



**PROPRIEDADES E CONVERGÊNCIA DE CERTAS
FÓRMULAS DE QUADRATURA
INTERPOLATÓRIAS**

Daniel Oliveira Veronese

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP-091

Propriedades e Convergência de Certas Fórmulas de Quadratura Interpolatórias

Daniel Oliveira Veronese

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga

São José do Rio Preto

Fevereiro de 2005

*À minha mãe Valdeci,
e aos meus avós, Raimundo e Maria,
ofereço.*

*À minha noiva, Monaíse,
dedico.*

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus que sempre esteve comigo e me deu forças para que este trabalho se tornasse uma realidade.

Aos meus avós e à minha mãe, que foram verdadeiros guerreiros e mesmo diante das dificuldades da vida, souberam me educar e me dar a possibilidade de chegar até aqui.

Ao meu irmão Christiano, meu padrasto Eurípedes e demais familiares, pela paciência e compreensão que tiveram comigo.

À minha noiva Monaíse, por me compreender e sempre me apoiar em todas as minhas decisões, pelo companheirismo e amor que sempre dedicou a mim.

Aos meus segundos pais João Aparecido e Terezinha, pelo carinho que sempre tiveram comigo.

Um agradecimento especial ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga, por ter me acolhido tão bem em São José do Rio Preto e ter me auxiliado na realização deste trabalho, sendo mais que um orientador, um amigo.

À Profa. Dra. Eliana, que sempre me aconselhava nos momentos de indecisão e dificuldades, pela paciência e atenção dedicados a mim, e acima de tudo pela amizade.

À Profa. Dra. Cleonice, por sempre ter se disposto a me ajudar, e pela confiança e companheirismo que sempre foi uma característica marcante.

A todos os professores e funcionários que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Aos meus amigos Gilson e Adriano que me acolheram tão bem em São José do Rio

Preto e que compartilharam de diversas alegrias e dificuldades enfrentadas.

A todos os meus amigos de Uberlândia, que mesmo diante da distância permaneceram sempre comigo, fazendo sempre uma grande festa quando eu retornava a minha cidade.

A todos os meus amigos da Pós-Graduação, pelos bons momentos de convivência.

À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo auxílio financeiro.

Resumo

Dentre as diversas fórmulas de quadratura interpolatórias estão aquelas que utilizam em sua construção as propriedades dos polinômios ortogonais P_n , ou ainda dos polinômios similares B_n . Consideramos, aqui, fórmulas de quadratura envolvendo polinômios em x da forma $\psi_n(x, \xi) = P_{n-1}(\xi)P_n(x) - P_n(\xi)P_{n-1}(x)$, e da forma $G_n(x, u) = B_{n-1}(u)B_n(x) - B_n(u)B_{n-1}(x)$. Abordamos ainda certas fórmulas de quadratura que visam aproximar a integral de um produto de duas funções k e f sendo k Lebesgue integrável e f Riemann integrável. O principal objetivo deste trabalho é analisar propriedades das fórmulas de quadratura utilizando-se ψ_n e obter propriedades análogas para o caso onde utiliza-se G_n , bem como estudar o erro e as propriedades de convergência das fórmulas envolvendo k e f . Propriedades dos pesos das fórmulas de quadratura nos diversos casos são analisadas, a convergência das fórmulas associadas a k e f são estudadas mediante determinadas escolhas de pontos.

Palavras-chave: polinômios ortogonais, polinômios similares, fórmulas de quadratura.

Abstract

Among the many well known quadrature formulas one finds those interesting interpolatory quadrature formulas that take advantage of the properties of orthogonal polynomials P_n or similar polynomials B_n . Here, we consider the interpolatory quadrature rules based on the zeros of the polynomials $\psi_n(x, \xi) = P_{n-1}(\xi)P_n(x) - P_n(\xi)P_{n-1}(x)$, and $G_n(x, u) = B_{n-1}(u)B_n(x) - B_n(u)B_{n-1}(x)$ where ξ and u are arbitrary parameters. One of the objective of this dissertation is to study some of the known properties of quadrature rules based on $\psi_n(x, \xi)$ and consider the analogous properties of the quadrature rules based on $G_n(x, u)$. We also look at the convergence properties of those quadrature rules that serve to approximate integrals of the product of functions k and f , where k is a Lebesgue integrable function and f needs to be a Riemann integrable function.

Keywords: orthogonal polynomials, similar polynomials, quadrature rules.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Polinômio de Interpolação de Lagrange	4
1.2 Integral de Riemann-Stieltjes	5
1.3 Teoria da Medida	7
1.4 Polinômios Trigonométricos e Desigualdades	13
2 Polinômios Ortogonais e Fórmulas de Quadratura	18
2.1 Polinômios Ortogonais	18
2.2 Fórmulas de Quadratura do Tipo Gauss	21
2.3 Propriedades das Fórmulas de Quadratura do Tipo Gauss	27
3 Polinômios Similares e Fórmulas de Quadratura	30
3.1 Polinômios Similares	30
3.2 Fórmulas de Quadratura do Tipo Gauss Associadas aos Polinômios Similares	32
3.3 Algumas Propriedades Interessantes	38
4 Convergência de Certas Fórmulas de Quadratura	42
4.1 Fórmulas de Quadratura Interpolatórias Produto	42
4.2 Resultados sobre Convergência	43
Considerações Finais	62
Referências	64

Introdução

Fórmulas de quadratura têm sido amplamente estudadas e são de grande importância matemática e de grande aplicabilidade em outras áreas do conhecimento, principalmente nas Ciências Aplicadas.

Basicamente, o objetivo de se trabalhar com fórmulas de quadratura é a aproximação numérica de integrais.

De modo geral, a teoria das fórmulas de quadratura envolve o estudo de fórmulas da forma

$$I_n(f) = \sum_{i=1}^n w_{n,i}^{\phi} f(x_{n,i}),$$

que podem ser utilizadas para aproximar integrais do tipo $\int_a^b f(x) d\phi(x)$. Tradicionalmente, essas fórmulas de quadratura são obtidas aproximando-se, de alguma forma, a função $f(x)$ por um polinômio de grau n e obtendo-se $I_n(f)$ através da integral deste polinômio.

Uma classe de fórmulas de quadratura bem conhecidas, e de grande valor teórico, são as fórmulas de quadratura interpolatórias. Elas são obtidas considerando-se o polinômio interpolador de $f(x)$, ou ainda, de $f(x)h(x)$, onde $h(x)$ é tal que

$$\int_a^b f(x) d\phi(x) = \int_a^b h(x)f(x) d\alpha(x).$$

Especificamente, se $\pi(x) = (x - x_{n,1}) \dots (x - x_{n,n})$, então

$$f(x)h(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\pi(x)}{(x - x_{n,i})\pi'(x_{n,i})} f(x_{n,i})h(x_{n,i}) + \mathbb{R}_n(x),$$

onde $\mathbb{R}_n(x) = (fh)^{(n)}(\xi_x) \frac{\pi(x)}{n!}$ com $\xi_x \in [a, b]$.

Deste modo, é claro que se $f(x)h(x)$ é um polinômio de grau no máximo $n - 1$, então

$$f(x)h(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\pi(x)}{(x - x_{n,i})\pi'(x_{n,i})} f(x_{n,i})h(x_{n,i}),$$

e, portanto,

$$\int_a^b f(x)d\phi(x) = \sum_{i=1}^n w_{n,i}^{\phi} f(x_{n,i}),$$

onde

$$w_{n,i}^{\phi} = h(x_{n,i}) \int_a^b \frac{\pi(x)}{(x - x_{n,i})\pi'(x_{n,i})} d\alpha(x).$$

O sucesso de tais fórmulas depende muito da forma como os pontos utilizados em sua construção são escolhidos. Esses pontos são conhecidos como nós da fórmula de quadratura e $w_{n,i}^{\phi}$ são os pesos. Nas fórmulas de Newton-Côtes, por exemplo, os nós $\{x_{n,i}\}_{i=1}^n$ são igualmente espaçados (veja, por exemplo, [9] e [24]).

Já nas fórmulas de quadratura gaussianas (veja [4]), os nós são escolhidos como sendo os zeros do polinômio de grau n , $P_n(x)$, polinômio este associado a uma seqüência de polinômios ortogonais $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ com relação ao produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) d\phi(x).$$

Tais fórmulas de quadratura têm grau de precisão $2n - 1$, isto é, elas são exatas se f é um polinômio de grau no máximo $2n - 1$. Apesar do alto grau de precisão, essas fórmulas trazem consigo uma dificuldade que é a de calcular os zeros de $P_n(x)$.

Um outro caso bem conhecido, e que é bastante utilizado na aproximação de integrais de funções com singularidades na origem, são as fórmulas de quadratura cujos nós são os zeros do polinômio similar de grau n denotado por $B_n(t)$ (veja [23] e [22]). A seqüência de polinômios $\{B_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$, que estudaremos no Capítulo 3, satisfaz várias propriedades semelhantes às dos polinômios ortogonais $\{P_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$.

Neste trabalho, procuramos abordar diversas fórmulas de quadratura, analisando como se comportam, qual o seu grau de precisão e analisando ainda, em vários casos, propriedades de convergência de tais fórmulas.

Os principais objetivos deste trabalho são estudar as fórmulas de quadratura associadas a uma determinada classe de polinômios quase-ortogonais e analisar, também,

fórmulas semelhantes associadas aos polinômios similares. Abordamos, ainda, a convergência de certas fórmulas de quadratura interpolatórias definidas no Capítulo 4, fórmulas estas que foram estudadas por Smith e Sloan [20].

Procuramos organizar esta dissertação de maneira clara e objetiva, de modo a facilitar estudos futuros dos que pretendem se aprofundar em tais assuntos.

No Capítulo 1, fazemos um rápido estudo sobre conceitos básicos da Análise Matemática e, também, da Análise Numérica, conceitos estes necessários à compreensão do trabalho.

No Capítulo 2, damos inicialmente alguns resultados básicos dos polinômios ortogonais $P_n(x)$. Além disso, fazemos um estudo detalhado de fórmulas de quadratura associadas a polinômios da forma $\psi_n(x, \xi) = P_{n-1}(\xi)P_n(x) - P_{n-1}(x)P_n(\xi)$, sendo ξ um número real qualquer. Os polinômios ψ_n foram introduzidos por M.Riez (veja [13],[14] e [15]) no ano de 1921.

No Capítulo 3, fazemos um estudo análogo ao do capítulo anterior, utilizando agora os polinômios similares.

Já no Capítulo 4, passamos ao estudo das fórmulas de quadratura interpolatórias introduzidas por Beard [3] e Young [25], que têm como objetivo aproximar a integral de um produto de duas funções $k(x)$ e $f(x)$, sendo $k(x)$ Lebesgue integrável e $f(x)$ Riemann integrável.

Por fim, relacionamos, nas Referências Bibliográficas, os livros e artigos por nós consultados ou citados.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, daremos algumas definições e resultados clássicos da Análise Numérica tais como o polinômio de interpolação de Lagrange, polinômios trigonométricos e outros mais. Faremos um estudo básico sobre Teoria da Medida e integral de Lebesgue, abordando, ainda, a definição de integral de Riemann-Stieltjes e suas propriedades. Daremos, também, resultados auxiliares que serão utilizados nos capítulos seguintes.

1.1 Polinômio de Interpolação de Lagrange

Sejam $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n}$ pontos distintos em um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e f uma função definida em $[a, b]$ com valores reais.

Definição 1.1.1 *Chama-se polinômio de interpolação de $f(x)$ sobre os pontos distintos $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n}$, o polinômio $Q(x)$ que satisfaz*

i) $Q(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$,

ii) $Q(x_{n,i}) = f(x_{n,i}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$

O polinômio de interpolação de Lagrange de $f(x)$ sobre os pontos $x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$ é definido por

$$L_n^f(x) = \sum_{i=1}^n l_{n,i}(x) f(x_{n,i}),$$

onde

$$l_{n,i}(x) = \frac{\pi(x)}{(x - x_{n,i})\pi'(x_{n,i})}, \quad i = 1, \dots, n,$$

são os polinômios fundamentais de Lagrange e $\pi(x) = (x - x_{n,1}) \dots (x - x_{n,n})$ é o polinômio dos nós.

Observe que $L_n^f(x_{n,i}) = f(x_{n,i})$, $i = 1, \dots, n$. Sendo assim, temos que L_n^f é o polinômio de interpolação de f nos pontos $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n}$. É bem conhecido que o polinômio de interpolação existe e é único, isto é, $Q(x) = L_n^f(x)$. Temos, ainda, um outro resultado clássico (veja, por exemplo, [11]) que é o seguinte teorema.

Teorema 1.1.1 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua com derivadas contínuas até a ordem n ($f \in C^n[a, b]$). Sejam $x \in [a, b]$ e Q o polinômio de interpolação de f sobre os pontos $x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$. Então, o erro na interpolação é dado por*

$$R_n(x) = f(x) - Q(x) = \frac{f^{(n)}(\xi_x)}{n!} \pi(x), \quad \xi_x \in [a, b],$$

onde $\pi(x)$ é o polinômio dos nós.

Do teorema anterior, temos que, se f é um polinômio de grau no máximo $n - 1$, então $L_n^f \equiv f$.

O polinômio de interpolação de Lagrange tem grande utilidade na Análise Numérica, e, particularmente, na construção de fórmulas de quadratura.

1.2 Integral de Riemann-Stieltjes

Seja ψ uma função real, não-decrescente, definida em um intervalo $[a, b]$. Seja ainda, f uma função também definida em $[a, b]$. Consideremos uma partição Δ deste intervalo da seguinte forma,

$$a \leq \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k < \dots < \tau_n \leq b.$$

Definimos por C da partição Δ , um conjunto de pontos τ'_k que satisfaz

$$\tau_{k-1} \leq \tau'_k \leq \tau_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Dada uma partição Δ de $[a, b]$ e um conjunto C de Δ , definimos a soma

$$S(\Delta, C) = \sum_{k=1}^n f(\tau'_k) [\psi(\tau_k) - \psi(\tau_{k-1})].$$

Definimos ainda a norma da partição Δ por $\|\Delta\| = \max_{1 \leq k \leq n} |\tau_k - \tau_{k-1}|$.

Se existe S tal que, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ que para toda partição Δ , com $\|\Delta\| < \delta$, e para toda escolha de C ,

$$|S(\Delta, C) - S| < \epsilon,$$

então S é chamado de integral de Riemann-Stieltjes (ou simplesmente integral de Stieltjes) de f com respeito a ψ no intervalo $[a, b]$ e é, geralmente, denotada por

$$\int_a^b f(\tau) d\psi(\tau).$$

Em outras palavras, se

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} S(\Delta, C)$$

existe, então este limite é chamado de integral de Stieltjes de f com respeito a ψ em $[a, b]$.

Vejamos, agora, alguns exemplos e propriedades da integral de Stieltjes.

1) Se $\psi(\tau) = \tau$, ou ainda, se $\psi(\tau) = \tau + k$ para alguma constante k , a integral de Riemann-Stieltjes é idêntica à integral de Riemann no intervalo $[a, b]$.

2) Se ψ é uma função contínua e derivável em $[a, b]$, então, pelo teorema do valor médio,

$$\psi(\tau_k) - \psi(\tau_{k-1}) = \psi'(\tilde{\tau}_k)(\tau_k - \tau_{k-1}),$$

onde $\tilde{\tau}_k \in (\tau_{k-1}, \tau_k)$. Portanto, se f é contínua em $[a, b]$, pela definição de integral de Riemann, temos que

$$\int_a^b f(\tau) d\psi(\tau) = \int_a^b f(\tau) \psi'(\tau) d\tau.$$

3) Um caso bem interessante é encontrado se ψ é uma função escada com saltos nos pontos $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, dada por

$$\psi(\tau) = \begin{cases} 0, & a \leq \tau \leq \xi_1, \\ \pi_1, & \xi_1 < \tau \leq \xi_2, \\ \pi_1 + \pi_2, & \xi_2 < \tau \leq \xi_3, \\ \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n \pi_i, & \xi_n < \tau \leq b, \end{cases}$$

onde $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ são números positivos arbitrários. Somente os intervalos $[\tau_{k-1}, \tau_k)$ que contêm um ponto de salto podem contribuir na soma $S(\Delta, C)$. Para $\|\Delta\| < \min(\xi_k - \xi_{k-1})$ a soma fica reduzida a

$$\sum_{k=1}^n f(\tilde{\xi}_k) \pi_k,$$

onde $|\tilde{\xi}_k - \xi_k| \leq \|\Delta\|$. Sendo assim, se f é contínua em $[a, b]$, temos que $f(\tilde{\xi}_k) \rightarrow f(\xi_k)$ quando $\|\Delta\| \rightarrow 0$ e, portanto,

$$\int_a^b f(t) d\psi(t) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \pi_k.$$

Propriedades como a linearidade da integral de Riemann permanecem válidas neste caso e são análogas. O conceito de integração no sentido de Riemann-Stieltjes será bastante utilizado neste trabalho.

1.3 Teoria da Medida

Nesta seção, abordaremos de forma breve algumas noções e conceitos básicos de Teoria da Medida, tais como conjuntos mensuráveis, funções mensuráveis, integral de Lebesgue, etc. A diferença marcante entre as integrais de Riemann e de Lebesgue está na forma de tomar a partição. No caso de Riemann, particionamos o intervalo $[a, b]$ em sub-intervalos e, no caso de Lebesgue, ampliamos as possibilidades de particionarmos o intervalo $[a, b]$ utilizando, agora, outros subconjuntos que podem ser medidos, ou seja, conjuntos mensuráveis.

Para formalizar melhor essas idéias vamos dar algumas definições e resultados envolvidos neste contexto. Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [2] e [17].

Definição 1.3.1 *Seja X um conjunto e \mathbb{X} uma família de subconjuntos de X . Dizemos que \mathbb{X} é uma σ -álgebra se*

- (i) $\emptyset \in \mathbb{X}$;
- (ii) $A \in \mathbb{X} \Rightarrow A^c \in \mathbb{X}$, onde A^c denota o conjunto complementar de A em X ;
- (iii) $A_i \in \mathbb{X}, i = 1, 2, \dots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{X}$.

Como conseqüências imediatas da definição acima temos que $X \in \mathbb{X}$ e $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathbb{X}$.

Exemplo 1.3.1 Um exemplo de σ -álgebra é o conjunto das partes de X , conjunto este cujos elementos são todos os subconjuntos possíveis de X .

Exemplo 1.3.2 Outro exemplo é a σ -álgebra de Borel que é gerada por subconjuntos abertos de \mathbb{R} . Geralmente, denotamos esta σ -álgebra por $\mathbb{X} = \beta$.

Daremos, agora, a definição de conjuntos mensuráveis.

Definição 1.3.2 Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto qualquer. Seja \mathbb{X} uma σ -álgebra de subconjuntos de X . O par (X, \mathbb{X}) é denominado espaço mensurável. Além disso, dizemos que um subconjunto $A \subset X$ é \mathbb{X} -mensurável se $A \in \mathbb{X}$.

Podemos, também, pensar em funções mensuráveis.

Definição 1.3.3 Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é \mathbb{X} -mensurável se o conjunto

$$A_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

for \mathbb{X} -mensurável para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, ou seja se $A_\alpha \in \mathbb{X}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Associado ao conceito de conjuntos mensuráveis, temos o conceito de medida de um conjunto, que definimos a seguir.

Definição 1.3.4 Uma medida μ (algumas vezes chamada de medida positiva) é uma função de \mathbb{X} em \mathbb{R}^+ , tal que:

$$(i) \mu(\emptyset) = 0,$$

$$(ii) \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i), \text{ se } \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ são conjuntos disjuntos e pertencentes a } \mathbb{X}.$$

Exemplo 1.3.3 (Medida de Lebesgue) Se tomarmos $X = \mathbb{R}$ e $\mathbb{X} = \beta$, a medida de Lebesgue m de um aberto (a, b) é definida por

$$m((a, b)) = |b - a|.$$

Obviamente temos que $m(\{a\}) = 0$ e, como conseqüência disto e do fato de \mathbb{Q} ser enumerável, segue que $m(\mathbb{Q}) = 0$.

O terno (X, \mathbb{X}, μ) é chamado um **espaço-medida**.

Definição 1.3.5 *Uma função simples é uma função real definida em um conjunto X que assume apenas um número finito de valores.*

Estamos, agora, em condições de definir o conceito de integração de Lebesgue. Para isso, consideremos uma medida μ e uma σ -álgebra \mathbb{X} . Usaremos, ainda, a definição de função característica de um conjunto A que é dada por

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Definição 1.3.6 *Sejam s uma função simples mensurável em X da forma*

$$s(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{X}_{A_i}(x),$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são os valores distintos de s , e $\Omega \in \mathbb{X}$. Definimos

$$\int_{\Omega} s \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap \Omega).$$

A convenção $0 \cdot \infty = 0$ será usada nos casos em que $\alpha_i = 0$ e $\mu(A_i \cap \Omega) = \infty$.

Se $f : X \rightarrow [0, \infty]$ é mensurável e $\Omega \in \mathbb{X}$, definimos

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \sup \int_{\Omega} s \, d\mu, \quad (1.1)$$

onde o supremo é tomado entre todas as funções simples mensuráveis s tais que $0 \leq s \leq f$.

A integral definida em (1.1) é chamada integral de Lebesgue de f sobre Ω , com relação à medida μ . Seu valor é um número no intervalo $[0, \infty]$.

Note que a definição dada acima é para funções positivas. Se f for uma função real, definimos sua integral por

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \int_{\Omega} f^+ \, d\mu - \int_{\Omega} f^- \, d\mu,$$

onde $f^+ = \max\{f, 0\}$ e $f^- = -\min\{f, 0\}$ são as partes positiva e negativa de f .

Assim como na integral de Riemann, utilizando a definição acima, vários resultados como a linearidade da integral, propriedades fortes de convergência como, por exemplo, o

Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, dentre outros, podem ser demonstrados.

Esta definição amplia, também, a classe de funções integráveis. Um exemplo disto é a função de Dirichlet $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]. \end{cases}$$

Esta função não é Riemann integrável. No entanto, se tomarmos μ como sendo a medida de Lebesgue, esta função é integrável e o valor da integral é igual a 1.

Neste trabalho, sempre que usarmos a medida de Lebesgue m , denotaremos a integral de f sobre um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ da seguinte forma

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Se não mencionarmos outra medida, estamos utilizando a medida de Lebesgue m .

Um outro resultado interessante é que se f é Riemann integrável, então f é Lebesgue integrável com relação à medida m e o valor das integrais coincidem.

Definimos o espaço de funções $L_p(X)$ como sendo o conjunto de todas as funções mensuráveis $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty.$$

No espaço $L_p(X)$, podemos definir uma norma dada por

$$\|f\|_p = \left\{ \int_X |f|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Na verdade, tanto os espaços L_p quanto a norma dada acima são definidos para a classe de equivalência de f denotada por $[f]$. Dizemos que $f \sim g$ se $f(x) = g(x)$ em quase todo ponto, ou seja, se o conjunto onde $f(x) \neq g(x)$ tem medida nula. Esta adaptação se faz necessária, pois a propriedade $\|f\|_p = 0$ não implica necessariamente que $f(x) = 0$ para todo x , mas sim que $f(x) = 0$ em quase todo ponto. Por simplicidade de notação faremos a identificação $[f] \leftrightarrow f$ sempre lembrando que igualdade significa agora igualdade em quase todo ponto. Como este não é o nosso objetivo principal, nos referimos a [17] para maiores detalhes.

Definição 1.3.7 *Se p e q são números reais tais que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

então dizemos que q e p são expoentes conjugados, ou ainda, que q é o conjugado de p , e vice-versa. Quando $p \rightarrow 1$, $q \rightarrow \infty$ e, conseqüentemente, temos que 1 e ∞ são expoentes conjugados.

Apresentamos, agora, duas desigualdades importantes da Análise Funcional que são as **desigualdades de Hölder e de Minkowski**.

Teorema 1.3.1 *Sejam p e q expoentes conjugados, $1 < p < \infty$. Seja X um espaço medido com relação a uma medida μ . Se f e g são funções mensuráveis e tais que $f > 0$ e $g > 0$, então*

$$\int_X fg \, d\mu \leq \left\{ \int_X f^p \, d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_X g^q \, d\mu \right\}^{\frac{1}{q}}$$

e

$$\left\{ \int_X (f + g)^p \, d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \int_X f^p \, d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_X g^p \, d\mu \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

A primeira desigualdade é a desigualdade de Hölder e, a segunda, de Minkowski.

Para a demonstração desse resultado veja [17].

Como conseqüência do teorema acima, temos que se $f \in L_p(X)$ e $g \in L_q(X)$, então

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Além disso, se $f \in L_p(X)$ e $g \in L_p(X)$, então

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Um outro resultado clássico de Teoria da Medida é que se um conjunto X é tal que $\mu(X) = 0$, então

$$\int_X f \, d\mu = 0.$$

Vejamos, agora, a definição de função de variação limitada.

Definição 1.3.8 *Seja f uma função real. Definimos a sua função variação total T_f por*

$$T_f(x) = \sup \sum_{j=1}^N |f(x_j) - f(x_{j-1})| \quad a < x < b,$$

onde o supremo é tomado sobre todo N e sobre todas as escolhas de $\{x_j\}$ tais que

$$a < x_0 < x_1 < \dots < x_N = x.$$

Dizemos que f é uma função de variação limitada em $[a, b]$ se

$$V(f) = \lim_{x \rightarrow b} T_f(x)$$

existe e é finito. $V(f)$ é a variação total de f em $[a, b]$.

Enunciaremos agora um resultado encontrado em [7], que nos dá uma caracterização da existência da integral de Stieltjes com relação a dg no caso em que g é de variação limitada.

Teorema 1.3.2 *Se g é de variação limitada, então uma condição necessária e suficiente para que a integral de Riemann-Stieltjes $\int f dg$ exista, é que a T_g -medida dos pontos de descontinuidade de f seja igual a zero.*

No teorema acima, assumimos que a T_g -medida de um conjunto de pontos no eixo x é a medida do conjunto dos correspondentes pontos $T_g(x)$ no eixo T_g .

O último resultado enunciado nesta seção é o bem conhecido **Teorema da Limitação Uniforme**.

Teorema 1.3.3 *Sejam X um espaço de Banach, Y um espaço vetorial normado e $\{T_\alpha\}$ uma coleção de transformações lineares de X em Y , onde α varia em algum conjunto de índices A . Então, ou existe $M < \infty$ tal que*

$$\|T_\alpha\| \leq M$$

para todo $\alpha \in A$, ou

$$\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha(x)\| = \infty$$

para todo x pertencente a algum conjunto G_δ denso em X , onde G_δ denota uma intersecção enumerável de abertos em X .

No Teorema da Limitação Uniforme a norma $\|T_\alpha\|$ é definida por

$$\|T_\alpha\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T_\alpha(x)\|}{\|x\|}.$$

1.4 Polinômios Trigonômétricos e Desigualdades

Nesta seção, enunciaremos alguns resultados importantes sobre séries trigonométricas, que serão utilizados principalmente no estudo sobre a convergência de certas fórmulas de quadratura que faremos no Capítulo 4.

Inicialmente, faremos um estudo sobre séries de Fourier em termos de senos e cossenos e desigualdades relacionadas. Consideremos as seguintes séries trigonométricas

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{i=1}^n (a_i \cos ix + b_i \sin ix)$$

e

$$\tilde{S}_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{i=1}^{n-1} (a_i \cos ix + b_i \sin ix) + \frac{1}{2}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

onde

$$a_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos it dt \quad \text{e} \quad b_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin it dt, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Estas séries são também chamadas de polinômios trigonométricos. Seja f uma função periódica de período 2π . Então, utilizando a definição de S_n , temos

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^{2\pi} f(t) \cos it dt \cos ix + \int_0^{2\pi} f(t) \sin it dt \sin ix \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^n f(t) \{ \cos it \cos ix + \sin it \sin ix \} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^n f(t) \cos i(t-x) dt. \end{aligned}$$

Fazendo, agora, a substituição $u = t - x$ e usando o fato de f ser periódica de período 2π , obtemos

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-x}^{2\pi-x} f(u+x) du + \int_{-x}^{2\pi-x} \sum_{i=1}^n f(u+x) \cos iu du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(u+x) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n \cos iu \right\} du. \end{aligned}$$

Daí,

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+u) D_n(u) du,$$

onde

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n \cos iu.$$

Usando algumas relações trigonométricas, podemos facilmente verificar que

$$D_n(u) = \frac{\text{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) u \right]}{2 \text{sen} \left(\frac{1}{2} u \right)}.$$

Concluimos, então, que

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+u) \frac{\text{sen} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) u \right]}{2 \text{sen} \left(\frac{1}{2} u \right)} du. \quad (1.2)$$

Analogamente,

$$\tilde{S}_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \tilde{D}_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \frac{\text{sen } nt}{2 \text{tg} \frac{1}{2} t} dt, \quad (1.3)$$

onde

$$\tilde{D}_n(u) = D_n(u) - \frac{1}{2} \cos nu = \frac{\text{sen } nu}{2 \text{tg} \frac{1}{2} u}.$$

Agora, substituindo $\text{sen } nt$ por $\text{sen} [n(t+x)] \cos nx - \cos [n(t+x)] \text{sen } nx$ em (1.3), obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \frac{\text{sen} [n(t+x)] \cos nx}{2 \text{tg} \frac{1}{2} t} dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \frac{\cos [n(t+x)] \text{sen } nx}{2 \text{tg} \frac{1}{2} t} dt \\ &= \tilde{g}_n(x) \text{sen } nx - \tilde{h}_n(x) \cos nx. \end{aligned} \quad (1.4)$$

onde

$$\tilde{g}_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \frac{\cos [n(t+x)]}{2 \text{tg} \frac{1}{2} t} dt$$

e

$$\tilde{h}_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x+t) \frac{\text{sen} [n(t+x)]}{2 \text{tg} \frac{1}{2} t} dt.$$

Note que, se considerarmos as funções $g_n(x) = f(x) \cos nx$ e $h_n(x) = f(x) \sin nx$, temos as seguintes relações

$$\tilde{g}_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g_n(x+t)}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}t} dt$$

e

$$\tilde{h}_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h_n(x+t)}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}t} dt.$$

Neste caso, dizemos que \tilde{g}_n e \tilde{h}_n são, respectivamente, as funções conjugadas de g_n e h_n .

Se considerarmos o espaço $L_p[0, 2\pi]$, temos um importante resultado encontrado em [26, vol.1, p.253] que relaciona uma função e sua conjugada.

Teorema 1.4.1 (Teorema de M. Riez) *Se $f \in L_p[0, 2\pi]$, $1 < p < \infty$, então $\tilde{f} \in L_p[0, 2\pi]$ e*

$$\left\{ \int_0^{2\pi} |\tilde{f}(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq A_p \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}},$$

sendo A_p uma constante que depende somente de p .

Usando o Teorema de M. Riez e as considerações feitas acima, podemos demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 1.4.2 *Se $f \in L_p[0, 2\pi]$, $1 < p < \infty$, então*

$$\left\{ \int_0^{2\pi} |S_n(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq C_p \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}},$$

sendo C_p uma constante que depende somente de p .

Demonstração: Utilizando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} |S_n - \tilde{S}_n| &= \left| \frac{1}{2}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx \\ &\leq \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Logo, se conseguirmos mostrar que

$$\left\{ \int_0^{2\pi} |\tilde{S}_n(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq C'_p \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad (1.6)$$

o teorema ficará provado, pois usando a desigualdade de Minkowski e (1.5), obtemos

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^{2\pi} |S_n(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} &\leq \left\{ \int_0^{2\pi} |S_n(x) - \tilde{S}_n(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_0^{2\pi} |\tilde{S}_n(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_p'' \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_0^{2\pi} |\tilde{S}_n(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Agora, de (1.4), da desigualdade de Minkowski e do Teorema de M. Riez, temos

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^{2\pi} |\tilde{S}_n(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} &= \left\{ \int_0^{2\pi} |\tilde{g}_n \text{sen} nx - \tilde{h}_n \text{cos} nx|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left\{ \int_0^{2\pi} |\tilde{g}_n(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_0^{2\pi} |\tilde{h}_n(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq A_p \left\{ \int_0^{2\pi} |g_n(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} + A_p \left\{ \int_0^{2\pi} |h_n(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_p' \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

■

A demonstração dada acima, também pode ser encontrada em [26, vol.1, p.266].

Para todo número inteiro e positivo c consideremos, agora, uma função peso $w_c(x)$ que tem saltos de tamanho $\frac{2\pi}{c}$ nos pontos

$$\xi_k = \xi_0 + \frac{2k\pi}{c}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

e que é constante em (ξ_k, ξ_{k+1}) sendo ξ_0 um número real arbitrário.

Temos, então, o seguinte teorema [26, vol.2, p.28].

Teorema 1.4.3 *Seja $S(x)$ um polinômio trigonométrico de grau $n - 1$. Então,*

$$\left\{ \int_0^{2\pi} |S(x)|^p dw_{2(n-1)+1} \right\}^{\frac{1}{p}} \leq A \left\{ \int_0^{2\pi} |S(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (1 \leq p \leq \infty), \quad (*)$$

$$\left\{ \int_0^{2\pi} |S(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq A_p \left\{ \int_0^{2\pi} |S(x)|^p dw_{2(n-1)+1} \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (1 < p < \infty), \quad (**)$$

onde A é uma constante independente e A_p depende somente de p .

Como conseqüência do teorema anterior, podemos demonstrar o seguinte resultado: dado $\epsilon > 0$ e $N \geq (1 + \epsilon)(n - 1)$, em (*) podemos substituir $dw_{2(n-1)+1}$ por dw_N , sendo que a constante A ficará dependendo, agora, de ϵ (veja [26, vol.2, p.30]).

Agora, se escolhermos $N = 2(n - 1)$ e $\xi_0 = \theta_{n,1}$, $\xi_1 = \theta_{n,2}, \dots, \xi_{2(n-1)-1} = \theta_{n,2(n-1)}$, com $\theta_{n,i} = \frac{(i - 1)\pi}{n - 1}$, teremos

$$\int_0^{2\pi} |S(x)| dw_{2(n-1)} = \sum_{k=0}^{2(n-1)-1} |S(\xi_k)| \frac{2\pi}{2(n-1)} = \frac{\pi}{n-1} \sum_{k=1}^{2(n-1)} |S(\theta_{n,k})|. \quad (1.7)$$

Logo, do Teorema 1.4.3 com $p = 1$ e da equação acima, obtemos

$$\frac{1}{n-1} \sum_{k=0}^{2(n-1)-1} |S(\theta_{n,k})| \leq A \|S\|_1. \quad (1.8)$$

A última desigualdade obtida também será utilizada no Capítulo 4.

Capítulo 2

Polinômios Ortogonais e Fórmulas de Quadratura

Neste capítulo, faremos um estudo sobre os polinômios ortogonais e algumas fórmulas de quadratura associadas, pré-requisitos essenciais ao entendimento deste trabalho. Enfatizaremos algumas definições e os resultados mais importantes. Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em Chihara [4], Sri Ranga [22] e Freud [6].

2.1 Polinômios Ortogonais

Neste capítulo e no próximo, trabalharemos com as integrais de Riemann-Stieltjes.

Definição 2.1.1 *Sejam $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e ϕ uma função real, limitada, não-decrescente, definida em $[a, b]$ e com infinitos pontos de aumento em (a, b) . Os valores*

$$\mu_r^\phi = \int_a^b x^r d\phi(x), \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

são chamados de momentos. Se os momentos μ_r^ϕ , $r = 0, 1, 2, \dots$, existem, dizemos que $d\phi$ representa uma medida positiva em (a, b) . Quando $d\phi(x) = w(x)dx$, $w(x) \geq 0$ em (a, b) , mas não identicamente nula, w é chamada função peso.

Definição 2.1.2 Dizemos que $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é uma seqüência de polinômios ortogonais com relação à medida $d\phi$ em (a, b) se

i) P_n é de grau exatamente n ;

$$ii) \langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x)P_m(x)d\phi(x) = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \rho_n > 0, & n = m. \end{cases}$$

Se $\rho_n = 1$ para $n \geq 0$, dizemos que $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é uma seqüência de polinômios ortonormais.

Um exemplo clássico de polinômios ortogonais são os polinômios de Jacobi, que denotamos por $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Estes polinômios são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ com relação à medida

$$d\phi(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx, \quad \text{com } \alpha > -1 \text{ e } \beta > -1.$$

Através da fórmula de Rodrigues, eles podem ser dados por

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}], \quad n \geq 0.$$

Enunciaremos, agora, um teorema encontrado em [4, p.8] e que é uma consequência natural da Definição 2.1.2.

Teorema 2.1.1 Seja $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ uma seqüência de polinômios e $d\phi$ uma medida em (a, b) . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é uma seqüência de polinômios ortogonais com relação à medida $d\phi$.
- (b) $\langle P_n, \pi \rangle = 0$, se $\pi(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$.
- (c) $\langle x^m, P_n \rangle = \begin{cases} 0, & m < n \\ \neq 0, & m = n. \end{cases}$

Um resultado bem conhecido, e que decorre das propriedades de ortogonalidade e da Álgebra Linear, é que podemos escrever qualquer polinômio $\pi(x)$ de grau n como combinação linear dos polinômios ortogonais $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ da seguinte maneira:

$$\pi(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x), \tag{2.1}$$

onde

$$c_k = \frac{\int_a^b \pi(x) P_k(x) d\phi(x)}{\int_a^b P_k^2(x) d\phi(x)}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \tag{2.2}$$

Uma outra propriedade interessante e útil dos polinômios ortogonais é que eles satisfazem a uma relação de recorrência de três termos.

Teorema 2.1.2 *Seja $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios ortogonais em (a, b) relativamente à medida $d\phi$. Se $P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_{n,i}x^i$, então*

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0,$$

com $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$ e $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}, \gamma_{n+1} \in \mathbb{R}$, onde

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} &= \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, & \beta_{n+1} &= \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}, & n &\geq 0, \\ \alpha_{n+1} &= \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \neq 0, & & & n &\geq 1. \end{aligned}$$

No caso em que $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma seqüência de polinômios ortogonais mônicos (coeficiente do termo de maior grau igual a 1) teremos $\gamma_{n+1} = 1$ na fórmula de recorrência e, conseqüentemente,

$$\beta_{n+1} = \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle} \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} > 0.$$

Temos o seguinte resultado sobre os zeros de $P_n(x)$ (veja, por exemplo, [4]).

Teorema 2.1.3 *Seja $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) relativamente a uma medida $d\phi$. Então, os zeros de $P_n(x)$, $n \geq 1$, são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b) . Além disso, entre dois zeros consecutivos de $P_n(x)$, existe um único zero de $P_{n-1}(x)$, $n \geq 2$.*

Definição 2.1.3 *Dada a seqüência de polinômios ortogonais mônicos $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, definimos os polinômios associados a P_n por*

$$Q_n(x) = \frac{1}{\mu_0} \int_a^b \frac{P_n(t) - P_n(x)}{t - x} d\phi(t), \quad n \geq 1.$$

Note que os polinômios associados são polinômios mônicos de grau $n - 1$. Como conseqüência da definição acima, temos também o seguinte teorema:

Teorema 2.1.4 *Seja $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios ortogonais mônicos. Os polinômios associados mônicos Q_n satisfazem à mesma relação de recorrência dos polinômios P_n com condições iniciais $Q_0(x) = 0$ e $Q_1(x) = 1$.*

Veremos, agora, um resultado sobre polinômios ortonormais e que utilizaremos em praticamente todo o restante do trabalho.

Teorema 2.1.5 *Para toda medida positiva $d\phi$ existe uma seqüência $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ de polinômios ortonormais cujos coeficientes dos termos de maior grau são positivos, ou seja,*

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_{n,i}x^i, \text{ com } a_{n,n} > 0, n \geq 0.$$

Para a demonstração desse resultado veja Freud [6]. A demonstração é construtiva e de fácil compreensão.

Este é um resultado importante, pois nos garante a existência de uma seqüência ortonormal, e ainda mais, com coeficiente do termo de maior grau positivo, o que torna mais simples a análise de muitos resultados.

Vale ressaltar, também que, se $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ é ortonormal, então, em (2.1),

$$c_k = \int_a^b \pi(x)P_k(x)d\phi(x).$$

2.2 Fórmulas de Quadratura do Tipo Gauss

Regras de quadratura da forma

$$\int_a^b f(x)d\phi(x) = \sum_{k=1}^n W_{n,k}f(x_{n,k}) + \mathbb{E}_n(f)$$

são bastante utilizadas para aproximar integrais. As fórmulas de quadratura de máximo grau de precisão, para as quais $\mathbb{E}_n(f) = 0$ sempre que $f(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$, são também conhecidas por regras de quadratura gaussianas e usam, para a sua construção, os polinômios ortogonais (ver, por exemplo, Krylov [9]).

Nas regras de quadratura gaussianas, $x_{n,k}$ são os zeros do polinômio $P_n(x)$ e os pesos $W_{n,k}$ são dados por

$$W_{n,k} = \int_a^b \frac{P_n(x)}{(x - x_{n,k})P'_n(x_{n,k})}d\phi(x), \quad k = 1, \dots, n.$$

Nessa dissertação, consideramos que os zeros de $P_n(x)$ estão ordenados de modo que $x_{n,n} \leq x_{n,n-1} \leq \dots \leq x_{n,1}$.

Definimos as funções de Christoffel, $\lambda_n(y)$, associadas à medida $d\phi$ por

$$\lambda_n(y) = \int_a^b l_n(x, y) d\phi(x), \quad n \geq 1,$$

onde $l_n(x, y)$ é o polinômio

$$l_n(x, y) = \frac{P_n(x)}{P'_n(y)(x - y)}.$$

É fácil notar que $\lambda_n(x_{n,k}) = W_{n,k}$, $n \geq 1$. Os polinômios $l_n(x, x_{n,k})$ são os polinômios fundamentais de Lagrange nos zeros de $P_n(x)$.

Nosso interesse é estudar fórmulas de quadratura do Tipo Gauss e suas conseqüências. Com este intuito, consideramos, a partir daqui, $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ uma seqüência de polinômios ortonormais nas condições do Teorema 2.1.5 e definimos a seguinte expressão

$$\psi_n(x, \xi) = P_{n-1}(\xi)P_n(x) - P_n(\xi)P_{n-1}(x),$$

sendo ξ é um número real arbitrário. Se $P_{n-1}(\xi) \neq 0$, ψ_n é um polinômio de grau n com relação a x . Por outro lado, se $P_{n-1}(\xi) = 0$, ψ_n é um polinômio de grau $n - 1$.

Denotaremos o grau de ψ_n por $n(\xi)$.

Assim,

$$n(\xi) = \begin{cases} n, & \text{se } P_{n-1}(\xi) \neq 0, \\ n - 1, & \text{se } P_{n-1}(\xi) = 0. \end{cases}$$

Usando o Teorema 2.1.1, podemos facilmente ver que

$$\int_a^b \pi(x)\psi_n(x, \xi)d\phi(x) = 0 \tag{2.3}$$

sempre que $\pi(x) \in \mathbb{P}_{n-2}$.

Temos, agora, o seguinte resultado para os zeros desses polinômios.

Teorema 2.2.1 *Os zeros de $\psi_n(x, \xi)$, visto como polinômio em x , são reais, simples e pelo menos $n - 1$ deles estão em (a, b) .*

Demonstração: Se $P_{n-1}(\xi) = 0$ ou $P_n(\xi) = 0$, então $\psi_n(x, \xi)$ é um múltiplo de um polinômio ortogonal e o resultado segue da Teorema 2.1.3.

Suponha, agora, que $P_{n-1}(\xi)P_n(\xi) \neq 0$, ou seja, $n(\xi) = n$. Como, pelo Teorema 2.1.3,

$$\text{signal}(P_{n-1}(x_{n,k})) = (-1)^{k+1},$$

segue que

$$\text{signal}(\psi_n(x_{n,k}, \xi)) = -\text{signal}(P_n(\xi)) \text{signal}(P_{n-1}(x_{n,k})) = (-1)^k \text{signal}(P_n(\xi)).$$

Sendo assim, $\psi_n(x, \xi)$ terá um número ímpar de zeros em cada um dos intervalos $(x_{n,n}, x_{n,n-1}), (x_{n,n-1}, x_{n,n-2}), \dots, (x_{n,2}, x_{n,1})$ contados com suas multiplicidades. Assim, existe pelo menos um zero de ψ_n em cada um desses intervalos. Resta, então, somente um zero simples η que deve ser real, pois, caso contrário, seu conjugado também seria um zero e ψ_n teria $n + 1$ zeros, um absurdo.

Da própria definição de ψ_n , segue que $\eta \neq x_{n,i}$. Agora, note que $\eta \notin [x_{n,n}, x_{n,1}]$, pois não é possível a existência de 3 ou mais zeros em cada um dos subintervalos $(x_{n,i}, x_{n,i-1})$ já que o número total de zeros não ultrapassa n . ■

Vamos denotar os $n(\xi)$ zeros de $\psi_n(x, \xi)$ por $\xi_1(\xi), \xi_2(\xi), \dots, \xi_{n(\xi)}(\xi)$. Observe que ξ também é um zero de $\psi_n(x, \xi)$, ou seja, $\xi = \xi_i(\xi)$ para algum $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Um resultado interessante é que, se escolhermos como um novo parâmetro um outro zero de $\psi_n(x, \xi)$, o novo polinômio gerado possui os mesmos zeros. Podemos formalizar esse resultado através do seguinte teorema:

Teorema 2.2.2 *Para os polinômios $\psi_n(x, \xi)$ definidos acima, temos*

$$\psi_n(x, \xi) = c_i(\xi)\psi_n(x, \xi_i(\xi)), \quad i = 1, 2, \dots, n(\xi),$$

onde

$$c_i(\xi) = \frac{P_{n-1}(\xi)}{P_{n-1}(\xi_i(\xi))}, \quad \text{se } P_{n-1}(\xi) \neq 0,$$

ou

$$c_i(\xi) = \frac{P_n(\xi)}{P_n(\xi_i(\xi))}, \quad \text{se } P_{n-1}(\xi) = 0.$$

Demonstração: Suponha $P_{n-1}(\xi) \neq 0$. Como $\xi_i(\xi)$ é um zero de ψ_n , temos

$$P_{n-1}(\xi)P_n(\xi_i(\xi)) - P_n(\xi)P_{n-1}(\xi_i(\xi)) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{P_n(\xi)}{P_{n-1}(\xi)} = \frac{P_n(\xi_i(\xi))}{P_{n-1}(\xi_i(\xi))}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \psi_n(x, \xi) &= P_{n-1}(\xi) \left[P_n(x) - \frac{P_n(\xi)}{P_{n-1}(\xi)} P_{n-1}(x) \right] = P_{n-1}(\xi) \left[P_n(x) - \frac{P_n(\xi_i(\xi))}{P_{n-1}(\xi_i(\xi))} P_{n-1}(x) \right] \\ &= P_{n-1}(\xi) \frac{P_{n-1}(\xi_i(\xi))}{P_{n-1}(\xi_i(\xi))} \left[P_n(x) - \frac{P_n(\xi_i(\xi))}{P_{n-1}(\xi_i(\xi))} P_{n-1}(x) \right] = c_i(\xi) \psi_n(x, \xi_i(\xi)). \end{aligned}$$

Consideremos, agora, $P_{n-1}(\xi) = 0$. Logo,

$$\psi_n(x, \xi) = -P_n(\xi) P_{n-1}(x)$$

e, portanto, $\xi_i(\xi)$ também é um zero de $P_{n-1}(x)$, pois é zero de $\psi_n(x, \xi)$. Sendo assim, usando o mesmo raciocínio e a equação acima, teremos

$$\begin{aligned} \psi_n(x, \xi_i(\xi)) &= -P_n(\xi_i(\xi)) P_{n-1}(x) = P_n(\xi_i(\xi)) \frac{\psi_n(x, \xi)}{P_n(\xi)} \\ &= \frac{P_n(\xi_i(\xi))}{P_n(\xi)} \psi_n(x, \xi). \end{aligned}$$

■

Podemos, agora, pensar no polinômio fundamental de Lagrange (que depende de ξ) sobre os zeros de $\psi_n(x, \xi)$, que podemos escrever da forma

$$\tilde{l}_n(x, \xi_i(\xi)) = \frac{\psi_n(x, \xi)}{\psi'_n(\xi_i(\xi), \xi)(x - \xi_i(\xi))}.$$

Nesse caso, temos que, para qualquer polinômio π de grau $n(\xi) - 1$,

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^{n(\xi)} \pi(\xi_i(\xi)) \tilde{l}_n(x, \xi_i(\xi))$$

e

$$\int_a^b \pi(x) d\phi(x) = \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_n(\xi_i(\xi)) \pi(\xi_i(\xi)),$$

onde

$$\tilde{\lambda}_n(\xi_i(\xi)) = \int_a^b \tilde{l}_n(x, \xi_i(\xi)) d\phi(x).$$

Uma conseqüência imediata do Teorema 2.2.2 é que

$$\tilde{l}_n(x, \xi_i(\xi)) = \frac{\psi_n(x, \xi_j(\xi))}{\psi'_n(\xi_i(\xi), \xi_j(\xi))(x - \xi_i(\xi))}, \quad j = 1, 2, \dots, n(\xi)$$

e, em particular,

$$\tilde{l}_n(x, \xi_i(\xi)) = \frac{\psi_n(x, \xi_i(\xi))}{\psi'_n(\xi_i(\xi), \xi_i(\xi))(x - \xi_i(\xi))}.$$

Podemos, então, definir as funções de Christoffel para este caso como sendo

$$\tilde{\lambda}_n(y) = \int_a^b \tilde{l}_n(x, y) d\phi(x), \quad (2.4)$$

onde

$$\tilde{l}_n(x, y) = \frac{\psi_n(x, y)}{\psi'_n(y, y)(x - y)}.$$

Estudemos, agora, fórmulas de quadratura cujos nós são os zeros de ψ_n . Seja $\pi(x)$ um polinômio de grau no máximo $n + n(\xi) - 2$. Então, podemos escrever este polinômio da seguinte forma

$$\pi(x) = Q_{n-2}(x)\psi_n(x, \xi) + R_{n(\xi)-1}(x)$$

e, assim,

$$\pi(\xi_i(\xi)) = R_{n(\xi)-1}(\xi_i(\xi)).$$

Agora, usando (2.3), temos

$$\int_a^b Q_{n-2}(x)\psi_n(x, \xi) d\phi(x) = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int_a^b \pi(x) d\phi(x) &= \int_a^b R_{n(\xi)-1}(x) d\phi(x) = \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_n(\xi_i(\xi)) R_{n(\xi)-1}(\xi_i(\xi)) \\ &= \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_n(\xi_i(\xi)) \pi(\xi_i(\xi)). \end{aligned}$$

Então, concluímos que a fórmula de quadratura acima tem precisão $n + n(\xi) - 2$, ou seja,

$$\int_a^b f(x) d\phi(x) = \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_n(\xi_i(\xi)) f(\xi_i(\xi)) + \mathbb{R}_n(f), \quad (2.5)$$

onde $\mathbb{R}_n(f) = 0$ se $f \in \mathbb{P}_{n+n(\xi)-2}$.

A fórmula de quadratura (2.5) é chamada do Tipo Gauss e considera, em sua construção, uma combinação linear de polinômios ortogonais de graus n e $n - 1$. Essa combinação linear é um polinômio que pertence a uma seqüência de polinômios que chamamos de quase-ortogonais (veja, por exemplo, [4]).

Observe que, se escolhermos

$$f(x) = \left[\frac{\psi_n(x, \xi_i(\xi))}{\psi'_n(\xi_i(\xi), \xi_i(\xi))(x - \xi_i(\xi))} \right]^2,$$

então $f \in \mathbb{P}_{n+n(\xi)-2}$ e, por (2.5), obtemos

$$\int_a^b \left[\tilde{l}_n(x, \xi_i(\xi)) \right]^2 d\phi(x) = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_n(\xi_j(\xi)) \left[\tilde{l}_n(\xi_j(\xi), \xi_i(\xi)) \right]^2 = \tilde{\lambda}_n(\xi_i(\xi)). \quad (2.6)$$

Na última igualdade de (2.6) usamos uma propriedade bem conhecida dos polinômios fundamentais de Lagrange, que é a seguinte

$$\tilde{l}_n(\xi_j(\xi), \xi_i(\xi)) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j, \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases} \quad (2.7)$$

Pela equação (2.6), teremos, então,

$$\tilde{\lambda}_n(\xi_i(\xi)) = \int_a^b \left[\tilde{l}_n(x, \xi_i(\xi)) \right]^2 d\phi(x) > 0. \quad (2.8)$$

Através da equação acima, concluímos que os pesos nas fórmulas de quadratura do tipo Gauss são todos positivos.

Podemos estender esse resultado para as funções de Christoffel definidas em (2.4). Veja que, se tomarmos um número $y \in \mathbb{R}$, podemos gerar o polinômio $\psi_n(x, y)$ tendo y como parâmetro.

O polinômio $\psi_n(x, y)$ dará origem aos zeros $\xi_1(y), \xi_2(y), \dots, \xi_{n(y)}(y)$ e sabemos que $y = \xi_i(y)$ para algum $i \in \{1, 2, \dots, n(y)\}$. Assim, por (2.8),

$$\int_a^b \tilde{l}_n(x, y) d\phi(x) = \tilde{\lambda}_n(y) = \tilde{\lambda}_n(\xi_i(y)) > 0,$$

ou seja, $\tilde{\lambda}_n(y) > 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

2.3 Propriedades das Fórmulas de Quadratura do Tipo Gauss

Diante das fórmulas de quadratura do Tipo Gauss, podemos obter alguns resultados e relações interessantes envolvendo os polinômios ortogonais e a função $\tilde{\lambda}_n(y)$.

Levando em consideração (2.7), temos que para $k \leq n - 1$,

$$\int_a^b P_k(x) \tilde{l}_n(x, y) d\phi(x) = \sum_{i=1}^{n(y)} \tilde{\lambda}_n(\xi_i(y)) P_k(\xi_i(y)) \tilde{l}_n(\xi_i(y), y) = \tilde{\lambda}_n(y) P_k(y). \quad (2.9)$$

Por outro lado, de (2.1) e (2.2), podemos escrever $\tilde{l}_n(x, y)$ da seguinte maneira:

$$\tilde{l}_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P_k(x),$$

onde

$$a_k = \int_a^b P_k(x) \tilde{l}_n(x, y) d\phi(x).$$

Note que se $n(y) = n - 1$, teremos $a_{n-1} = 0$ no somatório acima.

Agora, usando (2.9), temos

$$\begin{aligned} \tilde{l}_n(x, y) &= \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{\lambda}_n(y) P_k(y) P_k(x) = \tilde{\lambda}_n(y) \sum_{k=0}^{n-1} P_k(y) P_k(x) \\ &= \tilde{\lambda}_n(y) K_n(x, y), \end{aligned} \quad (2.10)$$

com

$$K_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(y) P_k(x).$$

Assim,

$$K_n(x, y) = \frac{1}{\tilde{\lambda}_n(y)} \tilde{l}_n(x, y) = \frac{1}{\tilde{\lambda}_n(y) \psi'_n(y, y)} \frac{P_n(x) P_{n-1}(y) - P_n(y) P_{n-1}(x)}{(x - y)}.$$

Comparando-se os coeficientes de x^{n-1} em ambos os lados da equação anterior, deduzimos que

$$P_{n-1}(y) a_{n-1, n-1} = \{\tilde{\lambda}_n(y) \psi'_n(y, y)\}^{-1} P_{n-1}(y) a_{n, n},$$

onde $a_{n,n}$ e $a_{n-1,n-1}$ são os coeficientes dos termos de maior grau de P_n e P_{n-1} , respectivamente. Logo,

$$\{\tilde{\lambda}_n(y)\psi'_n(y, y)\}^{-1} = \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n,n}}$$

e, portanto,

$$K_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(y)P_k(x) = \frac{a_{n-1,n-1}}{a_{n,n}} \frac{P_n(x)P_{n-1}(y) - P_n(y)P_{n-1}(x)}{(x - y)}. \quad (2.11)$$

A equação (2.11) é conhecida como **Fórmula de Christoffel-Darboux** e tem um papel importante na teoria de polinômios ortogonais, principalmente no tratamento de expansões de funções em termos desses polinômios. Podemos também notar a relação de simetria $K_n(x, y) = K_n(y, x)$.

Fazendo $x = y$ em (2.10), temos, ainda,

$$K_n(y, y) = \frac{1}{\tilde{\lambda}_n(y)}$$

ou seja,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \{P_k(y)\}^2 = \{\tilde{\lambda}_n(y)\}^{-1}.$$

Como $K_n(x, y)$ tem grau $n(y) - 1$ em x , obtemos a igualdade

$$K_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n(y)} K_n(y, \xi_k(y)) \tilde{l}_n(x, \xi_k) = \sum_{k=1}^{n(y)} \frac{\tilde{l}_n(y, \xi_k(y)) \tilde{l}_n(x, \xi_k(y))}{\tilde{\lambda}_n(\xi_k(y))}$$

usando o polinômio de interpolação de Lagrange sobre os zeros $\xi_i(y)$, a simetria de $K_n(x, y)$ e a equação (2.10).

Finalmente, fazendo $x = y$ na equação acima,

$$\{\tilde{\lambda}_n(y)\}^{-1} = \sum_{k=1}^{n(y)} \frac{\{\tilde{l}_n(y, \xi_k(y))\}^2}{\tilde{\lambda}_n(\xi_k(y))}. \quad (2.12)$$

Observe que, se y é um zero de $P_n(x)$, então $\psi_n(x, y)$ é um múltiplo de $P_n(x)$, seus zeros satisfazem $\xi_1(y) = x_{n,1}, \dots, \xi_n(y) = x_{n,n}$ e a equação (2.12) torna-se

$$\{\lambda_n(y)\}^{-1} = \sum_{k=1}^n \frac{\{l_n(y, x_{n,k})\}^2}{\lambda_n(x_{n,k})}. \quad (2.13)$$

Na verdade, existe uma forte conexão entre os zeros de $P_n(x)$ e as funções de Christoffel associadas $\lambda_n(x)$. As **desigualdades de Markov-Stieltjes** são exemplos disso (veja [6]).

São elas:

$$\sum_{k=i+1}^n \lambda_n(x_{n,k}) \leq \int_a^{x_{n,i}} d\phi(x) \leq \sum_{k=i}^n \lambda_n(x_{n,k})$$

e

$$\sum_{k=i+1}^n (1 \pm x_{n,k}) \lambda_n(x_{n,k}) \leq \int_a^{x_{n,i}} (1 \pm t) d\phi(t) \leq \sum_{k=i}^n (1 \pm x_{n,k}) \lambda_n(x_{n,k}),$$

com $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Capítulo 3

Polinômios Similares e Fórmulas de Quadratura

Faremos, agora, um estudo sobre os polinômios similares semelhante ao que foi feito no capítulo anterior para os polinômios ortogonais. Os polinômios similares foram estudados por Sri Ranga [22] com o objetivo de solucionar o problema forte de momento de Hamburger. Tais polinômios satisfazem várias propriedades semelhantes às dos polinômios ortogonais. Neste capítulo, também estudaremos como se comportam as fórmulas de quadratura associadas e forneceremos alguns resultados importantes.

3.1 Polinômios Similares

Nessa seção, daremos resultados básicos sobre os polinômios similares sem nos preocuparmos em demonstrá-los. Contudo, as demonstrações podem ser encontradas nos trabalhos de Andrade [1], de Jones et al. [8] e de Sri Ranga [23].

Seja $\psi(t)$ uma função real, limitada, não-decrescente e com infinitos pontos de aumento em (a, b) , com $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Definição 3.1.1 *Se os momentos definidos por*

$$\mu_m = \int_a^b t^m d\psi(t), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

existirem, dizemos que $d\psi(t)$ é uma medida forte em (a, b) e, se $d\psi(t) = w(t)dt$, w é

chamada função peso forte. Se, além disso, $(a, b) \subseteq (0, \infty)$, $d\psi(t)$ recebe o nome de medida forte de Stieltjes.

Notação: $SS(a, b)$.

Definição 3.1.2 *Seja $d\psi(t)$ uma medida $SS(a, b)$. Dizemos que $\{B_n(t)\}_{n=0}^\infty$ é uma seqüência de polinômios similares aos ortogonais se*

i) $B_n(t)$ é de grau exatamente n , $n \in \mathbb{N}$.

$$ii) \int_a^b t^{-n+s} B_n(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & s = 0, 1, \dots, n-1, \\ \rho_n > 0, & s = n. \end{cases}$$

Na definição acima, e no restante desse trabalho, consideramos os polinômios $B_n(t)$ mônicos, ou seja, se $B_n(t) = \sum_{i=0}^n b_{n,i} t^i$, então $b_{n,n} = 1$.

Da mesma forma com que definimos os polinômios associados aos ortogonais, podemos definir também os associados aos similares.

Definição 3.1.3 *Os polinômios $A_n(t)$, associados aos polinômios similares $B_n(t)$, são definidos por*

$$A_n(t) = \int_a^b \frac{B_n(z) - B_n(t)}{z - t} d\psi(t).$$

Note que os polinômios associados definidos acima também têm grau $n - 1$ como no caso dos associados aos ortogonais.

Vejamos, agora, algumas propriedades dos polinômios similares e associados.

Teorema 3.1.1 *Os polinômios $B_n(t)$ e $A_n(t)$ satisfazem às seguintes relações de recorrência de três termos para $n \geq 1$,*

$$B_{n+1}(t) = (t - \beta_{n+1})B_n(t) - \alpha_{n+1}tB_{n-1}(t), \quad (3.1)$$

$$A_{n+1}(t) = (t - \beta_{n+1})A_n(t) - \alpha_{n+1}tA_{n-1}(t), \quad (3.2)$$

com

$$A_0(t) = 0, \quad A_1(t) = \mu_0, \quad B_0(t) = 1, \quad B_1(t) = t - \beta_1,$$

e

$$\beta_1 = \frac{\mu_0}{\mu_{-1}}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}, \quad \beta_{n+1} = -\alpha_{n+1} \frac{\eta_{n-1}}{\eta_n}.$$

Observação 3.1.1 No teorema acima $\eta_n = (-1)^n \frac{H_{n+1}^{(-n-1)}}{H_n^{(-n)}}$, onde $H_n^{(m)}$ é o determinante dado por

$$H_n^{(m)} = \begin{vmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n-1} \\ \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \cdots & \mu_{m+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m+n-1} & \mu_{m+n} & \cdots & \mu_{m+2n-2} \end{vmatrix}.$$

Observe que, como $\rho_n > 0$, temos $\alpha_n > 0$, e, da observação acima, também obtemos $\beta_n > 0$.

Pode-se mostrar, ainda, que os zeros de $B_n(t)$ são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b) . Além disso, como no caso dos polinômios ortogonais, temos que entre dois zeros consecutivos do polinômio $B_{n-1}(t)$ existe um zero de $B_n(t)$.

3.2 Fórmulas de Quadratura do Tipo Gauss Associadas aos Polinômios Similares

É bem conhecido que regras de quadratura da forma

$$\int_a^b f(t) d\psi(t) = \sum_{k=1}^n \widehat{W}_{n,k} f(t_{n,k}) + \widehat{\mathbb{E}}_n(f),$$

onde $d\psi(t)$ é uma medida forte de Stieltjes em (a, b) e $t_{n,k}$ são os zeros do polinômio similar $B_n(t)$ é exata se $t^n f(t)$ é um polinômio de grau no máximo $2n - 1$, ou seja,

$$\int_a^b f(t) d\psi(t) = \sum_{k=1}^n \widehat{W}_{n,k} f(t_{n,k}),$$

se $t^n f(t) \in \mathbb{P}_{2n-1}$, onde os pesos $\widehat{W}_{n,k}$ são dados por

$$\widehat{W}_{n,k} = \frac{t_{n,k}^n}{B_n'(t_{n,k})} \int_a^b \frac{t^{-n} B_n(t)}{t - t_{n,k}} d\psi(t), \quad k = 1, \dots, n.$$

Vamos, agora, investigar como é a fórmula de quadratura associada à função definida por

$$G_n(t, u) = B_{n-1}(u)B_n(t) - B_n(u)B_{n-1}(t) \tag{3.3}$$

para $n \geq 1$ e $u \in \mathbb{R}$.

Observe que se $B_{n-1}(u) \neq 0$, $G_n(t, u)$ é um polinômio de grau n em t . Caso contrário, $G_n(t, u)$ será um polinômio de grau $n - 1$. Portanto, denotaremos o grau de $G_n(t, u)$ por

$$n(u) = \begin{cases} n, & \text{se } B_{n-1}(u) \neq 0, \\ n - 1, & \text{se } B_{n-1}(u) = 0. \end{cases}$$

Podemos facilmente notar que u é um zero de $G_n(t, u)$, pois $G_n(u, u) = 0$.

Da Definição 3.1.2 *ii*), obtemos

$$\int_a^b t^{-(n-1)+s} G_n(t, u) d\psi(t) = 0, \quad 0 \leq s \leq n - 2. \quad (3.4)$$

Das equações (3.3) e (3.1), encontramos

$$\begin{aligned} G_n(t, u) &= \{(t - \beta_n)B_{n-1}(t) - \alpha_n t B_{n-2}(t)\}B_{n-1}(u) \\ &\quad - \{(u - \beta_n)B_{n-1}(u) - \alpha_n u B_{n-2}(u)\}B_{n-1}(t) \\ &= (t - u)B_{n-1}(t)B_{n-1}(u) + \alpha_n [uB_{n-2}(u)B_{n-1}(t) - tB_{n-2}(t)B_{n-1}(u)], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} G_n(t, u) &= (t - u)B_{n-1}(t)B_{n-1}(u) + \alpha_n [uB_{n-2}(u)\{(t - \beta_{n-1})B_{n-2}(t) \\ &\quad - \alpha_{n-1} t B_{n-3}(t)\} - tB_{n-2}(t)\{(u - \beta_{n-1})B_{n-2}(u) - \alpha_{n-1} u B_{n-3}(u)\}] \\ &= (t - u)B_{n-1}(t)B_{n-1}(u) + (t - u)\alpha_n \beta_{n-1} B_{n-2}(t)B_{n-2}(u) \\ &\quad + \alpha_n \alpha_{n-1} t u [B_{n-2}(t)B_{n-3}(u) - B_{n-2}(u)B_{n-3}(t)]. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} G_n(t, u) &= (t - u)B_{n-1}(t)B_{n-1}(u) + (t - u)\alpha_n \beta_{n-1} B_{n-2}(t)B_{n-2}(u) \\ &\quad + \alpha_n \alpha_{n-1} t u G_{n-2}(t, u), \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

Assim, para $n \geq 3$,

$$\frac{G_n(t, u)}{t - u} = B_{n-1}(t)B_{n-1}(u) + \alpha_n \beta_{n-1} B_{n-2}(t)B_{n-2}(u) + \alpha_n \alpha_{n-1} t u \frac{G_{n-2}(t, u)}{t - u}. \quad (3.5)$$

Se $n = 1$, temos

$$\frac{G_1(t, u)}{t - u} = \frac{B_1(t)B_0(u) - B_1(u)B_0(t)}{t - u} = 1. \quad (3.6)$$

Agora, se $n = 2$,

$$\begin{aligned} \frac{G_2(t, u)}{t - u} &= \frac{B_2(t)B_1(u) - B_2(u)B_1(t)}{t - u} \\ &= \frac{(t - u)B_1(t)B_1(u) + \alpha_2[uB_0(u)B_1(t) - tB_0(t)B_1(u)]}{t - u} \\ &= \frac{(t - u)B_1(t)B_1(u) + \alpha_2(t - u)}{t - u} = B_1(t)B_0(t) + \alpha_2B_0(t)B_0(u). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Portanto, se fizermos $u \rightarrow t$ nas equações (3.5), (3.6) e (3.7), obtemos o teorema a seguir.

Teorema 3.2.1 *Para $n \geq 3$, a seguinte relação é válida*

$$G'_n(t, t) = B_{n-1}^2(t) + \alpha_n \beta_{n-1} B_{n-2}^2(t) + \alpha_n \alpha_{n-1} t^2 G'_{n-2}(t, t),$$

com $G'_1(t, t) = 1$ e $G'_2(t, t) = B_1^2(t) + \alpha_2 B_0^2(t)$.

Como consequência direta do teorema acima temos $G'_n(t, t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Podemos obter, ainda, um resultado para os zeros de $G_n(t, u)$ análogo ao obtido para a função $\psi_n(x, \xi)$ definida no Capítulo 2.

Teorema 3.2.2 *Os zeros do polinômio $G_n(t, u)$ são reais, simples e pelo menos $n - 1$ deles estão em (a, b) .*

A demonstração desse resultado é análoga à demonstração do Teorema 2.2.1.

Um detalhe importante é que, como estamos considerando $d\psi(t)$ uma medida forte de Stieltjes em (a, b) , então temos necessariamente $(a, b) \subseteq (0, \infty)$. Este fato será de grande importância na análise do comportamento dos pesos das fórmulas de quadratura associadas a esses polinômios.

Sejam $u_1(u), u_2(u) \dots, u_{n(u)}(u)$ os zeros de $G_n(t, u)$. Temos que $u_i(u) = u$, para algum $i \in \{1, 2, \dots, n(u)\}$.

Aqui, se escolhermos um dos zeros de $G_n(t, u)$ como novo parâmetro, os zeros deste novo polinômio serão os mesmos. Esta propriedade, que é válida para as funções $\psi_n(x, \xi)$

relacionada aos polinômios ortogonais, permanece válida no caso dos similares e pode ser formalizada através do seguinte teorema.

Teorema 3.2.3 *Para as funções $G_n(t, u)$ definidas acima temos*

$$G_n(t, u) = b_i(u)G_n(t, u_i(u)), \quad i = 1, 2, \dots, n(u),$$

onde

$$b_i(u) = \frac{B_{n-1}(u)}{B_{n-1}(u_i(u))}, \quad \text{se } B_{n-1}(u) \neq 0,$$

ou

$$b_i(u) = \frac{B_n(u)}{B_n(u_i(u))}, \quad \text{se } B_{n-1}(u) = 0.$$

A demonstração deste resultado também é análoga ao caso dos polinômios ortogonais.

Vamos construir, agora, fórmulas de quadratura associadas aos zeros de $G_n(t, u)$. Para isso, seja $F(t) = t^{n-1}f(t) \in \mathbb{P}_{n+n(u)-2}$.

Sabemos que o polinômio de interpolação de Lagrange de $F(t)$ sobre os zeros $u_i(u)$ é dado por

$$F(t) = \sum_{i=1}^n \frac{G_n(t, u)}{G'_n(u_i(u), u)(t - u_i(u))} (u_i(u))^{n-1} f(u_i(u)) + \frac{F^{(n)}(\xi_t)}{n!} G_n(t, u), \quad (3.8)$$

Note que, como $F(t) \in \mathbb{P}_{n+n(u)-2}$, então $F^{(n)}(t)$ será um polinômio de grau no máximo $n - 2$.

Multiplicando ambos os lados da equação (3.8) por $t^{-(n-1)}$, obtemos

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{i=1}^{n(u)} \frac{t^{-(n-1)} G_n(t, u)}{G'_n(u_i(u), u)(t - u_i(u))} (u_i(u))^{n-1} f(u_i(u)) \\ &\quad + t^{-(n-1)} \frac{F^{(n)}(\xi_t)}{n!} G_n(t, u). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Agora, pela relação (3.4), temos que

$$\int_a^b t^{-(n-1)} \frac{F^{(n)}(\xi_t)}{n!} G_n(t, u) d\psi(t) = 0.$$

Portanto, integrando ambos os lados em (3.9), obtemos

$$\int_a^b f(t) d\psi(t) = \sum_{i=1}^{n(u)} \hat{\lambda}_n(u_i(u)) (u_i(u))^{n-1} f(u_i(u)),$$

onde

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_n(u_i(u)) &= \int_a^b t^{-n+1} \frac{G_n(t, u)}{G'_n(u_i(u), u)(t - u_i(u))} d\psi(t) \\ &= \int_a^b t^{-n+1} \frac{G_n(t, u_i(u))}{G'_n(u_i(u), u_i(u))(t - u_i(u))} d\psi(t).\end{aligned}\tag{3.10}$$

Note que, na última igualdade em (3.10), usamos o Teorema 3.2.3, que nos permite substituir u por $u_i(u)$. Como conclusão dos resultados acima, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 3.2.4 *Se $t^{n-1}f(t) \in \mathbb{P}_{n+n(u)-2}$ então $\hat{\mathbb{R}}_n(f) = 0$ na fórmula de quadratura dada por*

$$\int_a^b f(t) d\psi(t) = \sum_{i=1}^{n(u)} \hat{\lambda}_n(u_i(u)) (u_i(u))^{n-1} f(u_i(u)) + \hat{\mathbb{R}}_n(f),\tag{3.11}$$

onde $\hat{\lambda}_n(u_i(u))$ são dados por (3.10) e $u_i(u)$ são os zeros de $G_n(t, u)$.

Façamos, agora, uma análise do sinal dos pesos $\hat{\lambda}_n(u_i(u))$.

Se escolhermos $F(t) = \left(\frac{G_n(t, u_i(u))}{t - u_i(u)}\right)^2$, temos que $F \in \mathbb{P}_{n+n(u)-2}$ e, pelo Teorema 3.2.4

$$\begin{aligned}\int_a^b t^{-(n-1)} F(t) d\psi(t) &= \sum_{k=1}^{n(u)} \hat{\lambda}_n(u_k(u)) \left(\frac{G_n(t, u_i(u))}{t - u_i(u)}\right)^2_{t=u_k(u)} \\ &= \hat{\lambda}_n(u_i(u)) \{G'_n(u_i(u), u_i(u))\}^2\end{aligned}$$

e, como $(a, b) \subseteq (0, \infty)$,

$$0 < \int_a^b t^{-(n-1)} \left(\frac{G_n(t, u)}{t - u_i(u)}\right)^2 d\psi(t) = \hat{\lambda}_n(u_i(u)) [G'_n(u_i(u), u_i(u))]^2.$$

Da equação acima, temos que $\hat{\lambda}_n(u_i(u)) > 0$ para $i \in \{1, 2, \dots, n(u)\}$.

Como conseqüência deste resultado e de (3.10), a função

$$\hat{\lambda}_n(y) = \int_a^b t^{-(n-1)} \frac{G_n(t, y)}{G'_n(y, y)(t - y)} d\psi(t)\tag{3.12}$$

será positiva para todo $y \in \mathbb{R}$.

De fato, para cada $y \in \mathbb{R}$ podemos construir $G_n(t, y)$ onde um de seus zeros é $u_i(y) = y$.
Daí,

$$\hat{\lambda}_n(y) = \hat{\lambda}_n(u_i(y)) > 0.$$

Consideremos, agora, para cada $s \in \mathbb{N}$, a função $\hat{\lambda}_{n,s}(u) = \int_a^b t^{-s} \frac{G_n(t, u)}{G'_n(u, u)(t-u)} d\psi(t)$,
que podemos escrever como

$$\hat{\lambda}_{n,s}(u) = \int_a^b \frac{t^{-s} - u^{-s}}{t-u} \frac{G_n(t, u)}{G'_n(u, u)} d\psi(t) + \frac{u^{-s}}{G'_n(u, u)} \int_a^b \frac{G_n(t, u)}{t-u} d\psi(t).$$

Mas,

$$\frac{t^{-s} - u^{-s}}{t-u} = -t^{-s}u^{-s} \left(\frac{t^s - u^s}{t-u} \right) = -t^{-s}u^{-s} \sum_{r=0}^{s-1} t^r u^{s-1-r}.$$

Logo, usando a equação (3.4), obtemos

$$\hat{\lambda}_{n,s}(u) = \frac{u^{-s}}{G'_n(u, u)} \int_a^b \frac{G_n(t, u)}{t-u} d\psi(t), \quad s = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3.13)$$

Note que, para o caso onde $s = 0$, estamos usando a convenção $\sum_{r=0}^{-1} t^r u^{-1-r} = 0$.

Assim, da definição de $\lambda_{n,s}(u)$, de (3.12) e de (3.13), obtemos a relação

$$\hat{\lambda}_n(u) = \hat{\lambda}_{n,n-1}(u) = u^{-n+1} \hat{\lambda}_{n,0}(u).$$

Como, de (3.13),

$$\hat{\lambda}_{n,s}(u) = u^{-s} \hat{\lambda}_{n,0}(u),$$

segue que

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_n(u) &= u^{-n+1} \frac{\hat{\lambda}_{n,s}(u)}{u^{-s}} \\ &= u^{s-n+1} \hat{\lambda}_{n,s}(u) \quad s = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

3.3 Algumas Propriedades Interessantes

Vejamos, agora, algumas propriedades que podem ser obtidas a partir da fórmula de quadratura construída na seção anterior. Consideremos o polinômio de grau $n(u) - 1$

$$\hat{l}_n(t, u) = \frac{G_n(t, u)}{G'_n(u, u)(t - u)}.$$

Usando como base o conjunto $\{B_0(t), t^{-1}B_1(t), \dots, t^{-(n-1)}B_{n-1}(t)\}$, podemos escrever

$$t^{-(n-1)}\hat{l}_n(t, u) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^{-k} B_k(t). \quad (3.14)$$

Para $k \leq n - 1$, como $B_k(t)\hat{l}_n(t, u) \in \mathbb{P}_{n+n(u)-2}$, temos

$$\begin{aligned} \int_a^b t^{-(n-1)} B_k(t) \hat{l}_n(t, u) d\psi(t) &= \sum_{i=1}^{n(u)} \hat{\lambda}_n(u_i) B_k(u_i) \frac{G_n(u_i, u)}{G'_n(u_i, u)(u_i - u)} \\ &= \hat{\lambda}_n(u) B_k(u). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Mas, por outro lado, usando (3.14),

$$\begin{aligned} \int_a^b t^{-(n-1)} B_k(t) \hat{l}_n(t, u) d\psi(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \int_a^b B_k(t) t^{-i} B_i(t) d\psi(t) \\ &= \sum_{i=0}^k a_i \int_a^b B_k(t) t^{-i} B_i(t) d\psi(t) \\ &= \sum_{i=0}^k a_i \int_a^b B_k(t) d\psi(t) = \mu_0 \alpha_2 \dots \alpha_{k+1} \sum_{i=0}^k a_i. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Nas igualdades acima, usamos as relações de ortogonalidade de $B_n(t)$ e, também, um fato bem conhecido, obtido da relação de recorrência de três termos de $B_n(t)$, que é a igualdade

$$\rho_k = \int_a^b B_k(t) d\psi(t) = \mu_0 \alpha_2 \dots \alpha_{k+1}, \quad k \geq 0.$$

Portanto, de (3.15) e (3.16),

$$\sum_{i=0}^k a_i = \frac{\hat{\lambda}_n(u) B_k(u)}{\rho_k}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Temos, então, que

$$\begin{aligned} a_k(u) &= \sum_{i=0}^k a_i(u) - \sum_{i=0}^{k-1} a_i(u) = \frac{\hat{\lambda}_n(u)B_k(u)}{\rho_k} - \frac{\hat{\lambda}_n(u)B_{k-1}(u)}{\rho_{k-1}} \\ &= \frac{\hat{\lambda}_n(u)}{\rho_k} [B_k(u) - \alpha_{k+1}B_{k-1}(u)]. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} G_{k+1}(u, 0) &= B_{k+1}(u)B_k(0) - B_{k+1}(0)B_k(u) = B_k(0) \left[B_{k+1}(u) - \frac{B_{k+1}(0)}{B_k(0)}B_k(u) \right] \\ &= B_k(0) [B_{k+1}(u) + \beta_{k+1}B_k(u)]. \end{aligned}$$

Usando a relação de recorrência de B_k , obtemos

$$G_{k+1}(u, 0) = B_k(0)u [B_k(u) - \alpha_{k+1}B_{k-1}(u)].$$

Então,

$$a_k(u) = \frac{\hat{\lambda}_n(u)G_{k+1}(u, 0)}{u\rho_k B_k(0)}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Note que esta expressão também é válida para $k = 0$. Logo,

$$a_0(u) = \frac{\hat{\lambda}_n(u)}{\mu_0} B_0(u).$$

Tendo os termos a_k dados explicitamente, podemos escrever

$$t^{-(n-1)}\hat{l}_n(t, u) = \hat{\lambda}_n(u) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{G_{k+1}(u, 0)t^{-k}B_k(t)}{u\rho_k B_k(0)}$$

ou, equivalentemente,

$$\hat{l}_n(t, u) = \hat{\lambda}_n(u) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{G_{k+1}(u, 0)t^{(n-1)-k}B_k(t)}{u\rho_k B_k(0)}. \quad (3.17)$$

Sejam, então,

$$\hat{b}(u) = \left[\frac{\hat{\lambda}_n(u)G_1(u, 0)}{\rho_0 B_0(0)u}, \frac{\hat{\lambda}_n(u)G_2(u, 0)}{\rho_1 B_1(0)u}, \dots, \frac{\hat{\lambda}_n(u)G_n(u, 0)}{\rho_{n-1} B_{n-1}(0)u} \right]^T$$

e

$$\tilde{b}(t) = [t^{(n-1)}B_0(t), t^{(n-2)}B_1(t), \dots, t^0 B_{n-1}(t)]^T.$$

Logo,

$$\hat{l}_n(t, u) = \hat{b}(u)^T \tilde{b}(t).$$

Usando a equação acima, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \hat{b}(u_i(u))^T \tilde{b}(u_j(u)) &= 0, & \text{se } i \neq j \\ \hat{b}(u_i(u))^T \tilde{b}(u_j(u)) &= 1, & \text{se } i = j. \end{aligned}$$

Em outras palavras, os vetores $\{\hat{b}(u_i(u))\}_{i=1}^{n(u)}$ e $\{\tilde{b}(u_i(u))\}_{i=1}^{n(u)}$ são biortogonais.

Se definirmos a função

$$\hat{K}_n(t, u) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{G_{k+1}(u, 0)t^{(n-1)-k}B_k(t)}{u\rho_k B_k(0)}, \quad (3.18)$$

teremos

$$\hat{l}_n(t, u) = \hat{\lambda}_n(u)\hat{K}_n(t, u).$$

Então,

$$\hat{K}_n(t, u) = \frac{1}{\hat{\lambda}_n(u)}\hat{l}_n(t, u) = \frac{G_n(t, u)}{\hat{\lambda}_n(u)G'_n(u, u)(t-u)}. \quad (3.19)$$

Comparando o termo constante de $\hat{K}_n(t, u)$ nas equações (3.18) e (3.19), vemos facilmente que

$$\hat{\lambda}_n(u)G'_n(u, u) = \rho_{n-1}.$$

Voltando, agora, à equação (3.19), teremos

$$\hat{K}_n(t, u) = \frac{1}{\rho_{n-1}} \frac{G_n(t, u)}{(t-u)}.$$

Daí, podemos concluir, também, que $\hat{K}_n(t, u)$ é uma função simétrica, isto é, $\hat{K}_n(t, u) = \hat{K}_n(u, t)$. Esse resultado decorre fundamentalmente da simetria da função $\frac{G_n(t, u)}{t-u}$.

Note, ainda, que

$$\hat{K}_n(u, u) = \frac{1}{\hat{\lambda}_n(u)}\hat{l}_n(u, u) = \frac{1}{\hat{\lambda}_n(u)}.$$

Como o polinômio de interpolação de Lagrange de $\hat{K}_n(t, \xi)$ coincide com ele mesmo, temos

$$\begin{aligned} \hat{K}_n(t, \xi) &= \sum_{i=1}^{n(u)} \hat{l}_n(t, u_i(u)) \hat{K}_n(u_i(u), \xi) \\ &= \sum_{i=1}^{n(u)} \hat{l}_n(t, u_i(u)) \hat{K}_n(\xi, u_i(u)) \\ &= \sum_{i=1}^{n(u)} \hat{l}_n(t, u_i(u)) \frac{\hat{l}_n(\xi, u_i(u))}{\hat{\lambda}_n(u_i(u))}. \end{aligned}$$

Note que, na equação acima, ξ é tomado como um número real qualquer, podendo inclusive ser diferente de u .

Finalmente, fazendo $t = \xi$ na equação anterior,

$$\frac{1}{\hat{\lambda}_n(\xi)} = K_n(\xi, \xi) = \sum_{i=1}^{n(u)} \frac{\{\hat{l}_n(\xi, u_i(u))\}^2}{\hat{\lambda}_n(u_i(u))}.$$

Observe que no segundo capítulo dessa dissertação, havíamos mostrado resultados semelhantes para o caso em que as funções $\psi_n(x, \xi)$ são combinações lineares dos polinômios ortogonais.

Capítulo 4

Convergência de Certas Fórmulas de Quadratura

Nos Capítulos 2 e 3, tratamos de várias propriedades das fórmulas de quadratura associadas aos polinômios ortogonais e similares. Neste capítulo, veremos como se comporta a convergência de certas fórmulas de quadratura de acordo com as respectivas escolhas dos nós em cada caso. Excelentes resultados podem ser obtidos se os nós forem escolhidos de maneira adequada (veja, por exemplo, [5], [18] e [19]). Trataremos também de propriedades assintóticas dos pesos e de casos onde não é possível garantir a convergência.

4.1 Fórmulas de Quadratura Interpolatórias Produto

Consideremos fórmulas de quadratura para aproximar integrais da forma

$$I(k, f) = \int_{-1}^1 k(x)f(x) dx,$$

onde $k(x)$ é Lebesgue integrável e $f(x)$ é Riemann integrável e preferencialmente suave. Assumiremos, também, que $k(x)$ e $f(x)$ são funções reais. Note que como $k(x)$ é Lebesgue integrável a integral acima representa a integral no sentido de Lebesgue.

Fórmulas de quadratura desse tipo foram introduzidas por Beard [3] e Young [25] e são da forma

$$I_n(k, f) = \sum_{i=1}^n w_{n,i}(k)f(x_{n,i}),$$

onde $\{x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n}\}$ é um conjunto de pontos distintos no intervalo $[-1, 1]$ e os pesos $w_{n,i}(k)$ são determinados de modo que a fórmula seja exata para $f \in \mathbb{P}_{n-1}$ e são dados por

$$w_{n,i}(k) = \int_{-1}^1 \frac{\pi(x)}{\pi'(x_{n,i})(x - x_{n,i})} k(x) dx. \quad (4.1)$$

Em (4.1), $\pi(x)$ é um polinômio cujos zeros são os nós $x_{n,i}$. Não há perda de generalidade em considerarmos o intervalo $[-1, 1]$, pois os resultados obtidos podem ser aplicados a qualquer intervalo $[a, b]$ através de uma transformação linear adequada. Além disso, sempre que nos referirmos a funções contínuas, estamos nos referindo ao espaço $C[-1, 1]$ das funções contínuas com relação à bem conhecida norma do máximo. Quando for necessário, usaremos espaços de funções contínuas com relação a outras normas. Porém, em cada caso, usaremos a notação adequada para não haver confusão.

Desejamos saber em que casos esta fórmula de quadratura converge para o verdadeiro valor da integral, ou seja, quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n w_{n,i}(k) f(x_{n,i}) = \int_{-1}^1 k(x) f(x) dx. \quad (4.2)$$

Outro caso interessante é a “propriedade companheira”,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)| f(x_{n,i}) = \int_{-1}^1 |k(x)| f(x) dx, \quad (4.3)$$

que também abordaremos em nosso estudo.

4.2 Resultados sobre Convergência

Nesta seção, apresentaremos um estudo mais detalhado sobre os resultados de Sloan e Smith [20]. Os dois primeiros teoremas mostram a propriedade de convergência (4.2) e a propriedade companheira (4.3). Os dois diferem somente pela escolha dos pontos $x_{n,i}$.

Antes de enunciarmos o primeiro teorema, faremos algumas considerações.

Consideremos uma sequência de polinômios ortogonais $\{P_m\}_{m=0}^{\infty}$ com relação a uma função peso w e sejam $x_{n,i}$, $i = 1, \dots, n$ os zeros de $P_n(x)$. Seja, ainda, a função $K(x)$

definida por

$$K(x) = \frac{k(x)}{w(x)}.$$

Da definição de K e da série de Fourier para o polinômio de interpolação de Lagrange L_n^f , temos que

$$\begin{aligned} I_n(k, f) &= \int_{-1}^1 k(x) L_n^f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{k(x)}{w(x)} L_n^f(x) w(x) dx \\ &= \sum_{\ell=0}^n c_{\ell, n} \int_{-1}^1 K(x) P_\ell(x) w(x) dx, \end{aligned}$$

onde

$$c_{\ell, n} = \frac{\int_{-1}^1 L_n^f(x) P_\ell(x) w(x) dx}{\int_{-1}^1 P_\ell(x) P_\ell(x) w(x) dx}, \quad \ell = 0, \dots, n.$$

Agora, como $L_n^f(x) P_\ell(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$, aplicando a fórmula de quadratura gaussiana, obtemos

$$\int_{-1}^1 L_n^f(x) P_\ell(x) w(x) dx = \sum_{j=1}^n \lambda_{n, j} L_n^f(x_{n, j}) P_\ell(x_{n, j}),$$

onde $\lambda_{n, j}$ são os pesos da fórmula de quadratura gaussiana. Assim, não haverá confusão com os pesos $w_{n, i}(k)$.

Agora, se $h_\ell = \int_{-1}^1 P_\ell(x) P_\ell(x) w(x) dx$ e $\alpha_\ell = \frac{1}{h_\ell} \int_{-1}^1 K(x) P_\ell(x) w(x) dx$, temos que

$$\begin{aligned} I_n(k, f) &= \sum_{\ell=0}^n c_{\ell, n} \alpha_\ell h_\ell = \sum_{\ell=0}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{n, j} f(x_{n, j}) P_\ell(x_{n, j}) \alpha_\ell \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_{n, j} f(x_{n, j}) \sum_{\ell=0}^n \alpha_\ell P_\ell(x_{n, j}) = \sum_{j=1}^n \lambda_{n, j} \sum_{\ell=0}^n \alpha_\ell P_\ell(x_{n, j}) f(x_{n, j}). \end{aligned}$$

Logo, se $f \in \mathbb{P}_{n-1}$,

$$\sum_{j=1}^n w_{n, j}(k) f(x_{n, j}) = \int_{-1}^1 k(x) f(x) dx = I_n(k, f) = \sum_{j=1}^n \lambda_{n, j} \sum_{\ell=0}^n \alpha_\ell P_\ell(x_{n, j}) f(x_{n, j}).$$

Escolhendo, então, $f \in \mathbb{P}_{n-1}$ tal que $f(x_{n, j}) = 1$, se $j = i$, e $f(x_{n, j}) = 0$, se $j \neq i$, temos que

$$w_{n, i}(k) = \lambda_{n, i} S_{n-1}^K(x_{n, i}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.4)$$

onde S_{n-1}^K é a $(n-1)$ -ésima soma parcial da série de Fourier da função K .

Teorema 4.2.1 *Seja P_n o n -ésimo polinômio da sequência de polinômios ortogonais $\{P_m\}_{m=0}^\infty$ no intervalo $[-1, 1]$ com relação a uma função peso w . Sejam, também, $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n}$ os zeros de P_n e k satisfazendo*

$$\int_{-1}^1 \frac{|k(x)|^2}{w(x)} dx < \infty. \quad (4.5)$$

Então, as igualdades (4.2) e (4.3) são válidas para toda função f limitada e Riemann integrável.

Demonstração: Seja $\tilde{k} \in L_1$. Consideremos a seguinte expressão

$$\sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)|f(x_{n,i}) - \int_{-1}^1 |k(x)|f(x) dx.$$

Somando-se e subtraindo-se $\left(\sum_{i=1}^n |w_{n,i}(\tilde{k})|f(x_{n,i}) + \int_{-1}^1 |\tilde{k}(x)|f(x) dx \right)$ na expressão acima e usando a desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)|f(x_{n,i}) - \int_{-1}^1 |k(x)|f(x) dx \right| &\leq \sum_{i=1}^n \left| |w_{n,i}(k)| - |w_{n,i}(\tilde{k})| \right| |f(x_{n,i})| \\ &\quad + \int_{-1}^1 \left| |\tilde{k}(x)| - |k(x)| \right| |f(x)| dx \\ &\quad + \left| \sum_{i=1}^n |w_{n,i}(\tilde{k})|f(x_{n,i}) - \int_{-1}^1 |\tilde{k}(x)|f(x) dx \right|. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Como mostramos em (4.4), se $K(x) = \frac{k(x)}{w(x)}$

$$w_{n,i}(k) = \lambda_{n,i} S_{n-1}^K(x_{n,i}). \quad (4.7)$$

Se os polinômios P_n são tais que

$$\int_{-1}^1 P_i(x)P_j(x)w(x) dx = h_j \delta_{ij},$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, podemos escrever

$$S_{n-1}^K(x) = \sum_{j=1}^n b_j^K P_j(x),$$

com

$$b_j^K = \frac{1}{h_j} \int_{-1}^1 K(x)P_j(x)w(x) dx.$$

Agora, seja \tilde{K} um polinômio de grau m . Defina \tilde{k} por $\tilde{k}(x) = \tilde{K}(x)w(x)$. Da própria definição de $S_{n-1}^{\tilde{K}}(x)$ e como $\{P_0, P_1, \dots, P_m\}$ é uma base para \mathbb{P}_m , segue que, para $n > m$,

$$S_{n-1}^{\tilde{K}}(x) = \tilde{K}(x).$$

Usando o mesmo raciocínio anterior, para $m = n$ temos

$$S_{n-1}^{\tilde{K}}(x) = \tilde{K}(x) - b_n^{\tilde{K}}P_n(x).$$

Portanto, aplicando (4.7) para \tilde{k} e \tilde{K} obtemos

$$w_{n,i}(\tilde{k}) = \lambda_{ni}\tilde{K}(x_{n,i}), \quad \text{para } n \geq m.$$

Agora, como $w_{n,i}$ é linear em k , temos

$$\left| |w_{n,i}(k)| - |w_{n,i}(\tilde{k})| \right| \leq |w_{n,i}(k) - w_{n,i}(\tilde{k})| = |w_{n,i}(k - \tilde{k})|.$$

Além disso, como f é limitada, temos que $|f| \leq M(f)$ e, portanto, (4.6) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)|f(x_{n,i}) - \int_{-1}^1 |k(x)|f(x) dx \right| &\leq M(f) \int_{-1}^1 |\tilde{k}(x) - k(x)| dx \\ &\quad + M(f) \sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k - \tilde{k})| \\ &\quad + \left| \sum_{i=1}^n |w_{n,i}(\tilde{k})|f(x_{n,i}) - \int_{-1}^1 |\tilde{k}(x)|f(x) dx \right|. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Para $n \geq m$, a desigualdade acima se torna

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)|f(x_{n,i}) - \int_{-1}^1 |k(x)|f(x) dx \right| &\leq M(f) \int_{-1}^1 |\tilde{K}(x) - K(x)|w(x) dx \\ &\quad + M(f) \sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} |S_{n-1}^{K-\tilde{K}}(x_{n,i})| \\ &\quad + \left| \sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} \tilde{K}(x) f(x_{n,i}) - \int_{-1}^1 |\tilde{K}(x)|f(x)w(x) dx \right|. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Usando, agora, a bem conhecida desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\int_{-1}^1 |\tilde{K}(x) - K(x)|w(x) dx \leq \left[\int_{-1}^1 w(x) dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-1}^1 |\tilde{K}(x) - K(x)|^2 w(x) dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

ou, ainda,

$$\int_{-1}^1 |\tilde{K}(x) - K(x)|w(x) dx \leq c(w) \left\| \tilde{K} - K \right\|_{2,w}, \quad (4.10)$$

onde $c(w) = \|1\|_{2,w}$ e

$$\|g\|_{2,w} = \left[\int_{-1}^1 |g(x)|^2 w(x) dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Agora, como $S_{n-1}^{K-\tilde{K}}(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$, temos que a fórmula de quadratura gaussiana será exata e, portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} |S_{n-1}^{K-\tilde{K}}(x_{n,i})| &\leq \left[\sum_{i=1}^n (\sqrt{\lambda_{n,i}})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^n \left(\sqrt{\lambda_{n,i}} S_{n-1}^{K-\tilde{K}}(x_{n,i}) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} S_{n-1}^{K-\tilde{K}}(x_{n,i})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\int_{-1}^1 w(x) dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-1}^1 \left(S_{n-1}^{K-\tilde{K}}(x) \right)^2 w(x) dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= c(w) \left\| S_{n-1}^{K-\tilde{K}} \right\|_{2,w}. \end{aligned}$$

Da bem conhecida desigualdade de Bessel (veja [17]), obtemos

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{n,i} |S_{n-1}^{K-\tilde{K}}(x_{n,i})| \leq c(w) \left\| S_{n-1}^{K-\tilde{K}} \right\|_{2,w} \leq c(w) \left\| K - \tilde{K} \right\|_{2,w}. \quad (4.11)$$

Note que, em (4.6), limitamos os dois primeiros termos por $M(f)c(w) \left\| K - \tilde{K} \right\|_{2,w}$ através das desigualdades (4.10) e (4.11).

Assim, como $\|K\|_{2,w} < \infty$ por hipótese e, além disso o conjunto dos polinômios é denso no espaço das funções mensuráveis g tais que $\|g\|_{2,w} < \infty$, dado $\epsilon > 0$ sempre podemos obter \tilde{K} tal que $\left\| K - \tilde{K} \right\|_{2,w} < \epsilon$.

Resta-nos mostrar, agora, que o último termo em (4.6) pode ser feito arbitrariamente pequeno para n suficientemente grande e \tilde{K} um polinômio fixo.

Podemos notar que o último termo em (4.6) é simplesmente o erro na fórmula de quadratura gaussiana aplicada à integral $\int_{-1}^1 |\tilde{K}(x)|f(x)w(x) dx$.

Agora, é bem conhecido (veja [21], Teorema 15.2.3) que se uma função for limitada e Riemann-Stieltjes integrável com relação à medida $w(x)dx$, então o erro na fórmula de quadratura gaussiana converge para zero quando $n \rightarrow \infty$. Precisamos mostrar, então, que $|\tilde{K}(x)|f(x)$ é limitada e Riemann-Stieltjes integrável.

Obviamente $|\tilde{K}(x)|f(x)$ é limitada, pois f é limitada por hipótese e \tilde{K} é uma função contínua (polinômio) definida no compacto $[-1, 1]$.

Como, por hipótese, f é Riemann integrável temos que o conjunto dos pontos de descontinuidade de f , que denotamos por $D(f)$, tem medida nula. Mas, $w \in L_1(-1, 1)$ e, então

$$\int_{D(f)} w(x) dx = 0.$$

Da equação acima e do Teorema 1.3.2, temos que f e, portanto, $|\tilde{K}(x)|f(x)$ é Riemann-Stieltjes integrável com relação à medida $w(x)dx$.

Com isso, provamos (4.3). A prova de (4.2) é análoga. ■

Note que o teorema acima nos fornece uma relação entre a escolha dos pontos que são zeros de polinômios ortogonais e as respectivas funções $k(x)$ para as quais podemos garantir as propriedades de convergência não somente para funções contínuas, mas também para toda função limitada e Riemann integrável.

O próximo teorema nos mostra outras escolhas e também estabelece condições para a função $k(x)$ a fim de garantir convergência.

Façamos, antes, um estudo de como se comportam os pesos $w_{n,i}$ se escolhermos os pontos $x_{n,i}$ tais que

$$x_{n,i} = \cos \left[\left(\frac{i-1}{n-1} \right) \pi \right], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Usaremos a bem conhecida relação de ortogonalidade

$$\sum_{j=0}^{n-1''} \cos \left[\left(\frac{i-1}{n-1} \right) j\pi \right] \cos \left[\left(\frac{\ell-1}{n-1} \right) j\pi \right] = \frac{n-1}{2} \frac{\delta_{i\ell}}{\alpha_{ni}}, \quad i, \ell = 1, \dots, n, \quad (4.12)$$

com $\alpha_{ni} = 1$ se $1 < i < n$ e $\alpha_{n1} = \alpha_{nn} = \frac{1}{2}$, sendo $\delta_{i\ell}$ o delta de Kronecker.

Pela relação acima, podemos concluir que

$$L_n^f(x) = \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-1''} \cos \left(\frac{i-1}{n-1} j\pi \right) \cos jx f(x_{n,i}), \quad (4.13)$$

onde \sum'' significa que o primeiro e o último termo da soma são divididos por 2.

De fato, se fizermos

$$p(x) = \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{n-1''} \cos \left(\frac{i-1}{n-1} j\pi \right) \cos jx f(x_{n,i}),$$

de (4.12) temos claramente que

$$p(x_{n,\ell}) = f(x_{n,\ell}), \quad \ell = 1, \dots, n,$$

ou seja,

$$p(x_{n,\ell}) = L_n^f(x_{n,\ell}) \quad \ell = 1, 2, \dots, n.$$

Logo, como $L_n^f(x)$ e $p(x)$ são ambos polinômios de grau $n-1$, segue que

$$L_n^f(x) \equiv p(x).$$

Assim, como $I_n(k, f) = \int_{-1}^1 k(x) L_n^f(x) dx$, temos, por (4.13), que

$$I_n(k, f) = \sum_{i=1}^n w_{n,i}(k) f(x_{n,i}),$$

onde

$$w_{n,i}(k) = \frac{2}{n-1} \alpha_{n,i} \sum_{j=0}^{n-1''} a_j \cos \left(j \frac{i-1}{n-1} \pi \right) \quad (4.14)$$

e

$$a_j = \int_{-1}^1 k(x) T_j(x) dx, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq n-1. \quad (4.15)$$

Os polinômios $T_n(x)$ são definidos por $T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x)$, $-1 \leq x \leq 1$, e são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ com relação à função peso $w(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Esses são os polinômios de Chebyshev de primeira espécie.

Teorema 4.2.2 *Para $i = 1, \dots, n$, sejam $x_{n,i}$, dados por*

$$x_{n,i} = \cos \left[\left(\frac{2i-1}{2n} \right) \pi \right], \quad (4.16)$$

$$x_{n,i} = \cos \left[\left(\frac{i-1}{n-1} \right) \pi \right], \quad (4.17)$$

ou

$$x_{n,i} = \cos \left[\left(\frac{2i-2}{2n-1} \right) \pi \right]. \quad (4.18)$$

Além disso, seja k satisfazendo

$$\int_{-1}^1 |k(x)|^p dx < \infty \quad (4.19)$$

para algum $p > 1$. Então, (4.2) e (4.3) são válidas para toda função f limitada e Riemann-integrável.

Demonstração: A demonstração para cada um dos conjuntos de pontos é análoga. Faremos aqui o caso (4.17), sendo que as modificações técnicas necessárias para se fazer os outros casos podem ser encontradas em [19].

Se k satisfaz (4.19) para algum $p > 1$, podemos definir uma função K periódica de período 2π e par, da seguinte forma:

$$K(\theta) = \frac{\pi}{2} k(\cos(\theta)) |\sin(\theta)|,$$

cujos coeficientes da série de Fourier em termos de cosenos são dados por

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(\theta) \cos(j\theta) d\theta, \quad j \geq 0.$$

Temos claramente que $\|K\|_p < \infty$, pois

$$\begin{aligned} \|K\|_p &= \left[\int_0^{2\pi} |K(\theta)|^p d\theta \right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_0^{2\pi} |k(\cos(\theta))|^p |\text{sen}(\theta)|^p d\theta \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left[\int_0^{2\pi} |k(\cos(\theta))|^p |\text{sen}(\theta)| d\theta \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \left[\int_0^\pi |k(\cos(\theta))|^p |\text{sen}(\theta)| d\theta + \int_\pi^{2\pi} |k(\cos(\theta))|^p |\text{sen}(\theta)| d\theta \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \left[2 \int_{-1}^1 |k(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} < \infty. \end{aligned}$$

Utilizando, então, as equações (4.14) e (4.15), obtemos

$$w_{n,i}(k) = \frac{2\alpha_{ni}}{n-1} S_{n-1}^K(\theta_{ni}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.20)$$

onde

$$\alpha_{n1} = \alpha_{nn} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_{ni} = 1, \quad \theta_{ni} = \left(\frac{i-1}{n-1} \right) \pi, \quad i = 2, \dots, n,$$

e

$$S_{n-1}^K(\theta) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \theta + \dots + \frac{a_{n-1}}{2} \cos(n-1)\theta.$$

Agora, seja \tilde{K} um polinômio trigonométrico de grau m definido em termos de cosenos, e seja $\tilde{k} \in L_1(-1, 1)$ definida por

$$\tilde{k}(x) = \frac{2}{\pi} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \tilde{K}(\cos^{-1} x).$$

Logo,

$$\tilde{K}(\theta) = \frac{\pi}{2} \tilde{k}(\cos \theta) |\text{sen} \theta|.$$

Portanto, para $n \geq m+2$, usando um raciocínio análogo ao da demonstração anterior temos

$$S_{n-1}^{\tilde{K}}(\theta) = \tilde{K}(\theta).$$

Da igualdade (4.20), obtemos

$$w_{n,i}(\tilde{k}) = \frac{2\alpha_{ni}}{n-1} \tilde{K}(\theta_{ni}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad n \geq m+2.$$

Fazendo a substituição $x = \cos \theta$ e usando o fato de $|\tilde{K}(\theta) - K(\theta)|$ ser par e periódica de período 2π , temos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |\tilde{k}(x) - k(x)| dx &= \int_0^\pi |\tilde{k}(\cos \theta) - k(\cos \theta)| \sin \theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\tilde{K}(\theta) - K(\theta)| d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\tilde{K}(\theta) - K(\theta)| d\theta. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Temos, também, que

$$\sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k - \tilde{k})| = \sum_{i=1}^n \frac{2\alpha_{n,i}}{n-1} |S_{n-1}^{K-\tilde{K}}(\theta_{ni})|.$$

Agora, como $\cos \theta = \cos(2\pi - \theta)$, temos $S_{n-1}^{K-\tilde{K}}(\theta_{n,i}) = S_{n-1}^{K-\tilde{K}}(\theta_{n,2n-i})$ e, portanto,

$$\sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k - \tilde{k})| = \sum_{i=1}^n \frac{2\alpha_{n,i}}{n-1} |S_{n-1}^{K-\tilde{K}}(\theta_{n,i})| = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{2n-2} |S_{n-1}^{K-\tilde{K}}(\theta_{n,i})|. \quad (4.22)$$

Para $n \geq m + 2$, temos ainda que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n |w_{n,i}(\tilde{k})| f(x_{n,i}) - \int_{-1}^1 |\tilde{k}(x)| f(x) dx \right| &= \left| \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{2n-2} |S_{n-1}^{\tilde{K}}(\theta_{n,i})| f(\cos \theta_{n,i}) - \int_0^\pi |\tilde{k}(\cos \theta)| f(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right| \\ &= \left| \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{2n-2} |\tilde{K}(\theta_{n,i})| f(\cos \theta_{n,i}) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\tilde{K}(\theta)| f(\cos \theta) d\theta \right|. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Usando a desigualdade (4.8) juntamente com as equações (4.21), (4.22) e (4.23), obtemos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)| f(x_{n,i}) - \int_{-1}^1 |k(x)| f(x) dx \right| &\leq M(f) \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\tilde{K}(\theta) - K(\theta)| d\theta \\ &\quad + M(f) \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{2n-2} |S_{n-1}^{K-\tilde{K}}(\theta_{n,i})| \\ &\quad + \left| \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{2n-2} |\tilde{K}(\theta_{n,i})| f(\cos \theta_{n,i}) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\tilde{K}(\theta)| f(\cos \theta) d\theta \right|. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Agora, aplicando a desigualdade de Hölder, temos

$$\int_0^{2\pi} |\tilde{K}(\theta) - K(\theta)| d\theta \leq \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_0^{2\pi} |\tilde{K}(\theta) - K(\theta)|^p d\theta \right]^{\frac{1}{p}} = A \left\| \tilde{K} - K \right\|_p,$$

onde A depende somente de p (pois q depende de p .)

Para majorarmos o segundo termo de (4.24), usaremos a desigualdade (1.8) que nos diz que se S é um polinômio trigonométrico de grau menor que n , então

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{2n-2} |S(\theta_{n,i})| \leq A_1 \|S\|_1 \leq A_2 \|S\|_p,$$

onde A_1 e A_2 são constantes independentes de S e n . Note que a segunda desigualdade é uma conseqüência natural da desigualdade de Hölder.

Portanto, aplicando (1.8) e o Teorema 1.4.2, obtemos

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{2n-2} |S_{n-1}^{K-\tilde{K}}(\theta_{n,i})| \leq A_2 \left\| S_{n-1}^{K-\tilde{K}} \right\|_p \leq A_3 \left\| K - \tilde{K} \right\|_p.$$

Conseguimos, assim, majorar os dois primeiros termos em (4.24) por múltiplos de $\left\| K - \tilde{K} \right\|_p$, que podem ser feitos arbitrariamente pequenos através da escolha adequada do polinômio trigonométrico \tilde{K} .

Agora, o último termo em (4.24) é exatamente o erro da regra do trapézio para a integral $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} |\tilde{K}(\theta)| f(\cos \theta) d\theta$ e, portanto, converge para zero quando $n \rightarrow \infty$, pois f é Riemann integrável.

Portanto, (4.3) está demonstrado. A demonstração de (4.2) é análoga. ■

Denotemos o erro nas fórmulas de quadratura produto por $\tilde{\mathbb{E}}_n(k, f) = I(k, f) - I_n(k, f)$. Usaremos, no teorema seguinte, $E_{n-1}(f)$ para denotar o erro da melhor aproximação uniforme de f por um polinômio de grau menor ou igual a $n - 1$, ou seja,

$$E_{n-1}(f) = \min_{p \in \mathbb{P}_{n-1}} \|f - p\|_\infty.$$

O próximo teorema a ser abordado em nosso estudo, nos fornece um limitante para o erro e pode ser aplicado a qualquer fórmula de quadratura produto independentemente de como os pontos $\{x_{n,i}\}$ forem escolhidos.

Teorema 4.2.3 *Sejam $\{x_{n,1}, \dots, x_{n,n}\}$ um conjunto de pontos, $k \in L_1$ e $f \in C[-1, 1]$. Então, o erro na fórmula de quadratura produto satisfaz*

$$|\tilde{\mathbb{E}}_n(k, f)| \leq \left(\sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)| + \int_{-1}^1 |k(x)| dx \right) E_{n-1}(f).$$

Demonstração: Como a fórmula de quadratura produto $I_n(k, f)$ é exata se f é um polinômio de grau menor que n , segue que

$$\tilde{\mathbb{E}}_n(k, f) = I(k, f) - I(k, p) + I_n(k, p) - I_n(k, f) = I(k, f - p) - I_n(k, f - p),$$

onde $p \in \mathbb{P}_{n-1}$. Então,

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathbb{E}}_n(k, f)| &= \left| \int_{-1}^1 k(x)(f(x) - p(x)) dx - \sum_{i=1}^n w_{n,i}(k)(f(x_{n,i}) - p(x_{n,i})) \right| \\ &\leq \int_{-1}^1 |k(x)| |f(x) - p(x)| dx + \sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)| |f(x_{n,i}) - p(x_{n,i})| \\ &\leq \int_{-1}^1 |k(x)| \|f - p\|_\infty dx + \sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)| \|f - p\|_\infty \\ &= \left(\sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)| + \int_{-1}^1 |k(x)| dx \right) \|f - p\|_\infty. \end{aligned}$$

Como a desigualdade acima vale para qualquer polinômio de grau menor que n , o resultado segue tomando-se p a melhor aproximação para f , que sabemos sempre existir (veja, por exemplo, [16]). ■

Corolário 4.2.1 *Sejam $\{x_{n1}, \dots, x_{nn}\}$ um conjunto de pontos e $k \in L_1$ tal que (4.2) é válida para toda função contínua f . Então,*

$$|\tilde{\mathbb{E}}_n(k, f)| \leq c(k)E_{n-1}(f),$$

onde $c(k)$ é um número positivo independente de n e f .

Demonstração: Se (4.2) é válida para toda função contínua, então um resultado de Pólya nos garante a existência do supremo dado por

$$c(k) = \sup_n \left(\sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)| + \int_{-1}^1 |k(x)| dx \right).$$

Portanto,

$$|\tilde{\mathbb{E}}_n(k, f)| \leq \left(\sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)| + \int_{-1}^1 |k(x)| dx \right) E_{n-1}(f) \leq c(k)E_{n-1}(f). \quad \blacksquare$$

Corolário 4.2.2 *Sejam os pontos $x_{n,i}$ escolhidos como nos Teoremas 4.2.1 e 4.2.2. Então,*

$$|\tilde{\mathbb{E}}_n(k, f)| \leq \left(2 \int_{-1}^1 |k(x)| dx + \epsilon_n \right) E_{n-1}(f),$$

onde $\epsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Demonstração: Tome

$$\epsilon_n = \sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)| - \int_{-1}^1 |k(x)| dx.$$

Pelo Teorema 4.2.3,

$$|\tilde{\mathbb{E}}_n(k, f)| \leq \left(\sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)| + \int_{-1}^1 |k(x)| dx \right) E_{n-1}(f) = \left(2 \int_{-1}^1 |k(x)| dx + \epsilon_n \right) E_{n-1}(f).$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)| f(x_{n,i}) = \int_{-1}^1 |k(x)| f(x) dx$, se escolhermos $f(x) = 1$, temos que $\epsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. ■

Daremos, agora, algumas definições básicas necessárias à compreensão de resultados posteriores.

Definição 4.2.1 *Seja ρ uma função mensurável e não negativa que se anula somente em um conjunto de medida nula. $L_q^{(\rho)}$ é definido para $1 \leq q \leq \infty$ como sendo o espaço das funções mensuráveis g tais que*

$$\|g\|_q^{(\rho)} = \|g\rho\|_q < \infty.$$

Definição 4.2.2 *Seja $L_n : C[-1, 1] \rightarrow L_q^{(\rho)}$ um operador linear que leva f em L_n^f . Definimos sua norma por*

$$\|L_n\|_{\infty, q}^{(\rho)} = \sup_{f \in C[-1, 1]} \frac{\|L_n^f\|_q^{(\rho)}}{\|f\|_\infty}.$$

Observe que $L_p^{(\frac{1}{\rho})} \subset L_1$, pois se $g \in L_p^{(\frac{1}{\rho})}$, então pela desigualdade de Hölder, temos

$$\|g\|_1 = \left\| \frac{g}{\rho} \right\|_1 \leq \left\| \frac{g}{\rho} \right\|_p \|\rho\|_q < \infty.$$

Lema 4.2.1 *Seja $\{x_{n,1}, \dots, x_{n,n}\}$ um conjunto de pontos dados e $1 \leq p \leq \infty$ um número fixo. Seja, também, $\rho \in L_q$ uma função não negativa que se anula em, no máximo, um conjunto de medida nula. Então,*

$$\sup_{k \in L_p^{(\frac{1}{\rho})}} \frac{\sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)|}{\|k\|_p^{(\frac{1}{\rho})}} = \|L_n\|_{\infty, q}^{(\rho)}.$$

Demonstração: Temos que

$$\frac{|\sum_{i=1}^n w_{n,i}(k)f(x_{n,i})|}{\|f\|_{\infty}} \leq \sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)| \frac{|f(x_{n,i})|}{\|f\|_{\infty}} \leq \sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)|.$$

Agora, claramente podemos obter $f_0 \in C[-1, 1]$ tal que

$$f_0(x_{n,i}) = \|f_0\|_{\infty} \text{ sinal}(w_{n,i}(k)) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Assim,

$$\frac{|\sum_{i=1}^n w_{n,i}(k)f_0(x_{n,i})|}{\|f_0\|_{\infty}} = \frac{\sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)f_0(x_{n,i})|}{\|f_0\|_{\infty}} = \sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)|$$

e, portanto,

$$\sup_{f \in C[-1,1]} \frac{\left| \int_{-1}^1 k(x)L_n^f(x)dx \right|}{\|f\|_{\infty}} = \sup_{f \in C[-1,1]} \frac{|\sum_{i=1}^n w_{n,i}(k)f(x_{n,i})|}{\|f\|_{\infty}} = \sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)|.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \sup_{k \in L_p^{(\frac{1}{\rho})}} \frac{\sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)|}{\|k\|_p^{(\frac{1}{\rho})}} &= \sup_{k \in L_p^{(\frac{1}{\rho})}} \frac{1}{\left\| \frac{k}{\rho} \right\|_p} \sup_{f \in C[-1,1]} \frac{\left| \int_{-1}^1 k(x)L_n^f(x)dx \right|}{\|f\|_{\infty}} \\ &= \sup_{f \in C[-1,1]} \frac{1}{\|f\|_{\infty}} \sup_{k \in L_p^{(\frac{1}{\rho})}} \frac{\left| \int_{-1}^1 k(x)L_n^f(x)dx \right|}{\left\| \frac{k}{\rho} \right\|_p} \\ &= \sup_{f \in C[-1,1]} \frac{1}{\|f\|_{\infty}} \sup_{k \in L_p^{(\frac{1}{\rho})}} \frac{\left| \int_{-1}^1 \frac{k(x)}{\rho(x)} L_n^f(x) \rho(x) dx \right|}{\left\| \frac{k}{\rho} \right\|_p} \\ &= \sup_{f \in C[-1,1]} \frac{1}{\|f\|_{\infty}} \sup_{G \in L_p} \frac{\left| \int_{-1}^1 G(x)L_n^f(x) \rho(x) dx \right|}{\|G\|_p} \\ &= \sup_{f \in C[-1,1]} \frac{\|L_n^f \rho\|_q}{\|f\|_{\infty}} = \|L_n\|_{\infty, q}^{\rho}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

O próximo teorema também nos fornece, além da garantia de convergência da fórmula produto em determinados casos, um limitante para o erro. Este teorema, além de nos dar uma boa caracterização de convergência, também será de grande utilidade na demonstração do resultado seguinte.

Teorema 4.2.4 *Seja $\{x_{n,1}, \dots, x_{n,n}\}$ dado, e seja $1 \leq p \leq \infty$ um número fixo. Além disso, seja $\rho \in L_q$ uma função mensurável não negativa que se anula no máximo em um conjunto de medida nula.*

(i) *Se $f \in C[-1, 1]$ e $k \in L_p^{(\frac{1}{\rho})} \subseteq L_1$, então*

$$|\tilde{\mathbb{E}}_n(k, f)| \leq \left(\|k\|_p^{(\frac{1}{\rho})} \|L_n\|_{\infty, q}^{(\rho)} + \|k\|_1 \right) E_{n-1}(f).$$

(ii) *$I_n(k, f)$ converge para $I(k, f)$, para toda função contínua f e toda função $k \in L_p^{(\frac{1}{\rho})}$ se, e somente se, $\sup_n \|L_n\|_{\infty, q}^{(\rho)} < \infty$.*

Demonstração:

(i) Usando o lema anterior, temos que

$$\frac{\sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)|}{\|k\|_p^{(\frac{1}{\rho})}} \leq \|L_n\|_{\infty, q}^{(\rho)}, \quad \forall k \in L_p^{(\frac{1}{\rho})},$$

ou ainda,

$$\sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)| \leq \|k\|_p^{(\frac{1}{\rho})} \|L_n\|_{\infty, q}^{(\rho)}, \quad \forall k \in L_p^{(\frac{1}{\rho})}.$$

Da desigualdade acima e do Teorema 4.2.3, obtemos

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathbb{E}}_n(k, f)| &\leq \left(\sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)| + \int_{-1}^1 |k(x)| dx \right) E_{n-1}(f) \\ &\leq \left(\|k\|_p^{(\frac{1}{\rho})} \|L_n\|_{\infty, q}^{(\rho)} + \|k\|_1 \right) E_{n-1}(f). \end{aligned}$$

(ii)

(\Leftarrow) Suponha $f \in C[-1, 1]$, $k \in L_p^{(\frac{1}{\rho})} \subseteq L_1$ e $\sup_n \|L_n\|_{\infty, q}^{(\rho)} < \infty$.

Logo, de (i) e do Teorema de Weierstrass, temos que $I_n(k, f) \rightarrow I(k, f)$ quando $n \rightarrow \infty$, pois

$$|I_n(k, f) - I(k, f)| \leq \left(\|k\|_p^{(\frac{1}{\rho})} \|L_n\|_{\infty, q}^{(\rho)} + \|k\|_1 \right) \min_{p \in \mathbb{P}_{n-1}} \|f - p\|_{\infty}.$$

(\Rightarrow) Suponhamos, agora, que $I_n(k, f) \rightarrow I(k, f)$, $\forall f \in C[-1, 1]$ e $\forall k \in L_p^{(\frac{1}{\rho})}$. Para uma função $k \in L_p^{(\frac{1}{\rho})}$ fixa, temos uma seqüência $\{I_n(k, \cdot)\}$ de funcionais lineares limitados e definidos em $C[-1, 1]$ por

$$[I_n(k, \cdot)](f) = \int_{-1}^1 k(x)L_n^f(x)dx,$$

com norma dada por

$$\|I_n(k, \cdot)\| = \sup_{f \in C[-1,1]} \frac{\left| \int_{-1}^1 k(x)L_n^f(x)dx \right|}{\|f\|_\infty} = \sum_{i=1}^n |w_{n,i}(k)|, \quad n \geq 1. \quad (4.25)$$

Assim, do Teorema da Limitação Uniforme, segue que existe $M(k) < \infty$ tal que

$$\|I_n(k, \cdot)\| \leq M(k), \quad n \geq 1. \quad (4.26)$$

Note que este fato acontece para toda função $k \in L_p^{(\frac{1}{\rho})}$. Usando novamente o lema anterior e, também, (4.25), temos

$$\sup_{k \in L_p^{(\frac{1}{\rho})}} \frac{\|I_n(k, \cdot)\|}{\|k\|_p^{(\frac{1}{\rho})}} = \|L_n\|_{\infty, q}^{(\rho)}. \quad (4.27)$$

Considere, agora, a aplicação linear limitada ϕ_n que associa a cada função k de $L_p^{(\frac{1}{\rho})}$ o funcional linear $I_n(k, \cdot)$ do espaço dos funcionais lineares limitados em $C[-1, 1]$.

Por (4.27), segue que

$$\|\phi_n\| = \|L_n\|_{\infty, q}^{(\rho)}.$$

Usando o Teorema da Limitação Uniforme para a seqüência ϕ_n e a equação (4.26), temos que existe $\tilde{M} < \infty$ tal que $\|\phi_n\| < \tilde{M}$, ou seja, $\|L_n\|_{\infty, q}^{(\rho)} < \tilde{M} \quad \forall n$. Portanto,

$$\sup_n \|L_n\|_{\infty, q}^{(\rho)} < \infty.$$

■

Observação 4.2.1 *Segue, do Teorema da Limitação Uniforme e de argumentos usuais, que a propriedade $\sup_n \|L_n\|_{\infty, q}^{(\rho)} < \infty$ vale se, e somente se,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(L_n^f - f)\rho\|_q = 0$$

para toda função contínua f (veja [20]).

O último resultado que abordaremos neste trabalho nos traz uma caracterização de convergência das fórmulas de quadratura produto quando tomamos, como conjunto de pontos, os zeros dos polinômios de Jacobi. Este resultado nos fornece, ainda, um contra-exemplo para a convergência da fórmula quando $p = 1$.

Porém, antes, façamos algumas considerações sobre um resultado de Nevai [10], que nos fornece algumas majorações necessárias à demonstração do próximo teorema.

Se $w^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, com $\alpha, \beta > -1$, escrevemos $w(x) \sim w^{(\alpha,\beta)}(x)$ se o quociente $w(x)/w^{(\alpha,\beta)}(x)$ estiver entre duas constantes positivas para todo x . Diremos, também, que w é uma função peso generalizada de Jacobi, e escreveremos $w \approx w^{(\alpha,\beta)}$, se $w(x) \sim w^{(\alpha,\beta)}(x)$, $w/w^{(\alpha,\beta)} \in C[-1, 1]$ e o módulo de continuidade $\omega(\delta)$ de $w/w^{(\alpha,\beta)}$ satisfizer a condição

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta} d\delta < \infty,$$

onde o módulo de continuidade $\omega(\delta)$ de uma função f é dado por

$$\omega(\delta) = \sup_{|x-y| \leq \delta} |f(x) - f(y)|.$$

Podemos, agora, enunciar o teorema dado por Nevai.

Teorema 4.2.5 *Seja $w \approx w^{(\alpha,\beta)}$ e $v = uw^{(a,b)}$. Suponha que $L_n^f \rightarrow f$ quando $n \rightarrow \infty$ em C_v^p , para toda função $f \in C[-1, 1]$. Se $\alpha > -\frac{1}{2}$ e u^{-1} é limitada em uma vizinhança de 1, então necessariamente, $p \leq 4(a+1)/(2\alpha+1)$ e, da mesma forma, se $\beta > -\frac{1}{2}$ e u^{-1} é limitada em uma vizinhança de -1, então $p \leq 4(b+1)/(2\beta+1)$.*

Aqui, C_v^p indica o espaço das funções contínuas f com relação à norma dada por

$$\|f\|_{v,p} = \left\{ \int_{-1}^1 |f(t)|^p v(t) dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Não daremos a demonstração do resultado acima, que pode ser encontrada em [10].

Nosso objetivo, agora, é demonstrar o teorema seguinte.

Teorema 4.2.6 *Sejam $\alpha, \beta > -1$ dados e $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,n}$ os zeros dos polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$.*

(i) *Se a e b são números não negativos dados, tais que $I_n(k, f)$ converge para $I(k, f)$ para todo k satisfazendo*

$$\int_{-1}^1 |k(x)(1-x)^{-a}(1+x)^{-b}|^p dx < \infty, \quad (4.28)$$

para algum $p > 1$ e toda função contínua f , então

$$a \geq \max \left[\frac{2\alpha + 1}{4}, 0 \right] \quad e \quad b \geq \max \left[\frac{2\beta + 1}{4}, 0 \right].$$

(ii) Existem $f \in C[-1, 1]$ e $k \in L_1$ satisfazendo

$$\int_{-1}^1 \left| k(x)(1-x)^{-\max[\frac{2\alpha+1}{4}, 0]}(1+x)^{-\max[\frac{2\beta+1}{4}, 0]} \right| dx < \infty, \quad (4.29)$$

tal que $I_n(k, f)$ não converge para $I(k, f)$.

Demonstração: (i) Escolhamos um número arbitrário $1 < p_0 < \infty$. Pelas hipóteses do teorema, temos que $I_n(k, f)$ converge para $I(k, f)$ para toda função contínua f e toda função k satisfazendo (4.28) com $p = p_0$. Assim, pelo Teorema 4.2.4, temos que $\sup_n \|L_n\|_{\infty q_0}^{(\rho)} < \infty$, onde

$$\frac{1}{q_0} + \frac{1}{p_0} = 1 \quad e \quad \rho^{(a,b)}(x) = (1-x)^a(1+x)^b.$$

Da Observação 4.2.1, concluímos, então, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(L_n^f - f)\rho^{(a,b)}\|_{q_0} = 0,$$

para toda função contínua em $C[-1, 1]$.

Usando, agora, o teorema anterior para $v(x) = (1-x)^{q_0 a}(1+x)^{q_0 b}$, segue que se $\alpha > -\frac{1}{2}$, então

$$q_0 \leq 4 \frac{q_0 a + 1}{2\alpha + 1}$$

ou, ainda,

$$a \geq \frac{2\alpha + 1}{4} - \frac{(p_0 - 1)}{p_0}. \quad (4.30)$$

Como (4.30) acontece para $p_0 > 1$ arbitrário, passando ao limite quando $p_0 \rightarrow 1$, podemos concluir que

$$a \geq \frac{2\alpha + 1}{4}.$$

Por outro lado, $a \geq 0$ por hipótese e, portanto, para todo $\alpha > -\frac{1}{2}$, temos

$$a \geq \max \left[\frac{2\alpha + 1}{4}, 0 \right].$$

Agora, facilmente vemos que, se $-1 < \alpha \leq -\frac{1}{2}$, a equação acima se verifica pois, neste caso, teremos

$$\max \left[\frac{2\alpha + 1}{4}, 0 \right] = 0.$$

Analogamente,

$$b \geq \max \left[\frac{2\beta + 1}{4}, 0 \right].$$

(ii) Suponhamos que $I_n(k, f) \rightarrow I(k, f)$ para toda função $f \in C[-1, 1]$ e para toda função k satisfazendo (4.29). Então, do Teorema 4.2.4(ii) e da Observação 4.2.1, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(L_n^f - f)\rho^{(a,b)}\|_\infty = 0, \quad \forall f \in C[-1, 1]$$

onde $\rho(x) = (1 - x)^{\max[\frac{2\alpha+1}{4}, 0]}(1 + x)^{\max[\frac{2\beta+1}{4}, 0]}$.

Assim, para toda função contínua f e para todo $x \in (-1, 1)$, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n^f(x) = f(x).$$

No entanto, o último resultado é falso, pois é conhecido ([21], Teorema 14.4) que, para o caso da interpolação sobre os zeros dos polinômios de Jacobi, para cada ponto $x_0 \in (-1, 1)$, existe $f \in C[-1, 1]$ tal que a seqüência $\{L_n^{f_0}(x_0)\}$ é ilimitada. Assim, obtemos uma contradição e (ii) está demonstrado. ■

Considerações Finais

Neste trabalho, fizemos um estudo detalhado sobre fórmulas de quadratura envolvendo zeros dos polinômios quase-ortogonais, estudo este baseado em Freud [6]. Fundamentados neste estudo, trabalhamos com o intuito de encontrar propriedades semelhantes para o caso dos polinômios similares.

Muitas dessas propriedades foram obtidas analogamente. Entretanto, na demonstração de alguns resultados, pudemos notar claramente algumas mudanças necessárias e dificuldades que surgiram essencialmente devido à diferença entre as relações de ortogonalidade em ambos os casos. Levando em consideração este fato, fizeram-se necessárias algumas mudanças na definição dos pesos para a fórmula de quadratura no caso dos polinômios similares. Independentemente disto, mostramos, no Capítulo 3 que todas as propriedades válidas para o caso das fórmulas de quadratura do tipo Gauss associadas aos polinômios ortogonais permanecem válidas quando trabalhamos no caso dos similares.

Realizamos, ainda, um estudo baseado em Sloan e Smith [20] sobre as fórmulas de quadratura interpolatórias produto, que vêm sendo bastante estudadas e têm intrínseca relação com a Teoria da Medida e integral de Lebesgue. Neste estudo, percebemos que a garantia de convergência da fórmula está intimamente ligada à escolha dos pontos e a condições impostas às funções k e f . Para certas escolhas de pontos, tais como nos Teoremas 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3, garantimos a validade da propriedade (4.3). Esta propriedade nos garante que os pesos $w_{n,i}(k)$ são assintoticamente positivos se $k(x) \geq 0$ para $x \in [a, b] \subseteq [-1, 1]$ pois, escolhendo $f = \chi_{[a,b]}$ (função característica), obtemos, através de

(4.2) e (4.3), a igualdade

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x_{n,i} \in [a,b]} |w_{n,i}(k)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x_{n,i} \in [a,b]} w_{n,i}(k).$$

Vimos, também, um teorema que garante que, se escolhermos como conjunto de pontos os zeros do polinômio ortogonal P_n , a fórmula de quadratura interpolatória produto irá convergir desde que haja uma relação entre as funções k e w (função peso associada a P_n). Diante disto, e das semelhanças encontradas nos Capítulos 2 e 3, surge uma questão natural: se escolhermos como conjunto de pontos os zeros de B_n , como irá se comportar a convergência da fórmula de quadratura associada? Quais são as condições para que tal fato aconteça? Esta é, sem dúvida alguma, uma boa motivação para estudos futuros.

Referências Bibliográficas

- [1] Andrade, E.X.L., Sobre polinômios similares aos ortogonais associados a uma classe especial de distribuições, Tese de Doutorado, Unicamp, Campinas, 1995.
- [2] Bartle, R. G., *The Elements of Integration*, John Wiley & Sons, 1966.
- [3] Beard, R.E., Some notes on approximate product-integration, *J. Inst. Actu.*, **73** (1974), pp.356-416.
- [4] Chihara, T.S., *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [5] Elliot, D., Paget, D.F., Product integration rules and their convergence, *BIT*, **16** (1976), pp.32-40.
- [6] Freud, G., *Orthogonal Polynomials*, Pergamon Press, New York, 1971.
- [7] Hildebrandt, T.H., Definitions of Stieltjes integrals of the Riemann type, *Amer. Math. Monthly*, **45** (1938), pp.265-278.
- [8] Jones, W.B., Njåstad, O., Thron, W.J., Orthogonal Laurent polynomials and a strong Hamburger moment problem, *J. Math. Analysis and Applications*, **98** (1984), 528-554.
- [9] Krylov, V.I., *Approximate Calculation of Integrals*, MacMillan, New York, 1962.
- [10] Nevai, G.P., Mean convergence of Lagrange interpolation, *J. Approx. Theory*, **18** (1976), pp.363-377.

-
- [11] Philips, G.M., Taylor, P.J., *Theory and Applications of Numerical Analysis*, Academic Press, San Diego, 1996.
- [12] Pólya, G., Uber die Konvergenz von Quadraturverfahren, *Math. Z.*, **37** (1933), pp.264-286.
- [13] Riez, M., Sur le problème des moments I, *Arkiv Matem. Astr. Fys.*, **16** (1921).
- [14] Riez, M., Sur le problème des moments II, *Arkiv Matem. Astr. Fys.*, **16** (1922).
- [15] Riez, M., Sur le problème des moments II, *Arkiv Matem. Astr. Fys.*, **17** (1923).
- [16] Rivlin, T.J., *An Introduction to the Approximation of Functions*, Dover Publications, New York, 1969.
- [17] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1974.
- [18] Sloan, I.H., On the numerical evaluation of singular integrals, *BIT*, **18** (1978), pp.91-102.
- [19] Sloan, I.H. and Smith, W.E., Product integration with the Clenshaw-Curtis and related points: convergence properties, *Numer. Math.*, **30** (1978), pp.415-428.
- [20] Sloan, I.H., and Smith, W.E., Properties of interpolatory product integration rules, *SIAM J. Num. Analysis*, **19** (1982), pp.427-442.
- [21] Szegő, G., *Orthogonal Polynomials*, American Math. Society, Colloq. Publ., New York, **23**, 1939.
- [22] Sri Ranga, A., Continued fractions with correspond to two series expansions, and the strong Hamburguer moment problem. Tese de doutoramento, Univ. of St. Andrews, St. Andrews, Escócia (1984).
- [23] Sri Ranga, A., Polinômios ortogonais e similares, Tese de Livre Docência, Universidade de São Paulo, São Carlos 1990.

- [24] Stroud, A. H., Secrest, D., *Gaussian Quadrature Formulas*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [25] Young, A., Approximate product-integration, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **224** (1954), pp.552-561.
- [26] Zygmund, A., *Trigonometric Series*, vols. 1 e 2, Cambridge University Press, London, 1968.