unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA



Representações matriciais de ordem 2 no estudo das sucessões de Fibonacci e de Lucas

Maria Eduarda dos Santos Chaves Quirino

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2026

Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Maria Eduarda dos Santos Chaves Quirino

Representações matriciais de ordem 2 no estudo das sucessões de Fibonacci e de Lucas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador
Prof. Dr. Lucas Antonio Caritá

Rio Claro/SP
2026

Q8r

Quirino, Maria Eduarda dos Santos Chaves
Representações matriciais de ordem 2 no estudo das sucessões de Fibonacci e de Lucas / Maria Eduarda dos Santos Chaves Quirino. -- Rio Claro, 2026
114 p. : tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Lucas Antonio Caritá

1. Números de Fibonacci. 2. Números de Lucas. 3. Matrizes. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Dados fornecidos pelo autor(a).

Impacto potencial desta pesquisa

Este trabalho contribui para a literatura ao estabelecer uma abordagem estruturada para o estudo de propriedades envolvendo as sequências de Fibonacci e de Lucas por meio de ferramentas matriciais. Com destaque para a introdução da relação

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix} = Q_L \cdot Q_F^{n-1},$$

que constitui uma propriedade central para diversas demonstrações inéditas desenvolvidas nesta dissertação. Outro aspecto relevante do trabalho são as demonstrações minuciosas das fórmulas de Binet para (F_n) e (L_n) por meio de abordagens matriciais distintas, também inéditas. Nesse contexto, são exploradas tanto as matrizes Q_F, Q_L, M e P quanto suas potências inteiras.

Além disso, o trabalho desenvolve uma base formal para congruência de matrizes e explora suas implicações no contexto das sequências estudadas. Essa abordagem amplia a análise de propriedades aritméticas, oferecendo uma via matricial, com destaque para o uso da matriz Q_L, na obtenção de novas demonstrações para resultados de divisibilidade.

Assim, espera-se que o conteúdo deste texto contribua para o aprofundamento da relação entre álgebra linear e teoria dos números, além de incentivar novas investigações com essa abordagem.

São frutos desta dissertação os artigos [1] e [2] e a apostila [3] referente ao minicurso ministrado na XI Bienal da Matemática.

Potential impact of this research

This work contributes to the literature by establishing a structured approach to the study of properties involving the Fibonacci and Lucas sequences through matrix tools. In particular, it introduces the relation

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix} = Q_L \cdot Q_F^{n-1},$$

which constitutes a central property for several original proofs developed in this dissertation.

Another relevant aspect of the work is the detailed proofs of Binet's formulas for (F_n) and (L_n) through distinct matrix-based approaches, which are also original. In this context, the matrices Q_F, Q_L, M, and P, as well as their integer powers, are explored.

In addition, the work develops a formal basis for matrix congruence and explores its implications in the context of the sequences studied. This approach broadens the analysis of arithmetic properties, offering a matrix-based path, with emphasis on the use of the matrix Q_L, to obtain new proofs of divisibility results.

Thus, it is expected that the content of this text will contribute to a deeper understanding of the relationship between linear algebra and number theory, as well as encourage further investigations using this approach.

The articles [1] and [2], as well as the booklet [3] for the minicourse taught at the XI Bienal da Matemática, are outcomes of this dissertation.

Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Maria Eduarda dos Santos Chaves Quirino

Representações matriciais de ordem 2 no estudo das sucessões de Fibonacci e de Lucas

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Lucas Antonio Caritá
Departamento de Matemática - IFSP

Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso
Departamento de Matemática - UNESP

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio
Departamento de Matemática - UFSCar

Conceito: Aprovado

Rio Claro (SP), 30 de março de 2025

Aos educadores que inspiraram minha trajetória acadêmica.

Agradecimentos

As pessoas que me marcaram no percurso deste trabalho tiveram um papel fundamental em sua concretização. Vou nomear aqui algumas; sem seu apoio, nada disso teria sido possível.

Agradeço, primeiramente, ao Lucas Antonio Caritá, pela sua orientação generosa, pela leitura minuciosa e criteriosa deste texto. Suas aulas de graduação e encontros no mestrado moldaram o meu fazer matemático e mais, me ensinaram como acender a luz mesmo nas horas mais sombrias. Agradeço por ser minha inspiração acadêmica e pessoal há tanto tempo.

Agradeço à Suzete Maria Silva Afonso, pelo seu apoio integral, pela inigualável atuação docente, exercida com profissionalismo, matemática referencial e uma sensível força empática. Agradeço por suas aulas e suas conversas, que me enriqueceram como matemática e pessoa.

Agradeço à Lorena Salvi Stringheta e Marina Fuzaro Magossi, pela presença verdadeira, independente da distância, que me amparou e tornou esse percurso divertido.

E por último, agradeço à Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – câmpus de Rio Claro e seu Programa de pós-graduação em Matemática, ao ensino público, gratuito e de altíssima qualidade.

Um dos aspectos infinitamente sedutores da Matemática é que os seus paradoxos mais espinhosos têm uma forma de florescer em teorias bonitas.
Philip Davis

Resumo

Neste trabalho, exploraremos as relações entre os números de Lucas e Fibonacci usando matrizes. Analisaremos as sequências de Fibonacci (F_n) e de Lucas (L_n) sob a ótica das $Q-$matrizes de Fibonacci e de Lucas, representadas por $Q_F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $Q_L = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, da M-matriz de Fibonacci, representada por $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, e da P-matriz auxiliar, representada por $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, uma vez que através da potenciação dessas matrizes, obtemos relações entre os termos das sequências mencionadas. Com o auxílio da álgebra matricial, demonstraremos conexões entre os termos das sequências (F_n) e (L_n), propriedades clássicas de divisibilidade, além de relações com o número de ouro.

Palavras-chave: Números de Fibonacci. Números de Lucas. Matrizes.

Abstract

In this work we will explore the relationships between the Lucas and Fibonacci numbers using matrices. We will analyze the Fibonacci sequence (F_n) and the Lucas sequence (L_n) from the viewpoint of the Fibonacci and Lucas Q-matrices, represented by $Q_F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ and $Q_L = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, the Fibonacci M-matrix, represented by $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, and the auxiliary P-matrix, represented by $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, since by taking powers of these matrices we obtain relations among the terms of the sequences mentioned. With the help of matrix algebra, we will demonstrate connections between the terms of (F_n) and (L_n), classical divisibility properties, and relations with the golden ratio.

Keywords: Fibonacci numbers. Lucas numbers. Matrices.

Lista de Tabelas

3.1 Primeiros meses de casais de coelhos no problema de Fibonacci. 42
3.2 Um ano de casais de coelhos no problema de Fibonacci. 42
3.3 Números de Fibonacci F_n, com $n \in \mathbb{Z}$. 47
3.4 Números de Lucas L_n, com $n \in \mathbb{Z}$. 47

Sumário

1 Introdução **13**

2 Matrizes Quadradas de Ordem 2 **18**
2.1 Matrizes 2×2 . . . 18
2.2 A estrutura de $M_2(\mathbb{R})$ . . . 19
2.3 Matrizes inversíveis e determinantes . . . 21
2.4 Potenciação e semelhança de matrizes . . . 24
2.5 Polinômio e equação característica . . . 26
2.6 Diagonalização . . . 27
2.7 Congruência de matrizes . . . 31

3 Números de Fibonacci e de Lucas **41**
3.1 Leonardo Fibonacci . . . 41
3.2 Édouard Lucas . . . 43
3.3 Jacques Binet . . . 43
3.4 Índices não-positivos . . . 46
3.5 Giovanni Cassini e algumas identidades . . . 48

4 Explorando as Q-Matrizes **51**
4.1 Q_F-matriz de Fibonacci . . . 51
4.1.1 Formalizando a expressão dos números de Fibonacci com índices não-positivos . . . 52
4.1.2 Q_F^n para qualquer n inteiro . . . 55
4.2 Q_L-matriz de Lucas . . . 56
4.2.1 Formalizando a expressão dos números de Lucas com índices não-positivos . . . 59
4.2.2 Q_L^n para qualquer n inteiro . . . 65
4.3 Identidades de Fibonacci e Lucas . . . 67
4.4 Polinômios característicos . . . 72
4.4.1 Polinômios de Fibonacci . . . 72
4.4.2 Polinômios de Lucas . . . 75

5 Explorando Outras Matrizes **80**
5.1 M-matriz de Fibonacci . . . 80
5.1.1 M^n para qualquer n inteiro . . . 81
5.1.2 Formalizando a expressão dos números de Fibonacci com índices não-positivos com a M-matriz . . . 82

5.2 Identidades de Fibonacci com a M-matriz 83
5.3 Polinômios característicos da M-matriz de Fibonacci 84
5.4 P-matriz 87
5.4.1 P^n para qualquer n inteiro 90
5.4.2 Relação entre a P-matriz e as Q-matrizes 90
5.5 Identidades de Fibonacci e Lucas com a P-matriz 91
5.6 Polinômios característicos da P-matriz de Fibonacci 95

6 Propriedades de Divisibilidade dos Números de Fibonacci e de Lucas 97
6.1 Divisibilidade e a matriz Q_F 97
6.2 Divisibilidade e a matriz Q_L 101

7 Considerações Finais 104

Referências 106

A Divisibilidade de Números Inteiros 108
A.1 Divisibilidade 108
A.2 Máximo divisor comum 110
A.3 Congruência módulo m 111

1 Introdução

A sequência de Fibonacci é uma das mais célebres da matemática. Desde que Leonardo de Pisa, também conhecido como Leonardo Fibonacci, a introduziu por meio do famoso problema dos coelhos no livro *Liber Abaci* [4], em 1202, ela tem atraído a atenção de matemáticos e pesquisadores ao longo dos séculos. Atualmente, essa sequência continua a desempenhar um papel crucial na pesquisa matemática, com aplicações em diversas áreas. A importância contínua desse tema é evidenciada pela existência da revista *The Fibonacci Quarterly*, dedicada, desde 1963, exclusivamente ao estudo dessa sequência e de sua matemática associada.

A sequência de Fibonacci é dada como segue:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

cada termo também é chamado de número de Fibonacci. O n-ésimo termo da sequência é denotado por F_n. Podemos obter qualquer termo da sequência somando os dois termos imediatamente anteriores: $F_{n+2} = F_n + F_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$.

Supondo que a lei de recorrência continua válida, podemos expandir a sequência para índices não-positivos. Podemos reescrever:

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}.$$

Assim, dados quaisquer dois números de Fibonacci consecutivos, podemos encontrar o número antecedente. Veja:

$$\begin{aligned}
&F_0 = F_2 - F_1 = 0;\\
&F_{-1} = F_1 - F_0 = 1;\\
&F_{-2} = F_0 - F_{-1} = -1;\\
&F_{-3} = F_{-1} - F_{-2} = 2;\\
&F_{-4} = F_{-2} - F_{-3} = -3;\\
&F_{-5} = F_{-3} - F_{-4} = 5;\\
&F_{-6} = F_{-4} - F_{-5} = -8;\\
&\vdots
\end{aligned}$$

É possível notar empiricamente que, dado n natural, $F_{-n} = \begin{cases} -F_n, & \text{se } n \text{ par} \\ F_n, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$, ou seja, $F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$. Comprovaremos este fato na Seção 4.1 do Capítulo 4. Fica estabelecida a sequência (F_n) para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Entretanto, apesar da publicação do problema que originou a sequência de Fibonacci ocorrer no início do século XIII, a sequência só ficou conhecida com esse nome no século XIX, graças aos estudos e publicações do matemático francês Édouard Lucas [5]. Lucas propôs sua própria sequência, com a mesma lei de recorrência, porém começando com 1 e 3. A sequência de Lucas é dada como segue:

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \ldots$$

cada termo também é chamado de número de Lucas. O n-ésimo termo da sequência é denotado por L_n. Podemos obter qualquer termo da sequência somando os dois termos imediatamente anteriores: $L_{n+2} = L_n + L_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$.

Supondo que a lei de recorrência continua válida, também podemos expandir a sequência de Lucas para índices não-positivos, da mesma forma como fizemos para Fibonacci. Podemos reescrever:

$$L_n = L_{n+2} - L_{n+1}.$$

Assim, dados quaisquer dois números de Lucas consecutivos, podemos encontrar o número antecedente. Veja:

$$\begin{aligned}
&L_0 = L_2 - L_1 = 2;\\
&L_{-1} = L_1 - L_0 = -1;\\
&L_{-2} = L_0 - L_{-1} = 3;\\
&L_{-3} = L_{-1} - L_{-2} = -4;\\
&L_{-4} = L_{-2} - L_{-3} = 7;\\
&L_{-5} = L_{-3} - L_{-4} = -11;\\
&L_{-6} = L_{-4} - L_{-5} = 18;\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Observando o padrão anterior, é possível notar empiricamente que, dado n natural, $L_{-n} = \begin{cases} L_n, & \text{se } n \text{ par} \\ -L_n, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$, ou seja, $L_{-n} = (-1)^n L_n$. Comprovaremos este fato na Seção 4.2 do Capítulo 4. Fica estabelecida a sequência (L_n) para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Entre as várias sequências que surgem ao modificar os termos iniciais da sequência de Fibonacci, a sequência de Lucas destaca-se como a mais proeminente. Uma razão para isso é a simplicidade de sua fórmula de Binet em comparação com a dos números de Fibonacci. As fórmulas de Binet, aliás, são consideradas um dos resultados mais significativos e versáteis desse tipo de sequências de recorrência, pois estabelecem uma ligação entre seus termos inteiros e potências do número de ouro, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, e seu conjugado, $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, ambos números irracionais. Para o n-ésimo número de Fibonacci a fórmula de Binet é dada por $F_n = \frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2}$ e para o n-ésimo número de Lucas é dada por $L_n = \phi^n + \phi_2^n$. Nesta dissertação, demonstraremos as fórmulas de Binet de várias maneiras diferentes.

As ferramentas que utilizaremos para a análise dessas sequências e de suas propriedades serão as Q-matrizes de Fibonacci e Lucas, a M-matriz de Fibonacci e a P-matriz auxiliar.

Em 1960, em sua dissertação de mestrado [6], Charles King introduziu a matriz $Q_F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. De fato, Basin e Hoggatt [5] fazem referência a essa fonte como a origem da Q-matriz de Fibonacci, e a partir dessa publicação sua utilização se popularizou entre os estudiosos da área. Diversos artigos foram publicados no *The Fibonacci Quarterly*,

escritos por Hoggatt, seus alunos e outros colaboradores, com o método da matriz. Nesta dissertação, mostraremos que $Q_F^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$, para $n \in \mathbb{Z}$, e buscaremos muitos outros resultados a partir disso.

Mais recentemente, em 2010, no artigo [7], Köken e Bozkurt apresentam a matriz $Q_L = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ como a Q-matriz de Lucas. E demonstram por indução que, para $n \in \mathbb{N}$, vale

$$Q_L^n = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}, & \text{se } n \text{ é par} \\ 5^{\frac{n-1}{2}} \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases},$$

nós faremos uma adaptação dessa demonstração e ampliaremos seu resultado para todo $n \in \mathbb{Z}$.

O uso dessas matrizes possibilita a aplicação de métodos de álgebra linear para o estudo das sequências, oferecendo uma abordagem distinta para analisar suas identidades e relações intrínsecas. Demonstraremos utilizando álgebra matricial, com $n \in \mathbb{Z}$, identidades amplamente conhecidas, como a Identidade de Cassini $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, sua equivalente para Lucas $L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = -5(-1)^n$, relações intrínsecas como $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ e $L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$, também propriedades percebidas por nós, em [1], tais como

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix} = Q_L \cdot Q_F^{n-1},$$

e outras.

A álgebra linear também nos propiciará analisar o polinômio característico de Q_F, $p_{Q_F}(x) = x^2 - x - 1$, obter seus autovalores, sendo eles $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, e autovetores associados, sendo eles respectivamente $\boldsymbol{v_1} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\phi} \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}^*$ e $\boldsymbol{v_2} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\phi_2} \end{bmatrix}$, com $\beta \in \mathbb{R}^*$. E, utilizando propriedades conhecidas da álgebra linear, poderemos relacionar os autovalores e autovetores de Q_F com autovalores e autovetores de Q_F^n para obter

$$Q_F^n = \begin{bmatrix} \frac{\phi^{n+1} - {\phi_2}^{n+1}}{\phi - \phi_2} & \frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2} \\ \frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2} & \frac{\phi^{n-1} - \phi_2^{n-1}}{\phi - \phi_2} \end{bmatrix},$$

propiciando uma demonstração alternativa da fórmula de Binet para números de Fibonacci.

Outra demonstração da fórmula de Binet será possível relacionando os autovalores de Q_F com os autovalores de Q_F^n, $\frac{F_n + 2F_{n-1} + F_n\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{F_n + 2F_{n-1} - F_n\sqrt{5}}{2}$, obtidos a partir do polinômio característico de Q_F^n, $p_{Q_F^n}(x) = x^2 - (F_{n+1} + F_{n-1})x + F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$.

A mesma análise poderá ser feita com o polinômio característico de Q_L, $p_{Q_L}(x) = x^2 - 5x + 5$, para obter seus autovalores, sendo eles $\varphi = \sqrt{5}\phi$ e $\varphi_2 = -\sqrt{5}\phi_2$, e autovetores associados, sendo eles respectivamente $\boldsymbol{w_1} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\phi} \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}^*$ e $\boldsymbol{w_2} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\phi_2} \end{bmatrix}$, com $\beta \in \mathbb{R}^*$. E, pelas mesmas propriedades utilizadas para relacionar os autovalores e autovetores

de Q_F com os de Q_F^n, relacionaremos os de Q_L com os de Q_L^n para obter

$$Q_L^n = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} \frac{\phi^{n+1}-\phi_2^{n+1}}{\phi-\phi_2} & \frac{\phi^n-\phi_2^n}{\phi-\phi_2} \\ \frac{\phi^n-\phi_2^n}{\phi-\phi_2} & \frac{\phi^{n-1}-\phi_2^{n-1}}{\phi-\phi_2} \end{bmatrix}, & \text{se } n \text{ par} \\ 5^{\frac{n-1}{2}} \begin{bmatrix} \phi^{n+1}+\phi_2^{n+1} & \phi^n+\phi_2^n \\ \phi^n+\phi_2^n & \phi^{n-1}+\phi_2^{n-1} \end{bmatrix}, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases},$$

propiciando uma demonstração alternativa da fórmula de Binet para números de Fibonacci e de Lucas.

Outra demonstração da fórmula de Binet, para números de Fibonacci e de Lucas, será possível relacionando os autovalores de Q_L com os autovalores de Q_L^n. Se n par, temos que o polinômio característico de Q_L^n é $p_{Q_L^n}(x) = x^2 - 5^{\frac{n}{2}}L_n x + 5^n(-1)^n$, e seus autovalores são $5^{\frac{n}{2}}\frac{L_n+F_n\sqrt{5}}{2}$ e $5^{\frac{n}{2}}\frac{L_n-F_n\sqrt{5}}{2}$. Se n ímpar, temos que o polinômio característico de Q_L^n é $p_{Q_L^n}(x) = x^2 - 5^{\frac{n+1}{2}}F_n x - 5^n(-1)^n$, e seus autovalores são $5^{\frac{n}{2}}\frac{F_n\sqrt{5}+L_n}{2}$ e $5^{\frac{n}{2}}\frac{F_n\sqrt{5}-L_n}{2}$.

Uma exposição mais detalhada dessas ideias, bem como as novas demonstrações da fórmula de Binet por meio da matriz Q_L, descritas acima, pode ser encontrada em [2].

Em 1983, no artigo [8], Sam Moore estudou a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Koshy [9] refere-se a essa matriz como estreitamente relacionada a Q_F. Nesta dissertação, mostraremos que $M^n = \begin{bmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{bmatrix}$, para $n \in \mathbb{Z}$, e partiremos desse fato para obter outros resultados.

A álgebra linear também nos propiciará analisar o polinômio característico de M, $p_M(x) = x^2 - 3x + 1$, obter seus autovalores, sendo eles $\phi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $\phi_2^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, e autovetores associados, respectivamente $\boldsymbol{t_1} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \phi \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}^*$, e $\boldsymbol{t_2} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$, com $\beta \in \mathbb{R}^*$. Como feito anteriormente, relacionaremos os autovalores e autovetores de M com os de M^n para obter

$$M^n = \begin{bmatrix} \frac{\phi^{2n-1}-\phi_2^{2n-1}}{\phi-\phi_2} & \frac{\phi^{2n}-\phi_2^{2n}}{\phi-\phi_2} \\ \frac{\phi^{2n}-\phi_2^{2n}}{\phi-\phi_2} & \frac{\phi^{2n+1}-\phi_2^{2n+1}}{\phi-\phi_2} \end{bmatrix},$$

propiciando uma demonstração alternativa da fórmula de Binet para números de Fibonacci.

Já em 1963, no artigo [10], Hoggatt e Ruggles introduziram a matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, onde exploram as propriedades geométricas envolvendo os vetores de Fibonacci, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{bmatrix}$, e os de Lucas, $\mathbf{o} = \begin{bmatrix} L_{n+1} \\ L_n \end{bmatrix}$. Nesta dissertação, mostraremos que, para $n \in \mathbb{Z}$,

$$P^n = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}}I, & \text{se } n \text{ é par} \\ 5^{\frac{n-1}{2}}P, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases},$$

estabeleceremos uma conexão com as Q-matrizes e demonstraremos outros resultados.

Por fim, demonstraremos relaçõe e propriedades clássicas de divisibilidade envolvendo os números de Fibonacci e de Lucas utilizando congruência de matrizes e as Q-matrizes.

O objetivo deste trabalho é estudar as relações entre os números de Fibonacci e de Lucas, assim como as propriedades de divisibilidade associadas a essas sequências, utilizando as matrizes Q_F, Q_L, M e P. No primeiro capítulo, apresentaremos os fundamentos

das matrizes 2×2 e o conceito de congruência de matrizes. Para a redação deste capítulo, foram consultadas as seguintes referências: [11], [12], [13], [14] e [15]. No segundo capítulo, introduziremos noções elementares sobre os números de Fibonacci e de Lucas, com menção a figuras históricas como Leonardo Fibonacci, Édouard Lucas, Jacques Philippe Marie Binet e Giovanni Domenico Cassini. Para a redação deste capítulo, foram consultadas as seguintes referências: [4], [5], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27]. No terceiro capítulo, estudaremos as matrizes Q_F e Q_L, determinando suas n-ésimas potências inteiras, polinômios característicos, autovalores e autovetores, e demonstrando as fórmulas de Binet dos números de Fibonacci e de Lucas por métodos matriciais de diversas maneiras que não foram encontradas na literatura. Resultados obtidos com a Q_L neste trabalho, possivelmente são inéditos, uma vez que essa matriz é recente e não encontramos publicações sobre ela além das dos autores originais em [7]. Para a redação deste capítulo, foram consultadas as seguintes referências: [6] e [7]. No quarto capítulo, estudaremos as matrizes M e P, determinando suas n-ésimas potências inteiras, polinômios característicos, autovalores e autovetores, e demonstrando a fórmula de Binet para números de Fibonacci por métodos matriciais, conteúdo este que não foi encontrado na literatura. Para a redação deste capítulo, foram consultadas as seguintes referências: [8], [9], [10] e [28]. No quinto capítulo, demonstraremos propriedades de divisibilidade envolvendo os números de Fibonacci e de Lucas usando as matrizes Q_F e Q_L.

2 Matrizes Quadradas de Ordem 2

Neste capítulo, abordaremos as matrizes 2×2, um tema que pode parecer, à primeira vista, bastante simples. No entanto, acreditamos que uma explicação cuidadosa destes pré-requisitos será essencial para o entendimento da abordagem que traremos para o estudo dos números de Lucas e de Fibonacci nos capítulos seguintes.

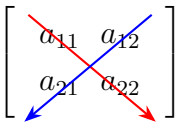
2.1 Matrizes 2×2

Uma matriz quadrada de ordem 2 com entradas reais é basicamente uma tabela de números reais com duas linhas e duas colunas, denotada por

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

onde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$. De modo geral, se pode definir uma matriz com entradas reais tipo $m \times n$ (lê-se m por n) como uma tabela retangular de números reais, com m linhas e n colunas. No caso em que $m = n$, a matriz é dita quadrada de ordem n. Em nosso estudo, focaremos no caso em que $m = n = 2$, pois apenas este tipo de matriz nos será útil neste trabalho, mas, o leitor interessado em se aprofundar no estudo de matrizes gerais, pode consultar a obra didática [11]. O conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem 2 com entradas reais será denotado neste texto como $M_2(\mathbb{R})$.

Dada $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, definimos como diagonal principal da matriz A, o conjunto dos elementos a_{ij} tais que $i = j$. Definimos, também, a diagonal secundária de A, como o conjunto dos elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1 = 3$. No caso em que estamos discutindo, com $n = 2$, isto equivale a dizer que a diagonal secundária de A consiste dos elementos que não pertencem à diagonal principal.



Diagonal secundária Diagonal principal

Definimos como traço de A, denotado por $tr(A)$, a soma dos elementos da diagonal principal, isto é, $tr(A) = a_{11} + a_{22}$.

Dizemos que duas matrizes $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ são iguais quando $a_{ij} = b_{ij}$ para quaisquer $i, j \in \{1, 2\}$.

Considerando o corpo $\mathbb{R}$, podemos definir o produto de um escalar real por uma matriz como

$$\beta \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta a_{11} & \beta a_{12} \\ \beta a_{21} & \beta a_{22} \end{bmatrix},$$

onde $\beta \in \mathbb{R}$ e $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Também, podemos definir duas operações internas em $M_2(\mathbb{R})$: adição e produto entre matrizes. Dadas $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, definimos

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Aqui podemos observar, com facilidade, que o produto entre matrizes não é comutativo. Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, então

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

e

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

dessa forma, $A \cdot B \neq B \cdot A$. Obviamente existem exceções, mas, de forma geral, não podemos afirmar que o produto comuta.

Existe um elemento neutro multiplicativo com relação ao produto de matrizes em $M_2(\mathbb{R})$, chamado matriz identidade, a saber,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

isto significa que $A \cdot I = I \cdot A = A$, para qualquer matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$. Em relação à adição, o elemento neutro é chamado de matriz nula, a saber,

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

o que significa que $A + O = O + A = A$, para qualquer matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$.

2.2 A estrutura de $M_2(\mathbb{R})$

Com a adição entre matrizes e o produto por escalar, o conjunto $M_2(\mathbb{R})$ forma um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$, ou seja, valem as propriedades:

1. $A + B = B + A, \quad \forall A, B \in M_2(\mathbb{R})$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C, \quad \forall A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$

3. $\exists! O \in M_2(\mathbb{R}) \mid A + O = A, \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R})$
4. $\forall A \in M_2(\mathbb{R}), \exists! - A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A + (-A) = O$
5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A, \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R})$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R})$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, \quad \forall A, B \in M_2(\mathbb{R})$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
8. $1A = A, \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R})$

Considerando as 4 primeiras propriedades apresentadas anteriormente, podemos afirmar que o conjunto $M_2(\mathbb{R})$ é um grupo abeliano com relação à operação aditiva. Além disso, complementando com o produto entre matrizes apresentado, temos que $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é um anel, não comutativo, com unidade. Isso ocorre porque também valem:

(a) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C, \quad \forall A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$

(b) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C, \quad \forall A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$

(c) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \quad \forall A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$

(d) $\exists! I \in M_2(\mathbb{R}) \mid A \cdot I = I \cdot A = A, \quad \forall A \in M_2(\mathbb{R})$

Um ponto interessante a ser observado sobre o conjunto $M_2(\mathbb{R})$ é que, com as operações usuais apresentadas, ele não possui estrutura de corpo. Além da não comutatividade em relação ao produto de matrizes, existem mais dois impeditivos:

(i) $M_2(\mathbb{R})$ possui divisores de zero. Isto significa dizer que é possível encontrar duas matrizes não-nulas $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ tais que seu produto resulte na matriz nula, isto é, $A \cdot B = O$, com $A \neq O$ e $B \neq O$.

Por exemplo, considere $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, obviamente nenhuma delas é nula. Todavia, perceba que

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O.$$

(ii) Nem toda matriz de $M_2(\mathbb{R})$ é inversível com relação ao produto de matrizes.

Dizemos que uma matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ é inversível, quando existe outra matriz em $M_2(\mathbb{R})$, denotada por A^{-1}, tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. As matrizes A e A^{-1} são ditas inversas uma da outra.

Vejamos um exemplo de matriz que não é inversível. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Para que A seja inversível, teria que existir uma outra matriz em $M_2(\mathbb{R})$, digamos $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tal que $A \cdot A^{-1} = I$. Porém, nesse caso, note que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c & b + d \\ a + c & b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} a + c = 1 \\ a + c = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} b + d = 0 \\ b + d = 1 \end{cases}.$$

Como os sistemas não possuem solução, segue que a inversa de A não existe, isto é, A não é inversível.

O leitor interessado em conhecer mais sobre tópicos em estruturas algébricas como grupos, anéis e corpos, pode conferir o livro [12]. Seguindo o nosso conteúdo, existe uma forma prática para verificar se uma matriz 2×2 é inversível, e, em caso afirmativo, calcular rapidamente a matriz inversa, como veremos na seção a seguir.

2.3 Matrizes inversíveis e determinantes

Vamos supor que $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ seja inversível. Determinemos os valores de x, y, z e t na matriz inversa $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$. Sabemos que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

sendo assim, temos

$$\begin{bmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Da equação (2.1), segue o sistema

$$\begin{cases} ax+bz=1 \\ cx+dz=0 \end{cases}, \tag{2.2}$$

o qual, multiplicando a primeira equação por c e a segunda por a, é equivalente à

$$\begin{cases} acx+bcz=c \\ acx+adz=0 \end{cases}.$$

Subtraindo as equações, chegamos em $(ad-bc)z = -c$. Existe solução única deste sistema se, e somente se, $ad-bc \neq 0$. Assim,

$$z = \frac{-c}{ad-bc}.$$

Substituindo o valor de z na segunda equação do sistema (2.2) e isolando o x, temos

$$x = \frac{d}{ad-bc}.$$

Da equação (2.1), também segue o sistema

$$\begin{cases} ay+bt=0 \\ cy+dt=1 \end{cases}, \tag{2.3}$$

o qual, multiplicando a primeira equação por c e a segunda por a, é equivalente à

$$\begin{cases} acy+bct=0 \\ acy+adt=a \end{cases}.$$

Subtraindo as equações, chegamos em $(ad - bc)t = a$. Como já estamos supondo $ad - bc \neq 0$, ocorre

$$t = \frac{a}{ad - bc}.$$

Substituindo o valor de t na primeira equação do sistema (2.3) e isolando y, temos

$$y = \frac{-b}{ad - bc}.$$

Desse modo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Com a dedução anterior, acabamos de estabelecer o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Uma matriz* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *é inversível se, e somente se,* $ad - bc \neq 0$. *Nesse caso, calcula-se a inversa fazendo* $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

A matriz $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ é chamada de matriz adjunta. Denotamos a matriz adjunta de A como adj(A).

O número real $ad - bc$, que figura no Teorema 2.1, é chamado de determinante da matriz A. Para uma matriz quadrada de ordem qualquer, uma bela e acessível discussão sobre a existência e a forma do determinante pode ser conferida em [13]. Mas, observe que, no caso das matrizes em $M_2(\mathbb{R})$, ele é o produto dos elementos da diagonal principal da matriz menos o produto dos elementos da diagonal secundária. Dada $A \in M_2(\mathbb{R})$, denotamos o determinante de A como $\det(A)$. No caso em que a matriz está na forma explícita, entre colchetes, para denotar o determinante trocamos os colchetes por barras, como segue:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \implies \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Segue, portanto, que uma matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é inversível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$. Em caso afirmativo, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

No caso da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, apresentada anteriormente, temos que seu determinante é igual a zero, o que confirma o que discutimos sobre ela não ser inversível. Agora, a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ possui como determinante o número -1, o que nos indica que ela é inversível e possui como inversa a matriz $\frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Como confirmação, note que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uma série de propriedades sobre determinantes pode ser demonstrada. O leitor pode encontrar uma lista interessante delas no apêndice do livro [14]. Provaremos aqui, para matrizes quadradas de ordem 2, algumas propriedades no teorema seguinte.

Teorema 2.2. *Dadas $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ e $\beta \in \mathbb{R}$:*

(a) $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$*;*

(b) $\det(\beta A) = \beta^2 \det(A)$*;*

(c) Se A for inversível, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Demonstração. Considere $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$.

(a)

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \det(A \cdot B) &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \\ &= \cancel{a_{11}b_{11}a_{21}b_{12}} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + \cancel{a_{12}b_{21}a_{22}b_{22}} \\ &\quad - \cancel{a_{11}b_{12}a_{21}b_{11}} - a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} - \cancel{a_{12}b_{22}a_{22}b_{21}} \\ &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21} \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\ &= \det(A)\det(B). \end{aligned}$$

(b)

$$\det(\beta A) = \beta a_{11}\beta a_{22} - \beta a_{21}\beta a_{12} = \beta^2(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = \beta^2 \det(A).$$

(c) Como $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$, considerando $\beta = \dfrac{1}{\det(A)}$ e usando o item (b), obtemos

$$\begin{aligned} \det(A^{-1}) &= \left(\frac{1}{\det(A)}\right)^2 \det\left(\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}\right) = \left(\frac{1}{\det(A)}\right)^2 (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= \frac{1}{(\det(A))^2} \det(A) = \frac{1}{\det(A)}. \end{aligned}$$

Outra maneira mais simples de demonstrar o item (c) é usando o item (a), pois sabendo que $A \cdot A^{-1} = I$, temos

$$1 = \det(I) = \det(A)\det(A^{-1}) \implies \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

□

O item (a) do Teorema 2.2 pode ser estendido, por indução, para n matrizes em $M_2(\mathbb{R})$.

Para finalizar essa seção, discutiremos sobre a inversa do produto de matrizes inversíveis.

Teorema 2.3. *Dadas $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ inversíveis, então o produto $A \cdot B$ também o é. Além disso, $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.*

Demonstração. Note que

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I,$$

ainda

$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = B^{-1} \cdot I \cdot B = B^{-1} \cdot B = I.$$

Logo, $A \cdot B$ é inversível e, como a matriz inversa é única, $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. □

O Teorema 2.3 pode ser estendido, por indução, para um produto com n matrizes inversíveis.

2.4 Potenciação e semelhança de matrizes

Ao se multiplicar uma matriz por ela mesma, é comum utilizar a notação de potenciação da seguinte forma: $A^0 = I$, $A^1 = A$ e $A^{n+1} = A^n \cdot A$, onde A é uma matriz não-nula qualquer em $M_2(\mathbb{R})$. Se A for inversível, também podemos estabelecer $A^{-n} = (A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$, onde $n \in \mathbb{N}$.

Dizemos que duas matrizes $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ são semelhantes, se existir uma matriz $S \in M_2(\mathbb{R})$ inversível, tal que $A = S \cdot B \cdot S^{-1}$. Nomearemos a matriz S de matriz de similaridade entre A e B.

Outra observação útil que podemos fazer é que se duas matrizes A e B são semelhantes, e uma delas for inversível, a outra também será. Suponha que $A = S \cdot B \cdot S^{-1}$ e que existe B^{-1}. Sendo assim, existe a matriz oriunda do produto $S \cdot B^{-1} \cdot S^{-1}$ e, como $(S \cdot B \cdot S^{-1})^{-1} = (S^{-1})^{-1} \cdot B^{-1} \cdot S^{-1} = S \cdot B^{-1} \cdot S^{-1}$, segue que $A^{-1} = (S \cdot B \cdot S^{-1})^{-1} = S \cdot B^{-1} \cdot S^{-1}$ existe.

Envolvendo potenciação e semelhança de matrizes, estabelecemos o seguinte resultado: se A é semelhante à B, então A^n é semelhante à B^n, para todo n inteiro. Adicionalmente, a matriz de similaridade entre A e B é a mesma entre A^n e B^n.

Teorema 2.4. *Considere $A, B, S \in M_2(\mathbb{R})$, onde S é inversível. Se $A = S \cdot B \cdot S^{-1}$, então $A^n = S \cdot B^n \cdot S^{-1}$, para todo n inteiro.*

Demonstração. Para $n = 0$, o resultado é trivial. Provaremos usando indução finita para n inteiro positivo.

(i) Para $n = 1$ e $n = 2$, o resultado é verdadeiro, pois temos que $A = S \cdot B \cdot S^{-1}$ (por hipótese) e também

$$\begin{aligned} A = S \cdot B \cdot S^{-1} &\implies A \cdot A = S \cdot B \cdot S^{-1} \cdot A \\ &\implies A^2 = S \cdot B \cdot S^{-1} \cdot (S \cdot B \cdot S^{-1}) \\ &\implies A^2 = S \cdot B \cdot (S^{-1} \cdot S) \cdot B \cdot S^{-1} \\ &\implies A^2 = S \cdot B^2 \cdot S^{-1}. \end{aligned}$$

(ii) Suponha que o resultado é válido para $n = k$, com $k > 2$, isto é, $A^k = S \cdot B^k \cdot S^{-1}$.

(iii) Provemos para $n = k + 1$. Partindo da hipótese de indução (ii), temos:

$$\begin{aligned} A^k = S \cdot B^k \cdot S^{-1} &\implies A^k \cdot A = S \cdot B^k \cdot S^{-1} \cdot A \\ &\implies A^{k+1} = S \cdot B^k \cdot S^{-1} \cdot (S \cdot B \cdot S^{-1}) \\ &\implies A^{k+1} = S \cdot B^k \cdot (S^{-1} \cdot S) \cdot B \cdot S^{-1} \\ &\implies A^{k+1} = S \cdot B^{k+1} \cdot S^{-1}. \end{aligned}$$

Por (i), (ii) e (iii), segue o resultado para n positivo. Para n inteiro negativo, basta notar que $n = -m$, onde $m \in \mathbb{N}$. Nesse caso, sabemos, pela indução anterior, que $A^m = S \cdot B^m \cdot S^{-1}$ e, então,

$$A^n = A^{-m} = (A^m)^{-1} = (S \cdot B^m \cdot S^{-1})^{-1} = (S^{-1})^{-1} \cdot B^{-m} \cdot S^{-1} = S \cdot B^n \cdot S^{-1},$$

isto é,

$$A^n = S \cdot B^n \cdot S^{-1}.$$

□

O próximo resultado refere-se ao determinante de uma n-ésima potência de uma matriz.

Teorema 2.5. *Dada $A \in M_2(\mathbb{R})$ não-nula, com $\det(A) \neq 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, então $\det(A^n) = (\det(A))^n$.*

Demonstração. Para $n = 0$, veja que, pela hipótese, $\det(A^0) = \det(I) = 1 = (\det(A))^0$.

Provaremos via indução finita para n inteiro positivo.

(i) Para $n = 1$, $\det(A^1) = \det(A) = (\det(A))^1$.

(ii) Assumimos que o resultado seja verdadeiro para $n = k$, com $k > 1$. Isto é, $\det(A^k) = (\det(A))^k$.

(iii) Mostremos que é verdadeiro para $n = k + 1$. De fato, $\det(A^{k+1}) = \det(A^k \cdot A)$.

Pelo Teorema 2.2,

$$\det(A^k \cdot A) = \det(A^k)\det(A) = (\det(A))^k(\det(A)) = (\det(A))^{k+1}.$$

Por (i), (ii) e (iii), provamos o resultado para n positivo.

Se n for negativo, então $n = -m$ com $m \in \mathbb{N}$. Da indução anterior sabemos que $\det(A^m) = (\det(A))^m$. Assim,

$$\det(A^n) = \det(A^{-m}) = \det((A^m)^{-1}) = \frac{1}{\det(A^m)} = \frac{1}{(\det(A))^m} = (\det(A))^{-m} = (\det(A))^n.$$

□

Para finalizar a seção provaremos que matrizes semelhantes possuem o mesmo determinante.

Teorema 2.6. *Dados $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ semelhantes, então $\det(A) = \det(B)$.*

Demonstração. Basta observar que $A = S \cdot B \cdot S^{-1}$, com $S \in M_2(\mathbb{R})$. Assim,

$$\det(A) = \det(S \cdot B \cdot S^{-1}) = \det(S)\det(B)\frac{1}{\det(S)} = \det(B).$$

□

2.5 Polinômio e equação característica

Dada $A \in M_2(\mathbb{R})$, o polinômio na variável x resultante da operação $\det(A - xI)$ é chamado de polinômio característico da matriz A, denotado neste texto por $p_A(x)$. Por sua vez, a equação $\det(A - xI) = 0$ recebe o nome de equação característica de A. As raízes da equação característica são chamadas de autovalores da matriz em questão.

Considerando $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, observe que

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - x\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-x \end{vmatrix} \\ &= (a_{11}-x)(a_{22}-x) - a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{11}x - a_{22}x + x^2 - a_{12}a_{21} \\ &= x^2 - (a_{11}+a_{22})x + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = x^2 - tr(A)x + \det(A), \end{aligned}$$

isto é, o polinômio característico de A é dado por

$$p_A(x) = x^2 - tr(A)x + \det(A).$$

Assim, a respectiva equação característica é $x^2 - tr(A)x + \det(A) = 0$.

Um dos resultados mais importantes referentes a equações características de matrizes é um teorema produzido pelos matemáticos A. Cayley (inglês) e W. R. Hamilton (irlandês) no século 19 [5]. Para entender o teorema, antes precisamos explicar o que significa dizer que uma matriz verifica uma equação. Focando em equações do segundo grau (pois são as que aparecerão no contexto em que estamos), dada uma equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, dizemos que uma matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ verifica tal equação quando $aA^2 + bA + cI = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Uma vez estabelecido isto, segue o resultado comentado.

Teorema 2.7 (Cayley-Hamilton)**.** *Toda matriz de $M_2(\mathbb{R})$ verifica a sua própria equação característica.*

Demonstração. Dada $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, temos $p_A(x) = x^2 - (a_{11}+a_{22})x + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} p_A(A) &= A^2 - (a_{11}+a_{22})A + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})I \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - (a_{11}+a_{22})\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22} & a_{21}a_{12} + a_{22}^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{11}a_{22} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{22}a_{21} & a_{11}a_{22} + a_{22}^2 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, $A \in M_2(\mathbb{R})$ verifica a sua própria equação característica. □

Agora demonstraremos um resultado que garante que matrizes semelhantes possuem polinômios característicos iguais.

Teorema 2.8. *Se $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ são semelhantes, então $p_A(x) = p_B(x)$.*

Demonstração. Temos que $A = S \cdot B \cdot S^{-1}$, para alguma matriz S inversível em $M_2(\mathbb{R})$. Assim,

$$\begin{aligned} A - xI = S \cdot B \cdot S^{-1} - xI &\implies S^{-1} \cdot (A - xI) = B \cdot S^{-1} - S^{-1} \cdot (xI) \\ &\implies S^{-1} \cdot (A - xI) \cdot S = B - S^{-1} \cdot (xI) \cdot S. \end{aligned}$$

Porém, note que $S^{-1} \cdot (xI) \cdot S = xI$, ou seja,

$$S^{-1} \cdot (A - xI) \cdot S = B - xI.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} p_B(x) &= \det(B - xI) = \det(S^{-1} \cdot (A - xI) \cdot S) \\ &= \frac{1}{\det(S)} \det(A - xI) \det(S) = \det(A - xI) = p_A(x). \end{aligned}$$

□

Observe que o Teorema 2.8 adicionalmente garante que os autovalores de matrizes semelhantes também são os mesmos.

2.6 Diagonalização

Dizemos que uma matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ é diagonalizável quando ela é semelhante a uma matriz diagonal $D \in M_2(\mathbb{R})$. Nesta seção, provaremos que toda matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ que possua dois autovalores distintos é diagonalizável. Encontraremos, também, uma forma explícita para a matriz de similaridade. Para isso, introduziremos o conceito de autovetores.

Considere $A \in M_2(\mathbb{R})$ e λ um autovalor de A. Um autovetor de A associado à λ é uma matriz coluna, $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, onde a e b não são simultaneamente nulos, tal que $A \cdot \boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$.

O produto $\lambda \boldsymbol{v}$ é definido como $\lambda \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}$. Por sua vez, considerando $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $A \cdot \boldsymbol{v}$ é definido como $A \cdot \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a_{11}a + a_{12}b \\ a_{21}a + a_{22}b \end{bmatrix}$.

Lema 2.9. *Sejam $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ autovetores de uma matriz A, associados à λ_1 e λ_2, respectivamente. Se $\boldsymbol{v} = \alpha \boldsymbol{w}$, então $\lambda_1 = \lambda_2$.*

Demonstração. Como $A \cdot \boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{v}$ e $A \cdot \boldsymbol{w} = \lambda_2 \boldsymbol{w}$,

$$\lambda_1 \boldsymbol{v} = A \cdot (\alpha \boldsymbol{w}) = \alpha (A \cdot \boldsymbol{w}) = \alpha (\lambda_2 \boldsymbol{w}) = \lambda_2 (\alpha \boldsymbol{w}) = \lambda_2 \boldsymbol{v}.$$

Assim,

$$\lambda_1 \boldsymbol{v} = \lambda_2 \boldsymbol{v} \implies (\lambda_1 - \lambda_2) \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}.$$

Uma vez que $\boldsymbol{v}$ não possui todas as entradas nulas, segue que $\lambda_1 = \lambda_2$. □

Lema 2.10. *Sejam* $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ *e* $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ *vetores não-nulos. A matriz* $P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{bmatrix}$ *tem determinante nulo se, e somente se,* $\boldsymbol{v}$ *e* $\boldsymbol{w}$ *são múltiplos escalares.*

Demonstração. Suponha $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ são múltiplos escalares, tal que $\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{w}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, sem perda de generalidade. Então

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha w_1 & w_1 \\ \alpha w_2 & w_2 \end{bmatrix},$$

e

$$\det(P) = (\alpha w_1)w_2 - w_1(\alpha w_2) = \alpha(w_1 w_2 - w_1 w_2) = 0.$$

Por outro lado, suponha que $\det(P) = 0$. Isso implica que $v_1 w_2 - w_1 v_2 = 0$.

O caso em que w_1 e w_2 são ambos não-nulos, temos

$$\frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2} = \alpha,$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Assim, $v_1 = \alpha w_1$ e $v_2 = \alpha w_2$, o que implica $\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{w}$.

Agora, consideremos o caso em que ou w_1 é nulo ou w_2 é nulo. Vamos assumir $w_2 = 0$ sem perda de generalidade, temos $w_1 \neq 0$ (pois $\boldsymbol{w}$ não é nulo). E de $v_1 w_2 - w_1 v_2 = 0$, segue

$$w_1 v_2 = 0,$$

como $w_1 \neq 0$, temos $v_2 = 0$. Isso implica que $\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{w}$, com $\alpha = \dfrac{v_1}{w_1} \in \mathbb{R}^*$.

Portanto $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ são múltiplos escalares se, e somente se, $\det(P) = 0$. □

Lema 2.11. *Sejam* $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ *e* $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ *vetores. Considere as matrizes* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *e* $P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{bmatrix}$*, então* $A \cdot P = \begin{bmatrix} A \cdot \boldsymbol{v} & A \cdot \boldsymbol{w} \end{bmatrix}$.

Demonstração.

$$A \cdot P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 & a_{11}w_1 + a_{12}w_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 & a_{21}w_1 + a_{22}w_2 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado,

$$A \cdot \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 \end{bmatrix}$$

e

$$A \cdot \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}w_1 + a_{12}w_2 \\ a_{21}w_1 + a_{22}w_2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $A \cdot P = \begin{bmatrix} A \cdot \boldsymbol{v} & A \cdot \boldsymbol{w} \end{bmatrix}$. □

Agora, temos as ferramentas para provar o seguinte resultado:

Teorema 2.12. *Seja* $A \in M_2(\mathbb{R})$ *com 2 autovalores distintos,* $\lambda_1 \neq \lambda_2$*, com autovetores* $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ *e* $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$*, respectivamente associados à* λ_1 *e* λ_2*. Então as matrizes* $P = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{bmatrix}$ *e* $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ *são tais que* $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Demonstração. Usando o Lema 2.11, como $A \cdot \boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{v}$ e $A \cdot \boldsymbol{w} = \lambda_2 \boldsymbol{w}$, segue que

$$A \cdot P = A \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} & \boldsymbol{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \cdot \boldsymbol{v} & A \cdot \boldsymbol{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{v} & \lambda_2 \boldsymbol{w} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 & \lambda_2 w_1 \\ \lambda_1 v_2 & \lambda_2 w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = P \cdot D.$$

Pelo Lema 2.9, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ não são múltiplos. Pela contrapositiva do Lema 2.10, a matriz $\begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix}$ tem determinante não-nulo. Então, pelo Teorema 2.1, a matriz P é inversível.

Segue,

$$A \cdot P = P \cdot D \implies P^{-1} \cdot A \cdot P = P^{-1} \cdot P \cdot D \implies D = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

□

O Teorema 2.12 nos diz que se uma matriz 2×2 possuir 2 autovalores distintos, então ela será diagonalizável, uma vez que será semelhante a matriz diagonal, cuja a diagonal principal é formada pelos autovalores em questão. Nesse caso, a matriz de similaridade P, cujas colunas são os autovetores, é chamada de matriz diagonalizadora.

A seguir apresentamos outros resultados que nos serão úteis ao longo do texto.

Teorema 2.13. *Dado um autovalor λ de uma matriz A, se $\boldsymbol{v}$ for um autovetor associado à λ, então $\alpha\boldsymbol{v}$ também será.*

Demonstração. Por hipótese, $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$. Assim:

$$A(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha(A\boldsymbol{v}) = \alpha(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda(\alpha\boldsymbol{v}),$$

ou seja, $\alpha\boldsymbol{v}$ também é autovetor associado à λ. □

Teorema 2.14. *Dados a e b não-nulos e $n \in \mathbb{Z}$, então* $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$.

Demonstração. Para $n = 0$, temos

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^0 & 0 \\ 0 & b^0 \end{bmatrix}.$$

Provaremos via indução finita para n inteiro positivo.

(i) Para $n = 1$,

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1 & 0 \\ 0 & b^1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Assumimos que o resultado seja verdadeiro para $n = k$, com $k > 1$, isto é,

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix}.$$

(iii) Provaremos para $n = k + 1$. De fato,

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^{k} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^{1} = \begin{bmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^k \cdot a & 0 \\ 0 & b^k \cdot b \end{bmatrix},$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} a^{k+1} & 0 \\ 0 & b^{k+1} \end{bmatrix}.$$

Por indução, o resultado vale para n positivo. Para n negativo, temos que $n = -m$, onde $m \in \mathbb{N}$. Note que

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}.$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^{n} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^{-m} = \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^{-1} \right)^{m} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}^{m}.$$

Como m é positivo, pela indução anterior,

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}^{n} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{a}\right)^m & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{b}\right)^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{-m} & 0 \\ 0 & b^{-m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}.$$

□

Teorema 2.15. *Os autovalores de uma matriz A^n, com $n \in \{0, 1, 2, \cdots\}$, são da forma λ^n, onde λ são autovalores de A. Caso A seja inversível, o resultado vale para $n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Seja $\boldsymbol{v}$ um autovetor de A associado à λ. Assim, $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$. Verifiquemos que $A^n\boldsymbol{v} = \lambda^n\boldsymbol{v}$ para $n \in \mathbb{Z}$. Se $n = 0$, $A^0\boldsymbol{v} = I\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} = 1\boldsymbol{v} = \lambda^0\boldsymbol{v}$. Para n inteiro positivo, usemos indução.

(i) Para $n = 1$, por hipótese $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$, ou seja, $A^1\boldsymbol{v} = \lambda^1\boldsymbol{v}$.

(ii) Suponha que a propriedade seja verdadeira para $n = k$, com $k \geq 1$, isto é, $A^k\boldsymbol{v} = \lambda^k\boldsymbol{v}$.

(iii) Provaremos que a propriedade é verdadeira para $n = k + 1$. De fato,

$$A^{k+1}\boldsymbol{v} = A^k(A\boldsymbol{v}) = A^k(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda(A^k\boldsymbol{v}),$$

pela hipótese de indução (ii):

$$A^{k+1}\boldsymbol{v} = \lambda(\lambda^k\boldsymbol{v}) = (\lambda\lambda^k)\boldsymbol{v} = \lambda^{k+1}\boldsymbol{v}.$$

Por (i), (ii) e (iii), por indução, estabelecemos a propriedade para n inteiro positivo e A qualquer.

Caso A seja inversível, podemos estudar o que ocorre com n inteiro negativo. Primeiramente note que $\frac{1}{\lambda}$ é autovalor de A^{-1}, pois:

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} &\implies A^{-1} \cdot A\boldsymbol{v} = A^{-1}(\lambda\boldsymbol{v}) \\ &\implies \boldsymbol{v} = \lambda(A^{-1}\boldsymbol{v}) \\ &\implies A^{-1}\boldsymbol{v} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{v}. \end{aligned}$$

Agora, sendo n inteiro negativo, $n = -m$, onde $m \in \mathbb{N}$. Então:

$$A^n \boldsymbol{v} = A^{-m} \boldsymbol{v} = (A^{-1})^m \boldsymbol{v},$$

pela indução anterior:

$$A^n \boldsymbol{v} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^m \boldsymbol{v} = \lambda^{-m} \boldsymbol{v} = \lambda^n \boldsymbol{v}.$$

□

Há muitos conceitos interessantes sobre matrizes quadradas que poderíamos explorar no caso específico de matrizes 2×2. No entanto, nosso objetivo neste momento é apenas fornecer os pré-requisitos necessários para conectar a teoria matricial com as sucessões de Lucas e de Fibonacci. Convidamos o leitor mais curioso, que deseja aprofundar seus conhecimentos sobre matrizes, a consultar as obras [11] e [13], por exemplo.

Na próxima seção, definiremos o conceito de congruência entre matrizes. Ressaltamos que a literatura específica sobre congruências matriciais é escassa e buscamos estabelecer uma base sólida para fazer uso no Capítulo 6.

2.7 Congruência de matrizes

Dadas duas matrizes $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$, com entradas a_{ij} e b_{ij} respectivamente, e $m \in \mathbb{Z}$, dizemos que a matriz A é congruente a matriz B módulo m se $a_{ij} \equiv b_{ij} \pmod{m}$, para $i, j \in \{1, 2\}$. Denotamos $A \equiv B \pmod{m}$.

A congruência modular no conjunto $M_2(\mathbb{R})$ é uma extensão natural da congruência entre inteiros, revisada sucintamente no Apêndice A, seguindo a mesma lógica, porém operando de entrada a entrada. Assim, a relação $A \equiv B \pmod{m}$ impõe que cada componente a_{ij} seja congruente a b_{ij}, o que permite transpor as propriedades aritméticas escalares para a álgebra matricial.

A congruência matricial $A \equiv B \pmod{m}$ fornece uma maneira sucinta de expressar as 4 congruências $a_{ij} \equiv b_{ij} \pmod{m}$ para $i, j \in \{1, 2\}$.

Proposição 2.16. *A congruência módulo $m \in \mathbb{Z}$, com $m \geq 2$, define uma relação de equivalência em $M_2(\mathbb{Z})$.*

Demonstração. Sejam $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z})$, com entradas a_{ij}, b_{ij} e c_{ij} respectivamente, $m \in \mathbb{Z}$ e $m \geq 2$. Se $A \equiv B \pmod{m}$ e $B \equiv C \pmod{m}$, então

$$a_{11} - b_{11} = p_1 m, \tag{2.4}$$

$$a_{12} - b_{12} = p_2 m, \tag{2.5}$$

$$a_{21} - b_{21} = p_3 m, \tag{2.6}$$

$$a_{22} - b_{22} = p_4 m, \tag{2.7}$$

$$b_{11} - c_{11} = p_5 m, \tag{2.8}$$

$$b_{12} - c_{12} = p_6 m, \tag{2.9}$$

$$b_{21} - c_{21} = p_7 m, \tag{2.10}$$

$$b_{22} - c_{22} = p_8 m, \tag{2.11}$$

onde $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8 \in \mathbb{Z}$.

(i) Reflexividade: De fato,

$$a_{11} - a_{11} = 0, \tag{2.12}$$

$$a_{12} - a_{12} = 0, \tag{2.13}$$

$$a_{21} - a_{21} = 0, \tag{2.14}$$

$$a_{22} - a_{22} = 0. \tag{2.15}$$

Portanto, das equações (2.12), (2.13), (2.14) e (2.15),

$$A \equiv A \pmod{m}.$$

(ii) Simetria: Da equação (2.4)

$$-(a_{11} - b_{11}) = -p_1 m \implies b_{11} - a_{11} = -p_1 m,\ -p_1 \in \mathbb{Z}. \tag{2.16}$$

Da equação (2.5)

$$-(a_{12} - b_{12}) = -p_2 m \implies b_{12} - a_{12} = -p_2 m,\ -p_2 \in \mathbb{Z}. \tag{2.17}$$

Da equação (2.6)

$$-(a_{21} - b_{21}) = -p_3 m \implies b_{21} - a_{21} = -p_3 m,\ -p_3 \in \mathbb{Z}. \tag{2.18}$$

Da equação (2.7)

$$-(a_{22} - b_{22}) = -p_4 m \implies b_{22} - a_{22} = -p_4 m,\ -p_4 \in \mathbb{Z}. \tag{2.19}$$

Portanto, das equações (2.16), (2.17), (2.18) e (2.19),

$$B \equiv A \pmod{m}.$$

(iii) Transitividade: Somando as equações (2.4) e (2.8),

$$a_{11} - b_{11} + b_{11} - c_{11} = p_1 m + p_5 m \implies a_{11} - c_{11} = (p_1 + p_5)m,\ p_1 + p_5 \in \mathbb{Z},$$

ou seja

$$a_{11} \equiv c_{11} \pmod{m}. \tag{2.20}$$

Somando as equações (2.5) e (2.9),

$$a_{12} - b_{12} + b_{12} - c_{12} = p_2 m + p_6 m \implies a_{12} - c_{12} = (p_2 + p_6)m,\ p_2 + p_6 \in \mathbb{Z},$$

ou seja,

$$a_{12} \equiv c_{12} \pmod{m}. \tag{2.21}$$

Somando as equações (2.6) e (2.10),

$$a_{21} - b_{21} + b_{21} - c_{21} = p_3 m + p_7 m \implies a_{21} - c_{21} = (p_3 + p_7)m,\ p_3 + p_7 \in \mathbb{Z},$$

ou seja,

$$a_{21} \equiv c_{21} \pmod{m}. \tag{2.22}$$

Somando as equações (2.7) e (2.11)

$$a_{22} - b_{22} + b_{22} - c_{22} = p_4 m + p_8 m \implies a_{22} - c_{22} = (p_4 + p_8)m,\ p_4 + p_8 \in \mathbb{Z},$$

ou seja,

$$a_{22} \equiv c_{22} \pmod{m}. \tag{2.23}$$

Portanto, das equações (2.20), (2.21), (2.22) e (2.23),

$$A \equiv C \pmod{m}.$$

Conclui-se que a congruência módulo m define uma relação de equivalência em $M_2(\mathbb{Z})$. □

Propriedade 2.17. Sejam $A, B, C, D \in M_2(\mathbb{Z})$, com entradas a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} e d_{ij} respectivamente, $m, k, x, y \in \mathbb{Z}$, com $m \geq 2$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $A \equiv B \pmod{m}$, $C \equiv D \pmod{m}$ e $x \equiv y \pmod{m}$, então

(a) $A + C \equiv B + D \pmod{m}$;

(b) $kA \equiv kB \pmod{m}$;

(c) $A \cdot C \equiv B \cdot D \pmod{m}$;

(d) $A^n \equiv B^n \pmod{m}$.

(e) $\det(A) \equiv \det(B) \pmod{m}$

(f) $xA \equiv yB \pmod{m}$

Demonstração. Da hipótese,

$$a_{11} - b_{11} = p_1 m, \tag{2.24}$$
$$a_{12} - b_{12} = p_2 m, \tag{2.25}$$
$$a_{21} - b_{21} = p_3 m, \tag{2.26}$$
$$a_{22} - b_{22} = p_4 m, \tag{2.27}$$
$$c_{11} - d_{11} = p_5 m, \tag{2.28}$$
$$c_{12} - d_{12} = p_6 m, \tag{2.29}$$
$$c_{21} - d_{21} = p_7 m, \tag{2.30}$$
$$c_{22} - d_{22} = p_8 m, \tag{2.31}$$

onde $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8 \in \mathbb{Z}$.

(a) De fato,

$$\begin{aligned} A + C - (B + D) &= \begin{bmatrix} a_{11} + c_{11} - (b_{11} + d_{11}) & a_{12} + c_{12} - (b_{12} + d_{12}) \\ a_{21} + c_{21} - (b_{21} + d_{21}) & a_{22} + c_{22} - (b_{22} + d_{22}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} + c_{11} - d_{11} & a_{12} - b_{12} + c_{12} - d_{12} \\ a_{21} - b_{21} + c_{21} - d_{21} & a_{22} - b_{22} + c_{22} - d_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Substituindo as entradas da matriz $A + C - (B + D)$ de acordo com as equações (2.24), (2.25), (2.26), (2.27), (2.28), (2.29), (2.30) e (2.31)

$$\begin{aligned} A + C - (B + D) &= \begin{bmatrix} p_1m + p_5m & p_2m + p_6m \\ p_3m + p_7m & p_4m + p_8m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (p_1 + p_5)m & (p_2 + p_6)m \\ (p_3 + p_7)m & (p_4 + p_8)m \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Reescrevendo $(p_1 + p_5) = p'_1,\ (p_2 + p_6) = p'_2,\ (p_3 + p_7) = p'_3,\ (p_4 + p_8) = p'_4 \in \mathbb{Z}$, temos

$$A + C - (B + D) = \begin{bmatrix} p'_1m & p'_2m \\ p'_3m & p'_4m \end{bmatrix}.$$

Assim $m \mid (A+C-(B+D))_{11},\ m \mid (A+C-(B+D))_{12},\ m \mid (A+C-(B+D))_{21}$ e $m \mid (A+C-(B+D))_{22}$, onde $(A+C-(B+D))_{ij}$ indica a entrada posicionada i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz $A+C-(B+D)$. Portanto, $A+C \equiv B+D \pmod{m}$.

(b) Considere a diferença entre as matrizes kA e kB. Pela definição de produto por escalar, temos:

$$kA - kB = \begin{bmatrix} ka_{11} - kb_{11} & ka_{12} - kb_{12} \\ ka_{21} - kb_{21} & ka_{22} - kb_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k(a_{11} - b_{11}) & k(a_{12} - b_{12}) \\ k(a_{21} - b_{21}) & k(a_{22} - b_{22}) \end{bmatrix}.$$

Substituindo as entradas de acordo com as equações (2.24), (2.25), (2.26) e (2.27):

$$kA - kB = \begin{bmatrix} k(p_1m) & k(p_2m) \\ k(p_3m) & k(p_4m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (kp_1)m & (kp_2)m \\ (kp_3)m & (kp_4)m \end{bmatrix}.$$

Como $kp_1, kp_2, kp_3, kp_4 \in \mathbb{Z}$, cada entrada da matriz resultante é um múltiplo de m. Assim, $m \mid (kA - kB)_{ij}$, onde $(kA - kB)_{ij}$ indica a entrada posicionada i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz $kA - kB$, o que prova que $kA \equiv kB \pmod{m}$.

(c) De fato,

$$\begin{aligned} A \cdot C - B \cdot D &= \begin{bmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11}d_{11} + b_{12}d_{21} & b_{11}d_{12} + b_{12}d_{22} \\ b_{21}d_{11} + b_{22}d_{21} & b_{21}d_{12} + b_{22}d_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} - b_{11}d_{11} - b_{12}d_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} - b_{11}d_{12} - b_{12}d_{22} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} - b_{21}d_{11} - b_{22}d_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} - b_{21}d_{12} - b_{22}d_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $a_{11}d_{11}$ e $a_{12}d_{21}$ na entrada localizada na primeira linha e primeira coluna da matriz $A \cdot C - B \cdot D$, temos

$$(A \cdot C - B \cdot D)_{11} = a_{11}(c_{11} - d_{11}) + a_{12}(c_{21} - d_{21}) + d_{11}(a_{11} - b_{11}) + d_{21}(a_{12} - b_{12}).$$

Substituindo $c_{11} - d_{11}$, $a_{11} - b_{11}$, $c_{21} - d_{21}$ e $a_{12} - b_{12}$ de acordo com as equações (2.24), (2.25), (2.28) e (2.30),

$$\begin{aligned} (A \cdot C - B \cdot D)_{11} &= a_{11}(p_5m) + d_{11}(p_1m) + a_{12}(p_7m) + d_{21}(p_2m) \\ &= m(a_{11}p_5 + d_{11}p_1 + a_{12}p_7 + d_{21}p_2). \end{aligned}$$

Reescrevendo $(a_{11}p_5 + d_{11}p_1 + a_{12}p_7 + d_{21}p_2) = p'_1 \in \mathbb{Z}$, temos $(A \cdot C - B \cdot D)_{11} = mp'_1$ e assim $m \mid (A \cdot C - B \cdot D)_{11}$.

Somando e subtraindo $a_{11}d_{12}$ e $a_{12}d_{22}$ na entrada localizada na primeira linha e segunda coluna da matriz $A \cdot C - B \cdot D$, temos

$$(A \cdot C - B \cdot D)_{12} = a_{11}(c_{12} - d_{12}) + a_{12}(c_{22} - d_{22}) + d_{12}(a_{11} - b_{11}) + d_{22}(a_{12} - b_{12}).$$

Substituindo $c_{12} - d_{12}$, $c_{22} - d_{22}$, $a_{11} - b_{11}$ e $a_{12} - b_{12}$ de acordo com as equações (2.24), (2.25), (2.29) e (2.31),

$$\begin{aligned}(A \cdot C - B \cdot D)_{12} &= a_{11}(p_6 m) + a_{12}(p_8 m) + d_{12}(p_1 m) + d_{22}(p_2 m) \\ &= m(a_{11}p_6 + a_{12}p_8 + d_{12}p_1) + d_{22}p_2).\end{aligned}$$

Reescrevendo $(a_{11}p_6 + a_{12}p_8 + d_{12}p_1) + d_{22}p_2) = p'_2 \in \mathbb{Z}$, temos $(AC - BD)_{12} = mp'_2$ e assim $m \mid (A \cdot C - B \cdot D)_{12}$.

Somando e subtraindo $a_{21}d_{11}$ e $a_{22}d_{21}$ na entrada localizada na segunda linha e primeira coluna da matriz $A \cdot C - B \cdot D$, temos

$$(A \cdot C - B \cdot D)_{21} = a_{21}(c_{11} - d_{11}) + a_{22}(c_{21} - d_{21}) + d_{11}(a_{21} - b_{21}) + d_{21}(a_{22} - b_{22}).$$

Substituindo $c_{11} - d_{11}$, $c_{21} - d_{21}$, $a_{21} - b_{21}$ e $a_{22} - b_{22}$ de acordo com as equações (2.26), (2.27), (2.28) e (2.30),

$$\begin{aligned}(A \cdot C - B \cdot D)_{21} &= a_{21}(p_5 m) + a_{22}(p_7 m) + d_{11}(p_3 m) + d_{21}(p_4 m) \\ &= m(a_{21}p_5 + a_{22}p_7 + d_{11}p_3 + d_{21}p_4).\end{aligned}$$

Reescrevendo $(a_{21}p_5 + a_{22}p_7 + d_{11}p_3 + d_{21}p_4) = p'_3 \in \mathbb{Z}$, temos $(A \cdot C - B \cdot D)_{21} = mp'_3$ e assim $m \mid (A \cdot C - B \cdot D)_{21}$.

Somando e subtraindo $a_{21}d_{12}$ e $a_{22}d_{22}$ na entrada localizada na segunda linha e segunda coluna da matriz $A \cdot C - B \cdot D$, temos

$$(A \cdot C - B \cdot D)_{22} = a_{21}(c_{12} - d_{12}) + a_{22}(c_{22} - d_{22}) + d_{12}(a_{21} - b_{21}) + d_{22}(a_{22} - b_{22}).$$

Substituindo $c_{12} - d_{12}$, $c_{22} - d_{22}$, $a_{21} - b_{21}$ e $a_{22} - b_{22}$ de acordo com as equações (2.26), (2.27), (2.29) e (2.31),

$$\begin{aligned}(A \cdot C - B \cdot D)_{22} &= a_{21}(p_6 m) + a_{22}(p_8 m) + d_{12}(p_3 m) + d_{22}(p_4 m) \\ &= m(a_{21}p_6 + a_{22}p_8 + d_{12}p_3 + d_{22}p_4).\end{aligned}$$

Reescrevendo $(a_{21}p_6 + a_{22}p_8 + d_{12}p_3 + d_{22}p_4) = p'_4 \in \mathbb{Z}$, temos $(A \cdot C - B \cdot D)_{22} = mp'_4$ e assim $m \mid (A \cdot C - B \cdot D)_{22}$.

Portanto, $A \cdot C \equiv B \cdot D \pmod{m}$.

(d) Provaremos via indução finita para $n \in \mathbb{N}$.

(i) Para $n = 1$ e $n = 2$, o resultado é verdadeiro, pois temos que $A \equiv B \pmod{m}$ (por hipótese) e também, pelo item (b),

$$\begin{aligned}A \equiv B \pmod{m} &\implies A \cdot A \equiv B \cdot B \pmod{m} \\ &\implies A^2 \equiv B^2 \pmod{m}.\end{aligned}$$

(ii) Suponha que o resultado é válido para $n = k$, com $k > 2$, isto é, $A^k \equiv B^k \pmod{m}$.

(iii) Provemos para $n = k + 1$. Partindo da hipótese de indução (ii) e do item (b), temos:

$$\begin{aligned} A^k \equiv B^k \pmod{m} &\implies A^k \cdot A \equiv B^k \cdot B \pmod{m} \\ &\implies A^{k+1} \equiv B^{k+1} \pmod{m}. \end{aligned}$$

Por (i), (ii) e (iii), segue o resultado para $n \in \mathbb{N}$.

(e) Temos:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

e

$$\det(B) = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}.$$

Uma vez que $A \equiv B \pmod{m}$, temos $a_{11} \equiv b_{11} \pmod{m}$, $a_{22} \equiv b_{22} \pmod{m}$, $a_{12} \equiv b_{12} \pmod{m}$ e $a_{21} \equiv b_{21} \pmod{m}$. Pela Propriedade A.8, itens (c) e (d):

$$a_{11}a_{22} \equiv b_{11}b_{22} \pmod{m}$$

e

$$-a_{12}a_{21} \equiv -b_{12}b_{21} \pmod{m}.$$

Pela Propriedade A.8(a), obtemos:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \equiv b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \pmod{m} \implies \det(A) \equiv \det(B) \pmod{m}.$$

(f) Da hipótese

$$x - y = qm,\ q \in \mathbb{Z}. \tag{2.32}$$

De fato,

$$\begin{aligned} xA - yB &= \begin{bmatrix} xa_{11} & xa_{12} \\ xa_{21} & xa_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} yb_{11} & yb_{12} \\ yb_{21} & yb_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} xa_{11} - yb_{11} & xa_{12} - yb_{12} \\ xa_{21} - yb_{21} & xa_{22} - yb_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Somando e subtraindo ya_{11} na entrada localizada na primeira linha e primeira coluna da matriz $xA - yB$, temos

$$\begin{aligned} (xA - yB)_{11} &= xa_{11} - ya_{11} + ya_{11} - yb_{11} \\ &= a_{11}(x - y) + y(a_{11} - b_{11}). \end{aligned}$$

Substituindo $a_{11} - b_{11}$ e $x - y$ de acordo com as equações (2.24) e (2.32) respectivamente,

$$\begin{aligned} (xA - yB)_{11} &= a_{11}(qm) + y(p_1 m) \\ &= (a_{11}q + yp_1)m,\ a_{11}q + yp_1 \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Assim $m \mid (xA - yB)_{11}$.

Somando e subtraindo ya_{12} na entrada localizada na primeira linha e segunda coluna da matriz $xA - yB$, temos

$$\begin{aligned}(xA - yB)_{12} &= xa_{12} - ya_{12} + ya_{12} - yb_{12} \\ &= a_{12}(x - y) + y(a_{12} - b_{12}).\end{aligned}$$

Substituindo $a_{12} - b_{12}$ e $x - y$ de acordo com as equações (2.25) e (2.32) respectivamente,

$$\begin{aligned}(xA - yB)_{12} &= a_{12}(qm) + y(p_2 m) \\ &= (a_{12}q + yp_2)m,\ a_{12}q + yp_2 \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Assim $m \mid (xA - yB)_{12}$.

Somando e subtraindo ya_{21} na entrada localizada na segunda linha e primeira coluna da matriz $xA - yB$, temos

$$\begin{aligned}(xA - yB)_{21} &= xa_{21} - ya_{21} + ya_{21} - yb_{21} \\ &= a_{21}(x - y) + y(a_{21} - b_{21}).\end{aligned}$$

Substituindo $a_{21} - b_{21}$ e $x - y$ de acordo com as equações (2.26) e (2.32) respectivamente,

$$\begin{aligned}(xA - yB)_{21} &= a_{21}(qm) + y(p_3 m) \\ &= (a_{21}q + yp_3)m,\ a_{21}q + yp_3 \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Assim $m \mid (xA - yB)_{21}$.

Somando e subtraindo ya_{22} na entrada localizada na segunda linha e segunda coluna da matriz $xA - yB$, temos

$$\begin{aligned}(xA - yB)_{22} &= xa_{22} - ya_{22} + ya_{22} - yb_{22} \\ &= a_{22}(x - y) + y(a_{22} - b_{22}).\end{aligned}$$

Substituindo $a_{22} - b_{22}$ e $x - y$ de acordo com as equações (2.27) e (2.32) respectivamente,

$$\begin{aligned}(xA - yB)_{22} &= a_{22}(qm) + y(p_4 m) \\ &= (a_{22}q + yp_4)m,\ a_{22}q + yp_4 \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Assim $m \mid (xA - yB)_{22}$.

Portanto, $xA \equiv yB \pmod{m}$.

□

As propriedades enumeradas anteriormente consolidam a viabilidade de operar com matrizes sob a relação de congruência, garantindo que as operações fundamentais de adição, multiplicação por escalar e produto de matrizes preservem a estrutura modular.

Na análise de divisibilidade, frequentemente busca-se simplificar a configuração de uma matriz para isolar termos de interesse. A propriedade a seguir apresenta a matriz adjunta como uma ferramenta estratégica para esse fim, permitindo que qualquer matriz $A \in M_2(\mathbb{Z})$ seja relacionada a uma forma diagonal módulo m.

Propriedade 2.18. Considere $A \in M_2(\mathbb{Z})$ e $m \in \mathbb{Z}$ com $m \geq 2$. Então é verdade que $A \cdot \text{adj}(A) \equiv \det(A)I \pmod{m}$.

Demonstração. Denote $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Dessa forma,

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned} A \cdot \text{adj}(A) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} - a_{21}a_{22} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix} \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \det(A)I. \end{aligned}$$

Da igualdade de matrizes

$$A \cdot \text{adj}(A) \equiv \det(A)I \pmod{m}.$$

□

A importância da Propriedade 2.18 reside no fato de que a matriz adjunta atua como um mecanismo de simplificação, permitindo que qualquer matriz $A \in M_2(\mathbb{Z})$ seja reduzida a uma forma diagonal módulo m. Ao demonstrar que o produto, $A \cdot \text{adj}(A)$, resulta em uma matriz onde a diagonal secundária é nula e a diagonal principal é composta pelo determinante, estabelecemos a base necessária para determinar a matriz inversa modular.

Dizemos que uma matriz $\overline{A} \in M_2(\mathbb{Z})$ é a inversa de $A \in M_2(\mathbb{Z})$ módulo m se a relação de congruência $A \cdot \overline{A} \equiv \overline{A} \cdot A \equiv I \pmod{m}$ for satisfeita.

Assim, a propriedade seguinte utiliza essa estrutura para mostrar que, sob a condição de que o determinante de A seja inversível em $\mathbb{Z}_m$, a matriz adjunta de A pode ser escalonada pelo inverso modular do determinante de A, denotaremos $\overline{\det(A)}$, para finalmente obter a identidade modular I.

Propriedade 2.19. Seja $A \in M_2(\mathbb{Z})$, $m \in \mathbb{Z}$ com $m \geq 2$ e $\text{mdc}(\det(A), m) = 1$. Então A é inversível módulo m se, e somente se, o determinante de A é inversível em $\mathbb{Z}_m$. Ainda, temos que $\overline{A} \equiv \overline{\det(A)}\ \text{adj}(A) \pmod{m}$.

Demonstração. Suponha que A é inversível em $\mathbb{Z}_m$. Então existe $\overline{A} \in \mathbb{Z}_m$ tal que:

$$A \cdot \overline{A} \equiv I \pmod{m}.$$

Tomando os determinantes:

$$\det(A)\det(\overline{A}) \equiv \det(I) \pmod{m} \implies \det(A)\det(\overline{A}) \equiv 1 \pmod{m}.$$

Logo, $\det(A)$ possui inverso em $\mathbb{Z}_m$, ainda $\overline{\det(A)} = \det(\overline{A})$.

Agora, suponha que $\det(A)$ é inversível em $\mathbb{Z}_m$. Tomando o produto da Propriedade 2.18 e $\overline{\det(A)}$,

$$\overline{\det(A)}\, A \cdot \operatorname{adj}(A) \equiv \overline{\det(A)}\, \det(A) I \pmod{m}.$$

Como $\operatorname{mdc}(\det(A), m) = 1$, temos

$$A \cdot \overline{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \equiv I \pmod{m}.$$

Logo, A possui inversa em $\mathbb{Z}_m$, ainda $\overline{A} = \overline{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$. □

Buscaremos, a seguir, estender o resultado apresentado na Propriedade 2.17(d), válido para expoentes inteiros positivos, para o caso geral em que o expoente é um inteiro qualquer. O seguinte resultado nos será útil.

Propriedade 2.20. Considere $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ inversíveis com entradas a_{ij} e b_{ij} respectivamente e $m \in \mathbb{Z}$. Se $A \equiv B \pmod{m}$, então $A^{-1} \equiv B^{-1} \pmod{m}$.

Demonstração. Pela Propriedade 2.17(e), temos

$$\det(A) \equiv \det(B) \pmod{m}. \tag{2.34}$$

Como $A \equiv B \pmod{m}$, temos

$$a_{11} \equiv b_{11} \pmod{m}, \tag{2.35}$$

e

$$a_{22} \equiv b_{22} \pmod{m}. \tag{2.36}$$

Pela Propriedade A.8 (b), temos

$$-a_{12} \equiv -b_{12} \pmod{m}, \tag{2.37}$$

e,

$$-a_{21} \equiv -b_{21} \pmod{m}. \tag{2.38}$$

Pelas equações (2.35), (2.36), (2.37) e (2.38), obtemos

$$\operatorname{adj}(A) \equiv \operatorname{adj}(B) \pmod{m}. \tag{2.39}$$

Pela Propriedade 2.17(f), multiplicando as equações (2.34) e (2.39), obtemos

$$\det(A) \operatorname{adj}(A) \equiv \det(B) \operatorname{adj}(B) \pmod{m},$$

ou seja,

$$A^{-1} \equiv B^{-1} \pmod{m}.$$

□

Agora sim, estamos prontos para o resultado seguinte:

Propriedade 2.21. Considere $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ inversíveis e $m, n \in \mathbb{Z}$. Se $A \equiv B \pmod{m}$, então $A^n \equiv B^n \pmod{m}$.

Demonstração. O caso $n \in \mathbb{Z}^+$ já foi estabelecido na Propriedade 2.17 2.17(d).

Resta analisar o caso em que $n < 0$. Seja $n = -k$, com $k \in \mathbb{Z}^+$. Como $A \equiv B \pmod{m}$ e A, B são inversíveis, segue pela Propriedade 2.20 que

$$A^{-1} \equiv B^{-1} \pmod{m}.$$

Aplicando novamente a Propriedade 2.17(d) ao caso positivo k, obtemos

$$(A^{-1})^k \equiv (B^{-1})^k \pmod{m},$$

ou seja,

$$A^n \equiv B^n \pmod{m}.$$

Portanto, a propriedade é válida para todo $n \in \mathbb{Z}$. □

Essa sequência lógica transforma uma propriedade algébrica estrutural em uma ferramenta para o estudo de propriedades de divisibilidade matricial.

Há muitos conceitos interessantes sobre congruência de matrizes, no entanto, as obras que abordam os conceitos com rigor matemático ainda são escassas. Convidamos o leitor mais curioso, que deseja aprofundar seus conhecimentos, a consultar a obra [15].

3 Números de Fibonacci e de Lucas

Este capítulo será dedicado à introdução dos conceitos elementares sobre os números de Fibonacci e os números de Lucas. Para isso, apresentaremos algumas figuras históricas que desempenharam papéis importantes na construção desses conceitos, como o próprio Fibonacci, seu divulgador Édouard Lucas e os matemáticos Jacques Binet e Giovanni Cassini. Além de estabelecer as definições básicas via sequências de recorrência, estudaremos as fórmulas de Binet e um pouco da íntima relação entre as sequências de Fibonacci e de Lucas com o número de ouro e seu conjugado. Terminaremos o capítulo demonstrando algumas identidades interessantes, preparando o caminho para análises envolvendo matrizes que iniciaremos no capítulo seguinte.

3.1 Leonardo Fibonacci

Leonardo Fibonacci foi um matemático do século XIII. Nasceu em Pisa, Itália, e por isso também era conhecido como Leonardo Pisano, ou Leonardo de Pisa. Era filho de um rico mercador e encarregado de negócios nas cidades de Veneza, Gênova e Pisa. Viveu parte de sua juventude no norte da África, onde aprendeu o idioma e a cultura árabe, viajou pelo Mediterrâneo durante grande parte de sua vida, conhecendo a Grécia, a Síria, o Egito, a Sicília, Constantinopla e o sul da França, aprendendo a matemática e os sistemas numéricos locais.

Em 1202, publicou, por volta dos 30 anos de idade, sua obra *Liber Abaci* [4], cujo principal feito foi introduzir os números indo-arábicos na Europa. Os algarismos divulgados no livro prevalecem até os dias atuais sobre os algarismos romanos utilizados na época.

Seu legado consiste em quatro livros: *Liber Abaci* [4], escrito em 1202, mas que somente se preservou na edição ampliada e revisada de 1228; *Practica Geometriae* [16], escrito em 1220, um compêndio com aplicações da álgebra à solução de problemas de geometria e trigonometria; *Flos* [17], escrito em 1225, onde soluciona desafios matemáticos escritos por João de Parma; *Liber Quadratorum* [18], escrito também em 1225, sobre equações diofantinas, em homenagem ao imperador Frederico II Hohenstaufen (1194-1250).

Entretanto, apesar das inúmeras contribuições matemáticas, Fibonacci é especialmente lembrado pela sequência de Fibonacci, que ficou assim conhecida, no século XIX, graças ao matemático francês Édouard Lucas [5]. A sequência de Fibonacci surgiu para auxiliar a resolução de um problema sobre o crescimento de uma suposta população de coelhos em *Liber Abaci*. Tal problema é como segue:

"Um homem coloca um casal de coelhos em um cercado a fim de que estes se reproduzam. Determine quantos casais de coelhos existirão neste cercado ao final de um ano sabendo que a natureza destes coelhos é tal que a cada mês cada casal produz um novo casal que se torna produtivo do segundo mês em diante".

Para resolução do problema fictício proposto por Fibonacci, suponha que os coelhos não morram no período em questão. Denote por n o número do mês, A um casal apto a reprodução, A_n o número de casais aptos a reprodução em n, B um casal inapto para a reprodução, B_n o número de casais inaptos a reprodução em n e T_n o total de casais de coelhos em n. A seguinte tabela exibe os casais de coelhos no avançar dos primeiros 5 meses:

n	**Casais**	A_n	B_n	T_n
1	A	1	0	1
2	AB	1	1	2
3	ABA	2	1	3
4	ABAAB	3	2	5
5	ABAABABA	5	3	8
6	ABAABABAABAAB	8	5	13

Tabela 3.1: Primeiros meses de casais de coelhos no problema de Fibonacci.

Note que A_{n+1}, na Tabela 3.1, é a soma de A_n e B_n, que também é igual ao total de casais de coelhos no n-ésimo mês T_n. E B_{n+1}, na mesma tabela, é igual a A_n, o número de coelhos aptos a reprodução do mês anterior. Logo, podemos expandir a tabela para solucionar o problema proposto por Fibonacci:

n	A_n	B_n	T_n
1	1	0	1
2	1	1	2
3	2	1	3
4	3	2	5
5	5	3	8
6	8	5	13
7	13	8	21
8	21	13	34
9	34	21	55
10	55	34	89
11	89	55	144
12	144	89	233
13	233	144	377

Tabela 3.2: Um ano de casais de coelhos no problema de Fibonacci.

Assim, observando a Tabela 3.2, decorrido 1 ano após o 1º mês do problema, haverá 377 casais de coelhos.

A sequência numérica que representa os números de casais de coelhos aptos a reprodução a cada mês, é conhecida como sequência de Fibonacci e é dada como segue:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

cada termo também é chamado de número de Fibonacci. O n-ésimo termo da sequência é denotado por F_n. Podemos formalmente definir a sucessão (F_n):

Definição 3.1. A sequência de Fibonacci (F_n) é definida por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_{n+2} = F_n + F_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$.

3.2 Édouard Lucas

François Édouard Anatole Lucas foi um matemático do século XIX. Nasceu em Amiens, França. Trabalhou como professor de matemática do ensino médio e foi um matemático bastante ativo, tendo publicado mais de 180 artigos sobre as mais diversas áreas da matemática. Suas maiores contribuições ocorreram em Teoria dos Números. Estudou extensamente sequências de recorrência, foi o responsável por batizar a sequência de Fibonacci, e a relacionou diretamente com uma outra sucessão correlata, atualmente conhecida como sequência de Lucas.

Dois artigos de Lucas se destacam para nosso propósito: *Recherches Sur Plusieurs Ouvrages de Léonard de Pise* [19], escrito em 1877, um copilado sobre suas várias descobertas sobre a sequência de Fibonacci; e *Théorie des Fonctions Numériques Simplement Périodiques* [20], escrito em 1878, texto sobre a teoria geral das sequências de recorrência de segunda ordem e suas principais propriedades. Também se destaca um livro: *Théorie des Nombres, Tome Premier* [21], escrito em 1891, onde relatou que observando a sequência de Fibonacci provou uma recíproca do pequeno teorema de Fermat e dela deduziu corolários sobre números primos com trinta dígitos, e ainda afirmou que "A teoria de sequências de recorrência é uma inesgotável mina que contém todas as propriedades dos números" [21]. Com essas pesquisas, foi capaz de estabelecer um número primo de 39 dígitos, o maior número primo por 75 anos e ainda hoje o maior número primo encontrado sem auxílio computacional [22, 23].

A sequência de Fibonacci é definida determinando os dois primeiros termos inteiros e respeitando a lei de recorrência. Muitas sequências diferentes podem ser determinadas variandos os dois primeiros termos inteiros e mantendo a lei. Por exemplo, começando com 1 e 3, respectivamente, cria-se a sequência de Lucas. O n-ésimo termo da sequência é denotado por L_n e cada termo desta sequência é chamado de número de Lucas. Podemos formalmente definir a sucessão (L_n):

Definição 3.2. A sequência de Lucas (L_n) é definida por $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ e $L_{n+2} = L_n + L_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$.

Dada de forma explícita por:

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \ldots$$

Dentre as sequências que podem ser obtidas alterando-se os valores iniciais da sequência de Fibonacci, a sequência de Lucas é a mais notável. Um dos motivos é que a sequência formada pelos números de Lucas possui uma fórmula de Binet mais simples que a dos números de Fibonacci. As fórmulas de Binet estão entre os resultados mais importantes e versáteis sobre os números de Fibonacci e de Lucas, pois relacionam seus termos, que são inteiros, com potências do número de ouro e de seu conjugado, que são irracionais.

3.3 Jacques Binet

Jacques Philippe Marie Binet foi um matemático, físico e astrônomo do século XIX. Nasceu em Rennes, França. Estudou na *École Polytechnique* em Paris, onde se tornou professor, trabalhando ao lado de notórios matemáticos como Joseph Fourier, Joseph-Louis Lagrange e, seu amigo próximo, Augustine Louis Cauchy. Seus estudos são de significante contribuição para teoria dos números, álgebra linear e mecânica celeste.

Dentre as muitas publicações, traremos destaque ao artigo *Mémoire Sur L'Intégration des Équations Linéaires Aux Différences Finies, D'un Ordre Quelconque à Coefficients Variables* [24], escrito em 1843, quando Binet formalizou e divulgou a fórmula que permite expressar os termos de sequências de recorrência em termos de potência de números irracionais. Apesar da fórmula ser historicamente atribuída à Binet, os resultados já eram conhecidos por Daniel Bernoulli, Leonard Euler e Abraham de Moivre.

Considere $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, o irracional conhecido como número de ouro, e $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, como o seu conjugado. Não é nosso objetivo neste trabalho explorar a natureza do número de ouro por si só, muito embora verificaremos como é grande a sua relação com a sucessão de Fibonacci de várias formas diferentes. Para o leitor que deseja se aprofundar um pouco mais sobre o número ϕ, recomendamos a leitura do livro [25]. Para nosso texto, as seguintes igualdades serão úteis em muitas demonstrações mais adiante:

$$\phi\phi_2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1-5}{4} = -1; \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\phi^{-1} &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right) = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} \\ &= \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\phi_2;\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\phi^{-1} &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right) = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} \\ &= \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}-2}{2} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \phi - 1;\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}\phi_2^{-1} &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right) = \frac{2(1+\sqrt{5})}{1-5} \\ &= \frac{2(1+\sqrt{5})}{-4} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} = -\phi;\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\phi_2^{-1} &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right) = \frac{2(1+\sqrt{5})}{1-5} \\ &= \frac{2(1+\sqrt{5})}{-4} = \frac{1+\sqrt{5}}{-2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}-2}{2} \\ &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} - 1 = \phi_2 - 1;\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}\phi^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+\phi;\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}\phi_2^2 &= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1+\phi_2;\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\phi^2+\phi_2^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}+\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\\ &= \frac{1+2\sqrt{5}+5+1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{12}{4}=3;\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\phi-\phi_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}. \tag{3.9}$$

Segue o Teorema de Binet, em sua versão para (F_n) e (L_n):

Teorema 3.3 (Binet)**.** *Para $n \in \mathbb{N}$, considerando $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$,*

(a) o n-ésimo número de Fibonacci é dado por

$$F_n = \frac{\phi^n-\phi_2^n}{\phi-\phi_2};$$

(b) o n-ésimo número de Lucas é dado por

$$L_n = \phi^n+\phi_2^n.$$

Demonstração. Vamos provar o teorema por indução.

(a) (i) Para $n=1$ e $n=2$, o resultado é válido, pois

$$\frac{\phi^1-\phi_2^1}{\phi-\phi_2} = \frac{\phi-\phi_2}{\phi-\phi_2} = 1 = F_1$$

e

$$\frac{\phi^2-\phi_2^2}{\phi-\phi_2} = \frac{\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}-\frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{4}}{\sqrt{5}} = 1 = F_2.$$

(ii) Assumimos verdadeiro para $n=k$ e $n=k+1$, com $k>2$, ou seja,

$$F_k = \frac{\phi^k-\phi_2^k}{\phi-\phi_2}$$

e

$$F_{k+1} = \frac{\phi^{k+1}-\phi_2^{k+1}}{\phi-\phi_2}.$$

(iii) Mostremos que é verdadeiro para $n=k+2$. De fato,

$$\begin{aligned}F_{k+2} &= F_{k+1}+F_k\\ &= \frac{\phi^{k+1}-\phi_2^{k+1}}{\phi-\phi_2}+\frac{\phi^k-\phi_2^k}{\phi-\phi_2}\\ &= \frac{\phi^{k+1}-\phi_2^{k+1}+\phi^k-\phi_2^k}{\phi-\phi_2}\\ &= \frac{\phi^k\phi^1+\phi^k-\phi_2^k\phi_2^1-\phi_2^k}{\phi-\phi_2}\\ &= \frac{\phi^k(\phi+1)-\phi_2^k(\phi_2+1)}{\phi-\phi_2}.\end{aligned}$$

Pelas equações (3.6) e (3.7), temos:

$$\begin{aligned} F_{k+2} &= \frac{\phi^k\phi^2 - \phi_2^k\phi_2^2}{\phi - \phi_2} \\ &= \frac{\phi^{k+2} - \phi_2^{k+2}}{\phi - \phi_2}. \end{aligned}$$

Por (i), (ii) e (iii) provamos a igualdade para F_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) (i) Para $n = 1$ e $n = 2$, o resultado é válido, uma vez que

$$\phi^1 + \phi_2^1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1 = L_1$$

e

$$\phi^2 + \phi_2^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} + \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{12}{4} = 3 = L_2.$$

(ii) Assumimos verdadeiro para $n = k$ e $n = k+1$, com $k > 2$, ou seja,

$$L_k = \phi^k + \phi_2^k$$

e

$$L_{k+1} = \phi^{k+1} + \phi_2^{k+1}.$$

(iii) Mostremos que é verdadeiro para $n = k+2$. De fato,

$$\begin{aligned} L_{k+2} &= L_{k+1} + L_k \\ &= \phi^{k+1} + \phi_2^{k+1} + \phi^k + \phi_2^k \\ &= \phi^k\phi^1 + \phi^k + \phi_2^k\phi_2^1 + \phi_2^k \\ &= \phi^k(\phi+1) + \phi_2^k(\phi_2+1). \end{aligned}$$

Pelas equações (3.6) e (3.7), temos:

$$\begin{aligned} L_{k+2} &= \phi^k\phi^2 + \phi_2^k\phi_2^2 \\ &= \phi^{k+2} + \phi_2^{k+2}. \end{aligned}$$

Por (i), (ii) e (iii) provamos a igualdade para L_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

3.4 Índices não-positivos

Podemos também expandir as sequências de Fibonacci e de Lucas para índices não positivos, supondo que a lei de recorrência continua válida. Para Fibonacci, podemos reescrever:

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}.$$

Assim, dados quaisquer dois números de Fibonacci consecutivos, podemos encontrar o número de Fibonacci antecedente. Veja:

$$\begin{aligned} F_0 &= F_2 - F_1 = 0; \\ F_{-1} &= F_1 - F_0 = 1; \\ F_{-2} &= F_0 - F_{-1} = -1; \\ F_{-3} &= F_{-1} - F_{-2} = 2; \\ &\vdots \end{aligned}$$

sendo estes os valores encontrados para índices não positivos, respeitando a relação de recorrência original, fica estabelecida a sequência (F_n) para todo $n \in \mathbb{Z}$.

A Tabela 3.3 exibe uma lista de alguns valores de F_n com índices inteiros:

n	...	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
F_n	...	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	...

Tabela 3.3: Números de Fibonacci F_n, com $n \in \mathbb{Z}$.

Observando a tabela, percebe-se empiricamente que, para $n \in \mathbb{N}$, $F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$. Comprovaremos este fato na Seção 4.1 do Capítulo 4.

Da mesma forma, podemos expandir a sequência de Lucas para índices não positivos, reescrevendo a lei de recorrência como

$$L_n = L_{n+2} - L_{n+1}.$$

Assim, dados quaisquer dois números de Lucas consecutivos, podemos encontrar o número de Lucas antecedente.

$$\begin{aligned} L_0 &= L_2 - L_1 = 2; \\ L_{-1} &= L_1 - L_0 = -1; \\ L_{-2} &= L_0 - L_{-1} = 3; \\ L_{-3} &= L_{-1} - L_{-2} = -4; \\ &\vdots \end{aligned}$$

sendo estes os valores encontrados para índices não positivos, respeitando a relação de recorrência original, fica estabelecido L_n para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Na Tabela 3.4, segue uma lista de alguns valores de L_n com índices inteiros:

n	...	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
L_n	...	18	-11	7	-4	3	-1	2	1	3	4	7	11	18	...

Tabela 3.4: Números de Lucas L_n, com $n \in \mathbb{Z}$.

Observando a tabela, percebe-se empiricamente que, para $n \in \mathbb{N}$, $L_{-n} = (-1)^n L_n$. Comprovaremos este fato na Seção 4.2 do Capítulo 4.

3.5 Giovanni Cassini e algumas identidades

Giovanni Domenico Cassini foi um astrônomo, engenheiro e matemático do final do século XVII, nascido em Perinaldo, Itália. Foi professor de Astronomia na Universidade de Bolonha, Itália, e diretor do Observatório de Paris.

Dois artigos famosos: *Découverte de deux Nouvelles Planètes autour de Saturne* [26], escrito em 1676 e publicado na revista *Journal des Sçavans*, divulgou a descoberta de quatro satélites que orbitam Saturno e a faixa escura que separa esses anéis, que é chamada atualmente de divisão de Cassini, em sua homenagem; e *Une Nouvelle Progression de Nombres* [27], escrito em 1733, Cassini investigou as propriedades dos números de Fibonacci e derivou várias identidades, incluindo a que atualmente é conhecida como identidade de Cassini, a qual demonstraremos a seguir.

Propriedade 3.4 (Identidade de Cassini)**.** $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Considerando F_{n-1}, F_{n+1} e F_n conforme o Teorema 3.3, temos:

$$\begin{aligned}
F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 &= \left(\frac{\phi^{n+1} - \phi_2^{n+1}}{\phi - \phi_2}\right)\left(\frac{\phi^{n-1} - \phi_2^{n-1}}{\phi - \phi_2}\right) - \left(\frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2}\right)^2 \\
&= \frac{\phi^{n+1}\phi^{n-1} - \phi^{n+1}\phi_2^{n-1} - \phi_2^{n+1}\phi^{n-1} + \phi_2^{n+1}\phi_2^{n-1}}{(\phi - \phi_2)^2} - \frac{\phi^{2n} - 2\phi^n\phi_2^n + \phi_2^{2n}}{(\phi - \phi_2)^2} \\
&= \frac{\cancel{\phi^{2n}} - \phi^{n+1}\phi_2^{n-1} - \phi_2^{n+1}\phi^{n-1} + \cancel{\phi_2^{2n}} - \cancel{\phi^{2n}} + 2\phi^n\phi_2^n - \cancel{\phi_2^{2n}}}{(\phi - \phi_2)^2} \\
&= \frac{-\phi^{n+1}\phi_2^{n-1} - \phi_2^{n+1}\phi^{n-1} + 2\phi^n\phi_2^n}{(\phi - \phi_2)^2} \\
&= \frac{-\phi^n\phi^1\phi_2^n\phi_2^{-1} - \phi_2^n\phi_2^1\phi^n\phi^{-1} + 2(\phi\phi_2)^n}{(\phi - \phi_2)^2} \\
&= \frac{(\phi\phi_2)^n(-\phi\phi_2^{-1} - \phi^{-1}\phi_2) + 2(\phi\phi_2)^n}{(\phi - \phi_2)^2}.
\end{aligned}$$

Pelas equações (3.2) e (3.4), temos:

$$\begin{aligned}
F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 &= \frac{(\phi\phi_2)^n(-\phi(-\phi) - \phi_2(-\phi_2)) + 2(\phi\phi_2)^n}{(\phi - \phi_2)^2} \\
&= \frac{(\phi\phi_2)^n(\phi^2 + \phi_2^2) + 2(\phi\phi_2)^n}{(\phi - \phi_2)^2}.
\end{aligned}$$

Pelas equações (3.8) e (3.9), temos:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = \frac{3(\phi\phi_2)^n + 2(\phi\phi_2)^n}{5} = \frac{\cancel{5}(\phi\phi_2)^n}{\cancel{5}} = (\phi\phi_2)^n.$$

Pela equação (3.1), concluímos:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

□

Na demonstração apresentada na Propriedade 3.4, utilizamos a fórmula de Binet para a sequência de Fibonacci. No entanto, do ponto de vista histórico, a identidade de Cassini é anterior à formalização da fórmula de Binet. De fato, Giovanni Domenico Cassini estabeleceu sua identidade no século XVII, enquanto a expressão explícita da sequência em termos de potências de números irracionais, posteriormente associada a Jacques Philippe Marie Binet, surgiu apenas no século XIX. Assim, a abordagem aqui adotada é moderna e não corresponde ao método originalmente empregado por Cassini.

Com a Identidade de Cassini, podemos demonstrar outras identidades relacionadas.

Propriedade 3.5. $(F_{n-1} + F_{n+1})^2 - 4(-1)^n = 5F_n^2,\ n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Usando a Propriedade 3.4, temos:

$$\begin{aligned}
(F_{n-1} + F_{n+1})^2 - 4(-1)^n &= (F_{n-1} + F_{n+1})^2 - 4(F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2) \\
&= F_{n-1}^2 + 2F_{n-1}F_{n+1} + F_{n+1}^2 - 4F_{n+1}F_{n-1} + 4F_n^2 \\
&= F_{n-1}^2 + F_{n+1}^2 - 2F_{n+1}F_{n-1} + 4F_n^2 \\
&= F_{n-1}F_{n-1} + F_{n+1}F_{n+1} - 2F_{n-1}F_{n+1} + 4F_n^2 \\
&= F_{n-1}(F_{n-1} - F_{n+1}) + F_{n+1}(F_{n+1} - F_{n-1}) + 4F_n^2 \\
&= F_{n-1}(F_{n-1} - (F_{n-1} + F_n)) + F_{n+1}((F_{n-1} + F_n) - F_{n-1}) \\
&\quad + 4F_n^2 \\
&= F_{n-1}(-F_n) + F_{n+1}F_n + 4F_n^2 \\
&= F_n(F_{n+1} - F_{n-1}) + 4F_n^2 \\
&= F_n((F_{n-1} + F_n) - F_{n-1}) + 4F_n^2 \\
&= F_nF_n + 4F_n^2 \\
&= F_n^2 + 4F_n^2 \\
&= 5F_n^2,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Propriedade 3.6. $L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = -5(-1)^n,\ n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Considerando L_{n-1}, L_{n+1} e L_n conforme o Teorema 3.3, temos:

$$\begin{aligned}
L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 &= (\phi^{n+1} + \phi_2^{n+1})(\phi^{n-1} + \phi_2^{n-1}) - (\phi^n + \phi_2^n)^2 \\
&= \phi^{n+1}\phi^{n-1} + \phi^{n+1}\phi_2^{n-1} + \phi_2^{n+1}\phi^{n-1} + \phi_2^{n+1}\phi_2^{n-1} - (\phi^{2n} + 2\phi^n\phi_2^n + \phi_2^{2n}) \\
&= \cancel{\phi^{2n}} + \phi^{n+1}\phi_2^{n-1} + \phi^{n-1}\phi_2^{n+1} + \cancel{\phi_2^{2n}} - \cancel{\phi^{2n}} - 2\phi^n\phi_2^n - \cancel{\phi_2^{2n}} \\
&= \phi^{n+1}\phi_2^{n-1} + \phi^{n-1}\phi_2^{n+1} - 2\phi^n\phi_2^n \\
&= \phi^n\phi^1\phi_2^n\phi_2^{-1} + \phi^n\phi^{-1}\phi_2^n\phi_2^1 - 2(\phi\phi_2)^n \\
&= \phi^n\phi_2^n(\phi\phi_2^{-1} + \phi^{-1}\phi_2) - 2(\phi\phi_2)^n.
\end{aligned}$$

Pelas equações (3.2) e (3.4), temos:

$$\begin{aligned}
L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 &= \phi^n\phi_2^n(\phi(-\phi) + \phi_2(-\phi_2)) - 2(\phi\phi_2)^n \\
&= (\phi\phi_2)^n(-\phi^2 - \phi_2^2) - 2(\phi\phi_2)^n \\
&= -(\phi\phi_2)^n(\phi^2 + \phi_2^2) - 2(\phi\phi_2)^n.
\end{aligned}$$

Pela equação (3.8), temos:

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = -3(\phi\phi_2)^n - 2(\phi\phi_2)^n = -5(\phi\phi_2)^n.$$

Pela equação (3.1), temos:

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = -5(-1)^n.$$

□

A identidade acima é uma versão da identidade de Cassini para números de Lucas, e foi demonstrada pelo próprio Édouard Lucas em seu livro *Théorie des Nombres, Tome Premier* [21].

Existem inúmeras outras identidades envolvendo os números de Fibonacci e os números de Lucas, abrangendo relações algébricas, propriedades combinatórias e conexões com outras sequências recorrentes. Para uma coletânea ampla dessas identidades, recomendamos a leitura do Capítulo 10 de [5], no qual o autor apresenta diversos resultados.

4 Explorando as Q-Matrizes

Neste capítulo, exploraremos a Q_F-matriz de Fibonacci e a Q_L-matriz de Lucas, começando com suas n-ésimas potências naturais. Demonstraremos as expressões dos números de Fibonacci e de Lucas para índices negativos exclusivamente por meio de matrizes. Analisaremos também como obter a matriz $\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}$ a partir de Q_L para todo n inteiro. Além disso, estudaremos o polinômio característico das matrizes Q_F, Q_F^n, Q_L e Q_L^n para determinar seus autovalores e autovetores, estabelecendo conexões entre os números de Fibonacci e de Lucas com o número de ouro e seu conjugado. Com esses resultados, demonstraremos as fórmulas de Binet para todo n inteiro de diversas maneiras, utilizando matrizes.

4.1 Q_F-matriz de Fibonacci

A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ pode se tornar uma excelente ferramenta para estudar números de Fibonacci. Isso ocorre pois, ao calcularmos suas potências, suas entradas passam a ser preenchidas por estes números. O primeiro a estudar essa matriz foi Charles King [6], em 1960. King a nomeou Q-matriz de Fibonacci. A escolha da letra Q parece ter sido arbitrária, mas foi amplamente aceita e adotada por algebristas ao redor do mundo. Neste texto, denotaremos essa matriz por Q_F e a nomearemos de Q_F-matriz de Fibonacci, uma vez que trataremos de uma matriz similar para números de Lucas.

Observe que:

$$Q_F^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix};$$

$$Q_F^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{bmatrix};$$

$$Q_F^3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_4 & F_3 \\ F_3 & F_2 \end{bmatrix};$$

$$Q_F^4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_5 & F_4 \\ F_4 & F_3 \end{bmatrix};$$

de forma geral, é possível estabelecer que, para n inteiro, vale

$$Q_F^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Com base neste resultado podemos estabelecer várias identidades envolvendo números de Fibonacci, através da manipulação da matriz Q_F. Iniciaremos sua demonstração no lema a seguir e a completaremos no Teorema 4.6.

Lema 4.1. *Para $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima potência de Q_F é dada por:*

$$Q_F^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Provaremos via indução finita.

(i) Para $n = 1$, o resultado é válido, pois

$$Q_F^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}.$$

(ii) Assumimos que o resultado seja verdadeiro para $n = k$, com $k > 1$, isto é,

$$Q_F^k = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix}.$$

(iii) Mostremos que é verdadeiro para $n = k + 1$. De fato,

$$Q_F^{k+1} = Q_F^k \cdot Q_F = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix}.$$

Por (i), (ii) e (iii), provamos o lema. □

O Lema 4.1 nos permite demonstrar, de forma bastante simples, a identidade de Cassini para n natural, através do cálculo de $\det(Q_F^n)$. Vejamos:

Propriedade 4.2 (Identidade de Cassini)**.** $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Basta observar que $\det(Q_F^n) = (\det(Q_F))^n$. Sendo assim, do Lema 4.1:

$$\begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^n, \tag{4.1}$$

o que implica

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

□

4.1.1 Formalizando a expressão dos números de Fibonacci com índices não-positivos

Para generalizar o resultado fornecido pelo Lema 4.1, calculando Q_F^n para qualquer n inteiro (e não apenas natural), precisamos formalizar a expressão matemática que de forma empírica observamos na Seção 3.4. Para isso, faremos uma comparação entre $(Q_F^n)^{-1}$ e $(Q_F^{-1})^n$.

Lema 4.3. *Para $n \in \mathbb{N}$, a inversa da n-ésima potência de Q_F é dada por:*

$$(Q_F^n)^{-1} = \begin{bmatrix} (-1)^n F_{n-1} & (-1)^{n+1} F_n \\ (-1)^{n+1} F_n & (-1)^n F_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 2.1 e pela identidade de Cassini (Propriedade 4.2), temos:

$$\begin{aligned} (Q_F^n)^{-1} &= \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{(-1)^n} \begin{bmatrix} F_{n-1} & -F_n \\ -F_n & F_{n+1} \end{bmatrix} \\ &= (-1)^n \begin{bmatrix} F_{n-1} & -F_n \\ -F_n & F_{n+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-1)^n F_{n-1} & (-1)^{n+1} F_n \\ (-1)^{n+1} F_n & (-1)^n F_{n+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Por outro lado, usando o Teorema 2.1, observe que

$$Q_F^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Considerando as potências de Q_F^{-1} e usando os valores apresentados na Tabela 3.3 da Seção 3.4, perceba que

$$Q_F^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 & F_{-1} \\ F_{-1} & F_{-2} \end{bmatrix};$$

$$(Q_F^{-1})^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{-1} & F_{-2} \\ F_{-2} & F_{-3} \end{bmatrix};$$

$$(Q_F^{-1})^3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{-2} & F_{-3} \\ F_{-3} & F_{-4} \end{bmatrix};$$

$$(Q_F^{-1})^4 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{-3} & F_{-4} \\ F_{-4} & F_{-5} \end{bmatrix}.$$

De modo geral, o Lema 4.4 estabelece a regra observada acima, via indução.

Lema 4.4. *Para $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima potência de Q_F^{-1} é dada por:*

$$(Q_F^{-1})^n = \begin{bmatrix} F_{-n+1} & F_{-n} \\ F_{-n} & F_{-n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Vamos verificar o lema por indução.

(i) Para $n = 1$, o resultado é verdadeiro uma vez que

$$Q_F^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 & F_{-1} \\ F_{-1} & F_{-2} \end{bmatrix}.$$

(ii) Assumimos que o resultado seja verdadeiro para $n = k$, com $k > 1$, isto é,

$$(Q_F^{-1})^k = \begin{bmatrix} F_{-k+1} & F_{-k} \\ F_{-k} & F_{-k-1} \end{bmatrix}.$$

(iii) Mostremos verdadeiro para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned}(Q_F^{-1})^{k+1} &= (Q_F^{-1})^k \cdot (Q_F^{-1})^1 \\ &= \begin{bmatrix} F_{-k+1} & F_{-k} \\ F_{-k} & F_{-k-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{-k} & F_{-k+1} - F_{-k} \\ F_{-k-1} & F_{-k} - F_{-k-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{-k} & (F_{-k-1} + F_{-k}) - F_{-k} \\ F_{-k-1} & (F_{-k-2} + F_{-k-1}) - F_{-k-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{-k} & F_{-k-1} \\ F_{-k-1} & F_{-k-2} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Por (i), (ii) e (iii) provamos a igualdade para $n \in \mathbb{N}$. □

A partir da comparação entre $(Q_F^n)^{-1}$ e $(Q_F^{-1})^n$, para $n \in \mathbb{N}$, obtidas pelos Lemas 4.3 e 4.4, seremos capazes de provar com uma abordagem diferente das usuais, no próximo resultado, que $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$.

Teorema 4.5. *$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$, $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Uma vez que

$$(Q_F^n)^{-1} = (Q_F^{-1})^n,$$

dos Lemas 4.3 e 4.4

$$\begin{bmatrix} (-1)^n F_{n-1} & (-1)^{n+1} F_n \\ (-1)^{n+1} F_n & (-1)^n F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{-n+1} & F_{-n} \\ F_{-n} & F_{-n-1} \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

Das entradas localizadas na primeira linha e segunda coluna das matrizes da equação (4.2), segue que

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n.$$

□

Dessa forma, somos motivados a completar a Definição 3.1, considerando índices não positivos, com $F_0 = 0$ e $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$, para $n \in \mathbb{N}$. Comprovaremos, a seguir, que a fórmula de Binet para os números de Fibonacci continua valendo, mesmo com essa definição mais completa, agora englobando índices inteiros não positivos. De fato,

- Para $n = 0$:

$$\frac{\phi^0 - \phi_2^0}{\phi - \phi_2} = \frac{1 - 1}{\phi - \phi_2} = 0 = F_0.$$

- Se $n \in \mathbb{N}$, para $-n$:

$$\begin{aligned}\frac{\phi^{-n} - \phi_2^{-n}}{\phi - \phi_2} &= \frac{\frac{1}{\phi^n} - \frac{1}{\phi_2^n}}{\phi - \phi_2} = \frac{\frac{\phi_2^n - \phi^n}{(\phi\phi_2)^n}}{\phi - \phi_2} \\ &= (-1)^n \left(\frac{\phi_2^n - \phi^n}{\phi - \phi_2} \right) = (-1)^{n+1} \left(\frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2} \right) = (-1)^{n+1} F_n = F_{-n}.\end{aligned}$$

4.1.2 Q_F^n para qualquer n inteiro

Agora, podemos generalizar o Lema 4.1 para n inteiro.

Teorema 4.6. *Para $n \in \mathbb{Z}$, a n-ésima potência de Q_F é dada por:*

$$Q_F^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Para $n = 0$, o resultado é trivial, uma vez que

$$Q_F^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & F_0 \\ F_0 & F_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{0+1} & F_0 \\ F_0 & F_{0-1} \end{bmatrix}.$$

O caso em que n é inteiro positivo está provado no Lema 4.1. Analisemos quando n é inteiro negativo. Nesse caso, $n = -k$, onde $k \in \mathbb{N}$. Então, $Q_F^n = Q_F^{-k} = (Q_F^k)^{-1}$ e, pelo Lema 4.1, segue que

$$Q_F^n = (Q_F^k)^{-1} = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Calculando a inversa usando o Teorema 2.1 e aplicando a identidade de Cassini (Propriedade 4.2), temos

$$\begin{aligned} Q_F^n &= \frac{1}{F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2} \begin{bmatrix} F_{k-1} & -F_k \\ -F_k & F_{k+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{(-1)^k} \begin{bmatrix} F_{k-1} & -F_k \\ -F_k & F_{k+1} \end{bmatrix} \\ &= (-1)^k \begin{bmatrix} F_{k-1} & -F_k \\ -F_k & F_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^k F_{k-1} & (-1)^{k+1} F_k \\ (-1)^{k+1} F_k & (-1)^k F_{k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Mas, perceba que,

$$F_n = F_{-k} = (-1)^{k+1} F_k,$$

$$F_{n+1} = F_{-k+1} = F_{-(k-1)} = (-1)^{(k-1)+1} F_{k-1} = (-1)^k F_{k-1}$$

e

$$F_{n-1} = F_{-k-1} = F_{-(k+1)} = (-1)^{(k+1)+1} F_{k+1} = (-1)^{k+2} F_{k+1} = (-1)^k F_{k+1}.$$

Dessa forma, da equação (4.3), temos

$$Q_F^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

□

Agora, não existe dificuldade em generalizar a identidade de Cassini para todo n inteiro, como enunciada a seguir.

Propriedade 4.7 (Identidade de Cassini)**.** $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Para $n = 0$, o resultado é trivial, uma vez que

$$F_{0+1}F_{0-1} - F_0^2 = F_1F_{-1} - F_0^2 = 1 \cdot 1 - 0 = 1 = (-1)^0.$$

O caso em que n é inteiro positivo está provado na Propriedade 4.2. Analisemos quando n é inteiro negativo. Nesse caso, $n = -k$, onde $k \in \mathbb{N}$, basta observar que $\det((Q_F^{-1})^k) = (\det(Q_F^{-1}))^k$. Sendo assim, do Lema 4.4:

$$\begin{vmatrix} F_{-k+1} & F_{-k} \\ F_{-k} & F_{-k-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^k,$$

o que implica

$$F_{-k+1}F_{-k-1} - F_{-k}^2 = (-1)^k.$$

Sabendo que $(-1)^k = (-1)^n$, temos:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

□

4.2 Q_L-matriz de Lucas

Por sua vez, para estudar a sequência de Lucas de forma similar a que fizemos com a de Fibonacci, podemos usar a Q_L-matriz de Lucas, definida como $Q_L = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. A matriz Q_L está introduzida no artigo [7] e o resultado principal obtido por Köken e Bozkurt nesse estudo de 2010 foi estabelecer uma forma para Q_L^n para todo n natural. Nesta dissertação, além de revisar a demonstração original por indução feita em [7], também ampliaremos o resultado para todo n inteiro.

Nesse sentido, verificaremos que

$$Q_L^n = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}, & \text{se } n \text{ é par} \\ 5^{\frac{n-1}{2}} \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases},$$

para todo n inteiro. Iniciaremos este processo com o lema a seguir, que é o mesmo resultado apresentado em [7], mas com a demonstração adaptada.

Lema 4.8. *Para $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima potência de Q_L é dada por:*

$$Q_L^n = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}, & \textit{se } n \textit{ é par} \\ 5^{\frac{n-1}{2}} \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}, & \textit{se } n \textit{ é ímpar} \end{cases}.$$

Demonstração. Vamos provar o lema por indução.

(I) Supondo n par:

(i) Para $n = 2$, o resultado é verdadeiro, pois

$$\begin{aligned} 5^{\frac{2}{2}} \begin{bmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{bmatrix} &= 5 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9+1 & 3+2 \\ 3+2 & 1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = Q_L^2. \end{aligned}$$

(ii) Assumimos que seja verdadeiro para $n = k$, com k par e $k > 2$, ou seja,

$$Q_L^k = 5^{\frac{k}{2}} \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix}.$$

(iii) Mostremos que é verdadeiro para $n = k + 2$. De fato,

$$\begin{aligned} Q_L^{k+2} &= Q_L^k \cdot Q_L^2 \\ &= 5^{\frac{k}{2}} \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \cdot 5^{\frac{2}{2}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 5^{\frac{k+2}{2}} \begin{bmatrix} 2F_{k+1} + F_k & F_{k+1} + F_k \\ 2F_k + F_{k-1} & F_k + F_{k-1} \end{bmatrix} \\ &= 5^{\frac{k+2}{2}} \begin{bmatrix} F_{k+3} & F_{k+2} \\ F_{k+2} & F_{k+1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

o que prova a igualdade para n par.

(II) Supondo n ímpar:

(i) Para $n = 1$, o lema é válido, uma vez que

$$5^{\frac{1-1}{2}} \begin{bmatrix} L_2 & L_1 \\ L_1 & L_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = Q_L^1.$$

(ii) Assumimos que o resultado seja verdadeiro para $n = k$, com k ímpar e $k > 1$, isto é,

$$Q_L^k = 5^{\frac{k-1}{2}} \begin{bmatrix} L_{k+1} & L_k \\ L_k & L_{k-1} \end{bmatrix}.$$

(iii) Mostremos que é verdadeiro para $n = k + 2$. De fato,

$$\begin{aligned} Q_L^{k+2} &= Q_L^k \cdot Q_L^2 \\ &= 5^{\frac{k-1}{2}} \begin{bmatrix} L_{k+1} & L_k \\ L_k & L_{k-1} \end{bmatrix} \cdot 5^{\frac{2}{2}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 5^{\frac{k+1}{2}} \begin{bmatrix} 2L_{k+1} + L_k & L_{k+1} + L_k \\ 2L_k + L_{k-1} & L_k + L_{k-1} \end{bmatrix} \\ &= 5^{\frac{k+1}{2}} \begin{bmatrix} L_{k+3} & L_{k+2} \\ L_{k+2} & L_{k+1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

o que prova a igualdade para n ímpar.

□

Ampliaremos o resultado do Lema 4.8 para toda potência inteira mais adiante no texto.

O leitor deve ter notado que a n-ésima potência da matriz Q_F produz $\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$, mas a matriz $\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}$ não é produzida pela n-ésima potência de Q_L. Nesse sentido, fica o questionamento: como obter $\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}$ a partir de Q_L? Iniciemos a nossa exploração, que também inédita e não abordada em [7], mas desenvolvida em [1].

(i) Primeiramente, considere n ímpar. Uma vez que $Q_L^n = Q_L \cdot Q_L^{n-1}$, pelo Lema 4.8, temos

$$\cancel{5^{\frac{n-1}{2}}}\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \cancel{5^{\frac{n-1}{2}}}\begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix}.$$

(ii) Agora, considere n par. Como $Q_L^{n+1} = Q_L \cdot Q_L^n$, pelo Lema 4.8, temos

$$\cancel{5^{\frac{n}{2}}}\begin{bmatrix} L_{n+2} & L_{n+1} \\ L_{n+1} & L_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \cancel{5^{\frac{n}{2}}}\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_{n+2} & L_{n+1} \\ L_{n+1} & L_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot Q_F^n$$

$$\begin{bmatrix} L_{n+2} & L_{n+1} \\ L_{n+1} & L_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot Q_F^{n-1} \cdot Q_F.$$

Multiplicando por Q_F^{-1}, pela direita, os dois lados da igualdade anterior, segue

$$\begin{bmatrix} L_{n+2} & L_{n+1} \\ L_{n+1} & L_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot Q_F^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_{n+2} - L_{n+1} \\ L_n & L_{n+1} - L_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & (L_n + \cancel{L_{n+1}}) - \cancel{L_{n+1}} \\ L_n & (L_{n-1} + \cancel{L_n}) - \cancel{L_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Por (i) e (ii), acabamos de estabelecer a seguinte propriedade:

Propriedade 4.9.

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix} = Q_L \cdot Q_F^{n-1},\ n \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

Note que a Propriedade 4.9, *a priori*, é válida apenas para n natural. Todavia, será possível expandi-la para todo n inteiro mais adiante.

Com base na Propriedade 4.9, podemos facilmente demonstrar, a partir do uso do determinante, a identidade correspondente à de Cassini para números de Lucas.

Propriedade 4.10. $L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = -5(-1)^n,\ n \in \mathbb{N}.$

Demonstração. Utilizando a Propriedade 4.9,

$$\begin{vmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{vmatrix} = \det(Q_L \cdot Q_F^{n-1}) = \det(Q_L \cdot Q_F^n \cdot Q_F^{-1})$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Pela identidade de Cassini (Propriedade 4.7), temos:

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = 5(-1)^n(-1) = -5(-1)^n.$$

□

4.2.1 Formalizando a expressão dos números de Lucas com índices não-positivos

Para generalizar o Lema 4.8 para todo $n \in \mathbb{Z}$, precisamos provar que $L_{-n} = (-1)^n L_n$ e faremos isso de modo similar ao que fizemos para F_{-n} na Seção 4.1.1. Calcularemos, primeiramente $(Q_L^n)^{-1}$.

Lema 4.11. *Para $n \in \mathbb{N}$, a inversa da n-ésima potência de Q_L é dada por:*

$$(Q_L^n)^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{5^{\frac{n}{2}}} \begin{bmatrix} F_{n-1} & -F_n \\ -F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}, & \text{se } n \text{ par} \\ \frac{1}{5^{\frac{n+1}{2}}} \begin{bmatrix} L_{n-1} & -L_n \\ -L_n & L_{n+1} \end{bmatrix}, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}.$$

Demonstração. (i) Pelo Lema 4.8, para n par:

$$(Q_L^n)^{-1} = \begin{bmatrix} 5^{\frac{n}{2}} F_{n+1} & 5^{\frac{n}{2}} F_n \\ 5^{\frac{n}{2}} F_n & 5^{\frac{n}{2}} F_{n-1} \end{bmatrix}^{-1},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (Q_L^n)^{-1} &= \frac{1}{5^{\frac{n}{2}} F_{n+1} 5^{\frac{n}{2}} F_{n-1} - 5^{\frac{n}{2}} F_n 5^{\frac{n}{2}} F_n} \begin{bmatrix} 5^{\frac{n}{2}} F_{n-1} & -5^{\frac{n}{2}} F_n \\ -5^{\frac{n}{2}} F_n & 5^{\frac{n}{2}} F_{n+1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{5^{\frac{n}{2}}}{5^n (F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2)} \begin{bmatrix} F_{n-1} & -F_n \\ -F_n & F_{n+1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5^{\frac{n}{2}} (F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2)} \begin{bmatrix} F_{n-1} & -F_n \\ -F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A Propriedade 4.7 implica

$$(Q_L^n)^{-1} = \frac{1}{5^{\frac{n}{2}} (-1)^n} \begin{bmatrix} F_{n-1} & -F_n \\ -F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Como n é par:

$$(Q_L^n)^{-1} = \frac{1}{5^{\frac{n}{2}}} \begin{bmatrix} F_{n-1} & -F_n \\ -F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}.$$

(ii) Pelo Lema 4.8, para n ímpar:

$$(Q_L^n)^{-1} = \begin{bmatrix} 5^{\frac{n-1}{2}} L_{n+1} & 5^{\frac{n-1}{2}} L_n \\ 5^{\frac{n-1}{2}} L_n & 5^{\frac{n-1}{2}} L_{n-1} \end{bmatrix}^{-1},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (Q_L^n)^{-1} &= \frac{1}{5^{\frac{n-1}{2}} L_{n+1} 5^{\frac{n-1}{2}} L_{n-1} - 5^{\frac{n-1}{2}} L_n 5^{\frac{n-1}{2}} L_n} \begin{bmatrix} 5^{\frac{n-1}{2}} L_{n-1} & -5^{\frac{n-1}{2}} L_n \\ -5^{\frac{n-1}{2}} L_n & 5^{\frac{n-1}{2}} L_{n+1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{5^{\frac{n-1}{2}}}{5^{n-1} (L_{n+1} L_{n-1} - L_n^2)} \begin{bmatrix} L_{n-1} & -L_n \\ -L_n & L_{n+1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5^{\frac{n-1}{2}} (L_{n+1} L_{n-1} - L_n^2)} \begin{bmatrix} L_{n-1} & -L_n \\ -L_n & L_{n+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A Propriedade 4.10 implica

$$(Q_L^n)^{-1} = \frac{1}{5^{\frac{n-1}{2}}(-5(-1)^n)} \begin{bmatrix} L_{n-1} & -L_n \\ -L_n & L_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Como n ímpar, então:

$$\begin{aligned}(Q_L^n)^{-1} &= \frac{1}{5^{\frac{n-1}{2}}5} \begin{bmatrix} L_{n-1} & -L_n \\ -L_n & L_{n+1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5^{\frac{n+1}{2}}} \begin{bmatrix} L_{n-1} & -L_n \\ -L_n & L_{n+1} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Por (i) e (ii), está demonstrado. □

Por outro lado, note que

$$Q_L^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Com base nisso, podemos estabelecer $(Q_L^{-1})^n$.

Lema 4.12. *Para $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima potência de Q_L^{-1} é dada por:*

$$(Q_L^{-1})^n = \begin{cases} \frac{1}{5^{\frac{n}{2}}} \begin{bmatrix} F_{-n+1} & F_{-n} \\ F_{-n} & F_{-n-1} \end{bmatrix}, & \text{se } n \text{ par} \\ \frac{1}{5^{\frac{n+1}{2}}} \begin{bmatrix} L_{-n+1} & L_{-n} \\ L_{-n} & L_{-n-1} \end{bmatrix}, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}.$$

Demonstração. Vamos verificar o lema por indução.

(I) Para n par:

(i) Para $n = 2$, o resultado é verdadeiro, pois

$$\begin{aligned}\frac{1}{5^{\frac{2}{2}}} \begin{bmatrix} F_{-1} & F_{-2} \\ F_{-2} & F_{-3} \end{bmatrix} &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 4+1 & -2-3 \\ -2-3 & 1+9 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = (Q_L^{-1})^2.\end{aligned}$$

(ii) Assumimos que o resultado seja verdadeiro para $n = k$, com k par e $k > 2$ isto é,

$$(Q_L^{-1})^k = \frac{1}{5^{\frac{k}{2}}} \begin{bmatrix} F_{-k+1} & F_{-k} \\ F_{-k} & F_{-k-1} \end{bmatrix}.$$

(iii) Mostremos que é verdadeiro para $n = k + 2$. De fato,

$$\begin{aligned}
(Q_L^{-1})^{k+2} &= (Q_L^{-1})^k \cdot (Q_L^{-1})^2 \\
&= \frac{1}{5^{\frac{k}{2}}} \begin{bmatrix} F_{-k+1} & F_{-k} \\ F_{-k} & F_{-k-1} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{5^{\frac{k+2}{2}}} \begin{bmatrix} F_{-k+1} - F_{-k} & -F_{-k+1} + 2F_{-k} \\ F_{-k} - F_{-k-1} & -F_{-k} + 2F_{-k-1} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{5^{\frac{k+2}{2}}} \begin{bmatrix} (F_{-k-1} + F_{-k}) - F_{-k} & -(F_{-k-1} + F_{-k}) + 2F_{-k} \\ (F_{-k-2} + F_{-k-1}) - F_{-k-1} & -(F_{-k-2} + F_{-k-1}) + 2F_{-k-1} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{5^{\frac{k+2}{2}}} \begin{bmatrix} F_{-k-1} & -F_{-k-1} + (F_{-k-2} + F_{-k-1}) \\ F_{-k-2} & -F_{-k-2} + (F_{-k-3} + F_{-k-2}) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{5^{\frac{k+2}{2}}} \begin{bmatrix} F_{-k-1} & F_{-k-2} \\ F_{-k-2} & F_{-k-3} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Por (i), (ii) e (iii) provamos a igualdade por indução matemática para n par.

(II) Para n ímpar:

(i) Para $n = 1$, o resultado é verdadeiro, pois

$$\frac{1}{5^{\frac{1+1}{2}}} \begin{bmatrix} L_0 & L_{-1} \\ L_{-1} & L_{-2} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = Q_L^{-1}.$$

(ii) Assumimos que o resultado é verdadeiro para $n = k$, com k ímpar e $k > 1$, assim,

$$(Q_L^{-1})^k = \frac{1}{5^{\frac{k+1}{2}}} \begin{bmatrix} L_{-k+1} & L_{-k} \\ L_{-k} & L_{-k-1} \end{bmatrix}.$$

(iii) Mostremos que o resultado é verdadeiro para $n = k + 2$. De fato,

$$\begin{aligned}
(Q_L^{-1})^{k+2} &= (Q_L^{-1})^k \cdot (Q_L^{-1})^2 \\
&= \frac{1}{5^{\frac{k+1}{2}}} \begin{bmatrix} L_{-k+1} & L_{-k} \\ L_{-k} & L_{-k-1} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{5^{\frac{k+3}{2}}} \begin{bmatrix} L_{-k+1} - L_{-k} & -L_{-k+1} + 2L_{-k} \\ L_{-k} - L_{-k-1} & -L_{-k} + 2L_{-k-1} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{5^{\frac{k+3}{2}}} \begin{bmatrix} (L_{-k-1} + L_{-k}) - L_{-k} & -(L_{-k-1} - L_{-k}) + 2L_{-k} \\ (L_{-k-2} + L_{-k-1}) - L_{-k-1} & -(L_{-k-2} + L_{-k-1}) + 2L_{-k-1} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{5^{\frac{k+3}{2}}} \begin{bmatrix} L_{-k-1} & -L_{-k-1} + (L_{-k-2} + L_{-k-1}) \\ L_{-k-2} & -L_{-k-2} + (L_{-k-3} + L_{-k-2}) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{5^{\frac{k+3}{2}}} \begin{bmatrix} L_{-k-1} & L_{-k-2} \\ L_{-k-2} & L_{-k-3} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Por (i), (ii) e (iii) provamos a igualdade por indução matemática para n ímpar.
E por (I) e (II) provamos o lema. □

Antes de prosseguirmos com o resultado principal desta seção, que é a confirmação da fórmula para L_{-n}, percebida empiricamente na Seção 3.4, trabalharemos em algumas propriedades, similares e inspiradas na Propriedade 4.9, e que nos serão úteis mais adiante.

Propriedade 4.13.

$$\begin{bmatrix} L_{n-1} & -L_n \\ -L_n & L_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_n & -F_{n+1} \\ -F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. (i) Primeiramente, considere n ímpar.

Uma vez que $(Q_L^n)^{-1} = Q_L \cdot (Q_L^{n+1})^{-1}$, pelo Lema 4.11, temos

$$\frac{1}{5^{\frac{n+1}{2}}} \begin{bmatrix} L_{n-1} & -L_n \\ -L_n & L_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5^{\frac{n+1}{2}}} \begin{bmatrix} F_{(n+1)-1} & -F_{(n+1)} \\ -F_{(n+1)} & F_{(n+1)+1} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} L_{n-1} & -L_n \\ -L_n & L_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_n & -F_{n+1} \\ -F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix}.$$

(ii) Agora, considere n par.

Como $(Q_L^{n-1})^{-1} = Q_L \cdot (Q_L^n)^{-1}$, pelo Lema 4.11, temos

$$\frac{1}{5^{\frac{(n-1)+1}{2}}} \begin{bmatrix} L_{(n-1)-1} & -L_{(n-1)} \\ -L_{(n-1)} & L_{(n-1)+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5^{\frac{n}{2}}} \begin{bmatrix} F_{n-1} & -F_n \\ -F_n & F_{n+1} \end{bmatrix},$$

assim,

$$\begin{bmatrix} L_{n-2} & -L_{n-1} \\ -L_{n-1} & L_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n-1} & -F_n \\ -F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Multiplicando por $-Q_F^{-1}$, pela direita, os dois lados da igualdade anterior, segue

$$\begin{bmatrix} L_{n-2} & -L_{n-1} \\ -L_{n-1} & L_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n-1} & -F_n \\ -F_n & F_{n+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} L_{n-1} & -L_{n-2} - L_{n-1} \\ -L_n & L_{n-1} + L_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_n & -F_{n-1} - F_n \\ -F_{n+1} & F_n + F_{n+1} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} L_{n-1} & -L_n \\ -L_n & L_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_n & -F_{n+1} \\ -F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix}.$$

Por (i) e (ii), acabamos de estabelecer a propriedade. □

Propriedade 4.14.

$$\begin{bmatrix} L_{-n+1} & L_{-n} \\ L_{-n} & L_{-n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{-n} & F_{-n-1} \\ F_{-n-1} & F_{-n-2} \end{bmatrix}, n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. (i) Primeiramente, considere n ímpar.

Uma vez que $(Q_L^{-1})^n = Q_L \cdot (Q_L^{-1})^{n+1}$, pelo Lema 4.12, temos

$$\frac{1}{5^{\frac{n+1}{2}}} \begin{bmatrix} L_{-n+1} & L_{-n} \\ L_{-n} & L_{-n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5^{\frac{n+1}{2}}} \begin{bmatrix} F_{-(n+1)+1} & F_{-(n+1)} \\ F_{-(n+1)} & F_{-(n+1)-1} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} L_{-n+1} & L_{-n} \\ L_{-n} & L_{-n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{-n} & F_{-n-1} \\ F_{-n-1} & F_{-n-2} \end{bmatrix}.$$

(ii) Agora, considere n par.

Como $(Q_L^{-1})^{n-1} = Q_L \cdot (Q_L^{-1})^n$, pelo Lema 4.12, temos

$$\cancel{\frac{1}{5^{\frac{(n-1)+1}{2}}}} \begin{bmatrix} L_{-(n-1)+1} & L_{-(n-1)} \\ L_{-(n-1)} & L_{-(n-1)-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \cancel{\frac{1}{5^{\frac{n}{2}}}} \begin{bmatrix} F_{-n+1} & F_{-n} \\ F_{-n} & F_{-n-1} \end{bmatrix},$$

assim,

$$\begin{bmatrix} L_{-n+2} & L_{-n+1} \\ L_{-n+1} & L_{-n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{-n+1} & F_{-n} \\ F_{-n} & F_{-n-1} \end{bmatrix}.$$

Multiplicando por Q_F^{-1}, pela direita, os dois lados da igualdade anterior, segue

$$\begin{bmatrix} L_{-n+2} & L_{-n+1} \\ L_{-n+1} & L_{-n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{-n+1} & F_{-n} \\ F_{-n} & F_{-n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} L_{-n+1} & L_{-n+2} - L_{-n+1} \\ L_{-n} & L_{-n+1} - L_{-n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{-n} & F_{-n+1} - F_{-n} \\ F_{-n-1} & F_{-n} - F_{-n-1} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} L_{-n+1} & L_{-n} \\ L_{-n} & L_{-n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{-n} & F_{-n-1} \\ F_{-n-1} & F_{-n-2} \end{bmatrix}.$$

Por (i) e (ii), acabamos de estabelecer a propriedade. □

Na verdade, podemos deixar estabelecido, conforme [1], que:

Propriedade 4.15.

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix} = Q_L \cdot Q_F^{n-1}, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Para $n = 0$, o resultado é trivial, uma vez que

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_0 & F_{0-1} \\ F_{0-1} & F_{0-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} L_{0+1} & L_0 \\ L_0 & L_{0-1} \end{bmatrix}.$$

O caso em que n é inteiro positivo está provado na Propriedade 4.9. E o caso em que $n = -k$, tal que $n \in \mathbb{N}$, está provado na Propriedade 4.14. □

E como consequência,

Propriedade 4.16. $L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = -5(-1)^n, \ n \in \mathbb{Z}.$

Demonstração. Para $n = 0$, o resultado é trivial, uma vez que

$$L_1 L_{-1} - L_0^2 = 1 \cdot (-1) - 2^2 = -5 = -5(-1)^0.$$

O caso em que n é inteiro positivo está provado na Propriedade 4.10. Analisemos quando n é inteiro negativo. Nesse caso, $n = -k$, onde $k \in \mathbb{N}$, da Propriedade 4.14:

$$\begin{vmatrix} L_{-k+1} & L_{-k} \\ L_{-k} & L_{-k-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_{-k} & F_{-k-1} \\ F_{-k-1} & F_{-k-2} \end{vmatrix},$$

o que implica

$$L_{-k+1}L_{-k-1} - L_{-k}^2 = (6-1)(F_{-k}F_{-k-2} - F_{-k-1}^2).$$

Pela Identidade de Cassini (Propriedade 4.7), temos

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1} = -5(-1)^n.$$

□

Agora sim, estamos prontos para demonstração inédita do resultado seguinte:

Teorema 4.17. *$L_{-n} = (-1)^n L_n$, $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. A Propriedade 4.13 implica

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L_{n-1} & -L_n \\ -L_n & L_{n+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3F_n - F_{n+1} & -3F_{n+1} + F_{n+2} \\ F_n - 2F_{n+1} & -F_{n+1} + 2F_{n+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2F_n + (F_{n-2} + F_{n-1}) - F_{n+1} & -3F_{n+1} + (F_n + F_{n+1}) \\ \cancel{F_n} - F_{n+1} - (F_{n-1} + \cancel{F_n}) & -\cancel{F_{n+1}} + F_{n+2} + (F_n + \cancel{F_{n+1}}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_n + F_{n-2} + \cancel{F_{n+1}} - \cancel{F_{n+1}} & -F_{n+1} - (F_{n-1} + \cancel{F_n}) + \cancel{F_n} \\ -F_{n-1} - F_{n+1} & F_n + F_{n+2} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} L_{n-1} & -L_n \\ -L_n & L_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n + F_{n-2} & -F_{n-1} - F_{n+1} \\ -F_{n-1} - F_{n+1} & F_n + F_{n+2} \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

A Propriedade 4.14 implica

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L_{-n+1} & L_{-n} \\ L_{-n} & L_{-n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3F_{-n} + F_{-n-1} & 3F_{-n-1} + F_{-n-2} \\ F_{-n} + 2F_{-n-1} & F_{-n-1} + 2F_{-n-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2F_{-n} + F_{-n+1} & 2F_{-n-1} + F_{-n} \\ F_{-n-1} + F_{-n+1} & F_{-n-2} + F_{-n} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} L_{-n+1} & L_{-n} \\ L_{-n} & L_{-n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{-n} + F_{-n+2} & F_{-n-1} + F_{-n+1} \\ F_{-n-1} + F_{-n+1} & F_{-n-2} + F_{-n} \end{bmatrix}.$$

Pelo Teorema 4.5, temos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L_{-n+1} & L_{-n} \\ L_{-n} & L_{-n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (-1)^{n+1}F_n + (-1)^{n-2+1}F_{n-2} & (-1)^{n+1+1}F_{n+1} + (-1)^{n-1+1}F_{n-1} \\ (-1)^{n+1+1}F_{n+1} + (-1)^{n-1+1}F_{n-1} & (-1)^{n+2+1}F_{n+2} + (-1)^{n+1}F_n \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{n+1} \begin{bmatrix} F_n + F_{n-2} & -F_{n+1} - F_{n-1} \\ -F_{n+1} - F_{n-1} & F_{n+2} + F_n \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

implicando

$$(-1)^{n+1} \begin{bmatrix} L_{-n+1} & L_{-n} \\ L_{-n} & L_{-n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n + F_{n-2} & -F_{n+1} - F_{n-1} \\ -F_{n+1} - F_{n-1} & F_{n+2} + F_n \end{bmatrix}.$$

Pela equação (4.5), temos:

$$(-1)^{n+1}\begin{bmatrix} L_{-n+1} & L_{-n} \\ L_{-n} & L_{-n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{n-1} & -L_n \\ -L_n & L_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Das entradas localizadas na primeira linha e segunda coluna das matrizes da equação, segue que:

$$(-1)^{n+1}L_{-n} = -L_n \implies L_{-n} = (-1)^n L_n.$$

□

Utilizaremos tais observações para completar a Definição 3.2, da mesma maneira como fizemos com os números de Fibonacci, ou seja, definimos $L_0 = 2$ e $L_{-n} = (-1)^n L_n$, com $n \in \mathbb{N}$. Verificaremos agora que a fórmula de Binet para os números de Lucas também permanece funcionando com os índices inteiros não positivos. De fato,

- Para $n = 0$:
$$\phi^0 + \phi_2^0 = 1 + 1 = 2 = L_0.$$
- Se $n \in \mathbb{N}$, para $-n$:
$$\phi^{-n} + \phi_2^{-n} = \frac{1}{\phi^n} + \frac{1}{\phi_2^n} = \frac{\phi_2^n + \phi^n}{(\phi\phi_2)^n} = (-1)^n(\phi^n + \phi_2^n) = (-1)^n L_n = L_{-n}.$$

Dessa forma, conseguimos estabelecer o Teorema de Binet para todo n inteiro.

Teorema 4.18 (Binet)**.** *Para $n \in \mathbb{Z}$, considerando $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$,*

(a) o n-ésimo número de Fibonacci é dado por

$$F_n = \frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2};$$

(b) o n-ésimo número de Lucas é dado por

$$L_n = \phi^n + \phi_2^n.$$

4.2.2 Q_L^n para qualquer n inteiro

Com essas informações, podemos generalizar o Lema 4.8 para que n seja qualquer número inteiro.

Teorema 4.19. *Para $n \in \mathbb{Z}$, a n-ésima potência de Q_L é dada por:*

$$Q_L^n = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}}\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}, & \text{se } n \text{ é par} \\ 5^{\frac{n-1}{2}}\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Demonstração. O caso em que n é inteiro positivo está provado no Lema 4.8. Analisemos quando n é inteiro negativo. Nesse caso, $n = -k$, onde $k \in \mathbb{N}$ e $Q_L^n = Q_L^{-k} = (Q_L^k)^{-1}$.

(I) Considere k par, ou seja, n par.

Pelo Teorema 2.1 e a Propriedade 4.7, temos

$$\begin{aligned} Q_L^n = (Q_L^k)^{-1} &= \begin{bmatrix} 5^{\frac{k}{2}}F_{k+1} & 5^{\frac{k}{2}}F_k \\ 5^{\frac{k}{2}}F_k & 5^{\frac{k}{2}}F_{k-1} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{5^{2\frac{k}{2}}(-1)^k}\begin{bmatrix} 5^{\frac{k}{2}}F_{k-1} & -5^{\frac{k}{2}}F_k \\ -5^{\frac{k}{2}}F_k & 5^{\frac{k}{2}}F_{k+1} \end{bmatrix} \\ &= 5^{-k}(-1)^k 5^{\frac{k}{2}}\begin{bmatrix} F_{k-1} & -F_k \\ -F_k & F_{k+1} \end{bmatrix} \\ &= 5^{\frac{-k}{2}}\begin{bmatrix} (-1)^k F_{k-1} & (-1)^{k+1}F_k \\ (-1)^{k+1}F_k & (-1)^k F_{k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Mas, perceba que,

$$F_n = F_{-k} = (-1)^{k+1}F_k,$$

$$F_{n+1} = F_{-k+1} = F_{-(k-1)} = (-1)^{(k-1)+1}F_{k-1} = (-1)^k F_{k-1}$$

e

$$F_{n-1} = F_{-k-1} = F_{-(k+1)} = (-1)^{(k+1)+1}F_{k+1} = (-1)^{k+2}F_{k+1} = (-1)^k F_{k+1}.$$

Assim, segue que

$$Q_L^n = 5^{\frac{n}{2}}\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Antes de passarmos para o caso em que n é impar, analisemos quando $n = 0$. Nessa situação, o teorema é verdadeiro, pois

$$Q_F^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & F_0 \\ F_0 & F_{-1} \end{bmatrix} = 5^{\frac{0}{2}}\begin{bmatrix} F_{0+1} & F_0 \\ F_0 & F_{0-1} \end{bmatrix}.$$

Portanto, o teorema é verdadeiro para quando n é par.

(II) Considere k ímpar, ou seja, n ímpar.

Usando o Teorema 2.1 e a Propriedade 4.10, temos

$$\begin{aligned} Q_L^n = (Q_L^k)^{-1} &= \begin{bmatrix} 5^{\frac{k-1}{2}}L_{k+1} & 5^{\frac{k-1}{2}}L_k \\ 5^{\frac{k-1}{2}}L_k & 5^{\frac{k-1}{2}}L_{k-1} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{5^{2\frac{(k-1)}{2}}5(-1)^{k+1}}\begin{bmatrix} 5^{\frac{k-1}{2}}L_{k-1} & -5^{\frac{k-1}{2}}L_k \\ -5^{\frac{k-1}{2}}L_k & 5^{\frac{k-1}{2}}L_{k+1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{5^{\frac{k-1}{2}}}{5^{k-1}5(-1)^2(-1)^{k-1}}\begin{bmatrix} L_{k-1} & -L_k \\ -L_k & L_{k+1} \end{bmatrix} \\ &= 5^{\frac{-k-1}{2}}\begin{bmatrix} (-1)^{k-1}L_{k-1} & (-1)^k L_k \\ (-1)^k L_k & (-1)^{k-1}L_{k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$L_n = L_{-k} = (-1)^k L_k,$$

$$L_{n+1} = L_{-k+1} = L_{-(k-1)} = (-1)^{k-1}L_{k-1}$$

e

$$L_{n-1} = L_{-k-1} = L_{-(k+1)} = (-1)^{k+1}L_{k+1} = (-1)^{k-1}L_{k+1},$$

temos

$$Q_L^n = 5^{\frac{n-1}{2}} \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Portanto, o teorema é verdadeiro para quando n é ímpar.

□

4.3 Identidades de Fibonacci e Lucas

Nesta seção, vamos exemplificar como podemos obter identidades envolvendo os números de Fibonacci usando operações com a matriz Q_F. E demonstraremos algumas identidades que conectam os números de Lucas com os de Fibonacci, através da matriz Q_L.

Propriedade 4.20. $F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1},\ m, n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Observe que $Q_F^{m+n} = Q_F^m \cdot Q_F^n$. Isto posto, do Teorema 4.6,

$$\begin{bmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{m+1}F_{n+1} + F_mF_n & F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1} \\ F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n & F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{4.6}$$

Das entradas localizadas na primeira linha e segunda coluna das matrizes da equação (4.6), segue que

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}.$$

□

Propriedade 4.21. $F_{m-n} = (-1)^n(F_mF_{n+1} - F_{m+1}F_n),\ m, n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Observe que $Q_F^{m-n} = Q_F^m \cdot (Q_F^n)^{-1}$. Todavia,

$$(Q_F^n)^{-1} = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(-1)^n} \begin{bmatrix} F_{n-1} & -F_n \\ -F_n & F_{n+1} \end{bmatrix} = (-1)^n \begin{bmatrix} F_{n-1} & -F_n \\ -F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Sendo assim, do Teorema 4.6,

$$\begin{bmatrix} F_{m-n+1} & F_{m-n} \\ F_{m-n} & F_{m-n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{bmatrix} \cdot (-1)^n \begin{bmatrix} F_{n-1} & -F_n \\ -F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Realizando a multiplicação de matrizes:

$$\begin{bmatrix} F_{m-n+1} & F_{m-n} \\ F_{m-n} & F_{m-n-1} \end{bmatrix} = (-1)^n \begin{bmatrix} F_{m+1}F_{n-1} - F_mF_n & F_mF_{n+1} - F_{m+1}F_n \\ F_mF_{n-1} - F_{m-1}F_n & F_{m-1}F_{n+1} - F_mF_n \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Das entradas localizadas na primeira linha e segunda coluna das matrizes da equação (4.7), segue que

$$F_{m-n} = (-1)^n(F_mF_{n+1} - F_{m+1}F_n).$$

□

Propriedade 4.22. $L_n = F_{n-1} + F_{n+1},\ n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Pela Propriedade 4.15,

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3F_n + F_{n-1} & 3F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_n + 2F_{n-1} & F_{n-1} + 2F_{n-2} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n + F_{n+2} & F_{n-1} + F_{n+1} \\ F_{n-1} + F_{n+1} & F_{n-2} + F_n \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

Comparando as entradas da primeira linha e segunda coluna nas matrizes da igualdade anterior, segue o resultado. □

Propriedade 4.23. $L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Igualando o traço das matrizes na equação (4.8), temos:

$$\begin{aligned} L_{n+1} + L_{n-1} &= F_n + F_{n+2} + F_{n-2} + F_n \\ &= 2F_n + F_{n+2} + F_{n-2} \\ &= 2F_n + (F_n + F_{n+1}) + F_{n-2} \\ &= 3F_n + F_{n+1} + F_{n-2} \\ &= 3F_n + (F_n + F_{n-1}) + F_{n-2} \\ &= 4F_n + F_{n-1} + F_{n-2} \\ &= 4F_n + F_n \\ &= 5F_n. \end{aligned}$$

□

Outra demonstração para a Propriedade 4.23:

Demonstração. Multiplicando por Q_L, pela esquerda, os dois lados da igualdade da Propriedade 4.15, segue:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot Q_L \cdot Q_F^{n-1}$$

$$\begin{bmatrix} 3L_{n+1} + L_n & 3L_n + L_{n-1} \\ L_{n+1} + 2L_n & L_n + 2L_{n-1} \end{bmatrix} = Q_L^2 \cdot Q_F^{n-1}.$$

Pelo Teorema 4.19, temos $Q_L^2 = 5 \begin{bmatrix} F_{2+1} & F_2 \\ F_2 & F_{2-1} \end{bmatrix} = 5Q_F^2$, então:

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} + L_{n+3} & L_n + L_{n+2} \\ L_n + L_{n+2} & L_{n-1} + L_{n+1} \end{bmatrix} = 5^{\frac{2}{2}} Q_F^2 \cdot Q_F^{n-1},$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} + L_{n+3} & L_n + L_{n+2} \\ L_n + L_{n+2} & L_{n-1} + L_{n+1} \end{bmatrix} = 5Q_F^{n+1},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} + L_{n+3} & L_n + L_{n+2} \\ L_n + L_{n+2} & L_{n-1} + L_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5F_{n+2} & 5F_{n+1} \\ 5F_{n+1} & 5F_n \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

Comparando as entradas da segunda linha e segunda coluna nas matrizes da equação (4.9), segue o resultado. □

Propriedade 4.24. $L_n + F_n = 2F_{n+1},\ n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Somando Q_F^n em ambos os lados da equação matricial (4.8), temos:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_n + F_{n+2} & F_{n-1} + F_{n+1} \\ F_{n-1} + F_{n+1} & F_{n-2} + F_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_n + F_{n+2} + F_{n+1} & F_{n-1} + F_{n+1} + F_n \\ F_{n-1} + F_{n+1} + F_n & F_{n-2} + F_n + F_{n-1} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

O que implica

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} + F_{n+1} & L_n + F_n \\ L_n + F_n & L_{n-1} + F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2F_{n+2} & 2F_{n+1} \\ 2F_{n+1} & 2F_n \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

Comparando as entradas da primeira linha e segunda coluna na igualdade matricial (4.10), obtemos a identidade desejada. □

Propriedade 4.25. $L_n - F_n = 2F_{n-1},\ n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Subtraindo Q_F^n em ambos os lados da equação matricial (4.8), temos:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_n + F_{n+2} & F_{n-1} + F_{n+1} \\ F_{n-1} + F_{n+1} & F_{n-2} + F_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_n + F_{n+2} - F_{n+1} & F_{n-1} + F_{n+1} - F_n \\ F_{n-1} + F_{n+1} - F_n & F_{n-2} + F_n - F_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2F_n + \cancel{F_{n+1}} - \cancel{F_{n+1}} & 2F_{n-1} + \cancel{F_n} - \cancel{F_n} \\ 2F_{n-1} + \cancel{F_n} - \cancel{F_n} & 2F_{n-2} + \cancel{F_{n-1}} - \cancel{F_{n-1}} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Implicando

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} - F_{n+1} & L_n - F_n \\ L_n - F_n & L_{n-1} - F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2F_n & 2F_{n-1} \\ 2F_{n-1} & 2F_{n-2} \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

Comparando as entradas da primeira linha e segunda coluna na igualdade matricial (4.11), obtemos a identidade desejada. □

Propriedade 4.26. $L_n^2 - F_n^2 = 4F_{n+1}F_{n-1},\ n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Das Propriedades 4.24 e 4.25, temos:

$$(L_n + F_n)(L_n - F_n) = 2F_{n+1}2F_{n-1},$$

isto é,

$$L_n^2 - F_n^2 = 4F_{n+1}F_{n-1}.$$

□

Propriedade 4.27. $L_n^2 - 4(-1)^n = 5F_n^2,\ n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Somando as igualdades produzidas nas Propriedades 4.7 e 4.16, temos:

$$-5(-1)^n + (-1)^n = L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 + F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2,$$

isto é,

$$L_n^2 - 4(-1)^n = L_{n+1}L_{n-1} + F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2.$$

Usando a Propriedade 4.22,

$$\begin{aligned}
L_n^2 - 4(-1)^n &= (F_n + F_{n+2})(F_{n-2} + F_n) + F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 \\
&= F_nF_{n-2} + \cancel{F_nF_n} + F_{n+2}F_{n-2} + F_{n+2}F_n + F_{n+1}F_{n-1} - \cancel{F_n^2} \\
&= F_nF_{n-2} + (F_n + F_{n+1})F_{n-2} + (F_n + F_{n+1})F_n + F_{n+1}F_{n-1} \\
&= F_nF_{n-2} + F_nF_{n-2} + F_{n+1}F_{n-2} + F_nF_n + F_{n+1}F_n + F_{n+1}F_{n-1} \\
&= F_n^2 + F_nF_{n-2} + F_nF_{n-2} + F_{n+1}F_{n-2} + F_{n+1}F_n + F_{n+1}F_{n-1} \\
&= F_n^2 + F_nF_{n-2} + F_nF_{n-2} + F_{n+1}(F_{n-2} + F_{n-1}) + F_{n+1}F_n \\
&= F_n^2 + F_nF_{n-2} + F_nF_{n-2} + F_{n+1}F_n + F_{n+1}F_n \\
&= F_n^2 + 2F_nF_{n-2} + 2F_{n+1}F_n \\
&= F_n^2 + 2F_nF_{n-2} + 2(F_{n-1} + F_n)F_n \\
&= F_n^2 + 2F_nF_{n-2} + 2F_nF_{n-1} + 2F_nF_n \\
&= 3F_n^2 + 2F_n(F_{n-2} + F_{n-1}) \\
&= 3F_n^2 + 2F_nF_n \\
&= 5F_n^2.
\end{aligned}$$

□

Propriedade 4.28. $L_{m+n} = L_{m+1}F_n + L_mF_{n-1},\ n, m \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Da Propriedade 4.15, temos:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} L_{m+n+1} & L_{m+n} \\ L_{m+n} & L_{m+n-1} \end{bmatrix} &= Q_L \cdot Q_F^{m+n-1} \\
&= Q_L \cdot Q_F^{m-1} \cdot Q_F^n \\
&= \begin{bmatrix} L_{m+1} & L_m \\ L_m & L_{m-1} \end{bmatrix} \cdot Q_F^n,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} L_{m+n+1} & L_{m+n} \\ L_{m+n} & L_{m+n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{m+1} & L_m \\ L_m & L_{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Implicando

$$\begin{bmatrix} L_{m+n+1} & L_{m+n} \\ L_{m+n} & L_{m+n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{m+1}F_{n+1} + L_mF_n & L_{m+1}F_n + L_mF_{n-1} \\ L_mF_{n+1} + L_{m-1}F_n & L_mF_n + L_{m-1}F_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

Comparando as entradas da primeira linha e segunda coluna na igualdade matricial (4.12), obtemos a identidade desejada. □

Propriedade 4.29. $2L_{m+n} = L_mL_n + 5F_mF_n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Somando os termos da diagonal secundária na equação (4.12), temos:

$$\begin{aligned}
2L_{m+n} &= L_{m+1}F_n + L_mF_{n-1} + L_mF_{n+1} + L_{m-1}F_n \\
&= L_m(F_{n-1} + F_{n+1}) + (L_{m-1} + L_{m+1})F_n.
\end{aligned}$$

Substituindo $F_{n-1} + F_{n+1}$ de acordo com a Propriedade 4.22 e $L_{m-1} + L_{m+1}$ de acordo com a Propriedade 4.23, obtemos a propriedade desejada. □

Propriedade 4.30. $2F_{m+n} = F_mL_n + F_nL_m,\ n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Somando os termos da diagonal secundária na equação (4.6), temos:

$$\begin{aligned} 2F_{m+n} &= F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1} + F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_n \\ &= F_n(F_{m-1} + F_{m+1}) + F_m(F_{n-1} + F_{n+1}). \end{aligned}$$

Substituindo $F_{m-1} + F_{m+1}$ e $F_{n-1} + F_{n+1}$ de acordo com a Propriedade 4.22, obtemos a propriedade desejada. □

Propriedade 4.31. $5F_{m+n} = L_nL_{m+1} + L_{n-1}L_m,\ n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Multiplicando $\begin{bmatrix} L_{m+1} & L_m \\ L_m & L_{m-1} \end{bmatrix}$ por $\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}$, de acordo com a equação (4.8), obtemos:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} L_{m+1} & L_m \\ L_m & L_{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_m + F_{m+2} & F_{m-1} + F_{m+1} \\ F_{m-1} + F_{m+1} & F_{m-2} + F_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_n + F_{n+2} & F_{n-1} + F_{n+1} \\ F_{n-1} + F_{n+1} & F_{n-2} + F_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Implicando, nas entradas da primeira linha e segunda coluna:

$$L_{m+1}L_n + L_mL_{n-1} = (F_m + F_{m+2})(F_{n-1} + F_{n+1}) + (F_{m-1} + F_{m+1})(F_{n-2} + F_n),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} L_nL_{m+1} + L_{n-1}L_m &= (F_m + F_{m+2})(F_{n-1} + F_{n+1}) + (F_{m-1} + F_{m+1})(F_{n-2} + F_n) \\ &= F_mF_{n-1} + F_{m+2}F_{n-1} + F_mF_{n+1} + F_{m+2}F_{n+1} \\ &\quad + F_{m-1}F_{n-2} + F_{m+1}F_{n-2} + F_{m-1}F_n + F_{m+1}F_n \\ &= (F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}) + (F_{m+1} + F_m)F_{n-1} + F_{m-1}F_n \\ &\quad + (F_{m+1} + F_m)F_{n+1} + F_{m+1}F_{n-2} + F_mF_{n+1} + F_{m-1}F_{n-2} \\ &= (F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}) + (F_{m+1}(F_{n-2} + F_{n-1}) + F_mF_{n-1}) \\ &\quad + F_{m+1}(F_{n-1} + F_n) + 2F_m(F_{n-1} + F_n) + F_{m-1}F_{n-2} + F_{m-1}F_n \\ &= 2(F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}) + 2F_mF_{n-1} + F_{m+1}F_n \\ &\quad + F_{m+1}F_{n-1} + 2F_mF_n + F_{m-1}F_{n-2} + F_{m-1}F_n \\ &= 3(F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}) + F_mF_{n-1} + F_{m+1}F_{n-1} \\ &\quad + F_mF_n + F_m(F_{n-2} + F_{n-1}) + F_{m-1}F_{n-2} + F_{m-1}F_n \\ &= 3(F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}) + 2F_mF_{n-1} + F_mF_n \\ &\quad + F_{m+1}F_{n-1} + (F_{m-1} + F_m)F_{n-2} + F_{m-1}F_n \\ &= 3(F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}) + 2F_mF_{n-1} \\ &\quad + F_{m+1}(F_{n-2} + F_{n-1}) + (F_{m-1} + F_m)F_n \\ &= 5(F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}). \end{aligned}$$

Substituindo $F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}$ de acordo com a Propriedade 4.20, obtemos a propriedade desejada. □

Propriedade 4.32. $L_{m-n} = (-1)^{n-1}(F_mL_{n+1} - F_{m+1}L_n),\ n, m \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Pela Propriedade 4.15, temos:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} L_{m-n+1} & L_{m-n} \\ L_{m-n} & L_{m-n-1} \end{bmatrix} &= Q_L \cdot Q_F^{m-n-1} \\ &= Q_L \cdot Q_F^{-n-1} \cdot Q_F^m \\ &= \begin{bmatrix} L_{-n+1} & L_{-n} \\ L_{-n} & L_{-n-1} \end{bmatrix} \cdot Q_F^m.\end{aligned}$$

E pelo Teorema 4.17, temos:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} L_{m-n+1} & L_{m-n} \\ L_{m-n} & L_{m-n-1} \end{bmatrix} &= (-1)^n \begin{bmatrix} -L_{n-1} & L_n \\ L_n & -L_{n+1} \end{bmatrix} \cdot Q_F^m \\ &= (-1)^{n-1} \begin{bmatrix} L_{n-1} & -L_n \\ -L_n & L_{n+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Implicando

$$\begin{bmatrix} L_{m-n+1} & L_{m-n} \\ L_{m-n} & L_{m-n-1} \end{bmatrix} = (-1)^{n-1} \begin{bmatrix} L_{n-1}F_{m+1} - L_nF_m & L_{n-1}F_m - L_nF_{m-1} \\ L_{n+1}F_m - L_nF_{m+1} & L_{n+1}F_{m-1} - L_nF_m \end{bmatrix}. \tag{4.13}$$

Comparando as entradas da primeira linha e segunda coluna na igualdade matricial (4.32), obtemos a identidade desejada. □

Propriedade 4.33. $5F_{m-n} = (-1)^{n-1}(L_mL_{n+1} - L_{m+1}L_n),\ n, m \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Igualando o traço das matrizes na equação (4.13), temos:

$$\begin{aligned}L_{m-n+1} + L_{m-n-1} &= (-1)^{n-1}(L_{n-1}F_{m+1} - L_nF_m) + (-1)^{n-1}(L_{n+1}F_{m-1} - L_nF_m) \\ &= (-1)^{n-1}(L_{n-1}F_{m+1} + L_{n+1}F_{m-1} + L_nF_{m+1} \\ &\quad - L_nF_{m+1} - L_nF_m - L_nF_m) \\ &= (-1)^{n-1}((L_{n-1} + L_n)F_{m+1} + L_{n+1}F_{m-1} - L_nF_m - L_n(F_m + F_{m+1})) \\ &= (-1)^{n-1}(L_{n+1}(F_{m-1} + F_{m+1}) - L_n(F_m + F_{m+2})).\end{aligned}$$

Substituindo $L_{m-n+1} + L_{m-n-1}$ de acordo com a Propriedade 4.23 e $F_{m-1} + F_{m+1}$ e $F_m + F_{m+2}$ de acordo com a Propriedade 4.22, temos a propriedade desejada. □

4.4 Polinômios característicos

4.4.1 Polinômios de Fibonacci

Observe que o polinômio característico da matriz $Q_F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é dado por

$$p_{Q_F}(x) = x^2 - tr(Q_F) + \det(Q_F) = x^2 - x - 1.$$

Nesse contexto, obtemos a equação característica de Q_F ao igualar $p_{Q_F}(x)$ a zero, $x^2 - x - 1 = 0$. A partir dessa equação, podemos calcular os autovalores de Q_F:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

isto é, existem duas raízes de $p_Q(x) = 0$, as quais também são autovalores de Q_F. São eles $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, ou seja, são os mesmos irracionais que aparecem nas fórmulas de Binet.

Os autovetores, $\boldsymbol{v}$, associados a um autovalor λ de Q_F, podem ser encontrados igualando $(Q_F - \lambda I)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Considerando $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, temos:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} a - a\lambda + b \\ a - b\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo a equação para $\lambda = \phi$, temos que os autovetores de Q_F são da forma $\boldsymbol{v_1} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\phi} \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Para $\lambda = \phi_2$, temos que os autovetores são da forma $\boldsymbol{v_2} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\phi_2} \end{bmatrix}$, com $\beta \in \mathbb{R}^*$. Assim, pelo Teorema 2.12, temos:

$$\begin{aligned} Q_F^n &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\phi} & \frac{1}{\phi_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\phi_2} & -1 \\ -\frac{1}{\phi} & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\frac{1}{\phi_2} - \frac{1}{\phi}} \\ &= \frac{\phi\phi_2}{\phi - \phi_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\phi} & \frac{1}{\phi_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\phi_2} & -1 \\ -\frac{1}{\phi} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pela equação (3.1),

$$\begin{aligned} Q_F^n &= \frac{-1}{\phi - \phi_2} \begin{bmatrix} \phi^n & \phi_2^n \\ \phi^{n-1} & \phi_2^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\phi_2} & -1 \\ -\frac{1}{\phi} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{-1}{\phi - \phi_2} \begin{bmatrix} \frac{\phi^n}{\phi_2} - \frac{\phi_2^n}{\phi} & -\phi^n + \phi_2^n \\ \frac{\phi^{n-1}}{\phi_2} - \frac{\phi_2^{n-1}}{\phi} & -\phi^{n-1} + \phi_2^{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\phi^{n+1} - {\phi_2}^{n+1}}{\phi - \phi_2} & \frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2} \\ \frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2} & \frac{\phi^{n-1} - \phi_2^{n-1}}{\phi - \phi_2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Usando o Teorema 4.6, sabemos que

$$\begin{bmatrix} \frac{\phi^{n+1} - {\phi_2}^{n+1}}{\phi - \phi_2} & \frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2} \\ \frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2} & \frac{\phi^{n-1} - \phi_2^{n-1}}{\phi - \phi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{4.14}$$

Comparando as entradas da primeira linha e segunda coluna na equação matricial (4.14), acabamos de verificar o item (a) do Teorema 4.18 (Binet): $F_n = \dfrac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2}$, para $n \in \mathbb{Z}$. Ou seja, esta é outra forma de se provar o teorema em questão, mas dessa vez usando matrizes.

Agora, o polinômio característico de $Q_F^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$ é dado por

$$p_{Q_F^n}(x) = x^2 - tr(Q_F^n) + \det(Q_F^n) = x^2 - (F_{n+1} + F_{n-1})x + F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2.$$

Pela identidade de Cassini (Propriedade 4.7) e como $F_{n-1} + F_{n+1} = F_n + 2F_{n-1}$, podemos reescrever o polinômio característico como $p_{Q_F^n}(x) = x^2 - (F_n + 2F_{n-1})x + (-1)^n$.

Sabemos que os autovalores de Q_F^n são a n-ésima potência dos autovalores de Q_F, ou seja, $\phi^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ e $\phi_2^n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Por outro lado, os autovalores também são as raízes da equação característica, $x^2 - (F_n + 2F_{n-1})x + (-1)^n = 0$, calculando suas raízes, obtemos:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-(F_n + 2F_{n-1})) \pm \sqrt{(-(F_n + 2F_{n-1}))^2 - 4(-1)^n}}{2} \\ &= \frac{F_n + 2F_{n-1} \pm \sqrt{(-(F_{n-1} + F_{n+1}))^2 - 4(-1)^n}}{2}. \end{aligned}$$

Pela Propriedade 3.5,

$$x = \frac{F_n + 2F_{n-1} \pm |F_n|\sqrt{5}}{2} = \frac{F_n + 2F_{n-1} \pm F_n\sqrt{5}}{2}.$$

Concluímos, portanto, que os autovalores de Q_F^n são

$$\phi^n = \frac{F_n + 2F_{n-1} + F_n\sqrt{5}}{2} \tag{4.15}$$

e

$$\phi_2^n = \frac{F_n + 2F_{n-1} - F_n\sqrt{5}}{2}. \tag{4.16}$$

Isto significa que acabamos de obter uma forma de escrever as potências n-ésimas do número de ouro e de seu conjugado em função do n-ésimo e $(n-1)$-ésimo termos da sequência de Fibonacci.

Isolando F_{n-1} na equação (4.15), obtemos:

$$F_{n-1} = \frac{2\phi^n - F_n(1+\sqrt{5})}{2}. \tag{4.17}$$

Substituindo na equação (4.16) o valor de F_{n-1} conforme obtido na equação (4.17), obtemos

$$\phi_2^n = \frac{F_n + 2\left(\frac{2\phi^n - F_n(1+\sqrt{5})}{2}\right) - F_n\sqrt{5}}{2},$$

isolando F_n

$$F_n = \frac{\phi^n - \phi_2^n}{\sqrt{5}}.$$

Pela equação (3.9), concluímos

$$F_n = \frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2}.$$

Desse modo, acabamos de verificar novamente o item (a) do Teorema 4.18 (Binet): $F_n = \dfrac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2}$, para $n \in \mathbb{Z}$. Ou seja, esta é outra forma de se provar o teorema em questão, também usando matrizes.

4.4.2 Polinômios de Lucas

O polinômio característico da matriz $Q_L = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é

$$p_{Q_L}(x) = x^2 - tr(Q_L) + \det(Q_L) = x^2 - 5x + 5.$$

Para obter os autovalores de Q_L, calculemos as raízes da equação característica, $x^2 - 5x + 5 = 0$. Assim,

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(5)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Denote os autovalores de Q_L por $\varphi = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ e $\varphi_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$. Note que, interessantemente, $\varphi = \sqrt{5}\phi$ e $\varphi_2 = -\sqrt{5}\phi_2$, o que evidencia a relação entre o número de ouro e os números de Lucas.

Os autovetores, $\boldsymbol{v}$, associados a um autovalor λ de Q_L, podem ser encontrados igualando $(Q_L - \lambda I)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$. Considerando $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} a(3-\lambda) + b \\ a + b(2-\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo a equação para $\lambda = \sqrt{5}\phi$, temos autovetores da forma $\boldsymbol{v_1} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{5}\phi - 3 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\phi} \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Agora, considerando $\lambda = -\sqrt{5}\phi_2$, temos autovetores da forma $\boldsymbol{v_2} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{5}\phi_2 - 3 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\phi_2} \end{bmatrix}$, com $\beta \in \mathbb{R}^*$. Assim, pelo Teorema 2.12, temos:

$$Q_L^n = \frac{\phi\phi_2}{\phi - \phi_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\phi} & \frac{1}{\phi_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{5}\phi & 0 \\ 0 & -\sqrt{5}\phi_2 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\phi_2} & -1 \\ -\frac{1}{\phi} & 1 \end{bmatrix}.$$

Pelas equações (3.1) e (3.9), segue

$$\begin{aligned}
Q_L^n &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \left(\sqrt{5}\phi\right)^n & \left(-\sqrt{5}\phi_2\right)^n \\ \frac{\left(\sqrt{5}\phi\right)^n}{\phi} & \frac{\left(-\sqrt{5}\phi_2\right)^n}{\phi_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\phi_2} & -1 \\ -\frac{1}{\phi} & 1 \end{bmatrix} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \frac{\left(\sqrt{5}\phi\right)^n}{\phi_2} - \frac{\left(-\sqrt{5}\phi_2\right)^n}{\phi} & -\left(\sqrt{5}\phi\right)^n + \left(-\sqrt{5}\phi_2\right)^n \\ \frac{\left(\sqrt{5}\phi\right)^n}{\phi\phi_2} - \frac{\left(-\sqrt{5}\phi_2\right)^n}{\phi\phi_2} & -\frac{\left(\sqrt{5}\phi\right)^n}{\phi} + \frac{\left(-\sqrt{5}\phi_2\right)^n}{\phi_2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{5}^{n-1}\phi^n\phi - (-1)^n\sqrt{5}^{n-1}\phi_2^n\phi_2 & \sqrt{5}^{n-1}\phi^n - (-1)^n\sqrt{5}^{n-1}\phi_2^n \\ \sqrt{5}^{n-1}\phi^n - (-1)^n\sqrt{5}^{n-1}\phi_2^n & \sqrt{5}^{n-1}\phi^n\phi^{-1} - (-1)^n\sqrt{5}^{n-1}\phi_2^n\phi_2^{-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{5}^n\sqrt{5}^{-1}\phi^{n+1} - (-1)^n\sqrt{5}^n\sqrt{5}^{-1}\phi_2^{n+1} & \sqrt{5}^n\sqrt{5}^{-1}\phi^n - (-1)^n\sqrt{5}^n\sqrt{5}^{-1}\phi_2^n \\ \sqrt{5}^n\sqrt{5}^{-1}\phi^n - (-1)^n\sqrt{5}^n\sqrt{5}^{-1}\phi_2^n & \sqrt{5}^n\sqrt{5}^{-1}\phi^{n-1} - (-1)^n\sqrt{5}^n\sqrt{5}^{-1}\phi_2^{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \sqrt{5}^n \begin{bmatrix} \frac{\phi^{n+1} - (-1)^n\phi_2^{n+1}}{\sqrt{5}} & \frac{\phi^n - (-1)^n\phi_2^n}{\sqrt{5}} \\ \frac{\phi^n - (-1)^n\phi_2^n}{\sqrt{5}} & \frac{\phi^{n-1} - (-1)^n\phi_2^{n-1}}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\
&= \sqrt{5}^n \begin{bmatrix} \frac{\phi^{n+1} - (-1)^n\phi_2^{n+1}}{\phi - \phi_2} & \frac{\phi^n - (-1)^n\phi_2^n}{\phi - \phi_2} \\ \frac{\phi^n - (-1)^n\phi_2^n}{\phi - \phi_2} & \frac{\phi^{n-1} - (-1)^n\phi_2^{n-1}}{\phi - \phi_2} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

O que indica que fomos capazes de expressar Q_L^n em uma única matriz.
Voltemos a expressar Q_L^n em duas matrizes, dividindo a paridade de n:

$$Q_L^n = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} \frac{\phi^{n+1}-\phi_2^{n+1}}{\phi-\phi_2} & \frac{\phi^n-\phi_2^n}{\phi-\phi_2} \\ \frac{\phi^n-\phi_2^n}{\phi-\phi_2} & \frac{\phi^{n-1}-\phi_2^{n-1}}{\phi-\phi_2} \end{bmatrix}, & \text{se } n \text{ par} \\ 5^{\frac{n-1}{2}} \begin{bmatrix} \phi^{n+1}+\phi_2^{n+1} & \phi^n+\phi_2^n \\ \phi^n+\phi_2^n & \phi^{n-1}+\phi_2^{n-1} \end{bmatrix}, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}. \tag{4.18}$$

Usando o Teorema 4.19, quando n par, obtemos

$$5^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} \frac{\phi^{n+1}-\phi_2^{n+1}}{\phi-\phi_2} & \frac{\phi^n-\phi_2^n}{\phi-\phi_2} \\ \frac{\phi^n-\phi_2^n}{\phi-\phi_2} & \frac{\phi^{n-1}-\phi_2^{n-1}}{\phi-\phi_2} \end{bmatrix} = 5^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{4.19}$$

Comparando as entradas da primeira linha e segunda coluna na equação (4.19) verificamos, mais uma vez, o item (a) do Teorema 4.18 (Binet): $F_n = \dfrac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2}$, para $n \in \mathbb{Z}$ par. Comparando as entradas da primeira linha e primeira coluna na equação (4.19), verificamos o mesmo item do mesmo teorema para $n \in \mathbb{Z}$ ímpar.

Usando o Teorema 4.19, quando n ímpar, sabemos que

$$5^{\frac{n-1}{2}} \begin{bmatrix} \phi^{n+1}+\phi_2^{n+1} & \phi^n+\phi_2^n \\ \phi^n+\phi_2^n & \phi^{n-1}+\phi_2^{n-1} \end{bmatrix} = 5^{\frac{n-1}{2}} \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{4.20}$$

Comparando as entradas da primeira linha e segunda coluna na equação (4.20) verificamos novamente o item (b) do Teorema 4.18 (Binet): $L_n = \phi^n + \phi_2^n$, para $n \in \mathbb{Z}$ ímpar. Comparando as entradas da primeira linha e primeira coluna na equação (4.19), verificamos o mesmo item do mesmo teorema para $n \in \mathbb{Z}$ par.

Ou seja, esta é outra forma de se provar o teorema de Binet usando matrizes.

Agora, o polinômio característico de $Q_L^n = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}, & \text{se } n \text{ par} \\ 5^{\frac{n-1}{2}} \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$. Observe que teremos dois polinômios característicos de acordo com a paridade de n.

Para n par, temos:

$$\begin{aligned} p_{Q_L^n}(x) &= x^2 - tr\left(\begin{bmatrix} 5^{\frac{n}{2}}F_{n+1} & 5^{\frac{n}{2}}F_n \\ 5^{\frac{n}{2}}F_n & 5^{\frac{n}{2}}F_{n-1} \end{bmatrix}\right) + \det\left(\begin{bmatrix} 5^{\frac{n}{2}}F_{n+1} & 5^{\frac{n}{2}}F_n \\ 5^{\frac{n}{2}}F_n & 5^{\frac{n}{2}}F_{n-1} \end{bmatrix}\right) \\ &= x^2 - 5^{\frac{n}{2}}(F_{n+1}+F_{n-1})x + 5^n(F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2). \end{aligned}$$

Podemos substituir $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$ e $F_{n+1} + F_{n-1}$ usando as Propriedades 4.7 e 4.22.

Para n ímpar, temos:

$$\begin{aligned} p_{Q_L^n}(x) &= x^2 - tr\left(\begin{bmatrix} 5^{\frac{n-1}{2}}L_{n+1} & 5^{\frac{n-1}{2}}L_n \\ 5^{\frac{n-1}{2}}L_n & 5^{\frac{n-1}{2}}L_{n-1} \end{bmatrix}\right) + \det\left(\begin{bmatrix} 5^{\frac{n-1}{2}}L_{n+1} & 5^{\frac{n-1}{2}}L_n \\ 5^{\frac{n-1}{2}}L_n & 5^{\frac{n-1}{2}}L_{n-1} \end{bmatrix}\right) \\ &= x^2 - 5^{\frac{n-1}{2}}(L_{n+1}+L_{n-1})x + 5^{n-1}(L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2). \end{aligned}$$

Podemos substituir $L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2$ e $L_{n+1} + L_{n-1}$ usando as Propriedades 4.16 e 4.23.

Dessa forma, o polinômio característico de Q_L^n é dado por

$$p_{Q_L^n}(x) = \begin{cases} x^2 - 5^{\frac{n}{2}} L_n x + 5^n(-1)^n, & \text{se } n \text{ par} \\ x^2 - 5^{\frac{n+1}{2}} F_n x - 5^n(-1)^n, & \text{se } n \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Os autovalores de Q_L^n são as n-ésimas potências dos autovalores de Q_L, logo $\varphi^n = (\sqrt{5}\phi)^n$ e $\varphi_2^n = (-\sqrt{5}\phi_2)^n$. Por outro lado, os autovalores também são as raízes das equações características.

Para n par, as raízes de $x^2 - 5^{\frac{n}{2}} L_n x + 5^n(-1)^n = 0$ são:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-5^{\frac{n}{2}} L_n) \pm \sqrt{(-5^{\frac{n}{2}} L_n)^2 - 4(1)(5^n(-1)^n)}}{2} \\ &= \frac{5^{\frac{n}{2}} L_n \pm \sqrt{5^n L_n^2 - 4(5^n)(-1)^n}}{2} \\ &= 5^{\frac{n}{2}} \left(\frac{L_n \pm \sqrt{L_n^2 - 4(-1)^n}}{2} \right). \end{aligned}$$

Pela Propriedade 4.27, obtemos:

$$x = 5^{\frac{n}{2}} \left(\frac{L_n \pm \sqrt{5F_n^2}}{2} \right) = 5^{\frac{n}{2}} \left(\frac{L_n \pm |F_n|\sqrt{5}}{2} \right) = 5^{\frac{n}{2}} \left(\frac{L_n \pm F_n\sqrt{5}}{2} \right).$$

Para n ímpar, as raízes de $x^2 - 5^{\frac{n+1}{2}} F_n x - 5^n(-1)^n = 0$ são:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-5^{\frac{n+1}{2}} F_n) \pm \sqrt{(-5^{\frac{n+1}{2}} F_n)^2 - 4(1)(-5^n(-1)^n)}}{2} \\ &= \frac{5^{\frac{n+1}{2}} F_n \pm \sqrt{5^{n+1} F_n^2 + 4(5^n)(-1)^n}}{2} \\ &= 5^{\frac{n}{2}} \left(\frac{F_n\sqrt{5} \pm \sqrt{5F_n^2 + 4(-1)^n}}{2} \right). \end{aligned}$$

Pela Propriedade 4.27, obtemos:

$$x = 5^{\frac{n}{2}} \left(\frac{F_n\sqrt{5} \pm \sqrt{L_n^2}}{2} \right) = 5^{\frac{n}{2}} \left(\frac{F_n\sqrt{5} \pm |L_n|}{2} \right) = 5^{\frac{n}{2}} \left(\frac{F_n\sqrt{5} \pm L_n}{2} \right).$$

Então os autovalores de Q_L^n são

$$\varphi^n = (\sqrt{5}\phi)^n = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}} \frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}, & \text{se } n \text{ par} \\ 5^{\frac{n}{2}} \frac{F_n\sqrt{5} + L_n}{2}, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases};$$

$$\varphi_2^n = (-\sqrt{5}\phi_2)^n = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}} \frac{L_n - F_n\sqrt{5}}{2}, & \text{se } n \text{ par} \\ 5^{\frac{n}{2}} \frac{F_n\sqrt{5} - L_n}{2}, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}.$$

Com essas informações, para finalizar esta seção, apresentaremos mais uma nova prova do Teorema de Binet (Teorema 4.18).

Demonstração. (I) Considerando n par, temos:

$$(\sqrt{5}\phi)^n = 5^{\frac{n}{2}}\left(\frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}\right) \tag{4.21}$$

e

$$(-\sqrt{5}\phi_2)^n = (\sqrt{5}\phi_2)^n = 5^{\frac{n}{2}}\left(\frac{L_n - F_n\sqrt{5}}{2}\right). \tag{4.22}$$

Objetivando isolar F_n na equação (4.21), fazemos:

$$\cancel{5^{\frac{n}{2}}}\phi^n = \cancel{5^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}\right) \implies \phi^n = \frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2} \implies 2\phi^n = L_n + F_n\sqrt{5},$$

o que implica

$$F_n = \frac{2\phi^n - L_n}{\sqrt{5}}. \tag{4.23}$$

Substituindo na equação (4.22) o valor de F_n conforme equação (4.23), temos:

$$\cancel{5^{\frac{n}{2}}}\phi_2^n = \cancel{5^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{L_n - \left(\frac{2\phi^n - L_n}{\sqrt{5}}\right)\sqrt{5}}{2}\right) \implies \phi_2^n = \frac{L_n - 2\phi^n + L_n}{2},$$

obtendo:

$$L_n = \phi^n + \phi_2^n. \tag{4.24}$$

Substituindo na equação (4.23) o valor de L_n conforme equação (4.24), temos:

$$F_n = \frac{2\phi^n - (\phi^n + \phi_2^n)}{\sqrt{5}}.$$

Pela equação (3.9),

$$F_n = \frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2} \tag{4.25}$$

(II) Considerando n ímpar, temos:

$$(\sqrt{5}\phi)^n = 5^{\frac{n}{2}}\left(\frac{F_n\sqrt{5} + L_n}{2}\right) \tag{4.26}$$

e

$$(-\sqrt{5}\phi_2)^n = -(\sqrt{5}\phi_2)^n = 5^{\frac{n}{2}}\left(\frac{F_n\sqrt{5} - L_n}{2}\right). \tag{4.27}$$

Note que as equações (4.21) e (4.26) são iguais, portanto, isolando F_n encontraremos a equação (4.23) novamente. Substituindo na equação (4.27) o valor de F_n conforme obtido na equação (4.23), segue:

$$-\cancel{5^{\frac{n}{2}}}\phi_2^n = \cancel{5^{\frac{n}{2}}}\left(\frac{\left(\frac{2\phi^n - L_n}{\sqrt{5}}\right)\sqrt{5} - L_n}{2}\right).$$

Objetivando isolar L_n, fazemos:

$$-\phi_2^n = \frac{2\phi^n - L_n - L_n}{2} \implies \phi_2^n = \frac{-\cancel{2}\phi^n + \cancel{2}L_n}{\cancel{2}},$$

obtendo, novamente,

$$L_n = \phi^n + \phi_2^n. \tag{4.28}$$

E, se repetirmos a substituição da equação (4.24) na equação (4.23), obteremos a equação (4.25) mais uma vez.

Portanto, por (I) e (II), para $n \in \mathbb{Z}$ qualquer, $F_n = \frac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2}$ e $L_n = \phi^n + \phi_2^n$. □

5 Explorando Outras Matrizes

As Q-matrizes não são as únicas matrizes que auxiliam no estudo dos números de Fibonacci e de Lucas. Outras surgiram ao longo do tempo, ampliando as possibilidades de investigação matemática. Neste capítulo, apresentaremos a M-matriz e a P-matriz; estudaremos suas n-ésimas potências e as relacionaremos com as Q-matrizes. Além disso, demonstraremos a expressão dos números de Fibonacci com índices negativos e analisaremos o polinômio característico das matrizes M, M^n e P. Com esses resultados, demonstraremos a fórmula de Binet para números de Fibonacci para todo n inteiro por outra abordagem, também utilizando matrizes.

5.1 M-matriz de Fibonacci

A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é outra ferramenta para o estudo dos números de Fibonacci, pois suas potências também exibem um padrão relacionado a essa sequência. A matriz foi estudada primeiramente por Sam Moore em 1983 no artigo *Fibonacci Matrices*, publicado na *The Mathematical Gazette* [8]. Neste trabalho, adotaremos a notação M, a mesma utilizada por Moore em seu artigo, e a chamaremos de M-matriz de Fibonacci.

Observe que:

$$M^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2 & F_3 \end{bmatrix};$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3 & F_4 \\ F_4 & F_5 \end{bmatrix};$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_5 & F_6 \\ F_6 & F_7 \end{bmatrix};$$

$$M^4 = \begin{bmatrix} 13 & 21 \\ 21 & 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_7 & F_8 \\ F_8 & F_9 \end{bmatrix};$$

de forma geral, é possível estabelecer que, para n inteiro, vale

$$M^n = \begin{bmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{bmatrix}.$$

Iniciaremos sua demonstração no lema a seguir e a completaremos no Teorema 5.3.

Lema 5.1. *Para $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima potência de M é dada por:*

$$M^n = \begin{bmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Provaremos via indução finita.

(i) Para $n = 1$, o resultado é válido, pois

$$M^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2 & F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2(1)-1} & F_{2(1)} \\ F_{2(1)} & F_{2(1)+1} \end{bmatrix}.$$

(ii) Assumimos que o resultado seja verdadeiro para $n = k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, isto é,

$$M^k = \begin{bmatrix} F_{2k-1} & F_{2k} \\ F_{2k} & F_{2k+1} \end{bmatrix}.$$

(iii) Mostremos que é verdadeiro para $n = k + 1$. De fato,

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= M^k \cdot M \\ &= \begin{bmatrix} F_{2k-1} & F_{2k} \\ F_{2k} & F_{2k+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{2k-1} + F_{2k} & F_{2k-1} + 2F_{2k} \\ F_{2k} + F_{2k+1} & F_{2k} + 2F_{2k+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{2k+1} & F_{2k+1} + F_{2k} \\ F_{2k+2} & F_{2k+2} + F_{2k+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{2k+1} & F_{2k+2} \\ F_{2k+2} & F_{2k+3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{2(k+1)-1} & F_{2(k+1)} \\ F_{2(k+1)} & F_{2(k+1)+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por (i), (ii) e (iii), provamos o lema. □

5.1.1 M^n para qualquer n inteiro

Para generalizar o resultado fornecido pelo Lema 5.1, calculando M^n para qualquer n inteiro (e não apenas natural), precisaremos do próximo resultado:

Lema 5.2. *Para $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima potência de M^{-1} é dada por:*

$$(M^{-1})^n = \begin{bmatrix} F_{-2n-1} & F_{-2n} \\ F_{-2n} & F_{-2n+1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Provaremos via indução finita.

(i) Para $n = 1$, o resultado é válido, pois

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{-3} & F_{-2} \\ F_{-2} & F_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{-2(1)-1} & F_{-2(1)} \\ F_{-2(1)} & F_{-2(1)+1} \end{bmatrix}.$$

(ii) Assumimos que o resultado seja verdadeiro para $n = k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, isto é,

$$M^{-k} = \begin{bmatrix} F_{-2k-1} & F_{-2k} \\ F_{-2k} & F_{-2k+1} \end{bmatrix}.$$

(iii) Mostremos que é verdadeiro para $n = k + 1$. De fato,

$$\begin{aligned}
M^{-(k+1)} &= M^{-k} \cdot M^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} F_{-2k-1} & F_{-2k} \\ F_{-2k} & F_{-2k+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2F_{-2k-1} - F_{-2k} & -F_{-2k-1} + F_{-2k} \\ 2F_{-2k} - F_{-2k+1} & -F_{-2k} + F_{-2k+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2F_{-2k-1} - (F_{-2k-2} + F_{-2k-1}) & -F_{-2k-1} + (F_{-2k-2} + F_{-2k-1}) \\ 2F_{-2k} - (F_{-2k-1} + F_{-2k}) & -F_{-2k} + (F_{-2k-1} + F_{-2k}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_{-2k-1} - F_{-2k-2} & F_{-2k-2} \\ F_{-2k} - F_{-2k-1} & F_{-2k-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (F_{-2k-3} + F_{-2k-2}) - F_{-2k-2} & F_{-2k-2} \\ (F_{-2k-2} + F_{-2k-1}) - F_{-2k-1} & F_{-2k-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_{-2k-3} & F_{-2k-2} \\ F_{-2k-2} & F_{-2k-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_{-2(k+1)-1} & F_{-2(k+1)} \\ F_{-2(k+1)} & F_{-2(k+1)+1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Por (i), (ii) e (iii), provamos o lema. □

Agora, podemos generalizar o Lema 5.1 para n inteiro.

Teorema 5.3. *Para $n \in \mathbb{Z}$, a n-ésima potência de M é dada por:*

$$M^n = \begin{bmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Para $n = 0$, o resultado é trivial, uma vez que

$$M^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{-1} & F_0 \\ F_0 & F_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2(0)-1} & F_{2(0)} \\ F_{2(0)} & F_{2(0)+1} \end{bmatrix}.$$

O caso em que n é inteiro positivo está provado no Lema 5.1. E o caso em que n é inteiro negativo está provado no Lema 5.2. □

5.1.2 Formalizando a expressão dos números de Fibonacci com índices não-positivos com a M-matriz

A expressão matemática que de forma empírica observamos na Seção 3.4 foi provada no Teorema 4.5 na Seção 4.1.1 utilizando a Q_F-matriz, vamos demonstrar o mesmo Teorema utilizando a M-matriz nesta seção. Para isso, faremos uma comparação entre $(M^n)^{-1}$ e $(M^{-1})^n$.

Lema 5.4. *Para $n \in \mathbb{Z}$, a inversa da n-ésima potência de M é dada por:*

$$(M^n)^{-1} = \begin{bmatrix} F_{2n+1} & -F_{2n} \\ -F_{2n} & F_{2n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Calculando a inversa de M^n, de acordo com o Teorema 5.3, pelo Teorema 2.1 e aplicando a Identidade de Cassini, Propriedade 4.7, temos:

$$(M^n)^{-1} = \frac{1}{(-1)^{2n}} \begin{bmatrix} F_{2n+1} & -F_{2n} \\ -F_{2n} & F_{2n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2n+1} & -F_{2n} \\ -F_{2n} & F_{2n-1} \end{bmatrix}.$$

□

A partir da comparação entre $(M^n)^{-1}$ e $(M^{-1})^n$, para $n \in \mathbb{N}$, obtidas pelos Lemas 5.2 e 5.4, seremos capazes de provar com a M-matriz o Teorema 4.5, ou seja, que $F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$, para $n \in \mathbb{N}$. De fato, uma vez que

$$(M^n)^{-1} = (M^{-1})^n,$$

dos Lemas 5.2 e 5.4

$$\begin{bmatrix} F_{-2n-1} & F_{-2n} \\ F_{-2n} & F_{-2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2n+1} & -F_{2n} \\ -F_{2n} & F_{2n-1} \end{bmatrix}. \tag{5.1}$$

Das entradas localizadas na primeira linha e segunda coluna das matrizes da equação (5.1), segue que

$$F_{-2n} = -F_{2n}.$$

E das entradas localizadas na primeira linha e primeira coluna das matrizes da equação (5.1), segue que

$$F_{-2n-1} = F_{2n+1}$$
$$F_{-(2n+1)} = F_{2n+1}.$$

Ou seja, dado k natural, $F_{-k} = \begin{cases} -F_k, & \text{se } k \text{ par} \\ F_k, & \text{se } k \text{ ímpar} \end{cases}$, ou ainda, $F_{-k} = (-1)^{k+1}F_k$.

5.2 Identidades de Fibonacci com a M-matriz

Nesta seção, vamos exemplificar como podemos obter identidades envolvendo os números de Fibonacci usando operações com a matriz M.

Propriedade 5.5. $F_{2(m+n)} = F_{2m+1}F_{2n} + F_{2m}F_{2n-1},\ m, n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Observe que $M^{2(m+n)} = M^{2m} \cdot M^{2n}$. Isto posto, do Teorema 5.3,

$$\begin{bmatrix} F_{2(m+n)-1} & F_{2(m+n)} \\ F_{2(m+n)} & F_{2(m+n)+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2m-1} & F_{2m} \\ F_{2m} & F_{2m+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} F_{2(m+n)-1} & F_{2(m+n)} \\ F_{2(m+n)} & F_{2(m+n)+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2m-1}F_{2n-1} + F_{2m}F_{2n} & F_{2m-1}F_{2n} + F_{2m}F_{2n+1} \\ F_{2m}F_{2n-1} + F_{2m+1}F_{2n} & F_{2m}F_{2n} + F_{2m+1}F_{2n+1} \end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

Das entradas localizadas na segunda linha e primeira coluna das matrizes da equação (5.2), segue que

$$F_{2(m+n)} = F_{2m+1}F_{2n} + F_{2m}F_{2n-1}.$$

□

Propriedade 5.6. $F_{2(m-n)} = F_{2m}F_{2n+1} - F_{2m+1}F_{2n},\ m, n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Observe que $M^{2(m-n)} = M^{2m} \cdot (M^{2n})^{-1}$. Isto posto, $M^{2(m-n)}$ e M^{2m} do Teorema 5.3 e $(M^{2n})^{-1}$ do Lema 5.4,

$$\begin{bmatrix} F_{2(m-n)-1} & F_{2(m-n)} \\ F_{2(m-n)} & F_{2(m-n)+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2m-1} & F_{2m} \\ F_{2m} & F_{2m+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{2n+1} & -F_{2n} \\ -F_{2n} & F_{2n-1} \end{bmatrix}.$$

Realizando a multiplicação de matrizes:

$$\begin{bmatrix} F_{2(m-n)-1} & F_{2(m-n)} \\ F_{2(m-n)} & F_{2(m-n)+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2m-1}F_{2n+1} - F_{2m}F_{2n} & -F_{2m-1}F_{2n} + F_{2m}F_{2n-1} \\ F_{2m}F_{2n+1} - F_{2m+1}F_{2n} & -F_{2m}F_{2n} + F_{2m+1}F_{2n-1} \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Das entradas localizadas na segunda linha e primeira coluna das matrizes da equação (5.3), segue que

$$F_{2(m-n)} = F_{2m}F_{2n+1} - F_{2m+1}F_{2n}.$$

□

5.3 Polinômios característicos da M-matriz de Fibonacci

Observe que o polinômio característico da matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é dado por

$$p_M(x) = x^2 - tr(M)x + \det(M) = x^2 - 3x + 1.$$

Para obter os autovalores de M, calculemos as raízes da equação característica, $x^2 - 3x + 1 = 0$. Assim,

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(1)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Os autovalores de M são $\frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \phi = \phi^2$ e $\frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1 + \phi_2 = \phi_2^2$, o que mais uma vez evidencia a relação entre o número de ouro e os números de Fibonacci.

Os autovetores, $\boldsymbol{v}$, associados a um autovalor λ de M, podem ser encontrados igualando $(M - \lambda I)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Considerando $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} a(1-\lambda) + b \\ a + b(2-\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo a equação para o autovalor $\lambda = 1 + \phi$, obtemos autovetores da forma $\boldsymbol{v_1} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -(1-(1+\phi)) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \phi \end{bmatrix}$, onde $\alpha \in \mathbb{R}^*$. De forma análoga, para o autovalor $\lambda = 1 + \phi_2$, os autovetores são dados por $\boldsymbol{v_2} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -(1-(1+\phi_2)) \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$, com $\beta \in \mathbb{R}^*$.

Assim, pelo Teorema 2.12, temos:

$$\begin{aligned} M^n &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \phi & \phi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi^2 & 0 \\ 0 & \phi_2^2 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \phi & \phi_2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \phi & \phi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi^{2n} & 0 \\ 0 & \phi_2^{2n} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\phi_2 - \phi} \begin{bmatrix} \phi_2 & -1 \\ -\phi & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \phi & \phi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi^{2n} & 0 \\ 0 & \phi_2^{2n} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{-(\phi - \phi_2)} \begin{bmatrix} \phi_2 & -1 \\ -\phi & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\phi - \phi_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \phi & \phi_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi^{2n} & 0 \\ 0 & \phi_2^{2n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\phi_2 & 1 \\ \phi & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Multiplicando as matrizes, obtemos

$$\begin{aligned} M^n &= \frac{1}{\phi - \phi_2} \begin{bmatrix} \phi^{2n} & \phi_2^{2n} \\ \phi^{2n+1} & \phi_2^{2n+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\phi_2 & 1 \\ \phi & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\phi - \phi_2} \begin{bmatrix} -\phi_2\phi^{2n} + \phi\phi_2^{2n} & \phi^{2n} - \phi_2^{2n} \\ -\phi_2\phi^{2n+1} + \phi\phi_2^{2n+1} & \phi^{2n+1} - \phi_2^{2n+1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\phi - \phi_2} \begin{bmatrix} (-\phi\phi_2)\phi^{2n-1} - (-\phi\phi_2)\phi_2^{2n-1} & \phi^{2n} - \phi_2^{2n} \\ (-\phi\phi_2)\phi^{2n} - (-\phi\phi_2)\phi_2^{2n} & \phi^{2n+1} - \phi_2^{2n+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Da equação (3.1), segue

$$M^n = \begin{bmatrix} \frac{\phi^{2n-1} - \phi_2^{2n-1}}{\phi - \phi_2} & \frac{\phi^{2n} - \phi_2^{2n}}{\phi - \phi_2} \\ \frac{\phi^{2n} - \phi_2^{2n}}{\phi - \phi_2} & \frac{\phi^{2n+1} - \phi_2^{2n+1}}{\phi - \phi_2} \end{bmatrix}.$$

Usando o Teorema 5.3, sabemos que

$$\begin{bmatrix} \frac{\phi^{2n-1} - \phi_2^{2n-1}}{\phi - \phi_2} & \frac{\phi^{2n} - \phi_2^{2n}}{\phi - \phi_2} \\ \frac{\phi^{2n} - \phi_2^{2n}}{\phi - \phi_2} & \frac{\phi^{2n+1} - \phi_2^{2n+1}}{\phi - \phi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

Comparando as entradas da primeira linha e segunda coluna na equação matricial (5.4), verificamos novamente o item (a) do Teorema 4.18 (Binet): $F_n = \dfrac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2}$, para $n \in \mathbb{Z}$ par. Comparando as entradas da primeira linha e primeira coluna na equação (5.4), verificamos o mesmo item do mesmo teorema para $n \in \mathbb{Z}$ ímpar.

Agora, o polinômio característico de $M^n = \begin{bmatrix} F_{2n-1} & F_{2n} \\ F_{2n} & F_{2n+1} \end{bmatrix}$ é dado por

$$p_{M^n}(x) = x^2 - tr(M^n) + \det(M^n) = x^2 - (F_{2n-1} + F_{2n+1})x + F_{2n-1}F_{2n+1} - F_{2n}^2.$$

Pela identidade de Cassini (Propriedade 4.7) e como $F_{2n-1} + F_{2n+1} = F_{2n} + 2F_{2n-1}$, podemos reescrever o polinômio característico como $p_{Q_F^n}(x) = x^2 - (F_{2n} + 2F_{2n-1})x + (-1)^{2n} = x^2 - (F_{2n} + 2F_{2n-1})x + 1$.

Sabemos que os autovalores de M^n são a n-ésima potência dos autovalores de M, ou seja, $\phi^{2n} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ e $\phi_2^{2n} = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Por outro lado, os autovalores também são as raízes da equação característica, $x^2 - (F_{2n} + 2F_{2n-1})x + 1 = 0$, calculando suas raízes,

obtemos:

$$x = \frac{-(-(F_{2n} + 2F_{2n-1})) \pm \sqrt{(-(F_{2n-1} + F_{2n+1}))^2 - 4(1)(1)}}{2}$$
$$= \frac{F_{2n} + 2F_{2n-1} \pm \sqrt{(F_{2n-1} + F_{2n+1})^2 - 4(-1)^{2n}}}{2}.$$

Pela Propriedade 3.5,

$$x = \frac{F_{2n} + 2F_{2n-1} \pm |F_{2n}|\sqrt{5}}{2} = \frac{F_{2n} + 2F_{2n-1} \pm F_{2n}\sqrt{5}}{2}.$$

Concluímos, portanto, que os autovalores de M^n são

$$\phi^{2n} = \frac{F_{2n} + 2F_{2n-1} + F_{2n}\sqrt{5}}{2} \tag{5.5}$$

e

$$\phi_2^{2n} = \frac{F_{2n} + 2F_{2n-1} - F_{2n}\sqrt{5}}{2}. \tag{5.6}$$

Isto significa que acabamos de obter uma forma de escrever as potências $2n$-ésimas do número de ouro e de seu conjugado em função do $2n$-ésimo e $(2n-1)$-ésimo termos da sequência de Fibonacci.

Isolando F_{2n-1} na equação (5.5), obtemos:

$$F_{2n-1} = \frac{2\phi^{2n} - F_{2n}(1+\sqrt{5})}{2}. \tag{5.7}$$

Substituindo na equação (5.6) o valor de F_{2n-1} conforme obtido na equação (5.7), obtemos

$$\phi_2^{2n} = \frac{F_{2n} + 2\left(\dfrac{2\phi^{2n} - F_{2n}(1+\sqrt{5})}{2}\right) - F_{2n}\sqrt{5}}{2},$$

isolando F_{2n}

$$F_{2n} = \frac{\phi^{2n} - \phi_2^{2n}}{\sqrt{5}}.$$

Pela equação (3.9), concluímos

$$F_{2n} = \frac{\phi^{2n} - \phi_2^{2n}}{\phi - \phi_2}. \tag{5.8}$$

Substituindo na equação (5.7) o valor de F_{2n} conforme obtido na equação (5.8), obte-

mos

$$\begin{aligned}
F_{2n-1} &= \frac{2\phi^{2n} - \left(\dfrac{\phi^{2n} - \phi_2^{2n}}{\phi - \phi_2}\right)(1+\sqrt{5})}{2} \\
&= \frac{2\phi^{2n} - \left(\dfrac{\phi^{2n} - \phi_2^{2n}}{\phi - \phi_2}\right) - (\phi^{2n} - \phi_2^{2n})}{2} \\
&= \frac{2\phi^{2n} - \left(\dfrac{\phi^{2n} - \phi_2^{2n}}{\phi - \phi_2}\right) - \phi^{2n} + \phi_2^{2n}}{2} \\
&= \frac{\phi^{2n} + \phi_2^{2n} - \left(\dfrac{\phi^{2n} - \phi_2^{2n}}{\phi - \phi_2}\right)}{2} \\
&= \frac{(\phi^{2n} + \phi_2^{2n})(\phi - \phi_2) - \phi^{2n} + \phi_2^{2n}}{2(\phi - \phi_2)} \\
&= \frac{\phi^{2n+1} - \phi^{2n}\phi_2 + \phi\phi_2^{2n} - \phi_2^{2n+1} - \phi^{2n} + \phi_2^{2n}}{2(\phi - \phi_2)} \\
&= \frac{\phi^{2n}(\phi - 1) - \phi_2^{2n}(\phi_2 - 1) + (-\phi\phi_2)\phi^{2n-1} - (-\phi\phi_2)\phi_2^{2n-1}}{2(\phi - \phi_2)}.
\end{aligned}$$

Pelas equações (3.1), (3.3) e (3.5), segue

$$\begin{aligned}
F_{2n-1} &= \frac{\phi^{2n-1} - \phi_2^{2n-1} + \phi^{2n-1} - \phi_2^{2n-1}}{2(\phi - \phi_2)} \\
&= \frac{\phi^{2n-1} - \phi_2^{2n-1}}{\phi - \phi_2}.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Desse modo, pelas equações (5.8) e (5.9) acabamos de verificar, para $n \in \mathbb{Z}$, novamente, o item (a) do Teorema 4.18 (Binet): $F_n = \dfrac{\phi^n - \phi_2^n}{\phi - \phi_2}$, para $n \in \mathbb{Z}$. Ou seja, esta é outra forma de se provar o teorema em questão, também usando matrizes.

5.4 *P*-matriz

A matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ foi apresentada como uma matriz especial por Hoggatt e Ruggles [10] numa publicação do *The Fibonacci Quarterly* de 1963. Neste trabalho, adotaremos a notação P utilizada por Hoggatt e Ruggles em seu artigo e a chamaremos de P-matriz. Outra notação comum para a mesma matriz é R, utilizada por Koshy em seu livro [9] e por Gökcan e Değer em seu artigo [28].

Observe que:

$$P^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = 5^{\frac{1-1}{2}} P;$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 5^{\frac{2}{2}} I;$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & -5 \end{bmatrix} = 5^{\frac{3-1}{2}} P;$$

$$P^4 = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} = 5^{\frac{4}{2}} I;$$

de forma geral, é possível estabelecer que, para n inteiro, vale

$$P^n = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}} I, & \text{se } n \text{ é par} \\ 5^{\frac{n-1}{2}} P, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Iniciaremos esse processo com o lema a seguir. A mesma conclusão pode ser encontrada em [28]; contudo, o autor apresenta apenas o resultado, sem a respectiva demonstração.

Lema 5.7. *Para $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima potência de P é dada por:*

$$P^n = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}} I, & \textit{se } n \textit{ é par} \\ 5^{\frac{n-1}{2}} P, & \textit{se } n \textit{ é ímpar} \end{cases}.$$

Demonstração. Vamos provar o lema por indução.

(I) Supondo n par:

(i) Para $n = 2$, o resultado é verdadeiro, pois

$$5^{\frac{2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = P^2.$$

(ii) Assumimos que seja verdadeiro para $n = k$, com k par e $k > 2$, ou seja,

$$P^k = 5^{\frac{k}{2}} I.$$

(iii) Mostremos que é verdadeiro para $n = k + 2$. De fato,

$$\begin{aligned} P^{k+2} &= P^k \cdot P^2 \\ &= 5^{\frac{k}{2}} I \cdot 5^{\frac{2}{2}} I \\ &= 5^{\frac{k+2}{2}} I, \end{aligned}$$

o que prova a igualdade para n par.

(II) Supondo n ímpar:

(i) Para $n = 1$, o lema é válido, uma vez que

$$5^{\frac{1-1}{2}} P = P = P^1.$$

(ii) Assumimos que o resultado seja verdadeiro para $n = k$, com k ímpar $k > 1$, isto é,

$$P^k = 5^{\frac{k-1}{2}} P.$$

(iii) Mostremos que é verdadeiro para $n = k + 2$. De fato,

$$\begin{aligned} P^{k+2} &= P^k \cdot P^2 \\ &= 5^{\frac{k-1}{2}} P \cdot 5^{\frac{2}{2}} I \\ &= 5^{\frac{k+1}{2}} P \cdot I \\ &= 5^{\frac{(k+2)-1}{2}} P, \end{aligned}$$

o que prova a igualdade para n ímpar.

□

Para generalizar o resultado fornecido pelo Lema 5.7, calculando P^n para qualquer n inteiro (e não apenas natural), precisamos da potência $(P^{-1})^n$.

Lema 5.8. *Para $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima potência de P^{-1} é dada por:*

$$(P^{-1})^n = \begin{cases} 5^{\frac{-n}{2}} I, & \text{se } n \text{ é par} \\ 5^{\frac{-n-1}{2}} P, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Demonstração. Vamos provar o lema por indução.

(I) Supondo n par:

(i) Para $n = 2$, o resultado é verdadeiro, pois

$$\begin{aligned} 5^{\frac{-2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{25} + \frac{4}{25} & \frac{2}{25} - \frac{2}{25} \\ \frac{2}{25} - \frac{2}{25} & \frac{4}{25} + \frac{1}{25} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \\ &= (P^{-1})^2. \end{aligned}$$

(ii) Assumimos que seja verdadeiro para $n = k$, com k par e $k > 2$, ou seja,

$$(P^{-1})^k = 5^{\frac{-k}{2}} I.$$

(iii) Mostremos que é verdadeiro para $n = k + 2$. De fato,

$$\begin{aligned} (P^{-1})^{(k+2)} &= (P^{-1})^k \cdot (P^{-1})^2 \\ &= 5^{\frac{-k}{2}} I \cdot 5^{\frac{-2}{2}} I \\ &= 5^{\frac{-k-2}{2}} I \\ &= 5^{\frac{-(k+2)}{2}} I, \end{aligned}$$

o que prova a igualdade para n par.

(II) Supondo n ímpar:

(i) Para $n = 1$, o lema é válido, uma vez que

$$5^{\frac{-1-1}{2}}P = \frac{1}{5}P = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = P^{-1}.$$

(ii) Assumimos que o resultado seja verdadeiro para $n = k$, com k ímpar e $k > 1$, isto é,

$$(P^{-1})^k = 5^{\frac{-k-1}{2}}P.$$

(iii) Mostremos que é verdadeiro para $n = k + 2$. De fato,

$$\begin{aligned} (P^{-1})^{k+2} &= (P^{-1})^k \cdot (P^{-1})^2 \\ &= 5^{\frac{-k-1}{2}}P \cdot 5^{\frac{-2}{2}}I \\ &= 5^{\frac{-k-3}{2}}P \cdot I \\ &= 5^{\frac{-(k+2)-1}{2}}P, \end{aligned}$$

o que prova a igualdade para n ímpar.

□

5.4.1 P^n para qualquer n inteiro

Agora, podemos generalizar o Lema 5.7 para n inteiro.

Teorema 5.9. *Para $n \in \mathbb{Z}$, a n-ésima potência de P é dada por:*

$$P^n = \begin{cases} 5^{\frac{n}{2}}I, & \text{se } n \text{ é par} \\ 5^{\frac{n-1}{2}}P, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

Demonstração. Para $n = 0$, o resultado é trivial, uma vez que

$$P^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 5^{\frac{0}{2}}I.$$

O caso em que n é inteiro positivo está provado no Lema 5.7. E o caso em que n é inteiro negativo está provado no Lema 5.8. □

5.4.2 Relação entre a P-matriz e as Q-matrizes

Nesta subseção, estabelecemos a relação da P-matriz com as matrizes Q_F e Q_L, a fim de obter uma identidade semelhante a da Propriedade 4.15, apresentada na Seção 4.2, utilizando a P-matriz.

Perceba que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3-1 \\ 2 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = Q_L \cdot Q_F^{-1}.$$

Então, da Propriedade 4.15,

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix} = Q_L \cdot Q_F^{n-1} = Q_L \cdot Q_F^{-1} \cdot Q_F^n = P \cdot Q_F^n.$$

Acabamos de obtemos a seguinte propriedade, apresentada por Hoggatt e Ruggles em [10], porém com outra demonstração:

Propriedade 5.10.

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = P \cdot Q_F^n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Com isso podemos demonstrar a Propriedade 4.16 com a P-matriz.

Demonstração. Basta observar que $\det\left(\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}\right) = \det(P) \cdot \det(Q_F^n)$. Sendo assim,

$$\begin{vmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix}, \tag{5.10}$$

o que implica, pela Propriedade 4.7,

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = -5(-1)^n.$$

□

5.5 Identidades de Fibonacci e Lucas com a P-matriz

É possível utilizar a relação entre a P-matriz e as Q-matrizes, para demonstrar todas as identidades previamente estabelecidas no Capítulo 4 que relacionam os números de Lucas aos de Fibonacci. Ainda assim, nesta seção, apresentaremos uma seleção de demonstrações que consideramos particularmente notáveis.

A primeira identidade que demonstramos relacionando os números de Lucas e de Fibonacci é a Propriedade 4.22: $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. A seguir, reobteremos esse resultado utilizando a P-matriz.

Demonstração. Pela Propriedade 5.10,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_{n+1} + 2F_n & F_n + 2F_{n-1} \\ 2F_{n+1} - F_n & 2F_n - F_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_n + F_{n+2} & F_{n-1} + F_{n+1} \\ F_{n+1} + F_n + F_{n-1} - F_n & F_n + F_{n-2} + F_{n-1} - F_{n-1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n + F_{n+2} & F_{n-1} + F_{n+1} \\ F_{n-1} + F_{n+1} & F_{n-2} + F_n \end{bmatrix}.$$

Comparando as entradas da primeira linha e segunda coluna nas matrizes da igualdade anterior, segue a Propriedade 4.22. □

Na Propriedade 4.23, estabelecemos que $L_{n+1} + L_{n-1} = 5F_n$, $n \in \mathbb{Z}$. A seguir, reobteremos esse resultado utilizando a P-matriz.

Demonstração. Multiplicando por P, pela esquerda, os dois lados da igualdade da Propriedade 5.10, segue:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}L_{n+1} & L_n\\ L_n & L_{n-1}\end{bmatrix} = P^2\cdot Q_F^n$$

$$\begin{bmatrix}L_{n+1}+2L_n & L_n+2L_{n-1}\\ 2L_{n+1}-L_n & 2L_n-L_{n-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{bmatrix},$$

ou seja

$$\begin{bmatrix}L_n+L_{n+2} & L_{n-1}+L_{n+1}\\ L_{n-1}+L_{n+1} & L_{n-2}+L_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5F_{n+1} & 5F_n\\ 5F_n & 5F_{n-1}\end{bmatrix}.$$

Comparando as entradas da primeira linha e segunda coluna nas matrizes da igualdade anterior, segue a Propriedade 4.23. □

Na Propriedade 4.24, estabelecemos que $L_n + F_n = 2F_{n+1},\ n \in \mathbb{Z}$. A seguir, reobteremos esse resultado utilizando a P-matriz.

Demonstração. Somando Q_F^n em ambos os lados da igualdade da Propriedade 5.10, temos:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}L_{n+1} & L_n\\ L_n & L_{n-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{bmatrix} &= P\cdot Q_F^n + Q_F^n\\ &= (P+I)\cdot Q_F^n\\ &= \begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

O que implica

$$\begin{bmatrix}L_{n+1}+F_{n+1} & L_n+F_n\\ L_n+F_n & L_{n-1}+F_{n-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2F_{n+2} & 2F_{n+1}\\ 2F_{n+1} & 2F_n\end{bmatrix}.$$

Comparando as entradas da primeira linha e segunda coluna na igualdade matricial anterior, obtemos a Propriedade 4.24. □

Na Propriedade 4.25, demonstramos que $L_n - F_n = 2F_{n-1},\ n \in \mathbb{Z}$. Agora, apresentaremos uma nova dedução dessa identidade, desta vez por meio da P-matriz.

Demonstração. Subtraindo Q_F^n em ambos os lados da Propriedade 5.10, temos:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}L_{n+1} & L_n\\ L_n & L_{n-1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{bmatrix} &= P\cdot Q_F^n - Q_F^n\\ &= (P-I)\cdot Q_F^n\\ &= \begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}2F_n & 2F_{n-1}\\ 2F_{n+1}-2F_n & 2F_n-2F_{n-1}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}2F_n & 2F_{n-1}\\ 2(F_{n-1}+F_n)-2F_n & 2(F_{n-2}+F_{n-1})-2F_{n-1}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

O que implica

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} - F_{n+1} & L_n - F_n \\ L_n - F_n & L_{n-1} - F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2F_n & 2F_{n-1} \\ 2F_{n-1} & 2F_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Comparando as entradas da primeira linha e segunda coluna na igualdade matricial anterior, obtemos a Propriedade 4.25. □

Na Propriedade 4.28, obtivemos a identidade $L_{m+n} = L_{m+1}F_n + L_mF_{n-1},\ m, n \in \mathbb{Z}$. A seguir, apresentaremos outra forma de chegar a esse mesmo resultado, utilizando a P-matriz.

Demonstração. Da Propriedade 5.10, temos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L_{m+n+1} & L_{m+n} \\ L_{m+n} & L_{m+n-1} \end{bmatrix} &= P \cdot Q_F^{m+n} \\ &= P \cdot Q_F^m \cdot Q_F^n \\ &= \begin{bmatrix} L_{m+1} & L_m \\ L_m & L_{m-1} \end{bmatrix} \cdot Q_F^n, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} L_{m+n+1} & L_{m+n} \\ L_{m+n} & L_{m+n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{m+1} & L_m \\ L_m & L_{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Implicando

$$\begin{bmatrix} L_{m+n+1} & L_{m+n} \\ L_{m+n} & L_{m+n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{m+1}F_{n+1} + L_mF_n & L_{m+1}F_n + L_mF_{n-1} \\ L_mF_{n+1} + L_{m-1}F_n & L_mF_n + L_{m-1}F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Comparando as entradas da primeira linha e segunda coluna na igualdade matricial anterior, obtemos a Propriedade 4.28. □

Na Propriedade 4.29, demonstramos que $2L_{m+n} = L_mL_n + 5F_mF_n,\ n \in \mathbb{Z}$. A seguir, apresentaremos uma nova demonstração dessa identidade com o auxílio da P-matriz.

Demonstração. Multiplicando por P, pela esquerda, os dois lados da igualdade da Propriedade 5.10, segue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_{m+n+1} & L_{m+n} \\ L_{m+n} & L_{m+n-1} \end{bmatrix} = P^2 \cdot Q_F^{m+n}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L_{m+n+1} + 2L_{m+n} & L_{m+n} + 2L_{m+n-1} \\ 2L_{m+n+1} - L_{m+n} & 2L_{m+n} - L_{m+n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5F_{m+1} & 5F_m \\ 5F_m & 5F_{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} L_{m+n+1} + 2L_{m+n} & L_{m+n} + 2L_{m+n-1} \\ 2L_{m+n+1} - L_{m+n} & 2L_{m+n} - L_{m+n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5F_{m+1}F_{n+1} + 5F_mF_n & 5F_{m+1}F_n + 5F_mF_{n-1} \\ 5F_mF_{n+1} + 5F_{m-1}F_n & 5F_mF_n + 5F_{m-1}F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Das entradas da primeira linha e primeira colina na igualdade matricial anterior, obtemos:

$$L_{m+n+1} + 2L_{m+n} = 5F_{m+1}F_{n+1} + 5F_mF_n,$$

ou seja,

$$2L_{m+n} = 5F_{m+1}F_{n+1} + 5F_mF_n - L_{m+n+1}.$$

Note que

$$\begin{aligned}
5F_{m+1}F_{n+1} &= 4F_{m+1}F_{n+1} + (F_{m-1} + F_m)F_{n+1} \\
&= 3F_{m+1}F_{n+1} + (F_{m-1} + F_m)(F_{n-1} + F_n) + (F_{m-1} + F_m)F_{n+1} \\
&= F_{m+1}F_{n+1} + 2F_{m+1}(F_{n-1} + F_n) + F_{m-1}(F_{n-1} + F_n) + F_m(F_{n-1} + F_n) \\
&\quad + (F_{m-1} + F_m)F_{n+1} \\
&= F_{m+1}F_{n+1} + F_{m+1}(F_{n-1} + F_n) + (F_m + F_{m+1})(F_{n-1} + F_n) \\
&\quad + F_{m-1}(F_{n-1} + F_n) + (F_{m-1} + F_m)F_{n+1} \\
&= F_{m+1}F_{n+1} + F_{m+1}(F_{n-1} + F_n) + F_{m+2}(F_{n-1} + F_n) + F_{m-1}(F_{n-1} + F_n) \\
&\quad + (F_{m-1} + F_m)F_{n+1}.
\end{aligned}$$

Reordenando os termos de forma conveniente, obtemos

$$5F_{m+1}F_{n+1} = (F_{m-1} + F_{m+1})(F_{n-1} + F_{n+1}) + (F_m + F_{m+2})F_{n+1} + (F_{m-1} + F_{m+1})F_n.$$

Substituindo $F_{m-1} + F_{m+1}$, $F_{n-1} + F_{n+1}$, $F_m + F_{m+2}$ e de acordo com a Propriedade 4.22, obtemos

$$5F_{m+1}F_{n+1} = L_mL_n + L_{m+1}F_{n+1} + L_mF_n.$$

Substituindo $L_{m+1}F_{n+1} + L_mF_n$ de acordo com a Propriedade 4.28, obtemos

$$5F_{m+1}F_{n+1} = L_mL_n + L_{m+n+1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
2L_{m+n} &= L_mL_n + F_{m+n+1} + 5F_mF_n - L_{m+n+1} \\
&= L_mL_n + 5F_mF_n.
\end{aligned}$$

Assim obtemos a Propriedade 4.29. □

A identidade $5F_{m+n} = L_nL_{m+1} + L_{n-1}L_m$, $n \in \mathbb{Z}$, foi apresentada na Propriedade 4.31. Mostraremos agora que esse mesmo resultado pode ser novamente obtido por meio da P-matriz.

Demonstração. Das Propriedades 5.10 e 4.22, obtemos

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} L_{m+n+1} & L_{m+n} \\ L_{m+n} & L_{m+n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_{m+1} & L_m \\ L_m & L_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} L_{m+1}F_{n+1} + L_mF_n & L_{m+1}F_n + L_mF_{n-1} \\ L_mF_{n+1} + L_{m-1}F_n & L_mF_n + L_{m-1}F_{n-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Somando as entradas da primeira linha e primeira coluca com as entradas da segunda linha e segunda coluna, obtemos

$$\begin{aligned} L_{m+n+1} + L_{m+n-1} &= L_{m+1}F_{n+1} + L_mF_n + L_mF_n + L_{m-1}F_{n-1} \\ &= L_{m+1}F_{n+1} + L_mF_n + L_m(F_{n-2} + F_{n-1}) + L_{m-1}F_{n-1} \\ &= L_{m+1}F_{n+1} + L_mF_n + L_mF_{n-2} + (L_m + L_{m-1})F_{n-1} \\ &= L_{m+1}F_{n+1} + L_mF_n + L_mF_{n-2} + L_{m+1}F_{n-1} \\ &= (F_{n-1} + F_{n+1})L_{m+1} + (F_{n-2} + F_n)L_m. \end{aligned}$$

Substituindo $L_{m+n+1} + L_{m+n-1}$ de acordo com a Propriedade 4.23 e $F_{n-1} + F_{n+1}$ e $F_{n-2} + F_n$ de acordo com a Propriedade 4.22 obtemos a Propriedade 4.31. □

5.6 Polinômios característicos da P-matriz de Fibonacci

Observe que o polinômio característico da matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ é dado por

$$p_P(x) = x^2 - tr(P)x + \det(P) = x^2 - 5.$$

Para obter os autovalores de P, calculemos as raízes da equação característica, $x^2 - 5 = 0$. Assim, os autovalores de P são $\sqrt{5}$ e $-\sqrt{5}$.

Os autovetores, $\boldsymbol{v}$, associados a um autovalor λ de P, podem ser encontrados igualando $(P - \lambda I)\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Considerando $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} a(1-\lambda) + 2b \\ 2a + b(-1-\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo a equação para o autovalor $\lambda = \sqrt{5}$, obtemos autovetores da forma $\boldsymbol{v_1} = \alpha \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \phi \\ 1 \end{bmatrix}$, onde $\alpha \in \mathbb{R}^*$. De forma análoga, para o autovalor $\lambda = -\sqrt{5}$, os autovetores são dados por $\boldsymbol{v_2} = \beta \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} \phi_2 \\ 1 \end{bmatrix}$, com $\beta \in \mathbb{R}^*$.

Assim, pelo Teorema 2.12, temos:

$$\begin{aligned} P^n &= \begin{bmatrix} \phi & \phi_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} \phi & \phi_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \phi & \phi_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{5}^n & 0 \\ 0 & (-1)^n\sqrt{5}^n \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\phi - \phi_2} \begin{bmatrix} 1 & -\phi_2 \\ -1 & \phi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pela equação (3.9),

$$\begin{aligned} P^n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \phi\sqrt{5}^n & \phi_2(-1)^n\sqrt{5}^n \\ \sqrt{5}^n & (-1)^n\sqrt{5}^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\phi_2 \\ -1 & \phi \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \phi\sqrt{5}^n - (-1)^n\phi_2\sqrt{5}^n & -\phi\phi_2\sqrt{5}^n + \phi\phi_2(-1)^n\sqrt{5}^n \\ \sqrt{5}^n - (-1)^n\sqrt{5}^n & -\phi_2\sqrt{5}^n + (-1)^n\phi\sqrt{5}^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pela equação (3.1), segue

$$P^n = 5^{\frac{n-1}{2}} \begin{bmatrix} \phi - (-1)^n \phi_2 & 1 - (-1)^n \\ 1 - (-1)^n & (-1)^n \phi - \phi_2 \end{bmatrix}.$$

O que indica que fomos capazes de expressar P^n em uma única matriz.

6 Propriedades de Divisibilidade dos Números de Fibonacci e de Lucas

Neste capítulo, vamos exemplificar como podemos demonstrar propriedades de divisibilidade envolvendo os números de Fibonacci e de Lucas usando as matrizes Q_F e Q_L. As demonstrações se baseiam em duas ideias principais: a Identidade de Bézout, Teorema A.5, e o fato de que qualquer potência de uma matriz diagonal é também uma matriz diagonal.

6.1 Divisibilidade e a matriz Q_F

Nesta seção, investigaremos propriedades de divisibilidade envolvendo os números de Fibonacci sob uma perspectiva matricial, utilizando a matriz Q_F e suas potências.

Propriedade 6.1. Se $m \mid n$ então $F_m \mid F_n,\ m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Da hipótese, $n = qm,\ q \in \mathbb{N}$. Sabemos que $F_m \mid F_m$. Isto posto,

$$Q_F^m = \begin{bmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} F_{m+1} & 0 \\ 0 & F_{m-1} \end{bmatrix} \pmod{F_m}.$$

Sendo assim, da Propriedade 2.17(d),

$$(Q_F^m)^q = Q_F^{mq} = \begin{bmatrix} F_{qm+1} & F_{qm} \\ F_{qm} & F_{qm-1} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} F_{m+1} & 0 \\ 0 & F_{m-1} \end{bmatrix}^q \pmod{F_m}.$$

Realizando a potenciação, do Teorema 2.14,

$$\begin{bmatrix} F_{qm+1} & F_{qm} \\ F_{qm} & F_{qm-1} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} F_{m+1}^q & 0 \\ 0 & F_{m-1}^q \end{bmatrix} \pmod{F_m}. \tag{6.1}$$

Das entradas localizadas na primeira linha e segunda coluna das matrizes da relação de congruência da equação (6.1), segue que, $F_{mq} \equiv 0 \pmod{m}$, daí

$$F_m \mid F_{qm} - 0 = F_n.$$

□

Propriedade 6.2. $F_{\mathrm{mdc}(m,n)} = \mathrm{mdc}(F_m, F_n),\ m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Demonstremos a igualdade conforme a Propriedade A.3.

(i) Primeiramente, mostremos que $F_{\mathrm{mdc}(m,n)} \mid \mathrm{mdc}(F_m, F_n)$.

Como $\mathrm{mdc}(m,n) \mid m$ e $\mathrm{mdc}(m,n) \mid n$, existem $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $m = \mathrm{mdc}(m,n)a$ e $n = \mathrm{mdc}(m,n)b$. Aplicando a Propriedade 6.1, segue que

$$F_{\mathrm{mdc}(m,n)} \mid F_{\mathrm{mdc}(m,n)a} = F_m \quad \text{e} \quad F_{\mathrm{mdc}(m,n)} \mid F_{\mathrm{mdc}(m,n)b} = F_n.$$

Pela definição de máximo divisor comum, $F_{\mathrm{mdc}(m,n)} \mid \mathrm{mdc}(F_m, F_n)$.

(ii) Resta mostrar que $\mathrm{mdc}(F_m, F_n) \mid F_{\mathrm{mdc}(m,n)}$.

Pelo Teorema A.5, existem $x, y \in \mathbb{Z}$, tais que

$$Q_F^{\mathrm{mdc}(m,n)} = Q_F^{xm+yn} = Q_F^{xm} \cdot Q_F^{yn}.$$

De modo similar ao que foi feito na prova da Propriedade 6.1, sabemos que

$$Q_F^{xm} \equiv \begin{bmatrix} F_{m+1}^x & 0 \\ 0 & F_{m-1}^x \end{bmatrix} \pmod{F_m} \quad \text{e} \quad Q_F^{yn} \equiv \begin{bmatrix} F_{n+1}^y & 0 \\ 0 & F_{n-1}^y \end{bmatrix} \pmod{F_n}.$$

Pelo Teorema A.10,

$$Q_F^{xm} \equiv \begin{bmatrix} F_{m+1}^x & 0 \\ 0 & F_{m-1}^x \end{bmatrix} \pmod{\mathrm{mdc}(F_m, F_n)} \tag{6.2}$$

e

$$Q_F^{yn} \equiv \begin{bmatrix} F_{n+1}^y & 0 \\ 0 & F_{n-1}^y \end{bmatrix} \pmod{\mathrm{mdc}(F_m, F_n)}. \tag{6.3}$$

Multiplicando as relações de congruência módulo $\mathrm{mdc}(F_m, F_n)$ das equações (6.2) e (6.3), pela Propriedade 2.17(c),

$$Q_F^{xm} \cdot Q_F^{yn} \equiv \begin{bmatrix} F_{m+1}^x & 0 \\ 0 & F_{m-1}^x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{n+1}^y & 0 \\ 0 & F_{n-1}^y \end{bmatrix} \pmod{\mathrm{mdc}(F_m, F_n)},$$

ou seja,

$$Q_F^{\mathrm{mdc}(m,n)} \equiv \begin{bmatrix} F_{m+1}^x F_{n+1}^y & 0 \\ 0 & F_{m-1}^x F_{n-1}^y \end{bmatrix} \pmod{\mathrm{mdc}(F_m, F_n)}.$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} F_{\mathrm{mdc}(m,n)+1} & F_{\mathrm{mdc}(m,n)} \\ F_{\mathrm{mdc}(m,n)} & F_{\mathrm{mdc}(m,n)-1} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} F_{m+1}^x F_{n+1}^y & 0 \\ 0 & F_{m-1}^x F_{n-1}^y \end{bmatrix} \pmod{\mathrm{mdc}(F_m, F_n)}.$$

Logo, $\mathrm{mdc}(F_m, F_n) \mid F_{\mathrm{mdc}(m,n)} - 0$.

Por (i) e (ii),

$$F_{\mathrm{mdc}(m,n)} = \mathrm{mdc}(F_m, F_n).$$

□

Da Propriedade 6.2, concluímos que

$$\text{mdc}(F_m, F_{qm+1}) = \text{mdc}(m, qm+1) = 1, \tag{6.4}$$

resultado que será útil na demonstração a seguir.

Propriedade 6.3. Se $F_m \mid F_n$ então $m \mid n$ onde $m, n \in \mathbb{N}$ e $m \neq 2$.

Demonstração. Pelo Teorema A.1, $n = qm + r$ com $q, r \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < m$. Observe que $Q_F^n = Q_F^{qm+r} = Q_F^{qm} \cdot Q_F^r$, o que implica

$$Q_F^n = \begin{bmatrix} F_{qm+1} & F_{qm} \\ F_{qm} & F_{qm-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{r+1} & F_r \\ F_r & F_{r-1} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$Q_F^n = \begin{bmatrix} F_{qm+1}F_{r+1} + F_{qm}F_r & F_{qm+1}F_r + F_{qm}F_{r-1} \\ F_{qm}F_{r+1} + F_{qm-1}F_r & F_{qm}F_r + F_{qm-1}F_{r-1} \end{bmatrix}. \tag{6.5}$$

Partindo da equação (6.5) e da hipótese

$$Q_F^n = \begin{bmatrix} F_{qm+1}F_{r+1} + F_{qm}F_r & F_{qm+1}F_r + F_{qm}F_{r-1} \\ F_{qm}F_{r+1} + F_{qm-1}F_r & F_{qm}F_r + F_{qm-1}F_{r-1} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} F_{n+1} & 0 \\ 0 & F_{n-1} \end{bmatrix} \pmod{F_m}. \tag{6.6}$$

Das entradas localizadas na primeira linha e segunda coluna das matrizes da relação de congruência da equação (6.6), segue que

$$F_m \mid F_{qm+1}F_r + F_{qm}F_{r-1} - 0.$$

Então, pelas Propriedades A.2 e 6.1,

$$F_m \mid F_{qm+1}F_r.$$

Da equação (6.4), $\text{mdc}(F_m, F_{m+1}) = 1$, pela Propriedade A.6

$$F_m \mid F_r.$$

Sabendo que $0 \leq r < m$ e $m \neq 2$, então $F_r < F_m$. Como $F_m \mid F_r$, segue que $F_r = 0$, ou seja $r = 0$.

Portanto,

$$m \mid n.$$

□

Propriedade 6.4. Dados $m, n \in \mathbb{N}$ com $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $m = qn + r$ e $0 \leq r < m$, então $\text{mdc}(F_m, F_n) = \text{mdc}(F_n, F_r)$.

Demonstração. Demonstremos a igualdade conforme a Propriedade A.3.

(i) Primeiramente, mostremos que $\text{mdc}(F_m, F_n) \mid \text{mdc}(F_n, F_r)$.

Pela definição de máximo divisor comum, sabemos que é suficiente demonstrar que $\text{mdc}(F_m, F_n) \mid F_n$ e $\text{mdc}(F_m, F_n) \mid F_r$; o primeiro sendo óbvio, vamos demonstrar o segundo.

Observe que $Q_F^m = Q_F^{qn+r} = Q_F^{qn} \cdot Q_F^r$. Sendo assim,

$$Q_F^m = \begin{bmatrix} F_{qn+1} & F_{qn} \\ F_{qn} & F_{qn-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{r+1} & F_r \\ F_r & F_{r-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{qn+1}F_{r+1} + F_{qn}F_r & F_{qn+1}F_r + F_{qn}F_{r-1} \\ F_{qn}F_{r+1} + F_{qn-1}F_r & F_{qn}F_r + F_{qn-1}F_{r-1} \end{bmatrix}.$$

Ainda, $\text{mdc}(F_m, F_n)|F_m$, então Q_F^m é igual a

$$Q_F^m = \begin{bmatrix} F_{qn+1}F_{r+1} + F_{qn}F_r & F_{qn+1}F_r + F_{qn}F_{r-1} \\ F_{qn}F_{r+1} + F_{qn-1}F_r & F_{qn}F_r + F_{qn-1}F_r \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} F_{m+1} & 0 \\ 0 & F_{m-1} \end{bmatrix} \pmod{\text{mdc}(F_m, F_n)}. \tag{6.7}$$

Das entradas localizadas na primeira linha e segunda coluna das matrizes da relação de congruência (6.7), $F_{qm} \equiv 0 \pmod{F_m}$, daí segue que

$$\text{mdc}(F_m, F_n)|F_{qn+1}F_r + F_{qn}F_{r-1} - 0.$$

Então, pela Propriedade A.2, como $\text{mdc}(F_m, F_n) \mid F_n$ e $F_n \mid F_{qn}$, segue que

$$\text{mdc}(F_m, F_n) \mid F_{qn+1}F_r. \tag{6.8}$$

Da equação (6.4), $\text{mdc}(F_n, F_{qn+1}) = 1$, logo $\text{mdc}(\text{mdc}(F_m, F_n), F_{qn+1}) = 1$. Disso, e da equação (6.8), segue que $\text{mdc}(F_m, F_n) \mid F_r$.

(ii) Resta mostrar que $\text{mdc}(F_n, F_r) \mid \text{mdc}(F_m, F_n)$.

Pela definição de máximo divisor comum, sabemos que é suficiente demonstrar que $\text{mdc}(F_n, F_r) \mid F_n$ e $\text{mdc}(F_n, F_r) \mid F_m$; o primeiro sendo óbvio, vamos demonstrar o segundo.

Sabemos que $\text{mdc}(F_n, F_r) \mid F_n$, então

$$Q_F^n \equiv \begin{bmatrix} F_{n+1} & 0 \\ 0 & F_{n-1} \end{bmatrix} \pmod{\text{mdc}(F_n, F_r)}.$$

Sendo assim, da Propriedade 2.17(d),

$$Q_F^{qn} \equiv \begin{bmatrix} F_{n+1}^q & 0 \\ 0 & F_{n-1}^q \end{bmatrix} \pmod{\text{mdc}(F_n, F_r)}. \tag{6.9}$$

Por outro lado, $\text{mdc}(F_n, F_r) \mid F_r$, então

$$Q_F^r \equiv \begin{bmatrix} F_{r+1} & 0 \\ 0 & F_{r-1} \end{bmatrix} \pmod{\text{mdc}(F_n, F_r)}. \tag{6.10}$$

Observe que $Q_F^m = Q_F^{qn+r} = Q_F^{qn} \cdot Q_F^r$. Multiplicando as relações de congruência módulo $\text{mdc}(F_m, F_n)$ das equações (6.9) e (6.10), pela Propriedade 2.17(c),

$$Q_F^m \equiv \begin{bmatrix} F_{n+1}^q & 0 \\ 0 & F_{n-1}^q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{r+1} & 0 \\ 0 & F_{r-1} \end{bmatrix} \pmod{\text{mdc}(F_n, F_r)},$$

ou seja,

$$Q_F^m \equiv \begin{bmatrix} F_{n+1}^q F_{r+1} & 0 \\ 0 & F_{n-1}^q F_{r-1} \end{bmatrix} \pmod{\text{mdc}(F_n, F_r)}. \tag{6.11}$$

Das entradas localizadas na primeira linha e segunda coluna das matrizes da relação de congruência da equação (6.11), segue que $\text{mdc}(F_n, F_r) \mid F_m$.

Por (i) e (ii),

$$\text{mdc}(F_m, F_n) = \text{mdc}(F_n, F_r).$$

□

6.2 Divisibilidade e a matriz Q_L

Nesta seção, ampliaremos o estudo das propriedades de divisibilidade para incluir também os números de Lucas. Para isso, utilizaremos a matriz Q_L e suas potências, que nos permitem obter resultados envolvendo as sequências de Fibonacci e de Lucas.

Lema 6.5. $5 \nmid L_n,\ n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Suponha que $5 \mid L_n$. Isto posto, da definição de relação de congruência, $L_n \equiv 0 \pmod 5$. Elevando ao quadrado, pela Propriedade 2.17(d), $L_n^2 \equiv 0 \pmod 5$.

Com isso, conseguimos reduzir a Propriedade 4.27 a congruência módulo 5, obtemos $0 - 4(-1)^n \equiv 0 \pmod 5$. Entretanto $-4(-1)^n$ não é congruente a 0 módulo 5. E, por contradição, $5 \nmid L_n$. □

Antes de prosseguirmos, é fundamental justificar a aplicação da propriedade distributiva da potência sobre o produto de matrizes. Em geral, para matrizes em $M_2(\mathbb{Z})$, a igualdade $(A \cdot B)^k = A^k \cdot B^k$ não é válida devido à natureza não comutativa do produto matricial. No entanto, tal propriedade pode ser demonstrada por indução finita sob a condição suficiente de que A e B comutem.

Observação 6.6. As matrizes Q_L e Q_F^{n-1} comutam,

$$Q_L \cdot Q_F^{n-1} = \begin{bmatrix} 3F_n + F_{n-1} & 3F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_n + 2F_{n-1} & F_{n-1} + 2F_{n-2} \end{bmatrix},$$

e

$$Q_F^{n-1} \cdot Q_L = \begin{bmatrix} 3F_n + F_{n-1} & F_n + 2F_{n-1} \\ 3F_{n-1} + F_{n-2} & F_{n-1} + 2F_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Ainda,

$$F_n + 2F_{n-1} = (F_{n-1} + F_{n-2}) + 2F_{n-1} = 3F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Portanto $Q_L \cdot Q_F^{n-1} = Q_F^{n-1} \cdot Q_L$, justificando a passagem $(Q_L \cdot Q_F^{n-1})^k = Q_L^k \cdot (Q_F^{n-1})^k$, que usaremos na demonstração da seguinte propriedade.

Propriedade 6.7. Dados, $k, n \in \mathbb{N}$:

(a) $L_n \mid L_{kn}$, se k ímpar;

(b) $L_n \mid F_{kn}$, se k par.

Demonstração. Sabemos que $L_n \mid L_n$

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} L_{n+1} & 0 \\ 0 & L_{n-1} \end{bmatrix} \pmod{L_n}.$$

Sendo assim, da Propriedade 2.17(d)

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}^k \equiv \begin{bmatrix} L_{n+1} & 0 \\ 0 & L_{n-1} \end{bmatrix}^k \pmod{L_n}. \tag{6.12}$$

(a) Para k ímpar, temos da Propriedade 4.15 e da Observação 6.6

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}^k &= (Q_L \cdot Q_F^{n-1})^k \\ &= Q_L^k \cdot Q_F^{k(n-1)} \\ &= 5^{\frac{k-1}{2}} \begin{bmatrix} L_{k+1} & L_k \\ L_k & L_{k-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{kn-k+1} & F_{kn-k} \\ F_{kn-k} & F_{kn-k-1} \end{bmatrix} \\ &= 5^{\frac{k-1}{2}} \begin{bmatrix} L_{k+1}F_{kn-k+1}L_kF_{kn-k} & L_{k+1}F_{kn-k} + L_kF_{kn-k-1} \\ L_kF_{kn-k+1} + L_{k-1}F_{kn-k} & L_kF_{kn-k} + L_{k-1}F_{kn-k-1} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Substituindo as entradas da matriz de acordo com a Propriedade 4.28, temos

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}^k = 5^{\frac{k-1}{2}} \begin{bmatrix} L_{k+kn-k+1} & L_{k+kn-k} \\ L_{k+kn-k} & L_{k+kn-k-1} \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}^k = 5^{\frac{k-1}{2}} \begin{bmatrix} L_{kn+1} & L_{kn} \\ L_{kn} & L_{kn-1} \end{bmatrix}. \tag{6.13}$$

Posto $\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}^k$ conforme equação (6.13) na relação de congruência da equação (6.12), obtemos

$$5^{\frac{k-1}{2}} \begin{bmatrix} L_{kn+1} & L_{kn} \\ L_{kn} & L_{kn-1} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} L_{n+1} & 0 \\ 0 & L_{n-1} \end{bmatrix}^k \pmod{L_n}. \tag{6.14}$$

Das entradas localizadas na primeira linha e segunda coluna das matrizes da relação de congruência da equação (6.14), concluímos que $L_n \mid 5^{\frac{k-1}{2}} L_{kn}$.

Pelo Lema 6.5, $L_n \mid L_{kn}$.

(b) Para k par, da Propriedade 4.15 e da Observação 6.6

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}^k &= (Q_L \cdot Q_F^{n-1})^k \\ &= Q_L^k \cdot Q_F^{k(n-1)} \\ &= 5^{\frac{k}{2}} Q_F^k \cdot Q_F^{kn-k)} \\ &= 5^{\frac{k}{2}} Q_F^{k+kn-k)} \\ &= 5^{\frac{k}{2}} Q_F^{kn},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}^k = 5^{\frac{k}{2}} \begin{bmatrix} F_{nk+1} & F_{nk} \\ F_{nk} & F_{nk-1} \end{bmatrix}. \tag{6.15}$$

Posto $\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}^k$ conforme equação (6.15) na relação de congruência da equação (6.12), obtemos

$$5^{\frac{k}{2}} \begin{bmatrix} F_{nk+1} & F_{nk} \\ F_{nk} & F_{nk-1} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} L_{n+1} & 0 \\ 0 & L_{n-1} \end{bmatrix}^k \pmod{L_n}. \tag{6.16}$$

Das entradas localizadas na primeira linha e segunda coluna das matrizes da relação de congruência da equação (6.16), concluímos que $L_n \mid 5^{\frac{k}{2}} F_{kn}$.

Pelo Lema 6.5, $L_n \mid F_{kn}$.

□

7 Considerações Finais

Iniciamos com os tópicos de álgebra linear que se fizeram necessários para o desenvolvimento deste trabalho, seguindo com Fibonacci e o problema original dos coelhos, cuja solução gerou a sequência de Fibonacci. Após, estudamos Lucas, que batizou a sequência de Fibonacci e criou sua própria, a sequência de Lucas. Estudamos Binet, pela importância do Teorema de Binet (Teorema 3.3) para ambas as sequências e expandimos as sequências de Fibonacci e Lucas para índices não-positivos, assim podendo expandir o Teorema de Binet para índices inteiros (Teorema 4.18). E introduzimos Cassini, pela notória Identidade de Cassini (Propriedade 4.7), sua equivalente para Lucas (Propriedade 4.16) e outras identidades interessantes.

Prosseguimos com a Q_F-matriz de Fibonacci, inicialmente com a n-ésima potência natural, então apresentamos uma nova demonstração, utilizando exclusivamente matrizes, para fórmula de expressão dos números de Fibonacci para índices não-positivos, através do Teorema 4.5. De modo análogo, para a Q_L-matriz de Lucas, estudamos, inicialmente com a n-ésima potência natural, a Q_L-matriz de Lucas e a obtenção da matriz $\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}$ com a Propriedade 4.9, introduzida em [1]. Então demonstramos a fórmula de expressão dos número de Lucas com índices negativos, utilizando exclusivamente matrizes, através do Teorema 4.17 e também generalizamos a obtenção da matriz $\begin{bmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{bmatrix}$, para todo n inteiro no Teorema 4.15, conforme em [1]. E utilizamos o polinômio característico de Q_F e Q_L para encontrar os autovalores e autovetores das matrizes e com isso reforçamos a relação dos números de Fibonacci e de Lucas com o número de ouro e seu conjugado; com essas informações pudemos demonstrar o Teorema de Binet (Teorema 4.18) de diversas maneiras diferentes utilizando matrizes, conforme desenvolvido em [2].

Demos seguimento à pesquisa, fazendo o estudo da M-matriz, que relaciona números de Fibonacci, iniciando com a n-ésima potência natural, então extendemos para índices negativos, afim de demonstrar para toda potência inteira no Teorema 5.3. Formalizamos a expressão dos números de Fibonacci com índices não-positivos com a M-matriz. E utilizamos o polinômio característico de M para encontrar os autovalores e autovetores da matriz e com isso demonstrar o Teorema de Binet (Teorema 4.18) de outra forma também usando matrizes.

E estudamos a P-matriz, que relaciona os numéros de Fibonacci e de Lucas, iniciando com a n-ésima potência natural, então extendemos para índices negativos, afim de demonstrar para toda potência inteira no Teorema 5.9. Relacionamos a P-matriz com as matrizes Q_F e Q_L e reescrevemos a Propriedade 4.15 utilizando a P-matriz na Propriedade 5.10. E utilizamos o polinômio característico de M para encontrar os autovalores e autovetores da matriz e com isso expressar P^n em uma única matriz.

Por fim, abordamos propriedades de divisibilidade com demonstrações envolvendo os

números de Fibonacci e Lucas utilizando congruência de matrizes, com as matrizes Q_F e Q_L.

Os estudos apresentados contribuem teoricamente para o área das representações matriciais das sequências de Fibonacci e de Lucas, sintetizando as matrizes Q_F, Q_L, M e P e propondo generalizações para as suas potências n em $\mathbb{Z}$ (Teoremas 4.6, 4.19, 5.3 e 5.9). Aplicamos novas observações — em particular a Propriedade 4.15 aplicada às Q-matrizes de [1] — em demonstrações originais e apresentamos demonstrações minuciosas do Teorema de Binet (Teorema 4.18), conforme [2] que evidenciam a conexão entre as sequências de Fibonacci e de Lucas e número de ouro e seu conjugado, nas Seções 4.4 e 5.3. Estabelecemos ainda relações entre a matriz P e as Q-matrizes (Propriedade 5.10) e propusemos uma abordagem baseada em congruências matriciais com Q_L para demonstrar propriedades de divisibilidade dos números de Lucas, alternativa às técnicas convencionais. Por fim, apresentamos demonstrações de diversas propriedades que relacionam números de Fibonacci e de Lucas e questões de divisibilidade por meio de matrizes.

Em síntese, este estudo buscou articular representações matriciais e propriedades aritméticas das sequências de Fibonacci e de Lucas, evidenciando como a linguagem matricial permite ampliar e sistematizar resultados clássicos. Essas sequências permanecem de grande relevância na matemática contemporânea (cf. MSC2020: 11B39, 11B83, 11Y55) e essa importância encontra expressão em organizações e veículos especializados, como a *The Fibonacci Association* responsável pela revista *The Fibonacci Quarterly* (em publicação desde 1963). Ao explorar, em particular, diversas demonstrações do Teorema de Binet (Teorema 4.18) e congruências matriciais com a matriz Q_L para questões de divisibilidade (Propriedade 6.7), o trabalho propõe caminhos metodológicos que, espera-se, estimulem o desenvolvimento teórico e novas investigações na área.

Referências

[1] QUIRINO, M. E. dos S. C.; CARITÁ, L. A. Insights into the Lucas Q-matrix and its properties. *Journal of Informatics and Mathematical Sciences*, v. 17, p. 21–41, 2025.

[2] QUIRINO, M. E. dos S. C.; CARITÁ, L. A. New proofs of Binet's formulas using the Lucas Q-matrix. *Panamerican Mathematical Journal*, v. 35, p. 1208–1213, 2025.

[3] CARITÁ, L. A.; QUIRINO, M. E. dos S. C. *Métodos da Álgebra Matricial para o Estudo dos Números de Lucas e de Fibonacci*. 2024. Disponível em: <https://sbm.org.br/xi-bienal/programacao/programacao-dos-minicursos>.

[4] FIBONACCI, L. *Liber Abaci*. Roma: Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche, 1857.

[5] HOGGATT, V. E. J. *Fibonacci and Lucas Numbers*. Boston: Houghton Mifflin Company, 1969.

[6] KING, C. H. *Some Properties of the Fibonacci Numbers*. Dissertação (Mestrado) — San Jose State College, 1960.

[7] KÖKEN, F.; BOZKURT, D. On Lucas numbers by the matrix method. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, v. 39, p. 471 – 475, 2010.

[8] MOORE, S. Fibonacci matrices. *The Mathematical Gazette*, v. 67, p. 56–57, 1983.

[9] KOSHY, T. *Fibonacci and Lucas Numbers With Applications*. Canada: John Wiley & Sons, INC, 2001.

[10] RUGGLES, I.; HOGGATT, J. V. E. A primer on the Fibonacci sequence—part IV. *The Fibonacci Quarterly*, v. 1:4, p. 65–71, 1963.

[11] HARTMAN, G. *Fundamentals of Matrix Algebra*. Lexington: Virginia Military Institute, 2011.

[12] CARITÁ, L. A. *Tópicos Selecionados em Estruturas Algébricas*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2024.

[13] SHOKRANIAN, S. *Uma Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009.

[14] WINTERLE, A. S. P. *Álgebra Linear*. São Paulo: Editora Pearson Education, 1987.

[15] ROSEN, K. H. *Elementary Number Theory and Its Applications*. Boston: Pearson Addison-Wesley, 2011.

[16] FIBONACCI, L. *Practica Geometriae*. Florença: Giunti, 2001.

[17] FIBONACCI, L. *Flos*. Florença: Giunti, 2001.

[18] FIBONACCI, L. *Liber Quadratorum*. Florença: Giunti, 2001.

[19] LUCAS, E. Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, v. 5, p. 128–138, 1877.

[20] LUCAS, E. Théorie des fonctions numériques simplement périodiques. *American Journal of Mathematics*, v. 1, p. 184–240, 1878.

[21] LUCAS, E. *Théorie des Nombres*. Paris: Gauthier-Villars, 1891.

[22] RIBENBOIM, P. *The Little Book of Bigger Primes*. New York: Springer, 2004.

[23] PONTES, F. L. G. de; GOBBI, C. R.; SOUSA, E. K. V. de. As contribuições de Édouard Lucas para a teoria dos números. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, v. 5, p. 243–252, 2018.

[24] BINET, J. P. M. Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies, d'un ordre quelconque à coefficients variables. *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, v. 17, p. 559–567, 1843.

[25] ZAHN, M. *Sequência de Fibonacci e o número de ouro*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2020.

[26] CASSINI, G. D. *Découverte de deux Nouvelles Planètes autour de Saturne*. Paris: Imprimerie Royale, 1673.

[27] CASSINI, G. D. Une nouvelle progression de nombres. *Histoire de l'Académie Royale de Sciences*, v. 1, p. 309, 1733.

[28] GÖKCAN İbrahim; DEĞER, A. H. Investigation of matrices $Q^{(n\cdot L)}$, $M^{(n\cdot L)}$, and $R^{(n\cdot L)}$ and some related identities. *Sakarya University Journal of Science*, v. 26, n. 4, p. 677–686, 2022.

[29] SAMPAIO, J. C. V.; CAETANO, P. A. S. *Introdução à Teoria dos Números, Um curso breve*. São Carlos: EdUFSCar, 2014.

[30] GAUSS, C. F. *Disquisitiones Arithmeticae*. Leipzig: Gerh. Fleischer, 1801.

A Divisibilidade de Números Inteiros

Neste apêndice, abordaremos o essencial de teoria dos números para compreensão da Seção 2.7 e para o entendimento das demonstrações do Capítulo 6. Usaremos como base as definições de Sampaio e Caetano [29] e conviamos o leitor mais curioso, que deseja aprofundar seus conhecimentos sobre teoria dos números, a consultar a obra na íntegra.

A.1 Divisibilidade

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, dizemos que a divide b quando existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $b = am$. Denotamos $a \mid b$. Quando $a \neq 0$ (e somente neste caso), dizemos também que b é divisível por a. Neste caso, o inteiro m é chamado de quociente de b por a e é indicado por $m = \frac{b}{a}$.

No caso em que não existe $m \in \mathbb{Z}$, tal que $b = am$, dizemos que a não divide b e denotamos $a \nmid b$.

Teorema A.1. *[Algoritmo da divisão em $\mathbb{Z}$] Se $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, então existem $q, r \in \mathbb{Z}$, únicos, tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < |b|$. Os inteiros q e r são chamados, respectivamente, de quociente e resto da divisão euclidiana de a por b.*

Demonstração. Separemos em três casos.

(i) Caso $a \geq 0$ e $b > 0$. Considere o conjunto

$$S = \{a - bx \mid x \in \mathbb{Z},\ a - bx \geq 0\}.$$

Note que $S \neq \emptyset$, pois para $x = 0,\ a - bx = a \in S$. Pelo Princípio da Boa Ordem, existe $r = \min(S)$. Como $r \in S,\ r = a - bq \geq 0$, para algum $q \in \mathbb{Z}$. Basta mostrar então que $r < b$. Suponha que $r \geq b$, então

$$a - b(q + 1) = a - bq - b = r - b \geq 0,$$

logo $a - b(q + 1) \in S$. Também teríamos $a - b(q + 1) = r - b < r = \min(S)$, uma contradição.

(ii) Caso $a < 0$ e $b > 0$. Pelo item (i), podemos determinar, q' e r' tais que

$$|a| = bq' + r',\ 0 \leq r' < b.$$

Se $r' = 0$, então $-|a| = a = b(-q') + 0$ e então $q = q'$ e $r = 0$ satisfazendo as condições do teorema.

Por outro lado, se $r' > 0$, então

$$a = -|a| = b(-q') - r' = b(-q') - b + b - r' = b(-q' - 1) + (b - r').$$

Note que, neste caso, $0 < b - r' < b$. Basta tomar $q = q' - 1$ e $r = b - r'$.

(iii) Agora, vamos mostrar que o resultado vale para $b < 0$. Pelos item (i) e (ii), podemos determinar inteiros q' e r' tais que

$$a = |b|q' + r', \ 0 \leq r' < |b|.$$

Neste caso, temos que $|b| = -b$, logo

$$a = |b|q' + r' = (-b)q' + r' = b(-q') + r',$$

e basta tomar $q = -q'$ e $r = r'$.

Por fim, vamos provar a unicidade. Mostremos que se dois pares de inteiros (q, r) e (q', r') satisfazem as condições do resultado, então $q = q'$ e $r = r'$. Temos que

$$qb + r = q'b + r'. \tag{A.1}$$

Sem perda de generalidade, podemos supor $r' \geq r$. Segue da equação (A.1) que

$$(q - q')b = r' - r.$$

Como $r' < |b|$, segue que $r' - r < |b|$ e assim,

$$(q - q')b < |b|.$$

Tomando módulos na desigualdade acima, segue que

$$0 \leq |q - q'||b| < |b|,$$

o que implica

$$0 \leq |q - q'| < 1.$$

Como $q, q' \in \mathbb{Z}$, segue que $q - q' = 0$, ou seja, $q = q'$. Pela igualdade (A.1), concluímos que $r = r'$. □

Propriedade A.2. Sejam $a, b, m \in \mathbb{Z}$ com $m \neq 0$. Se $m \mid a + b$ e $m \mid a$, então $m \mid b$.

Demonstração. Da hipótese, existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $a + b = pm$, subtraindo a na igualdade, obtemos

$$b = pm - a. \tag{A.2}$$

Também da hipótese, existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a = qm. \tag{A.3}$$

Substituindo a na equação (A.2) conforme a equação (A.3), obtemos $b = pm - qm$, evidenciando o fator m, $b = m(p - q)$. Reescrevendo $p - q = p' \in \mathbb{Z}$, temos $b = mp'$, ou seja, $m \mid b$. □

Propriedade A.3. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Então $a = b$ se, e somente se, $a \mid b$ e $b \mid a$.

Demonstração. (i) Se $a = b$, existe $1 \in \mathbb{Z}$ tal que $b = 1a$, ou seja, $a \mid b$ e ainda $a = 1b$, ou seja, $b \mid a$.

(ii) Se $a \mid b$ e $b \mid a$, existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$b = am, \tag{A.4}$$

e

$$a = bn. \tag{A.5}$$

Substituindo b na equação (A.5) conforme a equação (A.4), obtemos

$$a = (am)n, \tag{A.6}$$

ou seja, $1 = mn$. Disso, e de que $a, b \in \mathbb{N}$, $m = 1$ e $n = 1$.

Portanto, das equações (A.4) e (A.5), $a = b$.

□

A.2 Máximo divisor comum

Se $x, a \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$ e $x \mid a$, então $|x| \leq |a|$. Disso, $-|a| \leq |x| \leq |a|$. Denotamos por $D(a)$ o conjuto dos inteiros divisores de a. Se $a = 0$, $D(a) = \mathbb{Z}$.

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, existe pelo menos um divisor comum de a e b, a saber o 1. Denotamos por $D(a, b) = D(a) \cap D(b)$ o conjunto dos divisores comuns de a e b. Além disso, se $x \in \mathbb{Z}$ é um divisor comum de ambos a e b, então, $|x| \leq \min(|a|, |b|)$. E, portanto, $D(a, b)$ possui um máximo d, sendo $d \geq 1$, já que $1 \mid a$ e $1 \mid b$. Chamamos o inteiro d de máximo divisor comum de a e b e denotamos $\text{mdc}(a, b)$.

No caso em que $a = b = 0$, definimos $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(0, 0) = 0$ (muito embora não exista o maior inteiro positivo divisor de 0).

Propriedade A.4. Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a \mid c$, então $\text{mdc}(a, b) \mid c$.

Demonstração. Da hipótese, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$c = am. \tag{A.7}$$

Por outro lado, seja $d = \text{mdc}(a, b)$, existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a = dp. \tag{A.8}$$

Substituindo a na equação (A.7) conforme a equação (A.8), obtemos $c = (dp)m$. Reescrevendo $pm = m' \in \mathbb{Z}$, temos $c = dm'$, ou seja, $d = \text{mdc}(a, b) \mid c$. □

Teorema A.5. *[Bézout] Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, existem $t, s \in \mathbb{Z}$ tais que*

$$\text{mdc}(a, b) = \min\{d \in \mathbb{Z} \mid d > 0 \text{ e } d = at + bs, \text{ com } t, s \in \mathbb{Z}\}.$$

Demonstração. Seja $K = \{at + bs \mid t, s \in \mathbb{Z}\}$. Como $|a| = aI + b \cdot 0 \in K$, em que $I = 1$ ou $I = -1$ dependendo do módulo de a, temos que $K \cap \mathbb{Z}^+ \neq \emptyset$, e portanto, pelo Princípio da Boa Ordem, existe um menor elemento positivo d. Assim, basta mostrar que $d = \text{mdc}(a, b)$.

Como $d \in K$, $d = at' + bs'$, com $t', s' \in \mathbb{Z}$. Sendo r o resto da divisão de a por d, pelo Teorema A.1 podemos escrever

$$\begin{aligned} r &= a - qd \\ &= a - q(at' + bs') \\ &= a - aqt' + qbs' \\ &= a(1 - qt') + b(-qs'). \end{aligned}$$

Portanto $r \in K \cap \mathbb{Z}^+$, mas, do Teorema A.1, $0 \leq r < d$, como $d = \min(K \cap \mathbb{Z}^+)$, segue que $r = 0$. Logo $d \mid a$, e, com procedimento análogo, prova-se que $d \mid b$.

Por fim, se D é um outro divisor comum de a e b, temos que $D \mid at' + bs' = d$, o que implica $|D| \leq |d|$ e portanto d é por definição o maior divisor comum entre a e b. □

Propriedade A.6. Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a \mid bc$ e $\text{mdc}(a, b) = 1$, então $a \mid c$.

Demonstração. Da hipótese, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$bc = am. \tag{A.9}$$

Da hipótese e do Teorema A.5, existem $t, s \in \mathbb{Z}$ tais que

$$1 = at + bs.$$

Multiplicando por c,

$$c = act + bcs \tag{A.10}$$

Substituindo bc na equação (A.10) conforme a equação (A.9), obtemos $c = act + ams$, evidenciando a na equação: $c = a(ct + ms)$. Reescrevendo $(ct + ms) = m' \in \mathbb{Z}$, temos $c = am'$, ou seja, $a \mid c$. □

A.3 Congruência módulo m

As congruências são particularmente úteis quando se deseja destacar o resto na divisão euclidiana. Carl Friedrich Gauss introduziu o conceito e a notação de congruência módulo m por meio de sua obra *Disquisitiones Arithmeticae* [30]. As noções e notações propostas por Gauss foram imediatamente adotadas e permanecem em uso até a atualidade.

Dados $a, b, m \in \mathbb{Z}$, denotamos por $a \equiv b \pmod{m}$ o fato de que a é congruente a b módulo m, isto é, se $m \mid (a - b)$.

Alternativamente, temos que dados $a, b, m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} a \equiv b \pmod{m} &\iff m \mid (a - b) \\ &\iff a - b = pm,\ p \in \mathbb{Z} \\ &\iff a = b + pm,\ p \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Se a não for congruente a b módulo m, denotamos $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Na prática, adotamos congruências apenas para $m \geq 2$.

Proposição A.7. *A congruência módulo $m \geq 2$ define uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$.*

Demonstração. Sejam $a, b, m \in \mathbb{Z}$, com $m \geq 2$.

(i) Reflexividade: Temos $a - a = 0 = m \cdot 0$. Logo, $m \mid (a - a)$. Portanto, $a \equiv a \pmod{m}$.

(ii) Simetria: Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $m \mid (a - b)$. Assim, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b = mk$. Logo,

$$b - a = -mk = m(-k),\ -k \in \mathbb{Z}.$$

Assim $m \mid (b - a)$. Portanto, $b \equiv a \pmod{m}$.

(iii) Transitividade: Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$, então $m \mid (a-b)$ e $m \mid (b-c)$. Assim, existem $k, p \in \mathbb{Z}$ tais que

$$a - b = mk \quad \text{e} \quad b - c = mp.$$

Somando as igualdades,

$$(a - b) + (b - c) = mk + mp,$$

ou seja,

$$a - c = m(k + p),\ \text{onde } k + p \in \mathbb{Z}.$$

Assim, $m \mid (a - c)$. Portanto, $a \equiv c \pmod{m}$.

Assim, a congruência módulo $m \geq 2$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$. □

Propriedade A.8. Considere $a, b, c, d, m, k \in \mathbb{Z}$ com $m \geq 2$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$, então

(a) $a + c \equiv b + d \pmod{m}$;

(b) $ka \equiv kb \pmod{m}$;

(c) $ac \equiv bd \pmod{m}$;

(d) $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

Demonstração. Da hipótese,

$$a - b = p_1 m, \tag{A.11}$$

$$c - d = p_2 m, \tag{A.12}$$

com $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$.

(a) Substituindo $a + c - (b + d)$ de acordo com as equações (A.11) e (A.12)

$$\begin{aligned} a + c - (b + d) &= a - b + c - d \\ &= p_1 m + p_2 m \\ &= (p_1 + p_2)m. \end{aligned}$$

Reescrevendo $p_1 + p_2 = p' \in \mathbb{Z}$, temos

$$a + c - (b + d) = p'm.$$

Assim, $m \mid a + c - (b + d)$ e, portanto, $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.

(b) Multiplicando a equação (A.11) por k, temos,

$$k(a-b) = k(p_1 m),$$

ou seja,

$$ka - kb = (kp_1)m.$$

Reescrevendo $kp_1 = p'' \in \mathbb{Z}$, temos

$$ka - kb = p''m. \tag{A.13}$$

Assim, $m \mid ka - kb$ e, portanto, $ka \equiv kb \pmod{m}$.

(c) Substituindo $ac - bd$ de acordo com as equações (A.11), e (A.12)

$$\begin{aligned} ac - bd &= a(c-d) + d(a-b) \\ &= a(p_2 m) + d(p_1 m) \\ &= (ap_2 + dp_1)m. \end{aligned}$$

Reescrevendo $ap_2 + dp_1 = p''' \in \mathbb{Z}$, temos

$$ac - bd = p'''m.$$

Assim, $m \mid ac - bd$ e, portanto, $ac \equiv bd \pmod{m}$.

(d) Provaremos via indução finita para $n \in \mathbb{N}$.

(i) Para $n = 1$ e $n = 2$, o resultado é verdadeiro, pois temos que $a \equiv b \pmod{m}$ (por hipótese) e também, pelo item (b),

$$\begin{aligned} a \equiv b \pmod{m} &\implies aa \equiv bb \pmod{m} \\ &\implies a^2 \equiv b^2 \pmod{m}. \end{aligned}$$

(ii) Suponha que o resultado é válido para $n = k$, com $k > 2$, isto é, $a^k \equiv b^k \pmod{m}$.

(iii) Provemos para $n = k + 1$. Partindo da hipótese de indução (ii) e do item (b), temos:

$$\begin{aligned} a^k \equiv b^k \pmod{m} &\implies a^k a \equiv b^k b \pmod{m} \\ &\implies a^{k+1} \equiv b^{k+1} \pmod{m}. \end{aligned}$$

Por (i), (ii) e (iii), segue o resultado para $n \in \mathbb{N}$.

□

Propriedade A.9. Sejam $a, b, m \in \mathbb{Z}$ com $m \geq 2$. Então:

a) Se r é o resto da divisão de a por m, então $a \equiv r \pmod{m}$.

b) Se $a \equiv s \pmod{m}$, com $s \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq s < m$, então s é o resto da divisão de a por m.

c) $a \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se, os restos das divisões de a e b por m são iguais.

Demonstração. Vejamos

a) Pelo Teorema A.1, $a = mq + r$, com $q \in \mathbb{Z}$. Logo, $a - r = mq$, isto é, $m \mid (a - r)$.

   Portanto, $a \equiv r \pmod{m}$.

b) Sendo $a \equiv s \pmod{m}$, temos $a - s = mq$, para $q \in \mathbb{Z}$. Logo, $a = mq + s$.

   Como $q, s \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq s < m$, pelo Teorema A.1, segue que s é o resto da divisão de a por m, uma vez que o quociente e o resto dessa divisão são únicos.

c) Seja r o resto da divisão de a por m. Pelo item (a), temos $a \equiv r \pmod{m}$.

   Como $a \equiv b \pmod{m}$, pela Propriedade A.7 segue que $b \equiv r \pmod{m}$. Como $0 \leq r < m$, pelo item (b), r é o resto da divisão de b por m.

   De $0 \leq r < m$ e pela Proprosição A.9b), r é o resto da divisão de b por m.

□

Teorema A.10. *Sejam $x, y \in \mathbb{Z}$ e $m, n \in \mathbb{N}$. Se $x \equiv y \pmod{m}$, então $x \equiv y \pmod{d}$, onde $d = \text{mdc}(m, n)$.*

Demonstração. Pela hipótese, $x - y = km$, para $k \in \mathbb{Z}$. Como $d \mid m$ então $d \mid km$ e segue que $d \mid (x - y)$.

Logo, $x \equiv y \pmod{d}$, onde $d = \text{mdc}(m, n)$. □