(x, y)$ for quadrática resolvemos como no caso anterior.

Pelo Teorema 3.13, existe uma transformação afim A tal que

$$h \circ A(u, v) = \sqrt{-\overline{t_2}}\, uv + p(u),$$

onde p é um polinômio em uma variável.

Sabemos que

$$\nabla h(x, y) = \begin{pmatrix} \overline{Q}(x, y) \\ -\overline{P}(x, y) \end{pmatrix},$$

então

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla h(x, y) = \begin{pmatrix} \overline{P}(x, y) \\ \overline{Q}(x, y) \end{pmatrix} = G(x, y).$$

Portanto,

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \nabla h(x, y) + \frac{t_1}{2} I(x, y) \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Tomamos então a aplicação $\widetilde{F} = A^{-1} \circ F \circ A$, onde

$$\widetilde{F}(u, v) = A^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\nabla h \circ A)(u, v) + \frac{t_1}{2} A(u, v) \right). \tag{3.11}$$

Como A é linear,

$$\widetilde{F}(u, v) = A^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\nabla h \circ A)(u, v) \right) + \frac{t_1}{2}(u, v).$$

Por outro lado, como $A(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ onde $x = \xi u + v$ e $y = u - \xi v$, pela Regra da Cadeia,

$$\frac{\partial (h \circ A)}{\partial u} = \frac{\partial h}{\partial x}(A(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial y}(A(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u} = \xi\, h_x(A(u, v)) + h_y(A(u, v)),$$

e

$$\frac{\partial(h\circ A)}{\partial v}=\frac{\partial h}{\partial x}(A(u,v))\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial h}{\partial y}(A(u,v))\frac{\partial y}{\partial v}=h_x(A(u,v))-\xi\,h_y(A(u,v)).$$

Portanto,

$$\nabla(h\circ A)(u,v)=\begin{pmatrix}\xi & 1\\ 1 & -\xi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_x(A(u,v))\\ h_y(A(u,v))\end{pmatrix}=A^T\cdot\nabla h\circ A(u,v).$$

Além disso,

$$AA^T=\frac{1}{\det A}I,$$

assim, segue que existe uma constante c tal que $A^T=cA^{-1}$. Logo,

$$\nabla(h\circ A)=cA^{-1}\cdot\nabla h\circ A\Rightarrow A\nabla(h\circ A)=c(\nabla h\circ A),$$

ou seja,

$$\nabla h\circ A=\frac{1}{c}\,A\nabla(h\circ A).$$

Substituindo em (3.11)

$$\widetilde{F}(u,v)=\frac{1}{c}\,A^{-1}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}A\,\nabla(h\circ A)(u,v)+\frac{t_1}{2}(u,v).$$

Agora, vejamos que para a matriz

$$A=\begin{pmatrix}\xi & 1\\ 1 & -\xi\end{pmatrix},$$

temos

$$A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot A=\frac{1}{1+\xi^2}\begin{pmatrix}\xi & 1\\ 1 & -\xi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\xi & 1\\ 1 & -\xi\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\widetilde{F}(u,v)=-\frac{1}{c}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\nabla(h\circ A)(u,v)+\frac{t_1}{2}(u,v).$$

Como

$$h \circ A(u,v) = \sqrt{-\overline{t_2}}\, uv + p(u),$$

o gradiente é dado por

$$\nabla(h \circ A)(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{-\overline{t_2}}\, v + p'(u) \\ \sqrt{-\overline{t_2}}\, u \end{pmatrix}.$$

Desse modo, concluímos que

$$\widetilde{F}(u,v) = -\frac{1}{c}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{-\overline{t_2}}\, v + p'(u) \\ \sqrt{-\overline{t_2}}\, u \end{pmatrix} + \frac{t_1}{2}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Simplificando

$$\widetilde{F}(u,v) = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\sqrt{-\overline{t_2}}}{c} + \dfrac{t_1}{2}\right) u \\ \left(-\dfrac{\sqrt{-\overline{t_2}}}{c} + \dfrac{t_1}{2}\right) v - \dfrac{1}{c}\, p'(u) \end{pmatrix}.$$

Portanto, $\widetilde{F}$ é uma aplicação triangular, consequentemente, A triangulariza F. Segue do Teorema 3.5, que o único ponto fixo de F é um atrator global para o sistema dinâmico discreto gerado por F.

Por fim, a última possibilidade é $\overline{t_2}$ ser igual a zero, novamente, tomaremos a hipótese que o grau de h é maior que dois, segue do Teorema 3.13 que através de uma transformação afim

$$h \circ A(u,v) = kv + q(u),$$

para algum $k \in \mathbb{R}$ e algum polinômio $q(u)$.

Como no caso anterior, definimos $\widetilde{F} = A^{-1} \circ F \circ A$. Assim,

$$\widetilde{F}(u,v) = -\frac{1}{c}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\nabla(h \circ A)(u,v) + \frac{t_1}{2}(u,v).$$

Temos que

$$\nabla(h\circ A)(u,v)=\begin{pmatrix}q'(u)\\ k\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\nabla(h\circ A)(u,v)=\begin{pmatrix}-k\\ q'(u)\end{pmatrix}.$$

Portanto

$$\widetilde{F}(u,v)=-\frac{1}{c}\begin{pmatrix}-k\\ q'(u)\end{pmatrix}+\frac{t_1}{2}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{k}{c}+\frac{t_1}{2}u\\ -\frac{q'(u)}{c}+\frac{t_1}{2}v\end{pmatrix}.$$

Assim como no caso anterior, A triangulariza F. ∎

3.4 Contra-exemplos

Nesta sessão apresentaremos dois contra-exemplos para a conjectura discreta de Markus-Yamabe. O primeiro trata-se de um contra-exemplo polinomial, onde a conjectura falha em dimensões maiores que dois. O segundo contra exemplo, trata-se de um difeomorfismo no qual a conjectura é válida apenas no caso unidimensional.

3.4.1 Contra-exemplo polinomial para $n \geqslant 3$

Agora, mostraremos um contra-exemplo apresentado por Cima et al. (1997) para a conjectura discreta de Markus-Yamabe com $n \geqslant 3$.

Teorema 3.18. *Seja $n \geqslant 3$ e $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ dada por*

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\left(\frac{1}{2}x_1+x_3d(x)^2,\frac{1}{2}x_2-d(x)^2,\frac{1}{2}x_3,\ldots,\frac{1}{2}x_n\right),$$

onde $d(x)=x_1+x_2x_3$. Então F é um contraexemplo para a conjectura discreta de Markus-Yamabe, mais precisamente, existe uma condição inicial $x^{(0)}$ na qual a sequência $x^{(n+1)}=F(x^{(n)})$ tende ao infinito quando $n\to\infty$.

Demonstração: Inicialmente, vamos calcular a matriz Jacobiana de F para verificar se seus autovalores satisfazem a hipótese da conjectura discreta de Markus-

Yamabe. De fato,

$$JF(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 2x_3 d(x) & -2d(x) & d(x)^2 + 2x_2x_3 d(x) & 0 & \dots & 0 \\ 2x_3^2 d(x) & \frac{1}{2} - 2x_3 d(x) & -2x_2 d(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

onde é fácil verificar que todos os autovalores serão iguais a $\frac{1}{2}$ e cumprem a hipótese de possuírem módulo menor que 1. Além disso, claramente $F(0) = 0$.

Agora, tomando a condição inicial

$$x^{(0)} = \left(\frac{147}{32}, -\frac{63}{32}, 1, 0, \dots, 0\right),$$

vamos mostrar, por indução, que

$$x^{(n)} = \left(\frac{147}{32} \cdot 2^n, -\frac{63}{32} \cdot 2^{2n}, \left(\frac{1}{2}\right)^n, 0, \dots, 0\right). \tag{3.12}$$

É fácil verificar que para $n = 0$ a igualdade é válida. Supondo que para $n = k$ a equação (3.12) é verdadeira, mostremos que o mesmo vale para $n = k + 1$.

De fato, como $x^{(k+1)} = F\left(x^{(k)}\right)$, escrevendo $F(x) = \left(F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)\right)$, onde

$$F_1(x) = \tfrac{1}{2}x_1 + x_3 d(x)^2, \quad F_2(x) = \tfrac{1}{2}x_2 - d(x)^2, \quad F_3(x) = \tfrac{1}{2}x_3, \quad F_i(x) = \tfrac{1}{2}x_i,\ i \geqslant 4,$$

temos:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= F_1\left(x^{(k)}\right) = \tfrac{1}{2}x_1^{(k)} + x_3^{(k)} d\left(x^{(k)}\right)^2 = \frac{147}{32} \cdot 2^{k+1}; \\ x_2^{(k+1)} &= F_2\left(x^{(k)}\right) = \tfrac{1}{2}x_2^{(k)} - d\left(x^{(k)}\right)^2 = -\frac{63}{32} \cdot 2^{2(k+1)}; \\ x_3^{(k+1)} &= F_3\left(x^{(k)}\right) = \tfrac{1}{2}x_3^{(k)} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+1}; \end{aligned}$$

Para $i \geq 4$, como $x_i^{(k)} = 0$, segue que $x_i^{(k+1)} = 0$. Logo, a igualdade (3.12) é válida.

Por fim, nota-se que, quando $n \to \infty$, a sequência $x^{(n+1)} = F(x^{(n)})$ tende ao infinito. ∎

3.4.2 Contra-exemplo racional para $n \geqslant 2$

Agora, será apresentado um contra-exemplo, apresentado por Cima, Gasull e Mañosas (1999) (também pode ser visto em Ribeiro (2007)), onde a $DMYC$ falha a partir da dimensão dois. Este contra-exemplo se trata de uma adaptação de um resultado de Szlenk, o qual estará exibido a seguir.

Teorema 3.19 (Szlenk)**.** *Seja* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$F(x,y) = \left(\frac{-ky^3}{1+x^2+y^2}, \frac{kx^3}{1+x^2+y^2} \right),$$

onde $k \in \left(1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$*. A aplicação* F *possui as seguintes propriedades:*

1. *Tome* $p = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ *e seja* λ *um autovalor de* $JF(p)$*. Se* $xy = 0$ *então* $\lambda = 0$*. Caso contrário,* $\lambda \notin \mathbb{R}$ *e* $|\lambda| < \dfrac{k\sqrt{3}}{2}$*.*
2. $F^4\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}, 0\right)$*.*
3. F *é injetiva.*

Demonstração: Para a prova do item (1), inicialmente calculamos a matriz Jacobiana de F no ponto p, que será dada por

$$JF(p) = \begin{pmatrix} \frac{2kxy^3}{(1+x^2+y^2)^2} & \frac{-3ky^2(1+x^2+y^2)+2ky^4}{(1+x^2+y^2)^2} \\ \frac{3ky^2(1+x^2+y^2)-2ky^4}{(1+x^2+y^2)^2} & \frac{-2kxy^3}{(1+x^2+y^2)^2} \end{pmatrix},$$

assim, notamos que

$$\det JF(p) = \frac{3k^2x^2y^2(3+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$Tr\ JF(p) = \frac{-2kxy(x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

Utilizando as coordenadas polares usuais de $\mathbb{R}^2$, obtemos

$$\begin{aligned}\det JF(p) &= \frac{3k^2r^4cos^2\theta + sen^2\theta(3+r^2)}{(r^2+1)^3} \\ &= \frac{3k^2}{4}\cdot\frac{sen^2 2\theta(3r^4+r^6)}{(3r^4+r^6+3r^2+1)} \\ &\leqslant \frac{3k^2}{4} \\ &< 1.\end{aligned}$$

Por outro lado,como $JF(p)$ é uma matriz de ordem 2, seu polinômio característico satisfaz a seguinte condição sobre seu discriminante $\Delta(p)$

$$\Delta(p) = Tr^2\ JF(p) - 4\det JF(p).$$

Por isso, concluímos que

$$\Delta(p) = \frac{-4k^2x^2y^2}{(1+x^2+y^2)^4}\cdot\left[2x^4+2y^4+12x^2+12y^2+8x^2y^2+9\right] \leqslant 0.$$

Logo, se $xy = 0$, então os autovalores de $JF(p)$ serão iguais a zero, caso contrário, $\Delta(p) < 0$, o que implica nos autovalores λ_i serem um par conjugado de números complexos, assim, podemos verificar que

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(a+bi)(a-bi)} = \sqrt{\lambda_1\lambda_2} = \sqrt{\det JF(p)} \leqslant \sqrt{\frac{3k^2}{4}} = \frac{k\sqrt{3}}{2}.$$

Para provar o item (2) do teorema, notemos que, se definirmos

$$h(x) = \frac{kx^3}{1+x^2},$$

e $z = \frac{1}{\sqrt{k-1}}$, então

$$h(z) = k\,\frac{\dfrac{1}{(k-1)\sqrt{k-1}}}{1+\dfrac{1}{k-1}} = \frac{\dfrac{k}{\sqrt{k-1}}}{k} = \frac{1}{\sqrt{k-1}} = z.$$

Logo, é possível observar que se $p = \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}, 0\right) = (z, 0)$, teremos

$$F(p) = (0, h(z)) = (0, z)\,,$$

$$F^2(p) = F(F(p)) = (-z, 0),$$

$$F^3(p) = F(F^2(p)) = (0, -z),$$

$$F^4(p) = (z, 0) = p.$$

Por fim, para o item (3), vamos supor, por absurdo, que existam p_1 e p_2 pontos do $\mathbb{R}^2$ tais que $F(p_1) = F(p_2)$, no entanto, $p_1 \neq p_2$. Então

$$\frac{-ky_1^3}{1 + x_1^2 + y_1^2} = \frac{-ky_2^3}{1 + x_2^2 + y_2^2} \tag{3.13}$$

$$\frac{kx_1^3}{1 + x_1^2 + y_1^2} = \frac{kx_2^3}{1 + x_2^2 + y_2^2} \tag{3.14}$$

Podemos supor também, sem perda de generalidade que $y_2 > y_1$, o que implica em $c = \frac{y_2}{y_1} > 1$.

É importante observar que x_1, x_2, y_1, y_2 são todos diferentes de zero, pois, se $x_1 = 0$

$$\frac{kx_2^3}{1 + x_2^2 + y_2^2} = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

mas por consequência $y_1 = y_2$, porque

$$h(y_1) = \frac{-ky_1^3}{1 + y_1^2} = \frac{-ky_2^3}{1 + y_2^2} = h(y_2),$$

e a aplicação $h(x)$ é injetiva devido a sua derivada ser maior que zero em toda a reta, exceto na origem.

Sendo assim, podemos dividir as igualdades (3.13) e (3.14), obtendo

$$\frac{x_1^3}{x_2^3} = \frac{y_1^3}{y_2^3}$$

que implica diretamente em

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = c > 1. \tag{3.15}$$

Agora, usando essas informações na igualdade (3.13), temos

$$\frac{y_1^3}{1+x_1^2+y_1^2} = \frac{y_2^3}{1+x_2^2+y_2^2}$$

$$\Rightarrow \frac{y_1^3}{1+x_1^2+y_1^2} = \frac{c^3y_1^3}{1+x_2^2+c^2y_1^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x_1^2+y_1^2} = \frac{c^3}{1+x_2^2+c^2y_1^2}$$

$$\Rightarrow 1+x_1^2+y_1^2 = \frac{1+x_2^2+c^2y_1^2}{c^3}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} x_2^2 &= c^3 + c^3x_1^2 + y_1^2c^3 - 1 - c^2y_1^2 \\ &= (c^3-1) + y_1^2(c^3-c^2) + c^3x_1^2 \\ &> c^3x_1^2 > c^2x_1^2, \end{aligned}$$

Porém, isso implica em

$$\frac{x_2}{x_1} > c.$$

que é uma contradição. Portanto, F é injetiva e o teorema está demonstrado. ∎

Munidos deste Teorema, podemos demonstrar o próximo contra-exemplo.

Teorema 3.20. *Seja* $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *definida por*

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{-kx_2^3}{1+x_1^2+x_2^2} - \mathrm{a}x_1, \frac{kx_1^3}{1+x_1^2+x_2^2} - \mathrm{a}x_2, cx_3, \ldots, cx_n \right),$$

onde $|c| < 1$ *e* $k \in \left(1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. *Então, para a suficientemente pequeno, a aplicação* G *é um difeomorfismo global no* $\mathbb{R}^n$ *que satisfaz as seguintes propriedades*

1. *Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, todos os autovalores da matriz Jacobiana de G possuem módulo menor que um;*

2. *existe um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ diferente de zero, onde $G^{(4)}(p) = p$.*

Demonstração: Inicialmente, vamos tomar $n = 2$, desse forma, $G(x) = F(x) - aI(x)$ onde F é tal como no Teorema 3.19 e I é a matriz identidade no $\mathbb{R}^2$. Sabemos que $JF(x)$ possui, em qualquer ponto, autovalores com módulo menor que $\frac{k\sqrt{3}}{2} < 1$, assim, para a, suficientemente pequeno, $JG(x)$ também possuirá autovalores com módulo menor que um.

Notemos que, se λ é um autovalor de $JG(x)$, então

$$\det(JG(x) - \lambda I) = 0$$

$$\Rightarrow \det(JF - aI - \lambda I) = 0$$

$$\Rightarrow \det(JF - (a + \lambda)I) = 0.$$

Ou seja, $a + \lambda$ é autovalor de $JF(x)$, logo, como os autovalores de $JF(x)$ são diferentes de a (pois são iguais a zero ou tem parte imaginária não nula), então os autovalores de $JG(x)$ serão diferentes de zero.

Por isso, pelo Teorema da Função Inversa, concluímos que $JG(x)$ é um difeomorfismo local no $\mathbb{R}^2$. Para provar que G é um difeomorfismo global utilizaremos o Teorema de Hadamard, no qual afirma-se que aplicações suaves de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ são difeomorfismos globais, se são difeomorfismos locais e próprias(quando a pré-imagem de qualquer conjunto compacto é compacta).

Portanto, precisamos mostrar que G é uma aplicação própria. De fato, a continuidade de G garante que a pré-imagem de um conjunto fechado será um conjunto fechado, além disso, por contraposição, podemos mostrar que conjuntos ilimitados, tem pré-imagem ilimitada por G, isto é,

$$\lim_{|(x,y)|\to\infty} |G(x, y)| = \infty.$$

Através de alguns cálculos, obtemos

$$|G(r,\theta)|^2 = \frac{k^2r^6(\cos^6\theta + sen^6\theta)}{(1+r^2)^2} + \frac{\mathrm{a}^2r^2(1+r^2)^2}{(1+r^2)^2} - \frac{k\mathrm{a}r^4 sen4\theta(1+r^2)}{2(1+r^2)^2},$$

Onde r e θ vem das coordenadas polares usuais de $\mathbb{R}^2$.

Usando que $\cos^6\theta + \sin^6\theta \geqslant \frac{1}{4}$, $-\sin 4\theta \geqslant -1$, $-1/(1+r^2) > -1/r^2$ e $(1+r^2) < (2r^2)$ para r grande o suficiente, obtemos

$$\begin{aligned}
|G(r,\theta)|^2 &\geqslant \frac{k^2r^6}{16r^4} + \mathrm{a}^2r^2 - \frac{\mathrm{a}kr^4}{2r^2} \\
&\geqslant r^2\left(\frac{k^2}{16} - \frac{\mathrm{a}k}{2} + \mathrm{a}^2\right) \\
&\geqslant r^2\left(\frac{k}{4} - \mathrm{a}\right)^2.
\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{r\to\infty}|G(x)| = \infty$, ou seja, G é um difeomorfismo global do $\mathbb{R}^n$, sempre que $\mathrm{a} \neq 0$.

Seja $p = \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}, 0\right)$, sabemos, pela regra da cadeia que

$$\begin{aligned}
JF^{(4)}(p) &= JF(F^{(3)}(p)) \cdot JF^{(3)}(p) \\
&= JF(F^{(3)}(p)) \cdot JF(F^{(2)}(p)) \cdot JF(F(p)) \cdot JF(p).
\end{aligned}$$

Desse modo, através de um cálculo simples, obtemos

$$JF^4(p) = \begin{pmatrix} \left(3 - \frac{2}{k}\right)^4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então, os autovalores de $JF^{(4)}(p)$ possuem módulo diferente de um, o que implica na órbita periódica ser hiperbólica, logo, ela continua existindo mesmo com pequenas pertubações na aplicação.

Portanto, para a pequeno o suficiente, a aplicação G também possui uma órbita periódica de período 4.

Notemos que esses resultados podem ser generalizados para $\mathbb{R}^n$, tomando $p = \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}, 0, 0, \ldots, 0\right)$. ■

Considerações Finais

Neste trabalho foi realizado um estudo da Conjectura de Markus–Yamabe em suas versões contínua e discreta, buscando compreender sob quais hipóteses sobre a matriz Jacobiana é possível garantir a estabilidade global da origem. Para isso, foram reunidos conceitos fundamentais da teoria de Sistemas Dinâmicos, tanto em tempo contínuo quanto discreto, estabelecendo a base necessária para o desenvolvimento das demonstrações e dos resultados apresentados ao longo do texto.

No contexto contínuo, foi demonstrada a validade da conjectura nos casos unidimensional e bidimensional. Em dimensão um, a demonstração baseou-se na análise qualitativa das soluções de equações diferenciais ordinárias. Já no caso planar, foram empregadas ferramentas clássicas da teoria qualitativa, como o Teorema de Green, o Teorema de Poincaré–Bendixson e resultados relacionados à injetividade global, permitindo concluir que a origem é um atrator global sob as hipóteses da conjectura. Em seguida, foi apresentado um contraexemplo polinomial que evidencia a falha da conjectura em dimensões maiores ou iguais a três.

Na versão discreta da Conjectura de Markus–Yamabe, foram estudados casos em que a conjectura permanece válida, abrangendo aplicações unidimensionais, triangulares e uma classe de aplicações polinomiais bidimensionais. Por outro lado, os contraexemplos polinomiais e racionais apresentados mostram que os resultados de validade obtidos em classes específicas não podem, em geral, ser estendidos para dimensões superiores sem a imposição de hipóteses adicionais.

Os resultados discutidos ao longo deste trabalho evidenciam que a dimensão do espaço exerce um papel decisivo no comportamento global dos sistemas dinâmicos. Enquanto em baixas dimensões as condições impostas à matriz Jacobiana são suficientes para assegurar a estabilidade global da origem, em dimensões superiores surgem

fenômenos que tornam o problema significativamente mais complexo, justificando a existência de contraexemplos e motivando o desenvolvimento de novas abordagens para sua investigação.

Além de reunir resultados clássicos da literatura, este trabalho procurou apresentá-los de forma organizada e acessível, detalhando demonstrações frequentemente encontradas apenas de maneira resumida nas referências consultadas. Também foram apresentados exemplos e ilustrações com o objetivo de tornar mais clara a aplicação dos conceitos e resultados teóricos. Espera-se, assim, que este texto possa servir como material de apoio para estudantes que iniciem seus estudos em Sistemas Dinâmicos e como uma referência introdutória ao estudo da Conjectura de Markus–Yamabe.

Por fim, como perspectivas para trabalhos futuros, destacam-se o aprofundamento dos resultados que relacionam a estabilidade global com a injetividade, apresentados por Fernandes, Gutierrez e Rabanal (2004); o estudo de novas classes de aplicações para as quais a conjectura possa permanecer válida em dimensões superiores; a investigação de condições adicionais que garantam a estabilidade global; e o estudo de extensões da conjectura para sistemas diferenciais suaves por partes contínuos e descontínuos, como as apresentadas por Llibre e Zhang (2021) e Llibre e Valls (2022). Diante da riqueza dos resultados já obtidos e das questões que permanecem em aberto, acredita-se que a Conjectura de Markus–Yamabe continue representando um importante objeto de estudo na teoria dos Sistemas Dinâmicos.

Bibliografia

BACKES, L.; BARAVIERA, A. T.; BRANCO, F. M. *Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos via Exemplos*. 1. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2023. v. 2. (Colóquio Brasileiro de Matemática, v. 2). ISBN 978-85-244-0546-4.

BARREIRA, L.; VALLS, C. *Equações Diferenciais Ordinárias: teoria qualitativa*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012. 259 p. Il.

BIAŁYNICKI-BIRULA, A.; ROSENLICHT, M. Injective morphisms of real algebraic varieties. In: . [s.n.], 1962. Disponível em: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120012811>.

BONOMO, W. *Sistemas dinâmicos discretos: estabilidade, comportamento assintótico e sincronização*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/D.55.2008.tde-01072008-164134>.

CIMA, A.; GASULL, A.; MAÑOSAS, F. The discrete markus–yamabe problem. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications*, v. 35, n. 3, p. 343–354, 1999. ISSN 0362-546X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0362546X97007153>.

CIMA, A. et al. A polynomial counterexample to the markus–yamabe conjecture. *Advances in Mathematics*, v. 131, n. 2, p. 453–457, 1997. ISSN 0001-8708. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S000187089791673X>.

DEMUNER, D. P. *Resultados recentes relativos à Conjectura Fraca de Markus-Yamabe*. Dissertação (Mestrado) — USP - São Carlos, 2005.

DEVANEY, R. L. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. 2. ed. Redwood City, CA: Addison-Wesley, 1989. ISBN 9780201130461.

DILLEN, F. Polynomials with constant hessian determinant. *Journal of Pure and Applied Algebra*, v. 71, n. 1, p. 13–18, 1991. ISSN 0022-4049. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022404991900373>.

FERNANDES, A.; GUTIERREZ, C.; RABANAL, R. Global asymptotic stability for differentiable vector fields of r2. *Journal of Differential Equations*, v. 206, n. 2, p. 470–482, 2004. ISSN 0022-0396. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039604001822>.

FESSLER, R. A proof of the two-dimensional Markus–Yamabe stability conjecture. *Annales Polonici Mathematici*, v. 62, p. 45–75, 1995.

GLUTSYUK, A. A. A complete solution of the jacobian problem for vector fields on the plane. *Russian Mathematical Surveys*, v. 49, n. 3, p. 185–186, 1994.

GORDON, W. B. On the diffeomorphisms of euclidean space. *The American Mathematical Monthly*, v. 79, n. 7, p. 755–759, 1972.

GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019. v. 3. Revisores técnicos: Vera Lucia Antonio Azevedo e Ariovaldo José de Almeida.

GUTIÉRREZ, C. A solution to the bidimensional global asymptotic stability conjecture. In: SABATINI, M. (Ed.). *Workshop on Differential Equations*. Povo (TN), Italy: [s.n.], 1993. p. 627–671.

HADAMARD. Sur les transformations ponctuelles. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, Société mathématique de France, v. 34, p. 71–84, 1906. Disponível em: <https://www.numdam.org/articles/10.24033/bsmf.771/>.

HARTMAN, P. *Ordinary Differential Equations*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1964.

JÖRGENS, K. Über die lösungen der differentialgleichung $rt - s^2 = 1$. *Mathematische Annalen*, v. 127, p. 130–134, 1954.

La Salle, J. P. *The Stability of Dynamical Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1976. Disponível em: <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611970432>.

LLIBRE, J.; VALLS, C. The Markus–Yamabe conjecture for discontinuous piecewise linear differential systems in $\mathbb{R}^n$ separated by a conic R^{n-2}.*Journal of Dynamics and Differential Equations*, *v*. 35, 012022.

LLIBRE, J.; ZHANG, X. The Markus-Yamabe conjecture for continuous and discontinuous piecewise linear differential systems. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 149, p. 1, 04 2021.

MARKUS, L.; YAMABE, H. Global stability criteria for differential systems. *Osaka Mathematical Journal*, 1960.

OLECH, C. On the global stability of an autonomous system on the plane. 1961. Disponível em: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:122675546>.

RIBEIRO, Y. C. da S. *Injetividade global para aplicações entre espaços euclideanos*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC/USP, 2007.

SCÁRDUA, B. *Equações Ordinárias e Aplicações*. Rio de Janeiro: SBM, 2015. 282 p. (Coleção Textos Universitários). ISBN 978-85-8337-039-0.

STEWART, J. *Cálculo*. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v. 2.

CERNAVSKII, A. V. Addendum to the paper "finite-to-one open mappings of manifolds". *Matematicheskii Sbornik*, v. 66, p. 471–472, 1965.