UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

AROLDO FERREIRA LEÃO

EUCLIDES E A INCOMENSURABILIDADE: O PROFUNDO TEAR DAS ABRANGÊNCIAS – OS SUMOS E SEGREDOS DO LIVRO X

RIO CLARO
2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS
CÂMPUS DE RIO CLARO

EUCLIDES E A INCOMENSURABILIDADE: O PROFUNDO TEAR DAS ABRANGÊNCIAS – OS SUMOS E SEGREDOS DO LIVRO X

Aroldo Ferreira Leão

Orientador: Prof. Dr. Irineu Bicudo

Tese de Doutorado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem de Matemática e seus Fundamentos Filosóficos Científicos para obtenção do Título de Doutor em Educação Matemática.

RIO CLARO
2017

510.07 Leão, Aroldo Ferreira
L576e Euclides e a incomensurabilidade: o profundo tear das abrangências - os sumos e segredos do Livro X / Aroldo Ferreira Leão. - Rio Claro, 2017
330 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Irineu Bicudo

1. Matemática - História. 2. Matemática grega. 3. Incomensuráveis. 4. Os elementos. 5. Grécia antiga. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

COMISSÃO EXAMINADORA

_____

Prof. Dr. Irineu Bicudo – Orientador
(IGCE/UNESP - Rio Claro)

_____

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin
(IMECC/UNICAMP - Campinas)

_____

Profa. Dra. Renata Cristina Geromel Meneghetti
(ICMC-USP - São Paulo)

_____

Prof. Dr. Carlos Roberto de Moraes
(FHO-UNIARARAS - Araras)

_____

Prof. Dr. Henrique Lazari
(IGCE/UNESP - Rio Claro)

RIO CLARO
2017

A minhas filhas, a verdade do canto dos galos-de-campina,
nas manhãs infinitas do Rio Grande do Norte;

A meus pais, esperanças que se agregam ao meu ser,
a renovação da vida no silêncio dos goiamuns e bacuraus.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Irineu Bicudo, pela cordialidade e profundidade, o eco do vento nas folhas dos cajueiros e jenipapos potiguares;

Ao professor Rômulo Lins, humano e transformador, o Sertão caminhando na direção de si próprio;

À professora Ana Paula Malheiros, sensível e transcendente, a luz do sol nas penas dos tizius e saracuras;

À professora Rosa Monteiro, silêncio e agregação, a verdade do adeus nas mãos das pessoas humildes e intensas;

Ao professor Roger Miarka, o elo entre a sensibilidade e o caminhar sereno diante das incertezas da vida;

Ao professor Antonio Carrera, humilde e alvissareiro, o diálogo recriando a intensidade de seus prumos e motivações;

Ao professor Cesar Donizeti, denso e cordial, o sonho fundamentando o tempo no olhar de todas as crianças;

À Carolina Faustino, compreensiva e iluminada, o canto do joão-de-barro em todo o seu fascínio e comoção;

À Mariana Godoi, amiga e sonhadora, a emoção transbordando quando o silêncio é maior do que qualquer interrogação;

A Alex Alencar, sertanejo e perspicaz, a sinceridade reinventando o ritmo das coisas no bater das asas das guinguirras e azulões;

A Anderson Kochym, pela atenção e paciência, o voo dos tuiuiús nas planícies ensolaradas do Mato Grosso do Sul.

“Eu te ofereço, ó deusa, esta coroa,
Que num prado teci intacto e puro:
Nunca a ele pastor levou rebanho;
Nunca ferro o cortou, é ilibado.
Só as abelhas tocam suas flores
No Sol da Primavera: e o Pejo o rega
Com águas doces, mansas, cristalinas.
Todo o que sem estudo, por instinto
Seguiu a castidade, este só, pode
Colher tais flores; o que os maus não podem.
Senhora amável, teus cabelos áureos
Tomem esta prisão de uma mão pia.
Só eu entre os mortais tenho esta honra:
Contigo vivo, e só contigo falo,
Ouvindo tua voz, mas não te vendo.
Assim a vida urdi; assim a acabe.”

** Eurípedes – “Hipólito” – Canto de Hipólito para a deusa Ártemis.*
**Tradução expressa em versos decassilábicos heroicos efetuada por J. B. de Mello e Sousa, Clássicos Jackson, V. XXII, p. 9, 2006.*

RESUMO

Esta Tese tem como objetivo contribuir para um maior entendimento e aprofundamento da incomensurabilidade exposta no Livro X, da obra *Os Elementos*, de Euclides. As pesquisas relacionadas, ao estudo específico sobre o Livro X, em toda a sua expansão e complexidade, são ainda insuficientes e carecem de um maior compêndio de buscas e norteamentos, que possibilitem trazer à tona, todo o esplendor deste livro singular. Então, fez-se necessário uma análise completa do Livro X, um mergulho nas suas engrenagens e desmembramentos. Tal livro, o maior e mais intenso de *Os Elementos*, além de ser considerado o mais difícil, ocupando mais de um quarto do mesmo, tido como "a cruz dos matemáticos", "um beco sem saída", evidencia, de forma categórica, um dos temas mais sutis, não só da matemática da antiga Grécia, como também dos dias atuais, ao se dedicar ao estudo dos segmentos retilíneos que são incomensuráveis com respeito a um segmento retilíneo dado, ou seja, ao estudo dos números irracionais. Os vínculos com a Educação Matemática foram realçados e possibilitaram a escrita de um texto, que ampliando inúmeros enfoques, consolidou a importância do Livro X no relacionamento com outros livros de *Os Elementos*, como também a sua característica particular de tratar, fundamentalmente, do tema da incomensurabilidade.

Palavras-chave: Euclides; Elementos; incomensurabilidade; Livro X; Educação Matemática.

ABSTRACT

This thesis aims to contribute to a greater understanding and deepening of the incommensurability exposed in Book X, of the work *The Elements*, by Euclid. The researches related to the specific study of Book X, in all its expansion and complexity, are still insufficient and lack a greater compendium of searches and guidelines, that make possible to bring to the surface, all the splendor of this singular book. Then it took a full analysis of Book X, a dip in its gears and dismemberments. Such a book, the largest and most intense of *The Elements*, in addition to being considered the most difficult, occupying more than a quarter of it, considered as "the cross of mathematicians", "a dead end", shows categorically one of the subtler themes not only of the mathematics of ancient Greece but also of the present day, when it is devoted to the study of rectilinear segments which are incommensurable with respect to a given rectilinear segment, that is, to the study of irrational numbers. The links with Mathematics Education were emphasized and made possible the writing of a text, which enlarged numerous approaches, consolidated the importance of Book X in the relationship with other books of *The Elements*, as well as its particular characteristic of dealing, fundamentally, with the theme of Incommensurability.

Keywords: Euclid; Elements; incommensurability; Book X; Mathematics Education.

SUMÁRIO

PARTE I	**APRESENTAÇÃO: A VERDADE E SEUS ENLACES**	1
CAPÍTULO 1	**OS ARES E A CAMINHADA**	2
	1.1O TRABALHO: AS REVERBERAÇÕES E O ESCOPO	2
	1.2A TESE: DIVISÃO E SINUOSIDADES	6
PARTE II	**INTRODUÇÃO: OS ECOS DOS ENFOQUES**	10
CAPÍTULO 2	**A EXTENSÃO DO PRÓLOGO**	11
CAPÍTULO 3	**OS TEORES E OS HORIZONTES**	13
	3.1 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: OS TONS DO TEMPO	13
	3.2 EUCLIDES: A VIDA E OS VEIOS	16
	3.3 OS ELEMENTOS: A FORÇA DA OBRA	18
	3.4 O LIVRO X	21
	3.5 A INCOMENSURABILIDADE	23
	3.6 NOTAS E REFERÊNCIAS	26
PARTE III	**SEDIMENTAÇÃO: O SURGIMENTO DA INCOMENSURABILIDADE**	32
CAPÍTULO 4	**AS SONDAGENS E AS NÉVOAS**	33
	4.1 OS PITAGÓRICOS: A CRISE NA BERLINDA	33
	4.2 A ANTIFAIRESE: A PERCEPÇÃO AGUDA	38
	4.3 TEETETO: O REENCONTRO DO ÂMAGO	46
	4.4 MÊNON: O DIÁLOGO, A SUTILEZA	55
	4.5 NOTAS E REFERÊNCIAS	62

PARTE IV	**CONSOLIDAÇÃO: A ANÁLISE DO LIVRO X**	70
CAPÍTULO 5	**LIVRO X: OS ALICERCES MOLDAM AS CONCEPÇÕES**	71
	5.1 CONTEXTOS, CONFLUÊNCIAS	71
	5.2 PROPOSIÇÕES 1 A 30	74
	5.3 NOTAS E REFERÊNCIAS	114
CAPÍTULO 6	**LIVRO X: OS SUMOS DAS CONFIGURAÇÕES**	124
	6.1 CONSONÂNCIAS, INTERAÇÕES	124
	6.2 PROPOSIÇÕES 31 A 60	127
	6.3 NOTAS E REFERÊNCIAS	194
CAPÍTULO 7	**LIVRO X: AS SENTENÇAS DOS FATOS**	200
	7.1 EXPANSÕES, DESMEMBRAMENTOS	200
	7.2 PROPOSIÇÕES 61 A 90	203
	7.3 NOTAS E REFERÊNCIAS	244
CAPÍTULO 8	**LIVRO X: AS SONDAGENS PROFUNDAS**	249
	8.1 ESPAÇOS, CONSEQUÊNCIAS	249
	8.2 PROPOSIÇÕES 91 A 115	251
	8.3 NOTAS E REFERÊNCIAS	307
PARTE V	**CONCLUSÃO: OS DESFECHOS, AS POSSIBILIDADES**	314
CAPITULO 9	**O LIVRO X E SUA ATUAL CONCEPÇÃO**	315
CAPITULO 10	**AS REPERCUSSÕES DO EPÍLOGO**	319
BIBLIOGRAFIA		321

PARTE I

APRESENTAÇÃO: A VERDADE E SEUS ENLACES

CAPÍTULO 1

OS ARES E A CAMINHADA

1.1 O TRABALHO: AS REVERBERAÇÕES E O ESCOPO

O trabalho delineado nesta Tese agrupa essências e perspectivas diversas. Seus focos concentram-se na busca dos elos da incomensurabilidade, desde seu surgimento na Grécia antiga até suas vinculações com a matemática e a educação matemática dos dias atuais. Desta forma, em sua mais íntima concepção, o trabalho abarca um mergulho na História da Matemática buscando decodificar, da maneira mais abrangente possível, o papel da incomensurabilidade como meio de tornar a matemática cada vez mais envolvente e transformadora. Neste périplo de confluências e enfoques, sentencia-se a importância fundamental da obra *Os Elementos* de Euclides. Nela, o décimo livro, aquele que envolve o tema da incomensurabilidade e é tido como o mais difícil de ler e entender, é esmiuçado plenamente. Tal conotação ganhou ares didáticos e conceituais, expandiu o norteamento de determinadas evidências e pluralidades. No desmembramento do livro, alargando seus encantamentos, todas as suas proposições, definições, corolários e lemas recebem comentários. Em suma, nada deixou de ser analisado, questionado, sondado. Neste ponto, cabe ressaltar as importantes contribuições de alguns historiadores da matemática, que tiveram papel relevante na absorção e filtro das suas ideias, para que os comentários multiplicassem verdades e sumos.

Entre eles pode-se destacar, Wilbur Knorr em seu livro *The Evolution of the Euclidean Elements: A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry (A Evolução de Os Elementos de Euclides: Um Estudo da Teoria das Magnitudes Incomensuráveis e Seu Significado para a Geometria Grega Antiga)* e do artigo *'La Croix des Mathématiciens': The Euclidean Theory of Irrational Lines (A Cruz dos Matemáticos – A Teoria Euclidiana das Linhas Irracionais)*; Kurt von Fritz com o trabalho *The Discovery of Incommensurability by*

Hippasus of Metapontum (A Descoberta da Incomensurabilidade por Hipaso de Metaponto); B. L. van der Waerden com a obra *Science Awakening (O Despertar da Ciência)*; David Fowler no livro *The Mathematics of Plato's Academy – A New Reconstruction (A Matemática da Academia de Platão – Uma Nova Reconstrução)* e do trabalho *An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*; Christian Taisbak com o compêndio *Coloured Quadrangles: A Guide to the Tenth Book of Euclid's Elements (Quadriláteros Coloridos: Um Guia para o Décimo Livro de Os Elementos de Euclides)*; Benno Artmann em seu livro *Euclid – The Creation of Mathematics (Euclides – A Criação da Matemática)*; Victor Katz em sua obra *A History of Mathematics – An Introduction (A História da Matemática – Uma Introdução)*.

Foi crucial a tradução, do texto grego de *Os Elementos* para o português, efetuada por Irineu Bicudo, visto que é a partir deste material de valor singular que se iniciou a investigação minuciosa, em toda a extensão do Livro X, com suas 115 proposições, de cada proposição, definição, corolário e lema. De certa forma, seria bastante interessante, que o leitor interessado em penetrar com profundidade nos meandros e exposições do Livro X, tenha um contato com a referida tradução, que ainda conta com uma introdução primorosa, possibilitando ao mesmo uma maior interação com os comentários efetuados. No intuito de agregar mais conteúdo a todo o material analisado, foi extremamente importante a tradução de Thomas Heath, para o inglês, evidenciada em sua obra *Euclid – The Thirteen Books of The Elements (Euclides – Os Treze Livros de Os Elementos)*, volume 3, onde se pode enxergar, tanto a tradução do Livro X da fonte grega, quanto os enriquecedores comentários que muito contribuíram para a sedimentação de determinadas ideias e pormenores desta Tese. No final de tal obra ainda encontra-se um valioso *General Index of Greek Words and Forms (Índice Geral de Palavras e Formas Gregas)* que é, simplesmente, fundamental para se compreender as nuances e conotações dos Livros X a XIII. Outro livro interessante do Historiador Britânico é *A History of Greek Mathematics (Uma História da Matemática Grega)* que, escrito em dois volumes, traz um panorama denso da matemática, no mundo grego antigo, em todo seu esplendor e fascínio. Uma outra tradução que merece ser citada é a de Maria Luisa Puertas Castaños onde, ao efetuar a versão do texto grego para o espanhol, no volume 3, revela a importância do Livro X em comentários que serviram, também, para clarear e desenvolver diversas concepções atreladas aos comentários efetuados ao longo

do Livro abrangente. Em relação à tradução de *Os Elementos* da autora espanhola, no volume 1, contendo os Livros assinalados de I a IV, existe, ainda, uma introdução maravilhosa efetuada por Luis Vega Reñón que consolida, de forma ampla, toda a capacidade de condensar e filtrar o conhecimento matemático de sua época, efetuada por Euclides.

Assim, o objetivo desta Tese é a análise completa do Livro X de *Os Elementos* de Euclides, seus vínculos com a incomensurabilidade, suas reverberações no tempo, seus ecos delineadores do fazer matemático no mundo grego, suas ligações com a matemática contemporânea, seus lastros e ressurgimentos em pesquisas atreladas à educação matemática. O Livro X tem se notabilizado pelo seu grau de dificuldade, a ponto de ser chamado “a cruz dos matemáticos”, envolvendo determinadas características que acentuam o teor deste entendimento. De certa forma, em nenhum compêndio consultado para a escrita da Tese em questão, principalmente nas línguas inglesa, francesa, alemã e espanhola, encontrou-se obra em que tal empreendimento tenha sido realizado. Então, para atingir-se tamanha empreitada, foi preciso um esforço que concatenasse desde o estudo da história da matemática na Grécia antiga, passando pelo surgimento da incomensurabilidade na mesma, até se chegar à reunião de conhecimentos e teoremas expostos em *Os Elementos* de Euclides. Outro detalhe extremamente importante é que o Livro X, apesar de suas dificuldades e enfoques voltados para a incomensurabilidade, não é um Livro isolado, pelo contrário, dialoga com diversos Livros de *Os Elementos*, principalmente os Livros V, VI, VII, VIII, IX, XII e XIII. Este aspecto relevante demonstra o quanto Euclides estava atento a todo um manancial de ideias, que interagindo de forma plural, deu ao pensamento grego uma beleza e delicadeza inigualáveis. Interessante, também, é que no Livro X, a partir de determinado ponto, há um entrelaçamento das proposições, explicitadas em blocos, onde as mesmas vão sendo delineadas, desenvolvidas, como que oferecendo ao leitor uma maior capacidade de interpretá-lo, compreendê-lo. Logo, Euclides, em uma busca, um esforço para evidenciar o Livro X de forma sintética e sistematizada, expande um conjunto de perspectivas e verdades que em muito pluralizam o livro temido, consegue expor a grandeza do pensamento matemático de sua época, legar a posteridade um compêndio de ideias que irá, de século a século, fundamentar e consolidar o fazer matemático no mundo ocidental, decodificar, com rara perspicácia

e precisão, o quanto os hoje chamados números irracionais precisam ser estudados, vivenciados.

Mergulhando em suas repercussões e desmembramentos, esta Tese traz a certeza do interesse pela mesma em matemáticos, historiadores da matemática, filósofos, historiadores da ciência e naqueles que lidam com a educação matemática. Desta forma, interessará aos matemáticos porque, em seus comentários, há várias provas de teoremas que possibilitam ao matemático uma maior compreensão dos efeitos da incomensurabilidade na matemática contemporânea. Com relação aos historiadores da matemática, as vinculações são extensas e atrelam-se, a cada instante, nas averiguações sucintas do surgimento da incomensurabilidade no mundo grego antigo, com seus impactos e tendências, multiplicidades e delineamentos. As consultas a inúmeros historiadores da matemática, em um bibliografia vasta e que tenta colocar às claras o importante papel dos incomensuráveis na matemática grega, revela, também, um profundo e contínuo esforço para penetrar-se nas luminosas verdades do Livro X de *Os Elementos* de Euclides. Se o Livro X foi totalmente esmiuçado, comentado em todo o seu prolongamento, deveu-se, em plenitude, às observações e percepções de mestres que aplainaram caminhos, acenderam luzes nas veredas tortuosas. O interesse dos filósofos passará pelo conteúdo e abrangência das ideias discutidas no capítulo referente à descoberta da incomensurabilidade, bem como na análise de partes das obras *Teeteto* e *Mênon*, ambas de Platão, onde foram colhidas importantes percepções dos incomensuráveis, em explanações densas do filósofo da Academia. Para os historiadores da ciência caberá compreender que o texto euclidiano confirma, sob vários aspectos, não só no Livro X, como em todo o corpo de *Os Elementos*, o importante papel da matemática grega nas concepções e percepções da ciência discutida e empregada no mundo ocidental. Já para aqueles, que se dedicam à educação matemática, haverá a constatação de que o Livro X tem sido pouco evidenciado nas escolas, mostrando que, até certo ponto, o estudo dos números irracionais realizado contemporaneamente carece das pluralidades da história da matemática, para que se compreenda o quanto gerações passadas foram capazes de enveredar por terreno tão espinhoso, capaz de produzir ideias que dão à matemática uma força e um fascínio maravilhosos, transformadores.

1.2 A TESE: DIVISÃO E SINUOSIDADES

A divisão da Tese segue um périplo, de confluências e interações, que procuram penetrar profundamente na análise minuciosa de todo o Livro X de *Os Elementos* de Euclides. De início, verifica-se que a Tese está dividida em cinco partes, construindo um elo, uma harmonia que possibilita uma investigação concisa do tema da incomensurabilidade, passando pela análise, na forma de comentários, das proposições, definições, corolários e lemas do livro. As partes têm, essencialmente, uma progressão que possibilita ao leitor um melhor entendimento de todo o conteúdo desenvolvido. Desta forma, a parte I diz respeito à Apresentação, a parte II focaliza a Introdução, a parte III traz a Sedimentação, a parte IV envolve a Consolidação e a parte V decodifica a Conclusão. É importante ressaltar que, para cada parte, foram delineados nos capítulos enfoques que transmitem aos textos toda uma carga de conhecimentos e pluralidades, norteamentos e fundamentações, no intuito de evidenciar que o texto euclidiano possui singularidades muito interessantes. Então, é importante assinalar que, na parte I, a Apresentação revela o escopo do trabalho, seus objetivos e intenções, o foco na questão sutil do surgimento da incomensurabilidade no mundo grego antigo, a multiplicidade de se comentar, totalmente, o maior e mais complexo livro de *Os Elementos*. Aqui, pode-se comprovar, talvez, a primeira vez em que o Livro X recebe comentários em sua totalidade. Já a parte II, caracterizada pela Introdução, norteia-se pela configuração de um prólogo, trazendo, como nas tragédias gregas, principalmente as de Ésquilo, Sófocles ou Eurípedes, o esclarecimento da temática da Tese. Assim, procura-se, em uma união de esclarecimentos, mostrar a força da História da Matemática, a importância de evidenciar-se quem foi Euclides, seu tempo e sua vida, embora que as referências sobre o mesmo sejam diminutas, prolongando-se até a sua obra máxima que é *Os Elementos*. Daí surge, como que entrelaçados e amalgamados, a grandeza do Livro X e o tema sempre fascinante da incomensurabilidade. De fato, a Introdução traz um panorama de assuntos que, se entendidos e assimilados, melhor traduzirão os enfoques e consumações que virão a seguir e confirmarão o quanto a matemática grega foi capaz de produzir pormenores e abrangências, sondagens e averiguações a respeito de inúmeras composições matemáticas.

Chegando até a parte III, tem-se que a Sedimentação explora as nuances e multiplicidades do surgimento ou da descoberta da incomensurabilidade no universo

grego antigo. De início, pondera-se que tal surgimento deu-se entre os pitagóricos. A ideia está devidamente sedimentada por um grande número de matemáticos e historiadores da matemática. No entanto, partindo desta afirmação, cria-se uma interrogação no sentido de saber-se se tal descoberta gerou, ou não, uma crise no meio filosófico e matemático grego. Embora os textos de Platão e Aristóteles não apontem na direção de uma suposta crise, não é pequena a quantidade daqueles estudiosos, aí incluindo matemáticos e historiadores da matemática, além de filósofos e historiadores da ciência, que sustentam como profundo o papel da crise. Todavia, para os que consideram que a crise não existiu, é extremamente valiosa a análise dos contextos da antifairese (ἀνθυφαίρεσις) ou, basicamente, do algoritmo euclidiano da divisão, devidamente esboçado nas proposições 1 a 4 do Livro X, como fundamentador da forma de pensar grega em relação à questão dos incomensuráveis, visto que, pelo processo de subtrações sucessivas, pode-se encontrar, para o caso específico dos segmentos, uma cadeia de divisões, com um fim quando se trata dos segmentos comensuráveis e, sem um fim, infinita, quando se relaciona aos incomensuráveis. Prosseguindo adiante é realizado um exame pormenorizado dos diálogos de Platão, *Teeteto e Mênon*, onde se procura constatar a preocupação e a sensibilidade do grande filósofo, em poder, didaticamente, explorar e explicitar a questão da incomensurabilidade, suas concepções e enlaces, seus ecos e desmembramentos, mostrando o quanto o tema exercia fascínio no pensamento grego.

Adentrando nas repercussões e texturas da parte IV, intitulada de Consolidação, compreende-se que a mesma é a mais importante da Tese, sua essência e profundidade, aquela onde “a cruz dos matemáticos” ressurgiu e se recriou, mas, felizmente, analisando-se e comentando-se todas as proposições, definições, corolários e lemas do Livro X, verificou-se, antes, “a sutileza da matemática”, seus impactos e transformações, os desmembramentos do conhecimento de era a era, a importância de se ter um matemático, do porte de um Euclides, capaz de reunir a imensa criação da matemática que o antecedeu e o fundamentou em seu próprio tempo. Desta forma, a parte IV está dividida em quatro capítulos que varrem as 115 proposições do Livro X. No capítulo 5 fundamentam-se os comentários das proposições de 1 a 30. Para este grupo de proposições, verifica-se, inicialmente, os comentários das Primeiras Definições, em um total de cinco, abarcando os elos entre a comensurabilidade e a incomensurabilidade, alicerçando, então, o material a

seguir. No capítulo 6 esboçam-se os comentários das proposições de 31 a 60. Neste conjunto de teoremas, entre as proposições 47 e 48, surgem as chamadas Segundas Definições, em um total de seis, configurando um entendimento preciso sobre as chamadas binomiais, abarcando-as da primeira à sexta binomial. No capítulo 7 traduzem-se os comentários das proposições de 61 a 90. Para as proposições em questão, entre as proposições 84 e 85, delineiam-se as chamadas Terceiras Definições, em um total de seis, explicitando uma compreensão abalizada a respeito dos chamados apótomos, instituindo-os do primeiro ao sexto apótomo. No capítulo 8 enfocam-se os comentários para as proposições de 91 a 115. Neste último grupo de proposições, enfatiza-se o fato de que as proposições finais, de 112 a 115, podem ter sido interpoladas. Tal consideração recebe uma avaliação que congrega, desde a conjectura levantada por Heiberg, até as explanações de Thomas Heath buscando mostrar que não houve a dita interpolação. Um dos contextos mais intrigantes do Livro X, que revela a atenção de Euclides, em apresentar um trabalho sistematizado, voltado para melhor esclarecer os elos da incomensurabilidade, está apresentado no fato de que as proposições de 36 a 72 evidenciam as propriedades, de linhas ou áreas, de determinadas somas de pares. E, complementando este bloco, as proposições de 73 a 110 explicitam as propriedades, de linhas ou áreas, de determinadas diferenças de pares. Assim sendo, para cada proposição n dada, vincula-se uma proposição $(n + 37)$, de tal forma que $36 \leq n \leq 70$. Para o caso de $n = 71$, haverá a associação das proposições 108 e 109. Já quando $n = 72$, ter-se-á a agregação da proposição 110. É, também, de extrema sutileza, comprovar que há relações entre os grupos de proposições apresentadas de 54 a 59 e 91 a 96. Outros grupos que mantêm vínculos são as proposições mostradas de 60 a 65 e 97 a 102. Há ainda a importante associação entre os grupos de proposições consolidadas de 66 a 69 e 103 a 107. Então, ao se chegar à análise do Livro X de *Os Elementos* de Euclides, em sua totalidade, pode-se constatar o quanto o seu autor foi perspicaz e sintetizador de ideias, multiplicador de essencialidades, delineador de uma forma de pensar e de reunir saberes, com lucidez e sensibilidade, oferecendo à humanidade uma obra que até os nossos dias continua fortalecida e fortalecendo, a movimentação do pensamento matemático, em sua incessante busca por se recriar, impulsionar o homem para que se redescubra, se una às grandes verdades da vida.

Finalmente, na parte V desta Tese, vislumbra-se a Conclusão, onde se pontua, inicialmente, as interações entre o Livro X e a sua atual concepção. Nesta fluência

de sentenças e concepções, compreende-se que, de uma forma geral, infelizmente, os livros didáticos de matemática, tanto em nível superior, quanto no ensino médio, não realçam, quando comentam os ditos números irracionais, a importância do Livro X de Euclides para melhor compreendê-los, vislumbrá-los. Desta forma, o Livro X, que possui a fama de ser o mais difícil e extenso de *Os Elementos*, também é o menos evidenciado e estudado, refletindo, um abandono de seus veios e percepções, inadmissível, injustificável. O aluno, através deste suporte de ideias e agregações, com certeza, estaria mais bem preparado para construir e multiplicar seus voos e entendimentos diante de assunto fascinante, cercado de luminosidades e abrangências. O professor de matemática, ou mesmo o historiador da matemática, através de cursos, palestras, seminários, devem ser orientados no intuito de que consigam enxergar todos os enlaces que tornam o Livro X uma fonte inesgotável de sustentação para a teoria dos incomensuráveis. O Livro continua fortemente contemporâneo, visto que seus alicerces estão montados na construção e reconstrução de um tema que necessita, constantemente, ser esmiuçado, explicado, sedimentado nas mentes. Deste modo, nas repercussões do epílogo, a concepção desta Tese, em toda sua intensidade e multiplicidade, norteou-se na necessidade de trazer o Livro X à lume, oferecer, ainda que humildemente, aos estudiosos da matemática, história da matemática, educação matemática, filosofia, história da ciência e aos amantes da cultura grega, toda uma carga de conhecimentos que possibilite estarmos atentos à grandiosidade de um pensamento que fortaleceu almas e ideias, que transbordou em delicadeza e profundidade, mostrou o quanto é preciso acostumarmo-nos com a beleza, perpetuarmo-nos nas mínimas coisas, acreditarmos que o homem poderá dar certo, que o tempo a tudo molda e absorve, dá aos olhares uma expansão que os decifra por inteiro, luz decodificando a verdade de nós mesmos, de tudo.

PARTE II

INTRODUÇÃO: OS ECOS DOS ENFOQUES

CAPÍTULO 2

A EXTENSÃO DO PRÓLOGO

No enredo dos capítulos a seguir serão delineadas constatações surpreendentes, a textura de determinadas concepções fluirá no sentido de melhor caracterizarmos a profunda ligação entre a incomensurabilidade e a integralidade do texto apresentado no Livro X de *Os Elementos* de Euclides. De fato, o tema da incomensurabilidade será discutido permanentemente, isto porque no mundo grego antigo, o seu surgimento vem cercado de algumas pluralidades que merecem ser discutidas, analisadas. Assim, após a exposição do surgimento da incomensurabilidade na Escola Pitagórica, expandem-se suas nuances na tentativa de esclarecermos à suposta crise de tal descoberta. Especificamente neste ponto, surge a exposição da antifairese como meio para garantir a não existência de tal crise. De fato, um desenvolvimento de cálculos é exposto na tentativa de tentar compreender-se o efeito da antifairese no universo da matemática grega. Exponho, então, uma forma baseada nas concepções dos matemáticos da Grécia antiga, amparado nas especulações de David Fowler. Por outro lado, também evidencio uma maneira moderna de encontra-se as configurações da antifairese. As sondagens são abalizadas por Historiadores da Matemática do porte de Wilbur Knorr, Kurt von Fritz, van der Waerden, Thomas Heath, entre outros. Há, ainda, as sutis evidências expostas do diálogo platônico *Teeteto*, onde verifica-se, em determinado momento da conversa entre Sócrates e o jovem *Teeteto*, a exposição ao velho filósofo que “Aqui o Teodoro desenhou-nos algo acerca de potências, de três pés e de cinco pés quadrados, demonstrando que o comprimento não é comensurável com um pé, e assim continuou por cada uma delas, até a de dezessete pés. Seja como for, ficou por ali. Então passou-nos pela cabeça isto: visto que as potências parecem ser em quantidade infinita, tentar reuni-las sob um único nome pelo qual todas pudessem ser chamadas.”. Um outro diálogo platônico que ganha destaque é o *Mênon*, onde acontece a conversa entre o menino escravo e Sócrates, mostrando uma importância indiscutível para o tema abordado. Autores como David Fowler, principalmente em sua obra *The Mathematics of Plato’s Academy – A New Reconstruction (A Matemática na Academia de Platão – Uma*

Nova Reconstrução), pontuam sua importância e criam perspectivas bastante densas no intuito de trazer um entendimento mais plural do papel dos incomensuráveis na Grécia antiga.

Consolidando os vínculos entre a incomensurabilidade e o Livro X de *Os Elementos* de Euclides é elaborada, então, uma análise completa do referido Livro. Esta análise, pontuada de proposição em proposição, traz a importante elucidação de que a obra euclidiana vincula-se a uma sistematizada e bem apresentada caracterização de conteúdos referentes a linhas e áreas irracionais. No intuito de cobrir todas as 115 proposições do Livro, dividiu-se o exame pormenorizado das mesmas em quatro blocos. O primeiro bloco abarca as proposições de 1 a 30, revela as definições de comensurabilidade e incomensurabilidade, sinaliza com o fortalecimento da linguagem básica do Livro X e estabelece que “O retângulo contido por retas racionais, comensuráveis somente em potência, é irracional, e a que serve para produzi-lo é irracional, e seja chamada medial*”.* O segundo bloco desmembra as proposições de 31 a 60, molda o entendimento sobre o fato de que *“*Caso duas racionais comensuráveis somente em potência sejam compostas, a toda é irracional, e seja chamada binomial”. O terceiro bloco sedimenta as proposições de 61 a 90, pluraliza a compreensão de que “Caso de uma racional seja subtraída uma racional, sendo comensurável somente em potência com a toda, a restante é irracional; e seja chamado apótomo”. O quarto bloco finaliza com as proposições de 91 a 115, conceitua, na importante proposição 111, que “O apótomo não é o mesmo que a binomial” e explicita, nas proposições 112 a 115, que as mesmas podem ter sido interpoladas. Alguns autores, a partir da opinião de Heiberg, têm abraçado esta ideia. Wilbur Knorr, por exemplo, testemunha que o Livro X estaria bem finalizado na proposição 111. Nas considerações finais estão alicerçadas algumas percepções que contribuirão para uma melhor fundamentação do Livro X no universo da matemática contemporânea. A primeira é a de que o Livro precisa ser melhor enfatizado nas escolas, nos livros didáticos, nas pesquisas sobre números irracionais. O que acontece é que, na maioria das vezes, o nome de Euclides está apenas associado com a escrita de *Os Elementos*, ou, em tantas outras vezes, cognominado de “O Pai da Geometria”. Não há um mergulho profundo em *Os Elementos* e, daí, uma busca mais ampla pelo Livro X e toda sua repercussão e desmembramento na construção e sedimentação dos sempre plurais números irracionais.

CAPÍTULO 3

OS TEORES E OS HORIZONTES

3.1 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: OS TONS DO TEMPO

A História da Matemática, com suas gradações e averiguações, abrangências e repercussões, tem impulsionado, cada vez mais, a força dos mergulhos em inúmeros veios que, com o passar dos anos, enriquecem o entendimento de seus infinitos caminhos. Um desses intrincados caminhos, norteando as extensas pesquisas em seus lumes e enfoques, é a matemática lapidada e difundida na Grécia antiga. Suas conotações continuam intrigantes, fascinantes, e nos conduzem a investigações sempre atentas ao porvir das percepções elevadas. A tarefa é sempre revitalizada por informações que precisam estar em sintonia com um material, inevitavelmente, tragado pelo tempo, ressurgindo para o pesquisador, quase sempre, em ínfimas porções. Quando a História mergulha fundo em quaisquer temas, reconstrói, com toda sua magia, as pegadas e os ecos daqueles que nos antecederam, fundamenta as surpresas e os enlaces das eras, sedimenta no ser a necessidade das expansões, dos desmembramentos[1]. E quanto mais se avança, na direção contrária, aos elos e às convicções de nossa vida contemporânea, afeita a pressas e pressões variadas, mais se enxerga um passado que necessita ser investigado, pesquisado com zelo e perspicácia. Muitas vezes o material para que se realizem tais pesquisas é escasso e o pesquisador terá que se multiplicar, avaliar conceitos e sentenças, trafegar por terrenos pantanosos, vias escuras, iluminar com sua luz interior o caminho a seguir, a trilha a percorrer. Desta forma, possuído de uma vontade que o torna intimamente agregado ao assunto estudado, o historiador corre riscos, cíclica esperança alimentada pelos impasses e norteamentos de si próprio, tentando encontrar a verdade, ou aquilo que dela se aproxima, vasculhando os horizontes, penetrando na seara de inúmeras

interrogações, no território sagrado da memória e dos segredos, luz nos porões abandonados das velhas casas[2].

Assim, repercutindo alvissareira e abissal, a História da Matemática fundamenta o teor de suas pesquisas e filtros, em uma busca contínua por informações, tantas vezes deslocadas no tempo, dispersas no enevoamento de eras distantes, impregnadas de confissões fundas, de incertezas densas, buscando retratar períodos longínquos com o máximo de veracidade possível. Em todo caso, o passado, intrinsicamente envolvido com as recriações e ressurgimentos do futuro, navega no espírito de todos nós, não pode ser indefinidamente implodido, destratado em suas engrenagens, roído pela insensibilidade. Cada homem é uma centelha da ancestralidade que o tornou vinculado a si mesmo, vida que se molda e se renova no tempo através de seus desejos, de suas sondagens e percepções. A História abarca imensidões e, quando chega à Matemática, contribui decisivamente para torná-la mais viva do que já é, traz uma melhor compreensão de tudo que envolve o fazer matemático, consolida nos instantes a grandeza e a beleza do conhecimento perpassado de geração em geração, ajuda a entender a expansão das ideias, as conotações do espírito se afirmando e se reconstruindo, vinculando as essências aos fatos, os lumes às pluralidades. Então, neste universo de minúcias e reencontros, especulações e recomeços, a cautela no trato do conhecimento deve trazer harmonia e respeito ao volume de informações a filtrar. Constantemente o pesquisador precisa renascer em si para vasculhar determinados conceitos, imprecisões, confissões as mais variadas, que o tornarão envolvido com as conotações singulares, os aspectos das confluências que o levarão aos sons distantes ecoando insistentemente em sua alma afeita a observações e contornos nos horizontes amplos do saber. Os homens necessitam respeitar suas reminiscências, ressurgirem diante das lembranças e dos ocasos, moverem-se para o reencontro consigo mesmos.

Um dos fatos que mais impressiona na História da Matemática, em relação a seus diversos autores e aos desmembramentos de suas pesquisas e opiniões, citações e norteamentos, é a atenção especial dada ao livro *Os Elementos*, de Euclides[3]. A obra, tantas vezes citada e estudada, continua a abrigar teores os mais elevados, a estruturar a propagação do fazer matemático no mundo grego antigo. O comprometimento de cada autor, em revelar a importância do livro, foi construindo um enlace de essências e averiguações que consolidou o texto euclidiano como

uma das principais fontes de estudo do fazer matemático no mundo ocidental. A História da Matemática vivencia em *Os Elementos* uma espécie de apoteose de seus próprios mergulhos e delineamentos na expansão da matemática através das eras, redefine, com bastante lucidez, o quanto necessitamos estar atentos à sabedoria vivenciada pelos povos antigos, que jamais podem ser esquecidos ou tratados com desdém. É preciso uma visão profunda para abarcar conceitos e consequências, obter, como garantem Cajori (1894), Heath (1921), Struik (1954), Gow (1884), um elo que nos conduza a realizarmos pesquisas cada vez mais profundas, profícuas, capazes de nortearem nossas observações para melhor. A História da Matemática pede uma visão crítica dos fatos, das construções e reconstruções do labor matemático se evidenciando a cada época, se fundindo a conceitos e demonstrações, se alargando constantemente. No prefácio de sua obra *Science Awakening (O Despertar da Ciência),* Bartel Leendert van der Waerden, ao expor o tópico *Why History of Mathematics? (Por Que História da Matemática?)*, onde enfatiza que “Em suma, todos os desenvolvimentos que convergem na obra de [Isaac] Newton, aqueles da matemática, da mecânica e da astronomia, começam na Grécia.”, chega até o tópico *The History of Greek Mathematics (A História da Matemática Grega)*, mostrando a impressionante constatação de que são extremamente minguados os textos originais referentes à época de ouro da matemática grega antiga, apontando o quanto os Historiadores da Matemática precisam estar atentos ao fato de que é preciso ter uma consciência desta evidência para caminhar com segurança “nesta escuridão”. Desta forma, esmiuçando percepções e convicções, revela:

> *De Tales a Apolônio, cobrem-se quatro séculos, de 600 a.C. a 200 a.C. Até recentemente, os três primeiros desses quatro séculos estavam envoltos na penumbra, porque nós possuímos somente dois textos originais deste período: O fragmento concernente as lúnulas de Hipócrates e aquele de Árquitas sobre a duplicação do cubo. A isto pode ser adicionado dois breves fragmentos de Árquitas, um número de dispersas comunicações de Platão, Aristóteles, Pappus, Proclus e Eutocius. e um auto contraditório conjunto de lendas pitagóricas. Por esta razão, os trabalhos mais velhos, tais como o* Geschichte der Mathematik [*A História da Matemática*]*, de Cantor*, *contêm muito pouco sobre este período, a não ser especulações concernentes a coisas das quais nós, realmente, não conhecemos algo, tal como, por exemplo, o Teorema de Pitágoras.* (p. 4)

3.2 EUCLIDES: A VIDA E OS VEIOS

Embora se saiba muito pouco sobre a vida de Euclides, desde pormenores da sua personalidade até se participou, ou não, da Academia de Platão, passando, inclusive, pelo local correto de seu nascimento e as datas precisas de quando veio ao mundo e morreu, sua obra *Os Elementos* se ergue e se consolida de forma magistral, canal a conduzir um fluxo contínuo, por mais de dois mil anos, de uma matemática que é um autêntico compêndio, imponente, revitalizando-se século a século, como um elo, uma ponte entre o que de melhor se produziu na matemática do mundo grego antigo, e o mundo contemporâneo[4]. É a esse homem, envolvido pelo manto do mistério e das percepções abrangentes, que devemos a síntese e as essências do fazer matemático, em um período relativamente curto, cerca de 250 anos, evidenciando o quanto os gregos contribuíram para sedimentar a linguagem dos axiomas e dos postulados, das definições e das proposições[5]. Seu pensamento é o seu tempo, luz clareando as estradas onde precisamos estar para nos firmarmos em nós mesmos, nos reconstruirmos para melhor, nos fincarmos nos píncaros mais sublimes da sabedoria. Sua perspicácia, em reunir textos valiosos e fundi-los a um modelo axiomático, trouxe para os matemáticos uma fundamentação que impressiona pela polidez e influência das ideias nas mentes mais agudas e transformadoras. Sua alma está em *Os Elementos*, é a vasta agregação entre a soma de conhecimentos e os desmembramentos da delicadeza da Matemática nos espíritos atentos aos porvires luminosos, carregados de inteligência e densidade.

É preciso, então, esquadrinhar o quão fundo são seus ecos e ritmos, sumos e inovações. Nele repousam os delineamentos de um pensamento que soube concatenar engenhos diversos, concepções edificantes, opiniões que, vencendo as barreiras e deformações do tempo, trouxeram até nós a grandeza de uma época, a substância dos desenvolvimentos singulares. Se hoje bebemos em suas fontes e nos fortalecemos, se nos defrontamos com problemas e soluções matemáticas que nos reavivam a delicadeza dos caminhos percorridos, o engenho de mentes que alargaram muitos horizontes, a plenitude das verdades intensas, devemos a Euclides a comunhão e o envolvimento com o universo de tais sinergias e simbioses, sentenças e expansões. É importante realçar que, muito provavelmente, por volta de 300 a.C, Euclides esteve envolvido com a Biblioteca de Alexandria e, aí, sob o reinado de Ptolomeu Sóter I, usou *Os Elementos* para ensinar e divulgar a

matemática catalogada até seu tempo. Quão magnífico não foi, para os seus alunos e discípulos, poderem estar diante de um tal manancial matemático, ouvir do mestre as sutilezas mais contundentes. No entanto, por incrível que possa parecer, as informações mais sutis sobre Euclides vêm, com o passar de sete séculos, através de Pappus, na sua *Coleção Matemática*, e, depois, com Proclus, no seu *Comentário ao Livro I dos Elementos*, dois filósofos comentadores da obra euclidiana e, sem sombra de dúvidas, duas fontes valiosas a citarem o notável matemático através de textos que, não sendo engolidos pelas fatalidades do tempo, trouxeram algo de luz ao quebra-cabeças da vida de Euclides[6].

É por Proclus, preservando a memória da obra *História da Geometria*, de Eudemo, importante discípulo de Aristóteles, ao citar um trecho do referido trabalho, denominado o *Catálogo dos Geômetras* ou, como se tornou mais conhecido, o *Sumário de Eudemo*, que se tem informações relevantes a respeito, por exemplo, da escrita de outros *Elementos*, por Hipócrates de Quios, Léon e Theudius de Magnésia. É também Proclus, complementando o texto do *Sumário*, com suas próprias concepções, quem afirma que Euclides sedimentou muitas das ideias de Eudoxo e, da mesma forma, burilou muitos dos pensamentos de Teeteto, além de aperfeiçoar, com demonstrações precisas, o que seus antecessores fizeram de maneira incompleta, sem a devida precisão e elegância matemática. Tantas vezes confundido com o filósofo socrático Euclides de Mégara, personagem do texto *Fédon*, de Platão, que narra a morte de Sócrates pela cicuta[7]. A confusão se faz presente, de forma latente, nas primeiras aparições impressas de *Os Elementos*, já na Idade Média, nas traduções em línguas vernáculas. Assim, a primeira tradução italiana, de 1543, publicada por Tartaglia, traz o título *Euclid Megarense Philosopho (O Filósofo Euclides Megarense)*, em um engano crasso. Na primeira tradução inglesa, de 1570, editada por Henry Billingsley, intitulada *The elements of geometric of the most auncient philosopher Euclide of Megara (Os Elementos de Geometria do Mais Antigo Filósofo Euclides de Mégara)* também se constata o erro. De qualquer forma, desfeitos os mal-entendidos, somando esforços e competências no sentido de compreender melhor o homem Euclides, muitos pesquisadores têm se debruçado não só em *Os Elementos*, como também em outros compêndios euclidianos, tais quais se podem citar *Ótica e Catóptrica, Elementos de Música, O Livro das Divisões, Os Data, Os Porismata, Lugares em uma Superfície e As Cônicas*.

Todavia, as vias para se chegar a compreender algo de sua personalidade ou da forma como ensinava, transmitia seus conhecimentos, parecem ter sido perdidas na poeira dos dias, no passado que a tudo desmonta, absorve, desmancha, altera. Seus passos, atos, olhares, diálogos, ficaram entregues às sombras profundas do esquecimento. Euclides, como quase todos os antigos, é hoje um personagem enigmático, autor de uma obra fabulosa, decodificador do fazer matemático no mundo grego antigo. A ele está ligada, de maneira intrigante, a qualidade de um texto, que nos desloca no tempo e nos envolve com uma sabedoria de mais de dois milênios, uma perspicácia de saber coletar e explorar aquilo que era realmente importante para a matemática de sua época. Então, é preciso respeitá-lo, sondá-lo com paciência e inteligência. Benno Artmann, no livro *Euclid – The Creation of Mathematics (Euclides – A Criação da Matemática)*, que contém capítulos tratando, especificamente, de *The Origin of Mathematics (A Origem da Matemática)*, passando pelos temas *Incommensurability and Irrationality (Incomensurabilidade e Irracionalidade)* e *The Taming of the Infinity (A Domestificação do Infinito)*, traz uma citação, do brilhante matemático alemão, David Hilbert, onde se pode constatar sua admiração por Euclides, os enlaces e percepções de alguém que, felizmente, nos legou uma obra intensamente transformadora:

> *A sequência dos nossos teoremas diferirá enormemente da que geralmente se encontra em livros sobre geometria elementar. Será, no entanto, frequentemente, a mesma que em* Os Elementos *de Euclides. Assim, será conduzida por nossas investigações mais modernas, para apreciar a perspicácia deste matemático antigo e a admirá-lo no mais elevado grau.*(p. vii, prefácio)

3.3 OS ELEMENTOS: A FORÇA DA OBRA

Se há uma obra que represente o pensamento matemático do mundo grego antigo, em toda sua vastidão e conceitos, sentenças e pluralidades, trazendo a lume o amplo leque de um modelo axiomático, configurando um fazer matemático altamente sofisticado e inovador, tal obra é *Os Elementos*. Composta de treze livros, alicerçados em 5 axiomas e 5 postulados, sedimentados em 132 definições e com um total de 465 proposições, retrata o labor matemático de uma época onde a Grécia, prodigiosa em filósofos, poetas, artistas, astrônomos, matemáticos, conseguiu se impor, oferecer ao mundo uma nova mentalidade de encarar os fenômenos do universo, explorar as mais intrincadas concepções da alma,

aprofundar as essências, multiplicar os elos e as perspectivas. O conhecimento passou a ser sistematizado, vinculado a averiguações sucintas, à avaliação dos pormenores. Tendo como eixo central a geometria, as confluências de *Os Elementos* vão mais além. Passam por vários campos temáticos, fluem usando diversos métodos, concatenam expressões, lemas, conceitos[8]. Deste modo, os livros ganham contornos, ritmos, possibilidades. Do primeiro (I) ao quarto (IV) livro se trata da Teoria da Geometria Plana. No quinto (V) e sexto (VI) livros se tem a Teoria Generalizada das proporções. A Teoria Aritmética está expressa do sétimo (VII) ao nono (IX) livros. A Teoria da Incomensurabilidade, que será tratada nesta Tese é matéria do livro dez (X). Este livro tem gerado pesquisas que vêm procurando decifrar seu texto múltiplo, intrigante. A mais funda verdade de seus veios é o que procuraremos revelar, anunciar, propagar. As essências multiplicarão os enfoques e minúcias, o estudo dos âmagos trará o prenúncio de que estamos diante de um material valioso, rico de minúcias e confluências. Por fim, nos livros de onze (XI) a treze (XIII), se concentra a Teoria da Geometria Espacial.

As múltiplas edições de *Os Elementos*, com traduções em inúmeros idiomas, testemunham a imensa importância da obra, a síntese do conhecimento de uma época, a evolução de um conjunto de informações através das eras, uma constatação de que o pensamento matemático do mundo grego antigo continua interagindo com a nossa contemporaneidade. A partir do século XIX, com o importante trabalho de Heiberg, o texto grego de *Os Elementos* foi, digamos, ressuscitado. De fato, o texto original de Euclides, envolvido pelo manto do passado que a tudo rói e recria, intriga e instiga, se perdeu, mas muitos copistas foram alinhavando e sedimentando, em vários manuscritos, a configuração dos entrelaçamentos da obra a se perpetuar de século a século, másculo trabalho a envolver gerações, a perpetuar no tempo a base do que, hoje, vem às nossas mãos e almas[9]. Os manuscritos teoninos, que tinham por alicerce a versão de *Os Elementos* feita por Téon de Alexandria, no final do século IV d.C., tiveram um peso relevante, pois a partir dos mesmos veio à tona a primeira edição, em grego, impressa. O fato aconteceu no século XVI, mais precisamente em 1530, com Simon Gryneaus, na Basileia, importante cidade da Suíça. Mais adiante, com a descoberta de Peyrard, grande estudioso francês, de um novo manuscrito de *Os Elementos*, não teonino, da Biblioteca do Vaticano, no início do século XIX, foi possível a correção de inúmeros pontos.

Coube, decisivamente, a Johan Ludvig Heiberg, no final do século XIX, entre os anos de 1883 a 1886, selecionar e comparar muitos manuscritos. Assim, o sábio dinamarquês, caminhando em direção à atual edição crítica de *Os Elementos*, abandona a edição de Simon Gryneaus e, tendo o texto não teonino do manuscrito descoberto por Peyrard como manuscrito de comparação, edita o texto de *Os Elementos*. Na metade do século passado, Stamatis revisa o conteúdo exposto por Heiberg e sedimenta, de forma definitiva, a edição crítica da mais importante obra de Euclides[10]. Partindo-se desta edição, particularmente duas traduções terão uma importância vital para os falantes das línguas arraigadas à Península Ibérica. A primeira é a edição em Espanhol, com tradução e notas de Maria Luísa Puertas Castaños, efetuada ao longo de cinco anos, de 1991 a 1996. Há, ainda, na referida edição, um texto introdutório de Luis Vega Reñón que consolida, de forma substancial, o trabalho efetuado no idioma de Miguel de Cervantes. Já a segunda, é a edição em português, datada de 2009, com tradução de Irineu Bicudo, contando com uma introdução minuciosa e investigativa do próprio autor. Assim, também no idioma de Camões e Fernando Pessoa, surge uma versão, um veio a se percorrer, com segurança e perspicácia, nas sutilezas da obra euclidiana. É a partir desta versão, a primeira em português a utilizar como fonte o texto grego de *Os Elementos*, que esta Tese abarcará, principalmente nos capítulos 5 a 8, toda a análise do Livro X de *Os Elementos*.

Em argumentação bastante sensível, Knorr (1975), revela que seria desejável que outros campos do saber matemático grego antigo, particularmente a aritmética, tivessem encontrado compiladores com o talento e a perspicácia de Euclides, que mostrou no caso específico da geometria, toda a sua capacidade e inteligência em *Os Elementos*. De certa forma, a principal obra euclidiana, ultrapassou limites e confluências, interagiu com as percepções, criou uma espécie de terreno próprio onde os ecos de suas verdades foram moldando seus desmembramentos no tempo. As definições e proposições foram sendo difundidas e investigadas, consolidadas como alicerces de um saber matemático que não para de gerar ciclos, tendências, expansões. E enquanto a matemática avança, recriamo-nos, sedimentamo-nos nas profundidades, aprendemos que é preciso ir sempre mais longe. Em interessante colocação, no livro *A History of Mathematics (Uma História da Matemática)*, de 1894, Florian Cajori pontua a importância de *Os Elementos*, de Euclides, como obra a nortear um processo de amadurecimento matemático através das eras, a fincar na

história da geometria os altos tons das sentenças que, ao se estabelecerem em nós, nos fundamentam nas convicções alvissareiras:

> *A fama de Euclides tem, em todos os tempos, repousado, principalmente, em seu livro sobre geometria chamado* Os Elementos. *Este livro era muito superior aos* Elementos *escritos por Hipócrates, Leon e Theudius*, *cujos trabalhos logo pereceram na luta pela existência*. *Os gregos davam a Euclides o título especial de 'o autor de Os Elementos'. É um fato notável, na história da geometria, que* Os Elementos *de Euclides, escritos há dois mil anos atrás, ainda são considerados por muitos como a melhor introdução para a ciência matemática.* (p. 36)

3.4 O LIVRO X

De todos os livros que compõem *Os Elementos*, de Euclides, um ganha destaque e reafirma, constantemente, a grandeza do pensamento grego do mundo antigo, expande as percepções da comensurabilidade e, principalmente, da incomensurabilidade e a realimenta de investigações minuciosas, densas. O livro, múltiplo e inovador, é o décimo. O texto, desde muito tempo é tido como "a cruz dos matemáticos". Outros asseguram que o mesmo seria um "beco sem saída" e o tornam, cada vez mais, misterioso, insondável, indecifrável. Há, ainda, aqueles que sustentam seu caráter intimidador, sendo menos acessível aos leitores[11]. Seja como for, o Livro X ocupa a maior parte de *Os* Elementos, com suas 115 proposições, abarcando em torno de um quarto da obra euclidiana. Os pesquisadores que melhor traduziram os veios e as contundências do Livro X foram Wilbur Knorr, com o seu trabalho *'La Croix des Mathématiciens': The Euclidean Theory of Irrational Lines (A Cruz dos Matemáticos: A Teoria Euclideana dos Irracionais)* e no importante volume *The Evolution of the Euclidean Elements: A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and as Significance for Early Greek Mathematics (A Evolução dos Elementos Euclidianos: Um Estudo da Teoria das Magnitudes Incomensuráveis Como Significado para a Matemática Grega Antiga)*; David Fowler, no artigo *An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements (Um* Convite *para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*. Destaca-se, também, a obra de Christian Taisbak, intitulada *Coloured Quadrangles – A Guide to the Tenth Book of Euclid's Elements (Quadriláteros Coloridos – Um Guia para o Décimo Livro de Os Elementos de Euclides)*. Merece citação o excelente trabalho de Ian Mueller, denominado *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements (Filosofia*

da Matemática e Estrutura Dedutiva em Os Elementos de Euclides). Thomas Little Heath, outro estudioso perspicaz, com a obra *The Thirteen Books of Euclid's Elements (Os Treze Livros de Os Elementos de Euclides)* evidencia singularidades no entendimento dos meandros do Livro X.

Em suma, há autores e conteúdos, elos e evidências que garantem a importância do Livro X, sua repercussão diante do universo matemático produtor de delicadezas e convicções, sentidos e pormenores. Um estudo do referido livro será tema central de nossa Tese, motivar-nos-á a mergulharmos com profunda precisão no tear de suas estruturas e averiguações. A tarefa, imensa, abarcará investigações sucintas, uma análise de todas as proposições em quatro capítulos, que interagindo com o pensamento exposto por Euclides, delineará a meta ambiciosa de averiguar cada pormenor, caminho, perspectiva, concepção, conceitos do livro, invariavelmente, transformador. O que se pretende, então, em linhas gerais, é revelar, colocar luz sobre os intrincados enlaces do Livro X. Os comentários, enfatizando todas as 115 proposições do livro inquietante, serão o grande trunfo da Tese, isto porque, em nenhum trabalho catalogado, até hoje, em língua portuguesa, tal missão foi inteiramente cumprida. Existem explicações, percepções arraigadas em agudas exposições, sumos que norteiam os elos de muitos pensamentos. No entanto, o trabalho árduo, de verificar proposição a proposição, de encarar sutileza a sutileza, de mergulhar na espantosa configuração de um livro a envolver o tema da incomensurabilidade com tanta magia e largueza, ainda precisa ser delineado, devidamente encaixado com toda a obra de *Os Elementos*. O Livro X tem estruturas complexas e fascinantes, que precisam ser reveladas com sustança e segurança, levadas em conta por aqueles que almejam compreender a formidável junção do pensamento ao texto no universo grego da época de Euclides[12]. É necessário fluir no âmago da questão, refazer pegadas e rotas, reinterpretar conceitos, reorientar muitos náufragos, reencaminhar o tempo para dentro das circunstâncias, buscar, acima de tudo, a verdade, o sumo, a delicadeza, o reencontro, o fascínio.

De certa forma, o Livro X tem sido muito pouco estudado e, principalmente, compreendido pelos matemáticos. Eis aí uma verdade absoluta, constatação redefinindo o quanto o livro carece de aprofundamento e esmiuçamento. Em Castaños (1991), Luis Veja Reñón, em prefácio, enfatiza, acertadamente, que se o Livro X, para os matemáticos da Renascença, foi uma cruz, como tão comumente se tem argumentado, por outro lado, para os Historiadores da Matemática de hoje, o

referido livro ainda continua soando como uma espécie de cruz, de turbulência misteriosa. E indo mais adiante, expõe que o Livro X não merecia tal denominação devido aos problemas de interpretação que tem suscitado, senão por sua condição de encruzilhada dentro de *Os Elementos*. Como bem argumentam, em seus textos e trabalhos, Taisbak (1982), Hartshorne (2000), Knorr (1983), van der Waerden (1975), o Livro X tem um certa carga, ainda, de passagens obscuras. É o mais difícil de ler, digerir, interpretar. Daí que seus prumos e rumos precisam ser estudados com cautela, sua força está na linguagem e no acúmulo de conhecimentos da matemática grega, gerando uma monumental configuração de informações que necessitam ser assimiladas e encaixadas com a precisão da própria matemática[13]. E na construção de algo tão elevado, necessitando sempre de novas investigações e delineamentos, Euclides se notabilizou ainda mais, uniu um texto denso a uma concepção que repercute em todos os sentidos, explora gradações e fluxos de um pensamento, que até nossos dias, pulsa, repercute, modela sensibilidades e raciocínios. Em interessante colocação, Knorr (1983) retrata que, para se aproximar deste material valioso, necessário se faz uma chave, um elo, tal qual, explicita, julgou possuir Simon Stevin, o matemático-engenheiro belga, que assim se expressou a respeito do Livro X:

> *Depois que tínhamos examinado e revisto o Décimo Livro de Euclides tratando das magnitudes incomensuráveis, e também depois que tínhamos lido e relido vários comentários sobre o mesmo, dos quais alguns julgando ser a matéria mais profunda e incompreensível da matemática, outros que estes são as mais obscuras proposições e a cruz dos matemáticos, e, além disso, eu persuadi a mim mesmo (que loucura não faz causar uma opinião aos homens a confiar?) para entender esta matéria através das suas causas, e que não haja nele nenhuma das dificuldades tal como comumente se supõe, eu o tomei sobre mim mesmo para descrever este tratado.* (p. 41)

3.5 A INCOMENSURABILIDADE

Como testemunha Fowler (1992), com precisão surpreendente, aquele, possivelmente, único ponto matematicamente significativo, em que estão de acordo todos os historiadores da matemática grega, é que, até o tempo de Eudoxo, no meio do quarto século antes de Cristo, alguma espécie de investigação de magnitudes incomensuráveis desempenhou um papel importante no desenvolvimento da matemática. No entanto, logo que se sedimenta no ser os pormenores de quais

investigações poderiam ter uma realização consistente, encontra-se uma enorme, ampla, variação de interpretações, que se diferenciam, causadas pela escassez e incerteza das nossas evidências. Cada detalhe adquire admiráveis enfoques e desfechos, compassos e constatações, determina um certo grau de averiguação das informações que precisam, constantemente, passar pelo crivo da sensibilidade, da interpretação inteligente, do mergulho no conteúdo A incomensurabilidade é, pois, assunto vasto, revelador. Penetrar em suas searas não é tarefa das mais fáceis[14].

Assim, o Livro X, de *Os Elementos,* de Euclides, ao se dedicar ao estudo dos segmentos retilíneos que são incomensuráveis com respeito a um segmento retilíneo dado, ou seja, ao estudo dos números irracionais, em linguagem atual, traz aprofundamentos de um assunto que merece ser pesquisado. Como já mencionado anteriormente, seu texto possibilitou uma grande motivação para que os matemáticos, inclusive de nossos dias, procurem desvendar suas sombras, enleios, vínculos, multiplicações de fascínios e contundências. A palavra *incomensurável* provém da palavra latina moderna *incommensurabilis* e, segundo Anthony Lo Bello, no seu importantíssimo *Origens das Palavras Matemáticas*, é bem construída e significa algo que não é capaz de ser medido em conjunto com outra coisa. O prefixo *in* indica “não”, o prefixo *com* indica “junto com”, o substantivo *mensura* é, literalmente, “medida”, e o sufixo *abilis* indica “capacidade”. Por outro lado, a palavra “irracional” se constitui no adjetivo latino *inrationalis*, ou seja, “sem razão”, com o final “is” suprimido e o “n” assimilado pelo “r”. É, então, a tradução latina do termo grego ἄλογος, “sem razão”, “não tendo uma razão”, através do substantivo grego λογος, que significa palavra, razão (causa), razão (proporção).

Parece ser consenso entre os estudiosos que o tema da incomensurabilidade surja, pela primeira vez, na Escola Pitagórica, e, desencadeando o périplo da suposta crise de sua descoberta, trouxe a Hipaso de Metaponto, segundo reza a lenda, a morte por afogamento no mar. Na História da Matemática atual é bastante singular o fato de que, como bem esclarece Roque (2012), “se não houve uma crise, também não diminuímos o peso da descoberta”. Há uma forte tendência entre os pesquisadores modernos no sentido de esmiuçarem, com precisão e delineamentos cada vez mais alicerçados em fontes confiáveis, o desmembramento dos fatos, a elucidação de intrincadas conotações que precisam ser retratadas o mais próximo possível da chamada verdade histórica, elo ligando a noite dos fatos passados aos ecos de suas próprias interpretações, impactos, sutilezas, reconstruções[15]. De certa

forma, como a Tese investiga com minúcia o Livro X, de *Os Elementos*, de Euclides, a questão da incomensurabilidade será, a todo momento, vista e revista, alicerçada nas percepções e convicções de ideias que, fundamentalmente, incorporam teores sempre reluzentes. Daí que, de forma sutil, será alicerçada a concepção, por exemplo, de Knorr (1983), onde se aponta que a ideia da incomensurabilidade permeia toda a obra de *Os Elementos*, de Euclides, com exceção dos Livros I, IV e V. Outras convicções e essências serão esmiuçadas e entrelaçadas com o propósito de se contribuir para um maior entendimento do Livro X, extremamente bem elaborado, propagador de ideias e visões sublimes. Como ousa garantir Katz (2009), uma das motivações de Euclides, para a escrita do Livro X, foi o desejo de caracterizar o tamanho dos comprimentos do poliedro regular, onde sua construção no Livro XIII, expõe o ponto alto de *Os Elementos*.

Assim, Euclides precisava de um caminho não numérico para comparar as arestas dos icosaedros e dodecaedros em relação ao diâmetro das esferas nas quais eles estavam inscritos. Indo mais além, tem-se que tal questão foi o fio condutor para que ele elaborasse o esquema de exposição e classificação traduzidos no Livro X. Outro fator importante a realçar é que, nas primeiras definições do Livro X, de *Os Elementos,* Euclides traça uma configuração pormenorizada do que é a comensurabilidade e a incomensurabilidade. São quatro definições, que consolidam o papel importante da divisibilidade no universo da matemática grega antiga. A partir deste ponto, a questão da *antifairese* será crucial, norteará o entendimento daquilo que, em nossos dias, temos como os números irracionais. Em suma, aplicando tal processo, ligado a um interminável ciclo de divisões, ou seja, as mesmas não têm fim, tem-se a caracterização da incomensurabilidade, compreende-se perfeitamente que determinados números não podem ser explicitados através de uma fração constituída de um inteiro para um inteiro[16]. A incomensurabilidade, então, ganha contornos e profundidade, evidencia o quanto o Livro X necessita ser pesquisado. Através de Hodgkin (2005), percebe-se que a questão da incomensurabilidade, através de seus enfoques em obras como o *Mênon*, de Platão, e a citação de tal assunto por Samuel Beckett, notável escritor irlandês, autor entre outras obras de *Murphy*, o quanto o tema gera controvérsias, mostrando que a sondagem dos números irracionais contribuiu, no século XX, para a popularização da História da Matemática, consolidou a força encantadora da

matemática, a luminosidade dos caminhos que conseguem nos unir aos voos mais intensos e transformadores:

> *Por 'a incomensurabilidade do lado e diagonal', Beckett denota o fato, mencionado em nossa discussão do* Mênon, *que a razão da diagonal do quadrado para seu lado,* $\sqrt{2}$, *não é uma fração.*
>
> *Contudo, suas clássicas publicações muito provavelmente vinham através de histórias contidas nelas e não de uma fonte original grega, apenas em uma popularização da história da matemática no século XX, o 'segredo' ou 'escândalo' dos irracionais. Esta história, de alguma forma muito respeitável, ainda é amplamente acreditada. O fato básico é que Pitágoras, fundou uma seita de iniciados, cujo conhecimento secreto, era, pelo menos em parte, matemático.* (p. 46)

3.6 NOTAS E REFERÊNCIAS

1 – Em resenha para o *Bulletin of the American Mathematical Society*, em setembro de 1974, sobre o livro de Morris Kline, intitulado *Mathematical thought from ancient to modem times (O pensamento matemático dos tempos antigos aos tempos modernos),* Gian-Carlo Rota expõe um texto amadurecido a respeito das relações da História da Matemática com o universo de seus pesquisadores e leitores:

> *The history of mathematics is an enticing but neglected field. One reason for this situation lies in the nature of intellectual history. (…) The readership of a serious history of x will thus be largely limited to the few specialists in x, a small circulation at best. Worse yet, mathematics, or science for that matter, does not admit a history in the same sense as philosophy or literature do. Ou seja, A história da matemática é um atraente, mas negligenciado campo. Uma razão para esta situação repousa na natureza da história intelectual. (...) Os leitores de uma história séria de x, então, estarão largamente limitados a poucos especialistas em x, uma pequena circulação na melhor das hipóteses. Pior ainda, a matemática ou ciência para este assunto, não admite uma história no mesmo sentido que a filosofia ou a literatura fazem.*

2 – Em *A History of Mathematics – An Introduction*, Victor Katz, em um tópico denominado *A Mais Antiga Matemática Grega*, pp. 31-32, pontua a sempre constante evidência da escassez de material original, para que o pesquisador possa se debruçar e vasculhar os horizontes, que o nortearão no caminho a seguir, geralmente entre lumes esvanecidos e tensões constantes:

> *Ao contrário da situação com a matemática do Egito e da Babilônia, não existem, praticamente, textos sobreviventes da matemática grega que foram, na realidade, escritos no primeiro milênio antes de Cristo. O que nós temos hoje são cópias de cópias de cópias (...) Então, para contar a história da matemática grega antiga, nós somos*

> *forçados a depender de trabalhos que foram originalmente escritos muito mais tarde do que as ocorrências reais.*

3 – Oliver Byrne, em seu clássico livro de 1847, *The First Six Books of The Elements of Euclid (Os Primeiros Seis Livros de Os Elementos de Euclides)*, no texto da Introdução, apontando para a luminosidade da obra euclidiana, esclarece os vieses da matemática norteando, as essências e encantamentos, da própria vida::

> *De fato, Os Elementos de Euclides tornaram-se, de comum acordo, a base da ciência matemática em todo o mundo civilizado. Mas isto não parecerá extraordinário, se nós consideramos que esta sublime ciência não é somente melhor arranjada do que qualquer outra, para evocar o espírito de investigação, para elevar a mente e fortalecer as faculdades de raciocínio, mas também forma a melhor introdução para a maior parte das úteis e importantes vocações da natureza humana.*

4 – Gino Loria, no seu trabalho *Le Scienze Esatte Nell'Antica Grecia (A Ciência Exata na Antiga Grécia)*, apontado por Heath como o principal livro de História da Matemática até 1921, expõe a respeito de Euclides:

> *Entre os geômetras do período greco-alexandrino, talvez, primeiro, pela ordem de tempo e, certamente, pela popularidade, se não pela sua originalidade e grandeza das investigações (pelo menos se julga de acordo com a produção sobrevivente), é Euclides.*

5 – No livro *The Creation of Mathematics (A Criação da Matemática)*, de Benno Artmann, no Capítulo 1, p. 2, tem-se uma ideia do período de concatenação da matemática grega antiga até Euclides. É evidente que o período de 250 anos tem suas variações, para mais ou para menos. Importante, também, é quando o autor coloca a matemática no mesmo patamar das grandes obras gregas difundidas no tempo e modeladoras das formas de pensar do mundo contemporâneo:

> *A matemática foi inventada no período clássico do grego, começando com Tales e Pitágoras, por volta de 530 a.C. e encontrando sua forma final com Euclides, cerca de 300 a.C. Ela fica em pé de igualdade com as grandes obras gregas da literatura, escultura, pintura, arquitetura, escritos históricos e políticos, medicina e filosofia.*

6 – Em relação a Próclus, enfatizando sua profunda ligação com o universo grego, é bastante significativo o texto de Radek Chlup, sob o título *Proclus, An Introduction (Próclus, Uma Introdução)*, p. 34, onde enfatizando a força ainda atuante da Academia de Platão, informa que a mesma, no final do século IV, sob o comando de Plutarco de Atenas e seu pupilo Siriano, foi renovada e ganhou ares que novamente a nortearam no tempo:

> *Próclus chegou a Atenas em 430, apenas sete anos antes da morte de Siriano. Quando ele chegou à cidade, a partir do porto do mar, à*

> *noite, e subiu à Acrópole, desejando fazer uma visita ao recinto sagrado de Atena, a deusa da filosofia, encontrou o porteiro prestes a fechar o portão. 'Honestamente, se você não tivesse vindo, eu estava prestes a fechar', exclamou o antigo camarada. 'Qual presságio, agora, poderia ter sido mais claro do que isso', acrescentou Próclus.*

7 – Na importante obra *A History of Greek Mathematics – Volume I, From Thales to Euclid (Uma História da Matemática Grega – Volume I, de Tales a Euclides)*, Thomas Heath, no Capítulo 9, intitulado *Date and Traditions (Época e Tradições)*, pp. 355-356, expõe a questão da confusão entre os Euclides:

> *Na Idade Média muitos tradutores e editores falaram de Euclides como Euclides de Mégara. Confundindo nosso Euclides com Euclides o filósofo, e o contemporâneo de Platão, que viveu cerca de 400 a.C. O primeiro vestígio aparece em Valerius Maximus (no tempo de Tiberius) que disse que Platão, tendo recorrido a uma solução da duplicação do cubo, enviou os inquiridores a 'Euclides o geômetra'. O erro foi visto por um Constantinus Lascaris (cerca de 1493), e o primeiro tradutor a assinalar o fato claramente foi Commandinus (em sua tradução de Euclides publicada em 1572).*

8 – No livro de Dirk J. Struik, *A Concise History of Mathematics (Uma História Concisa da Matemática),* com primeira edição de 1954, no Capítulo referente aos gregos, pp. 58-59, há uma síntese da importância de *Os Elementos*, principalmente para a cultura ocidental:

> *Os Elementos formam, juntamente com a Bíblia, provavelmente o livro mais reproduzido e estudado na história do mundo ocidental. Mais do que as milhares de edições terem aparecido desde a invenção da escrita e antes do tempo das cópias manuscritas dominarem muito do ensino da geometria. A maior parte de nossa geometria escolar é tida, muitas vezes literalmente, de seis dos treze livros; e a tradição euclidiana ainda pesa muito sobre nossa instrução elementar.*

9 – Somando-se ao texto grego editado por Heiberg no final do século XIX, um outro ponto bastante interessante para a História da Matemática, neste mesmo período, vincula-se ao pensamento matemático da época, que foi a questão do rigor matemático na apresentação do texto de *Os Elementos*, de Euclides. Na obra *História da Matemática*, Tatiana Roque, p. 122, enfatiza tal pormenor:

> *A visão de que os matemáticos gregos se aferravam aos fundamentos e a padrões rígidos tem origem na história da matemática desenvolvida na virada dos séculos XIX e XX, período marcado por pesquisas sobre o rigor da matemática dessa época. O objetivo dos trabalhos de Hilbert, por exemplo, era justamente fundamentar a geometria euclidiana. Mas será que os matemáticos da Antiguidade eram tão preocupados assim com questões de fundamento quanto os do final do século XIX?*

10 – Em prefácio para a edição em espanhol de *Os Elementos*, Luis Vega Reñón expõe, todo o périplo para o resgate do teor grego do livro euclidiano. Às pp. 126-127, desenvolvendo seu raciocínio e pontuando a importância da edição crítica de Heiberg, evidencia:

> *A recuperação do Euclides 'primitivo' é, desde logo, uma ilusão excessiva. O texto de Os Elementos que hoje cabe considerar como o mais aproximado do original é o estabelecido pela edição crítica de Heiberg (na ed. cit. J. L. Heiberg e H. Menge, Euclidis opera omnia, I – IV, Leipzig, 1883-1886). A edição de Heiberg repousa no cotejo de 7 manuscritos principais e no uso adicional de um palimpsesto do British Museum (Add. 17211) que contém vários fragmentos do livro X e algum do livro XIII.* Também toma em conta as notícias existentes em comentários e referências de Páppus, Sexto Empírico, Próclus, Simplício, assim como abundantes escólios (recolhidos no vol. V, Leipzig, 1888)

11 – Falecido prematuramente em 1997, o historiador da matemática Wilbur Knorr, possuidor de uma percepção densa, no trabalho *La Croix des Mathématiciens: The Euclidian Theory of Irrational Lines (A Cruz dos Matemáticos: A Teoria Euclidiana dos Irracionais)*, de 1987, apresentado no *Bulletin of the American Mathematical Society,* p. 60, retrata, com precisão, a substância do livro X:

> *O estudante que se aproxima do Livro X de Euclides, na esperança de que o seu comprimento e obscuridade escondam tesouros matemáticos, está susceptível de ficar decepcionado. Como nós já vimos, as ideias matemáticas são poucas e capazes de muito mais exposições perspicazes do que lhes é dado aqui. O verdadeiro mérito de Livro X, e eu acredito que não é pequeno, reside no fato de ser um único exemplar de um, totalmente elaborado, sistema dedutivo do tipo que as antigas filosofias da matemática consistentemente valorizavam.*

12 – David Fowler, em sua obra *The Mathematics of Plato's Academy – A New Reconstruction (A Matemática da Academia de Platão – Uma Nova Reconstrução)*, enfatiza, à p. 165, as diferenças do livro X de *Os Elementos* em relação aos outros livros, mostrando o quanto o mesmo continua a repercutir no tempo:

> *A organização do Livro X difere da dos outros livros de Os Elementos de muitos modos. O Livro X é aberto com quatro definições que, como todas as definições em outras partes, de nossos melhores manuscritos de Os Elementos, estão sem numeração e, como muitos dos outros conjuntos de definições, não têm um título 'Definições'. (...) Mas o Livro X é o único a ter outras definições inseridas no corpo do texto: seis intituladas 'Segundas Definições', entre as proposições 47 e 48, e mais seis intituladas 'Terceiras Definições', entre as proposições 84 e 85; (...) O livro também contém cerca de trinta outros itens não numerados – corolários, lemas, porismas, e observações, nem todos eles coerentes ou corretos – intercalados no texto.*

13 – Ainda argumentando sobre as informações do Livro X, é de suma importância o texto de van der Waerden, na obra *Science Wakening (O Despertar da Ciência)*, p. 167, onde o referido autor, ao esmiuçar os elos do Livro X, mostra a importância do pensamento de Teeteto, explicitando que:

> *Há, além disso, uma notável semelhança entre a terminologia do diálogo Teeteto e aquilo do começo do Livro X; a mesma frase 'comensurável em comprimento' (μήκει σύμμετρος) ocorre em ambos e a expressão "potencialmente comensurável" (δυνάμει σύμμετρος) corresponde em Platão ao circunlóquio 'comensuráveis em relação às áreas nas quais produzem'.*

14 – Ainda evidenciando a importância do texto de David Fowler, de 1992, sob o título *An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, se pode extrair de substancial, também, quando o pesquisador inglês afirma:

> *Deixe-me acrescentar também que esta é a primeira vez que o tema da incomensurabilidade surge explicitamente nos Elementos; que, em grande escala, o Livro X ocupa mais do que um quarto dos Elementos; que a teoria do Livro X é aplicada no Livro XIII para a construção e classificação do poliedro regular e algumas outras linhas, um dos pontos altos de Os Elementos; que alguns aspectos do Livro X são atribuídos a Teeteto por Eudemo (como citado por Páppus em seu comentário)*

15 – Sobre a questão do mergulho do pesquisador em fontes seguras, pluralizando, desta forma, suas averiguações e pensamentos, é muito esclarecedor o texto de Heath, em seu *A History of Greek Mathematics (Uma História da Matemática Grega)*, pp. 402-403, onde o mesmo assegura que boa parte do Livro X e o trato com a questão das grandezas incomensuráveis vem de Teeteto, revelando, através de Páppus, na sua *Coleção Matemática*, que seus argumentos estão aí fundamentados. Trazendo, então, as argumentações de Páppus, expõe que:

> *Quanto a Euclides, ele pôs-se a dar regras rigorosas, as quais ele estabeleceu, em relação à comensurabilidade e incomensurabilidade em geral; ele tornou precisa as definições e as distinções entre magnitudes racionais e irracionais, estabeleceu um grande número de ordens de magnitudes irracionais, e finalmente, deixou claro toda a sua extensão.*

16 – Sobre a importante questão da *antifairese*, no livro *História da Matemática – Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas*, Tatiana Roque, p. 92, trata com bastante propriedade a respeito do tema, afirmando que:

> *A palavra antifairese vem do grego e significa, literalmente, 'subtração recíproca'. Na álgebra moderna, o procedimento é*

semelhante ao conhecido como 'algoritmo de Euclides' e sua função é encontrar o maior divisor comum entre dois números. O procedimento das 'subtrações mútuas', ou 'subtrações recíprocas', consiste em: dados dois números (ou duas grandezas), em cada passo subtrai-se, do maior, um múltiplo do menor, de modo que o resto seja menor do que o menor dos dois números considerados. O método da antifairese descreve uma série de comparações."

PARTE III

SEDIMENTAÇÃO: O SURGIMENTO DA INCOMENSURABILIDADE

CAPÍTULO 4

AS SONDAGENS E AS NÉVOAS

4.1 OS PITAGÓRICOS: A CRISE NA BERLINDA

Abrigando pluralidades as mais diversas, a incomensurabilidade continua a ser um tema que propicia ao pesquisador inúmeras averiguações e tendências. A atualidade dos chamados números irracionais impressiona. Wilbur Knorr, na importante obra *The Evolution of the Euclidean Elements – A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry (A Evolução dos Elementos Euclidianos – Um Estudo da Teoria dos Magnitudes Incomensuráveis e seu Significado para a Geometria Grega Antiga)*, no segundo capítulo, é categórico ao afirmar que “Três autores, setecentos anos após o fato, oferecem-nos alguma informação das origens da teoria da incomensurabilidade, mas é difícil julgar quanto, se há alguma, de validade histórica esta informação tem.”[1]. Assim, os ditos três autores seriam Páppus, Próclus e Iâmblico, que, através de seus textos, de uma certa forma, ponderam que o surgimento das grandezas incomensuráveis se deu entre os Pitagóricos. Desta forma, o importante historiador da Matemática ainda esclarece que “de acordo com Páppus, a teoria da incomensurabilidade originou-se na Escola Pitagórica. Nesta seita religiosa havia uma tradição que o membro que primeiro divulgasse o segredo da incomensurabilidade pereceria por afogamento.”. Já, sobre o testemunho de Próclus, é enfático ao afirmar que “em algum grau, o texto de Próclus é evidentemente uma fonte muito questionável sobre no que embasar algumas conclusões a respeito das origens da teoria da incomensurabilidade.”. Para Iâmblico, o terceiro autor, informa que o mesmo “dá uma série de relatos inconsistentes sobre os Pitagóricos e as origens desta teoria.” e, expandindo suas convicções, mostra

que “A tradição adulterada na qual Iâmblico se preserva seria, então, terreno tênue para algumas afirmações sobre a história antiga da teoria da incomensurabilidade.”[2].

Ainda seguindo na linha de que a incomensurabilidade teria sua origem entre os pitagóricos, tal concepção é evidenciada, de forma cristalina, por exemplo, em Nicolas Bourbaki, na obra *Elements of the History of* Mathematics *(Elementos da História da Matemática)*, onde, no capítulo intitulado “Números Reais”, tem-se a afirmação de que “foi a Escola Pitagórica, precisamente, que descobriu a incomensurabilidade do lado de um quadrado com sua diagonal (a irracionalidade de $\sqrt{2}$)”[3]. Seguindo nesta linha, van der Waerden, no seu *Science Awakening (O Despertar da Ciência),* explicita que “Páppus declara que a teoria dos irracionais começou na Escola de Pitágoras, e sua teoria dos pares e ímpares deu aos pitagóricos o significado para provar a irracionalidade de $\sqrt{2}$”[4]. Mantendo tal opinião, Jan Gullberg, no compêndio *Mathematics – From the Birth of Numbers (Matemática – Do nascimento dos Números)*, no tópico sobre números irracionais, expõe que “no século VI a. C. os pitagóricos – uma antiga escola filosófica grega e irmandade religiosa – encontrou o número $\sqrt{2}$ (em nossa notação) como comprimento da diagonal de um quadrado cujos lados são uma unidade de comprimento.”[5]. Concepções como esta, abalizadas por matemáticos importantes e historiadores da matemática, servem para alicerçar um entendimento que, cada vez mais, se torna costumeiro, o de que os pitagóricos descobriram a incomensurabilidade.

A partir daí, em um périplo de sondagens e interpretações, criaram-se duas vertentes para se sustentar, ou não, a suposta crise da descoberta deste tema fascinante. A primeira vertente, ainda muito propagada, principalmente nos livros didáticos de matemática e em múltiplos livros de história da matemática, é que a crise foi profunda e desencadeou um viés de turbulências entre os discípulos de Pitágoras. Isto porque, Hipaso de Metaponto levou o conhecimento da incomensurabilidade para além do meio pitagórico. Em consequência do fato, dizem alguns, foi lançado ao mar, morrendo em um afogamento, que muito traduz da questão do conflito e das tensões, que se geraram em torno da incomensurabilidade. Não deixa de ser interessante, quando Leonard Mlodinow, no livro *A Janela de Euclides – A História da Geometria: Das Linhas Paralelas ao Hiperespaço*, pontuando a questão dos segmentos incomensuráveis, revelar que

"Os pitagóricos chamaram tais comprimentos de *alogon*, 'não racionais', que hoje traduzimos como 'irracional'". Em certas obras, os efeitos turbulentos da crise aparecem. É o caso de Dirk J. Struik, na *História Concisa das Matemáticas*[6], em que se tem exposto que "Esta descoberta, que perturbou a harmonia da aritmética e da geometria, foi feita provavelmente nas últimas décadas do século V a. C." e, consolidando seu pensamento expõe que *"*Tannery sugere que se pode falar de um 'verdadeiro escândalo lógico' – uma 'crise' na matemática grega. Se é esse o caso, esta crise teve origem no período final da guerra do Peloponeso, terminando com a queda de Atenas (404 a.C.)". Também em Rubens Gouvêa Lintz, a crise reaviva-se, no terceiro capítulo de seu livro *História da Matemática*[7], quando, ao comentar sobre o assunto da Escola Pitagórica, argumenta que "para terminar nosso estudo sobre a escola de Pitágoras vamos examinar a questão dos incomensuráveis e suas trágicas consequências" e, mais adiante, arremata: "O principal perigo dos incomensuráveis é que ele iria destruir a generalidade da teoria das proporções, que só continuaria válida para grandezas comensuráveis e é claro que isso abalaria todo o edifício construído não só matemático como filosófico, pois o número não seria mais a essência de todas as coisas!".

É inacreditável, pelo menos para os que não enxergam uma crise na descoberta dos incomensuráveis, que nomes como Platão e Aristóteles não tenham mencionado os efeitos do suposto transtorno no meio matemático e filosófico grego. Ou, se tiverem comentado, tais obras foram perdidas, jogadas no rio do esquecimento. No entanto, o mais plausível a se pensar é que, pelo menos nesta época, o conhecimento dos incomensuráveis já estivesse sedimentado no universo do pensamento matemático grego, devidamente divulgado entre aqueles que mergulhavam em seus teores. Platão, dentre todas as suas obras que chegaram até nossos dias, só cita os pitagóricos uma vez, em *A República*[8], no livro X, expondo uma pergunta de Sócrates a Glauco:

> *Ora, se Homero não prestou serviços públicos, diz-se, ao menos, que tenha, durante a vida, estado à frente da educação de alguns particulares, que o tenham amado ao ponto de se prenderem à sua pessoa e tenham transmitido à posteridade um plano de vida homérica, como foi o caso de Pitágoras, que inspirou uma profunda dedicação deste gênero e cujos seguidores ainda hoje chamam pitagórico ao modo de existência pelo qual parecem distinguir-se dos outros homens?* (p. 326)

De qualquer maneira, mesmo com a importante citação de Platão, não é pequena a quantidade de historiadores da matemática que põem em xeque até mesmo a existência de Pitágoras. Talvez movidos pela escassez de provas conclusivas de que o mesmo foi um matemático. Desta forma, como argumenta Tatiana Roque, no compêndio *História da Matemática*, “A escassez das fontes, somada à convergência interessada dos únicos textos disponíveis, nos permite duvidar até mesmo da existência de um matemático de nome Pitágoras.”. Por outro lado, não deixa de ser intrigante que Aristóteles, ao comentar a respeito dos pitagóricos, evidenciando seus elos com a teoria de que tudo é número, não faça nenhuma revelação da crise gerada pelos incomensuráveis. O texto contido na *Metafísica*[9] é bastante esclarecedor sobre o pensamento dos pitagóricos, além de trazer o nome do próprio Pitágoras, explicitado de forma a mostrar sua importância no pensamento do, hoje desconhecido, Alcméon de Crotona:

> *Eles por primeiro se aplicarem às matemáticas, fazendo-as progredir e, nutridas por elas, acreditaram que os princípios delas eram os princípios de todos os seres. (...) Eles recolhiam e sistematizavam todas as concordâncias que conseguiam mostrar entre os números e os acordes musicais, os fenômenos, as partes do céu e todo o ordenamento do universo. (..) Também estes parecem considerar que o número é princípio não só enquanto constitutivo material dos seres, mas também como constitutivo das propriedades e dos estados dos mesmos. Em seguida eles afirmam como elementos constitutivos do número o par e o ímpar; dos quais o primeiro é ilimitado e o segundo limitado. (...) Parece que também Alcméon de Crotona pensava desse modo, quer ele tenha tomado essa doutrina dos pitagóricos, quer estes a tenham tomado dele; pois Alcméon se destacou quando Pitágoras já era velho e professou uma doutrina muito semelhante à dos pitagóricos. Com efeito, ele dizia que as múltiplas coisas humanas, em sua maioria, formam pares de contrários (...) Ele fez afirmações desordenadas a respeito dos pares de contrários, enquanto os pitagóricos afirmaram claramente quantos e quais são.* (pp. 27-29)

Fluindo ainda na questão de que a crise, no surgimento dos incomensuráveis, não existiu, é de suma importância enfatizar que, uma parte considerável dos historiadores da matemática da atualidade, coaduna-se com tal afirmação. Isto deve-se ao fato de que, o pensamento contemporâneo de tais historiadores, sofre a interferência direta de estudiosos do quilate de Kurt von Fritz, S. Heller, Wilbur Knorr, Walter Burkert, H. Freudhental, David Fowler, apenas para citar os mais expressivos, os quais, a partir da década de sessenta do século passado, foram divulgando suas ideias e pesquisas, alicerçando o fato de que a crise não foi tão profunda como se

pensava ou, sendo mais conclusivo, não aconteceu[10]. Com uma visão bastante lúcida, Wilbur Knorr, na sua obra, com 1ª edição de 1975, já devidamente citada no início deste Capítulo, traz afirmações que confirmam, até a edição de seu trabalho, o grande número de adeptos da noção da crise nos fundamentos da matemática, quando o assunto é o efeito do impacto da descoberta dos incomensuráveis. Esclarecendo seus argumentos mostra que "Sob esta visão é mantido que a geometria entrou em uma 'fase crítica' durante a qual os procedimentos comuns dentro da geometria métrica natural não foram largamente admitidos. (...) Esta intrinsicamente improvável tese está desmentida por todas as evidências". Mais adiante afirma, peremptoriamente, sustentando a clareza de seu pensamento, que "o termo crise é obviamente e totalmente enganador"[11].

Já para David Fowler, no compêndio *The Mathematics of Plato's Academy (A Matemática da Academia de Platão)*[12], com primeira edição datada de 1988, a exposição da não aceitação da crise, fortemente centrada nas opiniões dos textos de Burkert (1962), Freudhental (1966) e Knorr (1975), também evidencia uma linha de pensamento que não encara no surgimento dos incomensuráveis um abalo nas estruturas da matemática no universo grego antigo, enfatizando que "distante de ser um período de crise e confusão, o início do quarto século foi um extraordinário período de criatividade, especialmente no círculo de Platão; nós não temos evidências históricas para algumas das postuladas dificuldades de uma 'crise de fundamento'". Fowler, anunciando suas argumentações e convicções, sedimenta, então, a importante questão da antifairese como modeladora da forma de pensar grega, resultando daí, através de um processo de subtrações sucessivas, como no caso do hoje conhecido algoritmo de Euclides, uma forma de se encarar os segmentos incomensuráveis sem resultar em uma suposta crise, visto que, através deste método, os matemáticos gregos puderam delinear em tais segmentos uma contínua cadeia de divisões, com um fim para o caso dos segmentos comensuráveis e, sem um fim, infinita, para os incomensuráveis[13].

4.2 A ANTIFAIRESE: A PERCEPÇÃO AGUDA

De todos os temas ligados à incomensurabilidade, no universo grego antigo, aquele exercido pela antifairese ganha destaque e atrai concepções que nos vinculam a uma forma de pensamento, que precisa ser melhor compreendida e interpretada, no intuito de podermos mergulhar com precisão em seus meandros, consequências. Segundo Luis Vega Reñón, em seu já citado prefácio para a edição do livro *Os Elementos*[14], com tradução para o espanhol efetuada por Maria Luísa Puertas Castaños, "Anthyphairein (ανθυφαιρειν) é a denominação técnica de Euclides para seu procedimento de subtração recíproca.". Depois, aponta que tal procedimento pode ser encontrado no livro VII, definições 1 e 2, como também no livro X, definições 3 e 4. Por outro lado, Heath (1956), no terceiro volume de sua obra sobre os livros X a XIII de Euclides, em seu Índice Geral de Formas e Palavras Gregas[15], evidencia que ανταναιρεσις (antanairesis – antanairese) tem a definição de mesma razão em Aristóteles. Também mostra que o termo ανθυφαιρεσις (anthyfairesis – anthyfairese) aparece em Alexandre de Afrodísias. Também é extremamente importante quando, ainda Heath (1908), no segundo volume de sua obra sobre *Os Elementos* de Euclides[16], traz esclarecimentos a respeito do conteúdo de tais palavras, afirmando que:

> ανθυφαιρεσις *e* ανταναιρεσις *são sempre palavras tão vagas e 'metafísicas' (Como afirmaria Barrow) quanto as palavras usadas para definir razão, e é difícil enxergar como alguns fatos matemáticos poderiam ser deduzidos de tal definição. Considere por um momento a etimologia das palavras.* υφαιρεσις *ou* αναιρεσις *significam 'remover', 'tirar fora' ou 'destruição' de uma coisa; e o prefixo* αντι *indica que o 'tirar fora' de uma magnitude responde a, corresponde a, alterna com, o 'tirar fora' da outra. Por conseguinte, até agora, como a etimologia induz, a palavra parece mais sugerir o 'tirar fora' das correspondentes frações, e, portanto, para se adequar à velha teoria imperfeita das proporções em vez de uma nova.* (p. 121)

Com uma visão extremamente alerta em relação aos processos do fazer matemático no mundo grego antigo, Knorr (1975) revela pormenores das interações entre a incomensurabilidade e a antifairese[17], garantindo, que o papel desta última, já estava devidamente sedimentado no pensamento matemático grego, pelo menos ao final do século V a.C., garantindo que:

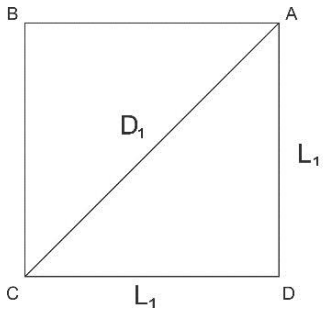
> *Nós devemos observar, entretanto, que ao menos pelo tempo de Aristóteles, a exigência de uma prova lógica da incomensurabilidade estava completamente entendida. Se o algoritmo do lado e do*

> *diâmetro estava sempre associado com a demonstração da incomensurabilidade, evidência assim sugere que era, então, em uma maneira heurística incorreta. É muito importante reconhecer estas distinções: que os aritméticos gregos perto do fim do século V a. C. estavam familiarizados com o processo da antifairese e sabiam de sua forma no caso de certas linhas incomensuráveis; mas que estes resultados não eram em si mesmos percebidos como uma prova da incomensurabilidade daquelas linhas.* (p. 32)

Comungando desta opinião, Fowler (1999), assinala que a antifairese, embora não retratada por historiadores da matemática e matemáticos, com a devida profundidade, revela toda uma capacidade da matemática grega de conviver com a sempre instigante questão da incomensurabilidade. A partir deste ponto, suas ideias fluem no sentido de colocar a antifairese como tema central do raciocínio matemático grego, não aceitando, digamos, a afirmação de Heath (1908), quando a coloca como algo "vago ou metafísico". Desta forma, além de mergulhar em seus enfoques e confluências, é crucial compreender a sua etimologia da referida palavra. Assim, "anti" (ανθι) significa recíproco. Já "hypo" (ύπό) quer dizer sub. Por fim, "hairésis" (αιρεσις) tem o significado de escolha, eleição. Logo, o termo "anti-hypo-hairesis" pode ser compreendido como "recíproca-sub-escolha", ou, adequando os vocábulos, "subtração recíproca". Não deixa de ser valioso, quando Fowler (1999) esclarece que "A sequência de repetições dos números que surgem na antifairese representa o resultado das subtrações repetidas, não divisões"[18]. Também argumenta que procura evitar chamar a antifairese diretamente de "Algoritmo Euclidiano" ou "Frações Contínuas", como modernamente anuncia-se, expondo as seguintes razões:

> *O Algoritmo Euclidiano é agora geralmente construído como um processo de divisão, enquanto a antifairese é baseada em subtrações repetidas; As frações contínuas são agora tratadas usando os números reais e uma generalização sofisticada das frações, enquanto eu proponho uma abordagem diferente na qual um estágio heurístico, baseado nas propriedades do que agora são chamados Séries de Farey, e fazendo uso apenas de manipulações de números (...)* (p. 30)

Indo mais além, Fowler (1999) expande suas interpretações e averiguações, consolidando a exposição de vários resultados da chamada Teoria da Razão Antifairética. Então, para o cálculo da razão entre a diagonal e o lado, evidencia as importantes construções do quadrado, pentágono e hexágono, sendo estes dois últimos, regulares.



Para o caso específico do quadrado, abalizado pela visão da antifairese de Knorr (1974) e Fowler (1999), propomos uma nova concepção de cálculo que permitirá o entendimento da incomensurabilidade de $\sqrt{2}$. Conforme exposto na figura acima, no caso o quadrado ABCD, sendo $D_1{}^2 = 2\,L_1{}^2$, então a divisão $\frac{D_1}{L_1}$ não poderá possuir um outro resultado inteiro que não seja a unidade. A partir daqui, conclui-se que a próxima divisão será $\frac{L_1}{D_1 - L_1}$ cujo resultado inteiro será 2. Para a prova desta conclusão, dois caminhos podem ser usados e têm um papel importante no entendimento da antifairese da diagonal para o lado do quadrado[19]. No primeiro caminho, leva-se em conta a relação dos quadrados da diagonal e do lado do quadrado. Então, ter-se-á:

$$D_1{}^2 = 2\,L_1{}^2$$

$$D_1{}^2 = L_1{}^2 + L_1{}^2$$

$$D_1{}^2 - L_1{}^2 = L_1{}^2$$

$$(D_1 - L_1)\,(D_1 + L_1) = L_1{}^2$$

$$\frac{L_1}{D_1 - L_1} = \frac{D_1 + L_1}{L_1}$$

$$\frac{L_1}{D_1 - L_1} = \frac{D_1}{L_1} + 1$$

$$\frac{L_1}{D_1 - L_1} = [1] + 1$$

$$\frac{L_1}{D_1 - L_1} = [2]$$

Neste ponto é importante assinalar que o resultado entre colchetes representa o valor inteiro da divisão, ou seja, o quociente da mesma. Para Fowler (1999), tal resultado representa a quantidade de subtrações que poderão ser realizadas. Ou seja, poderão ser retiradas da magnitude maior, no caso L_1, o dobro de $D_1 - L_1$. É de suma importância, então, perceber que da magnitude maior sempre será subtraído um múltiplo da magnitude menor. Assim, não esquecendo que $D_1 - L_1 = \frac{{L_1}^2}{D_1 + L_1}$, a próxima fração será exposta por $\frac{D_1 - L_1}{3L_1 - 2D_1}$ que terá o valor de:

$$\frac{D_1 - L_1}{3L_1 - 2D_1} = \frac{{L_1}^2}{(D_1 + L_1)(3L_1 - 2D_1)}$$

$$\frac{D_1 - L_1}{3L_1 - 2D_1} = \frac{{L_1}^2}{(3L_1 D_1 - 2D_1^2 + 3L_1^2 - 2L_1 D_1)}$$

$$\frac{D_1 - L_1}{3L_1 - 2D_1} = \frac{{L_1}^2}{(L_1 D_1 - 4L_1^2 + 3L_1^2)}$$, visto que $D_1^2 = 2{L_1}^2$

$$\frac{D_1 - L_1}{3L_1 - 2\,D_1} = \frac{{L_1}^2}{L_1 D_1 - L_1^2}$$

$$\frac{D_1 - L_1}{3L_1 - 2\,D_1} = \frac{{L_1}^2}{L_1 (D_1 - L_1)}$$

$$\frac{D_1 - L_1}{3L_1 - 2\,D_1} = \frac{L_1}{D_1 - L_1}$$

$$\frac{D_1 - L_1}{3L_1 - 2\,D_1} = [2]$$

Deve-se notar, agora, que o resultado permanece sendo [2], isto porque, o resultado inicial da fração que buscávamos o valor, é exatamente $\frac{L_1}{D_1 - L_1}$. Não é difícil mostrar que para as frações subsequentes, no caso devidamente explicitadas por $\frac{3L_1 - 2D_1}{5\,D_1 - 7L_1}$, $\frac{5\,D_1 - 7L_1}{17L_1 - 12\,D_1}$, (...), as mesmas também possuem como resultado [2], [2], (...). Deste modo, a antifairese da diagonal de um quadrado para o seu lado pode ser expressa por 1, 2, 2, 2, ... Retornando, agora, à busca de um segundo caminho para se provar o quociente [2] da fração $\frac{L_1}{D_1 - L_1}$ do nosso quadrado inicial, onde ${D_1}^2 = 2\,{L_1}^2$, temos que o dito caminho é, digamos, contemporâneo, todavia não deixa de revelar sua importância, em virtude de se expressar no mesmo a dita incomensurabilidade de $\sqrt{2}$, evidenciada pela antifairese 1, 2, 2, 2, (...). Assim, partindo do fato de que $D_1 = \sqrt{2}\,L_1$ pode-se concluir que:

$$\frac{L_1}{D_1 - L_1} = \frac{L_1}{\sqrt{2}\,L_1 - L_1}$$

$$\frac{L_1}{D_1 - L_1} = \frac{L_1}{(\sqrt{2} - 1)L_1}$$

$$\frac{L_1}{D_1 - L_1} = \frac{1}{(\sqrt{2} - 1)}$$

$$\frac{L_1}{D_1 - L_1} = \frac{1}{(\sqrt{2} - 1)} \frac{(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} + 1)}$$

$$\frac{L_1}{D_1 - L_1} = \frac{(\sqrt{2} + 1)}{1}$$

$$\frac{L_1}{D_1 - L_1} = \sqrt{2} + 1$$

$$\frac{L_1}{D_1 - L_1} = [1] + 1$$

$$\frac{L_1}{D_1 - L_1} = [2]$$

A importância deste método é evidenciar um caminho moderno onde o termo $\sqrt{2}$ possa revelar, através de sua representatividade decimal, uma vertente mais atual daquela concepção do mundo grego antigo que teve, no primeiro caminho mostrado neste tópico, uma conotação muito mais próxima daquela usada no

universo da matemática grega. Continuando no processo de antifairese, temos que a próxima fração é exatamente $\frac{D_1 - L_1}{3L_1 - 2\,D_1}$. Desenvolvendo, tem-se que:

$$\frac{D_1 - L_1}{3L_1 - 2\,D_1} = \frac{\sqrt{2}\,L_1 - L_1}{3L_1 - 2\sqrt{2}\,L_1}$$

$$\frac{D_1 - L_1}{3L_1 - 2\,D_1} = \frac{(\sqrt{2}\,-1)L_1}{(3 - 2\sqrt{2}\,)L_1}$$

$$\frac{D_1 - L_1}{3L_1 - 2\,D_1} = \frac{(\sqrt{2}\,-1)}{(3 - 2\sqrt{2}\,)}$$

$$\frac{D_1 - L_1}{3L_1 - 2\,D_1} = \frac{(\sqrt{2}\,-1)(\sqrt{2}+1)}{(3 - 2\sqrt{2}\,)(\sqrt{2}+1)}$$

$$\frac{D_1 - L_1}{3L_1 - 2\,D_1} = \frac{1}{(\sqrt{2}\,-1)}$$

$$\frac{D_1 - L_1}{3L_1 - 2\,D_1} = \frac{1}{(\sqrt{2}\,-1)}\,\frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)}$$

$$\frac{D_1 - L_1}{3L_1 - 2\,D_1} = \sqrt{2}\,+\,1$$

$$\frac{D_1 - L_1}{3L_1 - 2\,D_1} = [1] + 1$$

$$\frac{D_1 - L_1}{3L_1 - 2\,D_1} = [2]$$

Então, neste ponto, encontramos que a fração $\frac{D_1 - L_1}{3L_1 - 2\,D_1}$ tem o mesmo valor da fração $\frac{L_1}{D_1 - L_1}$, que, no caso, tem valor inteiro [2]. Não será complexo mostrar que para as frações que virão a seguir, devidamente expressas por $\frac{3L_1 - 2D_1}{5\,D_1 - 7L_1}$, $\frac{5\,D_1 - 7L_1}{17L_1 - 12\,D_1}$, (...), as mesmas também possuem como resultado [2], [2], (...). Deste modo, a antifairese da diagonal de um quadrado para o seu lado pode ser expressa por 1, 2, 2, (...) , através de um método que envolve a representação decimal de $\sqrt{2}$.

Finalizando o tópico, pluralizando ainda mais os ecos dos incomensuráveis, movimentando suas perspectivas e abrangências, convém mostrar um texto de Aristóteles onde os mesmos ganham contornos, comparações. De certa forma, o texto Aristotélico expresso na obra *Primeiros Analíticos*[20]*, 65b13-25*, ao retratar a incomensurabilidade da diagonal, em relação ao lado de um quadrado, evidencia o quanto o tema merecia a atenção da sensibilidade e inteligência grega:

> *Assim, pois, o modo mais evidente de que a falsidade não resulte da tese é que o raciocínio formado à base dos meios que levam ao impossível não esteja em conexão com a hipótese, o que se há explicado já em os* Tópicos. *Com efeito, o pôr o não causal como causal é isso, como se alguém, por exemplo, que quisera demonstrar que a diagonal é incomensurável, lançava mão do argumento de Zenon de que não é possível mover-se, e reduzira o impossível a isto; Com efeito, de nenhum modo e por nenhuma parte, está em conexão a falsidade com a formação do princípio.* (pp. 275-276)

4.3 TEETETO: O REENCONTRO DO ÂMAGO

Tido como um dos maiores matemáticos do tempo de Platão, Teeteto, embora morrendo relativamente jovem, cerca de 369 a.C., fez descobertas que muito contribuíram para a sedimentação das ideias a respeito da incomensurabilidade na Grécia antiga. Platão, ao criar um diálogo de nome *Teeteto*, além de explorar de forma magistral a questão do conhecimento, presta, de certa forma, uma homenagem ao jovem matemático e, também, ao seu mestre, Teodoro de Cirene, este, por sinal, professor de Platão, conforme atesta Diógenes Laércio, em sua obra *A Vida dos Grandes Filósofos*, no Livro III, item VIII, onde, em determinado trecho o mesmo, recordando detalhes da vida de Platão, menciona que “Depois, quando ele tinha vinte e oito anos de idade, como Hermodorus conta-nos, retirou-se para Megara, com alguns dos discípulos de Sócrates, indo juntar-se a Euclides. E posteriormente, ele foi para Cirene, em vista a Teodoro, o matemático.”[21].

O diálogo se passa no ano 399 a. C., exatamente o ano em que Sócrates foi condenado a beber a cicuta. Nas últimas linhas do referido diálogo, Sócrates arremata: “Ora bem, agora tenho de comparecer diante do Pórtico do Rei para me confrontar com a acusação que Meleto apresentou contra mim.”. Teeteto ainda é muito jovem, mas mostra brilhantismo e perspicácia em suas respostas. Sócrates o incentiva a ir mais além, a mergulhar mais fundo nas entranhas do conhecimento. As contribuições de Teeteto para o texto do Livro X de *Os Elementos* de Euclides são indiscutíveis[22]. Assim, Heath (1956), atesta que existem provas em relação à contribuição de Teeteto para a Teoria da Incomensurabilidade expressas, por exemplo, em um comentário sobre o Livro X, descobertas de uma tradução do árabe, por Woepeke, em seu livro *Mèmoires présentés à l’Académie des Sciences (Memórias apresentadas à Academia de Ciências)*, datado de 1856, onde o referido autor afirma que a teoria das magnitudes irracionais teve seu início na Escola de Pitágoras e, esclarecendo o assunto, expõe que foi consideravelmente desenvolvida pelo ateniense Teeteto que, como para Euclides, propôs-se a dar regras vigorosas relativas à comensurabilidade e incomensurabilidade em geral. Na obra *Science Awakening (O Despertar da Ciência)*, van der Waerden[23] expõe que:

> *Há, além disso, uma semelhança impressionante entre a terminologia do diálogo Teeteto e aquela do começo do Livro X; a mesma frase 'comensurável em comprimento'* (μήχει σύμμετρος) *ocorre em ambos, e para a expressão 'potencialmente comensurável'* (δυνάμεις σύμμετρος) *corresponde em Platão a circunlocução 'comensurável relativamente a áreas as quais eles produzem'. Em som e em significado, as palavras μήχος* e *δύναμις em Platão estão intimamente relacionadas com as frases* μήχει σύμμετρος *e* δυνάμεις σύμμετρος *em Euclides. E enquanto em Platão, Teeteto começa recordando as realizações de Teodoro, no Livro X abre com três proposições concernentes a 'subtrações sucessivas' de magnitudes desiguais, entre as quais ocorre como a X 2, exatamente o critério para incomensurabilidade na qual Teodoro tinha muito provavelmente usado em sua investigação.* (p. 167)

Na parte que se refere à matemática, o diálogo *Teeteto* explora a surpreendente questão da incomensurabilidade quando trata do estudo das potências[24]. Segundo Adriana Manuela Nogueira e Marcelo Boeri, tradutores do *Teeteto* para o português, através da Fundação Calouste Gulbenkian, *"*O termo [potências] não tem o significado que atualmente lhe é atribuído, mas o de 'raízes que não dão origem a números racionais': p. ex., $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, etc. Ou seja, números que não sejam obtidos pela multiplicação de números iguais.". Para Fowler (1992), tal diálogo traz, cronologicamente, nossa primeira referência confiável sobre o tema dos incomensuráveis[25]. È evidente que muito já se explicitou e se comentou sobre o referido diálogo, no entanto, cada vez mais, o enlace matemático do mesmo, representado de 147c – 148d, retratando a incomensurabilidade através do diálogo entre Sócrates e o pupilo de Teodoro de Cirene, demonstra quanto o tema era motivo de discussão e entusiasmo[26]:

> *SÓCRATES — Além disso, poderíamos ter uma resposta simples e breve e andamos à volta de um caminho infinito. Tal como na pergunta sobre o barro podia pura e simplesmente dizer-se que o barro era terra misturada com líquido, omitindo «de quê».*
>
> *TEETETO — Agora assim parece fácil, Sócrates. No entanto, corres o risco de perguntar o que mesmo agora nos veio à cabeça, a mim e a este teu homônimo Sócrates, enquanto conversávamos um com o outro.*
>
> *SÓCRATES — E o que foi, Teeteto?*
>
> *TEETETO — Aqui o Teodoro desenhou-nos algo acerca de potências, de três pés e de cinco pés quadrados, demonstrando que o comprimento não é comensurável com um pé, e assim continuou por cada uma delas, até a de dezessete pés. Seja como for, ficou por ali. Então passou-nos pela cabeça isto: visto que as potências*

parecem ser em quantidade infinita, tentar reuni-las sob um único nome pelo qual todas pudessem ser chamadas.

SÓCRATES — E encontraram-no?

TEETETO — Penso que sim, mas considera também tu.

SÓCRATES — Diz.

TEETETO — Dividimos todos os números em duas partes. Qualquer um que tivesse o poder de se produzir pela multiplicação de iguais, comparamos com a forma de um quadrado e chamamos-lhe um número quadrado ou equilateral.

SÓCRATES — Muito bem.

TEETETO — Depois tomamos os números intermediários, entre os quais o três e o cinco e todo o número que não tem o poder de se produzir pela multiplicação de iguais, mas multiplicando um número menor por um maior ou um menor por um maior, pois este é sempre composto por um lado maior e menor. Por sua vez, a esse, comparámo-lo a uma figura oblonga e chamámos-lhe um número oblongo.

SÓCRATES — Ótimo. E depois disso?

TEETETO — Qualquer desenho que produza um quadrado formado por um número plano equilateral, definimos como «comprimento», enquanto que qualquer um que produza um número oblongo, definimos como «potência», pois não são comensuráveis com o anterior, em comprimento, mas com as figuras planas de que são a potência. E sobre os sólidos também é assim.

SÓCRATES — Vocês são os mais hábeis dos homens, meus rapazes. Por isso me parece que Teodoro não há de ser acusado de falso testemunho.

TEETETO — Mas há outra coisa, Sócrates, é que eu não seria capaz de responder à tua pergunta sobre o saber do mesmo modo que sobre comprimentos e potências, apesar de me parecer que estás à procura de algo do mesmo gênero. De modo que Teodoro ainda continua a parecer um mentiroso.

SÓCRATES- Como assim? Se ele louvasse a tua corrida e dissesse que entre os jovens nunca tinha encontrado ninguém que fosse um corredor como tu e depois viesses a ser vencido pelo campeão em pleno vigor físico e muito veloz, pensarias que aquele louvor era menos verdadeiro?

TEETETO — Eu, não.

SÓCRATES - Mas pensas que investigar o que é o saber, como ainda agora estava a dizer, é uma coisa pequena e não uma preocupação dos que estão acima de todos?

> *TEETETO — Penso que sim, por Zeus, mesmo dos que estão no mais alto de tudo.*
>
> *SÓCRATES — Então, tem confiança em ti e acredita naquilo que Teodoro diz. De entre os outros assuntos, empenha-te totalmente neste aqui; isto é, em obter uma definição do que o saber é realmente.*
>
> *TEETETO — Quanto ao empenho, ele vai mostrar-se, Sócrates.*
>
> *SÓCRATES — Vai então, pois indicaste muito bem o caminho agora mesmo, e tenta imitar a tua resposta sobre as potências; do mesmo modo que colocaste todas aquelas que havia numa única forma, procura nomear, assim, todos os saberes numa única definição.*
>
> *TEETETO — Mas fica bem a saber, Sócrates, que tentei muitas vezes examinar a questão, quando ouvia fazer relatos das tuas perguntas. Mas, na verdade, não sou capaz de me convencer completamente de que digo alguma coisa, nem ouvi outro que falasse do modo que exiges e, contudo, não consigo deixar de me preocupar com isso.*
>
> *SÓCRATES — Estás com as dores do trabalho de parto, meu caro Teeteto, pois não estás vazio, mas prenhe.*
>
> *TEETETO — Não sei, Sócrates. No entanto, digo-te o que sofro.*

Para o diálogo *Teeteto* são bastante pertinentes as palavras de Knorr (1975)[27], quando, ao comentar sobre a questão das interpretações das fontes, revela a necessidade, sempre constante do pesquisador, de explorar os textos e os contextos de uma época, em que se realiza o fato, com bastante prudência e perspicácia:

> *"Mas nós evitaríamos seguir considerações que dão evidência da falta de confiabilidade e nós evitaríamos, gratuitamente, uma interpretação errônea de fonte confiável. É à luz desta observação, que nosso exame detalhado da passagem de Teeteto está para ser visto. Os esforços para entender-se, precisamente, o significado daquela passagem e a pesquisa das interpretações que negligenciam uma ou mais importantes características disso nos trarão para uma nova reconstrução, que não somente satisfaz as condições do texto para a literatura, mas também relata as mais razoáveis para o desenvolvimento da geometria grega."* (p. 5)

Neste ponto, utilizando-se dos mesmos cálculos para a obtenção da incomensurabilidade de $\sqrt{2}$, conforme exposto no tópico 4.2 deste Capítulo, quando da explicitação dos cálculos para o primeiro caminho, podemos provar todas as potências, no caso, raízes quadradas expostas por Teeteto. Aqui, é importante estar

atento que o que nos interessa é poder colher, para todas as obtenções de tais raízes, a relação da diagonal ao quadrado sendo igual a raiz que nos interessa multiplicada pelo lado, que tanto pode ser de um quadrado ou de um retângulo. Para o caso específico de $\sqrt{3}$, não esquecendo que a divisão $\frac{D_1}{L_1}$ não poderá revelar um outro resultado inteiro que não seja a unidade, [1], pode-se concluir que:

$$D_1{}^2 = 3\,L_1{}^2$$

$$D_1{}^2 = 2L_1{}^2 + L_1{}^2$$

$$D_1{}^2 - L_1{}^2 = 2L_1{}^2$$

$$(D_1 - L_1)\,(D_1 + L_1) = 2L_1{}^2$$

$$\frac{L_1}{D_1 - L_1} = \frac{D_1 + L_1}{2L_1}$$

$$\frac{L_1}{D_1 - L_1} = \left(\frac{D_1}{L_1} + 1\right).\frac{1}{2}$$

$$\frac{L_1}{D_1 - L_1} = ([1] + 1).\frac{1}{2}$$

$$\frac{L_1}{D_1 - L_1} = [2]\,.\frac{1}{2}$$

$$\frac{L_1}{D_1 - L_1} = [1]$$

Prosseguindo para a próxima fração, não esquecendo do fato de que $(D_1 - L_1) = \frac{2{L_1}^2}{(D_1 + L_1)}$, teremos que a mesma será explicitada por:

$$\frac{D_1 - L_1}{2L_1 - D_1} = \frac{2{L_1}^2}{(D_1 + L_1)(2L_1 - D_1)}$$

$$\frac{D_1 - L_1}{2L_1 - D_1} = \frac{2{L_1}^2}{(2L_1 D_1 - D_1^2 + 2L_1^2 - L_1 D_1)}$$

$$\frac{D_1 - L_1}{2L_1 - D_1} = \frac{2{L_1}^2}{L_1 D_1 - L_1^2}$$, visto que $D_1^2 = 3{L_1}^2$

$$\frac{D_1 - L_1}{3L_1 - 2D_1} = \frac{2{L_1}^2}{L_1(D_1 - L_1)}$$

$$\frac{D_1 - L_1}{3L_1 - 2D_1} = \frac{2L_1}{D_1 - L_1}$$

$$\frac{D_1 - L_1}{3L_1 - 2D_1} = [2]$$, visto que $\frac{L_1}{D_1 - L_1} = [1]$

Desenvolvendo os cálculos para as próximas frações será constatado que as mesmas terão uma repetição [1], [2], [1], [2], (...). Então, conclui-se que a antifairese de $\sqrt{3}$, da diagonal para o lado, de um quadrado ou retângulo, é dada por 1,1,2,1,2, 1,2, (...). Este é um resultado valioso. No entanto, como já foi afirmado anteriormente, podemos fazer o mesmo para todas as raízes até 17. Efetuando os

cálculos para $\sqrt{5}$, nunca esquecendo que a divisão $\frac{D_1}{L_1}$ não poderá possuir um outro resultado inteiro que não seja dois, [2], ter-se-á:

$$D_1{}^2 = 5\, L_1{}^2$$

$$D_1{}^2 = 4L_1{}^2 + L_1{}^2$$

$$D_1{}^2 - 4L_1{}^2 = L_1{}^2$$

$$(D_1 - 2L_1)\,(D_1 + 2L_1) = L_1{}^2$$

$$\frac{L_1}{D_1 - 2L_1} = \frac{D_1 + 2\,L_1}{L_1}$$

$$\frac{L_1}{D_1 - 2L_1} = \left(\frac{D_1}{L_1} + 2\right)$$

$$\frac{L_1}{D_1 - 2L_1} = ([2] + 2)$$

$$\frac{L_1}{D_1 - 2L_1} = [4]$$

Partindo adiante para a próxima fração, não esquecendo do fato de que $(D_1 - 2L_1) = \frac{L_1{}^2}{(D_1 + 2L_1)}$, obteremos que a mesma será explicitada por:

$$\frac{D_1 - 2L_1}{9L_1 - 4D_1} = \frac{{L_1}^2}{(D_1 + 2L_1)(9L_1 - 4D_1)}$$

$$\frac{D_1 - 2L_1}{9L_1 - 4D_1} = \frac{{L_1}^2}{(9L_1 D_1 - 4D_1^2 + 18L_1^2 - 8L_1 D_1)}$$

$$\frac{D_1 - 2L_1}{9L_1 - 4D_1} = \frac{{L_1}^2}{L_1 D_1 - 2L_1^2}$$, visto que $D_1^2 = 5{L_1}^2$

$$\frac{D_1 - 2L_1}{9L_1 - 4D_1} = \frac{{L_1}^2}{L_1(D_1 - 2L_1)}$$

$$\frac{D_1 - 2L_1}{9L_1 - 4D_1} = \frac{L_1}{D_1 - 2L_1}$$

$$\frac{D_1 - 2L_1}{9L_1 - 4D_1} = [4]$$, visto que $\frac{L_1}{D_1 - 2L_1} = [4]$

Desenvolvendo os cálculos para as próximas frações será constatado que as mesmas terão uma repetição [4], [4], [4], [4], (...). Então, conclui-se que a antifairese de $\sqrt{5}$, da diagonal para o lado, de um quadrado ou retângulo, é dada por 2, 4, 4, 4, 4, (...). Este é outro resultado impressionante. Sutil, ainda, é poder constatar que a antifairese de $\sqrt{5}$ é muito semelhante a de $\sqrt{2}$, visto que esta última tem como antifairese 1, 2, 2, 2, 2, (...). E, segundo nesta linha, de forma surpreendente, podemos obter que a antifairese de $\sqrt{17}$ é 4, 8, 8, 8, 8, (...) , guardando uma semelhança com $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$.

Então, é de extrema importância evidenciar uma relação com todas as raízes que, segundo Teeteto, tiveram suas incomensurabilidades provadas por Teodoro, pois o jovem matemático, no diálogo, confirma para Sócrates que "*Aqui o Teodoro*

desenhou-nos algo acerca de potências, de três pés e de cinco pés quadrados, demonstrando que o comprimento não é comensurável com um pé, e assim continuou por cada uma delas, até à de dezessete pés.". Assim, expondo uma relação com todas as antifaireses[28], teremos:

$\sqrt{2}$: 1 = [1,$\overline{2}$]

$\sqrt{3}$: 1 = [1, $\overline{1,2}$]

$\sqrt{4}$: 1 = [2] (razão comensurável)

$\sqrt{5}$: 1 = [2,$\overline{4}$]

$\sqrt{6}$: 1 = [2,$\overline{2,4}$]

$\sqrt{7}$: 1 = [2,$\overline{1,1,1,4}$]

$\sqrt{8}$: 1 = [2,$\overline{1,4}$]

$\sqrt{9}$: 1 = [3] (razão comensurável)

$\sqrt{10}$: 1 = [3,$\overline{6}$]

$\sqrt{11}$: 1 = [3,$\overline{3,6}$]

$\sqrt{12}$: 1 = [3,$\overline{2,6}$]

$\sqrt{13}$: 1 = [3,$\overline{1,1,1,1,6}$]

$\sqrt{14}$: 1 = [3,$\overline{1,2,1,6}$]

$\sqrt{15}$: 1 = [3,$\overline{1,6}$].

$\sqrt{16}$: 1 = [4] (razão comensurável)

$\sqrt{17}$: 1 = [4,$\overline{8}$]

As sutilezas na apresentação das raízes são abrangentes. É possível, como já foi visto, verificar semelhanças entre as antifaireses de $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ e $\sqrt{17}$. Também entre $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ e $\sqrt{11}$ as antifaireses guardam sutis harmonias. Van der Waerden (1975)[29], ao recordar que, no diálogo, o jovem pupilo de Teodoro não cita a $\sqrt{2}$, evidencia o porquê de tal fato mencionando a interpretação de Zeuthen:

> *De acordo com Platão, Teodoro de Cirene (ao redor de 430 a.C.) provou a irracionalidade de* $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, *etc. até* $\sqrt{17}$, *(declarou acuradamente: dos lados dos quadrados de áreas 3, 5, ..., 17), mas tacitamente omitiu* $\sqrt{2}$. *Zeuthen extrai a conclusão, que a irracionalidade de* $\sqrt{2}$, *isto é, da diagonal do quadrado de lado unitário, era conhecida antes de seu tempo.". Por outro lado, Páppus afirma que a teoria dos irracionais começou na escola de Pitágoras e suas teorias dos pares e ímpares deu aos Pitagóricos o significado para provar a irracionalidade de* $\sqrt{2}$. (p. 110)

4.4 MÊNON: O DIÁLOGO, A SUTILEZA

Dentre todos os diálogos de Platão, o *Mênon* ganha destaque por revelar essências do ensinamento matemático no mundo grego antigo, de uma forma coloquial, através da conversa entre Sócrates e um escravo, onde se pode constatar o uso de maneiras, formas, técnicas, procedimentos de como a matemática ganhou seus próprios contornos, alicerçou em muitas mentes o teor de suas verdades, desmembramentos. No escravo, então, reside um personagem anônimo, que, sem ter passado por uma aprendizagem sistemática, ao falar a língua grega, está em consonância para ser um instrumento da dialética. Analisando o texto com perspicácia enxerga-se que a incomensurabilidade delineou-se no mesmo. É de extrema importância, na apresentação do diálogo, para a sua versão em português, efetuada por Maura Iglésias[30], o esclarecimento de que "De fato, pela sua primeira parte, o *Mênon* liga-se ao grupo de diálogos socráticos, e, dentre esses, especialmente aos chamados diálogos 'em busca de uma definição'". Assim, segundo a tradutora, "No caso do *Mênon*, a questão que abre o diálogo – a virtude é coisa que se ensina? – num movimento típico dos diálogos desse grupo, é mudada por Sócrates para a questão da definição – que é a virtude?". Avançando no tema, Maura ainda esclarece que "Mais provavelmente, *Mênon* é, para Platão, representante de uma visão que associa a virtude ao 'poder'. Nesse sentido, é significativa sua origem e a sua ligação com Górgias, que havia visitado a Tessália, onde obtivera enorme sucesso, e cujo nome é associado ao ensino da retórica." Penetrando na seara da matemática grega antiga, Fowler (1999) traz, no início de sua obra, na parte 1, intitulada Interpretações[31], a repercussão do diálogo *Mênon*, mostrando sua importância e quanto de seu desenvolvimento tem sido explorado por

muitos pesquisadores até os dias atuais. Então, pode-se ler nos tópicos que “Sócrates encontra o menino-escravo de Mênon” e, logo adiante, “Sócrates encontra, novamente, o menino escravo de Mênon”. O autor é categórico ao afirmar que, o referido diálogo, é importante por três motivos, dentre os quais destacam-se os dois primeiros:

> *(i) É nosso primeiro fragmento de evidência direto, explícito, ampliado sobre a matemática grega; é provavelmente datado de aproximadamente 385 a.C. Indo em direção a este tempo, nós podemos explorar, mais além, a volta ao passado, como nos três exemplos típicos seguintes: Nos comentários, escritos no sexto século d.C. por Simplício e Eutócio sobre Aristóteles e Arquimedes, respectivamente, nós encontramos descrições do trabalho de Hipócrates (cerca de 425 a.C.?) e Árquitas (cerca de 385 a.C. ou mais cedo?) que vêm, diretamente ou indiretamente, de uma agora perdida* História da Matemática *escrita ao redor de 325 a.C. por Eudemo, um pupilo de Aristóteles. Segundo, Os Elementos de Euclides, o qual acredita-se ter sido compilado ao redor de 300 a.C., dá-nos um editado e anônimo tratamento de alguns dos matemáticos predecessores de Euclides, em um texto que passou através das mãos de um desconhecido número de muitos escribas e editores antes de chegar às versões que nós agora possuímos. Terceiro, ao encontrarmos mais do que inúmeras, pequenas e isoladas, referências à matemática dos Pitagóricos, e alguma informação sobre o próprio Pitágoras, nós temos que ir em direção aos escritos hagiográficos, tendenciosos e acríticos, de Iâmblico no terceiro século a.C. Nesse mundo, incerto e escuro, de fragmentários, anônimos, secundários e terciários relatos, esta passagem de Platão e outras passagens matemáticas em seus diálogos destacam-se como testemunhos diretos de alguém localizado no centro desse notável grupo de matemáticos criativos que iniciaram o estilo e algumas das técnicas e preocupações que, desde então, têm dominado o assunto. (ii) Serve como um exemplo, lúcido e direto, de alguns dos problemas, estilos e técnicas da matemática grega antiga (..)* (pp. 7-8)

A parte do diálogo associada especificamente à matemática é aquela em que Sócrates dialoga com o escravo. No entanto, tomou-se um pouco mais da conversa de Sócrates, principalmente com Mênon, no intuito de se mostrar a importância do outro na dialética de Sócrates, concretizando, assim, uma experiência de reminiscência das mais aprimoradas. De certa forma, é ainda importante destacar as palavras de Maura Iglésias, quando, atenta às concepções do diálogo, esclarece que “Ele ocuparia assim uma posição entre os diálogos ditos ‘socráticos’, que normalmente são considerados como veiculando o pensamento do Sócrates histórico e os grandes diálogos do grupo intermediário, entre os quais se destaca a *República,* que representariam o pensamento da maturidade de Platão, diferenciado

do de Sócrates”[32]. Expondo o diálogo *Mênon,* 82a – 85b, poderemos obter considerações altamente enraizadas nos contextos da incomensurabilidade:

SÓCRATES: Isso não é fácil. Entretanto, estou disposto a empenhar-me, por tua causa. Chama-me pois um desses muitos servidores teus que aí estão, qualquer que queiras, para que com ele eu te faça uma demonstração.

MÊNON: Perfeitamente. Tu aí, vem cá.

SÓCRATES: Ele é grego, não?, e fala grego?

MÊNON: Com toda certeza: é nascido na casa.

SÓCRATES: Presta pois atenção para ver qual das duas coisas ele se revela a ti <como fazendo>: rememorando ou aprendendo comigo.

MÊNON: Pois prestarei.

SÓCRATES: Dize-me aí, menino: reconheces que uma superfície quadrada é desde tipo? –ESCRAVO: Reconheço. –SO. A superfície quadrada então é <uma superfície> que tem iguais todas essas linhas, que são quatro? –ESC. Perfeitamente. –SO. E também não é <uma superfície> que tem iguais estas <linhas. Aqui, que atravessam pelo meio? –ESC. Sim. –SO. E não é verdade que pode haver uma superfície desse tipo tanto maior quanto menor? –ESC. Perfeitamente. –SO. Se então este lado for de dois pés e este de dois, de quantos pés será o todo? Examina da seguinte maneira. Se <por este lado> fosse de dois e por este de um só pé, a superfície não seria de uma vez dois pés? –ESC. Sim. –SO. Mas, uma vez que por este também é, <a superfície> não vem a ser de duas vezes dois? –ESC. Vem a ser. –SO. Logo, ela vem a ser de duas vezes dois pés. –ESC. Sim. –SO. Quanto é então duas vezes dois pés? Faz o cálculo e diz. –ESC. Quatro, Sócrates. –SO. E não é verdade que pode haver outra superfície deste tipo, que seja o dobro desta, que tenha todas as linhas iguais como <as tem> esta? –ESC. Sim. –SO. De quantos pés então será? –ESC. Oito. –SO. Vê lá, tenta dizer-me de que tamanho será cada linha dessa superfície. A <linha> desta <superfície> aqui é, com

efeito, de dois pés. E a <linha> daquela <superfície> que é o dobro? –ESC. Mas é evidente, Sócrates, que será o dobro.

SÓCRATES: Vês, Mênon, que eu não estou ensinando isso absolutamente, e sim estou perguntando tudo? Neste momento, ele pensa que sabe qual é a linha da qual se formará a superfície de oito pés. Ou não te parece <que ele pensa que sabe>?

MÊNON: Sim, parece-me que sim.

SÓCRATES: E sabe?

MÊNON: Certamente não.

SÒCRATES: Mas acredita, sim, que <a superfície será formada> a partir da linha que é o dobro <desta>.

MÊNON: Sim.

SÓCRATES: Contempla-o, pois, como vai rememorando progressivamente, tal como é preciso rememorar.

Tu, pois, dize-me. Afirmas que é a partir da linha que é o dobro <desta> que se forma a superfície que é dobro <desta>? Quero dizer <uma superfície> do seguinte tipo: não que seja longa quanto a esta <linha> e curta quanto a esta, as sim que seja igual por toda a parte, como esta aqui, porém o dobro desta, <isto é,> de oito pés. Mas vê se ainda te parece que, <formada> a partir da <linha> que é o dobro ela vai ser <assim>. –ESC. A mim, parece-me. –SO. Não é verdade que esta linha se torna o dobro desta, se lhe acrescentamos outra deste tamanho, a partir daqui? –ESC. Perfeitamente. –SO. A partir desta, pois, afirmas, formar-se-á a superfície de oito pés, se houver quatro linhas deste mesmo tamanho. –ESC. Sim. –SO. Tracemos pois, a partir desta, quatro linhas iguais. Não seria esta aqui a superfície que afirmas ser de oito pés? –ESC. Perfeitamente. –SO. Não é verdade que nesta <superfície> há estas quatro <superfícies> aqui, cada uma das quais é igual a esta que é de quatro pés? –ESC. Sim. –SO. De que tamanho então vem a ser ela? Não é de quatro vezes o tamanho desta? –ESC. Como não? –SO. Então, a

superfície que é quatro vezes maior que esta é o dobro desta? –ESC. Não, por Zeus! –SO. É, antes, quantas vezes esse tamanho? – ESC. O quádruplo. –SO. Logo, menino, a partir da linha que é o dobro não se forma uma superfície que é o dobro, mas sim que é o quádruplo. –ESC. Dizes a verdade. –SO. Com efeito, quatro vezes <uma superfície de> quatro <pés> é <uma superfície de> dezesseis <pés>, não é? –ESC. Sim. –SO. E a <superfície> de oito pés se forma a partir de uma linha de que tamanho? Não é a partir desta <que se forma> a <superfície> que é o quádruplo? –ESC. Concordo. – SO. E esta aqui que tem quatro pés, a partir desta aqui, que é a metade? VESC. Sim. –SO. Pois seja. E a superfície de oito pés não é o dobro desta aqui, e metade desta? –ESC. Sim. –SO. E não será formada a partir de uma linha maior que uma deste tamanho, mas menor que uma deste tamanho aqui? Ou não? –ESC. Assim me parece. –SO. Ótimo. Responde, com efeito, aquilo que te parece. E dize-me. Esta <linha> aqui não é, como dissemos, de dois pés, e esta, de quatro? –ESC. Sim. –SO. Logo, é preciso que a linha da superfície de oito pés seja maior que esta de dois pés, mas menor que a de quatro. –ESC. È preciso. –SO. Tenta pois dizer: uma <linha> de que tamanho afirmas que ela é. –ESC. Três pés. –SO. Então, se realmente for de três pés, tomaremos a metade desta <linha> em acréscimo e terá três pés, não é? Pois estes aqui são dois pés e este, um. E, partir daqui, da mesma maneira, estes aqui são dois, e este um; e forma-se esta superfície de que falas. –ESC. Sim. –SO. E não é verdade que, se for de três pés quanto a esta <linha> aqui, e de três quanto a esta, a superfície total vem a ser de três vezes três pés? –ESC. É evidente que sim. –SO. E três vezes três pés são quanto pés? –ESC. Nove. –SO. E <a superfície que é> o dobro devia ser de quantos pés? –ESC. Oito. –SO. Logo, não é ainda tampouco a partir da linha de três pés que se forma a superfície de oito pés. –ESC. Certamente não. –SO. Mas a partir de qual? Tenta dizer-nos exatamente; e se não queres calcular, mostra ao menos a partir de qual. –ESC. Mas, por Zeus, Sócrates, eu não sei!

(...)

–SO. Pois, dize-me tu, Não temos esta superfície aqui de quatro pés? Estás entendendo? –ESC. Sim, estou. –SO. E poderíamos acrescentar-lhe esta outra aqui, igual? –ESC. Sim. –SO. E esta terceira aqui, igual a cada uma dessas duas? –ESC. Sim. –SO. E não deveríamos completar com esta aqui o <espaço> no canto? –ESC. Perfeitamente. –SO. Então, não é assim que ficariam estas quatro superfícies iguais? –ESC. Sim. –SO. E então? Este todo vem a ser quantas vezes maior que

esta <superfície> aqui? –ESC. Quatro vezes. –SO. Mas era-nos preciso uma que fosse o dobro; ou não te lembras? –ESC. Perfeitamente. –SO. E esta, que se estende de canto a canto, não é uma linha que corta em dois cada uma das superfícies? –ESC. Sim. –SO. E estas quatro, não são linhas iguais, que circunscrevem esta superfície? –ESC. Com efeito, são. –SO. Examina pois. De que tamanho é esta superfície? –ESC. Não estou compreendendo. –SO. Estando aqui estas quatro superfícies, cada linha não separou uma metade dentro de cada uma delas ? Ou não? –ESC. Sim, separou. –SO. Então, quantas superfícies desse tamanho há dentro desta? –ESC. Quatro. –SO. E quantas nesta aqui? –ESC. Duas. –SO. E quatro superfícies são o quê de duas? –ESC. O dobro. –SO. Então, de quantos pés é esta superfície aqui? –ESC. De oito pés. –SO. A partir de qual linha é formada? –ESC. A partir desta. –SO. Desta que se estende de canto a canto da <superfície> de quatro pés? –ESC. Sim. –SO. Ora, esta linha, chamam os sofistas de diagonal. De modo que, se o nome dela é diagonal, é a partir da diagonal, como afirmas, escravo de Mênon, que se formaria a superfície que é o dobro. –ESC. Perfeitamente, Sócrates.

Ao término do diálogo com o escravo, Sócrates usa a diagonal para nortear seus procedimentos para a duplicação da superfície do quadrado. No entanto, durante todo o diálogo Sócrates evidencia o quanto é preciso ser zeloso com a educação das pessoas, moldar o que em nós parece estar esquecido. Deste modo, ao desenhar um quadrado de lado 2 pés, tem a concordância do escravo de que a área do mesmo é de 4 pés. Todavia, ao mostrar um quadrado de área 8 pés obtém a resposta errada do escravo a respeito do lado do mesmo. De fato, em nossa linguagem atual, o lado do quadrado seria de $2\sqrt{2}$, um número, no caso, irracional. A questão da incomensurabilidade já se revela, visto que o escravo não consegue congregar em si a resposta correta[33]. Tal qual nos dias de hoje, a noção de incomensurabilidade, envolve abstração e um algo mais de quem pensa nas concepções dos números em nossas mentes. Para esclarecer melhor o impasse, Sócrates desenha quadrados de áreas de 16 pés e 9 pés, cujos lados são 4 pés e 3 pés, respectivamente, dando ao escravo uma melhor visão de que o quadrado de 8 pés não pode ter lado de 4 pés e, sendo ainda mais incisivo, deve ter um lado que seja maior que dois pés e menor que o de 4 pés. Após esta explanação, tenta o

quadrado de lado 3 pés, mas o mesmo tem área de 9 pés, que ainda é maior que a área de 8 pés. Logo, fica claro que o lado do quadrado de 8 pés deve estar, então, entre 2 e 3 pés. Depois, para melhor esclarecer a questão do quadrado de área 8 pés, mostra um quadrado de área 16 pés e o divide em quatro quadrados iguais de áreas 4 pés. Finalmente, unindo as diagonais de cada um dos quatro quadrados, que terão comprimento $2\sqrt{2}$, em nossa notação moderna, consegue chegar a formação de um outro quadrado de área 8 pés. O escravo parece ter vislumbrado que do quadrado formado pela união das diagonais dos quadrados de área 4 pés surge o quadrado de área 8 pés. Sócrates, enfático, arremata que "Ora, esta linha, chamam os sofistas de diagonal. De modo que, se o nome dela é diagonal, é a partir da diagonal, como afirmas, escravo de Mênon, que se formaria a superfície que é o dobro.". O escravo concorda, contudo a força da ideia da incomensurabilidade, que permeou todo o diálogo, foi burilada por Sócrates no sentido de oferecer ao escravo um melhor entendimento da situação, buscar comparações, interpretar com clareza os argumentos, vislumbrar determinadas hipóteses, criar suas próprias convicções e percepções.

É bastante interessante as argumentações de Fowler (1999), quando pontua a sempre intrigante "não-aritmetizada" geometria grega antiga[34]. Seus enfoques nos levam a conclusões pormenorizadas do pensamento de uma época, revelam o quanto precisamos estar atentos aos detalhes e conhecimentos, que muitas vezes nos escapam, tornando o entendimento do assunto difícil ou incompleto. O interesse do autor nas passagens do *Mênon*, que fazem referência à matemática, demonstram sua agudeza no tratamento de tópicos, que cada vez mais, confirmam a necessidade de nos envolvermos profundamente com o universo das reflexões de uma Grécia que continua a nos burilar, a nos tornar mais densos:

> *A geometria, modelada sobre as propriedades do espaço tridimensional que parecemos experimentar a nosso redor, fornece o ingrediente principal da matemática grega. E Sócrates dá uma boa ilustração de sua atitude de senso comum a essa geometria quando diz, bem no início de seu encontro com o escravo: 'Uma tal figura poderia ser maior ou menor, não poderia?'. (...) Uma típica solução de um problema ou prova de uma proposição consistirá em uma figura e uma coleção de afirmações sobre a figura. Assim, as duas primeiras soluções incorretas do problema de Sócrates de dobrar um quadrado eram duas figuras, que o leitor foi deixado para fornecer, juntamente com as afirmações sobre a contagem de quadrados iguais; enquanto a terceira e correta solução consistiu em uma figura adicional com as afirmações como: 'esses quadrados são cortados*

> *pela metade'; 'essas linhas são iguais'; 'este quadrado contém duas (iguais) metades', e ' quatro é dois vezes dois'.* (p. 10)

4.5 NOTAS E REFERÊNCIAS

1 – Para a citada obra de Wilbur Knorr, sobre a questão da descoberta da incomensurabilidade pelos pitagóricos, ao enfatizar os nomes de Páppus, Próclus e Iâmblico, à p. 21, pode-se constatar que o importante historiador da Matemática ainda acrescenta que "A data e o modo da primeira descoberta da incomensurabilidade não têm sido preservados para nós por alguma testemunha de confiança.".

2 – A respeito de Iâmblico, Wilbur Knorr, a pp. 21-22, esclarece suas suspeitas sobre o teor das ideias do mesmo, enfatizando que:

> *Em cinco considerações separadas, cada reminiscência que foi retratada por Páppus, ele permuta e confunde em uma variedade, de muitos caminhos, diferentes estórias: a descoberta dos irracionais, a construção do dodecaedro, a carreira [modo de vida] de Hipaso, e a morte no mar de algum ímpio pitagórico.*

3 – Como é bem sabido o nome Nicolas Bourbaki faz menção ao pseudônimo coletivo de um grupo de matemáticos renomados, na sua maioria franceses, que, a partir de 1935, escreveram importantes livros sobre a moderna matemática. O fato de se explicitar um livro do grupo, que enfatiza a História da Matemática e mostra a descoberta dos incomensuráveis através dos Pitagóricos, traz a relevância do assunto tratado por matemáticos de altíssimo nível Os seus membros fundadores foram Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Coulomb, Jean Delsarte, Jean Dieudonne, Charles Ehresmann, René Possel, Szolem Mandelbrojt, André Weil. Mais informações sobre o grupo podem ser obtidas no sítio www.bourbaki.ens.br .

4 – van der Waerden, à p. 110 de sua importante obra, esclarece que, ao contrário da afirmação de Páppus, Zeuthen extrai a conclusão de que a irracionalidade de $\sqrt{2}$, isto é, da diagonal de um quadrado de lado unitário, era conhecida antes do tempo em que Teodoro de Cirene provou a irracionalidade de $\sqrt{3}.\sqrt{5}.\sqrt{6},\sqrt{7},\sqrt{8},\sqrt{10},\sqrt{11},\sqrt{12},\sqrt{13},\sqrt{14},\sqrt{15},\sqrt{17}$. Zeuthen chega a tal conclusão, exatamente a partir da exposição do diálogo *Teeteto*, de Platão, onde o filosófo ateniense

trata de explicitar as questões da incomensurabilidade no diálogo entre Sócrates e o jovem Teeteto, pupilo de Teodoro de Cirene.

5 – Jan Gullberg*,* no Capítulo 3, à p. 84, de sua obra *Mathematics – From the Birth of Numbers*, ao mencionar a questão da incomensurabilidade e sua descoberta pelos pitagóricos, mostra que "estes viveram pela máxima de que tudo é número, acreditando que todas as coisas poderiam ser explicadas como relações entre números, os quais, para eles, significavam inteiros positivos e frações comuns".

6 – Ainda evidenciando os efeitos da suposta crise na descoberta dos irracionais, Dirk J. Truik, à p. 82 de sua obra, trazendo mais evidências para os efeitos da mesma, pontua, os efeitos e os enlaces, da crise social grega com a dita crise da matemática, argumentando que:

> *Podemos então detectar uma relação entre a crise da matemática e a crise do sistema social, pois a queda de Atenas significou a ruína do império da democracia escravagista e introduziu um novo período de supremacia aristocrática – uma crise que foi resolvida no espírito deste novo período.*

7 – A bem da verdade, a *História da Matemática*, de Rubens Gouvêa Lintz, está explicitada em dois volumes. As referências usadas no texto pertencem ao volume I e estão pontuadas às pp. 80-83. Aqui, também, presta-se uma homenagem ao professor emérito da *McMaster University* (Canadá), pelas suas contribuições, principalmente, à História da Matemática. No sítio do Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da Unicamp, http://www.cle.unicamp.br/, pode-se compreender melhor o valor de sua obra quando se lê: "Neste trabalho, em dois volumes, é apresentado um estudo da História da Matemática sob um ângulo diferente do usual na literatura. (...) Esta obra reúne competência e criatividade, apresentando uma análise do conhecimento matemático num enfoque cultural e político. Sua publicação é mais uma contribuição significativa do CLE [Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da Unicamp] à cultura acadêmica, reconhecendo e divulgando um dos mais destacados intelectuais brasileiros.".

8 – O texto de *A República*, de Platão, foi colhido da tradução de Enrico Corvisieri para a Editora Nova Cultural, em 1997. Sobre a importância do livro, a obra de Simon Blackburn, *A República de Platão – Uma Biografia,* traz esclarecimentos muito interessantes com relação ao compêndio revelando, por exemplo, que:

> *A obra é convencionalmente dividida em dez livros, embora não haja motivos para se pensar que essa organização lhe tenha sido dada pelo próprio Platão: ela é derivada mais propriamente do tamanho arbitrário de um antigo papiro que de qualquer ritmo argumentativo. É comum considerar-se o primeiro livro uma espécie de introdução, e o último uma coda ou peça final, porém ambos são importantes, tanto dramática quanto doutrinariamente.*

9 – O texto da *Metafísica*, de Aristóteles, foi colhido das Edições Loyola, de 2002. A tradução portuguesa segue a *Aristole Metafísica – Saggio introdutivo, texto greco con traduzione a fronte e commentario a cura di Giovanni Reale (edizione maggiore rinnovata)*.

10 – Em interessante colocação, Tatiana Roque, no seu livro *História da Matemática*, p. 96, esclarece os pormenores que levaram a difusão, em muitos Historiadores da Matemática, dos supostos efeitos da crise na sempre sutil questão do surgimento da incomensurabilidade no mundo grego antigo:

> *A afirmação de que a descoberta da incomensurabilidade produziu uma crise nos fundamentos da matemática grega foi consolidada por trabalhos de historiadores da primeira metade do século XX. P. Tannery já havia afirmado que tal descoberta significou um escândalo lógico na escola pitagórica do século V a.E.C., sendo mantida em segredo inicialmente, até que, ao se tornar conhecida, teve como efeito desacreditar o uso das proporções na geometria. Um dos artigos mais influentes a propalar a ocorrência de uma crise foi "Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik" (A crise dos fundamentos da matemática grega), de Hasse e Scholz, publicado em 1928, que fazia referência somente à possibilidade de ter havido uma crise dos fundamentos da matemática grega. Esses autores também são responsáveis por associar esse problema aos paradoxos de Zenão, relação desmentida há tempos.*

11 – Wilbur Knorr, à p. 40 de sua obra, traz mais sutilezas enfatizando a questão da geometrização da álgebra no mundo grego, pontuando, então, que a fundação da crise, a bem da verdade, não passou de uma maneira inteligente

> *Enquanto que o trabalho pode ser associado com incomensurabilidade, nós veremos que isso era empreendido não meramente para resolver o puro problema fundacional [da crise], mas sim para formular os materiais métricos em uma maneira compatível com as demandas de estudo dentro da teoria da incomensurabilidade.*

12 – David Fowler, à p. 362 de sua obra, complementando suas argumentações a respeito de que a crise não existiu, traz mais embasamentos aos seus pensamentos, esclarecendo que *"*Mas eu quero ir mais além e explorar a possibilidade de que a descoberta não foi mais do que um evento incidental no desenvolvimento da matemática grega antiga."

13 – Sobre a antifairese, David Fowler, ainda em *The Mathematics of Plato's Academy (A Matemática da Academia de Platão)*, pp. 30-64, no Capítulo 2, intitulado *Teoria da Razão Antifairética*, traz esmiuçamentos esclarecedores sobre tal assunto. Também no Apêndice da referida obra, pp. 367-369, há alguns exemplos de geometria antifairética.

14 – A respeito do prefácio de Lope Veja, sua menção a antifairese pode ser consultada à p. 93, onde também constata-se na referência *29bis*, que "sobre seu possível significado pré-euclidiano", deve-se consultar às pp. 255-261 da obra de Knorr (1975).

15 – Com relação ao Índice Geral de Formas e palavras Gregas, exposto no Volume 3, da tradução de Heath (1956) para *Os Elementos* de Euclides, trazendo as menções às palavras ανταναιρεσις (antanairesis – antanairese) e ανθυφαιρεσις (antifairesis – antifairese), está exposto à p. 521 da citada obra.

16 – As argumentações de Heath, contidas no Volume 2, de sua tradução de *Os Elementos* de Euclides, estão contidas à p. 121 da referida obra. Neste ponto é importante realçar que o autor traz, aí pormenorizados, os seus comentários sobre a Definição 5, do Livro V de *Os Elementos*. Também é valioso quando, à p. 120, evidencia que Aristóteles faz uma alusão à definição de 'a mesma razão' nos *Tópicos* VIII.3, 158b 29 onde escreve que "para áreas e segmentos de linha têm a mesma ανταναιρεσις (antanairesis – antanairese), e esta é a definição de 'a mesma razão'". Ainda segundo suas informações, Alexandre de Afrodísias ao expor seu pensamento a respeito de tal assunto revela que "Esta é a definição de proporcionalidade a qual os antigos usavam: magnitudes são proporcionais a uma outra a qual têm (ou mostrem) a mesma ανθυφαιρεσις (antifairesis – antifairese), e Aristóteles, mais tarde, chamou ανταναιρεσις (antanairesis – antanairese)."

17 – Wilbur Knorr, em relação à sedimentação da antifairese no pensamento matemático grego antigo, a explicita à p. 34 de sua obra. Esclarecendo ainda mais o tema, ele enfatiza os importantes autores Heller e von Fritz, mostrando a importância da antifairese nas concepções da incomensurabilidade no mundo grego antigo. Assim, à p. 32, evidencia:

> *O argumento de Heller, como o de von Fritz, transforma a antifairese em uma surpreendente progressão geométrica. Apoiando sua pretensão está o fato de que a forma do algoritmo faz com que, o virtualmente inconcebível, não resulte da experiência antifairética da razão do lado e diagonal do quadrado.*

18 – David Fowler, ao argumentar que "A sequência de repetições dos números que surgem na antifairese representa o resultado das subtrações, não divisões.", à p. 30 de sua obra, também pluraliza seu entendimento do assunto, à p. 31, quando expõe que "A comparação das razões antifairéticas revelam a curiosa característica de que a ordenação lexicográfica das razões é invertida na segunda, quarta, sexta, etc. etapas."

19 – Com relação á prova da incomensurabilidade de $\sqrt{2}$, pontuada nas confluências da antifairese, buscamos dois caminhos próprios que, com certeza, trarão mais embasamentos para o estudo dos hoje chamados números irracionais. O primeiro caminho, totalmente vinculado ao pensamento do mundo grego antigo, mostra a importância do fato de que, em um quadrado, a diagonal ao quadrado possui o mesmo valor do dobro do lado ao quadrado. O segundo caminho, mais contemporâneo, revela a possibilidade de explorar-se a incomensurabilidade de $\sqrt{2}$ através dos processos de racionalização.

20 – Sobre os *Primeiros Analíticos,* foi consultada a obra *Tratados de Lógica – Órganon*, da *Biblioteca Clásica Gredos*. A edição, em espanhol, conta com Introduções, Traduções e Notas efetuadas por Miguel Candel SanMartín. O referido autor, ao comentar a respeito dos *Primeiros Analíticos*, à p. 85, expõe:

> *Estamos, enfim, ante a obra máxima da lógica aristotélica. Paradoxalmente, esta é a mais 'instrumental' de todas, a que menos 'substância' filosófica parece conter se se a compara com o resto da produção aristotélica. Não por casualidade é a construção mais genuinamente formal erigida pelo Estagirita, o edifício epistemológico que iria se assentar o 'cânone' de toda a arquitetura intelectual das civilizações Islâmica e Cristã até o século XVII, e que não iria ser substancialmente superada, em rigor, até o século XIX, com o desenvolvimento generalizado da lógica matemática.*

21 – B. L. van der Waerden, em sua obra *Science Awakening (O Despertar da Ciência),* à p. 142, enfatiza a questão da separação, com relação às contribuições, na questão da incomensurabilidade, entre o que é de Teodoro e o que é de Teeteto, compreendendo que:

> *É razoável assumir que a separação das contribuições de Teeteto, daquelas de Teodoro, está historicamente correta, mesmo embora as circunstâncias detalhadas do diálogo possam ser ficcionais. Não pode ter sido intenção de Platão dar crédito a Teodoro daquilo que é devido a Teeteto, e não vice-versa.*

22 – Ainda pontuando as contribuições de Teeteto para o Livro X de *Os Elementos,* de Euclides, Heath (1956), p. 3, confirma que "A proposição X. 9 de Euclides é definitivamente colocada pelo escoliasta a Teeteto. Teeteto foi um pupilo de Teodoro, e parecia claro que o teorema não era conhecido de Teodoro."

23 – A respeito das influências de Teeteto no que concerne ao Livro X, van der Waerdem, à p. 167, ainda esclarece que "Torna-se claro, a partir de todas estas coisas, que o diálogo *Teeteto* e o início do Livro X andam juntos e suplementam um ao outro. O Livro X contém os mais detalhados desenvolvimentos matemáticos de problemas brevemente indicados no diálogo".

24 – A referida definição de potência, como "raízes que não dão origem a números racionais" está exposta, à p. 24, referência 27. Os autores, ainda esclarecem que "Para uma leitura recente deste passo, *vide* Alessandra di Guida "Il nome e il linguaggio nel *Teeteto*" *Atti delVAccademia di scienze Morali e Politiche* Vol. CXII 2001, 137-138."

25 – David Fowler, em seu trabalho *An Invitation to Read Book X Euclid's Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, publicado pela Revista *Historia Mathematica*, nº 19, pp. 233-264, traz, à p. 234, a revelação de que a passagem concernente à incomensurabilidade no *Teeteto 147c-148b* é, para o referido tópico, a primeira referência confiável.

26 – O texto do *Teeteto* é o expresso na obra, editada pela Fundação Calouste Gulbenkian, tendo como tradutores Adriana Manuela Nogueira e Marcelo Boeri. A parte que nos interessa, 147c-148d, está contida às pp. 196-199. Em estudo introdutório sobre o diálogo, os autores, ao comentarem a referida passagem expõem que:

> *Outro tipo de exemplo, agora avançado por Teeteto, é o do estudo das 'potencias', que acaba de fazer com Teodoro. A sugestão que avança é a de oferecer essa sua tentativa de unificação da noção de potência como paradigma para a resposta que Sócrates lhe pede.*

27 – A referida citação, contida na obra de Wilbur Knorr, está situada à p. 5 no tópico Observações Metodológicas Gerais. O grande Historiador da Matemática ainda argumenta que “Nós tentaremos seguir, à perfeição, o testemunho de nossas autoridades antigas, a menos que existam fortes motivos textuais para se fazer o contrário.”.

28 – A relação evidenciada está devidamente apresentada, à p. 374, na obra de David Fowler, *The Mathematics of Plato’s Academy – A New Reconstruction (A Matemática da Academia de Platão – Uma Nova Reconstrução)*. O autor elabora uma lista, partindo de n = 2 até n = 20, para os valores das antifaireses de $\sqrt{n} : 1$.

29 – O referido texto de van der Waerden, faz parte da obra *Science Awakening (O Despertar da Ciência)*, p. 110. O autor, ainda sobre a questão da incomensurabilidade, esclarece, em linhas anteriores, que “O único lugar em que a teoria, dos pares e dos impares, é aplicada em *Os Elementos*, em si, é a prova da incomensurabilidade do lado e da diagonal de um quadrado, no final do Livro X.”

30 – Na tradução de Maura Iglesias, tem-se que o *Mênon* foi editado pela Editora da PUC – Rio em convênio com as Edições Loyola, utilizando o texto estabelecido e anotado por John Burnet. As citações apresentadas fazem parte da Introdução ao Diálogo, efetuada pela tradutora, pp. 11-12.

31 – Sobre a importância do *Mênon*, David Fowler, no início de sua obra *The Mathematics of Plato’s Academy – A New Reconstruction (A Matemática da Academia de Platão – Uma Nova Reconstrução)*, pp. 3-26, faz um apanhado meticuloso de inúmeros enfoques do universo matemático grego antigo.

32 – O diálogo *Mênon,* 82a – 85b, trazendo o diálogo entre Sócrates e o escravo, explorando um grande número de sutilezas matemáticas, está pontuado às pp. 53-65. Ao final da tradução, Maura Iglésias ainda traz uma seção com as Notas, pp. 113-117, que muito ajudam em um entendimento mais abrangente do *Mênon*.

33 – A respeito da incomensurabilidade do lado do quadrado de 8 pés de área, e a dificuldade do escrevo em absorver tal entendimento, visto que respondeu que o referido quadrado teria lado de 4 pés, talvez, a ideia de Platão, realçada pelas palavras de Sócrates fosse mostrar o quanto ideias pré-concebidas podem, muitas vezes, não se vincular à matemática. Isto porque o escravo respondeu 4 pés, vinculado a ideia do quadrado de área igual a 4 pés, que possui lado igual a 2 pés. Ou seja, a ideia do lado como metade da área, permeou seu entendimento do problema. Era preciso, digamos, acordá-lo do erro, mostrar o caminho correto a seguir.

34 – Ainda sobre a "não-aritmetizada" geometria grega, David Fowler, p. 10, também esclarece que "Outro bom exemplo deste procedimento demonstrativo, que também ilustra o uso de Euclides da palavra 'igual' *(isos*), está em *Os Elementos* I.35: *Paralelogramos que estão sobre a mesma base e nos mesmos paralelos são iguais a um outro*. Aqui a figura é uma instanciação direta do enunciado da proposição."

PARTE IV

CONSOLIDAÇÃO: A ANÁLISE DO LIVRO X

CAPÍTULO 5

LIVRO X: OS ALICERCES MOLDAM AS CONCEPÇÕES

5.1 CONTEXTOS, CONFLUÊNCIAS

O Livro X, de *Os Elementos* de Euclides, tem se notabilizado pelo seu grau de dificuldade e suas interpretações, cada vez mais, sujeitas a serem modeladas para melhor, a consolidarem o pensamento matemático do mundo grego antigo com relação, principalmente, à incomensurabilidade. Segundo as informações de Fowler (1992), a linguagem básica do Livro X está pontuada em suas quatro definições iniciais, seguidas das proposições 1 até a 26. O autor enfatiza que, das proposições 27 a 35, tem-se uma série de construções gerais, formando um conjunto relevante de exemplos, em relação à teoria que segue. Interessante, também, é quando afirma que as proposições de 1 a 4 confirmam o tão chamado algoritmo euclidiano, ou, ao termo já devidamente comentado no Capítulo anterior, ανθυφαιρεσις (anthyfairesis – anthyfairese). Neste ponto, de maneira singular, explicita que a "antifairese" não tem, aparentemente, relevância para o material a seguir. Comenta ainda que as definições 1 e 2, juntamente com as proposições 5 a 16, conduzem à comensurabilidade e à incomensurabilidade[1]. De certa forma, Taisbak (1982) comunga de tal raciocínio, ao retratar que "O principal tema do décimo livro começa com [a proposição] X 17. Antes de entender isso, existem algumas coisas para serem aprendidas: obviamente, os teoremas X 1-16, embora nós não iremos tratar explicitamente de todos eles; [as proposições] X 1 e 2, que são as melhores partes da matemática no livro inteiro, têm muito pouco a ver com o resto disso."[2].

De modo bastante lúcido, van der Waerden (1975) argumenta, no Capítulo 6 de sua obra, "E enquanto em Platão, Teeteto inicia relembrando as realizações de Teodoro [de Cirene], o Livro X abre com três proposições concernentes às 'subtrações sucessivas' de magnitudes desiguais, através do que ocorre como em X

2, exatamente o critério para a incomensurabilidade que Teodoro tinha muito provavelmente usado em sua investigação."[3]. Há, também, um tópico onde o importante historiador da matemática traz uma análise interessante do Livro X de *Os Elementos*, interligada a uma reconstrução do trabalho matemático de Teeteto, pontuando, entre outros detalhes a definição de Euclides, através das proposições X 21, 36 e 73, das chamadas linhas irracionais fundamentais, que são a "medial", a "binomial" e o "apótomo". Neste ponto, reforçando o decisivo papel de Teeteto na escrita do Livro X, esclarece, em uma de suas referências, que, através das afirmações de Eudemo, sabe-se que Teeteto havia estudado estas três 'irracionalidades', relacionando-as a três médias. Ou seja, a "medial" para a média geométrica, a "binomial" para a média aritmética, ao passo que o "apótomo" abrigaria a média harmônica[4]. Aprofundando suas análises, o autor traz, entre outros esclarecimentos, o fato de que:

> *Uma 'área medial' é a área de um retângulo cujos lados 'a' e 'b' são exprimíveis, mas incomensuráveis. Nós diríamos, é uma área* $\sqrt{r}$, *onde* r *é um número racional. Uma linha reta cujo quadrado é igual a uma área é chamada de uma 'linha medial'. Em nossa notação,* $\sqrt[4]{r}$. *Esta linha satisfaz a equação* $x^2 = ab$, *e é, portanto, uma média proporcional entre 'a' e 'b'. Daí resulta a palavra 'medial'. A soma* $a + b$ *de duas exprimíveis, mas incomensuráveis linhas, é chamada de 'binomial' ('com dois nomes'), e sua diferença* $a - b$, *'apótomo' ('cortar fora'). É provado no Livro X que todos esses tipos de linhas são 'sem razão', e são mutuamente exclusivos, também que uma 'binomial' pode ser representada como uma soma* $a + b$ *em somente um caminho, e um 'apótomo' em somente um caminho como uma diferença* $a - b$ *de linhas exprimíveis.* (p. 169)

Através de um texto seguro, Artmann (2000) consegue decodificar múltiplas sutilezas nas concepções do Livro X, dentre as quais, o fato de que as proposições de 10 a 20 trazem uma exploração sistemática euclidiana da comensurabilidade e suas interações com os conceitos iniciais de *Os Elementos*. Revela, de maneira contundente, que a proposição X 10, através da construção de seus exemplos, evidencia que sua teoria não é a respeito do conjunto vazio. Prosseguindo, consolida a proposição X 11, enfatizando que a comensurabilidade é mostrada para

ser consistente com a teoria das proporções. Ou seja, se ‘a’ e ‘b’ são comensuráveis e $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então, ‘c’ e ‘d’, também serão comensuráveis. Para as proposições 12 e 13, argumenta que as mesmas englobam o fato de que a comensurabilidade é transitiva e, consequentemente, podemos acrescentar, representa uma relação de equivalência. Já para as proposições 14, 15 e 16 revela que existe a interação da comensurabilidade com a adição e subtração de linhas. Prosseguindo, apresenta duas perguntas: “Como a comensurabilidade comporta-se com respeito às aplicações das áreas? Pode-se traduzir isso para o seguinte problema: Quando uma equação quadrática com coeficientes racionais tem soluções racionais?”. A resposta, segundo o autor, está nas proposições 17 e 18. Mais adiante pontua que as proposições 19 e 20 tratam da equivalência geométrica da multiplicação e da divisão[5].

Antes de adentrarmos nas questões específicas dos comentários das definições e proposições do Livro X de *Os Elementos* de Euclides, além de sedimentarmos as essências e abrangências de corolários e lemas que compõem o mesmo, convém explicitar que, para cada definição comentada, será posta a codificação CD1, CD2, CD3, etc. Já para as proposições, os comentários possuirão a simbologia CP1, CP2, CP3, etc. Os corolários terão a representação CC1, CC2, CC3, etc. Os lemas serão expressos por CL1, CL2, CL3, etc. Assim, os comentários das proposições estarão divididos em quatro grupos. O primeiro grupo, que faz parte deste capítulo, abriga as proposições de 1 a 30, como também as quatro definições iniciais que abrem o abrangente Livro X. O segundo grupo enfoca as proposições de 31 a 60, além de trazer as chamadas segundas definições, em um total de seis. O terceiro grupo prioriza as proposições de 61 a 90, englobando, aí, as chamadas terceiras definições, em um número de seis. O quarto e último grupo decodifica os enlaces e desmembramentos das proposições de 91 a 115. Também é importante realçar que nos utilizamos da tradução do texto grego, para a sua versão em português, de Irineu Bicudo. Então, os textos das definições, proposições, corolários e lemas do Livro X de *Os Elementos*, de Euclides, trazem o texto em português devidamente traduzido da fonte grega. A partir daí, os comentários ganham enfoques os mais variados, procuram consolidar a força e a delicadeza do Livro X, mostrar que seus ecos continuam firmes, capazes de nos engrandecer a cada momento, testemunhar todo um compêndio de ideias e afirmações que necessitam

estar em sintonia com nossas averiguações a respeito da matemática do mundo grego antigo, elo nos impulsionando para as verdades mais fundas.

5.2 PROPOSIÇÕES 1 A 30

DEFINIÇÕES

1. Magnitudes são ditas comensuráveis as que são medidas pela mesma medida, e incomensuráveis, aquelas das quais nenhuma medida comum é possível produzir-se.

CD1. Para esta definição o termo comensurável traz a sua essência e reverberação. Isto porque magnitudes “que são medidas pela mesma medida” revelam o teor do vocábulo comensurável que, tendo origem no latim, através do adjetivo “commensurabilis”, pode ser traduzido como “capaz de comparação”, “tendo uma medida comum”. De fato, “commensurabilis” representa a união entre o sufixo “abilis”, que tem o significado de capacidade, e o verbo depoente latim “commensus sum” que se traduz como “comparar”, “medir em oposição a alguma coisa”. Já o termo incomensurável, revelando a impossibilidade de que alguma medida comum seja produzida, tem origem, também, no latim. Vem, então, do adjetivo “incommensurabilis”, cujo significado é “não ser capaz de ser medido juntamente com alguma coisa”. Na decomposição do vocábulo, pode-se constatar que os prefixos “in” e “com”, indicam, respectivamente, “não” e “junto com”. “Mensura” é um substantivo em latim que se traduz como “medida”, unindo-se à “capacidade” de “abilis”[6]. Em Heath (1956) há uma citação ao primeiro escólio sobre o Livro X de *Os Elementos* mostrando que “Eles [os pitagóricos] chamavam todas as magnitudes, mensuráveis pela mesma medida, de comensuráveis, mas aquelas que, não são sujeitas à mesma medida, de incomensuráveis, e novamente, destas, tais como são medidas por alguma outra medida comum, comensuráveis com uma outra, e tais como não, incomensuráveis com as outras.”[6]

2. *Retas são comensuráveis em potência, quando os quadrados sobre elas sejam medidos pela mesma área, e incomensuráveis, quando para os quadrados sobre elas nenhuma área comum seja possível produzir-se.*

CD2. A expressão “comensurável em potência” é a tradução para a expressão grega δυνάμει σύμμετρος. De fato, tal expressão ficou consagrada por alguns autores antigos, como é o caso de Williamson, que traduziu δυνάμει como “em potência”. Segundo argumenta Heath (1956), na sua tradução do Livro X, o termo δυνάμις, na geometria grega, é traduzido como quadrado. Daí que, em sua opinião, o vocábulo δυνάμει recebe a tradução de “em quadrado”. Assim, δυνάμει σύμμετρος teria a tradução de “comensurável em quadrado”. Neste ponto, comungam desta mesma opinião, autores como Knorr (1975), Taisbak (1982), Mueller (1986), Fowler (1999), Castaños (1996). Não deixa de ser surpreendente quando Kurt von Fritz, no seu importante trabalho *The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum (A Descoberta da Incomensurabilidade por Hipasus de Metaponto)*, revelar a incrível movimentação das traduções, de determinados termos gregos, expondo a palavra δυνάμει como ‘em quadrado’ e sedimentando que “A dificuldade terminológica criada por essa contradição aparente, em termos, é refletida pelo fato de que, por algum tempo, o termo *alogos*, para irracional, foi substituído pelo termo *arhetos* (inexprimível), que é apenas uma outra maneira de se expressar o que o termo *alogos* originalmente significava. Também é interessante ver como o termo *alogos* gradualmente voltou. Primeiro o termo *rhetos* (racional) é criado em contraste com *arhetos*. Então, o termo *arhetos* desaparece; E Teeteto, que desenvolveu a teoria da irracionalidade mais adiante, reintroduziu o termo *alogos*, porém o usou apenas para irracionalidades ‘superiores’, por exemplo, da forma $\sqrt{a\sqrt{b}}$, enquanto chamava as irracionalidades simples da forma $\sqrt{a}$ *dynamei monon rhetoi* (literalmente: racional apenas em quadrado).”.

3. *Sendo expostas essas coisas, é provado que existem realmente retas, ilimitadas em quantidade, tanto comensuráveis quanto também incomensuráveis com a reta proposta, umas somente em comprimento, outras também em potência. Seja chamada, de fato, por um lado, a reta proposta racional, e as comensuráveis com*

essa, quer em comprimento e em potência quer em potência somente, racionais, e, por outro lado, as incomensuráveis com essa sejam chamadas irracionais.

CD3. No entendimento desta definição é fundamental compreender a diferença entre as palavras gregas ρητός e άλογος que significam, respectivamente, “racionalmente exprimível” e “não racionalmente exprimível”. Os dois vocábulos são, então, antônimos. Como bem esclarece Castaños (1996), a tradução literal de ρητός como “exprimível” e άλογος como “sem razão” não revela a questão dos antônimos com clareza no referido contexto matemático. Na sua visão, a melhor tradução para os termos ρητός e άλογος seriam “com razão exprimível” e “sem razão exprimível”. E, construindo sua linha de pensamento, mostra que procura evitar as traduções habituais para ρητός e άλογος, como “racional” e “irracional”, visto que as mesmas levam a pensar em números e, podem produzir, superficialmente, um viés aritmético ao Livro X. Por outro lado, na tradução de Fowler (1999) o termo ρητός, normalmente traduzido como “racional”, é substituído somente por “exprimível”. Já o termo άλογος é deixado na sua forma transliterada, no caso, *alogos*. O autor pontua que άλογος significa “sem palavras”. Enfatiza, então, que pode assumir a tradução “sem razão” desde que, ao se analisar o material contido no Livro X, se priorize suas relações mútuas. Muito importante é quando argumenta que as palavras ρητός e άλογος, ao serem traduzidas para o inglês, recebem, na maioria das vezes, a tradução de “racional” e “irracional”. Van der Waerden (1975) traduz ρητός como “exprimível” e άλογος como “sem razão”, e, de forma lúcida, testemunha que “aparentemente, estas ‘inomináveis’ magnitudes não têm sido ou reconhecidas, ou nomeadas, nos estágios anteriores da teoria.”. Fowler (1999), indo mais além, sedimenta que “O uso das palavras ‘racional’ e ‘irracional’ dá a impressão que a definição refere-se à dicotomia em que cada linha é, ou racional, ou irracional; mas esse não é o caso no original grego. De fato, Euclides não faz nenhuma tentativa na classificação do Livro X de considerar cada possível espécie de linha; em vez disso, ele trabalha para fora da linha atribuída para gerar novos tipos de linhas e áreas, que são descritas em termos das linhas e áreas, que já foram consideradas. Ele primeiro descreve as linhas exprimíveis na Definição 3, e, então, passa a descrever treze diferentes tipos de linhas de *alogoi* que surgem de algumas construções muito especiais.”. A análise etimológica da palavra “racional” revela que a mesma vem do adjetivo em latim “rationalis”, composto do substantivo “ratio” (razão) com o sufixo

“alis”, tendo como significado “referindo-se a uma razão” ou “em relação a uma proporção”. Já a palavra “irracional” vem do adjetivo em latim “inrationalis”, cujo significado é, literalmente, “sem razão”. Tal palavra é a tradução latina para o termo grego άλογος que tem como tradução “não tendo uma razão”.

4. *E, por um lado, o quadrado sobre a reta proposta, racional, e os comensuráveis com esse, racionais, e, por outro lado, os incomensuráveis com esse sejam chamados irracionais, e as que servem para produzi-los, irracionais, se forem quadrados, os próprios lados, ao passo que se alguma outra retilínea, as que descrevem quadrados iguais a elas.*

CD4. Nesta definição, novamente, a questão do “racional” e “irracional” vêm à tona. Como já visto na definição anterior, tais termos são comumente usados para traduzirem as palavras gregas ρητός e άλογος. No entanto, outros autores preferem, para ρητός, a tradução “exprimível” ou “racionalmente exprimível”. Para άλογος usam-se as traduções “sem razão”, “não racionalmente exprimível” ou a deixam na forma transliterada. Para o caso específico desta definição, segundo Castaños (1996), “uma área resulta ‘racionalmente exprimível’ ou ‘não racionalmente exprimível’ segundo seja comensurável, ou não, com o quadrado de uma reta predeterminada como ‘exprimível’”. Expõe, ainda, que se a área em apreço for de um quadrado, a mesma condição atrela-se a seus lados. Bastante esclarecedor é quando Fowler (1999) traz norteamentos de como encarar a união das definições 3 e 4, pontuando principalmente que “Nós fixamos uma linha ‘a’, chamada de linha atribuída (ou exprimível). Qualquer outra linha ‘b’ tal que b^2 seja comensurável com a^2 será chamada exprimível. (Por exemplo, $2a$ e $\sqrt{2a}$ são linhas exprimíveis). Consequentemente, linhas exprimíveis podem ser comensuráveis (isto é, em comprimento, por exemplo, $\sqrt{2a}$ e $\sqrt{18a}$) ou (incomensurável em comprimento, mas) comensurável somente em quadrado (por exemplo a e $\sqrt{2a}$). Uma área que é comensurable com a^2 é chamada exprimível. Uma linha, ou área, que não é exprimível é chamado de *alogos*.”.

PROPOSIÇÔES

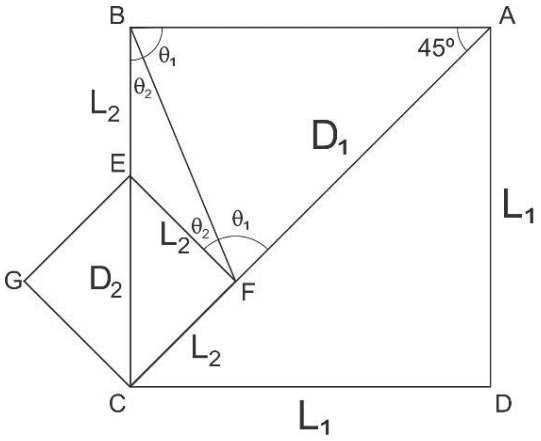
1. Sendo expostas duas magnitudes desiguais, caso da maior seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma maior do que metade, e isso aconteça sempre, alguma magnitude será deixada, a qual será menor do que a menor magnitude exposta.

CP1: A primeira proposição do Livro X tem vinculação com as definições 3 e 4, do Livro V de *Os Elementos*. Isto porque as mesmas asseguram que "Uma razão é a relação de certo tipo concernente ao tamanho de duas magnitudes de mesmo gênero" e "Magnitudes são ditas ter uma razão entre si, aquelas que multiplicadas podem exceder uma a outra.". De certa forma, a proposição 1 sedimenta, através da exposição de um entendimento anterior à proposição 2, a questão do procedimento para se verificar se duas magnitudes são comensuráveis ou incomensuráveis. Assim sendo, fluindo em uma percepção bastante lúcida, Katz (2009) assegura que a definição 4 do Livro V "requer que algum múltiplo n da menor magnitude exceda a maior. Então, n subtrações das magnitudes maiores do que a metade daquelas é deixada em qualquer fase, dá o resultado desejado.". Também é extremamente importante o fato de que tal proposição é usada por Euclides para provar a proposição 2 do Livro XII, onde se pode ler que "Os círculos estão sobre si como os quadrados sobre os diâmetros", aparecendo sob a forma de um lema. De fato, de forma surpreendente, todas as proposições do Livro XII, que fazem menção ao chamado "método da exaustão", terão suas provas vinculadas à proposição 1 do Livro X[10]. Comentando a proposição 1, analisando suas sutilezas e conotações, Artmann (2000), esclarece que "Para o leitor moderno será óbvio que esta é a propriedade arquimedeana da ordenação das magnitudes, e Euclides prova a afirmação fazendo referência à definição V, 4. De fato, a prova mostra que após um número finito de subtrações, o resto será menor do que a segunda magnitude. Esta observação é essencial para a próxima proposição, bem como para os procedimentos limitados ao Livro XII."[11]

2. *Caso sendo subtraída, de duas magnitudes [expostas] desiguais, sempre por sua vez a menor da maior, a que é deixada nunca meça exatamente a antes de si mesma, as magnitudes serão incomensuráveis.*

CP2. O teor desta proposição está inteiramente norteado pelo encontro do máximo divisor comum como teste para afirmar se as magnitudes são incomensuráveis. Assim, caso a operação nunca tenha um fim, através de um processo de subtrações sucessivas, a incomensurabilidade revela-se. De fato, temos na referida proposição o procedimento da ἀνθυφαίρεσις (anthyphairesis – anthyphairese). Ao descrever o que são números primos entre si, Euclides, na proposição 1 do Livro VII, revela o procedimento do máximo divisor comum para números com uma sequência limitada de subtrações, afirmando que "Sendo expostos dois números desiguais, e sendo sempre subtraído de novo o menor do maior, caso o que restou nunca meça exatamente o antes dele mesmo, até que reste uma unidade, os números do princípio serão primos entre si.". Então, na sequência limitada de subtrações, se os números não forem primos entre si, terão um máximo divisor comum, conforme pontua Euclides na proposição 2 do Livro VII, garantindo que "Sendo dados dois números não primos entre si, achar a maior medida comum deles.".[12] Em um relato bastante esclarecedor, Knorr (1975) evidencia que "O algoritmo euclidiano procede como segue. Duas magnitudes homogêneas 'A' e 'B' são dadas. A menor (digamos, 'B') é subtraída da maior, deixando o resto 'C'. Se 'C' é menor que 'B', é subtraído de 'B' para produzir um segundo resto. Se 'C' é maior que 'B', então 'B' é subtraído de 'C'. Em ambos os casos, um novo resto 'D' é obtido, e ele é usado da mesma maneira com respeito ao prévio subtraendo, produzindo um novo resto 'E'. O processo continua neste rumo. Quando aplicado a números, termina após um número finito de etapas, e o último (não zero) resto é o máximo divisor comum dos dois números dados; Euclides desenvolve isto em VII, 1 e 2. Similarmente, o processo aplicado a magnitudes comensuráveis tem um fim, resultando na maior medida comum; Euclides prova isto em X, 3. Mas no caso das magnitudes incomensuráveis, o processo continua *ad infinitum*, os restos, por diminuições sucessivas, tornam-se, eventualmente, menores do que qualquer pré-atribuída magnitude finita, como Euclides demonstra em X, 1 e 2.". É de extrema importância, também, a partir da figura explicitada na página seguinte, evidenciar, atrelando-se a uma referência de Heath (1956) ao livro *Algebra an Elementary Text-Book*, de G. Chrystal, quando, o importante Historiador da Matemática britânico, enfatiza que a

referida obra traz uma prova da incomensurabilidade de $\sqrt{2}$, comprovando, desta maneira, o uso, interessantíssimo, da proposição 2.[13]



Deste modo, partindo do quadrado ABCD, cujo lado AB = L_1 e a diagonal AC = D_1 , constrói-se um outro quadrado de lado CF = L_2 , onde $L_2 = D_1 - L_1$, com L_2 ocupando uma parte de D_1 . De imediato, percebe-se que é necessário encontrar o valor do segmento BE. Contudo, do quadrado maior ABCD, vem que $L_1 = D_2 + BE$. Não esquecendo que o triângulo BEF é isósceles, então podemos escrever que $BE = L_2$. Esta importante conclusão garante, assim, que $L_1 = D_2 + L_2$.

Pode-se, agora, explicitar o valor de L_2 e D_2, em função de L_1 e D_1. Assim, vem que:

$$L_2 = D_1 - L_1$$

$$D_2 = L_1 - L_2 = L_1 - (D_1 - L_1)$$

$$D_2 = 2L_1 - D_1$$

Supondo, então, que L_1 e D_1 são, ambos, comensuráveis, neste caso podendo ser expressos em função de algum unidade finita, logo os mesmos devem

ser um múltiplo de uma certa unidade finita. Como L_2 e D_2 são, também, ambos, dependentes de L_1 e D_1, verifica-se que possuem um múltiplo da mesma unidade. Pela figura vemos que, CF = L_2 e CE = D_2, são o lado e a diagonal do quadrado CFEG, cujo lado é menor do que a metade do lado do quadrado original ABCD. Desta maneira, podemos, da mesma forma, construir um quadrado com lado L_3 e diagonal D_3, os quais são menores do que a metade de L_2 e D_2, respectivamente, e, assim, L_3 e D_3 devem ser múltiplos integrais da mesma unidade, tal que:

$$L_3 = D_2 - L_2$$

$$D_3 = 2L_2 - D_2$$

Logo, o referido processo pode ser, indefinidamente, continuado até, conforme a Proposição 2 do Livro X de *Os Elementos*, de Euclides, nós termos um quadrado tão pequeno quanto desejamos, com o lado e a diagonal que são múltiplos integrais de uma unidade finita. Mas isto é absurdo. Portanto, L_1 e D_1 são incomensuráveis. No entanto, do quadrado ABCD, sabemos que a razão $\frac{D_1}{L_1}$ representa exatamente $\sqrt{2}$. Logo, concluímos que $\sqrt{2}$ é incomensurável.

3. *Dadas duas magnitudes comensuráveis, achar a maior medida comum delas.*

CP3. Tal proposição sedimenta, para as magnitudes, o procedimento exposto na proposição 2 do Livro VII com relação aos números. Heath (1956) enfatiza, especificamente para o Livro X, que “O processo para se encontrar a maior medida comum é provavelmente dado neste livro, não somente por causa da completude, mas porque em X 5 uma medida comum de duas magnitudes A, B é assumida e usada, e portanto é importante mostrar que cada medida pode ser encontrada caso já não conhecida.”. Também bastante interessante é quando Artmann (1999) expõe sua prova para a proposição 3 do Livro X, afirmando que “Se as duas magnitudes ‘a’ e ‘b’ são comensuráveis, o algoritmo euclidiano realizado com as mesmas terminará

(Prop. X. 2). Faça-o terminar com um último resto *f* medindo-as antes. Então *f* será a maior medida comum de ‘a’ e ‘b’.”[14].

COROLÀRIO

Disso, então, é evidente que, caso uma magnitude meça duas magnitudes, também medirá a maior medida comum delas.

CC1. Este corolário traz, para as magnitudes, o procedimento aplicado ao corolário da proposição 2 do Livro VII ao enfocar os números, revelando que “Disso, então, é evidente que, caso um número meça dois números, também medirá a maior medida comum deles.”. Neste ponto temos que, se *g* é uma magnitude que mede as magnitudes ‘a’ e ‘b’, ela também medirá uma magnitude *f*, tida como a maior medida comum de ‘a’ e ‘b’. Isto ocorre visto que *f* é um múltiplo de qualquer magnitude que meça as magnitudes ‘a’ e ‘b’. Ou, sendo mais preciso, como *f* é a maior medida comum de ‘a’ e ‘b’, não haverá nenhuma outra magnitude que a supere. Sendo assim, como *g* mede as magnitudes ‘a’ e ‘b’ também medirá *f*[15].

4. *Dadas três magnitudes comensuráveis, achar a maior medida comum delas.*

CP4. Tal proposição confirma, para as magnitudes, o procedimento exposto na proposição 3 do Livro VII com relação aos números, que expõe “Dados três números não primos entre si, achar a maior medida comum deles”. Heath (1956) esclarece, com bastante propriedade, que “Euclides pensa ser necessário provar que ‘a’, ‘b’ e ‘c’ não sendo primos entre si, ‘d’ e ‘c’ também não são primos entre si, então aqui ele pensa ser necessário provar que ‘d’ e ‘c’ são comensuráveis, como elas devem ser desde que qualquer medida comum de ‘a’, ‘b’ deve ser uma medida de sua maior medida comum ‘d’ (X 3, Corolário).” Também muito sutil é quando Artmann (1999), ao expor sua prova para a proposição 3 do Livro X, deixa um eco de possibilidade para a proposição 4 do Livro X, onde se pode ampliá-la garantindo-se que “Se as três magnitudes ‘a’, ‘b’ e ‘c’ são comensuráveis, o algoritmo euclidiano realizado com as mesmas terminará (Prop. X. 2).”. Daí que é preciso, de início, encontrar a maior medida comum entre ‘a’ e ‘b’. Sendo, então, *g* a maior medida comum de ‘a’, ‘b’, pode-se encontrar a maior medida comum entre a própria magnitude *g* e ‘c’. Sendo *f*

o resultado encontrado, de acordo com o corolário referente à proposição 3, conclui-se que *f* será a maior medida comum entre ‘a’, ‘b’ e ‘c’[16].

COROLÁRIO

Disso, então, é evidente que, caso uma magnitude meça três magnitudes, também medirá a maior medida comum delas.
Do mesmo modo, então, também nas mais numerosas a maior medida comum será tomada, e o corolário terá lugar. O que era preciso provar.

CC2. Este corolário traz, para as magnitudes, sutilezas importantes. Neste sentido temos que, se *g* é uma magnitude que mede as magnitudes ‘a’, ‘b’ e ‘c’, ela também medirá uma magnitude *f*, tida como a maior medida comum de ‘a’, ‘b’ e ‘c’. Isto ocorre devido ao fato de que *f* é um múltiplo de qualquer magnitude que meça as magnitudes ‘a’, ‘b’ e ‘c’. Ou, sendo mais incisivo, como *f* é a maior medida comum de ‘a’, ‘b’ e ‘c’, não haverá nenhuma outra magnitude que a supere. Sendo assim, como *g* mede as magnitudes ‘a’, ‘b’ e ‘c’ também medirá *f*. Em um comentário para o referido corolário, Heath (1956) alega que o mesmo “contém a extensão do processo para o caso de quatro ou mais magnitudes correspondendo à observação de Heron com respeito à extensão similar de VII. 3 para o caso de quatro ou mais números.”[17].

5. *As magnitudes comensuráveis têm entre si uma razão que um número, para um número.*

CP5. Nesta proposição, o tema da proporcionalidade entre magnitudes e números, ressoa de forma singular. Assim, a mesma está vinculada às definições 5 e 6 do Livro V, que tratam da proporcionalidade das magnitudes, expondo que “Magnitudes são ditas estar na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta, quando os mesmos múltiplos da primeira e da terceira ou, ao mesmo tempo, excedam ou, ao mesmo tempo, sejam iguais ou, ao mesmo tempo, sejam inferiores aos mesmos múltiplos da segunda e da quarta, relativamente a qualquer tipo que seja de multiplicação, cada um de cada um, tendo sido tomados correspondentes.” e “E as magnitudes, tendo a mesma razão, sejam ditas em proporção.”. A referida proposição também vincula-se à definição 21 do Livro VII,

que fazendo menção à proporcionalidade dos números, pontua que “Números estão em proporção, quando sejam o primeiro do segundo e o terceiro do quarto o mesmo múltiplo ou a mesma parte ou as mesmas partes.”. Então, é interessante verificar que Euclides usou de fundamentações distintas, em relação à proporcionalidade, tanto para magnitudes quanto para números. De certa forma, a caracterização da proporcionalidade dos números está incluída na caracterização da proporcionalidade das magnitudes. Como bem afirma Castaños (1996), “De uma relação similar entre magnitudes e números já havia feito eco Aristóteles (*Analíticos Posteriores, 74a17, 75b4-5)*. Porém esta correspondência entre as magnitudes comensuráveis e os números não deixa de resultar agora um tanto inesperada”. Ainda esclarecendo seu ponto de vista, a autora, citando Mueller (1986), enfatiza que “Se tem chegado a dizer que a falta de uma correlação expressa entre umas [magnitudes] e outros [números], antes do Livro X, constitui provavelmente a maior lacuna de *Os Elementos* em questão de fundamentos.”[18].

6. *Caso duas magnitudes tenham entre si uma razão que um número, para um número, as magnitudes serão comensuráveis.*

CP6. Embora esta proposição traga, em suas palavras, a mesma caracterização de proporcionalidade entre magnitudes e números, exposta na proposição 5, convém recordar que tal proposição ainda está lidando com as magnitudes comensuráveis. Nas proposições seguintes, 7 e 8, as magnitudes incomensuráveis terão suas exposições sacramentadas. Nas argumentações de Artmann (1999), para a referida proposição, tem-se que “Fazendo *a* e *b* ser duas magnitudes comensuráveis. Da definição de comensurabilidade, nós temos uma medida comum *c*, de *a* e *b*, e números *k* e *m*, tais que $a = kc$ e $b = mc$. Isso dá-nos $\frac{a}{b} = \frac{kc}{mc}$. O leitor moderno continuaria com $\frac{a}{b} = \frac{k}{m}$ e assim faz Euclides. Ele ignora que há duas definições diferentes de proporcionalidade para magnitudes, definições V. 5/6, e para números, definição VII. 20. Como Euclides, nós iremos saltar estas

dificuldades e apenas citar que se pode verificar que se existem números *k, m* tais que $\frac{a}{b} = \frac{k}{m}$, 'então' as magnitudes *a, b* são comensuráveis."[19].

COROLÁRIO

Disso, então, é evidente que, caso existam dois números, como os D, E, e uma reta, como a A, é possível fazer como o número D para o número E, assim a reta para uma reta. E caso também seja tomada uma média em proporção entre as A, F, como a B, como a A estará para a F, assim o sobre a A para o sobre a B, isto é, como a primeira para a terceira, assim o sobre a primeira para o sobre a segunda, o semelhante e semelhantemente descrito. Mas, como a A para a F, assim o número D está para o número. E, portanto, produziu-se também como o número D para o número E, assim o sobre a reta A para o sobre a reta B, o que era preciso provar.

CC3. Uma leitura atenta deste corolário remeterá ao corolário da proposição 19 do Livro VI, onde se pode ler que "Disso, é evidente que, caso três retas estejam em proporção, como a primeira está para a terceira, assim a figura sobre a primeira para a semelhante e semelhantemente descrita sobre a segunda.". Também verifica-se que tal corolário consolida o entendimento da definição 9 do Livro V, pois a mesma revela que "E, quando três magnitudes estejam em proporção, a primeira é dita ser para a terceira uma razão dupla da que para a segunda.". Muito conveniente é a explanação de Heath (1956) mostrando que "Se *a* é uma dada linha reta, e *m, n* quaisquer números, uma linha reta *x* pode ser encontrada tal que $\frac{a}{x} = \frac{m}{n}$. Nós podemos encontrar uma linha reta *y* tal que $\frac{a^2}{y^2} = \frac{m}{n}$. Pois temos apenas que tomar *y*, uma média proporcional entre *a* e *x*, como anteriormente encontrado, em cujo caso *a, y, x* estão em proporção contínua e $\frac{a^2}{y^2} = \frac{a}{x} = \frac{m}{n}$."[20].

7. *As magnitudes incomensuráveis não têm entre si uma razão que um número, para um número.*

CP7. Esta proposição é a contrapositiva da proposição 5. Aqui as magnitudes incomensuráveis ganham um enfoque semelhante ao que, atualmente, nos referimos aos chamados números irracionais. Deve-se verificar que, ao contrário da proposição 5, alimentada pelas definições 5 e 6, da proporcionalidade das magnitudes, expostas no Livro V; como também da definição 21 do Livro VII, referindo-se á proporcionalidade dos números, tal proposição não encerra uma proporcionalidade e, por isso, as magnitudes incomensuráveis não podem ser representadas por uma razão de um número para um número. Em uma densa percepção sobre o Livro X, pontuando a questão sempre presente de seus enfoques aritméticos, Knorr (1975) esclarece que "Então, o Livro X evoluiu longe de suas origens aritméticas. Ao compreender essa teoria, veremos que os padrões de pensamento típicos na teoria da equação nunca são centrais aqui, e que, ao contrário, os procedimentos algébricos e aritméticos aparecem apenas como auxiliares das investigações geométricas "[21].

8. *Caso duas magnitudes não tenham entre si uma razão que um número para um número, as magnitudes são incomensuráveis.*

CP8. Esta proposição é a contrapositiva da proposição 6. Muito sutil é a visão de Bourbaki (1994) ao trazer alguns pormenores sobre o Livro X, enfatizando a questão sempre abrangente da incomensurabilidade, mostrando os teores agudos dos chamados números irracionais e seus elos idênticos aos das magnitudes incomensuráveis, revelando que "e o único trabalho da antiguidade que fez uma digna contribuição para esta questão e exerceu uma influência duradoura, sobre os algebristas da Idade Média e a Renascença, é o Livro X de *Os Elementos*, de Euclides; neste Livro (a que alguns historiadores fariam o principal resultado de Teeteto retornar), ele [Euclides] considera as expressões obtidas pelas combinações de muitos resultados, tais como $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ (*a* e *b* racionais), dá condições sob as quais essas expressões são irracionais, classifica-as em numerosas categorias (que ele mostra serem distintas), e estuda as relações algébricas entre esses vários

irracionais, tais como aqueles que nós escreveríamos hoje como $\sqrt{\sqrt{p}+\sqrt{q}} = \sqrt{1/2(\sqrt{p}+\sqrt{p-q})} + \sqrt{1/2(\sqrt{p}-\sqrt{p-q})}$ [22].

9. *Os quadrados sobre as retas comensuráveis em comprimento têm entre si uma razão que um número quadrado, para um número quadrado; e os quadrados que têm entre si uma razão que um número quadrado, para um número quadrado, também terão os lados comensuráveis em comprimento. E os quadrados sobre as retas incomensuráveis em comprimento não têm entre si uma razão que um número quadrado, para um número quadrado; e os quadrados que não têm entre si uma razão que um número quadrado, para um número quadrado, nem terão os lados comensuráveis em comprimento.*

CP9. Esta proposição, abrangente e significativa, é um teorema que deve sua descoberta a Teeteto, segundo o escólio 62 do Livro X. Para Taisbak (1982), "O teorema é vital para as investigações no décimo livro, de que uma maior parte concerne a quadrados que são comensuráveis enquanto seus lados não são.". Já na opinião de van der Waerden (1962), ainda pontuando a importância de Teeteto na construção da proposição 9, tem-se que "Torna-se claro de todas estas coisas que o diálogo *Teeteto* e o início do Livro X andam juntos e se complementam. O livro X contém o desenvolvimento matemático mais detalhado das matérias brevemente indicadas na diálogo. Teeteto precisava das proposições X 5, 6 e X 9 para provar a proposição que ele enunciou no diálogo; Elas permitiram que ele traduzisse a suposição geométrica da incomensurabilidade dos lados em uma propriedade aritmética dos números que representam as áreas dos quadrados.". De certa forma, Euclides utiliza a exposição anterior da proposição 22 do Livro V para garantir a chamada "mesma razão" entre as magnitudes, visto que, conforme atesta, "Caso existam magnitudes, em quantidade qualquer, e outras iguais a elas em quantidade, tomadas duas a duas e na mesma razão, também, por igual posto, estarão na mesma razão.". Portanto, sendo *f* e *g* duas magnitudes comensuráveis, com *k* e *m* sendo números, podemos escrever que se $\frac{f}{g} = \frac{m}{k}$, então $\frac{f^2}{g^2} = \frac{m^2}{k^2}$ e, também, reciprocamente[23].

COROLÁRIO

E, das coisas provadas, será evidente que as comensuráveis em comprimento também são, em todos os casos, em potência, mas as em potência não são também, em todos os casos, em comprimento. [Se realmente os quadrados sobre as retas comensuráveis em comprimento têm uma razão que um número quadrado, para um número quadrado, e os que têm uma razão que um número, para um número, são comensuráveis. Desse modo, as retas comensuráveis em comprimento não [são] somente comensuráveis em comprimento, mas também em potência.

De novo, como quantos quadrados têm entre si uma razão que um número quadrado, para um número quadrado, foram provados comensuráveis em comprimento, sendo também comensuráveis em potência, pelo terem os quadrados uma razão que um número, para um número, portanto, quantos quadrados não têm uma razão que um número quadrado, para um número quadrado, mas simplesmente que um número, para um número, os mesmos quadrados serão, por um lado, comensuráveis em potência e, por outro lado, não mais também em comprimento; desse modo, por um lado, os comensuráveis em comprimento são também, em todos casos, em potência, e, por outro lado, os em potência não são também, em todos os caos, em comprimento, se não tiverem também uma razão que os números quadrados, para os números quadrados.

Digo, então, que [também] as incomensuráveis em comprimento não são, em todos os casos, também em potência, porque as comensuráveis em potência não podem ter uma razão que um número quadrado, para um número quadrado, e por isso, sendo comensuráveis em potência, são incomensuráveis em comprimento. Desse modo, as incomensuráveis em comprimento não são, em todos os casos, também em potência, mas podem, sendo incomensuráveis em comprimento, ser tanto incomensuráveis quanto comensuráveis em potência.

E as incomensuráveis em potência são, em todos os casos, também incomensuráveis em comprimento, pois, se [são] comensuráveis em comprimento, serão também comensuráveis em potência. E foram supostas também incomensuráveis; o que é absurdo. Portanto, as incomensuráveis em potência são, em todos os casos, também em comprimento.]

CC4. Este corolário deve ser analisado com bastante cuidado. A partir da terceira linha de seu texto, abre-se um colchete que só irá fechar-se na última linha do mesmo. Isto deve-se ao fato de que no texto original grego, estabelecido por Heiberg, quatro parágrafos são caracterizados como fora do padrão de texto euclidiano, não representando a chamada escrita consagrada de Euclides. Por outro lado, é bastante densa a informação prestada por Castaños (1996), em relação ao texto, que ela exclui de sua tradução, revelando que o mesmo "Traz uma espécie de prova ou explicação do corolário, se estabelece e explica que as retas incomensuráveis em longitude não são necessariamente incomensuráveis também em quadrado e que, todavia, aquelas retas que são incomensuráveis em quadrado são sempre incomensuráveis em longitude."[24].

LEMA

Foi provado nos relativos à aritmética, que os números planos semelhantes têm entre si uma razão que um número quadrado, para um número quadrado, e que, caso dois números tenham entre si uma razão que um número quadrado, para um número quadrado, são planos semelhantes. E disso é manifesto que os números planos não semelhantes, isto é, os que não têm os lados em proporção, não têm entre si uma razão que um número quadrado, para um número quadrado. Pois, se tiverem, serão planos semelhantes; o que não foi suposto. Portanto, os planos não semelhantes não têm entre si uma razão que um número quadrado, para um número quadrado.

CL1. O lema acima vincula-se à proposição 26 do Livro VIII que expõe "Os números planos semelhantes têm uma razão entre si, a qual um número quadrado, para um número quadrado". Também coaduna-se, com o referido lema, o contrário da proposição 26 do Livro VIII, ou seja, "Números que tenham uma razão entre si, a qual um número quadrado, para um numero quadrado, são planos semelhantes.". Contudo, um fato contundente marca este lema. É que o mesmo é considerado "suspeito" por Heath (1956), que o coloca em sua tradução totalmente entre colchetes. Isto porque, assegura o autor, "No entanto, Heiberg dá uma forte razão para supor que o lema possa ser uma interpolação. Ele [o Lema] faz referência à proposição seguinte, X. 10, e, como nós veremos, há tantas objeções a X. 10 que

dificilmente ele pode ser aceito como genuíno. Além disso, não há razão para que, no próprio lema, os números, que não são números planos semelhantes, devam ser importados como eles são."[25].

10. *Achar duas retas incomensuráveis com a reta proposta, uma somente em comprimento, a outra também em potência.*

CP10. Tal proposição está carregada de objeções e sofre, em sua essência, a forte convicção de não ser considerada genuína. Como atesta Castaños (1996), "Em primeiro lugar, depende da proposição seguinte X. 11 para concluir que o quadrado de A é incomensurável com o quadrado de E; de modo que incorreria na pretensão irregular de provar um teorema sobre a base de demonstrações posteriores.". E, recordando de uma colocação de Heiberg, expõe em uma nota que o teorema exposto na proposição 10 "resulta suspeito e que às duras penas pode-se considerar de Euclides.". Outro fator importante, segundo a visão crítica de Heath (1956), que coloca a proposição 10 totalmente entre colchetes, duvidando de sua autenticidade, é o seu delineamento de que "Por fim, o manuscrito P tem o número 10, em primeira mão, no topo de X. 11, a partir do qual se pode, talvez, concluir que X. 10 não tinha, no início, um número. Parece melhor, portanto, rejeitar, como espúrios, ambos, o lema e X. 10."[26].

11. *Caso quatro magnitudes estejam em proporção, e a primeira seja comensurável com a segunda, também a terceira será comensurável com a quarta; e, caso a primeira seja incomensurável com a segunda, também a terceira será incomensurável com a quarta.*

CP11. A proposição em questão vincula-se às proposições 5, 6, 7 e 8, já vistas, do Livro X. Assim, tornando *a, b, c, d* quatro magnitudes, e, ainda, *k, m* números inteiros, temos que, de início, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. No entanto, pela proposição 5, "As magnitudes comensuráveis têm entre si uma razão que um número, para um número.". Logo, vem que se *a* é comensurável com *b*, então $\frac{a}{b} = \frac{k}{m}$. Desta forma,

delineia-se que $\frac{c}{d} = \frac{k}{m}$. Todavia a proposição 6 garante que “Caso duas magnitudes tenham entre si uma razão que um número, para um número, as magnitudes serão comensuráveis.”. Portanto, chega-se à conclusão de que *c* é comensurável com *d*. Por outro lado, para o viés das magnitudes incomensuráveis, sabe-se que, pela proposição 7, “As magnitudes incomensuráveis não têm entre si uma razão que um número, para um número.”. Então, se *a* é incomensurável com *b*, pode-se garantir que $\frac{a}{b} \neq \frac{k}{m}$. Daí que, de imediato, obtemos que $\frac{c}{d} \neq \frac{k}{m}$. No entanto, a proposição 8 afirma que “Caso duas magnitudes não tenham entre si uma razão que um número para um número, as magnitudes são incomensuráveis.”. Assim, chegamos à conclusão que *c* é incomensurável com *d*[27].

12. *As comensuráveis com uma mesma magnitude também são comensuráveis entre si.*

CP12. Esta proposição tem vinculação com as proposições 5 e 6, já vistas, do Livro X. Assim, tornando *a, b, c* três magnitudes, e, ainda, *k, l, m, n* quatro números inteiros, temos que, de início, sendo *a* comensurável com *c*, como também *b* comensurável com *c*, verificamos que, pela proposição 5, “As magnitudes comensuráveis têm entre si uma razão que um número, para um número.”. Então, podemos expor que $\frac{a}{c} = \frac{k}{l}$ **,** assim como $\frac{c}{b} = \frac{m}{n}$. Deste ponto, garantimos que $\frac{k}{l} = \frac{km}{lm}$, onde também $\frac{m}{n} = \frac{lm}{ln}$. Portanto, fica claro perceber que, agora, $\frac{a}{c} = \frac{km}{lm}$ e, também, $\frac{c}{b} = \frac{lm}{ln}$. Daí que, imediatamente, conclui-se que $\frac{a}{b} = \frac{km}{ln}$.

Mas, não esquecendo a proposição 6, que pontua “Caso duas magnitudes tenham entre si uma razão que um número, para um número, as magnitudes serão comensuráveis.”, chega-se à conclusão de que *a* é comensurável com *b*.

13. *Caso duas magnitudes sejam comensuráveis, e uma delas seja incomensurável com alguma magnitude, também a restante será incomensurável com a mesma.*

CP13. A referida proposição tem vinculação com as proposições 5, 7 e 8, já vistas, do Livro X. Assim, tornando *a, b, c* três magnitudes, e, ainda, *k, l, m, n* quatro números inteiros, temos que, de início, sendo *a* comensurável com *b*, verifica-se que, pela proposição 5, “As magnitudes comensuráveis têm entre si uma razão que um número, para um número.”. Logo, podemos garantir que $\frac{a}{b} = \frac{k}{l}$. No entanto, *a* é incomensurável com *c*, e, pela proposição 7, “As magnitudes incomensuráveis não têm entre si uma razão que um número, para um número.”, de onde vem que $\frac{c}{a} \neq \frac{m}{n}$. Deste ponto, asseguramos que $\frac{k}{l} = \frac{km}{lm}$, onde também $\frac{m}{n} = \frac{lm}{ln}$. Portanto, é extremamente esclarecedor que, agora, $\frac{a}{b} = \frac{km}{lm}$ e, também, $\frac{c}{a} \neq \frac{lm}{ln}$. De onde, prontamente, conclui-se que $\frac{c}{b} \neq \frac{km}{ln}$. Contudo, não esquecendo a proposição 8, que testifica “Caso duas magnitudes não tenham entre si uma razão que um número para um número, as magnitudes são incomensuráveis.”, chega-se à conclusão de que *b* é incomensurável com *c*.

LEMA

Tendo sido dadas duas retas desiguais, achar por qual a maior é maior em potência do que a menor.

CL2. Este lema, por sinal bastante significativo, traz em seu contexto, a união das proposições 1 do Livro IV, 31 do Livro III e 47 do Livro I. A proposição 1 do Livro IV garante que “Ajustar, no círculo dado, uma reta igual à reta dada, que não é maior do que o diâmetro do círculo.”. Já a proposição 31 do Livro III assegura que “Em um círculo, por um lado, o ângulo no semicírculo é reto, e, por outro lado, o no segmento maior é menor do que um reto, enquanto o no segmento menor é maior do que um reto; e, ainda, por um lado, o ângulo do segmento maior é maior do que um reto, e,

por outro lado, o ângulo do segmento menor é menor do que um reto.”. Indo até a proposição 47 do Livro I, verifica-se que “Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.”. Esclarecendo melhor tal lema, Heath (1956) evidencia que o mesmo “dá um método óbvio de encontrar uma reta *c* igual a $\sqrt{a^2 \pm b^2}$, onde *a, b* são retas dadas, das quais *a* é a maior.”.

14. *Caso quatro retas estejam em proporção, e a primeira seja maior em potência do que a segunda pelo sobre uma comensurável com aquela mesma [em comprimento], também a terceira será maior em potência do que a quarta pelo sobre uma comensurável com aquela mesma [em comprimento]. E, caso a primeira seja maior em potência do que a segunda pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma [em comprimento], também a terceira será maior em potência do que a quarta pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma [em comprimento].*

CP14. A proposição em análise harmoniza-se com a proposição 22 do Livro VI, que expõe “Caso quatro retas estejam em proporção, também as retilíneas semelhantes e também semelhantemente descritas sobre elas estarão em proporção; e, caso as retilíneas semelhantes e também semelhantemente descritas sobre elas estejam em proporção, também as retas mesmas estarão em proporção.”. Assim, sendo *a, b, c, d* quatro retas dadas e estando em proporção, vem que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Não esquecendo que, pela proposição 22 do Livro VI, temos $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$, recordaremos que precisamos provar o fato de que $\frac{a^2}{a^2 - b^2} = \frac{c^2}{c^2 - d^2}$. No entanto, como $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$ surge, conforme atesta Heath (1956), a possibilidade de expor tal proporção como:

$$\frac{[(a^2 - b^2) + b^2]}{b^2} = \frac{[(c^2 - d^2) + d^2]}{d^2}$$

$$\frac{a^2-b^2}{b^2}+1=\frac{c^2-d^2}{d^2}+1$$

$$\frac{a^2-b^2}{b^2}=\frac{c^2-d^2}{d^2}$$

Todavia, a proposição 17 do Livro V garante que “Caso magnitudes, tendo sido compostas, estejam em proporção, também, tendo sido separadas, estarão em proporção.”. Então, logo chegamos ao resultado de que, inversamente, teremos a seguinte proporção:

$$\frac{b^2}{a^2-b^2}=\frac{d^2}{c^2-d^2}$$

Neste ponto, conforme pontua a proposição 22 do Livro V, assegura-se que “Caso existam magnitudes, em quantidade qualquer, e outras iguais a elas em quantidade, tomadas duas a duas e na mesma razão, também, por igual posto, estarão na mesma razão.”. Daí que podemos afirmar:

$$\frac{a^2}{a^2-b^2}=\frac{c^2}{c^2-d^2}$$

Agora, amparado no final da proposição 22 do Livro VI, que garante que se $\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$, então $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, somos levados a enxergar que:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{c}{\sqrt{c^2-d^2}}$$

Por conseguinte, conclui-se que *a* é comensurável ou incomensurável com $\sqrt{a^2-b^2}$. E, da mesma forma, *c* é comensurável ou incomensurável com

$\sqrt{c^2 - d^2}$. Caso *a* seja comensurável com $\sqrt{a^2 - b^2}$, teremos, pela proposição 5 do Livro X, que “As magnitudes comensuráveis têm entre si uma razão que um número, para um número.”. Logo, chamando *m, n* dois números inteiros, podemos garantir que $\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{m}{n}$. O mesmo procede para *c* sendo comensurável com $\sqrt{c^2 - a^2}$, visto que $\frac{c}{\sqrt{c^2 - d^2}} = \frac{m}{n}$. Já para o caso de *a* ser incomensurável com $\sqrt{a^2 - b^2}$, teremos, pela proposição 7 do Livro X, que “As magnitudes incomensuráveis não têm entre si uma razão que um número, para um número.”.

Assim, chamando *m, n* dois números inteiros, podemos garantir que $\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \neq \frac{m}{n}$. O mesmo procede para *c* sendo incomensurável com $\sqrt{c^2 - a^2}$, visto que $\frac{c}{\sqrt{c^2 - d^2}} \neq \frac{m}{n}$.

15. *Caso duas magnitudes comensuráveis sejam compostas, também a toda será comensurável com cada uma delas, e, caso a toda seja comensurável com uma delas, também as magnitudes do princípio serão comensuráveis.*

CP15. Para o caso específico desta proposição, no intuito de um melhor entendimento de sua essência, pode-se considerar onde se lê “sejam compostas” por “sejam somadas”. Fowler (1992), procurando trazer mais luminosidade à referida proposição, menciona que a mesma representa o fato de que “A soma e a diferença de duas linhas exprimíveis comensuráveis são exprimíveis”. Por outro lado, Heath (1956) traz mais esclarecimentos mostrando que se *a, b* são duas magnitudes comensuráveis, então existe, para os números inteiros *m, n*, uma medida comum *c*, tal que podemos obter $a = mc$ e $b = nc$. Logo, caso as duas magnitudes *a* e *b* sejam somadas, verifica-se que $a + b = mc + nc = (m + n)c$, onde se conclui que $a + b$, sendo devidamente medido por *c*, é comensurável tanto com *a* quanto com *b*. Agora, verificando o fato de que “caso a toda seja comensurável com cada uma delas”, para o caso de $a + b$ ser comensurável ou com *a* ou com *b*, podemos exprimir, de início, o

fato de $a + b$ ser comensurável com a. Logo, existe, para os números inteiros m, n, uma medida comum c, tal que podemos obter $a + b = mc$ e $a = nc$. Todavia, para a obtenção de b, temos que $b = (a + b) – a = mc – nc$, logo $b = (m – n)c$, revelando que b, também, é medido por c, sendo, portanto, comensurável com a, garantindo, assim, a verdade do final da proposição, que expõe “as magnitudes do princípio serão comensuráveis”[28].

16. *Caso duas magnitudes incomensuráveis sejam compostas, também a toda será incomensurável com cada uma delas, e, caso a toda seja incomensurável com uma delas, também as magnitudes do princípio serão incomensuráveis.*

CP16. Tal proposição possui o mesmo processo da proposição anterior, apenas tratando, agora, de magnitudes incomensuráveis. Não esquecer que, para um esclarecimento pleno da proposição, onde se lê “sejam compostas”, pode-se ler “sejam somadas”. Assim, considerando que se a, b são duas magnitudes incomensuráveis, então não existe, para os números inteiros m, n, uma medida comum c, logo podemos garantir que $a \neq mc$ e $b \neq nc$. Logo, caso as duas magnitudes a e b sejam somadas, verifica-se que $a + b \neq mc + nc$, que conduz, então, a $a + b \neq (m + n)c$, onde se conclui que $a + b$, não sendo devidamente medido por c, é incomensurável tanto com a quanto com b. Então, verificando o fato de que “caso a toda seja incomensurável com cada uma delas”, para o caso de $a + b$ ser incomensurável ou com a ou com b, podemos exprimir, de início, o fato de $a + b$ ser incomensurável com a. Deste jeito, não existe, para os números inteiros m, n, uma medida comum c, logo podemos obter $a + b \neq mc$ e $a \neq nc$. Todavia, para a obtenção de b, temos que $b = (a + b) – a \neq mc – nc$, logo $b \neq (m – n)c$, revelando que b, também, não é medido por c, sendo, portanto, incomensurável com a, garantindo, desta forma, a verdade do final da proposição, que retrata “as magnitudes do princípio serão incomensuráveis”[29].

LEMA

Caso um paralelogramo seja aplicado a alguma reta, deficiente por uma figura quadrada, o aplicado é igual ao pelos segmentos da reta produzidos pela aplicação.

CL3. Para o caso deste lema, são importantíssimas as palavras de Castaños (1991) esclarecendo a questão do "deficiente", expondo que "Em outras palavras, o procedimento por defeito consiste em aplicar um retângulo (ou mais em geral um paralelogramo) a um segmento de modo que resulte deficiente em um quadrado (ou em uma figura retilínea dada)". Indo mais adiante, Heath (1959) traz mais esclarecimentos sobre o lema garantindo que "Sendo *a* um segmento de reta dado, e *x* o lado do quadrado pelo qual o retângulo aplicado é para ser deficiente, o retângulo é igual a $ax - x^2$, que é, naturalmente, igual a $x(a - x)$. O retângulo pode ser escrito como xy, onde $x + y = a$. (...) mas o segundo modo de expressão mostra que os retângulos não diferem na forma mas somente na posição.".

17. *Caso duas retas sejam desiguais, e à maior seja aplicado um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada e divida-a em comensuráveis em comprimento, a maior será maior em potência do que a menor pelo sobre uma comensurável com aquela mesma [em comprimento]. E, caso a maior seja maior em potência do que a menor pelo sobre uma comensurável com aquela mesma [em comprimento] e á maior seja aplicado um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada, divide-a em comensuráveis em comprimento.*

CP17. Para esta proposição é interessante recordar o que Taisbak (1982), no Capítulo 1 de sua obra, enfatizou com bastante precisão, ao revelar que "O tema principal do décimo livro começa com a proposição 17.". Por outro lado, Knorr (1975) estabelecendo as sutilezas de tal proposição, pontua que "O Livro X, então, vem a ser visto como o projeto de classificação completa das raízes de certas formas de equações polinomiais (polinômios de quarta ordem em diante). Considere o comentário sobre X, 17, por exemplo. Neste teorema nós obtemos um critério para determinar se os segmentos produzidos, de acordo com o procedimento de aplicação de uma área, com o quadrado deficiente, serão incomensuráveis uns com

os outros. (...) Além do mais, X, 17 é um lema [proposição] crucial para a construção das irracionalidades maiores (X, 54-50, 91-96).". A prova desta proposição, exposta em Artmann (1999), revela algumas sutilezas. Isto porque o referido autor começa argumentando que, a partir das retas *b, c*, "Se existem duas retas desiguais, *b* > *c*, e para *b* é aplicado a área $\frac{c^2}{4}$ (isto é, com defeito) e deficiente por um quadrado (que significa $bx - x^2 = \frac{c^2}{4}$), e se $r^2 = b^2 - c^2$ (para ser construído via teorema de Pitágoras), então nós teremos que *x* é comensurável com *b,* se e somente se, *r* é comensurável com *b*.". O autor, após esclarecer que a prova de Euclides é geométrica e usa a proposição 5 do Livro II, que explicita "Caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o retângulo contido pela reta toda e por um dos segmentos é igual a ambos, o retângulo contido pelos segmentos e o quadrado sobre o predito segmento.", traz uma solução algébrica que "torna-se transparente para o moderno leitor", revelando que[30]:

$$bx - x^2 = \frac{c^2}{4}$$

$$x^2 - bx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{4}$$

$$(x - \frac{b}{2})^2 = \frac{1}{4}(b^2 - c^2)$$

$$x - \frac{b}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - c^2} = \frac{1}{2}r$$

18. *Caso duas retas sejam desiguais, e seja aplicado à maior um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada, e divida-a em incomensuráveis [em comprimento], a maior será maior em potência do que a menor pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma. E, caso a maior seja maior em potência do que a maior pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma, e seja*

aplicado à maior um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada, divide-a em incomensuráveis [em comprimento].

CP18. No caso específico desta proposição, tem-se que o texto da mesma, em relação à proposição anterior, apenas diferencia-se na mudança dos termos de "comensuráveis" para "incomensuráveis". Para Fowler (1992), tal proposição, atrelada à definição 3 e à proposição seguinte, traduz o fato de que "Se duas linhas exprimíveis são incomensuráveis, seus quadrados serão comensuráveis.". Ainda baseando-se na proposição anterior, podemos, a partir de Artmann (1999), garantir que ""Se existem duas retas desiguais, *b* > *c*, e para *b* é aplicado a área $\frac{c^2}{4}$ (isto é, com defeito) e deficiente por um quadrado (que significa $bx - x^2 = \frac{c^2}{4}$), e se $r^2 = b^2 - c^2$ (para ser construído via teorema de Pitágoras), então nós teremos que *x* é incomensurável com *b,* se e somente se, *r* é incomensurável com *b*."[31].

LEMA

Como foi provado que as comensuráveis em comprimento, também, em todos os casos, [são comensuráveis] em potência, mas as em potência não são , em todos os casos, também em comprimento, mas, então, podem ser comensuráveis ou incomensuráveis em comprimento, é evidente que, caso alguma seja comensurável em comprimento com a racional exposta, é dita racional e comensurável com ela não somente em comprimento, mas também em potência, visto que as comensuráveis em comprimento são, em todos os casos, também em potência. E, caso alguma seja comensurável em potência com a racional exposta, se, por um lado, também em comprimento, é dita, também assim, racional e comensurável com ela em comprimento e em potência, e se, por um lado, alguma sendo, de novo, comensurável em potência com a racional exposta, seja incomensurável com ela em comprimento, é dita também assim racional comensurável somente em potência.

CL4. Este lema possui, segundo Heath (1956), um texto que “É muito prolixo, e não pode ser chamado de necessário; parece, além disso, em conexão com uma adição claramente espúria e, por conseguinte, relegado por Heiberg para o Apêndice. A adição nem mesmo pretende ser de Euclides, pois começa com as palavras ‘pois ele chama racionais retas aquelas ...’. Por isso, sem dúvida, devemos relegar o próprio lema ao Apêndice.”. Desta forma, o referido autor o coloca totalmente entre colchetes, pontuando seu caráter suspeito[32].

19. *O retângulo contido por retas racionais comensuráveis em comprimento, segundo algum dos modos preditos, é racional.*

CP19. Em se tratando desta proposição, é muito importante recordar a definição 3 do Livro X, pois a mesma revela o inteiro teor das “retas racionais”, expondo que “(...) Seja chamada, de fato, por um lado, a reta proposta racional, e as comensuráveis com essa, quer em comprimento e em potência quer em potência somente, racionais, (...)”. Para Artmann (1999) a referida proposição pontua a equivalência geométrica da multiplicação. No entanto, Fowler (1992), em artigo que busca penetrar nos ecos e desmembramentos do Livro X, ao tecer explanações sobre a proposição 19, a atrelando às proposições 12 e 18, traz o posicionamento de que “Uma linha comensurável, ou comensurável apenas em quadrado, com uma linha exprimível é exprimível”. Já quando a vincula à definição 3 e à proposição 18, esclarece que “Se duas linhas exprimíveis são incomensuráveis, seus quadrados serão comensuráveis.”. E, arrematando seus enfoques, expõe, para a proposição 19, que “Um retângulo contido por linhas exprimíveis comensuráveis é exprimível”. De certa forma, buscando condensar os principais norteamentos sobre a proposição 19, Heath (1956), considerando *k* uma constante da forma *m/n*, *onde m,n* são números inteiros*,* argumenta que “Um retângulo racional pode ter qualquer uma das formas *ab, ka², kA, A,* onde *a,b* são comensuráveis com a unidade de comprimento, e *A* com a unidade de área.”[33].

20. *Caso um racional seja aplicado a uma racional, faz como largura uma racional e comensurável em comprimento com aquela a que foi aplicado.*

CP20. Analisando as reverberações desta proposição, verifica-se que a mesma é o oposto da proposição 19. Temos que para Artmann (1999) a referida proposição pontua a equivalência geométrica da divisão. Sempre atento às sutilezas e confluências do Livro X, Fowler (1992), para tal proposição, é categórico ao afirmar que "Se uma área exprimível *B* é aplicada a uma linha exprimível *h*, de modo que *B* = *hw*, então *w* será exprimível e comensurável com *h*.". Mergulhando nas conotações sutis da proposição 19, Heath (1959), molda o entendimento de que "Se ρ é uma reta racional, qualquer área racional é da forma $k\rho^2$. Se isto é aplicado a ρ, a largura é $k\rho$ comensurável em comprimento com ρ e, portanto, racional."[34].

21. *O retângulo contido por retas racionais, comensuráveis somente em potência, é irracional, e a que serve para produzi-lo é irracional, e seja chamada medial.*

CP21. No caso específico de tal proposição, tem-se a primeira vez em que o termo "medial" é exposto e definido. Aprende-se em Taisbak (1982), com relação ao evidenciado na proposição 21, que "Os Elementos introduzem o conceito de *méson* [área] do quadrilátero [retângulo] muito confusamente: a palavra não ocorre até o corolário de X, 23.". E ainda trazendo mais esclarecimentos, Castaños (1996) pontua que "A reta medial recebe tal nome por tratar-se da medida proporcional entre duas retas exprimíveis comensuráveis somente em quadrado. Demonstra-se aqui [prova de Euclides da proposição 21] que o retângulo compreendido por elas não é racionalmente exprimível. No corolário a X. 23 esta área denomina-se medial.". Enriquecendo os contextos e explanações da proposição 21, Fowler (1992) enfatiza que "O retângulo contido por linhas exprimíveis incomensuráveis é *alogos*". Depois, arremata com precisão que "Uma área *alogos* igual ao retângulo contido por linhas exprimíveis incomensuráveis é chamada medial. Uma linha é chamada medial se é o lado de uma área medial. Por exemplo, $\sqrt{2}a.a$ é uma área medial, $\sqrt{\sqrt{2}a}$ é uma linha medial."[35].

LEMA

Caso existam duas retas, como a primeira está para a segunda, assim o sobre a primeira para o pelas duas retas.

CL5. Para o caso específico deste lema, o seu entendimento é bastante tranquilo. Isto porque, chamando *f, g* de duas retas existentes, pode-se assegurar que $\frac{f}{g} = \frac{f^2}{fg}$, onde, explicitamente, temos que a razão $\frac{f}{g}$ representa o "como a primeira está para a segunda" e a razão $\frac{f^2}{fg}$ traduz o "assim o sobre a primeira para o pelas duas retas.".

22. *O sobre uma medial, aplicado a uma racional, faz como largura uma racional e incomensurável com aquela a que foi aplicado, em comprimento.*

CP22. Para um melhor entendimento da proposição em questão, pode-se ler "o sobre" como "o quadrado sobre". Na tradução de Castaños (1996), verifica-se que tanto o termo "quadrado" como "reta" estão entre parênteses. Assim, a autora pontua o início da proposição 22 como "O (quadrado) de uma (reta) medial". Importante, também, é que o termo "racional" é traduzido como "reta exprimível". Na condução de uma percepção mais aguda desta proposição, Fowler (1992) traz pluralidades interessantes, pois enfatiza que "Se uma área medial *b.c* (ou, equivalente, o quadrado sobre uma linha medial) é aplicada para uma altura exprimível *h*, sua largura *w* será exprimível e incomensurável com *h.*". Sua prova para estes esclarecimentos mostra que, de acordo com proposição 6 do Livro VI (Caso quatro retas estejam em proporção, o retângulo contido pelos extremos é igual ao retângulo contido pelos meios, e caso o retângulo contido pelos extremos seja igual ao retângulo contido pelos meios, as quatro retas estarão em proporção), caso *b.c* = *h.w*, então teremos que $\frac{h}{c} = \frac{b}{w}$. No entanto, pela proposição 22 do Livro VI (Caso quatro retas estejam em proporção, também as retilíneas semelhantes e também semelhantemente descritas sobre elas estarão em proporção; e, caso as

retilíneas semelhantes e também semelhantemente descritas sobre elas estejam em proporção, também as retas mesmas estarão em proporção), constataremos que $\frac{h^2}{c^2} = \frac{b^2}{w^2}$. Assim, se h^2 e c^2 são exprimíveis, também são comensuráveis, de modo que b^2 e w^2 são comensuráveis[36].

23. *A comensurável com a medial é uma medial.*

CP23. Para uma clareza deste pequeno texto traduzido, convém assinalar que onde se lê "comensurável" pode-se ler "reta comensurável" e, onde se lê "com a medial", pode-se ler "com a reta medial". A tradução de Heath(1956) pontua estas evidências. Já na tradução de Castaños (1996), o termo "reta", para a segunda observação, aparece entre parênteses. Então, especificamente em relação à proposição 23, temos que a mesma assinala, ainda, a tessitura da reta medial, ainda não comunicando o contexto da área medial. Para um esclarecimento mais nítido da referida proposição, Fowler (1992) expõe que "duas linhas [retas] mediais podem ser comensuráveis (por exemplo, $\sqrt{\sqrt{2}a}$ e $\sqrt{\sqrt{32}a}$), comensuráveis somente em quadrado (por exemplo, $\sqrt{\sqrt{2}a}$ e $\sqrt{\sqrt{8}a}$), incomensuráveis em quadrado (por exemplo, $\sqrt{\sqrt{2}a}$ e $\sqrt{\sqrt{3}a}$)."[37].

COROLÁRIO

Disso, então, é evidente, que o comensurável com a área medial é medial. [pois, as retas que servem para produzi-los são as comensuráveis em potência, das quais uma é medial; desse modo, também a restante é medial.]. E, do mesmo modo que nas coisas ditas sobre as racionais e sobre as mediais, segue a comensurável com a medial em comprimento ser dita medial e comensurável com ela não somente em comprimento, mas também em potências, porque, em geral, as comensuráveis em comprimento são, em todos os casos, também em potência. E, caso alguma seja comensurável com a medial em potência, se, por um lado, também em comprimento, são ditas também assim mediais e comensuráveis em comprimento e em potência, e

se, por outro lado, somente em potência, são ditas mediais comensuráveis somente em potência.

CC5. Na explicação deste corolário, convém ressaltar que onde se lê “que a comensurável com a área medial é medial”, pode-se ler “que a área comensurável com a área medial é medial”. Na tradução de Castaños (1996), o termo “área”, antes de comensurável, aparece entre parênteses. Em Heath (1956) o termo “área” é explicitado normalmente. Em se tratando do referido corolário, tem-se a primeira vez em que a expressão “área medial” é assinalada. Tal conotação é importantíssima, pois, até o presente corolário, tinham-se tratado apenas das chamadas “retas mediais”. Ainda tratando da importante conotação de que “uma área comensurável com uma área medial é medial”, Fowler (1992) esclarece tal afirmação expondo que “Faça $B = b^2$ ser uma área medial, e faça c^2 ser comensurável com b^2. Aplique, ambas, a uma [altura] exprimível h, de modo que $b^2 = h.v$ e $c^2 = h.w$. Então, v é exprimível e incomensurável com h, de modo que w é exprimível e incomensurável com h, logo $h.w = c^2$ é medial.”[38].

24. *O retângulo contido por retas mediais comensuráveis em comprimento, segundo algum dos modos ditos, é medial.*

CP24. Para esta proposição é importante salientar que Heath (1956) não expressa, em sua tradução, as palavras “segundo algum dos modos ditos”. Isto acontece visto que, na sua concepção, a palavra final “ditos”, que em inglês o autor grafa “aforesaid”, significando “acima dito” ou “acima mencionado”, para referir-se ao corolário da proposição anterior, não traduz o inteiro teor do que se evidencia no próprio corolário, não o ligando, desta forma, à proposição 24. E, seno mais preciso, afirma que “Mas as retas podem somente ser comensuráveis em comprimento em um caminho, embora elas possam ser mediais em dois caminhos, como explicado na adição {corolário] à proposição precedente, isto é, elas podem ser ou comensuráveis em comprimento ou comensuráveis apenas em quadrado com um dada reta medial.”. Por outro lado, com exemplos que muito enriquecem o contexto do conteúdo da proposições do Livro X, Fowler (1992), para a proposição 24,

argumenta que “O retângulo contido por linhas [retas] mediais comensuráveis é medial. Por exemplo: $\sqrt{\sqrt{2}a}$ e $\sqrt{\sqrt{32}a}$ contém a área medial $\sqrt{8}a.a$.“[39].

25. *O retângulo contido por retas mediais comensuráveis somente em potência é ou racional ou medial.*

CP25. Para o caso específico desta proposição, convém salientar, para uma melhor percepção do enunciado que o termo “em potência” pode ser substituído por “em quadrado” e o termo “racional” por “exprimível”. Na tradução de Castaños (1996) tais evidências são pontuadas. Já na tradução de Heath (1956), aparece apenas a versão “em potência”. Sempre aprimorando as contextualizações das proposições do Livro X, Fowler (1992), no intuito de um melhor entendimento da proposição 25, pontua que “O retângulo contido por linhas [retas] mediais somente em quadrado é ou exprimível ou medial. Exemplos: $\sqrt{\sqrt{2}a}$ e $\sqrt{\sqrt{8}a}$ contém a área exprimível $2a.a$; e $\sqrt{\sqrt{6}a}$ e $\sqrt{\sqrt{24}a}$ contém a área medial $\sqrt{12}a.a$.”[40].

26. *Um medial não excede um medial por um racional*

CP26. Para esta proposição, no intuito de melhor esclarecer seus enfoques e desmembramentos, onde se lê “um medial” e “um racional”, pode-se ler “uma área medial” e “uma área racional”. Tal constatação, no caso o acréscimo da palavra “área”, é posta entre parênteses na tradução de Castaños (1996), além da autora usar a expressão “exprimível”, ao invés de “racional”. Já para Heath (1956), os termos “uma área medial” e “uma área racional” aparecem normalmente. O referido autor ainda acrescenta, nos seus comentários à referida proposição, sutilezas postas na afirmação de que “Aplicar a duas áreas mediais dadas a mesma reta racional ρ. Elas podem, então, ser escritas na forma ρ.$\sqrt{k}$.ρ e ρ.$\sqrt{\lambda}$.ρ. A diferença é então ($\sqrt{k} - \sqrt{\lambda}$) ρ²; e a proposição assegura que esta não pode ser racional, isto é ($\sqrt{k} - \sqrt{\lambda}$) não pode ser igual a uma razão na forma $\frac{m}{n}$, com *m* e *n* inteiros.”. Outra constatação interessante é observar que, no caso, como se está lidando com áreas

mediais, os termos $\sqrt{k}$ e $\sqrt{\lambda}$ são incomensuráveis, ou seja, representam números irracionais. Então, o que Euclides pontua na proposição 26 é o que, modernamente, poderíamos afirmar como a diferença entre números irracionais ser incapaz de gerar um número racional. É evidente observar, também, que se está considerando o fato importante de que $k \neq \lambda$."[41].

27. *Achar mediais comensuráveis somente em potência contendo um racional.*

CP27. Para esta proposição, na certeza da busca por uma melhor compreensão do referido texto, onde se lê "mediais comensuráveis" pode-se ler "retas mediais comensuráveis" e onde de lê "em potência" pode-se ler "em quadrado". Na tradução de Heath (1956) acentuam-se tais evidências, além do que há o acréscimo de "retângulo" ao termo racional. Na tradução de Castaños (1996), todas estas observações são observadas. A sutileza da proposição 27 reside no fato de que Euclides enfoca a questão importante das exemplificações, sempre modeladoras na forma de melhor entendermos os conteúdos matemáticos, para que se avance no entendimento do assunto pesquisado.. Assim, para encontrar exemplos das chamadas retas mediais comensuráveis somente em potência (quadrado), contendo uma área racional (exprimível), verifica-se o fato para retas mediais da forma $\sqrt{\sqrt{k}a}$ e $\sqrt{\sqrt{k^3}a}$, onde *k* é um inteiro, não quadrado perfeito, que produz uma área racional (exprimível) de $ka.a$. Como exemplo pode-se destacar $\sqrt{\sqrt{7}a}$ e $\sqrt{\sqrt{343}a}$ que gera a área racional (exprimível) de $7a.a$. Outro exemplo é $\sqrt{\sqrt{10}a}$ e $\sqrt{\sqrt{1000}a}$ que gera a área racional (exprimível) de $10a.a$. Também verifica-se o fato para retas mediais da forma $\sqrt{\sqrt{k}a}$ e $\sqrt{\sqrt{k^7}a}$, onde *k* é um inteiro, não quadrado perfeito, produzindo uma área racional (exprimível) de $k^2a.a$. Como exemplo pode-se constatar $\sqrt{\sqrt{2}a}$ e $\sqrt{\sqrt{128}a}$ que contém a área racional (exprimível) de $4a.a$. Também pode-se assimilar o contexto em $\sqrt{\sqrt{3}a}$ e $\sqrt{\sqrt{2187}a}$ que gera a área racional (exprimível) de

$9a.a$. É importante salientar que nos comentários à proposição 25 do Livro X outros exemplos foram mencionados[42].

28. *Achar mediais comensuráveis somente em potência contendo um medial.*

CP28. Ao analisar a referida proposição, fluindo na direção de uma melhor averiguação do referido texto, onde se lê “mediais comensuráveis” pode-se ler “retas mediais comensuráveis” e onde de lê “em potência” pode-se ler “em quadrado”. Na tradução de Heath (1956) verificam-se tais evidências, além do que existe o acréscimo de “retângulo” ao termo medial. Na tradução de Castaños (1996), todas estas conotações são pontuadas. A abrangência da proposição 28 reside no fato de que Euclides trata da questão ampla das exemplificações, norteadoras da maneira de melhor penetrarmos na seara dos enfoques matemáticos, para que se esmiúce com cuidado o tema abordado. Assim, para encontrar exemplos das chamadas retas mediais comensuráveis somente em potência (quadrado), contendo uma área medial, verifica-se o fato para retas mediais da forma $\sqrt{\sqrt{k}a}$ e $\sqrt{\sqrt{k\lambda^2}a}$, onde *k* é um inteiro, não quadrado perfeito, e λ sendo qualquer inteiro, que produz uma área medial de $\sqrt{k\lambda}a.a$. Como exemplo pode-se destacar $\sqrt{\sqrt{3}a}$ e $\sqrt{\sqrt{12}a}$ que gera a área medial de $\sqrt{6}a.a$. Outro exemplo é $\sqrt{\sqrt{2}a}$ e $\sqrt{\sqrt{50}a}$ que gera a área medial de $\sqrt{10}a.a$. É importante frisar que, nos comentários à proposição 25 do Livro X, outros exemplos foram mencionados[43].

LEMA

Achar dois números quadrados, de modo a também o composto deles ser um quadrado.

CL6. Para este lema, pontuando um melhor esclarecimento do mesmo, onde se lê “o composto deles” pode-se ler “a soma deles”. Na tradução efetuada por Castaños (1996) e, também, na de Heath (1956), tal menção é efetuada. É importante salientar que o referido lema está intimamente atrelado à proposição 47 do Livro I

que assegura “Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.”. Assim, conforme solicita Euclides para encontrar-se os dois números quadrados, cuja soma resulte em um outro número quadrado, primeiro consideramos a hipótese de, para um número inteiro *n* par, com *n* > 2, temos que $\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1$ e $\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1$, unidos a *n*, constituem a chamada primeira “terna pitagórica” que garante o solicitado pelo lema. Então, esboçando a soma dos quadrados, vem que:

$$n^2 + \left[\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1\right]^2 = \left[\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1\right]^2$$

$$n^2 + \frac{n^4}{16} - \frac{n^2}{2} + 1 = \frac{n^4}{16} + \frac{n^2}{2} + 1$$

$$\frac{n^4}{16} + \frac{n^2}{2} + 1 = \frac{n^4}{16} + \frac{n^2}{2} + 1$$

$$\left[\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1\right]^2 = \left[\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1\right]^2$$

Agora, considerando a hipótese de, para um número inteiro *n* ímpar, com *n* > 1, temos que $\frac{n^2 - 1}{2}$ e $\frac{n^2 + 1}{2}$, unidos a *n*, constituem a chamada segunda “terna pitagórica” que garante o explicitado pelo lema. Então, esboçando a soma dos quadrados, vem que:

$$n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$$

$$n^2 + \frac{n^4-2n^2+1}{4} = \frac{n^4+2n^2+1}{4}$$

$$\frac{n^4+4n^2-2n^2+1}{4} = \frac{n^4+2n^2+1}{4}$$

$$\frac{n^4+2n^2+1}{4} = \frac{n^4+2n^2+1}{4}$$

$$\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$$

LEMA

Achar dois números quadrados, de modo a não ser o composto deles um quadrado.

CL7. Para este lema, tal qual pontuado no lema anterior, onde se lê “o composto deles” pode-se ler “a soma deles”. Na tradução efetuada por Heath (1956) e Castaños (1996) é assinalada a mudança no termo. A bem da verdade, o referido lema é o contrário do lema anterior, ou seja, pede para encontrar-se a soma de dois números quadrados cujo resultado não seja um número quadrado Assim, primeiro consideramos a hipótese de, para um número inteiro *n* par, com *n* > 2, temos que $\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1$ e $\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1$, unidos a *n*, mas em uma sequência diferente da chamada primeira “terna pitagórica”, já garante o que é pedido pelo lema. Logo, a sequência *n,* $\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1$ e $\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1$, juntamente com $\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1$, *n* e $\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1$ garantem o lema anterior. Logo, qualquer outra sequência diferente destas, irá garantir o pedido pelo presente lema. É o caso, por exemplo, das sequências, *n,*

$\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1$ e $\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1$ ou $\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1$, *n* e $\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1$. Também é o caso das sequências $\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1$, $\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1$ e *n* ou $\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1$, $\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1$ e *n*. Então, para esta última sequência, esboçando a soma dos quadrados, verifica-se que a mesma resultam em um valor diferente de n^2:

$$\left[\left(\frac{n}{2}\right)^2 - 1\right]^2 + \left[\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1\right]^2 \neq n^2$$

$$\frac{n^4}{16} - \frac{n^2}{2} + 1 + \frac{n^4}{16} + \frac{n^2}{2} + 1 \neq n^2$$

$$\frac{2n^4}{16} + 2 \neq n^2$$

$$\frac{n^4}{8} + 2 \neq n^2$$

Agora, considerando a hipótese de, para um número inteiro *n* ímpar, com *n* > 1, temos que $\frac{n^2-1}{2}$ e $\frac{n^2+1}{2}$, unidos a *n*, mas em uma sequência diferente da chamada segunda "terna pitagórica", já garante o que é pedido pelo lema. Logo, a sequência *n*, $\frac{n^2-1}{2}$ e $\frac{n^2+1}{2}$, juntamente com $\frac{n^2-1}{2}$, *n* e $\frac{n^2+1}{2}$, garantem o lema anterior. Logo, qualquer outra sequência diferente destas, irá garantir o pedido pelo presente lema. É o caso, por exemplo, das sequências *n*, $\frac{n^2+1}{2}$ e $\frac{n^2-1}{2}$ ou

$\frac{n^2+1}{2}$, *n* e $\frac{n^2-1}{2}$. Também é o caso das sequências $\frac{n^2+1}{2}$, $\frac{n^2-1}{2}$ e *n* ou $\frac{n^2-1}{2}$, $\frac{n^2+1}{2}$ e *n*. Então, para esta última sequência, esboçando a soma dos quadrados, verifica-se que a mesma resulta em um valor diferente de n^2, tem-se:

$$(\frac{n^2-1}{2})^2 + \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2 \neq n^2$$

$$\frac{n^4-2n^2+1}{4} + \frac{n^4+2n^2+1}{4} \neq n^2$$

$$\frac{2n^4+2}{4} \neq n^2$$

$$\frac{n^4+1}{2} \neq n^2$$

29. *Achar duas racionais comensuráveis somente em potência, de modo a ser a maior maior em potência do que a menor pelo sobre uma comensurável em comprimento com aquela mesma.*

CP29. No caso específico da análise desta proposição, convém, para uma melhor averiguação da mesma, que onde se lê “duas racionais comensuráveis” pode-se ler “duas retas racionais comensuráveis” ou “duas retas exprimíveis comensuráveis”; onde se lê “em potência” pode-se ler “em quadrado”; onde se lê “de modo a ser a maior maior em potência do que a menor”, pode-se ler “de modo que o quadrado da maior seja maior que o quadrado da menor”; onde se lê “pelo sobre uma comensurável” pode-se ler “no quadrado de uma reta comensurável”. Na tradução efetuada por Castaños efetuam-se tais contextualizações. Já na tradução de Heath (1956), além das observações anteriores, as palavras finais “em comprimento com

aquela mesma" são mudadas para "em comprimento com a maior". Ainda trazendo mais aprofundamentos à proposição 29, é muito importante a visão de van der Waerden (1975), comentando, a respeito das dificuldades do Livro X, que "Até X 28 vai razoavelmente bem, mas quando a existência das provas começa com X 29 ('Para encontrar duas potencialmente comensuráveis linhas retas, de modo que a diferença dos quadrados descritos nelas é igual para o quadrado em uma linha reta comensurável com o primeiro', etc.) um não enxergar muito bem o propósito de tudo isso é para servir. O autor conseguiu admiravelmente esconder sua linha de pensamento começando com suas construções, mesmo antes de ter Introduzido o conceito de binomial que não lançar alguma luz sobre a finalidade destas construções, e colocando em um ponto ainda mais tarde a divisão em 6 tipos de binomiais.". Por outro lado, nos comentários de Heath (1956), pode-se ter uma ideia da importância da proposição em apreço, quando o autor afirma que "Tome uma reta racional ρ e dois números m^2, n^2 , tais que $(m^2 - n^2)$ não é um quadrado. Tome uma reta *x* tal que $\frac{m^2}{m^2-n^2} = \frac{\rho^2}{x^2}$, de onde vem que $x^2 = \frac{m^2-n^2}{m^2}.\rho^2$ e, desta forma, $x = \rho.\sqrt{1-k^2}$, onde $k = n/m$. Então, ρ e $\rho.\sqrt{1-k^2}$ são as retas requeridas.". A partir deste ponto, o autor, fluindo em seus enfoques, baseando-se no fato de que $\frac{m^2}{m^2-n^2} = \frac{\rho^2}{x^2}$, logo observa que x^2 é comensurável com ρ^2. No entanto, como $x = \rho.\sqrt{1-k^2}$, tem-se que *x* é incomensurável com ρ. Todavia, ainda do fato de que $\frac{m^2}{m^2-n^2} = \frac{\rho^2}{x^2}$, pode-se garantir que $\frac{m^2}{n^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2-x^2}$, de modo que $\sqrt{\rho^2 - x^2}$ é comensurável com ρ. Mas ρ pode ser expresso como *a* ou $\sqrt{A}$. Então, as retas procuradas são da forma *a,* $\sqrt{a^2 - b^2}$ ou $\sqrt{A}$, $\sqrt{A - k^2A}$[44].

30. *Achar duas racionais comensuráveis somente em potência, de modo a ser a maior maior em potência do que a menor pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma em comprimento.*

CP30. Analisando o teor e as confluências desta proposição, como foi realizado na proposição 29, convém, para uma melhor observação da mesma, que onde se lê "duas racionais comensuráveis" pode-se ler "duas retas racionais comensuráveis" ou "duas retas exprimíveis comensuráveis"; onde se lê "em potência" pode-se ler "em quadrado"; onde se lê "de modo a ser a maior maior em potência do que a menor", pode-se ler "de modo que o quadrado da maior seja maior que o quadrado da menor"; onde se lê "pelo sobre uma incomensurável" pode-se ler "no quadrado de uma reta incomensurável". Na tradução elaborada por Castaños (1996) pontuam-se tais contextualizações. Já na tradução de Heath (1956), além das ações anteriores, as palavras finais "com aquela mesma em comprimento" são mudadas para "em comprimento com a maior". O autor, fluindo em seus comentários a respeito da proposição 30, através de um caminho semelhante ao traçado nos comentários à proposição 29, tece suas ideias partindo do princípio de há uma reta racional ρ e dois números m^2, n^2 , tais que $(m^2 + n^2)$ não é um quadrado. Tomando uma reta *x* tal que $\frac{m^2+n^2}{m^2} = \frac{\rho^2}{x^2}$, de onde vem que $x^2 = \frac{m^2}{m^2+n^2} \cdot \rho^2$ e, desta maneira, tem-se que $x = \frac{\rho}{\sqrt{1+k^2}}$, onde $k = n/m$, chegando a conclusão de que ρ e $\frac{\rho}{\sqrt{1+k^2}}$ são as retas requeridas. O autor, alargando suas concepções, baseando-se no fato de que $\frac{m^2+n^3}{m^2} = \frac{\rho^2}{x^2}$, logo enxerga que x^2 é comensurável com ρ^2. No entanto, como $x = \frac{\rho}{\sqrt{1+k^2}}$, tem-se que *x* é incomensurável com ρ. Todavia, ainda do fato de que $\frac{m^2+n^2}{m^2} = \frac{\rho^2}{x^2}$, pode-se garantir que $\frac{n^2}{m^2} = \frac{\rho^2-x^2}{x^2}$, de modo que $\sqrt{\rho^2 - x^2}$ é comensurável com *x*, porém é incomensurável, conforme pede a proposição, com ρ.. Mas ρ pode ser expresso como *a* ou $\sqrt{A}$. Então, as retas procuradas são da forma *a,* $\sqrt{a^2 - \frac{k^2a^2}{1+k^2}}$ ou $\sqrt{A}$, $\sqrt{A - B}$[45].

5.3 NOTAS E REFERÊNCIAS

1 – No trabalho *An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, apresentado na revista *Historia Mathematica 19*, p. 237, David Fowler, no Capítulo 4, intitulado "A Linguagem Básica do Livro X. Prestíssimo", esclarece seu posicionamento em relação às proposições inicias do Livro X, pontuando, para quem deseja penetrar na seara do livro intrigante, que:

> *O leitor é fortemente instigado a ler, também, as próprias enunciações de Euclides em cada caso. Os leitores, também, devem concluir os esboços das provas, ou acrescentar uma onde nenhuma é dada – uma geométrica, não uma prova aritmética, naturalmente – e, então, comparar suas provas com a de Euclides.*

2 – A respeito das afirmações explicitadas por Taisbak, as mesmas estão contidas na obra *Coloured Quadrangles – A Guide to the Tenth Book of Euclid's Elements (Quadriláteros Coloridos – Um Guia Para o Décimo Livro de Os Elementos de Euclides)*, p. 17. O referido autor ainda evidencia que "na medida em que o décimo livro, como nós o conhecemos, é parte do corpo inteiro de Os Elementos, podemos tomar, simplesmente, quais proposições necessitamos dos outros livros de Os Elementos.". E, em uma afirmação bastante plural, consolida que "Mas é uma impressão assustadora (que assombrou Oskar Becker já na década de trinta [1930]) que a história da maior e da menor linha, conforme o décimo livro, não necessitava da Teoria da Proporção de Eudoxo para ser contada de forma coerente."

3 – As afirmações de van der Waerden estão expostas em sua obra *Science Awakening (O Despertar da Ciência),* p. 167. Ainda pontuando a importante participação de Teeteto no estudo da incomensurabilidade, à p. 168, assegura, de forma enfática, que "em minha opinião o mérito de Teeteto repousa, portanto, não em sua contribuição para a teoria dos números, mas em seu estudo da incomensurabilidade dos segmentos de linha os quais produzem quadrados comensuráveis.".

4 – A respeito da importante menção às sutilezas da "medial', "binomial" e "apótomo", van der Waerden, op. cit., à p. 169, mostrando as abrangências das mesmas nas confluências do Livro X de Os Elementos de Euclides, pontua que:

> *Todas estas provas estão baseadas sobre uma ideia fundamental, que funciona como um fio condutor através do livro inteiro: para provar propriedades de algum tipo de linha*, *constrói um quadrado sobre esta linha e investiga as propriedades deste quadrado. Por exemplo, para provar que uma 'binomial' não pode ser uma 'medial', é mostrado que o quadrado sobre uma 'binomial' não pode ser uma área medial.*

5 – O conteúdo citado da obra *Euclid – The Creation of Mathematics (Euclides – A Criação da Matemática)*, de Benno Artmann, está incluído no Capítulo 23, intitulado “O Livro X de Euclides – Magnitudes Incomensuráveis”, no tópico “Comensurabilidade e Suas Relações com Outras Noções”, p. 227.

6 – Para o comentário das magnitudes comensuráveis e incomensuráveis, exposto para a primeira definição, foi fundamental a consulta à obra de Anthony Lo Bello, *Origins of Mathematical Words – A Comprehensive Dictionary of Latin, Greek, and Arabic Roots (Origens das Palavras Matemáticas – Um Dicionário Compreensivo das Raizes Latinas, Gregas e Arábicas),* onde, à p. 78, o referido autor trata de esmiuçar o termo “comensurável”. Já à p. 173, trata de esclarecer o termo “incomensurável”.

7 – A respeito da expressão grega δυνάμει σύμμετρος ser traduzida como “comensurável em potência” ou “comensurável em quadrado”, é bastante esclarecedor as argumentações de Luis Vega Reñón, p. 90, em sua apresentação para a tradução de Maria Luisa Puertas Castaños de *Os Elementos*, de Euclides. Assim, fluindo na análise da segunda definição, afirma que “as linhas retas são comensuráveis em quadrado [δυνάμει – dynámei] quando os quadrados (elevados) sobre elas são medidos por uma mesma área, e incomensuráveis em quadrado quando os quadrados sobre elas não podem ter nenhuma área como medida comum. (O termo ‘δυνάμις – dynámis (potência)’ tem em matemática uma referência equivalente ao que nós significamos com ‘elevar à segunda potência’ – (...) –; em contextos geométricos esta potência particular é obviamente o quadrado.)”

8 – Em relação à diferença entre as palavras gregas ρητός e άλογος, Maria Luísa Puertas Castaños, na sua tradução do Livro X, ao comentar a definição 3, p. 10, traz maiores esclarecimentos sobre o fato de evitar aplicar para tais palavras a tradução direta de “racional” e “irracional”, pontuando que “Trato de evitar as conotações habituais em nosso par ‘racional/irracional’, que levam a pensar em números e a dar, superficialmente, uma inclinação aritmética ao Livro X. A esta indevida aritmetização, soma-se a circunstância de que ‘racionalmente exprimível (rhètós) cobra em Euclides um sentido mais amplo que nosso ‘racional’ e, por correspondência, ‘não racionalmente exprimível (álogos)’ torna-se mais restrito que ‘irracional’.”. Por outro lado, Luis Vega, em sua apresentação para a tradução de Maria Luisa Puertas Castaños de *Os Elementos*, de Euclides, p. 90, mantém o par “racional” e “irracional” na sua versão da definição 3, pois enfatiza que “Chamem-se, então, racional [rheté] a linha designada e racionais as linhas que são comensuráveis com ela, bem em longitude e em quadrado, bem em quadrado somente, porém irracionais [alógoi] as incomensuráveis com ela.”. As conotações dos termos “racional” e “irracional”, como

palavras de origem no latim, têm sua fundamentação na obra de Anthony Lo Bello, Origins of Mathematical Words – A Comprehensive Dictionary of Latin, Greek, and Arabic Roots (Origens das Palavras Matemáticas – Um Dicionário Compreensivo das Raizes Latinas, Gregas e Arábicas), onde, à p. 270, o autor revela o termo "racional". Já à p. 187, expõe o termo "irracional".

9 – A respeito da definição 4, é interessante frisar como Chistian Taisbak, que trata o par "racional" e "irracional" como "vermelho" e "obscuro", na obra *Coloured Quadrangles – A Guide to the Tenth Book of Euclid's Elements (Quadriláteros Coloridos – Um Guia Para o Décimo Livro de Os Elementos de Euclides)*, à p. 27, evidencia sua versão de tal definição expondo que "Um quadrilátero é 'vermelho' se e somente se é comensurável com o quadrado de r.". Também são sutis as afirmações de Luis Vega, às pp. 90-91, na sua apresentação para a tradução de Maria Luisa Puertas Castaños de *Os Elementos*, de Euclides, mostrando que, conforme menciona a definição 4, "as áreas se chamarão racionais ou irracionais segundo sejam comensuráveis ou incomensuráveis com um quadrado racional. Feita a distinção capital entre as magnitudes comensuráveis e incomensuráveis, tem especial relevo a subdivisão das retas comensuráveis/incomensuráveis em outras duas classes: as que são em quadrado e as que são em longitude.".

10 – Ainda sobre o comentário à primeira proposição do Livro X, no que se refere ao fato de que todas as proposições do Livro XII, que fazem menção ao chamado 'método da exaustão', terem suas provas atreladas à referida proposição, Maria Luísa Puertas Castaños, p. 13, em seu comentário para sua própria tradução do Livro X, argumenta que "O relevo de X, 1 descansa em seu papel como princípio básico do método já mencionado da 'exaustão'. Assemelha-se à quinta suposição de Arquimedes em Sobre a Esfera e o Cilindro e recorda, assim mesmo, um lema do próprio Arquimedes em A Quadratura da Parábola.".

11 – A exposição das afirmações de Benno Artmann estão explicitadas em sua obra *Euclid – The Creation of Mathematics (Euclides – A Criação da Matemática),* no Capítulo 23, intitulado "O Livro X de Euclides – Magnitudes Incomensuráveis", no tópico "O Algoritmo Euclidiano para Magnitudes", p. 225.

12 – A respeito dos comentários à proposição 2, van der Waerden, em seu livro *Science Awakening (O Despertar da Ciência)*, traz uma menção às suas pluralidades, à p. 167, onde afirma que "E enquanto em Platão, Teeteto começa recordando as realizações de Teodoro,

o Livro X abre com três proposições concernentes às ‘subtrações sucessivas’ de magnitudes desiguais, entre as quais ocorre como em X 2 exatamente o critério para incomensurabilidade que Teodoro tinha, muito provavelmente, usado em sua investigação.”. Também são muito densas as argumentações de Maria Luísa Puertas Castaños, em seu comentário para a proposição 2, pontuando que “X 2 mostra um dos usos mais metódicos – digamos – que operativos do procedimento antifairético, isto é, seu uso como critério de comensurabilidade/incomensurabilidade.”.

13 – O livro de G. Chrystal, *Algebra – An Elementary Text-Book*, tem primeira edição no século XIX. A edição por nós consultada foi a quinta, de 1904. A partir da referência de Heath (1956), no Volume 3, p. 19, de sua tradução para o inglês de *Os Elementos* de Euclides, da prova da incomensurabilidade de $\sqrt{2}$, exposta à p. 270 do livro de Chrystal, o conhecimento da mesma teve repercussão e passou a ser citada por inúmeros outros autores.

14 – Os enfoques das argumentações, que englobam a proposição 3, de Benno Artmann estão pontuados em seu livro *Euclid – The Creation of Mathematics (Euclides – A Criação da Matemática)*, no Capítulo 23, intitulado “O Livro X de Euclides – Magnitudes Incomensuráveis”, no tópico “O Algoritmo Euclidiano para Magnitudes”, p. 226.

15 – Ainda sobre o corolário 1, referente à proposição 3, Maria Luísa Puertas Castaños, em sua tradução para o Livro X de *Os Elementos* de Euclides, p. 17, esmiúça que “X 3 aplica às magnitudes o procedimento empregado na [proposição] VII 2 para os números.”. Também explicita a importância de J. L. CHABERT et alii, Histoire d’algorithmes, Paris, 1993; cap. 4, págs. 129-158, para que se saiba mais “Sobre a projeção histórica e as modernas aplicações deste algoritmo euclidiano.”.

16 – A bem da verdade, a proposição 4 é uma ampliação da proposição 3, passando, então, de duas magnitudes comensuráveis para três magnitudes comensuráveis, onde se procura encontrar a maior medida comum delas. Aqui, a prova de Benno Artmann foi ampliada. O autor, à p. 226, de sua obra *Euclid – The Creation of Mathematics (Euclides – A Criação da Matemática)*, traz evidências que nos conduzem a tais norteamentos.

17 – No corolário 2, referente à proposição 4, tem-se uma ampliação do corolário 1, ligado à proposição 3, passando, então, do fato de que caso uma magnitude meça duas magnitudes para caso uma magnitude meça três magnitudes, resultando, assim, no fato de que a

magnitude medirá a maior medida comum das duas ou das três magnitudes. O comentário de Heath ao corolário 2, norteando o caso para quatro ou mais magnitudes, está presente em sua tradução para o Livro X de *Os Elementos* de Euclides, Volume 3, à p. 24.

18 – Para a importante proposição 5, e seus elos entre as magnitudes e os números, é bastante esclarecedor as afirmações de Luis Vega à p. 94, na sua apresentação para a tradução de Maria Luisa Puertas Castaños de *Os Elementos*, de Euclides, evidenciando que "X 5 sedimenta que 'as magnitudes comensuráveis têm entre si a razão que um número guarda com outro número'. Parte da prova desta proposição repousa na Def. 20 do Livro VII, isto é, na noção de proporção prevista para termos que sejam todos eles números, e no suposto tácito de que, os termos que sejam proporcionais no sentido da Def. 20 de VII, também o são no sentido generalizado da Def. 5 de V. Em outras palavras: depois de haver dado duas caracterizações autônomas e separadas da proporcionalidade, Euclides vem a supor que a segunda pode considerar-se um caso particular da primeira, ou que os números se comportam – até certo ponto – de forma semelhante às magnitudes.".

19 – No caso específico da proposição 6, as conotações sutis da prova referente à mesma, de Benno Artmann, estão expostas em seu livro *Euclid – The Creation of Mathematics (Euclides – A Criação da Matemática)*, no Capítulo 23, intitulado "O Livro X de Euclides – Magnitudes Incomensuráveis", no tópico "Magnitudes e Números", p. 226.

20 – Para o corolário 3, ligado à proposição 6, a exposição das concepções de Heath ao referido corolário, ainda esclarecendo que os mesmos são frequentemente usados no final das proposições, está presente em sua tradução para o Livro X de *Os Elementos* de Euclides, Volume 3, à p. 27.

21 – Em relação ao texto de Wilbur Knorr, explicitado no comentário à proposição 7, o mesmo está contido em sua obra *The Evolution of the Euclidean Elements – A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry (A Evolução de Os Elementos Euclidianos – Um Estudo da Teoria da Magnitudes Incomensuráveis e seu Significado para a Geometria Grega Antiga)*, citado à p. 11.

22 – Sobre o texto de Nicolas Bourbaki, exposto no comentário á proposição 8, tem-se a sua escrita no livro *Elements of the History of Mathematics (Elementos da História da Matemática)*, no capítulo 5, intitulado "Campos Polinomiais e Comutativos", citado à p. 71.

23 – Para a importante proposição 9 e suas repercussões e conotações, o texto de Christian Taisbak, retratado em sua obra *Coloured Quadrangles – A Guide to the Tenth Book of Euclid's Elements (Quadriláteros Coloridos – Um Guia Para o Décimo Livro de Os Elementos de Euclides)*, p. 25, consolida um maior entendimento sobre a referida proposição.

24 – Em relação ao corolário 4, agregado á proposição 9, tem-se que o comentário de Maria Luísa Puertas Castaños, em sua tradução para o Livro X de *Os Elementos* de Euclides, evidenciando as nuances da exclusão de determinados parágrafos do referido corolário, está exposto à p. 25.

25 – Em relação ao lema 1, agregado à proposição 9, tem-se que a exposição do fato do mesmo ser considerado "suspeito", através da "forte razão" evidenciada por Heiberg, está devidamente explicitada no comentário de Heath, em sua tradução para o Livro X de *Os Elementos* de Euclides, Volume 3, à p. 31.

26 – A proposição 10, que sofre o impacto desnorteador de ser considerada "suspeita", sem autenticidade, no comentário de Maria Luísa Puertas Castaños, para sua tradução do Livro X de *Os Elementos* de Euclides, p. 27, tem-se o esmiuçamento dos porquês tal proposição possui um alto grau de desconfiança em seu texto.

27 – Especificamente sobre as proposições 11, 12 e 14, juntamente com o lema da proposição 13, verifica-se, sutilmente, que possuem um forte viés esclarecedor de suas essências pontuado nos comentários de Heath, às pp. 33-38, de sua tradução para o Livro X de *Os Elementos* de Euclides, Volume 3.

28 – A respeito das conotações da proposição 15, David Fowler, no *trabalho An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, apresentado na revista Historia Mathematica 19, pp. 238-239, traz suas concepções sobre a importância da mesma, ao afirmar, por exemplo, também, que "A soma e a diferença de duas áreas exprimíveis é exprimível".

29 – Para a proposição 16, com seu enfoque nas "duas magnitudes incomensuráveis", ao contrário da proposição 15, que trata das "duas magnitudes comensuráveis", o lema que a ela se vincula traz o termo "deficiente", gerando, muitas vezes, os termos "reta deficiente" e "áreas deficientes". Maria Luísa Puertas Castaños, em sua tradução para o Livro I de *Os Elementos* de Euclides, no seu comentário à proposição 44, referência 59, p. 255, traz uma

suculenta exposição sobre o termo “deficiente”. Por outro lado, suas explicações mencionando o referido lema estão expostas na sua tradução para o Livro X de *Os Elementos* de Euclides, à p. 35.

30 – Os importantes enfoques da prova de Benno Artmann, delineando com mais clareza as concepções da proposição 17, estão explicitadas na obra *Euclid – The Creation of Mathematics (Euclides – A Criação da Matemática)*, no Capítulo 23, intitulado “O Livro X de Euclides – Magnitudes Incomensuráveis”, no tópico “Incomensurabilidade e sua Relação com Outras Noções”, p. 227-228.

31 – Os ecos norteadores das percepções de David Fowler, mostrando as ligações da proposição 18 com a definição 3 e a proposição 19, têm sua exposição no trabalho *An Invitation to Read Book X of Euclid’s Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, apresentado na revista Historia Mathematica 19, p. 239.

32 – Sobre o caráter “suspeito” do lema vinculado à proposição 18, ligando-o ao fato de Heath colocá-lo totalmente entre colchetes, na sua tradução para o Livro X de *Os Elementos* de Euclides, Volume 3, tem-se que a exposição de tal acontecimento ocorre à p. 47 da mencionada obra..

33 – A respeito das ligações da proposição 19, com as proposições 12 e 18, além de sua vinculação, também, com a definição 3, tem-se que tais evidências estão pontuadas em David Fowler, no compêndio *An Invitation to Read Book X of Euclid’s Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, apresentado na revista Historia Mathematica 19, pp. 238-239.

34 – Para a proposição 20, a citação de Benno Artmann está contida na obra *Euclid – The Creation of Mathematics (Euclides – A Criação da Matemática)*, no Capítulo 23, intitulado “O Livro X de Euclides – Magnitudes Incomensuráveis”, no tópico “Incomensurabilidade e sua Relação com Outras Noções”, p. 227. Já a citação de David Fowler aparece, à p. 239, no trabalho *An Invitation to Read Book X of Euclid’s Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, apresentado na revista Historia Mathematica 19.

35 – No caso da proposição 21 e seus delineamentos, tem-se que a citação de Christian Taisbak está exposta na obra *Coloured Quadrangles – A Guide to the Tenth Book of Euclid’s Elements (Quadriláteros Coloridos – Um Guia Para o Décimo Livro de Os Elementos de Euclides)*, pp. 30-31. O autor, que usa o termo “vermelho” para indicar os termos “racional”

ou “exprimível”, ainda expõe, com relação à proposição 21, que “um retângulo que é contido por segmentos de linha vermelhos, comensuráveis somente em quadrado, não é vermelho.”. Os esclarecimentos de Maria Luísa Puertas Castaños, tanto para a referida proposição, quanto para o lema a ela vinculado, estão explicitados em sua tradução para o Livro X de *Os Elementos* de Euclides, às p. 41-42.

36 – A respeito das concepções da proposição 22, Christian Taisbak no livro *Coloured Quadrangles – A Guide to the Tenth Book of Euclid’s Elements (Quadriláteros Coloridos – Um Guia Para o Décimo Livro de Os Elementos de Euclides)*, p. 31, revela mais sutilezas sobre a mesma. Por outro lado, as informações de David Fowler estão expostas, à p. 239, do compêndio *An Invitation to Read Book X of Euclid’s Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, evidenciado na revista Historia Mathematica 19.

37 – Mais aprofundamentos, sobre a proposição 23, podem ser colhidos em Christian Taisbak no livro *Coloured Quadrangles – A Guide to the Tenth Book of Euclid’s Elements (Quadriláteros Coloridos – Um Guia Para o Décimo Livro de Os Elementos de Euclides)*, p. 32. Já em relação aos exemplos, delineados por David Fowler, pode-se acrescentar outros. Deste modo, duas linhas [retas] mediais podem ser comensuráveis (por exemplo, $\sqrt{\sqrt{3}a}$ e $\sqrt{\sqrt{243}a}$ ou $\sqrt{\sqrt{5}a}$ e $\sqrt{\sqrt{3125}a}$), comensuráveis somente em quadrado (por exemplo, $\sqrt{\sqrt{3}a}$ e $\sqrt{\sqrt{27}a}$ ou $\sqrt{\sqrt{5}a}$ e $\sqrt{\sqrt{125}a}$), incomensuráveis em quadrado (por exemplo, $\sqrt{\sqrt{3}a}$ e $\sqrt{\sqrt{2}a}$ ou $\sqrt{\sqrt{5}a}$ e $\sqrt{\sqrt{3}a}$).”.

38 – Em relação ao corolário 5, vinculado à proposição 23, Maria Luísa Puertas Castaños, em sua tradução para o Livro X de *Os Elementos* de Euclides, à p. 45, é enfática em seu comentário ao revelar que “No corolário temos a primeira menção de uma área medial. Trata-se de uma área igual ao quadrado de uma reta medial. Euclides não dá uma definição explícita.”. A citação a David Fowler está contida no compêndio *An Invitation to Read Book X of Euclid’s Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, evidenciado na revista Historia Mathematica 19, p. 239.

39 – Mais concepções e enfoques, sobre a proposição 24, podem ser obtidos em Christian Taisbak no livro *Coloured Quadrangles – A Guide to the Tenth Book of Euclid’s Elements (Quadriláteros Coloridos – Um Guia Para o Décimo Livro de Os Elementos de Euclides)*, p. 33. Com relação aos exemplos, explicitados por David Fowler, pode-se acrescentar outros

tantos. Assim sendo, para o fato de o retângulo contido por linhas [retas] mediais comensuráveis ser medial, temos que $\sqrt{\sqrt{3}a}$ e $\sqrt{\sqrt{243}a}$ contém a área medial $\sqrt{27}a$ e $\sqrt{\sqrt{5}a}$ e $\sqrt{\sqrt{3125}a}$ contém a área medial $\sqrt{125}a$

40 – Para maiores esclarecimentos sobre a proposição 25, convém Christian Taisbak no livro *Coloured Quadrangles – A Guide to the Tenth Book of Euclid's Elements (Quadriláteros Coloridos – Um Guia Para o Décimo Livro de Os Elementos de Euclides)*, p. 32. Já em relação aos exemplos, evidenciados por David Fowler, é evidente que muitos outros podem ser citados. Assim, $\sqrt{\sqrt{3}a}$ e $\sqrt{\sqrt{27}a}$, como também $\sqrt{\sqrt{5}a}$ e $\sqrt{\sqrt{125}a}$, geram áreas exprimíveis nos valores de $3a.a$ e $5a.a$. Verifica-se, desta forma, que $\sqrt{\sqrt{2}a}$ e $\sqrt{\sqrt{18}a}$, como também $\sqrt{\sqrt{3}a}$ e $\sqrt{\sqrt{12}a}$, geram o mesmo valor de áreas medias, no caso $\sqrt{6a.a}$.

41 – Os principais delineamentos dos comentários de Heath, para a proposição 26, estão postos, às pp. 59-60, na sua tradução para o Livro X de *Os Elementos* de Euclides, Volume 3. Mais sutilezas sobre tal proposição podem ser vistas em Christian Taisbak no livro *Coloured Quadrangles – A Guide to the Tenth Book of Euclid's Elements (Quadriláteros Coloridos – Um Guia Para o Décimo Livro de Os Elementos de Euclides)*, p. 37.

42 – No caso específico da proposição 27, os exemplos delineados no comentário estão fortemente vinculados às concepções de David Fowler, no trabalho *An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, evidenciado na revista Historia Mathematica 19, p. 240.

43 – A proposição 28, juntamente com seus dois lemas, pontuados como o lema 6 e o lema 7, têm, em seus comentários, um denso embasamento nas percepções de Heath, configuradas na sua tradução para o Livro X de *Os Elementos* de Euclides, Volume 3, às pp. 61-66.

44 – As importantes concepções de van der Waerden, a respeito da proposição 29, estão contidas em sua obra *Science Awakening (O Despertar da Ciência)*, p. 172. O autor, movido por constatações sutis e, até certo ponto polêmicas, ainda afirma, sobre o Livro X de *Os Elementos* de Euclides, que "Daí que – o livro inteiro é trabalho de Teeteto. Esta conclusão encontra mais confirmações na conexão íntima entre o décimo e o décimo-terceiro livros.".

45 – Em relação ao comentário da proposição 30, tem-se que o mesmo está intimamente relacionado com as sempre contundentes afirmações de Heath, na sua tradução para o Livro X de *Os Elementos* de Euclides, Volume 3, às pp. 68-69. A partir de agora, no próximo capítulo, ter-se-á a análise das proposições 31 a 60, que irão ampliar ainda mais, o leque de abrangências do profundo Livro X de *Os Elementos* de Euclides.

CAPÍTULO 6

LIVRO X: OS SUMOS DAS CONFIGURAÇÕES

6.1 CONSONÂNCIAS, INTERAÇÕES

Ressurgindo, cada vez mais, desafiador e delicado, repleto de sutilezas, capaz de nos envolver profundamente em suas proposições, definições, lemas e corolários, o Livro X de *Os Elementos* de Euclides é diversificado, múltiplo. É através de Luis Lope Vega, em sua introdução para a tradução de Castaños (1991), dos livros I a IV, de *Os Elementos* de Euclides, que se pode constatar que o Livro X "recolhe investigações relativamente recentes – de Teeteto, de Eudoxo e, possivelmente, de Hermótimo (o autor anterior a Euclides, que é citado por Próclus, como tendo 'feito avançar as coisas investigadas antes por Eudoxo e Teeteto, que tanto descobriu mais muitas coisas dos *Elementos* quanto redigiu alguns dos *Lugares*) –; move-se em uma linha de elucidação e de catalogação progressiva de uns resultados acerca de diversos tipos de comensurabilidade/incomensurabilidade e de classes possíveis de retas racionais/irracionais. Páppus, em um comentário sobre o livro, que somente se tem conservado através de uma versão árabe, reconhece o papel clarificador que corresponde a Euclides."[1]. Especificamente para este capítulo, serão comentadas as proposições de 31 a 60. É interessante ressaltar que neste bloco de proposições não aparecem corolários. Todavia, surgem, entre as proposições 47 e 48, um grupo de seis definições, intituladas "segundas definições", que se agregam ao corpo das proposições em análise, a um total de cinco lemas. O objetivo deste capítulo é mostrar, através de comentários densos, a importância e a dimensão do Livro X, o quanto Euclides foi capaz de filtrar e ponderar, concatenar e expandir o contexto de ideias, que, até os nossos dias, continuam a ser fundamentais, construtoras de inúmeras concepções e norteamentos.

Para Fowler (1992), ponderando a respeito dos entrelaçamentos das proposições do Livro X, evidenciando que o mesmo possui elos de ligações sutis, há o testemunho de que "As proposições 36 a 72 do Livro X descrevem propriedades de certas somas de pares de linhas ou áreas; então, um conjunto paralelo das proposições 73 a 110, descrevem precisamente, propriedades análogas de suas diferenças. A proposição *n* corresponde à proposição *n* + *37*, para 36 ≤ *n* ≤ 70; então, a proposição 71, sobre uma área exprimível mais uma área medial, está dividida nas proposições 108 (exprimível menos medial) e 109 (medial menos exprimível); e a proposição 72 (medial mais medial) corresponde a 110 (medial menos medial). Alguém que entenda qualquer um destes pares pode, imediatamente, entender o outro. (...) As proposições 36 a 70 dividem-se, então, em cinco blocos de seis e um bloco de cinco proposições (a proposição 67 lida com dois casos em um). Se nós entendemos a primeira proposição de cada bloco devidamente, podemos passar pelo resto quase automaticamente. Então, precisamos apenas entender cinco proposições – 36, 42, 48, 54, e 60 – e as definições 47/48 para entender tudo deste material."[2].

De fato, confirmando tais constatações, explorando os contextos das singularidades das proposições configuradas no Livro X, Knorr (1983) ainda revela, sobre as interligações entre as referidas proposições, que "Segue-se uma seção de construções especiais (X, 27 – 35) por meio do qual Euclides continua a construir as seis classes de linhas $c + d$ e provar suas irracionalidades (X, 36 – 41), e, depois, construir as seis classes $c - d$ com suas irracionalidades (X, 73 – 78). Por exemplo, a irracional 'maior' (X, 39) é construída como a soma das linhas c, d que são tomadas para ser incomensuráveis, uma com a outra, em quadrado, mas para o qual $c^2 + d^2$ é racional e cd é medial;". Expandindo o seu pensamento, criando uma cadeia de convicções que perpassa a exposição de todo o seu trabalho, intitulado '*La Croix des Mathématiciens': Euclidean Theory of Irrational Lines (A Cruz dos Matemáticos: A Teoria Euclidiana das Linhas Irracionais)*, moldando suas explicações de tal forma, que consigamos penetrar com profundidade, nos enredos e enlaces do Livro X, o historiador da matemática enfatiza que "No próximo conjunto de teoremas [as proposições] X, 42–47, Euclides estabelece a singularidade da expressão para cada classe de irracional aditivo, enquanto que os análogos para os

irracionais subtrativos aparecem em X, 79–84. Aqui novamente os tratamentos são particulares, de modo que nenhum caso é colocado em dependência de qualquer outro. (..) [Nos] teoremas X, 54–59 ele mostra que a linha formada como o 'lado' de uma área gerada por um racional e cada uma das binomiais acaba por ser um dos aditivos Irracionais já especificados."[3]

É muito importante, também, as colocações de van der Waerden (1975) esclarecendo a questão de outros tipos de irracionalidades que surgem ao longo do Livro X[4], consolidando inúmeros aspectos e concepções que acabam por demonstrar o teor do pensamento euclidiano:

> *As outras classes de irracionais, que são introduzidas imediatamente após a binomial e o apótomo, podem ser melhor entendidas a partir do seguinte problema: sob que condições a raiz quadrada de uma binomial (ou um apótomo) é, ela mesma, uma binomial (ou um apótomo)? Uma binomial* $a + b$ *não é uma área mas um segmento de linha. Portanto as ideias gregas não permitem a extração de uma raiz quadrada. A fim de definir uma magnitude que corresponda a nosso* $\sqrt{a+b}$*, é necessário primeiro fazer* $a + b$ *em uma área, construindo um retângulo de base* e*, e altura* $a + b$*. É isto que acontece muitas vezes [nas proposições] X 54-59 e X 91-96. A questão agora, torna-se, portanto: Esta área é igual àquela do quadrado de uma binomial* $u + v$ *, isto é,* $(u + v)^2 = e(a + b)$*? Desenvolvendo [a expressão] conduz a* $(u^2 + v^2) + 2uv = ea + eb$*. Agora,* $u^2 + v^2$ *é uma área mensurável e* $2uv$ *é uma área medial. Do fato que a binomial pode ser dividida em um caminho somente em termos exprimíveis, a conclusão segue, prontamente, que os dois termos à esquerda, ou seja,* $(u^2 + v^2)$ *e* $2uv$ *, devem, separadamente, ser iguais aos termos à direita, isto é, um sendo o maior destes termos* $u^2 + v^2 = ea$*, e* $2uv = eb$*.* (pp. 169-170)

Não se deve esquecer que "as segundas definições", expostas entre as proposições 47 e 48, pontuam singularidades as mais diversas e, segundo Castaños (1996), trazem os sete primeiros tipos de retas e suas propriedades. Tais retas são chamadas "medial", "binomial", "primeira bimedial", "segunda bimedial", "maior", "lado do quadrado equivalente a uma área exprimível mais uma área medial" e "lado

do quadrado equivalente à soma de duas áreas mediais". A autora também assegura que "Euclides apresenta nestas segundas definições uma subclassificação das binomiais em seis tipos diferentes. Nas proposições 48–53 ensina a forma de achar cada uma delas"[5].

6.2 PROPOSIÇÕES 31 A 60

PROPOSIÇÕES

31. Achar duas mediais comensuráveis somente em potência, contendo um racional, de modo a ser a maior maior em potência do que a menor pelo sobre uma comensurável com aquela mesma em comprimento.

CP31. No caso específico da análise desta proposição, faz-se necessário, para um melhor exame da mesma, que onde se lê "duas mediais comensuráveis" pode-se ler "duas retas mediais comensuráveis"; onde se lê "em potência" pode-se ler "em quadrado"; onde se lê "contendo um racional" pode-se ler "que compreendam um retângulo exprimível" ou "contendo um retângulo racional"; onde se lê "de modo a ser a maior maior em potência do que a menor", pode-se ler "de modo que o quadrado da maior seja maior que o quadrado da menor"; onde se lê "pelo sobre uma comensurável" pode-se ler "no quadrado de uma reta comensurável". Na tradução efetuada por Castaños (1996) efetuam-se a maioria de tais indicações. Já para a importante tradução de Heath (1956), além dos enfoques delineados anteriormente, as palavras finais "com aquela mesma em comprimento" são mudadas para "em comprimento com a maior". Fazendo menção à importância do conteúdo do Livro X de *Os Elementos*, principalmente entre as proposições 31 e 65, Fowler (1992) garante que "Todavia Euclides não estabelece a teoria desta maneira. Em vez disso, ele nos apresenta, friamente, com os ingredientes x e y do novo *alogoi* nas proposições 31 a 35, define estes *alogoi* em 36 a 41, explora suas propriedades em 42 a 47, introduz a subclassificação de binomiais nas definições 47/48 e proposições 48 a 53; e só então explica o que ele está fazendo quanto às operações de superfície (r + s) em 54 a 59 e (s + r) em 60 a 65."[6]. Muito importante,

também, no encontro das solicitadas duas retas mediais comensuráveis, é recordar o que, na proposição 29, através das observações de Heath (1956), pontua-se que

"Tome uma reta racional ρ e dois números *m², n²* , tais que *(m² - n²)* não é um quadrado. Tome uma reta *x* tal que $\frac{m^2}{m^2-n^2} = \frac{\rho^2}{x^2}$, de onde vem que $x^2 = \frac{m^2-n^2}{m^2}.\rho^2$ e, desta forma, $x = \rho.\sqrt{1-k^2}$, onde *k = n/m.* Então, ρ e $\rho.\sqrt{1-k^2}$ são as retas requeridas.". Logo, prosseguindo, o referido autor pede para que se tome uma média proporcional entre $\rho.\sqrt[4]{1-k^2}$ e *x*, tal que se tenha:

$$\frac{\rho.\sqrt[4]{1-k^2}}{\rho.\sqrt{1-k^2}} = \frac{\rho.\sqrt{1-k^2}}{x}$$

$$x = \frac{(\rho.\sqrt{1-k^2})^2}{\rho.\sqrt[4]{1-k^2}}$$

$$x = \frac{\rho^2.(1-k^2)}{\rho.\sqrt[4]{1-k^2}}$$

$$x = \rho.(1-k^2)^{1-\frac{1}{4}}$$

$$x = \rho.(1-k^2)^{\frac{3}{4}}$$

$$x = \rho.\sqrt[4]{(1-k^2)^3}$$

Neste ponto, imediatamente conclui-se que, as retas mediais que satisfazem as condições propostas pela proposição 31, são $\rho.\sqrt[4]{1-k^2}$ e *x*, ou $\rho.\sqrt[4]{1-k^2}$ e $\rho.\sqrt[4]{(1-k^2)^3}$. Outra concepção importante é o fato de que ρ, $\rho.\sqrt[4]{1-k^2}$, $\rho.\sqrt{1-k^2}$ e *x,* constituem retas em uma proporção continuada, visto que:

$$\frac{\rho}{\rho.\sqrt{1-k^2}} = \frac{\rho.\sqrt[4]{1-k^2}}{x}$$

$$x = \rho.(1-k^2)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$$

$$x = \rho.(1-k^2)^{\frac{3}{4}}$$

$$x = \rho.\sqrt[4]{(1-k^2)^3}$$

Desta maneira, enxerga-se que *x* é comensurável somente em quadrado com $\rho.\sqrt[4]{1-k^2}$. Consequentemente, pelo fato de que $\rho.\sqrt[4]{1-k^2}$ é uma reta medial, então *x* ou $\rho.\sqrt[4]{(1-k^2)^3}$ também é uma reta medial. Não esquecendo que ρ e $\rho.\sqrt{1-k^2}$, inicialmente, foram tomadas como retas racionais comensuráveis somente em quadrado, vem que, da proporção $\frac{\rho}{\rho.\sqrt{1-k^2}} = \frac{\rho.\sqrt[4]{1-k^2}}{x}$, chegamos à conclusão de que $\rho.\sqrt[4]{1-k^2}$ e

$\rho.\sqrt[4]{(1-k^2)^3}$ são retas mediais comensuráveis apenas em quadrado. Finalmente, considerando ρ como da forma *a* ou $\sqrt{A}$, temos as seguintes formas de retas mediais:

1ª) $\sqrt{a\sqrt{a^2-b^2}}$, $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a\sqrt{a^2-b^2}}}$

2ª) $\sqrt[4]{A\ (A-k^2A)}$, $\frac{A-k^2A}{\sqrt[4]{A\ (A-k^2A)}}$

32. Achar duas mediais comensuráveis somente em potência, contendo um medial, de modo a ser a maior maior em potência do que a menor pelo sobre uma comensurável com aquela mesma.

CP32. Analisando as sutilezas desta proposição, torna-se necessário, para uma melhor percepção da mesma, que onde se lê “duas mediais comensuráveis” pode-se ler “duas retas mediais comensuráveis”; onde se lê “em potência” pode-se ler “em quadrado”; onde se lê “contendo um medial” pode-se ler “que compreendam um retângulo medial” ou “contendo um retângulo medial”; onde se lê “de modo a ser a maior maior em potência do que a menor”, pode-se ler “de modo que o quadrado da maior seja maior que o quadrado da menor”; onde se lê “pelo sobre uma comensurável” pode-se ler “no quadrado de uma reta comensurável”. Na tradução elaborada por Castaños (1996) sedimentam-se uma grande parte dessas confluências. Na influente tradução de Heath (1956), além dos pontos tratados anteriormente, as palavras finais “com aquela mesma” são trocadas para “com a maior”. É no referido autor que se revela o fato de Euclides, para a posição 32, “tomar três retas da forma ρ, $\rho\sqrt{\lambda}$, $\rho\sqrt{1-k^2}$ e, ao tomar a média proporcional $\rho\sqrt[4]{\lambda}$

entre as duas primeiras, encontra um certo *x* tal que $\frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\rho\sqrt{\lambda}} = \frac{\rho\sqrt{1-k^2}}{x}$.". Desta proporção pode-se obter o valor de x, dado por:

$$X = \frac{\rho^2\sqrt{\lambda}\sqrt{1-k^2}}{\rho\sqrt[4]{\lambda}}$$

$$X = \rho\sqrt[4]{\lambda}\sqrt{1-k^2}$$

Desta forma, temos que as retas mediais que, satisfazem as condições propostas pela proposição 32, são $\rho\sqrt[4]{\lambda}$ e *x*, ou seja, $\rho\sqrt[4]{\lambda}$ e $\rho\sqrt[4]{\lambda}\sqrt{1-k^2}$. Então, $\rho\sqrt[4]{\lambda}$ é uma reta medial. Outro detalhe importante é que ρ, $\rho\sqrt[4]{\lambda}$, $\rho.\sqrt{1-k^2}$ e *x,* constituem retas em uma proporção continuada, visto que:

$$\frac{\rho}{\rho.\sqrt{1-k^2}} = \frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{x}$$

Daí que, claramente, chegamos à conclusão de que *x* é comensurável somente em quadrado com $\rho\sqrt[4]{\lambda}$. Portanto *x* é uma reta medial e comensurável somente em quadrado com $\rho\sqrt[4]{\lambda}$. De certa forma, as retas mediais $\rho\sqrt[4]{\lambda}$ e $\rho\sqrt[4]{\lambda}\sqrt{1-k^2}$, podem tomar, a partir das formações *a,* $\sqrt{B}$, $\sqrt{a^2-c^2}$ ou $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, $\sqrt{A-k^2A}$ ou $\sqrt{A}$, *b*, $\sqrt{A-k^2A}$, as seguintes possibilidades:

1ª) $\sqrt{a\sqrt{B}}$, $\frac{\sqrt{B\,(a^2-c^2)}}{\sqrt{a\sqrt{B}}}$

2ª) $\sqrt[4]{AB}$, $\frac{\sqrt{B\,(A-k^2\,A)}}{\sqrt[4]{AB}}$

3ª) $\sqrt{b\sqrt{A}}$, $\frac{b\sqrt{A-k^2A}}{\sqrt{b\sqrt{A}}}$

LEMA

Seja o triângulo retângulo ABC, tendo o A reto, e fique traçada a perpendicular AD; digo que, por um lado, o pelas CBD é igual ao sobre a BA, e, por outro lado, o pelas BCD é igual ao sobre a CA, e o pelas BD, DC, é igual ao sobre a AD, e ainda o pelas BC, AB [é] igual ao pelas BA, AC. E, primeiro que o pelas CBA [é] igual ao sobre a BA. Pois, como em um triângulo retângulo do ângulo reto até a base foi traçada a perpendicular AD, portanto, os retângulos ABD, ADC são semelhantes tanto ao todo ABC quanto entre si. E, como o triângulo ABC é semelhante ao triângulo ABD, portanto, como a CB está para a BA, assim a BA para a BD; portanto, o pelas CBA é igual ao sobre a AB. Pelas mesmas coisas, então, também o pelas BCD é igual ao sobre a AC. E como, caso em um triângulo retângulo do ângulo reto a base seja traçada uma perpendicular, a que foi traçada é média em proporção entre os segmentos da abse, portanto, como a BD está para a DA, assim a AD para a DC; portanto, o pelas BD, DC é igual ao sobre a DA. Digo que também o pelas BC, Ad é igual ao pelas BA, AC. Pois, como, conforme falamos, o ABC é semelhante ao ABD, portanto, como a BC está para a CA, assim a BA para a AD. [Mas, caso quatro retas estejam em proporção, o pelos extremos é igual ao pelos meios.] Portanto, o pelas BC, AD é igual ao pelas BA, BC; o que era preciso provar.

CL8. A exposição de Euclides deste importante lema[7] vem a iluminar o fato de que, conforme verificamos na proposição 32, entre ρ, $\rho\sqrt[4]{\lambda}$, $\rho.\sqrt{1-k^2}$ e *x*, temos a seguinte proporção $\frac{\rho}{\rho.\sqrt{1-k^2}} = \frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{x}$. Neste ponto, convém notar que podemos ter a representação das proporções dadas por $\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$ e $\frac{d^2}{de} = \frac{d}{e}$ para chegar à conclusão de que $ab = d^2$, $\frac{d}{b} = \frac{c}{e}$ e $\frac{a}{c} = \frac{d}{e}$.

33. Achar duas retas incomensuráveis em potência fazendo, por um lado, o composto dos quadrados sobre elas racional, e, por outro lado, o por elas medial.

CP33. Expandindo os enfoques desta proposição, faz-se necessário, no intuito de clarear seu entendimento, que onde se lê “em potência” pode-se ler “em quadrado”; onde se lê “fazendo, por um lado, o composto dos quadrados sobre elas racional” pode-se ler “que façam a soma de seus quadrados racional” ou “que façam a soma de seus quadrados exprimível”; onde se lê “e, por outro lado, o por elas medial.”, pode-se ler “porém o retângulo contido por elas medial” ou ““porém o retângulo compreendido por elas medial.”. Na tradução elaborada por Castaños (1996) evidenciam-se muitas destas observações. Na condensada tradução de Heath (1956), também delineiam-se a maioria das contextualizações e, em seus comentários valiosos, recorda que para a proposição 33, Euclides toma as mesmas retas requeridas na proposição 30, no caso ρ e ρ e $\frac{\rho}{\sqrt{1+k^2}}$. A partir deste ponto, assegura que Euclides, geometricamente, busca resolver as equações $x + y = \rho$ e $\sqrt{xy} = \frac{\rho}{2\sqrt{1+k^2}}$. Assim, ter-se-á o seguinte sistema:

$x + y = \rho$

$$xy = \frac{\rho^2}{4(1+k^2)}$$

Efetuando, agora, a resolução aritmética de tal sistema, temos que:

$$x.(\rho - x) = \frac{\rho^2}{4(1+k^2)}$$

$$x^2 - \rho x + \frac{\rho^2}{4(1+k^2)} = 0$$

$$x = \frac{\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \frac{\rho^2}{1+k^2}}}{2}$$

$$x = \frac{\rho \pm \sqrt{\frac{\rho^2 k^2}{1+k^2}}}{2}$$

$$x = \frac{\rho \pm \frac{\rho k}{\sqrt{1+k^2}}}{2}$$

$$x = \frac{\rho}{2} \pm \frac{\rho k}{2\sqrt{1+k^2}}$$

$$x = \frac{\rho}{2}\left(1 \pm \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$$

Considerando, então, *x* maior que *y*, vem que teremos as seguintes soluções:

$$x = \frac{\rho}{2}\left(1 + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$$

$$y = \frac{\rho}{2}\left(1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$$

Por outro lado, ao encontrar os valores de *x* e *y*, somos levados a concluir que as retas incomensuráveis *u* e *v*, admitidas na proposição 33 por Euclides, terão a forma de $u^2 = \rho x$ e $v^2 = \rho y$. Logo *u* e *v* serão expressos por:

$$u = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$$

$$v = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$$

Finalmente, assumindo que ρ e $\frac{\rho}{\sqrt{1+k^2}}$ podem ter a representação de a, $\sqrt{a^2 - B}$ ou $\sqrt{A}$, $\sqrt{A - B}$ ou $\sqrt{A}$, $\sqrt{A - b^2}$, verifica-se que *u* e *v* assumirão os seguintes valores:

1ª) $\sqrt{\frac{a^2 + a\sqrt{B}}{2}}$, $\sqrt{\frac{a^2 - a\sqrt{B}}{2}}$

2ª) $\sqrt{\frac{A+\sqrt{AB}}{2}}$, $\sqrt{\frac{A-\sqrt{AB}}{2}}$

3ª) $\sqrt{\frac{A+b\sqrt{A}}{2}}$, $\sqrt{\frac{A-b\sqrt{A}}{2}}$

34. Achar duas retas incomensuráveis em potência, fazendo, por um lado, o composto dos quadrados sobre elas medial, e, por outro lado, o por elas racional.

CP34. Esmiuçando o conteúdo para esta proposição, torna-se extremamente útil, na certeza de uma sondagem mais densa de suas sutilezas, que onde se lê "em potência" pode-se ler "em quadrado"; onde se lê "fazendo, por um lado, o composto dos quadrados sobre elas medial" pode-se ler "que façam a soma de seus quadrados medial"; onde se lê "e, por outro lado, o por elas racional.", pode-se ler "porém o retângulo contido por elas racional" ou ""porém o retângulo compreendido por elas exprimível.". Na tradução elaborada por Castaños (1996) são evidenciadas boa parte de tais contextos. Já na importante tradução de Heath (1956), também verificam-se muitas destas observações, além do que, em seus comentários, pontua que para a proposição 34, Euclides toma as retas mediais $\frac{\rho}{\sqrt[4]{1+k^2}}$ e $\frac{\rho}{\sqrt[4]{(1+k^2)^3}}$. A partir daqui, assegura que Euclides, geometricamente, busca a resolução das equações $x + y = \frac{\rho}{\sqrt[4]{1+k^2}}$ e $\sqrt{xy} = \frac{\rho}{2\sqrt[4]{(1+k^2)^3}}$. Assim, ter-se-á o seguinte sistema:

$$x + y = \frac{\rho}{\sqrt[4]{1+k^2}}$$

$$xy = \frac{\rho^2}{4\sqrt{(1+k^2)^3}}$$

Efetuando, neste instante, a resolução aritmética de tal sistema, temos que:

$$x.\left(\frac{\rho}{\sqrt[4]{1+k^2}} - x\right) = \frac{\rho^2}{4\sqrt{(1+k^2)^3}}$$

$$x^2 - \frac{\rho}{\sqrt[4]{1+k^2}}x + \frac{\rho^2}{4\sqrt{(1+k^2)^3}} = 0$$

$$x = \frac{\frac{\rho}{\sqrt[4]{1+k^2}} \pm \sqrt{\frac{\rho^2}{\sqrt{1+k^2}} - \frac{\rho^2}{\sqrt{(1+k^2)^3}}}}{2}$$

$$x = \frac{\frac{\rho}{\sqrt[4]{1+k^2}} \pm \sqrt{\frac{\rho^2(1+k^2) - \rho^2}{\sqrt{(1+k^2)^3}}}}{2}$$

$$x = \frac{\frac{\rho}{\sqrt[4]{1+k^2}} \pm \sqrt{\frac{\rho^2 k^2}{\sqrt{(1+k^2)^3}}}}{2}$$

$$x = \frac{\frac{\rho}{\sqrt[4]{1+k^2}} \pm \frac{\rho k}{\sqrt[4]{(1+k^2)^3}}}{2}$$

$$x = \frac{\rho}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{1+k^2}} \pm \frac{k}{\sqrt[4]{(1+k^2)^3}}\right)$$

$$x = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\sqrt{1+k^2} \pm k}{\sqrt[4]{(1+k^2)^3}}\right)$$

$$x = \frac{\rho}{2\sqrt[4]{(1+k^2)^3}}\left(\sqrt{1+k^2} \pm k\right)$$

Considerando, então, *x* maior que *y*, vem que obteremos as seguintes soluções:

$$x = \frac{\rho}{2\sqrt[4]{(1+k^2)^3}}\left(\sqrt{1+k^2} + k\right)$$

$$y = \frac{\rho}{2\sqrt[4]{(1+k^2)^3}}\left(\sqrt{1+k^2} - k\right)$$

Por outro lado, encontrando os valores de *x* e *y*, somos levados a concluir que as retas incomensuráveis *u* e *v*, admitidas na proposição 34 por Euclides, terão a forma de $u^2 = \frac{\rho}{\sqrt[4]{1+k^2}}x$ e $v^2 = \frac{\rho}{\sqrt[4]{1+k^2}}y$. Logo *u* e *v* serão expressos por:

$$u^2 = \frac{\rho}{\sqrt[4]{1+k^2}}\,\frac{\rho}{2\sqrt[4]{(1+k^2)^3}}\left(\sqrt{1+k^2} + k\right)$$

$$u^2 = \frac{\rho^2}{2\sqrt[4]{(1+k^2)^4}}\left(\sqrt{1+k^2} + k\right)$$

$$u^2 = \frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2} + k\right)$$

$$u = \frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}} \sqrt{(\sqrt{1+k^2} + k)}$$

E encontrando *v* , vem que:

$$v^2 = \frac{\rho}{\sqrt[4]{1+k^2}} \frac{\rho}{2\sqrt[4]{(1+k^2)^3}} (\sqrt{1+k^2} - k)$$

$$v^2 = \frac{\rho^2}{2\sqrt[4]{(1+k^2)^4}} (\sqrt{1+k^2} - k)$$

$$v^2 = \frac{\rho^2}{2(1+k^2)} (\sqrt{1+k^2} - k)$$

$$v = \frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}} \sqrt{(\sqrt{1+k^2} - k)}$$

Finalmente, mão esquecendo que, para $\frac{\rho}{\sqrt[4]{1+k^2}}$ e $\frac{\rho}{\sqrt[4]{(1+k^2)^3}}$, poderemos ter ρ como da forma *a* ou $\sqrt{A},$ e teremos, desta forma, as seguintes formas de retas mediais para *u* e *v*:

1ª) $\sqrt{\frac{(a+\sqrt{B})\sqrt{a^2-B}}{2}}$, $\sqrt{\frac{(a-\sqrt{B})\sqrt{a^2-B}}{2}}$

2ª) $\sqrt{\frac{(\sqrt{A}+\sqrt{B})\sqrt{A-B}}{2}}$, $\sqrt{\frac{(\sqrt{A}-\sqrt{B})\sqrt{A-B}}{2}}$

3ª) $\sqrt{\frac{(\sqrt{A}+b)\sqrt{A-b^3}}{2}}$, $\sqrt{\frac{(\sqrt{A}-b)\sqrt{A-b^3}}{2}}$

35. Achar duas retas incomensuráveis em potência, fazendo tanto o composto dos quadrados sobre elas medial quanto o por elas medial e ainda incomensurável com o composto dos quadrados sobre elas.

CP35. Para esta proposição, mergulhando em seus veios e abrangências, faz-se premente, através de determinados esclarecimentos, assegurar que onde se lê “em potência” pode-se ler “em quadrado”; onde se lê “fazendo tanto o composto dos quadrados sobre elas medial quanto o por elas medial” pode-se ler “que façam a soma de seus quadrados medial e o retângulo compreendido por elas medial” ou “que façam a soma de seus quadrados medial e o retângulo contido por elas medial”; onde se lê “e ainda incomensurável com o composto dos quadrados sobre elas.” pode-se ler “e, ademais, incomensurável com a soma de seus quadrados” ou “e, além disso, incomensurável com a soma dos quadrados sobre elas.”. Na tradução tecida por Castaños (1996) são postas tais contextualizações. Já na tradução de Heath (1956), também pontuam-se a maior parte destas ponderações, além do que, em seus comentários, afirma que para a proposição 35, Euclides toma as retas mediais $\rho\sqrt[4]{\lambda}$ e $\frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{1+k^2}}$, e, neste ponto, afirma que Euclides, geometricamente, busca a resolução das equações $x + y = \rho\sqrt[4]{\lambda}$ e $\sqrt{xy} = \frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{2\sqrt{1+k^2}}$.

Logo, teremos o seguinte sistema:

$$x + y = \rho\sqrt[4]{\lambda}$$

$$xy = \frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{4(1+k^2)}$$

Efetuando, neste instante, a resolução aritmética de tal sistema, temos que:

$$x.\left(\rho\sqrt[4]{\lambda} - x\right) = \frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{4(1+k^2)}$$

$$x^2 - \rho\sqrt[4]{\lambda}\,x + \frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{4(1+k^2)} = 0$$

$$x = \frac{\rho\sqrt[4]{\lambda} \pm \sqrt{\rho^2\sqrt{\lambda} - \frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{(1+k^2)}}}{2}$$

$$x = \frac{\rho\sqrt[4]{\lambda} \pm \sqrt{\frac{[\rho^2(1+k^2) - \rho^2]\sqrt{\lambda}}{(1+k^2)}}}{2}$$

$$x = \frac{\rho\sqrt[4]{\lambda} \pm \sqrt{\frac{\rho^2 k^2\sqrt{\lambda}}{(1+k^2)}}}{2}$$

$$x = \frac{\rho\sqrt[4]{\lambda} \pm \frac{\rho k\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{(1+k^2)}}}{2}$$

$$x = \frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{2}\left(1 \pm \frac{k}{\sqrt{(1+k^2)}}\right)$$

Considerando, então, *x* maior que *y*, vem que obteremos as seguintes soluções:

$$x = \frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{2}\left(1 + \frac{k}{\sqrt{(1+k^2)}}\right)$$

$$y = \frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{2}\left(1 - \frac{k}{\sqrt{(1+k^2)}}\right)$$

No entanto, ao encontrar os valores de *x* e *y*, somos levados a concluir que as retas incomensuráveis *u* e *v*, admitidas na proposição 35 por Euclides, terão a forma de $u^2 = \rho\sqrt[4]{\lambda}\,x$ e $v^2 = \rho\sqrt[4]{\lambda}\,y$. Logo *u* e *v* serão expressos por:

$$u^2 = \rho\sqrt[4]{\lambda}\,\frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{2}\left(1 + \frac{k}{\sqrt{(1+k^2)}}\right)$$

$$u^2 = \frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1 + \frac{k}{\sqrt{(1+k^2)}}\right)$$

$$u = \frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(1 + \frac{k}{\sqrt{(1+k^2)}}\right)}$$

E encontrando *v* , vem que:

$$v^2 = \rho\sqrt[4]{\lambda}\,\frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{2}\left(1-\frac{k}{\sqrt{(1+k^2)}}\right)$$

$$v^2 = \frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1-\frac{k}{\sqrt{(1+k^2)}}\right)$$

$$v = \frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(1-\frac{k}{\sqrt{(1+k^2)}}\right)}$$

Finalizando, mão esquecendo que, para $\rho\sqrt[4]{\lambda}$ e $\frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{1+k^2}}$, poderemos ter ρ como da forma *a* ou $\sqrt{A}$, teremos, deste jeito, as seguintes formas de retas mediais para *u* e *v*:

1ª) $\sqrt{\frac{(a+\sqrt{C})\sqrt{B}}{2}}$, $\sqrt{\frac{(a-\sqrt{C})\sqrt{B}}{2}}$

2ª) $\sqrt{\frac{(\sqrt{A}+\sqrt{C})\sqrt{B}}{2}}$, $\sqrt{\frac{(\sqrt{A}-\sqrt{C})\sqrt{B}}{2}}$

3ª) $\sqrt{\frac{(\sqrt{A}+c)\sqrt{B}}{2}}$, $\sqrt{\frac{(\sqrt{A}-c)\sqrt{B}}{2}}$

36. Caso duas racionais comensuráveis somente em potência sejam compostas, a toda é irracional, e seja chamada binomial.

CP36. Para esta importante proposição, penetrando em suas essências e desmembramentos, torna-se necessário, através de determinados enfoques, evidenciar que onde se lê “Caso duas racionais comensuráveis” pode-se ler “Se duas retas racionais comensuráveis” ou “Caso somem-se duas retas exprimíveis comensuráveis”; onde se lê “somente em potência sejam compostas” pode-se ler “somente em quadrado sejam somadas”; onde se lê “a toda é irracional” pode-se ler “a reta inteira não é exprimível”. Na tradução oferecida por Castaños (1996) são levadas em conta tais observações, além da referida autora ainda esclarecer que, em relação aos nomes das retas não exprimíveis, “As razões para estes nomes, assim como de outras denominações aparentemente mais obscuras, de tipos de retas ‘não exprimíveis’ que vão surgindo ao largo do Livro X (‘maior’, ‘menor’, etc.), provavelmente esqueceram-se, todavia os nomes mantiveram-se junto com as definições de suas características.”. Já na tradução de Heath (1956), também pontuam-se várias destas ponderações. Para Fowler (1992) o texto da proposição 36 será traduzido por “A soma de duas linhas exprimíveis incomensuráveis é *alogos*; será chamada uma linha binomial”[8]. Por outro lado, é bastante interessante sua prova de tal fato ao revelar que “Faça *b* e *c* serem as linhas exprimíveis incomensuráveis. Então, [pela interpretação geométrica], $(b + c)^2 = b^2 + 2b.c + c^2$. Agora, $b^2 + c^2$ é exprimível e *b.c* é medial; consequentemente *2b.c* é medial e, assim, é incomensurável com $b^2 + c^2$. Daí que $(b + c)^2$ é a soma de uma exprimível e uma área medial, e, então, não é exprimível, assim não é comensurável com a área exprimível $b^2 + c^2$. Logo, é *alogos* [irracional].”[9].

37. Caso duas mediais comensuráveis somente em potência, contendo um racional, sejam compostas, a toda é irracional, e seja chamada primeira bimedial.

CP37. No caso específico desta proposição, mergulhando em seus teores e confluências, torna-se útil, através de determinados enfoques, evidenciar que onde se lê “Caso duas mediais comensuráveis” pode-se ler “Se duas retas mediais comensuráveis” ou “Caso somem-se duas retas mediais comensuráveis”; onde se lê “somente em potência” pode-se ler “somente em quadrado”; onde se lê “contendo

um racional” pode-se ler “que compreendam um retângulo exprimível” ou “contendo um retângulo racional”; onde se lê “sejam compostas” pode-se ler “sejam somadas”; onde se lê “a toda é irracional” pode-se ler “a reta inteira não é exprimível”. Na tradução pontuada por Castaños (1996) os termos “retângulo’ e “reta” aparecem entre parênteses. Na tradução de Heath (1956), também enxergam-se várias destas observações. Para a prova desta proposição, utilizando os mesmos enfoques expostos na proposição anterior por David Fowler, podemos perceber que “Fazendo *b* e *c* serem linhas mediais comensuráveis somente em potência. Então, [pela interpretação geométrica], $(b + c)^2 = b^2 + 2b.c + c^2$. Agora, $b^2 + c^2$ não é exprimível, sendo, então, medial. E *b.c*, conforme consta no texto da proposição, é racional, portanto, exprimível; consequentemente *2b.c* é racional, ou seja, exprimível. Desta forma, *2b.c* é incomensurável com $b^2 + c^2$. Daí que $(b + c)^2$ é a soma de uma medial e uma área racional, e, então, não é exprimível, assim não é comensurável com a área medial $b^2 + c^2$. Logo, é *alogos* [irracional].”. Um exemplo que torna mais claro a essência da proposição 37 é utilizando $\sqrt{\sqrt{2}a}$ e $\sqrt{\sqrt{8}a}$ como retas mediais comensuráveis somente em potência. Daí, concluímos que a área que representa as duas retas é racional, ou seja, compreende um retângulo exprimível, no valor de $\sqrt{\sqrt{2}a} . \sqrt{\sqrt{8}a} = \sqrt{\sqrt{16}a^2} = \sqrt{4}a^2 = 2a^2$. Assim, o que está dito na proposição é que se as retas mediais forem somadas, ou seja, $\sqrt{\sqrt{2}a} + \sqrt{\sqrt{8}a}$ o resultado é não exprimível, no caso, irracional, que é exatamente o que acontece.

38. Caso duas mediais comensuráveis somente em potência, contendo um medial, sejam compostas, a toda é irracional, e seja chamada segunda bimedial.

CP38. Comentando esta proposição, expondo seus meandros e confluências, convém explicitar que onde se lê “Caso duas mediais comensuráveis” pode-se ler “Se duas retas mediais comensuráveis” ou “Caso somem-se duas retas mediais comensuráveis”; onde se lê “somente em potência” pode-se ler “somente em quadrado”; onde se lê “contendo um medial” pode-se ler “que compreendam um retângulo inexprimível” ou “contendo um retângulo irracional”; onde se lê “sejam compostas” pode-se ler “sejam somadas”; onde se lê “a toda é irracional” pode-se ler “a reta inteira não é exprimível”. Na tradução pontuada por Castaños (1996) as

palavras “retângulo’ e “reta” são escritas entre parênteses. Na tradução de Heath (1956), muitos destes detalhes foram pontuados. Para a prova desta proposição, utilizando os mesmos enfoques expostos na proposição 36 por David Fowler, podemos perceber que “Fazendo *b* e *c* serem linhas mediais comensuráveis somente em potência. Então, [pela interpretação geométrica], $(b + c)^2 = b^2 + 2b.c + c^2$. Agora, $b^2 + c^2$ não é exprimível, sendo, então, medial. E *b.c*, conforme consta no texto da proposição 38, é medial, portanto, não exprimível; consequentemente *2b.c* é irracional, ou seja, conforme já pontuamos, não exprimível. Desta forma, *2b.c* é incomensurável com $b^2 + c^2$. Daí que $(b + c)^2$ é a soma de uma medial e uma área irracional, e, então, não é exprimível, assim não é comensurável com a área medial $b^2 + c^2$. Logo, é *alogos* [irracional].”. Um exemplo que deixa melhor compreendida a proposição 38 é utilizando $\sqrt{2}a$ e $\sqrt{6}a$ como retas mediais comensuráveis somente em potência. Daí, concluímos que a área que representa as duas retas é medial, ou seja, compreende um retângulo não exprimível, no valor de $\sqrt{2}a \,.\sqrt{6}a = \sqrt{12}a^2 = \sqrt{3.4}a^2 = 2\sqrt{3}a^2$. Assim, o que está dito na proposição é que se as retas mediais forem somadas, ou seja, $\sqrt{2}a$ + $\sqrt{6}a$ o resultado é não exprimível, no caso, irracional, que é exatamente o que acontece[10].

39. Caso duas retas incomensuráveis em potência, fazendo, por um lado, o composto dos quadrados sobre elas racional, e, por um lado, o por elas medial, sejam compostas, a reta toda é irracional, e seja chamada maior.

CP39. Na análise desta proposição, na exposição de seus elos e sutilezas, convém enfatizar que onde se lê “em potência” pode-se ler “em quadrado”; onde se lê “o composto dos quadrados” pode-se ler “a soma dos quadrados”; onde se lê “o por elas medial” pode-se ler “o retângulo contido por elas medial”; onde se lê “sejam compostas” pode-se ler “sejam somadas”; onde se lê “a reta toda é irracional” pode-se ler “a reta inteira não é exprimível”. Na tradução pontuada por Castaños (1996) as palavras “retângulo’ e “reta” estão grafadas entre parênteses, além do que sua tradução explicita que “Se se somam duas retas incomensuráveis em quadrado que façam a soma de seus quadrados exprimível e o (retângulo compreendido) por elas medial; a reta inteira não é exprimível; chame-se de ‘medial’”. Na tradução de Heath

(1956), alguns destas observações foram usadas e, seguindo sua linha de raciocínio, podemos constatar que se xy é o retângulo da proposição 39, então, o mesmo é medial. Assim, $2xy$ também é medial. No entanto, $x^2 + y^2$ é uma área racional, isto porque a própria proposição testemunha que "fazendo, por um lado, o composto dos quadrados sobre elas racional". Ora essa, imediatamente conclui-se que $x^2 + y^2$ é incomensurável com $2xy$. Como já sabemos que $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, verifica-se, então, que $(x + y)^2$ é incomensurável com $x^2 + y^2$ e, portanto, $x + y$ é irracional, ou seja, não exprimível. Por outro lado, não esquecendo que, na proposição 33, foram encontrados os valores $x = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$ e $y = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$, representando os lados do retângulo, temos que o valor da soma de $x + y = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}} + \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$, no caso, irracional, garantindo o final da proposição que expõe "a reta toda é irracional, e seja chamada maior".

40. Caso duas retas incomensuráveis em potência, fazendo, por um lado, o composto dos quadrados sobre elas medial, e, por outro lado, o por elas racional, sejam compostas, a reta toda é irracional, e seja chamada a que serve para produzir um racional e um medial.

CP40. Na análise do exposto nesta proposição, no intuito de uma melhor assimilação de seu conteúdo, convém explicitar que onde se lê "em potência" pode-se ler "em quadrado"; onde se lê "o composto dos quadrados" pode-se ler "a soma dos quadrados"; onde se lê "o por elas racional" pode-se ler "o retângulo contido por elas racional"; onde se lê "sejam compostas" pode-se ler "sejam somadas"; onde se lê "a reta toda é irracional" pode-se ler "a reta inteira não é exprimível"; onde se lê "a que serve para produzir um racional e um medial", pode-se ler "o lado do quadrado equivalente a uma área exprimível mais uma área medial". Na tradução evidenciada por Castaños (1996) as palavras "retângulo' e "reta" estão postas entre parênteses,

e ainda há a exposição de que o “lado do quadrado equivalente a uma área exprimível mais uma área medial é a sexta reta sem razão exprimível que aparece na classificação geral”. A autora traduz a referida proposição como “Se se somam duas retas incomensuráveis em quadrado que façam a soma de seus quadrados medial e o (retângulo compreendido) por elas exprimível; a (reta) inteira não é exprimível; chame-se de lado do quadrado equivalente a uma área exprimível mais uma área medial”. Na tradução de Heath (1956), foram expostos alguns destes detalhes e, seguindo o veio de seu pensamento, podemos mostrar que se xy é o retângulo da proposição 40, então, o mesmo é racional. Assim, $2xy$ também é racional. No entanto, $x^2 + y^2$ é uma área medial, isto porque a própria proposição pontua que “fazendo, por um lado, o composto dos quadrados sobre elas medial”. Desta forma, conclui-se que $x^2 + y^2$ é incomensurável com $2xy$. Como sabemos que $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, verifica-se, então, que $(x + y)^2$ é incomensurável com $2xy$ e, portanto, $x + y$ é irracional, ou seja, não exprimível. No entanto, recordando que, na proposição 34, foram encontrados os valores, que representam os lados do retângulo, de tal forma que $x = \frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2} + k)}$ e $y = \frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2} - k)}$. Assim, vem que o valor procurado da soma de $x + y = \frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2} + k)} + \frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2} - k)}$, é, no caso, irracional, garantindo o final da proposição que expõe “a reta toda é irracional, e seja chamada a que serve para produzir um racional e um medial”.

41. Caso duas retas incomensuráveis em potência, fazendo tanto o composto dos quadrados sobre elas medial quanto o por elas medial e ainda incomensurável como composto dos quadrados sobre elas, sejam compostas, a reta toda é irracional, e seja chamada a que serve para produzir dois mediais.

CP41. Para esta proposição, expandindo seus enfoques e desmembramentos, é extremamente adequado compreender que onde se lê “em potência” pode-se ler “em quadrado”; onde se lê “o composto dos quadrados” pode-se ler “a soma dos quadrados”; onde se lê “o por elas medial” pode-se ler “o retângulo contido por elas racional”; onde se lê “sejam compostas” pode-se ler “sejam somadas”; onde se lê “a reta toda é irracional” pode-se ler “a reta inteira não é exprimível”; onde se lê “a que serve para produzir dois mediais”, pode-se ler “o lado do quadrado equivalente à soma de duas áreas mediais”. Na tradução elaborada por Castaños (1996) os termos “retângulo’ e “reta” são colocados entre parênteses, e ainda há a exposição de que o “lado do quadrado equivalente à soma de duas áreas mediais é a sétima reta sem razão exprimível que aparece na classificação geral”. A autora, para a referida proposição, expõe a tradução que “Se se somam duas retas incomensuráveis em quadrado que façam a soma de seus quadrados medial e o (retângulo compreendido) por elas também medial e incomensurável, ademais, com a soma de seus quadrados, então a (reta) inteira não é exprimível; chame-se de lado do quadrado equivalente à soma de duas áreas mediais”. Na tradução de Heath (1956), pontuaram-se algumas destas explanações e, penetrando na seara de suas argumentações, podemos mostrar que se xy é o retângulo da proposição 41, então, o mesmo é medial. Assim, $2xy$ também é medial. No entanto, $x^2 + y^2$ é, também, uma área medial, isto porque a própria proposição pontua que “fazendo tanto o composto dos quadrados sobre elas medial quanto o por elas medial”. Desta forma, conclui-se que $x^2 + y^2$ é incomensurável com $2xy$. Agora, aplicando estas áreas a uma reta racional σ, podemos expressar que $x^2 + y^2 = \sigma u$ e $2xy = \sigma v$. No entanto, desde que σu e σv sejam, ambas, áreas mediais, temos que u e v são retas racionais e incomensuráveis com σ. Assim, não é difícil concluir que σu é incomensurável com σv. Daí que u é incomensurável com v. Todavia, nos é assegurado, então, que u e v são retas racionais comensuráveis somente em quadrado. Contudo, pela importante proposição 36, que garante que “Caso duas racionais comensuráveis somente em potência sejam compostas, a toda é irracional,

e seja chamada binomial.", logo $u + v$ é irracional. Porém, pela proposição 20 do Livro X, tem-se que "Caso um racional seja aplicado a uma racional, faz como largura uma racional e comensurável em comprimento com aquela a que foi aplicado.", logo $\sigma(u + v)$ é irracional, garantindo, assim, que a soma de $x^2 + y^2$ e $2xy$ também seja irracional. E, como $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, vem que, então, $(x + y)^2$ é irracional e, portanto, $x + y$ é irracional, ou seja, não exprimível. No entanto, recordando que, na proposição 35, foram encontrados os valores, que representam os lados do retângulo, de tal forma que $x = \frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{(1 + \frac{k}{\sqrt{(1+k^2)}})}$ e $y = \frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{(1 - \frac{k}{\sqrt{(1+k^2)}})}$. Assim, vem que o valor procurado da soma de $x + y = \frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{(1 + \frac{k}{\sqrt{(1+k^2)}})} + \frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{(1 - \frac{k}{\sqrt{(1+k^2)}})}$, é, no caso, irracional, garantindo o final da proposição que expõe "a reta toda é irracional, e seja chamada a que serve para produzir dois mediais."[11].

.

LEMA

E que as ditas irracionais são divididas, de uma única maneira, nas retas das quais são compostas, fazendo as espécies propostas, provaremos imediatamente, expondo antes este pequeno lema:

Fique exposta a reta AB e fique cortada a toda em desiguais em cada um dos C, D, e fique suposta a AC maior do que DB; digo que os sobre as AC, CB são maiores do que os sobre as AD, DB.

Fique, pois, cortada a AB em duas no E, como a AC é maior do que a DB, fique subtraída a DC comum, portanto, a AD restante é maior do que a CB restante. Mas a AE é igual à EB; portanto, a DE é menor do que a EC; portanto, os pontos C, D não estão igualmente afastados do ponto da bissecção. E, como o pelas AC, CB,

com o sobre a EC, é igual ao sobre a EB, mas, de fato, também o pelas AD, DB, com o sobre a DE é igual ao sobre a EB, portanto, o pelas AC, CB, com o sobre a EC, é igual ao pelas AD, DB, como o sobre a DE; dos quais, o sobre a DE é menor do que o sobre a EC; portanto, também o pelas AC, CB restante é menor do que o pelas AD, DB. Desse modo, também duas vzes o pelas AC, CB é menor do que duas vzes o pelas AD, DB. Portanto, também o composto dos sobre as AC, CB restante é maior do que o composto dos sobre as AD, DB; o que era preciso provar.

CL9. Para o comentário deste lema, é fundamental recordar o exposto na proposição 5 do Livro II de *Os Elementos* de Euclides que afirma "Caso uma linha reta seja cortada em iguais e desiguais, o retângulo contido pelos segmentos desiguais da reta toda, com o quadrado sobre a entre as seções, é igual ao quadrado sobre a metade". Em uma importante observação, Castaños (1996) esclarece que, no referido lema, é encontrada a expressão grega ποιουσων τα προκείμενα ειδη (*poiousôn tà prokeímena eíde*), que a autora traduz como "dando lugar aos tipos propostos" ou "cumprindo as condições propostas". E, comentando sobre a palavra ειδη (*eíde*), pontuando que a mesma, "por contar com um campo semântico tão amplo", é traduzida por "tipos" (de retas sem razão exprimível). Por outro lado, em Fowler (1992), atrelando o lema em apreço tanto à proposição 41 quanto à proposição 42, é evidenciado a síntese do mesmo como "se $x + y = x_1 + y_1$, com $x > x_1$, então $x^2 + y^2 = {x_1}^2 + {y_1}^2$". Seguindo a exposição de sua linha de raciocínio, tem-se que "escrevendo $x + y = 2s$, com $x - s = d$ e $x_1 - s = d_1$, vem que $d > d_1$". O autor, relembrando a proposição 5 do Livro II, argumenta "então $xy + d^2 = s^2$, como também ${x_1}{y_1} + {d_1}^2 = s^2$. Consequentemente, ${x_1}{y_1} < xy$. Assim, desde que $x^2 + y^2 + 2xy = {x_1}^2 + {y_1}^2 + 2{x_1}{y_1}$, chegamos à conclusão de que $x^2 + y^2 > {x_1}^2 + {y_1}^2$"[12].

42. A binomial é dividida, em um só ponto, nas componentes.

CP42. No texto desta proposição, tanto Castaños (1996) quanto Heath (1956), expõem o termo “reta binomial” ao invés de somente “binomial”. A expressão “em um só ponto”, em ambos, é colocada no final do texto. Já para Fowler (1992), tem-se a argumentação de que “supondo $q = x + y = x_1 + y_1$, ambos binomiais. Se x e x_1 não são iguais, tais que $x > x_1$, então $x^2 + y^2 + 2xy = {x_1}^2 + {y_1}^2 + 2x_1y_1$. Mas, pelo lema anterior, $x^2 + y^2 > {x_1}^2 + {y_1}^2$. Consequentemente $(x^2 + y^2) - (x_1^2 + y_1^2) = 2x_1y_1 - 2xy$.”. No final, o autor argumenta que o lado esquerdo desta igualdade é exprimível, ou seja, representado pela diferença entre áreas racionais. No entanto, o lado direito desta igualdade não é exprimível, visto que é formado pela diferença entre duas áreas mediais. Como, pela proposição 26 do Livro X, “Um medial não excede um medial por um racional”, temos que a diferença entre áreas racionais não pode ser igual a diferença entre áreas mediais, resultando, daí, a impossibilidade da igualdade exposta. Desta forma, o par x_1, y_1 não pode ser diferente do par x, y.

43. A primeira bimedial é dividida em um só ponto.

CP43. No que se refere ao enunciado desta proposição, tanto Castaños (1996) quanto Heath (1956), expõem o termo “reta primeira bimedial” ao invés de somente “primeira bimedial”. Utilizando-se do argumento de Fowler para a proposição 42, vem que “supondo $q = x + y = x_1 + y_1$, ambos binomiais. Se x e x_1 não são iguais, tais que $x > x_1$, então $x^2 + y^2 + 2xy = {x_1}^2 + {y_1}^2 + 2x_1y_1$. Mas, pelo lema da proposição 41, $x^2 + y^2 > {x_1}^2 + {y_1}^2$. Consequentemente $(x^2 + y^2) - (x_1^2 + y_1^2) = 2x_1y_1 - 2xy$. Neste ponto é importante estar atento ao fato de que, agora, o lado esquerdo desta igualdade é não exprimível, ou seja, representado pela diferença entre áreas mediais. Por outro lado, o lado direito desta

igualdade é exprimível, visto que é formado pela diferença entre duas áreas racionais. Como, pela proposição 26 do Livro X, “Um medial não excede um medial por um racional”, temos que a diferença entre áreas mediais não pode ser igual a diferença entre áreas racionais, resultando, então, a impossibilidade da igualdade apresentada. Assim sendo, o par x_1, y_1 não pode ser diferente do par x, y.

44. A segunda bimedial é dividida em um só ponto.

CP44. No que tange ao exposto nesta proposição, tanto Castaños (1996) quanto Heath (1956), colocam o termo “reta segunda bimedial” ao invés de somente “segunda bimedial”. Utilizando-se de uma parte das afirmações de Fowler para a proposição 42, vem que “supondo que a reta segunda bimedial pode ser dividida em dois caminhos, temos que $q = x + y = x_1 + y_1$. Se x e x_1 não são iguais, tais que $x > x_1$, então $x^2 + y^2 + 2xy = {x_1}^2 + {y_1}^2 + 2x_1y_1$”. A partir daqui deve-se ter em mente que, agora, aplicando estas áreas a uma reta racional σ, podemos expressar que $x^2 + y^2 = \sigma u$ e $2xy = \sigma v$. No entanto, desde que σu e σv sejam, ambas, áreas mediais, temos que u e v são retas racionais e incomensuráveis com σ. Assim, concluímos que σu é incomensurável com σv. Daí que u é incomensurável com v. Todavia, nos é assegurado, então, que u e v são retas racionais comensuráveis somente em quadrado. Contudo, pela importante proposição 36, que garante que “Caso duas racionais comensuráveis somente em potência sejam compostas, a toda é irracional, e seja chamada binomial.”, logo u + v é irracional. Ou seja, u + v é uma reta binomial. De forma semelhante, ter-se-á que podemos expressar ${x_1}^2 + {y_1}^2 = \sigma u'$ e $2x_1y_1 = \sigma v'$. No entanto, desde que $\sigma u'$ e $\sigma v'$ sejam, ambas, áreas mediais, temos que u' e v' são retas racionais e incomensuráveis com σ. Assim, concluímos que $\sigma u'$ é incomensurável com $\sigma v'$. Daí que u' é incomensurável com v'. Contudo, sabemos que u' e v' são retas racionais

comensuráveis somente em quadrado. Entretanto, pela sutil proposição 36, que expõe que “Caso duas racionais comensuráveis somente em potência sejam compostas, a toda é irracional, e seja chamada binomial.”, logo $u' + v'$ é irracional. Ou seja, $u' + v'$ é uma reta binomial. Porém, desde que $x^2 + y^2 + 2xy = {x_1}^2 + {y_1}^2 + 2x_1y_1$., vem que $u + v = u' + v'$, gerando o fato de que uma reta binomial pode ser dividida em dois caminhos. Mas tal fato é impossível. Então, como $x + y$ representa uma reta segunda bimedial, temos que a mesma, conforme anuncia a proposição, “é dividida em um só ponto”.

45. A maior é dividida no mesmo ponto só.

CP45. Em relação ao enunciado desta proposição, convém explicitar que, tanto Castaños (1996) quanto Heath (1956), colocam o termo “reta maior” ao invés de somente “maior”. Os autores citados traduzem o final “no mesmo ponto só” como “por um e o mesmo ponto” e “em um e o mesmo ponto somente”, respectivamente. A referida proposição tem contato direto com a exposição dos comentários para as proposições 42 e 43. Assim, comungando das percepções de Fowler (1992), temos que ““supondo $q = x + y = x_1 + y_1$, ambos binomiais. Se x e x_1 não são iguais, tais que $x > x_1$, então $x^2 + y^2 + 2xy = {x_1}^2 + {y_1}^2 + 2x_1y_1$. Mas, pelo lema da proposição 41, $x^2 + y^2 > {x_1}^2 + {y_1}^2$. Consequentemente $(x^2 + y^2) - (x_1^2 + y_1^2) = 2x_1y_1 - 2xy$. Neste ponto é importante estar atento ao fato de que, neste instante, o lado esquerdo desta igualdade é exprimível, ou seja, representado pela diferença entre áreas racionais. Por outro lado, o lado direito desta igualdade é não exprimível, visto que é formado pela diferença entre duas áreas mediais. Agora, recordando o exposto pela proposição 26 do Livro X, temos que “Um medial não excede um medial por um racional”. Logo, temos que a diferença entre áreas racionais não pode ser igual a diferença entre áreas mediais, resultando, então, na impossibilidade da igualdade apresentada. Desta forma, o par x_1, y_1 não pode ser diferente do par x, y. E, assim, está provado que “a maior é

dividida no mesmo ponto só” ou “a reta maior divide-se por um e mesmo ponto” ou “a reta maior é dividida em um e o mesmo ponto somente”.

46. A que serve para produzir um racional e um medial é dividida em um só ponto.

CP46. Em relação ao conteúdo expresso nesta proposição, é importante salientar que Castaños (1996) traduz o início “a que serve para produzir um racional e um medial” como “o lado do quadrado equivalente a uma área exprimível mais uma área medial”, enquanto Heath (1956) traduz como “o lado de uma área racional mais uma área medial”. A referida proposição, como a proposição 45, possui um elo com a exposição dos comentários para as proposições 42 e 43. Desta forma, adentrando nas concepções de Fowler (1992), temos que ““supondo $q = x + y = x_1 + y_1$, ambos binomiais. Se x e x_1 não são iguais, tais que $x > x_1$, então $x^2 + y^2 + 2xy = {x_1}^2 + {y_1}^2 + 2x_1y_1$. Todavia, pelo lema da proposição 41, $x^2 + y^2 > {x_1}^2 + {y_1}^2$. Consequentemente $(x^2 + y^2) - (x_1^2 + y_1^2) = 2x_1y_1 - 2xy$. Agora, convém salientar o fato de que, neste momento, o lado esquerdo desta igualdade é não exprimível, ou seja, representado pela diferença entre áreas mediais. Por outro lado, o lado direito desta igualdade é exprimível, visto que é formado pela diferença entre duas áreas racionais. Logo, relembrando o exposto pela proposição 26 do Livro X, vem que “Um medial não excede um medial por um racional”. Assim, temos que a diferença entre áreas mediais não pode ser igual a diferença entre áreas racionais, resultando, então, na impossibilidade da igualdade apresentada. Desta forma, o par x_1, y_1 não pode ser diferente do par x, y. E, então, está provado que “A que serve para produzir um racional e um medial é dividida em um só ponto” ou “o lado do quadrado equivalente a uma área exprimível mais uma área medial divide-se somente por um ponto” ou “o lado de uma área racional mais uma área medial é dividida em um ponto somente”.

47. A que serve para produzir dois mediais é dividida em um só ponto.

CP47. Em respeito ao enunciado desta proposição, é crucial informar que Castaños (1996) traduz o início “a que serve para produzir dois mediais” como “o lado do quadrado equivalente à soma de duas (áreas) mediais”, enquanto Heath (1956) traduz como “o lado da soma de duas áreas mediais”. A referida proposição possui uma vinculação com aa observações dos comentários para a proposição 44. Desta forma, ainda recordando as importantes conotações de Fowler (1992), temos que “supondo que a que serve para produzir dois mediais pode ser dividida em dois caminhos, temos que $q = x + y = x_1 + y_1$. Se x e x_1 não são iguais, tais que x > x_1, então $x^2 + y^2 + 2xy = {x_1}^2 + {y_1}^2 + 2x_1y_1$”. A partir deste ponto deve-se perceber que, aplicando estas áreas a uma reta racional σ, podemos expressar que $x^2 + y^2 = \sigma u$ e $2xy = \sigma v$. No entanto, desde que σu e σv sejam, ambas, áreas mediais, temos que u e v são retas racionais e incomensuráveis com σ. Assim, concluímos que σu é incomensurável com σv. Daí que u é incomensurável com v. Todavia, nos é assegurado, então, que u e v são retas racionais comensuráveis somente em quadrado. Contudo, pela sutil proposição 36, que garante que “Caso duas racionais comensuráveis somente em potência sejam compostas, a toda é irracional, e seja chamada binomial.”, logo u + v é irracional. Ou seja, u + v é uma reta binomial. De forma semelhante, ter-se-á que podemos expressar ${x_1}^2 + {y_1}^2 = \sigma u'$ e $2x_1y_1 = \sigma v'$. No entanto, desde que $\sigma u'$ e $\sigma v'$ sejam, ambas, áreas mediais, temos que u' e v' são retas racionais e incomensuráveis com σ. Assim, concluímos que $\sigma u'$ é incomensurável com $\sigma v'$. Daí que u' é incomensurável com v'. Contudo, sabemos que u' e v' são retas racionais comensuráveis somente em quadrado. Entretanto, ainda recordando da proposição 36, que expõe que “Caso duas racionais comensuráveis somente em potência sejam compostas, a toda é irracional, e seja chamada binomial.”, logo u' + v' é irracional.

Ou seja, u' + v' é uma reta binomial. Porém, desde que $x^2 + y^2 + 2xy$ = $x_1{}^2 + y_1{}^2 + 2x_1y_1$., vem que $u + v = u' + v'$, explicitando o fato de que uma reta binomial pode ser dividida em dois caminhos. Mas tal fato é impossível. Então, como $x + y$ representa "a que serve para produzir dois mediais" ou "o lado do quadrado equivalente à soma de duas (áreas) mediais", ou "o lado da soma de duas áreas mediais", vem que o mesmo, conforme anuncia a proposição, "é dividida em um só ponto"[13].

SEGUNDAS DEFINIÇÕES

1. Sendo supostas uma racional e a binomial nas componentes, da qual a maior componente é maior em potência do que a menor pela sobre uma comensurável com aquela mesma em comprimento, caso a maior componente seja comensurável em comprimento com a exposta racional, seja chamada [a toda] primeira binomial.

CD1. Esmiuçando o contexto desta definição, torna-se extremamente necessário, na certeza de uma averiguação mais plena de suas essências, que onde se lê "uma racional e a binomial nas componentes" pode-se ler "uma reta exprimível e outra binomial dividida em seus termos"; onde se lê "maior em potência" pode-se ler "maior em quadrado"; onde se lê "pela sobre uma comensurável com aquela mesma em comprimento", pode-se ler "no (quadrado) de uma reta comensurável em longitude com ele (o maior)". Na tradução elaborada por Castaños (1996) estão pontuadas algumas destas observações e a autora ainda enfatiza que "Euclides apresenta nestas Segundas Definições uma subclassificação das binomiais em seis tipos diferentes. Nas proposições 48-53 ensina a forma de achar cada uma delas". Já na tradução de Heath (1956), a expressão final "primeira binomial" vem acompanhada do termo "reta". Muito importante, também, são as colocações de Fowler (1992) buscando esclarecer os ecos da primeira das chamadas "segundas definições". Assim, o autor traz em suas concepções o fato de que "Se o quadrado sobre uma binomial $q = x + y$ é aplicado a uma altura exprimível h, sua largura será uma binomial $w = b + c$ em que as linhas exprimíveis b e c são satisfeitas; b

é comensurável com h; c é incomensurável com h; e $d = \sqrt{b^2 - c^2}$ é comensurável com b. Tal que uma binomial será chamada uma ‘primeira binomial’ com respeito a h.”.

2. E, caso a menor componente seja comensurável em comprimento com a exposta racional, seja chamada segunda binomial.

CD2. Em relação ao enunciado desta definição, é importante informar que Castaños (1996) traduz a expressão “com a exposta racional” como “com a (reta) exprimível”, enquanto Heath (1956) traduz como “com a reta racional estabelecida”. A referida definição está ligada à proposição 49, do Livro X de *Os Elementos*, visto que é na mesma que Euclides revela o ensinamento de como encontrar a chamada segunda binomial.

3. E, caso nenhuma das componentes seja comensurável em comprimento com a exposta racional, seja chamada terceira binomial.

CD3. Com respeito ao exposto nesta definição, é preciso esclarecer que Castaños (1996) traduz a expressão “com a exposta racional” como “com a (reta) exprimível”, enquanto Heath (1956) traduz como “com a reta racional estabelecida”. A referida definição está atrelada à proposição 50, do Livro X de *Os Elementos*, porque é na mesma que Euclides consolida o ensinamento de como encontrar a chamada terceira binomial.

4. De novo, então, caso a maior componente seja maior em potência [do que a menor] pelo sobre uma incomensurável em comprimento com aquela mesma, caso a maior componente seja comensurável em comprimento com a exposta racional, seja chamada quarta binomial.

CD4. Para uma melhor compreensão desta definição, convém salientar que onde se lê “maior em potência” pode-se ler “maior em quadrado”; onde se lê “pelo sobre uma incomensurável em comprimento com aquela mesma” pode-se ler “no quadrado de

uma (reta) incomensurável em longitude com a maior” ou “pelo quadrado sobre uma reta incomensurável em comprimento com a maior”; onde se lê “com a exposta racional” pode-se ler “com a (reta) exprimível” ou “com a reta racional estabelecida”. Tanto Castaños (1996) quanto Heath (1956) trazem em suas traduções os ecos de tais observações. A definição em apreço está atrelada à proposição 51, do Livro X de *Os Elementos*, visto que é na mesma que Euclides consolida o ensinamento de como encontrar a chamada quarta binomial.

5. Enquanto, caso a menor, quinta.

CD5. Para esta definição, a palavra final “quinta” aparece na tradução de Heath (1956) como “quinta binomial”. É importante mencionar que a referida definição possui um entrelaçamento à proposição 52, do Livro X de *Os Elementos*, pois é na mesma que Euclides enfatiza o ensinamento de como encontrar a chamada quinta binomial.

6. Mas, caso nenhuma, sexta.

CD6. Para esta definição, a palavra final “sexta” aparece na tradução de Heath (1956) como “sexta binomial”. É importante frisar que a referida definição está intimamente relacionada com a proposição 53, do Livro X de *Os Elementos*, pelo fato de que é na mesma que Euclides elabora o ensinamento de como encontrar a chamada sexta binomial[14].

48. Achar a primeira binomial

CP48. Na análise desta proposição, a expressão “primeira binomial” aparece, tanto na tradução de Castaños (1996) quanto na de Heath (1956), como “reta primeira binomial”. Por outro lado, nos comentários de Heath (1956) há um acúmulo de informações que evidenciam as pluralidades do entendimento da referida proposição. Assim, o autor afirma que “fazendo $k\rho$ uma reta comensurável em comprimento com ρ, esta uma dada reta racional, ou seja, exprimível.”. Logo em seguida, garantindo a necessidade de se tomar dois números, evidencia “que podem

ser escritos como $p(m^2 - n^2),\ pn^2$, onde $m^2 - n^2$ não é um quadrado perfeito.”. A partir deste ponto, tomando uma certa reta racional x, pode-se garantir a seguinte proporção:

$$\frac{pm^2}{p(m^2-n^2)} = \frac{k^2\rho^2}{x^2}$$

Consequentemente, podemos exprimir o valor de x como:

$$x = k\rho\ \frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m}$$

Desta forma, a reta primeira binomial será expressa através do somatório $k\rho + x$, ou, também, $k\rho + k\rho\ \frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m}$. A prova é garantida através do fato de que, como expõe a proporção acima, x^2 é comensurável com $k^2\rho^2$. Não esquecendo que x é uma reta racional, porém incomensurável com $k\rho$, mas, como x é comensurável em quadrado somente com $k\rho$, tem-se que a expressão $k\rho + x$ é uma reta binomial. Ainda voltando à proporção acima, podemos ter $k^2\rho^2$ maior do que x^2, de tal forma que $k^2\rho^2 - x^2 = z^2$. Contudo, a dita proporção garante que se pode ter $\frac{pm^2}{pn^2} = \frac{k^2\rho^2}{z^2}$ e, daí, temos que z é uma reta racional e comensurável com $k\rho$. Assim, pela primeira definição das “segundas definições”, onde pode-se observar que em seu final expõe “caso a maior componente seja comensurável em comprimento com a exposta racional, seja chamada [a toda] primeira binomial” vem que $k\rho + x$ é uma reta primeira binomial.

49. Achar a segunda binomial

CP49. Para os comentários desta proposição, convém salientar que o termo "segunda binomial" está exposto, em Castaños (1996) e Heath (1956), como "reta segunda binomial", sendo que, neste último autor, como na proposição 48, existem argumentações que evidenciam toda a sutileza da busca de uma prova também para a proposição 49. Deste modo, recordando a afirmação de que "fazendo $k\rho$ uma reta comensurável em comprimento com ρ, esta uma dada reta racional, ou seja, exprimível.". Neste instante, garantindo-se a necessidade de se tomar dois números, evidenciou "que podem ser escritos como $p(m^2 - n^2),\ pn^2$, onde $m^2 - n^2$ não é um quadrado perfeito.". A partir daqui, tomou uma certa reta racional x, e garantiu a seguinte proporção:

$$\frac{pm^2}{p(m^2-n^2)} = \frac{k^2\rho^2}{x^2}$$

Consequentemente, pode-se exprimir o valor de x como:

$$x = k\rho\ \frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m}$$

Desta forma, a reta primeira binomial foi expressa através da soma explicitada por $k\rho + x$, ou, também, $k\rho + k\rho\ \frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m}$. A prova, agora, garantindo os enfoques da proposição 49, traz o fato de que, como expõe a proporção acima, x^2 é comensurável com $k^2\rho^2$. Não esquecendo que x é uma reta racional, porém incomensurável com $k\rho$, entretanto, como x é comensurável em quadrado somente com $k\rho$, tem-se que a expressão $k\rho + x$ é uma reta binomial. Ainda voltando à

proporção acima, podemos ter, ao contrário da proposição 48, x^2 maior do que $k^2\rho^2$, de tal forma que $x^2 - k^2\rho^2 = z^2$. Todavia, a dita proporção garante que se pode ter $\frac{pm^2}{pn^2} = \frac{x^2}{z^2}$ e, daí, temos que z é uma reta racional e comensurável com x.

Logo, pela segunda definição das "segundas definições", onde pode-se observar que em seu texto revela "caso a menor componente seja comensurável em comprimento com a exposta racional, seja chamada segunda binomial", vem que $k\rho + x$ é uma reta segunda binomial.

50. Achar a terceira binomial

CP50. Enfatizando os comentários desta proposição, tem-se que a expressão "terceira binomial" está escrita, nas traduções de Castaños (1996) e Heath (1956), como "reta terceira binomial". Ainda pluralizando os contextos das suas concepções para as proposições 48 e 49, Heath (1956) prioriza o fato de que "fazendo ρ uma dada reta racional, ou seja, exprimível.". Indo adiante, garante, também, a necessidade de se tomar dois números "que podem ser escritos como $p(m^2 - n^2),\ pn^2$, onde $m^2 - n^2$ não é um quadrado perfeito.". A partir daqui, atrelado aos ecos da proposição 50, ainda toma um certo número q, que não é um quadrado, e que não tem para pm^2 ou $p(m^2 - n^2),$ uma razão de um quadrado para um quadrado. Ao tomar uma certa reta racional x, expõe a seguinte proporção $\frac{q}{pm^2} = \frac{\rho^2}{x^2}$, de onde se enxerga que x é racional e incomensurável com ρ. Agora, supondo que $\frac{pm^2}{p(m^2-n^2)} = \frac{x^2}{y^2}$ tem-se que y é racional e comensurável em quadrado somente com x. Então, tem-se que $x + y$ é uma reta binomial. Neste ponto é bastante importante o fato de que, das proporções apresentadas, pode-se chegar à

proporção $\frac{q}{p(m^2-n^2)} = \frac{\rho^2}{y^2}$, onde constata-se que y é incomensurável com ρ. Então, podemos ter $x^2 - y^2 = z^2$ e da segunda proporção apresentada obtemos $\frac{pm^2}{pn^2} = \frac{x^2}{z^2}$, de onde obtemos que z é comensurável com x. Logo, $\sqrt{x^2 - y^2}$ é comensurável com x. Mas x, y são incomensuráveis com ρ. Desta forma, $x + y$ é uma reta terceira binomial, enquadrando-se no fato de que, pela terceira definição das "segundas definições, "caso nenhuma das componentes seja comensurável em comprimento com a exposta racional, seja chamada terceira binomial".

51. Achar a quarta binomial

CP51. Para os desmembramentos e enfoques desta proposição, vem que a expressão "quarta binomial", nas traduções de Castaños (1996) e Heath (1956), aparece como "reta quarta binomial". Nas importantes concepções para a referida proposição, Heath (1956) explicita que "Tome dois números m, n, tal que $m + n$ não tenha, para qualquer m ou n, a razão de um quadrado para um quadrado.". A partir deste ponto, o autor toma uma certa reta racional x, e garante a seguinte proporção $\frac{m+n}{m} = \frac{k^2\rho^2}{x^2}$. Daí que o valor de x será expresso por $x = k\rho\sqrt{\frac{m}{m+n}}$, ou, fazendo $\phi = \frac{n}{m}$, ter-se-á $x = k\rho\sqrt{\frac{1}{1+\phi}} = \frac{k\rho}{\sqrt{1+\phi}}$. Assim sendo, $k\rho + x$, ou $k\rho + \frac{k\rho}{\sqrt{1+\phi}}$, é uma reta quarta binomial, não esquecendo que $\sqrt{k^2\rho^2 - x^2}$ é incomensurável em comprimento com $k\rho$ e, ainda, $k\rho$ é comensurável em comprimento com ρ. Então, tem-se a explanação inteiramente harmonizada através da quarta definição das "segundas definições, que expõe em seu final "caso a maior

componente seja comensurável em comprimento com a exposta racional, seja chamada quarta binomial".

52. Achar a quinta binomial

CP52. Para o esmiuçamento desta proposição, convém frisar que o termo "quinta binomial", nas traduções de Castaños (1996) e Heath (1956), está colocado como "reta quinta binomial". Nos delineamentos para a referida proposição, Heath (1956), ainda sorvendo as essências da proposição 51, evidencia que "Tome dois números m, n, tal que $m+n$ não tenha, para qualquer m ou n, a razão de um quadrado para um quadrado.". A partir deste ponto, o autor toma uma certa reta racional x, e garante a seguinte proporção $\frac{m}{m+n} = \frac{k^2\rho^2}{x^2}$. De onde se obtém que o valor de x será tido por $x = k\rho\sqrt{\frac{m+n}{m}}$, ou, fazendo $\phi = \frac{n}{m}$, ter-se-á $x = k\rho\sqrt{1+\phi}$. Assim sendo, $k\rho + x$, ou $k\rho + k\rho\sqrt{1+\phi}$, é uma reta quinta binomial, não esquecendo que $\sqrt{x^2 - k^2\rho^2}$, ou $\sqrt{\phi}.k\rho$, é incomensurável em comprimento com $k\rho\sqrt{1+\phi}$, x. E, também, $k\rho$, mas não $k\rho\sqrt{1+\phi}$, é comensurável em comprimento com ρ. Então, tem-se a explanação em harmonia com a quinta definição das "segundas definições", que explicita "Enquanto, caso a menor, quinta".

53. Achar a sexta binomial

CP53. Para esta proposição, no detalhamento de seus enfoques, é preciso salientar que o termo "sexta binomial", nas traduções de Castaños (1996) e Heath (1956), está exposto como "reta sexta binomial". Em suas concepções para a referida proposição, Heath (1956), interagindo com os elos da proposição 52, explicita que "Tome dois números m, n, tal que $m+n$ não tenha, para qualquer m ou n, a razão de um quadrado para um quadrado.". Depois, fluindo em seu raciocínio, " toma um

terceiro número p, que não é um quadrado, e não tem para qualquer $m+n$ ou m, a razão de um quadrado para um quadrado.” A partir daqui, o autor toma uma certa reta racional x, e expõe as seguintes proporções $\frac{p}{m+n} = \frac{\rho^2}{x^2}$ e $\frac{m+n}{m} = \frac{x^2}{y^2}$..

Então, a partir de tais proporções, $x+y$ será uma reta sexta binomial. De fato, da primeira proporção, x é racional e incomensurável com ρ. Por outro lado, da segunda proporção, y é racional e incomensurável com x. Consequentemente, x e y são retas racionais comensuráveis somente em quadrado, de modo que $x+y$ é uma reta binomial. No entanto, unindo as duas primeiras proporções, pode-se obter a proporção $\frac{p}{m} = \frac{\rho^2}{y^2}$ que assegura, então, que y é incomensurável com ρ. Logo, conclui-se que x e y são retas racionais incomensuráveis com ρ. No entanto, da segunda proporção, pode-se obter que $\frac{m+n}{n} = \frac{x^2}{x^2-y^2}$, de modo que $\sqrt{x^2-y^2}$ é incomensurável com x. Portanto, desta forma, garante-se que $x+y$ é uma reta sexta binomial, estando, a explanação, em sintonia com a sexta definição das “segundas definições, que explicita “Mas, caso nenhuma, sexta”[15].

LEMA

Sejam os dois quadrados AB, BC, e fiquem expostos de modo a estar a DB sobre uma reta como a BE; portanto, também a FB está sobre uma reta com a BG. E fique completado o paralelogramo AC. Digo que o AC é um quadrado, e que o DG é médio, em proporção, entre os AB, BC, e ainda o DC é médio, em proporção, entre os AC, CB. Pois, como, por um lado, a DB é igual à BF, e, por outro lado, a BE, à BG, portanto, a DE toda é igual à FG toda. Mas a DE é igual a cada uma das AH, IC, enquanto a FG é igual a cada uma das AI, HC; portanto, também cada uma das AH, IC é igual a cada uma das AI, HC. Portanto, o paralelogramo AC é equilátero; mas também é equiângulo; portanto, o AC é um quadrado. E, como a FB está para a BG,

assim a DB para a BE, mas, por um lado, como a FB para a BG; assim o AB para o DG, e, por outro lado, como a DB para a BE, assim o DG para o BC; portanto, também como o AB para o DG, assim o DG para o BC. Portanto, o DG é médio, em proporção, entre os AB, BC. Digo, então, que também o DC [é] médio, em proporção, entre os AC, CB. Pois, como a AD está para a DI, assim a IG para a GC; pois, cada uma [é] igual a cada uma; e, por composição, como a AI para a ID, assim a IC para a CG, mas, por um lado, como a AI para a ID, assim o AC para o CD; e, por outro lado, como a IC para CG, assim o DC para CB, portanto, também como o AC para DC, assim o DC para o BC. Portanto, o DC é médio, em proporção, entre os AC, CB; as quais coisas era proposto provar.

CL10. Em relação ao comentário deste lema, é importante mencionar que Castaños (1996) traduz, na penúltima linha, a expressão "o DC é médio, em proporção" como "DC é a média proporcional" e, em suas concepções, afirma que "um retângulo é a média proporcional dos quadrados de seus lados.". Por outro lado, Heath (1956) esclarece que o referido lema prova, de fato, a constatação de duas proporções, que são $\frac{x^2}{xy} = \frac{xy}{y^2}$ e $\frac{(x+y)^2}{(x+y)y} = \frac{(x+y)y}{y^2}$, sendo que, conforme pontua, a primeira destas proporções, está provada por Euclides em suas explanações para a proposição 25 do Livro X. A partir deste fato, garante o autor, surgem dúvidas sobre a autenticidade do lema em questão[16].

54. Caso uma área seja contida por uma racional e a primeira binomial, a que serve para produzir a área é irracional, a chamada binomial.

CP54. Para a análise desta proposição, faz-se necessário esclarecer que onde se lê "uma racional" pode-se ler "uma reta racional" ou "uma reta exprimível"; onde se lê "a que serve para produzir a área é irracional" pode-se ler "o lado do quadrado equivalente à área é a reta não exprimível" ou "o lado da área é a reta irracional". No texto apresentado para a tradução de Castaños (1996), a maioria dos enfoques é pontuado. Na tradução de Heath (1956) também são acentuadas tais concepções[17]. Por outro lado, no trabalho de Fowler (1992), há uma tabela onde o autor evidencia, através de exemplos, as seis linhas aditivas, passando pela binomial, primeira

bimedial, segunda bimedial, maior, lado de um exprimível mais uma área medial, e lado da soma de duas áreas mediais[18]. No caso específico da proposição 54, que trata da binomial, tem-se o exemplo de um retângulo contido por $(3a + \sqrt{5}a)$ e a, gerando um quadrado equivalente de valor $(\sqrt{\frac{5}{2}}a + \sqrt{\frac{1}{2}}a)^2$. Ainda em Heath (1956)[19], os esclarecimentos vêm à tona e é possível compreender todas as nuances do enunciado da proposição em questão, visto que o autor mostra que, através da proposição 48, verifica-se que a reta primeira binomial pode ser expressa como $k\rho + k\rho \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{m}$, ou, fazendo $\phi = \frac{n}{m}$, vem que teremos a mesma exposta por $k\rho + k\rho\sqrt{1 - \phi^2}$. Então, como o enunciado da proposição 54 garante a multiplicação de uma reta racional por uma primeira binomial, tem-se que considerando ρ a dita reta racional, a expressão representada pela raiz quadrada do produto $\rho(k\rho + k\rho\sqrt{1 - \phi^2})$, ou seja, $x + y = \sqrt{\rho(k\rho + k\rho\sqrt{1 - \phi^2})}$ evidencia uma reta binomial tal qual explicita a proposição 36 do Livro X que expõe “Caso duas racionais comensuráveis somente em potência sejam compostas, a toda é irracional, e seja chamada binomial.”. Seguindo adiante, tem-se que podemos, algebricamente, buscar a resolução das equações $u + v = k\rho$ e $u.v = \frac{k^2\rho^2(1 - \phi^2)}{4}$. Logo, teremos o seguinte sistema:

$$u + v = k\rho$$

$$u.v = \frac{k^2\rho^2(1 - \phi^2)}{4}$$

Efetuando, neste instante, a resolução aritmética de tal sistema, temos que:

$$u.(k\rho - u) = \frac{k^2\rho^2(1-\phi^2)}{4}$$

$$u^2 - k\rho u + \frac{k^2\rho^2(1-\phi^2)}{4} = 0$$

$$u = \frac{k\rho \pm \sqrt{k^2\rho^2 - k^2\rho^2(1-\phi^2)}}{2}$$

$$u = \frac{k\rho \pm \sqrt{k^2\rho^2 - k^2\rho^2 + k^2\rho^2\phi^2}}{2}$$

$$u = \frac{k\rho \pm \sqrt{k^2\rho^2\phi^2}}{2}$$

$$u = \frac{k\rho \pm k\rho\phi}{2}$$

$$u = \frac{k\rho}{2}(1 \pm \phi)$$

Considerando, então, u maior que v, vem que obteremos as seguintes soluções:

$$u = \frac{k\rho}{2}(1 + \phi)$$

$$v = \frac{k\rho}{2}\,(1 - \phi)$$

No entanto, encontrando os valores de u e v, podemos concluir que as retas incomensuráveis x e y, terão a forma de $x^2 = \rho u$ e $y^2 = \rho v$. Logo x e y serão expressos por:

$$x^2 = \rho\frac{k\rho}{2}\,(1 + \phi)$$

$$x^2 = \frac{k\rho^3}{2}\,(1 + \phi)$$

$$x = \rho\sqrt{\frac{k}{2}(1 + \phi)}$$

E encontrando y, vem que:

$$y^2 = \rho\frac{k\rho}{2}\,(1 - \phi)$$

$$y^2 = \frac{k\rho^3}{2}\,(1 - \phi)$$

$$y = \rho\sqrt{\frac{k}{2}(1 - \phi)}$$

Então, o valor de $x + y$ representa, exatamente, uma reta binomial tal qual definida pela proposição 36 do Livro X. Logo, tem-se que:

$$x + y = \rho\sqrt{\frac{k}{2}(1 + \phi)} + \rho\sqrt{\frac{k}{2}(1 - \phi)}$$

$$xy = \frac{k\rho^2}{2}\sqrt{1 - \phi^2}$$

Portanto, como já sabemos que $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, ter-se-á:

$$(x + y)^2 = \rho(u + v) + 2xy$$

$$(x + y)^2 = \rho k\rho + 2\frac{k\rho^2}{2}\sqrt{1 - \phi^2}$$

$$(x + y)^2 = k\rho^2 + k\rho^2\sqrt{1 - \phi^2}$$

$$x + y = \sqrt{k\rho^2 + k\rho^2\sqrt{1 - \phi^2}}$$

$$x + y = \sqrt{\rho(k\rho + k\rho\sqrt{1 - \phi^2})}$$

55. Caso uma área seja contida por uma racional e a segunda binomial, a que serve para produzir a área é irracional, a chamada primeira bimedial.

CP55. Mergulhando nos teores da proposição dada, verifica-se, para um melhor entendimento da mesma, que onde se lê “uma racional” pode-se ler “uma reta racional” ou “uma reta exprimível”; onde se lê “a que serve para produzir a área é irracional” pode-se ler “o lado do quadrado equivalente à área é a reta não exprimível” ou “o lado da área é a reta irracional”. No texto exposto na tradução de Castaños (1996), enxerga-se tais observações. Na tradução de Heath (1956) também pontuam-se estes detalhes. Esclarecendo os enfoques, no trabalho de Fowler (1992), há uma tabela onde o autor explicita, com exemplos, as seis linhas aditivas, passando pela binomial, primeira bimedial, segunda bimedial, maior, lado de um exprimível mais uma área medial, e lado da soma de duas áreas mediais. No caso específico da proposição 55, que trata da primeira bimedial, tem-se o exemplo de um retângulo contido por $(\sqrt{12}a + 3a)$ e a, gerando um quadrado equivalente de valor $(\sqrt{\sqrt{27}}a + \sqrt{\sqrt{3}}a)^2$. Nas importantes concepções de Heath (1956), enxergam-se as confluências da referida proposição, pois o autor mostra que, através da proposição 49, verifica-se que a reta segunda binomial pode ser expressa como $\frac{k\rho}{\sqrt{1-\phi^2}} + k\rho.$ Então, conforme garante o enunciado da proposição 55, a multiplicação de uma reta racional por uma segunda binomial e considerando ρ a dita reta racional, a expressão representada pela raiz quadrada do produto $\rho(\frac{k\rho}{\sqrt{1-\phi^2}} + k\rho)$, ou seja, $x + y = \sqrt{\rho(\frac{k\rho}{\sqrt{1-\phi^2}} + k\rho)}$ evidencia uma reta primeira bimedial tal qual testemunha a proposição 37 do Livro X que afirma “Caso duas mediais comensuráveis somente em potência, contendo um racional, sejam compostas, a toda é irracional, e seja chamada primeira bimedial.”. Fluindo na análise, tem-se que podemos, algebricamente, buscar a resolução das equações $u + v = \frac{k\rho}{\sqrt{1-\phi^2}}$ e $u.v = \frac{k^2\rho^2}{4}$. Logo, teremos o seguinte sistema:

$$u + v = \frac{k\rho}{\sqrt{1-\phi^2}}$$

$$u.v = \frac{k^2\rho^2}{4}$$

Efetuando, neste instante, a resolução aritmética de tal sistema, temos que:

$$u.\left(\frac{k\rho}{\sqrt{1-\phi^2}} - u\right) = \frac{k^2\rho^2}{4}$$

$$u^2 - \frac{k\rho}{\sqrt{1-\phi^2}} + \frac{k^2\rho^2}{4} = 0$$

$$u = \frac{\frac{k\rho}{\sqrt{1-\phi^2}} \pm \sqrt{\frac{k^2\rho^2}{1-\phi^2} - k^2\rho^2}}{2}$$

$$u = \frac{\frac{k\rho}{\sqrt{1-\phi^2}} \pm \sqrt{\frac{k^2\rho^2 - k^2\rho^2 + k^2\rho^2\phi^2}{1-\phi^2}}}{2}$$

$$u = \frac{\frac{k\rho}{\sqrt{1-\phi^2}} \pm \sqrt{\frac{k^2\rho^2\phi^2}{1-\phi^2}}}{2}$$

$$u = \frac{k\rho \pm k\rho\phi}{2\sqrt{1-\phi^2}}$$

$$u = \frac{k\rho}{2\sqrt{1-\phi^2}}(1 \pm \phi)$$

Considerando, então, u maior que v, vem que obteremos as seguintes soluções:

$$u = \frac{k\rho}{2\sqrt{1-\phi^2}}(1 + \phi)$$

$$v = \frac{k\rho}{2\sqrt{1-\phi^2}}(1 - \phi)$$

Entretanto, encontrando os valores de u e v, chegamos a conclusão de que as retas incomensuráveis x e y, terão a forma de $x^2 = \rho u$ e $y^2 = \rho v$. Logo x e y serão expressos por:

$$x^2 = \rho\frac{k\rho}{2\sqrt{1-\phi^2}}(1 + \phi)$$

$$x^2 = \frac{k\rho^2}{2\sqrt{1-\phi^2}}(1 + \phi)$$

$$x = \frac{\rho}{\sqrt[4]{1-\phi^2}}\sqrt{\frac{k}{2}(1 + \phi)}$$

E encontrando y, vem que:

$$y^2 = \rho\frac{k\rho}{2\sqrt{1-\phi^2}}(1-\phi)$$

$$y^2 = \frac{k\rho^2}{2\sqrt{1-\phi^2}}(1-\phi)$$

$$y = \frac{\rho}{\sqrt[4]{1-\phi^2}}\sqrt{\frac{k}{2}(1-\phi)}$$

Então, o valor de $x+y$ representa, sucintamente, uma reta primeira bimedial tal qual definida pela proposição 37 do Livro X. Logo, tem-se que:

$$x+y = \frac{\rho}{\sqrt[4]{1-\phi^2}}\sqrt{\frac{k}{2}(1+\phi)} + \frac{\rho}{\sqrt[4]{1-\phi^2}}\sqrt{\frac{k}{2}(1-\phi)}$$

$$xy = \frac{k\rho^2}{2\sqrt{1-\phi^2}}\sqrt{1-\phi^2} = \frac{k\rho^2}{2}$$

Portanto, sabendo-se que $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, vem que:

$$(x+y)^2 = \rho(u+v) + 2xy$$

$$(x+y)^2 = \rho\frac{k\rho}{\sqrt{1-\phi^2}} + 2\frac{k\rho^2}{2}$$

$$(x+y)^2 = \frac{k\rho^2}{\sqrt{1-\phi^2}} + k\rho^2$$

$$x+y = \sqrt{\frac{k\rho^2}{\sqrt{1-\phi^2}} + k\rho^2}$$

$$x+y = \sqrt{\rho(\frac{k\rho}{\sqrt{1-\phi^2}} + k\rho)}$$

56. Caso uma área seja contida por uma racional e a terceira binomial, a que serve para produzir a área é irracional, a chamada segunda bimedial.

CP56. Para a proposição em apreço, aprofundando suas essências e reverberações, no intuito de melhor compreendê-la, pontua-se que onde se lê “uma racional” pode-se ler “uma reta racional” ou “uma reta exprimível”; onde se lê “a que serve para produzir a área é irracional” pode-se ler “o lado do quadrado equivalente à área é a reta não exprimível” ou “o lado da área é a reta irracional”. No texto atrelado à tradução de Castaños (1996), vivenciam-se estas concepções. Já para a tradução de Heath (1956) também verificam-se tais enunciações. No importante trabalho de Fowler (1992), em uma tabela, o autor evidencia, através de exemplos, as seis linhas aditivas, passando pela binomial, primeira bimedial, segunda bimedial, maior, lado de um exprimível mais uma área medial, e lado da soma de duas áreas mediais. No caso específico da proposição 56, que trata da segunda bimedial, tem-se o exemplo de um retângulo contido por $(\sqrt{8}a + \sqrt{6}a)$ e a, gerando um quadrado equivalente de valor $(\sqrt{\sqrt{\frac{9}{2}}a + \sqrt{\sqrt{\frac{1}{2}}a})^2$. Nas sempre valiosas informações de Heath (1956), delineiam-se as sutilezas da referida proposição, visto que é evidenciado, através da proposição 50, que a reta terceira binomial pode ser expressa como $\sqrt{k}\rho + \sqrt{k}\rho\sqrt{1-\phi^2}$. Então, conforme garante o enunciado da proposição 56, a

multiplicação de uma reta racional por uma terceira binomial e considerando ρ a dita reta racional, a expressão representada pela raiz quadrada do produto $\rho(\sqrt{k}\rho + \sqrt{k}\rho\sqrt{1-\phi^2})$, ou seja, $x + y = \sqrt{\rho(\sqrt{k}\rho + \sqrt{k}\rho\sqrt{1-\phi^2})}$ evidencia uma reta segunda bimedial como testifica a proposição 38 do Livro X que afirma “Caso duas mediais comensuráveis somente em potência, contendo um medial, sejam compostas, a toda é irracional, e seja chamada segunda bimedial.”. Esmiuçando a análise, tem-se que podemos, algebricamente, buscar a resolução das equações $u + v = \sqrt{k}\rho$ e $u.v = \frac{k\rho^2(1-\phi^2)}{4}$. Logo, teremos o seguinte sistema:

$$u + v = \sqrt{k}\rho$$

$$u.v = \frac{k\rho^2(1-\phi^2)}{4}$$

Efetuando, neste instante, a resolução aritmética de tal sistema, temos que:

$$u.\left(\sqrt{k}\rho - u\right) = \frac{k\rho^2(1-\phi^2)}{4}$$

$$u^2 - \sqrt{k}\rho + \frac{k\rho^2(1-\phi^2)}{4} = 0$$

$$u = \frac{\sqrt{k}\rho \pm \sqrt{k\rho^2 - k\rho^2(1-\phi^2)}}{2}$$

$$u = \frac{\sqrt{k}\rho \pm \sqrt{k\rho^2 - k\rho^2 + k\rho^2\phi^2}}{2}$$

$$u = \frac{\sqrt{k}\rho \pm \sqrt{k\rho^2\phi^2}}{2}$$

$$u = \frac{\sqrt{k}\rho \pm \sqrt{k}\rho\phi}{2}$$

$$u = \frac{\sqrt{k}\rho}{2}(1 \pm \phi)$$

Considerando, então, u maior que v, vem que obteremos as seguintes soluções:

$$u = \frac{\sqrt{k}\rho}{2}(1 + \phi)$$

$$v = \frac{\sqrt{k}\rho}{2}(1 - \phi)$$

No entanto, encontrando os valores de u e v, chegamos a conclusão de que as retas incomensuráveis x e y, terão a forma de $x^2 = \rho u$ e $y^2 = \rho v$. Logo x e y serão expressos por:

$$x^2 = \rho\frac{\sqrt{k}\rho}{2}(1 + \phi)$$

$$x^2 = \frac{\sqrt{k}\rho^2}{2}(1 + \phi)$$

$$x = \sqrt[4]{k}\rho\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \phi)}$$

E encontrando y, vem que:

$$y^2 = \rho\frac{\sqrt{k}\rho}{2}(1 - \phi)$$

$$y^2 = \frac{\sqrt{k}\rho^2}{2}(1 - \phi)$$

$$y = \sqrt[4]{k}\rho\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \phi)}$$

Então, o valor de $x + y$ representa, evidentemente, uma reta segunda bimedial tal qual definida pela proposição 38 do Livro X. Logo, tem-se que:

$$x + y = \sqrt[4]{k}\rho\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \phi)} + \sqrt[4]{k}\rho\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \phi)}$$

$$xy = \frac{\sqrt{k}\rho^2}{2}\sqrt{1 - \phi^2}$$

Portanto, conhecendo-se que $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, tem-se que:

$$(x + y)^2 = \rho(u + v) + 2xy$$

$$(x+y)^2 = \rho\sqrt{k}\rho \ \ + 2\frac{\sqrt{k}\rho^2}{2}\sqrt{1-\phi^2}$$

$$(x+y)^2 = \sqrt{k}\rho^2 + \sqrt{k}\rho^2\sqrt{1-\phi^2}$$

$$x+y = \sqrt{\sqrt{k}\rho^2 + \sqrt{k}\rho^2\sqrt{1-\phi^2}}$$

$$x+y = \sqrt{\rho(\sqrt{k}\rho + \sqrt{k}\rho\sqrt{1-\phi^2})}$$

57. Caso uma área seja contida por uma racional e a quarta binomial, a que serve para produzir a área é irracional, a chamada maior.

CP57. Para a proposição em análise, sondando seus elos e delineamentos, convém explicitar que onde se lê “uma racional” pode-se ler “uma reta racional” ou “uma reta exprimível”; onde se lê “a que serve para produzir a área é irracional” pode-se ler “o lado do quadrado equivalente à área é a reta não exprimível” ou “o lado da área é a reta irracional”. Na tradução de Castaños (1996), estes enfoques são citados. Já para a tradução de Heath (1956), a fluição destas ideias é evidente. Ampliando o entendimento da referida proposição, o trabalho de Fowler (1992) traz uma tabela, onde citam-se exemplos das seis linhas aditivas, passando pela binomial, primeira bimedial, segunda bimedial, maior, lado de um exprimível mais uma área medial, e lado da soma de duas áreas mediais. No caso específico da proposição 57, que trata da maior, tem-se o exemplo de um retângulo contido por $(10a + \sqrt{20}a)$ e a, gerando um quadrado equivalente de valor $(\sqrt{(5+\sqrt{20})}a + \sqrt{(5-\sqrt{20})}a)^2$. Nas sutis ponderações de Heath (1956), esboçam-se as nuances da referida proposição, porque se explicita, através da proposição 51, que a reta quarta binomial pode ser

expressa como $k\rho + \frac{k\rho}{1+\phi}$. Então, conforme garante o enunciado explicitado na proposição 57, a multiplicação de uma reta racional por uma quarta binomial e considerando ρ a dita reta racional, a expressão representada pela raiz quadrada do produto $\rho(k\rho + \frac{k\rho}{1+\phi})$, ou seja, $x + y = \sqrt{\rho(k\rho + \frac{k\rho}{1+\phi})}$ evidencia uma reta maior como confirma a proposição 39 do Livro X que afirma “Caso duas retas incomensuráveis em potência, fazendo, por um lado, o composto dos quadrados sobre elas racional, e, por um lado, o por elas medial, sejam compostas, a reta toda é irracional, e seja chamada maior.”. Decodificando melhor tais concepções, vem que podemos, algebricamente, buscar a resolução das equações $u + v = k\rho$ e $u.v = \frac{k^2\rho^2}{4(1+\phi)}$. Logo, teremos o seguinte sistema:

$$u + v = k\rho$$

$$u.v = \frac{k^2\rho^2}{4(1+\phi)}$$

Efetuando, neste instante, a resolução aritmética de tal sistema, temos que:

$$u.(k\rho - u) = \frac{k^2\rho^2}{4(1+\phi)}$$

$$u^2 - k\rho u + \frac{k^2\rho^2}{4(1+\phi)} = 0$$

$$u = \frac{k\rho \pm \sqrt{k^2\rho^2 - \frac{k^2\rho^2}{1+\phi}}}{2}$$

$$u = \frac{k\rho \pm \sqrt{\frac{k^2\rho^2 + k^2\rho^2\phi - k^2\rho^2}{1+\phi}}}{2}$$

$$u = \frac{k\rho \pm \sqrt{\frac{k^2\rho^2\phi}{1+\phi}}}{2}$$

$$u = \frac{k\rho \pm k\rho\sqrt{\frac{\phi}{1+\phi}}}{2}$$

$$u = \frac{k\rho}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{\phi}{1+\phi}}\right)$$

Considerando, então, u maior que v, vem que obteremos as seguintes soluções:

$$u = \frac{k\rho}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{\phi}{1+\phi}}\right)$$

$$v = \frac{k\rho}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\phi}{1+\phi}}\right)$$

Contudo, encontrando os valores de u e v, chegamos à conclusão de que as retas incomensuráveis x e y, terão a forma de $x^2 = \rho u$ e $y^2 = \rho v$. Logo x e y serão expressos por:

$$x^2 = \rho \frac{k\rho}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{\phi}{1+\phi}}\right)$$

$$x^2 = \frac{k\rho^2}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{\phi}{1+\phi}}\right)$$

$$x = \rho \sqrt{\frac{k}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{\phi}{1+\phi}}\right)}$$

E encontrando y, vem que:

$$y^2 = \rho \frac{k\rho}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\phi}{1+\phi}}\right)$$

$$y^2 = \frac{k\rho^2}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{\phi}{1+\phi}}\right)$$

$$y = \rho \sqrt{\frac{k}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\phi}{1+\phi}}\right)}$$

Então, o valor de $x + y$ representa, evidentemente, uma reta maior tal qual definida pela proposição 39 do Livro X. Logo, tem-se que:

$$x + y = \rho \sqrt{\frac{k}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{\phi}{1+\phi}}\right)} \quad + \rho \sqrt{\frac{k}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\phi}{1+\phi}}\right)}$$

$$xy = \frac{k\rho^2}{2}\sqrt{1 - \frac{\phi}{1+\phi}} = \frac{k\rho^2}{2}\sqrt{\frac{1}{1+\phi}} = \frac{k\rho^2}{2\sqrt{1+\phi}}$$

Portanto, conhecendo-se que $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, tem-se que:

$$(x+y)^2 = \rho(u+v) + 2xy$$

$$(x+y)^2 = \rho k\rho \quad + 2\,\frac{k\rho^2}{2\sqrt{1+\phi}}$$

$$(x+y)^2 = k\rho^2 + \frac{k\rho^2}{\sqrt{1+\phi}}$$

$$x + y = \sqrt{k\rho^2 + \frac{k\rho^2}{\sqrt{1+\phi}}}$$

$$x + y = \sqrt{\rho\left(k\rho + \frac{k\rho}{\sqrt{1+\phi}}\right)}$$

58. Caso uma área seja contida por uma racional e a quinta binomial, a que serve para produzir a área é irracional, a chamada a que serve para produzir um racional e um medial.

CP58. Evidenciando os comentários para esta proposição, averiguando suas texturas e enfoques, pontua-se que onde se lê “uma racional” pode-se ler “uma reta racional” ou “uma reta exprimível”; onde se lê “a que serve para produzir a área é irracional” pode-se ler “o lado do quadrado equivalente à área é a reta não exprimível” ou “o lado da área é a reta irracional”; onde se lê “a que serve para produzir um racional e um medial” pode-se ler “lado do quadrado equivalente a uma área exprimível mais uma área medial” ou “o lado de uma racional mais uma área medial”. No texto da tradução de Castaños (1996), estes detalhes estão delineados. Já para a tradução de Heath (1956), aparecem a maioria destas acepções. Contribuindo para um entendimento mais aprimorado da referida proposição, o trabalho de Fowler (1992) expõe uma tabela, onde consolidam-se exemplos das seis linhas aditivas, passando pela binomial, primeira bimedial, segunda bimedial, maior, lado de um exprimível mais uma área medial, e lado da soma de duas áreas mediais. No caso específico da proposição 58, que trata do lado de um exprimível mais uma área medial, mostra-se o excelente exemplo de um retângulo contido por $(\sqrt{5}a + 1a)$ e a, gerando um quadrado equivalente de valor $(\sqrt{(\sqrt{\frac{5}{4}} + 1)a} + \sqrt{(\sqrt{\frac{5}{4}} - 1)a})^2$. Nos delineamentos de Heath (1956), sempre precisos, consolidam-se as reverberações da proposição em questão, visto que, através da proposição 52, tem-se o fato de que a reta quinta binomial pode ser expressa como $k\rho\sqrt{1 + \phi} + k\rho$. Então, conforme garante o enunciado explicitado na proposição 58, a multiplicação de uma reta racional por uma quinta binomial e considerando ρ a dita reta racional, a expressão representada pela raiz quadrada do produto $\rho(k\rho\sqrt{1 + \phi} + k\rho)$, ou seja, $x + y = \sqrt{\rho(k\rho\sqrt{1 + \phi} + k\rho)}$ contextualiza uma reta “lado de um exprimível mais uma área medial”, como traduz a proposição 40 do Livro X que testemunha “Caso duas retas incomensuráveis em

potência, fazendo, por um lado, o composto dos quadrados sobre elas medial, e, por outro lado, o por elas racional, sejam compostas, a reta toda é irracional, e seja chamada a que serve para produzir um racional e um medial". Decodificando melhor estes elos, vem que podemos, algebricamente, buscar a resolução das equações $u + v = k\rho\sqrt{1+\phi}$ e $u.v = \frac{k^2\rho^2}{4}$. Logo, teremos o seguinte sistema:

$$u + v = k\rho\sqrt{1+\phi}$$

$$u.v = \frac{k^2\rho^2}{4}$$

Efetuando, neste instante, a resolução aritmética de tal sistema, temos que:

$$u.\left(k\rho\sqrt{1+\phi} - u\right) = \frac{k^2\rho^2}{4}$$

$$u^2 - k\rho\sqrt{1+\phi}\,u + \frac{k^2\rho^2}{4} = 0$$

$$u = \frac{k\rho\sqrt{1+\phi} \pm \sqrt{k^2\rho^2(1+\phi) - k^2\rho^2}}{2}$$

$$u = \frac{k\rho\sqrt{1+\phi} \pm \sqrt{k^2\rho^2 + k^2\rho^2\phi - k^2\rho^2}}{2}$$

$$u = \frac{k\rho\sqrt{1+\phi} \pm \sqrt{k^2\rho^2\phi}}{2}$$

$$u = \frac{k\rho\sqrt{1+\phi} \pm k\rho\sqrt{\phi}}{2}$$

$$u = \frac{k\rho}{2}\left(\sqrt{1+\phi} \pm \sqrt{\phi}\right)$$

Considerando, então, u maior que v, vem que se obtém as seguintes soluções:

$$u = \frac{k\rho}{2}\left(\sqrt{1+\phi} + \sqrt{\phi}\right)$$

$$v = \frac{k\rho}{2}\left(\sqrt{1+\phi} - \sqrt{\phi}\right)$$

Todavia, encontrando os valores de u e v, chegamos à conclusão de que as retas incomensuráveis x e y, terão a forma de $x^2 = \rho u$ e $y^2 = \rho v$. Logo x e y serão expressos por:

$$x^2 = \rho\frac{k\rho}{2}\left(\sqrt{1+\phi} + \sqrt{\phi}\right)$$

$$x^2 = \frac{k\rho^2}{2}\left(\sqrt{1+\phi} + \sqrt{\phi}\right)$$

$$x = \rho\sqrt{\frac{k}{2}\left(\sqrt{1+\phi} + \sqrt{\phi}\right)}$$

E encontrando y, vem que:

$$y^2 = \rho\frac{k\rho}{2}\left(\sqrt{1+\phi}-\sqrt{\phi}\right)$$

$$y^2 = \frac{k\rho^2}{2}\left(\sqrt{1+\phi}-\sqrt{\phi}\right)$$

$$y = \rho\sqrt{\frac{k}{2}\left(\sqrt{1+\phi}-\sqrt{\phi}\right)}$$

Então, o valor de $x+y$ representa, convenientemente, uma reta “lado de um exprimível mais uma área medial” já definida pela proposição 40 do Livro X. Logo, tem-se que:

$$x+y = \rho\sqrt{\frac{k}{2}\left(\sqrt{1+\phi}+\sqrt{\phi}\right)} + \rho\sqrt{\frac{k}{2}\left(\sqrt{1+\phi}-\sqrt{\phi}\right)}$$

$$xy = \frac{k\rho^2}{2}\sqrt{1+\phi-\phi} = \frac{k\rho^2}{2}$$

Portanto, recordando que $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$, vem que:

$$(x+y)^2 = \rho(u+v)+2xy$$

$$(x+y)^2 = \rho k\rho\sqrt{1+\phi} + 2\frac{k\rho^2}{2}$$

$$(x+y)^2 = k\rho^2\sqrt{1+\phi} + k\rho^2$$

$$x+y = \sqrt{k\rho^2\sqrt{1+\phi} + k\rho^2}$$

$$x+y = \sqrt{\rho(k\rho\sqrt{1+\phi} + k\rho)}$$

59. Caso uma área seja contida por uma racional e a sexta binomial, a que serve para produzir a área é irracional, a chamada a que serve para produzir dois mediais.

CP59. Nos delineamentos desta proposição, consolidando seus teores e repercussões, expõe-se que onde se lê “uma racional” pode-se ler “uma reta racional” ou “uma reta exprimível”; onde se lê “a que serve para produzir a área é irracional” pode-se ler “o lado do quadrado equivalente à área é a reta não exprimível” ou “o lado da área é a reta irracional”; onde se lê “a que serve para produzir dois medias” pode-se ler “lado do quadrado equivalente a soma de duas áreas mediais” ou “o lado da soma de duas áreas mediais”. Para o texto da tradução de Castaños (1996), tais observações são pontuadas. Na tradução de Heath (1956), explicitam-se grande parte destes enfoques. Alicerçando uma melhor compreensão da referida proposição, o trabalho de Fowler (1992) visualiza uma tabela, onde evidenciam-se exemplos das seis linhas aditivas, passando pela binomial, primeira bimedial, segunda bimedial, maior, lado de um exprimível mais uma área medial, e lado da soma de duas áreas mediais. No caso específico da proposição 59, que trata do lado da soma de duas áreas mediais, constrói-se o exemplo de um retângulo contido por $(\sqrt{10}a + \sqrt{8}a)$ e a, gerando um quadrado equivalente de valor $(\sqrt{(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}})a} + \sqrt{(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}})a})^2$. Nas explicações de Heath (1956), expandem-se os contextos da proposição em apreço, porque, através da proposição 53, tem-se o fato de que a reta sexta binomial pode ser expressa como $\sqrt{k}\rho + \sqrt{\phi}\rho$. Então,

conforme garante o enunciado explicitado na proposição 59, a multiplicação de uma reta racional por uma sexta binomial e considerando ρ a dita reta racional, a expressão representada pela raiz quadrada do produto $\rho(\sqrt{k}\rho + \sqrt{\phi}\rho)$, ou seja, $x + y = \sqrt{\rho(\sqrt{k}\rho + \sqrt{\phi}\rho)}$ explicita uma reta "lado da soma de duas áreas mediais", conforme expõe a proposição 41 do Livro X que testemunha "Caso duas retas incomensuráveis em potência, fazendo tanto o composto dos quadrados sobre elas medial quanto o por elas medial e ainda incomensurável como composto dos quadrados sobre elas, sejam compostas, a reta toda é irracional, e seja chamada a que serve para produzir dois mediais". Decodificando estas concepções, vem que podemos, algebricamente, buscar a resolução das equações $u + v = \sqrt{k}\rho$ e $u.v = \frac{\phi\rho^2}{4}$. Logo, teremos o seguinte sistema:

$$u + v = \sqrt{k}\rho$$

$$u.v = \frac{\phi\rho^2}{4}$$

Efetuando, neste instante, a resolução aritmética de tal sistema, temos que:

$$u.\left(\sqrt{k}\rho - u\right) = \frac{\phi\rho^2}{4}$$

$$u^2 - \sqrt{k}\rho\, u + \frac{\phi\rho^2}{4} = 0$$

$$u = \frac{\sqrt{k}\rho \pm \sqrt{k\rho^2 - \phi\rho^2}}{2}$$

$$u = \frac{\sqrt{k}\rho \ \pm \sqrt{\rho^2(k-\phi)}}{2}$$

$$u = \frac{\sqrt{k}\rho \ \pm \ \rho\sqrt{k-\phi}}{2}$$

$$u = \frac{\rho}{2}\ (\sqrt{k} \ \pm \sqrt{k-\phi})$$

Considerando, então, u maior que v, vem que se obtém as seguintes soluções:

$$u = \frac{\rho}{2}\ (\sqrt{k} + \sqrt{k-\phi})$$

$$v = \frac{\rho}{2}\ (\sqrt{k} - \sqrt{k-\phi})$$

Entretanto, encontrando os valores de u e v, chegamos à conclusão de que as retas incomensuráveis x e y, terão a forma de $x^2 = \rho u$ e $y^2 = \rho v$. Logo x e y serão expressos por:

$$x^2 = \ \rho\frac{\rho}{2}\ (\sqrt{k} + \sqrt{k-\phi})$$

$$x^2 = \ \frac{\rho^2}{2}\ (\sqrt{k} + \sqrt{k-\phi})$$

$$x = \rho\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{k} + \sqrt{k-\phi})}$$

E encontrando y, vem que:

$$y^2 = \rho\frac{\rho}{2}\ (\sqrt{k} - \sqrt{k-\phi})$$

$$y^2 = \frac{\rho^2}{2}\ (\sqrt{k} - \sqrt{k-\phi})$$

$$y = \rho\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{k} - \sqrt{k-\phi})}$$

Então, o valor de $x + y$ representa, convenientemente, uma reta “lado de um exprimível mais uma área medial” já definida pela proposição 40 do Livro X. Logo, tem-se que:

$$x + y = \rho\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{k} + \sqrt{k-\phi})} + \ \rho\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{k} - \sqrt{k-\phi})}$$

$$xy = \frac{\rho^2}{2}\sqrt{k - k + \ \phi} = \frac{\rho^2}{2}\sqrt{\phi}$$

Portanto, recordando que $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, vem que:

$$(x+y)^2 = \rho(u+v) + 2xy$$

$$(x+y)^2 = \rho\sqrt{k}\rho\ + 2\ \frac{\rho^2}{2}\ \sqrt{\phi}$$

$$(x+y)^2 = \sqrt{k}\rho^2 + \rho^2\sqrt{\phi}$$

$$x+y = \sqrt{\rho^2(\sqrt{k}+\sqrt{\phi})}$$

$$x+y = \sqrt{\rho(\sqrt{k}\rho+\sqrt{\phi}\rho)}$$

LEMA

Caso uma linha reta seja cortada em desiguais, os quadrados sobre os desiguais são maiores do que duas vezes o retângulo contido pelas desiguais.
Seja a reta AB e fique cortada em desiguais no C, e seja a AC a maior; digo que os sobre as AC, CB são maiores do que duas vezes o pelas AC, CB. Fique, pois, a AB cortada em duas no D. Como, de fato, uma linha reta foi cortada, por um lado, em iguais no D, e, por outro lado, em desiguais no C, portanto, o pelas AC, CB, como o sobre CD é igual ao sobre AD; desse modo, o pelas AC, CB é menor do que o sobre AD; portanto, duas vzes o pelas AC, CB é menor do que o dobro do sobre AD. mas os sobre as AC, CB [são] o dobro dos sobre as AD, DC; portanto, os sobre as AC, CB são maiores do que duas vezes o pelas AC, CB; o que era preciso provar.]

CL11. Para os comentários deste lema, faz-se necessário esclarecer, que o fato do mesmo ser apresentado totalmente entre colchetes, está intimamente atrelado às concepções de Heiberg que o considera suspeito, ou seja, desfigurado em sua genuinidade, em virtude do referido lema ter sido usado por Euclides, efetivamente, no resultado da proposição 44 do Livro X, que anuncia “A segunda bimedial é dividida em um só ponto.”. Tais observações estão pontuadas tanto em Castaños (1996), quanto em Heath (1956). Em relação a este autor, ainda se pode verificar a importante citação de que o lema em questão traduz o fato de que $x^2 + y^2 > 2xy$[20].

60. O sobre a binomial, aplicado a uma racional, faz como largura a primeira binomial.

CP60. Para os comentários referentes a esta proposição, no intuito de melhor compreendê-la, convém explicitar que onde se lê “O sobre a binomial” pode-se ler “o quadrado de uma binomial” ou “o quadrado sobre a reta binomial”; onde se lê “aplicado a uma racional” pode-se ler “aplicado a uma reta exprimível” ou “aplicado a uma reta racional”. Tais observações estão evidenciadas em Castaños (1996). Também em Heath (1956) enxergam-se algumas destas concepções, além do que o autor, em suas argumentações, traz o fato de que, conforme a proposição 36 do Livro X, “Caso duas racionais comensuráveis somente em potência sejam compostas, a toda é irracional, e seja chamada binomial”. Assim, anunciando a dita binomial, esclarece que a mesma pode ser representada por $\rho + \sqrt{k}\rho$. A partir daqui, como bem pontua o início da proposição 60, “O sobre a binomial, aplicado a uma racional”, tem-se que $\frac{(\rho+\sqrt{k}\rho)^2}{\sigma} = \frac{\rho^2+2\sqrt{k}\,\rho^2+k\rho^2}{\sigma}$ caracteriza uma reta primeira binomial. Fica, desta forma, claro que ρ^2 e $k\rho^2$ são os quadrados sobre os termos da binomial original, no caso ρ e $\sqrt{k}\rho$. Já o produto $2\sqrt{k}\,\rho^2$ é, exatamente, o dobro da área do retângulo contido por estes termos. Agora, tomando $x, y\ e\ z$, tais que $\sigma x = \rho^2$, $\sigma y = k\rho^2$ e $2\sigma z = 2\sqrt{k}\,\rho^2$, vem que $\frac{\rho^2+2\sqrt{k}\,\rho^2+k\rho^2}{\sigma} = x + y + 2z$. Logo, faz-se necessário provar, sendo $(x+y),\ 2z$ termos, com o termo $(x+y)$ sendo o maior, que $(x+y)+2z$ é uma reta primeira binomial. De início, enxerga-se que ρ é comensurável somente em quadrado com $\sqrt{k}\,\rho$. Então, é assegurado que ρ^2 e $k\rho^2$ são racionais e comensuráveis. Assim sendo, $\sigma(x+y)$ ou $\rho^2 + k\rho^2$ é uma área racional, consequentemente $(x+y)$ é racional e comensurável com σ. Todavia, $2\sqrt{k}\,\rho^2 = 2\rho.\sqrt{k}\,\rho$ é uma área medial, de modo

que $2\sigma z$ é, também, uma área medial, de tal forma que $2z$ é racional, porém incomensurável com σ. Então, como os termos $(x+y),\ 2z$ são racionais e comensuráveis somente em quadrado, tem-se que, pela proposição 36 acima mencionada, $(x+y)+2z$ representa uma reta binomial. Não esquecendo que ρ^2 e $k\rho^2$ são comensuráveis, logo σx e σy são comensuráveis, garante-se que x é comensurável com y. Mas, pelo lema da proposição 59, pode-se afirmar que $\rho^2 + k\rho^2 > 2\sqrt{k}\,\rho^2$, de onde se obtém que $(x+y) > 2z$, extraindo-se o fato de que o termo $(x+y)$ é o maior. Agora, relembrando que a proposição 17 do Livro X expõe que "Caso duas retas sejam desiguais, e à maior seja aplicado um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada e divida-a em comensuráveis em comprimento, a maior será maior em potência do que a menor pelo sobre uma comensurável com aquela mesma [em comprimento]. E, caso a maior seja maior em potência do que a menor pelo sobre uma comensurável com aquela mesma [em comprimento] e á maior seja aplicado um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada, divide-a em comensuráveis em comprimento.", temos que $\sqrt{(x+y)^2-(2z)^2}$ é comensurável com $(x+y)$. Finalmente, como $(x+y),\ 2z$ são racionais e comensuráveis somente em quadrado, e $(x+y)$ é racional e comensurável com σ, conclui-se que $(x+y)+2z$ representa uma reta primeira binomial[21].

6.3 NOTAS E REFERÊNCIAS

1 – A respeito das observações de Luis Vega Reñón , as mesmas estão à p. 95, da sua introdução geral à tradução dos Livros I a IV, de *Os Elementos* de Euclides, efetuada por Maria Luisa Puertas Castaños. Com relação ao texto de Páppus, em nota de rodapé, o autor acrescenta que se trata de uma versão, do início do século X, de Abu Uzman Al-Dimashqi. Foi encontrada em Paris, na Biblioteca Imperial, por F. Woepcke, que na obra *Mémoires présentés à l'Académie des sciences (Memórias apresentadas à Academia das Ciências)*, em 1856, às pp. 658-719, a revelou. Um interessante trecho de Páppus é, então, explicitado,

onde constata-se que "Pelo que se refere a Euclides, tem dado provas rigorosas que há sentado em relação com a comensurabilidade e a incomensurabilidade em geral; tem precisado as noções e as distinções entre as magnitudes racionais e irracionais; tem exposto um grande número de tipos de magnitudes irracionais e por último tem clarificado todo seu âmbito"

2 – Sobre as importantes argumentações de David Fowler, estão contidas, à p. 243, de seu trabalho *An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, no capítulo 6, intitulado The Classification of Book X, and Its Use in Book XIII (A Classificação do Livro X, e seu Uso no Livro XIII), divulgado na Revista Historia Mathematica 19.

3 – O trabalho *"La Croix des Mathématiciens": Euclidean Theory of Irrational Lines (A Cruz dos Matemáticos: A Teoria Euclidiana das Linhas Irracionais)*, de Wilbur Knorr, apresentado no Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, Volume 9, traz inúmeras ponderações com relação à questão da incomensurabilidade em Os Elementos de Euclides. Os textos perfilados neste capítulo estão à p. 53, no item denominado "A Formulação Euclidiana".

4 – O texto sobre "as outras classes de irracionais", de B. L. van der Waerden, está contido em seu livro *Science Awakening (O Despertar da Ciência)*, no capítulo VI, intitulado O Século de Platão, no item Análise do Livro X de Os Elementos, pp. 169-170. Ainda sobre as equações apresentadas no final da citação, o autor afirma que "Em X 33-35, a solução destas equações é indicada, por vários casos, pelo uso da álgebra geométrica. Por exemplo, em X 33, ea é uma área mensurável e eb uma área medial; em X 34, a situação é revertida, em X 35 elas são, ambas, mediais."

5 – Os comentários de Maria Luisa Puertas Castaños, agregados á sua tradução para o Livro X de *Os Elementos* de Euclides, estão à p. 80, nota 34 da referida tradução, que engloba, ainda, as versões para o espanhol do texto grego dos Livros XI, XII e XIII.

6 – A citação em questão, mostrando os norteamentos da proposição 31 à 65, faz parte do trabalho *An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, exposta no capítulo 6, intitulado The Classification of Book X, and Its Use in Book XIII (A Classificação do Livro X, e seu Uso no Livro XIII), de David Fowler, explicitada à p. 246.

7 – Os comentários pertinentes à proposição 32 e ao lema a ela atrelado, bem como os referentes às proposições 33 até 35, seguem, na maioria das vezes, às concepções de Heath, na sua tradução do Livro X contida na obra *The Thirteen Books of Euclid's Elements (Os Treze Livros de Os Elementos de Euclides)*. Suas observações, para o referido grupo de proposições, estão situadas às pp. 71-83. Também foram importantes as percepções de Maria Luisa Puertas Castaños, pontuadas às pp. 57-64, de seu compêndio com a tradução do Livro X.

8 – Para a proposição 36, Christian Taisbak, no seu livro *Coloured Quadrangles – a Guide to the Tenth Book of Euclid's Elements (Quadriláteros Coloridos – Um Guia Para o Décimo Livro de Os Elementos de Euclides)* revela, de forma sutil, à p. 36, seu entendimento do texto em apreço, pondo os termos "vermelho" para racional e "escuro" para irracional, configurando sua tradução de forma que "A soma de dois segmentos de linha vermelhos comensuráveis somente em quadrado, é escuro. Deixe-o ser chamado 'soma-de-dois-vermelhos'."

9 – As contextualizações de David Fowler para a proposição 36, unindo sua tradução e a prova da mesma, estão alicerçadas em seu trabalho *An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, com exposição no capítulo 4, intitulado The Basic Language of Book X, Prestissimo (A Linguagem Básica do Livro X, Prestíssimo), evidenciadas às pp. 240-241.

10 – Para o caso específico das proposições 37 e 38, no trabalho, de David Fowler, *An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, exposto no capítulo 6, intitulado The Classification of Book X, and Its Use in Book XIII (A Classificação do Livro X, e seu Uso no Livro XIII), pontuam-se às pp. 248-249, tanto as traduções como também as provas dos teoremas mencionados. Os exemplos expostos, para as proposições em apreço, embora sejam nossos, têm uma profunda vinculação com as percepções e observações de Fowler.

11 – Na avaliação dos contextos e confluências das proposições 39, 40 e 41 foram vitais às concepções de Christian Taisbak, às pp. 53-54, do seu livro Coloured Quadrangles – a Guide to the Tenth Book of Euclid's Elements (Quadriláteros Coloridos – Um Guia Para o Décimo Livro de Os Elementos de Euclides). Também foram decisivas as argumentações de Heath, situadas às pp. 87-91, da sua tradução do Livro X contida na obra *The Thirteen Books of Euclid's Elements (Os Treze Livros de Os Elementos de Euclides)*.

12 – O referido lema, anterior à proposição 42, possui suas essências evidenciadas em Maria Luisa Puertas Castaños, através de sua tradução do Livro X, explicitadas à p. 72. Por outro lado, seus enfoques estão devidamente esmiuçados no trabalho de David Fowler, intitulado *An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, expostos no capítulo 6, denominado The Classification of Book X, and Its Use in Book XIII (A Classificação do Livro X, e seu Uso no Livro XIII), pontuados à p. 249.

13 – Em relação aos comentários do grupo de proposições, expostas de 42 a 47, evidenciando as divisões da "binomial", "primeira bimedial", "segunda bimedial", "maior", "lado do quadrado equivalente a uma área exprimível mais uma área medial" e "lado do quadrado equivalente à soma de duas áreas mediais", tem-se que não devem ser esquecidas as contextualizações de van der Waerden, em sua obra *Science Awakening (O Despertar da Ciência)*, p. 169, quando o mesmo afirma que "para provar as propriedades de qualquer tipo de linha, constrói-se um quadrado sobre esta linha e investiga-se as propriedades deste quadrado". Já em Christian Taisbak, p. 47, de sua obra *Coloured Quadrangles – a Guide to the Tenth Book of Euclid's Elements (Quadriláteros Coloridos – Um Guia Para o Décimo Livro de Os Elementos de Euclides)*, há mais sutilezas a respeito da proposição 42.

14 – De fato, entre as seis definições das "segundas definições" há um vínculo com as seis proposições a seguir, no caso, as proposições de 48 a 53. Para mais esclarecimentos sobre as ditas "segundas definições", convém pesquisar na obra *Coloured Quadrangles – a Guide to the Tenth Book of Euclid's Elements (Quadriláteros Coloridos – Um Guia Para o Décimo Livro de Os Elementos de Euclides)*, de Christian Taisbak, à p. 44. Outra fonte fundamental, para nortear os entendimentos das chamadas "segundas definições", é o trabalho de David Fowler, *An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, onde no capítulo 6, denominado The Classification of Book X, and Its Use in Book XIII (A Classificação do Livro X, e seu Uso no Livro XIII), às p. 246-247, pode-se comprovar as concepções do autor.

15 – Na sedimentação das reverberações e esmiuçamentos das proposições 48, 49, 50, 51, 52 e 53, onde se pede para encontrar da primeira à sexta binomial, foram importantíssimas as percepções de Heath, evidenciadas às pp. 102-115, da sua tradução do Livro X contida no livro *The Thirteen Books of Euclid's Elements (Os Treze Livros de Os Elementos de Euclides)*. Também foram sutis as concepções de Maria Luisa Puertas Castaños,

especificadas às pp. 81-90, de seu compêndio com a tradução do Livro X de Os Elementos de Euclides..

16 – No comentário para o lema, logo após a proposição 53, foram levadas em conta as observações de Maria Luisa Puertas Castaños, especificadas às pp. 90-91, de sua tradução do Livro X de *Os Elementos* de Euclides..Com relação á falta de autenticidade do referido lema, ligando tal sentença ao fato de que Euclides o utiliza nos comentários da proposição 25 do Livro X, pode-se comprovar esta afirmação na obra *The Thirteen Books of Euclid's Elements (Os Treze Livros de Os Elementos de Euclides)*, Volume 3, às pp. 115-116.

17 – Para uma melhor compreensão das texturas e expansões das proposições 54 a 59, na obra *Science Awakening (O Despertar da Ciência)*, de van der Waerden, à p. 169, há uma citação ao conjunto das mesmas. Também em Christian Taisbak, na sua obra *Coloured Quadrangles – a Guide to the Tenth Book of Euclid's Elements (Quadriláteros Coloridos – Um Guia Para o Décimo Livro de Os Elementos de Euclides)*, às pp. 49-54, observam-se esclarecimentos importantes a respeito das referidas proposições.

18 – Com relação aos importantes exemplos, evidenciados ao longo dos comentários das proposições 54 a 59, os mesmos têm a sua apresentação em uma tabela, mostrada no trabalho de David Fowler, *An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, onde no capítulo 6, denominado The Classification of Book X, and Its Use in Book XIII (A Classificação do Livro X, e seu Uso no Livro XIII), à p. 248, pode-se verificar a ligação dos exemplos ao nome do lado dos quadrados, no caso, "binomial", "primeira bimedial", "segunda bimedial", "maior", "lado do quadrado equivalente a uma área exprimível mais uma área medial" e "lado do quadrado equivalente à soma de duas áreas mediais". No caso específico da "binomial", o exemplo exposto na proposição 54 traz o fato de que $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}a + \sqrt{\frac{1}{2}}a\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}a\right)^2 + 2.\sqrt{\frac{5}{4}}a^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{2}}a\right)^2 = \frac{5}{2}a^2 + \sqrt{5}\,a^2 + \frac{1}{2}a^2 = 3a^2 + \sqrt{5}\,a^2 = (3a + \sqrt{5}a)a$, ou seja, "tem-se o exemplo de um retângulo contido por $(3a + \sqrt{5}a)$ e a, gerando um quadrado equivalente de valor $(\sqrt{\frac{5}{2}}a + \sqrt{\frac{1}{2}}a)^2$.".

19 – Nos comentários das proposições 54 a 59, grande parte das pluralidades nelas expostas, tiveram suas fundamentações nos enfoques e delineamentos de Heath, evidenciados às pp. 116-131, da sua tradução do Livro X contida no livro *The Thirteen Books of Euclid's Elements (Os Treze Livros de Os Elementos de Euclides)*. Também foram importantes os entendimentos de Maria Luisa Puertas Castaños, mostrados às pp. 91-101, de seu compêndio com a tradução do Livro X de *Os Elementos* de Euclides.

20 – Com relação ao lema "suspeito" e o fato do mesmo ser considerado não genuíno, tal evidência pode ser observada na obra *The Thirteen Books of Euclid's Elements (Os Treze Livros de Os Elementos de Euclides),* Volume 3, de Heath, p. 132. Na tradução de *Os Elementos* de Euclides, Volume 3, de Maria Luisa Puertas Castaños, p. 102, também pode se constatar a dita "suspeição".

21 – A respeito da proposição 60, mais esclarecimentos sobre a mesma podem ser obtidos em Christian Taisbak, no seu livro *Coloured Quadrangles – a Guide to the Tenth Book of Euclid's Elements (Quadriláteros Coloridos – Um Guia Para o Décimo Livro de Os Elementos de Euclides)*, à p. 43. Traduzindo outros enfoques e evidenciando o bloco das proposições 60 a 65, ligado ao bloco das proposições 36 a 41, David Fowler, no trabalho *An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, onde no capítulo 6, denominado The Classification of Book X, and Its Use in Book XIII (A Classificação do Livro X, e seu Uso no Livro XIII), à p. 248, traz inúmeras argumentações interessantes, cruciais para o entendimento do Livro X como um todo. No capítulo a seguir serão esmiuçadas as proposições de 61 a 90. Notar-se-á, densamente, que as abrangências do Livro X de *Os Elementos* de Euclides serão multiplicadas, alicerçadas na força de uma obra singular.

CAPÍTULO 7

LIVRO X: AS SENTENÇAS DOS FATOS

7.1 EXPANSÕES, DESMEMBRAMENTOS

Especificamente para este capítulo, norteando os compassos de suas pluralidades e comentários, serão enfatizadas as proposições de 61 a 90. Neste grupo, além de não aparecer lemas ou corolários, também verifica-se, a partir da proposição 73, o surgimento do termo “apótomo”. Assim sendo, tomando a e b como linhas racionais, comensuráveis uma com a outra somente em quadrado. um “apótomo” definido por $a - b$ não representa uma área, porém um segmento de linha. Logo, o mesmo está em contraposição a uma binomial, que seria representada como $a + b$. Entre as proposições 84 e 85 são pontuadas as “terceiras definições”, compostas de seis definições, que atreladas respectivamente às proposições 85 a 90, oferecem uma concepção mais aprimorada do primeiro ao sexto apótomo[1]. Nesse ponto, convém recordar que no capítulo anterior, onde foram realizados os comentários das proposições de 31 a 60, entre as proposições 47 e 48 foram assinaladas as “segundas definições”, compostas de seis definições, que vinculadas respectivamente às proposições 48 a 53, tornaram mais abrangentes os delineamentos da primeira à sexta binomial. Fluindo na direção de uma percepção mais aguda, do entrelaçamento entre os diversos tipos de linhas irracionais apresentadas no Livro X, van der Waerden (1975) consolida suas opiniões sobre o assunto afirmando que “Então os 6 casos conduzem a 12 tipos de segmentos irracionais $u + v$ e $u - v$, e a 13 tipos quando a medial é contada. Todos esses segmentos são ‘sem razão’ porque seus quadrados são ‘sem razão; e todos os 13

tipos são mutuamente exclusivos, porque em todos esses casos os quadrados têm mutuamente propriedades exclusivas. Por exemplo, o quadrado sobre um segmento medial é uma área medial, etc."[2]. Por outro lado, em ponderações bastante significativas, Fowler (1992) traz uma série de confluências que muito ajudam a enxergar os vieses das proposições expostas no Livro X[3], enfatizando a essencialidade de algumas delas, mostrando, em suma, que é preciso precaução para se penetrar em um território repleto de meticulosidades e desmembramentos:

> *Seria mais fácil argumentar, vigorosamente, durante esta justificativa da apresentação do Livro X, se seu autor tivesse sido um pouco mais meticuloso sobre alguns detalhes! Por exemplo, leitores casuais, procurando por algumas informações sobre as linhas alogoi [irracionais], vão se deparar com os blocos de definições formais, de fato encabeçados por 'Definições', em 47/48 e 84/85; mas eles terão que pesquisar mais de perto e ler mais cuidadosamente para encontrar as definições essenciais ocultadas nas Proposições 21, 36 a 41 e 73 a 78. Então, alguém pode estar inclinado a pensar que o Livro X contém 23 diferentes espécies de linhas alogoi [irracionais]: medial, seis binomiais, seis apótomos, duas bimediais, etc. Mas disso, a subclassificação das binomiais e apótomos é, ou deveria ser, interior para o mecanismo do Livro X, enquanto a subclassificação das bimediais e apótomos de uma medial é parte da classificação própria. (...) Ainda mais, Euclides é muito casual em suas referências para esta linha h que eu tenho consistentemente referido aqui como 'a altura', e que desempenha este papel determinante das Segundas Definições 47/48 em diante. Euclides introduz como 'Dada uma linha exprimível...' (Como nas Definições 47/48); ou não dá quantificação, como nas Proposições 54 a 59, 'Se uma área está contida por uma linha exprimível e uma k-ésima binomial...', e similarmente, nas Proposições 60 a 65. (...)* (p. 259)

De fato, cada proposição do Livro X tem sido encarada como teoremas que necessitam ser plenamente entendidos para que se possa mergulhar com profundidade no pensamento matemático grego antigo. Em interessante argumentação, Artmann (2000) esclarece que "A palavra grega 'teorema' está relacionada com 'theater' (teatro) e significa 'alguma coisa vista', ou, em matemática, uma percepção [*insight*], entendimento, ou conhecimento. Um teorema matemático deveria responder um problema que foi colocado durante a discussão de um tema matemático. Muitas vezes, um teorema, uma vez provado, é usado de várias maneiras para desenvolver, mais além, uma teoria matemática. Neste processo mudam suas características. As questões originais retrocedem, e o teorema torna-se uma ferramenta básica para os profissionais praticantes"[4]. De certa forma, a partir do trabalho *'Le Croix des Mathématiciens': The Euclidean Theory of Irrational Lines (A Cruz dos Matemáticos: A Teoria Euclidiana das Linhas Irracionais)*, de Wilbur Knorr,

que muitos aspectos das chamadas linhas irracionais tiveram esclarecimentos surpreendentes. O minucioso Historiador da Matemática contribuiu, decisivamente, para que se pudesse ir mais além em determinadas concepções e confluências, enxergou, de forma precisa, o quanto se necessita ser pesquisado e esmiuçado, sobre o Livro X de *Os Elementos* de Euclides[5]. Assim sendo, considerando um produto definido por $r(a+b)$, onde r é racional e, ainda, sendo a e b racionais e comensuráveis, um com o outro, somente em quadrado, configurou seus pensamentos, delineou os importantes vieses de como perceber, com mais perspicácia, os delineamentos, as meticulosidades, da primeira à sexta binomial, como também do primeiro ao sexto apótomo, atrelando suas ideias à busca de essências profundas, mostrando que:

> *Na terminologia euclidiana, os termos* $a \pm b$ *são chamados a 'primeira' binomial e o 'primeiro' apótomo, respectivamente. Se alternativamente* $\sqrt{a^2 - b^2}$ *é comensurável com* a*, mas não é comensurável com* r*, porém* b *é, resultam na 'segunda' binomial e no 'segundo apótomo'; se novamente* $\sqrt{a^2 - b^2}$ *e* a *são comensuráveis um com o outro, mas nem eles nem* b *é comensurável com* r*, então resultam na 'terceira' binomial e no 'terceiro' apótomo. Ainda restam três outros casos, onde* $\sqrt{a^2 - b^2}$ *e* a *são incomensuráveis um com o outro, mas* a *é comensurável com* r *(a 'quarta' binomial e o 'quarto' apótomo), ou* b *é comensurável com* r *(a 'quinta' binomial e o 'quinto' apótomo), ou nem* a *nem* b *é comensurável com* r *(a 'sexta' binomial e o 'sexto' apótomo). Claramente, este esquema esgota, de forma óbvia, as binomiais e os apótomos de acordo com a solução do problema precedente. Além disso, para a "primeira" classe, mas para nenhuma das derivadas, sustenta que o "lado" é uma binomial ou apótomo irracional.* (p. 51)

7.2 PROPOSIÇÕES 61 A 90

PROPOSIÇÕES

61. O sobre a primeira bimedial, aplicado a uma racional, faz como largura a segunda binomial.

CP61. Em relação aos comentários pertinentes a esta proposição[6], procurando esmiuçá-la com zelo, convém evidenciar que onde se lê “o sobre a primeira bimedial” pode-se ler “o quadrado de uma reta primeira bimedial” ou “o quadrado sobre a reta primeira bimedial”; onde se lê “aplicado a uma racional” pode-se ler “aplicado a uma reta exprimível” ou “aplicado a uma reta racional”. Tais sutilezas estão postas na tradução de Castaños (1996). Já em Heath(1956), pontuam-se alguns destes enfoques, com o autor, fluindo em seus pensamentos, trazendo o fato de que, como expõe a proposição 37 do Livro X, “Caso duas mediais comensuráveis somente em potência, contendo um racional, sejam compostas, a toda é irracional, e seja chamada primeira bimedial.”[7]. Assim sendo, anunciando a dita primeira bimedial, traz a sutileza de que a mesma pode ser representada por $\sqrt[4]{k}\rho + \sqrt[4]{k^3}\rho$.

A partir deste ponto, recordando o início da proposição 61, “O sobre a primeira bimedial, aplicado a uma racional”, vem que $\frac{(\sqrt[4]{k}\rho+\sqrt[4]{k^3}\rho)^2}{\sigma} = \frac{\sqrt{k}\rho^2+2k\rho^2+\sqrt{k^3}\rho^2}{\sigma}$ caracteriza uma reta segunda binomial. Fica, desta forma, claro que $\sqrt{k}\rho^2$ e $\sqrt{k^3}\rho^2$ são os quadrados sobre os termos da primeira bimedial original, no caso $\sqrt[4]{k}\rho$ e $\sqrt[4]{k^3}\rho$. Já o produto $2k\rho^2$ é, precisamente, o dobro da área do retângulo contido por estes termos. Neste momento, tomando $x, y\ e\ z$, tais que $\sigma x = \sqrt{k}\rho^2$, $\sigma y = \sqrt{k^3}\rho^2$ e $2\sigma z = 2k\rho^2$, vem que $\frac{\sqrt{k}\rho^2+2k\rho^2+\sqrt{k^3}\rho^2}{\sigma} = x + y + 2z$. Então, tem-se a necessidade de provar, sendo $(x + y),\ 2z$ termos, com o termo $(x + y)$

sendo o maior, que $(x+y)+2z$ é uma reta segunda binomial. De início, enxerga-se que $\sqrt[4]{k}\rho$ é comensurável somente em quadrado com $\sqrt[4]{k^3}\rho$, sendo as mesmas retas mediais. Então, é assegurado que $\sqrt{k}\rho^2$ e $\sqrt{k^3}\rho^2$ são mediais. Logo, $\sigma(x+y)$ ou $\sqrt{k}\rho^2+\sqrt{k^3}\rho^2$ é uma área medial, consequentemente $(x+y)$ é racional e incomensurável com σ. Contudo, $2k\rho^2 = 2\sqrt[4]{k}\rho.\sqrt[4]{k^3}\rho$ é uma área racional, de modo que $2\sigma z$ é, também, uma área racional, de tal forma que $2z$ é racional e comensurável com σ. Então, como os termos $(x+y),\ 2z$ são racionais e comensuráveis somente em quadrado, tem-se que, pela proposição 37 acima mencionada, $(x+y)+2z$ representa uma reta binomial. Não esquecendo que $\sqrt{k}\rho^2$ e $\sqrt{k^3}\rho^2$ são comensuráveis, logo σx e σy são comensuráveis, garante-se que x é comensurável com y. Mas, pelo lema da proposição 59, pode-se afirmar que $\sqrt{k}\rho^2+\sqrt{k^3}\rho^2 > 2k\rho^2$, de onde se obtém que $(x+y) > 2z$, extraindo-se o fato de que o termo $(x+y)$ é o maior. Agora, recordando que a proposição 17 do Livro X expõe que “Caso duas retas sejam desiguais, e à maior seja aplicado um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada e divida-a em comensuráveis em comprimento, a maior será maior em potência do que a menor pelo sobre uma comensurável com aquela mesma [em comprimento]. E, caso a maior seja maior em potência do que a menor pelo sobre uma comensurável com aquela mesma [em comprimento] e á maior seja aplicado um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada, divide-a em comensuráveis em comprimento.”, tem-se que $\sqrt{(x+y)^2-(2z)^2}$ é comensurável com $(x+y)$. Finalmente, como $(x+y),\ 2z$ são racionais e comensuráveis somente em quadrado, e $2z$ é racional e comensurável com σ, conclui-se que $(x+y)+2z$ representa uma reta segunda binomial.

62. O sobre a segunda bimedial, aplicado a uma racional, faz como largura a terceira binomial.

CP62. Enfatizando os comentários desta proposição, tratando de expô-la da forma mais clara possível, tem-se que onde se lê “o sobre a segunda bimedial” pode-se ler “o quadrado de uma reta segunda bimedial” ou “o quadrado sobre a reta segunda bimedial”; onde se lê “aplicado a uma racional” pode-se ler “aplicado a uma reta exprimível” ou “aplicado a uma reta racional”. Estes detalhes são pontuados na tradução de Castaños (1996). Para a tradução de Heath(1956), verificam-se tais concepções e o autor, multiplicando as essências, mostra que, como expõe a proposição 38 do Livro X, “Caso duas mediais comensuráveis somente em potência, contendo um medial, sejam compostas, a toda é irracional, e seja chamada segunda bimedial”[8]. Logo, ao anunciar a chamada segunda bimedial, revela o fato de que a mesma pode ser exposta como $\sqrt[4]{k}\rho + \frac{\sqrt{\lambda}\rho}{\sqrt[4]{k}}$. A partir deste ponto, relembrando a parte inicial da proposição 62, “O sobre a segunda bimedial, aplicado a uma racional”, vem que $\frac{(\sqrt[4]{k}\rho + \frac{\sqrt{\lambda}\rho}{\sqrt[4]{k}})^2}{\sigma} = \frac{\sqrt{k}\rho^2 + 2\sqrt{\lambda}\rho^2 + \frac{\lambda\rho^2}{\sqrt{k}}}{\sigma}$ caracteriza uma reta terceira binomial. Assim, fica claro que $\sqrt{k}\rho^2$ e $\frac{\lambda\rho^2}{\sqrt{k}}$ são os quadrados sobre os termos da segunda bimedial original, no caso $\sqrt[4]{k}\rho$ e $\frac{\sqrt{\lambda}\rho}{\sqrt[4]{k}}$. Já o produto $2\sqrt{\lambda}\rho^2$ é, então, o dobro da área do retângulo contido por estes termos. Neste instante, tomando $x, y \; e \; z$, tais que $\sigma x = \sqrt{k}\rho^2$, $\sigma y = \frac{\lambda\rho^2}{\sqrt{k}}$ e $2\sigma z = 2\sqrt{\lambda}\rho^2$, tem-se que $\frac{\sqrt{k}\rho^2 + 2\sqrt{\lambda}\rho^2 + \frac{\lambda\rho^2}{\sqrt{k}}}{\sigma} = x + y + 2z$. Desta forma, temos que provar, sendo $(x+y),\ 2z$ termos, com o termo $(x+y)$ sendo o maior, que $(x+y)+2z$ é uma reta terceira binomial. De início, enxerga-se que $\sqrt[4]{k}\rho$ é comensurável somente em quadrado

com $\frac{\sqrt{\lambda}\rho}{\sqrt[4]{k}}$, sendo as mesmas retas mediais, contendo um retângulo medial. Então, é assegurado que $\sqrt{k}\rho^2$ e $\frac{\lambda\rho^2}{\sqrt{k}}$ são mediais. Logo, $\sigma(x+y)$ ou $\sqrt{k}\rho^2+\frac{\lambda\rho^2}{\sqrt{k}}$ é uma área medial, consequentemente $(x+y)$ é racional e incomensurável com σ. Entretanto, $2\sqrt{\lambda}\rho^2 = 2\sqrt[4]{k}\rho.\frac{\sqrt{\lambda}\rho}{\sqrt[4]{k}}$ é uma área medial, de modo que $2\sigma z$ é, também, uma área medial, de tal forma que $2z$ é racional e incomensurável com σ. Então, como os termos $(x+y),\ 2z$ são racionais e comensuráveis somente em quadrado, tem-se que, pela proposição 38 acima especificada, $(x+y)+2z$ representa uma reta binomial. Não esquecendo que $\sqrt{k}\rho^2$ e $\frac{\lambda\rho^2}{\sqrt{k}}$ são comensuráveis, logo σx e σy são comensuráveis, garante-se que x é comensurável com y. Mas, pelo lema da proposição 59, pode-se afirmar que $\sqrt{k}\rho^2+\frac{\lambda\rho^2}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{\lambda}\rho^2$, de onde se obtém que $(x+y) > 2z$, evidenciando-se o fato de que o termo $(x+y)$ é o maior. Agora, rememorando que a proposição 17 do Livro X expõe que “Caso duas retas sejam desiguais, e à maior seja aplicado um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada e divida-a em comensuráveis em comprimento, a maior será maior em potência do que a menor pelo sobre uma comensurável com aquela mesma [em comprimento]. E, caso a maior seja maior em potência do que a menor pelo sobre uma comensurável com aquela mesma [em comprimento] e á maior seja aplicado um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada, divide-a em comensuráveis em comprimento.”, tem-se que $\sqrt{(x+y)^2-(2z)^2}$ é comensurável com $(x+y)$. Finalmente, como $(x+y),\ 2z$ são racionais e comensuráveis somente em quadrado, $(x+y)$ é racional e incomensurável com σ e $2z$ é racional e incomensurável com σ, conclui-se que $(x+y)+2z$ representa uma reta terceira binomial.

63. O sobre a maior, aplicado a uma racional, faz com largura a quarta binomial.

CP63. Para a proposição em apreço, procurando-se moldar suas essências, tem-se que onde se lê “o sobre a maior” pode-se ler “o quadrado de uma reta maior” ou “o quadrado sobre a reta maior”; onde se lê “aplicado a uma racional” pode-se ler “aplicado a uma reta exprimível” ou “aplicado a uma reta racional”. Estes esclarecimentos aparecem na tradução de Castaños (1996). Para o texto traduzido por Heath(1956), encontram-se estas observações, com o autor, enfatizando que, como expõe a proposição 39 do Livro X, “Caso duas retas incomensuráveis em potência, fazendo, por um lado, o composto dos quadrados sobre elas racional, e, por um lado, o por elas medial, sejam compostas, a reta toda é irracional, e seja chamada maior.”[9]. Então, ao revelar a chamada maior, assegura o fato de que a mesma pode ser exposta como $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}+\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$. Agora, não se deixando esquecer a parte inicial da proposição 63, “O sobre a maior, aplicado a uma racional”, vem que $\frac{(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}+\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}})^2}{\sigma}=\frac{\frac{\rho^2}{2}(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}})+\frac{\rho^2}{\sqrt{1+k^2}}+\frac{\rho^2}{2}(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}})}{\sigma}$ caracteriza uma reta quarta binomial. Então, fica devidamente claro que $\frac{\rho^2}{2}(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}})$ e $\frac{\rho^2}{2}(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}})$ são os quadrados sobre os termos da maior original, no caso $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$ e $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$. Já o produto $\frac{\rho^2}{\sqrt{1+k^2}}$ é, então, o dobro da área do retângulo contido por estes termos. Neste instante, tomando $x, y\ e\ z$, tais que $\sigma x=\frac{\rho^2}{2}(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}})$, $\sigma y=\frac{\rho^2}{2}(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}})$ e $2\sigma z=\frac{\rho^2}{\sqrt{1+k^2}}$, tem-se que $\frac{\frac{\rho^2}{2}(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}})+\frac{\rho^2}{\sqrt{1+k^2}}+\frac{\rho^2}{2}(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}})}{\sigma}=x+y+2z$. Deste modo, tem-se que provar, sendo $(x+y),\ 2z$ termos, com o termo $(x+y)$ sendo o maior, que $(x+y)+2z$

é uma reta quarta binomial. De início, enxerga-se que $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$ é incomensurável em quadrado com $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$. Então, é assegurado que $\frac{\rho^2}{2}(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}})$ e $\frac{\rho^2}{2}(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}})$ são mediais. Logo, $\sigma(x+y)$ ou $\frac{\rho^2}{2}\left(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)+\frac{\rho^2}{2}\left(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)=\rho^2$ é uma área racional, consequentemente $(x+y)$ é racional e comensurável com σ. No entanto, $\frac{\rho^2}{\sqrt{1+k^2}}=2\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}.\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$ é uma área medial, de modo que $2\sigma z$ é, também, uma área medial, de tal forma que $2z$ é racional e incomensurável com σ. Então, como os termos $(x+y),\ 2z$ são racionais e comensuráveis somente em quadrado, tem-se que, pela proposição 39 acima especificada, $(x+y)+2z$ representa uma reta binomial. Não esquecendo que $\frac{\rho^2}{2}(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}})$ e $\frac{\rho^2}{2}(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}})$ são incomensuráveis, logo σx e σy são incomensuráveis, e garante-se que x é incomensurável com y. Mas, pelo lema da proposição 59, pode-se afirmar que $\frac{\rho^2}{2}\left(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)+\frac{\rho^2}{2}\left(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)>\frac{\rho^2}{\sqrt{1+k^2}}$, de onde se obtém que $(x+y)>2z$, evidenciando-se o fato de que o termo $(x+y)$ é o maior. Agora, recordando que a proposição 18 do Livro X expõe que “Caso duas retas sejam desiguais, e seja aplicado à maior um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada, e divida-a em incomensuráveis [em comprimento], a maior será maior em potência do que a menor pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma. E, caso a maior seja maior em potência do que a maior pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma, e seja aplicado à maior um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada,

divide-a em incomensuráveis [em comprimento]..", tem-se que $\sqrt{(x+y)^2-(2z)^2}$ é incomensurável com $(x+y)$. Finalmente, como $(x+y)$, $2z$ são racionais e comensuráveis somente em quadrado, $(x+y)$ é racional e comensurável com σ, conclui-se que $(x+y)+2z$ representa uma reta quarta binomial.

64. O sobre a que serve para produzir um racional e um medial, aplicado a uma racional, faz como largura a quinta binomial.

CP64. Para a proposição em questão, averiguando suas nuances e desmembramentos, tem-se que onde se lê "o sobre a que serve para produzir um racional e um medial" pode-se ler "o quadrado do lado de uma área exprimível mais uma medial" ou "o quadrado sobre o lado de uma área racional mais uma medial"; onde se lê "aplicado a uma racional" pode-se ler "aplicado a uma reta exprimível" ou "aplicado a uma reta racional". Estes delineamentos são vistos na tradução de Castaños (1996). No texto traduzido por Heath(1956), encontram-se tais constatações, além do autor mostrar que, como expõe a proposição 40 do Livro X, "Caso duas retas incomensuráveis em potência, fazendo, por um lado, o composto dos quadrados sobre elas medial, e, por outro lado, o por elas racional, sejam compostas, a reta toda é irracional, e seja chamada a que serve para produzir um racional e um medial."[10]. Logo, ao revelar a chamada "a que serve para produzir um racional e um medial", consolida o fato de que a mesma pode ser exposta como $\frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2}+k)} + \frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2}-k)}$. Desta forma, não esquecendo a parte inicial da proposição 64, "O sobre a que serve para produzir um racional e um medial, aplicado a uma racional", vem que $\frac{(\frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2}+k)}+\frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2}-k)})^2}{\sigma}$ terá o valor expresso por

$\frac{\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}(\sqrt{1+k^2}+k)+\frac{\rho^2}{1+k^2}+\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}(\sqrt{1+k^2}-k)}{\sigma}$, o que caracteriza uma reta quinta binomial. Logo, observa-se que $\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2}+k\right)$ e $\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2}-k\right)$ são os quadrados sobre os termos "da que serve para produzir um racional e um medial" original, no caso $\frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2}+k)}$ e $\frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2}-k)}$. Já o produto $\frac{\rho^2}{1+k^2}$ é, então, o dobro da área do retângulo contido por estes termos. Neste instante, tomando $x, y\ e\ z$, tais que $\sigma x=\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2}+k\right)$, $\sigma y=\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2}-k\right)$ e $2\sigma z=\frac{\rho^2}{1+k^2}$, tem-se que $\frac{\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}(\sqrt{1+k^2}+k)+\frac{\rho^2}{1+k^2}+\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}(\sqrt{1+k^2}-k)}{\sigma}=x+y+2z$. Deste modo, ter-se-á de provar, sendo $(x+y),\ 2z$ termos, com o termo $(x+y)$ sendo o maior, que $(x+y)+2z$ é uma reta quinta binomial. De início, vê-se que $\frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2}+k)}$ é incomensurável em quadrado com $\frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2}-k)}$. Então, é perfeitamente garantido que $\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2}+k\right)$ e $\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2}-k\right)$ são mediais. Logo, $\sigma(x+y)$ ou $\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2}+k\right)+\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2}-k\right)=\frac{\rho^2}{\sqrt{1+k^2}}$ é uma área medial, consequentemente $(x+y)$ é racional e incomensurável com σ. No entanto, neste instante, podemos sutilmente efetuar a verificação de que $\frac{\rho^2}{1+k^2}=2\frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2}+k)}.\frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2}-k)}$ é uma área

racional, de modo que $2\sigma z$ é, também, uma área racional, de tal forma que $2z$ é racional e comensurável com σ. Então, como os termos $(x+y),\ 2z$ são racionais e comensuráveis somente em quadrado, tem-se que, pela proposição 40 acima especificada, $(x+y)+2z$ representa uma reta binomial. Não esquecendo que $\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2}+k\right)$ e $\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2}-k\right)$ são incomensuráveis, logo σx e σy são incomensuráveis, e garante-se que x é incomensurável com y. Mas, pelo lema da proposição 59, pode-se afirmar que $\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2}+k\right)+\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2}-k\right)>\frac{\rho^2}{1+k^2}$, de onde se obtém que $(x+y)>2z$, evidenciando-se o fato de que o termo $(x+y)$ é o maior. Agora, recordando que a proposição 18 do Livro X expõe que "Caso duas retas sejam desiguais, e seja aplicado à maior um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada, e divida-a em incomensuráveis [em comprimento], a maior será maior em potência do que a menor pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma. E, caso a maior seja maior em potência do que a maior pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma, e seja aplicado à maior um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada, divide-a em incomensuráveis [em comprimento]..", tem-se que $\sqrt{(x+y)^2-(2z)^2}$ é incomensurável com $(x+y)$. Finalmente, como $(x+y),\ 2z$ são racionais e comensuráveis somente em quadrado, $2z$ é racional e comensurável com σ, conclui-se que $(x+y)+2z$ representa uma reta quinta binomial.

65. O sobre a que serve para produzir dois mediais, aplicado a uma racional, faz como largura a sexta binomial.

CP65. Na condução dos enfoques desta proposição, consolidando suas reverberações e confluências, tem-se que onde se lê "o sobre a que serve para produzir dois mediais" pode-se ler "o quadrado do lado da soma de duas áreas

mediais” ou “o quadrado sobre o lado da soma de duas áreas mediais”; onde se lê “aplicado a uma racional” pode-se ler “aplicado a uma reta exprimível” ou “aplicado a uma reta racional”. Tais norteamentos são empregados em Castaños (1996). Já no influente texto de Heath(1956), têm-se várias observações e o autor evidencia que, como expõe a proposição 41 do Livro X, “Caso duas retas incomensuráveis em potência, fazendo tanto o composto dos quadrados sobre elas medial quanto o por elas medial e ainda incomensurável como composto dos quadrados sobre elas, sejam compostas, a reta toda é irracional, e seja chamada a que serve para produzir dois mediais.”[11]. Então, ao revelar a chamada “a que serve para produzir dois mediais”, consolida o fato de que a mesma pode ser exposta como $\frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}+\frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$. Desta forma, não esquecendo a parte inicial da proposição 65, “O sobre a que serve para produzir dois mediais, aplicado a uma racional”, vem que $\frac{(\frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}+\frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}})^2}{\sigma}$ terá o valor expresso por $\frac{\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)+\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1+k^2}}+\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)}{\sigma}$, o que caracteriza uma reta sexta binomial. Logo, observa-se que $\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ e $\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ são os quadrados sobre os termos “da que serve para produzir dois mediais” original, no caso $\frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$ e $\frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$. Já o produto $\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1+k^2}}$ é, então, o dobro da área do retângulo contido por estes termos. Neste momento, tomando $x, y\ e\ z$, tais que $\sigma x=\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$, $\sigma y=\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ e $2\sigma z=\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1+k^2}}$, tem-se que

$\frac{\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)+\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1+k^2}}+\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)}{\sigma} = x+y+2z$. Deste modo, ter-se-á de provar, sendo $(x+y),\ 2z$ termos, com o termo $(x+y)$ sendo o maior, que $(x+y)+2z$ é uma reta sexta binomial. De início, vê-se que $\frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$ é incomensurável em quadrado com $\frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$. Logo, é sucintamente garantido que $\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ e $\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ são mediais. Logo, $\sigma(x+y)$ ou $\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)+\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)=\rho^2\sqrt{\lambda}$ é uma área medial, consequentemente $(x+y)$ é racional e incomensurável com σ. No entanto, neste instante, podemos sutilmente efetuar a verificação de que $\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1+k^2}}=2\frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}.\frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$ é uma área medial, de modo que $2\sigma z$ é, também, uma área medial, de tal forma que $2z$ é racional e incomensurável com σ. Então, como os termos $(x+y),\ 2z$ são racionais e comensuráveis somente em quadrado, tem-se que, pela proposição 41 acima explicitada, $(x+y)+2z$ representa uma reta binomial. Não esquecendo que $\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ e $\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ são incomensuráveis, logo σx e σy são incomensuráveis, e garante-se que x é incomensurável com y. Mas, pelo lema da proposição 59, pode-se afirmar que $\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)+\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)>\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1+k^2}}$, de onde se obtém que $(x+y)>2z$, evidenciando-se o fato de que o termo $(x+y)$ é o maior. Agora,

recordando que a proposição 18 do Livro X expõe que “Caso duas retas sejam desiguais, e seja aplicado à maior um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada, e divida-a em incomensuráveis [em comprimento], a maior será maior em potência do que a menor pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma. E, caso a maior seja maior em potência do que a maior pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma, e seja aplicado à maior um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada, divide-a em incomensuráveis [em comprimento]..”, tem-se que $\sqrt{(x+y)^2-(2z)^2}$ é incomensurável com $(x+y)$. Finalmente, como $(x+y)$, $2z$ são racionais e comensuráveis somente em quadrado, $(x+y)$. é racional e incomensurável com σ, $2z$ é racional e incomensurável com σ, $(x+y)$ é incomensurável com $2z$, conclui-se que $(x+y)+2z$ representa uma reta sexta binomial.

66. A comensurável com a binomial em comprimento, tanto é ela uma binomial quanto a mesma na ordem.

CP66. Analisando o conteúdo referente a esta proposição, tem-se que onde se lê “a comensurável com a binomial em comprimento” pode-se ler “uma reta comensurável em longitude com uma binomial” ou “uma reta comensurável em comprimento com uma reta binomial”. As duas versões evidenciadas são, respectivamente, apresentadas por Castaños (1996) e Heath (1956). Por outro lado, Fowler (1992) expõe, de forma interessante, que “É uma característica básica das linhas exprimíveis e mediais que uma linha exprimível com uma linha exprimível é também exprimível, com uma medial é também medial. Euclides prova, nas proposições 66 a 70, que isto se aplica para as outras linhas aditivas ‘alogoi’ (irracionais), também incluindo, em 66, que uma linha comensurável com a k-ésima binomial é também uma k-ésima binomial”[12]. Além do mais, aborda o autor, que sendo $w_1 = b_1 + c_1$ uma linha comensurável com uma binomial dada por $w = b + c$, a mesma é

também uma binomial dividida na mesma razão, visto que temos a proporção $\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1}$ e, então, $\frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{b+c}{b_1+c_1}$.

67. A comensurável com a bimedial em comprimento ela é tanto uma bimedial quanto a mesma, na ordem.

CP67. Verificando a essência desta proposição, temos que onde se lê "a comensurável com a bimedial em comprimento" pode-se ler "uma reta comensurável em longitude com uma bimedial" ou "uma reta comensurável em comprimento com uma reta bimedial". As duas concepções são, respectivamente, explicitadas em Castaños (1996) e Heath (1956). Com argumentações valiosas, ampliando ainda mais o conceito da proposição em apreço, Fowler (1992) esclarece que "uma linha comensurável ou comensurável em quadrado com qualquer das linhas aditivas 'alogos' (irracionais), ou seja, 'binomial', 'primeira bimedial', 'segunda bimedial', 'maior', 'lado de uma área exprimível mais uma medial' e 'lado da soma de duas áreas mediais', é a mesma espécie de linha 'alogos' (irracional), e é dividida na mesma razão.". Assim sendo, o autor mostra que supondo q_1 como comensurável em quadrado com alguma linha 'alogos' (irracional) dada por $q = x + y$, então, sendo w a largura de q^2 em relação à altura h e sendo w_1 a largura de ${q_1}^2$ em relação à altura h, vem que teremos ${q_1}^2 = h.w_1$ sendo comensurável com $q^2 = h.w = h.(b + c)$, logo $b + c$ é uma binomial e w_1 é comensurável com a mesma. Não esquecendo que, pela proposição anterior, $w_1 = b_1 + c_1$ é também uma binomial, na mesma classe e dividida na mesma razão. Então, $q_1 = x_1 + y_1$ será da mesma espécie de linha 'alogos' (irracional) como $q = x + y$. Além do mais, ter-se-á como válida a proporção $\frac{q^2}{{q_1}^2} = \frac{(x+y.)^2}{(x_1+y_1)^2} = \frac{b+c}{b_1+c_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$.

Extremamente importante, ainda, é o fato de que também são válidas as proporções

$\frac{x^2+y^2}{{x_1}^2+{y_1}^2} = \frac{h.b}{h.b_1}$ e $\frac{2x.y}{2x_1.y_1} = \frac{h.c}{h.c_1}$. Desta forma, finalmente, conclui-se que $\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}$.

68. A comensurável com a maior também ela é maior.

CP68. Esmiuçando o âmago concernente a esta proposição, tem-se que onde se lê "a comensurável com a maior" pode-se ler "uma reta comensurável com uma reta maior". O outro caminho explicitado para a tradução está pontuado tanto em Castaños (1996) quanto em Heath (1956). É muito importante não esquecer que, pela proposição 39 do Livro X, "Caso duas retas incomensuráveis em potência, fazendo, por um lado, o composto dos quadrados sobre elas racional, e, por um lado, o por elas medial, sejam compostas, a reta toda é irracional, e seja chamada maior.". Unindo tal fato, às observações evidenciadas nas proposições 66 e 67, chega-se à conclusão de que "a comensurável com a maior também ela é maior".

69. A comensurável com a que serve para produzir um racional e um medial é [também ela] uma que serve para produzir um racional e um medial.

CP69. Desenvolvendo o entendimento da referida proposição, vem que onde se lê "a comensurável com a que serve para produzir um racional e um medial" pode-se ler "uma reta comensurável com o lado do quadrado equivalente a uma área exprimível mais uma área medial" ou "uma reta comensurável com o lado de uma área racional mais uma medial". As duas observações são, respectivamente, pontuadas em Castaños (1996) e Heath (1956). Por outro lado, não esquecendo que, pela proposição 40 do Livro X, tem-se que "Caso duas retas incomensuráveis em potência, fazendo, por um lado, o composto dos quadrados sobre elas medial, e, por outro lado, o por elas racional, sejam compostas, a reta toda é irracional, e seja chamada a que serve para produzir um racional e um medial.". Desta forma, agregando esta concepção às elucidações expostas nas proposições 66 e 67, chegamos à conclusão de que "A comensurável com a que serve para produzir um

racional e um medial é [também ela] uma que serve para produzir um racional e um medial".

70. A comensurável com a que serve para produzir dois mediais é uma que serve para produzir dois mediais.

CP70. Expandindo a compreensão desta proposição, vem que onde se lê "a comensurável com a que serve para produzir dois mediais" pode-se ler "uma reta comensurável com o lado do quadrado equivalente à soma de duas áreas mediais" ou "uma reta comensurável com o lado da soma de duas áreas mediais". As duas observações são, respectivamente, pontuadas em Castaños (1996) e Heath (1956). Todavia, recordando que, pela proposição 41 do Livro X, tem-se que "Caso duas retas incomensuráveis em potência, fazendo tanto o composto dos quadrados sobre elas medial quanto o por elas medial e ainda incomensurável como composto dos quadrados sobre elas, sejam compostas, a reta toda é irracional, e seja chamada a que serve para produzir dois mediais.". Assim, da união desta evidência às concepções mostradas nas proposições 66 e 67, conclui-se que "A comensurável com a que serve para produzir dois mediais é uma que serve para produzir dois mediais".

71. Sendo compostos um racional e um medial, quatro irracionais são produzidos, ou uma binomial ou uma primeira bimedial ou uma maior ou uma que serve para produzir um racional e um medial.

CP71. Fundamentando os teores desta proposição, será útil enfatizar que onde se lê "sendo compostos um racional e um medial" pode-se ler "se se somam uma área exprimível e uma medial" ou "se uma área racional e uma medial são somadas juntas"; que onde se lê "quatro irracionais são produzidos" pode-se ler "resultam quatro tipos de retas não exprimíveis" ou "quatro retas irracionais surgem". Tais observações ganham destaque na tradução de Castaños (1996). Já no texto traduzido por Heath (1956), também pode-se enxergar algumas destas concepções, além do que o referido autor pondera que se uma área racional for da forma $k\rho^2$, e

se uma área medial for da forma $\sqrt{\lambda}\rho^2$, tem-se que, a partir das diferentes relações entre k e $\sqrt{\lambda}$, representadas na expressão $\sqrt{k\rho^2+\sqrt{\lambda}\rho^2}$, poder-se-á encontrar que, conforme atesta a proposição 71, “quatro irracionais são produzidos”. Assim sendo, fazendo $\sigma u = k\rho^2$ e $\sigma v = \sqrt{\lambda}\rho^2$, vem que o primeiro retângulo é racional e o segundo é medial. Então, ter-se-á que u é racional e comensurável com σ e v é racional e incomensurável com σ, de modo que u é incomensurável com v. Consequentemente, u e v são racionais e comensuráveis somente em quadrado. Logo, $u+v$ é uma reta binomial. A partir deste ponto, temos duas possibilidades. A primeira possibilidade diz respeito ao fato de $u > v$, que gera, então, para u racional e comensurável com σ, os casos $\sqrt{u^2-v^2}$ sendo comensurável com u e $\sqrt{u^2-v^2}$ sendo incomensurável com u. Ora essa, para o primeiro caso, vem que $u+v$ é uma reta primeira binomial e, no segundo caso, $u+v$ é uma reta quarta binomial. Logo, $\sqrt{k\rho^2+\sqrt{\lambda}\rho^2} = \sqrt{\sigma(u+v)}$ é uma reta binomial, no primeiro caso e conforme pontua a proposição 54, que expõe “Caso uma área seja contida por uma racional e a primeira binomial, a que serve para produzir a área é irracional, a chamada binomial.”. Por outro lado, será uma reta irracional maior, no segundo caso e conforme esclarece a proposição 57, que afirma “Caso uma área seja contida por uma racional e a quarta binomial, a que serve para produzir a área é irracional, a chamada maior.”. Agora, configurando a segunda possibilidade tem-se que $u < v$, que produz, então, para v racional e incomensurável com σ e para u racional e comensurável com σ, os casos $\sqrt{v^2-u^2}$ sendo comensurável com v e $\sqrt{v^2-u^2}$ sendo incomensurável com v. Ora essa, para o primeiro caso, vem que $u+v$ é uma reta segunda binomial e, no segundo caso, $u+v$ é uma reta quinta binomial.

Logo, $\sqrt{k\rho^2+\sqrt{\lambda}\rho^2}=\sqrt{\sigma(u+v)}$ é uma reta primeira bimedial, no primeiro caso e conforme pontua a proposição 55, que expõe “Caso uma área seja contida por uma racional e a segunda binomial, a que serve para produzir a área é irracional, a chamada primeira bimedial.”. Por outro lado, será o lado de uma área racional mais uma medial, no segundo caso e conforme evidencia a proposição 58, que assegura “Caso uma área seja contida por uma racional e a quinta binomial, a que serve para produzir a área é irracional, a chamada a que serve para produzir um racional e um medial.”[13].

72. Sendo compostos dois mediais incomensuráveis entre si, as duas irracionais restantes são produzidas, ou uma segunda bimedial ou [a] que serve para produzir dois mediais.

CP72. Expandindo as essências desta proposição, convém explicitar que onde se lê “sendo compostos dois mediais incomensuráveis entre si” pode-se ler “se se somam duas áreas mediais incomensuráveis entre si” ou “se duas áreas mediais incomensuráveis uma com a outra são somadas”; que onde se lê “as duas irracionais restantes são produzidas” pode-se ler “resultam os dois restantes tipos de retas não exprimíveis” ou “duas retas irracionais restantes surgem”. Tais considerações têm relevo no texto traduzido por Castaños (1996). Na tradução efetuada por Heath (1956), constatam-se algumas destas sutilezas, e o autor, abrangente, pontua que se uma área medial for da forma $\sqrt{k}\rho^2$, a outra área medial pode ser da forma $\sqrt{\lambda}\rho^2$, enxergando-se que, a partir das diferentes relações entre $\sqrt{k}$ e $\sqrt{\lambda}$, representadas na expressão $\sqrt{\sqrt{k}\rho^2+\sqrt{\lambda}\rho^2}$, poder-se-á averiguar que, conforme enfatiza a proposição 72, “as duas irracionais restantes são produzidas”. Assim sendo, não esquecendo que $\sqrt{k}\rho^2$ e $\sqrt{\lambda}\rho^2$ são incomensuráveis, fazendo $\sigma u=\sqrt{k}\rho^2$ e $\sigma v=\sqrt{\lambda}\rho^2$, tem-se que, tanto o primeiro retângulo como o segundo, são áreas mediais, com σ sendo racional. Então, ter-se-á que u é racional e

incomensurável com σ e, também, v é racional e incomensurável com σ, de modo que σu é incomensurável com σv ou, também, u é incomensurável com v. Consequentemente, $u + v$ é uma reta binomial. Consolidando este entendimento, ter-se-ão duas possibilidades, onde será verificado se $\sqrt{u^2 - v^2}$ é ou comensurável ou incomensurável em comprimento com u. Para a primeira possibilidade, considerando o fato de que $\sqrt{u^2 - v^2}$ ser comensurável com u, vem que $u + v$ é uma reta terceira binomial e, portanto, $\sqrt{\sqrt{k}\rho^2 + \sqrt{\lambda}\rho^2} = \sqrt{\sigma(u+v)}$ é uma reta segunda bimedial, conforme preceitua a proposição 56, que expõe “Caso uma área seja contida por uma racional e a terceira binomial, a que serve para produzir a área é irracional, a chamada segunda bimedial.”. Já para a segunda possibilidade, considerando o fato de que $\sqrt{u^2 - v^2}$ ser incomensurável com u, vem que $u + v$ é uma reta sexta binomial e, portanto, $\sqrt{\sqrt{k}\rho^2 + \sqrt{\lambda}\rho^2} = \sqrt{\sigma(u+v)}$ é o lado da soma de duas áreas mediais, conforme anuncia a proposição 59, que enfatiza “Caso uma área seja contida por uma racional e a sexta binomial, a que serve para produzir a área é irracional, a chamada a que serve para produzir dois mediais.”.

73. Caso de uma racional seja subtraída uma racional, sendo comensurável somente em potência com a toda, a restante é irracional; e seja chamado apótomo.

CP73. Para a referida proposição[14], é importante salientar que onde se lê “Caso de uma racional seja subtraída uma racional” pode-se ler “Se se tira de uma reta exprimível outra reta exprimível” ou “Se de uma reta racional seja subtraída uma reta racional”; onde se lê “sendo comensurável somente em potência com a toda, a restante é irracional” pode-se ler “que seja comensurável somente em quadrado com a reta inteira, a reta restante não é exprimível” ou “comensurável com a inteira somente em quadrado; a restante é irracional”. Na tradução ofertada por Castaños (1996) são postas em destaque tais considerações. Na clássica tradução de Heath

(1956), também pontuam-se várias destas ponderações, além do importante Historiador da Matemática assegurar que Euclides, a partir da proposição 73, “passa para as retas irracionais que são a ‘diferença’ e não, como antes, a ‘soma’ de duas retas. ‘Apótomo’ (parte cortada), portanto, toma o lugar de ‘binomial’ e os outros termos seguem *mutatis mutandis* (mudando o que deve ser mudado)”. Para Fowler (1992) o texto da proposição 73 é traduzido por “A diferença de duas linhas exprimíveis incomensuráveis é *alogos*; será chamada uma linha apótomo”. Seguindo adiante, o referido autor, esboçando sua prova de tal concepção, pontua que “Faça *b* e *c* serem as linhas exprimíveis incomensuráveis. Então, [pela interpretação geométrica], $(b - c)^2 = b^2 - 2b.c + c^2$. Agora, $b^2 + c^2$ é exprimível e $b.c$ é medial; consequentemente $2b.c$ é medial e, assim, é incomensurável com $b^2 + c^2$. Daí que $(b - c)^2$ é a diferença de uma área exprimível e uma área medial, e, então, não é exprimível, assim não é comensurável com a área exprimível $b^2 + c^2$. Logo, é *alogos* [irracional].”

74. Caso de uma medial seja subtraída uma medial, sendo comensurável somente em potência com a toda, e contendo com a toda um racional, a restante é irracional, e seja chamada primeiro apótomo de uma medial.

CP74. No caso específico desta proposição, fluindo em seus enfoques e abrangências, convém expor que onde se lê “Caso de uma medial seja subtraída uma medial, sendo comensurável somente em potência com a toda” pode-se ler “Se de uma reta medial se tira outra medial que seja comensurável somente em quadrado com a reta inteira” ou “Se de uma reta medial for subtraída uma reta medial que é comensurável com a toda somente em quadrado”; onde se lê “e contendo com a toda um racional, a restante é irracional” pode-se ler “e que compreenda junto com a reta inteira um retângulo exprimível, a reta restante não é exprimível” ou “e que contenha com a toda um retângulo racional, a restante é irracional”. Na tradução efetuada por Castaños (1996) os termos “retângulo”, “inteira” e “reta” aparecem entre parênteses. No texto traduzido por Heath (1956), também notam-se várias destas ponderações e, no final, há a expressão “primeiro apótomo de uma reta medial”. Fluindo na prova desta proposição, utilizando-se das mesmas concepções expostas na proposição anterior por Fowler (1992), filtra-se que “Fazendo *b* e *c* serem linhas mediais comensuráveis somente em potência. Então,

[pela interpretação geométrica], $(b - c)^2 = b^2 - 2b.c + c^2$. Assim, $b^2 + c^2$ não é exprimível, sendo, então, medial. E *b.c*, conforme consta no texto da proposição, é racional, portanto, exprimível; consequentemente *2b.c* é racional, ou seja, exprimível. Desta forma, *2b.c* é incomensurável com $b^2 + c^2$. Daí que, claramente, $(b - c)^2$ é a diferença de uma medial e uma área racional, e, logo, não é exprimível, portanto não é comensurável com a área medial $b^2 + c^2$. Logo, é *alogos* [irracional]". Um exemplo que evidencia os lumes da proposição 74 é utilizando $\sqrt{\sqrt{8}a}$ e $\sqrt{\sqrt{2}a}$ como retas mediais comensuráveis somente em potência. Daí, concluímos que a área que representa as duas retas é racional, que, no caso, compreende um retângulo exprimível, no valor de $\sqrt{\sqrt{8}a} . \sqrt{\sqrt{2}a} = \sqrt{\sqrt{16}a^2} = \sqrt{4a^2} = 2a^2$. Assim, o que está dito na proposição é que se as retas mediais forem subtraídas, ou seja, $\sqrt{\sqrt{8}a} - \sqrt{\sqrt{2}a}$ o resultado é não exprimível, ou seja, irracional, que é exatamente o que acontece, gerando, então, um "primeiro apótomo de uma medial"

75. Caso de uma medial seja subtraída uma medial, sendo comensurável somente em potência com a toda, e contendo com a toda um medial, a restante é irracional; e seja chamada segundo apótomo de uma medial.

CP75. Esclarecendo os elos desta proposição, repercutindo suas concepções e convergências, vem que onde se lê "Caso de uma medial seja subtraída uma medial, sendo comensurável somente em potência com a toda" pode-se ler "Se de uma reta medial se tira outra medial que seja comensurável somente em quadrado com a reta inteira" ou "Se de uma reta medial for subtraída uma reta medial que é comensurável com a toda somente em quadrado"; onde se lê "e contendo com a toda um medial, a restante é irracional" pode-se ler "e que compreenda junto com a reta inteira um retângulo medial, a reta restante não é exprimível" ou "e que contenha com a toda um retângulo medial, a restante é irracional". No texto explicitado por Castaños (1996) o termo "reta" aparece entre parênteses. Na tradução efetuada por Heath (1956), esclarecem-se vários destes pormenores e, no final, tem-se a expressão "segundo apótomo de uma reta medial". Para a prova desta proposição, utilizando os mesmos delineamentos evidenciados na proposição 73 por Fowler (1992), podemos verificar que "Fazendo *b* e *c* serem linhas mediais

comensuráveis somente em potência. Então, [pela interpretação geométrica], *(b – c)² = b² – 2b.c + c²*. Agora, *b² + c²* não é exprimível, sendo, então, medial. E *b.c*, conforme consta no texto da proposição 75, é medial, portanto, não exprimível; consequentemente *2b.c* é irracional, ou seja, conforme já pontuamos, não exprimível. Desta forma, *2b.c* é incomensurável com *b² + c²*. Daí que *(b – c)²* é a soma de uma medial e uma área irracional, e, então, não é exprimível, assim não é comensurável com a área medial *b² + c²*. Logo, é *alogos* [irracional].". Um exemplo que esclarece melhor a proposição 75 é utilizando $\sqrt{6a}$ e $\sqrt{2a}$ como retas mediais comensuráveis somente em potência. Daí, concluímos que a área que representa as duas retas é medial, ou seja, compreende um retângulo não exprimível, no valor de $\sqrt{6a}.\sqrt{2a} = \sqrt{12a^2} = \sqrt{3.4a^2} = 2\sqrt{3a^2}$. Logo, o que está explicitado na proposição é que se as retas mediais forem subtraídas, ou seja, $\sqrt{6a} - \sqrt{2a}$ o resultado é não exprimível, ou seja, irracional, que é exatamente o que acontece, gerando, então, um "segundo apótomo de uma medial".

76. Caso de uma reta seja subtraída uma reta, sendo incomensurável em potência com a toda, fazendo com a toda, por um lado, os sobre elas juntos racional, e, por outro lado, o por elas medial, a restante é irracional; e seja chamada menor.

CP76. Para a referida proposição, consolidando seu entendimento e anunciação, tem-se que onde se lê "Caso de uma reta seja subtraída uma reta, sendo incomensurável em potência com a toda" pode-se ler "Se de uma reta se tira outra reta que seja incomensurável em quadrado com a reta inteira" ou "Se de uma reta seja subtraída uma reta que é incomensurável em quadrado com a toda"; onde se lê "fazendo com a toda, por um lado, os sobre elas juntos racional, e, por outro lado, o por elas medial, a restante é irracional" pode-se ler "e faça com a reta inteira a soma de seus quadrados exprimível e o retângulo compreendido por elas medial, a reta restante não é exprimível" ou "e que com a inteira faça os quadrados sobre elas juntos racional, mas o retângulo contido por elas medial, a restante é irracional". No texto evidenciado por Castaños (1996) os termos "reta" e retângulo" aparecem entre parênteses. Na tradução delineada por Heath (1956), esclarecem-se vários destes pormenores, com o autor enfatizando que se xy é o retângulo da proposição 76,

então, o mesmo é medial. Assim, $2xy$ também é medial. No entanto, $x^2 + y^2$ é uma área racional, isto porque a própria proposição testemunha que “fazendo com a toda, por um lado, os sobre elas juntos racional”. Assim sendo, conclui-se que $x^2 + y^2$ é incomensurável com $2xy$. Como já sabemos que $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, verifica-se, então, que $(x-y)^2$ é incomensurável com $x^2 + y^2$ e, portanto, $x - y$ é irracional, ou seja, não exprimível. Por outro lado, não esquecendo que, na proposição 33, foram encontrados os valores $x = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$ e $y = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$, representando os lados do retângulo, temos que o valor da subtração representada por $x - y = \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}} - \frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$, é, no caso, irracional, garantindo o final da proposição que expõe “a restante é irracional, e seja chamada menor”.

77. Caso de uma reta seja subtraída uma reta, sendo incomensurável em potência com a toda, e fazendo com a toda, por um lado, o composto dos quadrados sobre elas medial, e, por outro lado, duas vezes o por elas racional, a restante é irracional; e seja chamada a que faz com um racional o todo medial.

CP77. Para a referida proposição, consolidando seu entendimento e anunciação, tem-se que onde se lê “Caso de uma reta seja subtraída uma reta, sendo incomensurável em potência com a toda” pode-se ler “Se de uma reta se tira outra reta que seja incomensurável em quadrado com a reta inteira” ou “Se de uma reta seja subtraída uma reta que é incomensurável em quadrado com a toda”; onde se lê “e fazendo com a toda, por um lado, o composto dos quadrados sobre elas medial, e, por outro lado, duas vezes o por elas racional, a restante é irracional” pode-se ler “e que faça, com a reta inteira, a soma de seus quadrados medial, porém o dobro do retângulo compreendido por elas exprimível, a reta restante não é exprimível” ou “e que com a inteira faça a soma dos quadrados sobre elas medial, mas duas vezes o

retângulo contido por elas racional, a restante é irracional"; onde se lê "e seja chamada a que faz com um racional o todo medial" pode-se ler "chame-se a que faz com uma área exprimível uma área inteira medial" ou "e seja chamada a que produz com uma área racional uma toda medial". No texto mostrado por Castaños (1996) os termos "reta" e retângulo" aparecem entre parênteses. Na tradução de Heath (1956), foram evidenciados algumas destas concepções e, delineando suas ponderações, verifica-se que se xy é o retângulo da proposição 77, então, o mesmo é racional. Assim, $2xy$ também é racional. No entanto, $x^2 + y^2$ é uma área medial, isto porque a própria proposição pontua que "e fazendo com a toda, por um lado, o composto dos quadrados sobre elas medial". Desta forma, conclui-se que $x^2 + y^2$ é incomensurável com $2xy$. Como sabemos que $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, verifica-se, então, que $(x-y)^2$ é incomensurável com $2xy$ e, portanto, $x - y$ é irracional, ou seja, não exprimível. No entanto, recordando que, na proposição 34, foram encontrados os valores, que representam os lados do retângulo, de tal forma que $x = \frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2}+k)}$ e $y = \frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2}-k)}$.

Logo, tem-se que o valor procurado da subtração representado por de $x - y = \frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2}+k)} - \frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2}-k)}$, é, no caso, irracional, assegurando o final da proposição que afirma "a restante é irracional; e seja chamada a que faz com um racional o todo medial".

78. Caso de uma reta seja subtraída uma reta, sendo incomensurável em potência com a toda, fazendo com a toda tanto o composto dos quadrados sobre elas medial quanto duas vezes o por elas medial, e ainda, os quadrados sobre elas incomensurável com duas vezes o por elas, a restante é irracional; e seja chamada a que faz com um medial o todo medial.

CP78. Para a proposição em apreço, desenvolvendo suas repercussões e confluências, salienta-se que onde se lê “Caso de uma reta seja subtraída uma reta, sendo incomensurável em potência com a toda” pode-se ler “Se de uma reta se tira outra reta que seja incomensurável em quadrado com a reta inteira” ou “Se de uma reta seja subtraída uma reta que é incomensurável em quadrado com a toda”; onde se lê “fazendo com a toda tanto o composto dos quadrados sobre elas medial quanto duas vezes o por elas medial, e ainda, os quadrados sobre elas incomensurável com duas vezes o por elas, a restante é irracional” pode-se ler “e que faça, junto com a reta inteira, a soma de seus quadrados medial e o dobro do retângulo compreendido por elas medial e ademais seus quadrados incomensuráveis com o dobro do retângulo compreendido por elas, então a reta restante não é exprimível” ou “e que com a inteira faça a soma dos quadrados sobre elas medial, duas vezes o retângulo contido por elas medial, e, além do mais, os quadrados sobre elas incomensurável com duas vezes o retângulo contido por elas, a restante é irracional”; onde se lê “e seja chamada a que faz com um medial o todo medial” pode-se ler “chame-se a que faz com uma área medial uma área inteira medial” ou “e seja chamada a que produz com uma área medial uma toda medial”. No texto explicitado em Castaños (1996) os termos “reta”, “retângulo” e “área” aparecem entre parênteses. Na tradução ofertada por Heath (1956), verificaram-se algumas destas concepções e, vivenciando seus enfoques, pode-se mostrar que se xy é o retângulo da proposição 78, então, o mesmo é medial. Assim, $2xy$ também é medial. No entanto, $x^2 + y^2$ é, também, uma área medial, isto porque a própria proposição pontua que “fazendo com a toda tanto o composto dos quadrados sobre elas medial quanto duas vezes o por elas medial”. Assim sendo, conclui-se que $x^2 + y^2$ é incomensurável com $2xy$. Desta forma, aplicando estas áreas a uma reta racional σ, podemos expressar que $x^2 + y^2 = \sigma u$ e $2xy = \sigma v$. Todavia, desde que σu e σv sejam, ambas, áreas mediais, temos que u e v são retas racionais e incomensuráveis com σ. Assim, não é difícil concluir que σu é incomensurável com σv. Daí que u é incomensurável com v. Contudo, nos é assegurado, então, que u e

v são retas racionais comensuráveis somente em quadrado. Entretanto, pela importante proposição 73, que garante que “Caso de uma racional seja subtraída uma racional, sendo comensurável somente em potência com a toda, a restante é irracional; e seja chamado apótomo.”, assim sendo $u - v$ é irracional. Porém, pela proposição 20 do Livro X, tem-se que “Caso um racional seja aplicado a uma racional, faz como largura uma racional e comensurável em comprimento com aquela a que foi aplicado.”, desta forma $\sigma(u - v)$ é irracional, garantindo, assim, que a subtração de $x^2 + y^2$ e $2xy$ também seja irracional. E, como $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, vem que, então, $(x-y)^2$ é irracional e, portanto, $x - y$ é irracional, ou seja, não exprimível. No entanto, relembrando que, na proposição 35, foram encontrados os valores, que representam os lados do retângulo, de tal forma que $x = \frac{\rho \sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}} \sqrt{(1 + \frac{k}{\sqrt{(1+k^2)}})}$ e $y = \frac{\rho \sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}} \sqrt{(1 - \frac{k}{\sqrt{(1+k^2)}})}$. Assim, vem que o valor procurado da subtração representado por $x - y = \frac{\rho \sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}} \sqrt{(1 + \frac{k}{\sqrt{(1+k^2)}})} - \frac{\rho \sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}} \sqrt{(1 - \frac{k}{\sqrt{(1+k^2)}})}$, é, no caso, irracional, assegurando o final da proposição que revela “a restante é irracional; e seja chamada a que faz com um medial o todo medial.”.

79. Uma [só] reta racional ajusta-se ao apótomo, sendo comensurável somente em potência com a toda.

CP79. Analisando o conteúdo desta proposição[15], é extremamente útil salientar que na tradução de Castaños (1996) evidencia-se que “Há um apótomo, unicamente, se lhe junta uma reta exprimível que seja comensurável somente em quadrado com a reta inteira”. Para o texto, da referida proposição, traduzido por Heath (1956), expõe-

se que “A um apótomo somente uma reta racional pode ser anexada a qual é comensurável com a toda somente em quadrado”. Por outro lado, em Fowler (1992), verificam-se as ponderações de que “supondo $q = x - y = x_1 - y_1$, ambos apótomos. Se x e x_1 não são iguais, tais que $x > x_1$, então $x^2 + y^2 - 2xy = {x_1}^2 + {y_1}^2 - 2x_1y_1$. Porém, pelo lema anterior à proposição 42, $x^2 + y^2 > {x_1}^2 + {y_1}^2$. Consequentemente $(x^2 + y^2) - (x_1^2 + y_1^2) = 2xy - 2x_1y_1$.”. Finalmente, o autor argumenta que o lado esquerdo desta igualdade é exprimível, ou seja, representado pela diferença entre áreas racionais. Contudo, o lado direito desta igualdade não é exprimível, visto que é formado pela diferença entre duas áreas mediais. Não esquecendo que, pela proposição 26 do Livro X, “Um medial não excede um medial por um racional”, temos que a diferença entre áreas racionais não pode ser igual a diferença entre áreas mediais, resultando, daí, a impossibilidade da igualdade exposta. Desta forma, o par x_1, y_1 não pode ser diferente do par x, y.

80. Uma só reta medial ajusta-se ao primeiro apótomo de uma medial, sendo comensurável somente em potência com a toda, contendo com a toda um racional.

CP80. No que tange ao enunciado desta proposição, enriquecendo a percepção de suas essências, tem-se que em Castaños (1996) a tradução sedimenta a concepção de que “A um primeiro apótomo de uma medial se lhe junta, unicamente, uma reta medial que seja comensurável somente em quadrado com a reta inteira e que compreenda junto com a reta inteira um retângulo exprimível”. Já na tradução de Heath (1956), verifica-se que “Para um primeiro apótomo de uma reta medial somente uma reta medial pode ser anexada a qual é comensurável com a toda somente em quadrado contendo com a toda um retângulo racional”.. Utilizando-se das ponderações de Fowler (1992) para a proposição 79, tem-se que “supondo $q = x - y = x_1 - y_1$, ambos apótomos. Se x e x_1 não são iguais, tais que $x > x_1$, então $x^2 + y^2 - 2xy = {x_1}^2 + {y_1}^2 - 2x_1y_1$. Todavia, pelo lema anterior à

proposição 42, $x^2 + y^2 > {x_1}^2 + {y_1}^2$. Assim sendo, prosseguindo, vem que $(x^2 + y^2) - (x_1^2 + y_1^2) = 2xy. - 2x_1y_1$." Desta forma é importante perceber o fato de que, agora, o lado esquerdo desta igualdade é não exprimível, ou seja, representado pela diferença entre áreas mediais. Por outro lado, o lado direito desta igualdade é exprimível, visto que é formado pela diferença entre duas áreas racionais. Mas, conforme pontua à proposição 26 do Livro X, "Um medial não excede um medial por um racional", temos que a diferença entre áreas mediais não pode ser igual a diferença entre áreas racionais, resultando, então, a impossibilidade da igualdade apresentada. Assim sendo, o par x_1, y_1 não pode ser diferente do par x, y.

81. Uma só reta medial ajusta-se ao segundo apótomo de uma medial, comensurável somente em potência com a toda, e contendo com a toda um medial.

CP81. No que concerne ao evidenciado nesta proposição, tem-se que em Castaños (1996) a tradução revela o conteúdo que "Ao segundo apótomo de uma medial se lhe junta, unicamente, uma reta medial comensurável somente em quadrado com a reta inteira que compreenda com a reta inteira um retângulo medial". No texto traduzido por Heath (1956), nota-se que "Para um segundo apótomo de uma reta medial somente uma reta medial pode ser anexada a qual é comensurável com a toda somente em quadrado e que contenha com a toda um retângulo medial".. Utilizando-se, em parte, das argumentações de Fowler (1992) para a proposição 79, vem que "supondo que a reta segundo apótomo de uma medial pode ser dividida em dois caminhos, temos que $q = x - y = x_1 - y_1$. Se x e x_1 não são iguais, tais que $x > x_1$, então $x^2 + y^2 - 2xy = {x_1}^2 + {y_1}^2 - 2x_1y_1$". A partir deste ponto, deve-se ter em mente que, agora, aplicando estas áreas a uma reta racional σ, podemos expressar que $x^2 + y^2 = \sigma u$ e $2xy = \sigma v$. Todavia, desde que σu e σv sejam, ambas, áreas mediais, temos que u e v são retas racionais e incomensuráveis com σ. Então, concluímos que σu é incomensurável com σv. Daí

que u é incomensurável com v. Contudo, nos é assegurado, desta forma, que u e v são retas racionais comensuráveis somente em quadrado. Logo, pela importante proposição 36, que garante que “Caso duas racionais comensuráveis somente em potência sejam compostas, a toda é irracional, e seja chamada binomial.”, logo u + v é irracional. Ou seja, u + v é uma reta binomial. De forma semelhante, ter-se-á que podemos expressar ${x_1}^2 + {y_1}^2 = \sigma u'$ e $2x_1y_1 = \sigma v'$. No entanto, desde que $\sigma u'$ e $\sigma v'$ sejam, ambas, áreas mediais, temos que u' e v' são retas racionais e incomensuráveis com σ. Assim, concluímos que $\sigma u'$ é incomensurável com $\sigma v'$. Daí que u' é incomensurável com v'. Contudo, sabemos que u' e v' são retas racionais comensuráveis somente em quadrado. Entretanto, pela essencial proposição 73, que expõe “Caso de uma racional seja subtraída uma racional, sendo comensurável somente em potência com a toda, a restante é irracional; e seja chamado apótomo.”, logo $u' - v'$ é irracional. Ou seja, $u' - v'$ é um apótomo. Porém, desde que $x^2 + y^2 - 2xy = {x_1}^2 + {y_1}^2 - 2x_1y_1$., ter-se-á, sutilmente, que $u - v = u' - v'$, gerando o fato de que um apótomo pode ser dividido em dois caminhos. Mas tal fato é impossível. Então, como $x - y$ representa uma reta segundo apótomo de uma medial, temos que a mesma, conforme anuncia a proposição, ajusta-se “uma só reta medial”.

82. Uma só reta ajusta-se à menor, sendo incomensurável em potência com a toda, fazendo com a toda, por um lado, o dos quadrados sobre elas racional, e, por outro lado, duas vezes o por elas medial.

CP82. Em relação ao exposto nesta proposição, convém evidenciar que em Castaños (1996) o texto revela que “A uma reta ‘menor’ se lhe junta, unicamente, uma reta que seja incomensurável em quadrado com a reta inteira e que faça junto com a reta inteira a soma de seus quadrados exprimível e o dobro do retângulo compreendido por elas medial”. Quanto à tradução de Heath (1956), vem que “Para

uma reta menor somente uma reta pode ser anexada a qual é incomensurável em quadrado com a toda e que faz, com a toda, a soma dos quadrados sobre elas racional mas duas vezes o retângulo contido por elas medial".. Desta forma, penetrando no universo das concepções de Fowler (1992), temos que ""supondo $q = x - y = x_1 - y_1$, ambos apótomos. Se x e x_1 não são iguais, tais que $x > x_1$, então $x^2 + y^2 - 2xy = {x_1}^2 + {y_1}^2 - 2x_1y_1$. Porém, pelo lema anterior á proposição 42, $x^2 + y^2 > {x_1}^2 + {y_1}^2$. Consequentemente, ter-se-á que $(x^2 + y^2) - (x_1^2 + y_1^2) = 2xy - 2x_1y_1$.. Desta forma, é importante estar atento ao fato de que, neste instante, o lado esquerdo desta igualdade é exprimível, ou seja, representado pela diferença entre áreas racionais. Por outro lado, o lado direito desta igualdade é não exprimível, visto que é formado pela diferença entre duas áreas mediais. Agora, lembrando do exposto na proposição 26 do Livro X, temos que "Um medial não excede um medial por um racional". Logo, temos que a diferença entre áreas racionais não pode ser igual à diferença entre áreas mediais, resultando, então, na impossibilidade da igualdade apresentada. Desta forma, o par x_1, y_1 não pode ser diferente do par x, y. E, então, está provado que "Uma só reta ajusta-se à menor" ou "A uma reta 'menor' se lhe junta, unicamente, uma reta que seja incomensurável em quadrado com a reta inteira" ou "Para uma reta menor somente uma reta pode ser anexada".

83. Uma só reta ajusta-se á que faz, com um racional o todo medial, sendo incomensurável em potência com a toda, e fazendo com a toda, por um lado, o composto dos quadrados sobre elas medial, e, por outro lado, duas vezes o por elas racional.

CP83. A respeito do conteúdo expresso nesta proposição, convém evidenciar que em Castaños (1996) o texto revela que "A uma reta que faz com uma área exprimível uma área inteira medial se lhe junta, unicamente, uma reta que seja incomensurável em quadrado com a reta inteira e que faça junto com a reta inteira a soma de seus quadrados medial e o dobro do retângulo compreendido por elas exprimível". Com relação à tradução de Heath (1956), sedimenta-se que "Para uma

reta que produz com uma área racional uma toda medial somente uma reta pode ser anexada a qual é incomensurável em quadrado com a reta toda e que com a reta toda faz a soma dos quadrados sobre elas medial, mas duas vezes o retângulo contido por elas racional". Assim sendo, Penetrando nas percepções de Fowler (1992), temos que ""supondo $q = x - y = x_1 - y_1$, ambos binomiais. Se x e x_1 não são iguais, tais que $x > x_1$, então $x^2 + y^2 - 2xy = {x_1}^2 + {y_1}^2 - 2x_1y_1$. Contudo, pelo lema anterior à proposição 42, $x^2 + y^2 > {x_1}^2 + {y_1}^2$. Logo, $(x^2 + y^2) - (x_1^2 + y_1^2) = 2xy - 2x_1y_1$. Agora, convém salientar o fato de que, neste momento, o lado esquerdo desta igualdade é não exprimível, ou seja, representado pela diferença entre áreas mediais. No entanto, o lado direito desta igualdade é exprimível, visto que é formado pela diferença entre duas áreas racionais. Logo, relembrando o exposto pela proposição 26 do Livro X, vem que "Um medial não excede um medial por um racional". Então, temos que a diferença entre áreas mediais não pode ser igual à diferença entre áreas racionais, resultando, então, na impossibilidade da igualdade apresentada. Desta forma, o par x_1, y_1 não pode ser diferente do par x, y. E, desta forma, está provado que "Uma só reta ajusta-se á que faz, com um racional o todo medial" ou "A uma reta 'que faz com uma área exprimível uma área inteira medial se lhe junta, unicamente, uma reta que seja incomensurável em quadrado com a reta inteira" ou "Para uma reta que produz com uma área racional uma toda medial somente uma reta pode ser anexada".

84. Uma só reta ajusta-se à que faz com um medial o todo medial, sendo incomensurável em potência com a toda, e fazendo com a toda tanto o composto dos quadrados sobre elas medial quanto duas vezes o por elas medial e ainda incomensurável com o composto dos sobre elas.

CP84. Sondando as nuances e enfoques desta proposição, é importante informar que em Castaños (1996) o texto revela que "A uma reta que faz com uma área medial uma área inteira medial se lhe junta, unicamente, uma reta que seja incomensurável em quadrado com a reta inteira e que faça, com a reta inteira, a

soma de seus quadrados medial e o dobro do retângulo compreendido por elas medial e, ademais, a soma dos seus quadrados incomensurável com o dobro do retângulo compreendido por elas". Com respeito à tradução de Heath (1956), salienta-se que "Para uma reta que produz com uma área medial uma toda medial somente uma reta pode ser anexada a qual é incomensurável em quadrado com a reta toda e que com a reta toda faz a soma dos quadrados sobre elas medial e duas vezes o retângulo contido por elas medial e, também, incomensurável com a soma dos quadrados sobre elas". Assim sendo, ainda recordando as importantes argumentações de Fowler (1992), tem-se que "supondo que a que serve para produzir dois mediais pode ser dividida em dois caminhos, temos que $q = x - y = x_1 - y_1$. Se x e x_1 não são iguais, tais que x > x_1, então $x^2 + y^2 - 2xy = {x_1}^2 + {y_1}^2 - 2x_1y_1$". A partir deste ponto deve-se notar que, aplicando estas áreas a uma reta racional σ, podemos pontuar que $x^2 + y^2 = \sigma u$ e $2xy = \sigma v$. Entretanto, desde que σu e σv sejam, ambas, áreas mediais, temos que u e v são retas racionais e incomensuráveis com σ. Assim, concluímos que σu é incomensurável com σv. Daí que u é incomensurável com v. Todavia, nos é assegurado, então, que u e v são retas racionais comensuráveis somente em quadrado. Contudo, pela sutil proposição 73, que garante que ""Caso de uma racional seja subtraída uma racional, sendo comensurável somente em potência com a toda, a restante é irracional; e seja chamado apótomo",.logo $u - v$ é irracional. Ou seja, $u - v$ é um apótomo. De forma semelhante, ter-se-á que podemos expressar ${x_1}^2 + {y_1}^2 = \sigma u'$ e $2x_1y_1 = \sigma v'$. No entanto, desde que $\sigma u'$ e $\sigma v'$ sejam, ambas, áreas mediais, temos que u' e v' são retas racionais e incomensuráveis com σ. Assim, concluímos que $\sigma u'$ é incomensurável com $\sigma v'$. Daí que u' é incomensurável com v'. Contudo, sabemos que u' e v' são retas racionais comensuráveis somente em quadrado. Entretanto, ainda recordando da proposição 73, que expõe que "Caso de uma racional seja subtraída uma racional, sendo

comensurável somente em potência com a toda, a restante é irracional; e seja chamado apótomo.", logo $u' - v'$ é irracional. Ou seja, $u' - v'$ é um apótomo. Todavia, desde que $x^2 + y^2 - 2xy = {x_1}^2 + {y_1}^2 - 2x_1y_1$., vem que, sutilmente, teremos $u - v = u' - v'$, explicitando o fato de que um apótomo pode ser dividido em dois caminhos. Mas tal fato é impossível. Então, finalmente, verifica-se que $x - y$ revela que "Uma só reta ajusta-se à que faz com um medial o todo medial" ou "A uma reta que faz com uma área medial uma área inteira medial se lhe junta, unicamente, uma reta que seja incomensurável em quadrado com a reta inteira" ou "Para uma reta que produz com uma área medial uma toda medial somente uma reta pode ser anexada"

TERCEIRAS DEFINIÇÕES

1. Sendo supostas uma racional e um apótomo, caso a toda seja maior em potência do que a que é ajustada pelo sobre uma comensurável com aquela mesma em comprimento, e a toda seja comensurável com a exposta racional em comprimento, seja chamada primeiro apótomo.

CD1. Explorando as sutilezas desta definição[16], enfatiza-se, para um melhor delineamento da mesma, que onde se lê "Sendo supostas uma racional e um apótomo" pode-se ler "Dada uma reta exprimível e um apótomo" ou "Dados uma reta racional e um apótomo"; onde se lê "caso a toda seja maior em potência do que a que é ajustada pelo sobre uma comensurável com aquela mesma em comprimento" pode-se ler "se o quadrado da reta inteira é maior que o da reta anexada ao quadrado de uma reta comensurável em comprimento com ela (a reta inteira)" ou "se o quadrado sobre a toda é maior do que o quadrado sobre a anexada ao quadrado sobre a reta comensurável em comprimento com a toda"; onde se lê "e a toda seja comensurável com a exposta racional em comprimento", pode-se ler "e a reta inteira é comensurável em comprimento com a reta exprimível dada" ou "e a toda seja comensurável em comprimento com a reta racional estabelecida". Na tradução evidenciada por Castaños (1996) estão descritas algumas destas observações. Já para o texto traduzido de Heath (1956), também se concebem vários destes

enfoques e a expressão final “seja chamada primeiro apótomo” está explicitada como “faça o apótomo ser chamado primeiro apótomo”. Importantíssimas, também, são as ponderações de Fowler (1992) pretendendo esclarecer os elos da primeira das chamadas “terceiras definições”. Assim sendo, o autor traz em suas argumentações o fato de que “Se o quadrado sobre um determinado apótomo $q = x - y$ é aplicado a uma altura exprimível h, sua largura será um apótomo $w = b - c$ em que as linhas exprimíveis b e c são satisfeitas; b é comensurável com h; c é incomensurável com h; e $d = \sqrt{b^2 - c^2}$ é comensurável com b. Tal que um apótomo será chamado um ‘primeiro apóomo’ com respeito a h.”. Finalmente, não deve se esquecer que tal definição está atrelada à proposição 85, do Livro X de *Os Elementos* de Euclides.

2. E, caso a que se ajusta seja comensurável com a exposta racional em comprimento, e a toda seja maior em potência do que a que se ajusta pelo sobre uma comensurável com aquela mesma, seja chamada segundo apótomo.

CD2. Em relação ao que é exposto nesta definição, faz-se necessário informar que onde se lê “E, caso a que se ajusta seja comensurável com a exposta racional em comprimento” pode-se ler “E se a reta anexada é comensurável em comprimento com a reta exprimível dada” ou “Mas se a anexada seja comensurável em comprimento com a reta racional estabelecida”; onde se lê “e a toda seja maior em potência do que a que se ajusta pelo sobre uma comensurável com aquela mesma” pode-se ler “e o quadrado da reta inteira é maior que o da anexada ao quadrado de uma reta comensurável com ela” ou “e o quadrado sobre a toda seja maior do que aquela sobre a anexada ao quadrado sobre a reta comensurável com a toda”. Em Castaños (1996) verificam-se várias destas concepções. A tradução de Heath (1956) engloba alguns destes pormenores e o autor termina a segunda das “terceiras definições” com a expressão “faça o apótomo ser chamado um segundo apótomo”, ao invés de “seja chamada segundo apótomo*”*. A referida definição está ligada à proposição 86, do Livro X de *Os Elementos*, visto que é na mesma que Euclides esclarece o ensinamento de como encontrar o chamado segundo apótomo.

3. E, caso nenhuma seja comensurável com a exposta racional em comprimento, e a toda seja maior em potência do que a que se ajusta pelo sobre uma comensurável com aquela mesma, seja chamada terceiro apótomo.

CD3. Em relação ao que é exposto nesta definição, faz-se necessário informar que onde se lê “E, caso nenhuma seja comensurável com a exposta racional em comprimento” pode-se ler “E se nenhuma das duas é comensurável em comprimento com a reta exprimível dada” ou “Mas se nenhuma seja comensurável em comprimento com a reta racional estabelecida”; onde se lê “e a toda seja maior em potência do que a que se ajusta pelo sobre uma comensurável com aquela mesma” pode-se ler “e o quadrado da reta inteira é maior que o da anexada ao quadrado de uma reta comensurável com ela” ou “e o quadrado sobre a toda seja maior do que aquela sobre a anexada ao quadrado sobre a reta comensurável com a toda”. No texto delineado por Castaños (1996) notam-se alguns destes enfoques. Na tradução de Heath (1956) verificam-se, também, tais afirmações e o autor finaliza a terceira das “terceiras definições” com a expressão “faça o apótomo ser chamado um terceiro apótomo”, ao invés de “seja chamada terceiro apótomo*”*. A definição em apreço está vinculada à proposição 87, do Livro X de *Os Elementos*, porque é na dita proposição que Euclides norteia o ensinamento de como encontrar o chamado terceiro apótomo.

4. De novo, caso a toda seja maior em potência do que a que se ajusta pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma [em comprimento], e caso a toda seja comensurável com a exposta racional, em comprimento, seja chamada quarto apótomo.

CD4. Com respeito ao que é enfatizado nesta definição, vem que é importante mencionar que onde se lê “De novo, caso a toda seja maior em potência do que a que se ajusta pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma [em comprimento]” pode-se ler “Se, por sua vez, o quadrado da reta inteira é maior que o da anexada ao quadrado de uma reta incomensurável com ela (a reta inteira)” ou “Novamente, se o quadrado sobre a toda seja maior do que o quadrado sobre a anexada ao quadrado sobre a reta incomensurável com a toda”; onde se lê “e caso a

toda seja comensurável com a exposta racional, em comprimento" pode-se ler "então, se a reta inteira é comensurável em comprimento com a reta exprimível dada" ou "então, se a toda seja comensurável em comprimento com a reta racional estabelecida". No texto concebido por Castaños (1996) observam-se tais sutilezas. Já na tradução de Heath (1956) enxergam-se, também, vários destas observações e o autor termina a quarta das "terceiras definições" com a expressão "faça o apótomo ser chamado um quarto apótomo", ao invés de "seja chamada quarto apótomo*"*. A definição em questão está agregada à proposição 88, do Livro X de *Os Elementos*, pois é na referida proposição que Euclides clareia o ensinamento de como achar o chamado quarto apótomo.

5. E, caso a que se ajusta, quinto.

CD5. Em relação ao que é especificado nesta definição, convém explicitar que Castaños (1996) traduz a expressão "E, caso a que se ajusta, quinto" como "Porém se a anexada é comensurável, quinto", enquanto Heath (1956) traduz como "Se a anexada seja então comensurável, quinto". A referida definição está ligada à proposição 89, do Livro X de *Os Elementos*, visto que é na mesma que Euclides revela o ensinamento de como encontrar o chamado quinto apótomo.

6. E, caso nenhum, sexto.

CD6. Sobre os enfoques desta definição, convém salientar que Castaños (1996) traduz a expressão "E, caso nenhum, sexto" como "E se nenhuma das duas é comensurável, sexto", enquanto Heath (1956) traduz como "E, se nenhuma, um sexto". A referida definição está ligada à proposição 90, do Livro X de *Os Elementos*, porque é na mesma que Euclides expõe o ensinamento de como encontrar o chamado sexto apótomo.

85. Achar o primeiro apótomo

CP85. Na análise dos elos desta proposição[17], a expressão "Achar o primeiro apótomo" aparece, tanto na tradução de Castaños (1996) quanto na de Heath (1956), exatamente da mesma forma. No entanto, de maneira bastante sutil, os

comentários de Heath (1956) geram um acúmulo de informações que explicitam as essências da compreensão da referida proposição. Então, o autor afirma que "fazendo $k\rho$ uma reta comensurável em comprimento com ρ, esta uma dada reta racional, ou seja, exprimível.". Logo em seguida, garantindo a necessidade de se tomar dois números, evidencia "que podem ser escritos como $p(m^2 - n^2),\ pn^2$, onde $m^2 - n^2$ não é um quadrado perfeito.". Desta forma, tomando uma certa reta racional x, pode-se garantir a seguinte proporção:

$$\frac{pm^2}{p(m^2-n^2)} = \frac{k^2\rho^2}{x^2}$$

Consequentemente, podemos exprimir o valor de x como:

$$x = k\rho\ \frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m}$$

Desta forma, o primeiro apótomo será expresso através da diferença $k\rho - x$, ou, também, $k\rho - k\rho\ \frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m}$. A prova é garantida através do fato de que, como expõe a proporção acima, x^2 é comensurável com $k^2\rho^2$. Não esquecendo que x é uma reta racional, porém incomensurável com $k\rho$, todavia, como x é comensurável em quadrado somente com $k\rho$, tem-se que a expressão $k\rho - x$ é um apótomo. Ainda voltando à proporção acima, podemos ter $k^2\rho^2$ maior do que x^2, de tal forma que $k^2\rho^2 - x^2 = z^2$. Contudo, a dita proporção garante que se pode ter $\frac{pm^2}{pn^2} = \frac{k^2\rho^2}{z^2}$ e, daí, temos que z é uma reta racional e comensurável com $k\rho$.

Assim, pela primeira definição das “terceiras definições”, onde pode-se observar que em seu final expõe “caso a toda seja maior em potência do que a que é ajustada pelo sobre uma comensurável com aquela mesma em comprimento, e a toda seja comensurável com a exposta racional em comprimento, seja chamada primeiro apótomo.” tem-se que $k\rho - x$ é um primeiro apótomo.

86. Achar o segundo apótomo

CP86. Com relação aos comentários desta proposição, a expressão “Achar o segundo apótomo” aparece, tanto na tradução de Castaños (1996) quanto na de Heath (1956), exatamente da mesma forma, sendo que, neste último autor, conforme pontua a proposição 85, há argumentações que evidenciam toda a sutileza da busca de uma prova também para a proposição 86. Deste modo, recordando a afirmação de que “fazendo $k\rho$ uma reta comensurável em comprimento com ρ, esta uma dada reta racional, ou seja, exprimível.”. Neste momento, garantindo-se a necessidade de se tomar dois números, evidenciou-se “que podem ser escritos como $p(m^2 - n^2),\ pn^2$, onde $m^2 - n^2$ não é um quadrado perfeito.”. A partir daqui, tomou-se uma certa reta racional x, e garantiu-se a seguinte proporção:

$$\frac{pm^2}{p(m^2-n^2)} = \frac{k^2\rho^2}{x^2}$$

Consequentemente, pode-se exprimir o valor de x como:

$$x = k\rho\,\frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m}$$

Desta forma, o primeiro apótomo foi expresso através da diferença explicitada por $k\rho - x$, ou, também, $k\rho - k\rho\,\frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m}$. A prova, agora, garantindo os

enfoques da proposição 86, traz o fato de que, como expõe a proporção acima, x^2 é comensurável com $k^2\rho^2$. Não esquecendo que x é uma reta racional, porém incomensurável com $k\rho$, entretanto, como x é comensurável em quadrado somente com $k\rho$, tem-se que a expressão $k\rho - x$ é um apótomol. Ainda voltando à proporção acima, podemos ter, ao contrário da proposição 85, x^2 maior do que $k^2\rho^2$, de tal forma que $x^2 - k^2\rho^2 = z^2$. Todavia, a dita proporção garante que se pode ter $\frac{pm^2}{pn^2} = \frac{x^2}{z^2}$ e, daí, temos que z é uma reta racional e comensurável com x.

Logo, pela segunda definição das “terceiras definições”, onde pode-se observar que em seu texto revela “caso a que se ajusta seja comensurável com a exposta racional em comprimento, e a toda seja maior em potência do que a que se ajusta pelo sobre uma comensurável com aquela mesma, seja chamada segundo apótomo”, tem-se que $k\rho - x$ é um segundo apótomo.

87. Achar o terceiro apótomo

CP87. Delineando os comentários para esta proposição, tem-se que a expressão “Achar o terceiro apótomo” aparece, tanto na tradução de Castaños (1996) quanto na de Heath (1956), exatamente da mesma forma. Ainda enfatizando as essências das suas concepções para as proposições 85 e 86, Heath (1956) prioriza o fato de que ”fazendo ρ uma dada reta racional, ou seja, exprimível.”. Seguindo além, garante, também, a necessidade de se tomar dois números “que podem ser escritos como $p(m^2 - n^2),\ pn^2$, onde $m^2 - n^2$ não é um quadrado perfeito.”. A partir daqui, atrelado aos ecos da proposição 87, ainda toma um certo número q, que não é um quadrado, e que não tem para pm^2 ou $p(m^2 - n^2),$ uma razão de um quadrado para um quadrado. Ao tomar uma certa reta racional x, expõe a seguinte

proporção $\frac{q}{pm^2} = \frac{\rho^2}{x^2}$, de onde se enxerga que x é racional e incomensurável com ρ. Agora, supondo que $\frac{pm^2}{p(m^2-n^2)} = \frac{x^2}{y^2}$ tem-se que y é racional e comensurável em quadrado somente com x. Então, tem-se que $x - y$ é um apótomo. Neste ponto é bastante importante o fato de que, das proporções apresentadas, pode-se chegar à proporção $\frac{q}{p(m^2-n^2)} = \frac{\rho^2}{y^2}$, onde constata-se que y é incomensurável com ρ. Então, podemos ter $x^2 - y^2 = z^2$ e da segunda proporção apresentada obtemos $\frac{pm^2}{pn^2} = \frac{x^2}{z^2}$, de onde obtemos que z é comensurável com x. Logo, $\sqrt{x^2 - y^2}$ é comensurável com x. Mas x, y são incomensuráveis com ρ. Desta forma, $x - y$ é um terceiro apótomo, enquadrando-se no fato de que, pela terceira definição das "terceiras definições", "caso nenhuma seja comensurável com a exposta racional em comprimento, e a toda seja maior em potência do que a que se ajusta pelo sobre uma comensurável com aquela mesma, seja chamada terceiro apótomo."

88. Achar o quarto apótomo

CP88. Para os delineamentos e sutilezas desta proposição, vem que a expressão "quarto apótomo", nas traduções de Castaños (1996) e Heath (1956), aparece sem nenhuma diferença. Nas importantes concepções para a referida proposição, Heath (1956) explicita que "Tome dois números m, n, tal que $m + n$ não tenha, para qualquer m ou n, a razão de um quadrado para um quadrado.". A partir deste ponto, o autor toma uma certa reta racional x, e garante a seguinte proporção $\frac{m+n}{m} = \frac{k^2\rho^2}{x^2}$. Daí que o valor de x será expresso por $x = k\rho\sqrt{\frac{m}{m+n}}$, ou, fazendo

$\phi = \frac{n}{m}$, ter-se-á $x = k\rho\sqrt{\frac{1}{1+\phi}} = \frac{k\rho}{\sqrt{1+\phi}}$. Assim sendo, $k\rho - x$, ou $k\rho - \frac{k\rho}{\sqrt{1+\phi}}$, é um quarto apótomo, não esquecendo que $\sqrt{k^2\rho^2 - x^2}$ é incomensurável em comprimento com $k\rho$ e, ainda, $k\rho$ é comensurável em comprimento com ρ. Logo, tem-se a explanação inteiramente harmonizada através da quarta definição das "terceiras definições, que expõe em seu final "De novo, caso a toda seja maior em potência do que a que se ajusta pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma [em comprimento], e caso a toda seja comensurável com a exposta racional, em comprimento, seja chamada quarto apótomo".

89. Achar o quinto apótomo

CP89. Para o devido enquadramento desta proposição, convém frisar que a expressão "Achar o quinto apótomo", nas traduções de Castaños (1996) e Heath (1956), está explicitada do mesmo jeito. Nos delineamentos para a referida proposição, Heath (1956), ainda sorvendo as essências da proposição 88, evidencia que "Tome dois números m, n, tal que $m + n$ não tenha, para qualquer m ou n, a razão de um quadrado para um quadrado.". A partir deste ponto, o autor toma uma certa reta racional x, e garante a seguinte proporção $\frac{m}{m+n} = \frac{k^2\rho^2}{x^2}$. De onde se obtém que o valor de x será tido por $x = k\rho\sqrt{\frac{m+n}{m}}$, ou, fazendo $\phi = \frac{n}{m}$, ter-se-á $x = k\rho\sqrt{1+\phi}$. Assim sendo, $k\rho - x$, ou $k\rho - k\rho\sqrt{1+\phi}$, é um quinto apótomo, não esquecendo que $\sqrt{x^2 - k^2\rho^2}$, ou $\sqrt{\phi}.k\rho$, é incomensurável em comprimento com $k\rho\sqrt{1+\phi}$, x. E, também, $k\rho$, mas não $k\rho\sqrt{1+\phi}$, é comensurável em comprimento com ρ. Então, tem-se a explanação em harmonia

com a quinta definição das “terceiras definições”, que explicita “E, caso a que se ajusta, quinto”.

90. Achar o sexto apótomo

CP90. Para esta proposição, no detalhamento de suas concepções[18], é necessário esclarecer que a expressão “Achar o sexto apótomo”, nas traduções de Castaños (1996) e Heath (1956), delineia-se sem nenhuma alteração. Em seus argumentos para a referida proposição, Heath (1956), interagindo com os elos da proposição 89, explicita que “Tome dois números m, n, tal que $m + n$ não tenha, para qualquer m ou n, a razão de um quadrado para um quadrado.”. Depois, fluindo em em suas percepções, “toma um terceiro número p, que não é um quadrado, e não tem para qualquer $m + n$ ou m, a razão de um quadrado para um quadrado.” A partir daqui, o autor toma uma certa reta racional x, e expõe as seguintes proporções $\frac{p}{m+n} = \frac{\rho^2}{x^2}$ e $\frac{m+n}{m} = \frac{x^2}{y^2}$.. Então, a partir de tais proporções, $x - y$ será um sexto apótomo. De fato, da primeira proporção, x é racional e incomensurável com ρ. Por outro lado, da segunda proporção, y é racional e incomensurável com x. Consequentemente, x e y são retas racionais comensuráveis somente em quadrado, de modo que $x - y$ é um apótomo. Todavia, unindo as duas primeiras proporções, pode-se obter a proporção $\frac{p}{m} = \frac{\rho^2}{y^2}$ que assegura, então, que y é incomensurável com ρ. Logo, conclui-se que x e y são retas racionais incomensuráveis com ρ. No entanto, da segunda proporção, pode-se obter que $\frac{m+n}{n} = \frac{x^2}{x^2-y^2}$, de modo que $\sqrt{x^2 - y^2}$ é incomensurável com x. Portanto,

garante-se que $x - y$ é um sexto apótomo, estando, a explanação, em sintonia com a sexta definição das “terceiras definições”, que explicita “E, caso nenhum, sexto”.

7.3 NOTAS E REFERÊNCIAS

1 – Circunstanciando o entendimento do termo “apótomo”, na obra *Euclid – The Thirteen Books of The Elements (Euclides – Os Treze Livros de Os Elementos),* Volume 3, Heath, à p. 159, pontua que “Denotaremos o ‘apótomo por *(x - y)*, que é formado pela subtração de uma certa reta menor *y* de uma [reta] *x* maior. Na [proposição] X. 79 e proposições posteriores, *y* é chamado por Euclides o anexo (ή προσαρμόζουσα), sendo a reta que, quando adicionada ao ‘apótomo’ ou outra irracional formada pela subtração, constitui a maior *x*”. Ainda fundamentando a importância do termo ‘apótomo’, o autor, ao final da referida obra, na exposição do *General Index of Greek Words and Forms (Índice Geral de Palavras e Formas Gregas),* p. 529, expõe que o vocábulo grego ‘αποτομή’ (apótomo), significa uma composição irracional, uma diferença de dois termos”.

2 – Com relação ás fundamentações de van der Waerden, sobre os diversos tipos de segmentos irracionais, em sua obra *Science Awakening (O Despertar da Ciência)*, p. 172, podem-se obter maiores informações no tocante a tal assunto, dentre as quais, para as binomiais e os apótomos, o fato de que “Segue-se um longo conjunto de proposições (X 36 – 72) concernentes às propriedades de $u + v$, e uma igualmente longa (X 73 – 110) concernentes às propriedades de $u - v$, em cada dos 6 casos.”

3 – As sutis explanações de David Fowler estão expostas em seu artigo *An Invitation to Read Book X of Euclid’s Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, no capítulo 8, denominado *Euclid’s Treatment (O Tratamento de Euclides)*, p. 259. Tal artigo faz parte da Revista *Historia Mathematica 19.*

4 – A respeito das afirmações de Benno Artmann sobre a etimologia da palavra “teorema”, as mesmas foram colhidas em sua obra *Euclid – The Creation of Mathematics (Euclides – A Criação da Matemática)*, no capítulo 20, intitulado *The Origin of Mathematics – Tools and Theorems (A Origem da Matemática – Ferramentas e Teoremas)*, p. 203. Por outro lado, Anthony Lo Bello, no seu importante *Origins of Mathematical Words – A Comprehensive Dictionary of Latin, Greek, and Arabic Roots (Origens das Palavras Matemáticas – Um*

Dicionário Compreensivo das Raízes Latinas, Gregas e Arábicas), p. 313, afirma que “O verbo grego ‘θεωρέω’ significa olhar, ver, contemplar, considerar, de onde vem o substantivo ‘θεωρημα’, uma visão, um espetáculo, uma coisa contemplada pela mente. Euclides finalizou algumas de suas proposições com as palavras, ‘o εδει δειξαι’, ‘Isto é o que era necessário provar’. Estas foram chamadas pelos comentadores de ‘teoremas’. (...) O próprio Euclides não usou a palavra ‘teorema’; suas proposições foram numeradas, porém ele não se referiu a esses números nas demonstrações. Afirmações como "Pela proposição 1 do Livro I" foram acrescentadas, posteriormente, por tradutores e comentaristas”.

5 – O artigo de Wilbur Knorr *‘Le Croix des Mathématiciens’: The Euclidean Theory of Irrational Lines (A Cruz dos Matemáticos: A Teoria Euclidiana das Linhas Irracionais)* está explicitado no *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society,* Volume 9. A exposição do texto contido neste capítulo tem evidência no item III do referido artigo, denominado *Extension of the Theory (Extensão da Teoria)*, p. 51.

6 – A bem da verdade, os comentários das proposições 61 a 65 seguem, em inúmeras situações, as concepções de Heath evidenciadas em sua obra *Euclid – The Thirteen Books of The Elements (Euclides – Os Treze Livros de Os Elementos),* Volume 3, pp. 135-145. Também, para o conjunto de tais proposições, foram importantes as percepções de Maria Luisa Puertas Castaños, apresentadas em sua tradução e notas para o Livro X de *Os Elementos* de Euclides, pp. 104-110. Ainda enfatizando os pormenores da análise do referido grupo de proposições, foram fundamentais as argumentações de David Fowler no seu trabalho *An Invitation to Read Book X of Euclid’s Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, pp. 248-249.

7 – É valioso recordar que a proposição 61 está intimamente atrelada à proposição 37 que afirma “Caso duas mediais comensuráveis somente em potência, contendo um racional, sejam compostas, a toda é irracional, e seja chamada primeira bimedial.”, como também à proposição 55 que expõe “Caso uma área seja contida por uma racional e a segunda binomial, a que serve para produzir a área é irracional, a chamada primeira bimedial.”.

8 – Para a completa percepção da proposição 62, convém notar que a mesma está ligada à proposição 38 que afirma “Caso duas mediais comensuráveis somente em potência, contendo um medial, sejam compostas, a toda é irracional, e seja chamada segunda bimedial.”, assim como à proposição 56 que enfatiza “Caso uma área seja contida por uma racional e a terceira binomial, a que serve para produzir a área é irracional, a chamada segunda bimedial.”.

9 – Enfatizando as essências da proposição 63, é importante não esquecer que a mesma tem vinculação com a proposição 39 que afirma “Caso duas retas incomensuráveis em potência, fazendo, por um lado, o composto dos quadrados sobre elas racional, e, por um lado, o por elas medial, sejam compostas, a reta toda é irracional, e seja chamada maior.”, bem como á proposição 57 que explicita “Caso uma área seja contida por uma racional e a quarta binomial, a que serve para produzir a área é irracional, a chamada maior.”.

10 – No caso específico da proposição 64, é de extrema importância salientar sua vinculação com a proposição 40 que evidencia “Caso duas retas incomensuráveis em potência, fazendo, por um lado, o composto dos quadrados sobre elas medial, e, por outro lado, o por elas racional, sejam compostas, a reta toda é irracional, e seja chamada a que serve para produzir um racional e um medial.”, como também à proposição 58 que expõe “Caso uma área seja contida por uma racional e a quinta binomial, a que serve para produzir a área é irracional, a chamada a que serve para produzir um racional e um medial.”.

11 – Para que a proposição 65 seja melhor compreendida, tem-se que é necessário notar seu enlace com a proposição 41 que explicita “Caso duas retas incomensuráveis em potência, fazendo tanto o composto dos quadrados sobre elas medial quanto o por elas medial e ainda incomensurável como composto dos quadrados sobre elas, sejam compostas, a reta toda é irracional, e seja chamada a que serve para produzir dois mediais.”, assim como com a proposição 59 que enfatiza “Caso uma área seja contida por uma racional e a sexta binomial, a que serve para produzir a área é irracional, a chamada a que serve para produzir dois mediais.”.

12 – Com relação ao grupo de proposições explicitadas de 66 a 70, onde David Fowler expõe que “É uma característica básica das linhas exprimíveis e mediais que uma linha exprimível com uma linha exprimível é também exprimível, com uma medial é também medial”, tem-se que tal afirmação está exposta em seu trabalho *An Invitation to Read Book X of Euclid’s Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, no capítulo 6, intitulado *The Classification of Book X, and Its Use in Book XIII (A Classificação do Livro X, e Seu Uso no Livro XIII)*, p. 250. O autor ainda acrescenta que “É também uma característica básica das linhas exprimíveis e mediais que as mesmas sejam obtidas pela comensurabilidade-em-quadrado, e Euclides deveria ter provado que isto se aplica para as outras linhas *alogoi* também, pois ele parece usar tal fato em XIII 18”.

13 – Mais informações a respeito das proposições 71 e 72 podem ser obtidas em David Fowler no seu artigo *An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, no capítulo 6, intitulado *The Classification of Book X, and Its Use in Book XIII (A Classificação do Livro X, e Seu Uso no Livro XIII)*, p. 251. O autor ainda enfatiza que, essencialmente, a proposição 71 contém, no início, a afirmação "O lado da soma de uma área exprimível e medial". Já a proposição 72 traz o fato de que "O lado da soma de duas áreas mediais incomensuráveis ou é o lado da soma de duas áreas mediais, ou é uma segunda bimedial".

14 – Com relação ao bloco das proposições de 73 a 78, na obra *Coloured Quadrangles – a Guide to the Tenth Book of Euclid's Elements (Quadriláteros Coloridos – Um Guia Para o Décimo Livro de Os Elementos de Euclides)*, de Chistian Taisbak, às pp. 49-54 podem ser colhidas diversas concepções sobre as referidas proposições. Foram cruciais para o delineamento dos comentários as argumentações de Maria Luisa Puertas Castaños, apresentadas em sua tradução para o Livro X de *Os Elementos* de Euclides, pp. 123-130, como também as sedimentações de Heath explicitadas em sua obra *Euclid – The Thirteen Books of The Elements (Euclides – Os Treze Livros de Os Elementos),* Volume 3, pp. 158-167.

15 – As importantes argumentações de David Fowler, que servem de alicerce para a prova das proposições evidenciadas de 79 a 84, estão contidas em seu artigo *An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, no capítulo 6, intitulado *The Classification of Book X, and Its Use in Book XIII (A Classificação do Livro X, e Seu Uso no Livro XIII)*, pp. 249-250. Deve-se observar que o autor, de início, obteve suas concepções para as binomiais, representadas, por exemplo, através de somas $x + y$, contidas nas proposições numeradas de 42 a 47. A partir daí, foram obtidas as confluências para os apótomos, através das diferenças $x - y$. Outras informações sobre tal conjunto de proposições podem ser obtidas na obra *Coloured Quadrangles – a Guide to the Tenth Book of Euclid's Elements (Quadriláteros Coloridos – Um Guia Para o Décimo Livro de Os Elementos de Euclides)*, de Chistian Taisbak, p. 56. Conforme testifica Wilbur Knorr, em seu trabalho *'Le Croix des Mathématiciens': The Euclidean Theory of Irrational Lines (A Cruz dos Matemáticos: A Teoria Euclidiana das Linhas Irracionais)*, p. 53, "No próximo conjunto de teoremas X, 42-47 Euclides estabelece a singularidade da expressão para cada classe de aditivo irracional, enquanto os análogos para os irracionais subtrativos aparecem em X 79-84."

16 – Sedimentando os elos e as nuances, observa-se que, entre as seis definições das “terceiras definições”, existe uma ligação com as seis proposições a seguir, ou seja, as proposições de 85 a 90. Para mais esclarecimentos sobre as chamadas “terceiras definições”, é interessante pesquisar na obra *Coloured Quadrangles – a Guide to the Tenth Book of Euclid’s Elements (Quadriláteros Coloridos – Um Guia Para o Décimo Livro de Os Elementos de Euclides)*, de Christian Taisbak, às pp. 44-45. Outra fonte sutil, para esclarecer os entendimentos das chamadas “terceiras definições”, é o trabalho de David Fowler, *An Invitation to Read Book X of Euclid’s Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, onde no capítulo 8, denominado *Euclid’s Treatment (O Tratamento de Euclides)*, à p. 259, pode-se constatar as concepções do autor.

17 – Na fundamentação das ênfases e aprofundamentos das proposições 85, 86, 87, 88, 89 e 90, onde se pede para encontrar do primeiro ao sexto apótomo, foram fundamentais as argumentações de Heath, evidenciadas às pp. 102-115, da sua tradução do Livro X contida no livro *The Thirteen Books of Euclid’s Elements (Os Treze Livros de Os Elementos de Euclides)*. Também foram sutis as concepções de Maria Luisa Puertas Castaños, especificadas às pp. 81-90, de seu compêndio com a tradução do Livro X de *Os Elementos* de Euclides. Ainda para maiores esclarecimentos sobre o corpo das proposições de 85 a 90, convém vasculhar o artigo *‘Le Croix des Mathématiciens’: The Euclidean Theory of Irrational Lines (A Cruz dos Matemáticos: A Teoria Euclidiana das Linhas Irracionais)*, de Wilbur Knorr, p. 55-57.

18 – Através do excelente trabalho de Wilbur Knorr, *‘Le Croix des Mathématiciens’: The Euclidean Theory of Irrational Lines (A Cruz dos Matemáticos: A Teoria Euclidiana das Linhas Irracionais)*, p. 55-57, podem-se enxergar determinadas sutilezas, em relação a cada grupo de proposições, norteando as concepções e os enlaces das mesmas, mostrando que o Livro X de *Os Elementos* de Euclides precisa ser averiguado com cautela, verdade cheia de minúcias e reverberações:

> *Adequadamente, algumas vezes é mantido que os problemas de construção que Euclides resolve em X, 27-35, 48-53 e 85-90 (por exemplo, 27: ‘para encontrar linhas mediais comensuráveis somente em quadrado que contêm uma área racional’; 48: ‘para encontrar a primeira binomial’; 85: ‘encontrar o primeiro apótomo’) são destinados como provas de existência apoiando as construções e provas das linhas irracionais aditivas e subtrativas (36-41; 73-78) e os teoremas sobre suas relações com as ordens de binomiais e apótomos (54-65, 91-102). Mas certamente essa visão é incorreta. E se Euclides queria apenas mostrar que existem linhas que satisfazem as condições especificadas, ele apenas precisou fornecer um exemplo particular da construção em questão.*

CAPÍTULO 8

LIVRO X: AS SONDAGENS PROFUNDAS

8.1 ESPAÇOS, CONSEQUÊNCIAS

Para os enfoques pertinentes a este capítulo, tem-se que o mesmo engloba os comentários referentes às proposições de 91 a 115, sendo este, então, o último bloco de teoremas a serem analisados. Importante, também, é realçar que neste conjunto de proposições não aparecem definições nem lemas, apenas dois corolários que melhor esclarecem as evidências das proposições 112 e 114. Assim sendo, após as análises do capítulo 1, englobando as proposições de 1 a 30; do capítulo 2, circunstanciado nas proposições de 31 a 60; do capítulo 3, vinculado às proposições de 61 a 90, chega-se à análise completa das proposições que constituem o Livro X de *Os Elementos* de Euclides. De fato, nos comentários atrelados a cada proposição, buscou-se ampliar ainda mais o leque de enfoques e essências que o texto euclidiano transpira, sedimentou-se o pensamento de que é necessário sempre uma atenção especial no que se refere à matemática grega, vivenciou-se inúmeras situações onde se perpetuou a delicadeza de um texto ímpar, decodificador de argumentações densas, transformadoras[1]. A partir das influentes percepções de van der Waerden (1954), verifica-se que o Livro X não é de fácil leitura[2]. Desta forma, o autor, trazendo a opinião de Simon Stevin com respeito ao livro temido, expõe que ele escreveu *"La dificulte du dixième livre... est à plusiers devenue en horreur, voir jusqu'à l'appeler 'le croix des mathématiciens', matière trop dure à digérer et en laquelle n'aperçoivent aucune utilité*", ou seja, "A dificuldade do décimo livro... é para vários [matemáticos] tornar-se um horror, enxergar até que é chamado 'a cruz dos matemáticos', material demasiado difícil de digerir e em que não se encontra qualquer utilidade"[3]. Indo mais além, pontua que "Até [a proposição]

X 28 vai razoavelmente bem, mas quando a existência das provas inicia-se com [a proposição] X 29 (Para encontrar duas potencialmente retas exprimíveis comensuráveis, tal que a diferença dos quadrados descritos nelas é igual ao quadrado sobre uma reta comensurável com a primeira, etc.) um não enxergar muito bem o propósito de tudo isso é para servir. O autor conseguiu, admiravelmente, esconder sua linha de pensamento começando com suas construções, mesmo antes de Introduzir o conceito de binomial, que lança alguma luz sobre a finalidade dessas construções, e colocando em um ponto ainda mais distante a divisão em seis tipos de binomiais."[4].

Em constatações sempre consistentes, delineadas por um senso crítico que o torna extremamente atualizado com os enfoques da incomensurabilidade exposta no Livro X, Wlbur Knorr, no seu *artigo 'La Croix des Mathématiciens': The Euclidean Theory of Irrational Lines (A Cruz dos Matemáticos: A Teoria Euclidiana das Linhas Irracionais)*, evidencia as sutilezas e os pormenores do último bloco de proposições do Livro X. Partindo, então, do confronto entre os teoremas expostos em X, 54-59, mostra suas relações com o conjunto de teoremas explicitados em X, 91-96. Desta forma, flui até a proposição 115 construindo suas concepções e delineamentos, demonstrando um entendimento abalizado, das proposições evidenciadas de 91 a 115, que muito contribuem para uma melhor percepção dos textos e conteúdos do livro fascinante, elo propagando no tempo a incrível mobilidade da força da sabedoria, naquelas almas dispostas a encararem o conhecimento com profundidade, responsabilidade, sondagens fascinantes. Assim sendo, argumenta de forma convincente[5]:

> *No próximo conjunto de teoremas X, 54-59 ele [Euclides] mostra que as linhas formam como que o 'lado' de uma área gerada por um racional e cada uma das binomiais retornam para ser uma das irracionais aditivas sempre especificadas; isto é, o 'lado' associado com a 'primeira' binomial é a própria binomial {proposição 54], aquela associada com a 'segunda' binomial é uma primeira bimedial [proposição 55], e assim por diante. Os análogos para os apótomos e irracionais subtrativas aparecem [nas proposições] X, 91-96. Os teoremas conversos aparecem [nas proposições] X, 60-65 e X, 97-102; isto é, que o quadrado da irracional 'maior', quando aplicado a uma linha racional, produz como largura uma 'quarta' linha binomial. Embora esses teoremas, sobre as ordens das binomiais e apótomos em relação às irracionais aditivas e subtrativas, cubram quase um terço do Livro X, Euclides claramente trata essas relações como 'propriedades' dos irracionais, mais do que como elementos principais em sua definição e construção. É a este respeito que sua ordem de apresentação difere mais notavelmente daquela que*

> *elaboramos anteriormente. Euclides, a seguir, mostra que uma linha comensurável, com uma das irracionais aditivas ou subtrativas, é ela própria do mesmo tipo, tendo cada um de seus termos comensurável com os termos correspondentes daquela irracional ([proposições] X, 66-69, 103-107). Aqui novamente o tratamento é particular. Para ter certeza, as duas bimediais são apresentadas juntas [proposição 67], como são as duas bimediais das diferenças [proposição 104]; mas eles são, de fato, casos separados da construção que começa da mesma maneira, a tomada de duas linhas mediais. (...) Em todos estes casos a propriedade é evidente das representações dos irracionais como 'lados' associados com as várias binomiais, e Euclides, de fato, aqui enquadra as provas em torno daquelas representações. As relações análogas para as diferenças entre áreas racionais e mediais são dadas [nas proposições] X, 108-110; (...) A seção sobre as irracionais aditivas finaliza em um escólio após {a proposição] X, 72, para o caso que cada tipo de irracional é diferente dos outros; (...) A observação paralela é feita para as irracionais subtrativas em um escólio após [a proposição] X, 111. (...) Isto é claramente um bom lugar para acabar com a teoria. Mas Euclides acrescenta mais quatro teoremas. Três destes ([proposições] X, 112-114) lidam com os produtos de linhas binomiais e apótomos. (...) No último teorema ([proposição] X, 115) Euclides mostra que o procedimento de formação de linhas mediais, e mediais de mediais, e assim por diante, dá origem a uma sequência interminável de novas classes de irracionais.* (pp. 54-56)

8.2 PROPOSIÇÕES 91 A 115

PROPOSIÇÕES

91. Caso uma área seja contida por uma racional e um primeiro apótomo, a que serve para produzir a área é um apótomo.

CP91. Analisando o conteúdo desta proposição[6], convém salientar que onde se lê "uma racional" pode-se ler "uma reta racional" ou "uma reta exprimível". É importante mencionar que tal proposição, enfatizando a área contida por uma racional e um primeiro apótomo, tem vinculação com a proposição 54, que prioriza a área contida por uma racional e a primeira binomial, ou seja, "Caso uma área seja contida por uma racional e a primeira binomial, a que serve para produzir a área é irracional, a chamada binomial." Também é sutil esclarecer que o termo "é irracional" não aparece após o "a que serve para produzir a área", como acontece na proposição 54, levando a crer que Euclides supõe que o leitor tem consciência do fato de que o "apótomo" é irracional. No texto da tradução de Castaños (1996), assim como na

tradução de Heath (1956), são acentuados estes delineamentos. Por outro lado, no trabalho de Fowler (1992), existe uma tabela onde o autor explicita, através de vários exemplos, as seis linhas subtrativas, passando pelo apótomo, primeiro apótomo de uma medial, segundo apótomo de uma medial, menor, aquele que produz com uma área exprimível uma área medial, aquele que produz com uma área medial uma medial completa[7]. No caso específico da proposição 91, que trata do apótomo, tem-se o exemplo[8] de um retângulo contido por $(3a-\sqrt{5}a)$ e a, gerando um quadrado equivalente de valor $(\sqrt{\frac{5}{2}}a-\sqrt{\frac{1}{2}}a)^2$. Contudo, em Heath (1956), as essências são exploradas e pode-se compreender o enunciado da proposição em apreço, com o autor mostrando, através da proposição 85, que a reta primeiro apótomo pode ser expressa como $k\rho-k\rho\,\frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m}$, ou, fazendo $\phi=\frac{n}{m}$, vem que teremos a mesma exposta por $k\rho-k\rho\sqrt{1-\phi^2}$. Então, como o enunciado da proposição 91 garante a multiplicação de uma reta racional por um primeiro apótomo, vem que considerando ρ a dita reta racional, a expressão representada pela raiz quadrada do produto $\rho(k\rho-k\rho\sqrt{1-\phi^2})$, ou seja, $x-y=\sqrt{\rho(k\rho-k\rho\sqrt{1-\phi^2})}$ evidencia um apótomo tal qual explicita a proposição 73 do Livro X que expõe “Caso de uma racional seja subtraída uma racional, sendo comensurável somente em potência com a toda, a restante é irracional; e seja chamado apótomo.”. Fluindo adiante, tem-se que podemos, algebricamente, buscar a resolução das equações $u+v=k\rho$ e $u.v=\frac{k^2\rho^2(1-\phi^2)}{4}$. Logo, teremos o seguinte sistema:

$$u+v=k\rho$$

$$u.v=\frac{k^2\rho^2(1-\phi^2)}{4}$$

Efetuando, neste instante, a resolução aritmética de tal sistema, temos que:

$$u.(k\rho - u) = \frac{k^2\rho^2(1-\phi^2)}{4}$$

$$u^2 - k\rho u + \frac{k^2\rho^2(1-\phi^2)}{4} = 0$$

$$u = \frac{k\rho \pm \sqrt{k^2\rho^2 - k^2\rho^2(1-\phi^2)}}{2}$$

$$u = \frac{k\rho \pm \sqrt{k^2\rho^2 - k^2\rho^2 + k^2\rho^2\phi^2}}{2}$$

$$u = \frac{k\rho \pm \sqrt{k^2\rho^2\phi^2}}{2}$$

$$u = \frac{k\rho \pm k\rho\phi}{2}$$

$$u = \frac{k\rho}{2}(1 \pm \phi)$$

Considerando, então, u maior que v, vem que obteremos as seguintes soluções:

$$u = \frac{k\rho}{2}(1 + \phi)$$

$$v = \frac{k\rho}{2}(1 - \phi)$$

No entanto, encontrando os valores de u e v, podemos concluir que as retas incomensuráveis x e y, terão a forma de $x^2 = \rho u$ e $y^2 = \rho v$. Logo x e y serão expressos por:

$$x^2 = \rho\frac{k\rho}{2}(1 + \phi)$$

$$x^2 = \frac{k\rho^3}{2}(1 + \phi)$$

$$x = \rho\sqrt{\frac{k}{2}(1 + \phi)}$$

E encontrando y, vem que:

$$y^2 = \rho\frac{k\rho}{2}(1 - \phi)$$

$$y^2 = \frac{k\rho^3}{2}(1 - \phi)$$

$$y = \rho\sqrt{\frac{k}{2}(1 - \phi)}$$

Então, o valor de $x - y$ representa, exatamente, um apótomo tal qual definido pela proposição 73 do Livro X. Desta forma, tem-se que:

$$x - y = \rho \sqrt{\frac{k}{2}(1 + \phi)} - \rho \sqrt{\frac{k}{2}(1 - \phi)}$$

$$xy = \frac{k\rho^2}{2} \sqrt{1 - \phi^2}$$

Portanto, como já sabemos que $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$, ter-se-á:

$$(x - y)^2 = \rho(u + v) - 2xy$$

$$(x - y)^2 = \rho k \rho - 2\frac{k\rho^2}{2} \sqrt{1 - \phi^2}$$

$$(x - y)^2 = k\rho^2 - k\rho^2 \sqrt{1 - \phi^2}$$

$$x - y = \sqrt{k\rho^2 - k\rho^2 \sqrt{1 - \phi^2}}$$

$$x - y = \sqrt{\rho(k\rho - k\rho \sqrt{1 - \phi^2})}$$

92. Caso uma área seja contida por uma racional e um segundo apótomo, a que serve para produzir a área é um primeiro apótomo de uma medial.

CP92. Aprofundando os enlaces da proposição em questão, verifica-se, para melhor entender a mesma, que onde se lê “uma racional” pode-se ler “uma reta racional” ou “uma reta exprimível Convém mencionar que tal proposição, enfatizando a área contida por uma racional e um segundo apótomo, tem vinculação com a proposição 55, que prioriza a área contida por uma racional e a segunda binomial, ou seja, “Caso uma área seja contida por uma racional e a segunda binomial, a que serve para produzir a área é irracional, a chamada primeira bimedial.” Também é necessário esclarecer que o termo “é irracional” não aparece após o “a que serve para produzir a área”, como acontece na proposição 55, levando a supor que Euclides compreende que o leitor já sabe que o “apótomo” é irracional. Em relação às traduções de Castaños (1996) e de Heath (1956), verificam-se tais observações. Fundamentando os elos, no artigo de Fowler (1992), há uma tabela onde o autor mostra, com inúmeros exemplos, as seis linhas subtrativas, passando pelo apótomo, primeiro apótomo de uma medial, segundo apótomo de uma medial, menor, aquele que produz com uma área exprimível uma área medial, aquele que produz com uma área medial uma medial completa. No caso da proposição 92, que trata do primeiro apótomo de um medial, tem-se o exemplo de um retângulo contido por $(\sqrt{12}a - 3a)$ e a, gerando um quadrado equivalente de valor $(\sqrt{\sqrt{27}}a - \sqrt{\sqrt{3}}a)^2$. Nas sutis argumentações de Heath (1956), pois o autor evidencia que, através da proposição 86, verifica-se que a reta segundo apótomo pode ser expressa como $\frac{k\rho}{\sqrt{1-\phi^2}} - k\rho.$

Logo, conforme garante o enunciado da proposição 92, a multiplicação de uma reta racional por um segundo apótomo e considerando ρ a dita reta racional, a expressão representada pela raiz quadrada do produto $\rho(\frac{k\rho}{\sqrt{1-\phi^2}} - k\rho)$, ou seja, $x - y = \sqrt{\rho(\frac{k\rho}{\sqrt{1-\phi^2}} - k\rho)}$ explicita uma reta primeiro apótomo de uma medial tal qual testemunha a proposição 74 do Livro X que afirma “Caso de uma medial seja subtraída uma medial, sendo comensurável somente em potência com a toda, e

contendo com a toda um racional, a restante é irracional, e seja chamada primeiro apótomo de uma medial". Indo além na análise, tem-se que podemos, algebricamente, buscar a resolução das equações $u+v=\frac{k\rho}{\sqrt{1-\phi^2}}$ e $u.v=\frac{k^2\rho^2}{4}$.

Logo, teremos o seguinte sistema:

$$u+v=\frac{k\rho}{\sqrt{1-\phi^2}}$$

$$u.v=\frac{k^2\rho^2}{4}$$

Efetuando, neste instante, a resolução aritmética de tal sistema, temos que:

$$u.\left(\frac{k\rho}{\sqrt{1-\phi^2}}-u\right)=\frac{k^2\rho^2}{4}$$

$$u^2-\frac{k\rho}{\sqrt{1-\phi^2}}+\frac{k^2\rho^2}{4}=0$$

$$u=\frac{\frac{k\rho}{\sqrt{1-\phi^2}}\pm\sqrt{\frac{k^2\rho^2}{1-\phi^2}-k^2\rho^2}}{2}$$

$$u=\frac{\frac{k\rho}{\sqrt{1-\phi^2}}\pm\sqrt{\frac{k^2\rho^2-k^2\rho^2+k^2\rho^2\phi^2}{1-\phi^2}}}{2}$$

$$u = \frac{\frac{k\rho}{\sqrt{1-\phi^2}} \pm \sqrt{\frac{k^2\rho^2\phi^2}{1-\phi^2}}}{2}$$

$$u = \frac{k\rho \ \pm \ k\rho\phi}{2\sqrt{1-\phi^2}}$$

$$u = \frac{k\rho}{2\sqrt{1-\phi^2}} (1 \pm \phi)$$

Considerando, então, u maior que v, vem que obteremos as seguintes soluções:

$$u = \frac{k\rho}{2\sqrt{1-\phi^2}} (1 + \phi)$$

$$v = \frac{k\rho}{2\sqrt{1-\phi^2}} (1 - \phi)$$

Entretanto, encontrando os valores de u e v, chegamos a conclusão de que as retas incomensuráveis x e y, terão a forma de $x^2 = \rho u$ e $y^2 = \rho v$. Logo x e y serão expressos por:

$$x^2 = \ \rho \frac{k\rho}{2\sqrt{1-\phi^2}} (1 + \phi)$$

$$x^2 = \frac{k\rho^2}{2\sqrt{1-\phi^2}}(1+\phi)$$

$$x = \frac{\rho}{\sqrt[4]{1-\phi^2}}\sqrt{\frac{k}{2}(1+\phi)}$$

E encontrando y, vem que:

$$y^2 = \rho\frac{k\rho}{2\sqrt{1-\phi^2}}(1-\phi)$$

$$y^2 = \frac{k\rho^2}{2\sqrt{1-\phi^2}}(1-\phi)$$

$$y = \frac{\rho}{\sqrt[4]{1-\phi^2}}\sqrt{\frac{k}{2}(1-\phi)}$$

Então, o valor de $x-y$ representa, sucintamente, um primeiro apótomo de uma medial tal qual definido pela proposição 74 do Livro X. Logo, tem-se que:

$$x-y = \frac{\rho}{\sqrt[4]{1-\phi^2}}\sqrt{\frac{k}{2}(1+\phi)} - \frac{\rho}{\sqrt[4]{1-\phi^2}}\sqrt{\frac{k}{2}(1-\phi)}$$

$$xy = \frac{k\rho^2}{2\sqrt{1-\phi^2}}\sqrt{1-\phi^2} = \frac{k\rho^2}{2}$$

Portanto, sabendo-se que $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$, vem que:

$$(x-y)^2 = \rho(u+v) - 2xy$$

$$(x-y)^2 = \rho\frac{k\rho}{\sqrt{1-\phi^2}} - 2\frac{k\rho^2}{2}$$

$$(x-y)^2 = \frac{k\rho^2}{\sqrt{1-\phi^2}} - k\rho^2$$

$$x-y = \sqrt{\frac{k\rho^2}{\sqrt{1-\phi^2}} - k\rho^2}$$

$$x-y = \sqrt{\rho(\frac{k\rho}{\sqrt{1-\phi^2}} - k\rho)}$$

93. Caso uma área seja contida por uma racional e um terceiro apótomo, a que serve para produzir a área é um segundo apótomo de uma medial.

CP93. Para a proposição em questão, investigando seus enlaces e confluências, sedimenta-se que onde se lê “uma racional” pode-se ler “uma reta racional” ou “uma reta exprimível”. É interessante notar que tal proposição, priorizando a área contida por uma racional e um terceiro apótomo, tem vinculação com a proposição 56, que explicita a área contida por uma racional e a terceira binomial, ou seja, “Caso uma área seja contida por uma racional e a terceira binomial, a que serve para produzir a área é irracional, a chamada segunda bimedial.”. Também merece esclarecimento o fato do termo “é irracional” não aparecer após o “a que serve para produzir a área”, como acontece na proposição 56, visto que Euclides, ao que parece, entende que o leitor já sabe que o “apótomo” é irracional. Com respeito às traduções de Castaños (1996) e de Heath (1956), pontuam-se estes enfoques. No interessante artigo de

Fowler (1992), em uma tabela, o autor evidencia, através de exemplos, as seis linhas subtrativas, passando pelo apótomo, primeiro apótomo de uma medial, segundo apótomo de uma medial, menor, aquele que produz com uma área exprimível uma área medial, aquele que produz com uma área medial uma medial completa. No caso da proposição 93, que trata do segundo apótomo de um medial, tem-se o exemplo de um retângulo contido por $(\sqrt{8}a - \sqrt{6}a)$ e a, gerando um quadrado equivalente de valor $(\sqrt{\sqrt{\frac{9}{2}}a - \sqrt{\sqrt{\frac{1}{2}}a})^2$. Nas sempre esclarecedoras argumentações de Heath (1956), verificam-se as pluralidades da referida proposição, visto que é evidenciado, através da proposição 87, que o terceiro apótomo pode ser expresso como $\sqrt{k\rho} - \sqrt{k\rho}\sqrt{1 - \phi^2}$. Desta forma, conforme garante o enunciado da proposição 93, a multiplicação de uma reta racional por um terceiro apótomo e considerando ρ a dita reta racional, a expressão representada pela raiz quadrada do produto $\rho(\sqrt{k\rho} - \sqrt{k\rho}\sqrt{1 - \phi^2})$, ou seja, $x - y = \sqrt{\rho(\sqrt{k\rho} - \sqrt{k\rho}\sqrt{1 - \phi^2})}$ mostra uma reta segundo apótomo de uma medial como testifica a proposição 75 do Livro X que afirma “Caso de uma medial seja subtraída uma medial, sendo comensurável somente em potência com a toda, e contendo com a toda um medial, a restante é irracional; e seja chamada segundo apótomo de uma medial.”. Analisando os contextos, vem que podemos, algebricamente, buscar a resolução das equações $u + v = \sqrt{k\rho}$ e $u.v = \frac{k\rho^2(1-\phi^2)}{4}$. Logo, teremos o seguinte sistema:

$$u + v = \sqrt{k\rho}$$

$$u.v = \frac{k\rho^2(1-\phi^2)}{4}$$

Efetuando, neste instante, a resolução aritmética de tal sistema, temos que:

$$u.\left(\sqrt{k}\rho - u\right) = \frac{k\rho^2(1-\phi^2)}{4}$$

$$u^2 - \sqrt{k}\rho + \frac{k\rho^2(1-\phi^2)}{4} = 0$$

$$u = \frac{\sqrt{k}\rho \pm \sqrt{k\rho^2 - k\rho^2(1-\phi^2)}}{2}$$

$$u = \frac{\sqrt{k}\rho \pm \sqrt{k\rho^2 - k\rho^2 + k\rho^2\phi^2}}{2}$$

$$u = \frac{\sqrt{k}\rho \pm \sqrt{k\rho^2\phi^2}}{2}$$

$$u = \frac{\sqrt{k}\rho \pm \sqrt{k}\rho\phi}{2}$$

$$u = \frac{\sqrt{k}\rho}{2}(1 \pm \phi)$$

Considerando, então, u maior que v, vem que obteremos as seguintes soluções:

$$u = \frac{\sqrt{k}\rho}{2}\ (1 + \phi)$$

$$v = \frac{\sqrt{k}\rho}{2}\ (1 - \phi)$$

No entanto, encontrando os valores de u e v, chegamos a conclusão de que as retas incomensuráveis x e y, terão a forma de $x^2 = \rho u$ e $y^2 = \rho v$. Logo x e y serão expressos por:

$$x^2 = \ \rho\frac{\sqrt{k}\rho}{2}\ (1 + \phi)$$

$$x^2 = \ \frac{\sqrt{k}\rho^2}{2}\ (1 + \phi)$$

$$x = \sqrt[4]{k}\rho\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \phi)}$$

E encontrando y, vem que:

$$y^2 = \rho\frac{\sqrt{k}\rho}{2}\ (1 - \phi)$$

$$y^2 = \ \frac{\sqrt{k}\rho^2}{2}\ (1 - \phi)$$

$$y = \sqrt[4]{k}\rho\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \phi)}$$

Então, o valor de $x - y$ representa, evidentemente, uma reta segundo apótomo de um medial tal qual definida pela proposição 75 do Livro X. Assim sendo, tem-se que:

$$x - y = \sqrt[4]{k}\rho\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \phi)} - \sqrt[4]{k}\rho\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \phi)}$$

$$xy = \frac{\sqrt{k}\rho^2}{2}\sqrt{1 - \phi^2}$$

Portanto, conhecendo-se que $(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$, tem-se que:

$$(x - y)^2 = \rho(u + v) - 2xy$$

$$(x - y)^2 = \rho\sqrt{k}\rho - 2\frac{\sqrt{k}\rho^2}{2}\sqrt{1 - \phi^2}$$

$$(x - y)^2 = \sqrt{k}\rho^2 - \sqrt{k}\rho^2\sqrt{1 - \phi^2}$$

$$x - y = \sqrt{\sqrt{k}\rho^2 - \sqrt{k}\rho^2\sqrt{1 - \phi^2}}$$

$$x - y = \sqrt{\rho(\sqrt{k}\rho - \sqrt{k}\rho\sqrt{1 - \phi^2})}$$

94. Caso uma área seja contida por uma racional e um quarto apótomo, a que serve para produzir a área é uma menor.

CP94. Analisando os elos desta proposição, mergulhando em suas repercussões e sondagens, observa-se que onde se lê “uma racional” pode-se ler “uma reta racional” ou “uma reta exprimível”. É importante frisar que tal proposição, explicitando a área contida por uma racional e um quarto apótomo, tem vinculação com a proposição 57, que evidencia a área contida por uma racional e a quarta binomial, ou seja, “Caso uma área seja contida por uma racional e a quarta binomial, a que serve para produzir a área é irracional, a chamada maior.”. Também é sutil informar que o termo “é irracional” não aparece após o “a que serve para produzir a área”, como acontece na proposição 57, visto que Euclides, ao que tudo indica, põe no leitor a condição do mesmo já compreender que o “apótomo” é irracional. Sobre as traduções de Castaños (1996) e de Heath (1956), tem-se que trazem todos estes esclarecimentos. Consolidando os enfoques da referida proposição, o trabalho de Fowler (1992) traz uma tabela, onde citam-se exemplos das seis linhas subtrativas, passando pelo apótomo, primeiro apótomo de uma medial, segundo apótomo de uma medial, menor, aquele que produz com uma área exprimível uma área medial, aquele que produz com uma área medial uma medial completa. No caso específico da proposição 94, que trata da menor, tem-se o exemplo de um retângulo contido por $(10a - \sqrt{20}a)$ e a, gerando um quadrado equivalente de valor $(\sqrt{(5+\sqrt{20})}a - \sqrt{(5-\sqrt{20})}a)^2$. Nas valiosas afirmações de Heath (1956), consolidam-se as essências da referida proposição, visto que se evidencia, através da proposição 88, que o quarto apótomo pode ser expresso como $k\rho - \frac{k\rho}{1+\phi}$. Desta forma, conforme garante o enunciado explicitado na proposição 94, a multiplicação de uma reta racional por um quarto apótomo e considerando ρ a dita reta racional, a expressão representada pela raiz quadrada do produto $\rho(k\rho - \frac{k\rho}{1+\phi})$, ou seja, $x - y = \sqrt{\rho(k\rho - \frac{k\rho}{1+\phi})}$ evidencia uma reta menor como confirma a proposição

76 do Livro X que afirma “Caso de uma reta seja subtraída uma reta, sendo incomensurável em potência com a toda, fazendo com a toda, por um lado, os sobre elas juntos racional, e, por outro lado, o por elas medial, a restante é irracional; e seja chamada menor.”. Pontuando melhor tais concepções, vem que podemos, algebricamente, buscar a resolução das equações $u + v = k\rho$ e $u.v = \frac{k^2\rho^2}{4(1+\phi)}$.

Logo, teremos o seguinte sistema:

$$u + v = k\rho$$

$$u.v = \frac{k^2\rho^2}{4(1+\phi)}$$

Efetuando, neste instante, a resolução aritmética de tal sistema, temos que:

$$u.(k\rho - u) = \frac{k^2\rho^2}{4(1+\phi)}$$

$$u^2 - k\rho u + \frac{k^2\rho^2}{4(1+\phi)} = 0$$

$$u = \frac{k\rho \pm \sqrt{k^2\rho^2 - \frac{k^2\rho^2}{1+\phi}}}{2}$$

$$u = \frac{k\rho \pm \sqrt{\frac{k^2\rho^2 + k^2\rho^2\phi - k^2\rho^2}{1+\phi}}}{2}$$

$$u = \frac{k\rho \pm \sqrt{\frac{k^2\rho^2\phi}{1+\phi}}}{2}$$

$$u = \frac{k\rho \pm k\rho\sqrt{\frac{\phi}{1+\phi}}}{2}$$

$$u = \frac{k\rho}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{\phi}{1+\phi}}\right)$$

Considerando, então, u maior que v, vem que obteremos as seguintes soluções:

$$u = \frac{k\rho}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{\phi}{1+\phi}}\right)$$

$$v = \frac{k\rho}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\phi}{1+\phi}}\right)$$

Contudo, encontrando os valores de u e v, chegamos à conclusão de que as retas incomensuráveis x e y, terão a forma de $x^2 = \rho u$ e $y^2 = \rho v$. Logo x e y serão expressos por:

$$x^2 = \rho\frac{k\rho}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{\phi}{1+\phi}}\right)$$

$$x^2 = \frac{k\rho^2}{2}\left(1+\sqrt{\frac{\phi}{1+\phi}}\right)$$

$$x = \rho\sqrt{\frac{k}{2}\left(1+\sqrt{\frac{\phi}{1+\phi}}\right)}$$

E encontrando y, vem que:

$$y^2 = \rho\frac{k\rho}{2}\left(1-\sqrt{\frac{\phi}{1+\phi}}\right)$$

$$y^2 = \frac{k\rho^2}{2}\left(1-\sqrt{\frac{\phi}{1+\phi}}\right)$$

$$y = \rho\sqrt{\frac{k}{2}\left(1-\sqrt{\frac{\phi}{1+\phi}}\right)}$$

Então, o valor de $x-y$ representa, evidentemente, uma reta menor tal qual definida pela proposição 76 do Livro X. Logo, tem-se que:

$$x-y = \rho\sqrt{\frac{k}{2}\left(1+\sqrt{\frac{\phi}{1+\phi}}\right)} - \rho\sqrt{\frac{k}{2}\left(1-\sqrt{\frac{\phi}{1+\phi}}\right)}$$

$$xy = \frac{k\rho^2}{2}\sqrt{1-\frac{\phi}{1+\phi}} = \frac{k\rho^2}{2}\sqrt{\frac{1}{1+\phi}} = \frac{k\rho^2}{2\sqrt{1+\phi}}$$

Portanto, conhecendo-se que $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$, tem-se que:

$$(x-y)^2 = \rho(u+v) - 2xy$$

$$(x-y)^2 = \rho k\rho \ - 2\,\frac{k\rho^2}{2\sqrt{1+\phi}}$$

$$(x-y)^2 = k\rho^2 - \frac{k\rho^2}{\sqrt{1+\phi}}$$

$$x-y = \sqrt{k\rho^2 - \frac{k\rho^2}{\sqrt{1+\phi}}}$$

$$x-y = \sqrt{\rho(k\rho - \frac{k\rho}{\sqrt{1+\phi}})}$$

95. caso uma área seja contida por uma racional e um quinto apótomo, a que serve para produzir a área é a que faz, com um racional, o todo medial.

CP95. Consumando os comentários para esta proposição, pontuando seus contextos e abrangências, verifica-se que onde se lê “uma racional” pode-se ler “uma reta racional” ou “uma reta exprimível”. É digno de informação que tal proposição, explicitando a área contida por uma racional e um quinto apótomo, tem vinculação com a proposição 58, que evidencia a área contida por uma racional e a quinta binomial, ou seja, “Caso uma área seja contida por uma racional e a quinta binomial, a que serve para produzir a área é irracional, a chamada a que serve para produzir um racional e um medial.”. Também salienta-se que o termo “é irracional” não aparece após o “a que serve para produzir a área”, como acontece na proposição 58, pois Euclides, como tudo leva a crer, já supõe que o leitor conheça o

fato de que o “apótomo” é irracional. A respeito das traduções de Castaños (1996) e de Heath (1956), tem-se que revelam todas estas considerações. Consolidando um entendimento mais claro da referida proposição, o artigo de Fowler (1992) expõe uma tabela, onde evidenciam-se exemplos das seis linhas subtrativas, passando pelo apótomo, primeiro apótomo de uma medial, segundo apótomo de uma medial, menor, aquele que produz com uma área exprimível uma área medial, aquele que produz com uma área medial uma medial completa. No caso específico da proposição 95, que trata daquele que produz com uma área exprimível uma área medial, mostra-se o excelente exemplo de um retângulo contido por $(\sqrt{5}a - 1a)$ e a, gerando um quadrado equivalente de valor $(\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{4}}+1\right)}a - \sqrt{(\sqrt{\frac{5}{4}}-1)a})^2$. Nos enfoques de Heath (1956), sempre importantes, consolidam-se as sutilezas da proposição em questão, visto que, através da proposição 89, tem-se o fato de que o quinto apótomo pode ser expresso como $k\rho\sqrt{1+\phi} - k\rho$. Então, conforme garante o enunciado explicitado na proposição 95, a multiplicação de uma reta racional por um quinto apótomo e considerando ρ a dita reta racional, a expressão representada pela raiz quadrada do produto $\rho(k\rho\sqrt{1+\phi} - k\rho)$, ou seja, $x - y = \sqrt{\rho(k\rho\sqrt{1+\phi} - k\rho)}$ contextualiza uma reta “aquele que produz com uma área exprimível uma área medial”, como traduz a proposição 77 do Livro X que testemunha “Caso de uma reta seja subtraída uma reta, sendo incomensurável em potência com a toda, e fazendo com a toda, por um lado, o composto dos quadrados sobre elas medial, e, por outro lado, duas vezes o por elas racional, a restante é irracional; e seja chamada a que faz com um racional o todo medial.”. Desenvolvendo melhor tais confluências, vem que podemos, algebricamente, buscar a resolução das equações $u + v = k\rho\sqrt{1+\phi}$ e $u.v = \frac{k^2\rho^2}{4}$. Logo, teremos o seguinte sistema:

$$u + v = k\rho\sqrt{1+\phi}$$

$$u.v = \frac{k^2\rho^2}{4}$$

Efetuando, neste instante, a resolução aritmética de tal sistema, temos que:

$$u.\left(k\rho\sqrt{1+\phi} - u\right) = \frac{k^2\rho^2}{4}$$

$$u^2 - k\rho\sqrt{1+\phi}\,u + \frac{k^2\rho^2}{4} = 0$$

$$u = \frac{k\rho\sqrt{1+\phi} \pm \sqrt{k^2\rho^2(1+\phi) - k^2\rho^2}}{2}$$

$$u = \frac{k\rho\sqrt{1+\phi} \pm \sqrt{k^2\rho^2 + k^2\rho^2\phi - k^2\rho^2}}{2}$$

$$u = \frac{k\rho\sqrt{1+\phi} \pm \sqrt{k^2\rho^2\phi}}{2}$$

$$u = \frac{k\rho\sqrt{1+\phi} \pm k\rho\sqrt{\phi}}{2}$$

$$u = \frac{k\rho}{2}\left(\sqrt{1+\phi} \pm \sqrt{\phi}\right)$$

Considerando, então, u maior que v, vem que se obtém as seguintes soluções:

$$u = \frac{k\rho}{2}\left(\sqrt{1+\phi} + \sqrt{\phi}\right)$$

$$v = \frac{k\rho}{2}\left(\sqrt{1+\phi} - \sqrt{\phi}\right)$$

Todavia, encontrando os valores de u e v, chegamos à conclusão de que as retas incomensuráveis x e y, terão a forma de $x^2 = \rho u$ e $y^2 = \rho v$. Logo x e y serão expressos por:

$$x^2 = \rho\frac{k\rho}{2}\left(\sqrt{1+\phi} + \sqrt{\phi}\right)$$

$$x^2 = \frac{k\rho^2}{2}\left(\sqrt{1+\phi} + \sqrt{\phi}\right)$$

$$x = \rho\sqrt{\frac{k}{2}\left(\sqrt{1+\phi} + \sqrt{\phi}\right)}$$

E encontrando y, vem que:

$$y^2 = \rho\frac{k\rho}{2}\left(\sqrt{1+\phi} - \sqrt{\phi}\right)$$

$$y^2 = \frac{k\rho^2}{2}\left(\sqrt{1+\phi} - \sqrt{\phi}\right)$$

$$y = \rho \sqrt{\frac{k}{2}(\sqrt{1+\phi} - \sqrt{\phi})}$$

Então, o valor de $x - y$ representa, convenientemente, uma reta “aquele que produz com uma área exprimível uma área medial” já definida pela proposição 77 do Livro X. Logo, tem-se que:

$$x - y = \rho \sqrt{\frac{k}{2}\left(\sqrt{1+\phi} + \sqrt{\phi}\right)} - \rho \sqrt{\frac{k}{2}(\sqrt{1+\phi} - \sqrt{\phi})}$$

$$xy = \frac{k\rho^2}{2}\sqrt{1+\phi-\phi} = \frac{k\rho^2}{2}$$

Portanto, recordando que $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$, vem que:

$$(x-y)^2 = \rho(u+v) - 2xy$$

$$(x-y)^2 = \rho k \rho \sqrt{1+\phi} - 2\frac{k\rho^2}{2}$$

$$(x-y)^2 = k\rho^2\sqrt{1+\phi} - k\rho^2$$

$$x - y = \sqrt{k\rho^2\sqrt{1+\phi} - k\rho^2}$$

$$x - y = \sqrt{\rho(k\rho\sqrt{1+\phi} - k\rho)}$$

96. Caso uma área seja contida por uma racional e um sexto apótomo, a que serve para produzir a área é que faz, com um medial, o todo medial.

CP96. Nos desmembramentos desta proposição, expandindo seus enfoques e averiguações, expõe-se que onde se lê “uma racional” pode-se ler “uma reta racional” ou “uma reta exprimível”. É proveitoso sedimentar que tal proposição, explicitando a área contida por uma racional e um sextto apótomo, tem vinculação com a proposição 59, que evidencia a área contida por uma racional e a sexta binomial, ou seja, “Caso uma área seja contida por uma racional e a sexta binomial, a que serve para produzir a área é irracional, a chamada a que serve para produzir dois mediais.”. Também enfatiza-se que o termo “é irracional” não aparece após o “a que serve para produzir a área”, como acontece na proposição 59, pois Euclides, como tudo leva a supor, já espera que o leitor compreenda o fato de que o “apótomo” é irracional. A respeito das traduções de Castaños (1996) e de Heath (1956), tem-se que pluralizam todas estas observações. Sedimentando um melhor entendimento da referida proposição, no trabalho de Fowler (1992) visualiza-se uma tabela, onde evidenciam-se exemplos das seis linhas subtrativas, passando pelo apótomo, primeiro apótomo de uma medial, segundo apótomo de uma medial, menor, aquele que produz com uma área exprimível uma área medial, aquele que produz com uma área medial uma medial completa. No caso específico da proposição 96, que trata daquele que produz com uma área medial uma medial completa, constrói-se o exemplo de um retângulo contido por $(\sqrt{10}a - \sqrt{8}a)$ e a, gerando um quadrado equivalente de valor $(\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)}a - \sqrt{(\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}})a)^2}$. Nas ponderações de Heath (1956), expandem-se os contextos da proposição em questão, porque, através da proposição 90, tem-se o fato de que o sexto apótomo pode ser expresso como $\sqrt{k}\rho - \sqrt{\phi}\rho$. Desta forma, conforme garante o enunciado explicitado na proposição 96, a multiplicação de uma reta racional por um sexto apótomo e considerando ρ a dita reta racional, a expressão representada pela raiz quadrada do produto $\rho(\sqrt{k}\rho - \sqrt{\phi}\rho)$, ou seja, $x - y = \sqrt{\rho(\sqrt{k}\rho - \sqrt{\phi}\rho)}$

explicita uma reta “aquele que produz com uma área medial uma medial completa”, conforme expõe a proposição 78 do Livro X que expõe “Caso de uma reta seja subtraída uma reta, sendo incomensurável em potência com a toda, fazendo com a toda tanto o composto dos quadrados sobre elas medial quanto duas vezes o por elas medial, e ainda, os quadrados sobre elas incomensurável com duas vezes o por elas, a restante é irracional; e seja chamada a que faz com um medial o todo medial.”. Delineando estas concepções, vem que podemos, algebricamente, buscar a resolução das equações $u + v = \sqrt{k}\rho$ e $u.v = \frac{\phi\rho^2}{4}$. Logo, teremos o seguinte sistema:

$$u + v = \sqrt{k}\rho$$

$$u.v = \frac{\phi\rho^2}{4}$$

Efetuando, neste instante, a resolução aritmética de tal sistema, temos que:

$$u.\left(\sqrt{k}\rho - u\right) = \frac{\phi\rho^2}{4}$$

$$u^2 - \sqrt{k}\rho\, u + \frac{\phi\rho^2}{4} = 0$$

$$u = \frac{\sqrt{k}\rho \pm \sqrt{k\rho^2 - \phi\rho^2}}{2}$$

$$u = \frac{\sqrt{k}\rho \pm \sqrt{\rho^2(k - \phi)}}{2}$$

$$u = \frac{\sqrt{k}\rho \pm \rho\sqrt{k-\phi}}{2}$$

$$u = \frac{\rho}{2}\left(\sqrt{k} \pm \sqrt{k-\phi}\right)$$

Considerando, então, u maior que v, vem que se obtém as seguintes soluções:

$$u = \frac{\rho}{2}\left(\sqrt{k} + \sqrt{k-\phi}\right)$$

$$v = \frac{\rho}{2}\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-\phi}\right)$$

Entretanto, encontrando os valores de u e v, chegamos à conclusão de que as retas incomensuráveis x e y, terão a forma de $x^2 = \rho u$ e $y^2 = \rho v$. Logo x e y serão expressos por:

$$x^2 = \rho\frac{\rho}{2}\left(\sqrt{k} + \sqrt{k-\phi}\right)$$

$$x^2 = \frac{\rho^2}{2}\left(\sqrt{k} + \sqrt{k-\phi}\right)$$

$$x = \rho\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{k} + \sqrt{k-\phi}\right)}$$

E encontrando y, vem que:

$$y^2 = \rho\frac{\rho}{2}\ (\sqrt{k} - \sqrt{k-\phi})$$

$$y^2 = \frac{\rho^2}{2}\ (\sqrt{k} - \sqrt{k-\phi})$$

$$y = \rho\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{k} - \sqrt{k-\phi})}$$

Então, o valor de $x - y$ representa, convenientemente, uma reta “aquele que produz com uma área medial uma medial completa” já definida pela proposição 78 do Livro X. Logo, tem-se que:

$$x - y = \rho\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{k} + \sqrt{k-\phi}\right)} - \ \rho\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{k} - \sqrt{k-\phi})}$$

$$xy = \frac{\rho^2}{2}\sqrt{k - k + \ \phi} = \frac{\rho^2}{2}\sqrt{\phi}$$

Portanto, recordando que $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$, vem que:

$$(x-y)^2 = \rho(u+v) - 2xy$$

$$(x-y)^2 = \rho\sqrt{k}\rho - 2\,\frac{\rho^2}{2}\,\sqrt{\phi}$$

$$(x-y)^2 = \sqrt{k}\rho^2 - \rho^2\sqrt{\phi}$$

$$x-y = \sqrt{\rho^2(\sqrt{k}-\sqrt{\phi})}$$

$$x-y = \sqrt{\rho(\sqrt{k}\rho-\sqrt{\phi}\rho)}$$

97. O sobre um apótomo, aplicado a uma racional, faz como largura um primeiro apótomo.

CP97. Para os comentários pertinentes a esta proposição[9], expandindo suas nuances e sutilezas, convém frisar que onde se lê “o sobre um apótomo” pode-se ler “o quadrado de um apótomo” ou “o quadrado sobre o apótomo”; onde se lê “aplicado a uma racional” pode-se ler “aplicado a uma reta exprimível” ou “aplicado a uma reta racional”. Tais observações estão pontuadas em Castaños (1996). e Heath (1956), sendo que, nas afirmações do último autor, tem-se o fato de que, conforme a proposição 73 do Livro X, “Caso de uma racional seja subtraída uma racional, sendo comensurável somente em potência com a toda, a restante é irracional; e seja chamado apótomo.”, anunciando o dito apótomo, esclarece que o mesmo pode ser representado por $\rho - \sqrt{k}\rho$. A partir deste ponto, como bem enfatiza o início da proposição 97, “O sobre um apótomo, aplicado a uma racional”, tem-se que $\frac{(\rho-\sqrt{k}\rho)^2}{\sigma} = \frac{\rho^2-2\sqrt{k}\,\rho^2+k\rho^2}{\sigma}$ caracteriza um primeiro apótomo. Fica, desta forma, evidente que ρ^2 e $k\rho^2$ são os quadrados sobre os termos do apótomo original, no caso ρ e $\sqrt{k}\rho$. Já o produto $2\sqrt{k}\rho^2$ é, exatamente, o dobro da área do retângulo

contido por estes termos. Assim sendo, tomando $x, y\ e\ z$, tais que $\sigma x = \rho^2$, $\sigma y = k\rho^2$ e $2\sigma z = 2\sqrt{k}\,\rho^2$, vem que $\frac{\rho^2 - 2\sqrt{k}\,\rho^2 + k\rho^2}{\sigma} = x + y - 2z$. Logo, faz-se necessário provar, sendo $(x+y),\ 2z$ termos, com o termo $(x+y)$ sendo o maior, que $(x+y)-2z$ é um primeiro apótomo. De início, verifica-se que ρ é comensurável somente em quadrado com $\sqrt{k}\rho$. Então, é assegurado que ρ^2 e $k\rho^2$ são racionais e comensuráveis. Assim sendo, $\sigma(x+y)$ ou $\rho^2 + k\rho^2$ é uma área racional, consequentemente $(x+y)$ é racional e comensurável com σ. Todavia, $2\sqrt{k}\,\rho^2 = 2\rho.\sqrt{k}\,\rho$ é uma área medial, de modo que $2\sigma z$ é, também, uma área medial, de tal forma que $2z$ é racional, porém incomensurável com σ. Então, como os termos $(x+y),\ 2z$ são racionais e comensuráveis somente em quadrado, tem-se que, pela proposição 73 acima exposta, $(x+y)-2z$ representa um apótomo. Não esquecendo que ρ^2 e $k\rho^2$ são comensuráveis, logo σx e σy são comensuráveis, garantindo-se que x é comensurável com y. Mas, pelo lema explícito após a proposição 59, pode-se afirmar que $\rho^2 + k\rho^2 > 2\sqrt{k}\,\rho^2$, de onde se obtém que $(x+y) > 2z$, extraindo-se o fato de que o termo $(x+y)$ é o maior. Agora, relembrando que a proposição 17 do Livro X evidencia que “Caso duas retas sejam desiguais, e à maior seja aplicado um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada e divida-a em comensuráveis em comprimento, a maior será maior em potência do que a menor pelo sobre uma comensurável com aquela mesma [em comprimento]. E, caso a maior seja maior em potência do que a menor pelo sobre uma comensurável com aquela mesma [em comprimento] e á maior seja aplicado um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada, divide-a em comensuráveis em comprimento.”, temos que $\sqrt{(x+y)^2 - (2z)^2}$ é comensurável com $(x+y)$. Finalmente, como $(x+y),\ 2z$

são racionais e comensuráveis somente em quadrado, e $(x+y)$ é racional e comensurável com σ, conclui-se que $(x+y)-2z$ representa um primeiro apótomo.

98. O sobre um primeiro apótomo de uma medial, aplicado a uma racional, faz como largura um segundo apótomo.

CP98. Em relação aos comentários referentes a esta proposição, no intuito de melhor esclarecê-la, pontua-se que onde se lê “o sobre um primeiro apótomo de uma medial” pode-se ler “o quadrado de um primeiro apótomo de uma medial” ou “o quadrado sobre uma reta primeiro apótomo de uma medial”; onde se lê “aplicado a uma racional” pode-se ler “aplicado a uma reta exprimível” ou “aplicado a uma reta racional”. Estes enfoques estão evidenciados na tradução de Castaños (1996) e, para a tradução de Heath(1956), além das referidas observações, vivencia-se o fato de que, como expõe a proposição 74 do Livro X, “Caso de uma medial seja subtraída uma medial, sendo comensurável somente em potência com a toda, e contendo com a toda um racional, a restante é irracional, e seja chamada primeiro apótomo de uma medial”, revelando o dito primeiro apótomo de uma medial, traz a sutileza de que o mesmo pode ser representado por $\sqrt[4]{k}\rho - \sqrt[4]{k^3}\rho$. A partir daqui, recordando o início da proposição 61, “O sobre um primeiro apótomo de uma medial, aplicado a uma racional”, vem que $\frac{(\sqrt[4]{k}\rho - \sqrt[4]{k^3}\rho)^2}{\sigma} = \frac{\sqrt{k}\rho^2 - 2k\rho^2 + \sqrt{k^3}\rho^2}{\sigma}$ caracteriza um segundo apótomo. Fica desta maneira, claro que $\sqrt{k}\rho^2$ e $\sqrt{k^3}\rho^2$ são os quadrados sobre os termos do primeiro apótomo original, no caso $\sqrt[4]{k}\rho$ e $\sqrt[4]{k^3}\rho$. Já o produto $2k\rho^2$ é, precisamente, o dobro da área do retângulo contido por estes termos. Neste momento, tomando $x, y \; e \; z$, tais que $\sigma x = \sqrt{k}\rho^2$, $\sigma y = \sqrt{k^3}\rho^2$ e $2\sigma z = 2k\rho^2$, vem que $\frac{\sqrt{k}\rho^2 - 2k\rho^2 + \sqrt{k^3}\rho^2}{\sigma} = x + y - 2z$. Então, tem-se a necessidade de provar, sendo $(x+y),\ 2z$ termos, com o termo $(x+y)$ sendo o

maior, que $(x+y)-2z$ é um segundo apótomo. De início, enxerga-se que $\sqrt[4]{k}\rho$ é comensurável somente em quadrado com $\sqrt[4]{k^3}\rho$, sendo as mesmas retas mediais. Então, é assegurado que $\sqrt{k}\rho^2$ e $\sqrt{k^3}\rho^2$ são mediais. Logo, $\sigma(x+y)$ ou $\sqrt{k}\rho^2+\sqrt{k^3}\rho^2$ é uma área medial, consequentemente $(x+y)$ é racional e incomensurável com σ. Contudo, $2k\rho^2=2\sqrt[4]{k}\rho.\sqrt[4]{k^3}\rho$ é uma área racional, de modo que $2\sigma z$ é, também, uma área racional, de tal forma que $2z$ é racional e comensurável com σ. Então, como os termos $(x+y),\ 2z$ são racionais e comensuráveis somente em quadrado, tem-se que, pela proposição 74 acima mencionada, $(x+y)-2z$ representa um apótomo. Não esquecendo que $\sqrt{k}\rho^2$ e $\sqrt{k^3}\rho^2$ são comensuráveis, logo σx e σy são comensuráveis, garante-se que x é comensurável com y. Mas, pelo lema apresentado após a proposição 59, pode-se afirmar que $\sqrt{k}\rho^2+\sqrt{k^3}\rho^2>2k\rho^2$, de onde se obtém que $(x+y)>2z$, extraindo-se o fato de que o termo $(x+y)$ é o maior. Agora, recordando que a proposição 17 do Livro X expõe que “Caso duas retas sejam desiguais, e à maior seja aplicado um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada e divida-a em comensuráveis em comprimento, a maior será maior em potência do que a menor pelo sobre uma comensurável com aquela mesma [em comprimento]. E, caso a maior seja maior em potência do que a menor pelo sobre uma comensurável com aquela mesma [em comprimento] e á maior seja aplicado um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada, divide-a em comensuráveis em comprimento.”, tem-se que $\sqrt{(x+y)^2-(2z)^2}$ é comensurável com $(x+y)$. Finalmente, como $(x+y),\ 2z$ são racionais e comensuráveis somente em quadrado, e $2z$ é racional e comensurável com σ, conclui-se que $(x+y)-2z$ representa um segundo apótomo.

99. O sobre um segundo apótomo de uma medial, aplicado a uma racional, faz como largura um terceiro apótomo.

CP99. Esmiuçando os elos desta proposição, consolidando seus enfoques e abrangências, tem-se que onde se lê “O sobre um segundo apótomo de uma medial” pode-se ler “o quadrado de um segundo apótomo de uma medial” ou “o quadrado sobre uma reta segundo apótomo de uma medial”; onde se lê “aplicado a uma racional” pode-se ler “aplicado a uma reta exprimível” ou “aplicado a uma reta racional”. Estes detalhes são explicitados na tradução de Castaños (1996). Para a tradução de Heath(1956), revelam-se tais concepções e o autor, com argumentações sucintas, pluraliza, como expõe a proposição 75 do Livro X, “Caso de uma medial seja subtraída uma medial, sendo comensurável somente em potência com a toda, e contendo com a toda um medial, a restante é irracional; e seja chamada segundo apótomo de uma medial”, o anúncio do chamado segundo apótomo de uma medial, revelando o fato de que o mesmo pode ser exposto como $\sqrt[4]{k}\rho - \frac{\sqrt{\lambda}\rho}{\sqrt[4]{k}}$. A partir deste ponto, relembrando a parte inicial da proposição 99, “O sobre um segundo apótomo de uma medial, aplicado a uma racional”, vem que $\frac{(\sqrt[4]{k}\rho - \frac{\sqrt{\lambda}\rho}{\sqrt[4]{k}})^2}{\sigma} = \frac{\sqrt{k}\rho^2 - 2\sqrt{\lambda}\rho^2 + \frac{\lambda\rho^2}{\sqrt{k}}}{\sigma}$ caracteriza uma terceira apótomo. Assim sendo, fica claro que $\sqrt{k}\rho^2$ e $\frac{\lambda\rho^2}{\sqrt{k}}$ são os quadrados sobre os termos do segundo apótomo de uma medial original, no caso $\sqrt[4]{k}\rho$ e $\frac{\sqrt{\lambda}\rho}{\sqrt[4]{k}}$. Já o produto $2\sqrt{\lambda}\rho^2$ é, então, o dobro da área do retângulo contido por estes termos. Neste instante, tomando $x, y \; e \; z$, tais que $\sigma x = \sqrt{k}\rho^2$, $\sigma y = \frac{\lambda\rho^2}{\sqrt{k}}$ e $2\sigma z = 2\sqrt{\lambda}\rho^2$, tem-se que $\frac{\sqrt{k}\rho^2 - 2\sqrt{\lambda}\rho^2 + \frac{\lambda\rho^2}{\sqrt{k}}}{\sigma} = x + y - 2z$. Desta forma, temos que provar, sendo $(x+y),\ 2z$ termos, com o termo $(x+y)$ sendo o maior, que $(x+y) - 2z$ é um terceiro

apótomo. Inicialmente, enxerga-se que $\sqrt[4]{k}\rho$ é comensurável somente em quadrado com $\frac{\sqrt{\lambda}\rho}{\sqrt[4]{k}}$, sendo as mesmas retas mediais, contendo um retângulo medial. Então, é assegurado que $\sqrt{k}\rho^2$ e $\frac{\lambda\rho^2}{\sqrt{k}}$ são mediais. Logo, $\sigma(x+y)$ ou $\sqrt{k}\rho^2+\frac{\lambda\rho^2}{\sqrt{k}}$ é uma área medial, consequentemente $(x+y)$ é racional e incomensurável com σ. Toadavia, $2\sqrt{\lambda}\rho^2 = 2\sqrt[4]{k}\rho.\frac{\sqrt{\lambda}\rho}{\sqrt[4]{k}}$ é uma área medial, de modo que $2\sigma z$ é, também, uma área medial, de tal forma que $2z$ é racional e incomensurável com σ. Então, como os termos $(x+y),\ 2z$ são racionais e comensuráveis somente em quadrado, tem-se que, pela proposição 75 acima especificada, $(x+y)-2z$ representa um apótomo. Não esquecendo que $\sqrt{k}\rho^2$ e $\frac{\lambda\rho^2}{\sqrt{k}}$ são comensuráveis, logo σx e σy são comensuráveis, garante-se que x é comensurável com y. Mas, pelo lema explicitado após a proposição 59, pode-se afirmar que $\sqrt{k}\rho^2+\frac{\lambda\rho^2}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{\lambda}\rho^2$, de onde se obtém que $(x+y) > 2z$, evidenciando-se o fato de que o termo $(x+y)$ é o maior. Agora, rememorando que a proposição 17 do Livro X expõe que “Caso duas retas sejam desiguais, e à maior seja aplicado um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada e divida-a em comensuráveis em comprimento, a maior será maior em potência do que a menor pelo sobre uma comensurável com aquela mesma [em comprimento]. E, caso a maior seja maior em potência do que a menor pelo sobre uma comensurável com aquela mesma [em comprimento] e á maior seja aplicado um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada, divide-a em comensuráveis em comprimento.”, tem-se que $\sqrt{(x+y)^2-(2z)^2}$ é comensurável com $(x+y)$. Finalmente, como $(x+y),\ 2z$ são racionais e comensuráveis somente em quadrado, $(x+y)$ é

racional e incomensurável com σ e $2z$ é racional e incomensurável com σ, conclui-se que $(x+y)-2z$ representa um terceiro apótomo.

100. O sobre uma menor, aplicado a uma racional, faz como largura um quarto apótomo.

CP100. Para a proposição em questão, procurando-se retratar seus desmembramentos, tem-se que onde se lê "o sobre uma menor" pode-se ler "o quadrado de uma reta menor" ou "o quadrado sobre a reta menor"; onde se lê "aplicado a uma racional" pode-se ler "aplicado a uma reta exprimível" ou "aplicado a uma reta racional". Estes esclarecimentos são evidenciados na tradução de Castaños (1996). Para o texto traduzido por Heath(1956), encontram-se estas concepções, com o autor, enfatizando que, como expõe a proposição 76 do Livro X, "Caso de uma reta seja subtraída uma reta, sendo incomensurável em potência com a toda, fazendo com a toda, por um lado, os sobre elas juntos racional, e, por outro lado, o por elas medial, a restante é irracional; e seja chamada menor". Então, ao nortear a chamada menor, assegura o fato de que a mesma pode ser exposta como $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}-\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$. Neste momento, não se deixando esquecer a parte inicial da proposição 100, "O sobre uma menor, aplicado a uma racional", vem que $\frac{(\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}-\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}})^2}{\sigma}=\frac{\frac{\rho^2}{2}\left(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)-\frac{\rho^2}{\sqrt{1+k^2}}+\frac{\rho^2}{2}(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}})}{\sigma}$ caracteriza um quarto apótomo. Então, fica devidamente claro que $\frac{\rho^2}{2}(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}})$ e $\frac{\rho^2}{2}(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}})$ são os quadrados sobre os termos da menor original, no caso $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$ e $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$. Já o produto $\frac{\rho^2}{\sqrt{1+k^2}}$ é, então, o dobro da área do retângulo contido por estes termos. Agora, tomando $x, y\ e\ z$, tais que $\sigma x=\frac{\rho^2}{2}(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}})$, $\sigma y=\frac{\rho^2}{2}(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}})$ e $2\sigma z=\frac{\rho^2}{\sqrt{1+k^2}}$, tem-se que

$\frac{\frac{\rho^2}{2}\left(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)-\frac{\rho^2}{\sqrt{1+k^2}}+\frac{\rho^2}{2}\left(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)}{\sigma} = x+y-2z$. Desta maneira, tem-se que provar, sendo $(x+y),\ 2z$ termos, com o termo $(x+y)$ sendo o maior, que $(x+y)-2z$ é um quarto apótomo. Incialmente enxerga-se que $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$ é incomensurável em quadrado com $\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$. Então, é assegurado que $\frac{\rho^2}{2}\left(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ e $\frac{\rho^2}{2}\left(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ são mediais. Logo, $\sigma(x+y)$ ou $\frac{\rho^2}{2}\left(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)+\frac{\rho^2}{2}\left(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)=\rho^2$ é uma área racional, consequentemente $(x+y)$ é racional e comensurável com σ. Contudo, $\frac{\rho^2}{\sqrt{1+k^2}} = 2\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}.\frac{\rho}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$ é uma área medial, de modo que $2\sigma z$ é, também, uma área medial, de tal forma que $2z$ é racional e incomensurável com σ. Então, como os termos $(x+y),\ 2z$ são racionais e comensuráveis somente em quadrado, tem-se que, pela proposição 76 acima especificada, $(x+y)-2z$ representa um apótomo. Não esquecendo que $\frac{\rho^2}{2}\left(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ e $\frac{\rho^2}{2}\left(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ são incomensuráveis, logo σx e σy são incomensuráveis, e garante-se que x é incomensurável com y. Mas, pelo lema exposto após a proposição 59, pode-se afirmar que $\frac{\rho^2}{2}\left(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)+\frac{\rho^2}{2}\left(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)>\frac{\rho^2}{\sqrt{1+k^2}}$, de onde se obtém que $(x+y)>2z$, evidenciando-se o fato de que o termo $(x+y)$ é o maior. Agora, recordando que a proposição 18 do Livro X expõe que “Caso duas retas sejam desiguais, e seja aplicado à maior um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada, e divida-a em incomensuráveis [em comprimento], a maior será maior em potência do que a menor pelo sobre uma

incomensurável com aquela mesma. E, caso a maior seja maior em potência do que a maior pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma, e seja aplicado à maior um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada, divide-a em incomensuráveis [em comprimento]..", tem-se que $\sqrt{(x+y)^2-(2z)^2}$ é incomensurável com $(x+y)$. Finalmente, como $(x+y)$, $2z$ são racionais e comensuráveis somente em quadrado, $(x+y)$ é racional e comensurável com σ, conclui-se que $(x+y)-2z$ representa um quarto apótomo.

101. O sobre a que faz, com um racional, o todo medial, aplicado a uma racional, faz como largura um quinto apótomo.

CP101. Para a proposição em apreço, averiguando seus enlaces e fundamentações, tem-se que onde se lê "O sobre a que faz, com um racional, o todo medial" pode-se ler "o quadrado da reta que faz com uma área exprimível uma área inteira medial" ou "o quadrado sobre a reta que produz com uma área racional uma medial inteira"; onde se lê "aplicado a uma racional" pode-se ler "aplicado a uma reta exprimível" ou "aplicado a uma reta racional". Estas ponderações são assinaladas na tradução de Castaños (1996). No texto traduzido por Heath(1956), encontram-se tais evidências, além do autor revelar que, como expõe a proposição 77 do Livro X, "Caso de uma reta seja subtraída uma reta, sendo incomensurável em potência com a toda, e fazendo com a toda, por um lado, o composto dos quadrados sobre elas medial, e, por outro lado, duas vezes o por elas racional, a restante é irracional; e seja chamada a que faz com um racional o todo medial", se enxerga a chamada "a que faz, com um racional, o todo medial", consolidando o fato de que a mesma pode ser exposta como $\frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2}+k)}-\frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2}-k)}$. Desta forma, não esquecendo a parte inicial da proposição 101, "O sobre a que faz, com um racional, o todo medial, aplicado a uma racional", vem que

$\frac{(\frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2}+k)}-\frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2}-k))^2}}{\sigma}$ terá o valor expresso por $\frac{\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}(\sqrt{1+k^2}+k)-\frac{\rho^2}{1+k^2}+\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}(\sqrt{1+k^2}-k)}{\sigma}$, o que caracteriza um quinto apótomo. Logo, observa-se que $\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2}+k\right)$ e $\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2}-k\right)$ são os quadrados sobre os termos “da que faz, com um racional, o todo medial” original, no caso $\frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2}+k)}$ e $\frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2}-k)}$. Já o produto $\frac{\rho^2}{1+k^2}$ é, então, o dobro da área do retângulo contido por estes termos. Neste momento, tomando $x, y\ e\ z$, tais que $\sigma x=\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2}+k\right)$, $\sigma y=\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2}-k\right)$ e $2\sigma z=\frac{\rho^2}{1+k^2}$, tem-se que $\frac{\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}(\sqrt{1+k^2}+k)-\frac{\rho^2}{1+k^2}+\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}(\sqrt{1+k^2}-k)}{\sigma}=x+y-2z$. Deste modo, ter-se-á de provar, sendo $(x+y),\ 2z$ termos, com o termo $(x+y)$ sendo o maior, que $(x+y)-2z$ é um quinto apótomo. De início, vê-se que $\frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2}+k)}$ é incomensurável em quadrado com $\frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2}-k)}$. Então, é perfeitamente garantido que $\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2}+k\right)$ e $\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2}-k\right)$ são mediais. Logo, $\sigma(x+y)$ ou $\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2}+k\right)+\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2}-k\right)=\frac{\rho^2}{\sqrt{1+k^2}}$ é uma área medial,

consequentemente $(x+y)$ é racional e incomensurável com σ. Todavia, neste instante, podemos sutilmente efetuar a verificação de que $\frac{\rho^2}{1+k^2} = 2\frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2}+k)}.\frac{\rho}{\sqrt{2(1+k^2)}}\sqrt{(\sqrt{1+k^2}-k)}$ é uma área racional, de modo que $2\sigma z$ é, também, uma área racional, de tal forma que $2z$ é racional e comensurável com σ. Então, como os termos $(x+y),\ 2z$ são racionais e comensuráveis somente em quadrado, tem-se que, pela proposição 77 acima especificada, $(x+y)-2z$ representa um apótomo. Não esquecendo que $\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2}+k\right)$ e $\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2}-k\right)$ são incomensuráveis, logo σx e σy são incomensuráveis, e garante-se que x é incomensurável com y. Mas, pelo lema apresentado após a proposição 59, pode-se afirmar que $\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2}+k\right)+\frac{\rho^2}{2(1+k^2)}\left(\sqrt{1+k^2}-k\right)>\frac{\rho^2}{1+k^2}$, de onde se obtém que $(x+y)>2z$, evidenciando-se o fato de que o termo $(x+y)$ é o maior. Agora, recordando que a proposição 18 do Livro X expõe que "Caso duas retas sejam desiguais, e seja aplicado à maior um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada, e divida-a em incomensuráveis [em comprimento], a maior será maior em potência do que a menor pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma. E, caso a maior seja maior em potência do que a maior pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma, e seja aplicado à maior um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada, divide-a em incomensuráveis [em comprimento].."", tem-se que $\sqrt{(x+y)^2-(2z)^2}$ é incomensurável com $(x+y)$. Finalmente, como $(x+y),\ 2z$ são racionais e comensuráveis somente em quadrado, $2z$ é racional e comensurável com σ, conclui-se que $(x+y)-2z$ representa um quinto apótomo.

102. O sobre a que faz, com um medial, o todo medial, aplicado a uma racional, faz como largura um sexto apótomo.

CP102. Nas concepções dos norteamentos desta proposição, ampliando suas essências e elos, tem-se que onde se lê “O sobre a que faz, com um medial, o todo medial” pode-se ler “o quadrado da reta que faz com uma área medial uma área inteira medial” ou “o quadrado sobre a reta que produz com uma área medial uma medial inteira”; onde se lê “aplicado a uma racional” pode-se ler “aplicado a uma reta exprimível” ou “aplicado a uma reta racional”. Tais norteamentos são evidenciados em Castaños (1996). Já no respeitado texto de Heath(1956), têm-se várias percepções e o autor explicita que, como afirma a proposição 78 do Livro X, “Caso de uma reta seja subtraída uma reta, sendo incomensurável em potência com a toda, fazendo com a toda tanto o composto dos quadrados sobre elas medial quanto duas vezes o por elas medial, e ainda, os quadrados sobre elas incomensurável com duas vezes o por elas, a restante é irracional; e seja chamada a que faz com um medial o todo medial”, se tem, então, a revelação da chamada “a que faz, com um medial, o todo medial”, consolidando o fato de que a mesma pode ser exposta como $\frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}-\frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$. Desta forma, não esquecendo a parte inicial da proposição 102, “O sobre a que faz, com um medial, o todo medial, aplicado a uma racional”, vem que $\frac{(\frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}-\frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}})^2}{\sigma}$ terá o valor expresso por $\frac{\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)-\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1+k^2}}+\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)}{\sigma}$, o que caracteriza um sexto apótomo. Logo, observa-se que $\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ e $\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ são os quadrados sobre os termos “da que faz, com um medial, o todo medial” original, no caso $\frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$ e $\frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$. Já o produto $\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1+k^2}}$ é, então, o dobro da área do retângulo contido por estes termos. Neste momento,

tomando $x, y\ e\ z$, tais que $\sigma x = \frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1 + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$, $\sigma y = \frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ e $2\sigma z = \frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1+k^2}}$, tem-se que $\frac{\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right) - \frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1+k^2}} + \frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)}{\sigma} = x + y - 2z$. Deste modo, ter-se-á de provar, sendo $(x+y),\ 2z$ termos, com o termo $(x+y)$ sendo o maior, que $(x+y)-2z$ é um sexto apótomo. De início, vê-se que $\frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$ é incomensurável em quadrado com $\frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$. Logo, é sucintamente garantido que $\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1 + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ e $\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ são mediais. Logo, $\sigma(x+y)$ ou $\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1 + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right) + \frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right) = \rho^2\sqrt{\lambda}$ é uma área medial, consequentemente $(x+y)$ é racional e incomensurável com σ. No entanto, neste instante, podemos sutilmente efetuar a verificação de que $\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1+k^2}} = 2\frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}} \cdot \frac{\rho\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}$ é uma área medial, de modo que $2\sigma z$ é, também, uma área medial, de tal forma que $2z$ é racional e incomensurável com σ. Então, como os termos $(x+y),\ 2z$ são racionais e comensuráveis somente em quadrado, tem-se que, pela proposição 78 acima explicitada, $(x+y)-2z$ representa um apótomo. Não esquecendo que $\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1 + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ e $\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)$ são incomensuráveis, logo σx e σy

são incomensuráveis, e garante-se que x é incomensurável com y. Mas, pelo lema evidenciado após a proposição 59, pode-se afirmar que $\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)+\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{2}\left(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)>\frac{\rho^2\sqrt{\lambda}}{\sqrt{1+k^2}}$, de onde se obtém que $(x+y)>2z$, evidenciando-se o fato de que o termo $(x+y)$ é o maior. Agora, recordando que a proposição 18 do Livro X expõe que "Caso duas retas sejam desiguais, e seja aplicado à maior um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada, e divida-a em incomensuráveis [em comprimento], a maior será maior em potência do que a menor pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma. E, caso a maior seja maior em potência do que a maior pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma, e seja aplicado à maior um igual à quarta parte do sobre a menor, deficiente por uma figura quadrada, divide-a em incomensuráveis [em comprimento]..", tem-se que $\sqrt{(x+y)^2-(2z)^2}$ é incomensurável com $(x+y)$. Finalmente, como $(x+y)$, $2z$ são racionais e comensuráveis somente em quadrado, $(x+y)$. é racional e incomensurável com σ, $2z$ é racional e incomensurável com σ, $(x+y)$ é incomensurável com $2z$, conclui-se que $(x+y)-2z$ representa um sexto apótomo.

103. A comensurável com o apótomo, em comprimento, é um apótomo, e o mesmo, na ordem.

CP103. Analisando as conotações referentes a esta proposição[10], tem-se que onde se lê "a comensurável com o apótomo, em comprimento" pode-se ler "uma reta comensurável em longitude com um apótomo" ou "uma reta comensurável em comprimento com um apótomo". As duas versões explicitadas são, respectivamente, apresentadas por Castaños (1996) e Heath (1956). Por outro lado, Fowler (1992) afirma, sutilmente, que "É uma característica básica das linhas exprimíveis e mediais que uma linha exprimível com uma linha exprimível é também exprimível, com uma medial é também medial.". Expandindo seus enfoques, constata-se seguramente

que Euclides prova, nas proposições 103 a 107, que isto se aplica para as outras linhas subtrativas *alogoi* (irracionais). Consolidando suas argumentações, tem-se que sendo $w_1 = b_1 - c_1$ uma linha comensurável com um apótomo dado por $w = b - c$, a mesma é também um apótomo dividido na mesma razão, visto que temos a proporção $\frac{b}{c} = \frac{b_1}{c_1}$ e, então, $\frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{b-c}{b_1-c_1}$.

104. A comensurável com o apótomo de uma medial é um apótomo de uma medial, e o mesmo, na ordem.

CP104. Verificando os prumos e consonâncias desta proposição, temos que onde se lê “a comensurável com o apótomo de uma medial” pode-se ler “uma reta comensurável com o apótomo de uma medial” ou “uma reta comensurável com o apótomo de uma reta medial”. As duas concepções são, respectivamente, expostas em Castaños (1996) e Heath (1956). Com argumentações sucintas, averiguando os elos da proposição em questão, Fowler (1992) esclarece que “uma linha comensurável ou comensurável em quadrado com qualquer das linhas subtrativas ‘alogos’ (irracionais), ou seja, ‘apótomo’, ‘primeiro apótomo de uma medial’, ‘segundo apótomo de uma medial’, ‘menor’, ‘a que faz, com um racional, o todo medial’ e ‘a que faz, com um medial, o todo medial’, é a mesma espécie de linha ‘alogos’ (irracional), e é dividida na mesma razão.”. Assim sendo, o autor mostra que supondo q_1 como comensurável em quadrado com alguma linha ‘alogos’ (irracional) dada por $q = x - y$, então, sendo w a largura de q^2 em relação à altura h e sendo w_1 a largura de ${q_1}^2$ em relação à altura h, vem que teremos ${q_1}^2 = h.w_1$ sendo comensurável com $q^2 = h.w = h.(b - c)$, logo $b - c$ é um apótomo e w_1 é comensurável com o mesmo. Não esquecendo que, pela proposição anterior, $w_1 = b_1 - c_1$ é também um apótomo, na mesma classe e dividida na mesma razão. Então, $q_1 = x_1 - y_1$ será da mesma espécie de linha ‘alogos’ (irracional) como $q = x - y$. Por outro ladois, ter-se-á como válida a proporção

$\frac{q^2}{{q_1}^2} = \frac{(x-y)^2}{(x_1-y_1)^2} = \frac{b-c}{b_1-c_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$. Muito importante, ainda, é o fato de que também são válidas as proporções $\frac{x^2+y^2}{{x_1}^2+{y_1}^2} = \frac{h.b}{h.b_1}$ e $\frac{2x.y}{2x_1.y_1} = \frac{h.c}{h.c_1}$. Desta forma, finalmente, conclui-se que $\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}$.

105. A comensurável com a menor é uma menor.

CP105. Esclarecendo os enfoques para esta proposição, tem-se que onde se lê "a comensurável com a menor" pode-se ler "uma reta comensurável com uma reta menor". O outro caminho evidenciado para a tradução está presente tanto em Castaños (1996) quanto em Heath (1956). É extremamente importante não esquecer que, pela proposição 39 do Livro X, "Caso de uma reta seja subtraída uma reta, sendo incomensurável em potência com a toda, fazendo com a toda, por um lado, os sobre elas juntos racional, e, por outro lado, o por elas medial, a restante é irracional; e seja chamada menor.". Aglutinando tal fato, às observações evidenciadas nas proposições 103 e 104, chega-se à conclusão de que "a comensurável com a menor é uma menor".

106. A comensurável com a que faz, com um racional, o todo medial é uma que faz, com um racional, o todo medial.

CP106. Desenvolvendo os norteamentos da referida proposição, vem que onde se lê "A comensurável com a que faz, com um racional, o todo medial" pode-se ler "uma reta comensurável com a reta que faz com uma área exprimível uma área inteira medial" ou "uma reta comensurável com aquela que produz com uma área racional uma inteira medial". As duas observações são, respectivamente, alicerçadas em Castaños (1996) e Heath (1956). Por outro lado, não esquecendo que, pela proposição 77 do Livro X, tem-se que "Caso de uma reta seja subtraída uma reta, sendo incomensurável em potência com a toda, e fazendo com a toda, por um lado, o composto dos quadrados sobre elas medial, e, por outro lado, duas vezes o por elas racional, a restante é irracional; e seja chamada a que faz com um racional o

todo medial". Desta forma, agregando esta concepção às elucidações expostas nas proposições 103 e 104, chegamos à conclusão de que "A comensurável com a que faz, com um racional, o todo medial é uma que faz, com um racional, o todo medial".

107. A comensurável com a que faz, com um medial, o todo medial é também ela a que faz, com um medial, o todo medial.

CP107. Expandindo o entendimento desta proposição, vem que onde se lê "a comensurável com a que faz, com um medial, o todo medial" pode-se ler "uma reta comensurável com a que faz com uma área medial uma área medial inteira" ou "uma reta comensurável com aquela que produz com uma área medial uma inteira medial. As duas concepções são, respectivamente, pontuadas em Castaños (1996) e Heath (1956). Contudo, recordando que, pela proposição 78 do Livro X, tem-se que "Caso de uma reta seja subtraída uma reta, sendo incomensurável em potência com a toda, fazendo com a toda tanto o composto dos quadrados sobre elas medial quanto duas vezes o por elas medial, e ainda, os quadrados sobre elas incomensurável com duas vezes o por elas, a restante é irracional; e seja chamada a que faz com um medial o todo medial". Assim sendo, da união desta evidência às argumentações mostradas nas proposições 103 e 104, conclui-se que "A comensurável com a que faz, com um medial, o todo medial é também ela a que faz, com um medial, o todo medial".

108. Sendo subtraído um medial de um racional, a que serve para produzir a área restante torna-se uma das duas irracionais, ou um apótomo ou uma menor.

CP108. Alicerçando as concepções desta proposição[11], é extremamente importante informar que onde se lê "a que serve para produzir a área restante torna-se uma das duas irracionais" pode-se ler "o lado do quadrado equivalente à área restante é uma destas duas retas não exprimíveis" ou "o lado da área restante torna-se uma das duas retas irracionais". Tais sutilezas ganham destaque na tradução de Castaños (1996). Já no texto traduzido por Heath (1956), enxergam-se algumas destas percepções, sendo que o autor argumentaque se uma área racional for da forma $k\rho^2$, e se uma área medial for da forma $\sqrt{\lambda}\rho^2$, tem-se que, a partir das diferentes

relações entre k e $\sqrt{\lambda}$, representadas na expressão $\sqrt{k\rho^2 - \sqrt{\lambda}\rho^2}$, poder-se-á encontrar que, conforme atesta a proposição 108, são produzidos “uma das duas irracionais, ou um apótomo ou uma menor”. Assim sendo, fazendo $\sigma u = k\rho^2$ e $\sigma v = \sqrt{\lambda}\rho^2$, vem que o primeiro retângulo é racional e o segundo é medial. Então, ter-se-á que u é racional e comensurável com σ, sendo que v é racional e incomensurável com σ, de modo que u é incomensurável com v. Consequentemente, u e v são racionais e comensuráveis somente em quadrado. Logo, $u - v$ é um apótomo. A partir deste ponto, temos o fato de que $u > v$, que produz, então, para u racional e comensurável com σ, os casos $\sqrt{u^2 - v^2}$ sendo comensurável com u e $\sqrt{u^2 - v^2}$ sendo incomensurável com u. Ora essa, para o primeiro caso, vem que $u - v$ é um primeiro apótomo e, no segundo caso, $u - v$ é um quarto apótomo. Logo, $\sqrt{k\rho^2 - \sqrt{\lambda}\rho^2} = \sqrt{\sigma(u - v)}$ é um apótomo, no primeiro caso e conforme pontua a proposição 91, que expõe “Caso uma área seja contida por uma racional e um primeiro apótomo, a que serve para produzir a área é um apótomo”. Por outro lado, será uma reta irracional menor, no segundo caso e conforme esclarece a proposição 94, que afirma “Caso uma área seja contida por uma racional e um quarto apótomo, a que serve para produzir a área é uma menor.”.

109. Sendo subtraído um racional de um medial, outras duas irracionais têm lugar, ou um primeiro apótomo de uma medial ou a que faz, com um racional, o todo medial.

CP109. Explorando os desmembramentos desta proposição, será esclarecedor enfatizar que onde se lê “Sendo subtraído um racional de um medial, outras duas irracionais têm lugar” pode-se ler “se se tira uma área medial uma área exprimível, resultam outras duas retas não exprimíveis” ou “se de uma área medial uma área

racional é subtraída, surgem duas outras retas irracionais". Tais observações ganham ênfase na tradução de Castaños (1996). Com relação ao texto traduzido por Heath (1956), também pode-se enxergar algumas destas acepções, além do que o autor preceitua que se uma área medial for da forma $\sqrt{k}\rho^2$, e se uma área racional for da forma $\lambda\rho^2$, tem-se que, a partir das diferentes relações entre $\sqrt{k}$ e λ, representadas na expressão $\sqrt{\sqrt{k}\rho^2 - \lambda\rho^2}$, poder-se-á encontrar que, conforme atesta a proposição 109, "outras duas irracionais têm lugar". Assim sendo, fazendo $\sigma u = \sqrt{k}\rho^2$ e $\sigma v = \lambda\rho^2$, vem que o primeiro retângulo é medial e o segundo é racional. Então, ter-se-á que u é racional e incomensurável com σ e v é racional e comensurável com σ, de modo que u é incomensurável com v. Consequentemente, u e v são racionais e comensuráveis somente em quadrado. Logo, $u - v$ é um apótomo. A partir deste ponto, temos o fato de que sendo $u > v$, então, para v racional e comensurável com σ, os casos $\sqrt{u^2 - v^2}$ sendo comensurável com u e $\sqrt{u^2 - v^2}$ sendo incomensurável com u. Ora essa, para o primeiro caso, vem que $u - v$ é um segundo apótomo e, no segundo caso, $u - v$ é um quinto apótomo. Logo, $\sqrt{\sqrt{k}\rho^2 - \lambda\rho^2} = \sqrt{\sigma(u-v)}$ é um primeiro apótomo de uma medial, no primeiro caso e conforme pontua a proposição 92, que expõe "Caso uma área seja contida por uma racional e um segundo apótomo, a que serve para produzir a área é um primeiro apótomo de uma medial.". Por outro lado, será uma reta irracional que faz, com um racional, o todo medial, no segundo caso e conforme esclarece a proposição 95, que afirma "Caso uma área seja contida por uma racional e um quinto apótomo, a que serve para produzir a área é a que faz, com um racional, o todo medial".

110. Sendo subtraído de um medial um medial incomensurável com o todo, as duas restantes irracionais têm lugar, ou um segundo apótomo de uma medial ou a que faz, com um medial, o todo medial.

CP110. Consolidando as abrangências desta proposição[12], convém expor que onde se lê “Sendo subtraído de um medial um medial incomensurável com o todo, as duas restantes irracionais têm lugar” pode-se ler “se se tira de uma área medial outra área medial incomensurável com a área inteira, resultam as duas retas não exprimíveis restantes” ou “se de uma área medial seja subtraída uma área medial incomensurável com a toda, as duas restantes retas irracionais surgem”. Tais considerações têm enfoque no texto traduzido por Castaños (1996). Na tradução exposta por Heath (1956), constatam-se alguns destes elos, e o autor, conciso, pontua que se uma área medial for da forma $\sqrt{k}\rho^2$, a outra área medial pode ser da forma $\sqrt{\lambda}\rho^2$, enxergando-se que, a partir das diferentes relações entre $\sqrt{k}$ e $\sqrt{\lambda}$, representadas na expressão $\sqrt{\sqrt{k}\rho^2 - \sqrt{\lambda}\rho^2}$, poder-se-á averiguar que, conforme enfatiza a proposição 110, “as duas restantes irracionais têm lugar”. Assim sendo, não esquecendo que $\sqrt{k}\rho^2$ e $\sqrt{\lambda}\rho^2$ são incomensuráveis, fazendo $\sigma u = \sqrt{k}\rho^2$ e $\sigma v = \sqrt{\lambda}\rho^2$, tem-se que, tanto o primeiro retângulo como o segundo, são áreas mediais, com σ sendo racional. Então, ter-se-á que u é racional e incomensurável com σ e, também, v é racional e incomensurável com σ, de modo que σu é incomensurável com σv ou, também, u é incomensurável com v. Consequentemente, u e v são racionais e comensuráveis somente em quadrado. Desta forma, $u - v$ é um apótomo. Consolidando este entendimento, ter-se-ão duas possibilidades, onde será verificado se $\sqrt{u^2 - v^2}$ é ou comensurável ou incomensurável em comprimento com u. Para a primeira possibilidade, considerando o fato de que $\sqrt{u^2 - v^2}$ ser comensurável com u, vem que $u - v$ é

um terceiro apótomo e, portanto, $\sqrt{\sqrt{k}\rho^2 - \sqrt{\lambda}\rho^2} = \sqrt{\sigma(u-v)}$ é um segundo apótomo de um medial, conforme preceitua a proposição 93, que expõe “Caso uma área seja contida por uma racional e um terceiro apótomo, a que serve para produzir a área é um segundo apótomo de uma medial”. Já para a segunda possibilidade, considerando o fato de que $\sqrt{u^2 - v^2}$ ser incomensurável com u, vem que $u - v$ é um sexto apótomo e, portanto, $\sqrt{\sqrt{k}\rho^2 - \sqrt{\lambda}\rho^2} = \sqrt{\sigma(u-v)}$ é a que faz, com um medial, o todo medial, conforme anuncia a proposição 96, que enfatiza “Caso uma área seja contida por uma racional e um sexto apótomo, a que serve para produzir a área é que faz, com um medial, o todo medial”.

111. O apótomo não é o mesmo que a binomial.

CP111. Na análise desta proposição[13], os enfoques de Heath (1956) são abrangentes e esclarecedores, com o autor ponderando que “Esta proposição é o elo de ligação que permite Euclides provar que todos os compostos irracionais com sinais positivos [acima discutidos] são diferentes de todos os correspondentes compostos irracionais com sinais negativos, enquanto os dois conjuntos são todos diferentes uns dos outros e da reta medial.”. No corolário apresentado logo em seguida tais concepções ficam esclarecidas. Por outro lado, as argumentações de Fowler (1992) revelam a prova da referida proposição usando-se a contradição. Assim, considerando x e y, x_1 e y_1, como pares de linhas exprimíveis incomensuráveis, tem-se que supondo $q = x + y = x_1 - y_1$, vem que fazendo $q^2 = h.w$, então $q = b + c = b_1 - c_1$, de onde constata-se que $b + c$ é uma primeira binomial e $b_1 - c_1$ é um primeiro apótomo. Deste modo, b e b_1 são, ambos, comensuráveis com h, enquanto que c e c_1 são, ambos, incomensuráveis com h. Supondo, agora, $b < b_1$, logo $b_1 - b > 0$, de tal forma que $c = (b_1 - b) - c_1$, de modo que a linha exprimível c tem a representação de um

apótomo, o que é impossível. Supondo, então, $b > b_1$, logo $b - b_1 > 0$, e o caso é perfeitamente idêntico ao exposto anteriormente.

COROLÁRIO

O apótomo e as irracionais depois dele nem são os mesmos que a medial nem entre si.

CC8. Esmiuçando os elos dos enfoques deste corolário, tem-se que o mesmo está intimamente relacionado com a proposição 111, além do que, conforme garante Fowler (1992), as treze classes de linhas de *alogoi* [irracionais], (medial, binomial, primeira bimedial, segunda bimedial, maior, a que serve para produzir um racional e um medial, a que serve para produzir dois mediais, apótomo, primeiro apótomo de uma medial, segundo apótomo de uma medial, menor, a que faz com um racional o todo medial, a que faz com um medial o todo medial) são todas disjuntas; e qualquer linha que seja comensurável ou comensurável em quadrado com uma linha em uma dada classe também está nessa classe.

112. O sobre uma racional, aplicado à binomial, faz como largura um apótomo, do qual as componentes são comensuráveis com as componentes da binomial e ainda na mesma razão, e, ainda, o apótomo que tem lugar terá a mesma ordem que a binomial.

CP112. Fundamentando os desmembramentos desta proposição[14], vem que onde se lê “o sobre uma racional” pode-se ler “o quadrado de uma reta exprimível” ou “o quadrado sobre uma reta racional”. Tais enfoques são pontuados, respectivamente, em Castaños (1996) e Heath (1956), sendo que, neste último autor, tem-se a importante afirmação de que “Heiberg considera que esta proposição e as sucessivas [X. 113-115] são interpoladas, embora a interpolação tenha ocorrido antes do tempo de Théon. Seu argumento é que [as proposições] X. 112-115 não são usadas em nenhum lugar, mas que X. 111 conclui satisfatoriamente a discussão completa das 13 irracionais (como indicado no corolário anterior), dando, assim, o que era necessário para uso em conexão com a investigação dos cinco sólidos

regulares."[15]. Por outro lado, as argumentações de Fowler (1992) são valiosas e evidenciam a prova de tal proposição supondo, de início, que a área exprimível dada por e^2 é aplicada à binomial $(b+c)$ como altura, onde $e^2 = (b+c).f$, então sua largura f será *alogos*. Assim, buscando encontrar g de modo que $f = (f+g) - g$, revelou que f é um apótomo. Desta forma, se e^2 é aplicado a c, sua largura será exprimível, comensurável com c, e maior do que f. Representando-a por $f + g_1$, logo tem-se que $e^2 = c.(f+g_1) = (b+c).f$. Deste ponto, vem que:

$$\frac{(b+c)}{c} = \frac{(f+g_1)}{f}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{g_1}{f}$$

Assim sendo, a partir desta proporção e do fato de que temos $f = (f+g_1) - g_1$, vem que teremos $g_1 = (f+g_1) - f$, e daí obtemos uma diferença entre uma linha exprimível e uma linha *alogos*, gerando, então, uma linha g_1 *alogos*, que não interessa, além do mais não se tem $\frac{f+g_1}{g_1} = \frac{b}{c}$, causando uma outra problemática. Desta forma, convém encontrar um g_2 tal que se tenha $\frac{f+g_2}{g_2} = \frac{b}{c}$. Logo, teremos a seguinte equivalência de proporções:

$$\frac{f+g_2}{g_2} = \frac{b}{c} = \frac{g_1}{f} = \frac{f+g_1+g_2}{f+g_2}$$

$$\frac{f+g_1+g_2}{f+g_2} = \frac{f+g_2}{g_2} = \frac{b}{c} = \frac{g_1}{f}$$

$$\frac{f+g_1+g_2}{f+g_2} = \frac{f+g_2}{g_2}$$

A partir desta proporção e recordando da proposição 19 do Livro VI, para os quadrados, onde se expressa que sendo x, y, z números tais que se $\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$, então $\frac{x^2}{y^2} = \frac{x}{z}$, logo ter-se-á:

$$\frac{(f+g_1+g_2)^2}{(f+g_2)^2} = \frac{f+g_1+g_2}{g_2}$$

$$\frac{(f+g_1+g_2)^2}{(f+g_2)^2} = \frac{f+g_1+g_2}{g_2} = \frac{(f+g_2)^2}{{g_2}^2} = \frac{b^2}{c^2}$$

Então, fica evidente que $f + g_1 + g_2$ é comensurável com g_2, tal qual $f + g_1$ é comensurável com g_2. Contudo, desde que $f + g_1$ seja comensurável com c, teremos que g_2 é comensurável com c, consequentemente g_2 é exprimível. Além disso, sendo $(f + g_2)^2$ comensurável com ${g_2}^2$, vem que $(f + g_2)$ também é exprimível. No entanto, desde que b seja incomensurável com c, logo $(f + g_2)$ é incomensurável com g_2. Consequentemente, de fato,

$f = (f + g_2) - g_2$ é um apótomo com um anexo g_2, dividido na mesma razão como a binomial $(b + c)$. Além do mais, como $\frac{(f+g_2)}{b} = \frac{g_2}{c}$, tem-se que g_2 é comensurável com c, logo os termos de $(f + g_2) - g_2$ são comensuráveis com os termos de $(b + c)$. Finalmente, através da proposição 14 do Livro X que garante "Caso quatro retas estejam em proporção, e a primeira seja maior em potência do que a segunda pelo sobre uma comensurável com aquela mesma [em comprimento], também a terceira será maior em potência do que a quarta pelo sobre uma comensurável com aquela mesma [em comprimento]. E, caso a primeira seja maior em potência do que a segunda pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma [em comprimento], também a terceira será maior em potência do que a quarta pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma [em comprimento].", vem que se completa a verificação do fato de que $(b + c)$ e $(f + g_2) - g_2$ pertencem à mesma ordem com respeito a qualquer linha exprimível h.

113. O sobre uma racional, aplicado a um apótomo faz, como largura a binomial, da qual as componentes são comensuráveis com as componentes do apótomo, e na mesma razão, e ainda a binomial que tem lugar tem a mesma ordem que o apótomo.

CP113. Expandindo as perspectivas desta proposição, convém salientar que onde se lê "o sobre uma racional" pode-se ler "o quadrado de uma reta exprimível" ou "o quadrado sobre uma reta racional". Tais sutilezas são observadas, respectivamente, em Castaños (1996) e Heath (1956), sendo que, neste último autor, conforme já afirmado nos comentários da proposição 112, menciona-se o fato de que "Heiberg considera que esta proposição e as sucessivas [X. 113-115] são interpoladas, embora a interpolação tenha ocorrido antes do tempo de Théon". Consolidando o teor de suas concepções, Fowler (1992) traz sucintas afirmações na busca da prova da proposição em apreço, revelando, inicialmente, que a área exprimível dada por e^2 é aplicada ao apótomo $(b - c)$ como altura, onde $e^2 = (b - c).f$, então sua

largura f será *alogos*. Assim, buscando encontrar g de modo que $f = (f - g) + g$, enxerga-se que f é uma binomial. Desta forma, se e^2 é aplicado a b, sua largura será exprimível, comensurável com b, e menor do que f. Representando-a por $f - g_1$, logo tem-se que $e^2 = b.(f - g_1) = (b - c).f$. Deste ponto, vem que:

$$\frac{(b-c)}{b} = \frac{(f-g_1)}{f}$$

$$\frac{c}{b} = \frac{g_1}{f}$$

Assim sendo, a partir desta proporção e do fato de que temos $f = (f - g_1) + g_1$, vem que teremos $g_1 = (f + g_1) - f$, e daí obtemos uma diferença entre uma linha exprimível e uma linha *alogos*, gerando, então, uma linha g_1 *alogos*, que não interessa, além do mais não se tem $\frac{f-g_1}{g_1} = \frac{b}{c}$, causando um outro problema. Desta forma, convém encontrar um g_2 tal que se tenha a igualdade $\frac{f-g_2}{g_2} = \frac{b}{c}$. Logo, teremos a seguinte equivalência de proporções:

$$\frac{f-g_2}{g_2} = \frac{b}{c} = \frac{f}{g_1} = \frac{g_2}{g_1-g_2}$$

$$\frac{f-g_2}{g_2} = \frac{g_2}{g_1-g_2} = \frac{b}{c} = \frac{f}{g_1}$$

$$\frac{f-g_2}{g_2} = \frac{g_2}{g_1-g_2}$$

A partir desta proporção e recordando da proposição 19 do Livro V, para os quadrados, onde se expressa que sendo x, y, z números tais que se $\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$, então $\frac{x^2}{y^2} = \frac{x}{z}$, vem que g_2 representa, assim, uma média proporcional entre $(f - g_2)$ e $(g_1 - g_2)$. Logo, teremos:

$$\frac{(f-g_2)^2}{{g_2}^2} = \frac{f-g_2}{g_1-g_2}$$

$$\frac{(f-g_2)^2}{{g_2}^2} = \frac{f-g_2}{g_1-g_2} = \frac{f^2}{{g_1}^2} = \frac{b^2}{c^2}$$

Então, fica evidente que $(f - g_2)^2$ é comensurável com ${g_2}^2$, portanto $(f - g_2)$ é comensurável com $(g_1 - g_2)$. Contudo, desde que $(f - g_2)$ seja comensurável com $[(f - g_2) - (g_1 - g_2)]$, logo $(f - g_2)$ é comensurável com $(f - g_1)$. Assim, não esquecendo que $(f - g_1)$ é comensurável com b, vem que $(f - g_2)$ é comensurável com b. Consequentemente, desde que tenhamos $\frac{f-g_2}{g_2} = \frac{b}{c}$, tem-se que g_2 é racional e comensurável com c. Daí que como $(f - g_2)$ é comensurável com b e g_2 é comensurável com c, tem-se que

$(f - g_2)$ e g_2 são racionais e comensuráveis somente em quadrado, de modo que $f = (f - g_2) + g_2$ é uma binomial com um anexo g_2, dividido na mesma razão como o apótomo $(b - c)$. Além do mais, como $\frac{(f-g_2)}{b} = \frac{g_2}{c}$, tem-se que g_2 é comensurável com c, logo os termos de $(f - g_2) + g_2$ são comensuráveis com os termos de $(b - c)$. Finalmente, através da proposição 14 do Livro X que garante "Caso quatro retas estejam em proporção, e a primeira seja maior em potência do que a segunda pelo sobre uma comensurável com aquela mesma [em comprimento], também a terceira será maior em potência do que a quarta pelo sobre uma comensurável com aquela mesma [em comprimento]. E, caso a primeira seja maior em potência do que a segunda pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma [em comprimento], também a terceira será maior em potência do que a quarta pelo sobre uma incomensurável com aquela mesma [em comprimento].", vem que se completa a verificação do fato de que $(b - c)$ e $(f - g_2) + g_2$ pertencem à mesma ordem com respeito a qualquer linha exprimível h.

114. Caso uma área seja contida por um apótomo e a binomial, da qual as componentes são tanto comensuráveis com as componentes do apótomo quanto na mesma razão, a que serve para produzir a área é racional.

CP114. Vivenciando as essências desta proposição, é interessante notar que onde se lê "a que serve para produzir a área é racional" pode-se ler "o lado do quadrado equivalente à área é exprimível" ou "o lado da área é racional". Tais concepções são pontuadas, respectivamente, em Castaños (1996) e Heath (1956), sendo que, neste último autor, conforme já afirmado nos comentários das proposições 112 e 113, tem-se o esclarecimento de que Heiberg evidencia que a referida proposição seja interpolada. De qualquer forma, investigando suas nuances e consolidações, Fowler (1992) revela que, considerando uma binomial dada por $(b + c)$ e o apótomo dado por $(f - g)$, então b e f, juntamente com c e g, são comensuráveis, sujeitos á

proporção $\frac{b}{f} = \frac{c}{g}$. Assim sendo, o que se deseja provar é o fato de que dada a área $\sigma^2 = (b+c)(f-g)$, então σ ou $\sqrt{(b+c)(f-g)}$ é racional. No entanto, a proposição 112 garante que $e^2 = (b+c)(u-v)$, com u e f, juntamente com v e g, sendo comensuráveis. Logo, teremos que $\frac{f}{u} = \frac{g}{v} = \frac{f-g}{u-v}$, garantindo, desta forma, que $(f-g)$ é comensurável com $(u-v)$. Contudo, $(b+c)(f-g)$ é comensurável com $(b+c)(u-v)$. Ora essa, mas ainda pela proposição 112, $(b+c)(u-v)$ é comensurável com a área e^2. Daí que $(b+c)(f-g)$ é comensurável com a área e^2. Portanto, $(b+c)(f-g)$ é uma área racional. Finalmente, conclui-se que $\sqrt{(b+c)(f-g)}$ é racional.

COROLÁRIO

E tornou-se-nos também evidente por isso que é possível uma área racional ser contida por retas irracionais; o que era preciso provar.

CC9. Enfatizando as nuances dos comentários referentes a este corolário, vem que onde se lê “é possível uma área racional ser contida por retas irracionais” pode-se ler “é possível que uma área exprimível esteja compreendida por retas não exprimíveis”. Tal concepção está posta na tradução de Castaños (1996) e a autora ainda expõe, a respeito da interpolação de todo o conteúdo das proposições 112 a 115, incluindo o referido corolário, que “Estas proposições (112-115) aparecem depois da recapitulação dos treze tipos de retas não exprimíveis da classificação geral que poderia ser a conclusão do livro. Não têm relação com o resto do tratamento dos treze tipos de retas sem razão exprimível e não se usam nos livros posteriores sobre geometria dos sólidos.”.

115. A partir de uma medial têm lugar ilimitadas irracionais, e nenhuma é a mesma que nenhuma das anteriores.

CP115. Para os elos pertinentes aos comentários desta proposição[16], tem-se que onde se lê “a partir de uma medial têm lugar ilimitadas irracionais” pode-se ler “a partir de uma reta medial se produz um número infinito de retas não exprimíveis” ou “de uma reta medial surgem retas irracionais infinitas em número”. Tais concepções estão expostas, respectivamente, em Castanhos (1996) e Heath (1956). Por outro lado, são muito sutis os esclarecimentos de Castaños (1996) pontuando a sempre intrigante questão da interpolação das proposições 112 a 115 ao corpo do Livro X, afirmando que “[As proposições] 112-115 parecem ser o gérmen de um novo estudo sobre as retas sem razão exprimível. [A proposição] 115, em particular, amplia o número de seus diferentes tipos. Têm conotações de ser um conjunto de teoremas antigos que Heiberg pensa que podem atribuir-se a Apolônio, ainda que não sejam genuínos. Heath considera, no entanto, que [as proposições] 112-114 têm relação com as precedentes: [a proposição] X 111 mostra que uma reta binomial não pode ser também um apótomo, enquanto que [as proposições] X 112-114, prontamente, como cada uma delas pode ser usada para converter a outra em exprimível.”. Também são valiosas as argumentações de Heath (1956) quando explicita que “sendo medial a reta representada por $\sqrt{\kappa\rho}$, caso σ represente uma reta racional, então $\sqrt{\sqrt{\kappa\rho}\sigma}$ é uma nova reta irracional. Assim, é a média proporcional entre σ e uma outra reta $\phi = \sqrt{\kappa\rho}$, e assim por diante, indefinidamente.”[17].

8.3 NOTAS E REFERÊNCIAS

1 – É fundamental recordar que o texto de todas as proposições, definições, corolários e lemas seguem a tradução para o português, do texto grego sedimentado por Heiberg, efetuada por Irineu Bicudo. A referida tradução é, atualmente, o único compêndio que evidencia a tradução, para a língua portuguesa, da obra euclidiana de *Os Elementos*, baseando-se no original grego. Ainda sedimentando tais enfoques, foram cruciais e em muito contribuíram no entendimento de todo o texto do Livro X de *Os Elementos* de Euclides, as traduções, também do original grego, para o inglês, efetuada por Thomas Little Heath e, para o espanhol, realizada por Maria Luisa Puertas Castaños.

2 – A respeito das dificuldades de leitura do Livro X, de *Os Elementos* de Euclides, Benno Artmann, op. cit., pp. 8-9, no capítulo 2, intitulado *The Contents of The Elements* (*Os Conteúdos de Os Elementos*), item 9, denominado *Book X: Incommensurable Line Segments* (*Livro X: Segmentos de Linha Incomensuráveis*), consolida o entendimento de que o mesmo continua fundamental para que possamos enxergar as pluralidades dos, atualmente, chamados números irracionais*:*

> *O Livro X é o mais volumoso livro de Os Elementos, ocupando cerca de um quarto do livro inteiro. Nele, o algoritmo euclidiano do Livro VII é aplicado para magnitudes em geral a fim de obter o critério para comensurabilidade (...) [Na proposição] X 9 Euclides afirma como uma consequência imediata, que o lado de um quadrado de área n é incomensurável com o lado de um quadrado de área 1, quando n não é um número quadrado. O volume do material do Livro X, até a proposição 115, consiste em um cuidadoso estudo de vários tipos de linhas incomensuráveis (...) Historicamente, a descoberta das linhas incomensuráveis, ou, como diríamos hoje, números irracionais, parece ter sido de primordial importância.*

3 – O texto em francês de Simon Stevin, onde o mesmo faz menção à chamada “Cruz dos Matemáticos”, para o conteúdo do Livro X, aparece em B. L. van der Waerden, op. cit., p. 172. Muito interessante, também, é quando o referido autor, em nota de rodapé, evidencia de onde colheu tal preciosidade, explicitando: “Oeuvres Mathématiques de Simon Stevin de Bruges, où sont insérées les Mémoires Mathématiques desquelles s’est exercé le Très-haut et Très-illustre Prince Maurice de Nassau, etc. Leiden 1634, p.10a.”, ou seja, “Trabalhos Matemáticos de Simon Stevin de Bruges, onde são inseridas as Memórias Matemáticas que exerceu o Altíssimo e Ilustríssimo Príncipe Maurício de Nassau, etc. Leiden 1634, p. 10a.”. Por outro lado, os esclarecimentos de David Fowler, na nota 4, de seu trabalho *An Invitation to Read Book X of Euclid’s Elements (Um Convite para Ler o Livro X de Os elementos de Euclides*), p. 260, trazem singularidades ao contexto do texto de Simon Stevin, principalmente quando afirma que “Os trabalhos matemáticos de Stevin foram, então, republicados por Albert Girard em 1634 como os Oeuvres Mathématiques (Trabalhos Matemáticos) em seis partes, paginados separadamente mas encadernados juntos, e a primeira parte contém L’arithmétique (A aritmética) e La pratique d’arithmétique (A prática da aritmética) com um adicionado Appendice algébrique (Apêndice algébrico), agora paginado em uma sequência”.

4 – Com relação à afirmação de B. L. van der Waerden, op. cit., p. 172, quando expõe que “O autor conseguiu, admiravelmente, esconder sua linha de pensamento começando com suas construções (...)”, mais adiante revela que “Mas quem é este autor? Tem o mesmo

Teeteto que estudou a medial, a binomial, e o apótomo, também definido e investigado as dez outras irracionalidades, ou estas foram introduzidas mais tarde?".

5 – Sobre as substanciais argumentações de Wilbur Knorr, as mesmas estão pontuadas em seu artigo *'La Croix des Mathématiciens': The Euclidean Theory of Irrational Lines (A Cruz dos Matemáticos: A Teoria Euclidiana das Linhas Irracionais)*, pp. 54-56. É bastante sutil, por exemplo, suas afirmações quando, a respeito da proposição 115, a última do Livro X, sentencia que "Este resultado foi mais tarde generalizado por Apolônio, que mostrou que a interpolação, de qualquer número de médias proporcionais, entre duas linhas racionais dadas, comensuráveis somente em quadrado, produz linhas irracionais. Lembramos que essa extensão está prefigurada no trabalho de Teeteto; para notar que ele considerava a incomensurabilidade das raízes cúbicas, enquanto estas resultam da construção de duas médias proporcionais entre linhas dadas."

6 – Maiores informações sobre as proposições 91 a 96 podem ser colhidas em Christian Taisbak, op. cit. às pp. 49-54. De certa forma, os comentários das proposições 91 a 96 seguem, em inúmeros momentos, as ponderações de Heath evidenciadas em sua obra *Euclid – The Thirteen Books of The Elements (Euclides – Os Treze Livros de Os Elementos)*, Volume 3, pp. 190-211. Também, para o conjunto das referidas proposições, foram valiosas as percepções de Maria Luisa Puertas Castaños, enfatizadas em sua tradução e notas para o Livro X de *Os Elementos* de Euclides, pp. 149-163.

7 – Com relação aos interessantes exemplos, explicitados ao longo dos comentários das proposições 91 a 96, os mesmos têm a sua apresentação em uma tabela, intitulada Typical Examples of The Six Addtive and Subtractive Lines (Exemplos Típicos das Seis Linhas Aditivas e Subtrativas), mostrada no trabalho de David Fowler, *An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, onde no capítulo 6, denominado *The Classification of Book X, and Its Use in Book XIII (A Classificação do Livro X, e seu Uso no Livro XIII)*, à p. 248, pode-se verificar a ligação dos exemplos ao nome do lado dos quadrados, no caso, "apótomo", "primeiro apótomo de uma medial", "segundo apótomo de uma medial", "menor", "aquele que produz com uma área exprimível uma área medial", "aquele que produz com uma área medial uma medial completa".

8 – No caso analisado do “apótomo”, o exemplo exposto na proposição 91 traz o fato de que $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}a - \sqrt{\frac{1}{2}}a\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}a\right)^2 - 2.\sqrt{\frac{5}{4}}a^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{2}}a\right)^2 = \frac{5}{2}a^2 - \sqrt{5}\,a^2 + \frac{1}{2}a^2 = 3a^2 - \sqrt{5}\,a^2 = (3a - \sqrt{5}a)a$

ou seja, “tem-se o exemplo de um retângulo contido por $(3a - \sqrt{5}a)$ e a, gerando um quadrado equivalente de valor $(\sqrt{\frac{5}{2}}a - \sqrt{\frac{1}{2}}a)^2$.”.

9 – Para maiores informações sobre as proposições 97 a 102 e suas vinculações com as proposições 60 a 65, deve-se adentrar no trabalho *’La Croix des Mathématiciens’: The Euclidean Theory of Irrational Lines (A Cruz dos Matemáticos: A Teoria Euclidiana das Linhas Irracionais*), de Wilbur Knorr, p. 54. Também podem ser obtidas sutilezas, a respeito de tal bloco de proposições, em Chistian Taisbak, op. cit., à p. 55. Por outro lado, os comentários das proposições 97 a 102 seguem, em diversas circunstâncias, as concepções de Thomas Heath, op. cit., Volume 3, pp. 212-229. Ainda para o conjunto das referidas proposições, foram vitais as percepções de Maria Luisa Puertas Castaños, esboçadas em sua tradução e notas para o Livro X de *Os Elementos* de Euclides, pp. 164-176.

10 – Para maiores esclarecimentos, a respeito das proposições 103 a 107 e suas vinculações com as proposições 66 a 70, deve-se penetrar no trabalho *An Invitation to Read Book X of Euclid’s Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, onde no capítulo 6, denominado *The Classification of Book X, and Its Use in Book XIII (A Classificação do Livro X, e seu Uso no Livro XIII)*, à p. 250, pode-se traçar um paralelo entre binomiais e apótomos. Também podem ser obtidas informações, com relação a tal bloco de proposições, no artigo *’La Croix des Mathématiciens’: The Euclidean Theory of Irrational Lines (A Cruz dos Matemáticos: A Teoria Euclidiana das Linhas Irracionais)*, de Wilbur Knorr, p. 54. No entanto, é importante afirmar que os comentários referentes às proposições 103 a 107 seguem, em muitos aspectos, as fundamentações de Thomas Heath, op. cit., Volume 3, pp. 229-234. Ainda para o conjunto das proposições em questão, foram úteis as argumentações de Maria Luisa Puertas Castaños, mostradas em sua tradução e notas para o Livro X de *Os Elementos* de Euclides, pp. 176-181.

11 – Convém ainda informar, que as proposições 108 (área exprimível menos área medial) e 109 (área medial menos área exprimível), alicerçam seus vínculos com a proposição 71 (área exprimível mais área medial). Tal fato pode ser averiguado no trabalho de David

Fowler, *An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, no capítulo 6, denominado *The Classification of Book X, and Its Use in Book XIII (A Classificação do Livro X, e seu Uso no Livro XIII)*, à p. 243. As argumentações de Heath aparecem em sua obra *Euclid – The Thirteen Books of The Elements (Euclides – Os Treze Livros de Os Elementos)*, Volume 3, pp. 235-238. Já os elos dos enfoques de Maria Luisa Puertas Castaños, são evidenciados em sua tradução e notas para o Livro X de *Os Elementos* de Euclides, pp. 182-185.

12 – É extremamente importante comunicar, que a proposição 110 (área medial menos área medial), possui um elo de ligação com a proposição 72 (área medial mais área medial). Tal concepção está devidamente explicitada tanto em van der Waerden, op. cit., p. 172, como também em David Fowler, no artigo *An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, no capítulo 6, denominado *The Classification of Book X, and Its Use in Book XIII (A Classificação do Livro X, e seu Uso no Livro XIII)*, p. 243. As sutis explanações de Heath podem ser constatadas em seu compêndio *Euclid – The Thirteen Books of The Elements (Euclides – Os Treze Livros de Os Elementos)*, Volume 3, pp. 238-240. Por outro lado, as percepções de Maria Luisa Puertas Castaños são constatadas em sua tradução e notas para o Livro X de *Os Elementos* de Euclides, pp. 185-186.

13 – Para maiores esclarecimentos, a respeito do conteúdo da proposição 111, bem como do corolário a ela atrelado, deve-se vasculhar em Christian Taisbak, op. cit., à p. 57. O autor, considerando a palavra "vermelho" como irracional", expõe como tradução da proposição 111 que "um apótomo não é uma soma de dois vermelhos". Outra fonte importante de consulta, com relação á referida proposição, é o trabalho de Wilbur Knorr, *'La Croix des Mathématiciens': The Euclidean Theory of Irrational Lines (A Cruz dos Matemáticos: A Teoria Euclidiana das Linhas Irracionais)*, p. 55. Sedimentando as informações evidenciadas no texto do comentário, foram cruciais as concepções de David Fowler, no seu artigo *An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, no capítulo 6, denominado *The Classification of Book X, and Its Use in Book XIII (A Classificação do Livro X, e seu Uso no Livro XIII)*, p. 251. Já as explanações de Heath podem ser colhidas em seu compêndio *Euclid – The Thirteen Books of The Elements (Euclides – Os Treze Livros de Os Elementos)*, Volume 3, pp. 240-243.

14 – No intuito de melhor fortalecer o entendimento do bloco de proposições 112 a 115, é extremamente útil consultar o trabalho *'La Croix des Mathématiciens': The Euclidean Theory of Irrational Lines (A Cruz dos Matemáticos: A Teoria Euclidiana das Linhas Irracionais)*, de

Wilbur Knorr, pp. 55-56. Também possui expressivas concepções, com relação às proposições 112 a 114, o compêndio *Coloured Quadrangles – a Guide to the Tenth Book of Euclid's Elements (Quadriláteros Coloridos – Um Guia Para o Décimo Livro de Os Elementos de Euclides),* de Christian Taisbak, às pp. 58-59. Salienta-se, também, que os comentários das proposições 112 a 115, incluindo o corolário ligado à proposição 114, seguem, em múltiplas percepções, as observações de Thomas Heath evidenciadas em sua obra *Euclid – The Thirteen Books of The Elements (Euclides – Os Treze Livros de Os Elementos),* Volume 3, pp. 243-255. Ainda para o conjunto das referidas proposições, foram cruciais as ponderações de Maria Luisa Puertas Castaños, retratadas em sua tradução e notas para o Livro X de *Os Elementos* de Euclides, pp. 189-197. Os enfoques de David Fowler, explicitados nas proposições 112 a 114, estão esboçados em seu artigo *An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides)*, no capítulo 6, denominado *The Classification of Book X, and Its Use in Book XIII (A Classificação do Livro X, e seu Uso no Livro XIII)*, pp. 251-253.

15 – Sobre a questão intrigante da interpolação das proposições 112 a 115, onde Heath aponta a sutil informação de que "Heiberg considera que esta proposição [X. 112] e as sucessivas [X. 113-115] são interpoladas, embora a interpolação tenha ocorrido antes do tempo de Théon. Seu argumento é que [as proposições] X. 112-115 não são usadas em nenhum lugar, mas que X. 111 conclui satisfatoriamente a discussão completa das 13 irracionais.", tem-se que a mesma é obtida em sua obra *Euclid – The Thirteen Books of The Elements (Euclides – Os Treze Livros de Os Elementos),* Volume 3, p. 246. Todavia o próprio Heath parece não concordar com tais fundamentações, pois, ao final de suas ponderações, testifica que*:*

> *Eu somente apontarei o que parece para mim aberto à dúvida no [texto] acima, nomeadamente que [as proposições] X. 112-114 (excluindo X. 115) não são conectados com o resto da exposição dos 13 irracionais. Parece-me que elas estão bem conectadas conectados. [A proposição] X. 111 mostrou-nos que uma reta binomial não pode ser também um apótomo. Mas [as proposições] X. 112-114 mostra-nos como qualquer um deles pode ser usado para racionalizar o outro, dando assim o que é, certamente, uma relação importante entre eles.*

.

16 – Em relação aos comentários pertinentes à proposição 115, as argumentações de Maria Luisa Puertas Castaños aparecem na sua tradução e notas para *Os Elementos*, de Euclides, Livros X-XIII, p. 190, nota 42, como também à p. 196. Já as ponderações de Heath, são colhidas na sua obra *Euclid – The Thirteen Books of The Elements (Euclides – Os Treze Livros de Os Elementos)*, Volume 3, pp. 254-255. É interessante notar que o referido autor ainda pontua que:

> *Heiberg tem razão ao afirmar que essa proposição, de qualquer forma, é estranha ao escopo geral do Livro X, e é, portanto, provavelmente uma interpolação, feita antes do tempo de Théon. É do mesmo caráter que um escólio ao final do Livro, que é (junto com a proposição interpolada, provando, de duas maneiras, a incomensurabilidade da diagonal de um quadrado com seu lado) relegado em Augusto, bem como Heiberg para um Apêndice.*

17 – Ao final dos comentários para a proposição 115, aparece em Heath, op. cit., p. 255-259, Volume 3, um tópico intitulado *Ancient Extensions of The Theory of Book X (Antigas Extensões da Teoria do Livro X)*, onde o autor revela “a trinomial”, “a reta primeira trimedial”, “a reta segunda trimedial” e “a maior composta das três retas”. Contudo, David Fowler, no seu trabalho *An Invitation to Read Book X of Euclid’s Elements (Um Convite Para Ler o Livro X de Os Elementos de Euclides),* no capítulo 6, denominado *The Classification of Book X, and Its Use in Book XIII (A Classificação do Livro X, e seu Uso no Livro XIII)*, p. 253, esclarece que “Após a proposição 115, os manuscritos do Livro X terminam com um velho baú de material não numerado, quase certamente interpolado: alterna provas das proposições 115, 106 e 107; duas provas longas que o lado de um quadrado é incomensurável com sua diagonal; e construções de planos incomensuráveis e figuras sólidas. Tudo isso é relegado em um apêndice por Heiberg (veja [Stamatis 1972, 228-236]) e muito disso não é mencionado em [Heath 1926].”.

PARTE V

CONCLUSÃO: OS DESFECHOS, AS POSSIBILIDADES

CAPITULO 9

O LIVRO X E SUA ATUAL CONCEPÇÃO

Sob vários aspectos, englobando teores extremamente vinculados à consolidação da matemática através dos tempos, o Livro X de *Os Elementos* de Euclides concentra, em sua estrutura voltada para análise dos segmentos de linha incomensuráveis, uma organização, que se não é perfeita, traz, em seus enfoques generalizados, a busca por uma melhor apresentação das 115 proposições a ele pertinentes. O Livro X, então, possui uma pulsação própria, um ritmo peculiar de expansão das ideias, de encadeamento das configurações que repercutem em toda a sua extensão. Não se pode esquecer, tampouco, os mais de dois mil anos que nos separam de uma obra densa e transformadora, capaz de nos agregar aos elementos de uma época onde a Grécia florescia e inundava o mundo com o pensamento de seus filósofos, poetas, historiadores, matemáticos. Neste importante ciclo de confluências, fundamentando um tempo crucial para o desenvolvimento do espírito criador de um povo, que até os nossos dias perpetua seus ecos e essências, o Livro X revela, ainda, a agudeza de traduzir em suas páginas, as chamadas primeiras, segundas e terceiras definições, trazendo todo um corpo de aspectos que irá sedimentar o texto das proposições a seguir, ou seja, cria-se um alicerce para que o conhecimento possa fluir de forma plena, segura, dando ao leitor um encadeamento substancial de prenúncios que precisam ser averiguados com zelo e perspicácia. De fato, não se está diante de um livro fácil, que pode ser manuseado ao bel prazer de quem quer que seja. Nele, verifica-se, de imediato, que, ou o leitor mergulha profundamente em suas águas, ou ficará à mercê dos velhos fantasmas matemáticos de todas as eras, anunciadores de que não podemos ir além de nós mesmos, presos em nossos próprios temores e convicções. Antes, se faz necessário um conhecimento prévio do tema da incomensurabilidade, o convívio importante com toda a obra euclidiana de *Os Elementos*, uma intimidade com o texto contínua, no intuito de melhor interagir com seus horizontes e recriações.

Assim, a primeira das primeiras definições, menciona que “Magnitudes são ditas comensuráveis as que são medidas pela mesma medida, e incomensuráveis, aquelas das quais nenhuma medida comum é possível produzir-se.”. Neste ponto, de início, nota-se a preocupação do autor em colocar em cena o importante papel das grandezas incomensuráveis, norteando a diferença básica entre as mesmas e as grandezas comensuráveis. Na fundamental proposição 2, sentencia-se que “Caso sendo subtraída, de duas magnitudes [expostas] desiguais, sempre por sua vez a menor da maior, a que é deixada nunca meça exatamente a antes de si mesma, as magnitudes serão incomensuráveis.”. De fato, sintetiza-se, na referida proposição, o procedimento da ἀνθυφαίρεσις (anthyphairesis – anthyphairese) como um elo para demonstrar-se, que no universo da matemática grega antiga, a questão da incomensurabilidade ganhava contornos de uma percepção que envolvia, na prática do máximo divisor comum, a partir do hoje conhecido algoritmo euclidiano, uma solução para tal problema. Logo, conforme argumentam inúmeros historiadores da matemática, o surgimento da incomensurabilidade não gerou, ao contrário do que possa parecer, uma crise nos conceitos e desmembramentos da matemática grega, isto porque através do método da ἀνθυφαίρεσις (anthyphairesis – anthyphairese), os matemáticos gregos puderam consolidar nos segmentos uma cadeia contínua de divisões, com um fim em se tratando dos segmentos comensuráveis e, sem um fim, infinita, para os incomensuráveis. Por outro lado, na proposição 7, tem-se a importante conotação de que “As magnitudes incomensuráveis não têm entre si uma razão que um número, para um número.”. Deste modo, impressiona a semelhança entre as ditas grandezas incomensuráveis e os, atualmente, chamados números irracionais.

Também não deve ser esquecido, em todo o corpo do Livro X, o importante papel de corolários e lemas, fundamentando uma maior compreensão das proposições evidenciadas, norteando o leitor na tentativa de envolvê-lo na plenitude do conteúdo do teorema apresentado, indicando, como esboçado no corolário após a proposição 9, que “Digo, então, que [também] as incomensuráveis em comprimento não são, em todos os casos, também em potência, porque as comensuráveis em potência não podem ter uma razão que um número quadrado, para um número quadrado, e por isso, sendo comensuráveis em potência, são incomensuráveis em comprimento. Desse modo, as incomensuráveis em comprimento não são, em todos os casos, também em potência, mas podem, sendo

incomensuráveis em comprimento, ser tanto incomensuráveis quanto comensuráveis em potência. E as incomensuráveis em potência são, em todos os casos, também incomensuráveis em comprimento, pois, se [são] comensuráveis em comprimento, serão também comensuráveis em potência. E foram supostas também incomensuráveis; o que é absurdo. Portanto, as incomensuráveis em potência são, em todos os casos, também em comprimento.]". Logo, o corolário traz uma afirmação que se constata após a consolidação da verdade do teorema apresentado. Já o efeito do lema é colocar um texto preliminar que sedimentará a demonstração da proposição a seguir. É o que acontece com o lema que antecede a proposição 19, quando expõe "Como foi provado que as comensuráveis em comprimento, também, em todos os casos, [são comensuráveis] em potência, mas as em potência não são , em todos os casos, também em comprimento, mas, então, podem ser comensuráveis ou incomensuráveis em comprimento, é evidente que, caso alguma seja comensurável em comprimento com a racional exposta, é dita racional e comensurável com ela não somente em comprimento, mas também em potência, visto que as comensuráveis em comprimento são, em todos os casos, também em potência

Mais adiante, na proposição 21, é exposta a "medial", sentenciando-se que "O retângulo contido por retas racionais, comensuráveis somente em potência, é irracional, e a que serve para produzi-lo é irracional, e seja chamada medial.", daí concluindo-se que a referida "medial" trata da média proporcional entre duas retas racionais (exprimíveis, comensuráveis) somente em quadrado. Na proposição 36, tem-se a configuração da "binomial", onde se constata que "Caso duas racionais comensuráveis somente em potência sejam compostas, a toda é irracional, e seja chamada binomial.". É extremamente relevante informar que, no bloco das proposições de 36 a 72, estão contidas as propriedades norteadoras de determinadas somas de pares de linhas exprimíveis, mas incomensuráveis. Todavia, Euclides, ao revelar, entre as proposições 47 e 48, as segundas definições, tendo-se percorrido em torno de um terço do livro, começa enfatizando que "Sendo supostas uma racional e a binomial nas componentes, da qual a maior componente é maior em potência do que a menor pela sobre uma comensurável com aquela mesma em comprimento, caso a maior componente seja comensurável em comprimento com a exposta racional, seja chamada [a toda] primeira binomial.". Continuando no périplo das segundas definições, Euclides menciona, da segunda à sexta definição, os

desmembramentos da segunda à sexta “binomial”. Na proposição 73, situa-se a configuração do “apótomo”, onde verifica-se que “Caso de uma racional seja subtraída uma racional, sendo comensurável somente em potência com a toda, a restante é irracional; e seja chamado apótomo.”. É pertinente esclarecer que, no grupo das proposições de 73 a 110, estão explicitadas as propriedades norteadoras de determinadas diferenças de pares de linhas exprimíveis, porém incomensuráveis. Contudo, Euclides, ao revelar, entre as proposições 84 e 85, as terceiras definições, tendo-se percorrido em torno de dois terços do livro, começa enfatizando que “Sendo supostas uma racional e um apótomo, caso a toda seja maior em potência do que a que é ajustada pelo sobre uma comensurável com aquela mesma em comprimento, e a toda seja comensurável com a exposta racional em comprimento, seja chamada primeiro apótomo.”. As outras definições, das terceiras definições, enfatizam do segundo ao sexto “apótomo”. De forma emblemática, as cinco últimas proposições, de 111 a 115, consolidam o final do Livro X de *Os Elementos*. É interessante frisar que alguns historiadores da matemática, embasados na opinião de Johan Heiberg, que argumenta que as proposições de 112 a 115 podem ter sido interpoladas, sustentam que o referido Livro deveria terminar na proposição 111, que afirma “O apótomo não é o mesmo que a binomial”. Ou seja, as quatro proposições finais não teriam vinculação com o corpo do Livro X, não sendo genuínas. Desta forma, chega-se á conclusão de que a proposição 111 termina, plenamente, a discussão completa das 13 irracionais No entanto, indo na contramão de tal entendimento, historiadores como Thomas Heath, agregados a uma perspectiva de que Euclides procurou, nas ditas últimas quatro proposições, ampliar ainda mais as fundamentações sobre as retas irracionais, sem razão exprimível, além de seus diferentes tipos, quando, na proposição 115 expõe que “A partir de uma medial têm lugar ilimitadas irracionais, e nenhuma é a mesma que nenhuma das anteriores”.

CAPITULO 10

AS REPERCUSSÕES DO EPÍLOGO

O matemático belga Simon Stevin, no século XVI, precisamente em 1585, ao evidenciar que o Livro X de *Os Elementos* de Euclides pode ser chamado de “a cruz dos matemáticos”, pontuando tal afirmação entre os matemáticos da Renascença, trouxe para o mesmo uma certa aura de livro muito complexo, indecifrável, impossível de ser totalmente analisado, mistério agrupando inúmeras incertezas, decodificando em suas linhas um texto cheio de inconveniências, impossibilidades. O livro ganhou, então, dois aspectos extremamente amedrontadores e desanimadores, o de ser o mais difícil e o mais longo de *Os Elementos*. A ideia foi se propagando e tornou-se avassaladora, a ponto de o livro também ser representado como um “beco sem saída” e, em tantas outras vezes, apresentar-se como uma obra que “não tem proveito algum”, trazendo “apenas dificuldades” para quem nele mergulhe e procure desvendá-lo, torná-lo acessível a quem quer que seja, mostrando ser um “material duro de digerir”, principalmente pelo caráter perturbador de sua interpretação. Assim, impressiona, que até os dias atuais, os ecos dos dizeres de Stevin ainda cheguem fortes, repercutam com uma intensidade inquietante. A Tese constrói seus alicerces e repercussões, procura esmiuçar, com toda perspicácia e expansão, as sutilezas do livro temido, todavia extremamente respeitado e definidor de conceitos primorosos.

De certa forma, os brilhantes trabalhos de Wilbur Knorr, David Fowler, Christian Taisbak, van der Waerden, Kurt von Fritz e Ian Mueller, ajudaram bastante a desvendar os campos áridos da incomensurabilidade, possibilitaram esclarecer muitas das passagens do Livro X. Estes autores são fundamentais e merecem ser consultados constantemente, visto que sedimentaram e expandiram ideias valiosas a respeito, de como melhor enxergar e explorar, os incomensuráveis. Também têm uma importância fundamental os comentários de Thomas Heath, na sua tradução para o inglês, a partir do original grego, do material do Livro X. Suas colocações e

ponderações contribuíram, decisivamente, nas concepções e enredos da Tese. Por outro lado, alguns comentários de Maria Luisa Puertas Castaños na sua tradução para o espanhol, a partir do texto grego, ajudaram bastante no entendimento de determinados enfoques contidos no Livro X. Não se pode esquecer, ainda, da obra de Benno Artmann, intitulada *Euclid – The Creation of Mathematics (Euclides – A Criação da Matemática)*, que pluraliza inúmeros comentários com relação ao Livro X, além de trazer um capítulo no qual tem-se *The Origin of Mathematics: Incommensurability and Irrationality (A Origem da Matemática: Incomensurabilidade e Irracionalidade)*.

De certo modo, a maioria dos livros de historiadores da matemática, envolvendo uma história completa da matemática, contém alguma referência ao livro *Os Elementos* de Euclides e, na maioria das vezes, muito pouca informação sobre o Livro X. No entanto, uma exceção sutil é o *História da Matemática* de Victor Katz, onde há um material que, ao ser consultado, consolida a precisão de determinadas proposições do Livro X. Assim, acredito, ao se perpetuar nesta Tese a análise completa do Livro X de *Os Elementos* de Euclides, evidencia-se um trabalho que dialoga, incessantemente, com a possibilidade de reverter o pensamento de “a cruz dos matemáticos”, apregoado por Stevin. Antes, com absoluta precisão, tem-se um material, que elaborado por Euclides, revelou-se como uma síntese das ideias matemáticas da incomensurabilidade no seu tempo, um compêndio que consegue agregar a multiplicidade e o fascínio das ideias no mundo grego antigo. O Livro X é, digamos, expandindo seus enlaces e conotações, “a luz dos matemáticos”, ou, sendo mais enfático, “o opus dos historiadores da matemática”, uma sucinta elaboração de pormenores que se encadeiam gerando um texto denso e elevado, o resultado de um esforço de Euclides para que, o acúmulo de ideias criado por mentes luminosas, pudesse ser concatenado e burilado, passado para as gerações futuras. Tamanho empenho e dedicação acabou por fundamentar o tema da irracionalidade na matemática do mundo contemporâneo, delineou a necessidade de estarmos em contato permanente com suas pluralidades, reverberações. O Livro X é uma obra que, dentro de *Os Elementos*, alarga novas pontes e horizontes do saber, movimenta o conhecimento matemático na direção de sua mais alta sublimidade, mostra que a matemática é a reconstrução plena de seus próprios ecos. .

BIBLIOGRAFIA

AABOE, A. *Episódios da História Antiga da Matemática*. Tradução de João Pitombeira de Carvalho. SBM – Sociedade Brasileira de Matemática. 1984.

ARISTÓTELES. *Tópicos & Dos Argumentos Sofísticos*. Tradução de Leonel Vallandro e Gerd Bornheim da versão inglesa de W. A. Pickard. Seleção de textos de José Américo Motta Pessanha. Coleção Pensadores. V. 1. Editora Nova Cultural. São Paulo. 1987.

_____. *Ética a Nicômaco & Poética*. Tradução de Leonel Vallandro e Gerd Bornheim da versão inglesa de W. A. Pickard. Seleção de textos de José Américo Motta Pessanha. Coleção Pensadores. V. 2. Editora Nova Cultural. São Paulo. 1991.

_____. *Metafísica*. Tradução brasileira com direção de Fidel Garcia Rodriguez da tradução italiana *Aristotele Metafisica – Saggio introduttivo, testo grego com traduzione a fronte e comentário a cura di Giovani Reale (edizione maggiore rinnovata).* Edições Loyola. São Paulo. 2002.

_____. *Órganon – Categorias, Da Interpretação, Analíticos Anteriores, Analíticos Posteriores, Tópicos, Dos Argumentos Sofísticos*. Tradução e Notas de Edson Bini. 2ª Edição Revista. Edições Edipro. São Paulo. 2009.

_____. *Obras Completas – Introdução Geral*. António Pedro Mesquita. V. 1. Imprensa Nacional – Casa da Moeda. Lisboa. 2005.

_____. *Obras Completas – Tópicos*. António Pedro Mesquita. Imprensa Nacional – Casa da Moeda. Lisboa. 2007.

_____. *Obras Completas – Sobre a Alma*. António Pedro Mesquita. V. 3. Imprensa Nacional – Casa da Moeda. Lisboa. 2010.

_____. *Tratados de Lógica (Órganon) – Sobre La Interpretación, Analíticos Primeros, Analíticos Segundos*. Introducciones, Traducciones y Notas por Miguel Candel SanMartín. Editorial Gredos. Madri. 1995.

ARTMANN, B. *Euclid – The Creation of Mathematics*. Springer – Verlag. New York: 1999.

ÁVILA, G. *Várias Faces da Matemática* – Tópicos Para Licenciatura e Leitura em Geral. 2ª Edição. Editora Edgard Blücher. São Paulo. 2010.

BELLO, A. L. *Origins of mathematical words* – a comprehensive dictionary of Latin, Greek and Arabic roots. Johns Hopkins University Press, 2013.

_____. *The Commentary of al-Nayrizi on Books* II – IV of Euclid's Elements of Geometry. 2009.

BEKKEN, O. B. *Equações de Ahmes até Abel*. Tradução de José Paulo Quinhões Carneiro. Universidade Santa Úrsula. 1994.

BOURBAKI, N. *Elements of the History of Mathematics*. Springer – Verlag. Berlim. 1994.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Editora Edgard Blucher. São Paulo. 1974.

BYRNE, O. *The First Six Books of The Element of Euclid*. William Pickering. Londres. 1847.

CAJORI, F. *A History of Mathematics*. Macmillan and Co. New York. 1894.

CHAUÍ, Marilena. *Introdução à História da Filosofia – Dos Pré-Socráticos a Aristóteles*. Editora Brasiliene. São Paulo. 1994.

CHIKARA, S.; MITSUO, S.; DAUBEN, J. *The Intersection of History and Mathematics.* Birkhäuser Verlag. Boston: 1994.

CHLUP, R. *Proclus – An Introduction.* Cambridge University Press. United Kingdom. 2012

COOKE, R. *The History of Mathematics* – A Brief Course. Second Edition. Wiley-Interscience. New Jersey – USA. 2006.

D'AMBROSIO, U. *Uma Síntese Sociocultural da História da Matemática*. Proem Editora. São Paulo. 2011.

_____. *Socio-cultural bases for Mathematics education*. Unicamp. Campinas. 1985.

DATTA, B.; SINGH, A. N. *History of Hindu Mathematics*: A Source Book. 2 vols. Asia Publishing House. Bombay. 1935 – 1938.

DAUBEN, J. W.; Christoph J. S. *Writing the History of Mathematics*: Its Historical Development. Birkhäuser Verlag. Basel – Boston – Berlin. 2002.

DIEUDONNÉ, J. *A Formação da Matemática Contemporânea*. Tradução de J. H. von Hafe Perez. Publicações Dom Quixote. Lisboa. 1999.

ÉSQUILO. *Prometeu Acorrentado*. Tradução de J. B. de Mello e Souza. Clássicos Jackson. V. XXII. Versão para eBook digitalizada. 2005.

EUCLIDES. *Os Elementos.* Tradução e comentários de Irineu Bicudo. Editora UNESP. São Paulo. 2009.

_____. *Elementos.* Libros I – IV. Tradución y Notas María Luisa Puertas Castaños. Introducción General de Luis Veja. Editorial Gredos. Madrid. 1991.

_____. *Elementos.* Libros V – IX. Tradución y Notas María Luisa Puertas Castaños. Editorial Gredos. Madrid. 1994.

_____. *Elementos.* Libros X – XIII. Tradución y Notas María Luisa Puertas Castaños. Editorial Gredos. Madrid. 1996.

EURÍPEDES. *Hipólito*. Tradução de J. B. de Mello e Souza. Clássicos Jackson. V. XXII. Versão para eBook digitalizada. 2006.

_____. *Alceste, Andrómaca, Íon, As Bacantes*. Traduções de Maria Helena da Rocha Pereira, Manoel de Oliveira Pulquério, José Ribeiro Ferreira, Maria Alice Nogueira Malça, Maria Manuela da Silva Álvares, Maria de Fátima Morais Machado. Editorial Verbo. Lisboa-São Paulo. 1973.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. 2ª Edição. Editora da UNICAMP. Campinas: 1997.

FOWLER, D. *The Mathematics of Plato's Academy* – A New Reconstruction. Second Edition. Clarendon Press. Oxford. 1999.

_____. *An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements*. Academic Press. England. 1992.

FRAJESE, A.; MACCIONI, L. *Gli Elementi di Euclide*. Unione Tipografico – Editrice. Turin. 1971.

FREIRE, Antonio. *Gramática Grega*. 5ª Edição. Livraria Apostaolado da Imprensa. Porto. 1971.

GARBI, G. G. *A Rainha das Ciências*. 5ª Edição. Editora Livraria da Física. São Paulo. 2010.

_____. *O Romance das Equações Algébricas* – A História da Álgebra. Makron Books Editora. São Paulo. 1997.

GARDING, L. *Encontro com a Matemática*. Tradução de Célio Alvarenga e Maria Manuela Alvarenga. Editora Universidade de Brasília. 1981.

GILLINGS, R. J. *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. Dover Publications. New York. 1982.

GOUVÊA, F. Q.; BERLINGHOFF, W. P. *A Matemática Através dos Tempos*. Tradução de Elza F. Gomide e Helena Castro. Editora Blucher. São Paulo. 2008.

GOW, J. *A Short History of Greek Mathematics*. Cambridge: At The University Press. 1884.

GRABINER, J. *The Mathematician, the Historian, and the History of Mathematics*. Historia Mathematica, 2. 439-447. 1975.

GRATTAN-GUINNESS, I. *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910*: An Introductory History. Princeton University Press. 1980.

GULLBERG, J. *Mathematics – From the Birth of Numbers. Norton & Company*. New York. 1997.

GUNDLACH, B. H. *Tópicos de História da Matemática – Números e Numerais*. Tradução de Hygino H. Domingues. Atual Editora. São Paulo. 1992.

HAY, C. *Mathematics from Manuscript to Print: 1300 – 1600*. Clarendon Press – Oxford. 1988.

HARTSHORNE, R. *Geometry: Euclid and Beyond. Springer – Verlag*. New York. 2000.

HEATH, T. *Euclid – The Thirteen Books of The Elements*. Vol. 3 (Books X – XIII). Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath. Second Edition. Reprinted. Dover Publications. New York. 1956.

_____. *Euclid – The Thirteen Books of The Elements*. Vol. 2 (Books III – IX). Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath. Cambridge University Press. London. 1908.

_____. *Euclid – The Thirteen Books of The Elements*. Vol. 1 (Books I – II). Translated with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath. Cambridge University Press. London. 1908

_____. *A History of Greek Mathematics*. Vol. I. From Thales to Euclid. Oxford University Press. London. 1921.

_____. *A History of Greek Mathematics*. Vol. II. From Aristarchus to Diophantus. Reprinted. Dover Publications. New York. 1981.

_____. *The Works of Archimedes*. Cambridge University Press. London. 1897.

HODGKIN, L. *A History of Mathematics – From Mesopotamia to Modernity*. Oxford Universty Press. New York. 2005.

HOLLINGDALE, S. *Makers of Mathematics.* Penguin Books. New York. 1989.

HORTAS, Isabel.; FIGUEIRAL, L. *O Porto e os Seus Matemáticos*. Fundação Eng. Antônio de Almeida. Porto: 2005.

HOYRUP, J.; DAMEROW, P. (Org.). *Changing Views on Ancient Near Eastern Mathematics. Dietrich Reimer Verlag*. Berlin. 2001.

IFRAH, G. *The universal history of numbers. The world's first number-systems*. Penguin. New Delhi. 2005.

_____. *Os Números – A História de uma Grande Invenção*. 3ª Edição. Tradução de Stella M. de Freitas Senra. Editora Globo. São Paulo. 1989.

ITARD, J. *Les Livres Arithmétiques d'Euclide. Hermann*. Paris. 1961.

JAHNKE, H. N.; KNOCHE, N.; OTTE, M. *History of Mathematics and Education*: Ideas and Experiences. Vandenhoeck & Ruprecht. Göttingen. 1996.

JAMES, I. M. *Remarkable mathematicians*: from Euler to von Neumann. Cambridge University Press. Cambridge. 2002.

KATZ, V. J. *A History of Mathematics – An Introduction*. Third Edition. Pearson Education. Boston. 2009.

_____. *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam*. Princeton University Press. 2007

KLINE, M. *Mathematics in Western Culture.* Penguim Books. USA. 1953.

_____. *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*. Oxford University Press. New York. 1972.

KNORR, W. *La Croix des Mathématiciens: The Euclidean Theory of Irrational Lines*. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society. Vol. 9. Nº 1. 1983.

_____. *The Evolution of the Euclidean Elements*: A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry. D. Reidel Publishing Company. Dordrecht – Boston. Holland – U.S.A. 1975.

_____. *The ancient tradition of geometric problems*. - Basel ; Birkhäuser. 1986.

LIDDELL, H. & SCOTT, R. *A Greek-English Lexicon*. Revised e Augmented Throughout By Sir Henry Stuart Jones. Clarendon Press. Oxford. 1996.

LINTZ, R. G. *História da Matemática*. Vol. 1. Editora da FURB – Universidade Regional de Blumenau. Blumenau: 1999.

_____. *História da Matemática*. Vol. 2. UNICAMP – Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência. Campinas. 2007.

LLOYD G.; BRUNSCHWIG, J. *Diccionario Akal de El Saber Griego*. Prólogo de Michel Serres. Ediciones Akal. Madri. 2000.

MAOR, E. *A História de um Número.* Tradução Jorge Calife. Editora Record. Rio de Janeiro. 2003.

MARTÍNEZ, M.; FERNÁNDEZ, F.; FLORES, P. *Utilización de Segmentos en Los Elementos de Euclides*. Universidad de Granada. Espanha. 2010.

MARTZLOFF, J. *A History of Chinese Mathematics*. Springer-Verlag. Berlin-New York. 1997.

MLODNOW, L. *A Janela de Euclides – A História da Geometria*: das Linhas Paralelas ao Hiperespaço. Geração Editorial. São Paulo. 2014.

MOREIRA, D.; MATOS, J. M. (Org.). *História do Ensino da Matemática em Portugal. Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.* 2005.

MUELLER, I. *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*. Dover Publications. New York. 2006.

NEUGEBAUER, O. *The Exact Sciences in Antiquity*. 2.ed. Dover Publications. New York. 1969.

ORE, O. *Number Theory and Its History.* Dover Publications. New York. 1988.

OSEN, L. M. *Women in Mathematics*. MIT Press. Boston. 1974.

PELLIZER, E. (Org). *Dicionário Etimológico da Mitologia Grega*. Disponível em www.demgol.units.it. 2013. [Consulta de novembro/2016 a fevereiro/2017].

PLATÃO. *Teeteto*. Tradução de Adriana Manuela Nogueira & Marcelo Boeri. Prefácio de José Trindade Santos. 3ª Edição. Fundação Calouste Gulbenkian. Lisboa. 2010.

_____. *Mênon*. Tradução de Maura Iglesias a partir do Texto estabelecido e anotado por John Burnet. Edições Loyola. 2001.

_____. *A República.* Tradução de Enrico Corvisieri. Editora Nova Cultural. São Paulo. 2001.

_____. *Apologia de Sócrates & O banquete*. Tradução e Notas Sueli Maria de Regino (Apologia de Sócrates) e Maria Aparecida de Oliveira (O Banquete). Editora Martin Claret. São Paulo. 2016

_____. *Fédon – Dáilogo Sobre a Alma e Morte de Sócrates*. Tradução de Miguel Ruas. Editora Martin Claret. São Paulo. 2002.

_____. *Teeteto*. Tradução Carlos Alberto Nunes. 3ª Edição. Editora Universitária. Belém. 2001.

POSSANI, C.; GONÇALVES, C. H. B. *Revisitando a Descoberta dos Incomensuráveis na Grécia Antiga*. Matemática Universitária (Nº 47). São Paulo. 2009.

QUETELET, A. *Sciences Mathématiques et Physiques Chez les Belges*. Bruxelles: 1866.

RESNIKOFF, H. L.; WELLS JR. R. O. *Mathematics in Civilization*. Dover Publications. New York. 1984.

ROQUE, T. *História da Matemática – Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas*. Zahar Editora. Rio de Janeiro. 2012.

ROTA, G.. *Book Review*: Morris Kline, Mathematical thought from ancient to modern times. Bull. Amer. Math. Soc. 80, n. 5, 805—807. 1974.

SARAIVA, L. (Editor). *History of Mathematical Sciences – Portugal and East Asia II*. Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais – Universidade de Lisboa. 2001.

SASAKI, C. *Descartes's Mathematical Thought.* Kluwer Academic Publishers. Boston-London. 2003.

SAWYER, W. W. *Prelude to Mathematics*. Dover Publications. New York. 1982.

SEGUI, V. M. *Aspectos Históricos de las Matemáticas Elementales*. Prensas Universitarias de Zaragoza. 2001.

SILVA, C. P. da. *Aspectos Históricos do Desenvolvimento da Pesquisa Matemática no Brasil*. Editora Livraria da Física – Sociedade Brasileira de História da Matemática. 2009.

SMITH, D. E. *History of Mathematics*. 2 vols. Dover Publication. 1958.

_____. *A source book in Mathematics*. 2 vols. Dover Publication. 1959.

SÒFOCLES. *Antígona.* Tradução e Notas de Sueli Maria de Regino. Editora Martin Claret. São Paulo. 2014.

_____. *Édipo Rei*. Tradução de Paulo Neves. Editora L&PM Pocket. Porto Alegre. 2007.

STRUIK, D. J. *A Concise History of Mathematics*. G. Bell and Sons Ltd. London. 1954.

_____. *História Concisa das Matemáticas*. 2° ed. Trad. João Cosme Santos Guerreiro. Gradativa Publicações. Lisboa: 1992.

TAISBAK, C. M. *Coloured quadrangles:* A guide to the tenth book of Euclid's Elements. Museum Tusculanum Press. Copenhaguen. 1982.

ULLOA, P. de. *Elementos Mathematicos*. 1706.

VAN DER WAERDEN, B. L. *Science Awakening*. Fourth Edition. Kluwer Academic Publishers. New York. 1975.

VASCONCELLOS, F. de A. *História das Matemáticas na Antiguidade*. Edição Livrarias Aillaud e Bertrand. Lisboa. 1925.

VENTURINI, A. E. G. *Los Matemáticos que Hicieron la Historia*. Ediciones Cooperativas. Buenos Aires. 2003.

WALKER, C. *Reading The Past Cuneiform*. British Museum Press. 1987.

WARDHAUGH, B. *How to read historical mathematics*. Princeton University Press. Princeton – USA. 2010.

WESSEL, C. *Om directionens analytiske betegning*. Tradução inglesa contida no livro A source book in Mathematics de David Eugene Smith. Kristiania. 1896.

XIAOCONG, L. *Survey and Study of pre-1900 Chinese Maps seen in Europe*. In History of Mathematical Sciences – Portugal and East Asia II. 23-44. Lisboa. 2001.

YOUNG, L. *Mathematicians and their times*: History of mathematics and mathematics of history. North-Holland. Amsterdam. 1981.

ZEBROWSKI, E. *A History of the Circle: Mathematical Reasoning and the Physical Universe*. Rutgers University Press. Piscataway. 1999.

ZEUTHEN, H. G., *Histoire des Mathematiques dans l'Antiquite et le Moyen Agt translated by J. Mascart*. Paris. 1902.

ZDRAVKOVSKA, S.;DUREN, P. (Editors). *Golden Years of Moscow Mathematics*. History of Mathematics – Volume 6. American Mathematical Society – London Mathematical Society. 1993.