



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Makswell Seyiti Kawashima

Relax and cut: Limitantes Duais para o Problema do
Caixeiro Viajante

São José do Rio Preto
2014

Makswell Seyiti Kawashima

***Relax and cut:* Limitantes Duais para o Problema do
Caixeiro Viajante**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Otimização e Teoria do Controle, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Maria do Socorro Nogueira Rangel.

**São José do Rio Preto
2014**

Kawashima, Makswell Seyiti.

Relax and cut : limitantes duais para o problema do caixeiro viajante / Makswell Seyiti Kawahima. -- São José do Rio Preto, 2014
80 f. : il., gráfs., tabs.

Orientador: Maria do Socorro Nogueira Rangel
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Otimização matemática. 2. Programação (Matemática). 3. Problema do caixeiro viajante. I. Rangel, Maria do Socorro Nogueira. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 519.85

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Makswell Seyiti Kawashima

***Relax and cut: Limitantes Duais para o Problema do
Caixeiro Viajante***

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Otimização e Teoria do Controle, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Maria do Socorro Nogueira Rangel.

Comissão Examinadora

Prof^a. Dr^a. Maria do Socorro Nogueira Rangel
UNESP - São José do Rio Preto
Orientadora

Prof^a. Dr^a. Maristela Oliveira dos Santos
USP - São Carlos

Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
30 de Maio de 2014

Resumo

O Problema do Caixeiro Viajante (PCV) é um problema clássico de Otimização Combinatória. Dado um conjunto de cidades e os custos de viagem entre cada par delas, o objetivo é encontrar um roteiro que passa em todas as cidades apenas uma vez e retorna à cidade de origem de menor custo total. O enunciado simples e resolução não trivial encantaram muitas pessoas ao longo dos anos. Na literatura são apresentadas diversas formulações matemáticas para o Problema do Caixeiro Viajante, além de comparações entre a qualidade da relaxação linear de tais formulações. A formulação clássica para o PCV é forte, porém possui um número exponencial de restrições, e é equivalente à formulação de multiproduto (*multi-commodity*), de ordem polinomial. O custo computacional para resolver a relaxação linear da formulação multiproduto é alto, incentivando a busca de novas formas de obter limitantes duais. Na literatura são propostos procedimentos para obtenção de limitantes duais para o PCV utilizando-se do método *relax and cut*, a partir do problema da designação (PD), dualizando inequações válidas que são violadas pela solução ótima do PD. Neste trabalho, propomos a aplicação do método *relax and cut* para a formulação do PCV com restrições de multiproduto. Os resultados obtidos no estudo computacional são encorajadores, com a implementação de um algoritmo que gera bons limitantes duais com baixo tempo computacional.

Palavras-chave: problema do caixeiro viajante, *relax-and-cut*, relaxação lagrangeana.

Abstract

The Traveling Salesman Problem (TSP) is a classical Combinatorial Optimization problem. Given a set of cities and travel costs between each pair of them, the objective is to find a tour through all the cities, visiting each city once, and returning to the city of origin with minimum total cost. The simple enunciate and non-trivial resolution enchanted many people through the years. In the literature various formulations for the Traveling Salesman Problem are presented, and the quality of the linear relaxation of such formulations is compared. The classical TSP formulation is strong, but have an exponential number of constraints, and is equivalent to the multi-commodity formulation, of polinomial order. The computational cost to solve the linear relaxation of the multi-commodity formulation is high, stimulating the search of new ways of obtaining dual bounds. In the literature, procedures to obtain dual bounds to the TSP using the relax and cut technique are proposed, starting from the assignment problem (AP) and dualizing violated valid inequalities by the AP's optimal solution. In this work, we propose an application of the relax and cut technique to the multi-commodity formulation for the TSP. The results obtained by the computational study are encouraging, with the implementation of an algorithm that generates good dual bounds in low running time.

Keywords: traveling salesman problem, relax and cut, lagrangean relaxation.

Lista de Figuras

2.1	Digrafo simétrico K_5	16
2.2	Digrafo assimétrico.	16
2.3	Grafo associado.	16
2.4	Caminho em K_5	16
2.5	Circuito em K_5	16
2.6	Grafo desconexo.	17
2.7	Grafo conexo.	17
2.8	Clique S	18
2.9	Corte (S, \bar{S})	18
2.10	Ponto de articulação em um grafo.	18
2.11	Ponto de articulação em um digrafo.	18
2.12	Conjuntos alcançáveis.	19
2.13	Solução com subrotas no digrafo K_5	20
3.1	Algoritmo RC-Corte	43
3.2	Matriz de Custos	43
3.3	Grafo da solução.	44
3.4	Custos relativos da solução ótima do PD.	44
3.5	Iteração 1. Grafo admissível G_0	44
3.6	Conjunto de corte Q_1	44
3.7	Matriz de custos relativos. Atualização relativa a Q_1	45
3.8	G_0 após dualização para Q_1	45
3.9	Matriz de custos relativos. Atualização relativa a Q_2	46
3.10	G_0 após dualização para Q_2	46
3.11	Conjunto de corte Q_3	46
3.12	Matriz de custos relativos. Atualização relativa a Q_3	47
3.13	G_0 após dualização para Q_3	47
3.14	Não existência de Circuitos Hamiltonianos em G_0	48
3.15	Matriz de custos.	49
3.16	Matriz de custos relativos associada à solução ótima.	49
3.17	Conjunto de retas C	49
3.18	Algoritmo RC-Clique	56
3.19	Matriz de custos relativos. Atualização relativa a S_1	58
3.20	G_0 após dualização para S_1	58
3.21	Matriz de custos relativos atualizada.	59
3.22	G_0 após dualização para S_1	59

3.23	Algoritmo RC-Articulação	61
3.24	Matriz de custos da instância.	61
3.25	Matriz de custos relativos da solução ótima \bar{x}	61
3.26	Grafo da solução ótima.	62
3.27	Grafo admissível G_0	62
3.28	Matriz de custos após dualização para o ponto de articulação $p = 1$	62
3.29	Grafo Admissível G_0 . Atualização relativa a $p = 1$	62
3.30	Matriz de custos após dualização para o ponto de articulação $p = 6$	63
3.31	Grafo Admissível G_0 . Atualização relativa a $p = 6$	63
3.32	Circuito Hamiltoniano em G_0	64
3.33	Coluna da variável y_{kij}	65
3.34	Algoritmo RC-Multiproduto	71
3.35	Matriz de custos relativos após dualização para $k = 3$	72
3.36	Matriz de custos relativos após dualização para $k = 4$	72
A.1	Matriz de custos e mínimos das linhas.	98
A.2	Matriz de custo atualizadas e mínimos das colunas.	99
A.3	Matriz de custos relativos ao fim do procedimento.	99
A.4	Matriz de custos.	99
A.5	Matriz relativa resultante do Procedimento A.1.	100
A.6	Matriz relativa modificada.	101
A.7	Algoritmo Húngaro	102

Lista de Tabelas

3.1	Comparação dos Algoritmos.	73
4.1	Nome, número de cidades e valor ótimo das instâncias	78
4.2	Soluções inteiras, limitantes duais e <i>gap</i> de integralidade.	79
4.3	Limitantes duais, tempo computacional e valor relativo.	80
4.4	Algoritmos RC-Corte e RC-Multiproduto. Limitantes, tempo computacional, cortes gerados, <i>gap</i> e valor relativo.	81

Sumário

1	Introdução	10
2	Conceitos Básicos	15
2.1	Teoria dos Grafos	15
2.2	Problema do Caixeiro Viajante	19
2.3	Relaxação e Limitantes	23
2.4	Relaxação Lagrangeana	26
2.5	Método Subgradiente	29
3	O método <i>Relax and Cut</i>	35
3.1	O método <i>relax and cut</i> aplicado ao PCVA	36
3.1.1	Procedimento <i>relax and cut</i> com restrições de corte . . .	40
3.1.2	Procedimento <i>relax and cut</i> com restrições de clique . . .	47
3.1.3	Procedimento <i>relax and cut</i> com restrições de pontos de articulação	59
3.2	Método RC para restrições de multiproduto	64
4	Estudo Computacional	77
4.1	Descrição dos experimentos	77
4.2	Resultados das Relaxações	78
4.3	Resultados do Método <i>Relax and Cut</i>	79
4.4	Conclusão do Estudo Computacional	82
5	Considerações Finais	85
	Apêndice	93
A	Algoritmo Húngaro	97

1

Introdução

Atualmente, muitos problemas do cotidiano são de grande porte. Para resolvê-los, utilizam-se diversos recursos: modelagem matemática, solução de instâncias usando sistemas gerais de resolução comerciais ou não-comerciais, desenvolvimento de algoritmos específicos, entre vários outros. Essas técnicas são implementadas computacionalmente e muitas vezes exigem máquinas de alto desempenho. Um exemplo de problema com essa característica é a previsão do tempo, que envolve milhares de variáveis para prever o clima futuro em um determinado período de tempo. Porém, esse não é o único problema que pode ser representado por um modelo matemático. Encontrar o melhor caminho entre dois pontos de uma cidade; planejar a produção de algum item visando o menor gasto possível ou o maior lucro; organizar tarefas com o objetivo de obter maior eficiência em menor tempo possível; são exemplos de problemas com modelagem matemática conhecida. Uma das formas de representar estes problemas é através de modelos de Otimização Linear. Uma área mais restrita da Otimização Linear é a Otimização Linear Inteira, que trata, entre outros assuntos, de modelos e métodos de solução para problemas de natureza combinatória.

Considere um conjunto de cidades e os custos de viagem entre cada par delas. O objetivo é encontrar um roteiro que passa por todas as cidades apenas uma vez e retorna à cidade de origem com menor custo possível. Este exemplo de aplicação é conhecido como Problema do Caixeiro Viajante (PCV). O custo (ou o tempo) da viagem de ida e da viagem de volta entre cada par de cidades pode ser diferente. No caso em que, para pelo menos uma cidade, há diferença entre os custos de ida e volta temos um Problema do Caixeiro Viajante Assimétrico (PCVA). Do contrário, dizemos que é um Problema do Caixeiro Viajante Simétrico (PCVS). Neste trabalho trataremos o caso assimétrico. A busca por métodos para a resolução do PCVA, assim como outros problemas de Otimização Combinatória, tem sido o foco de muitos pesquisadores. Atualmente, tais algoritmos têm complexidade computacional de ordem exponencial, o que coloca o PCVA numa categoria de problemas difíceis de se resolver.

Em geral, métodos para resolução de problemas de Otimização Inteira são baseados na determinação de limitantes duais e primais, iterativamente, até

1. INTRODUÇÃO

que a diferença entre um limitante dual, LD, e um limitante primal, LP, seja suficientemente pequena ($|LD - LP| < \epsilon$). Porém, a tarefa de encontrar tais limitantes não é fácil. Limitantes primais são, em suma, soluções factíveis para um problema. Uma forma de encontrar limitantes duais é através de relaxações (ver [25]). Estes conceitos são discutidos no Capítulo 2.

Dentre as várias relaxações possíveis para um problema de Otimização Inteira, está a Relaxação Lagrangeana (Seção 2.4). A Relaxação Lagrangeana, em geral, possui um custo computacional muito baixo. Ela consiste em penalizar restrições complicadas do modelo na função objetivo. Muitos modelos possuem um número elevado de restrições. Ao dualizar todas as restrições obtemos uma função objetivo contendo também muitas variáveis, o que pode dificultar a resolução do problema. Nestes casos, pode ser utilizada a técnica *relax and cut*. Ao invés de dualizar todas as restrições de uma só vez, identificam-se inequações válidas violadas pela solução atual e dualizam-se as inequações identificadas que forneçam uma melhora no limitante dual atual. Para a atualização de multiplicadores lagrangeanos na técnica *relax and cut*, tem-se utilizado o Método do Subgradiente, que consiste num método genérico para resolução do problema Dual Lagrangeano (DL). A técnica *relax and cut* pode então acelerar a obtenção de limitantes duais. Neste trabalho, utilizamos o termo *relax and cut* relacionado à relaxação lagrangeana. Note que os métodos de planos de corte usados para resolver problemas de otimização inteira [17], se encaixam na definição de um método *relax and cut*.

Balas e Christofides [1] aplicam a técnica *relax and cut* para o Problema do Caixeiro Viajante Assimétrico (PCVA) com as restrições de eliminação de subrotas de Dantzig, Fulkerson e Johnson (DFJ) [5], porém, sem utilizar o Método Subgradiente para resolver o DL. Eles exploram a natureza combinatoria das restrições para atualizar os multiplicadores de Lagrange. Öncan e outros [19] fazem uma revisão de várias formulações para o PCVA e comparam a qualidade da relaxação linear de tais formulações. A formulação DFJ é uma das mais fortes, porém possui um número exponencial de restrições, e é equivalente à formulação de multiproduto (*multi-commodity*), de ordem polinomial. Mesmo a ordem polinomial da formulação do PCVA com restrições de multiproduto não impede que o custo computacional de resolver a relaxação linear seja alto.

Neste trabalho, propomos a aplicação da técnica *relax and cut* para o PCVA com restrições de multiproduto (PCVA-MP). Como a qualidade dos limitantes duais das restrições DFJ e multiproduto são equivalentes, nos inspiramos nas ideias do trabalho de Balas e Christofides [1] para atualizar os multiplicadores de Lagrange usando características específicas das restrições do tipo multiproduto. Também revisamos os procedimentos desenvolvidos para as restrições DFJ, o que pode ser visto no Capítulo 3. No Capítulo 4 apresentamos experimentos computacionais efetuados com o algoritmo RC-Corte, baseado nas restrições de corte para eliminação de subrotas, proposto por Balas e Christofides, e o algoritmo RC-Multiproduto, baseado nas restrições de multiproduto

para eliminação de subrotas, proposto nesse trabalho. Os testes foram realizados com instâncias da biblioteca TSPLIB [24]. Os resultados obtidos são encorajadores, sendo que ambos os algoritmos RC-Corte e RC-Multiproduto obtiveram bons limitantes duais com baixo tempo computacional, bem inferior ao tempo despendido para a solução da relaxação linear da formulação PCVA-MP. Considerações finais são expostas no Capítulo 5. Consideramos que o leitor possua conhecimentos em Teoria dos Grafos, Otimização Linear Contínua, Dualidade e Otimização Inteira Mista.

1. INTRODUÇÃO

2

Conceitos Básicos

Neste capítulo apresentamos o embasamento teórico necessário para a compreensão dos desenvolvimentos do Capítulo 3. Alguns conceitos de Teoria dos Grafos, o Teorema das Folgas Complementares, conceito de relaxação e limitantes, e formulações para o PCVA são descritos neste capítulo. Para um estudo mais aprofundado consulte [2], [10], [14], [18] e [19].

2.1 Teoria dos Grafos

Definição 2.1. Um *grafo* é uma estrutura $G(V, A)$, onde V é um conjunto discreto, cujos elementos são chamados *vértices*, e A é uma família de pares de vértices, denominadas *arestas*. A ordem do grafo é o valor $n = |V|$, enquanto $m = |A|$ é o tamanho do grafo.

Definição 2.2. Um *digrafo*, ou grafo orientado, é um grafo onde o conjunto das arestas A é formado por pares *ordenados* de vértices.

Definição 2.3. Dado um digrafo $G(V, A)$, define-se seu grafo *associado* (ou grafo subjacente) tomando o mesmo conjunto de vértices e substituindo as arestas orientadas por arestas não-orientadas.

Definição 2.4. Um grafo é *completo* se entre cada par de vértices existe pelo menos uma aresta. Geralmente denota-se um grafo completo de ordem n por K_n .

Definição 2.5. Um digrafo é dito *simétrico* se para toda aresta $(i, j) \in A$, existe a aresta $(j, i) \in A$.

Exemplo 2.1. A Figura 2.1 mostra um digrafo completo simétrico com cinco vértices (K_5). A Figura 2.2 mostra um digrafo completo assimétrico. A Figura 2.3 representa o grafo associado a ambos os digrafos.

2.1. TEORIA DOS GRAFOS

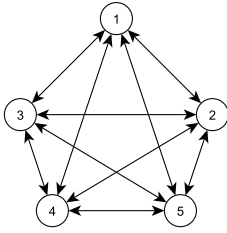


Figura 2.1: Digrafo simétrico K_5

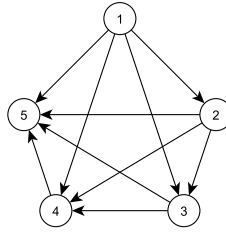


Figura 2.2: Digrafo assimétrico K_5

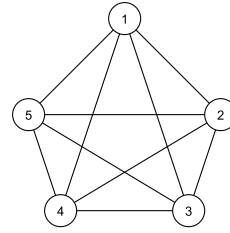


Figura 2.3: Grafo associado K_5

Para as definições apresentadas a seguir consideraremos um grafo $G(V, A)$, $|V| = n$, $|A| = m$, salvo quando for dito o contrário.

Definição 2.6. Um *caminho* é uma sequência alternada de vértices e arestas adjacentes na qual não há a repetição de arestas nem de vértices. Para grafos orientados a adjacência deve ser sucessiva.

Definição 2.7. Um *circuito* é uma sequência alternada de vértices e arestas adjacentes na qual o primeiro e último vértices são iguais, e os demais são todos distintos. Para grafos orientados, a adjacência deve ser sucessiva.

Definição 2.8. Um circuito é dito *hamiltoniano* se contém todos os vértices do grafo.

Exemplo 2.2. A Figura 2.4 exibe o caminho $C = \{1, (1, 2), 2, (2, 4), 4\}$ e a Figura 2.5 mostra o circuito $C = \{1, (1, 2), 2, (2, 5), 5, (5, 1), 1\}$.

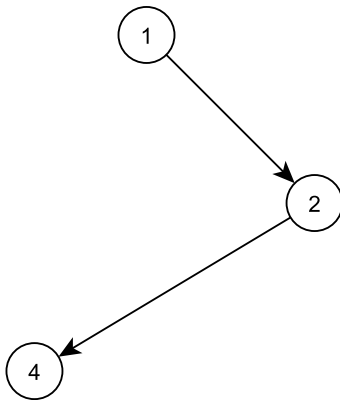


Figura 2.4: Caminho em K_5 .

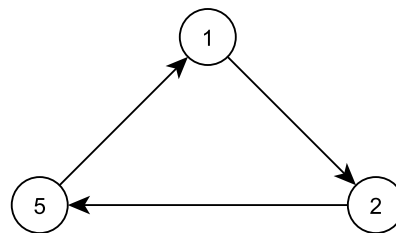


Figura 2.5: Circuito em K_5

Definição 2.9. Um grafo é dito *conexo* se, para cada par de vértices $i, j \in V$ existe um caminho que começa em i e termina em j , ou vice-versa. Um digrafo é conexo se seu grafo associado é conexo. Se existe um caminho entre quaisquer pares de vértices num digrafo G , G é dito *fortemente conexo*.

2. CONCEITOS BÁSICOS

Exemplo 2.3. Podemos ver no grafo da Figura 2.6 um grafo desconexo, pois não existe, por exemplo, caminho entre os vértices 2 e 5. A Figura 2.7 mostra um grafo conexo.

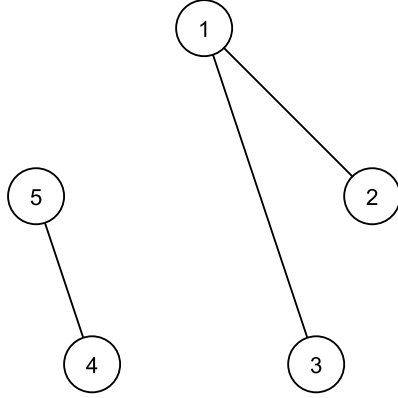


Figura 2.6: Grafo desconexo.

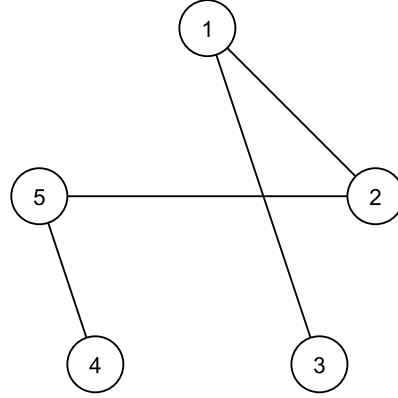


Figura 2.7: Grafo conexo.

Definição 2.10. Um *clique* $K \subseteq V$ é um subconjunto de vértices para o qual a cada dois vértices $i, j \in K$ existe uma aresta $(i, j) \in A$, isto é, o subgrafo gerado por K é completo.

Definição 2.11. Dado um digrafo $G(V, A)$ conexo, sejam $S, W \subset V$. Considere o conjunto $(S, W) = \{(i, j) \in A \mid i \in S, j \in W\}$. Se o subgrafo $G' = G'(V, A \setminus (S, W))$ for desconexo, então (S, W) é um *conjunto de corte* de G , isto é, retirando as arestas de (S, W) , G se torna desconexo.

Num digrafo completo simétrico, dado um subconjunto $S \subset V$, e seu complementar $\bar{S} = V \setminus S$, o conjunto de arestas (S, \bar{S}) é um conjunto de corte.

Exemplo 2.4. Considerando no digrafo completo K_5 (Figura 2.1) o subconjunto $S = \{1, 2, 3\}$, temos na Figura 2.8 a representação do clique S . Na Figura 2.9 o corte $(S, \bar{S}) = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}$, S representado pelos vértices em destaque.

Definição 2.12. Seja $G(V, A)$ um grafo conexo. Um vértice $p \in V$ é um *ponto de articulação* se sua retirada de G torna o grafo desconexo, isto é, $G'(V \setminus \{p\}, A')$ é desconexo (A' é o conjunto das arestas de A sem as arestas que incidem sobre p). Em digrafos, $p \in V$ é considerado um ponto de articulação se sua retirada torna o digrafo desconexo ou se torna um digrafo fortemente conexo num digrafo simplesmente conexo.

Exemplo 2.5. Na Figura 2.10, o vértice 5 é um ponto de articulação pois sua retirada torna um grafo conexo, desconexo.

A Figura 2.11 mostra um digrafo fortemente conexo que, após a retirada do vértice 2 se torna um digrafo simplesmente conexo. Nesse caso, o vértice 2 é um ponto de articulação.

2.1. TEORIA DOS GRAFOS

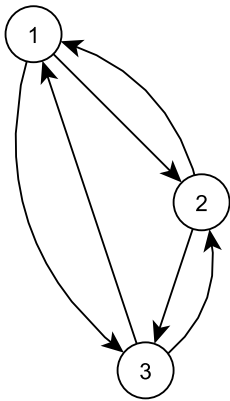


Figura 2.8: Clique S .

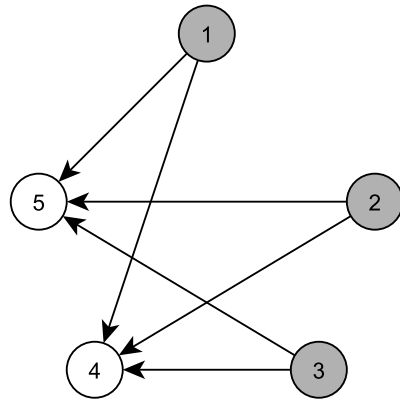


Figura 2.9: Corte (S, \bar{S}) .

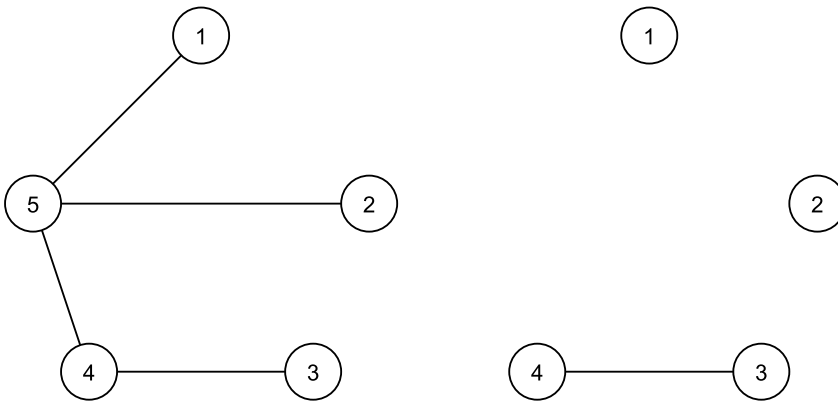


Figura 2.10: Ponto de articulação em um grafo.

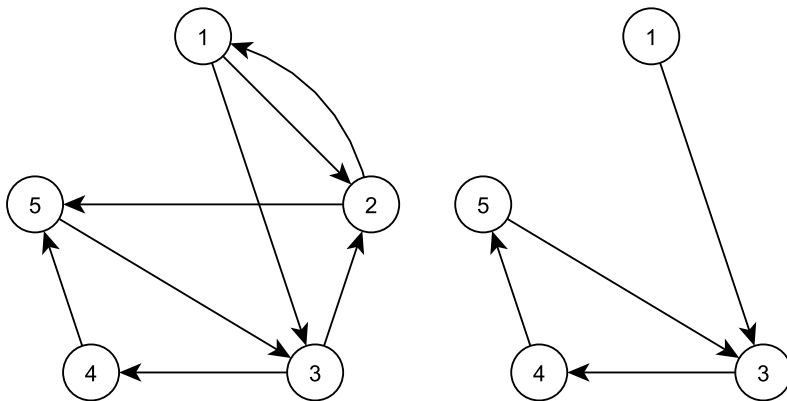


Figura 2.11: Ponto de articulação em um digrafo.

Definição 2.13. Dado um vértice $i \in V$ de um grafo (digrafo) $G(V, A)$, de-

2. CONCEITOS BÁSICOS

definimos o *conjunto alcançável* de i , $R(i)$, como o conjunto dos vértices $j \in V$ tais que existe um caminho de i para j em G . Note que $i \in R(i)$ para todo $i \in V$.

Exemplo 2.6. No grafo representado na Figura 2.12a), pode-se observar que $R(1) = R(2) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e que $R(3) = R(4) = R(5) = \{3, 4, 5\}$. As figuras 2.12b) e c) ilustram os caminhos dos vértices 1 e 2 para os vértices em $R(1)$ e $R(2)$, e os caminhos dos vértices 3, 4 e 5 para os vértices em $R(3)$, $R(4)$ e $R(5)$, respectivamente.

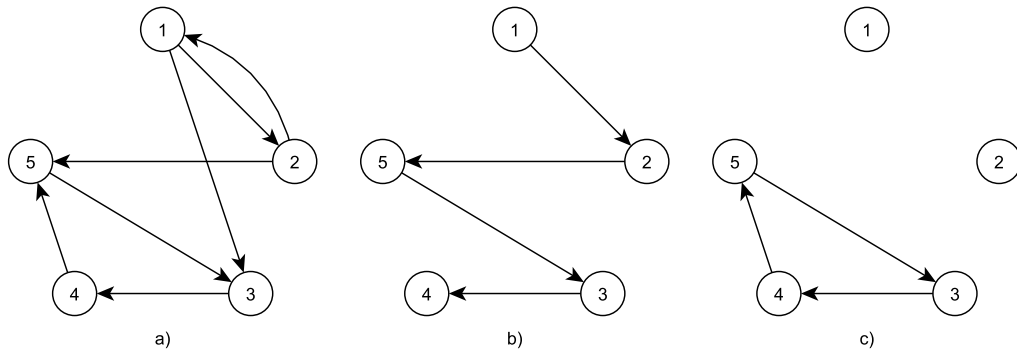


Figura 2.12: Conjuntos alcançáveis.

2.2 Formulações para o Problema do Caixeiro Viajante

Considere um conjunto de cidades e os custos de viagem entre cada par delas. O Problema do Caixeiro Viajante (PCV) consiste em encontrar o roteiro de menor custo passando uma vez por cada cidade e retornando à cidade de origem. O problema é dito assimétrico (PCVA) se para pelo menos um par de cidades o custo de ida é diferente do custo de volta.

O PCVA pode ser representado através de um digrafo completo $G(V, A)$, com $|V| = n$ e $|A| = m$ e uma matriz de custos, sendo cada custo c_{ij} associado a aresta (i, j) .

Para modelar o problema, a decisão a ser tomada é se uma aresta (i, j) estará no circuito hamiltoniano ou não. Assim, definimos a variável x_{ij} que tem valor $x_{ij} = 1$ se (i, j) pertence à solução do problema; senão, $x_{ij} = 0$. Sendo nosso objetivo encontrar o circuito hamiltoniano de menor custo, a função objetivo (2.1) sintetiza esse intuito somando o custo associado a cada aresta utilizada na solução do problema. Como desejamos que a solução seja um circuito, cada vértice i deve ser sucedido por apenas um vértice j , o que pode ser garantido pelas restrições (2.2). Além disso, cada vértice deve possuir apenas um antecessor, o que é garantido pelo conjunto de restrições (2.3).

2.2. PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

O problema de Otimização Combinatória conhecido como Problema da Designação (PD) pode ser formulado como um problema de Otimização Inteira pelas restrições (2.1), (2.2), (2.3), juntamente com o domínio das variáveis dado na restrição (2.5). Dado um conjunto de tarefas e um conjunto de pessoas, no PD busca-se a melhor designação de tarefas às pessoas, levando em conta o custo de cada pessoa executar cada tarefa. Uma solução para o PD pode ser uma solução para o PCVA, mas não necessariamente.

Suponha uma solução do PD para um problema associado ao digrafo completo K_5 tendo $x_{12} = x_{23} = x_{31} = x_{45} = x_{54} = 1$ e $x_{ij} = 0$ para as demais arestas, representada na Figura 2.13. Observe que as restrições do PD estão satisfeitas para todos os vértices, mas a solução não é um circuito hamiltoniano. Chamamos este tipo de estrutura de *subrota*, isto é, uma solução cujas arestas formam circuitos que não contém todos os vértices. Para evitar tais soluções utilizam-se restrições de eliminação de subrotas. Dessa forma, uma formulação genérica para o PCVA é dada por (2.1)-(2.5).

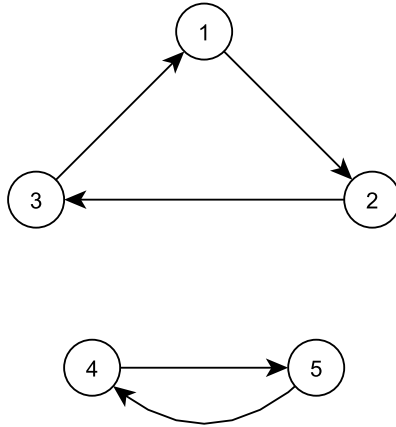


Figura 2.13: Solução com subrotas no digrafo K_5 .

$$\text{Minimizar } \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} x_{ij} \quad (2.1)$$

sujeito a

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 1, i \in V \quad (2.2)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1, j \in V \quad (2.3)$$

$$\text{Restrições de Eliminação de Subrotas} \quad (2.4)$$

$$x_{ij} = 0/1, i, j \in V. \quad (2.5)$$

Definição 2.14. Dado um digrafo $G(V, A)$, $|V| = n$, $|A| = m$. Seja $G'(\hat{x}) = (V', A')$, $V' \subset V$, $A' \subset A$ um subgrafo de G . O vetor de incidência \hat{x} de $G'(\hat{x})$

2. CONCEITOS BÁSICOS

é um vetor $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_m)$ tal que:

$$\begin{cases} \hat{x}_e = 1, & \text{se } e \in A'; \\ \hat{x}_e = 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Qualquer solução factível para o modelo (2.1)-(2.5) fornece um vetor de incidência de um circuito hamiltoniano.

Dantzig, Fulkerson e Johnson [5] propuseram as restrições de eliminação de subrotas do tipo clique (2.6) e do tipo corte (2.7). Ambas (2.6) e (2.7) são referidas como restrições DFJ.

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \forall S \subset V, S \neq \emptyset. \quad (2.6)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in \bar{S}} x_{ij} \geq 1, \forall S \subset V, S \neq \emptyset. \quad (2.7)$$

Exemplo 2.7. Considerando a solução da Figura 2.13, considerando o subconjunto $S = \{1, 2, 3\}$ teremos que as restrições de clique não são satisfeitas. Em (2.8) temos a restrição referente a S . Tendo $x_{12} = x_{23} = x_{31} = 1$, o lado direito de (2.8) soma 3.

$$x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{23} + x_{31} + x_{32} \leq 2. \quad (2.8)$$

As restrições de corte para S também são violadas. O conjunto de corte é $(S, \bar{S} = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\})$. Em (2.9) temos a restrição de corte relativa a S . Como nenhuma variáveis associadas as arestas do corte (S, \bar{S}) têm valor 1, o lado direito soma zero.

$$x_{14} + x_{15} + x_{24} + x_{25} + x_{34} + x_{35} \geq 1. \quad (2.9)$$

Proposição 2.1. *As restrições do tipo clique (2.6) são equivalentes às restrições de corte (2.7).*

Demonstração. Adaptado de [20]. Seja $S \subset V, S \neq \emptyset$, e $\bar{S} = V \setminus S$. Observe que, sendo $V = S \cup \bar{S}$, o lado direito de (2.6) pode ser reescrito como:

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} = \sum_{i \in S} \left(\sum_{j \in V} x_{ij} - \sum_{j \in \bar{S}} x_{ij} \right). \quad (2.10)$$

Somando as restrições (2.2) para $i \in S$, temos que:

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in V} x_{ij} = \sum_{i \in S} 1 = |S|. \quad (2.11)$$

A expressão do lado direito de (2.10) pode ser escrita como:

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in V} x_{ij} - \sum_{i \in S} \sum_{j \in \bar{S}} x_{ij}. \quad (2.12)$$

2.2. PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

Substituindo (2.11) no lado direito de (2.10) obtemos

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} = |S| - \sum_{i \in S} \sum_{j \in \bar{S}} x_{ij}. \quad (2.13)$$

Substituindo (2.13) em (2.6), temos

$$|S| - \sum_{i \in S} \sum_{j \in \bar{S}} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad (2.14)$$

$$\Leftrightarrow - \sum_{i \in S} \sum_{j \in \bar{S}} x_{ij} \leq -1 \quad (2.15)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i \in S} \sum_{j \in \bar{S}} x_{ij} \geq 1. \quad (2.16)$$

□

O modelo PCVA-DFJ é obtido substituindo (2.4) por (2.6) ou (2.7).

Balas e Christofides [1] apresentam um conjunto de restrições de eliminação de subrotas baseados no conceito de pontos de articulação (Definição 2.12). Consideraremos apenas os pontos que tornam o digrafo desconexo. A existência de um ponto de articulação em um subgrafo conexo G' de um grafo completo K_n impede que G' seja um circuito hamiltoniano. De fato, suponha que as arestas (p^-, p) e (p, p^+) pertençam a G' e que p é um ponto de articulação. Pela definição de ponto de articulação, a retirada de p do subgrafo G' tornará o grafo desconexo. Assim, o único caminho entre p^- e p^+ é $\{p^-, p, p^+\}$, o que não caracteriza um circuito.

Seja $p \in V$ um ponto de articulação e S_p uma das componentes conexas de $V \setminus \{p\}$, e $G'(V', A')$ o grafo resultante da retirada de p do grafo $G(V, A)$. Defina W_p como o complementar de S_p em $V \setminus \{p\}$. Seja $Q'_p = \{(i, j) \in A' \mid i \in S_p, j \in W_p\}$ e $Q''_p = \{(i, j) \in A' \mid i \in W_p, j \in S_p\}$. Então, um circuito hamiltoniano satisfaz as restrições de eliminação de subrotas do tipo ponto de articulação (2.17).

$$\sum_{(i,j) \in Q'_p \cup Q''_p} x_{ij} \geq 1. \quad (2.17)$$

As restrições DFJ envolvem apenas as variáveis x_{ij} . O PCVA tem formulações estendidas, no sentido de que mais variáveis são utilizadas, para modelar restrições de eliminação de subrotas. Uma das primeiras classes de restrições de eliminação de subrotas estendidas foram as restrições de Miller, Tucker e Zemlin (MTZ), que, originalmente, foram propostas para o problema de roteamento de veículos (ver [19]). A partir da formulação genérica (2.1)-(2.5), substituímos (2.4) por (2.18)-(2.20). As variáveis u_i representam a ordem que o vértice i será visitado no circuito hamiltoniano formado, tomando como cidade

2. CONCEITOS BÁSICOS

inicial $i = 1$ e tendo $u_1 = 0$.

$$u_i - u_j + (n - 1)x_{ij} \leq n - 2, \quad i, j = 2, \dots, n \quad (2.18)$$

$$1 \leq u_i \leq n - 1, \quad i = 2, \dots, n \quad (2.19)$$

$$u_i \geq 0, \quad i = 2, \dots, n. \quad (2.20)$$

Outra formulação estendida para o PCVA foi proposta por Claus [4], tratando o PCVA como um problema de fluxo de multiprodutos em uma rede. No vértice inicial, 1, estão disponíveis $n - 1$ produtos, uma unidade de cada. No vértice $j \in V \setminus \{1\}$ existe uma demanda de uma unidade para o produto j . A variável y_{kij} representa se há fluxo do produto k na aresta (i, j) . Este fluxo só é permitido se $x_{ij} = 1$, o que é representado pelas restrições (2.24). Cada produto k deve ser escoado do vértice 1. Além disso, o produto não deve retornar ao vértice inicial. As restrições (2.21) garantem essas condições, sendo a saída garantida no primeiro somatório e o não retorno dos produtos pelo segundo somatório. Os demais vértices $k \in V \setminus \{1\}$ devem ser destino de seus respectivos produtos, e é necessário que tais produtos não sigam adiante, o que é garantido pelas restrições (2.22). As restrições (2.23) são as restrições de transbordo, que garantem que o produto k não fique retido em vértices diferentes de seu destino.

O modelo para o PCVA com restrições de multiproduto (PCVA-MP) é descrito substituindo (2.4) pelas restrições (2.21)-(2.24).

$$\sum_{i \in V} y_{k1i} - \sum_{i \in V} y_{ki1} = 1, \quad k \in V \setminus \{1\} \quad (2.21)$$

$$\sum_{i \in V} y_{kik} - \sum_{i \in V} y_{kki} = 1, \quad k \in V \setminus \{1\} \quad (2.22)$$

$$\sum_{i \in V \setminus \{1\}} y_{kij} - \sum_{i \in V \setminus \{1\}} y_{kji} = 0, \quad j, k \in V \setminus \{1\}, j \neq k \quad (2.23)$$

$$y_{kij} \leq x_{ij}, \quad i, j, k \in V, k \neq 1 \quad (2.24)$$

A formulação PCVA-MP é polinomial e a qualidade dos limitantes duais fornecidos por sua relaxação linear se equivale a qualidade do PCVA-DFJ com restrições de eliminação de subrotas do tipo clique. Mesmo sendo polinomial, o custo computacional e o tempo para resolver certas instâncias do PCVA-MP é muito elevado, como pode ser comprovado no estudo computacional descrito no Capítulo 4. Outras formulações para o PCVA são discutidas e analisadas em [19].

2.3 Relaxação e Limitantes

O estudo da dualidade nos permite validar métodos propostos para a resolução de problemas de Otimização Linear e Inteira. Nesta seção, revisamos o teorema

2.3. RELAXAÇÃO E LIMITANTES

das folgas complementares e sua demonstração. Considere um problema de otimização linear:

$$\text{Minimizar } cx \quad (2.25)$$

$$\text{sujeito a } Ax \geq b \quad (2.26)$$

$$x \geq 0, \quad (2.27)$$

sendo $m, n \in \mathbb{Z}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x = (x_j)$, $c = (c_j) \in \mathbb{R}^n$ e $b = (b_i) \in \mathbb{R}^m$.

Para o problema (2.25)-(2.27), que chamaremos problema primal, ou, simplesmente, primal, existe um problema de otimização linear relacionado, chamado problema dual, definido por (2.28)-(2.30), sendo $\lambda \in \mathbb{R}^m$.

$$\text{Maximizar } \lambda b \quad (2.28)$$

$$\text{sujeito a } \lambda A \leq c \quad (2.29)$$

$$\lambda \geq 0. \quad (2.30)$$

O Teorema das Folgas Complementares nos dá uma condição necessária e suficiente para que duas soluções x^* e λ^* primal e dual factíveis, respectivamente, sejam ótimas. Observe que, para a demonstração do Teorema 2.3, utilizamos Teorema da Dualidade Forte (2.2) que assegura que se x^* e λ^* são soluções ótimas para um par de problemas primal e dual, respectivamente, então $cx^* = \lambda^*b$ (ver [2]).

Teorema 2.2. *(Dualidade Forte) Considere um par de problemas primal e dual. Se um dos problemas possui uma solução ótima, então ambos os problemas possuem soluções ótimas e o valor ótimo das duas soluções é igual.*

Teorema 2.3. *Sejam x^* e λ^* duas soluções quaisquer factíveis para um par de problemas primal e dual. Tais soluções são ótimas primal e dual, respectivamente, se e somente se,*

$$(c_j - \lambda^* \mathbf{a}_j)x_j^* = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.31)$$

$$\lambda_i^*(\mathbf{a}^i x^* - b_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.32)$$

\mathbf{a}_j representando a j -ésima coluna da matriz A e \mathbf{a}^i representando sua i -ésima linha.

Demonstração. (Suficiência) Se x^* e λ^* são soluções ótimas para os problemas primal e dual, temos

$$cx^* = \lambda^*b \Leftrightarrow cx^* - \lambda^*b = 0. \quad (2.33)$$

Somando e subtraindo o termo (λ^*Ax^*) a (2.33) obtemos:

$$\lambda^*Ax^* - \lambda^*b + cx^* - \lambda^*Ax^* = 0 \quad (2.34)$$

$$\Leftrightarrow \lambda^*(Ax^* - b) + (c - \lambda^*A)x^* = 0. \quad (2.35)$$

2. CONCEITOS BÁSICOS

Por x^* e λ^* serem soluções factíveis, temos $Ax^* - b \geq 0$, $x \geq 0$, $c - \lambda^*A \geq 0$ e $\lambda^* \geq 0$. Assim, sabendo que o lado esquerdo de (2.35) é uma soma de termos não-negativos, a soma só pode ser nula se cada um dos termos for também nulo, isto é,

$$(c - \lambda^*A)x^* = 0, \text{ e} \quad (2.36)$$

$$\lambda^*(Ax^* - b) = 0. \quad (2.37)$$

Observe que (2.36) implica (2.31) e que (2.37) implica (2.32). Portanto a tese está demonstrada.

(*Necessidade*) Suponha que (2.31) e (2.32) ocorrem.

$$\lambda^*(Ax - b) = 0 \quad (2.38)$$

$$\Leftrightarrow \lambda^*Ax^* - \lambda^*b = 0 \quad (2.39)$$

$$\Leftrightarrow \lambda^*Ax^* = \lambda^*b. \quad (2.40)$$

Por outro lado,

$$(c - \lambda^*A)x^* = 0 \quad (2.41)$$

$$\Leftrightarrow cx^* - \lambda^*Ax^* = 0 \quad (2.42)$$

$$\Leftrightarrow cx^* = \lambda^*Ax^*. \quad (2.43)$$

De (2.40) e (2.43),

$$cx^* = \lambda^*b. \quad (2.44)$$

Como x^* é primal factível e λ^* é dual factível, x^* e λ^* são ótimas. \square

Considere o problema de otimização inteira (P) definido por (2.45) e (2.46):

$$\text{Minimizar } f(x) = cx \quad (2.45)$$

$$\text{sujeito a } x \in X, \quad (2.46)$$

sendo $X \subset \mathbb{Z}^n$ um conjunto de restrições sobre x . Denotaremos o valor ótimo de (P) por $v(P)$. Como podemos garantir que um vetor x^* é uma solução ótima para (P)?

Uma solução x' factível para (P) fornece um *limitante primal* para o valor ótimo do problema. No caso de problemas de minimização, um limitante primal terá um valor maior do que o valor ótimo. No caso do PCVA, considerando um digrafo completo, quaisquer permutações de pares de cidades fornece uma solução factível, mas nem todo problema de otimização inteira nos permite encontrar uma solução factível de maneira simples. Em alguns casos, encontrar uma solução factível pode ser tão difícil quanto encontrar a solução ótima para o problema.

Mostrar que uma solução é ótima para um problema de Otimização Inteira (OI) pode ser feito através da comparação de limitantes superiores e limitantes inferiores. Sejam $\{LI_1, LI_2, \dots, LI_u\}$ limitantes inferiores tais que $LI_1 \leq LI_2 \leq$

2.4. RELAXAÇÃO LAGRANGEANA

$\dots \leq LI_u \leq v(P)$ e $\{LS_1, LS_2, \dots, LS_v\}$ limitantes superiores tais que $LS_1 \geq LS_2 \geq \dots \geq LS_v \geq v(P)$. Note que,

$$LI_1 \leq LI_2 \leq \dots \leq LI_u \leq v(P) \leq LS_v \leq \dots \leq LS_2 \leq LS_1.$$

Tomando uma tolerância $\epsilon > 0$ o valor $LS_v - LI_u$ nos fornece quão próximo estamos do valor ótimo.

Para um problema de minimização, um limitante inferior é o que chamamos de *limitante dual*. Uma das formas mais utilizadas para encontrar limitantes duais é através de relaxações.

Definição 2.15. Seja (P) um problema de otimização inteira. Seja Y um conjunto de restrições para x e (RP) o problema definido por (2.47) e (2.48):

$$\text{Minimizar } g(x) \tag{2.47}$$

$$\text{sujeito a } x \in Y. \tag{2.48}$$

(RP) é uma relaxação de (P) se:

- (i) O conjunto factível de (P) estiver contido no conjunto factível de (RP) , isto é, $X \subset Y$;
- (ii) e para todo $x \in X$, $g(x) \leq f(x)$.

Definição 2.16. Suponha que em (P) , $X = D \cap \mathbb{Z}^n$, $D \subset \mathbb{R}_+^n$. O problema (RLP) , definido por (2.49)-(2.50) é uma *relaxação linear* de (P) .

$$\text{Minimizar } f(x) = cx \tag{2.49}$$

$$\text{sujeito a } x \in D. \tag{2.50}$$

Uma relaxação linear é uma relaxação, pois $X \subseteq D$ e as funções objetivo de (P) e (RLP) são as mesmas.

Definição 2.17. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ e considere a inequação

$$ax \leq b. \tag{2.51}$$

Dizemos que (2.51) é uma inequação válida para X se, para todo $x' \in X$, $ax' \leq b$ é satisfeita.

2.4 Relaxação Lagrangeana

Uma alternativa para obter limitantes duais para um problema de otimização inteira mista é a Relaxação Lagrangeana, que é apresentada nesta seção

2. CONCEITOS BÁSICOS

tomando por base [10]. Considere um problema de otimização linear inteira mista (P) definido por (2.52)-(2.55).

$$\text{Minimizar } f(x) \quad (2.52)$$

$$\text{sujeito a } Ax \leq b \quad (2.53)$$

$$Cx \leq d \quad (2.54)$$

$$x \in X, \quad (2.55)$$

sendo X um conjunto de restrições de sinal e integralidade sobre x . Considere também que o conjunto de restrições $Ax \leq b$ seja complicado, no sentido de que a resolução de (P) seria muito mais simples na ausência de tais restrições.

Dado um valor $\lambda \geq 0$, a relaxação lagrangeana de (P) é o problema (RL_λ), definido pelas restrições (2.56)-(2.58):

$$g(\lambda) = \min f(x) + \lambda(Ax - b) \quad (2.56)$$

$$\text{sujeito a } Cx \leq d \quad (2.57)$$

$$x \in X. \quad (2.58)$$

O problema (RL_λ) é uma relaxação para (P), pois $\{x \in X | Cx \leq d\} \supset \{x \in X | Ax \leq b, Cx \leq d\}$, e se x é factível para (P) então o termo $\lambda(Ax - b)$ se torna negativo ou nulo, o que implica $f(x) + \lambda(Ax - b) \leq f(x)$. A qualidade do limitante inferior $g(\lambda)$ depende dos valores dados a λ . Assim, é natural buscar o valor de λ que nos dê o melhor limitante dual. O problema assim definido é chamado problema Dual Lagrangeano (2.59):

$$v(RL) = \max_{\lambda \geq 0} g(\lambda). \quad (2.59)$$

Para resolver (2.59) existem vários métodos, como o método subgradiente (descrito na Seção 2.5) e o algoritmo de volume [10].

O Teorema 2.4 nos dá uma interpretação geométrica do Dual Lagrangeano no espaço da variável x , isto é, no espaço primal (o espaço dual sendo aquele dos multiplicadores lagrangeanos λ), e isto nos permite estudar esquemas da Relaxação Lagrangeana.

Teorema 2.4. [10] *Seja $\text{conv}(X)$ o envoltório convexo do conjunto X . O dual lagrangeano (RL) é equivalente à relaxação primal (RP) definido por (2.60):*

$$\min_x \left\{ f(x) | Ax \leq b, x \in \text{conv}(\{x \in X | Cx \leq d, x \in R^n\}) \right\}, \quad (2.60)$$

no sentido que $v(RL) = v(RP)$.

A qualidade da relaxação lagrangeana pode ser comparada com o valor da relaxação linear (RLP) do problema (P). Podemos escrever (RLP) da seguinte forma:

$$\min_x \left\{ f(x) | Ax \leq b, Cx \leq d, x \in R^n \right\}. \quad (2.61)$$

2.4. RELAXAÇÃO LAGRANGEANA

Uma vez que $\text{conv}(\{x \in X \mid Cx \leq d\}) \subseteq \{x \in R^n \mid Cx \leq d\}$, vale a desigualdade

$$v(RLP) \leq v(RP). \quad (2.62)$$

Definição 2.18. Dizemos que uma relaxação lagrangeana (RL_λ) possui a *propriedade de integralidade* se $\text{conv}(\{x \in X \mid Cx \leq d\}) = \{x \in R^n \mid Cx \leq d\}$.

Em vista da Definição 2.18, e do Teorema 2.4, concluímos o seguinte resultado.

Corolário 2.5. [10] Se $\text{conv}(\{x \in X \mid Cx \leq d\}) = \{x \mid Cx \leq d\}$, então $v(RLP) = v(RP) = v(RL) \leq v(P)$. Se $\text{conv}(\{x \in X \mid Cx \leq d\}) \subseteq \{x \mid Cx \leq d\}$, então $v(RLP) \leq v(RP) = v(RL) \leq v(P)$.

Do Corolário 2.5 concluímos que o valor do dual lagrangeano (RL) será no mínimo igual ao limitante da relaxação linear $v(RLP)$.

A função lagrangeana $z(\lambda) = v(RL_\lambda)$ é uma função implícita de λ . Suponha que $\text{conv}\{x \in X \mid Cx \leq d\}$ é um polítopo, isto é, um poliedro limitado, então existem pontos x^1, x^2, \dots, x^K que são pontos extremos de $\text{conv}\{x \in X \mid Cx \leq d\} = \text{conv}\{x^1, x^2, \dots, x^K\}$. Então,

$$\min_x \{f(x) + \lambda(Ax - b) \mid Cx \leq d, x \in X\} = \min_{k=1, \dots, K} \{f(x^k) + \lambda(Ax^k - b)\}, \quad (2.63)$$

e $z(\lambda)$ é o envelope inferior da família de funções lineares em λ , $f(x^k) + \lambda(Ax^k - b)$, $k = 1, \dots, K$, e é uma função côncava. Quando a solução ótima de (RL_λ) não é única a função lagrangeana não é diferenciável.

Uma função côncava é contínua em todo o seu domínio, e diferenciável em quase todo ele, exceto num conjunto de medida nula. Nos pontos em que não é diferenciável, não possui gradiente, mas possui subgradiente [10] (ver Definição 2.19).

Definição 2.19 (Subgradiente). Um vetor $y \in R^n$, $y \neq 0$, é um subgradiente de uma função côncava $f(x)$ num ponto $x^0 \in R^n$ se para todo $x \in R^n$,

$$f(x) - f(x^0) \leq y(x - x^0). \quad (2.64)$$

Definição 2.20 (Subdiferencial). O conjunto de todos os subgradientes de uma função $f(x)$ num ponto x^0 é chamado subdiferencial de f em x^0 e é denotado $\partial f(x^0)$.

Teorema 2.6. [10] O subdiferencial de uma função côncava f em x^0 é sempre não-vazio, fechado, convexo e limitado.

Se o subdiferencial de f em x^0 consiste de um só elemento, tal elemento é o gradiente de f em x^0 , denotado por $\nabla f(x^0)$.

2. CONCEITOS BÁSICOS

O problema dual (RL) pode ser redefinido considerando que:

$$\max_{\lambda \geq 0} v(RL_\lambda) = \max_{\lambda \geq 0} z(\lambda) \quad (2.65)$$

$$= \max_{\lambda \geq 0} \left\{ \min_{k=1, \dots, K} \{f(x^k) + \lambda(Ax^k - b)\} \right\} \quad (2.66)$$

$$= \max_{\lambda \geq 0, \eta} \{ \eta \mid \eta \leq f(x^k) + \lambda(Ax^k - b), k = 1, \dots, k \}. \quad (2.67)$$

Seja λ um ponto de mínimo de $z(\lambda)$, $\eta^* = z(\lambda^*)$. Seja λ^k uma aproximação de λ^* , $\eta^k = z(\lambda^k)$ e $H_k = \{ \lambda \mid f(x^k) + \lambda(Ax^k - b) = \eta^k \}$ um hiperplano que passa por λ^k .

- Se $z(\lambda)$ é diferenciável em λ^k , isto é, se (LR_{λ^k}) possui uma única solução x^k , a função possui gradiente $\nabla z(\lambda^k)$ em λ^k :

$$\nabla^T z(\lambda^k) = (Ax^k - b) \perp H_k. \quad (2.68)$$

- Se $z(\lambda)$ é não-diferenciável em λ^k , isto é, se (LR_{λ^k}) possui múltiplas soluções ótimas, prova-se que o vetor $s^k = (Ax^k - b)$ é um subgradiente de $z(\lambda)$ em λ^k . Tal s^k é ortogonal a H_k (ver [10]).

Um subgradiente não é necessariamente uma direção de melhora para a função, mesmo que localmente.

2.5 Método Subgradiente

O método subgradiente tem origem na área de Otimização Convexa, sendo que os primeiros trabalhos registrados datam da década de 1960, dentre os quais está o trabalho de Shor [22], em 1962. Métodos que buscaram melhorar o método subgradiente são diversos. Podemos citar o *projected subgradient method* e ressaltar que o Método dos Elipsóides é um caso especial da classe de métodos do subgradiente [23].

O uso do método subgradiente para a solução de problemas de Otimização Linear de grande porte, provenientes de problemas de Otimização Combinatória, foi investigado por Held e Karp [11] em 1971, na resolução do Problema do Caixeiro Viajante Simétrico [17]. Em 1974, Held, Wolfe e Crowder [12] fazem experimentos com o mesmo método em diversas classes especiais de problemas de Otimização Linear Inteira, mostrando que o método é promissor.

Seja $x^{(k)}$ uma solução ótima para o problema (RL_{λ^k}) , definido na Seção 2.4. Então, o vetor $s^k = Ax^{(k)} - b$ é um subgradiente da função $z(\lambda)$ em λ^k . Seja λ^* a solução ótima para o problema (2.59), sendo $\eta^* = z(\lambda^*)$, e λ'^{k+1} a projeção de λ^k no hiperplano $H^* = \{ \lambda \mid f(x^k) + \lambda(Ax^{(k)} - b) = \eta^* \}$, paralelo a H^k .

2.5. MÉTODO SUBGRADIENTE

O vetor s^k é perpendicular tanto a H^k quanto a H^* , logo, $\lambda'^{k+1} - \lambda^k$ é um múltiplo não-negativo de s^k :

$$\lambda'^{k+1} - \lambda^k = \mu s^k, \mu \geq 0. \quad (2.69)$$

Por outro lado, $\lambda'^{k+1} \in H^*$,

$$f(x^{(k)}) + \lambda'^{k+1}(Ax^{(k)} - b) = \eta^*. \quad (2.70)$$

De (2.69) e (2.70), temos:

$$\eta^* = f(x^{(k)}) + (\lambda^k + \mu s^k)(Ax^{(k)} - b) \quad (2.71)$$

$$= f(x^{(k)}) + \lambda^k(Ax^{(k)} - b) + \mu s^k(Ax^{(k)} - b) \quad (2.72)$$

$$= \eta^k + \mu s^k s^k. \quad (2.73)$$

Como $s^k s^k = \|s^k\|^2$, conseguimos encontrar o valor de μ :

$$\mu = \frac{\eta^* - \eta^k}{\|s^k\|^2}. \quad (2.74)$$

Consequentemente,

$$\lambda'^{k+1} = \lambda^k + \frac{s^k(\eta^* - \eta^k)}{\|s^k\|^2}. \quad (2.75)$$

Uma vez que o multiplicador precisa ser não-negativo, definimos λ^{k+1} como a projeção de λ'^{k+1} no ortante não-negativo.

A fórmula descrita para λ^{k+1} , em função de (2.75), depende do valor ótimo η^* , geralmente desconhecido. Na prática, utiliza-se uma estimativa para η^* , podendo ser um limitante primal para (P) . Considerando o escalar $\epsilon_k \in (0, 2]$ (ver [16]), reajustamos (2.75) para que, caso não haja melhora no limitante após determinado número de iterações, possamos melhorar a estimativa de η^* ,

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \frac{s^k \epsilon_k (\eta^* - \eta^k)}{\|s^k\|^2}. \quad (2.76)$$

A convergência prática do método subgradiente é imprevisível. Para alguns casos, pode-se chegar a uma solução de maneira rápida e confiável, enquanto, em outras situações, o método subgradiente pode demonstrar um comportamento incomum, tanto no valor dos multiplicadores, quanto no limitante lagrangeano. Num caso “bom”, pode ser observado um padrão serrilhado, isto é, com sucessivas variações tanto para cima quanto para baixo, dos valores duais obtidos nas primeiras iterações, passando posteriormente a um comportamento monotômico e assintótico em torno do que se espera ser a solução para o problema dual lagrangeano. Em casos “ruins”, o padrão serrilhado não cessa, e os valores pioram com o passar das iterações (ver [10]). Essa imprevisibilidade do método subgradiente nos encoraja a busca de alternativas para a resolução do problema dual lagrangeano que possam garantir um método

2. CONCEITOS BÁSICOS

de parada mais confiável. Outros métodos foram desenvolvidos com o intuito de melhorar a performance do método subgradiente, tais como o algoritmo do volume, *bundle methods* e algoritmos híbridos (ver [10]). No Capítulo 3, estudamos a técnica *relax and cut* e um método alternativo para solução do problema dual lagrangeano proposto em Balas e Christofides [1] no contexto do PCVA.

2.5. MÉTODO SUBGRADIENTE

2. CONCEITOS BÁSICOS

2.5. MÉTODO SUBGRADIENTE

3

O método *Relax and Cut*

Neste capítulo, apresentamos o método *relax and cut* (RC). Este método pode ser aplicado quando há interesse na dualização de um número exponencial de restrições, como, por exemplo, no caso do Problema do Caixeiro Viajante, considerando as restrições de eliminação de subrotas DFJ (Seção 2.2).

Os primeiros registros de trabalhos que abordam a relaxação lagrangeana para problemas com restrições em número exponencial se encontram em Balas e Christofides [1], e, poucos anos depois, em Gavish [9]. Lucena [15] esquematiza a dualização de restrições a medida que forem violadas pela solução encontrada para uma Relaxação Lagrangeana válida para o problema que está sendo resolvido. Escudero, Guignard e Malik [7] propuseram um algoritmo para resolver o *Sequential Ordering Problem with Precedence Constraints*, algoritmo este que denominaram *Relax and Cut*.

Técnicas *relax and cut* tem sido alvo de muitos estudos nos últimos anos, sendo aplicadas a variados problemas. Sherali e Smith [21] utilizam uma aproximação semelhante à técnica *relax and cut* para problemas de otimização inteira mista 0-1, melhorando uma formulação dual lagrangeana com restrições induzidas pela Técnica de Reformulação-Linearização (*Reformulation-Linearization Technique* (RLT)). De Souza e Cavalcante [6] propõem um algoritmo híbrido que utiliza a técnica *relax and cut* para o pré-processamento do *vertex separation problem* resolvido através de algoritmos *branch-and-cut*. A resolução do problema é dividida em três partes: a primeira consiste na utilização de um esquema *relax and cut* que fornece um conjunto de inequações válidas e um limitante primal; a segunda parte trata da remodelagem do problema utilizando as informações obtidas na primeira fase; e, por último, a execução de um código *branch-and-cut* sobre o novo modelo reformulado. Ao invés de imediatamente adicionar os cortes de Gomory para um problema de Otimização Inteira Mista, Fischetti e Salvagnin [8] identificam os cortes e os dualizam para obter uma relaxação lagrangeana.

Seja $X \subset Z^n$ um conjunto que define restrições de sinal sobre x e considere

3.1. O MÉTODO *RELAX AND CUT* APLICADO AO PCVA

o problema (P) definido por (3.1)-(3.4).

$$\text{Minimizar } f(x) = cx \quad (3.1)$$

$$\text{sujeito a } Ax \leq b \quad (3.2)$$

$$Cx \leq d \quad (3.3)$$

$$x \in X \quad (3.4)$$

Supondo que as restrições (3.2) sejam “complicadas”, excluir tais restrições constituem uma relaxação (RP) para o problema (P) . Ao resolver (RP) obtemos uma solução \bar{x} que não necessariamente satisfaz (3.2). Assim, podemos tentar identificar restrições violadas dentre as restrições (3.2). Tendo identificado alguma inequação válida, por exemplo, $a_i x \leq b_i$, ao invés de adicioná-la à formulação de (RP) , como num esquema de planos de corte, dualizamos-la como na formulação de uma relaxação lagrangeana. Assim, teremos o problema (3.5)-(3.7), com $\lambda \in R_+^n$.

$$\text{Minimizar } f(x) = cx + \lambda(a_i x - b_i) \quad (3.5)$$

$$\text{sujeito a } Cx \leq d \quad (3.6)$$

$$x \in X. \quad (3.7)$$

Como visto na Seção 2.4, para cada $\lambda > 0$ temos um limitante dual para (P) , e a resolução do problema Dual Lagrangeano (RL) nos fornece o melhor desses limitantes. Tendo solucionado (RL) podemos novamente tentar identificar inequações válidas para (P) que não sejam satisfeitas pela solução do (RL) , dualizá-las e resolver o novo problema dual lagrangeano obtido. Este raciocínio pode ser desenvolvido iterativamente, até que se chegue num critério de parada, como, por exemplo, não ser possível mais identificar inequações válidas violadas. Esta sucessão de passos resumem o que Lucena [16] caracteriza como um método *Delayed Relax and Cut*.

Ao invés de solucionar o dual lagrangeano (RL) e depois identificar inequações válidas para (P) , é possível tentar identificar tais inequações a cada vez que um multiplicador λ é atualizado, isto é, verificar se a solução da relaxação lagrangeana não é válida para o problema (P) . Dessa forma, identificam-se inequações válidas durante a resolução do dual lagrangeano. Esta estratégia alternativa caracteriza os métodos *Non Delayed Relax and Cut* [16].

Nas próximas seções apresentamos a técnica *relax and cut* aplicada ao PCVA, com base nos estudos de Balas e Christofides [1], que se encaixa na categoria dos métodos *Non Delayed Relax and Cut*, e propomos a utilização da técnica à formulação PCVA-MP, apresentada na Seção 3.2.

3.1 O método *relax and cut* aplicado ao PCVA

Considere a formulação (2.1)-(2.5) para o PCVA apresentada na Seção 2.2 (página 20). Considere o problema da Designação (2.1)-(2.3), (2.5), como

3. O MÉTODO *RELAX AND CUT*

relaxação do PCVA. Suponha que \bar{x} , (\bar{u}, \bar{v}) sejam, respectivamente, as soluções ótimas primal e dual do PD, B a base ótima, e X a região factível. Suponha, também, que \bar{x} não é uma solução factível para o PCVA. Considere, ainda, um conjunto de restrições para eliminação de subrotas T escrito na forma genérica como (3.8).

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} a_{ij}^t x_{ij} \geq a_0^t, \quad t \in T. \quad (3.8)$$

Uma nova formulação para o PCVA é formada por (??)-(??), a qual denominaremos PCVG.

$$\min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} x_{ij} \quad (3.9)$$

Sujeito a

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 1, \quad i \in V \quad (3.10)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1, \quad j \in V \quad (3.11)$$

$$\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} a_{ij}^t x_{ij} \geq a_0^t, \quad t \in T \quad (3.12)$$

$$x_{ij} = 0/1, \quad i, j \in V \quad (3.13)$$

Sejam $\lambda_t, t \in T$, multiplicadores lagrangeanos associados às restrições (3.12), e $X = \{x \in \mathbb{B}^{n \times n} \mid (3.10), (3.11) \text{ e } (3.13)\}$, a região factível do PD. Dualizando as restrições (3.8) obteremos a função lagrangeana:

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \min_{x \in X} \left\{ \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} x_{ij} - \sum_{t \in T} \lambda_t \left(\sum_{i \in V} \sum_{j \in V} a_{ij}^t x_{ij} - a_0^t \right) \right\} \\ &= \min_{x \in X} \left\{ \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} \left(c_{ij} - \sum_{t \in T} \lambda_t a_{ij}^t \right) x_{ij} \right\} + \sum_{t \in T} \lambda_t a_0^t. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Um limite dual para o PCVA pode ser obtido fixando $\lambda = \bar{\lambda}$ tal que

$$L(\bar{\lambda}) = \max_{\lambda \geq 0} \{L(\lambda)\}. \quad (3.15)$$

Para a resolução de (3.15) pode-se utilizar o método do subgradiente (Seção 2.5), ou o Algoritmo do Volume [10], entre outros métodos. Balas e Christofides (1981) propuseram um algoritmo *relax and cut* para obter limitantes duais sem modificar a solução \bar{x} . A busca por $\lambda \geq 0$ que forneça bons limitantes duais é

3.1. O MÉTODO *RELAX AND CUT* APLICADO AO PCVA

limitada ao conjunto:

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^{|T|} \mid \lambda \geq 0 \text{ e existem } u, v \in \mathbb{R}^n \text{ tais que} \right.$$

$$u_i + v_j + \sum_{t \in T} \lambda_t a_{ij}^t = c_{ij}, \text{ se } \bar{x}_{ij} = 1; \text{ e} \quad (3.16)$$

$$u_i + v_j + \sum_{t \in T} \lambda_t a_{ij}^t \leq c_{ij}, \text{ se } \bar{x}_{ij} = 0 \left. \right\}. \quad (3.17)$$

Denotamos por \hat{c}_{ij} o custo relativo associado às variáveis duais ótimas u_i, v_j e os multiplicadores λ_t , ou seja,

$$\hat{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j - \sum_{t \in T} \lambda_t a_{ij}^t. \quad (3.18)$$

As condições (3.16) e (3.17) restringem os multiplicadores λ_t a valores que garantem a factibilidade para o problema (3.19)-(3.21).

$$\text{Maximizar } \sum_{i \in V} u_i + \sum_{j \in V} v_j + \sum_{t \in T} \lambda_t a_0^t \quad (3.19)$$

sujeito a

$$u_i + v_j + \sum_{t \in T'} \lambda_t a_{ij}^t \leq c_{ij}, \quad i, j \in V \quad (3.20)$$

$$\lambda \geq 0. \quad (3.21)$$

O problema (3.19)-(3.21) é o dual da relaxação linear de PCVG ((3.9)-(3.13)), obtida substituindo as restrições (3.13) por $x_{ij} \geq 0$, para todo $i \in V, j \in V$. Note que a restrição $x_{ij} \leq 1$ é implicitamente definida pelas restrições (3.10) e (3.11). Denotaremos a relaxação linear de PCVG por LPCVG.

Assim, o problema dual lagrangeano que resolvemos é, efetivamente:

$$\max_{\lambda \in \Lambda} \{L(\lambda)\}. \quad (3.22)$$

O procedimento proposto em Balas e Christofides [1] para resolver (3.22) parte das soluções primal e dual ótimas para a relaxação PD e busca por multiplicadores λ_t sequencialmente, mantendo $u = \bar{u}$ e $v = \bar{v}$ no problema (3.19)-(3.21).

Observação 3.1. Dizemos que uma restrição admite um multiplicador positivo se existe um multiplicador lagrangeano $\lambda > 0$ que mantenha a otimalidade da base B e que, quando dualizada, melhore a solução atual para o problema dual lagrangeano. No caso especial de PCVG, uma restrição (3.8), com $t \in T$, possui um multiplicador positivo se existe $\lambda_t > 0$ que satisfaça (3.16) e (3.17).

3. O MÉTODO *RELAX AND CUT*

Proposição 3.1. *Seja $T' \subseteq T$ o conjunto das restrições dualizadas. O valor ótimo do PCVA, $v(PCVA)$, é limitado inferiormente por*

$$\sum_{i \in V} u_i + \sum_{j \in V} v_j + \sum_{t \in T'} \lambda_t a_0^t. \quad (3.23)$$

Demonstração. De fato, como PCVG é uma formulação para o PCVA, (3.19)-(3.21) é o dual de sua relaxação linear e (u, v, λ) é factível para (3.19)-(3.21), o valor da função da função objetivo (3.19) em (u, v, λ) é um limitante inferior para a função $v(PCVA)$. \square

O procedimento *relax and cut* de Balas e Christofides identifica inequações válidas que:

- (i) são violadas pela solução do *PD*, \bar{x} , e
- (ii) admitem um multiplicador positivo.

Tais inequações são incluídas em $L(\lambda)$ a medida que são encontradas, com o maior multiplicador λ_t possível. A inclusão de cada nova inequação implica na adição de uma nova variável a (3.19)-(3.21), incluída no termo $\sum_{t \in T'} \lambda_t a_0^t$ de (3.23), fortalecendo, assim, o limitante $L(\lambda)$.

Definição 3.1. Em qualquer iteração do procedimento *relax and cut*, definimos o grafo admissível $G_0 = (V, A_0)$ como o subgrafo gerador de G que contém todas as arestas com custo relativo nulo (3.18), isto é,

$$A_0 = \left\{ (i, j) \in A \mid u_i + v_j + \sum_{t \in T'} \lambda_t a_{ij}^t = c_{ij} \right\}, \quad (3.24)$$

onde T' é o conjunto das restrições dualizadas.

A dualização de uma nova restrição resulta na adição de, no mínimo, uma aresta ao conjunto A_0 . Além disso, enquanto G_0 não for fortemente conexo, o procedimento garante encontrar inequações válidas que satisfaçam (i) e (ii). Assim, o número de arestas em A_0 cresce a cada iteração; e quando não for possível encontrar inequações válidas que satisfaçam (i) e (ii), o procedimento é encerrado. O Teorema 3.2 formaliza essas observações.

Teorema 3.2. *Seja G_0 o grafo admissível associado a (u, v, λ) e seja \hat{x} o vetor de incidência de um circuito hamiltoniano $H(\hat{x})$ em G_0 . Se \hat{x} satisfaz todas as inequações (3.8) com igualdade para todo $t \in T'$ tal que $\lambda_t > 0$, então \hat{x} é uma solução ótima para o PCVA.*

Demonstração. Uma vez que \hat{x} forma um circuito hamiltoniano, \hat{x} é uma solução factível para o PCVA. Considerando a formulação PCVG, \hat{x} também é uma solução para o LPCVG. Se mostrarmos que \hat{x} é uma solução ótima para LPCVG, então \hat{x} também será uma solução ótima para o PCVG.

3.1. O MÉTODO *RELAX AND CUT* APLICADO AO PCVA

Verifiquemos, então, as folgas complementares para o problema LPCVG. Para todo $(i, j) \in A$,

$$\hat{x}_{ij} \left(c_{ij} - u_i - v_j - \sum_{t \in T} \lambda_t a_{ij}^t \right) = 0, \quad (3.25)$$

pois $\lambda \in \Lambda$.

Além disso, para $t \in T'$ temos $\lambda_t \geq 0$. Se $\lambda_t = 0$, (3.26) é satisfeita. Senão, $\lambda_t > 0$ e, por hipótese, para todo $t \in T'$ tal que $\lambda_t > 0$ \hat{x} satisfaz todas as inequações (3.8) com igualdade, isto é, $a_0^t - \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} a_{ij}^t x_{ij} = 0$ e (3.26) é satisfeita.

$$\lambda_t \left(a_0^t - \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} a_{ij}^t \hat{x}_{ij} \right) = 0. \quad (3.26)$$

Se fixarmos $\lambda_t = 0$ para as restrições que não foram dualizadas ($t \notin T'$), temos as condições de folgas complementares satisfeitas, comprovando que \hat{x} é uma solução ótima para a relaxação linear do PCVA e, como \hat{x} é factível para o PCVA temos que também é ótima para o PCVA. \square

Note que resolvemos o problema dual lagrangeano (2.59) “restrito”, uma vez que procuramos multiplicadores positivos no conjunto Λ . Essa delimitação facilita o cálculo. Como o limitante tem valor menor do que o valor ótimo de $\max_{\lambda \geq 0} g(\lambda)$, (3.23) é um limitante inferior para o PCVA (ver [1]).

Nas Subseções 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3 descrevemos os procedimentos *relax and cut* para o PCVA propostos em [1] considerando as restrições de eliminação de subrotas de corte, de clique e de ponto de articulação (Seção 2.2), respectivamente. Na seção 3.2 descrevemos a proposta deste trabalho de adaptar o procedimento considerado às restrições de Multiproduto para eliminação de subrotas (Seção 2.2).

3.1.1 Procedimento *relax and cut* com restrições de corte

Nesta seção, apresentamos o método *relax and cut* específico para as restrições de eliminação de subrotas de corte. Considerando um subconjunto $S_t \subseteq V$, denotaremos o conjunto de corte orientado relativo a S_t por: $Q_t = (S_t, \bar{S}_t)$ e as restrições de corte associadas por:

$$\sum_{i \in S_t} \sum_{j \in \bar{S}_t} x_{ij} \geq 1, \forall S_t \subset V, S_t \neq \emptyset. \quad (3.27)$$

Relacionando (3.27) com (3.8), temos: $a_{ij}^t = 1, \forall (i, j) \in (S_t, \bar{S}_t)$, $a_{ij}^t = 0, (i, j) \notin (S_t, \bar{S}_t)$ e $a_0^t = 1, \forall t \in T'$.

Para simplificar, para cada $t \in T$, podemos reescrever (3.27) em função de seu respectivo conjunto de corte orientado Q_t :

$$\sum_{(i,j) \in Q_t} x_{ij} \geq 1. \quad (3.28)$$

3. O MÉTODO RELAX AND CUT

O resultado enunciado na Proposição 3.3 é apresentado na forma de um comentário em [1, p. 24] e apresenta as condições para a existência de um multiplicador positivo para (3.28).

Proposição 3.3. *Dado um conjunto de corte $Q_t, t \in T \setminus T'$ e sua respectiva restrição da forma (3.28): (i) \bar{x} viola (3.28) e (ii) (3.28) admite multiplicador positivo se, e somente se,*

$$Q_t \cap A_0 = \emptyset. \quad (3.29)$$

Demonstração. (Suficiência) Desejamos mostrar que (i) e (ii) implicam (3.29). Equivalentemente, vale mostrar que $Q_t \cap A_0 \neq \emptyset$ implica que (i) ou (ii) não ocorrem.

Suponha que existe $t \in T \setminus T'$ tal que $Q_t \cap A_0 \neq \emptyset$, e que sua respectiva restrição do tipo (3.28) admite multiplicador positivo. Pela Observação 3.1, existe um multiplicador $\mu_t > 0$ tal que para todo $(i, j) \in Q_t$:

$$x_{ij} = 1 \Rightarrow u_i + v_j + \sum_{t \in T'} \lambda_t + \mu_t = c_{ij} \text{ e} \quad (3.30)$$

$$x_{ij} = 0 \Rightarrow u_i + v_j + \sum_{t \in T'} \lambda_t + \mu_t \leq c_{ij}. \quad (3.31)$$

Note que, como já observado em comparação com (3.8), para $(i, j) \notin Q_t$, $a_{ij}^t = 0$, isto é, o multiplicador μ_t não influencia no custo relativo da variável (i, j) . Em vista de (3.30) e (3.31), é necessário que $\mu_t \leq \hat{c}_{ij}$, para todo $(i, j) \in Q_t$. Como existe uma aresta $(p, q) \in Q_t \cap A_0$, temos $\hat{c}_{pq} = 0$. Assim, $\mu_t \leq 0$, o que contradiz a hipótese de que μ_t é estritamente positivo. Dessa forma, (3.28) não admite multiplicador positivo. Consequentemente, tendo $Q_t \cap A_0 \neq \emptyset$, (i) ou (ii) não ocorrem, como desejávamos mostrar.

(Necessidade) Considere a existência de S_t tal que $Q_t \cap A_0 = \emptyset, Q_t = (S_t, \bar{S}_t)$. Queremos mostrar que (i) e (ii) ocorrem, isto é, \bar{x} viola (3.28) e (3.28) admite multiplicador positivo.

Suponha que (i) ou (ii) não ocorram.

Se (i) não ocorre, a restrição relativa a Q_t é satisfeita, isto é, $\sum_{(i,j) \in Q_t} \bar{x}_{ij} \geq 1$. Como \bar{x} é uma solução ótima do PD, e por isso inteira, pelo menos uma aresta $(i, j) \in Q_t$ satisfaz $\bar{x}_{ij} = 1$. Portanto, $\hat{c}_{ij} = 0$, ou seja, $(i, j) \in A_0$, o que contradiz a hipótese.

Se (ii) não ocorre, então para todo $\mu_t > 0$

$$\text{existe } \bar{x}_{ij} = 1 \text{ tal que } \hat{c}_{ij} \neq 0; \text{ ou} \quad (3.32)$$

$$\text{existe } \bar{x}_{ij} = 0 \text{ tal que } \hat{c}_{ij} < 0. \quad (3.33)$$

Se (3.32) ocorre, $\bar{x}_{ij} \hat{c}_{ij} \neq 0$ e assim as folgas complementares não são satisfeitas, resultando que \bar{x} não é uma solução ótima, contradizendo a otimalidade de \bar{x} para o PD. Se (3.33) ocorre, temos uma variável com custo reduzido negativo, indicando que \bar{x} não é solução ótima, o que também é contraditório. Assim, supor que (i) e (ii) não ocorrem nos leva a uma contradição. Portanto, $Q_t \cap A_0 = \emptyset$ implica (i) e (ii). \square

3.1. O MÉTODO *RELAX AND CUT* APLICADO AO PCVA

A Proposição 3.3 nos dá uma forma de identificar restrições violadas pela solução ótima do PD, \bar{x} . Tome um vértice $i \in V$, defina seu conjunto alcançável $R(i)$ em G_0 , e suponha que $R(i) \neq V$. O conjunto $R(i)$ contém todos os vértices j de G_0 para os quais existe um caminho do vértice i para o vértice j (ver Definição 2.13). Logo, para qualquer $j \in \overline{R(i)} = V \setminus R(i)$ não existe caminho em G_0 de i para j . Consequentemente, $(i, j) \notin A_0$. Portanto, tomando

$$Q_t = (R(i), V \setminus R(i)) \quad (3.34)$$

temos um conjunto que satisfaz (3.29).

Seja μ_t o multiplicador lagrangeano da restrição (3.28) referente a (3.34). Para manter a factibilidade dual da base B para o problema (3.19)-(3.21), é necessário que $\mu_t < \hat{c}_{ij}, \forall (i, j) \in Q_t$, como em (3.31). Vale lembrar que (3.30) não ocorre pois $\hat{c}_{ij} > 0 \forall (i, j) \in Q_t$. Logo,

$$\mu_t = \min_{(i,j) \in Q_t} \{\hat{c}_{ij}\}. \quad (3.35)$$

Assim, dualizamos a inequação (3.28) associada a (3.34) e atualizamos os custos reduzidos das variáveis não básicas associadas à solução do PCVG da seguinte forma:

$$\hat{c}_{ij} = \begin{cases} \hat{c}_{ij} - \mu_t, & \text{se } (i, j) \in Q_t; \\ \hat{c}_{ij}, & \text{se } (i, j) \notin Q_t. \end{cases}$$

A busca então é reiniciada para encontrar um novo conjunto de corte. Caso $R(i) = V, \forall i \in V$, não há conjuntos de corte Q_t que satisfaçam (3.29) e o procedimento termina. Nesse estágio, G_0 é fortemente conexo, e $Q \cap A_0 \neq \emptyset$ para todo conjunto de corte Q em G .

Além disso, como $\sum_{i \in V} u_i + \sum_{j \in V} v_j + \sum_{t \in T'} \mu_t$ é um limitante inferior para $v(PCVA)$, o procedimento melhora o limitante inferior de $v(PD)$ por $\sum_{i \in T'} \mu_t$, isto é, ao fim do procedimento, o limitante inferior é

$$LI = v(PD) + \sum_{t \in T'} \mu_t. \quad (3.36)$$

A Figura 3.1 esquematiza o procedimento descrito nessa seção. Lembrando que $R(i), i \in V$, representa o conjunto alcançável do vértice i .

3. O MÉTODO *RELAX AND CUT*

Figura 3.1: Algoritmo RC-Corte

01	Entrada: Instância do PCVA $(G(V, A), V = n, A = m, c_{ij}, \forall (i, j) \in A)$.
02	Saída: Limitante Inferior LI , restrições violadas do tipo Corte.
03	Início
04	Resolva o PD associado ao PCVA.
05	$LI = v(PD)$
06	$t = 1$
07	$i = 1$
08	$T' = \emptyset$
09	Enquanto $i \leq n$.
10	Início
11	Defina o grafo $G_0(V, A_0), A_0 = \{(i, j) \in A \mid \hat{c}_{ij} = 0\}$
12	Encontre o conjunto alcançável $R(i)$ em G_0
13	Se $R(i) = V$, então $i = i + 1$
14	Senão
15	Início
16	$S_t = R(i)$
17	$Q_t = (S_t, V \setminus S_t)$
18	$\mu_t = \min_{(i,j) \in Q_t} \{\hat{c}_{ij}\}$
19	Para $(i, j) \in Q_t$ faça $\hat{c}_{ij} = \hat{c}_{ij} - \mu_t$
20	$LI = LI + \mu_t$
21	$T' = T' \cup \{t\}$
22	$t = t + 1$
23	Fim
24	Fim
25	Se existe um circuito hamiltoniano $H(\hat{x})$ em $G_0 = (V, A_0)$, então \hat{x} é solução ótima para o PCVA.
26	Senão , \bar{x} é uma solução para o PD, LI é um limitante inferior para o PCVA e as restrições em T são violadas por \bar{x} .
27	Fim

Exemplo 3.1. Considere a instância cuja matriz de custos é apresentada na Figura 3.2.

	1	2	3	4	5	6
1	-	1	5	7	3	7
2	1	-	3	6	3	6
3	4	10	-	8	1	8
4	6	7	2	-	4	1
5	13	1	1	4	-	5
6	8	6	2	1	2	-

Figura 3.2: Matriz de Custos

3.1. O MÉTODO *RELAX AND CUT* APLICADO AO PCVA

Inicialização

Resolvendo o problema da designação associado através do Algoritmo Húngaro (ver Anexo A), obtemos a solução representada na Figura 3.3. Na Figura 3.4, são mostrados os custos relativos e as células destacadas indicam as variáveis cujo valor é $\bar{x}_{ij} = 1$. Para as demais células $\bar{x}_{ij} = 0$. A solução representada possui valor $LI = 6$.

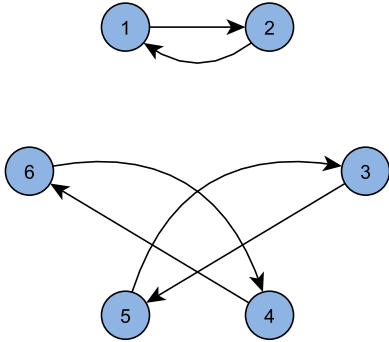


Figura 3.3: Grafo da solução.

	1	2	3	4	5	6
1	-	0	4	6	2	6
2	0	-	2	5	2	5
3	3	9	-	7	0	7
4	5	6	1	-	3	0
5	12	0	0	3	-	4
6	7	5	1	0	1	-

Figura 3.4: Custos relativos da solução ótima do PD.

Iteração 1

Selecionamos o vértice 1 ($i = 1$). Observa-se que

$$A_0 = \{(1, 2), (2, 1), (3, 5), (4, 6), (5, 2), (5, 3), (6, 4)\}.$$

O grafo G_0 pode ser representado como na Figura 3.5. Encontramos o conjunto alcançável $R(1) = \{1, 2\}$ em G_0 . Como $R(1) \neq V$, definimos $S_1 = R(1)$ e o corte $Q_1 = (S_1, \bar{S}_1)$, representado na Figura 3.6.

$$Q_1 = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}.$$

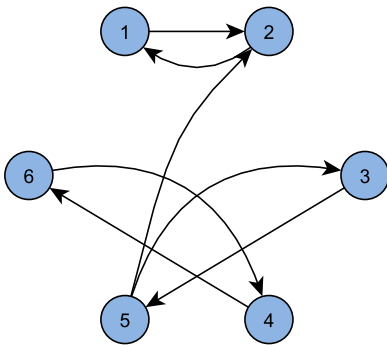


Figura 3.5: Iteração 1. Grafo admissível G_0 .

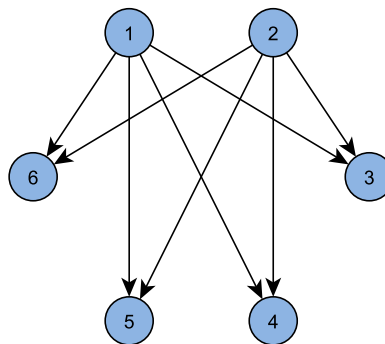


Figura 3.6: Conjunto de corte Q_1 .

3. O MÉTODO *RELAX AND CUT*

A restrição de corte associada a Q_1 é:

$$x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} \geq 1. \quad (3.37)$$

De acordo com os custos reduzidos das arestas em Q_1 , vide Figura 3.4, podemos calcular o valor do multiplicador lagrangeano μ_1 .

$$\mu_1 = \min_{(i,j) \in Q_1} \{\hat{c}_{ij}\} = \min\{4, 6, 2, 6, 2, 5, 2, 5\} = 2 \quad (3.38)$$

Para toda aresta $(i, j) \in Q_1$ atualizamos os custo relativos \hat{c}_{ij} (linha 19 da Figura 3.1), obtendo a matriz de custos da Figura 3.7. Nesse momento, o limitante inferior passa a ser $LI = 6 + 2 = 8$. O conjunto de restrições dualizadas se torna $T' = \{1\}$.

	1	2	3	4	5	6
1	-	0	2	4	0	4
2	0	-	0	3	0	3
3	3	9	-	7	0	7
4	5	6	1	-	3	0
5	12	0	0	3	-	4
6	7	5	1	0	1	-

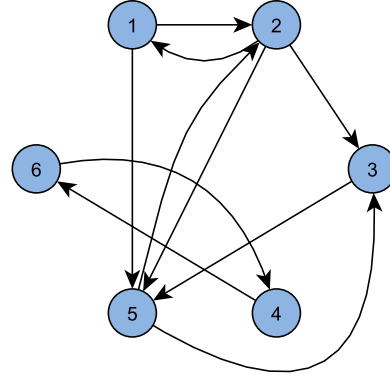


Figura 3.7: Matriz de custos relativos. Atualização relativa a Q_1 .

Figura 3.8: G_0 após dualização para Q_1

Iteração 2

De acordo com a Figura 3.8, $R(1) = \{1, 2, 3, 5\}$. Como $R(1) \neq V$, $S_2 = R(1)$ e $Q_2 = (S_2, \bar{S}_2)$, isto é,

$$Q_2 = \{(1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 6), (5, 4), (5, 6)\}.$$

A inequação válida associada a Q_2 é:

$$x_{14} + x_{16} + x_{24} + x_{26} + x_{34} + x_{36} + x_{54} + x_{56} \geq 1. \quad (3.39)$$

O valor do multiplicador μ_2 é:

$$\mu_2 = \min_{(i,j) \in Q_2} \{\hat{c}_{ij}\} = \min\{4, 4, 3, 3, 7, 7, 3, 4\} = 3$$

Dualizando a restrição associada a Q_2 , temos $LI = 8 + 3 = 11$. A nova matriz de custos relativos e o atual grafo G_0 são mostrados nas Figuras 3.9 e 3.10, respectivamente. $T' = \{1, 2\}$.

3.1. O MÉTODO *RELAX AND CUT* APLICADO AO PCVA

	1	2	3	4	5	6
1	-	0	2	1	0	1
2	0	-	0	0	0	0
3	3	9	-	4	0	4
4	5	6	1	-	3	0
5	12	0	0	0	-	1
6	7	5	1	0	1	-

Figura 3.9: Matriz de custos relativos.
Atualização relativa a Q_2 .

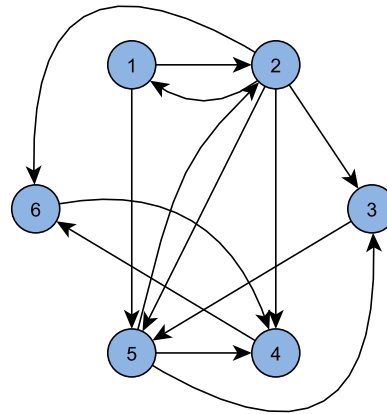


Figura 3.10: G_0 após dualização para Q_2

Iteração 3

No grafo representado na Figura 3.10, $R(1) = V$. Assim, $i = i + 1$, ou seja, $i = 2$ e G_0 se mantém inalterado. Como $R(2) = V$, verificamos o conjunto admissível para $i = 3$. $R(3) = V$, logo, incrementamos i novamente. O conjunto admissível $R(4) = \{4, 6\}$ difere de V . Logo, $S_3 = R(4)$, e

$$Q_3 = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 5)\} \text{ (Figura 3.11).}$$

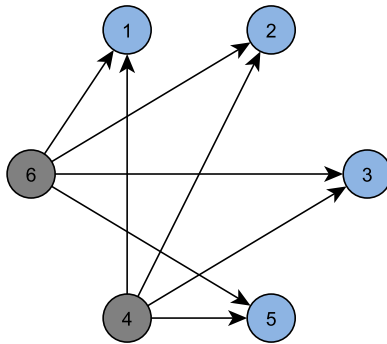


Figura 3.11: Conjunto de corte Q_3 .

A restrição que identificamos é:

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} + x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{65} \geq 1. \quad (3.40)$$

Calculando o valor do multiplicador μ_3 , temos:

$$\mu_3 = \min_{(i,j) \in Q_3} \{\hat{c}_{ij}\} = \min\{5, 6, 1, 3, 7, 5, 1, 1\} = 1.$$

3. O MÉTODO *RELAX AND CUT*

O limitante passa a $LI = 11 + 1 = 12$ com a dualização relativa a Q_3 e $T' = \{1, 2, 3\}$.

	1	2	3	4	5	6
1	-	0	2	1	0	1
2	0	-	0	0	0	0
3	3	9	-	4	0	4
4	4	5	0	-	2	0
5	12	0	0	0	-	1
6	6	4	0	0	0	-

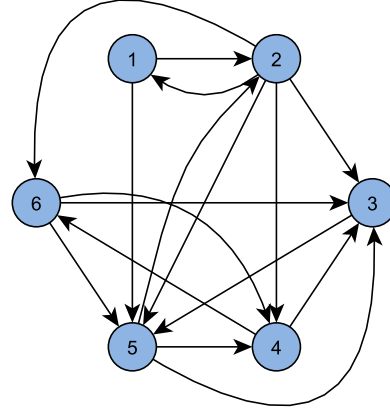


Figura 3.12: Matriz de custos relativos. Atualização relativa a Q_3 .

Figura 3.13: G_0 após dualização para Q_3

Iteração 4

Na Figura 3.13 observa-se que $R(4) = V$. Tanto para $i = 5$, quanto para $i = 6$ o conjunto admissível $R(i)$ é igual a V . Note que, G_0 é fortemente conexo. Consequentemente, $R(i) = V, \forall i \in V$, e não há mais inequações válidas do tipo corte com multiplicador positivo a serem identificadas.

O Teorema 3.2 nos dá uma condição para encontrar uma solução ótima a partir de G_0 , porém não existem circuitos hamiltonianos em G_0 . De fato, apenas o vértice 2 pode anteceder o vértice 1, logo, um circuito hamiltoniano não poderia incluir a aresta $(1, 2)$. Assim, para sair de 1, precisamos ir para o vértice 5. Por outro lado, a única forma de sair do vértice 3 é indo para o vértice 5. Logo, para a existência de um circuito hamiltoniano, é necessário que duas arestas incidam em 5, isto é, $\sum_{i \in V} x_{i5} > 1$, o que é uma contradição. A Figura 3.14 representa o raciocínio aqui descrito para a não existência de um circuito hamiltoniano em G_0 neste exemplo.

3.1.2 Procedimento *relax and cut* com restrições de clique

Nesta seção a técnica *relax and cut* é aplicada ao PCVA com restrições de eliminação de subrotas do tipo clique (3.41) (ver [1]). Considerando S_t um subconjunto de V denotaremos as restrições do tipo clique associadas por:

$$\sum_{i \in S_t} \sum_{j \in S_t} x_{ij} \leq |S_t| - 1, \forall S_t \subset V, S_t \neq \emptyset. \quad (3.41)$$

Relacionando (3.41) com (3.8) (página 37), para $i \in S_t, j \in S_t, a_{ij}^t = -1$, caso contrário $a_{ij}^t = 0$, e $a_0^t = 1 - |S_t|$.

3.1. O MÉTODO *RELAX AND CUT* APLICADO AO PCVA

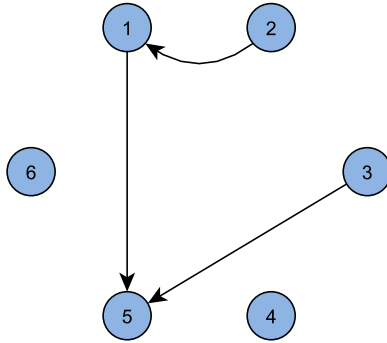


Figura 3.14: Não existência de Circuitos Hamiltonianos em G_0

Para uma melhor compreensão do procedimento, reescrevemos (3.41) como:

$$-\sum_{i \in S_t} \sum_{j \in S_t} x_{ij} \geq 1 - |S_t|, \quad t \in T. \quad (3.42)$$

As inequações (3.41) são equivalentes às inequações (3.27) (ver Proposição 2.1). Mesmo assim, uma inequação (3.41) pode admitir um multiplicador positivo, enquanto uma inequação (3.27) não, e vice-versa.

Se S_1, \dots, S_h são subconjuntos de vértices associados às h subrotas associadas à solução \bar{x} , toda restrição (3.42) definida por $S_t, t = 1, \dots, h$, é violada por \bar{x} . Um multiplicador positivo pode ser obtido através da modificação do valor de alguns valores de u_i e v_j sem violar a condição de que se $\bar{x}_{ij} = 1$, então $\hat{c}_{ij} = 0$, e satisfazendo alguns requisitos. Tais requisitos podem ser melhor descritos utilizando-se os termos do Algoritmo Húngaro (ver Apêndice A). *Linhas* e *colunas* da matriz de adjacência do grafo e da matriz de custos reduzidos associados a \bar{x} são chamadas *retas*, e interseções de linhas e colunas são denominadas *células*. Células correspondem a arestas de G e são denotadas da mesma forma, isto é, (i, j) denota tanto uma aresta, quanto uma célula da matriz.

Sejam S_t o conjunto de vértices de uma subrota associada a \bar{x} , e A_0 definido de acordo com (3.24). Então:

$$A_t = \{(i, j) \in A_0 \mid i, j \in S_t\}, \quad A'_t = \{(i, j) \in A_t \mid \bar{x}_{ij} = 1\}. \quad (3.43)$$

O Teorema 3.4 formaliza a condição necessária e suficiente para encontrar uma restrição violada que admite multiplicador positivo, ilustrada no Exemplo 3.2.

Exemplo 3.2. Considere a instância do PCVA relacionada à matriz de custos da Figura 3.15.

3. O MÉTODO *RELAX AND CUT*

	1	2	3	4	5
1	∞	6	2	9	5
2	6	∞	3	5	1
3	4	5	∞	2	4
4	2	8	7	∞	2
5	8	1	5	4	∞

Figura 3.15: Matriz de custos.

	1	2	3	4	5
1	∞	4	0	7	3
2	5	∞	2	4	0
3	2	3	∞	0	2
4	0	6	5	∞	0
5	7	0	4	3	∞

Figura 3.16: Matriz de custos relativos associada à solução ótima.

A Figura 3.16 apresenta os custos relativos associados à solução ótima \bar{x} da instância em questão. Estão destacadas as células as quais o valor da variável associada é $x_{ij} = 1$. Assim, a solução ótima, de valor ótimo 8, é formada por $x_{13} = x_{34} = x_{41} = x_{25} = x_{52} = 1$, $x_{ij} = 0$ para as demais (i, j) . Temos duas subrotas: $S_1 = \{1, 3, 4\}$ e $S_2 = \{2, 5\}$. Considere a subrota S_1 e o conjunto de retas $C = I \cup J$, sendo $I = \{3\}$ um conjunto de linhas e $J = \{1, 3\}$ um conjunto de colunas. Como definido em (3.43), temos:

$$A_0 = \{(1, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 1), (4, 5), (5, 2)\} \quad (3.44)$$

$$A_1 = \{(1, 3), (3, 4), (4, 1)\} = A'_1. \quad (3.45)$$

O conjunto C possui três propriedades especiais que podem ser observadas na Figura 3.17:

- 1) Cada aresta $(i, j) \in A'_1$ é coberta por exatamente uma reta de C .
- 2) Cada aresta $(i, j) \in A'_1 \setminus A_1$ é coberta por no máximo uma reta de C .
- 3) Nenhuma aresta $(i, j) \in A_0 \setminus A_1$ é coberta por retas de C .

	1	2	3	4	5
1	∞	4	0	7	3
2	5	∞	2	4	0
3	2	3	∞	0	2
4	0	6	5	∞	0
5	7	0	4	3	∞

Figura 3.17: Conjunto de retas C .

Este conjunto de retas permite a dualização da restrição (3.42) com multiplicador positivo $\mu_1 = 2$.

Teorema 3.4. *Uma inequação (3.42) admite um multiplicador positivo se, e somente se, existe um conjunto de retas $C = I \cup J$, sendo I um conjunto de linhas e J um conjunto de colunas, que cobre a matriz de custos reduzidos associada a \bar{x} , tal que:*

3.1. O MÉTODO *RELAX AND CUT* APLICADO AO PCVA

- (a) cada $(i, j) \in A'_t$ é coberta por exatamente uma reta em de C ;
- (b) cada $(i, j) \in A_t \setminus A'_t$ é coberta por no máximo uma reta de C ;
- (c) nenhuma aresta $(i, j) \in A_0 \setminus A_t$ é coberta por retas de C .

Se um conjunto C dessa forma existe então o maior valor factível a ser atribuído ao multiplicador μ_t é:

$$\mu_t = \min_{(i,j) \in M_t} \{\hat{c}_{ij}\}, \quad (3.46)$$

sendo

$$M_t = (I, J) \cup (I, \bar{S}_t) \cup (\bar{S}_t, J). \quad (3.47)$$

Demonstração. Adaptado de [1] (*Suficiência*). Suponha que exista um conjunto de retas $C = I \cup J$ que satisfaça (a), (b), e (c), sendo I o conjunto de linhas, e J o conjunto de colunas. Desejamos mostrar que (3.42) admite multiplicador positivo.

Ao adicionar uma restrição do tipo (3.42) para uma subrota com conjunto de vértices S_t , temos uma modificação no dual (3.19)-(3.21) com a adição de uma nova variável, μ_t . Assim, para cada $(i, j) \in A$ teremos:

$$u_i + v_j + \sum_{t \in T'} \lambda_t a_{ij}^t + \mu_t a_{ij}^t \leq c_{ij}. \quad (3.48)$$

Para $(i, j) \in D_t = \{(i, j) \in A \mid i \in S_t, j \in S_t\}$ temos $a_{ij}^t = -1$, caso contrário, $a_{ij}^t = 0$.

A solução \bar{x} é ótima para o PD. Assim, para cada $(i, j) \in A$ com $\bar{x} = 1$, $\hat{c}_{ij} = 0$. Procuramos um multiplicador positivo $\mu_t > 0$ tal que o custo relativo das variáveis tais que $\bar{x}_{ij} = 1$ se mantenha nulo. Como $A'_t = \{(i, j) \in D_t \mid \bar{x}_{ij} = 1\} \subset D_t$, a inequação (3.48) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$u_i + v_j + \sum_{t \in T'} \lambda_t a_{ij}^t - \mu_t \leq c_{ij}. \quad (3.49)$$

Em (3.49) podemos observar que sendo $\mu_t > 0$ devemos mudar o valor $u_i + v_j + \sum_{t \in T'} \lambda_t a_{ij}^t$ para que o custo relativo se mantenha nulo. Partindo do pressuposto que não modificamos multiplicadores λ_t já fixados, uma forma de manter a igualdade em (3.49) é adicionar o valor μ_t ou a u_i , ou a v_j . As retas de C nos auxiliam na decisão de quais u_i e v_j aumentar. Assim, os novos valores a serem atribuídos a u'_i e v'_j são:

$$u'_i = \begin{cases} u_i + \mu_t, & \text{se } i \in I; \\ u_i, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.50)$$

$$v'_j = \begin{cases} v_j + \mu_t, & \text{se } j \in J; \\ v_j, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.51)$$

3. O MÉTODO *RELAX AND CUT*

De acordo com a condição (a) temos que C cobre $(i, j) \in A'_t$ exatamente uma vez. Com os novos valores u'_i e v'_j , teremos, a partir de (3.49), a seguinte desigualdade.

$$u'_i + v'_j + \sum_{t \in T'} \lambda_t a_{ij}^t - \mu_t \leq c_{ij} \quad (3.52)$$

Considerando, sem perda de generalidade, que $i \in I$:

$$u_i + \mu_t + v_j + \sum_{t \in T'} \lambda_t a_{ij}^t - \mu_t \leq c_{ij} \quad (3.53)$$

$$u_i + v_j + \sum_{t \in T'} \lambda_t a_{ij}^t + \mu_t - \mu_t \leq c_{ij} \quad (3.54)$$

$$u_i + v_j + \sum_{t \in T'} \lambda_t a_{ij}^t \leq c_{ij}. \quad (3.55)$$

Dessa forma, o custo relativo para $(i, j) \in A'_t$ manterá seu valor, qualquer que seja μ_t .

De acordo com (b), se $(i, j) \in A_t \setminus A'_t$, temos duas situações nas quais devemos avaliar o custo relativo após as atribuições de u'_i e v'_j :

(I) (i, j) é coberto por uma reta de C . Assim, os passos que levam (3.52) a (3.55) garantem que o custo relativo se mantém nulo.

(II) (i, j) não é coberto por C . Assim, de (3.49),

$$u'_i + v'_j + \sum_{t \in T'} \lambda_t a_{ij}^t - \mu_t \leq c_{ij} \quad (3.56)$$

$$u_i + v_j + \sum_{t \in T'} \lambda_t a_{ij}^t - \mu_t \leq c_{ij} \quad (3.57)$$

$$c_{ij} - u_i - v_j - \sum_{t \in T'} \lambda_t a_{ij}^t + \mu_t \geq 0. \quad (3.58)$$

Dessa forma, o custo relativo é positivo, mantendo a factibilidade dual da solução.

De acordo com (c), se $(i, j) \in A_0 \setminus A_t$, vale lembrar que $a_{ij}^t = 0$, e (i, j) não é coberto por nenhuma reta de C . Por (3.48), temos,

$$u'_i + v'_j + \sum_{t \in T} \lambda_t a_{ij}^t \leq c_{ij} \quad (3.59)$$

$$u_i + v_j + \sum_{t \in T} \lambda_t a_{ij}^t \leq c_{ij}. \quad (3.60)$$

Ou seja, não houve modificação no custo relativo, implicando que ele se mantém nulo. Portanto, para as arestas cujos custos relativos eram nulos, isto é, $(i, j) \in A_0$, a factibilidade dual se mantém, qualquer que seja o valor $\mu_t > 0$.

3.1. O MÉTODO *RELAX AND CUT* APLICADO AO PCVA

Em vista das modificações (3.50) e (3.51), as arestas dos conjuntos (I, J) , (I, \bar{S}_t) e (\bar{S}_t, J) , cuja união forma o conjunto M_t , também terão seus custos relativos modificados. É necessário garantir a factibilidade dual para as arestas em M_t .

Se $(i, j) \in (I, J)$, então temos duas situações a considerar.

I) $(i, j) \in D_t$. Nesse caso, de (3.49), temos

$$u'_i + v'_j + \sum_{t \in T} \lambda_t a_{ij}^t - \mu_t \leq c_{ij} \quad (3.61)$$

$$u_i + \mu_t + v_j + \mu_t + \sum_{t \in T} \lambda_t a_{ij}^t - \mu_t \leq c_{ij} \quad (3.62)$$

$$u_i + v_j + \sum_{t \in T} \lambda_t a_{ij}^t + \mu_t \leq c_{ij} \quad (3.63)$$

$$c_{ij} - u_i - v_j - \sum_{t \in T} \lambda_t a_{ij}^t - \mu_t \geq 0 \quad (3.64)$$

$$\hat{c}_{ij} - \mu_t \geq 0 \quad (3.65)$$

$$\hat{c}_{ij} \geq \mu_t \quad (3.66)$$

II) $(i, j) \notin D_t$. De (3.48) e sabendo que o coeficiente de μ_t é $a_{ij}^t = 0$ temos:

$$u'_i + v'_j + \sum_{t \in T} \lambda_t a_{ij}^t \leq c_{ij} \quad (3.67)$$

$$u_i + \mu_t + v_j + \mu_t + \sum_{t \in T} \lambda_t a_{ij}^t \leq c_{ij} \quad (3.68)$$

$$u_i + v_j + \sum_{t \in T} \lambda_t a_{ij}^t + 2\mu_t \leq c_{ij} \quad (3.69)$$

$$c_{ij} - u_i - v_j - \sum_{t \in T} \lambda_t a_{ij}^t - 2\mu_t \geq 0 \quad (3.70)$$

$$\hat{c}_{ij} - 2\mu_t \geq 0 \quad (3.71)$$

$$\hat{c}_{ij} \geq 2\mu_t \quad (3.72)$$

$$\frac{\hat{c}_{ij}}{2} \geq \mu_t. \quad (3.73)$$

Observe que $A_0 \cap (I, J) = \emptyset$. De fato, suponha que exista $(i, j) \in A_0 \cap (I, J)$. Logo, $(i, j) \in A_0$, e $(i, j) \in (I, J)$. Assim, (i, j) é coberto por duas retas de C . Como C satisfaz as condições (a),(b) e (c), uma aresta de A_0 será coberta por no máximo 1 reta de C , logo $(i, j) \notin A_0$, o que é uma contradição.

Temos que $(i, j) \notin D_t$ e $(i, j) \notin A_0$. Seja $(i, k) \in A$, tal que $k \neq j$, então $(i, k) \notin A_0$. De fato, suponha que $(i, k) \in A_0$. Como $i \in I$, (i, k) é coberto por uma reta de C . De acordo com (c), $(i, j) \notin A_0 \setminus A_t$. Se $(i, k) \in A_t$, então $(i, k) \in D_t$. Por outro lado, $(i, j) \notin D_t$, o que nos leva a duas possibilidades:

3. O MÉTODO *RELAX AND CUT*

Caso 1: $i \notin S_t$. Nesse caso, temos uma contradição, pois se $i \notin S_t$ não é possível que $(i, k) \in D_t$.

Caso 2: $j \notin S_t$. Nesse caso, considere $(l, j) \in A$ tal que $l \neq i$. Suponha que $(l, j) \in A_0$. Como $j \in J$, (l, j) é coberto por uma reta de C . Assim, $(l, j) \notin A_0 \setminus A_t$. Logo, $(i, j) \in A_t \subset D_t$ o que é uma contradição, pois $j \notin S_t$.

Portanto, $(i, k) \notin A_0$. Como escolhemos k de forma arbitrária podemos afirmar que existe uma linha i tal que $\hat{c}_{ik} > 0, \forall k \in V$. Esta afirmação contradiz a condição de otimalidade do PD, vide Apêndice A. Como a existência de tal linha foi consequência de afirmar que existe $(i, j) \notin D_t$ tal que $(i, j) \in (I, J)$, não há nenhuma aresta $(i, j) \in (I, J)$ que não pertença a D_t . Consequentemente, o limitante superior para o valor do multiplicador μ_t encontrado em (3.73) não é válido.

Logo, por (3.66),

$$\hat{c}_{ij} \geq \mu_t, \forall (i, j) \in (I, J). \quad (3.74)$$

Se $(i, j) \in (\bar{S}_t, J)$ temos

$$u'_i + v'_j + \sum_{t \in T} \lambda_t a_{ij}^t + a_{ij}^t \mu_t \leq c_{ij} \quad (3.75)$$

$$\begin{cases} u_i + v_j + \mu_t + \sum_{t \in T} \lambda_t a_{ij}^t - \mu_t \leq c_{ij}, & \text{se } (i, j) \in D_t; \\ u_i + v_j + \mu_t + \sum_{t \in T} \lambda_t a_{ij}^t \leq c_{ij}, & \text{se } (i, j) \notin D_t; \end{cases} \quad (3.76)$$

$$\begin{cases} \hat{c}_{ij} \geq 0, & \text{se } (i, j) \in D_t; \\ \hat{c}_{ij} \geq \mu_t, & \text{se } (i, j) \notin D_t. \end{cases} \quad (3.77)$$

Dessa forma, $\mu_t \leq \hat{c}_{ij}$ para todo $(i, j) \in (\bar{S}_t, J)$. Analogamente, temos $\mu_t \leq \hat{c}_{ij}$ para todo $(i, j) \in (I, \bar{S}_t)$.

Portanto, o valor μ_t definido no teorema mantém a factibilidade dual, sendo, assim, um multiplicador positivo. (*Necessidade*) Suponha que a res-

trição referente a uma subrota cujos vértices formam o conjunto S_t admita um multiplicador positivo μ_t . Para manter o custo relativo \hat{c}_{ij} das arestas de A'_t igual a zero é necessário aumentar $u_i + v_j$, pois a restrição dual associada é:

$$u_i + v_j + \sum_{t \in T} \lambda_t a_{ij}^t - \mu_t \leq c_{ij}. \quad (3.78)$$

Uma forma de fazê-lo é adicionar, ou a u_i , ou a v_j , o valor μ_t do multiplicador positivo para $(i, j) \in A'_t$. Assim, teremos um conjunto de linhas I e um conjunto de colunas J , tais que, se $C = I \cup J$, então C satisfaz (a).

Seja \mathfrak{C} a coleção de todos os conjuntos C obtidos da forma descrita. Tome um $C \in \mathfrak{C}$ qualquer.

Se C não satisfaz (b), então alguma aresta $(i, j) \in A_t \setminus A'_t$ é coberta duas vezes por retas de C . Logo, para esta aresta, $u'_i = u_i + \mu_t, v'_j = v_j + \mu_t$.

3.1. O MÉTODO *RELAX AND CUT* APLICADO AO PCVA

Calculando o custo reduzido, teremos:

$$\tilde{c}'_{ij} = c_{ij} - \left(u'_i + v'_j + \sum_{t \in T} \lambda_t a_{ij}^t - \mu_t \right) \quad (3.79)$$

$$\tilde{c}'_{ij} = c_{ij} - \left(u_i + \mu_t + v_j + \mu_t + \sum_{t \in T} \lambda_t a_{ij}^t - \mu_t \right) \quad (3.80)$$

$$\tilde{c}'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j - \sum_{t \in T} \lambda_t a_{ij}^t - \mu_t \quad (3.81)$$

$$\tilde{c}'_{ij} = \hat{c}_{ij} - \mu_t. \quad (3.82)$$

Como $(i, j) \in A_t \setminus A'_t \subset A_0$, temos $\hat{c}_{ij} = 0$. Logo,

$$\tilde{c}'_{ij} < 0. \quad (3.83)$$

Se C não satisfaz (c), então concluímos, analogamente, que existe alguma aresta de $(i, j) \in A_0 \setminus A_t$ coberta por alguma reta de C e cujo custo reduzido é $\tilde{c}'_{ij} < 0$.

Assim, se C não satisfaz (b) ou (c), então não existe um multiplicador positivo que mantenha a factibilidade dual. Como, por hipótese, existe um multiplicador positivo associado a (3.42), então existe algum $C \in \mathfrak{C}$ que satisfaz (b) e (c). \square

Para verificar se, dada uma subrota com conjunto de vértices S_t , existe um conjunto de retas C que satisfaz (a), (b) e (c), procedemos da seguinte maneira. Construimos um conjunto R^- de linhas que não podem pertencer a C , e um conjunto K^+ de colunas que precisam estar em C . Para isso, começamos com $K^+ = \emptyset$ e, para garantir (c), colocamos em R^- todas as linhas nas quais existe uma célula $(i, j) \in A_0$ com $j \in \bar{S}_t$.

Então, aplicamos recursivamente os dois passos seguintes, até que não possam ser feitas adições a qualquer um dos conjuntos.

Passo 1: Se uma linha i tiver sido colocada em R^- , para satisfazer (a), colocamos em K^+ a coluna j tal que $(i, j) \in A'_t$.

Passo 2: Se a coluna j tiver sido colocada em K^+ , para satisfazer (b) colocamos em R^- toda linha i tal que $(i, j) \in A_t$.

Formalmente, inicializamos $K_0^+ = \emptyset$, $R_0^- = \{i \in S_t \mid \exists (i, j) \in A_0, j \in \bar{S}_t\}$ e definimos recursivamente para $r = 1, \dots, r_*$,

$$K_r^+ = K_{r-1}^+ \cup \{j \in S_t \mid \exists (i, j) \in A'_t, i \in R_{r-1}^-\} \quad (3.84)$$

$$R_r^- = R_{r-1}^- \cup \{i \in S_t \mid \exists (i, j) \in A_t, j \in K_r^+\}. \quad (3.85)$$

r_* é definido como o menor índice r para o qual $K_r^+ = K_{r-1}^+$, ou $R_r^- = R_{r-1}^-$.

Para concluir, definimos um conjunto de colunas que não podem pertencer a C para que (a), (b) e (c) ocorram.

$$K_0^- = \{j \in S_t \mid \exists (i, j) \in A_0, i \in \bar{S}_t\}. \quad (3.86)$$

Tendo definidos K_0^- e $K_{r_*}^+$, duas situações podem ocorrer.

3. O MÉTODO *RELAX AND CUT*

- (I) Se $K_0^- \cap K_{r^*}^+ \neq \emptyset$, então alguma coluna que não pode pertencer a C ($j \in K_0^-$), deve pertencer a C para que as condições (a), (b) e (c) sejam satisfeitas ($j \in K_{r^*}^+$). Assim, não existe conjunto C que satisfaça (a), (b) e (c) e nenhum multiplicador positivo pode ser atribuído à inequação (3.42) correspondente a S_t .
- (II) Se $K_0^- \cap K_{r^*}^+ = \emptyset$, então o conjunto de retas $C = I \cup J$, tendo $I = S_t \setminus R_{r^*}^-$ e $J = K_{r^*}^+$, satisfaz as condições (a), (b) e (c). De fato, seja $(i, j) \in A_t$. Se $j \in K_{r^*}^+$, então $i \in R_{r^*}^-$, assim, (i, j) é coberto no máximo uma vez. Agora, considere $(i, j) \in A'_t$. Se $j \in K_{r^*}^+$, então $j \in C$. Se $j \notin K_{r^*}^+$, então $i \notin R_{r^*}^-$, ou seja, $i \in C$. Em ambos os casos, (i, j) é coberto. Finalmente, se $(i, j) \in A_0 \setminus A_t$, então ou $i \in R_{r^*}^-$, ou $j \in K_0^-$, assim, $i \notin C$, $j \notin C$ e (i, j) não é coberto. Dessa forma, C é como requerido.

Nesse caso, incluímos a inequação (3.42) correspondente a S_t em T com o multiplicador $\mu_t > 0$ definido no Teorema 3.4, e atualizamos os custos relativos de acordo com:

$$\hat{c}_{ij} = \begin{cases} \hat{c}_{ij} - \mu_t, & \text{se } (i, j) \in M_t; \\ \hat{c}_{ij}, & \text{se } (i, j) \notin M_t. \end{cases} \quad (3.87)$$

O limitante inferior para o PCVA ao fim do procedimento é:

$$LI = v(PD) + \sum_{t \in T} \mu_t. \quad (3.88)$$

O pseudocódigo do algoritmo RC-clique descrito nesta subseção é apresentado na Figura 3.18. A_0 é definido como o conjunto das arestas com custo relativo nulo, A_t e A'_t são definidos como em (3.43), e M_t é definido como em (3.47).

3.1. O MÉTODO *RELAX AND CUT* APLICADO AO PCVA

```

01 Entrada: Instância do PCVA  $(G(V, A), |V| = n, |A| = m, c_{ij}, \forall (i, j) \in A)$ .
02 Saída: Limitante Inferior  $LI$ , restrições violadas do tipo Clique.
03 Início
04   Resolva o PD associado ao PCVA.
05    $LI = v(PD)$ 
06   Identifique o conjunto  $\mathcal{S}$  de subrotas da solução  $\bar{x}$ .
07   Se  $|\mathcal{S}| = 1$ , pare. A solução  $\bar{x}$  é ótima.
08    $T = \emptyset$ 
09    $t = 1$ 
10   Enquanto  $t \leq |\mathcal{S}|$ 
11     Início
12       Selecione a subrota  $S_t$ 
13        $A_0 = \{(i, j) \in A \mid \hat{c}_{ij} = 0\}$ 
14        $K_0^+ = \emptyset$ 
15        $R_0^- = \{i \in S_t \mid \exists (i, j) \in A_0, j \in \bar{S}_t\}$ 
16        $r = 0$ 
17       Enquanto  $K_r^+ \neq K_{r-1}^+$  e  $R_r^- \neq R_{r-1}^-$ 
18         Início
19            $r = r + 1$ 
20            $K_r^+ = K_{r-1}^+ \cup \{j \in S_t \mid \exists (i, j) \in A_t, i \in R_{r-1}^-\}$ 
21            $R_r^- = R_{r-1}^- \cup \{i \in S_t \mid \exists (i, j) \in A_t, j \in K_r^+\}$ 
22         Fim
23          $r^* = r - 1$ 
24          $K_0^- = \{j \in S_t \mid \exists (i, j) \in A_0, i \in \bar{S}_t\}$ 
25         Se  $K_0^- \cap K_{r^*}^+ \neq \emptyset$ , então  $t = t + 1$ 
26         Senão
27           Início
28              $I = S_t \setminus R_{r^*}^-$ 
29              $J = K_{r^*}^+$ 
30              $C = I \cup J$ 
31              $\mu_t = \min_{(i,j) \in M_t} \hat{c}_{ij}$ 
32             Para  $(i, j) \in M_t$  faça  $\hat{c}_{ij} = \hat{c}_{ij} - \mu_t$ 
33              $T = T \cup \{t\}$ 
34              $LI = LI + \mu_t$ 
35              $t = t + 1$ 
36           Fim
37         Fim
38       Se existe um circuito hamiltoniano  $H(\hat{x})$  em  $G_0 = (V, A_0)$ , então  $\hat{x}$  é
       solução ótima para o PCVA.
39       Senão,  $\bar{x}$  é uma solução para o PD,  $LI$  é um limitante inferior para o
       PCVA e as restrições em  $T$  são violadas pela solução  $\bar{x}$ .
40     Fim

```

Figura 3.18: Algoritmo RC-Clique

3. O MÉTODO *RELAX AND CUT*

Exemplo 3.3. Para ilustrar o algoritmo RC-Clique, utilizaremos a instância associada a Figura 3.2, também utilizada no Exemplo 3.1.

Inicialização

A solução para o PD associado nos dá um limitante inferior inicial $LI = v(PD) = 6$ e possui três subrotas: $S_1 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{3, 5\}$ e $S_3 = \{4, 6\}$. O conjunto das restrições dualizadas é $T = \emptyset$.

Iteração 1

Selecionamos S_1 . $A_0 = \{(1, 2), (2, 1), (3, 5), (4, 6), (5, 2), (5, 3), (6, 4)\}$, $A_1 = \{(1, 2), (2, 1)\} = A'_1$.

Inicializamos os conjuntos $K_0^+ = \emptyset$ e $R_0^- = \{i \in S_1 \mid \exists(i, j) \in A_0, j \in \bar{S}_1\} = \emptyset$. Agora, encontraremos os conjuntos $K_{r^*}^+$ e $R_{r^*}^-$.

$$K_1^+ = K_0^+ \cup \{j \in S_1 \mid \exists(i, j) \in A'_1, i \in R_0^-\} = \emptyset$$

$$R_1^- = R_0^- \cup \{i \in S_1 \mid \exists(i, j) \in A_1, j \in K_1^+\} = \emptyset$$

Como $K_1^+ = K_0^+$, $r^* = 1$.

$K_0^- = \{j \in S_1 \mid \exists(i, j) \in A_1, i \in \bar{S}_1\} = \{2\}$, pois $(5, 2) \in A_0$.

Logo, $K_0^- \cap K_1^+ = \{2\} \cap \emptyset = \emptyset$ e assim garante-se que a restrição (3.42) para S_1 admite multiplicador positivo.

$$I = S_1 \setminus R_1^- = \{1, 2\}.$$

$$J = K_1^+ = \emptyset.$$

$$C = I \cup J.$$

$M_1 = (I, J) \cup (I, \bar{S}_1) \cup (\bar{S}_1, J) = (I, \bar{S}_1)$, pois $J = \emptyset$.

$(I, \bar{S}_1) = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}$. A inequação válida relativa a S_1 é:

$$x_{12} + x_{21} \leq 1. \quad (3.89)$$

$$\mu_1 = \min_{(i,j) \in M_1} \{\hat{c}_{ij}\} = \min\{4, 6, 2, 6, 2, 5, 2, 5\} = 2.$$

A atualização dos custos está representada na Figura 3.19, sendo destacadas as células que tiveram alteração. $T = T \cup \{1\}$. Encontrado o valor de μ_1 melhoramos nosso limitante para $LI = 6 + 2 = 8$. A representação do grafo admissível G_0 é encontrada na Figura 3.20.

Iteração 2

Selecionamos S_2 . De acordo com a nova matriz de custos exibida na Figura 3.19, $A_0 = \{(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 6), (5, 2), (5, 3), (6, 4)\}$, $A_2 = \{(3, 5), (5, 3)\} = A'_2$.

$$K_0^+ = \emptyset.$$

$R_0^- = \{i \in S_2 \mid \exists(i, j) \in A_0, j \in \bar{S}_2\} = \{5\}$, pois $(5, 2) \in A_0$.

$K_1^+ = K_0^+ \cup \{j \in S_2 \mid \exists(i, j) \in A'_2, i \in R_0^-\} = \{3\}$, pois $(5, 3) \in A_2$.

$R_1^- = R_0^- \cup \{i \in S_2 \mid \exists(i, j) \in A_2, j \in K_1^+\} = \{5\}$.

Como $R_1^- = R_0^-$, $r^* = 1$.

$K_0^- = \{j \in S_2 \mid \exists(i, j) \in A_0, i \in \bar{S}_2\} = \{3, 5\}$, pois $(1, 5), (2, 3) \in A_0$.

3.1. O MÉTODO *RELAX AND CUT* APLICADO AO PCVA

	1	2	3	4	5	6
1	-	0	2	4	0	4
2	0	-	0	3	0	3
3	3	9	-	7	0	7
4	5	6	1	-	3	0
5	12	0	0	3	-	4
6	7	5	1	0	1	-

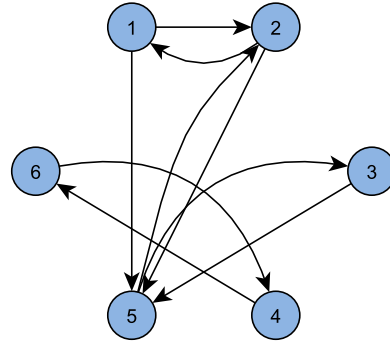


Figura 3.19: Matriz de custos relativos. Atualização relativa a S_1 .

Figura 3.20: G_0 após dualização para S_1 .

$K_0^- \cap K_1^+ = \{3, 5\} \cap \{3\} = \{3\} \neq \emptyset$. Portanto, (3.42) não admite multiplicador positivo para a subrota S_2 .

Iteração 3

Por fim, selecionamos a subrota S_3 . Como não foi encontrado multiplicador positivo para S_2 , não houve atualização de custos relativos, nem atualização do limitante inferior. LI e A_0 se mantêm os mesmos. $A_3 = \{(4, 6), (6, 4)\} = A'_3$.

$$K_0^+ = \emptyset,$$

$$R_0^- = \{i \in S_3 | \exists (i, j) \in A_0, j \in \bar{S}_3\} = \emptyset,$$

$$K_1^- = K_0^+ \cup \{j \in S_3 | \exists (i, j) \in A'_3, i \in R_0^-\} = \emptyset,$$

$$R_1^- = R_0^- \cup \{i \in S_3 | \exists (i, j) \in A_3, j \in K_1^+\} = \emptyset.$$

Como $K_1^+ = K_0^+$, $r^* = 1$.

$$K_0^- = \{j \in S_3 | \exists (i, j) \in A_0, i \in \bar{S}_3\} = \emptyset.$$

$K_1^+ \cap K_0^- = \emptyset$, logo, (3.42) admite multiplicador positivo.

$$I = S_3 \setminus R_1^- = \{4, 6\},$$

$$J = K_1^+ = \emptyset,$$

$$C = I \cup J,$$

$$M = (I, J) \cup (I, \bar{S}_3) \cup (\bar{S}_3, J) = (I, \bar{S}_3), \text{ pois } J = \emptyset.$$

$(I, \bar{S}_3) = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 5)\}$ A inequação válida relativa a S_3 é:

$$x_{46} + x_{64} \leq 1. \quad (3.90)$$

$$\mu_3 = \min_{(i,j) \in M} \{\hat{c}_{ij}\} = \min\{5, 6, 1, 3, 7, 5, 1, 1\}.$$

Assim atualizam-se os custos relativos, como na Figura 3.21. $T = T \cup \{3\} = \{1, 3\}$. O limitante inferior é atualizado $LI = 8 + 1 = 9$. Podemos ver na Figura 3.22 o grafo G_0 atual. Como já foram verificadas todas as subrotas, resta verificar se podemos encontrar uma solução para o PCVA. Note que, assim como no exemplo 3.1, G_0 não possui um circuito hamiltoniano. Basta notar que em G_0 apenas a aresta $(4, 6)$ converge para o vértice 6, enquanto a única aresta que converge ao vértice 4 é $(4, 6)$, inevitavelmente formando uma subrota.

3.1. O MÉTODO *RELAX AND CUT* APLICADO AO PCVA

uma aresta entre S_t e W_t . Como S_t é uma componente conexa, existe um caminho entre quaisquer pares de vértices de S_t . Em particular, existe um caminho entre s e i , qualquer que seja $s \in S_t$. Por outro lado, W_t também é uma componente conexa e, existe um caminho entre w e j , qualquer que seja $w \in W_t$. Assim, o grafo associado a $G_0 \setminus \{p\}$ possui um caminho entre quaisquer par de vértices, sendo (i, j) pertencente a qualquer caminho entre um vértice de S_t e um vértice de W_t , isto é, $G_0 \setminus \{p\}$ é conexo, o que contradiz a hipótese. Assim, $Q'_t \cap A_0 = \emptyset$

Analogamente, suponha que $Q''_t \cap A_0 \neq \emptyset$, então existe $(i, j) \in Q''_t \cap A_0$. Logo, existem $i \in W_t$, $j \in S_t$, com $i \neq p$ e $j \neq p$ tais que $(i, j) \in A_0$, o que implica em $G_0 \setminus \{p\}$ ser conexo, uma contradição. Assim $Q''_t \cap A_0 = \emptyset$

Portanto, $Q'_t \cap A_0 = Q''_t \cap A_0 = \emptyset$.

Relacionando (3.91) com (3.8), teremos que, se $(i, j) \in Q'_t \cup Q''_t$, então, $a_{ij}^t = 1$, senão $a_{ij}^t = 0$. Além disso, $a_0^t = 1$. Logo, considerando o multiplicador lagrangeano μ_t para (3.91), sendo $(i, j) \in Q'_t \cup Q''_t$:

$$\hat{c}'_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j - \sum_{t \in T'} \lambda_t a_{ij}^t - \mu_t \geq 0 \quad (3.94)$$

$$\hat{c}'_{ij} = \hat{c}_{ij} - \mu_t \geq 0. \quad (3.95)$$

Portanto, tomando $\mu_t \leq \hat{c}_{ij} \forall (i, j) \in Q'_t \cup Q''_t$, (3.91) para p admite multiplicador positivo. \square

Tendo identificado um ponto de articulação $p \in V$ a restrição (3.91) correspondente é dualizada e os custos relativos são atualizados:

$$\hat{c}_{ij} = \begin{cases} \hat{c}_{ij} - \mu_t, & \text{se } (i, j) \in Q'_t \cup Q''_t; \\ \hat{c}_{ij}, & \text{se } (i, j) \notin Q'_t \cup Q''_t. \end{cases}$$

Ao fim do procedimento, o limitante dual para o PCVA é:

$$LI = v(PD) + \sum_{t \in T'} \mu_t. \quad (3.96)$$

A Figura 3.23 apresenta o procedimento RC-Articulação descrito nesta seção.

Exemplo 3.4. Considere a instância da Figura 3.24, cuja solução do PD associado fornece um limitante inferior $LI = v(PD) = 6$. Tomaremos vértices $p \in V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e verificaremos se $G_0 \setminus \{p\}$ é desconexo.

Inicialização

A matriz de custos relativos da solução ótima está representada na Figura 3.25, sendo destacadas as células referentes às variáveis tais que $\bar{x}_{ij} = 1$, $\bar{x}_{ij} = 0$ para as demais arestas. A solução ótima $\bar{x}_{12} = \bar{x}_{21} = \bar{x}_{35} = \bar{x}_{46} = \bar{x}_{53} = \bar{x}_{64} = 1$ está representada no grafo da Figura 3.26.

3. O MÉTODO *RELAX AND CUT*

```

01 Entrada: Instância do PCVA  $(G(V, A), |V| = n, |A| = m, c_{ij}, \forall (i, j) \in A)$ .
02 Saída: Limitante Inferior  $LI$ , restrições violadas do tipo ponto de articulação.
03 Início
04   Resolva o PD associado ao PCVA.
05    $LI = v(PD)$ 
06   Se a solução  $\bar{x}$  for viável para o PCVA, pare. A solução  $\bar{x}$  é ótima.
07    $p = 0$ 
08    $T = \emptyset$ 
09   Enquanto  $p \leq n$ 
10     Início
11        $p = p + 1$ 
12       Defina o grafo  $G_0$ 
13        $A_0 = \{(i, j) \in A \mid \hat{c}_{ij} = 0\}$ 
14       Se  $G_0 \setminus \{p\}$  é desconexo, então
15         Início
16            $S_t$  é uma das componentes de  $G_0 \setminus \{p\}$ 
17            $W_t = V \setminus (S_t \cup \{p\})$ 
18            $Q'_t = (S_t, W_t)$ 
19            $Q''_t = (W_t, S_t)$ 
20            $\mu_t = \min_{(i,j) \in Q'_t \cup Q''_t} \{\hat{c}_{ij}\}$ 
21           Para  $(i, j) \in Q'_t \cup Q''_t$  faça  $\hat{c}_{ij} = \hat{c}_{ij} - \mu_t$ 
22            $T = T \cup \{t\}$ 
23         Fim
24       Fim
25       Se existe um circuito hamiltoniano  $H(\hat{x})$  em  $G_0 = (V, A_0)$ , então  $\hat{x}$  é solução ótima para o PCVA.
26       Senão,  $\bar{x}$  é uma solução para o PD,  $LI$  é um limitante inferior para o PCVA e as restrições em  $T$  são violadas pela solução  $\bar{x}$ .
26 Fim

```

Figura 3.23: Algoritmo RC-Articulação

	1	2	3	4	5	6
1	-	1	3	5	1	1
2	1	-	3	6	3	6
3	2	8	-	8	1	8
4	4	7	2	-	4	1
5	7	3	1	4	-	5
6	6	3	2	1	2	-

	1	2	3	4	5	6
1	-	0	2	4	0	0
2	0	-	2	5	2	5
3	1	7	-	7	0	7
4	3	6	1	-	3	0
5	6	2	0	3	-	4
6	5	2	1	0	1	-

Figura 3.24: Matriz de custos da instância.

Figura 3.25: Matriz de custos relativos da solução ótima \bar{x} .

3.1. O MÉTODO *RELAX AND CUT* APLICADO AO PCVA

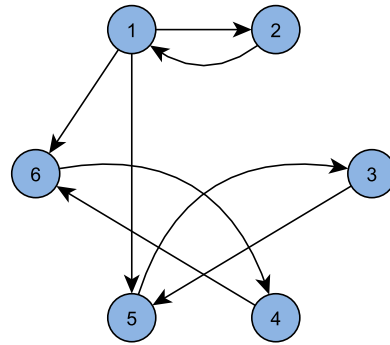
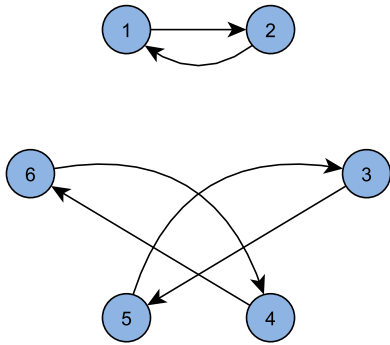


Figura 3.26: Grafo da solução ótima. Figura 3.27: Grafo admissível G_0 .

A Figura 3.27 mostra o grafo admissível G_0 . Dessa forma,

$$A_0 = \{(1, 2), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (3, 5), (4, 6), (5, 3), (6, 4)\}.$$

A solução apresenta subrotas, então, não é ótima para o PCVA. Inicializamos o conjunto de restrições dualizadas, então $T = \emptyset$.

Iteração 1

Tomando $p = 1$, vemos que $G_0 \setminus \{1\}$ é desconexo. Defina $S_1 = \{2\}$ e $W_1 = V \setminus (S_1 \cup \{1\}) = \{3, 4, 5, 6\}$.

$$Q'_1 = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}, \quad Q''_1 = \{(3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)\}.$$

A inequação válida referente a $p = 1$ é:

$$x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} \geq 1. \quad (3.97)$$

Assim, o valor do multiplicador positivo é:

$$\mu_1 = \min_{(i,j) \in Q'_1 \cup Q''_1} \{\hat{c}_{ij}\} = \min\{2, 5, 2, 5, 7, 6, 2, 2\} = 2. \quad (3.98)$$

Os custos relativos são atualizados, o que pode ser visto na matriz da Figura 3.28. O limitante inferior passa para $LI = 6 + 2 = 8$ e $T' = \{1\}$.

	1	2	3	4	5	6
1	-	0	2	4	0	0
2	0	-	0	3	0	3
3	1	5	-	7	0	7
4	3	4	1	-	3	0
5	6	0	0	3	-	4
6	5	0	1	0	1	-

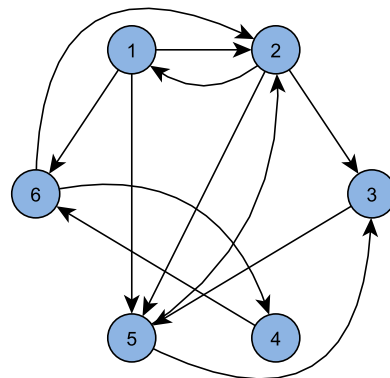


Figura 3.28: Matriz de custos após dualização para o ponto de articulação $p = 1$.

Figura 3.29: Grafo Admissível G_0 . Atualização relativa a $p = 1$.

3. O MÉTODO *RELAX AND CUT*

Iteração 2

Observe que o vértice $p = 2$ não é um ponto de articulação, pois sua retirada de G_0 resulta num grafo conexo. A Figura 3.29 mostra o grafo G_0 de acordo com a matriz de custos relativos (Figura 3.28). Também não são pontos de articulação os vértices 3, 4 e 5. A retirada do vértice $p = 6$ torna G_0 desconexo, pois não há conexão entre o vértice 4 e os vértices 1, 2, 3 e 5. Defina $S_2 = \{1, 2, 3, 5\}$ e, conseqüentemente, $W_2 = \{4\}$.

$Q'_2 = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 4)\}$, $Q''_2 = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5)\}$. A inequação válida referente a $p = 6$ é:

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{54} + x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} \geq 1. \quad (3.99)$$

O valor do multiplicador positivo, de acordo com a Figura (3.28), é:

$$\mu_2 = \min_{(i,j) \in Q'_2 \cup Q''_2} \{\hat{c}_{ij}\} = \min\{4, 3, 7, 3, 3, 4, 1, 3\} = 1. \quad (3.100)$$

A atualização dos custos relativos é retratada na Figura 3.30. O limitante inferior se torna $LI = 8 + 1 = 9$ e $T' = \{1, 2\}$. O grafo G_0 não possui mais pontos de articulação, vide Figura 3.31. Note que, a cada iteração do Algoritmo RC-Articulação o conjunto S_t é conectado ao conjunto W_t em G_0 .

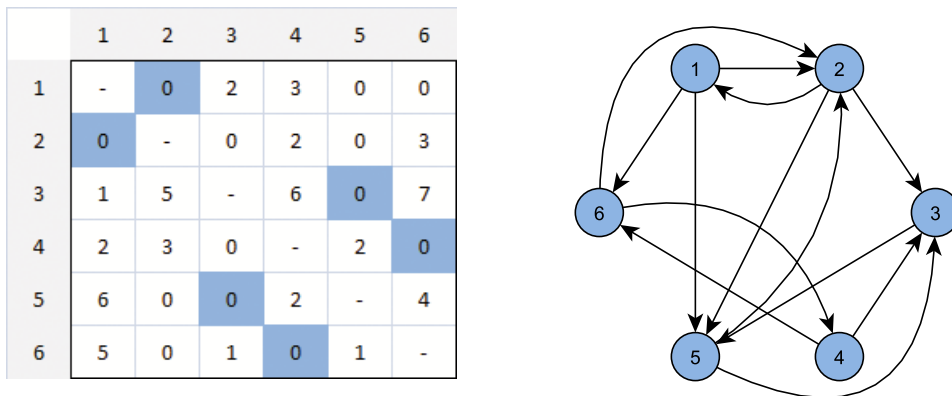


Figura 3.30: Matriz de custos após dualização para o ponto de articulação $p = 6$.

Figura 3.31: Grafo Admissível G_0 . Atualização relativa a $p = 6$.

Como verificamos todos os possíveis pontos de articulação, resta-nos verificar se existe algum circuito hamiltoniano em G_0 . Observe que na Figura 3.31 a única aresta que diverge do vértice 3 é a aresta (3,5). Das opções de adjacência do vértice 5, a aresta (5,2) é a única opção restante, uma vez que selecionar (5,3) resultaria numa subrota. Se seleccionássemos o vértice 3 como sucessor do vértice 2 teríamos uma subrota. Além disso, como selecionamos (5,2), não podemos selecionar o vértice 5 como sucessor de 2. Resta apenas o vértice 1 como opção, que não podendo ser sucedido por 2 e 5, a escolha restante é a aresta (1,6). Analogamente, selecionamos a aresta (6,4) e por fim a aresta (4,3) resultando no circuito hamiltoniano $H(\hat{x}) = \{(1,6), (6,4), (4,3), (3,5), (5,2), (2,1)\}$

3.2. MÉTODO RC PARA RESTRIÇÕES DE MULTIPRODUTO

representado na Figura 3.32. O vetor de incidência do circuito $H(\hat{x})$, \hat{x} fornece um valor na função objetivo igual a 9, que é o mesmo do nosso limitante inferior. Porém, \hat{x} não satisfaz a condição de igualdade do Teorema 3.2. Assim, \hat{x} é uma solução ótima que não está nas condições do Teorema 3.2, o que implica que a condição descrita é apenas suficiente, e não necessária.

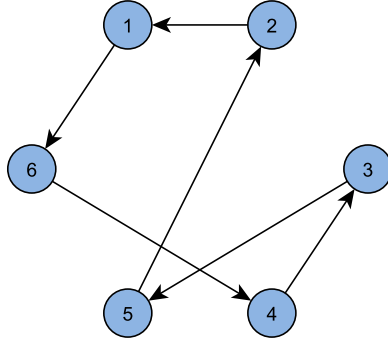


Figura 3.32: Circuito Hamiltoniano em G_0 .

3.2 Procedimento *relax and cut* para restrições de Multiproduto

Desenvolvemos nesta seção um procedimento *relax and cut* utilizando para o PCVA as restrições de eliminação de subrotas do tipo multiproduto (Seção 2.2), baseados nos procedimentos de Balas e Christofides [1] descritos na Seção 3.1. A formulação PCVA-MP é definida pelas restrições (3.101)-(3.108).

$$\text{Minimizar } \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} x_{ij} \quad (3.101)$$

sujeito a

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 1, i \in V \quad (3.102)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij} = 1, j \in V \quad (3.103)$$

$$\sum_{i \in V} y_{k1i} - \sum_{i \in V} y_{ki1} = 1, k \in V \setminus \{1\} \quad (3.104)$$

$$\sum_{i \in V} y_{kik} - \sum_{i \in V} y_{kki} = 1, k \in V \setminus \{1\} \quad (3.105)$$

$$\sum_{i \in V \setminus \{1\}} y_{kij} - \sum_{i \in V \setminus \{1\}} y_{kji} = 0, j, k \in V \setminus \{1\}, j \neq k \quad (3.106)$$

$$y_{kij} \leq x_{ij}, i, j, k \in V, k \neq 1 \quad (3.107)$$

$$x_{ij} = 0/1, i, j \in V. \quad (3.108)$$

3. O MÉTODO *RELAX AND CUT*

Note que, na aplicação da técnica *relax and cut* por Balas e Christofides [1], trabalhamos com uma série de problemas distintos. Inicialmente, utilizamos a relaxação linear do problema da designação como relaxação para o PCVA. Então, identificamos uma inequação válida e a adicionamos ao PD, criando uma outra relaxação “temporária” para o PCVA, que denominamos RTPD. Porém, ao invés de resolver o RTPD, dualizamos a restrição adicionada, produzindo uma relaxação lagrangeana (Seção 2.4), e atualizamos os multiplicadores lagrangeanos de forma que a base B da solução ótima do PD se mantenha dual factível mesmo após a dualização da inequação válida.

Numa solução para o PD que possua subrotas, as restrições de multiproducto (3.104)-(3.107) serão violadas para quaisquer $w \in V$ que não estejam na mesma subrota que a cidade 1. Denotaremos a subrota que contém o vértice 1 por S_1 .

Definindo:

$$a_{kij}^{\alpha} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = 1; \\ -1, & \text{se } j = 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$a_{kij}^{\beta} = \begin{cases} -1, & \text{se } i = 1; \\ 1, & \text{se } j = 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$a_{kij}^{\gamma_j} = \begin{cases} 1, & \text{se } j \neq 1, j \neq k; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$a_{kij}^{\gamma_i} = \begin{cases} -1, & \text{se } i \neq 1, i \neq k; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Uma coluna da matriz de restrições do modelo PCVA-MP associada à variável y_{kij} é representada na Figura 3.33.

Restrições de Saída	(3.102)	y_{kij}	y_{425}
Restrições de Entrada	(3.103)	0	0
Restrições do produto 2		0	0
⋮		⋮	⋮
Restrições do produto k	$\left\{ \begin{array}{l} (3.104) \\ (3.105) \\ (3.106) \end{array} \right\}$	a_{kij}^{α}	0
		a_{kij}^{β}	0
		$a_{kij}^{\gamma_j}$	1
		$a_{kij}^{\gamma_i}$	-1
⋮		⋮	⋮
Restrições do produto n		0	0
Restrições de Acoplamento	(3.107)	-1	-1

Figura 3.33: Coluna da variável y_{kij}

Seja $k \in V \setminus \{1\}$ um produto, α_k é a variável dual associada às restrições (3.104), β_k é a variável dual associada às restrições (3.105), γ_j^k é a variável dual

3.2. MÉTODO RC PARA RESTRIÇÕES DE MULTIPRODUTO

associada à restrição (3.106) para um determinado vértice $j \in V \setminus \{1, k\}$, e φ_{kij} é a variável dual associada à restrição (3.107).

O problema dual associado à relaxação linear do PCVA-MP é:

$$\text{Maximizar } \sum_{i \in V} u_i + \sum_{j \in V} v_j + \sum_{k=2}^n (\alpha_k + \beta_k) \quad (3.109)$$

sujeito a

$$u_i + v_j + \sum_{k=2}^n \varphi_{kij} \leq c_{ij}, i, j \in V \quad (3.110)$$

$$a_{kij}^\alpha \alpha_k + a_{kij}^\beta \beta_k + a_{kij}^{\gamma_j} \gamma_j^k + a_{kij}^{\gamma_i} \gamma_i^k - \varphi_{kij} \leq 0, i, j, k \in V, k \neq 1 \quad (3.111)$$

$$\varphi_{kij} \geq 0, i, j, k \in V, k \neq 1. \quad (3.112)$$

Desejamos dualizar restrições que possuam um multiplicador positivo, ou seja, que melhorem o limitante dual atual. Observando a função objetivo (3.109), para que a modificação dos valores duais forneçam um limitante dual melhor, desejamos restrições que satisfaçam:

$$\sum_{k \in T'} (\alpha_k + \beta_k) > 0 \quad (3.113)$$

sendo T' o conjunto de restrições dualizadas.

Considere $k \in \bar{S}_1 = V \setminus S_1$, a única variável dual que possui restrição de sinal é $\varphi = (\varphi_{kij})$ relativa às restrições (3.107). Para um produto $k \in \bar{S}_1$, vamos identificar se existem restrições (3.104)-(3.107) violadas e se são admissíveis multiplicadores positivos. Uma forma de garantir (3.112) é atribuir a φ_{kij} o valor atual da folga da restrição dual associada a x_{ij} . De (3.110) temos:

$$\varphi_{kij} = c_{ij} - u_i - v_j - \sum_{k' \in T' \setminus \{k\}} \varphi_{k'ij}. \quad (3.114)$$

É necessário ainda determinar os possíveis valores para as variáveis α_k , β_k e γ_j^k , $j \in V \setminus \{1, k\}$ que mantenham a factibilidade dual e que forneçam o melhor limitante possível. Para simplificar a notação, consideraremos que $T = \emptyset$, ou seja, não há restrições dualizadas. Tendo fixado o valor de φ_{kij} de acordo com (3.114), a partir das expressões (3.110) e (3.111) temos a seguinte relação.

$$u_i + v_j + a_{kij}^\alpha \alpha_k + a_{kij}^\beta \beta_k + a_{kij}^{\gamma_j} \gamma_j^k + a_{kij}^{\gamma_i} \gamma_i^k \leq c_{ij}, i, j \in V. \quad (3.115)$$

Considere a subrota que contém o vértice k , S_k . Seja $l_1 \in S_k = \{k, l_1, l_2, \dots, l_{|S_k|}\}$ tal que $\bar{x}_{kl_1} = 1$. Para a coluna associada à variável x_{kl_1} teremos:

$$a_{kkl_1}^\alpha = 0, \quad a_{kkl_1}^\beta = -1, \quad a_{kkl_1}^{\gamma_{l_1}} = 1, \quad a_{kkl_1}^{\gamma_k} = 0. \quad (3.116)$$

Substituindo em (3.115) teremos:

$$u_k + v_{l_1} - \beta_k + \gamma_{l_1}^k = c_{kl_1}. \quad (3.117)$$

3. O MÉTODO *RELAX AND CUT*

Para $\bar{x}_{ij} = 1$ o custo relativo associado é nulo, assim, para (k, l_1) , $u_k + v_{l_1} = c_{kl_1}$ e

$$-\beta_k + \gamma_{l_1}^k = 0 \quad (3.118)$$

$$\beta_k = \gamma_{l_1}^k. \quad (3.119)$$

Tome $l_2 \in S_k$ tal que $\bar{x}_{l_1 l_2} = 1$. De maneira análoga, para a aresta (l_1, l_2)

$$u_{l_1} + u_{l_2} + \gamma_{l_1}^k - \gamma_{l_2}^k = c_{l_1 l_2}, \quad (3.120)$$

obtendo $\gamma_{l_1}^k = \gamma_{l_2}^k$. Continuando este raciocínio, temos

$$\gamma_{l_i}^k = \beta_k, \forall l_i \in S_k. \quad (3.121)$$

Considere, agora, $m_1 \in S_1 = \{1, m_1, m_2, \dots, m_{|S_1|}\}$ tal que $\bar{x}_{1m_1} = 1$. De acordo com (3.115) temos

$$u_1 + v_{m_1} + \alpha_k + \gamma_{m_1}^k = c_{1m_1}. \quad (3.122)$$

Tendo $\hat{c}_{1m_1} = 0$, chegamos a igualdade $\alpha_k = -\gamma_{m_1}^k$, que também será válida para quaisquer outros vértices $m_i \in S_1$, isto é:

$$\alpha_k = -\gamma_{m_i}^k, \forall m_i \in S_1. \quad (3.123)$$

Consequentemente, $\gamma_{m_i}^k = \gamma_{m_j}^k$, onde $m_i, m_j \in S_1, m_i, m_j \neq 1, m_i \neq m_j$.

De modo geral, para uma subrota $S_q \neq S_1$ e $S_q \neq S_k$ e quaisquer vértices $q_i, q_j \in S_q$ distintos,

$$\gamma_{q_i} = \gamma_{q_j}. \quad (3.124)$$

As relações até aqui desenvolvidas entre as variáveis duais α_k, β_k e γ^k estão associadas as variáveis primais tais que $\bar{x}_{ij} = 1$. Vejamos agora que relações podemos extrair de (3.115) em relação às variáveis primais tais que $\bar{x}_{ij} = 0$.

Sejam S_q e S_r subrotas distintas e os vértices q_i e r_j , ambos diferentes de 1 e k , pertencentes às respectivas subrotas. Considere a aresta (q_i, r_j) . A desigualdade (3.115) para (q_i, r_j) é:

$$u_{q_i} + v_{r_j} + \gamma_{r_j}^k - \gamma_{q_i}^k \leq c_{q_i r_j}. \quad (3.125)$$

Como q_i e r_j não pertencem a mesma subrota, $\bar{x}_{q_i r_j} = 0$. Além disso, sendo \bar{x} a solução ótima do PD, podemos afirmar que $\hat{c}_{q_i r_j} \geq 0$, isto é, $u_i + v_j \leq c_{q_i r_j}$. Como $\hat{c}_{q_i r_j} = c_{q_i r_j} - u_i + v_j$, a fim de manter a factibilidade dual e de acordo com (3.125):

$$\gamma_{r_j}^k - \gamma_{q_i}^k \leq \hat{c}_{q_i r_j}. \quad (3.126)$$

Tendo em vista (3.124), podemos escolher um vértice de cada subrota, digamos, $q_1 \in S_q$ e $r_1 \in S_r$, obtendo,

$$\gamma_{r_1}^k - \gamma_{q_1}^k \leq \hat{c}_{q_i r_j}. \quad (3.127)$$

3.2. MÉTODO RC PARA RESTRIÇÕES DE MULTIPRODUTO

A desigualdade (3.127) é válida para quaisquer $q \in S_q$ e $r \in S_r$ uma vez que a escolha de q_i e r_j em S_q e S_r foi aleatória. Logo:

$$\gamma_{r_1}^k - \gamma_{q_1}^k \leq \min\{\hat{c}_{qr}, q \in S_q, r \in S_r\}. \quad (3.128)$$

Analogamente, considerando a aresta (r_j, q_i) ,

$$\gamma_{q_i}^k - \gamma_{r_j}^k \leq \hat{c}_{r_j q_i} \quad (3.129)$$

$$\gamma_{q_1}^k - \gamma_{r_1}^k \leq \hat{c}_{r_j q_i} \quad (3.130)$$

$$\gamma_{q_1}^k - \gamma_{r_1}^k \leq \min\{\hat{c}_{rq}, r \in S_r, q \in S_q\} \quad (3.131)$$

$$\gamma_{r_1}^k - \gamma_{q_1}^k \geq -\min\{\hat{c}_{rq}, r \in S_r, q \in S_q\}. \quad (3.132)$$

Como para um conjunto qualquer F , temos que

$$-\min_{f \in F}\{f\} = \max_{f \in F}\{-f\}, \quad (3.133)$$

concluimos de (3.132) que,

$$\max\{-\hat{c}_{rq}, r \in S_r, q \in S_q\} \leq \gamma_{r_1}^k - \gamma_{q_1}^k. \quad (3.134)$$

Portanto, de (3.128) e (3.134)

$$\max\{-\hat{c}_{rq}, r \in S_r, q \in S_q\} \leq \gamma_{r_1}^k - \gamma_{q_1}^k \leq \min\{\hat{c}_{qr}, q \in S_q, r \in S_r\}. \quad (3.135)$$

Para obtermos (3.135) supomos que S_r e S_q fossem diferentes tanto de S_1 quanto de S_k . Tratar das subrotas que contém os vértices 1 e k envolve as variáveis duais presentes na condição (3.113). Tomar, por exemplo, um par de subrotas S_1 e S_q nos leva a uma relação entre α_k e γ_q^k , $q \in S_q$. Basta considerar m_1 como o "representante" da subrota S_1 e seguir os mesmos passos feitos com as subrotas S_q e S_r . Se tomarmos S_1 e S_k , lembrando que para $m_1 \in S_1$ temos $\gamma_{m_1}^k = -\alpha_k$, e que para $l_1 \in S_k$ temos $\gamma_{l_1}^k = \beta_k$, desenvolvemos a relação:

$$\max\{-\hat{c}_{ml}, m \in S_1, l \in S_k\} \leq \alpha_k + \beta_k \leq \min\{\hat{c}_{lm}, l \in S_k, m \in S_1\}, \quad (3.136)$$

que nos fornece limitantes para os valores da soma $\alpha_k + \beta_k$ que mantém a factibilidade dual da base B . Se $\min\{\hat{c}_{lm}, l \in S_k, m \in S_1\} \leq 0$ garantimos que as restrições referentes a k não admitem um multiplicador positivo. Caso contrário, o maior valor possível para $\alpha_k + \beta_k$ pode fornecer um limitante dual melhor.

Para descrever o problema de encontrar o melhor valor para os multiplicadores α_k e β_k consideraremos duas variáveis artificiais, γ_1^k e γ_k^k . Note que, pela definição das variáveis duais γ_j^k , os índices 1 e k não estão definidos ($j \in V \setminus \{1, k\}$). Consideraremos:

$$\gamma_k^k = \beta_k \text{ e} \quad (3.137)$$

$$\gamma_1^k = -\alpha_k. \quad (3.138)$$

3. O MÉTODO *RELAX AND CUT*

Observando (3.121) e (3.137) concluimos que:

$$\gamma_k^k = \gamma_{l_i}^k \forall l_i \in S_k. \quad (3.139)$$

Analogamente, observando (3.123) e (3.138) tem-se:

$$\gamma_1^k = \gamma_{m_i}^k \forall m_i \in S_1. \quad (3.140)$$

Sejam: $h_k^{r'q} := \max\{-\varphi_{kr'q'}, (r', q') \in (S_r, S_q)\}$; $H_k^{r'q} := \min\{\varphi_{kq'r'}, (q', r') \in (S_q, S_r)\}$; \mathcal{S} a coleção de subrotas de \bar{x} ; r e q vértices pertencentes às subrotas S_r e S_q , respectivamente, com $S_r \neq S_q$. Buscamos uma solução para o problema (3.141)-(3.145).

$$\text{Maximizar } \alpha_k + \beta_k \quad (3.141)$$

sujeito a

$$\alpha_k = -\gamma_1^k \quad (3.142)$$

$$\beta_k = \gamma_k^k \quad (3.143)$$

$$h_k^{r'q} \leq \gamma_r^k - \gamma_q^k \leq H_k^{r'q}, \quad S_r, S_q \in \mathcal{S}, S_r \neq S_q \quad (3.144)$$

$$\alpha_k, \beta_k, \gamma_k \text{ livres.} \quad (3.145)$$

Se o valor da solução $(\alpha_k^*, \beta_k^*, \gamma_k^*)$ de (3.141)-(3.145) for maior do que zero, o conjunto de restrições (2.21)-(2.24) associado a k é violado por \bar{x} e pode ser dualizado com um multiplicador positivo. Sendo assim, dualizamos as restrições (3.109)-(3.112) associadas e os custos relativos são atualizados de acordo com:

$$\hat{c}_{r'q} = \hat{c}_{r'q} + \gamma_{q_1}^k - \gamma_{r_1}^k, \quad S_r, S_q \in \mathcal{S}, S_r \neq S_q. \quad (3.146)$$

O procedimento RC-Multiproduto consiste em repetir estes cálculos de forma iterativa avaliando outras subrotas, através da análise de outros vértices $k' \in V \setminus \{1, k\}$. De acordo com (3.109), ao fim do procedimento o limitante inferior para o PCVA é:

$$LI = v(PD) + \sum_{k \in T'} \alpha_k + \beta_k. \quad (3.147)$$

Observação 3.2. Suponha que as restrições (2.21)-(2.24) associadas a um vértice $k \in V \setminus \{1\}$ não admitam um multiplicador positivo para os custos relativos atuais. Nesse caso, escolhamos outro vértice, digamos $k' \in V \setminus \{1, k\}$, para análise. Se as restrições (2.21)-(2.24) para k' admitirem um multiplicador positivo, pode ser que, após a atualização dos custos relativos, admita-se multiplicador positivo para as restrições (2.21)-(2.24) associadas ao vértice k . Além disso, conjecturamos que, uma vez que um multiplicador positivo seja encontrado para as restrições associadas a um vértice $k' \in S_{k'}$, as restrições (2.21)-(2.24) associadas aos demais vértices da subrota $S_{k'}$ não admitam multiplicadores positivos. Sendo verdadeira esta conjectura, o número de vértices analisados poderia ser reduzido substancialmente.

3.2. MÉTODO RC PARA RESTRIÇÕES DE MULTIPRODUTO

Conjectura 3.6. *Seja $k \in \bar{S}_1$ um vértice pertencente à subrota S_k . Se as restrições (2.21)-(2.24) admitem multiplicadores positivos em relação ao vértice k , então, após dualizadas as restrições e atualizados os custos relativos, para nenhum vértice $k' \in S_k \setminus \{k\}$ as restrições (2.21)-(2.24) admitirão multiplicadores positivos.*

Na Figura 3.34 é apresentado o pseudocódigo do algoritmo desenvolvido nessa seção. W representa os vértices que poderão ser selecionados para análise; T' representa os conjuntos de restrições dualizadas; e N indica as restrições que foram verificadas e que, temporariamente, não admitem um multiplicador positivo. Uma vez identificado um conjunto de restrições com multiplicador positivo, o conjunto N é esvaziado para a nova busca.

Exemplo 3.5. O procedimento RC-multiproduto foi utilizado para a solução da instância do PCVA-MC cuja matriz de custos é apresentada na Figura 3.2, a mesma utilizada nos Exemplos 3.1 e 3.3.

Inicialização

A solução ótima do PD nos fornece um limitante inferior $v(PD) = 6$. As subrotas da solução \bar{x} são $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3\}$, sendo $S_1 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{3, 5\}$ e $S_3 = \{4, 6\}$. $N = \emptyset$, $T = \emptyset$ e $W = V \setminus S_1 = \{3, 4, 5, 6\}$.

Iteração 1

Selecionamos $k = 3$. $\min\{\hat{c}_{lm}, l \in S_3, m \in S_1\} = 2$, assim, resolvemos o problema (3.148)-(3.153) cuja solução é $\alpha_3 = -\gamma_1^3 = 2$, $\beta_3 = \gamma_3^3 = 0$ e $\gamma_4^3 = 0$. A Figura 3.35 mostra a matriz de custos relativos após a dualização das restrições de multiproduto para $k = 3$. O novo limitante inferior é $LI = v(PD) + \alpha_3 + \beta_3 = 8$. $T' = T' \cup \{3\} = \{3\}$, $W = W \setminus \{3\} = \{4, 5, 6\}$.

$$\text{Maximizar } \alpha_3 + \beta_3 \quad (3.148)$$

$$\text{sujeito a } \alpha_3 = -\gamma_1^3 \quad (3.149)$$

$$\beta_3 = \gamma_3^3 \quad (3.150)$$

$$0 \leq \gamma_3^3 - \gamma_1^3 \leq 2 \quad (3.151)$$

$$-5 \leq \gamma_4^3 - \gamma_1^3 \leq 5 \quad (3.152)$$

$$-1 \leq \gamma_4^3 - \gamma_3^3 \leq 3 \quad (3.153)$$

O conjunto de restrições associadas a $k = 3$ é:

$$y_{312} + y_{313} + y_{314} + y_{315} + y_{316} - y_{321} - y_{331} - y_{341} - y_{351} - y_{361} = 1 \quad (3.154)$$

$$y_{313} + y_{332} + y_{342} + y_{352} + y_{362} - y_{331} - y_{332} - y_{334} - y_{335} - y_{336} = 1 \quad (3.155)$$

$$y_{332} + y_{342} + y_{352} + y_{362} - y_{323} - y_{324} - y_{325} - y_{326} = 0 \quad (3.156)$$

$$y_{324} + y_{334} + y_{354} + y_{364} - y_{342} - y_{343} - y_{345} - y_{326} = 0 \quad (3.157)$$

$$y_{325} + y_{335} + y_{354} + y_{365} - y_{352} - y_{353} - y_{354} - y_{356} = 0 \quad (3.158)$$

$$y_{326} + y_{336} + y_{346} + y_{356} - y_{362} - y_{363} - y_{364} - y_{365} = 0 \quad (3.159)$$

$$y_{3ij} \leq x_{ij} \quad \forall i, j \in V. \quad (3.160)$$

3. O MÉTODO *RELAX AND CUT*

01	Entrada: Instância do PCVA ($G(V, A), V = n, A = m, c_{ij}, \forall (i, j) \in A$).
02	Saída: Limitante Inferior LI , restrições violadas do tipo multiproducto.
03	Início
04	Resolva o PD associado ao PCVA.
05	$LI = v(PD)$
06	Identifique o conjunto \mathcal{S} de subrotas de \bar{x}
07	Se $ \mathcal{S} = 1$, pare. A solução \bar{x} é ótima.
08	S_1 é a subrota que contém o vértice 1.
09	$T' = \emptyset$
10	$N = \emptyset$
11	$W = V \setminus S_1$
12	Enquanto $W \neq \emptyset$
13	Início
14	Selecione $k \in W = V \setminus (S_1 \cup T' \cup N)$
15	Se $\min\{\hat{c}_{lm}, l \in S_k, m \in S_1\} = 0$, então $N = N \cup \{k\}$
16	Senão
17	Início
18	Resolva o problema (3.141)-(3.145).
19	Se $(\alpha_k^*, \beta_k^*, \gamma^{k*}) \leq 0$, então $N = N \cup \{k\}$.
20	Senão
21	Início
22	Para $(r, q) \in A$ faça $\hat{c}_{rq} = \hat{c}_{rq} + \gamma_{q_1}^k - \gamma_{r_1}^k, S_r, S_q \in \mathcal{S}, S_r \neq S_q$.
23	$LI = LI + \alpha_k + \beta_k$
24	$T' = T' \cup \{k\}$
25	$N = \emptyset$
26	$W = W \setminus \{k\}$
27	Fim
28	Fim
29	Fim
30	\bar{x} é uma solução para o PD, LI é um limitante inferior para o PCVA e as restrições em T' foram dualizadas para encontrar LI .
31	Fim

Figura 3.34: Algoritmo RC-Multiproducto

Iteração 2

Selecionamos em W o vértice $k = 4$. Como $\min\{\hat{c}_{lm}, l \in S_4, m \in S_1\} = 3$, prosseguimos com a resolução do problema (3.141)-(3.145) associado. A solução é $\alpha_4 = -\gamma_1^4 = 0$, $\beta_4 = \gamma_4^4 = 3$ e $\gamma_3^4 = 0$. Logo, atualizamos os custos relativos, como pode ser visto na Figura 3.36. O limitante dual $LI = 8 + \alpha_4 + \beta_4 = 11$. Nosso conjunto de restrições dualizadas passa a ser $T' = T' \cup \{4\} = \{3, 4\}$ enquanto retiramos 4 de W , isto é, $W = W \setminus \{4\} = \{5, 6\}$.

3.2. MÉTODO RC PARA RESTRIÇÕES DE MULTIPRODUTO

	1	2	3	4	5	6
1	-	0	2	4	0	4
2	0	-	0	3	0	3
3	5	11	-	7	0	7
4	7	8	1	-	3	0
5	14	2	0	3	-	4
6	9	7	1	0	1	-

Figura 3.35: Matriz de custos relativos após dualização para $k = 3$.

	1	2	3	4	5	6
1	-	0	2	1	0	1
2	0	-	0	0	0	0
3	5	11	-	4	0	4
4	10	11	4	-	6	0
5	14	2	0	0	-	1
6	12	10	4	0	4	-

Figura 3.36: Matriz de custos relativos após dualização para $k = 4$.

Iteração 3

Os vértices 5 e 6 não geraram multiplicadores positivos, pois o limitante referido na linha 15 da Figura 3.34 para ambos os vértices foi nulo. Esse fato condiz com a Conjectura 3.6, uma vez que o vértice 5 está na mesma subrota que o vértice 3 e o vértice 6 está na mesma subrota que o vértice 4.

O procedimento RC-Multiproduto fornece $LI = 11$ em três iterações.

A Tabela 3.1 sintetiza os resultados dos Exemplos 3.1, 3.3 e 3.5. O Exemplo 3.4 não foi comparado pois a instância resolvida (ver Figura 3.24) não é a mesma. O grafo admissível G_0 referente à solução ótima da instância da Figura 3.2 é desconexo. Logo, não faz sentido procurar pontos de articulação. Vale ressaltar que o Algoritmo RC-Articulação gerou uma solução ótima em seu exemplo.

Dentre os três algoritmos comparados na Tabela 3.1, o Algoritmo RC-Corte obteve o melhor limitante. Levando em conta que a instância resolvida possui valor ótimo $v(PCVA) = 13$, a partir da solução do PD, houve uma grande melhora. O número de cortes possíveis para o Algoritmo RC-Corte, em função do número h de subrotas, é $(h - 1)(h + 2)/2$ (ver [1]). Supondo que a Conjectura 3.6 seja verdadeira, o Algoritmo RC-Corte possui um número máximo de cortes gerados possíveis maior do que as possibilidades do Algoritmo RC-

3. O MÉTODO *RELAX AND CUT*

Algoritmo	Número de Iterações	Limitante Dual	Cortes Gerados
RC-Corte	4	12	3
RC-Clique	3	9	2
RC-Multiproduto	3	11	2

Tabela 3.1: Comparação dos Algoritmos.

Clique, restrito ao número de subrotas h , e do Algoritmo RC-Multiproduto, restritos a $(h - 1)$, uma vez que não é considerada a subrota do vértice inicial. Para o exemplo resolvido, o número de subrotas é $h = 3$. Sendo assim, dos três possíveis cortes, o Algoritmo RC-Clique identificou duas inequações válidas. O Algoritmo RC-Multiproduto também identificou duas inequações válidas, porém, obtendo um limitante dual mais forte que aquele encontrado pelo algoritmo RC-Clique. O valor ótimo da instância utilizada nos exemplos é 13, o que mostra a qualidade dos limitantes obtidos pelos três algoritmos.

No Capítulo 4 apresentamos experimentos computacionais comparativos, retratando o comportamento dos algoritmos RC-Corte e RC-Multiprodutos para um conjunto de instâncias encontrados na TSPLIB [24].

3.2. MÉTODO RC PARA RESTRIÇÕES DE MULTIPRODUTO

3. O MÉTODO *RELAX AND CUT*

3.2. MÉTODO RC PARA RESTRIÇÕES DE MULTIPRODUTO

4

Estudo Computacional

Neste capítulo apresentamos resultados computacionais da implementação do algoritmo *relax and cut* para restrições de corte (RC-Corte - Figura 3.1) e o algoritmo *relax and cut* para as restrições de multiproduto (RC-Multiproduto - Figura 3.34). Os programas foram executados numa máquina com processador Intel Core i5 de 2,67 GHz, com 3,80 GB de memória RAM. O sistema operacional utilizado foi o Windows 7 Ultimate. Os códigos foram escritos na linguagem de programação C++, utilizando as bibliotecas do CPLEX. Para a resolução dos problemas de otimização foi utilizado o *solver* CPLEX 12.5, com tempo máximo para resolução de 30 minutos (1800 segundos).

4.1 Descrição dos experimentos

As instâncias utilizadas nos experimentos são descritas na Tabela 4.1, provenientes da biblioteca TSPLIB [24]. Nela, também são apresentados o número de cidades de cada instância além de seu valor ótimo.

Para a descrição das instâncias, foi utilizada a linguagem de modelagem AMPL, então convertida para o formato MPS e resolvida pelo CPLEX. Os algoritmos RC-Corte e RC-Multiproduto foram escritos na linguagem de programação C++ em conjunto com as bibliotecas do CPLEX. Para atestar a eficiência dos algoritmos *relax and cut*, testamos a formulação PCVA-MP apresentada na Seção 2.2 para cada uma das instâncias, além de resolver sua relaxação linear (RPCVA-MP) e a relaxação do Problema da Designação. A resolução da formulação PCVA-MP e das relaxações foi feita utilizando o comando *optimize* com tempo máximo de 1800 segundos (30 minutos). O *solver* CPLEX resolve problemas de Otimização Inteira Mista com mecânicas de pré-processamento para simplificação do problema em conjunto com um algoritmo *branch and cut*. A relaxação linear do PCVA-MP é obtida pela opção de relaxação do próprio *solver* e sua resolução é efetuada pelo método de barreira, mesmo no modo padrão do CPLEX.

Para os algoritmos *relax and cut* (RC) toma-se uma instância da Tabela 4.1, e então a relaxação do PD é resolvida pelo *solver* CPLEX. Obtida a solução ótima do PD, no Algoritmo RC-Corte é iniciada a identificação dos conjuntos

4.2. RESULTADOS DAS RELAXAÇÕES

Tabela 4.1: Nome, número de cidades e valor ótimo das instâncias

Instância	Número de Cidades	Valor Ótimo
br17	17	39
ftv33	34	1286
ftv35	36	1473
ftv38	39	1530
p43	43	5620
ftv44	45	1613
ftv47	48	1776
ft53	53	6905
ftv55	56	1608
ftv64	65	1839
ft70	70	38673
ftv70	71	1950
ftv170	171	2755

alcançáveis de cada vértice. Satisfazendo as condições necessárias, a restrição associada a um determinado conjunto alcançável é dualizada e a identificação dos conjuntos alcançáveis continua. O Algoritmo RC-Multiproduto identifica as subrotas existentes na solução e inicia a análise dos possíveis valores para os multiplicadores lagrangeanos associados a restrições referentes a vértices que não pertencem à subrota do vértice inicial. Ao fim dos algoritmos RC, são fornecidos os limitantes duais e dados sobre os cortes identificados.

4.2 Resultados das Relaxações e formulação Multiproduto

Analizamos nesta seção os resultados referentes à solução do PCVA na formulação com restrições de Multiproduto, sua relaxação linear e a relaxação do Problema da Designação. Tais resultados foram obtidos resolvendo as 13 instâncias da Tabela 4.1.

A Tabela 4.2 apresenta os resultados obtidos resolvendo a formulação PCVA-MP, sua relaxação linear e a relaxação do Problema da Designação, representados na tabela pelas notações PMP, RMP e PD, respectivamente. A segunda coluna apresenta a melhor solução (MS) encontrada na árvore *branch and cut* para o PCVA-MP, enquanto que a terceira coluna contém o melhor limitante (ML) associado à árvore do *branch-and-cut*. As colunas seguintes indicam o limitante dual obtido pela relaxação linear da formulação PCVA-MP e a relaxação do Problema da Designação. As colunas finais apresentam o *gap* de integralidade em função do valor ótimo, z^* , de cada instância, apresentado na Tabela 4.1. Note que o *gap* para os limitantes duais é calculado de acordo

4. ESTUDO COMPUTACIONAL

com a Equação (4.1), uma vez que tratamos de um problema de minimização, ou seja, nos baseamos em limitantes inferiores z^* . O *gap* referente a PMP é calculado de forma diferenciada pois utilizamos a melhor solução encontrada, isto é, limitantes primais \bar{z}^* para o valor ótimo (Equação (4.2)). As células que contêm o símbolo – indicam que o valor não foi encontrado ou não pode ser calculado.

$$gap_{ld} = 100 \frac{z^* - \bar{z}^*}{z^*} \quad (4.1)$$

$$gap_{lp} = 100 \frac{\bar{z}^* - z^*}{\bar{z}^*}. \quad (4.2)$$

Tabela 4.2: Soluções inteiras, limitantes duais e *gap* de integralidade.

Instância	PMP		Limitante Dual		<i>gap</i> (%)		
	MS	ML	RMP	PD	PMP	RMP	PD
br17	39,00	-	39,00	0,00	0,00	0,00	100,00
ftv33	1286,00	-	1286,00	1185,00	0,00	0,00	7,85
ftv35	1473,00	-	1457,33	1375,00	0,00	1,06	6,65
ftv38	1530,00	-	1514,33	1432,00	0,00	1,02	6,41
p43	-	5611,00	5611,00	148,00	-	0,16	97,37
ftv44	-	1602,00	1584,88	1521,00	-	1,74	5,70
ftv47	1776,00	-	1748,61	1652,00	0,00	1,54	6,98
ft53	6905,00	-	6905,00	5931,00	0,00	0,00	14,11
ftv55	-	1587,50	1584,00	1435,00	-	1,49	10,76
ftv64	1866,00	1807,50	1799,00	1721,00	1,45	2,18	6,42
ft70	-	38652,50	38652,50	37978,00	-	0,05	1,80
ftv70	-	1909,00	1900,50	1766,00	-	2,54	9,44
ftv170	-	-	2710,67	2631,00	-	1,61	4,50

A relaxação RPCVA-MP atinge o valor ótimo nas instâncias br17 e ft53. Note que a instância p43 é complicada, uma vez que, expirado o tempo limite, o algoritmo *branch and cut* não conseguiu nem ao menos melhorar o limitante dual da relaxação linear. Dentre as 13 instâncias, o método *branch-and-cut* não gerou limitantes primais para as instâncias p43, ftv44, ftv55, ft70, ftv70 e ftv170, sendo que não houve memória suficiente para a resolução da última. Vale observar a força da relaxação linear da formulação PCVA-MP, pois a média do *gap* é de 1,03%. Em relação à relaxação PD, vale destacar que o *gap* das instâncias br17 e p43 é muito alto, sendo de 100% e 97%, respectivamente, o que influencia os resultados dos algoritmos *relax and cut*.

4.3 Resultados do Método *Relax and Cut*

Como descrito no Capítulo 3, os algoritmos RC partem de uma solução do Problema da Designação e buscam inequações válidas que admitem multiplicadores positivos. Para as restrições de eliminação de subrotas do tipo corte,

4.3. RESULTADOS DO MÉTODO *RELAX AND CUT*

a identificação de inequações válidas está relacionada à existência de um conjunto admissível $R(i)$ de um vértice i diferente do conjunto de todos os vértices, V . Para as restrições do tipo multiproducto, as restrições referentes a vértices que não pertencem à subrota do vértice inicial são violadas pela solução ótima do PD, e busca-se quais restrições admitem multiplicadores positivos.

Tanto na Tabela 4.3, quanto na Tabela 4.4 apresentamos o valor relativo entre os limitantes obtidos pela relaxação RPCVA-MP, o algoritmo RC-Corte e o algoritmo RC-Multiproducto. O valor relativo de um limitante κ em função de um limitante ρ é calculado da seguinte forma:

$$vr(\kappa, \rho) = 100 \frac{\kappa - \rho}{\kappa}. \quad (4.3)$$

A Tabela 4.3 apresenta os resultados referentes à relaxação RPCVA-MP (RMP) e o procedimento RC-Multiproducto (RC-MP), contendo os limitantes obtidos, os tempos computacionais, em segundos, e o valor relativo do limitante obtido pelo algoritmo RC-Multiproducto (ρ) em função da relaxação RPCVA-MP (κ), para cada instância da Tabela 4.1.

Tabela 4.3: Limitantes duais, tempo computacional e valor relativo.

Instância	Limitante dual		Tempo (segundos)		$vr(\kappa, \rho)$ (%)
	RMP	RC-MP	RMP	RC-MP	
br17	39,00	14,00	0,39	0,56	64,10
ftv33	1286,00	1185,00	9,67	1,38	7,85
ftv35	1457,33	1384,00	16,99	1,76	5,03
ftv38	1514,33	1441,00	25,40	1,92	4,84
p43	5611,00	501,00	55,16	12,26	91,07
ftv44	1584,87	1530,00	49,17	3,67	3,46
ftv47	1748,61	1708,00	111,49	8,77	2,32
ft53	6905,00	5979,00	183,91	2,10	13,41
ftv55	1584,00	1459,00	267,93	4,82	7,89
ftv64	1807,50	1756,00	680,41	6,77	2,85
ft70	38652,50	38194,00	728,10	6,43	1,19
ftv70	1909,00	1794,00	975,85	9,14	6,02
ftv170	-	2634,00	-	16,53	-

Na maioria das instâncias (9 de 13) o algoritmo RC-Multiproducto forneceu um limitante dual com valor relativo menor do que 10% em relação ao limitante da relaxação linear. A média de tempo despendido para a resolução da relaxação linear foi de 258,71 segundos enquanto a média para o algoritmo RC-Multiproducto foi de 4,96 segundos, ambas desconsiderando a instância ftv170, que em 1800 segundos não obteve solução para RPCVA-MP. Se considerarmos o valor ótimo para a instância ftv170 (Tabela 4.1), teremos que o limitante fornecido pelo algoritmo RC-Multiproducto em 16,53 segundos tem um *gap* de 4,39%.

4. ESTUDO COMPUTACIONAL

A Tabela 4.4 apresenta dados relacionados ao Algoritmo RC-Corte e o Algoritmo RC-Multiproduto. As colunas 2 e 3 da tabela apresentam o limitante dual obtido pelos algoritmos RC-Corte e RC-Multiproduto, respectivamente. O tempo computacional despendido, em segundos, é apresentado nas colunas 4 e 5. O *gap* associado a cada um dos algoritmos foi calculado de acordo com a Equação (4.1) e é mostrado nas colunas 8 e 9. O valor relativo do limitante dual obtido pelo algoritmo RC-Multiproduto (ρ) em função do limitante obtido pelo algoritmo RC-Corte (κ) é apresentado na décima coluna.

Tabela 4.4: Algoritmos RC-Corte e RC-Multiproduto. Limitantes, tempo computacional, cortes gerados, *gap* e valor relativo.

Instância	Limitante Dual		Tempo (seg)		Cortes Gerados		<i>gap</i> (%)		$vr(\kappa, \rho)$ (%)
	Corte	MP	Corte	MP	Corte	MP	Corte	MP	
br17	37,00	14,00	0,96	0,56	11,00	3,00	5,13	64,10	62,16
ftv33	1204,00	1185,00	1,10	1,38	2,00	0,00	6,38	7,85	1,58
ftv35	1398,00	1384,00	1,48	1,76	3,00	1,00	5,09	6,04	1,00
ftv38	1465,00	1441,00	1,76	1,92	3,00	1,00	4,25	5,82	1,64
p43	5582,00	501,00	11,16	12,68	24,00	8,00	0,68	91,09	91,02
ftv44	1538,00	1530,00	2,50	3,67	4,00	2,00	4,65	5,15	0,52
ftv47	1664,00	1708,00	2,31	8,77	3,00	7,00	6,31	3,83	-2,64
ft53	6693,00	5979,00	7,81	2,10	10,00	1,00	3,07	13,41	10,67
ftv55	1451,00	1459,00	2,98	4,82	3,00	4,00	9,76	9,27	-0,55
ftv64	1735,00	1756,00	4,18	6,77	3,00	5,00	5,66	4,51	-1,21
ft70	38311,00	38194,00	8,36	6,43	5,00	1,00	0,94	1,24	0,31
ftv70	1773,00	1794,00	3,77	9,14	2,00	4,00	9,08	8,00	-1,18
ftv170	2634,00	2634,00	16,50	16,53	1,00	1,00	4,39	4,39	0,00

Ambos os algoritmos obtiveram resultados semelhantes, sendo que em 10 das 13 instâncias o valor relativo não apresentou uma diferença maior do que 3%. Algumas particularidades criaram grandes diferenças em algumas instâncias. Para a instância br17, por exemplo, $V(PD) = 0$, e o algoritmo RC-Multiproduto reduz o *gap* do PD de 100% para 64,10%, ao passo que o algoritmo RC-Corte reduz o *gap* a 5,13%. Como observado na Seção 3.2, o número de inequações válidas que podem ser identificadas para o algoritmo RC-Corte é maior do que para o algoritmo RC-Multiproduto, porém, a proporção de cortes gerados em relação ao total possível é bem próxima para ambos os algoritmos. O algoritmo RC-Corte identificou 11 cortes de um total possível de 20, sendo uma proporção de 0,55, enquanto o algoritmo RC-Multiproduto identificou 3 cortes de um total possível de 5, sendo uma proporção de 0,6 cortes identificados para possíveis cortes. Vale observar que na instância ftv170 tanto o limitante dual obtido, quanto o número de cortes gerados foi o mesmo para ambas as instâncias.

4.4 Conclusão do Estudo Computacional

Os resultados obtidos com a implementação dos algoritmos RC-Corte e RC-Multiproduto são encorajadores. O tempo computacional, comparado ao necessário a resolução da relaxação RPCVA-MP, é bem reduzido e os algoritmos produzem limitantes duais de boa qualidade. Mesmo que a relaxação linear das formulações do PCVA com restrições de eliminação de subrotas do tipo corte e do tipo multiproduto sejam equivalentes (ver [19]), nada impede que os algoritmos sejam utilizados de forma sequencial, visto que as inequações válidas identificadas são distintas. A matriz de custos relativos resultante do algoritmo RC-Corte pode ser usada como ponto inicial para o algoritmo RC-Multiproduto. Sendo válida a Conjectura 3.6, o número de restrições verificadas seria reduzido drasticamente, diminuindo o custo computacional do algoritmo RC-Multiproduto. Além disso, a elaboração de um algoritmo especializado para a resolução do problema (3.141)-(3.145) (página 69), tornando a resolução independente de um *solver* para problemas de otimização linear, poderia melhorar ainda mais a performance do algoritmo RC-Multiproduto. A implementação do algoritmo RC-Corte foi importante por duas razões: servir de parâmetro de comparação para o algoritmo RC-Multiproduto e atualizar os trabalhos de Balas e Christofides [1] fazendo testes com as instâncias da TS-PLIB. No artigo de Balas e Christofides o algoritmo foi testado com instâncias geradas aleatoriamente.

4. ESTUDO COMPUTACIONAL

4.4. CONCLUSÃO DO ESTUDO COMPUTACIONAL

5

Considerações Finais

Neste trabalho revisamos conceitos de Teoria dos Grafos, necessárias para a compreensão de diversas formulações para o Problema do Caixeiro Viajante, além de noções de relaxação de problemas de Otimização Linear Inteira, em específico a Relaxação Lagrangeana, e um dos métodos de resolução do problema Dual Lagrangeano mais utilizados atualmente, o Método Subgradiente.

No Capítulo 3, apresentamos a técnica *relax and cut* para solução do problema Dual Lagrangeano. Em problemas com número de restrições muito elevado, como, por exemplo, o Problema do Caixeiro Viajante com restrições do tipo corte, a dualização de restrições na função lagrangeana pode se tornar inviável. Assim, a técnica *relax and cut* identifica inequações válidas para o problema original e então dualiza as restrições violadas pela solução corrente. A atualização dos multiplicadores lagrangeanos pode ser feita por métodos como o Método Subgradiente, mas nos atentamos a um trabalho de Balas e Christofides [1] que explora a natureza combinatória das restrições de eliminação de subrotas para a atualização dos multiplicadores. Partindo da solução ótima do Problema da Designação associado, atualizam-se os valores das variáveis duais com o objetivo de manter a factibilidade dual da base ótima da solução do PD. Baseados nessa idéia, e no fato a relaxação linear da formulação PCVA-MP ser equivalente à formulação do PCVA com restrições do tipo corte [19], desenvolvemos um algoritmo *relax and cut* dualizando as restrições do tipo Multiproduto. Uma conjectura é formulada em relação à obtenção de multiplicadores positivos associados às restrições de multiproduto violadas por uma solução do PD que possua subrotas.

Implementamos os algoritmos RC-Corte e RC-Multiproduto e apresentamos resultados no Capítulo 4. Os limitantes duais obtidos são comparados com o valor da relaxação linear da formulação PCVA-MP resolvida pelo *solver* CPLEX. A aplicação de tais algoritmos para fornecer limitantes duais em um algoritmo *branch and cut* é encorajada, assim como a implementação dos algoritmos RC-Clique e RC-Articulação. Futuramente, a resolução da Conjectura 3.6 e o desenvolvimento de outra forma para resolver o problema (3.141)-(3.145), atualmente feita pelo *solver* CPLEX, podem tornar a implementação do algoritmo RC-Multiproduto independente de softwares proprietários, uma

vez que a solução do PD pode ser feita através do Algoritmo Húngaro.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Referências Bibliográficas

- [1] BALAS, E.; CHRISTOFIDES, N. (1981), A restricted lagrangean approach to the traveling salesman problem, *Mathematical Programming*, 21, 19-46.
- [2] BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. D., *Linear programming and network flows*, John Wiley & Sons, Hoboken, 2005.
- [3] CAVALCANTE, V. F.; DE SOUZA, C. C.; LUCENA, A. (2008) A Relax-and-Cut algorithm for the set partitioning problem, *Computers & Operations Research* 35, 1963-1981.
- [4] CLAUS, A. (1984) A new formulation for the traveling salesman problem, *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods* Vol. 5, No. 1, 21-25.
- [5] DANTZIG, G.; FULKERSON, R.; JOHNSON, S. (1954) Solution of a large-scale Traveling salesman problem, RAND Corporation, Santa Monica, California. Reproduzido em [13].
- [6] DE SOUZA, C. C.; CAVALCANTE, V. F. (2011), Exact Algorithms for the Vertex Separator Problem in Graphs, *Networks* 57, No 3, 212-230.
- [7] ESCUDERO, L. F.; GUIGNARD, M.; MALIK, K. (1994), A lagrangian relax-and-cut approach for the sequential ordering problem with precedence relationships, *Annals of Operations Research* 50, 219-237.
- [8] FISCHETTI, M., SALVAGNIN, D. (2011), A relax-and-cut framework for gomory mixed-integer cuts, *Mathematical Programming Computation* 3, No 2, 79-102.
- [9] GAVISH, B. (1985), Augmented Lagrangean Based Algorithms for Centralized Network Design, *IEEE Transactions on Communications* 33, 1247-1257.
- [10] GUIGNARD, M. (2003), Lagrangean Relaxation, *Top* 11, No. 2, 151-228.
- [11] HELD, M.; KARP, R. M. (1971) The traveling salesman problem and minimum spanning trees: part II, *Mathematical Programming* 1, 6-25.
- [12] HELD M.; WOLFE, P.; CROWDER, H. P. (1974), Validation of subgradient optimization, *Mathematical Programming* 6, No. 1, 62-88.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [13] JÜNGER, M.; LIEBLING, Th. M.; NADDEF, D.; NEMHAUSER, G. L.; PULLEYBLANK, W. R.; REINELT, G.; WOLSEY, L. A. *50 Years of Integer Programming 1958-2008*, Springer, London, 2010
- [14] LAWLER, E. L.; LENSTRA, J. K., RINNOOY KAN, A. H. G.; SHMOYS, D. B. *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*, John Wiley & Sons, Chichester, 1986.
- [15] LUCENA, A. (1993) Steiner Problem in Graphs: Lagrangean Relaxation and Cutting Planes, *COAL Bulletin* 21, 2-8.
- [16] LUCENA, A. (2005) Non-Delayed Relax and Cut Algorithms, *Annals of Operations Research* 140, 375-410.
- [17] NEMHAUSER, G. L.; WOLSEY, L. A. *Integer and Combinatorial Optimization*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
- [18] BOAVENTURA NETTO, P. O., *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*, Edgard Blucher, São Paulo, 2006.
- [19] ÖNCAN, T.; ALTINEL, I. K.; LAPORTE G. (2009), A comparative analysis of several asymmetric traveling salesman problem formulations, *Computers & Operations Research*, 36, 637-654.
- [20] TAMIRES, A.; SOARES, J. (2005), Um melhor limite inferior para o problema do caixeiro viajante assimétrico baseado no problema da afectação, *Investigação Operacional*, 25, 63-83.
- [21] SHERALI, H. D., SMITH, J. C. (2012), Dynamic Lagrangian dual and reduced RLT constructs for solving 0-1 mixed-integer programs, *Top* 20, No 1, 173-189.
- [22] SHOR, N. Z., ZHURBENKO, N. G., (1962), A minimization method using the operation of space dilation in the direction of the difference of two successive gradients, *Cybernetics*, 7, 450-459.
- [23] (2002) Congratulations to Naum Shor on his 65th birthday, *Journal of Global optimization*, 24, Issue 2, 111-114.
- [24] REINELT, G. (1991), TSPLIB - A traveling salesman problem library, *ORSA Journal Computing*, 3, 376-384. (Disponível no site: <https://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/>, visitado em 11/04/2014).
- [25] WOLSEY, L. A. *Integer Programming*, John Wiley & Sons, New York, 1998.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Apêndice

Apêndice A

Algoritmo Húngaro

Este anexo apresenta o Algoritmo Húngaro para resolução do Problema da Designação (PD). Um desenvolvimento mais detalhado pode ser encontrado em [2]. O Problema da Designação consiste em associar a n pessoas, n tarefas. Para uma pessoa i executar a tarefa j existe um custo c_{ij} , e o objetivo é minimizar o custo da execução de todas as tarefas. Na formulação matemática (A.1)-(A.4), a variável x_{ij} tem valor 1 se a pessoa i executa a tarefa j , e valor 0, caso contrário. As restrições (A.2) garantem que cada pessoa i execute apenas uma tarefa. As restrições (A.3) garantem que cada tarefa j seja executada por apenas uma pessoa.

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (\text{A.1})$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = 1, \dots, n \quad (\text{A.2})$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = 1, \dots, n \quad (\text{A.3})$$

$$x_{ij} = 0/1, i, j = 1, \dots, n. \quad (\text{A.4})$$

Na forma matricial, o PD pode ser escrito como:

$$\text{Minimizar } cx \quad (\text{A.5})$$

$$\text{sujeito a } Ax = b \quad (\text{A.6})$$

$$x \in \mathbb{B}^n \quad (\text{A.7})$$

sendo $x = (x_{11}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nn})^t$, e_i é o vetor de ordem n com entradas nulas, exceto na i -ésima posição, cujo valor é 1, A é uma matriz $2n \times n^2$ cuja (i, j) -ésima coluna é $a_{ij} = e_i - e_{n+j}$, para $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, n$, e $b = (\mathbf{1}, \mathbf{1})^t$, $\mathbf{1}$ um vetor de n uns. Note que as restrições (A.2) e (A.3) impedem que os valores de x_{ij} sejam maiores do que 1. A matriz A é uma matriz

totalmente unimodular, logo, uma solução da relaxação linear do PD (RLPD), trocando (A.4) pela restrição $x \in \mathbb{R}^n$, será binária.

O problema dual associado ao RLPD é descrito por (A.8)-(A.10):

$$\max \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j \quad (\text{A.8})$$

sujeito a

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (\text{A.9})$$

$$u_i, v_j \text{ irrestrito}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (\text{A.10})$$

Considere uma matriz de custos relativos $CR = [\hat{c}_{ij}]$ em que cada elemento é igual a $\hat{c}_{ij} = c_{ij} - u_i + v_j$. A matriz de custos relativos CR pode ser obtida aplicando o procedimento a seguir à matriz de custos do PD, $C = [c_{ij}]$.

Procedimento A.1. Subtraia de cada linha de C o mínimo naquela linha, e então na matriz resultante subtraia de cada coluna o valor mínimo naquela coluna.

A matriz de custos relativos terá um zero em cada linha e coluna, e todas as suas entradas serão não negativas. A matriz de custos relativos é a matriz de variáveis de folga duais.

Suponha que possamos encontrar um conjunto factível de valores para as variáveis x_{ij} tais que x_{ij} com valor 1 é associado a uma célula de valor zero da matriz CR . Então, pelo Teorema das Folgas Complementares (Seção 2.3), podemos concluir que temos uma solução ótima. O que, então, constitui um conjunto de valores x_{ij} factíveis? Revendo as restrições do problema da designação, devemos ter exatamente um x_{ij} em cada linha igual a 1 e exatamente um x_{ij} em cada coluna igual a 1. Assim, numa solução factível, haverá exatamente n das variáveis x_{ij} iguais a 1, o resto sendo zero.

Vamos ilustrar esse procedimento no Exemplo A.1.

Exemplo A.1. Considere a matriz de custos exibida na Figura A.1 para um problema da designação com $n = 3$. Encontre o menor custo em cada linha, como ilustrado na Figura A.1

$i \setminus j$	1	2	3	4	Mínimo da linha
1	3	2	5	4	2
2	0	1	2	3	0
3	4	1	-1	3	-1
4	2	5	3	4	2

Figura A.1: Matriz de custos e mínimos das linhas.

Subtraindo o mínimo da linha de cada elemento nas linhas, temos a matriz exibida na Figura A.2

APÊNDICE A. ALGORITMO HÚNGARO

$i \setminus j$	1	2	3	4
1	1	0	3	2
2	0	1	2	3
3	5	2	0	4
4	0	3	1	2

0 0 0 2 Mínimo da coluna

Figura A.2: Matriz de custo atualizadas e mínimos das colunas.

Subtraindo o mínimo de cada coluna de cada elemento da coluna associada na Figura A.2, obtemos a matriz relativa exibida na Figura A.3.

$i \setminus j$	1	2	3	4
1	1	0	3	0
2	0	1	2	1
3	5	2	0	2
4	0	3	1	0

($= \hat{c}_{ij}$)

Figura A.3: Matriz de custos relativos ao fim do procedimento.

Agora, se $x_{12}^* = x_{21}^* = x_{33}^* = x_{44}^* = 1$, e se todos os outros x_{ij}^* forem iguais a zero, então teremos uma solução factível para o PD. Note que valores x_{ij} positivos estão associados às células nulas da matriz relativa exibida na Figura A.3. Fazendo

$$u_i = \min_{1 \leq j \leq n} \{c_{ij}\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{A.11})$$

$$v_j = \min_{1 \leq i \leq n} \{c_{ij} - u_i\}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (\text{A.12})$$

temos uma solução dual factível e

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{j=1}^n v_j. \quad (\text{A.13})$$

Portanto, temos uma solução ótima.

O procedimento usado para obter a matriz relativa na Figura A.3 nem sempre fornece uma solução ótima, veja o Exemplo A.2.

Exemplo A.2. Considere a matriz de custos C exibida na Figura A.4.

$i \setminus j$	1	2	3
1	2	5	7
2	4	2	1
3	2	6	5

Figura A.4: Matriz de custos.

A matriz relativa obtida pelo Procedimento A.1 é exibida na Figura A.5.

$i \setminus j$	1	2	3
1	0	2	5
2	3	0	0
3	0	3	3

Figura A.5: Matriz relativa resultante do Procedimento A.1.

Neste caso, não é possível associar três das variáveis x_{ij} iguais a 1 tais que todos os x_{ij} positivos ocorram em células de valor zero e duas variáveis x_{ij} positivas estejam em linhas e colunas diferentes. Portanto, não existe uma solução primal factível associada à matriz relativa exibida na Figura A.5.

Solução Parcial

Note que na matriz exibida na Figura A.5, o número máximo de variáveis x_{ij} associadas a células nulas, que podem receber valor 1 sem que duas variáveis positivas x_{ij} estejam na mesma linha e coluna, é dois. Podemos deixar $x_{11} = x_{22} = 1$, ou $x_{11} = x_{23} = 1$, ou $x_{31} = x_{22} = 1$, ou $x_{31} = x_{23} = 1$. Nesse caso, o número máximo de células contendo $\hat{c}_{ij} = 0$ tais que duas células não estão na mesma linha ou coluna é 2. As células correspondentes são chamadas *independentes*. Note que se fôssemos desenhar um conjunto de retas passando pelas linhas e colunas para cobrir os zeros, de forma que houvesse pelo menos uma reta sobre cada zero, o número mínimo de tais linhas para essa matriz seria dois: uma reta pela coluna 1 e uma reta pela linha 2.

Vemos nesse exemplo que o número máximo de células nulas independentes e o número mínimo de retas necessárias para cobrir todos os zeros é igual. Esse resultado, que em geral é verdadeiro, é formalizado no Teorema A.1, e demonstrado em [2].

Teorema A.1. *O número máximo de células nulas independentes numa matriz relativa de um PD é igual ao número mínimo de retas para cobrir todos os zeros da matriz.*

Modificando a Matriz Relativa

Suponha que não tenhamos obtido uma solução ótima a partir da matriz relativa (MR) obtida pelo Procedimento A.1. Isto é, não podemos encontrar um conjunto de variáveis x_{ij} positivas associadas às células nulas da matriz MR que forneça uma solução factível para o PD. Considere a matriz coberta obtida cobrindo os zeros da matriz relativa usando o menor número de retas possível. Seja k o número de retas usadas e seja $S_\ell = \{i_1, i_2, \dots\}$ o conjunto de linhas descobertas e $S_c = \{j_1, j_2, \dots\}$ o conjunto de colunas descobertas. Defina $\bar{S}_\ell = N \setminus S_\ell$ e $\bar{S}_c = N \setminus S_c$, sendo $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Seja p o número de linhas em S_ℓ e q o número de linhas em S_c . Então, $k = (n - p) + (n - q)$.

APÊNDICE A. ALGORITMO HÚNGARO

Seja c_0 o elemento descoberto mínimo, isto é,

$$c_0 = \min_{\substack{i \in S_\ell \\ j \in S_c}} \{\hat{c}_{ij}\} > 0. \quad (\text{A.14})$$

Uma nova solução dual é dada por

$$\bar{u}_i = \hat{u}_i + c_0, i \in S_\ell \quad (\text{A.15})$$

$$\bar{u}_i = \hat{u}_i, i \in \bar{S}_r \quad (\text{A.16})$$

$$\bar{v}_j = \hat{v}_j, j \in S_c \quad (\text{A.17})$$

$$\bar{v}_j = \hat{v}_j + c_0, j \in \bar{S}_c. \quad (\text{A.18})$$

Na matriz relativa com elementos $c_{ij} - u_i + v_j$, o cálculo efetuado para obter os valores duais (A.15)-(A.18) é equivalente a subtrair c_0 de cada linha descoberta da matriz MR e somar c_0 a cada coluna coberta. Outra interpretação é que c_0 é subtraído de cada elemento descoberto e somado a cada elemento coberto duas vezes, isto é, coberto por uma linha e uma coluna. A nova matriz de custos relativos tem elementos não negativos e cada linha e coluna possuem um elemento zero.

Para a matriz relativa do Exemplo A.2, temos $c_0 = \min\{2, 5, 3, 3\} = 2$, e a nova matriz de custos relativos é exibida na Figura A.6.

$i \setminus j$	1	2	3
1	0	0	3
2	5	0	0
3	0	1	1

Figura A.6: Matriz relativa modificada.

A matriz relativa apresentada na Figura A.6 nos permite escolher valores positivos para as variáveis x_{ij} mantendo a factibilidade primal.

Observe que a factibilidade primal é obtida, a factibilidade dual é mantida e as folgas complementares são satisfeitas. Assim, a solução $x_{12}^* = x_{23}^* = x_{31}^* = 1$ (e todos os outros valores x_{ij} iguais a zero) é uma solução ótima. Este procedimento é usado de forma iterativa, e é conhecido na literatura como Algoritmo Húngaro. A Figura A.7 mostra um resumo do Algoritmo Húngaro.

Figura A.7: Algoritmo Húngaro

```
01 Entrada: Instância do PD,  $(n, c_{ij}, i, j = 1, \dots, n)$ 
02 Saída: Matriz relativa primal e dual factível para o PD.
03 Início
04   Para  $i = 1, \dots, n$ , defina  $u_i$  como na Equação (A.11).
05   Para  $j = 1, \dots, n$ , defina  $v_j$  como na Equação (A.12).
06   Para  $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$ , faça  $\hat{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ 
07    $MR = [\hat{c}_{ij}]$ 
08    $k = 0$ 
09   Enquanto  $k < n$ 
10     Início
11       Encontre  $k$ , o número mínimo de retas para cobrir todos os ele-
12       mentos nulos ( $\hat{c}_{ij} = 0$ ) de  $MR$ .
13       Se  $k = n$ , pare. Existe uma solução ótima.
14       Senão
15         Início
16           Encontre  $c_0$ , o elemento mínimo não coberto.
17           Subtraia  $c_0$  de cada elemento não coberto.
18           Adicione  $c_0$  a cada elemento coberto por duas retas.
19         Fim
20     Fim
```

APÊNDICE A. ALGORITMO HÚNGARO