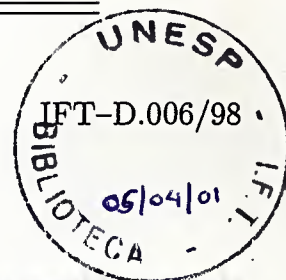
**IFT**

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

Agradecimentos

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Leis de Conservação e Simetrias de Equações Diferenciais no Espaço de Jatos

Claudio Fabiano Alves

Orientador:

Prof. Dr. Roberto André Kraenkel



Agosto de 1998

A CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, o Prof. Roberto A. Kraenkel, por ter me recebido, e pela liberdade com que pude realizar este trabalho.

Aos colegas do IFT: Abel, Alexandre, André, Daniel, Fabiano, Leonardo, Lúcio, Luis Carlo, Marcos e Maurizio, pela amizade.

Aos meus pais, Donato e Genircia, aos meus irmãos, por tudo.

À Paula pela amizade e companheirismo.

Ao IFT e à UNESP pela infra-estrutura.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

O estudo e a determinação de leis de conservação, bem como de simetrias, é de fundamental importância para que possamos compreender a natureza dos fenômenos físicos ao qual se propõe descrever determinados tipos de sistemas de equações diferenciais. Então, com esse quadro em mente, discutiremos aqui um método para que possamos determinar leis de conservação diretamente a partir de sistemas de equações diferenciais. Esse método nos permite encontrar leis de conservação pela análise das simetrias de sistemas de equações diferenciais em um espaço muito especial, chamado espaço de jatos, de tal forma que independe se o nosso sistema de interesse possui ou não um problema variacional associado. Os meios para que possamos determinar um conjunto de leis de conservação passa pela construção de funções características de cada simetria, bem como a possível determinação de operadores de recursão e simetrias generalizadas associados ao sistema de equações diferenciais em estudo. Com estes operadores e com as funções características das simetrias, podemos então determinar conjuntos e hierarquias de leis de conservação de uma forma bastante direta e operacional para qualquer sistema de equações diferenciais.

Abstract

The determination of conservations laws, as well as symmetries, are of fundamental importance for our understanding of the character of physical phenomena, which we believe to be described by some kind of systems of differential equations. So, with this in mind, we discuss here an approach to determine the conservations laws directly from systems of differential equations. This method allowed us to find the conservations laws from the study of symmetries of that systems of differential equations, in a very special kind of space, called jet space, independently if it has or not a variational problem associated with it. The ways for which we can determine a set of conservations laws, makes use of characteristic function for each symmetry, as well as the determination of recursion operators and generalized symmetries associated to the systems of differential equations. With this operators and the characteristic functions of symmetries, we are able to find hierarchies and set of conservations laws in a very direct and operational way for every kind of systems of differential equations.

Conteúdo

“A ciência das coisas exteriores não me cosolará da ignorância da moral, em tempo de aflição; mas a ciência dos costumes me consolará sempre da ignorância das ciências exteriores”.

Introdução 10

Símetrias de Equações Diferenciais Blaise Pascal 13

1.1. Simetrias de Equações Algébricas 14

1.1.1. Subgrupos Invariantes 14

1.1.2. Funções Invariantes 15

1.1.2. Invariância Infinitesimal 15

1.1.3. Invariância Local 16

“Simetria no que vemos de um ponto de vista, baseada no fato de não haver razão de procedermos de outro modo; e baseada também na figura do homem; daí acontecer de querermos a simetria apenas em largura e não em altura nem em profundidade.” 19

1.2. Sistemas de Equações Diferenciais 21

1.2.1. Prolongamento da Ação do Grupo Blaise Pascal 22

1.2.2. Invariância de Equações Diferenciais 24

1.2.3. Prolongamento de um Campo Vetorial 24

1.2.4. Condição de Invariância Infinitesimal 25

1.2.5. Uma Fórmula para o Prolongamento 26

1.2.6. Derivada Total 30

1.2.7. Uma Fórmula Geral Para o Prolongamento 31

1.2.8. Algumas Propriedades Básicas de Campos Vetoriais Prolongáveis 34

1.3.10	Funções Características da Simetria	34
2	Determinação da Álgebra da Simetria de Algumas Equações Diferenciais	35
2.1	Determinação da Álgebra Associada a Equações Iniciais	36
2.1.1	Condição de Invariância	37
2.1.2	Equação Determinante	38
2.1.3	Construção dos Geradores da Álgebra da Lei Associada	40

Conteúdo

Introdução	10
1 Simetrias de Equações Diferenciais	13
1.1 Simetrias de Equações Algébricas	14
1.1.1 Subconjuntos Invariantes	14
1.1.2 Funções Invariantes	15
1.1.3 Invariância Infinitesimal	15
1.1.4 Invariância Local	16
1.1.5 Método para Construir Invariantes	17
1.2 Grupos e Equações Diferenciais	18
1.3 Espaço de Jatos e Prolongamento	19
1.3.1 Sistema de Equações Diferenciais	21
1.3.2 Prolongamento da Ação do Grupo	23
1.3.3 Invariância de Equações Diferenciais	24
1.3.4 Prolongamento de um Campo Vetorial	24
1.3.5 Condição de Invariância Infinitesimal	25
1.3.6 Uma Fórmula para o Prolongamento	26
1.3.7 Derivadas Totais	30
1.3.8 Uma Fórmula Geral Para o Prolongamento	31
1.3.9 Algumas Propriedades Básicas de Campos Vetoriais Prolongados	34

1.3.10	Funções Características de Simetrias	34
2	Determinação da Álgebra de Simetrias de Algumas Equações Diferenciais	36
2.1	Determinação da Álgebra Associada a Equação do calor	36
2.1.1	Critério de Invariância	37
2.1.2	Equação Determinante	38
2.1.3	Construção dos Geradores da Álgebra de Lie Associada	40
2.2	A Equação de KdV	43
2.2.1	Critério de Invariância e Equação Determinante	43
2.2.2	Construindo Geradores	47
2.3	Equação de Cahn-Hilliard	48
2.3.1	Os Geradores das Simetrias da Equação de Cahn-Hilliard	51
2.4	A Equação de Onda	51
2.4.1	Construindo os Geradores	53
3	Simetrias Variacionais e Leis de Conservação	55
3.1	Simetrias Variacionais	55
3.1.1	Critério Infinitesimal de Invariância	57
3.1.2	Simetrias da equação de Euler-Lagrange	59
3.2	Leis de conservação	64
3.2.1	Leis de Conservação Triviais	65
3.2.2	Características de Leis de Conservação	67
3.3	Teorema de Noether	69
4	Simetrias Generalizadas, Operadores de Recursão e Sistemas Hamiltonianos	72
4.1	Simetrias Generalizadas	72
4.1.1	Funções Diferenciais	73
4.1.2	Campos Vetoriais Generalizados	73

4.1.3	Campos Vetoriais de Evolução	75
4.1.4	Calculando Simetrias Generalizadas	76
4.1.5	Equações de Evolução	77
4.2	Operadores de Recursão	79
4.2.1	Derivadas de Fréchet	81
4.2.2	Derivadas de Lie de Operadores Diferenciais	82
4.2.3	Crítério para Operadores de Recursão	84
4.2.4	Operadores Diferenciais Adjuntos	86
4.3	Sistemas Hamiltonianos	90
4.3.1	Parênteses de Poisson	90
4.3.2	Campo Vetorial Hamiltoniano	91
4.3.3	Funções de Estrutura	92
4.3.4	Equação de Evolução	94
5	Determinando leis de conservação	97
5.1	A Equação da KdV	97
5.1.1	Características e Simetrias Ordinárias	98
5.1.2	Características e Simetrias Generalizadas	98
5.1.3	Leis de Conservação	99
5.2	A Equação do Calor	104
5.2.1	Características e Simetrias Ordinárias	104
5.2.2	Características Generalizadas e Operadores de Recursão	105
5.2.3	Leis de Conservação	106
5.3	A Equação de Cahn-Hilliard	110
5.3.1	Características e Simetrias Ordinárias	110
5.3.2	Leis de Conservação	111
5.4	A Equação de Onda	112

5.4.1	Características e Simetrias Ordinárias	113
5.4.2	Características e Simetrias Generalizadas	114
5.4.3	Leis de Conservação	115
A	Variedades Diferenciáveis	118
B	Grupos de Lie	120
C	Álgebras de Lie	125
	Bibliografia	129

Introdução

A importância de se conhecer invariantes em uma teoria física deve-se ao fato que a partir de quantidades conservadas no sistema podemos verificar se a nossa teoria esta de acordo com os fatos observacionais aos quais ela se propõem descrever. Além desse fato de carácter básico, acrescente-se que a existência de quantidades conservadas faz com que possamos reduzir a região do espaço de fase acessível ao sistema em questão.

Sabemos, que a grande maioria dos sistemas físicos são descritos por algum tipo de equação diferencial, ou por um conjunto delas. Cade então colocar a questão de como determinar quantidades conservadas para uma dada equação diferencial (ou sistema delas). Com esse objetivo em mente, queremos aqui, nesta dissertação, descrever um método sistemático para que possamos determinar quantidades conservadas diretamente a partir das equações diferenciais que descrevem o sistema.

Poderíamos dividir os sistemas de equações diferenciais em duas grandes classes. As que estão associados a problemas variacionais, ou seja, como veremos mais adiante, sistemas de equações diferenciais auto-adjuntos. E os outros, que não possuem um problema variacional associado. Para os primeiros, dizemos que os mesmos são decorrentes da extremização de uma

dado funcional, que em física normalmente chamamos de Lagrangeana. Para estes sistemas poderíamos determinar leis de conservação diretamente a partir do Teorema de Noether, teorema este bastante conhecido entre os físicos, e que será discutido no Cap.(3) dessa dissertação. Cabe frisar, porém, que muitos sistemas físicos não são descritos por equações provindas de uma Lagrangeana. Os sistemas dissipativos, por exemplo. Note-se porém, que a inexistência de uma formulação Lagrangeana não quer dizer, necessariamente, que procede de processos dissipativos. Como veremos, a equação de Korteweg-de Vries fornece um exemplo destrutivo de sistemas não Lagrangeano conservativo.

Daremos, nesta dissertação, ênfase a sistemas de equações diferenciais que não são auto-adjuntos, ou seja, não possuem uma Lagrangeana associada. Como exemplo desse tipo de equação, discutiremos aqui a Equação do Calor, Equação de Korteweg-de Vries (KdV) e a equação de Cahn-Hilliard. E como exemplo de uma equação que possui um funcional associado, discutiremos a Equação de Onda. Vale mencionar que o caso de exemplos será, ademais, frequente. Com isso se pretende dar concretude a conceitos matemáticos por vezes abstratos.

A abordagem que daremos nessa dissertação é bastante geométrica, e os sistemas de equações diferenciais, nessa análise, serão descritos por objetos geométricos. Quanto as equações que nos servirão de exemplos, a sua escolha faz com que tenhamos entre elas tipos variados de dinâmicas. Temos duas equações lineares e duas não-lineares. Das não lineares, uma é integrável (KdV) e a outra não é (Cahn-Hilliard). A equação do calor e a equação de Cahn-Hilliard descrevem sistemas dissipativos. As outras duas não. Mesmo que não venhamos a fazer uso dessas propriedades, vemos que os conceitos e os métodos que aqui iremos expor perpassam uma grande variedade de situações.

No Cap.(1) introduziremos uma série de conceitos e definições, tais como um critério de invariança (ou simetria) de equações diferenciais. Associamos uma álgebra de Lie com o conjunto de geradores de transformações de simetrias de um sistema de equações diferenciais. Os conceitos de prolongamento e de espaço de jatos também serão introduzidos no Cap.(1). No

Cap.(2), a partir das idéias expostas no Cap.(1), determinaremos os geradores de transformações de simetrias, que formam uma álgebra de Lie, para as nossas quatro equações em estudo.

No Cap.(3) discutiremos simetrias variacionais, mostraremos por exemplo, que o conjunto de simetrias do funcional associado a um sistema de equações diferenciais, está sempre contido no conjunto de simetrias da sua equação de movimento. Determinaremos, também nesse capítulo, um conjunto de simetrias variacionais para a Equação de Onda.

Em seguida, no Cap.(4), faremos uma generalização do conceito de simetria, quando também definiremos a idéia de operadores de recursão. Nesse capítulo, demonstraremos porque apenas equações diferenciais auto-adjuntas podem ser oriundas de um determinado problema variacional.

E, finalmente, com a idéia de funções características de campos vetoriais Hamiltonianos, introduzidos no final do Cap.(4), poderemos então determinar, no Cap.(5), leis de conservação propriamente ditas, para as nossas quatro equações em estudo. A dissertação termina então, ilustrando o uso dos conceitos que foram introduzidos nos capítulos anteriores, de tal forma a exibir um tipo de “vitrine” de quantidades conservadas.

Devemos ressaltar, por fim, que o espírito que motiva a presente dissertação não é a de fazer uma revisão completa do assunto e também não é a de se ater a uma exposição matematicamente rigorosa. Conquanto o assunto seja de índole matemática, o que aqui se faz é dar uma visão “prática” de quantidade conservadas, muitas vezes convencendo o leitor mais pela constatação dos métodos do que pela demonstração. Nesta mesma ordem de idéias, cabe mencionar que vários teoremas serão dados sem demonstração no texto, ou porque elementares, ou porque muito extensos.

Capítulo 1

Simetrias de Equações Diferenciais

O conjunto de todas as simetrias associadas a um sistema de equações diferenciais forma um grupo de transformações locais que atua no espaço das variáveis dependentes e independentes do sistema, com a propriedade básica de levar uma solução em outra. O principal objetivo desse capítulo será desenvolver um método sistemático e operacional para que possamos determinar quais são estas simetrias.

Para tanto necessitamos primeiramente entender como que um grupo de simetrias atua nas soluções, levando-as em outras. Com esse objetivo estudaremos na primeira seção desse capítulo simetrias associadas a equações algébricas.

Na segunda seção desse capítulo veremos como podemos relacionar o conceito de grupos, com o de sistemas de equações diferenciais, e definir de uma forma bastante precisa a idéia de simetria para um sistema de equações diferenciais.

Na última seção desse capítulo vamos introduzir uma sequência de conceitos que serão de extrema importância para o cálculo do grupo de simetrias de um sistema de equações diferenciais, bem como definir precisamente, e de uma forma geométrica, o que entendemos por um sistema de equações diferenciais. As principais idéias a serem discutidas nessa última seção serão a do espaço de jatos e a prolongamento da ação do grupo de transformações de simetria para que o mesmo atue nesse espaço.

1.1 Simetrias de Equações Algébricas

Antes de entrarmos na questão das simetrias de equações diferenciais, será útil primeiramente discutirmos simetrias de equações algébricas. Seja

$$F_\nu(x) = 0 \quad \nu = 0, \dots, l \quad (1.1)$$

um sistema de equações algébricas tal que $F_1, F_2, \dots, F_l$ são funções suaves de argumentos reais, definidas em uma variedade $\mathcal{M}$. Uma solução x será um ponto $x \in \mathcal{M}$ tal que $F_\nu(x) = 0$. Para esse dado sistema de equações, um grupo de simetrias será um grupo G de transformações locais, com a propriedade básica de levar um ponto do conjunto de soluções para outro ponto do mesmo conjunto, isto é, leva uma solução em outra solução.

Assim se x for solução, e $g \in G$ tal que $g \cdot x$ também é uma solução de $F_\nu = 0$, então g é um elemento de um grupo de simetrias para F .

1.1.1 Subconjuntos Invariantes

Definição 1.1

Seja G um grupo de transformações locais atuando em alguma variedade $\mathcal{M}$. Um subconjunto $S \subset \mathcal{M}$ é dito ser G -invariante, e G é dito ser um grupo de simetrias de S , se sempre que $x \in S$, tivermos $g \cdot x \in S$.

Para ilustrar a idéia considere $\mathcal{M} \equiv \mathbb{R}^2$ e G_c um grupo a 1-parâmetro de translações no $\mathbb{R}^2$, assim

$$(x, y) \longrightarrow (x + c\epsilon, y + \epsilon), \quad \epsilon \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

onde c é uma constante. Então podemos verificar facilmente que a família de retas $x = cy + d$ são subvariedades invariantes sob a ação de G_c , como era de se esperar, já que G_c gera translações dos pontos sob a reta.

Um segundo exemplo de subvariedade do $\mathbb{R}^2$ invariante sob a ação de um dado grupo de transformações que podemos visualizar facilmente será o seguinte, $S = \{(x, y) : yx = 0\}$ que

é claramente invariante sob a ação de um grupo de transformações de escala, $(x^i \rightarrow \lambda^i x^i)$.

1.1.2 Funções Invariantes

Agora queremos encontrar um critério de invariância para funções, que são parte fundamental de nosso estudo de simetrias de equações algébricas. Isto é, queremos encontrar as simetrias associadas as funções $F(x)$ que definem o nosso sistema de equações.

Definição 1.2

Seja G um grupo de transformações locais atuando em uma variedade $\mathcal{M}$. Uma função $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, onde $\mathcal{N}$ é uma segunda variedade, é dita ser uma função G -invariante se para todo $x \in \mathcal{M}$ e todo $g \in G$, a seguinte relação for verdadeira:

$$F(g \cdot x) = F(x). \quad (1.3)$$

Vejamos o seguinte exemplo: considere a função $\xi(x, y) = \frac{x}{y}$ para $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0\}$. Se tomarmos o grupo das transformações de escala $G^1 : (x, y) \rightarrow (\lambda x, \lambda y)$, podemos verificar facilmente a invariância de $\xi(x, y)$ sob a ação desse grupo G^1 .

1.1.3 Invariância Infinitesimal

A importância de um critério infinitesimal de invariância que nos será proporcionado pela teoria dos Grupos de Lie, está no fato de que podemos substituir complicadas, e muitas vezes, não-lineares condições de invariância, por uma forma infinitesimal e linear, que representará a ação do grupo. Dessa maneira fica bastante convidativo estabelecermos um critério infinitesimal de invariância.

Proposição 1.3

Seja G um grupo conexo de transformações atuando em uma variedade $\mathcal{M}$. Uma função suave real $\zeta : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função invariante sob a ação do grupo G se e somente se

$$v(\zeta) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{M} \quad (1.4)$$

onde $\mathbf{v}$ é o gerador infinitesimal do grupo G .

Assim, se $\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_r$ formam uma base para uma álgebra de Lie $\mathcal{A}$, e são os geradores infinitesimais de G , então a Proposição (1.3) nos diz que $\zeta(x)$ será uma função invariante se e somente se $\mathbf{v}_k(\zeta) = 0$ para $k = 1, \dots, r$. Para um dado sistema de coordenadas locais a forma geral para um campo vetorial $\mathbf{v}$ será dada por

$$\mathbf{v}_k = \sum_{i=1}^m \xi_k^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (1.5)$$

Se impusermos o nosso critério de invariância, obteremos

$$\mathbf{v}_k(\zeta) = \xi_k^1(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x^1} + \xi_k^2(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x^2} + \dots + \xi_k^m(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x^m} = 0 \quad (1.6)$$

ou seja, ζ deve satisfazer um sistema linear e homogêneo de equações diferenciais parciais de primeira ordem. Tomemos como exemplo o grupo das translações no plano, que possui o gerador infinitesimal dado por $\mathbf{v} = c\partial_x + \partial_y$. [1]. Da equação

$$\mathbf{v}(\zeta) = 0, \quad (1.7)$$

obtemos que a função ($\zeta = x - cy$) é invariante sob o grupo das translações no plano. Considere ainda o seguinte exemplo: seja $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$ e $S^1 \subset \mathcal{M}$; Se $S^1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$ e $G = SO(2)$ atuando em $\mathcal{M}$, podemos verificar que a subvariedade S^1 é invariante sob a ação de G , cujo gerador infinitesimal possui a expressão $\mathbf{v} = -y\partial_x + x\partial_y$. Reescrevendo a curva associada a S^1 como $\xi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, verificamos que

$$\mathbf{v}(\xi) = -2xy + 2xy = 0, \quad (1.8)$$

como esperávamos.

1.1.4 Invariância Local

Vamos agora discutir um critério de invariância apenas na vizinha da identidade do grupo de transformações.

Definição 1.4

Seja G um grupo de transformações locais atuando em uma variedade $\mathcal{M}$. Um subconjunto $S \subset \mathcal{M}$ é dito ser G -invariante se para todo $x \in S$ existir uma vizinhança da identidade $\tilde{G}_x \subset G_x$ em G tal que $g \cdot x \in S$ para todo $g \in \tilde{G}_x$. Uma dada função $F : U \rightarrow N$, onde U é algum subconjunto aberto em $\mathcal{M}$, é chamada localmente G -invariante se para cada $x \in U$ existir uma vizinhança $\tilde{G}_x \subset G_x$ da identidade em G tal que $F(g \cdot x) = F(x)$ para todo $g \in \tilde{G}_x$. e F é dita globalmente G -invariante se $F(g \cdot x) = F(x)$ para todo $x \in U, g \in G$ tal que $g \cdot x \in U$ também.

Aqui podemos ver que o grupo das translações horizontais $(x, y) \rightarrow (x + \epsilon, y)$ atuando no $\mathbb{R}^2$, pode deixar determinadas regiões abertas do $\mathbb{R}^2$ localmente G -invariantes. Como exemplo, podemos tomar a região determinada pelo segmento de reta $\{(x, y) : y = 0; -1 < x < 1\}$. Ela é uma subvariedade do $\mathbb{R}^2$ que, como podemos verificar, é localmente invariante pela ação das translações horizontais.

Proposição 1.5

Seja $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ uma subvariedade de $\mathcal{M}$. Então $\mathcal{N}$ é localmente G -invariante se e somente se para cada $x \in \mathcal{N}$, $\mathcal{A}|_x \subset T\mathcal{N}|_x$. Onde $\mathcal{A}|_x$ é a álgebra associada ao grupo G . Em outras palavras, $\mathcal{N}$ é localmente G -invariante se e somente se seus geradores infinitesimais $\mathbf{v}$, estiverem todos no espaço tangente a $\mathcal{N}$. [2].

1.1.5 Método para Construir Invariantes

Em um dado sistema de coordenadas locais podemos escrever de uma forma geral os geradores infinitesimais de um grupo de transformações como

$$\mathbf{v} = \xi^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \xi^m(x) \frac{\partial}{\partial x^m} \quad (1.9)$$

então pelo nosso critério de invariância local

$$\mathbf{v}(\zeta) = 0$$

$$\xi^1(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x^1} + \xi^2(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x^2} + \cdots + \xi^m \frac{\partial \zeta}{\partial x^m} = 0 \quad (1.10)$$

e o sistema de equações características

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = \cdots = \frac{dx^m}{\xi^m(x)} \quad (1.11)$$

pode ser integrado facilmente, e a solução geral pode ser escrita como:

$$\zeta^1(x^1, \dots, x^m) = c_1, \dots, \zeta^{m-1}(x^1, \dots, x^m) = c_{m-1}. \quad (1.12)$$

Como um exemplo podemos considerar novamente o grupo das rotações $SO(2)$, cujo gerador infinitesimal é dado por $v = -y\partial_x + x\partial_y$. Podemos então escrever, de acordo com a equação (1.11), a seguinte equação característica associada:

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}; \quad (1.13)$$

ou seja,

$$\int x dx = - \int y dy. \quad (1.14)$$

Integrando, obtemos $x^2 + y^2 = c$, como era de se esperar, pois qualquer elemento da família de círculos no $\mathbb{R}^2$ é uma subvariedade invariante sob a ação do grupo das rotações.

1.2 Grupos e Equações Diferenciais

Vamos considerar um sistema S de equações diferenciais com p variáveis independentes $(x^1, \dots, x^p)$ e q variáveis dependentes $(u^1, \dots, u^q)$. Então um grupo de simetria do sistema S será um grupo G de transformações locais que atua em algum subconjunto aberto $\mathcal{M} \subset X \times U$ de tal maneira que G transforma soluções de S em outras soluções de S .

Devemos, a rigor, ser mais precisos na definição de como atuam os elementos de um grupo de Lie em um sistema de equações diferenciais. Nesse sentido, digamos que $u = f(x)$ seja uma solução de um sistema de equações diferenciais parciais. Então devemos primeiramente identificar essa função com o seu gráfico

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \Omega\} \subset X \times U \quad (1.15)$$

onde $\Omega \subset X$ é o domínio da função f . Note que Γ_f é certamente uma subvariedade p -dimensional de $X \times U$. Assim se $\Gamma_f \subset \mathcal{M}_g$, onde $\mathcal{M}_g$ é o domínio de definição da ação do grupo G , então a transformação de Γ_f induzida por g será da seguinte forma

$$g \cdot \Gamma_f = \{g \cdot (x, u) = (\tilde{x}, \tilde{u}) \mid (x, u) \in \Gamma_f\} \quad (1.16)$$

Definição 1.6

Seja S um sistema de equações diferenciais parciais. Um grupo de simetrias do sistema S será um grupo G de transformações locais atuando em um subconjunto aberto $\mathcal{M}$ do espaço das variáveis independentes e dependentes do sistema, com a propriedade de que sempre que $u = f(x)$ for uma solução de S , então $u = g \cdot f(x)$ será também uma solução do sistema.

Como exemplo tomemos a equação do calor $u_t = u_{xx}$. O grupo das translações, dado por:

$$(x, t, u) \longrightarrow (x + \epsilon a, t + \epsilon b, u) \quad \epsilon \in \mathbb{R}$$

é um grupo de simetrias para a equação do calor, pois como podemos verificar, se $f(x, t)$ for uma solução, então $f(x - \epsilon a, t - \epsilon b)$ também será. Uma das propriedades interessantes de se conhecer o grupo de simetrias de um dado sistema de equações diferenciais, é que a partir de uma dada solução podemos construir outras aplicando sucessivas vezes os elementos do grupo de transformações de simetrias sobre a solução conhecida. Entretanto o que queremos agora é encontrar um critério de invariância infinitesimal para um sistema de equações diferenciais análogo ao que tínhamos para equações algébricas. Devemos ainda notar que a forma como estamos conduzindo o nosso estudo de simetrias nos dá um forte apelo geométrico, o que nos vai levar diretamente a idéia de prolongamento, como veremos na próxima seção.

1.3 Espaço de Jatos e Prolongamento

Nessa primeira etapa de nosso estudo estamos interessados em encontrar as simetrias ou, mais precisamente, a álgebra de simetrias de um sistema de equações diferenciais. Para

isso, devemos primeiramente definir o que entendemos por um sistema de equações diferenciais. Como veremos, a abordagem adotada estará baseada em visão bastante geométrica do problema. Para que isso seja possível necessitamos “prolongar” o nosso espaço básico $X \times U$ das variáveis dependentes e independentes do sistema para um espaço “maior”, onde as várias derivadas que ocorrem no sistema também são representadas por coordenadas desse espaço.

Assim dizemos que $U^{(1)}$ é o espaço que contém todas as variáveis dependentes do sistema juntamente com todas as suas derivadas de primeira ordem. Então dado um sistema de equações diferenciais que possui derivadas de até n -ésima ordem, para termos uma interpretação geométrica desse sistema devemos prolongar o nosso espaço básico $X \times U$ até “jatos” de n -ésima ordem, de tal modo que o sistema fique totalmente imerso nesse espaço. Dada uma função real suave $f(x) = f(x^1, \dots, x^p)$ de p variáveis independentes, existirão

$$p_k \equiv \binom{p+k-1}{k} \quad (1.17)$$

derivadas de ordem k da função f . Elas serão denotadas por

$$\partial_J f = \frac{\partial^k f}{\partial x^{j_1} \partial x^{j_2} \dots \partial x^{j_k}} \quad (1.18)$$

Em geral se $f : X \rightarrow U$ for uma função suave com $X \simeq \mathbb{R}^p$ e $U \simeq \mathbb{R}^q$ e $u = f(x) = (f^1(x), \dots, f^q(x))$ então existe um número $q \cdot p_k$ de derivadas $u_J^a = \partial_J f^a(x)$ necessárias para representar todas as derivadas diferentes de ordem k .

Denotamos por $U^{(n)} = U \times U_1 \times \dots \times U_n$ o produto cartesiano de espaços, cujas coordenadas representam as derivadas das funções $u = f(x)$ de todas as ordens de 0 a n . Devemos ainda notar que $U^{(n)}$ é um espaço euclidiano cuja dimensão é dada por

$$q + qp^1 + qp^2 + \dots + qp^n = q \binom{p+n}{n}$$

Para exemplificar essa idéia, vejamos o seguinte exemplo. Considere o caso onde $p = 2$ e $q = 1$. Então, $X \simeq \mathbb{R}^2$ com coordenadas $(x^1, x^2) = (x, y)$ e $U \simeq \mathbb{R}$ com coordenada u . Construímos o espaço U_1 com coordenadas (u_x, u_y) que é isomorfo ao $\mathbb{R}^2$. Analogamente, notamos que

$U_2 \simeq \mathbb{R}^3$ com coordenadas (u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) . Digamos que o sistema de equações diferenciais que estamos interessados possui derivadas de até segunda ordem, então o espaço de jatos necessário e suficiente para “absorver” completamente esse sistema será

$$M^{(2)} = X \times U^{(2)} = X \times U \times U_1 \times U_2; \quad (1.19)$$

$$X \simeq \mathbb{R}^2;$$

$$U^{(2)} = U \times U_1 \times U_2 \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6;$$

$$M^{(2)} = X \times U^{(2)} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^8. \quad (1.20)$$

Um ponto nesse espaço terá as coordenadas:

$$p^{(8)} = (x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$$

Se tivermos uma função $f : X \rightarrow U$, existirá uma função induzida $u^{(n)} = pr^{(n)}f$, chamada n -ésimo prolongamento de f , tal que

$$pr^{(n)}f : X \rightarrow U^{(n)}. \quad (1.21)$$

Na Seção (1.3.4) voltaremos a falar do prolongamento de funções.

O espaço total $X \times U^{(n)}$ das variáveis dependentes, independentes e suas derivadas até ordem n é chamado de espaço de jatos de n -ésima ordem. Se $u = f(x)$ for uma função cujo gráfico vive em $\mathcal{M} \subset X \times U$, então $pr^{(n)}f(x)$ será também uma função, e seu gráfico viverá em um espaço de jatos de n -ésima ordem $\mathcal{M}^{(n)} = \mathcal{M} \times U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$.

1.3.1 Sistema de Equações Diferenciais

Denotamos um sistema de equações diferenciais de n -ésima ordem como

$$\Delta(x, u^{(n)}) = 0, \quad (1.22)$$

envolvendo $x = (x^1, \dots, x^p)$ variáveis independentes, e $u = (u^1, \dots, u^q)$ variáveis dependentes. Podemos considerar Δ como sendo um mapeamento suave do espaço de jatos $X \times U^{(n)}$ para algum espaço euclidiano.

$$\Delta : X \times U^{(n)} \longrightarrow \mathbb{R}^l$$

Assim se para uma dada região contida em $X \times U^{(n)}$ o mapeamento Δ for nulo, ele determinará explicitamente uma subvariedade $\mathcal{S}$ contida nesse nosso espaço ampliado, tal que:

$$\mathcal{S}_\Delta = \{(x, u^{(n)}) : \Delta(x, u^{(n)}) = 0\} \subset X \times U^{(n)}.$$

Dessa forma o nosso conceito de sistema de equações diferenciais corresponde a um objeto geométrico bem definido: a subvariedade $\mathcal{S}_\Delta$ do espaço dos jatos $X \times U^{(n)}$.

Nesse caso se $u = f(x)$ for uma solução suave desse sistema de equações diferenciais, deve satisfazer

$$\Delta(x, pr^{(n)}(f(x))) = 0 \quad (1.23)$$

Ou equivalentemente, de um ponto de vista geométrico estamos afirmando que o gráfico da prolongamento de $f(x)$ esta inteiramente contido na subvariedade $\mathcal{S}_\Delta$ determinada pelo nosso sistema de equações diferenciais $\Delta(x, u^{(n)})$. Ou seja

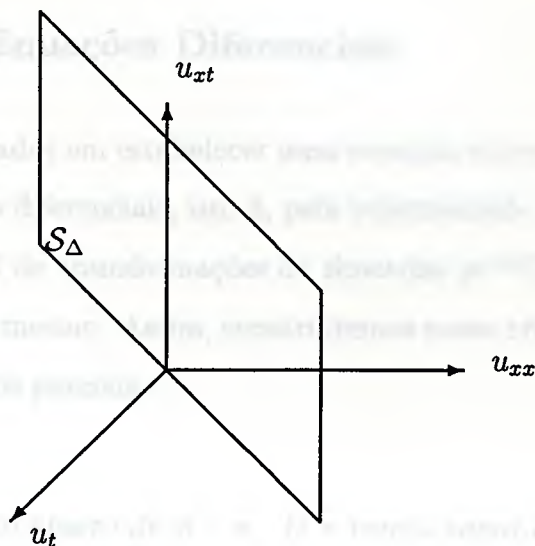
$$\Gamma_f^{(n)} \equiv \{(x, pr^{(n)}f(x))\} \subset \mathcal{S}_\Delta$$

onde $\mathcal{S}_\Delta = \{\Delta(x, u^{(n)}) = 0\}$.

Se tomarmos como exemplo a equação do calor

$$u_t = u_{xx}, \quad (1.24)$$

temos $p = 2, q = 1$ e $n = 2$, pois a equação é de segunda ordem. O espaço de jatos necessário para absorver completamente essa equação será então $X \times U^{(2)}$, ou em termos de suas coordenadas $(t, x, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt})$. Assim a equação do calor como escrita acima nos define um hiperplano nesse espaço que pode ser visualizado no seguinte esboço.



E se uma função $u = f(x)$ for uma solução para a equação do calor, teremos

$$pr^{(n)}f \subset S_{\Delta}.$$

1.3.2 Prolongamento da Ação do Grupo

Seja G um grupo local de transformações atuando em algum subconjunto aberto $\mathcal{M} \subset X \times U$. Então existirá uma ação induzida de G no espaço de jatos $\mathcal{M}^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$ chamada de n -ésimo prolongamento da ação do grupo G , $pr^{(n)}G$.

Se g for um elemento do grupo G suficientemente próximo da identidade, e se $u_0 = f(x_0)$ for uma função suave, cuja transformada $g \cdot f$ está definida numa vizinhança do ponto $(\tilde{x}_0, \tilde{u}_0) = g \cdot (x_0, u_0)$, poderemos então definir a ação do grupo de transformações prolongado $pr^{(n)}g$ no ponto $(x_0, u_0^{(n)})$, como sendo

$$pr^{(n)}g(x_0, u_0^{(n)}) = (\tilde{x}_0, \tilde{u}_0^{(n)}) \quad (1.25)$$

onde

$$\tilde{u}_0^{(n)} \equiv pr^{(n)}(g \cdot f)(\tilde{x}_0) \quad (1.26)$$

1.3.3 Invariância de Equações Diferenciais

Estamos agora interessados em estabelecer uma conexão entre o objeto geométrico descrito pelo sistema de equações diferenciais, isto é, pela subvariedade $\mathcal{S} \subset X \times U^{(n)}$, com a ação prolongada do grupo G de transformações de simetrias $pr^{(n)}G$, que deixará a subvariedade invariante sob a ação do mesmo. Assim, construiremos nosso critério de invariância para sistemas de equações diferenciais parciais.

Teorema 1.7

Seja $\mathcal{M}$ um subconjunto aberto de $X \times U$ e vamos supor que $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ seja um sistema de equações diferenciais de n -ésima ordem definidas sobre $\mathcal{M}$, com correspondente subvariedade $\mathcal{S}_\Delta \subset \mathcal{M}^{(n)}$. Suponhamos que G seja um grupo de transformações locais atuando em $\mathcal{M}$, cujo prolongamento (que atua no espaço de jatos) deixa a subvariedade $\mathcal{S}_\Delta$ invariante, significando que sempre que $(x, u^{(n)}) \in \mathcal{S}_\Delta$ nos teremos $pr^{(n)}g \cdot (x, u^{(n)}) \in \mathcal{S}_\Delta$ para todo $g \in G$. Então, G será um grupo de simetrias do sistema de equações diferenciais parciais no sentido da Def.(1.6)

Devemos notar que da maneira como construímos nosso critério de invariança, conseguimos dar uma interpretação bastante geométrica para a idéia de simetrias de equações diferenciais.

1.3.4 Prolongamento de um Campo Vetorial

Para operacionalizarmos a ação de um grupo de transformações prolongadas, devemos primeiramente prolongar os geradores infinitesimais das transformações. Ou seja, devemos definir como prolongar um campo vetorial.

Definição 1.8

Seja $\mathcal{M} \subset X \times U$ um aberto, e seja v um campo vetorial em $\mathcal{M}$ com o correspondente grupo 1-parametro $\exp(\epsilon v)$. O n -ésimo prolongamento de v , denotado por $pr^{(n)}v$, será um

campo vetorial em um espaço de n -jatos $\mathcal{M}$, e será definido como sendo o gerador infinitesimal do correspondente grupo prolongado a 1-parametro $pr^{(n)}[exp(\epsilon \mathbf{v})]$. Em outras palavras,

$$pr^{(n)}\mathbf{v}|_{(x,u^{(n)})} = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} pr^{(n)}[exp(\epsilon \mathbf{v})](x, u^{(n)}) \quad (1.27)$$

para qualquer $(x, u^{(n)}) \in \mathcal{M}^{(n)}$.

Dado que as coordenadas $(x, u^{(n)})$ em $\mathcal{M}$ consistem das variáveis independentes $(x^1, \dots, x^p)$ e das variáveis dependentes u_j^α até ordem n , nesse sistema de coordenadas um campo vetorial toma a seguinte forma generalizada

$$\mathbf{v}^* = \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J \phi_\alpha^J \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} \quad (1.28)$$

Como tínhamos:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} ,$$

podemos identificar $\mathbf{v}^* = pr^{(n)}\mathbf{v}$, ou seja

$$pr^{(n)}\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha}^q \sum_J \phi_\alpha^J \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} \quad (1.29)$$

Falta-nos ainda determinar as funções coeficientes ϕ_α^J . Mas antes disso vamos primeiramente discutir uma condição infinitesimal para invariância.

1.3.5 Condição de Invariância Infinitesimal

Analogamente à idéia de invariância infinitesimal construída para um sistemas de equações algébricas, procuraremos agora um critério infinitesimal para sistemas de equações diferenciais parciais.

Primeiramente devemos notar que estamos dando uma abordagem geométrica para estes sistemas de equações diferenciais. Isso se deve, como já vimos, ao fato de estarmos analisando-as no espaço de jatos. Assim, nosso critério de invariância deve-se dar pela atuação do grupo

nesse espaço. Como também já vimos, isso se dá pelo prolongamento da ação do grupo. Como a ação do grupo esta associada a um campo vetorial $\mathbf{v}$ como sendo o gerador infinitesimal do grupo, o nosso critério de invariância infinitesimal se dará pela ação de $pr^{(n)}\mathbf{v}$ no espaço de jatos.

Teorema 1.9

Suponha $\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0$; $\nu = 1, \dots, l$, um sistema de equações diferenciais parciais definido sobre uma região $\mathcal{M} \subset X \times U$. Então, se G for um grupo de transformações locais atuando em $\mathcal{M}$, e

$$pr^{(n)}\mathbf{v}[\Delta_\nu(x, u^{(n)})] = 0 \quad (1.30)$$

com $\nu = 1, \dots, l$, sempre que $\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0$, e para todo gerador infinitesimal $\mathbf{v}$ de G , então G será um grupo de simetrias para o sistema de equações diferenciais parciais.

Podemos ainda notar que esse nosso critério pode ser reescrito como

$$pr^{(n)}\mathbf{v}[\Delta_\nu(x, u^{(n)})] = \sum_{\mu=1}^l Q_{\nu\mu}(x, u^{(n)}) \Delta_\mu(x, u^{(n)}) , \quad (1.31)$$

Isso significa que sempre existem funções $Q_{\nu\mu}(x, u^{(n)})$ tal que a equação acima seja verdadeira.[3]

1.3.6 Uma Fórmula para o Prolongamento

Agora que temos em mãos um critério de invariância infinitesimal proporcionado pelo Teorema (1.9), nos falta determinar uma forma explícita para um campo vetorial prolongado. Da Eq.(1.29) notamos que para termos a forma explícita para $pr^{(n)}\mathbf{v}$, falta-nos somente determinar os coeficientes ϕ_α^J .

Por simplicidade, vamos dividir a nossa discussão em dois casos. Primeiramente, vamos analisar transformações que atuam somente nas variáveis independentes do sistema. Nesse caso podemos escrever o gerador da transformação infinitesimal, em um dado sistema de coordenadas, como:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1.32)$$

atuando em $\mathcal{M} \subset X \times U$. O grupo de transformações $g = \exp(\epsilon \mathbf{v})$ atuará da seguinte forma

$$g_\epsilon \cdot (x, u) = (\tilde{x}, \tilde{u}) = (\Theta_\epsilon(x), u) . \quad (1.33)$$

Como $\mathbf{v}$ é o gerador da transformação, ele deve satisfazer a seguinte relação:

$$\mathbf{v}|_x = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \exp(\epsilon \mathbf{v}) x , \quad \mathbf{v} \in \mathcal{A} . \quad (1.34)$$

Da Eq(1.33), temos

$$\tilde{x} = \Theta_\epsilon(x) = \exp(\epsilon \mathbf{v}) x ,$$

logo:

$$\left. \frac{d\Theta^i}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \xi^i(x) . \quad (1.35)$$

Vamos, ademais, considerar apenas uma variável dependente $u \in \mathfrak{R}$.

O espaço de jatos de primeira ordem terá então coordenadas $(x, u^{(1)}) = (x, u, u_x)$ e se $u = f(x)$, teremos

$$pr^{(1)}g_\epsilon \cdot (x, u^{(1)}) = (\tilde{x}, \tilde{u}^{(1)}) , \quad (1.36)$$

onde $\tilde{x} = \Theta_\epsilon(x)$, $\tilde{u} = u$. Assim:

$$\tilde{u}_j = \frac{\partial \tilde{f}_\epsilon}{\partial \tilde{x}^j}(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x^k}(\Theta_{-\epsilon}(\tilde{x})) \cdot \frac{\partial \Theta_{-\epsilon}^k}{\partial \tilde{x}^j}(\tilde{x}) . \quad (1.37)$$

Mas como $\Theta_{-\epsilon}(\tilde{x}) = x$, logo:

$$\frac{\partial f}{\partial x^k}(\Theta_{-\epsilon}(\tilde{x})) = \frac{\partial f}{\partial x^k} = u_k , \quad (1.38)$$

então:

$$\tilde{u}_j = \sum_{k=1}^p \frac{\partial \Theta_{-\epsilon}^k}{\partial \tilde{x}^j}(\Theta(x)) u_k . \quad (1.39)$$

Usando a Eq.(1.29) obtemos a seguinte expressão para o primeiro prolongamento de $\mathbf{v}$

$$pr^{(1)}\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_j \phi^j \frac{\partial}{\partial u_j} , \quad (1.40)$$

juntamente com o primeiro prolongamento da Eq.(1.27)

$$pr^{(1)}\mathbf{v} = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} pr^{(1)}[exp(\epsilon\mathbf{v})] \quad (1.41)$$

onde $exp(\epsilon\mathbf{v})$ é a ação g_ϵ dada pela Eq.(1.36). Sabendo que a ação do grupo no primeiro jato de $\mathcal{M}^{(1)}$ está associada à Eq.(1.40) temos então

$$\phi^j(x, u^{(1)}) = \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \sum_{k=1}^p \frac{\partial \Theta_\epsilon^k}{\partial \tilde{x}^j}(\Theta_\epsilon(x)) u_k \quad (1.42)$$

Desde que todas as funções sejam suaves, podemos então trocar a ordem das derivadas e escrever

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon}\bigg|_{\epsilon=0} \sum_{k=1}^p \frac{\partial \Theta_\epsilon^k}{\partial \tilde{x}^j}(\Theta_\epsilon(x)) &= \\ \sum_{k=1}^p \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \left[\frac{d\Theta_\epsilon^k}{d\epsilon} \right] [\theta_\epsilon(x)] \bigg|_{\epsilon=0} &= - \sum_{k=1}^p \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}(x) \end{aligned} \quad (1.43)$$

onde usamos a Eq.(1.35) para obtermos a identidade acima. Assim, encontramos a seguinte expressão para o coeficiente do primeiro prolongamento de $\mathbf{v}$,

$$\phi^j(x, u, u_x) = - \sum_{k=1}^p \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} u_k \quad (1.44)$$

Vamos considerar agora o seguinte exemplo. Seja $X \simeq \mathbb{R}^2$ com coordenadas (x, y) e seja G o grupo das rotações $SO(2)$ atuando em X , e $U \simeq \mathbb{R}$. Sabemos que o gerador infinitesimal desse grupo é dado por

$$\mathbf{v} = -y\partial_x + x\partial_y \quad (1.45)$$

Queremos agora determinar o primeiro prolongamento de $\mathbf{v}$. De acordo com a Eq.(1.29) basta, determinar os coeficientes $\phi^j(x, u, u_x)$, associados ao gerador de $SO(2)$. Nesse caso temos $p = 2$ e $q = 1$, e identificamos $x^1 = x$ e $x^2 = y$. Teremos ainda $\xi^{(1)} = -y$ e $\xi^{(2)} = x$. Assim o gerador prolongado até o primeiro jato terá a seguinte forma:

$$pr^{(1)}\mathbf{v} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \phi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^y\frac{\partial}{\partial u_y} . \quad (1.46)$$

Pela Eq.(1.44), temos

$$\phi^x = - \sum_{k=1}^p \frac{\partial \xi^k}{\partial x} u_k = - \frac{\partial(-y)}{\partial x} u_x - \frac{\partial x}{\partial x} u_y = -u_y \quad (1.47)$$

analogamente encontramos

$$\phi^y = u_x \quad (1.48)$$

Substituindo a Eq.(1.47) e Eq.(1.48) na Eq.(1.46), obtemos a expressão completa para o primeiro prolongamento do gerador de SO(2)

$$pr^{(1)}\mathbf{v} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} - u_y \frac{\partial}{\partial u_x} + u_x \frac{\partial}{\partial u_y} . \quad (1.49)$$

Agora vamos ao segundo caso, onde somente as variáveis dependentes serão transformadas sob a ação do grupo. Ou seja

$$g_\epsilon \cdot (x, u) = (\tilde{x}, \tilde{u}) = (x, \Phi_\epsilon(x, u)) \quad (1.50)$$

Nesse caso, o nosso gerador em dado sistema de coordenadas locais, será dado por $\mathbf{v} = \phi(x, u) \partial_u$.

Assim, segue das Eqs. (1.29) e (1.27) que

$$\phi(x, u) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \Phi_\epsilon(x, u) . \quad (1.51)$$

Se $u = f(x)$, teremos então $\tilde{f}_\epsilon = g \cdot f$, tal que:

$$\tilde{u} = \tilde{f}_\epsilon(x) = \Phi_\epsilon(x, f(x)) . \quad (1.52)$$

Para encontrarmos o prolongamento de primeira ordem associado a $\mathbf{v}$, devemos examinar primeiramente como as derivas de u , u_j , transformam-se sob a ação de $\mathbf{v}$.

$$\tilde{u}_j = \frac{\partial \tilde{f}_\epsilon}{\partial x^j}(x) = \frac{\partial \Phi_\epsilon}{\partial x^j}(x, f(x)) + \frac{\partial f}{\partial x^j}(x) \frac{\partial \Phi_\epsilon}{\partial u}(x, f(x)) \quad (1.53)$$

ou seja,

$$\tilde{u}_j = \frac{\partial \Phi_\epsilon}{\partial x^j} + u_j \frac{\partial \Phi_\epsilon}{\partial u} . \quad (1.54)$$

Percebemos aqui que u_j transforma-se como se fosse devido a ação do operador de Euler. Se juntarmos agora as Eq.(1.29), Eq.(1.27) e Eq.(1.51) obteremos a seguinte expressão para ϕ^j

$$\phi^j(x, u^{(1)}) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \tilde{u}_j = \frac{\partial \phi}{\partial u} \quad (1.55)$$

tal que:

$$pr^{(1)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \sum_{j=1}^p \phi(x, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u_j} \quad (1.56)$$

Até aqui o que temos são duas séries de equações que determinam a forma do vetor prolongado, uma associada as transformações que atuam somente nas variáveis independentes, e outra, para as variáveis dependentes. Queremos agora uma fórmula generalizada que explicita um campo vetorial prolongado. Mas, para obtermos essa expressão será conveniente discutirmos primeiramente o conceito de derivadas totais.

1.3.7 Derivadas Totais

A idéia básica que está por trás dos conceitos de derivada total, é a de criar um operador que atue diretamente no espaço de jatos, de maneira independente sobre cada um de seus eixos coordenados. Também será a partir do conceito de derivada total que poderemos generalizar mais facilmente o conceito de prolongamento de um campo vetorial.

Definição 1.10

Seja $P(x, u^{(n)})$ uma função suave de (x, u) e de derivadas de u até n -ésima ordem, definida em um subconjunto aberto $\mathcal{M}^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$. A derivada total de P com relação a x^i é uma função suave, $D_i P(x, u^{(n+1)})$ definida em $\mathcal{M}^{(n+1)}$ e dependendo de derivadas de u até ordem $(n+1)$, com a propriedade de que se $u = f(x)$ para qualquer função suave então:

$$D_i P(x, pr^{(n)} f(x)) = \frac{\partial}{\partial x^i} \{P(x, pr^{(n)} f(x))\} \quad (1.57)$$

Proposição 1.11

Dado $P(x, u^{(n)})$, a i -ésima derivada total de P possui a seguinte forma geral

$$D_i P = \frac{\partial P}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J u_{J,i}^\alpha \frac{\partial P}{\partial u^\alpha} \quad (1.58)$$

onde $J = (j^1, \dots, j^2)$,

$$u_{J,i}^\alpha = \frac{\partial u_J}{\partial x^i} = \frac{\partial^{k+1} u^\alpha}{\partial x^i \partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_k}} \quad (1.59)$$

Como exemplo, consideraremos o caso onde $X = \mathbb{R}^2$ e $U = \mathbb{R}$. Poderão então existir duas derivadas totais, D_x e D_y , tal que

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xy} \frac{\partial}{\partial u_y} + \dots$$

Derivadas totais de ordem mais alta são definidas em analogia a nossa notação de derivadas parciais de ordem superior, assim, explicitamente, se $J = (j_1, \dots, j_k)$ com $1 \leq j_k \leq p$ para cada k , escrevemos

$$D_J = D_{j_1} D_{j_2} \dots D_{j_k} . \quad (1.60)$$

Agora estamos em condições de encontrar uma forma geral para o prolongamento de um campo vetorial.

1.3.8 Uma Fórmula Geral Para o Prolongamento

Teorema 1.12

Seja

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (1.61)$$

um campo vetorial definido em um subconjunto aberto $\mathcal{M} \subset X \times U$. O n -ésimo prolongamento de $\mathbf{v}$ é o campo vetorial

$$pr^{(n)} \mathbf{v} = \mathbf{v} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J \phi_\alpha^J(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \quad (1.62)$$

definido em um correspondente espaço de jatos $\mathcal{M}^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$, onde a segunda soma começa sobre todos os multi-índices $J = (j_1, \dots, j_k)$ com $1 \leq j_k \leq p$, $1 \leq k \leq n$. As funções coeficientes ϕ_α^J de $pr^{(n)}\mathbf{v}$ serão dadas pela seguinte equação:

$$\phi_\alpha^J(x, u^{(n)}) = D_J(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i}^\alpha \quad (1.63)$$

onde $u_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}$ e $u_{i,J}^\alpha = \frac{\partial u_i^\alpha}{\partial x^J}$. [4]

Para demonstrarmos esse teorema devemos considerar transformações simultâneas, tanto nas variáveis dependentes quanto nas independentes, e seguir o procedimento desenvolvido na Seção (1.3.6), juntamente com a idéia de derivada total exposta na seção anterior.

Como um caso especial e bastante útil para nossas discussões posteriores, vamos considerar um sistema de equações diferenciais parciais onde temos $p = 2$ e $q = 1$. Vamos supor que nossa equação diferencial envolva uma função $u = f(x, t)$. Então, o espaço básico será $X \times U \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$, e a forma geral para um campo vetorial atuando nesse espaço será a seguinte:

$$\mathbf{v} = \xi(x, t, u)\partial_x + \tau(x, t, u)\partial_t + \phi(x, t, u)\partial_u \quad (1.64)$$

Queremos calcular um prolongamento de ordem 2 para esse campo. Então, através do Teorema (1.12), obtemos a seguinte expressão:

$$pr^{(2)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \sum_{\alpha=1}^1 \sum_J \phi_\alpha^J(x, u^{(2)}) \frac{\partial}{\partial u_J^\alpha} \quad (1.65)$$

$$pr^{(2)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} \quad (1.66)$$

Usando a Eq.(1.63) determinaremos os coeficientes da expressão acima em termos de $\xi(x, t, u)$, $\tau(x, t, u)$ e $\phi(x, t, u)$ e suas derivadas. Essa parte do cálculo é bastante trabalhosa, e mais trabalhosa se torna quanto maior a ordem do coeficiente que se deseja calcular. Como exemplo, vamos determinar o coeficiente ϕ^{xx} . Então, pela Eq.(1.63), temos:

$$\phi^{xx} = D_x^2(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + u_{xxx} + u_{xxt} \quad (1.67)$$

$$\begin{aligned} \phi^{xx} = & \phi_{xx} - (D_x \xi) u_{xx} - (D_x^2 \xi) u_x - (D_x \xi) u_{xx} + \\ & - \xi u_{xxx} - (D_x^2 \tau) u_x - (D_x \tau) u_{xt} - (D_x^2 \tau) u_{xt} - \tau u_{xxt} + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} , \end{aligned} \quad (1.68)$$

como temos

$$\xi = \xi(x, t, u) ,$$

logo:

$$D_x \xi = \xi_x + u_x \xi_u , \quad (1.69)$$

$$D_x^2 \xi = \xi_{xx} + 2u_x \xi_{ux} + u_x^2 \xi_{uu} + u_{xx} \xi_u . \quad (1.70)$$

Analogamente, calculamos os coeficientes τ e ϕ e obtemos:

$$D_x \tau = \tau_x + u_x \tau_u , \quad (1.71)$$

$$D_x \phi = \phi_x + u_x \phi_u , \quad (1.72)$$

$$D_x^2 \tau = \tau_{xx} + 2u_x \tau_{ux} + u_x^2 \tau_{uu} + u_{xx} \tau_u , \quad (1.73)$$

$$D_x^2 \phi = \phi_{xx} + 2u_x \phi_{ux} + u_x^2 \phi_{uu} + u_{xx} \phi_u . \quad (1.74)$$

Substituindo as Eqs. (1.69 - 1.74) na Eq.(1.68), obteremos a seguinte expressão para ϕ^{xx}

$$\begin{aligned} \phi^{xx} = & \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 - 2\tau_{xu}u_xu_t + \\ & - \xi_{uu}u_x^3 - \tau_{uu}u_x^2u_t + (\phi_u - 2\xi_x)u_{xx} - 2\tau_xu_{xt} - 3\xi_uu_xu_{xx} + \\ & - \tau u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt} . \end{aligned} \quad (1.75)$$

O cálculo desse único coeficiente nos dá uma boa idéia de como pode ser trabalhoso esse processo. Como veremos no Cap.(2), o cálculo desses coeficientes é a base para a determinação da álgebra de simetrias de um dado sistema de equações diferenciais parciais.

1.3.9 Algumas Propriedades Básicas de Campos Vetoriais Prolongados

Teorema 1.13

Suponha que $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sejam campos vetoriais em $\mathcal{M} \subset X \times U$. Então seus campos prolongados associados possuem as seguintes propriedades

$$pr^{(n)}(c\mathbf{v} + c'\mathbf{w}) = cpr^{(n)}\mathbf{v} + c'pr^{(n)}\mathbf{w} \quad (1.76)$$

para c e c' constantes, e

$$pr^{(n)}[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = [pr^{(n)}\mathbf{v}, pr^{(n)}\mathbf{w}] \quad (1.77)$$

1.3.10 Funções Características de Simetrias

Nessa última seção vamos reescrever a fórmula geral do campo vetorial prolongado, dado pela Eq.(1.62), em termos de uma nova função Q_α , chamada função característica da transformação associada a uma dada simetria. Essa função nos será de grande utilidade na busca e determinação de leis de conservação.

Seja

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (1.78)$$

um campo vetorial associado a uma dada simetria, chamamos de função característica de $\mathbf{v}$ a função

$$Q_\alpha(x, u^{(1)}) = \phi_\alpha(x, u) - \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) u_i^\alpha, \quad (1.79)$$

onde $\alpha = 1, \dots, q$. Com essa definição em mãos, podemos reescrever os coeficientes ϕ_α^J , dos campos vetoriais prolongados como:

$$\phi_\alpha^J = D_J Q_\alpha + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i}^\alpha. \quad (1.80)$$

Definiremos agora o vetor característico da transformação como:

$$\mathbf{v}_Q = \sum_{\alpha=1}^q Q_{\alpha}(x, u^{(1)}) \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}} . \quad (1.81)$$

Se juntarmos as Eqs. (1.80) e (1.81), podemos reescrever a Eq.(1.62) como

$$pr^{(n)}\mathbf{v} = pr^{(n)}\mathbf{v}_Q + \sum_{i=1}^p \xi^i D_i \quad (1.82)$$

onde:

$$pr^{(n)}\mathbf{v}_Q = \sum_{\alpha=1}^q \sum_J D_J Q_{\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}_J} \quad (1.83)$$

A importância e uso dessas funções que caracterizam uma dada transformação de simetria ficará claro nos próximos capítulos.

2.1 Determinação da Álgebra Associada à Equação do calor

Agora, vamos determinar um conjunto de simetrias para a equação do calor. Vamos considerar a equação do calor unidimensional:

Consideramos a Equação do Calor:

$$u_t = u_{xx}$$

$$(2.1)$$

Capítulo 2

Determinação da Álgebra de Simetrias de Algumas Equações Diferenciais

Nesse capítulo vamos determinar a álgebra de simetrias de quatro equações especiais: Equação do Calor, equação de Korteweg-de Vries (KdV), equação de Cahn-Hilliard e a Equação de Onda, sendo que destas quatro somente a equação de onda é auto-adjunta, ou como discutiremos no Cap.(4), somente para a Equação de Onda existe um funcional associado (lagrangiana), e portanto, somente para essa equação nós poderíamos nos valer do teorema de Noether para encontrar quantidades conservadas. Entretanto, nesse capítulo vamos somente determinar a álgebra de simetrias dessas equações, ficando para o Cap.(5), a determinação de quantidades conservadas propriamente ditas.

2.1 Determinação da Álgebra Associada a Equação do calor

Vamos agora determinar um conjunto de transformações de simetrias que determinam uma álgebra de Lie associada a Equação do Calor.

Considere a Equação do Calor:

$$u_t = u_{xx} \quad , \quad (2.1)$$

onde os seus coeficientes estão devidamente normalizados. Essa nossa equação está definida em um espaço $X \times U$, que por sua vez possui um sistema de coordenadas locais dado por (x, t, u) . De acordo com a notação do capítulo anterior, teremos, portanto, $p = 2$ e $q = 1$. Como a Equação do Calor é uma equação de segunda ordem, $n = 2$, será necessário um espaço de jatos de segunda ordem para absorver-la completamente. As coordenadas desse espaço de jatos serão $(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt})$.

Assim a equação do calor $\Delta(x, t, u^{(2)}) = 0$, onde $\Delta(x, t, u^{(2)}) \equiv u_t - u_{xx}$ determina uma subvariedade no espaço $X \times U^{(2)}$. Veremos agora como determinar as suas simetrias.

2.1.1 Critério de Invariância

Seja

$$\mathbf{v} = \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (2.2)$$

um campo vetorial em $X \times U$. Queremos encontrar todos os coeficientes possíveis ξ, τ, ϕ , tal que $\mathbf{v}$ gere uma transformação de simetria da equação do calor. Como dissemos, a equação do calor determina uma subvariedade no espaço de jatos $X \times U^{(2)}$. Assim, um campo vetorial, correspondente a $\mathbf{v}$, para atuar nesse espaço, deve ser prolongado até a maior ordem desse espaço de jatos, ou seja, até segunda ordem. Como já calculado no capítulo anterior, da Eq.(1.66) temos a seguinte forma para esse campo prolongado:

$$pr^{(2)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}}, \quad (2.3)$$

onde os coeficientes $\phi^x, \phi^t, \dots$ são determinados pela Eq.(1.63)

$$\phi_\alpha^J(x, u^{(n)}) = D_J(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i}^\alpha \quad (2.4)$$

Agora, para que $\mathbf{v}$ seja gerador de um grupo de simetria da equação $\Delta(x, t, u^{(2)}) = 0$, deve satisfazer o critério de invariância infinitesimal expresso pelo Teorema (1.10), ou seja

$$pr^{(2)}\mathbf{v}[\Delta(x, t, u^{(2)})] = 0 \quad (2.5)$$

Com $pr^{(2)}v$ dado pela Eq.(2.3), ao aplica-lo em $\Delta(x, t, u^{(2)})$, obtemos a seguinte equação

$$\phi^t = \phi^{xx} \quad (2.6)$$

2.1.2 Equação Determinante

Falta-nos ainda encontrar quais são os coeficientes ϕ^t e ϕ^{xx} da Eq.(2.6), pois será a partir deles que poderemos encontrar (ξ, τ, ϕ) que aparecem na Eq.(2.2), e que determinam os geradores da álgebra de Lie associada a equação do calor. Lembremos agora que da Eq.(1.75) temos:

$$\begin{aligned} \phi^{xx} = & \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 - 2\tau_{xu}u_xu_t + \\ & -\xi_{uu}u_x^3 - \tau_{uu}u_x^2u_t + (\phi_u - 2\xi_x)u_{xx} - 2\tau_xu_{xt} - 3\xi_uu_xu_{xx} + \\ & -\tau u_tu_{xx} - 2\tau_uu_xu_{xt} \quad . \quad (1.75) \end{aligned}$$

Ademais da Eq.(2.4) obtemos que

$$\begin{aligned} \phi^t(x, t, u^{(2)}) &= D_t(\phi - \sum_{i=1}^2 \xi^i u_i) + \sum_{i=1}^2 \xi^i u_{t,i} \\ &= \phi_t - D_t(\xi u_x + \tau u_t) + \xi u_{xt} + \tau u_{tt} \end{aligned} \quad (2.7)$$

ou seja

$$\phi^t(x, t, u^{(2)}) = \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_t u_x - \tau_u u_t^2 \quad . \quad (2.8)$$

Substituindo Eq.(2.8) e Eq.(1.75) em Eq.(2.6) obteremos que

$$\begin{aligned} & u_x(\xi_{xx} - 2\phi_{ux} - \xi_t) + u_t(\phi_u - \tau_t + \tau_{xx}) + u_x u_t(2\tau_{xu} - \xi_u) + \\ & + u_x^2(2\xi_{xu} - \phi_{uu}) + u_{xx}(2\xi_x - \phi_u) - u_t^2 \tau_u + u_x^3 \xi_{uu} + u_x^2 u_t \tau_{uu} + \\ & + 2u_{xt} \tau_x + 3u_x u_{xx} \xi_u + u_t u_{xx} \tau_u + 2u_x u_{xt} \tau_u + \phi_t - \phi_{xx} = 0 \quad , \end{aligned} \quad (2.9)$$

que chamamos de equação determinante.

Antes de avançarmos na busca dos coeficientes (ξ, τ, ϕ) , vamos substituir u_t por u_{xx} na Eq.(2.9), de acordo com a nossa equação $\Delta(x, t, u^{(2)}) = u_t - u_{xx} = 0$. Fazendo isso, obtemos a seguinte expressão:

$$u_x(\xi_{xx} - 2\phi_{ux} - \xi_t) + u_{xx}(2\xi_x - \tau_t + \tau_{xx}) + u_x u_{xx}(3\xi_u + 2\tau_{xu} - \xi_u) + u_x^2(2\xi_{xu} - \phi_{uu}) + u_x^3\xi_{uu} + u_x^2 u_{xx}\tau_{uu} + 2u_{xt}\tau_x + 2u_x u_{xt}\tau_u + \phi_t - \phi_{xx} = 0 \quad (2.10)$$

Como $u = u(x, t)$ pode ser qualquer solução da equação do calor, a única maneira de (2.10) ser satisfeita é que os seus coeficientes sejam todos iguais a zero. Isso implica no seguinte conjunto de equações diferenciais parciais para (ξ, τ, ϕ) .

Coeficiente	Equação
$u_x u_{xt}$	$2\tau_u = 0 \quad (a)$
u_{xt}	$2\tau_x = 0 \quad (b)$
$u_x^2 u_{xx}$	$\tau_{uu} = 0 \quad (c)$
$u_x u_{xx}$	$2\xi_u + 2\tau_{xu} = 0 \quad (d)$
u_x^3	$\xi_{uu} = 0 \quad (e)$
u_{xx}	$2\xi_x - \tau_t + \tau_{xx} = 0 \quad (f)$
u_x^2	$2\xi_{xu} - \phi_{uu} = 0 \quad (g)$
u_x	$\xi_{xx} - 2\phi_{ux} - \xi_t = 0 \quad (h)$
1	$\phi_t - \phi_{xx} = 0 \quad (i)$

Este sistema de equações determina (ξ, τ, ϕ) . Trata-se de um sistema de equações lineares solúvel por simples substituições e integrações elementares, resultando em:

$$\begin{aligned} \xi &= d + \frac{1}{2}bx + et + cxt \\ \tau &= a + dt + ct^2 \\ \phi &= (f - ex - \frac{1}{2}ct - ct^2)u + \beta(x, t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde (a, b, c, d, e, f) são constantes arbitrárias e β é uma solução arbitrária da equação do calor.

2.1.3 Construção dos Geradores da Álgebra de Lie Associada

Vamos agora determinar a álgebra de Lie de simetrias da equação do calor.

A forma geral para um gerador dessa álgebra de Lie é dada pela Eq.(2.2) onde (ξ, τ, ϕ) são dados pelas Eqs.(2.11). Então pelo nosso critério infinitesimal de invariância, determinamos os coeficientes (ξ, τ, ϕ) escritos em termos de 6 constantes arbitrárias (a, b, c, d, e, f) , mais uma solução arbitrária da equação $\beta(x, t)$. Logo, vamos ter 6 possíveis diferentes geradores para uma álgebra de Lie associada a equação do calor, além de um conjunto de geradores associados a função $\beta(x, t)$.

Consideraremos primeiramente, a função $\beta(x, t)$ que aparece no coeficiente ϕ como sendo igual a zero. Então, se tomarmos $a = 1$ e os demais parâmetros (b, c, d, e, f) iguais a zero, vamos obter:

$$\begin{aligned}\xi(x, t) &= 0, \\ \tau(t) &= 1, \\ \phi(x, t, u) &= 0.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Substituindo estes valores em (2.2) obtemos o primeiro gerador:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t}.\tag{2.13}$$

Agora tomamos $b = 1$ e os demais parâmetros iguais a zero e obtemos:

$$\begin{aligned}\xi(x, t) &= \frac{1}{2}x, \\ \tau(t) &= t, \\ \phi(x, t, u) &= 0.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Logo

$$\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}.\tag{2.15}$$

com $c = 1$ e os demais iguais a zero,

$$\xi(x, t) = xt \quad ,$$

$$\tau(t) = t^2 \quad ,$$

$$\phi(x, t, u) = -\left(\frac{1}{2}t + x^2\right)u \quad , \quad (2.16)$$

implica:

$$\mathbf{v}_3 = xt \frac{\partial}{\partial x} + t^2 \frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{1}{2}t + x^2\right)u \frac{\partial}{\partial u} \quad . \quad (2.17)$$

Com $d = 1$, $a = b = c = e = f = 0$

$$\xi(x, t) = 1 \quad ,$$

$$\tau(t) = 0 \quad ,$$

$$\phi(x, t, u) = 0 \quad ,$$

$$\mathbf{v}_4 = \frac{\partial}{\partial x} \quad . \quad (2.18)$$

$e = 1$, $a = b = c = d = f = 0$

$$\xi(x, t) = t \quad ,$$

$$\tau(t) = 0 \quad ,$$

$$\phi(x, t, u) = -xu \quad ,$$

$$\mathbf{v}_5 = t \frac{\partial}{\partial x} - xu \frac{\partial}{\partial u} \quad . \quad (2.19)$$

$f = 1$, $a = b = c = d = e = 0$

$$\xi(x, t) = 0 \quad ,$$

$$\tau(t) = 0 \quad ,$$

$$\phi(x, t, u) = u \quad ,$$

$$\mathbf{v}_6 = u \frac{\partial}{\partial u} \quad . \quad (2.20)$$

E finalmente consideramos $a = b = c = d = e = f = 0$ e $\beta(x, t)$ como sendo qualquer solução da equação do calor, teremos:

$$\mathbf{v}_\beta = \beta(x, t) \frac{\partial}{\partial u} \quad (2.21)$$

como o gerador de uma subálgebra de dimensão infinita.

Em resumo, temos os seguintes vetores que formam uma base da álgebra de Lie de simetrias da equação do calor.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial t} \\ \mathbf{v}_2 &= \frac{1}{2}x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} \\ \mathbf{v}_3 &= xt \frac{\partial}{\partial x} + t^2 \frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + \frac{1}{2}t)u \frac{\partial}{\partial u} \\ \mathbf{v}_4 &= \frac{\partial}{\partial x} \\ \mathbf{v}_5 &= t \frac{\partial}{\partial x} - xu \frac{\partial}{\partial u} \\ \mathbf{v}_6 &= u \frac{\partial}{\partial u} \\ \mathbf{v}_\beta &= \beta(x, t) \frac{\partial}{\partial u} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Os elementos do grupo a 1-parâmetro, G_i , associado a gerador $\mathbf{v}_i$ são escritos como:

$$g_i = \exp(\epsilon \mathbf{v}_i) \quad , \quad (2.23)$$

tal que:

$$\exp(\epsilon \mathbf{v}_i)(x, t, u) = (\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u}) \quad . \quad (2.24)$$

A interpretação dos g_i é a seguinte: g_1 e g_4 geram translações no tempo e no espaço respectivamente, g_β e g_6 refletem a linearidade da equação envolvida, g_2 gera transformações de escala, g_5 é um tipo de “boost” galileano, enquanto g_3 gera um genuíno grupo de transformações locais.

Podemos construir agora a seguinte tabela de relações de comutação:

	v ₁	v ₂	v ₃	v ₄	v ₅	v ₆
v ₁	0	2v ₁	4v ₂ - 2v ₆	0	2v ₂	0
v ₂	-2v ₁	0	2v ₃	-v ₄	v ₅	0
v ₃	2v ₆ - 4v ₂	-2v ₃	0	-2v ₅	0	0
v ₄	0	v ₄	2v ₅	0	-v ₆	0
v ₅	-2v ₄	-v ₅	0	v ₃	0	0
v ₆	0	0	0	0	0	0

2.2 A Equação de KdV

Analogamente aos cálculos realizados na seção anterior vamos agora determinar a álgebra de Lie das simetrias da equação de KdV [5][6], que é dada por:

$$\Delta(x, t, u^{(3)}) = u_t + u_{xxx} + uu_x = 0 \quad .$$

(2.25)

As principais diferenças entre essa equação e a anterior estão no fato dessa ser uma equação diferencial não linear, o que deve reduzir o número de suas simetrias, e também no fato desta ser de uma ordem maior, o que aumenta significativamente o volume de cálculos a serem feitos.

Assim, o nosso espaço de jatos deve ser de terceira ordem para absorver completamente a equação de KdV.

2.2.1 Critério de Invariância e Equação Determinante

Seja

$$\mathbf{v} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \phi \frac{\partial}{\partial u}$$

(2.26)

um campo vetorial. De acordo com a Eq.(1.62), temos a seguinte expressão para o campo prolongado até terceira ordem:

$$pr^{(3)}\mathbf{v} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \phi \frac{\partial}{\partial u} + \phi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} + \phi^{ttt} \frac{\partial}{\partial u_{ttt}} +$$

$$+ \phi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \phi^{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \phi^{tx} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \phi^{txx} \frac{\partial}{\partial u_{txx}} + \phi^{ttx} \frac{\partial}{\partial u_{ttx}} . \quad (2.27)$$

O critério de invariância escreve-se como:

$$pr^{(3)}\mathbf{v}[\Delta(x, t, u)] = 0 , \quad (2.28)$$

que dos dá a seguinte equação:

$$\phi^t + \phi^{xxx} + u\phi^x + \phi u_x = 0 . \quad (2.29)$$

Cada um desses coeficientes é dado pela Eq.(1.63). O cálculo de ϕ^t encontra-se na seção anterior, Eq.(2.8):

$$\phi^t = \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t) u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2 . \quad (2.30)$$

O cálculo de ϕ^x é simples, e nos leva a:

$$\phi^x = D_x(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + \xi u_{xx} + \tau u_{xt} , \quad (2.31)$$

$$\phi^x = D_x \phi - u_x D_x \xi - u_t D_x \tau . \quad (2.32)$$

Usando as Eq.(1.69), Eq.(1.71) e Eq.(1.72) obtemos:

$$\phi^x = \phi_x + (\phi_u - \xi_x) u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t . \quad (2.33)$$

Finalmente, devemos determinar ϕ^{xxx} , a partir da Eq.(1.63), temos:

$$\phi^{xxx} = D_x^3(\phi - \xi u_t - \tau u_x) + \xi u_{xxx} + \tau u_{xxt} . \quad (2.34)$$

Tal cálculo é extenso, e será omitido. O resultado é:

$$\begin{aligned} \phi^{xxx} = & \phi_{xxx} + u_x[3\phi_{u_{xx}} - \xi_{xxx}] + 3u_x^2[\phi_{uuu} - \xi_{xxu}] + 3u_{xx}[\phi_{xu} - \xi_{xx}] + \\ & + 3u_x u_{xx}[\phi_{uu} - 3\xi_{ux}] + u_x^3[\phi_{uuu} - 3\xi_{xu}] + u_{xxx}[\phi_u - 3\xi_x] - 6u_x^2 u_{xx}[\xi_{uu}] + \\ & - u_x^4[\xi_{uuu}] - 4u_x u_{xxx}[\xi_u] - u_t[\tau_{xxx}] - 3u_t u_x[\tau_{xxu}] - 3u_t u_x^2[\tau_{xu}] - 3u_t u_{xx}[\tau_{xu}] + \\ & - 3u_t u_x u_{xx}[\tau_{uu}] - u_t u_x^3[\tau_{uuu}] - u_t u_{xxx}[\tau_u] - 3u_{xx}^2[\xi_u] - 3u_{xt}[\tau_{xx}] - 6u_{xt} u_x[\tau_{xu}] + \\ & - 3u_{xt} u_x^2[\tau_{uu}] - 3u_{xt} u_{xx}[\tau_u] - 3u_{xxt}[\tau_x] - 3u_{xxt} u_x[\tau_u] \end{aligned} \quad (2.35)$$

Substituindo ϕ^t , ϕ^x e ϕ^{xxx} na Eq.(2.29) teremos:

$$\begin{aligned}
 & \phi_t + u_t[\phi_u - \tau_t - \tau_{xxx}] - u_x u_t[3\tau_{xxu} + \xi_u] - u_t^2[\tau_u] + 3u_x^2[\phi_{uuu} - \xi_{xxu}] + \\
 & + \phi_{xxx} + u_x[3\phi_{uux} + \phi - \xi_t - \xi_{xxx}] + 3u_{xx}[\phi_{xu} - \xi_{xx}] + 3u_x u_{xx}[\phi_{uu} - 3\xi_{ux}] + \\
 & + u_x^3[\phi_{uuu} - 3\xi_{xu}] + u_{xxx}[\phi_u - 3\xi_x] - 6u_x^2 u_{xx}[\xi_{uu}] - u_x^4[\xi_{uuu}] - 4u_x u_{xxx}[\xi_u] + \\
 & - 3u_t u_x^2[\tau_{xu}] - 3u_t u_{xx}[\tau_{xu}] - 3u_t u_x u_{xx}[\tau_{uu}] - u_t u_x^3[\tau_{uuu}] - u_t u_{xxx}[\tau_u] + \\
 & - 3u_x^2[\xi_u] - 3u_{xt}[\tau_{xx}] - 6u_{xt} u_x[\tau_{xu}] - 3u_{xt} u_x^2[\tau_{uu}] - 3u_{xt} u_{xx}[\tau_u] - 3u_{xxt}[\tau_x] + \\
 & - 3u_{xxt} u_x[\tau_u] - u[\phi_x] - uu_x[\phi_u - \xi_x] - uu_t[\tau_x] - uu_x^2[\xi_u] - uu_t u_x[\tau_u] = 0 .
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Devemos ainda substituir a equação de KdV, $u_t = -u_{xxx} - uu_x$ na equação acima, o que resulta em:

$$\begin{aligned}
 & \phi_t + u_{xxx}[\xi_x + \tau_t + \tau_{xxx}] - uu_x[\phi_u - \tau_t - \tau_{xxx}] - u_x u_{xxx}[3\tau_{xxu} + 5\xi_u] + \\
 & + uu_x^2[3\tau_{xxu} + \xi_u] - uu_x u_{xxx}[\tau_u] + 3u_{xx}[\phi_{xu} - \xi_{xx}] + 3u_x^2[\phi_{uuu} - \xi_{xxu}] + \\
 & + \phi_{xxx} + u_x[3\phi_{uux} + \phi - \xi_t - \xi_{xxx}] + 3u_x u_{xx}[\phi_{uu} - 3\xi_{ux}] + u_x^3[\phi_{uuu} - 3\xi_{xu}] + \\
 & - 6u_x^2 u_{xx}[\xi_{uu}] - u_x^4[\xi_{uuu}] + 3u_{xxx} u_x^2[\tau_{xu}] + 3uu_x^3[\tau_{xu}] + 3u_{xxx} u_{xx}[\tau_{xu}] - u[\phi_x] + \\
 & + 3uu_x u_{xx}[\tau_{xu}] + 3u_x u_{xx} u_{xxx}[\tau_{uu}] + 3uu_x^2 u_{xx}[\tau_{uu}] + u_{xxx} u_x^3[\tau_{uuu}] + uu_x^4[\tau_{uuu}] + \\
 & - 3u_x^2[\xi_u] - 3u_{xt}[\tau_{xx}] - 6u_{xt} u_x[\tau_{xu}] - 3u_{xt} u_x^2[\tau_{uu}] - 3u_{xt} u_{xx}[\tau_u] - 3u_{xxt}[\tau_x] + \\
 & - 3u_{xxt} u_x[\tau_u] - uu_x[\phi_u - \xi_x] + uu_{xxx}[\tau_x] + u^2 u_x[\tau_x] - uu_x^2[\xi_u] + 2uu_x u_{xxx}[\tau_u] = 0 .
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Essa é a nossa equação determinante para a KdV. Para determinarmos (ξ, τ, ϕ) devemos igualar cada coeficiente da equação acima a zero, resultando no seguinte quadro:

Coeficiente	Equação	
u_{xxx}	$\xi_x + \tau_t + \tau_{xxx} = 0$	(a)
uu_x	$\phi_u - \tau_t - \tau_{xxx} = 0$	(b)
$u_x u_{xxx}$	$3\tau_{xxu} + 5\xi_u = 0$	(c)
u	$\phi_x = 0$	(d)
$u^2 u_x^2$	$\tau_u = 0$	(e)
$uu_x u_{xxx}$	$\tau_u = 0$	(f)
u_{xx}	$\phi_{xu} - \xi_{xx} = 0$	(g)
u_x^2	$\phi_{uux} - \xi_{xxu} = 0$	(h)
1	$\phi_{xxx} + \phi_t = 0$	(i)
u_x	$\phi + u\tau_t - u\xi_x + 3\phi_{uux} - \xi_t - \xi_{xxx} = 0$	(j)
$u_x u_{xx}$	$\phi_{uu} - 3\xi_{ux} = 0$	(l)
u_x^3	$\phi_{uuu} - 3\xi_{xuu} = 0$	(m)
$u_x^2 u_{xx}$	$\xi_{uu} = 0$	(n)
u_x^4	$\xi_{uuu} = 0$	(o)
$u_x^2 u_{xxx}$	$\tau_{xuu} = 0$	(p)
uu_x^3	$\tau_{xuu} = 0$	(q)
$u_{xx} u_{xxx}$	$\tau_{xu} = 0$	(r)
$uu_x u_{xxx}$	$\tau_u = 0$	(s)
$uu_x u_{xx}$	$\tau_{xu} = 0$	(t)
$u_x u_{xx} u_{xxx}$	$\tau_{uu} = 0$	(u)
$uu_x^2 u_{xx}$	$\tau_{uu} = 0$	(v)
$u_x^3 u_{xxx}$	$\tau_{uuu} = 0$	(x)
uu_x^4	$\tau_{uuu} = 0$	(z)

$$u_{xx}^2 \quad \xi_u = 0 \quad (\text{aa})$$

$$u_{xt} \quad \tau_{xx} = 0 \quad (\text{bb})$$

$$u_{xt}u_x \quad \tau_{xu} = 0 \quad (\text{cc})$$

$$u_{xt}u_x^2 \quad \tau_{uu} = 0 \quad (\text{dd})$$

$$u_{xt}u_{xx} \quad \tau_u = 0 \quad (\text{ee})$$

$$u_{xxt} \quad \tau_x = 0 \quad (\text{ff})$$

$$u_{xxt}u_x \quad \tau_u = 0 \quad (\text{gg})$$

$$uu_{xxx} \quad \tau_x = 0 \quad (\text{hh})$$

$$u^2u_x \quad \tau_x = 0 \quad (\text{ii})$$

$$uu_x^2 \quad \xi_u = 0 \quad (\text{jj})$$

Esse conjunto de equações diferenciais lineares nos permite determinar (ξ, τ, ϕ) por simples substituições e integrações elementares. E obtemos as seguintes expressões para eles:

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= -xc_1 + c_2t + c_4 \\ \tau(t) &= c_1t + c_3 \\ \phi(u) &= c_1u + c_2 \end{aligned} \quad (2.38)$$

2.2.2 Construindo Geradores

Usando a Eq.(2.26), e tomando o conjunto de Eqs.(2.38), fazendo primeiramente $c_1 = 1$ e as demais constantes todas iguais a zero, obtemos o primeiro gerador

$$v_1 = -x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u}, \quad (2.39)$$

que é o gerador das transformações de escala. Agora $c_2 = 1$ e $c_{i \neq 2} = 0$

$$v_2 = t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}, \quad (2.40)$$

que é o gerador de um boost galileano. Fazendo $c_3 = 1$ e $c_{i \neq 3} = 0$, obtemos:

$$\mathbf{v}_3 = \frac{\partial}{\partial t} \quad ,$$

(2.41)

que gera as translações temporais do sistema. Por último, $c_4 = 1$, e os demais iguais a zero nos leva a:

$$\mathbf{v}_4 = \frac{\partial}{\partial x} \quad ,$$

(2.42)

que é o gerador das translações espaciais.

Resumindo temos os seguintes geradores para uma álgebra de Lie para a KdV

$$\mathbf{v}_1 = -x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u}$$

(2.43)

$$\mathbf{v}_2 = t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}$$

(2.43)

$$\mathbf{v}_3 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\mathbf{v}_4 = \frac{\partial}{\partial x}$$

Podemos agora construir a seguinte tabela de comutação.

	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$
$\mathbf{v}_1$	0	$2\mathbf{v}_2$	$-3\mathbf{v}_3$	$-\mathbf{v}_4$
$\mathbf{v}_2$	$-2\mathbf{v}_2$	0	$-\mathbf{v}_4$	0
$\mathbf{v}_3$	$3\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$	0	0
$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_4$	0	0	0

2.3 Equação de Cahn-Hilliard

Esse tipo de equação surgiu basicamente para descrever a propagação de ondas em sistemas onde atuam forças externas periódicas.[7]. A equação convenientemente normalizada pode ser escrita como:

$$\Delta(x, u^{(4)}(x)) = u_t - uu_x^2 + u_{xx}(1 - u^2) + u_{xxx} \quad (2.44)$$

Dos desenvolvimentos do Cap.(1), sabemos que devemos prolongar o nosso campo vetorial até a quarta ordem, o que nos levará ao critério de invariância dado por

$$pr^{(4)}\mathbf{v}[\Delta(x, u^{(4)})] = 0 \quad .$$

Segue-se que:

$$\phi^t - u_x^2\phi - 2uu_{xx}\phi - 2u u_x\phi^x + (1 - u^2)\phi^{xx} + \phi^{xxxx} = 0 \quad . \quad (2.45)$$

Os termos ϕ^t , ϕ^x , ϕ^{xx} já foram calculados anteriormente, restando agora determinar ϕ^{xxxx} , a partir da Eq.(1.63). Resulta que:

$$\phi^{xxxx} = D_x^4(\phi - \xi u_x - \tau u_t) + u_{xxxx}\xi + u_{xxxxt}\tau \quad , \quad (2.46)$$

onde

$$D_x^4(\xi u_x) = u_{xxxx}\xi + 4u_{xxx}D_x\xi + 6u_{xx}D_x^2\xi + 4u_{xx}D_x^3\xi + 4u_xD_x^4\xi \quad , \quad (2.47)$$

$$D_x^4(\tau u_t) = u_{txxxx}\tau + 4u_{txxx}D_x\tau + 6u_{txx}D_x^2\tau + 4u_{tx}D_x^3\tau + 4u_tD_x^4\tau \quad , \quad (2.48)$$

Substituindo ϕ^t , ϕ^x , ϕ^{xx} e ϕ^{xxxx} na Eq.(2.45) e utilizando a equação de Chan-Hilliard, Eq.(2.44), obtemos a seguinte equação determinante:

$$\begin{aligned} & \phi_t - \xi_t[u_x] + (\phi_u - \tau_t)[uu_x^2] + (\phi_u - \tau_t)[u_{xx}(u^2 - 1)] + (\tau_t - \phi_u)[u_{xxx}] - \xi_u[u_x^3u] + \\ & + \xi_u[u_xu_{xxx}] - \tau_u[u^2u_x^4 + [u_{xx}(u^2 - 1) - u_{xxx}]^2 + 2u^2u_{xx}(u^2 - 1) - 2u u_x^2u_{xxx}] - \\ & + \xi_u[u_xu_{xx}(u^2 - 1)] - 2uu_{xx}\phi - 2u u_xD_x\phi + 2u u_x^2D_x\xi + (1 - u^2)D_x^2\phi - u_x(1 - u^2)D_x^2\xi + \\ & - u_x^2\phi - 2u_{xx}(1 - u^2)D_x\xi + D_x^4\phi + 4u_{xxx}D_x\xi + 6u_{xx}D_x^2\xi + 4u_{xx}D_x^3\xi + u_xD_x^4\xi \quad . \end{aligned} \quad (2.49)$$

Onde os termos que envolvem derivadas de τ em relação x foram todos igualados a zero, já que o coeficiente $u_{xxx}\tau$ aparece uma única vez, e esta associado com $D_x\tau$. Temos ainda:

$$\begin{aligned}
D_x^4 \phi = & \phi_{xxxx} + u_x[4\phi_{xxxu}] + u_{xx}[6\phi_{xxu}] + u_x^2[6\phi_{xxuu}] + u_{xxx}[4\phi_{xu}] + u_{xx}^2[3\phi_{uu}] + \\
& + u_x u_{xx}[12\phi_{uux}] + u_x^3[4\phi_{uuu}] + u_x u_{xxx}[4\phi_{uu}] + u_x^2 u_{xx}[6\phi_{uuu}] + \\
& + u_x^4[\phi_{uuuu}] + u_{xxxx}[\phi_u] .
\end{aligned} \quad (2.50)$$

E analogamente para $D_x^4 \xi$. Resulta, igualando a zero todos os coeficientes, uma série de equações diferenciais. Omitindo as equações redundantes teremos a seguinte tabela:

Coeficiente	Equação	
u_x^2	$\phi - \phi_{uu} - 6\phi_{xxuu} = 0$	(a)
uu_x	$2\phi_x = 0$	(b)
$u_x u_{xxx}$	$4\phi_{uu} = 0$	(c)
$u^2 u_{xx}$	$2\xi_x = 0$	(d)
u_{xxxx}	$\tau_t - 5\xi_x = 0$	(e)
u_{xxx}^2	$\tau_u = 0$	(f)
$u_x u_{xxxx}$	$4\xi_u = 0$	(g)
u_x	$\xi_t - 4\phi_{xxxu} + \xi_{xxxx} = 0$	(h)

Com estas 8 equações podemos determinar os coeficientes de nossos geradores. Vale comentar que a equação determinante completa (com os termos irrelevantes) possui 123 termos.

Do sistema acima resulta que:

$$\begin{aligned}
\xi &= c_1 \\
\tau &= c_2 \\
\phi &= 0
\end{aligned} \quad (2.51)$$

2.3.1 Os Geradores das Simetrias da Equação de Cahn-Hilliard

A partir da forma geral para nossos geradores

$$v = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \phi \frac{\partial}{\partial u}$$

obtemos dois geradores, o primeiro com $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial x} \text{ ,}$$

e o segundo, fazendo $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$

$$v_2 = \frac{\partial}{\partial t} \text{ .}$$

Consequentemente temos a seguinte tabela de comutação

	v_1	v_2
v_1	0	0
v_2	0	0

2.4 A Equação de Onda

Essa equação será a última ser analisada nesse capítulo, e por simplicidade, vamos considerar a equação da onda unidimensional

$$\Delta(x, u^{(2)}(x)) = u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{2.52}$$

Nosso critério de invariância será:

$$pr^{(2)}v[\Delta(x, u^{(2)}(x))] = 0 \tag{2.53}$$

que leva a:

$$\phi^{tt} - \phi^{xx} = 0 \text{ .} \tag{2.54}$$

Usando novamente a Eq.(1.63) encontramos ϕ^{tt} como sendo

$$\phi^{tt} = D_x^2 \phi - u_x D_x^2 \xi - u_t D^2 \tau - 2u_{xt} D_t \xi - 2u_{tt} D_t \tau, \quad (2.55)$$

onde

$$D_t \xi = \xi_t + u_t \xi_u, \quad (2.56)$$

$$D_t^2 \xi = \xi_{tt} + 2u_t \xi_{tu} + u_t^2 \xi_{uu} + u_{tt} \xi_u, \quad (2.57)$$

e, analogamente para $D_x^2 \phi$ e $D_x^2 \tau$. Substituindo ainda u_{tt} por u_{xx} , de acordo com a Eq.(2.52), obtemos a seguinte equação determinante:

$$\begin{aligned} & \phi_{tt} - \phi_{xx} + u_x u_t (2\tau_{xu} - 2\xi_{tu}) + u_t (2\phi_{tu} - \tau_{tt} + \tau_{xx}) + u_t^2 (\phi_{uu} - 2\tau_{tu}) + u_{xx} (2\xi_x - 2\tau_t) + \\ & - u_x u_t^2 (\xi_{uu}) + u_x u_{xx} (2\xi_u) - u_t u_{xx} (2\tau_u) + u_{xt} (2\tau_x - 2\xi_t) - u_t u_{xt} (2\xi_u) + u_x^2 (2\xi_{xu} - \phi_{uu}) + \\ & + u_x^2 u_t (\tau_{uu}) + u_t u_{xx} (\tau_u) + u_x u_{xx} (\tau_u) + u_x (\xi_{xx} - \xi_{tt} - 2\phi_{xu}) + u_t^3 (\tau_{uu}) + u_x^3 (\xi_{uu}) = 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

o que nos permite, analogamente aos casos anteriores, construir a tabela de equações abaixo:

Coeficiente	Equação
1	$\phi_{tt} - \phi_{xx} = 0 \quad (a)$
u_{xx}	$\xi_x - \tau_t = 0 \quad (b)$
$u_x u_{xx}$	$2\xi_u = 0 \quad (c)$
$u_t u_{xx}$	$-2\tau_u = 0 \quad (d)$
u_{xt}	$2\tau_x - 2\xi_t = 0 \quad (e)$
u_x^2	$2\xi_{xu} - \phi_{uu} = 0 \quad (f)$

Este conjunto de equações determina a forma de (ξ, τ, ϕ) , que resulta ser:

$$\begin{aligned} \xi &= c_1 + c_2 x + c_3 t + c_4 (x^2 + t^2) + 2c_5 xt \\ \tau &= c_6 + c_3 x + c_2 t + 2c_4 xt + c_5 (x^2 + t^2) \\ \phi &= (c_7 - c_4 x - c_5 t)u + \beta(x, t) \end{aligned} \quad (2.59)$$

onde $\beta(x, t)$, de acordo com a equação (a), pode ser qualquer solução da Equação de Onda.

2.4.1 Construindo os Geradores

Vamos primeiramente considerar que a solução $\beta(x, t)$ identicamente nula. Tomando $c_1 = 1$ e $c_{i \neq 1} = 0$ obtemos

$$v_1 = \frac{\partial}{\partial x} , \quad (2.60)$$

que é o gerador das translações espaciais. Com $c_2 = 1$ e $c_{i \neq 2} = 0$

$$v_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} , \quad (2.61)$$

gera uma transformação de escala. Se fizermos $c_3 = 1$ e $c_{i \neq 3} = 0$, obtemos

$$v_3 = t \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial t} , \quad (2.62)$$

que é gerador de uma rotação hiperbólica em torno de um eixo perpendicular ao plano (x, t) .

Com $c_4 = 1$ e $c_{i \neq 4} = 0$, teremos

$$v_4 = (x^2 + t^2) \frac{\partial}{\partial x} + 2xt \frac{\partial}{\partial t} - xu \frac{\partial}{\partial u} , \quad (2.63)$$

e com $c_5 = 1$ e $c_{i \neq 5} = 0$, obtemos

$$v_5 = 2xt \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + t^2) \frac{\partial}{\partial t} - tu \frac{\partial}{\partial u} . \quad (2.64)$$

Estes dois últimos são típicos geradores de transformações locais. Tomando agora $c_6 = 1$ e $c_{i \neq 6} = 0$ teremos:

$$v_6 = \frac{\partial}{\partial t} , \quad (2.65)$$

gerador das translações espaciais. E finalmente tomando $c_7 = 1$ e as demais constantes todas iguais a zero encontramos

$$v_7 = u \frac{\partial}{\partial u} , \quad (2.66)$$

associado basicamente a uma transformação de escala em u . Por último, se fizermos $c_i = 0$ e $\beta(x, t)$ como sendo uma dada solução da Equação de Onda (2.52), obtemos uma subálgebra de dimensão infinita

$$v_\beta = \beta(x, t) \frac{\partial}{\partial u} \text{ ,}$$

(2.67)

que reflete basicamente a linearidade da equação de onda.

A tabela de comutação obtida a partir destes geradores é:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
v_1	0	v_1	v_6	$2v_2 - v_7$	$2v_3$	0	0
v_2	$-v_1$	0	$v_2 - v_3$	v_4	v_5	$-v_6$	0
v_3	$-v_6$	$v_3 - v_2$	0	v_5	v_4	$-v_1$	0
v_4	$v_7 - 2v_2$	$-v_4$	$-v_5$	0	0	$-2v_3$	0
v_5	$-2v_3$	$-v_5$	$-v_4$	0	0	$v_7 - 2v_2$	0
v_6	0	v_6	v_1	$2v_3$	$2v_2 - v_7$	0	0
v_7	0	0	0	0	0	0	0

3.1 Simetrias Variacionais

Considere um problema variacional como sendo o problema da determinação dos pontos extremos de uma função funcional J definida sobre um espaço de funções X ...

$$J = \int_a^b L(x, u^{(n)}) dx$$

(3.1)

onde $a \leq b$ e L é uma função real definida em Ω , com $X = \mathbb{R}^n$ e $U = \mathbb{R}^m$. Chamamos a integral $J(u)$ de funcional do problema variacional $J = 0$ quando existe um ponto extremo para um dado funcional sobre um extremo, seja a aplicação de uma derivada variacional sobre $L(x)$, com a condição de que o resultado da aplicação seja nulo. Podemos escrever isso da seguinte maneira...

Capítulo 3

Simetrias Variacionais e Leis de Conservação

Nesse Capítulo vamos primeiramente analisar sistemas de equações diferenciais que estão associadas a um problema variacional. Depois de expormos os conceitos básicos, introduziremos as simetrias variacionais. Em seguida discutiremos a idéia de Lei de Conservação, de uma forma precisa, para sistemas de equações diferenciais. E finalmente, discutiremos o Teorema de Noether, e condições de aplicabilidade em sistemas de equações diferenciais.

3.1 Simetrias Variacionais

Definimos um problema variacional como sendo o problema da determinação dos extremos do funcional

$$\mathcal{L} = \int_{\Omega} L(x, u^{(n)}) dx, \quad (3.1)$$

onde $\Omega \subset X$ é um aberto com fronteira $\partial\Omega$, com $X = \mathbb{R}^p$ e $U = \mathbb{R}^q$. Chamamos o integrando $L(x, u^{(n)})$, de lagrangeana do problema variacional $\mathcal{L}$. O nosso critério para que um dado funcional tenha um extremo, será a aplicação de uma derivada variacional sobre $\mathcal{L}[u]$, com a condição de que o resultado da aplicação seja nulo. Podemos expressar essa idéia na seguinte proposição.

Proposição 3.1

Se $u = f(x)$ é um extremo de $\mathcal{L}[u]$, então

$$\delta \mathcal{L}[u] = 0, \quad x \in \Omega.$$

Onde δ designa a derivada variacional [8]. Agora, precisamos operacionalizar a atuação da derivada variacional, para isso, devemos definir o operador de Euler.

Definição 3.2

Para $1 \leq \alpha \leq q$, o α -ésimo operador de Euler é dado por

$$\mathbf{E}_\alpha = \sum_j (-D)_j \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha}.$$

Com esta definição em mãos, podemos verificar que a derivada variacional $\delta \mathcal{L}[u]$ pode ser escrita como $\mathbf{E}(L)$. Ou seja, $\delta \mathcal{L}[u] \equiv \mathbf{E}(L)$. Assim, com o conceito de extremo, dado pela Proposição (3.1), juntamente com a definição de operador de Euler, podemos estabelecer o seguinte teorema sobre extremos de problemas variacionais.

Teorema 3.3

Se $u = f(x)$ é um extremo suave do problema variacional

$$\mathcal{L}[u] = \int_\Omega L(x, u^{(n)}) dx$$

então ele deve ser uma solução das equações de Euler-Lagrange

$$\mathbf{E}_\nu(L) = 0 \quad \nu = 1, \dots, q.$$

Definiremos agora o que é um grupo de simetrias variacionais associado a um dado funcional.

Definição 3.4

Um grupo G de transformações locais atuando em uma variedade $\mathcal{M} \subset \Omega_0 \times U$, é um grupo de simetrias variacionais de $\mathcal{L} = \int_\Omega L(x, u^{(n)}) dx$, se sempre que existir um subdomínio

$\Omega \subset \Omega_o$, $u = f(x)$ uma função suave definida em Ω cujo gráfico vive em $\mathcal{M}$, e $g \in G$ é tal que $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) = g \cdot f(\tilde{x})$ esta definido em $\tilde{\Omega} \subset \Omega_o$, então:

$$\int_{\tilde{\Omega}_o} L(\tilde{x}, pr^{(n)} \tilde{f}(\tilde{x})) d\tilde{x} = \int_{\Omega} L(x, pr^{(n)} f(x)) dx \quad (3.2)$$

Ou seja, as simetrias de um funcional se manifestam sobre a forma de geradores de transformações nas variáveis dependentes e independentes do sistema, tais que, o funcional permaneça inalterado.

Com os teoremas e definições expostos até aqui, podemos agora partir para a construção de um critério infinitesimal de invariância variacional.

3.1.1 Critério Infinitesimal de Invariância

Analogamente ao conceito desenvolvido no Cap.(1), queremos definir aqui também um critério infinitesimal de simetria. Queremos um critério para que possamos identificar um conjunto de geradores de transformações como sendo, ou não, um grupo de simetrias para um dado problema variacional.

Teorema 3.5

Um grupo G de transformações atuando em $\mathcal{M} \subset \Omega_o \times U$ será um grupo de simetrias variacionais do funcional dado pela Eq.(3.1) se e somente se

$$pr^{(n)} \mathbf{v}(L) + L \text{Div} \xi = 0 \quad (3.3)$$

para todo $(x, u^{(n)}) \in \mathcal{M}^{(n)}$ e todo gerador infinitesimal

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi_{\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}$$

de G . Onde:

$$\text{Div} \xi = D_1 \xi^1 + \dots + D_p \xi^p. \quad (3.4)$$

Para entendermos esse teorema notemos que para cada $g \in G$, temos:

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \cdot (x, u) = (\Theta_g(x, u), \Phi_g(x, u)) \quad , \quad (3.5)$$

e que pela Def.(3.4) temos a seguinte expressão como condição de simetria:

$$\int_{\Omega} L(\tilde{x}, pr^{(n)}(g \cdot f)(\tilde{x})) det J_g(x, pr^{(1)}f(x)) dx = \int_{\Omega} L(x, pr^{(n)}f(x)) dx . \quad (3.6)$$

A matriz jacobiana pode ser reescrita como:

$$J_g^{ij}(x, u^{(1)}) = D_i \Theta_j^i(x, u^{(1)}) . \quad (3.7)$$

Se tomarmos $u = f(x)$, os integrandos da Eq.(3.6) tomarão a seguinte forma:

$$L[pr^{(n)}(g \cdot (x, u^{(n)}))] det J_g(x, u^{(1)}) = L(x, u^{(n)}) . \quad (3.8)$$

Agora, para obtermos a versão infinitesimal da Eq.(3.6), escrevemos o fluxo como $g = g_{\epsilon} = exp(\epsilon v)$ e derivamos em relação a ϵ , de tal forma que:

$$\frac{d}{d\epsilon} [det J_{g_{\epsilon}}(x, u^{(1)})] = Div \xi(pr^{(1)}g_{\epsilon} \cdot (x, u^{(1)})) det J_{g_{\epsilon}}(x, u^{(1)}) . \quad (3.9)$$

Da Def.(1.8) temos:

$$pr^{(n)}v|_{(x, u^{(n)})} = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} pr^{(n)}[exp(\epsilon v)](x, u^{(n)}) . \quad (3.10)$$

Juntando agora as Eqs.(3.7) - (3.9), obtemos a seguinte versão infinitesimal da Eq.(3.6):

$$[pr^{(n)}v(L) + L Div \xi] det J_{g_{\epsilon}} = 0 . \quad (3.11)$$

Como o determinante da matriz jacobiana da transformação é sempre diferente de zero, pois a transformação está sujeita a uma estrutura de grupo, obtemos a seguinte expressão:

$$pr^{(n)}v(L) + L Div \xi = 0 , \quad (3.12)$$

que é a Eq.(3.3).

3.1.2 Simetrias da equação de Euler-Lagrange

Agora discutiremos a invariância das equações de Euler-Lagrange, frente a uma transformação de simetria variacional.

Teorema 3..6

Seja G um grupo de simetrias variacionais do funcional $\mathcal{L}[u] = \int_{\Omega_0} L(x, u^{(n)}) dx$, então G é um grupo de simetrias das equações de Euler-Lagrange $E(L) = 0$. [4][9].

Como exemplo, tomemos a equação da onda e suas simetrias, discutidas na última seção do Cap.(2). Ela se integra à definição de simetria variacional desenvolvida nesse Capítulo, justamente por ser a única das equações diferenciais discutidas anteriormente que possui um problema variacional associado. Vamos analisa-la agora com alguns detalhes. Do Cap.(2) sabemos que a nossa equação é dada por:

$$\Delta(x, u^{(2)}) = u_{tt} - u_{xx} , \quad (3.13)$$

que é a equação de movimento associada ao seguinte funcional:

$$\mathcal{L}[u] = \int \int [\frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}u_x^2] dx dt , \quad (3.14)$$

onde podemos verificar a concordância com o Teorema (3.3). Ou seja:

$$E(L) = \Delta(x, u^{(2)}) = u_{tt} - u_{xx} = 0 . \quad (3.15)$$

Dado que sabemos quais são os geradores das simetrias da equação de onda, já determinadas no Cap.(2), e lembrando, do Teorema (3.6), que as simetrias da lagrangeana são simetrias da equação de Euler-Lagrange associada. Podemos então determinar quais são as simetrias da lagrangeana, verificando quais das simetrias da equação de movimento são também simetrias da lagrangeana.

Assim, tomemos o gerador v_1 como dado pela Eq.(2.84). Ele é uma simetria da equação de movimento, Eq.(3.15), como verificamos com os cálculos realizados na Seção (2.4). Podemos

agora verificar que esse gerador é também gerador de uma simetria do problema variacional associado. Para isso, de acordo com o Teorema (3.5), basta mostrar que:

$$pr^{(1)}\mathbf{v}_1(L) + LDiv\xi = 0 \quad , \quad (3.16)$$

onde o prolongamento é feito somente até a primeira ordem, pois essa é a ordem mais alta das derivadas presentes em $\mathcal{L}[u]$. Assim, obtemos:

$$pr^{(1)}\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 \quad , \quad (3.17)$$

logo:

$$pr^{(1)}\mathbf{v}(L) = 0 \quad . \quad (3.18)$$

E

$$Div(\xi) = D_x(1) = 0 \quad , \quad (3.19)$$

assim:

$$LDiv(\xi) = 0 \quad , \quad (3.20)$$

logo:

$$pr^{(1)}\mathbf{v}_1(L) + LDiv(\xi) = 0 \quad . \quad (3.21)$$

Ou seja, verificamos através do Teorema (3.5) que $\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ é gerador de um grupo de simetrias variacionais de $\mathcal{L}[u]$, além de ser também o gerador de uma simetria para a equação de movimento associada. Uma outra simetria da equação de movimento, calculada no Cap.(2), $\mathbf{v}_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t}$, também é uma simetria do problema variacional, pois como podemos verificar:

$$pr^{(1)}\mathbf{v}_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} - u_x \frac{\partial}{\partial u_x} - u_t \frac{\partial}{\partial u_t} \quad , \quad (3.22)$$

então:

$$pr^{(1)}\mathbf{v}_2(L) = -u_x^2 - u_t^2 \quad . \quad (3.23)$$

E

$$Div\xi = D_x(x) + D_t(t) = 2 \quad , \quad (3.24)$$

assim:

$$L\text{Div}(\xi) = u_x^2 + u_t^2 . \quad (3.25)$$

Logo:

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{v}(L) + \text{Div}(\xi) = 0 . \quad (3.26)$$

Agora, se tomarmos $\mathbf{v}_3 = x \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x}$ vamos obter:

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{v}_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} - u_t \frac{\partial}{\partial u_x} - u_x \frac{\partial}{\partial u_t} \quad (3.27)$$

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{v}_3(L) = -u_t u_x - u_x u_t = -2u_t u_x \quad (3.28)$$

e

$$\text{Div}(\xi) = D_x(t) + D_t(x) = 0 \quad (3.29)$$

logo

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{v}_3(L) + L\text{Div}(\xi) = -2u_x u_t . \quad (3.30)$$

Assim, verificamos que $\mathbf{v}_3$ dado pela Eq.(2.86) não é gerador de um grupo de simetrias variacionais para o funcional dado pela Eq.(3.14), mas é gerador de um grupo de Lie para a sua equação de movimento, Eq.(3.15). Procedendo de maneira analoga para os demais geradores da equação da onda, calculados no Cap.(2), verificamos ainda que os campos $\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_7$, dado pelas equações (2.87), (2.88) e (2.90) também não são geradores de simetrias variacionais desse problema. Em geral as simetrias da equação de movimento são sempre maiores (número de geradores) que do problema variacional associado.

Nos falta ainda analisar quais as condições sobre $\mathbf{v}_6$ e $\mathbf{v}_\beta$, Eq.(2.89) e Eq.(2.91). O gerador $\mathbf{v}_6$ é claramente uma simetria do funcional associado, cálculo idêntico ao desenvolvido para o gerador $\mathbf{v}_1$. Agora, para que o gerador $\mathbf{v}_\beta$, que é uma simetria da equação de movimento, seja também uma simetria do funcional associado, devemos verificar quais condições devem ser impostas sobre a função β . Então, de acordo com o Teorema (3.5), devemos calcular o primeiro prolongamento de $\mathbf{v}_\beta = \beta(x, t) \frac{\partial}{\partial u}$. Obtemos:

$$\text{pr}^{(1)}\mathbf{v}_\beta = \beta \frac{\partial}{\partial u} + \beta_x \frac{\partial}{\partial u_x} + \beta_t \frac{\partial}{\partial u_t} \quad (3.31)$$

E aplicando o nosso critério de invariância, com a lagrangeana da Eq.(3.14), temos:

$$pr^{(1)}v_\beta(L) = \beta_x u_x + \beta_t u_t \quad (3.32)$$

e

$$LDiv(\xi) = L[D_x(0) + D_t(0)] = 0 \quad (3.33)$$

Assim pelo Teorema (3.5) para que v_β seja um gerador de um grupo de simetrias variacionais de $\mathcal{L}[u]$ dado pela Eq.(3.14), v_β deve satisfazer:

$$pr^{(1)}v_\beta(L) = \beta_x u_x + \beta_t u_t = 0 \quad , \quad (3.34)$$

ou simplesmente:

$$\beta_x u_x + \beta_t u_t = 0 \quad . \quad (3.35)$$

Queremos agora encontrar quais são as funções β que podem satisfazer esta equação. Como $u(x, t)$ pode ser qualquer solução da equação da onda, podemos igualar cada um dos coeficientes acima a zero. Então, do coeficiente u_x , temos que:

$$\beta_x = 0 \quad (3.36)$$

mas, como mostrado na Cap.(2), β é uma função somente se x e t , então teremos:

$$\beta(x, t) = f(t) \quad . \quad (3.37)$$

Juntando essa informação com a condição imposta pelo coeficiente u_t , teremos:

$$\beta_t = f'(t) = 0 \quad ,$$

ou seja:

$$f(t) = c_1. \quad (3.38)$$

Logo:

$$\beta(x, t) = c_1 \quad . \quad (3.39)$$

Assim temos um novo gerador para um grupo de simetria do funcional dado pela Eq.(3.14), que é o seguinte:

$$v_\beta = \frac{\partial}{\partial u} \quad .$$

(3.40)

Resumindo obtemos o seguinte conjunto de geradores de simetrias variacionais para o funcional dado pela Eq.(3.14), cujos extremos são as soluções da equação da onda discutida no Cap.(2):

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \\ v_2 &= x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} \\ v_6 &= \frac{\partial}{\partial t} \\ v_\beta &= \frac{\partial}{\partial u} \end{aligned}$$

(3.41)

E podemos então escrever a seguinte tabela de comutação associada aos geradores acima.

	v_1	v_6	v_2	v_β
v_1	0	0	v_1	0
v_6	0	0	v_6	0
v_2	$-v_1$	$-v_6$	0	0
v_β	0	0	0	0

Devemos ainda notar que os geradores de simetrias do funcional dado pela Eq.(3.14), e cujos extremos são soluções da equação da onda, estão todos contidos no conjunto de simetrias da própria equação de movimento, já calculados no Cap.(2), o que esta em completo acordo com o Teorema (3.6).

Voltaremos a estas simetrias mais adiante, quando determinaremos leis de conservação associadas a alguns desses geradores.

3.2 Leis de conservação

Uma lei de conservação associada a um sistema de equações diferenciais $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ é uma expressão de divergência total nula:

$$\text{Div} P = 0, \quad (3.42)$$

para todas as soluções $u = f(x)$ do dado sistema de equações. Onde $P = [P_1(x, u^{(n)}), \dots, P_p(x, u^{(n)})]$ é a p -upla função suave de x , u e derivadas de u .

No caso de sistemas de equações diferenciais ordinárias, envolvendo uma única variável $x \in \mathbb{R}$, uma lei de conservação será da forma $D_x P = 0$. Isso implica que $P(x, u^{(n)})$ seja uma constante para qualquer solução do sistema. Essa lei de conservação equivale a noção clássica de primeira integral ou constante de movimento para o sistema.

Em um problema dinâmico, uma das variáveis independentes é distinguida das demais como sendo o tempo t , e as variáveis $x = (x^1, \dots, x^p)$ são as variáveis espaciais. Nesse caso uma lei de conservação toma a seguinte forma:

$$D_t T + \text{Div} X = 0. \quad (3.43)$$

Onde chamamos T de densidade conservada e $X = (X^1, \dots, X^p)$ de corrente ou fluxo conservado associado.

Suponha agora um domínio espacial $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, e $u = f(x, t)$ uma solução definida para todo $x \in \Omega$, $a \leq t \leq b$. Considere ainda o seguinte funcional associado a densidade conservada:

$$\mathcal{T}_\Omega[f](t) = \int_\Omega T(x, t, pr^{(n)} f(x, t)) dx \quad (3.44)$$

que depende somente de t . A propriedade conservativa básica associada a esse funcional nos diz que $\mathcal{T}_\Omega[f]$ depende somente do valor inicial de f em $t = 0$, e do valor de f na fronteira $\partial\Omega$.

Proposição 3.7

Suponha que T e X sejam a densidade e o fluxo conservados, associados a uma lei de conservação de um dado sistema de equações diferenciais. Então, para qualquer domínio

limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ com fronteira suave $\partial\Omega$, e para qualquer solução $u = f(x, t)$ definida para $x \in \Omega$, $a \leq t \leq b$, e o funcional dado pela Eq.(3.44) satisfaz:

$$\mathcal{T}_\Omega[f](t) - \mathcal{T}_\Omega[f](a) = - \int_a^t \int_{\partial\Omega} X(x, \tau, pr^{(n)}f(x, \tau)) \cdot dS d\tau \quad (3.45)$$

então T e X definem uma lei de conservação.

Para verificar isso, basta derivar o funcional da Eq.(3.44), em relação a t , e obtemos:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{T}_\Omega[f](t) = \int_\Omega D_t T(x, t, pr^{(n)}f) dx \quad (3.46)$$

usando então a Eq.(3.43) juntamente com o teorema da divergência, temos:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{T}_\Omega[f](t) = - \int_{\partial\Omega} X(x, t, pr^{(n)}f) \cdot dS \quad (3.47)$$

que implica em:

$$\mathcal{T}_\Omega[f](t) - \mathcal{T}_\Omega[f](a) = - \int_a^t \int_{\partial\Omega} X(x, \tau, pr^{(n)}f(x, \tau)) \cdot dS d\tau \quad (3.48)$$

Ou seja:

$$\int_\Omega \{D_t T(x, t, pr^{(n+1)}f) + \text{Div} X(x, t, pr^{(n+1)}f)\} dx = 0 \quad (3.49)$$

que é o funcional associado a nossa lei de conservação.

3.2.1 Leis de Conservação Triviais

Chamamos de leis de conservação triviais expressões de divergência total nula, que decorre diretamente de uma identidade, e podemos distinguir dois tipos de leis de conservação triviais. O primeiro tipo ocorre quando a próprio $P(x, u^{(n)})$ assume valor nulo para as soluções do sistema. Por exemplo, se tomarmos a equação de onda, discutida anteriormente:

$$\Delta(x, u^{(n)}) = u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad (3.50)$$

A expressão

$$D_t \left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} u_x^2 \right) - D_x (u_t u_x) = u_t (u_{tt} - u_{xx}) = 0 \quad (3.51)$$

é claramente uma lei de conservação, já que essa expressão é uma divergência total. Se fizermos agora a seguinte substituição:

$$\begin{aligned} u_t &= v_x \\ u_x &= v_t \end{aligned} \quad (3.52)$$

Obtemos:

$$D_t\left(\frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}v_x^2\right) - D_x(u_x v_x) = 0, \quad (3.53)$$

que difere da primeira lei de conservação pela seguinte expressão:

$$D_t\left(\frac{1}{2}u_t^2 - \frac{1}{2}v_x^2\right) + D_x(v_x u_x - u_t u_x) = 0. \quad (3.54)$$

E dizemos que esta última lei de conservação é trivial, pois o próprio P vai a zero quando u for uma solução da Equação de Onda.

Um segundo tipo de lei de conservação trivial, ocorre quando a divergência é identicamente nula, independentemente de a função u ser ou não uma solução do problema associado. Por exemplo, um sistema com $p = 2$ e $q = 1$, a identidade:

$$D_x(u_y) - D_y(u_x) = 0, \quad (3.55)$$

é sempre verdadeira. As leis de conservação devido a divergências identicamente nulas não dependem de quaisquer estruturas particulares de um dado sistema de equações diferenciais. E podemos identificar esse tipo de lei de conservação trivial, de uma forma geral, com o lema de Poincaré: $d\omega = 0$, $\omega = d\alpha$, localmente.[10]. Por exemplo, a divergência do rotacional é sempre identicamente nula, independentemente do campo sobre o qual se atua o rotacional ser ou não solução de um dado sistema de equações diferenciais. Dessa maneira podemos dizer que o rotacional de um campo é sempre uma quantidade conservada trivial.

Teorema 3.8

Suponha $P = (P_1, \dots, P_p)$ uma p -upla função suave dependendo de $x = (x^1, \dots, x^p)$ e $u = (u^1, \dots, u^q)$ e derivadas de u , definida em todo o espaço de jatos $X \times U^{(n)}$. Então

P será uma divergência nula, $Div P = 0$, se e somente se, existirem funções suaves Q_{jk} , $i, j = 1, \dots, p$, dependendo de x, u e derivadas de u , tais que

$$Q_{jk} = -Q_{kj} \quad j, k = 1, \dots, p$$

e

$$P_j = \sum_{k=1}^p D_k Q_{jk} \quad j = 1, \dots, p$$

para todo $(x, u^{(n)})$. [10]

Note que a divergência do rotacional de um dado campo, se enquadra perfeitamente ao panorama desse teorema.

Concluindo, diremos que duas leis de conservação P e $\tilde{P}$, são equivalentes, somente se elas diferirem por uma lei de conservação trivial R . Ou seja, $P = \tilde{P} + R$.

3.2.2 Características de Leis de Conservação

Dada uma lei de conservação, associada a um sistema de equações diferenciais $\Delta(x, u^{(n)})$. Podemos afirmar que $Div P$ é idênticamente zero para todas as soluções do sistema se e somente se existirem funções $Q_\nu^J(x, u^{(n)})$ tais que:

$$Div P = \sum_{\nu, J} Q_\nu^J D_J \Delta_\nu, \quad (3.56)$$

para todo $(x, u^{(n)})$.

Para verificarmos isso basta lembrarmos que $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$ define uma subvariedade S_Δ , tal que uma dada função F , se anulará em S_Δ se e somente se escrevemos:

$$F = \sum_{\nu} H_\nu \Delta_\nu, \quad (3.57)$$

para qualquer função suave H_ν . [6]. Em particular se escrevermos $F = Div P$, teremos:

$$Div P = \sum_{\nu} H_\nu \Delta_\nu. \quad (3.58)$$

Agora escrevendo H_ν no sentido da Eq.(1.82),

$$H_\nu = pr^{(n)}v_{Q_\nu} + \sum_J Q_\nu^J(x, u)D_J ,$$

obtemos:

$$DivP = \sum_\nu \sum_J Q_\nu^J(x, u)D_J \Delta_\nu ,$$

em acordo com a Eq.(3.56).

Agora, se integramos por partes a equação acima, obtemos:

$$Q_\nu^j D_j \Delta_\nu = D_j(Q_\nu^j \Delta_\nu) - D_j(Q_\nu^j) \Delta_\nu . \quad (3.59)$$

Dessa maneira, temos a seguinte identidade equivalente:

$$DivP = DivR + \sum_{\nu=1}^l Q_\nu \Delta_\nu \equiv DivR + Q \cdot \Delta , \quad (3.60)$$

onde escrevemos os l termos $Q = (Q_1, \dots, Q_l)$, como:

$$Q_\nu = \sum_J (-D_J) Q_\nu^J , \quad (3.61)$$

e $R = (R_1, \dots, R_p)$ como $Q_\nu^j \Delta_\nu$. Assim R é uma lei de conservação trivial, pois podemos substituir P por $P - R$, e obter uma lei de conservação equivalente, escrita de uma forma especial, que chamamos de equação característica de uma lei de conservação:

$$DivP = Q \cdot \Delta \quad (3.62)$$

Onde as funções Q são as funções características de um dado conjunto de transformações de simetria, como definida na última seção do Cap.(1).

Se voltarmos agora para a nossa equação de onda, veremos que na Seção (3.2.1) determinamos a seguinte lei de conservação para essa equação:

$$D_t\left(\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{2}u_x^2\right) - D_x(u_x u_t) = u_t D_t(u_t - v_x) + u_t D_x(v_t - u_x) . \quad (3.63)$$

Podemos então observar que o termo do lado direito da expressão acima, já esta escrita na forma de uma equação característica, de acordo com a Eq.(3.62), e determina a seguinte função característica:

$$Q = (-D_t(u_t), -D_x(u_t)) = (-u_{tt}, -u_{xt}) \quad , \quad (3.64)$$

associada a quantidade conservada descrita na Eq.(3.63).

Voltaremos a discutir características de leis de conservação no Cap.(5), onde determinaremos classes gerais de leis de conservação associadas as equações discutidas nessa dissertação.

3.3 Teorema de Noether

Nessa seção iremos relacionar grupos de simetrias e leis de conservação para sistemas de equações diferenciais associados a algum problema variacional. Faremos isto de maneira tal que, para cada uma das simetria calculadas, possamos determinar as funções características, e a partir delas verificarmos se existe ou não uma lei de conservação associada a essa dada transformação. Para tanto, enunciaremos o seguinte teorema:

Teorema 3.9

Seja G um grupo local de transformações de simetrias a 1-parâmetro do funcional $\mathcal{L}[u] = \int L(x, u^{(n)})dx$. Seja

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad , \quad (3.65)$$

o gerador infinitesimal de G , e

$$Q_\alpha(x, u) = \phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha, \quad u_i^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (3.66)$$

a função característica de $\mathbf{v}$, como na Eq.(1.79). Então $Q = (Q_1, \dots, Q_q)$ também será a função característica de uma lei de conservação para as equações de Euler-Lagrange $\mathbf{E}(L) = 0$; em

outras palavras, existe uma função $P(x, u^{(n)}) = (P_1, \dots, P_q)$, tal que:

$$Div P = Q \cdot E(L) = \sum_{\nu=1}^q Q_{\nu} E_{\nu}(L) \quad , \quad (3.67)$$

que é a equação característica de uma lei de conservação para as equações de Euler-lagrange $E(L) = 0$. [4].

Chamamos este teorema de Teorema de Noether, e para provarmos esse teorema devemos nos valer do nosso critério de invariância infinitesimal:

$$pr^{(n)}\mathbf{v}(L) + LDiv\xi = 0 \quad , \quad (3.68)$$

Introduzimos o campo prolongado como na Eq.(1.82), obtemos:

$$\begin{aligned} pr^{(n)}\mathbf{v}_Q(L) &= \sum_{i=1}^p \xi^i D_i(L) + LDiv\xi = 0 \quad , \\ pr^{(n)}\mathbf{v}_Q(L) + Div(\xi L) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.69)$$

Escrevemos ademais:

$$\begin{aligned} pr^{(n)}\mathbf{v}_Q(L) &= \sum_{\alpha, J} D_J Q_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial u_J^{\alpha}} \\ pr^{(n)}\mathbf{v}_Q(L) &= \sum_{\alpha}^q Q_{\alpha} E(L) + Div A \quad , \end{aligned} \quad (3.70)$$

ou

$$pr^{(n)}\mathbf{v}_Q(L) = Q \cdot E(L) + Div A \quad . \quad (3.71)$$

Substituindo a Eq.(3.71) na Eq.(3.69), obtemos:

$$\begin{aligned} Q \cdot E(L) + Div A + Div(\xi L) &= 0 \\ Q \cdot E(L) + Div(A + \xi L) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.72)$$

E, finalmente, identificando $P = -(A + L\xi)$ obtemos a Eq.(3.67), como queríamos.

Analizando agora o caso particular onde o funcional possui derivadas de no máximo primeira ordem, ou seja, $L(x, u^{(1)})$, teremos:

$$pr^{(1)}\mathbf{v}_Q(L) = \sum_{\alpha=1}^q \{ Q_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial u^{\alpha}} + \sum_{i=1}^p D_i Q_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial u_i^{\alpha}} \} \quad . \quad (3.73)$$

Se compararmos esta equação com a Eq.(3.71), encontramos:

$$A_i = \sum_{\alpha} Q_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial u_i^{\alpha}} . \quad (3.74)$$

Temos então a seguinte versão do teorema de Noether para problemas variacionais de primeira ordem.

Teorema 3.10

Seja $\mathcal{L}[u] = \int L(x, u^{(n)}) dx$ um funcional associado a um problema variacional de primeira ordem, e v uma simetria variacional. Então:

$$P_i = \sum_{\alpha=1}^q \phi_{\alpha} \frac{\partial L}{\partial u_i^{\alpha}} + \xi^i L - \sum_{\alpha=1}^q \sum_{j=1}^p \xi^i u_j^{\alpha} \frac{\partial L}{\partial u_i^{\alpha}} , \quad i = 1, \dots, p \quad (3.75)$$

são componentes de uma lei de conservação $\text{Div} P = 0$ para as equações de Euler-Lagrange, $E(L) = 0$.

Voltaremos a esse teorema mais tarde, quando analisaremos leis de conservação associadas as simetrias da Equação de Onda.

2.1 Simetrias Generalizadas

Uma simetria generalizada associada a um sistema de equações diferenciais $\mathcal{E}$, localizada num campo vetorial com uma nova dependência nos seus coeficientes. Os coeficientes ξ_i , $i = 1, \dots, p$ que até aqui dependiam exclusivamente de (x, t, u) , passam agora a depender também de derivadas de u . É essas derivadas que fornecem que nossas transformações são generalizadas.

Capítulo 4

Simetrias Generalizadas, Operadores de Recursão e Sistemas Hamiltonianos

Primeiramente, iremos analisar neste capítulo o conceito de simetrias generalizadas que, como veremos, trará como consequência uma expansão bastante significativa do nosso “espectro” de simetrias associadas a um dado sistema de equações diferenciais.

Em seguida vamos analisar a idéia de operadores de recursão. Estes operadores possuem a propriedade básica de transformar funções características de uma dada simetria em outra, criando assim o conceito de hierarquia de simetrias, o que nos levará a um conjunto infinito de novas simetrias, e conseqüentemente, de leis de conservação.

Por último, discutiremos a associação de sistemas de equações diferenciais com um tipo particular de equação de evolução, a qual chamamos de sistema hamiltoniano.

4.1 Simetrias Generalizadas

Uma simetria generalizada associada a um sistema de equações diferenciais é, basicamente, um campo vetorial com uma nova dependência nos seus coeficientes. Os coeficientes ξ , τ , ..., ϕ que até aqui dependiam exclusivamente de (x, t, u) , passarão agora a depender também de derivadas de u . É neste sentido que dizemos que nossas transformações são generalizadas.

4.1.1 Funções Diferenciais

Seja $\mathcal{M} \subset X \times U$ um subconjunto aberto e conexo no espaço das variáveis dependentes e independentes, cujo prolongamento $\mathcal{M}^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$ são subconjuntos abertos em um espaço de jatos correspondentes. Seja $\mathcal{A}$ o espaço das funções suaves $P(x, u^{(n)})$ com dependência em x, u e derivadas de u até ordem n , tal que $P : \mathcal{M}^{(n)} \rightarrow \mathbb{R}$. Chamamos estas funções de funções diferenciais.

Para designarmos funções diferenciais usaremos ainda a seguinte notação: $P(x, u^{(n)}) \equiv P[u]$. Ou seja, a introdução dos colchetes significa que os argumentos da função P também dependem de derivas de u . Nesse quadro, podemos ainda notar a existência de um número mínimo de operadores fundamentais que atuam em $\mathcal{A}$, tais como: Derivadas totais $D_j : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$; divergências totais $Div : \mathcal{A}^q \rightarrow \mathcal{A}$; e o operador de Euler $E : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^q$.

4.1.2 Campos Vetoriais Generalizados

Definição 4.1

Um campo vetorial generalizado será uma expressão na forma:

$$v = \sum_{i=1}^p \xi^i[u] \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi_\alpha[u] \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (4.1)$$

onde ξ^i e ϕ_α são funções diferenciais suaves.

Em total analogia com as definições do Cap.(1), podemos agora definir o prolongamento de um campo vetorial generalizado como sendo:

$$pr^{(n)}v = v + \sum_{\alpha=1}^q \sum_{j \leq n} \phi_\alpha^j[u] \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} \quad (4.2)$$

cujos coeficientes são determinados pela seguinte equação:

$$\phi_\alpha^j = D_j(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{j,i}^\alpha \quad (4.3)$$

Como podemos notar na expressão acima, e na forma como o prolongamento de v está escrito, devemos ter sempre a mesma expressão para os coeficientes ϕ_α^j , dependendo somente da ordem

da equação onde o campo prolongado irá atuar. Assim, será interessante denotarmos os nossos campos prolongados na forma de um prolongamento “infinito”, e que denotamos por:

$$pr\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J \phi_{\alpha}^J \frac{\partial}{\partial u_{\alpha}^J} . \quad (4.4)$$

Para ilustramos a idéia de prolongamento de campos generalizados, vejamos o seguinte exemplo: Considere um campo vetorial generalizado dado por:

$$\mathbf{v} = xu_{xx} \frac{\partial}{\partial x} + u_x^2 \frac{\partial}{\partial u} . \quad (4.5)$$

Então, de acordo com a Eq.(4.2), vamos obter a seguinte expressão para o primeiro prolongamento desse campo:

$$pr^{(1)}\mathbf{v} = xu_{xx} \frac{\partial}{\partial x} + u_x^2 \frac{\partial}{\partial u} + u_x[u_{xx} - xu_{xxx}] \frac{\partial}{\partial u_x} . \quad (4.6)$$

Escreveremos agora um critério infinitesimal de simetria para transformações cujos geradores são campos generalizados.

Definição 4.2

Um campo vetorial generalizado $\mathbf{v}$ é uma simetria infinitesimal generalizada de um sistema de equações diferenciais

$$\Delta_{\nu}[u] = \Delta_{\nu}(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, l \quad (4.7)$$

se e somente se

$$pr\mathbf{v}[\Delta_{\nu}] = 0 \quad \nu = 1, \dots, l \quad (4.8)$$

para toda solução suave $u = f(x)$.

Se tomarmos agora a nossa Equação do Calor, Eq.(2.1), podemos verificar que o seguinte campo generalizado é uma simetria generalizada da mesma.

$$\mathbf{v} = u_t \frac{\partial}{\partial u} \quad (4.9)$$

$$pr\mathbf{v} = u_t \frac{\partial}{\partial u} + u_{tt} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{txx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} . \quad (4.10)$$

Assim, pelo critério de simetria dado pela Def.(4.2), vamos ter:

$$\text{prv}[u_t - u_{xx}] = u_{tt} - u_{xxt} = D_t(u_t - u_{xx}) = 0 \quad (4.11)$$

Devemos ainda notar que, em geral, podemos escrever o critério de invariância dado pela Def.(4.2) como:

$$\text{prv}(\Delta_\nu) = \sum_{\mu=1}^l \mathcal{D}_{\mu\nu} \Delta_\mu \quad (4.12)$$

tal que $\mathcal{D}_{\mu\nu} = \sum P_{\mu\nu}^J D_J$, onde $P_{\mu\nu}^J \in \mathcal{A}$, de maneira análoga a que foi escrita a forma característica de uma lei de conservação na seção (3.2.2).

4.1.3 Campos Vetoriais de Evolução

Definição 4.3

Seja $Q[u] = (Q_1[u], \dots, Q_q[u]) \in \mathcal{A}$ uma q -éssima função diferencial. O campo vetorial generalizado

$$\mathbf{v}_Q = \sum_{\alpha=1}^q Q_\alpha[u] \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \quad (4.13)$$

é chamado campo vetorial de evolução, e Q é chamada função característica de $\mathbf{v}$.

Então de acordo com a Eq.(4.4) teremos a seguinte forma para o prolongamento de um campo vetorial de evolução:

$$\text{prv}_Q = \sum_{\alpha, J} D_J Q_\alpha \frac{\partial}{\partial u_\alpha^J} \quad (4.14)$$

Devemos notar que todo campo vetorial $\mathbf{v}$, possui uma representação de evolução $\mathbf{v}_Q$ correspondente com uma função característica Q dada por:

$$Q_\alpha = \phi_\alpha - \sum_{i=1}^q \xi^i u_i^\alpha \quad \alpha = 1, \dots, q. \quad (4.15)$$

Note-se que esta expressão está em total acordo com a nossa definição inicial, Eq.(1.79).

4.1.4 Calculando Simetrias Generalizadas

Para que possamos determinar o conjunto de transformações de simetrias generalizadas de um dado sistema de equações diferenciais, devemos proceder de maneira análoga ao que fizemos no Cap.(2), ou seja, escrevemos o nosso critério de invariância, obtemos a equação determinante, e encontramos os geradores. Porém, agora, temos a diferença que os nossos campos de simetrias são generalizados. Então, por simplicidade, será interessante escrever o critério de invariância dado pela Def.(4.2), em termos de campos vetoriais de evolução, lembrando que a nossa função característica também depende de derivadas de u , isto é, $Q(x, u^{(n)})$.

Voltando para a equação do calor, Eq.(2.1):

$$\Delta(x, u^{(2)}) = u_t - u_{xx} = 0 ,$$

escrevemos o nosso campo generalizado de evolução como $v_Q = Q[u]\partial_u$. Usando a condição de invariância, Eq.(4.8), escrita em termos de um campo vetorial de evolução, teremos:

$$prv_Q[u_t - u_{xx}] = 0 , \quad (4.16)$$

ou utilizando a Eq.(4.14)

$$\sum_J D_J Q \frac{\partial}{\partial u_J} (u_t - u_{xx}) = 0 , \quad (4.17)$$

$$D_t Q - D_x^2 Q = 0 . \quad (4.18)$$

Devemos notar que quanto maior a ordem das derivadas consideradas em Q , maior será a quantidade de novas simetrias generalizadas. Então, no estudo da nossa Equação do Calor vamos considerar, por simplicidade, que a nossa função característica Q tenha uma dependência de derivadas de, no máximo, terceira ordem, ou seja, $Q = Q(x, t, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx})$. Assim, pela Eq.(4.18) temos:

$$D_t Q = D_x^2 Q ,$$

ou seja:

$$Q_t = Q_{xx} + 2u_x Q_{xu} + 2u_{xx} Q_{xu_x} + 2u_{xxx} Q_{xu_{xx}} + 2u_{xxxx} Q_{xu_{xxx}} + u_x^2 Q_{uu} + 2u_x u_{xx} Q_{uu_x} +$$

$$\begin{aligned}
& + 2u_x u_{xxx} Q_{uu_{xx}} + 2u_x u_{xxxx} Q_{uu_{xxx}} + 2u_{xx} u_{xxx} Q_{u_x u_{xx}} + 2u_{xx} u_{xxxx} Q_{u_x u_{xxx}} + \\
& + u_{xx}^2 Q_{u_x u_x} + u_{xxx}^2 Q_{u_{xx} u_{xx}} + 2u_{xxx} u_{xxxx} Q_{u_{xx} u_{xxx}} + u_{xxxx}^2 Q_{u_{xxx} u_{xxx}} . \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Onde substituímos u_t por u_{xx} , u_{xt} por u_{xxx} , etc. Então, a partir da equação determinante acima, encontramos a seguinte forma geral para a função característica de uma transformação de simetria generalizada de terceira ordem associada à Equação do Calor:

$$Q(t, x, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}) = u_{xxx} A_1 + u_{xx} A_2 + u_x A_3 + u A_4 + E(x, t) , \quad (4.20)$$

onde A_1, A_2, A_3 e A_4 são constantes reais, e $E(x, t)$ é qualquer solução da equação do calor. Se fizermos inicialmente $E(x, t) = 0$, vamos obter o seguinte conjunto de funções características de transformações de simetrias generalizadas:

$$\begin{aligned}
Q_{g_1} &= u_{xxx} \\
Q_{g_2} &= u_{xx} \\
Q_{g_3} &= u_x \\
Q_{g_4} &= u . \quad (4.21)
\end{aligned}$$

Temos ainda um conjunto infinito de funções características associadas a solução $E(x, t)$ da equação do calor, ou seja:

$$Q_E = E(x, t) . \quad (4.22)$$

No Cap.(5) voltaremos a este conjunto de funções características, juntamente com funções características para as equações de KdV, Cahn-Hilliard e Equação de Onda. Determinaremos aí leis de conservação diretamente dessas funções características.

4.1.5 Equações de Evolução

Considere um sistema de equações de evolução dado por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P[u] \quad (4.23)$$

onde $P[u] = P(x, u^{(n)}) \in \mathcal{A}^q$ dependendo de $x \in \mathbb{R}^p$ e $u \in \mathbb{R}^q$ e derivadas de u .

Se aplicarmos o critério de simetria dado pela Def.(4.2), escrita em termos de um campo vetorial de evolução, vamos obter:

$$\text{prv}_Q[\Delta] = 0 \quad (4.24)$$

$$D_t Q = \text{prv}_Q(P) \quad . \quad (4.25)$$

Podemos notar que o próprio P será uma função característica de algum campo de simetria de evolução.

Proposição 4.4

Um campo vetorial de evolução $\mathbf{v}_Q$ será uma simetria de um sistema de equações de evolução $u_t = P[u]$ se e somente se

$$\frac{\partial \mathbf{v}_Q}{\partial t} + [\mathbf{v}_P, \mathbf{v}_Q] = 0 \quad (4.26)$$

onde $\frac{\partial \mathbf{v}_Q}{\partial t}$ denota um campo vetorial de evolução com característica $\frac{\partial Q}{\partial t}$.

Para provar essa proposição basta notar que em relação a equação de evolução, Eq.(4.23), a seguinte expressão sempre é verdadeira:

$$u_{J,t} = D_J u_t = D_J P[u] \quad . \quad (4.27)$$

Usando ainda a seguinte identidade:

$$D_t Q_\nu = \frac{\partial Q_\nu}{\partial t} + \sum_{\alpha, J} u_{J,t} \frac{\partial Q_\nu}{\partial u_J^\alpha} \quad , \quad (4.28)$$

ou seja,

$$D_t Q_\nu = \frac{\partial Q_\nu}{\partial t} + \text{prv}_P(Q_\nu) \quad , \quad (4.29)$$

Obtemos, comparando com a Eq.(4.25):

$$D_t Q_\nu = \frac{\partial Q_\nu}{\partial t} + \text{prv}_P(Q_\nu) = \text{prv}_{Q_\nu}(P) \quad . \quad (4.30)$$

Ou seja:

$$\frac{\partial Q_\nu}{\partial t} + \text{prv}_P(Q_\nu) - \text{prv}_{Q_\nu}(P) = 0 \quad . \quad (4.31)$$

A expressão acima pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + [\mathbf{v}_P, \mathbf{v}_Q] = 0 \quad , \quad (4.32)$$

como afirma a proposição (4.4) .

4.2 Operadores de Recursão

A idéia de operadores de recursão surge como um segundo método para a determinação de funções características de simetrias associadas a sistemas de equações diferenciais. Ao contrário dos métodos desenvolvidos nos capítulos anteriores que, como vimos, são bastantes sistemáticos e operacionais, a idéia baseada nos operadores de recursão não é nada direta, e a princípio não existe nenhum procedimento para que possamos encontrar tais operadores, isso se eles existirem, pois pode acontecer que para determinado sistema de equações diferenciais não exista nenhum operador de recursão associado. Mesmo assim, é interessante tê-los como um segundo método para determinar características generalizadas. [10]

Definição 4.5

Seja Δ um sistema de equações diferenciais. Um operador de recursão para Δ será um operador linear $\mathcal{R} : \mathcal{A}^q \longrightarrow \mathcal{A}^q$ no espaço das q -éssimas funções diferenciais, com a propriedade de que sempre que $\mathbf{v}_Q$ for uma simetria de evolução de Δ , então $\mathbf{v}_{\tilde{Q}}$, com $\tilde{Q} = \mathcal{R}Q$, também será.

Por exemplo, se tomarmos as funções características da equação do calor, Eq.(2.1), determinadas na seção anterior, Eqs.(4.21), podemos verificar facilmente que $\mathcal{R} = D_x$ é um operador de recursão para a equação do calor. Pois:

$$Q_{g_2} = \mathcal{R}Q_{g_3} = D_x Q_{g_3} \quad , \quad (4.33)$$

ou ainda:

$$Q_{g_3} = \mathcal{R}Q_{g_4} = D_x Q_{g_4} \quad . \quad (4.34)$$

Dessa maneira, se tivermos um conjunto de funções características, sempre podemos tentar identificar um ou mais operadores de recursão e então construir novas funções características. Por exemplo, sabemos que D_x é um operador de recursão para a Equação do Calor. Então, a partir de Q_1 , podemos construir, digamos, Q_{g_5} como sendo:

$$Q_{g_5} = D_x Q_{g_4} = u_{xxxx} \quad , \quad (4.35)$$

que é função característica de uma nova simetria generalizada, que por sua vez pode ou não ter uma lei de conservação associada. [11]. Então, de maneira geral, podemos construir toda uma hierarquia de simetrias generalizadas associadas a esse operador de recursão. Podemos notar que D_t também é um operador de recursão para a equação do calor, pois pelo critério de invariância temos:

$$D_t Q = D_x^2 Q \quad . \quad (4.36)$$

Escrevendo $Q = D_t \tilde{Q}$, obtemos:

$$D_t(D_t \tilde{Q}) = D_x^2(D_t \tilde{Q}) = D_t[D_t \tilde{Q} - D_x^2 \tilde{Q}] = 0 \quad . \quad (4.37)$$

Assim $\tilde{Q}$ também é uma função característica, logo D_t é um operador de recursão.

Existe outro operador de recursão menos trivial para a equação do calor, $\tilde{\mathcal{R}} = tD_x + \frac{1}{2}x$, que como podemos verificar:

$$(D_t - D_x^2)(tD_x + \frac{1}{2}x)Q = (tD_x + \frac{1}{2}x)(D_t Q - D_x^2 Q) \quad . \quad (4.38)$$

Ou seja, $\tilde{Q} = \tilde{\mathcal{R}}Q$ é função característica de uma nova simetria generalizada. Agora podemos combinar estes operadores de recursão, $\mathcal{R}$ e $\tilde{\mathcal{R}}$, e construir novas funções características a partir do conjunto de Eqs.(4.21), por exemplo:

$$\begin{aligned} Q_{g_6} &= \tilde{\mathcal{R}}Q_{g_2} = tu_{xxxx} + \frac{1}{2}xu_{xxx} \\ Q_{g_7} &= \mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}}Q_{g_4} = tu_{xx} + \frac{1}{2}u_x \quad . \end{aligned} \quad (4.39)$$

Então, podemos, apenas usando combinações de $\mathcal{R}$ e $\tilde{\mathcal{R}}$, construir um conjunto infinito de funções características para a equação do calor, que nos levará diretamente para o conceito de hierarquias, como veremos adiante.

4.2.1 Derivadas de Fréchet

Será útil definirmos agora o conceito de derivadas de Fréchet, para que possamos formalizar um critério para operadores de recursão associados diretamente com o sistema de equações diferenciais e não mais só a partir das suas funções características.

Definição 4.6

Seja $P[u] = P(x, u^{(n)}) \in \mathcal{A}^r$ uma r -éssima função diferencial suave. A derivada de Fréchet de P será o operador diferencial $D_P : \mathcal{A}^q \rightarrow \mathcal{A}^r$ tal que:

$$D_P(Q) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} P[u + \epsilon Q[u]] \quad (4.40)$$

para qualquer $Q \in \mathcal{A}^q$.

Por exemplo, se tomarmos $P[u] = u_{xx}$, vamos obter a seguinte expressão para a derivada de Fréchet de P :

$$D_P(Q) = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} (u_{xx} + \epsilon D_x^2 Q) = D_x^2 Q, \quad (4.41)$$

ou seja, $D_P = D_x^2$. Em geral podemos sempre escrever a derivada de Fréchet de um dada função P como:

$$(D_P)_{\mu\nu} = \sum_J \left(\frac{\partial P_\mu}{\partial u_J^\nu} \right) D_J, \quad \mu = 1, \dots, r, \quad \nu = 1, \dots, q. \quad (4.42)$$

Em particular, se $P = \Delta[u]$ for um sistema linear, teremos $D_P = \Delta$. Existe ainda uma íntima conexão entre derivadas de Fréchet e campos vetoriais de evolução.

Proposição 4.7

Se $P \in \mathcal{A}^r$ e $Q \in \mathcal{A}^q$, então:

$$D_P(Q) = \text{prv}_Q(P). \quad (4.43)$$

Podemos verificar essa proposição diretamente das Eq.(4.14) e Eq.(4.42).

Proposição 4.8

Seja $P \in \mathcal{A}^r$. Seja $\mathcal{D}$ um operador diferencial linear, tal que $\mathcal{D}P \in \mathcal{A}$. Então a derivada de Fréchet de $\mathcal{D}P$ será o produto de dois operadores diferenciais:

$$D_{\mathcal{D}P} = \mathcal{D} \cdot D_P. \quad (4.44)$$

Por exemplo, se considerarmos $P[u] = uu_{xx} + u_x^2$ vamos obter a seguinte expressão para a derivada de Fréchet de P :

$$D_P = uD_x^2 + 2u_xD_x + u_{xx} \quad (4.45)$$

que pode ser escrita como:

$$D_P = D_x \cdot (uD_x + u_x) \quad (4.46)$$

o que está de acordo com a Def.(4.8), pois também podemos escrever P como:

$$P[u] = D_x \cdot (uu_x) = D_x \tilde{P} \quad , \quad (4.47)$$

ou seja:

$$D_{D_x \tilde{P}} = D_x \cdot D_{\tilde{P}} \quad . \quad (4.48)$$

4.2.2 Derivadas de Lie de Operadores Diferenciais

Estamos particularmente interessados em derivadas de Lie de operadores diferenciais em relação a campos vetoriais de evolução, com o objetivo de implementarmos adiante um critério para identificar um dado operador como sendo ou não de recursão. Se v_Q for um campo vetorial de evolução, e $\mathcal{D}$ um operador diferencial, então a derivada de Lie de $\mathcal{D}$, em relação ao campo v_Q , será a variação infinitesimal de $\mathcal{D}$ sob a ação do grupo a um parâmetro $\exp(tv_Q)$.

Definição 4.9

Seja $\mathcal{R}$ um operador diferencial. A derivada de Lie de $\mathcal{R}$ com relação ao campo vetorial de evolução v_Q será o operador diferencial

$$v_Q[[\mathcal{R}]] = \mathcal{R}_t + [\mathcal{R}, D_Q] = \text{pr}v_Q(\mathcal{R}) + [\mathcal{R}, D_Q] \quad . \quad (4.49)$$

Por exemplo, se considerarmos agora a equação da KdV, escrita na forma da Eq.(2.25), e o gerador v_2 , associado às suas simetrias, Eqs.(2.43), podemos então calcular a função característica associada ao gerador v_2 a partir da Eq.(1.79), e obter:

$$Q_2[u] = 1 - tu_x \quad (4.50)$$

Consequentemente, da Eq.(4.13), teremos o seguinte campo vetorial de evolução associado:

$$\mathbf{v}_{Q_2} = (1 - tu_x) \frac{\partial}{\partial u} . \quad (4.51)$$

Escrevendo a equação de KdV como:

$$u_t = P[u] = -u_{xxx} - uu_x \quad (4.52)$$

podemos então calcular o efeito do fluxo do campo vetorial de evolução $\mathbf{v}_{Q_2}$, sobre a equação de KdV, ou seja, podemos calcular a derivada de Lie do operador $\mathcal{R}$, tal que $P[u] = \mathcal{R} \cdot u$, onde $\mathcal{R} = -D_x^3 - uD_x$, diretamente da Eq.(4.52). Ou seja, queremos calcular:

$$\mathbf{v}_{Q_2}[[\mathcal{R}]] . \quad (4.53)$$

Então, de acordo com a Eq.(4.51) e Eq.(4.14), teremos:

$$\text{pr} \mathbf{v}_{Q_2} = (1 - tu_x) \frac{\partial}{\partial u} - (u_x + tu_{xt}) \frac{\partial}{\partial u_t} - tu_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} , \quad (4.54)$$

logo:

$$\text{pr} \mathbf{v}_{Q_2}(\mathcal{R}) = (tu_x - 1)D_x + tuu_{xx} \frac{\partial}{\partial u} . \quad (4.55)$$

Usando agora as Eq.(4.42) e Eq.(4.50), calculamos:

$$\mathbf{D}_{Q_2} = -tD_x , \quad (4.56)$$

tal que:

$$[\mathcal{R}, \mathbf{D}_{Q_2}] = tuD_x^2 - tu_x D_x . \quad (4.57)$$

Assim, de acordo com a Eq.(4.9) temos:

$$\mathbf{v}_{Q_2}[[\mathcal{R}]] = tuD_x^2 - D_x + tuu_{xx} \frac{\partial}{\partial u} , \quad (4.58)$$

que é a expressão para a derivada de Lie de $\mathcal{R}$ em relação a $\mathbf{v}_{Q_2}$.

4.2.3 Critério para Operadores de Recursão

Iremos agora nos utilizar dos conceitos de derivadas de Fréchet e de Lie para construirmos um critério para identificar determinados operadores como sendo ou não operadores de recursão de um determinado sistema de equações diferenciais.

Teorema 4.10

Seja $\Delta[u] = 0$ um sistema de equações diferenciais. Se $\mathcal{R} : \mathcal{A}^q \rightarrow \mathcal{A}^q$ for um operador linear tal que:

$$\mathbf{D}_\Delta \cdot \mathcal{R} = \tilde{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{D}_\Delta \quad (4.59)$$

para toda solução u de Δ , onde $\tilde{\mathcal{R}} : \mathcal{A}^q \rightarrow \mathcal{A}^q$ é um operador diferencial linear, então $\mathcal{R}$ será um operador de recursão para o sistema de equações diferenciais Δ .

De acordo com a Proposição (4.7), um campo vetorial de evolução será uma simetria de Δ somente se:

$$\text{prv}_Q(\Delta) = \mathbf{D}_\Delta(Q) = 0 \quad . \quad (4.60)$$

Assim, se o operador $\mathcal{R}$ satisfizer a Eq.(4.59), e se existir $\tilde{Q} = \mathcal{R}Q$, teremos:

$$\mathbf{D}_\Delta \tilde{Q} = \mathbf{D}_\Delta(\mathcal{R}Q) = \mathcal{R} \cdot (\mathbf{D}_\Delta(Q)) = 0 \quad . \quad (4.61)$$

Isso prova o Teorema (4.10). Se tomarmos por exemplo a equação do calor $\Delta[u] = u_t - u_{xx} = 0$, iremos obter, da Eq.(4.42), a seguinte expressão para $\mathbf{D}_\Delta$:

$$\mathbf{D}_\Delta = D_t - \mathbf{D}_{u_{xx}} \quad . \quad (4.62)$$

Digamos agora que $\mathcal{R}$ seja um operador de recursão para Δ . Então, de acordo com o Teorema (4.10), $\mathcal{R}$ deve ser o mesmo que $\tilde{\mathcal{R}}$, ou seja:

$$\mathbf{D}_\Delta \cdot \mathcal{R} = \mathcal{R} \cdot \mathbf{D}_\Delta \quad , \quad (4.63)$$

ou ainda:

$$D_t \mathcal{R} - \mathbf{D}_{u_{xx}} = \mathcal{R}_t - \mathcal{R} \mathbf{D}_{u_{xx}} \quad , \quad (4.64)$$

$$\mathcal{R}_t = [\mathbf{D}_{u_{xx}}, \mathcal{R}] \quad . \quad (4.65)$$

Então, se substituirmos a Eq.(4.65) na Eq.(4.49), obteremos:

$$\mathbf{v}_{u_{xx}}[[\mathcal{R}]] = 0 \quad . \quad (4.66)$$

Ou seja, qualquer operador linear será um operador (de recursão) invariante sob o fluxo gerador por $\mathbf{v}_{Q=u_{xx}}$ para a equação do calor.

Se tomarmos agora a equação de KdV, Eq.(2.29), podemos verificar que

$$\mathcal{R} = D_x^2 + \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}u_x D_x^{-1} \quad , \quad (4.67)$$

é um operador de recursão para a KdV. Na forma como escrevemos o $\mathcal{R}$, D_x^{-1} aparece como sendo um operador integral, cuja definição nos diz que deve atuar somente sobre funções que podem ser escritas como divergências totais, [12] . Para verificarmos a propriedade recursiva desse operador devemos primeiramente calcular a derivada de Fréchet $\mathbf{D}_\Delta$, onde:

$$\Delta[u] = u_t + u_{xxx} + uu_x = u_t - k[u] = 0 \quad . \quad (4.68)$$

O termo relevante de $\mathbf{D}_\Delta$ será:

$$\mathbf{D}_k = -D_x^3 - uD_x - u_x \quad . \quad (4.69)$$

Então, para provarmos que $\mathcal{R}$ é um operador de recursão para a equação da KdV, basta mostrarmos que:

$$\mathbf{v}_k[[\mathcal{R}]] = 0 \quad , \quad (4.70)$$

ou seja:

$$\mathcal{R}_t = [\mathcal{R}, \mathbf{D}_k] \quad . \quad (4.71)$$

Temos então da Eq.(4.67):

$$\mathcal{R}_t = -\frac{2}{3}(u_{xxx} + uu_x) - \frac{1}{3}(u_{xxxxx} + u_x^2 + uu_{xx})D_x^{-1} \quad , \quad (4.72)$$

e ainda:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_k \mathcal{R} = & -D_x^5 - \frac{5}{3}u D_x^3 - \frac{10}{3}u_x D_x^2 - (3u_{xx} + \frac{2}{3}u^2)D_x - \frac{5}{3}(u_{xxx} + uu_x) + \\ & - \frac{1}{3}(u_{xxxx} + uu_x + u_x^2)D_x^{-1} \quad , \end{aligned} \quad (4.73)$$

e

$$\mathcal{R} \mathbf{D}_k = -D_x^5 - \frac{5}{3}u D_x^3 - \frac{10}{3}u_x D_x^2 - (3u_{xx} - \frac{2}{3}u^2)D_x - (u_{xxx} + uu_x) \quad . \quad (4.74)$$

Logo:

$$\mathcal{R}_t = [\mathbf{D}_k, \mathcal{R}] \quad . \quad (4.75)$$

Verificamos assim que $\mathcal{R}$ realmente é um operador de recursão para a equação da KdV. É importante frisar que todo operador de recursão é invariante sob a ação do fluxo gerado pela equação diferencial associada ao mesmo.

Definição 4.11

Um operador $\mathcal{R} : \mathcal{A}^q \longrightarrow \mathcal{A}^q$ é dito ser hereditário se ele satisfizer a seguinte relação:

$$\mathbf{v}_{\mathcal{R}P}[[\mathcal{R}]] = \mathcal{R} \cdot \mathbf{v}_P[[\mathcal{R}]] \quad , \quad (4.76)$$

para toda função diferencial $P[u] \in \mathcal{A}^q$.

Podemos verificar também que o nosso operador $\mathcal{R}$, dado pela Eq.(4.67), é hereditário, pois satisfaz Def.(4.11). Isso significa que, a partir de uma função característica associada a equação da KdV, podemos construir toda uma hierarquia de novas funções características e, conseqüentemente, como veremos, de leis de conservação, apenas com aplicações de $\mathcal{R}$, [13].

4.2.4 Operadores Diferenciais Adjuntos

Nessa seção iremos definir o adjunto de um operador diferencial, bem como o conceito de auto-adjunto e anti-adjunto. Também veremos um critério para que possamos caracterizar um dado sistema de equações diferenciais como sendo ou não a equação de movimento de um dado problema variacional.

Para tanto, consideremos

$$\mathcal{D} = \sum_J P_J[u] D_J, \quad P_J \in \mathcal{A}. \quad (4.77)$$

um operador diferencial. O operador adjunto associado a $\mathcal{D}$, denotado por $\mathcal{D}^*$, é tal que:

$$\int_{\Omega} P \cdot \mathcal{D}Q dx = \int_{\Omega} Q \cdot \mathcal{D}^*P dx, \quad (4.78)$$

seja sempre verdade para todo par de funções $P, Q \in \mathcal{A}$.

Integrando por partes a equação acima, verificamos que podemos escrever a seguinte expressão para $\mathcal{D}^*$:

$$\mathcal{D}^* = \sum_J (-D)_J \cdot P_J. \quad (4.79)$$

Por exemplo, se tomarmos a derivada de Fréchet associada a equação da KdV:

$$\mathbf{D}_k = -D_x^3 - uD_x - u_x, \quad (4.80)$$

calculado na Eq.(4.69). Obtemos, de acordo com a Eq.(4.79), a seguinte expressão para a sua adjunta:

$$\mathbf{D}_k^* = D_x^3 + uD_x. \quad (4.81)$$

Definimos ainda um operador como sendo auto-adjunto se:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^*, \quad (4.82)$$

e será anti-adjunto se:

$$\mathcal{D} = -\mathcal{D}^*. \quad (4.83)$$

Se integrarmos por partes a Eq.(4.78), teremos:

$$P \cdot \mathcal{D}Q = Q \cdot \mathcal{D}^*P + \text{Div}A, \quad (4.84)$$

onde $A \in \mathcal{A}^p$, é uma expressão bilinear envolvendo P, Q e suas derivadas.

Podemos também verificar que a aplicação do operador de Euler na expressão acima resultará:

$$E(P \cdot \mathcal{D}Q) = E(Q \cdot \mathcal{D}^*P) , \quad (4.85)$$

como deveríamos esperar, pois as divergências totais formam o núcleo do operador de Euler.

Devemos também notar que a aplicação do operador de Euler em uma função diferencial P , pode ser escrita como a derivada de Fréchet do adjunto de P , ou seja:

$$E(P) = \sum_J (-D)_J \frac{\partial P}{\partial u_J} = D_P^* , \quad (4.86)$$

de acordo com a Eq.(4.79) e a Def.(3.2).

E finalmente devemos ainda observar a seguinte relação para a derivada variacional do produto de duas funções:

$$E(P \cdot Q) = D_P^*(Q) + D_Q^*(P) , \quad (4.87)$$

para $P, Q \in \mathcal{A}^l$. Essa nossa última equação será de fundamental importância para que possamos caracterizar leis de conservação.

Proposição 4.12

Seja $\Delta = 0$ um sistema auto-adjunto de equações diferenciais, isto é, Δ é um sistema de equações diferenciais cuja derivada de Fréchet associada é auto-adjunta: $D_\Delta^ = D_\Delta$, então Δ é uma equação de Euler-Lagrange para algum problema variacional.*

Para demonstra-la, tomamos a Eq.(4.84), e escrevemos:

$$u \cdot \mathcal{D}v - v \cdot \mathcal{D}^*u = \text{Div}P , \quad (4.88)$$

onde u, v e P são funções suaves pertencentes a $\mathcal{A}$, e $\mathcal{D}^*$ é o adjunto formal do operador $\mathcal{D}$. Então, se substituirmos $\mathcal{D}$ por Δ associado ao sistema de equações diferenciais, e $\text{Div}P = Q \cdot \Delta$, de acordo com a Eq.(3.56), obtemos:

$$u \cdot \Delta v - v \cdot \Delta^*u = Q \cdot \Delta . \quad (4.89)$$

Se Δ for equação de Euler-Lagrange para algum problema variacional, teremos:

$$Q \cdot \Delta = Q \cdot E(L) = 0 \quad , \quad (4.90)$$

assim:

$$u \cdot \Delta v - v \cdot \Delta^* u = 0 \quad , \quad (4.91)$$

para quaisquer u e v diferenciáveis. Em particular, quando $u = v$, obtemos:

$$\Delta u = \Delta^* u \quad , \quad (4.92)$$

ou seja, o sistema Δ é auto-adjunto, como afirma a Proposição 4.12.

Proposição 4.13

Seja Δ um sistema de equações diferenciais e $Div P = 0$ uma lei de conservação. Então se v_R for um campo vetorial de evolução associado a uma simetria do sistema Δ , existirá uma função induzida $\tilde{P} = pr v_R(P)$, com componentes $\tilde{P}_i = pr v_R(P_i)$, que também será uma lei de conservação, $Div \tilde{P} = 0$.

Para verificarmos essa proposição basta aplicarmos em ambos os lados da Eq.(3.56) o prolongamento de uma dada simetria v_R do sistema original obtendo assim a seguinte equação:

$$Div[pr v_R(P)] = pr v_R(Q) \cdot \Delta + Q \cdot pr v_R(\Delta) \quad . \quad (4.93)$$

Como $pr v_R(\Delta) = 0$, pois v_R é uma simetria de Δ , teremos:

$$Div[pr v_R(Q)] = pr v_R(Q) \cdot \Delta \quad , \quad (4.94)$$

ou:

$$Div \tilde{P} = \tilde{Q} \cdot \Delta \quad , \quad (4.95)$$

o que prova a Proposição (4.14).

4.3 Sistemas Hamiltonianos

Nessa seção iremos definir o conceito de sistema Hamiltoniano associado a um sistema de equações diferenciais. Isso nos permitirá estabelecer uma correlação entre grupo de simetria e leis de conservação.

Os objetos básicos que nos permitirão conectar leis de conservação com a idéia de sistemas Hamiltonianos serão os parênteses de Poisson.

Na Subseção (4.3.4) trataremos de uma generalização de sistemas Hamiltonianos, onde então será necessário escrevermos os nossos objetos matemáticos numa forma funcional, para que possamos determinar leis de conservação propriamente ditas.

4.3.1 Parênteses de Poisson

Definição 4.14

Um parêntese de Poisson em uma variedade $\mathcal{M}$ é uma operação que associa a cada par de funções F, H suaves, uma função $\{F, H\}$ em $\mathcal{M}$, com as seguintes propriedades:

(a) bilinearidade:

$$\{cF + c'P, H\} = c\{F, H\} + c'\{P, H\}$$

para constantes $c, c' \in \mathbb{R}$.

(b) anti-simetria:

$$\{F, H\} = -\{H, F\} \quad ,$$

(c) identidade de Jacobi:

$$\{\{F, H\}, P\} + \{\{P, F\}, H\} + \{\{H, P\}, F\} = 0 \quad ,$$

(d) regra de Leibniz:

$$\{F, H \cdot P\} = \{F, H\} \cdot P + H \cdot \{F, P\} \quad .$$

Os parentêses de Poisson definem uma estrutura de Poisson em $\mathcal{M}$, e designamos uma variedade que possui essa estrutura por variedade de Poisson.

Definição 4.15

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade de Poisson. Uma função suave, $C : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de função de Casimir se os parênteses de Poisson de C com qualquer outra função forem identicamente nulas, i.e. $\{C, H\} = 0$ para todo $H : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$.

4.3.2 Campo Vetorial Hamiltoniano

Se considerarmos $\mathcal{M}$ uma variedade de Poisson então, se olharmos para a propriedade de bilinearidade e para a regra de Leibniz, Def.(4.14), podemos notar que o mapeamento $F \mapsto \{F, H\}$, para uma dada função H em $\mathcal{M}$, determina um campo vetorial em $\mathcal{M}$.

Definição 4.16

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade de Poisson e $H : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. O campo vetorial Hamiltoniano associado a H , será um campo vetorial $\hat{v}_H$ em $\mathcal{M}$, tal que:

$$\hat{v}_H(F) = \{F, H\} , \quad (4.96)$$

para toda função suave $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$.

Proposição 4.17

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade de Poisson. E seja $F, H : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, funções suaves com correspondentes campos vetoriais Hamiltonianos $\hat{v}_F, \hat{v}_H$. O campo vetorial Hamiltoniano associado aos parênteses de Poisson de F e H será, a menos de um sinal, o comutador de Lie dos dois campos vetoriais Hamiltonianos:

$$\hat{v}_{\{F, H\}} = -[\hat{v}_F, \hat{v}_H] . \quad (4.97)$$

Para provarmos essa proposição basta considerar uma função $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ e lembrar da

definição do comutador de Lie. Assim:

$$[\hat{v}_H, \hat{v}_F](P) = \hat{v}_H \hat{v}_F(P) - \hat{v}_F \hat{v}_H(P) . \quad (4.98)$$

Juntando a definição de campo Hamiltoniano,

$$\begin{aligned} [\hat{v}_H, \hat{v}_F] &= \hat{v}_H\{P, F\} - \hat{v}_F\{P, H\} , \\ [\hat{v}_H, \hat{v}_F] &= \{\{P, F\}, H\} - \{\{P, H\}, F\} , \end{aligned} \quad (4.99)$$

e usando a propriedade de anti-simetria e a identidade de Jacobi, obtemos:

$$[\hat{v}_H, \hat{v}_F] = \{P, \{F, H\}\} , \quad (4.100)$$

ou seja:

$$[\hat{v}_H, \hat{v}_H] = \hat{v}_{\{F, H\}}(P) . \quad (4.101)$$

O que está conforme à Proposição (4.17).

4.3.3 Funções de Estrutura

Vamos considerar o seguinte sistema de coordenadas locais, $x = (x^1, \dots, x^m)$ em $\mathcal{M}$ e uma função $H(x)$. Então, nesse sistema de coordenadas, podemos escrever um campo vetorial Hamiltoniano, de uma forma geral como:

$$\hat{v}_H = \sum_{i=1}^M \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} . \quad (4.102)$$

Se usarmos a Eq.(4.96), obtemos:

$$\{F, H\} = \hat{v}_H(F) = \sum_{i=1}^m \xi^i(x) \frac{\partial F}{\partial x^i} . \quad (4.103)$$

Assim:

$$\hat{v}_H(x^i) = \xi^i(x) = \{x^i, H\} . \quad (4.104)$$

Então, podemos reescrever agora a Eq.(4.103) como:

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^m \{x^i, H\} \frac{\partial F}{\partial x^i} . \quad (4.105)$$

Usando a propriedade de anti-simetria juntamente com a Eq.(4.104), escrevemos:

$$\{x^i, H\} = -\{H, x^i\} = -\hat{v}_i(H) = -\sum_{j=1}^m \{x^i, x^j\} \frac{\partial H}{\partial x^j} . \quad (4.106)$$

Substituindo a Eq.(4.106) na Eq.(4.105) obtemos

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \{x^i, x^j\} \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial x^j} , \quad (4.107)$$

onde chamamos os parênteses $\{x^i, x^j\}$ de *funções de estrutura* de uma variedade de Poisson $\mathcal{M}$ relativas a um dado sistema de coordenadas, funções essas que nos servem para determinar a estrutura de Poisson de $\mathcal{M}$, e que serão denotadas por:

$$J^{ij}(x) = \{x^i, x^j\} . \quad (4.108)$$

Podemos reescrever a Eq.(4.107) na forma matricial como:

$$\{F, H\} = \nabla F \cdot J \nabla H . \quad (4.109)$$

Agora se juntarmos as Eq.(4.108) e Eq.(4.103), temos:

$$\hat{v}_H = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m J^{ij}(x) \frac{\partial H}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} . \quad (4.110)$$

Portanto, em um dado sistema de coordenadas locais, podemos escrever:

$$\frac{dx}{dt} = J(x) \nabla H(x) , \quad (4.111)$$

ou alternativamente:

$$\frac{dx}{dt} = \{x, H\} , \quad (4.112)$$

que chamamos de sistema Hamiltoniano associado ao campo vetorial $\hat{v}_H$, que como veremos poderá ou não estar associado a uma dada simetria de um sistema de equações diferenciais.

4.3.4 Equação de Evolução

Vamos introduzir agora uma generalização da Eq.(4.111). Portanto, escrevemo-la na forma de uma equação de evolução:

$$u_t = K[u] . \quad (4.113)$$

Substituímos cada termo da Eq.(4.111) pelo “correspondente” funcional associado. Assim escrevemos nossa função Hamiltoniana na forma funcional como:

$$H \longrightarrow \mathcal{H} = \int H dx \in \mathcal{F} . \quad (4.114)$$

O operador gradiente será substituído por uma derivada variacional:

$$\nabla H \longrightarrow \delta \mathcal{H} . \quad (4.115)$$

E a função de estrutura será identificada como um operador linear

$$\mathcal{D} : \mathcal{A}^q \longrightarrow \mathcal{A}^q , \quad (4.116)$$

que chamamos de operador Hamiltoniano, e que satisfaz a Eq.(4.109), que é reescrita na forma funcional como:

$$\{\mathcal{P}, \mathcal{S}\} = \int \delta \mathcal{P} \cdot \mathcal{D} \delta \mathcal{S} dx . \quad (4.117)$$

Assim, de acordo com as definições acima podemos escrever a seguinte proposição:

Proposição 4.19

Seja $\mathcal{D}$ um operador Hamiltoniano com parênteses de Poisson, Eq.(4.117). Para cada funcional $\mathcal{H} = \int H dx \in \mathcal{R}$, existe um campo vetorial de evolução $\hat{v}_{\mathcal{H}}$, chamado de campo vetorial Hamiltoniano associado a $\mathcal{H}$, que satisfaz:

$$pr \hat{v}_{\mathcal{H}}(\mathcal{P}) = \{\mathcal{P}, \mathcal{H}\} \quad (4.118)$$

para todos os funcionais $\mathcal{P} \in \mathcal{F}$. E $\hat{v}_{\mathcal{H}}$ tem como característica $\mathcal{D} \delta \mathcal{H} = \mathcal{D} \mathbf{E}(H)$. [4].

Agora iremos associar leis de conservação com campos vetorias Hamiltonianos de uma dada transformação de simetria de um sistema de equações diferenciais.

Definição 4.20

Seja $\mathcal{D}$ um operador diferencial Hamiltoniano. Um funcional de Casimir para $\mathcal{D}$, será um funcional $\mathcal{C} \in \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{D}\delta\mathcal{C} = 0$ para todo x, u .

Assim, de acordo com a Proposição (4.19) podemos concluir que um funcional $\mathcal{C}$, será um funcional de Casimir somente se:

$$\{\mathcal{C}, \mathcal{H}\} = 0 \quad \mathcal{H} \in \mathcal{F} . \quad (4.119)$$

Isso nos leva diretamente para uma interpretação de natureza conservativa tais funcionais, e então podemos escrever a seguinte proposição:

Proposição 4.21

Seja $\mathcal{D}$ um operador Hamiltoniano. Se $\mathcal{C}$ for um funcional de Casimir para $\mathcal{D}$, então $\mathcal{C}$ determina uma lei de conservação para todo sistema Hamiltoniano $u_t = \mathcal{D}\delta\mathcal{H}$ relativo a $\mathcal{D}$, [4].

Por exemplo, se tomarmos a equação de Cahn-Hilliard, Eq.(2.44), temos:

$$u_t = uu_x^2 + u_{xx}(u^2 - 1) - u_{xxxx} . \quad (4.120)$$

No Cap.(2) determinamos suas simetrias, e uma delas esta associada ao seguinte campo:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x} . \quad (4.121)$$

Então, de acordo com a Eq.(1.79), esse campo possui a seguinte função característica associada:

$$Q_1 = -u_x . \quad (4.122)$$

Ela pode ser escrita como:

$$Q_1 = -D_x(u) . \quad (4.123)$$

Assim sendo, vemos que D_x é um operador Hamiltoniano para a equação de Cahn-Hilliard, e se tomarmos em conta a Def.(4.20), e escrevendo $\mathcal{D} = D_x$, teremos:

$$D_x(\delta\mathcal{C}) = 0 . \quad (4.124)$$

Então $\delta C = \text{Const.}$, ou ainda:

$$\delta C = \int E(C) dx = \text{Const.} , \quad (4.125)$$

$$\delta C = \int \sum_J (-D)_J \frac{\partial}{\partial u_J} \{u\} dx = \text{Const.} \quad (4.126)$$

Assim obtemos que $c = u$, ou seja:

$$C = \int u dx , \quad (4.127)$$

que podemos interpretar como uma lei de conservação de massa para o sistema descrito pela equação de Cahn-Hilliard.

De uma maneira geral, um campo vetorial Hamiltoniano $\mathbf{v}_P$, terá $\mathcal{D}(\delta \mathcal{T})$ como sua função característica associada, de acordo com a Proposição (4.19). Ou seja, podemos escrever:

$$Q_i = \mathcal{D}(\delta \mathcal{T}_i) , \quad (4.128)$$

onde $\mathcal{T}_i$ é uma quantidade conservada associada a característica Q_i .

Definimos na Seção (3.2) uma lei de conservação como sendo uma expressão do tipo:

$$D_t T + \text{Div} X = 0 . \quad (4.129)$$

Ou, equivalentemente, para o funcional associado:

$$\mathcal{T}[t; u] = \int_{\Omega} T(x, t, u^{(n)}) dx , \quad (4.130)$$

temos:

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} + pr \mathbf{v}_P(\mathcal{T}) = 0 . \quad (4.131)$$

onde P está associado a equação:

$$u_t = P[u] , \quad (4.132)$$

que será o sistema de equação de evolução associado ao problema de interesse.

Capítulo 5

Determinando leis de conservação

No presente capítulo terminaremos esta dissertação apresentando algumas quantidades conservadas associadas às quatro equações que tomamos como exemplo anteriormente: Equação do Calor, KdV, Cahn-Hilliard e Equação de Onda. Como se verá, isto nos fornecerá um grande resumo dos conceitos até agora introduzidos e mostrará de forma concreta, que cálculos devem ser feitos, levando simetrias em leis de conservação. De fato, boa parte dos cálculos já foi feito em capítulos anteriores. Estes resultados serão aqui reagrupados, para maior clareza.

Partindo das simetrias calculadas no Cap.(2), determinamos as funções características associadas a cada uma delas, para então em seguida determinarmos simetrias e funções características generalizadas juntamente com operadores de recursão para as equações em estudo. Finalmente, a partir da associação de funções características com operadores Hamiltonianos, determinaremos leis de conservação. Isto será feito para cada uma das equações em questão.

5.1 A Equação da KdV

A equação:

$$\Delta(x, u^{(3)}) = u_t + u_{xxx} + uu_x = 0 \quad . \quad (5.1)$$

5.1.1 Características e Simetrias Ordinárias

Simetrias da Equação de KdV calculadas na Seção (2.2), Eqs(2.43):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= -x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u} \\ \mathbf{v}_2 &= t \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} \\ \mathbf{v}_3 &= \frac{\partial}{\partial t} \\ \mathbf{v}_4 &= \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Assim, a partir da Eq.(1.79), calculamos o seguinte conjunto de funções características associadas a cada uma das simetrias, e obtemos:

$$\begin{aligned} Q_1 &= u + xu_x + tuu_x + tu_{xxx} \\ Q_2 &= 1 - tu_x \\ Q_3 &= uu_x + u_{xxx} \\ Q_4 &= -u_x \end{aligned} \quad (5.3)$$

5.1.2 Características e Simetrias Generalizadas

Agora, a partir do conjunto de funções características dado pelas Eqs.(5.3), e usando o operador de recursão para a KdV, dado pela Eq.(4.67):

$$\mathcal{R} = D_x^2 + \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}u_x D_x^{-1} \quad , \quad (5.4)$$

que já verificamos sua propriedade recursiva na sequência de cálculos realizadas da Eq.(4.70) até Eq.(4.75). Podemos então construir agora, novas funções características de simetrias generalizadas para a equação da KdV aplicando simplesmente $\mathcal{R}$ nas funções dadas pelas Eqs.(5.3), assim:

$$Q_5 = \mathcal{R}Q_4 \quad (5.5)$$

$$Q_5 = D_x^2 + \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}u_x D_x^{-1}(-u_x) \quad (5.6)$$

$$Q_5 = -u_{xxx} - uu_x \quad , \quad (5.7)$$

que é igual a Q_3 a menos de um sinal. Agora:

$$Q_6 = \mathcal{R}(Q_2) \quad (5.8)$$

$$Q_6 = \frac{2}{3}u + xu_x - tu_{xxx} - tuu_x . \quad (5.9)$$

Poderíamos continuar calculando indefinidamente novas funções características apenas aplicando $\mathcal{R}$ nas funções já determinadas, mas antes seria interessante determinarmos quais dessas funções características estão associadas a leis de conservação.

5.1.3 Leis de Conservação

Para determinarmos leis de conservação, de acordo com a Proposição (4.19), basta verificar quais dessas funções características estão associadas a campos vetoriais Hamiltonianos, ou seja, queremos saber quais dessas funções características podem ser escritas como:

$$Q_i = \mathcal{D}(\delta \mathcal{P}_i) , \quad (5.10)$$

de acordo com a Eq.(4.128).

Assim, começaremos com a mais simples de nossas funções características para a KdV, ou seja, começaremos com Q_4 :

$$Q_4 = -u_x , \quad (5.11)$$

$$Q_4 = \mathcal{D}(\delta \mathcal{P}_4) , \quad (5.12)$$

onde escrevemos $\mathcal{D} = D_x$, e obtemos

$$-u_x = D_x(\delta \mathcal{P}_4) , \quad (5.13)$$

Ou, simplismente

$$\mathbf{E}(P_4) = u . \quad (5.14)$$

Segue-se que:

$$\frac{\partial P_4}{\partial u} - D_x\left(\frac{\partial P_4}{\partial u_x}\right) + D_x^2\left(\frac{\partial P_4}{\partial u_{xx}}\right) + \dots = -u . \quad (5.15)$$

Obtemos assim:

$$P_4 = -\frac{1}{2}u^2 . \quad (5.16)$$

Podemos escrever a quantidade conservada associada à função característica associada a Q_4 , como:

$$\mathcal{P}_4 = \int \left(-\frac{1}{2}u^2\right) dx . \quad (5.17)$$

Podemos, agora, verificar que $\mathcal{P}_4$ satisfaz a condição de lei de conservação dada pela Eq.(4.131), ou seja:

$$\frac{\partial \mathcal{P}_4}{\partial t} + \text{prv}_K(\mathcal{P}_4) = 0 , \quad (5.18)$$

onde $K = -u_{xxx} - uu_x$, de acordo com $u_t = K[u]$, dado pela Eq.(5.1). Usando agora a Eq.(4.14), escrevemos:

$$\text{prv}_K = \sum_J D_J (-u_{xxx} - uu_x) \frac{\partial}{\partial u^J} . \quad (5.19)$$

Assim vamos obter

$$\text{prv}_K(P_4) = -uu_{xxx} - u^2u_x . \quad (5.20)$$

De modo que

$$\frac{\partial \mathcal{P}_4}{\partial t} = -uu_t , \quad (5.21)$$

mas, de acordo com a Eq.(5.1), podemos ainda escrever:

$$u_t = -u_{xxx} - uu_x , \quad (5.22)$$

logo:

$$\frac{\partial \mathcal{P}_4}{\partial t} = uu_{xxx} + u^2u_x . \quad (5.23)$$

Assim:

$$\frac{\partial \mathcal{P}_4}{\partial t} + \text{prv}_K(\mathcal{P}_4) = uu_{xxx} + u^2u_x - u^2u_x - uu_{xxx} = 0 , \quad (5.24)$$

como queríamos.

Analogamente pode-se escrever:

$$Q_3 = D_x(\delta \mathcal{P}_3) , \quad (5.25)$$

e encontrar

$$\mathcal{P}_3 = \int \left(\frac{1}{6} u^3 - \frac{1}{2} u_x^2 \right) dx , \quad (5.26)$$

que por sua vez também satisfaz a Eq.(4.131), sendo assim também uma quantidade conservada.

Para $Q_2 = 1 - tu_x$, encontramos:

$$\mathcal{P}_2 = \int \left(xu - \frac{1}{2} tu^2 \right) dx . \quad (5.27)$$

Para a função característica Q_1 , não foi possível encontrar nenhum funcional $\mathcal{P}_1$, tal que

$$Q_1 = D_x(\delta \mathcal{P}_1) , \quad (5.28)$$

significando que não podemos associar uma lei de conservação para KdV neste caso.

Se escolhermos agora Q_5 , Eq.(5.7), que é a função característica de uma simetria generalizada, vamos obter a seguinte expressão para uma quantidade conservada associada a ela:

$$\mathcal{P}_5 = \int \left(\frac{1}{2} u_x^2 - \frac{1}{6} u^3 \right) dx , \quad (5.29)$$

que, como vemos, é igual a $\mathcal{P}_3$, a menos de um sinal. Para Q_6 , novamente não encontramos nenhuma quantidade conservada. Poderíamos continuar aplicando $\mathcal{R}$ sobre características conhecidas até obter outras que possuem quantidades conservadas associadas, mas, entretanto para ilustrar outras técnicas passamos agora a implementar a idéia exposta na Proposição (4.13). Esta afirma que se $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$, são simetrias associadas a leis de conservação para uma dada equação, então $\text{prv}_i(P_i)$ também será uma quantidade conservada associada à mesma equação. Assim, iremos agora combinar as nossas três quantidades conservadas, P_1, P_2, P_3 , determinadas até aqui, com as funções características associadas a elas, Q_2, Q_3, Q_4 , e encontrar novas leis de conservação para KdV.

Podemos então calcular, digamos P_{44} , como sendo:

$$P_{44} = \text{prv}_{Q_4}(P_4) . \quad (5.30)$$

Então, usando a Eq.(4.14), escrevemos:

$$P_{44} = \sum_J D_J(-u_x) \frac{\partial}{\partial u_J} \left(-\frac{1}{2}u^2\right) \quad (5.31)$$

e obtemos:

$$P_{44} = uu_x \quad , \quad (5.32)$$

que é uma nova quantidade conservada, de acordo com a Eq.(4.131). Podemos verificar este fato explicitamente, calculando

$$\text{prv}_K(P_{44}) = +u_x u_{xxx} + uu_x^2 + uu_{xxx} + uu_x^2 + u^2 u_{xx} \quad , \quad (5.33)$$

e

$$\frac{\partial P_{44}}{\partial t} = u_t u_x + uu_{xt} \quad . \quad (5.34)$$

Usando a Eq.(5.1), obtemos

$$\frac{\partial P_{44}}{\partial t} = -u_x u_{xxx} - uu_x^2 - uu_{xxx} - uu_x^2 - u^2 u_{xx} \quad , \quad (5.35)$$

e finalmente

$$\frac{\partial P_{44}}{\partial t} + \text{prv}_K(P_{44}) = 0 \quad , \quad (5.36)$$

como queríamos. Como um segundo exemplo, vamos calcular P_{32} :

$$P_{32} = \sum_J D_J(Q_3) \frac{\partial}{\partial u_J} (P_2) \quad . \quad (5.37)$$

Assim,

$$P_{32} = \sum_J D_J(uu_x + u_{xxx}) \frac{\partial}{\partial u_J} \left(xu - \frac{1}{2}tu^2\right) \quad , \quad (5.38)$$

$$P_{32} = xuu_x + xu_{xxx} - tu^2 u_x - tuu_{xxx} \quad . \quad (5.39)$$

De maneira geral partindo de uma primeira família de quantidades conservadas P_i , podemos obter uma segunda geração dada por:

$$P_u = \sum_J D_J(Q_i) \frac{\partial}{\partial u_J} (P_i) \quad , \quad (5.40)$$

onde Q_i é função característica de uma lei de conservação. No caso da Equação da KdV, obtemos a seguinte tabela de leis de conservação para duas gerações:

Q_i, P_j	Quant. Conser.
Casimir	$C = u$
Q_2	$P_2 = xu - \frac{1}{2}tu^2$
Q_3	$P_3 = \frac{1}{2}u^3 - \frac{1}{2}u_x^2$
Q_4	$P_4 = -\frac{1}{2}u^2$
Q_2, P_2	$P_{2,2} = x - tu - xtu_x + t^2uu_x$
Q_2, P_3	$P_{2,3} = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}tu^2u_x + tu_xu_{xx}$
Q_2, P_4	$P_{2,4} = tuu_x - u$
Q_3, P_2	$P_{3,2} = xuu_x + xu_{xxx} - tu^2u_x - tuu_{xxx}$
Q_3, P_3	$P_{3,3} = \frac{1}{2}u^3u_x + \frac{1}{2}u^2u_{xxx} - u_x^3 - uu_xu_{xx} - u_xu_{xxx}$
Q_3, P_4	$P_{3,4} = -u^2u_x - uu_{xxx}$
Q_4, P_2	$P_{4,2} = -xu_x + tuu_x$
Q_4, P_3	$P_{4,3} = u_xu_{xx} - \frac{1}{2}u^2u_x$
Q_4, P_4	$P_{4,4} = uu_x$

Para ilustrar, vamos calcular ainda duas quantidades conservadas de terceira geração. Por exemplo, tomando primeiramente a função característica Q_4 , e a quantidade conservada P_{43} , escrita na tabela acima. Obtemos:

$$P_{4,(4,3)} = \text{prv}_{Q_4}(P_{4,3}) \quad , \tag{5.41}$$

$$P_{4,(4,3)} = \sum_J D_J(-u_x) \frac{\partial}{\partial u_J} (u_xu_{xx} - \frac{1}{2}u^2u_x) \quad . \tag{5.42}$$

Ou seja:

$$P_{4,(4,3)} = uu_x^2 + \frac{1}{2}u^2u_{xx} - u_{xx}^2 - u_xu_{xxx}$$

Calculando agora, como um segundo, exemplo a quantidade conservada associada a Q_3 e P_{44} , teremos:

$$P_{3,(4,4)} = \text{prv}_{Q_3}(P_{4,4}) \quad , \tag{5.43}$$

$$P_{3,(4,4)} = \sum_J D_J (uu_x + u_{xxx}) \frac{\partial}{\partial u_J} (uu_x) . \quad (5.44)$$

Obtemos:

$$P_{3,(4,4)} = 2uu_x^2 + u^2u_{xx} + u_xu_{xxx} + uu_{xxxx}$$

5.2 A Equação do Calor

A equação:

$$\Delta(x, u^{(2)}) = u_t - u_{xx} = 0 . \quad (5.45)$$

5.2.1 Características e Simetrias Ordinárias

Simetrias da Equação do Calor calculadas na Seção (2.1), Eqs(2.22):

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial}{\partial t} \\ v_2 &= \frac{1}{2}x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} \\ v_3 &= xt \frac{\partial}{\partial x} + t^2 \frac{\partial}{\partial t} - (x^2 + \frac{1}{2}t)u \frac{\partial}{\partial u} \\ v_4 &= \frac{\partial}{\partial x} \\ v_5 &= t \frac{\partial}{\partial x} - xu \frac{\partial}{\partial u} \\ v_6 &= u \frac{\partial}{\partial u} \\ v_\beta &= \beta(x, t) \frac{\partial}{\partial u} . \end{aligned} \quad (5.46)$$

Então, a partir da Eq.(1.79) temos que

$$Q(x, u^{(1)}) = \phi(x, u) - \sum_{i=1}^p \xi(x, u) u_i . \quad (5.47)$$

Podemos calcular o conjunto de funções características associadas a cada uma das simetrias acima, e obter:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= -u_t = -u_{xx} \\
 Q_2 &= -\frac{1}{2}xu_x - tu_{xx} \\
 Q_3 &= -xtu_x - t^2u_{xx} - (x^2 + \frac{1}{2}t)u \\
 Q_4 &= -u_x \\
 Q_5 &= -tu_x - xu \\
 Q_6 &= u \\
 Q_\beta &= \beta(x, t) .
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

5.2.2 Características Generalizadas e Operadores de Recursão

Na Seção (4.14) determinamos o seguinte conjunto de simetrias generalizadas associadas à Equação do Calor:

$$\begin{aligned}
 Q_{g1} &= u_{xxxx} \\
 Q_{g2} &= u_{xxx} \\
 Q_{g3} &= u_x \\
 Q_{g4} &= u \\
 Q_{g5} &= E(x, t) .
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

onde $E(x, t)$ é qualquer solução da equação do calor.

Podemos, ainda verificar que D_x é um operador de recursão para a equação do calor. De acordo com o Teorema (4.10), Eq.(4.59), escrevemos:

$$\mathcal{R}_1 = D_x . \tag{5.50}$$

De fato, podemos verificar que qualquer

$$\mathcal{R}^n = (D_x)^n , \tag{5.51}$$

será um operador de recursão para a Equação do Calor devido a sua linearidade. Além disto, o operador:

$$\mathcal{R}_2 = tD_x + \frac{1}{2}x \quad , \quad (5.52)$$

também é um operador de recursão para a Equação do Calor, como mostrado na Eq.(4.38).

Usando então o conjunto de funções características, dado pelas Eqs.(5.48) e Eqs.(4.49), juntamente com os operadores de recursão $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, dados pelas equações Eq.(5.50) e Eq.(5.52), respectivamente, podemos construir novas funções características pela aplicação de $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$. Assim, obtemos:

$$Q_{g6} = \mathcal{R}_1(Q_1) \quad , \quad (5.53)$$

$$Q_{g6} = -u_{xxx} \quad . \quad (5.54)$$

ou:

$$Q_{g7} = \mathcal{R}_1(Q_{g1}) \quad , \quad (5.55)$$

$$Q_{g7} = u_{xxxxx} \quad . \quad (5.56)$$

Usando o operador $\mathcal{R}_2$, temos que:

$$Q_{g8} = \mathcal{R}_2(Q_{g4}) \quad , \quad (5.57)$$

$$Q_{g8} = tu_x + \frac{1}{2}xu \quad . \quad (5.58)$$

Podemos também combinar os dois operadores de recursão:

$$Q_{g9} = \mathcal{R}_2\mathcal{R}_1(Q_4) \quad , \quad (5.59)$$

$$Q_{g9} = -tu_{xxx} - \frac{1}{2}xu_{xx} \quad . \quad (5.60)$$

5.2.3 Leis de Conservação

De maneira análoga aos cálculos feitos para a equação de KdV, passamos agora a determinar leis de conservação para a Equação do Calor. Assim, tomando as funções características

de Q_1 a Q_6 , Eqs.(5.48), verificamos que apenas a simetria associada a Q_4 possui uma lei de conservação que pode ser escrita como:

$$Q_4 = D_x(\delta P_4) , \quad (5.61)$$

ou seja:

$$-u_x = D_x(\delta P_4) , \quad (5.62)$$

ou:

$$E(P_4) = -u , \quad (5.63)$$

$$\frac{\partial P_4}{\partial u} - D_x\left(\frac{\partial P_4}{\partial u_x}\right) + D_x^2\left(\frac{\partial P_4}{\partial u_{xx}}\right) + \dots = -u . \quad (5.64)$$

Assim:

$$P_4 = -\frac{1}{2}u^2 . \quad (5.65)$$

Ou, escrevendo na forma funcional:

$$P_4 = \int \left(-\frac{1}{2}u^2\right) dx . \quad (5.66)$$

Agora, para funções características generalizadas, Eqs(5.49), podemos encontrar uma lei de conservação, associada a Q_{g_2} e Q_{g_3} , tal que:

$$Q_{g_2} = D_x(\delta P_{g_2}) . \quad (5.67)$$

Ou seja, temos que:

$$E(P_{g_2}) = u_{xx} . \quad (5.68)$$

Assim, segue-se que

$$P_{g_2} = \int \left(-\frac{1}{2}u_x^2\right) dx . \quad (5.69)$$

Para Q_{g_3} , temos:

$$Q_{g_3} = D_x(\delta P_{g_3}) , \quad (5.70)$$

ou:

$$\mathcal{P}_{g_3} = -\mathcal{P}_4 = \int \left(\frac{1}{2}u^2\right)dx \quad . \quad (5.71)$$

Para as demais características generalizadas, apenas Q_{g_6} e Q_{g_7} , estão associadas a leis de conservação. Assim:

$$Q_{g_6} = D_x(\delta\mathcal{P}_{g_6}) \quad , \quad (5.72)$$

ou seja:

$$\mathbf{E}(P_{g_6}) = -u_{xx} \quad . \quad (5.73)$$

Segue-se que

$$\mathcal{P}_{g_6} = \int \left(-\frac{1}{2}u_x^2\right)dx \quad . \quad (5.74)$$

Para Q_{g_7} , temos:

$$\mathbf{E}(P_{g_7}) = u_{xxxx} \quad , \quad (5.75)$$

logo:

$$P_{g_7} = \frac{1}{2}u_{xx}^2 \quad . \quad (5.76)$$

Podemos verificar que cada uma dessas quantidades, $\mathcal{P}_4$, $\mathcal{P}_{g_2}$ e $\mathcal{P}_{g_7}$, satisfaz o critério de lei de conservação, dado pela Eq.(4.131). Por exemplo, se tomarmos $\mathcal{P}_{g_7}$, vamos obter:

$$\frac{\partial P_{g_7}}{\partial t} = u_{xx}u_{xxt} \quad (5.77)$$

ou:

$$\frac{\partial P_{g_7}}{\partial t} = u_{xx}u_{xxxx} \quad , \quad (5.78)$$

de acordo com a Eq.(5.45), enquanto que:

$$prv_K(P_{g_7}) = -\sum_J D_J(u_{xx}) \frac{\partial}{\partial u_J} \left(\frac{1}{2}u_{xx}^2\right) \quad , \quad (5.79)$$

$$prv_K(P_{g_7}) = -D_x^2(u_{xx})u_{xx} \quad (5.80)$$

$$prv_K(P_{g_7}) = -u_{xx}u_{xxxx} \quad . \quad (5.81)$$

Logo:

$$\frac{\partial P_{g7}}{\partial t} + prv_K(P_{g7}) = 0 \quad , \tag{5.82}$$

como queríamos.

Agora, com estas três quantidades conservadas, juntamente com suas funções características, podemos construir uma segunda geração de leis de conservação, dada pela Eq.(5.40), como:

$$P_{ii} = \sum_j D_J(Q_i) \frac{\partial}{\partial u^j} (P_l) \quad . \tag{5.83}$$

Assim, construímos a seguinte tabela de quantidades conservadas associadas a Equação do Calor:

Q_i, P_j	Quant. Conser.
Casimir	$C = u$
Q_4	$P_2 = -\frac{1}{2}u^2$
Q_{g2}	$P_3 = -\frac{1}{2}u_x^2$
Q_{g7}	$P_4 = \frac{1}{2}u_{xx}^2$
Q_4, P_4	$P_{4,4} = uu_x$
Q_4, P_{g2}	$P_{4,g2} = u_x u_{xx}$
Q_4, P_{g7}	$P_{4,g7} = -u_{xx} u_{xxx}$
Q_{g2}, P_4	$P_{4,g2} = -u u_{xxx}$
Q_{g2}, P_{g2}	$P_{g2,g2} = -u_x u_{xxxx}$
Q_{g2}, P_{g7}	$P_{g2,g7} = u_{xx} u_{xxxxx}$
Q_{g7}, P_4	$P_{g7,4} = -u u_{xxxxx}$
Q_{g7}, P_{g2}	$P_{g7,g2} = -u_x u_{xxxxxx}$
Q_{g7}, P_{g7}	$P_{g7,g7} = u_{xx} u_{xxxxxxx}$

Novamente, para exemplificar, calcularemos duas quantidades conservadas de terceira geração associadas a Equação do Calor. Tomemos primeiramente Q_4 e P_{g_2, g_2} . Assim:

$$P_{4(g_2, g_2)} = \sum_J D_J(-u_x) \frac{\partial}{\partial u_J} (-u_x u_{xxx}) \quad , \quad (5.84)$$

$$P_{4(g_2, g_2)} = (u_x + u_{xx}) u_{xxx} \quad .$$

Agora, tomando Q_{g_2} e P_{4, g_2} , obtemos:

$$P_{g_2(4, g_2)} = \sum_J D_J(u_{xxx}) \frac{\partial}{\partial u_J} (u_x u_{xx}) \quad , \quad (5.85)$$

$$P_{g_2(4, g_2)} = u_x u_{xxxxx} + u_{xx} u_{xxxx} \quad .$$

Ambas as expressões satisfazendo a Eq.(4.131) como critério de lei de conservação.

5.3 A Equação de Cahn-Hilliard

A equação:

$$\Delta(x, u^{(4)}) = u_t - uu_x^2 + u_{xx}(1 - u^2) + u_{xxxx} = 0 \quad . \quad (5.86)$$

5.3.1 Características e Simetrias Ordinárias

Simetrias da Equação de Cahn-Hilliard calculadas na Seção (2.3), Eqs(2.51):

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \\ v_2 &= \frac{\partial}{\partial t} \end{aligned} \quad . \quad (5.87)$$

Calculamos então o seguinte conjunto de funções características associadas a cada uma das simetrias, e obtemos:

$$Q_1 = -u_x \quad (5.88)$$

$$Q_2 = u_{xxxx} + u_{xx}(1 - u^2) - uu_x^2 \quad .$$

Para a Equação de Cahn-Hilliard, não foi possível determinar nenhum operador de recursão, como também não determinamos funções características generalizadas. Assim passaremos diretamente para leis de conservação associadas as características dadas pelas Eqs.(5.68).

5.3.2 Leis de Conservação

Para a função característica Q_1 , das Eqs.(5.63), claramente podemos escrever:

$$Q_1 = D_x(\delta \mathcal{P}_1) \quad , \quad (5.89)$$

assim:

$$E(P_1) = -u \quad , \quad (5.90)$$

ou seja:

$$\mathcal{P}_1 = \int \left(-\frac{1}{2}u^2\right) dx \quad . \quad (5.91)$$

Para a característica Q_2 , não é possível escrever uma expressão na forma da Eq.(4.128). Assim, para a Equação de Cahn-Hilliard temos somente duas quantidades conservadas diretas, uma dada pela própria função de Casimir, Eq.(4.127), e a expressão dada pela Eq.(5.91).

Verificaremos agora que $P_1 = -\frac{1}{2}u^2$ satisfaz a Eq.(4.131), ou seja:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} + \text{prv}_K(P_1) = 0 \quad . \quad (5.92)$$

Para $\text{prv}_K(P_1)$, temos:

$$\text{prv}_K(P_1) = \sum_J [u_{xx}(1-u^2) - uu_x^2 + u_{xxxx}] \frac{\partial}{\partial u_J} \left(-\frac{1}{2}u^2\right) \quad , \quad (5.93)$$

$$\text{prv}_K(P_1) = uu_{xx}(u^2 - 1) + u^2u_x^2 - uu_{xxxx} \quad . \quad (5.94)$$

Enquanto que:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -uu_t \quad . \quad (5.95)$$

Escrevendo $u_t = uu_x^2 + u_{xx}(u^2 - 1) - u_{xxxx}$, de acordo com a Eq.(5.86), obtemos:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = -u^2u_x + uu_{xx}(1-u^2) + uu_{xxxx} \quad . \quad (5.96)$$

Ou seja:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} + \text{prv}_K(P_1) = 0 \quad . \quad (5.97)$$

Podemos ainda expandir o “espectro” de leis de conservação para a Equação de Cahn-Hilliard a partir da função de Casimir

$$C = \int u dx \quad ,$$

(5.98)

da característica Q_1 ; e da quantidade conservada P_1 e usando a Eq.(5.40). Podemos, então, calcular uma segunda geração de leis de conservação dado por:

$$P_{1,C} = \sum_J (-u_x) \frac{\partial}{\partial u_J} (u) \quad ,$$

(5.99)

e:

$$P_{1,1} = \sum_J (-u_x) \frac{\partial}{\partial u_J} \left(-\frac{1}{2}u^2\right) \quad . .$$

(5.100)

Resumindo temos a seguinte tabela de leis de conservação para a Equação de Cahn-Hilliard:

Q_i, P_j	Quant. Conser.
Casimir	$C = u$
Q_1	$P_1 = -\frac{1}{2}u^2$
Q_1, C	$P_{1,C} = -u_x$
Q_1, P_1	$P_{1,1} = uu_x$
$Q_1, P_{1,1}$	$P_{1,(1,1)} = -uu_{xx} - u_x^2$

5.4 A Equação de Onda

A equação:

$$\Delta(x, u^{(2)}) = u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad .$$

(5.101)

5.4.1 Características e Simetrias Ordinárias

Simetrias da Equação de Onda calculadas na Seção (2.4), Eq.(2.60) - Eq.(2.67):

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \\
 v_2 &= x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} \\
 v_3 &= t \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial t} \\
 v_4 &= (x^2 + t^2) \frac{\partial}{\partial x} + 2xt \frac{\partial}{\partial t} - xu \frac{\partial}{\partial u} \\
 v_5 &= 2xt \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + t^2) \frac{\partial}{\partial t} - tu \frac{\partial}{\partial u} \\
 v_6 &= \frac{\partial}{\partial t} \\
 v_7 &= u \frac{\partial}{\partial u} \\
 v_\beta &= \beta(x, t) \frac{\partial}{\partial u} .
 \end{aligned} \tag{5.102}$$

Então, a partir da Eq.(1.79):

$$Q(x, u^{(1)}) = \phi(x, u) - \sum_{i=1}^p \xi(x, u) u_i , \tag{5.103}$$

calculamos o seguinte conjunto de funções características associadas a cada uma das simetrias, e obtemos:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= -u_x \\
 Q_2 &= -xu_x - tu_t \\
 Q_3 &= -tu_x - xu_t \\
 Q_4 &= -(x^2 + t^2)u_x - 2xtu_x - xu \\
 Q_5 &= -2xtu_x - (x^2 + t^2)u_t - tu \\
 Q_6 &= -u_t \\
 Q_7 &= u \\
 Q_\beta &= \beta(x, t) .
 \end{aligned} \tag{5.104}$$

Calculamos ainda, no Cap.(3), um conjunto de simetrias variacionais para a equação de Onda, veja-se a Seção (3.1), Eqs.(3.40). Conjunto este de simetrias, todo contido nas Eqs.(5.102).

5.4.2 Características e Simetrias Generalizadas

Consideremos o seguinte conjunto de operadores:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &= D_x \\ \mathcal{R}_2 &= D_t \\ \mathcal{R}_3 &= xD_x + tD_t \\ \mathcal{R}_{xt} &= tD_x + xD_t\end{aligned}\quad (5.105)$$

Podemos verificar que todos eles são operadores de recursão para à Equação de Onda, Eq.(5.101), pois de acordo com o nosso critério para operadores de recursão, Teorema (4.10), podemos escrever:

$$\mathbf{D}_\Delta \cdot \mathcal{R} = \mathcal{R} \cdot \mathbf{D}_\Delta, \quad (5.106)$$

para qualquer um dos operadores dado pelas Eqs.(5.107). Por exemplo, se tomarmos $\mathcal{R}_{xt}$, juntamente com a derivada de Fréchet para a Equação de Onda, teremos

$$\mathbf{D}_\Delta = D_t^2 - D_x^2, \quad (5.107)$$

logo,

$$\mathbf{D}_\Delta \cdot \mathcal{R}_{xt} = \mathcal{R}_{xt} \cdot \mathbf{D}_\Delta, \quad (5.108)$$

satisfazendo assim o critério para operador de recursão. Podemos então, usar agora o conjunto de funções características, Eq.(5.104), juntamente com os operadores de recursão, Eqs.(5.107), para calcularmos características generalizadas. Assim, determinamos aqui algumas carac-

terísticas de interesse:

$$\begin{aligned}
 Q_{g_1} &= \mathcal{R}_1^2(Q_1) \\
 Q_{g_1} &= -u_{xxx} \\
 Q_{g_2} &= \mathcal{R}_2(Q_7) \\
 Q_{g_2} &= -u_7 \\
 Q_{g_3} &= \mathcal{R}_{xt}(Q_2) \\
 Q_{g_3} &= -tu_x - xu_t - (t^2 + x^2)u_{xt} - 2xtu_{xx} \\
 Q_{g_4} &= \mathcal{R}_3(Q_3) \\
 Q_{g_4} &= -2xtu_{xx} - xu_t - tu_x - (x^2 + t^2)u_{xt} .
 \end{aligned} \tag{5.109}$$

5.4.3 Leis de Conservação

Na Seção (3.1.2) determinamos um conjunto de campos, Eqs.(3.41), como sendo geradores de simetrias variacionais associadas à Equação de Onda. Podemos usá-los para construir uma primeira geração de quantidades conservadas diretamente da Eq.(3.75), de acordo com o Teorema (3.10). Ou seja:

$$P_i = \phi \frac{\partial L}{\partial u_t} + \tau L - \sum_J \xi^J u_J \frac{\partial L}{\partial u_t} , \tag{5.110}$$

onde a expressão acima está simplificada em relação a Eq.(3.75), porque aqui temos somente uma variável dependente. Então, de acordo com a Eq.(5.112), temos a seguinte expressão para a densidade conservada associada a simetria variacional $\mathbf{v}_1$, Eq.(5.104):

$$P_1 = -\xi^x u_x \frac{\partial L}{\partial u_t} . \tag{5.111}$$

Da Eq.(3.14), temos a seguinte expressão para a Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}(u_t^2 - u_x^2) . \tag{5.112}$$

Assim:

$$P_1 = u_t u_x . \tag{5.113}$$

Analogamente, para os campos v_2 , v_6 e v_β , dados pelas Eqs.(3.41), obtemos respectivamente as seguinte quantidades conservadas:

$$\begin{aligned} P_2 &= -\frac{1}{2}t(u_t^2 + u_x^2) - xu_tu_x \quad , \\ P_6 &= -\frac{1}{2}(u_x^2 + u_t^2) \quad , \\ P_\beta &= u_t \quad . \end{aligned} \tag{5.114}$$

Podemos agora determinar uma segunda geração de quantidades conservadas, usando P_1 , P_2 , P_3 e P_β , e algumas funções características. Por exemplo, podemos usar Q_{g_2} e P_1 , na Eq.(5.40), assim:

$$P_{g_2,1} = \sum_J D_J(-u_{xxx}) \frac{\partial}{\partial u_J}(u_tu_x) \quad , \tag{5.115}$$

$$P_{g_2,1} = -(u_t + u_x)u_{xxxx} \quad . \tag{5.116}$$

Resumindo, podemos escrever a seguinte tabela de densidades conservadas associadas a Equação de Onda:

Q_i, P_j	Quant. Conser.
Q_1	$P_1 = u_tu_x$
Q_2	$P_2 = -\frac{1}{2}(u_t^2 + u_x^2) - xu_tu_x$
Q_6	$P_6 = -\frac{1}{2}(u_x^2 + u_t^2)$
Q_β	$P_\beta = u_t$
Q_{g_2}, P_1	$P_{g_2,1} = -(u_t + u_x)u_{xxxx}$
Q_{g_2}, P_2	$P_{g_2,2} = (xu_t + tu_x)u_{xxxx} + (tu_t + xu_x)u_{xxxt}$
Q_{g_2}, P_β	$P_{g_2,\beta} = -u_{xxxt}$
Q_1, P_β	$P_{1,\beta} = -u_{xt}$
Q_1, P_6	$P_{1,6} = u_xu_{xx} + u_tu_{xt}$
Q_2, P_1	$P_{2,1} = -2u_tu_x - u_{xx}(xu_t + tu_x) - u_{xt}(tu_t + xu_x)$
Q_2, P_6	$P_{2,6} = u_x^2 + u_t^2 + u_{xx}(xu_x + tu_t) + (x + t)u_xu_{xt}$
Q_6, P_1	$P_{6,1} = -u_tu_{xt} - u_xu_{xx}$

Podemos finalizar este capítulo notando primeiramente que KdV foi a equação que apresentou o maior número de quantidades conservadas associadas diretamente a simetrias ordinárias, fato este que poderia gerar certa surpresa, a princípio, já que devido a sua não-linearidade, devemos ter poucas simetrias. Assim, era de se esperar que também poucas quantidades conservadas de primeira geração aparecessem. Por outro lado, a Equação do Calor, que tem um grande número de simetrias ordinárias (7), apresenta apenas duas quantidades conservadas diretas. Já a equação de Cahn-Hilliard, devido a sua ordem relativamente alta (4) e seus termos não-lineares, apresentou apenas duas quantidades conservadas diretas, como esperavamos. E por último a Equação de Onda, com sua linearidade e especialmente pelo fato de ser auto-adjunta, apresentou grande número de simetrias, e também de leis de conservação, principalmente de ordens superiores.

Apêndice A

Variedades Diferenciáveis

Variedades

Definição A.1

Uma variedade m -dimensional é um conjunto $\mathcal{M}$, juntamente com uma coleção finita de subconjuntos $U_\alpha \subset \mathcal{M}$, chamados cartas coordenadas, e funções um a um $\chi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$, em subconjuntos abertos conexos $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$, chamados mapas coordenados locais, que satisfazem as seguintes propriedades:

- (a) As cartas coordenadas cobrem $\mathcal{M}$:

$$\bigcup_\alpha U_\alpha = \mathcal{M}. \quad (\text{A.1})$$

- (b) Na interseção de qualquer par de cartas coordenadas $U_\alpha \cap U_\beta$, a composição dos mapeamentos:

$$\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1} : \chi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \chi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (\text{A.2})$$

é uma função suave (infinitamente diferenciável).

- (c) Se $x \in U_\alpha$, e $\tilde{x} \in U_\beta$ são pontos distintos de $\mathcal{M}$, então existem subconjuntos abertos

$W \subset V_\alpha$, $\tilde{W} \subset V_\beta$, com $\chi_\alpha(x) \in W$, $\chi_\beta(\tilde{x}) \in \tilde{W}$, satisfazendo:

$$\chi_\alpha^{-1}(W) \cap \chi_\beta^{-1}(\tilde{W}) = \emptyset. \quad (\text{A.3})$$

Mapeamentos Entre Variedades

Se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são variedades suaves, uma função $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é dita suave se sua expressão em coordenadas locais é uma função suave em qualquer carta coordenada.

Teorema A.2

Seja $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ um mapeamento de uma variedade $\mathcal{M}$ para uma variedade $\mathcal{N}$ em $x_o \in \mathcal{M}$. Então existem coordenadas locais $x = (x^1, \dots, x^m)$ próxima a x_o , e $y = (y^1, \dots, y^n)$ próxima a $y_o = F(x_o)$ tal que nestas coordenadas F possui a forma simples:

$$y = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0), \quad \text{se } n > m, \quad (\text{A.4})$$

$$y = (x^1, \dots, x^m), \quad \text{se } n \leq m. \quad (\text{A.5})$$

Subvariedades

Definição A.3

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável. Uma subvariedade de $\mathcal{M}$ é um subconjunto $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, juntamente com uma função suave biunívoca $\phi : \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, onde o espaço dos parâmetros, $\tilde{\mathcal{N}}$, é alguma outra variedade, e $\mathcal{N} = \phi(\tilde{\mathcal{N}})$ é a sua imagem através de ϕ . Em particular, a dimensão de $\mathcal{N}$ é a mesma que a de $\tilde{\mathcal{N}}$, e não excede a de $\mathcal{M}$, [14].

Apêndice B

Grupos de Lie

Grupo

Definição B.1

Um grupo é um conjunto G juntamente com uma operação de grupo, usualmente chamada de multiplicação, tal que para qualquer dois elementos g e h de G , o produto $g \cdot h$ também pertença a G . É necessário que a operação do grupo satisfaça os seguintes axiomas:

(1) Associatividade. Se g, h e k são elementos de G , então:

$$g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k \quad , \tag{B.1}$$

(2) Elemento identidade. Há um elemento e de G , chamado elemento identidade, com a seguinte propriedade:

$$e \cdot g = g = g \cdot e \tag{B.2}$$

qualquer que seja $g \in G$.

(3) Inverso. Para cada $g \in G$ há um inverso, denotado g^{-1} , com a propriedade:

$$g \cdot g^{-1} = e = g^{-1} \cdot g. \quad (\text{B.3})$$

Grupo de Lie

Definição B.2

Um grupo de Lie a r -parâmetros é um grupo G que também possui uma estrutura de variedade diferenciável r -dimensional de tal forma que ambas as operações de grupo:

$$m : G \times G \rightarrow G, \quad m(g, h) = g \cdot h, \quad g, h \in G, \quad (\text{B.4})$$

e a inversão:

$$i : G \rightarrow G, \quad i(g) = g^{-1}, \quad g \in G, \quad (\text{B.5})$$

são mapas suaves entre variedades.

Subgrupos de Lie

Definição B.3

Um subgrupo H de um grupo de Lie G é dado por uma subvariedade $\phi : \tilde{H} \rightarrow G$, onde $\tilde{H}$ por si mesmo é um grupo de Lie, $H = \phi(\tilde{H})$ é a imagem de ϕ , e ϕ é um homomorfismo do grupo de Lie.

Teorema B.4

Suponha que G seja um grupo de Lie. Se H for um subgrupo de Lie G , fechado, então H será uma subvariedade de G e assim também um grupo de Lie. Contrariamente, qualquer subgrupo regular de um grupo de Lie G , é um subgrupo fechado.

Grupos de Lie Locais

Definição B.5

Um grupo de Lie local a r -parâmetros consiste de subconjuntos conexos e abertos $V_o \subset V \subset \mathbb{R}^r$ contendo a origem, e aplicações suaves:

$$m : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^r, \quad (\text{B.6})$$

definindo a operação de grupo, e:

$$i : V_o \rightarrow V, \quad (\text{B.7})$$

definindo a inversão de grupo, com as seguintes propriedades adicionais:

(a) Associatividade. Se x, y e $z \in V$, e também $m(x, y)$ e $m(y, z)$ estão em V , então:

$$m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z). \quad (\text{B.8})$$

(b) Elemento identidade. Para todo $x \in V$, $m(0, x) = x = m(x, 0)$.

(c) Inverso. Para cada $x \in V_o$, $m(x, i(x)) = 0 = m(i(x), x)$.

Teorema B.6

Seja $V_o \subset V \subset \mathbb{R}^r$ um grupo de Lie local com multiplicação $m(x, y)$ e inversão $i(x)$. Então existe um grupo de Lie global G e uma carta coordenada $\chi : U^* \rightarrow V^*$, onde U^* contém o elemento identidade, tal que $V^* \subset V_o$, $\chi(e) = 0$, e:

$$\chi(g \cdot h) = m(\chi(g), \chi(h)) \quad (\text{B.9})$$

sempre que $g, h \in U^*$, e:

$$\chi(g^{-1}) = i(\chi(g)), \quad (\text{B.10})$$

sempre que $g \in U^*$. Além do mais, há um único grupo de Lie simplesmente conexo G^* com as propriedades acima. Se G for qualquer outro grupo de Lie, existe um mapa de recobrimento

$\pi : G^* \rightarrow G$ que é um homomorfismo do grupo, pelo qual G^* e G são grupos de Lie localmente isomorfos. (G^* é chamado grupo de recobrimento simplesmente conexo de G)

Proposição B.7

Seja G um grupo de Lie conexo e $U \subset G$ uma vizinhança da identidade. Seja também, $U^k \equiv \{g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_k : g_i \in U\}$ um conjunto de k -produtos de elementos de U . Então:

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} U^k. \quad (\text{B.11})$$

em outras palavras, qualquer elemento do grupo $g \in G$ pode ser escrito como um produto finito de elementos de U .

Grupos de Transformações Locais

Definição B.8

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade suave. Um grupo de transformações locais atuando em $\mathcal{M}$ é dado por um grupo de Lie (local) G , em um subconjunto aberto U , com:

$$\{e\} \times M \subset U \subset G \times M, \quad (\text{B.12})$$

que é o domínio de definição da ação do grupo, e um mapa suave $\Psi : U \rightarrow \mathcal{M}$ com as seguintes propriedades:

(a) Se $(h, x) \in U$, $(g, \Psi(h, x)) \in U$, e também $(g \cdot h, x) \in U$, então:

$$\Psi(g, \Psi(h, x)) = \Psi(g \cdot h, x). \quad (\text{B.13})$$

(b) Para todo $x \in \mathcal{M}$,

$$\Psi(e, x) = x. \quad (\text{B.14})$$

(c) Se $(g, x) \in U$, então $(g^{-1}, \Psi(g, x)) \in U$ e:

$$\Psi(g^{-1}, \Psi(g, x)) = x. \quad (\text{B.15})$$

Órbitas

Definição B.9

Uma órbita $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$ de um grupo de transformações locais é o menor subconjunto não vazio de uma variedade $\mathcal{M}$, que é invariante sob a ação do grupo, e satisfaz as seguintes condições:

- (a) Se $x \in \mathcal{O}$, $g \in G$ e $g \cdot x$ é definido, então $g \cdot x \in \mathcal{O}$
- (b) Se $\tilde{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}$ e satisfaz a condição (a) então $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$, ou $\tilde{\mathcal{O}}$ é vazio.

Apêndice C

Álgebras de Lie

Álgebra de Lie

Definição C.1

A álgebra de Lie de um grupo de Lie G , denotada aqui por $\mathcal{A}$, é o espaço vetorial de todos os campos vetoriais invariantes a direita sob a ação de G ,

$$\mathcal{A} \simeq TG|_e. \quad (C.1)$$

Definição C.2

Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial $\mathcal{A}$ juntamente com uma operação bilinear

$$[\cdot, \cdot] : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \quad (C.2)$$

chamado bracket de Lie de $\mathcal{A}$, satisfazendo os axiomas:

(a) Bilinearidade:

$$[cv + c'v', w] = c[v, w] + c'[v', w] \quad (C.3)$$

$$[v, cw + c'w'] = c[v, w] + c'[v, w'] \quad (C.4)$$

para constantes $c, c' \in \mathbb{R}$,

(b) Anti-simetria:

$$[v, w] = -[w, v] \quad (C.5)$$

(c) Identidade de Jacobi:

$$[u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]] = 0 \quad (C.6)$$

para todo $u, v, v', w, w' \in \mathcal{A}$.

Subgrupos a Um Parâmetro

Proposição C.3

Seja $v \neq 0$ um campo vetorial invariante à direita sob a ação de um grupo de Lie G . Então o fluxo gerado por v na identidade, é expresso como

$$g_\varepsilon = \exp(\varepsilon v)e \equiv \exp(\varepsilon v) \quad , \quad (C.7)$$

e é definido para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$, formando um subgrupo a um parâmetro de G , com

$$g_{\varepsilon+\delta} = g_\varepsilon \cdot g_\delta, \quad g_0 = e, \quad g_\varepsilon^{-1} = g_{-\varepsilon} \quad (C.8)$$

isomorfo a $\mathbb{R}$ ou ao grupo do círculo $SO(2)$.

Subálgebras

Teorema C.4

Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathcal{A}$. Se $H \subset G$ é um subgrupo, sua álgebra de Lie é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Caso contrário, se $\mathcal{H}'$ for qualquer subálgebra s -dimensional de $\mathcal{A}$, há um único subgrupo de Lie conexo a s -parâmetros H de G com uma álgebra de Lie $\mathcal{H}'$.

Teorema C.5

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então $\mathcal{A}$ é isomorfa a uma subálgebra de $\mathcal{AL}(n)$ para algum n .

Teorema C.6

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então existe um único grupo de Lie G^* simplesmente conexo, tendo $\mathcal{A}$ como sua álgebra de Lie. Além do mais, se G for qualquer outro grupo de Lie conexo com álgebra $\mathcal{A}$, então $\pi : G^* \rightarrow G$ é um grupo de recobrimento simplesmente conexo de G .

Álgebras de Lie de grupos de Lie Locais

Proposição C.7

Seja $V \subset \mathbb{R}^r$ um grupo de Lie local com multiplicação $m(x, y)$, $x, y \in V$. Então a álgebra de Lie $\mathcal{A}$ dos campos vetoriais invariantes à direita sob V é gerada por campos vetoriais:

$$v_k = \sum_{i=1}^r \xi_k^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \quad (C.9)$$

$k = 1, \dots, r$, onde

$$\xi_k^i(x) = \frac{\partial m^i}{\partial x^k}(0, x) \quad . \quad (C.10)$$

Nesta expressão os m^i 's são os componentes de m , e $\partial/\partial x^k$ denota derivadas com respeito ao

primeiro conjunto de r variáveis em $m(x, y)$, depois que os valores $x = 0$, e $y = x$ tenham sido substituídos.

Ação do Grupo Infinitesimal

Teorema C.8

Sejam $w_1, \dots, w_r$ campos vetoriais em uma variedade $\mathcal{M}$ satisfazendo

$$[w_i, w_j] = \sum_{k=1}^r c_{ij}^k w_k \quad , \tag{C.11}$$

$i, j = 1, \dots, r$, para certas constantes c_{ij}^k . Então existe um grupo de Lie G cuja álgebra de Lie tem como constante de estrutura c_{ij}^k relativa a alguma base $v_1, \dots, v_r$, e a ação de um grupo local G em $\mathcal{M}$ é tal que $\Psi(v_i) = w_i$ para $i = 1, \dots, r$, onde ψ é definido como:

$$\psi(v)|_x = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \Psi(\exp(\varepsilon v), x) = d\Psi_x(v|_e) \quad . \tag{C.12}$$

Bibliografia

- [1] M. Hamermesh *Group Theory* (Addison - Wesley, 1962)
- [2] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, And Symmetric Spaces*, (Academic Press, 1978)
- [3] P. J. Olver, *Equivalence, Invariants, and Symmetry* (Cambridge, 1995)
- [4] P. J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, (Springer-Verlag, 1992)
- [5] R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, H. C. Morris, *Solitons and Nonlinear Wave Equations* (Academic Press, 1982)
- [6] G. L. Lamb, Jr., *Elements of Soliton Theory* (John Wiley & Sons, 1980)
- [7] A. Novick, L. A. Segel. *Physica* 10 D (1984) 277 - 298
- [8] D. Lovelock, H. Rund, *Tensors, Differential Forms, and Variational Principles* (John Wiley & Sons, 1975)
- [9] I. Anderson G. Thompson , *The Inverse Problem of the Calculus of Variations for Ordinary Differential Equations* (A. M. S. n 473, 1992)
- [10] N. H. Ibragimov, *Lie Group Analysis of Differential Equations* (CRC Press, 1994)
- [11] B. Fuchssteiner, *Progress of Theoretical Physics*, 70 (1983) 1508-1522
- [12] G. W. Blumam, S. Kumei, *Symmetries and Differential Equations* (Springer, 1996)

-
- [13] B. Fuchssteiner A. S. Fokas, *Physica* **4D** (1981) 47-66
 - [14] G. E. Bredon, *Topology and Geometry* (Spring-Verlag, 1993)
 - [15] S. C. Anco, G. Bluman, *Physical Review Letters*, 15 (1997) 2869-2873
 - [16] M. Golomb, M. Shanks, *Elements of Ordinary Differential Equations* (McGraw-Hill, 1965)
 - [17] G. S. Souza Ávila ,*Equações Diferenciais Parciais* (Impa, 1973)

