

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP

Faculdade de Engenharia (FEIS)- campus de Ilha Solteira

ISABELA TORRES DE MELO

Dinâmica e Controle de um Pêndulo Invertido

Ilha Solteira

2025

Isabela Torres de Melo

Dinâmica e Controle de um Pêndulo Invertido

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia (FEIS), Ilha Solteira, para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof^o Dr. Douglas Domingues
Bueno

Ilha Solteira
2025

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

Melo, Isabela Torres de.
M528d Dinâmica e controle de um pêndulo invertido / Isabela Torres de Melo. --
Ilha Solteira: [s.n.], 2025
35 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Mecânica) -
Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira,
2025

Orientador: Douglas D. Bueno

Inclui bibliografia

1. Pêndulo invertido. 2. Controle de sistemas. 3. Alocação de polos. 4.
Realimentação de estados. 5. Matlab/Simulink.

ISABELA TORRES DE MELO

DINÂMICA E CONTROLE DE UM PÊNDULO INVERTIDO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia (FEIS), Ilha Solteira, para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Data de defesa: 25/06/2025

BANCA EXAMINADORA

Profº Dr. Douglas Domingues Bueno
UNESP – Faculdade de Engenharia (FEIS) – Campus de Ilha Solteira

Documento assinado digitalmente
 **DOUGLAS DOMINGUES BUENO**
Data: 27/06/2025 18:12:47-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profº Dr. Rodrigo Borges Santos
Universidade Federal da Grande Dourados - UFGD

Documento assinado digitalmente
 **RODRIGO BORGES SANTOS**
Data: 30/06/2025 11:03:48-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Eng^a. Camila Momesso
Faculdade de Engenharia (FEIS)

Documento assinado digitalmente
 **CAMILA MOMESSO**
Data: 27/06/2025 20:34:40-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Dedico este trabalho aos meus pais, que sob o ardor
do sol, abriram caminho para que eu pudesse
repousar à sombra.

AGRADECIMENTOS

Ao olhar para trás e ver toda a minha jornada até aqui, é impossível não reconhecer e agradecer às pessoas que caminharam comigo e possibilitaram a realização desse sonho.

A Deus, minha eterna gratidão, por iluminar meus caminhos, renovar minhas forças nos momentos difíceis e por nunca me deixar desistir. Em cada desafio superado, em cada conquista alcançada, sei que Sua presença esteve comigo, me guiando e auxiliando.

Aos meus pais, Flávio e Fabiana, minha eterna gratidão. Obrigada por nunca medirem esforços para me oferecer o melhor, por acreditarem em mim mesmo quando eu duvidava, por cada palavra de incentivo, por cada sacrifício silencioso e, principalmente, por terem me dado a base que sustentou não apenas a minha formação acadêmica, mas também o meu caráter. Este trabalho é, antes de tudo, uma conquista de vocês.

Ao meu orientador, Prof. Douglas D. Bueno, minha profunda gratidão por estar presente nesta caminhada desde 2021, com paciência, dedicação e entusiasmo. Mais do que orientar, você me ensinou, inspirou e ampliou minha visão como estudante e futura engenheira. Sem o seu apoio e confiança no meu potencial, eu não teria chegado até aqui, foi essencial para que eu me mantivesse motivada, mesmo diante das dificuldades.

Aos meus colegas de turma, com quem dividi dias intensos de estudo, noites mal dormidas, apresentações, provas e tantos momentos que tornaram essa trajetória mais leve, divertida e, sobretudo, significativa. Vocês foram parte fundamental dessa etapa da minha vida.

Aos meus amigos que, mesmo de perto ou de longe, me acompanharam em cada desafio, celebraram comigo cada pequena vitória e me ofereceram amparo nos momentos difíceis. Obrigada por serem porto seguro e fonte constante de força e alegria.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para que este trabalho se tornasse realidade: meu mais sincero agradecimento. Cada gesto, cada palavra e cada presença fizeram toda a diferença.

“Sem disciplina, não há progresso — nem na alma, nem na ciência. O desenvolvimento exige cultivo constante, ou cede espaço ao descontrole.”

Adaptado de Chico Xavier

RESUMO

O presente trabalho aborda a dinâmica e o controle de um sistema físico instável representado pelo pêndulo invertido de base linear. Esse sistema é amplamente utilizado como referência acadêmica e experimental devido à sua instabilidade intrínseca e alto valor didático no campo de controle de sistemas dinâmicos. Inicialmente, foi realizada a modelagem matemática do sistema por meio do método de Lagrange, obtendo-se as equações que regem a movimentação do carrinho e do pêndulo. Em seguida, essas equações foram linearizadas considerando pequenas variações angulares, possibilitando a aplicação de técnicas de controle por realimentação de estados. A partir da representação no espaço de estados, procedeu-se à análise de controlabilidade do sistema, que confirmou a viabilidade de aplicar a técnica de alocação de polos. Foram realizados diversos testes numéricos simulando diferentes configurações de localização de polos, para observar o comportamento do sistema frente a alterações de tempo de subida, ultrapassagem e amortecimento. Experimentos virtuais foram conduzidos apenas em ambiente de simulação utilizando o MATLAB/Simulink. Os resultados demonstraram que a técnica de realimentação de estados, aliada à correta alocação de polos, é eficaz para garantir a estabilidade do sistema, com bom desempenho tanto na resposta temporal quanto no controle da posição angular do pêndulo. Este estudo contribui significativamente para o entendimento de técnicas modernas de controle, com potencial aplicação em diversas áreas da engenharia.

Palavras-Chave: pêndulo invertido; controle de sistemas; alocação de polos; realimentação de estados; MATLAB/Simulink.

ABSTRACT

This work addresses the dynamics and control of an unstable physical system represented by the linear base inverted pendulum. This system is widely used as an academic and experimental benchmark due to its inherent instability and high educational value in the field of control of dynamic systems. Initially, the mathematical modeling of the system was developed using the Lagrangian method, resulting in equations governing the movement of the cart and the pendulum. These equations were then linearized considering small angular variations, enabling the application of state feedback control techniques. Based on the state-space representation, a controllability analysis was conducted, confirming the feasibility of pole placement control design. Several numerical simulations were performed, exploring different pole configurations to assess the system's behavior under various rise times, overshoot percentages, and damping conditions. Virtual experiments were carried out exclusively through simulation using MATLAB/Simulink. The results demonstrated that the state feedback technique, combined with proper pole placement, is effective in ensuring system stability, with good performance in both temporal response and angular control of the pendulum. This study contributes significantly to the understanding of modern control techniques, with potential applications in various engineering fields.

Keywords: inverted pendulum; control systems; pole placement; state feedback; MATLAB/Simulink.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Pêndulo invertido de base linear (IP02).	14
Figura 2	Sistema de pêndulo invertido montado sobre um carro, sendo x_c a posição do carrinho, α o ângulo do pêndulo, x_p e y_p as coordenadas horizontal e vertical do pêndulo.	15
Figura 3	(a) Sistema de controle a malha aberta; (b) sistema de controle a malha fechada com $u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$	19
Figura 4	Polos a Malha Aberta.	22
Figura 5	Localização dos Polos a Malha Fechada no Plano s.	23
Figura 6	Polos a Malha Aberta e Fechada - Teste 1.	24
Figura 7	Valores obtidos do Teste 1 para: (a) posição [mm]; (b) ângulo [graus] - a linha vermelha representa o valor de referência e a linha azul representa a resposta do sistema.	25
Figura 8	Nova localização dos polos p_3 e p_4	25
Figura 9	Valores obtidos do Teste 2 para: (a) posição [mm]; (b) ângulo [graus] - a linha vermelha representa o valor de referência e a linha azul representa a resposta do sistema.	26
Figura 10	Polos a Malha Aberta e Fechada - Teste 3.	27
Figura 11	Valores obtidos do Teste 3 para: (a) posição [mm]; (b) ângulo [graus] - a linha vermelha representa o valor de referência e a linha azul representa a resposta do sistema.. . . .	27
Figura 12	Polos a Malha Aberta e Fechada - Teste 4.	28
Figura 13	Valores obtidos do Teste 4 para: (a) posição [mm]; (b) ângulo [graus] - a linha vermelha representa o valor de referência e a linha azul representa a resposta do sistema.. . . .	29
Figura 14	Resposta simulada da posição em função do tempo.	30
Figura 15	Resposta simulada do ângulo em função do tempo.	30

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros físicos do sistema de pêndulo invertido.	21
--	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	OBJETIVOS	11
2.1	Objetivo Geral	11
2.2	Objetivos Específicos	11
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	12
4	MATERIAIS E MÉTODOS	14
4.1	Descrição do Sistema Físico	14
4.2	Modelagem matemática	15
4.3	Alocação de polos	18
4.3.1	Análise de Controlabilidade	19
4.3.2	Representação no Espaço de Estados	20
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	21
5.1	Projeto do Controlador Baseado na Alocação de Polos	21
5.1.1	Teste número 1	22
5.1.2	Teste número 2	25
5.1.3	Teste número 3	26
5.1.4	Teste número 4	28
5.2	Experimentos Virtuais	29
6	CONCLUSÃO	31
	REFERÊNCIAS	32

1 INTRODUÇÃO

Na área da engenharia, a análise e o controle de sistemas dinâmicos instáveis têm se mostrado cada vez mais relevantes, tanto em pesquisas acadêmicas quanto em aplicações industriais e tecnológicas. Sistemas instáveis exigem soluções de controle sofisticadas e, por essa razão, servem como excelentes modelos para estudo e desenvolvimento de estratégias de controle avançadas (Ogata, 2010). Um exemplo clássico de sistema instável é o pêndulo invertido, que, por sua natureza instável e não linear, se tornou referência para validação de técnicas teóricas e implementação prática de controladores (Franklin et al., 2010). Além de ser amplamente utilizado no ensino de engenharia de controle, o pêndulo invertido também representa, de maneira simplificada, o comportamento de diversos sistemas reais, como veículos autobalanceados, robôs bípedes, sistemas aeroespaciais e mecanismos de estabilização (Spong et al., 2006).

O estudo da dinâmica de um sistema como o pêndulo invertido proporciona uma compreensão mais profunda sobre o comportamento de sistemas sujeitos a forças externas, enquanto a aplicação de técnicas de controle permite projetar soluções que garantem a estabilidade desejada (Åström; Murray, 2021). Devido à sua representação física relativamente simples e à complexidade matemática envolvida em seu controle, o pêndulo invertido é amplamente utilizado como plataforma experimental para validação de algoritmos de controle e também como ferramenta didática na formação de engenheiros. O desafio está em manter o pêndulo em posição vertical, equilibrando-o ativamente por meio da movimentação de sua base – geralmente um carrinho acionado por motor –, compensando perturbações externas e instabilidades naturais do sistema (Furuta; Yamakita; Kobayashi, 1992).

Com o avanço das ferramentas computacionais e ambientes de simulação, como MATLAB/Simulink, tornou-se possível estudar sistemas dinâmicos complexos com alto grau de fidelidade. Esses recursos permitem a modelagem precisa, simulação em tempo real e teste de controladores antes de sua aplicação prática, proporcionando maior segurança e eficiência nos projetos. No contexto deste trabalho, será utilizado o sistema de pêndulo invertido IP02 da *Quanser*, reconhecido pela sua robustez e aplicabilidade em testes acadêmicos e industriais (Quanser, 2013).

Dessa forma, este trabalho visa desenvolver uma abordagem completa para a análise dinâmica e o controle de um pêndulo invertido, englobando desde sua modelagem matemática, análise de estabilidade e representações no espaço de estados, até a implementação de controladores com realimentação de estados e alocação de polos. Através de simulações detalhadas e interpretação de resultados, busca-se demonstrar o desempenho do sistema frente a diferentes configurações de controle, contribuindo para o aprimoramento técnico no campo da engenharia de controle moderno.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

O principal objetivo deste trabalho é desenvolver e analisar um sistema de controle para o pêndulo invertido IP02 da *Quanser*, abordando sua modelagem matemática, linearização, análise de controlabilidade e implementação de controladores via realimentação de estados, com foco na alocação de polos e avaliação do desempenho por meio de simulações computacionais.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Também, destacam-se os seguintes objetivos específicos:

- Realizar a modelagem dinâmica do sistema pêndulo invertido utilizando o método de Lagrange;
- Linearizar o modelo obtido em torno da posição de equilíbrio vertical;
- Representar o sistema no espaço de estados e analisar sua controlabilidade;
- Projetar controladores via realimentação de estados com alocação de polos;
- Simular diferentes configurações de controladores para avaliar desempenho frente a requisitos de tempo de subida, ultrapassagem e estabilidade;
- Analisar criticamente os resultados obtidos em ambiente MATLAB/Simulink;
- Discutir as limitações e possíveis extensões do modelo para implementação prática em laboratório.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O mecanismo de pêndulo invertido trata-se de um sistema instável, uma vez que a posição do centro de gravidade fica acima de seu ponto de sustentação, de modo a deslocar o pêndulo fazendo com que ele caia. Se é aplicada uma força sobre o pêndulo, ele é forçado a voltar à sua posição de equilíbrio, que só é obtida por meio da implementação de controle sobre o sistema devido à sua instabilidade. Estudos como Pedroso & Modesto (2017) abordam a diminuição de consumo e aumento de produtividade que sistemas de controle podem propiciar, levando a uma economia de recursos e aumento no retorno financeiro de corporações.

De acordo com Ogata (2010), o pêndulo invertido é um sistema muito citado para o caso do uso de malhas de controle com realimentação, especialmente para sistemas inerentemente estáveis. Em Ribeiro et al. (2014) tem-se a importância do aprimoramento de profissionais nas áreas de automação e controle e, visando ampliar o acesso ao estudo de sistemas mecânicos foi realizada a construção do sistema pêndulo invertido devido à simplicidade dos sistemas pendulares.

Nos dias atuais, destaca-se cada vez mais a exigência no desempenho de sistemas estruturais, como o caso de estruturas espaciais e aeronaves, que precisam ser cada vez mais leves devido ao seu alto custo de transporte (Wang; Chen; Han, 1999). Ademais, também exige-se excelência do comportamento dinâmico, garantindo estabilidade e precisão de movimento. No entanto, estruturas leves podem apresentar um baixo amortecimento interno, provocando ruído excessivo devido a perturbações externas (Santos, 2005).

A compreensão da importância da dinâmica e do controle de componentes mecânicos permite obter melhor clareza do objetivo de se estudar sistemas como o pêndulo invertido. Entender a dinâmica permite visualizar o comportamento do sistema sujeito a forças externas, enquanto que, o controle permite estabilizar sistemas que são instáveis, como o pêndulo invertido. Estudos como Anderson (1989) desenvolveram aplicações mais complexas, demonstrando como redes neurais podem aprender a controlar um sistema instável, sem conhecimento prévio de sua dinâmica.

O experimento do pêndulo invertido consiste em uma haste cilíndrica metálica, livre para se movimentar em torno de um ponto fixo. O ponto é localizado em um carro acionado por um motor, que move-se na direção horizontal. Devido à instabilidade, a haste tende a cair, e dessa forma, é utilizada uma malha de controle com o intuito de estabilizar a barra verticalmente por meio da aplicação de uma força através do movimento do carro, cuja intensidade é controlada a partir da posição angular da haste (Ribeiro, 2007).

Em trabalhos como Alves (2018), são utilizadas técnicas de controle como o Teorema de Estabilidade de Lyapunov e linearização por realimentação para estabilizar o pêndulo em sua posição vertical e localizar uma posição de referência para o carro. A linearização por realimentação é uma técnica que permite transformar equações de estado não lineares em

lineares. Já para a modelagem dinâmica, pode-se aplicar metodologias como a newtoniana ou lagrangeana.

Considerando o objetivo de controlar o pêndulo invertido, pode-se dividir em três aspectos. O primeiro é referente ao controle de subida (*swing up*); o segundo aspecto é a estabilização e o terceiro é o controle de rastreamento (*tracking*) do pêndulo invertido. Na prática, a estabilização e o controle de rastreamento possuem maior utilidade para diversas aplicações em tempo real. Dentre os desafios no controle do pêndulo invertido, tem-se fazê-lo sair de sua posição estável e atingir a posição vertical instável; mantê-lo equilibrado nessa posição mesmo sujeito a perturbações e também, mover o carrinho no trilho até uma posição específica desejada (Kumar; Jerome, 2013).

Em Åström & Furuta (2000), tem-se a aplicação de um método básico de controle de subida por meio de técnicas de energia. No entanto, essa metodologia não considera a presença de um carrinho (ou seja, uma base móvel), então, apesar de apresentar vantagens com relação ao controle do ângulo do pêndulo e da posição da articulação, há uma limitação quanto ao comprimento do trilho do carrinho e à magnitude da força a ser aplicada.

Dessa forma, tem-se a necessidade de abordagens que considerem essas restrições físicas. Métodos como o uso do controlador Regulador Linear-Quadrático, do inglês *Linear Quadratic Regulator* (LQR) visa minimizar uma função de custo quadrática, equilibrando o desempenho e o esforço de controle. Estudos comparativos foram realizados de modo a determinar qual estratégia de controle oferece melhor desempenho em relação ao ângulo do pêndulo e à posição do carrinho. Em Nasir, Ahmad & Rahmat (2008), foram apresentados dois controladores, como o regulador linear quadrático (LQR) e o controlador proporcional-integral-derivativo (PID) para controlar o sistema linearizado do modelo de pêndulo invertido. O resultado mostrou que o LQR produziu melhor resposta em comparação com as estratégias de controle PID, sendo apresentado no domínio do tempo.

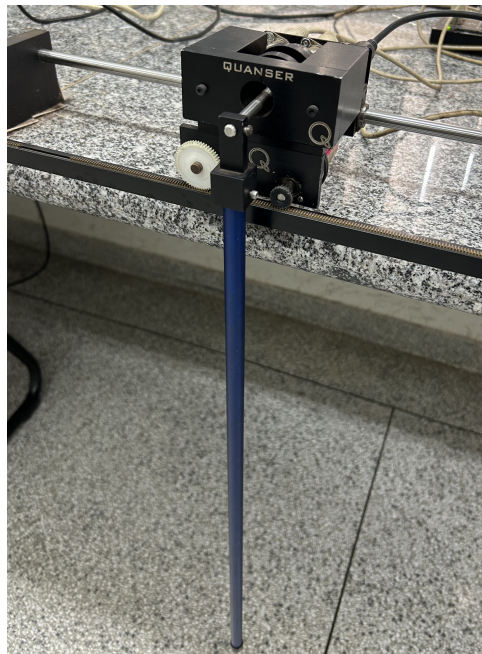
Por fim, o estudo do pêndulo invertido é um pilar fundamental na pesquisa e ensino da área de controle. Seu modelo complexo e sua aplicabilidade o tornam excelente para a validação de novas técnicas, contribuindo para o avanço contínuo na área de sistemas dinâmicos e controle. A integração de novas abordagens, como otimização e aprendizado de máquina, promete expandir ainda mais as possibilidades desse campo, permitindo o desenvolvimento de sistemas mais autônomos e eficientes no futuro.

4 MATERIAIS E MÉTODOS

4.1 DESCRIÇÃO DO SISTEMA FÍSICO

O sistema a ser abordado é o pêndulo invertido de base linear (IP02), fabricado pela *Quanser* e projetado para a realização de estudos e aplicações em controle de sistemas dinâmicos instáveis, conforme apresentado pela Figura 1. O equipamento consiste em uma haste montada sobre um carrinho que se move horizontalmente sobre um trilho. O carrinho é acionado por um motor DC, que garante tração consistente e contínua, além de ser equipado com um eixo metálico rotativo ao qual o pêndulo de giro livre pode ser acoplado (Quanser, 2013).

Figura 1 – Pêndulo invertido de base linear (IP02).



Fonte: Autoria própria.

O objetivo principal do controle é manter o pêndulo em posição vertical estável (posição de equilíbrio instável), compensando perturbações e oscilações por meio do deslocamento do carrinho. O conjunto físico é composto pelos seguintes componentes principais:

- Carrinho linear de base móvel: trata-se de uma estrutura acionada por um motor de corrente contínua (DC), que se movimenta sobre um trilho linear. Seu objetivo é aplicar as forças necessárias para manter o pêndulo em equilíbrio.
- Pêndulo: consiste em uma haste rígida metálica conectada ao carrinho por um pivô, que permite sua rotação no plano vertical. Possui sensores para a detecção de sua posição angular.

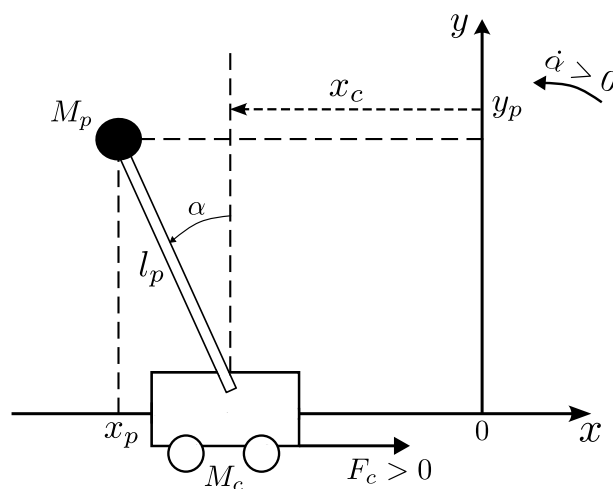
- Motor DC com acoplamento de correia: responsável pela movimentação do carrinho com controle de precisão.
- Sensor de posição linear (*encoder*): mede com precisão a posição do carrinho ao longo do trilho.
- Sensor de ângulo (*encoder* rotativo): mede o ângulo do pêndulo em relação à vertical.
- Interface de controle: responsável pela aquisição de sinais e acionamento dos atuadores. A comunicação com o computador ocorre via USB ou conexão direta.
- *Software* de controle: a implementação do controle foi realizada por meio de simulação virtual no ambiente MATLAB/Simulink, utilizando o *toolbox* QUARC da Quanser."

O sistema possui um grau de liberdade linear (movimento do carrinho) e um grau de liberdade rotacional (ângulo do pêndulo), formando um sistema dinâmico e não linear instável.

4.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

A Figura 2, apresenta o sistema do pêndulo invertido, com massa M_p e comprimento total L_p , sendo l_p o comprimento até o centro de gravidade, cujo carrinho sobre o qual está montado possui massa M_c . Uma vez que a posição vertical do pêndulo é instável, deve-se aplicar uma força de controle F_c adequada. Admite-se que o centro de gravidade da haste do pêndulo está em seu centro geométrico. Ademais, o sistema possui duas saída x_c e α para uma entrada.

Figura 2 – Sistema de pêndulo invertido montado sobre um carro, sendo x_c a posição do carrinho, α o ângulo do pêndulo, x_p e y_p as coordenadas horizontal e vertical do pêndulo.



Fonte: Adaptado de Santos (2005).

Desenvolvendo as equações pelo método de Lagrange, tem-se que a energia cinética total do sistema é composta por duas partes: energia cinética do carrinho e energia cinética do pêndulo. A Equação (1) apresenta a energia cinética do carrinho.

$$T_c = \frac{1}{2} M_c \dot{x}_c^2 \quad (1)$$

A energia cinética translacional do pêndulo é dada pela Equação (2).

$$T_p = \frac{1}{3} M_p v_p^2 \quad (2)$$

sendo a velocidade do centro de massa do pêndulo, v_p , dada por:

$$v_p^2 = \dot{x}_c^2 + 2l_p \dot{x}_c \dot{\alpha} \cos(\alpha) + l_p^2 \dot{\alpha}^2 \quad (3)$$

Por outro lado, a energia cinética rotacional é:

$$T_r = \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 \quad (4)$$

Logo, a energia cinética total do sistema é obtida a partir da Equação (5).

$$T = \frac{1}{2} M_c \dot{x}_c^2 + \frac{1}{2} M_p (\dot{x}_c^2 + 2l_p \dot{x}_c \dot{\alpha} \cos(\alpha) + l_p^2 \dot{\alpha}^2) + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 \quad (5)$$

Também, tem-se a atuação da energia potencial, que vem apenas da gravidade atuando no centro de massa do pêndulo:

$$V = -M_p g l_p \cos(\alpha) \quad (6)$$

A Lagrangiana é dada por $L = T - V$, assim,

$$L = \frac{1}{2} M_c \dot{x}_c^2 + \frac{1}{2} M_p (\dot{x}_c^2 + 2l_p \dot{x}_c \dot{\alpha} \cos(\alpha) + l_p^2 \dot{\alpha}^2) + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 + M_p g l_p \cos(\alpha) \quad (7)$$

As equações de Lagrange são obtidas da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q \quad (8)$$

Aplicando a Equação (8) para x_c , pode-se obter o equacionamento para o movimento do carrinho, então

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} = (M_c + M_p) \dot{x}_c + M_p l_p \dot{\alpha} \cos(\alpha) \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} \right) = (M_c + M_p) \ddot{x}_c + M_p l_p \cos(\alpha) \ddot{\alpha} - M_p l_p \sin(\alpha) \dot{\alpha}^2 \quad (10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_c} = 0 \quad (11)$$

As forças generalizadas atuantes são F_c (força aplicada) e $-B_{eq} \dot{x}_c$ (sendo, B_{eq} o amorteci-

mento viscoso equivalente), logo,

$$(M_c + M_p)\ddot{x}_c + M_p l_p \cos(\alpha)\ddot{\alpha} - M_p l_p \sin(\alpha)\dot{\alpha}^2 = F_c - B_{eq}\dot{x}_c \quad (12)$$

Por outro lado, a equação para α , relativa ao movimento do pêndulo é obtida por:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = (J_p + M_p l_p^2)\dot{\alpha} + M_p l_p \dot{x}_c \cos(\alpha) \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) = (J_p + M_p l_p^2)\ddot{\alpha} + M_p l_p \cos(\alpha)\ddot{x}_c - M_p l_p \sin(\alpha)\dot{x}_c \dot{\alpha} \quad (14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -M_p l_p \dot{x}_c \dot{\alpha} \sin(\alpha) + M_p g l_p \sin(\alpha) \quad (15)$$

As forças generalizadas atuantes são o torque gravitacional, dado por $M_p g l_p \sin(\alpha)$ e o amortecimento, dado por $-B_p \dot{\alpha}$ (sendo B_p o amortecimento angular do pêndulo). Dessa forma, tem-se

$$(J_p + M_p l_p^2)\ddot{\alpha} + M_p l_p \cos(\alpha)\ddot{x}_c - M_p l_p \sin(\alpha)\dot{x}_c \dot{\alpha} = M_p g l_p \sin(\alpha) - B_p \dot{\alpha} \quad (16)$$

Assim, reorganizando os termos, tem-se as equações finais de movimento do carrinho e do pêndulo:

$$\frac{d^2}{dt^2} x_c(t) = \frac{-[(J_p + M_p l_p^2)B_{eq}\dot{x}_c + M_p l_p B_p \dot{\alpha} - (J_p + M_p l_p^2)F_c - M_p^2 l_p^2 g \sin(\alpha) \cos(\alpha)]}{J_T} \quad (17)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \alpha(t) = \frac{-M_p l_p \cos(\alpha)\ddot{x}_c - (J_p + M_p l_p^2)B_p \dot{\alpha} + M_p g l_p (M_c + M_p) \sin(\alpha) + M_p l_p F_c \cos(\alpha)}{J_T} \quad (18)$$

sendo J_T e J_{eq} apresentados em (Apkarian; Lacheray; Martin, 2012) e obtidos a partir das Equações (23) e (24).

$$J_T = J_{eq} J_p + M_p J_p + J_{eq} M_p l_p^2 \quad (19)$$

$$J_{eq} = M_c + \frac{\eta_g K_g^2 J_c}{r_{mp}^2} \quad (20)$$

Considerando que a faixa operacional corresponde a ângulos pequenos, α , a partir da posição vertical, pode-se realizar a linearização das Equações (17) e (18), de modo a obter:

$$\frac{d^2}{dt^2} x_c(t) = \frac{1}{J_T} [-(J_p + M_p l_p^2)B_{eq}\dot{x}_c - M_p l_p B_p \dot{\alpha} + M_p^2 l_p^2 g \alpha + (J_p + M_p l_p^2)F_c] \quad (21)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\alpha(t) = \frac{1}{J_T} [-M_p l_p B_{eq} \dot{x}_c - (J_{eq} + M_p) B_p \dot{\alpha} + (J_{eq} + M_p) M_p l_p g \alpha + M_p l_p F_c] \quad (22)$$

4.3 ALOCAÇÃO DE POLOS

A técnica de alocação ou imposição de polos assume que todas as variáveis de estado são mensuráveis e estão disponíveis para retroação. A técnica de alocação de polos foi escolhida por permitir especificar diretamente o comportamento dinâmico desejado do sistema, como tempo de acomodação, amortecimento e estabilidade. Isso oferece maior controle sobre a resposta do sistema, facilitando o atendimento aos requisitos de desempenho estabelecidos no projeto. Se o sistema for completamente controlável, então é possível posicionar os polos da malha fechada em locais arbitrários, utilizando uma matriz de ganho de estado apropriada para retroação. O procedimento de projeto se inicia com a definição dos polos desejados da malha fechada, considerando os requisitos de desempenho transitório e/ou de frequência, tais como rapidez de resposta, coeficiente de amortecimento ou largura de banda, além das exigências referentes ao regime permanente.

Na metodologia tradicional de projeto de sistemas de controle com uma única entrada e uma única saída, desenvolve-se um controlador (ou compensador) de modo que os polos dominantes da malha fechada apresentem um determinado coeficiente de amortecimento ζ e uma frequência natural não-amortecida ω_n . Nessa abordagem, a ordem do sistema pode ser incrementada em uma ou duas unidades, exceto nos casos em que ocorre cancelamento entre polos e zeros. Nesta técnica presume-se que a influência dos polos não dominantes da malha fechada sobre a resposta do sistema seja insignificante.

Ao contrário dessa prática tradicional, que considera apenas os polos dominantes, a técnica de alocação de polos proposta permite a definição de todos os polos da malha fechada. No entanto, essa abordagem exige um custo adicional para posicionar todos os polos, pois é necessário medir todas as variáveis de estado com precisão ou, alternativamente, incorporar um observador ao sistema.

Considerando o sistema de controle

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (23)$$

onde $\mathbf{x}(t)$ é o vetor de estado (n -dimensional), $u(t)$ é o sinal de controle (escalar), $\mathbf{A}$ a matriz constante $n \times n$, $\mathbf{B}$ a matriz constante $n \times 1$. O sinal de controle é dado por

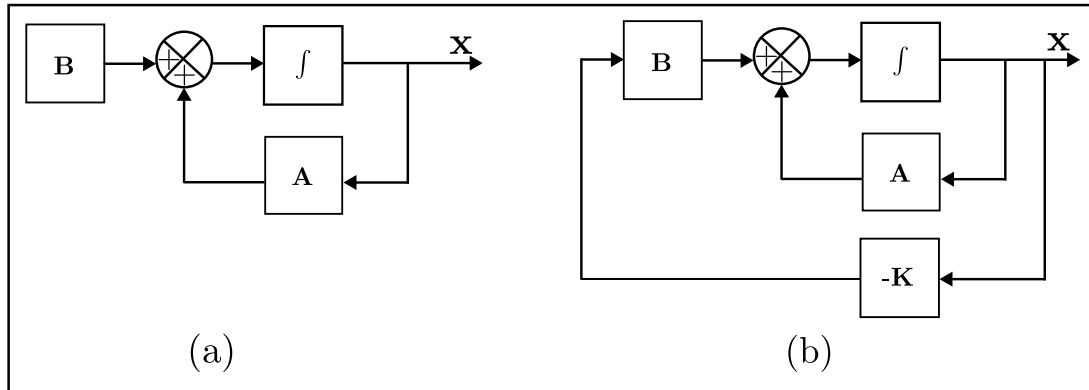
$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (24)$$

Isso significa que o sinal de controle é determinado pelo estado instantâneo, cuja técnica é denominada retroação de estados. A matriz $\mathbf{K}$ é a matriz de ganho de retroação de estado. Para a

análise a seguir, admite-se que u seja não-restrito, ou seja, não há restrições sobre o valor de u .

A Figura 3 (a) apresenta o sistema definido pela Equação (23), que simboliza um sistema de controle de malha aberta, uma vez que $\mathbf{x}(t)$ não retroage ao sinal de controle $u(t)$. A Figura 3 (b) apresenta um sistema a malha fechada, pois o estado $\mathbf{x}(t)$ retroage ao sinal de controle $u(t)$.

Figura 3 – (a) Sistema de controle a malha aberta; (b) sistema de controle a malha fechada com $u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$.



Fonte: Adaptado de Santos (2005).

Substituindo a Equação (24) na Equação (23), tem-se

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(t) \quad (25)$$

A solução dessa equação é dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{(\mathbf{A}-\mathbf{BK})t}\mathbf{x}(0) \quad (26)$$

sendo $\mathbf{x}(0)$ o estado inicial devido a perturbações externas. A estabilidade e o comportamento da resposta transitória de um sistema são determinados pelos autovalores da matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$. Ao escolher adequadamente a matriz de realimentação de ganho $\mathbf{K}$, é possível fazer com que a matriz $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ seja assintoticamente estável. Isso significa que, para qualquer condição inicial $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$, o vetor de estado $\mathbf{x}(t)$ tende ao vetor nulo conforme o tempo t se aproxima do infinito.

Os autovalores da matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{BK})$ são conhecidos como polos do regulador. Quando esses polos estão localizados no semiplano esquerdo do plano s , garante-se que o estado do sistema decaia a zero com o passar do tempo, assegurando estabilidade. O processo de selecionar a matriz $\mathbf{K}$ para posicionar os polos da malha fechada em locais desejados é chamado de alocação de polos.

4.3.1 Análise de Controlabilidade

A aplicabilidade da técnica de alocação de polos depende da controlabilidade do sistema. Um sistema é dito completamente controlável se é possível transferir qualquer estado inicial para qualquer outro estado final em um tempo finito, por meio de uma entrada adequada.

A controlabilidade é verificada pela construção da matriz de controlabilidade $\mathbf{M}$.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Se a matriz $\mathbf{M}$ tiver posto completo, ou seja, $\text{rank}(\mathbf{C} = n)$, então o sistema é totalmente controlável. Caso contrário, não é possível posicionar arbitrariamente todos os polos do sistema, sendo necessária uma reformulação do modelo ou o uso de outras técnicas de controle.

4.3.2 Representação no Espaço de Estados

Para implementar adequadamente para o sistema real, é importante realizar a representação no espaço de estados. Uma vez obtidas as equações lineares, pode-se determinar as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, dadas pela Equação (28).

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (28)$$

onde $\mathbf{q}(t)$ é o vetor de estado do sistema, conforme a Equação (29), $u(t)$ é a força de controle do carro linear, $\mathbf{A}$ é a matriz dinâmica, conforme a Equação (30) e $\mathbf{B}$ é a matriz de controle, dada pela Equação (31).

$$\mathbf{q}(t) = \left\{ x_c(t) \quad \alpha(t) \quad \frac{d}{dt}x_c(t) \quad \frac{d}{dt}\alpha(t) \right\}^T \quad (29)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{gM_p^2 l_p^2}{J_T} & \frac{-B_{eq}(M_p^2 l_p^2 + J_p)}{J_T} & \frac{-M_p l_p B_p}{J_T} \\ 0 & \frac{M_p g l_p (J_{eq} + M_p)}{J_T} & \frac{-M_p l_p B_{eq}}{J_T} & \frac{-(J_{eq} + M_p) B_p}{J_T} \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(J_p + M_p l_p^2)}{J_T} \\ \frac{M_p l_p}{J_T} \end{bmatrix} \quad (31)$$

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O presente capítulo apresenta os resultados obtidos através das simulações numéricas, obtidos através de algoritmos computacionais implementados em MATLAB, além daqueles obtidos por simulações em ambiente Simulink/MATLAB.

5.1 PROJETO DO CONTROLADOR BASEADO NA ALOCAÇÃO DE POLOS

A Tabela 1 apresenta os parâmetros físicos do modelo do pêndulo invertido, conforme proposto em Quanser Inc. (2008). Assim, com esses dados, a matriz dinâmica $\mathbf{A}$ é dada por

Tabela 1 – Parâmetros físicos do sistema de pêndulo invertido.

Parâmetro	Símbolo	Valor	Unidade
Massa do carrinho	M_c	0,94	kg
Massa do pêndulo	M_p	0,23	kg
Comprimento total do pêndulo	L_p	0.6413	m
Comprimento do pêndulo até o centro de gravidade	l_p	0.3302	m
Amortecimento viscoso equivalente	B_{eq}	5,4	N·s/m
Amortecimento angular do pêndulo	B_p	0,0024	N·m·s/rad
Momento de inércia do pêndulo	J_p	0,0079	kg · m ²
Momento de inércia do carrinho	J_c	0,39	kg · m ²
Eficiência da caixa de engrenagens planetárias	η_g	1	-
Razão de engrenagem	K_g	3,71	-
Raio do pinhão do motor	r_{mp}	0,00635	m
Constante gravitacional	g	9,81	m/s ²

Fonte: Autoria própria.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1,5217 & -4,7867 & -0,0049 \\ 0 & 26,1104 & -11,0294 & -0,0841 \end{bmatrix}$$

A matriz $\mathbf{B}$ é dada por

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,8864 \\ 2,0425 \end{bmatrix}$$

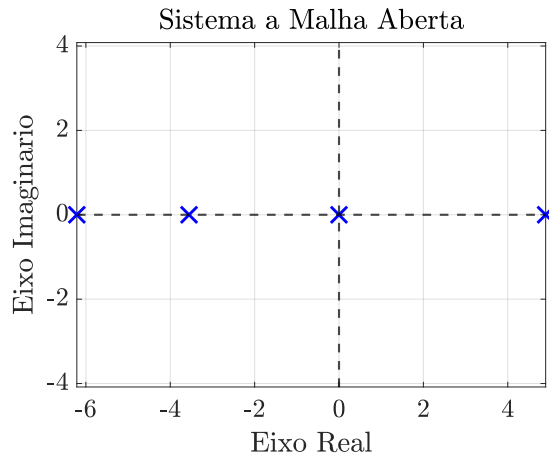
Assim,

$$M = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,8864 & -4,2530 & 23,5146 \\ 0 & 2,0425 & -9,9485 & 101,0750 \\ 0,8864 & -4,2530 & 23,5146 & -128,1909 \\ 2,0425 & -9,9485 & 101,0750 & -527,6124 \end{bmatrix}$$

Como o posto de M é 4, o sistema é completamente controlável e é possível a alocação arbitrária de polos.

A Figura 4 mostra a localização dos polos do sistema a malha aberta. Os polos foram obtidos a partir dos autovalores da matriz A . Conforme a localização dos polos, nota-se a instabilidade do sistema, devido à presença do polo no eixo real positivo.

Figura 4 – Polos a Malha Aberta.



Fonte: Autoria própria.

5.1.1 Teste número 1

Deseja-se um sistema com um tempo de subida razoavelmente pequeno e com um amortecimento razoável. Assim, é definido um percentual de *overshoot* (PO) de 10% e um tempo de subida (t_s) de 2s. O par de polos dominantes p_1 e p_2 , como mostra a Figura 5, podem ser determinados pelas seguintes equações:

$$p_1 = -\zeta\omega_n + j\beta\omega_n \quad (1)$$

$$p_2 = -\zeta\omega_n - j\beta\omega_n \quad (2)$$

O percentual de *overshoot* define quanto o sistema ultrapassa o valor de referência antes de se estabilizar, e é obtido a partir da Equação (3).

$$PO = 100e^{(-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})} \quad (3)$$

Aplicando o logaritmo de ambos os lados:

$$\ln\left(\frac{PO}{100}\right) = -\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (4)$$

Multiplicando os dois lados por -1 e em seguida, elevando ao quadrado, tem-se

$$\left(\ln\left(\frac{PO}{100}\right)\right)^2 = \frac{\zeta^2\pi^2}{1-\zeta^2} \quad (5)$$

Multiplicando ambos os lados $(1-\zeta^2)$, reorganizando e isolando ζ :

$$\zeta = \frac{|\ln(\frac{PO}{100})|}{\sqrt{\ln(\frac{PO}{100})^2 + \pi^2}} \quad (6)$$

ou $\zeta = \cos(\phi)$. E também, tem-se que t_s é o tempo de subida, que indica quanto tempo o sistema leva para sair do repouso e atingir a referência pela primeira vez, e é dado pela Equação (7).

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (7)$$

Isolando ω_n :

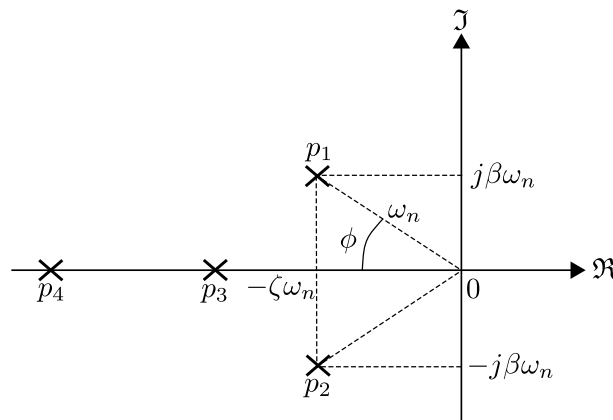
$$\omega_n = \frac{4}{\zeta t_s} \quad (8)$$

Como ζ foi obtido pela Equação (6), então, substituindo:

$$\omega_n = \frac{4\sqrt{\ln(\frac{PO}{100})^2 + \pi^2}}{|\ln(\frac{PO}{100})|t_s} \quad (9)$$

sendo $\beta = \sin(\phi)$.

Figura 5 – Localização dos Polos a Malha Fechada no Plano s.



Fonte: Adaptado de Santos (2005).

Dessa forma, à partir das Equações (6) e (9), tem-se que $\zeta = 0,59$ e $\omega_n = 3,38$ rad/s. Assim,

os polos escolhidos são:

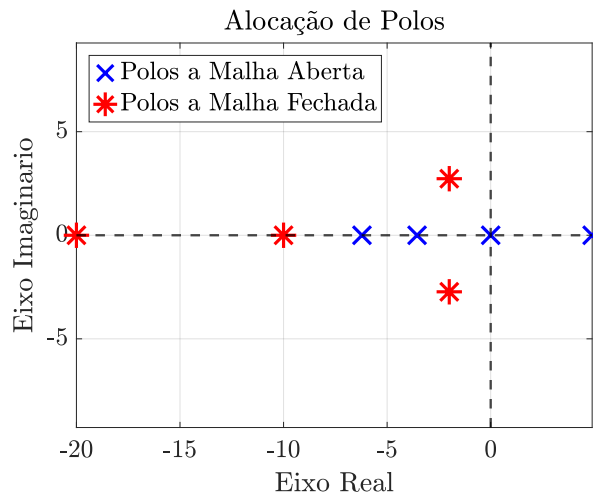
$$p_1 = -2,00 + 2,73j, \quad p_2 = -2,00 - 2,73j, \quad p_3 = -10, \quad p_4 = -20$$

Os dois polos p_3 e p_4 estão localizados à esquerda e afastados do par de polos a malha fechada dominantes. A Figura 6 apresenta a disposição dos polos de malha aberta e fechada, após a alocação de polos. A Figura 7 mostra os resultados obtidos numericamente em MATLAB. Neste caso, o vetor de ganho de retroação de estado $\mathbf{K}$ é,

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -114,32 & 226,49 & -62,84 & 41,53 \end{bmatrix}$$

sendo esses valores obtidos a partir do comando $\mathbf{K} = \text{place}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, [p_1, p_2, p_3, p_4])$ no MATLAB, que calcula uma matriz de ganho $\mathbf{K}$ para um sistema no espaço de estados tal que, ao aplicar controle por realimentação de estados, o sistema em malha fechada tenha polos (ou autovalores) exatamente nos lugares desejados, especificados a partir dos polos p_1, p_2, p_3 e p_4 . Ao observar

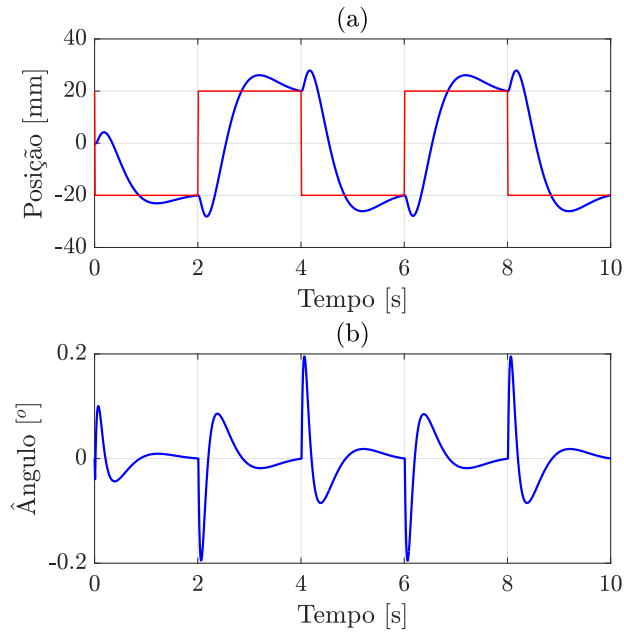
Figura 6 – Polos a Malha Aberta e Fechada - Teste 1.



Fonte: Autoria própria.

a Figura 7 nota-se que a posição do carrinho acompanha adequadamente a referência escalonada, exibindo uma resposta rápida com um leve sobressinal, o que indica um bom desempenho do sistema de controle. O sobressinal estimado é de aproximadamente 10%, valor considerado aceitável para este tipo de sistema. Além disso, o tempo necessário para que o sistema atinja o novo regime permanente após cada mudança de referência é em torno de 2 segundos, atendendo ao critério de tempo de estabilização especificado. No gráfico do ângulo do pêndulo, é possível verificar que as oscilações se mantêm em baixa amplitude, indicando que o pêndulo permanece razoavelmente próximo da posição vertical mesmo durante os deslocamentos do carrinho.

Figura 7 – Valores obtidos do Teste 1 para: (a) posição [mm]; (b) ângulo [graus] - a linha vermelha representa o valor de referência e a linha azul representa a resposta do sistema.

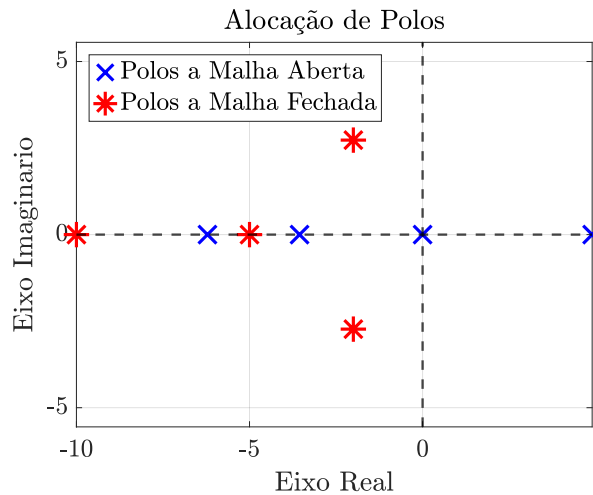


Fonte: Autoria própria.

5.1.2 Teste número 2

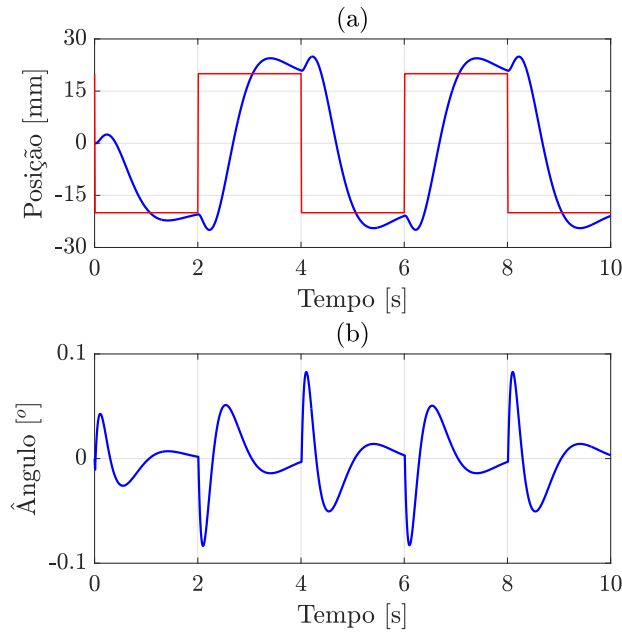
O intuito deste teste é observar o efeito provocado pela localização dos polos p_3 e p_4 . Dessa forma, considera-se as mesmas localizações de p_1 e p_2 , porém p_3 e p_4 são -5 e -10, respectivamente. A Figura 8 apresenta a nova localização dos polos p_3 e p_4 e a Figura 9 apresenta as curvas obtidas para posição e ângulo. O vetor de ganho de retroação de estado é dado por: $\mathbf{K} = [-28,58 \quad 85,24 \quad -24,05 \quad 17,35]$.

Figura 8 – Nova localização dos polos p_3 e p_4 .



Fonte: Autoria própria.

Figura 9 – Valores obtidos do Teste 2 para: (a) posição [mm]; (b) ângulo [graus] - a linha vermelha representa o valor de referência e a linha azul representa a resposta do sistema.



Fonte: Autoria própria.

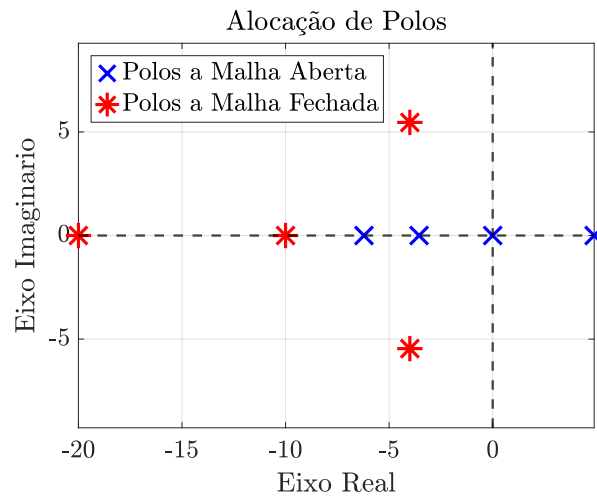
Ao observar a Figura 9, tem-se que, essa realocação dos polos para valores com menor parte real absoluta torna a resposta do sistema mais lenta, como evidenciado pelo aumento no tempo necessário para que a posição do carrinho atinja o valor de regime. Apesar disso, o sistema permanece estável, uma vez que todos os polos continuam localizados no semiplano esquerdo do plano complexo. Com a redução da velocidade de resposta, nota-se também uma diminuição na agressividade do controle, o que se traduz em menores oscilações e menor esforço de atuação. Isso é visível tanto na resposta de posição (Figura 9a), onde há menor ultrapassagem em relação à referência, quanto na resposta angular do pêndulo (Figura 9b), que apresenta amplitudes mais reduzidas nas oscilações. Em termos de desempenho, a escolha desses novos polos resulta em uma dinâmica mais suave, o que pode ser desejável em sistemas onde se busca preservar o atuador ou evitar movimentos bruscos. No entanto, essa suavidade vem ao custo de uma resposta mais lenta, o que pode comprometer o desempenho em aplicações que exijam maior agilidade.

5.1.3 Teste número 3

O objetivo deste teste é observar o efeito do tempo de subida na resposta do sistema. Para este caso, o valor de t_s é reduzido para 1s. Os valores dos polos p_3 e p_4 são os mesmos do teste 1. Tem-se que $\zeta = 0,59$ e $\omega_n = 6,76$ rad/s. Assim, os novos polos são dados por: $p_1 = -4,00 + 5,46j$, $p_2 = -4,00 - 5,46j$, $p_3 = -10$, $p_4 = -20$. O vetor de retroação de estados é: $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -457,28 & 453,83 & -155,32 & 83,63 \end{bmatrix}$. A Figura 10 apresenta a localização desejada para os polos a malha fechada. Por outro lado, a Figura 11 apresenta as curvas obtidas

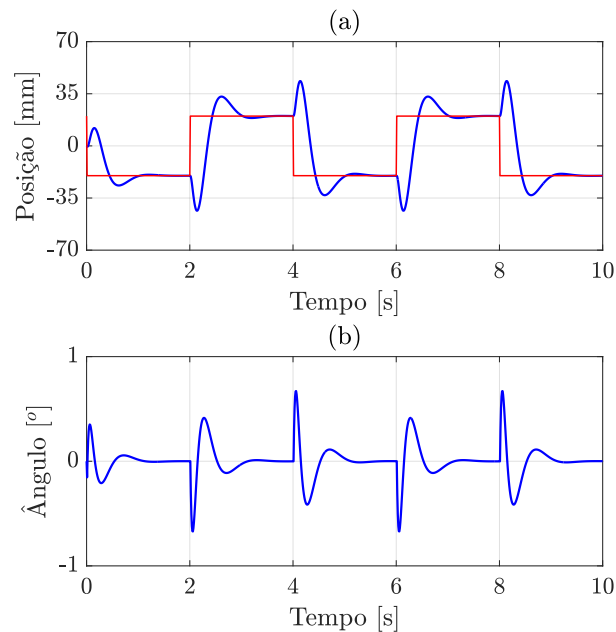
para este caso.

Figura 10 – Polos a Malha Aberta e Fechada - Teste 3.



Fonte: Autoria própria.

Figura 11 – Valores obtidos do Teste 3 para: (a) posição [mm]; (b) ângulo [graus] - a linha vermelha representa o valor de referência e a linha azul representa a resposta do sistema..



Fonte: Autoria própria.

Analisando a Figura 11, nota-se que para atingir essa nova especificação de desempenho temporal, os ganhos do controlador foram ajustados para tornar o sistema mais responsivo, sem alterar a localização dos polos complexos nem os polos reais adicionais.

Como resultado, observa-se na Figura 11a que a resposta de posição do carrinho se torna significativamente mais rápida, atingindo os patamares de referência com menor atraso. Entre-

tanto, essa maior agilidade vem acompanhada de um aumento considerável na ultrapassagem e na amplitude das oscilações iniciais, o que reflete um comportamento mais agressivo do sistema. Apesar disso, a resposta permanece dentro dos limites de estabilidade, visto que os polos continuam localizados no semiplano esquerdo.

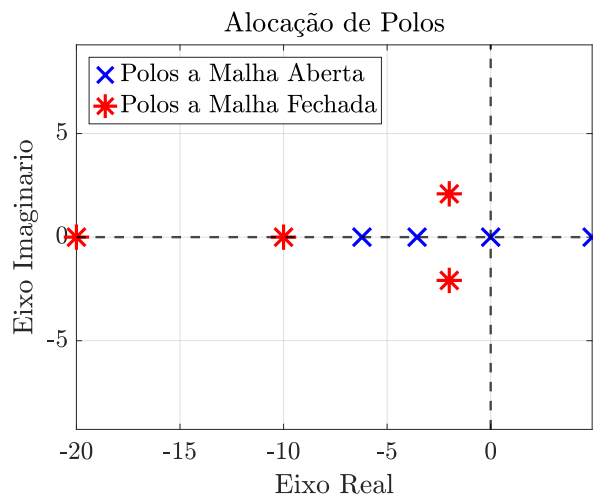
No gráfico da Figura 11b, referente ao ângulo do pêndulo, esse comportamento mais rápido se traduz em oscilações mais intensas e frequentes, especialmente logo após as transições do sinal de referência. Esse aumento na atividade do pêndulo é uma consequência direta da maior exigência dinâmica imposta ao sistema, uma vez que o carrinho precisa reagir mais rapidamente às variações da entrada, comprometendo um pouco a suavidade da resposta angular. Ainda assim, o pêndulo retorna à sua posição de equilíbrio em tempo compatível com o novo tempo de acomodação desejado.

Portanto, a redução do tempo de acomodação demonstra ser eficaz para tornar o sistema mais ágil, mas impõe um maior esforço de controle e maior suscetibilidade a oscilações.

5.1.4 Teste número 4

Neste caso, deseja-se verificar o efeito do amortecimento na resposta do sistema. O percentual de *overshoot* é reduzido para 5%. O tempo de subida e os polos p_3 e p_4 permanecem os mesmos do teste 1. Tem-se que $p_1 = -2,00 + 2,09j$ e $p_2 = -2,00 - 2,09j$. Neste caso, $\zeta = 0,69$ e $\omega_n = 2,89$ rad/s. O vetor de ganho de retroação de estados é: $\mathbf{K} = [-83,53 \ 211,47 \ -58,12 \ 39,49]$. A Figura 12 apresenta a localização desejada de polos a malha fechada, enquanto que a Figura 13 apresenta as respostas obtidas.

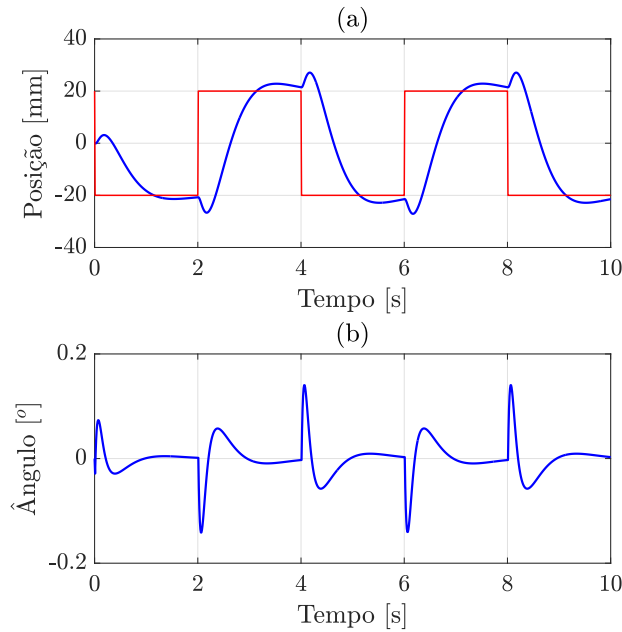
Figura 12 – Polos a Malha Aberta e Fechada - Teste 4.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 13, os ganhos do controlador foram ajustados de modo a atenuar a resposta transitória, reduzindo o valor de ultrapassagem sem alterar a estrutura de polos do sistema. Como pode ser observado na Figura 13a, essa modificação resultou em uma resposta de posição mais suave, com picos significativamente menores após cada mudança de referência. A curva azul,

Figura 13 – Valores obtidos do Teste 4 para: (a) posição [mm]; (b) ângulo [graus] - a linha vermelha representa o valor de referência e a linha azul representa a resposta do sistema..



Fonte: Autoria própria.

que representa a resposta do carrinho, segue de forma mais controlada os degraus do sinal de referência (curva vermelha), atingindo rapidamente os valores desejados com oscilações menos pronunciadas. Essa característica indica maior amortecimento na resposta, coerente com o objetivo de diminuir a ultrapassagem.

No gráfico da Figura 13b, referente ao ângulo do pêndulo, a redução da ultrapassagem também se reflete em menores oscilações angulares. O movimento do pêndulo permanece contido e estabiliza-se com rapidez após cada transição de posição, o que sugere um controle mais conservador, porém eficiente, da dinâmica do sistema.

Essa configuração evidencia que é possível suavizar a resposta e aumentar a previsibilidade do comportamento do sistema ajustando apenas os ganhos, sem a necessidade de modificar a posição dos polos. No entanto, vale notar que, embora a estabilidade e a precisão sejam favorecidas, há uma ligeira perda na rapidez da resposta em comparação com configurações mais agressivas.

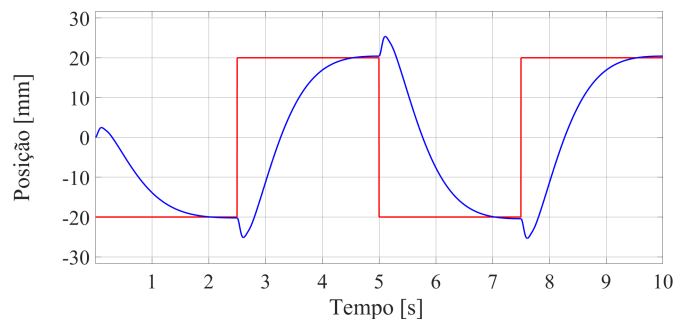
5.2 EXPERIMENTOS VIRTUAIS

Esta seção apresenta resultados obtidos por experimentos virtuais, realizados através dos diagramas de blocos em MATLAB/Simulink, sendo empregados nos experimentos físicos do sistema da *Quanser*. Dessa forma, foi possível realizar uma simulação fiel da planta e do controlador no ambiente Simulink, utilizando os mesmos parâmetros, condições iniciais e restrições previstas

para o experimento físico. Essa abordagem permitiu analisar o comportamento dinâmico do sistema de forma controlada, possibilitando a verificação do desempenho do projeto de controle frente a diferentes especificações, como tempo de acomodação, ultrapassagem percentual e estabilidade angular do pêndulo.

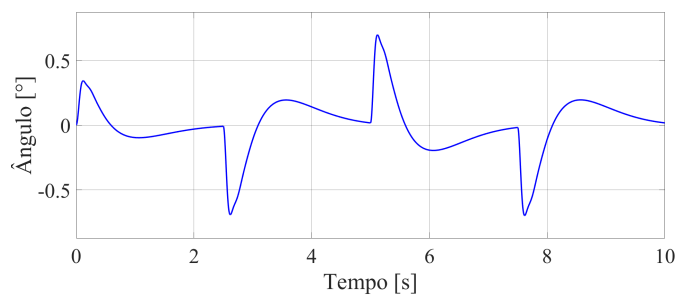
Portanto, os resultados apresentados nas figuras a seguir referem-se exclusivamente à resposta do sistema simulada, que representa com boa aproximação a dinâmica esperada em um experimento físico, assumindo um modelo idealizado e sem a influência de ruídos, atrasos ou não linearidades presentes no sistema físico. As Figuras 14 e 15 apresentam a resposta simulada pelo código disponibilizado pela *Quanser* do comportamento da posição do carrinho e do ângulo do pêndulo.

Figura 14 – Resposta simulada da posição em função do tempo.



Fonte: Autoria própria.

Figura 15 – Resposta simulada do ângulo em função do tempo.



Fonte: Autoria própria.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo estudar a dinâmica e o controle de um pêndulo invertido montado sobre uma base linear, utilizando técnicas de realimentação de estados e alocação de polos. A escolha deste sistema se deu em virtude de sua instabilidade natural, que o torna um excelente modelo para estudo e desenvolvimento de sistemas de controle aplicáveis a situações reais, como veículos autobalanceados, braços robóticos, e plataformas estabilizadas.

Inicialmente, foi realizada a modelagem matemática do sistema físico com base na modelagem lagrangiana, contemplando as forças envolvidas, como a gravidade, o atrito viscoso e os torques atuantes. Posteriormente, foram efetuadas a linearização do modelo e sua representação no espaço de estados, o que permitiu uma análise mais prática para aplicação de técnicas modernas de controle.

A análise de controlabilidade demonstrou que o sistema é totalmente controlável, viabilizando a aplicação da técnica de alocação de polos. Diversos testes foram conduzidos em ambiente de simulação, nos quais se alteraram os polos dominantes e não dominantes com o intuito de verificar seu impacto no desempenho dinâmico. Observou-se que a realocação de polos pode alterar significativamente o tempo de resposta, a ultrapassagem e a robustez frente a perturbações.

Os resultados obtidos evidenciaram que, ao posicionar adequadamente os polos da malha fechada, é possível obter respostas rápidas e estáveis, mesmo diante das características não lineares do sistema. Destaca-se que quanto mais próximos do eixo imaginário estão os polos reais, menor o esforço de controle, embora à custa de uma resposta mais lenta. Por outro lado, polos mais afastados implicam em respostas mais rápidas, porém com maior sensibilidade a oscilações e esforço de controle.

Apesar da impossibilidade de realizar testes práticos com o *hardware* físico, a simulação computacional forneceu uma representação fiel do sistema, permitindo validações confiáveis do projeto de controle. A fidelidade do modelo utilizado no Simulink, aliada à utilização do *toolbox* da *Quanser*, garantiu boa aproximação entre a teoria e a realidade experimental.

Como contribuição, o trabalho proporcionou uma visão abrangente do controle de sistemas instáveis e da aplicação de conceitos teóricos, consolidando a importância do uso de ferramentas computacionais no desenvolvimento de controladores. Além disso, reforça a relevância de metodologias bem estruturadas, desde a modelagem matemática até a simulação de resultados, para assegurar eficiência e precisão no comportamento de sistemas reais.

Para continuação de pesquisas neste tema, sugere-se a continuidade do projeto com a implementação prática do controlador no sistema físico, bem como a exploração de outras técnicas avançadas de controle, como LQR, controle robusto ou controle adaptativo, além da possível integração com métodos de inteligência artificial para aprimoramento da resposta do sistema em tempo real.

REFERÊNCIAS

- ALVES, R. G. Controle de um pêndulo invertido utilizando técnica de linearização por realimentação. 2018.
- ANDERSON, C. W. Learning to control an inverted pendulum using neural networks. In: MORGAN KAUFMANN. **Advances in Neural Information Processing Systems**. [S.l.], 1989. v. 2, p. 197–202.
- APKARIAN, J.; LACHERAY, H.; MARTIN, P. **Linear Pendulum Gantry Workbook - Instructor Version**. Markham, Ontario, Canada, 2012. Versão para instrutores. Disponível em: <http://www.quanser.com>.
- ÅSTRÖM, K. J.; FURUTA, K. Swinging up a pendulum by energy control. **Automatica**, Elsevier, v. 36, n. 2, p. 287–295, 2000.
- ÅSTRÖM, K. J.; MURRAY, R. **Feedback systems: an introduction for scientists and engineers**. [S.l.]: Princeton university press, 2021.
- FRANKLIN, G. F. et al. **Feedback control of dynamic systems**. [S.l.]: Pearson Upper Saddle River, NJ, 2010. v. 10.
- FURUTA, K.; YAMAKITA, M.; KOBAYASHI, S. Swing-up control of inverted pendulum using pseudo-state feedback. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 206, n. 4, p. 263–269, 1992.
- KUMAR, E. V.; JEROME, J. Robust lqr controller design for stabilizing and trajectory tracking of inverted pendulum. **Procedia Engineering**, Elsevier, v. 64, p. 169–178, 2013.
- NASIR, A. N. K.; AHMAD, M. A.; RAHMAT, M. F. Performance comparison between lqr and pid controllers for an inverted pendulum system. In: AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS. **AIP conference proceedings**. [S.l.], 2008. v. 1052, n. 1, p. 124–128.
- OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5. ed. São Paulo, Brasil: Pearson Prentice Hall, 2010. ISBN 978-8576056244.
- PEDROSO, C. C. d. S.; MODESTO, E. L. P. **Sistema de controle de pêndulo invertido**. 2017. Dissertação (B.S. thesis) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2017.
- QUANSER. **Quanser Linear Servo Control Systems Brochure**. [S.l.], 2013. Disponível online. Disponível em: <https://www.quanser.com/products/linear-servo-base-unit-inverted-pendulum/>.
- Quanser Inc. **IP01 and IP02 – Single Inverted Pendulum (SIP): User Manual**. Markham, Ontario, 2008. Document Number: 511, Revision: 03.
- RIBEIRO, J. M. de S. et al. Construção, modelagem e controle, através de clp, de uma planta didática do sistema pêndulo invertido, com utilização de software scada. In: **Proceedings of International Conference on Engineering and Technology Education**. [S.l.: s.n.], 2014. v. 13, p. 218–222.

RIBEIRO, R. **Implementação de um sistema de controle de um pêndulo invertido**. 2007. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, MG, 2007. Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

SANTOS, R. B. **Controle em tempo real de um pêndulo invertido para uso didático**. 2005. Dissertação (Trabalho de Conclusão de Curso) — Universidade Estadual Paulista - Campus de Ilha Solteira, 2005.

SPONG, M. W. et al. **Robot modeling and control**. [S.l.]: Wiley New York, 2006. v. 3.

WANG, Z.; CHEN, S.; HAN, W. Integrated structural and control optimization of intelligent structures. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 21, n. 2, p. 183–191, 1999.