



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de São José do Rio Preto

Máquinas de somar estocásticas e conjuntos de Julia

Danilo Antonio Caprio

Orientador: Prof. Dr. Ali Messaoudi

Tese apresentada ao Instituto de Biociências, Letras
e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista,
Câmpus São José do Rio Preto, como parte dos requisitos
para a obtenção do título de Doutor em Matemática

São José do Rio Preto

Março - 2015

Danilo Antonio Caprio

Máquinas de somar estocásticas
e conjuntos de Julia

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Ali Messaoudi

São José do Rio Preto
2015

Caprio, Danilo Antonio.
Máquinas de somar estocásticas e conjuntos de Julia /
Danilo Antonio Caprio. -- São José do Rio Preto, 2015
82 f. : il.

Orientador: Ali Messaoudi
Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de
Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências
Exatas

1. Matemática. 2. Sistemas dinâmicos diferenciais.
3. Markov, Processos de. 4. Julia, Conjuntos de. I. Messaoudi,
Ali. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho".
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.938

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Máquinas de somar estocásticas e conjuntos de Julia

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ali Messaoudi
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Eduardo Garibaldi
UNICAMP – Campinas

Prof. Dr. Sylvain Philippe Pierre Bonnot
USP – São Paulo

Prof. Dr. Paulo Ricardo da Silva
UNESP – São José do Rio Preto

Prof. Dr. Márcio Ricardo Alves Gouveia
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
25 de março de 2015

AGRADECIMENTOS

Ao concluir este trabalho, deixo meus sinceros agradecimentos:

Ao meu orientador, professor Ali Messaoudi, pela paciência e por toda instrução e atenção concedida a mim durante o desenvolvimento deste trabalho;

Aos professores que fizeram parte da banca examinadora: Eduardo Garibaldi, Márcio Ricardo Alves Gouveia, Paulo Ricardo da Silva e Sylvain Philippe Pierre Bonnot;

Ao instituto Institut de Mathématiques de Luminy, Aix Marseille Université, por ter me acolhido durante o doutorado sanduíche e à Christian Mauduit por ter me orientado durante este período;

À FAPESP pelo apoio financeiro, para a realização deste doutorado sanduíche, através da bolsa estágio de pesquisa no exterior (BEPE), processo número 2013/19353-0;

À FAPESP pelo apoio financeiro durante o doutorado no Brasil, através do processo 2010/19731-7, que possibilitou a realização deste trabalho;

Ao meu pai Antonio Angelo Caprio e à minha mãe Eliana Gomes de Souza Caprio, pela confiança, apoio e esforços para sempre me proporcionar bons estudos;

À Camila Meneghelo Whitacker e à sua família pelo carinho, paciência e compreensão. Em especial, agradeço aos seus pais Jayme Whitacker Junior e Cordélia Meneghelo Whitacker, e sua irmã Larissa Meneghelo Whitacker;

À todos aqueles que foram meus professores durante a graduação e a pós-graduação, dando a mim uma excelente formação acadêmica;

Aos meus colegas e amigos da pós-graduação Oyrán Silva Rayzaro, Rafael Marcel Asmat Uceda, Jaime Rezende de Moraes, Rodrigo Donizete Euzébio e Leonardo Tambellini;

Ao professor Jéfferson Luiz Rocha Bastos e a professora Sandra Denise Gasparini Bastos, pela amizade e pelos conselhos durante minha jornada na França;

Aos amigos que fiz em Marseille, durante o doutorado sanduíche. Em especial, aos amigos Maria Gina Erfe Navarro, Amanda Beatriz Macedo e Ana Theresa Moraes.

A filosofia que cultivo não é nem tão bárbara nem tão inacessível que rejeite as paixões; pelo contrário é só nelas que reside a doçura e felicidade da vida.

(René Descartes)

Resumo

Neste trabalho, definimos a máquina de somar estocástica relacionada à base de Fibonacci e a uma sequência de probabilidades $(p_i)_{i \geq 1}$. Obtemos uma cadeia de Markov cujo estados são o conjunto dos inteiros não-negativos. Estudamos propriedades probabilísticas dessa cadeia, como transiência e recorrência. Mostramos também que o espectro associado a essa cadeia de Markov está relacionado ao conjunto de Julia fibrado de uma classe de endomorfismos em $\mathbb{C}^2$. Além disso, estudamos propriedades dinâmicas e topológicas de uma classe de endomorfismos de $\mathbb{C}^2$ (ou $\mathbb{R}^2$). Precisamente, as aplicações consideradas são $f_n(x, y) = (xy + c_n, x)$, onde $c_n \in \mathbb{C}$ (ou $c_n \in \mathbb{R}$), para todo $n \geq 0$.

Palavras-Chave: Máquina de somar, cadeias de Markov, operador de transição, espectro, conjuntos de Julia, conjuntos de Julia fibrado.

Abstract

In this work we define a stochastic adding machine associated to the Fibonacci base and to a probabilities sequence $(p_i)_{i \geq 1}$. We obtain a Markov chain whose states are the set of nonnegative integers. We study probabilistic properties of this chain, such as transience and recurrence. We also prove that the spectrum associated to this Markov chain is connected to the filled Julia sets for a class of endomorphisms in $\mathbb{C}^2$. Furthermore, we study topological and dynamical properties of a class of endomorphisms of $\mathbb{C}^2$ (or $\mathbb{R}^2$). Precisely, the considered maps are $f_n(x, y) = (xy + c_n, x)$, where $c_n \in \mathbb{C}$ (or $c_n \in \mathbb{R}$), for all $n \geq 0$.

Keywords: Adding machine, Markov chains, transition operator, spectrum, Julia sets, fibered Julia sets.

Sumário

Introdução	11
1 Preliminares	15
1.1 Espectro de operadores lineares em espaços de Banach	15
1.2 Conjuntos de Julia fibrado	15
1.3 Processos estocásticos e cadeias de Markov	16
2 Máquina de somar estocástica em base 2	18
2.1 Máquina de somar em base 2	18
2.2 Máquina de somar estocástica em base 2	19
2.3 Transdutor da máquina de somar em base 2	19
2.4 Transdutor da máquina de somar estocástica em base 2	20
3 Máquina de somar estocástica em base de Fibonacci	24
3.1 Máquina de somar em base de Fibonacci	24
3.2 Máquina de somar estocástica em base de Fibonacci	25
4 Propriedades de $\mathcal{K}^+$ e $K^+ = \mathcal{K}^+ \cap \mathbb{R}^2$	56
4.1 Dinâmica de ϕ_n em $\mathbb{R}^2$	57
4.1.1 Dinâmica de f em $L \cup M \cup N \cup P$	59
4.1.2 Dinâmica de f em $R_0 \cup R_1 \cup R_2 \cup R_3$	62
4.1.3 Caracterizando $W^s(\theta)$	72
4.1.4 Caracterizando $W^s(p) \cup W^s(f(p)) \cup W^s(f^2(p))$	74
4.2 Caso particular da conjectura 3.1	77

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar alguns problemas nas áreas de sistemas dinâmicos, probabilidade e análise funcional. Estes problemas envolvem máquinas de somar estocástica, espectros de operadores de transição associados a cadeias de Markov e conjuntos de Julia fibrado de endomorfismos em $\mathbb{C}^2$.

Seja $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação holomorfa. O conjunto de Julia cheio associado a g é, por definição, o conjunto $K(g) = \{z \in \mathbb{C} : g^n(z) \text{ é limitado}\}$, onde g^n é a n -ésima iterada de g .

Conjuntos de Julia cheios e suas fronteiras (chamadas de conjuntos de Julia) apresentam muitas propriedades topológicas e dinâmicas. Esses conjuntos foram definidos por Fatou e Julia e eles estão relacionados com várias áreas, como sistemas dinâmicos, teoria dos números, topologia, análise funcional, entre outras (ver, por exemplo, [4]).

Como uma extensão dos conjuntos de Julia em $\mathbb{C}^d$, $d \geq 2$, muitos autores consideraram os conjuntos $K^+ = K^+(f) = \{z \in \mathbb{C}^d : (f^n(z))_{n \geq 1} \text{ é limitada}\}$ e suas fronteiras ∂K^+ , onde $f : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$ é uma função polinomial. Existem muitos resultados sobre propriedades topológicas e dinâmicas no caso em que f é uma aplicação de Hénon definida por $f(x, y) = (y, P(y) + c - ax)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, onde P é um polinômio complexo e a, c são números complexos fixados (ver [1] e [11]).

Uma conexão entre conjuntos de Julia em $\mathbb{C}$ e máquina de somar estocástica foi dado por Killeen e Taylor em [15]. Eles definiram a máquina de somar estocástica da seguinte maneira: seja $N \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ um número inteiro não negativo. Utilizando o algoritmo fominha, podemos escrever N de forma única como $N = \sum_{i=0}^{k(N)} \varepsilon_i(N) 2^i$, onde $\varepsilon_i(N) \in \{0, 1\}$, para todo $i \in \{0, \dots, k(N)\}$. Dado N escrito em base 2, podemos calcular os dígitos de $N + 1$ em base 2 através de um algoritmo formado por um sistema de equações de evolução, introduzindo uma variável auxiliar "vai 1", $c_i(N)$, para cada dígito $\varepsilon_i(N)$, da seguinte maneira:

Tome $c_{-1}(N + 1) = 1$ e, para todo $i \geq 0$,

$$\begin{cases} \varepsilon_i(N+1) = (\varepsilon_i(N) + c_{i-1}(N+1)) \mod 2; \\ c_i(N+1) = \left\lfloor \frac{\varepsilon_i(N) + c_{i-1}(N+1)}{2} \right\rfloor, \end{cases}$$

onde $[x]$ é a parte inteira de $x \in \mathbb{R}^+$.

Killeen e Taylor [15] definiram a máquina de somar estocástica considerando uma família de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $\{e_i(n) : i \geq 0, n \in \mathbb{N}\}$, parametrizadas pelos números inteiros não negativos i e n , sendo que cada $e_i(n)$ toma o valor 0 com probabilidade $1 - p$ e toma o valor 1 com probabilidade p . De forma mais precisa, eles definiram a máquina de somar estocástica da seguinte maneira: seja N um número inteiro não negativo e considere as sequências $(\varepsilon(N+1))_{i \geq 0}$ e $(c'_i(N+1))_{i \geq -1}$ definidas por $c'_{-1}(N+1) = 1$ e, para todo $i \geq 0$, por

$$\begin{cases} \varepsilon_i(N+1) = (\varepsilon_i(N) + e_i(N)c'_{i-1}(N+1)) \mod 2; \\ c'_i(N+1) = \left\lfloor \frac{\varepsilon_i(N) + e_i(N)c'_{i-1}(N+1)}{2} \right\rfloor. \end{cases}$$

Killeen e Taylor [15] estudaram o espectro do operador de transição S associado à máquina de somar estocástica em base 2, agindo em $l^\infty(\mathbb{N})$, e provaram que o espectro $\sigma(S)$ de S é igual ao conjunto de Julia cheio da função quadrática $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = (z - (1-p))^2/p^2$, ou seja, $\sigma(S) = \{z \in \mathbb{C} : f^n(z) \text{ é limitado}\}$.

Em [9], El Abdalaoui e Messaoudi estudaram o espectro do operador S em outros espaços de Banach, como $c_0(\mathbb{N})$ e $l^\alpha(\mathbb{N})$, $\alpha \geq 1$.

Em [17], Messaoudi, Valle e Sester definiram uma extensão da máquina de somar estocástica de Killeen e Taylor, em base $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, considerando uma sequência de probabilidades $(p_i)_{i \geq 1}$, e provaram que o espectro desse operador de transição agindo em $l^\infty(\mathbb{N})$ é igual ao conjunto de Julia fibrado $\mathcal{E} := \left\{z \in \mathbb{C} : \limsup_{j \rightarrow +\infty} |\tilde{f}_j(z)| < +\infty\right\}$, onde $\tilde{f}_j = f_j \circ \dots \circ f_1$, para todo $j \geq 1$, e $f_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ são funções definidas por $f_j(z) = \left(\frac{z - (1-p_j)}{p_j}\right)^d$.

Neste trabalho, em vez da base 2, iremos considerar a base de Fibonacci $(F_n)_{n \geq 0}$, ou seja, a sequência recorrente definida por $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para todo $n \geq 2$, onde $F_0 = 1$ e $F_1 = 2$. Também, iremos considerar uma sequência de probabilidades $(p_i)_{i \geq 1}$, ao invés de uma única probabilidade p (como foi feito por Messaoudi e Smania em [18] e por Messaoudi e Uceda em [19], para uma larga classe de sequências recorrentes de ordem 2).

Considere $N \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ um número inteiro não negativo. Utilizando o algoritmo fominha, podemos escrever N de forma única como $N = \sum_{i=0}^{k(N)} \varepsilon_i(N) F_i$, onde $(\varepsilon_i(N))_{i \geq 0}$ são

os dígitos de N em base de Fibonacci com $\varepsilon_i(N) \in \{0, 1\}$ e $\varepsilon_{i+1}(N)\varepsilon_i(N) \neq 11$, para todo $i \in \{0, \dots, k(N)\}$.

A partir dessas considerações, provaremos os seguintes resultados:

Teorema 1 Seja S o operador associado à máquina de somar em base de Fibonacci e associado à sequência de probabilidades $(p_i)_{i \geq 1}$. Então, em $l^\infty(\mathbb{N})$, temos que $\sigma_{pt}(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (q_n(\lambda))_{n \geq 1} \text{ é limitada}\}$, onde $(q_n(\lambda))_{n \geq 1}$ é uma sequência definida por $q_n(\lambda) = q_{F_0}^{\varepsilon_0}(\lambda) \dots q_{F_N}^{\varepsilon_N}(\lambda)$, onde $n = \sum_{i=0}^N \varepsilon_i(n)F_i$, com $q_{F_0}(\lambda) = \frac{\lambda - (1-p_1)}{p_1}$, $q_{F_1}(\lambda) = \frac{1}{p_2}(q_{F_0}(\lambda))^2 + 1 - \frac{1}{p_2}$ e $q_{F_n}(\lambda) = \frac{1}{r_n}q_{F_{n-1}}(\lambda)q_{F_{n-2}}(\lambda) - \left(\frac{1}{r_n} - 1\right)$, onde $r_n = p_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1}$, para todo $n \geq 1$. Em particular, temos que

$$\sigma_{pt}(S) \subset E := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\psi_n(q_{F_1}(\lambda), q_{F_0}(\lambda)))_{n \geq 2} \text{ é limitada}\},$$

onde $\psi_n = g_n \circ g_{n-1} \circ \dots \circ g_2$ e $g_n : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ é definido por $g_n(x, y) = \left(\frac{1}{r_n}xy - \left(\frac{1}{r_n} - 1\right), x\right)$, para todo $n \geq 2$.

Teorema 2 Em $l^\infty(\mathbb{N})$, temos $E \subset \sigma(S)$.

Teorema 3 Suponhamos que $\liminf_{i \rightarrow +\infty} p_i > 0$. Então as seguintes propriedades valem:

- 1) E é compacto e $\mathbb{C} \setminus E$ é conexo.
- 2) Se $p_i = 1$ para todo $i \in \{2, 3, \dots, k\}$ e $p_{k+1} < \frac{1}{2}$, para algum $k \geq 2$, então E é desconexo.

Teorema 4 A cadeia de Markov é transiente se, e somente se, $\prod_{i=1}^{\infty} p_i > 0$. Se $\prod_{i=1}^{\infty} p_i = 0$ e

$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = +\infty$ então a cadeia de Markov é nula recorrente.

Teorema 5 Se $p_i = p$, para todo $i \geq 1$, e $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < p < 1$, então $E \cap \mathbb{R} = \sigma_{pt}(S) \cap \mathbb{R}$.

Além de estudarmos a máquina de somar estocástica em base de Fibonacci, estudaremos o conjunto $\mathcal{K}^+$ definido por $\mathcal{K}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : (\phi_n(x, y))_{n \geq 0} \text{ é limitada}\}$ onde $\phi_n = f_n \circ \dots \circ f_1$ e $f_n : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ é definida por $f_n(x, y) = (xy + c_n, x)$, com $c_n \in \mathbb{C}$, para todo $n \geq 1$. Esse conjunto foi estudado por S. Bonnot, A. de Carvalho e A. Messaoudi em [2], no caso em que $c_n = c \in \mathbb{C}$, para todo $n \geq 1$. Em particular, eles provaram que se $c \in \mathbb{R}$, com $0 < c < \frac{1}{4}$, e $K^+ := \mathcal{K}^+ \cap \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : (f^n(x, y))_{n \geq 0} \text{ é limitada}\}$, onde $f(x, y) = (xy + c, x)$, então $K^+ = W^s(\alpha) \cup W^s(\theta) \cup W^s(p) \cup W^s(f(p)) \cup W^s(f^2(p))$, onde $p = (-1, -1)$, $\alpha = (a_1, a_1)$, $\theta = (a_2, a_2)$, com $a_1 = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$ e $a_2 = \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$, e $W^s(x)$ é a variedade estável de x , para todo $x \in \{\alpha, \theta, p, f(p), f^2(p)\}$. Nesse trabalho, iremos provar que o mesmo é verdadeiro quando supomos que $-0,94 \leq c < 0$.

Este trabalho será dividido em quatro capítulos. No primeiro capítulo, daremos algumas definições e conceitos básicos sobre espectro de operadores lineares em espaços de Banach, conjuntos de Julia, processos estocásticos e cadeias de Markov.

No segundo capítulo, daremos a definição da máquina de somar estocástica em base 2, dada por Killeen e Taylor, e enunciaremos alguns resultados já provados.

No terceiro capítulo, através de transdutor, definiremos a máquina de somar estocástica em base de Fibonacci relacionada à sequência de probabilidades $(p_i)_{i \geq 1}$, provando os teoremas 1, 2, 3 e 4.

No quarto capítulo, estudaremos o conjunto $\mathcal{K}^+$ e provaremos que se $-0,94 \leq c < 0$, então $K^+ := \mathcal{K}^+ \cap \mathbb{R}^2 = W^s(\alpha) \cup W^s(\theta) \cup W^s(p) \cup W^s(f(p)) \cup W^s(f^2(p))$. Além disso, provaremos o teorema 5.

Capítulo 1

Preliminares

Nesse capítulo, daremos algumas definições e conceitos básicos sobre espectro de operadores lineares em espaços de Banach, sobre conjuntos de Julia, sobre processos estocásticos e também sobre cadeias de Markov.

1.1 Espectro de operadores lineares em espaços de Banach

Para mais detalhes, ver a referência [7].

Definição 1.1 *Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $T : X \longrightarrow X$ um operador linear. Então temos as seguintes definições:*

- a) Espectro ou espectro linear: $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ não é bijetora}\}.$*
- b) Espectro pontual: $\sigma_{pt}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ não é injetora}\}.$*
- c) Espectro aproximado: $\sigma_a(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{existe sequência } (x_n)_{n \geq 0} \subset X, \text{ com } \|x_n\| = 1, \text{ para todo } n \geq 0, \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \|(\lambda I - T)x_n\| = 0\}.$*
- d) Espectro contínuo: $\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ é injetora, } \overline{(\lambda I - T)X} = X \text{ mas } (\lambda I - T)X \neq X\}.$*
- e) Espectro residual: $\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ é injetora, mas } \overline{(\lambda I - T)X} \neq X\}.$*

Vale observar que $\sigma(T) = \sigma_{pt}(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$ e que $\sigma_a(T) \subset \sigma(T)$.

1.2 Conjuntos de Julia fibrado

Para mais detalhes, ver as referências [4] e [10].

Definição 1.2 Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma aplicação holomorfa. O conjunto de Julia cheio associado a f é definido por $K(f) = \{z \in \mathbb{C} : (f^n(z))_{n \geq 0} \text{ é limitada}\}$, onde $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ vezes}}$ é a n -ésima iterada de f .

Definição 1.3 Seja $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, para todo $n \geq 0$, uma sequência de funções holomorfas. O conjunto de Julia fibrado associado à sequência $(f_n)_{n \geq 0}$ é o conjunto $K((f_n)_{n \geq 0}) = \{z \in \mathbb{C} : (f_n(z))_{n \geq 0} \text{ é limitada}\}$.

Essas definições podem ser estendidas para funções polinomiais definidas em $\mathbb{C}^d$, com $d \geq 2$.

1.3 Processos estocásticos e cadeias de Markov

Para mais detalhes, ver as referências [23] e [25].

Definição 1.4 Um processo estocástico $\{X(t) : t \in T\}$ é uma coleção de variáveis aleatórias. O índice t representa o tempo e $X(t)$ o estado do processo no tempo t . O conjunto T é chamado de conjunto dos índices do processo. Quando T é um conjunto enumerável, dizemos que o processo estocástico é discreto. Quando T é um intervalo em $\mathbb{R}$, dizemos que o processo estocástico é contínuo.

O espaço de estados de um processo estocástico é definido como sendo o conjunto de todos os valores possíveis que uma variável aleatória $X(t)$ pode assumir.

Assim, um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias que descreve a evolução de algum processo (por exemplo, um processo físico) através do tempo.

Definição 1.5 Uma cadeia de Markov $\{X(t)\}$ discreta é um processo estocástico tal que a distribuição condicional de um estado futuro X_{n+1} não depende dos estados passados $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$, mas só do estado atual X_n , isto é, existe uma probabilidade fixa p_{ij} de tal forma que um processo que está no estado $X_n = i$ passe para o estado $X_{n+1} = j$, com esta probabilidade:

$$P\{X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = p_{ij}.$$

Dada uma cadeia de Markov, podemos definir sua matriz de transição S , dada por

$$S = \begin{pmatrix} p_{00} & \dots & p_{0n} & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ p_{n0} & \dots & p_{nn} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

onde p_{ij} representa a probabilidade que o estado i transita para o estado j , para todo $i, j \in \mathbb{N}$.

Definição 1.6 Seja $P_{ij}^{(n)} := P\{X_n = j | X_0 = i\}$. Assim, temos as seguintes definições:

- 1) Um estado j é dito ser acessível desde um estado i (notação $i \rightarrow j$), se $P_{ij}^{(n)} > 0$ para algum $n \geq 0$.
- 2) Dois estados i e j são comunicáveis (notação $i \leftrightarrow j$) se $i \rightarrow j$ e $j \rightarrow i$.
- 3) Um conjunto de estados E em uma cadeia de Markov é uma classe de comunicação se nenhum estado fora de E é acessível por qualquer estado em E . Se a cadeia de Markov é formada por uma única classe, isto é, todos os estados são comunicáveis, a cadeia de Markov é dita irredutível.

Definição 1.7 Dada uma cadeia de Markov irredutível, dizemos que um estado i é recorrente se, e somente se, começando no estado i , o processo retorna infinitas vezes ao estado i com probabilidade 1, ou seja, um estado i é recorrente se, e somente se, $f_{i,i}^* = 1$, onde

$$f_{i,i}^* = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{i,i}^n \text{ e } f_{i,i}^n = P\{X_n = i, X_{n-1} \neq i, \dots, X_1 \neq i | X_0 = i\}.$$

Assim definimos um estado i como sendo transiente se, e somente se, $f_{i,i}^* < 1$.

Definição 1.8 Sejam i um estado recorrente e $R_i = \min\{n \geq 1 : X_n = i\}$. A duração média entre visitas ao estado i é dada por

$$m_i = E[R_i | X_0 = i] = \sum_{n=1}^{+\infty} n f_{i,i}^n.$$

Dizemos que o estado i é recorrente positivo se, e somente se, $m_i < \infty$, e que o estado i é nulo recorrente se, e somente se, $m_i = \infty$.

Definição 1.9 Uma cadeia de Markov é chamada de recorrente positiva (respectivamente nula recorrente ou transiente) se todos os estados são recorrente positivo (respectivamente nulo recorrente ou transiente).

Proposição 1.1 [23] Seja X uma cadeia de Markov irredutível com matriz de transição S . A cadeia de Markov X é transiente se, e somente se, existe $v = (v_1, v_2, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$, com $0 < v_i \leq 1$, tal que $\tilde{S}v = v$, onde $\tilde{S}$ é matriz obtida da matriz S , retirando-se uma linha e uma coluna.

Definição 1.10 Sejam X uma cadeia de Markov e S a sua matriz de transição. Dizemos que $\mu \in l^1(\mathbb{N})$ é uma medida de probabilidade invariante em relação à S , se e somente se, $\mu S = \mu$.

Observe que a cadeia de Markov é recorrente positiva se, e somente se, existe uma medida de probabilidade invariante em relação à S .

Capítulo 2

Máquina de somar estocástica em base 2

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns resultados clássicos da máquina de somar estocástica em base 2, definida por Killeen e Taylor em [15].

2.1 Máquina de somar em base 2

Considere $N \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ um número inteiro não negativo. Utilizando o algoritmo fominha, podemos escrever N de forma única como $N = \sum_{i=0}^{k(N)} \varepsilon_i(N) 2^i$, com $\varepsilon_i(N) \in \{0, 1\}$, para todo $i \in \{0, \dots, k(N)\}$. A representação de N em base 2 é dada por $N = \varepsilon_{k(N)}(N) \dots \varepsilon_1(N) \varepsilon_0(N)_2 = \varepsilon_k \dots \varepsilon_1 \varepsilon_0$.

Dado N escrito em base 2, podemos calcular os dígitos de $N + 1$ em base 2 através de um algoritmo formado por um sistema de equações de evolução, introduzindo uma variável auxiliar "vai 1", $c_i(N)$, para cada dígito $\varepsilon_i(N)$, da seguinte maneira:

Tome $c_{-1}(N + 1) = 1$ e para todo $i \geq 0$,

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(N + 1) &= (\varepsilon_i(N) + c_{i-1}(N + 1)) \mod 2; \\ c_i(N + 1) &= \left\lfloor \frac{\varepsilon_i(N) + c_{i-1}(N + 1)}{2} \right\rfloor, \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $\lfloor x \rfloor$ é a parte inteira de $x \in \mathbb{R}^+$.

2.2 Máquina de somar estocástica em base 2

Killeen e Taylor [15] generalizaram a descrição 2.1 para definir uma máquina de somar falível, ou seja, a máquina de somar estocástica, considerando uma família de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $\{e_i(n) : i \geq 0, n \in \mathbb{N}\}$, parametrizadas pelos números inteiros não negativos i e n , sendo que cada elemento dessa família toma o valor 0 com probabilidade $1 - p$ e toma o valor 1 com probabilidade p . De forma mais precisa, eles definiram a máquina de somar estocástica da seguinte maneira: seja N um número inteiro não negativo e considere as sequências $(\varepsilon(N+1))_{i \geq 0}$ e $(c'_i(N+1))_{i \geq -1}$ definidas por $c'_{-1}(N+1) = 1$ e para todo $i \geq 0$, por

$$\begin{aligned}\varepsilon_i(N+1) &= (\varepsilon_i(N) + e_i(N)c'_{i-1}(N+1)) \mod 2; \\ c'_i(N+1) &= \left\lfloor \frac{\varepsilon_i(N) + e_i(N)c'_{i-1}(N+1)}{2} \right\rfloor.\end{aligned}\tag{2.2}$$

2.3 Transdutor da máquina de somar em base 2

Uma outra maneira de encontrarmos os dígitos de $N+1$ em base 2 é através de um transdutor finito $\mathcal{T}$, como o da figura 2.1.

Seja A um alfabeto finito. Um autômato em A , denotado por $\mathcal{A} = (Q, A, E, I, T)$, é um grafo orientado cujas arestas estão etiquetadas com elementos de A , Q é um conjunto finito de estados, $I \subset Q$ é o conjunto de estados iniciais, $T \subset Q$ é o conjunto de estados terminais e $E \subset Q \times A \times Q$ é o conjunto de arestas.

Um caminho c no autômato $\mathcal{A}$ é, por definição, uma sequência finita de arestas consecutivas, ou seja, $c = (p_n, a_{n-1}, p_{n-1}) \dots (p_2, a_1, p_1)(p_1, a_0, p_0)$.

Seja B outro alfabeto finito e denote por A^* (resp. B^*) o conjunto das palavras finitas sobre A (resp. B). Um transdutor $\mathcal{T}$ em $A^* \times B^*$ é um autômato finito em $A^* \times B^*$. Uma aresta em $\mathcal{T}$ que liga um estado p à um estado q e que tem como etiqueta $(u, v) \in A^* \times B^*$ é denotada por $q \xleftarrow{u/v} p$. Dizemos que $\mathcal{T}$ lê a palavra $u \in A^*$ e a transforma na palavra $v \in B^*$.

O transdutor $\mathcal{T}$, representado na figura 2.1, é formado por um estado inicial I e um estado terminal T . O estado I está conectado a si mesmo por uma flecha etiquetada por $(1/0)$. Também existe uma outra flecha saindo do estado I e chegando ao estado T , etiquetada por $(0/1)$. Já o estado T está conectado a si mesmo por uma única flecha etiquetada por (x/x) , onde $x \in \{0, 1\}$.

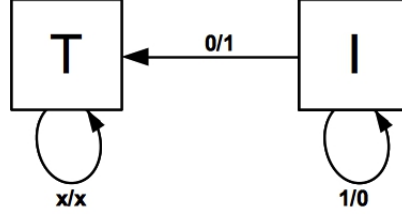


Figura 2.1: Transdutor $\mathcal{T}$ da máquina de somar em base 2.

Seja $N = 0\varepsilon_k \dots \varepsilon_1 \varepsilon_0$ um número inteiro não negativo escrito em base 2. Para encontrar os dígitos de $N + 1$ em base 2, vamos considerar o caminho finito

$$c = (p_{k+2}, 0/\varepsilon'_{K+1}, p_{k+1})(p_{k+1}, \varepsilon_k/\varepsilon'_k, p_k) \dots (p_2, \varepsilon_1/\varepsilon'_1, p_1)(p_1, \varepsilon_0/\varepsilon'_0, p_0),$$

onde $p_i \in \{I, T\}$, $p_0 = I$, $p_{k+2} = T$ e $\varepsilon_i, \varepsilon'_i \in A^*$. Assim, temos que $N + 1 = \varepsilon'_{k+1}\varepsilon'_k \dots \varepsilon'_1\varepsilon'_0$ em base 2.

2.4 Transdutor da máquina de somar estocástica em base 2

Uma outra maneira de definir a máquina de somar estocástica em base 2 é através de um transdutor probabilístico. Essa ideia foi apresentada por A. Messaoudi e D. Smania em [18].

Sejam $p \in]0, 1]$ uma probabilidade fixada e $(p_{n+1}, a_n/b_n, p_n) \dots (p_2, a_1/b_1, p_1)(p_1, a_0/b_0, p_0)$ um caminho finito em $\mathcal{T}$, associado à $N \in \mathbb{N}$, onde $\mathcal{T}$ está representado na figura 2.1. Então, em base 2, $N = a_n \dots a_1 a_0$ e $N + 1 = b_n \dots b_1 b_0$. Construimos um transdutor probabilístico $\mathcal{T}_p$ (ver a figura 2.2), da seguinte maneira:

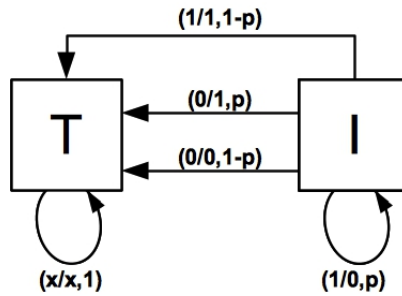


Figura 2.2: Transdutor $\mathcal{T}_p$ da máquina de somar estocástica em base 2.

Os estados em $\mathcal{T}_p$ são I e T e as etiquetas são da forma $(a/a, 1)$, $(a/a, 1 - p)$ e $(a/b, p)$, onde $a, b \in \{0, 1\}$, com $a \neq b$. Se $(p_{i+1}, a_i/b_i, p_i)$ é uma aresta em $\mathcal{T}$ e $p_i = I$, então

$(p_{i+1}, (a_i/b_i, p), p_i)$ e $(T, (a_i/a_i, 1-p), p_i)$ são arestas em $\mathcal{T}_p$. Se $(p_{i+1}, a_i/a_i, p_i)$ é uma aresta em $\mathcal{T}$, então $(p_{i+1}, (a_i/a_i, 1), p_i)$ é uma aresta em $\mathcal{T}_p$.

Se $(p_{n+1}, (a_n/b_n, t_n), p_n) \dots (p_2, (a_1/b_1, t_1), p_1)(p_1, (a_0/b_0, t_0), p_0)$ é um caminho em $\mathcal{T}_p$, onde $p_0 = I$ e $p_{n+1} = T$, dizemos que $a_n \dots a_1 a_0$ transita para $b_n \dots b_1 b_0$ e a probabilidade de transição é $t_n \dots t_1 t_0$.

A partir do transdutor $\mathcal{T}_p$, podemos construir o grafo de transição da máquina de somar estocástica em base 2, representado na figura (2.3), e podemos considerar o operador de transição S , onde cada entrada s_{ij} da matriz do operador S é a probabilidade de transição de i para j , para todo $i, j \in \mathbb{N}$.

O operador de transição S da máquina de somar estocástica em base 2 é dada pela seguinte matriz.

$$S = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p(1-p) & 1-p & p^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p^2(1-p) & 0 & p(1-p) & 1-p & p^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p(1-p) & 1-p & p^2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

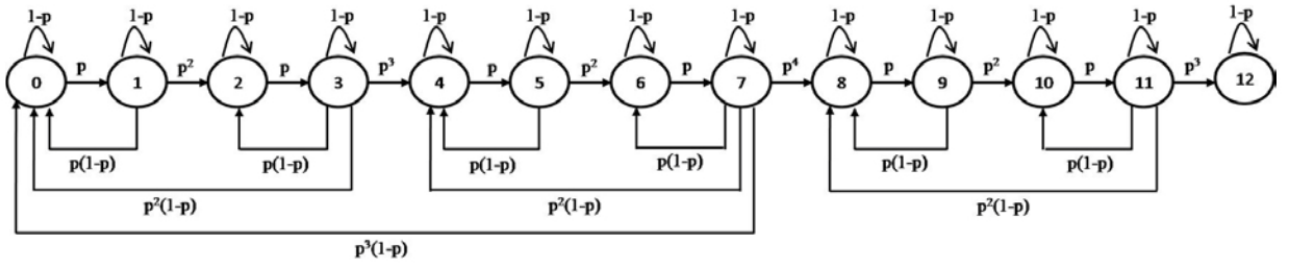


Figura 2.3: Grafo de transição da máquina de somar estocástica em base 2.

Killeen e Taylon, em [15], provaram os seguintes teoremas.

Teorema 2.1 *Para $0 < p < 1$, a cadeia de Markov é irreduzível, periódica de período 2 e nula recorrente.*

Teorema 2.2 *O espectro de S em $l^\infty(\mathbb{N})$ é igual ao conjunto de Julia cheio da função quadrática $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \left(\frac{z-(1-p)}{p} \right)^2$, ou seja,*

$$\sigma(S) = \{z \in \mathbb{C} : (f^n(z))_{n \geq 0} \text{ é limitado}\}.$$

Em [9], H. El Abdalaoui e A. Messaoudi consideraram o espectro de S em outros espaços e provaram os seguintes resultados.

Teorema 2.3 *O espectro do operador S agindo em c_0 , c e l^q , $q \geq 1$, é igual ao conjunto de Julia cheio da função quadrática $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \left(\frac{z-(1-p)}{p}\right)^2$, ou seja, $\sigma(S) = J(f) = \{z \in \mathbb{C} : (f^n(z))_{n \geq 0} \text{ é limitado}\}$. Precisamente, em c_0 (respectivamente em l^q , $q > 1$), o espectro contínuo de S é igual conjunto de Julia cheio de f e os espectros residual e pontual de S são conjuntos vazios.*

Teorema 2.4 *Em l^1 , o espectro pontual de S é vazio. O espectro residual de S é um conjunto não vazio e é igual a um subconjunto denso e contável do conjunto de Julia $\partial(J_f)$, ou melhor, $\bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n}\{1\} = \sigma_r(S)$. O espectro contínuo de S é igual ao complementar relativo do espectro residual de S no conjunto de Julia cheio J_f de f .*

Em [17] e [20], os autores consideraram uma máquina de somar estocástica, tomando uma sequência de probabilidades $\bar{p} = (p_i)_{i \geq 1}$, de forma que a probabilidade varia em cada estado, ou seja, na descrição 2.2 temos que $e_i(N) = 1$ com probabilidade p_{i+1} e $e_i(N) = 0$ com probabilidade $1 - p_{i+1}$, para todo $i \geq 0$.

Assim, do mesmo jeito que consideramos o operador de transição S relacionado à probabilidade p , podemos considerar o operador de transição $S_{\bar{p}}$, relacionado à sequência de probabilidades $\bar{p} = (p_i)_{i \geq 1}$, onde cada entrada s_{ij} da matriz do operador $S_{\bar{p}}$ é a probabilidade de transição de i para j , para todo $i, j \in \mathbb{N}$.

O operador de transição $S_{\bar{p}}$ da máquina de somar estocástica em base 2 é dada pela seguinte matriz.

$$S_{\bar{p}} = \begin{pmatrix} 1-p_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p_1(1-p_2) & 1-p_1 & p_1p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1-p_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p_1p_2(1-p_3) & 0 & p_1(1-p_2) & 1-p_1 & p_1p_2p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_1(1-p_2) & 1-p_1 & p_1p_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p_1 & p_1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Considerando o operador $S_{\bar{p}}$, em [17], A. Messaoudi, O. Sester e G. Valle provaram os seguintes resultados.

Teorema 2.5 *A cadeia de Markov é nula recorrente se, e somente se, $\prod_{i=1}^{+\infty} p_i = 0$, caso contrário, a cadeia é transiente.*

Teorema 2.6 *O espectro de $S_{\bar{p}}$ agindo sobre c_0 , c e l^α , $1 \leq \alpha \leq \infty$, é igual ao Julia fibrado $E_{\bar{p}} := \left\{ z \in \mathbb{C} : \limsup_{j \rightarrow +\infty} |\tilde{f}_j(z)| < +\infty \right\}$, onde $\tilde{f}_j := f_j \circ \dots \circ f_1$ e $f_j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ são funções definidas por $f_j(z) = \left(\frac{z - (1 - p_j)}{p_j} \right)^2$, para todo $j \geq 1$.*

Teorema 2.7 *Em l^∞ , o espectro de $S_{\bar{p}}$ é igual ao espectro pontual e, assim, os espectros residual e contínuo são conjuntos vazios.*

Teorema 2.8 *O espectro residual de $S_{\bar{p}}$ agindo sobre c_0 , c e l^α , $1 < \alpha \leq \infty$, é vazio.*

Em [20], A. Messaoudi e G. Valle provaram os seguintes resultados.

Teorema 2.9 *Em c_0 , o espectro pontual de $S_{\bar{p}}$ é diferente de vazio se, e somente se, $\lim p_n = 1$ e, nesse caso, o espectro pontual de $S_{\bar{p}}$ é igual à componente conexa do interior do Julia fibrado $E_{\bar{p}}$ que contém 0. Além disso, se $p_j \geq 2(\sqrt{2} - 1)$, para todo $j \geq 1$, então o espectro pontual é igual ao interior de $E_{\bar{p}}$.*

Teorema 2.10 *Em c , o espectro pontual de $S_{\bar{p}}$ é igual ao espectro pontual de $S_{\bar{p}}$ agindo sobre c_0 unido ao conjunto unitário $\{1\}$.*

Teorema 2.11 *Em l^α , $\alpha \geq 1$, se $\sum_{j=1}^{+\infty} (1 - p_j)^\alpha$ diverge, então o espectro pontual de $S_{\bar{p}}$ é vazio. Se $(p_n)_{n \geq 1}$ é monótona crescente e $\sum_{j=1}^{+\infty} (1 - p_j)^\alpha$ converge, então o espectro pontual de $S_{\bar{p}}$ agindo sobre l^α é igual ao espectro pontual de $S_{\bar{p}}$ agindo sobre c_0 e, portanto, não vazio. Note que, no caso $\alpha = 1$, considerar a convergência de $\sum_{j=1}^{+\infty} (1 - p_j)$ é equivalente considerar que $\prod_{j=1}^{+\infty} p_j > 0$.*

Capítulo 3

Máquina de somar estocástica em base de Fibonacci

3.1 Máquina de somar em base de Fibonacci

Considere $N \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ um número inteiro não negativo e considere a sequência de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $F_0 = 1$, $F_1 = 2$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para todo $n \geq 2$. Utilizando o algoritmo fominha, podemos escrever N de forma única como $N = \sum_{i=0}^{k(N)} \varepsilon_i(N) F_i$, onde $(\varepsilon_i(N))_{i \geq 0}$ são os dígitos de N em base de Fibonacci com $\varepsilon_i(N) \in \{0, 1\}$ e $\varepsilon_{i+1}(N) \varepsilon_i(N) \neq 11$, para todo $i \in \{0, \dots, k(N)\}$.

Exemplo 3.1 Temos $F_0 = 1$, $F_1 = 2$, $F_2 = 3$, $F_3 = 5$, $F_4 = 8$, $F_5 = 13$, $\dots$. Seja $N = 12$. Escrevemos 12 em base de Fibonacci da seguinte maneira:

- 1) tomamos o maior elemento na sequência de Fibonacci que é menor ou igual à 12 ($F_4 = 8$) e calculamos $12 - 8 = 4$;
- 2) tomamos o maior elemento na sequência de Fibonacci que é menor ou igual à 4 ($F_2 = 3$) e calculamos $4 - 3 = 1$;
- 3) tomamos o maior elemento na sequência de Fibonacci que é menor ou igual à 1 ($F_0 = 1$) e calculamos $1 - 1 = 0$.

O processo para quando obtemos o número zero na subtração. Daí temos $N = 12 = F_4 + F_2 + F_0 = 10101 = \varepsilon_4(12)\varepsilon_3(12)\varepsilon_2(12)\varepsilon_1(12)\varepsilon_0(12)$.

Assim como foi feito no caso da base 2, dado um inteiro positivo $N = \varepsilon_{k(n)}(N) \dots \varepsilon_1(N)\varepsilon_0(N)$ escrito em base de Fibonacci, podemos definir um transdutor para calcular os dígitos de $N + 1$ em base de Fibonacci.

Iremos usar o transdutor representado na figura 3.1, definido por Messaoudi e Uceda em [26]. Este transdutor é formado por um estado inicial I e um estado terminal T . O estado I está conectado a si mesmo por duas flechas, onde uma delas está etiquetada por $(10/00)$ e outra por $(1/0)$. Além dessas, existe uma outra flecha saindo do estado I e chegando ao estado T , etiquetada por $(00/01)$. Já o estado T está conectado a si mesmo por uma única flecha etiquetada por (x/x) , onde $x \in \{0, 1\}$.

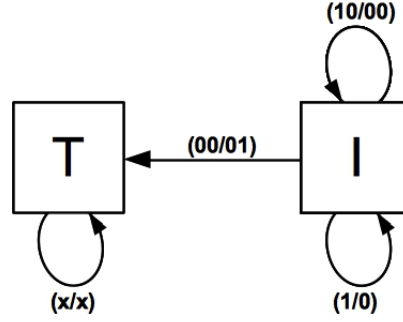


Figura 3.1: Transdutor da máquina de somar estocástica em base de Fibonacci.

Exemplo 3.2 Seja $N = 17 = F_5 + F_2 + F_0 = 100101_F$ escrito em base de Fibonacci. Então, N corresponde ao caminho

$$(T, 1/1, T)(T, 00/01, I)(I, 10/00, I)(I, 1/0, I),$$

o que nos dá os dígitos de $N + 1 = 18 = F_5 + F_3 = 101000_F$ em base de Fibonacci.

3.2 Máquina de somar estocástica em base de Fibonacci

Seja $\bar{p} = (p_i)_{i \geq 1}$ uma sequência de probabilidades. De forma análoga ao que foi definido para base 2, podemos construir de forma natural, um transdutor probabilístico $\mathcal{T}_{\bar{p}}$, de tal forma que nos dê a máquina de somar estocástica em base de Fibonacci, quando as probabilidades mudam em cada estado.

Tal transdutor (definido na figura 3.2) funciona da seguinte maneira: seja $N = \varepsilon_k \varepsilon_{k-1} \dots \varepsilon_1 \varepsilon_0$ um número natural escrito em base de Fibonacci. Temos que $N = a_{k'} a_{k'-1} \dots a_1 a_0$ onde $a_i \in \{1, 10, 00\}$ e $a_{i+1} a_i$ não possui dois números 1 consecutivos, $0 \leq i \leq k' - 1$.

Seja $(s_{k'+1}, (a_{k'}/b_{k'}, t_{k'}), s_{k'}) \dots (s_2, (a_1/b_1, t_1), s_1)(s_1, (a_0/b_0, t_0), s_0)$ um caminho em $\mathcal{T}_{\bar{p}}$ onde $s_0 = I_1$ e $s_{k'+1} = T$. Dizemos que $a_{k'} \dots a_1 a_0$ transita para $b_{k'} \dots b_1 b_0$ com probabilidade $t_{k'} \dots t_1 t_0$.

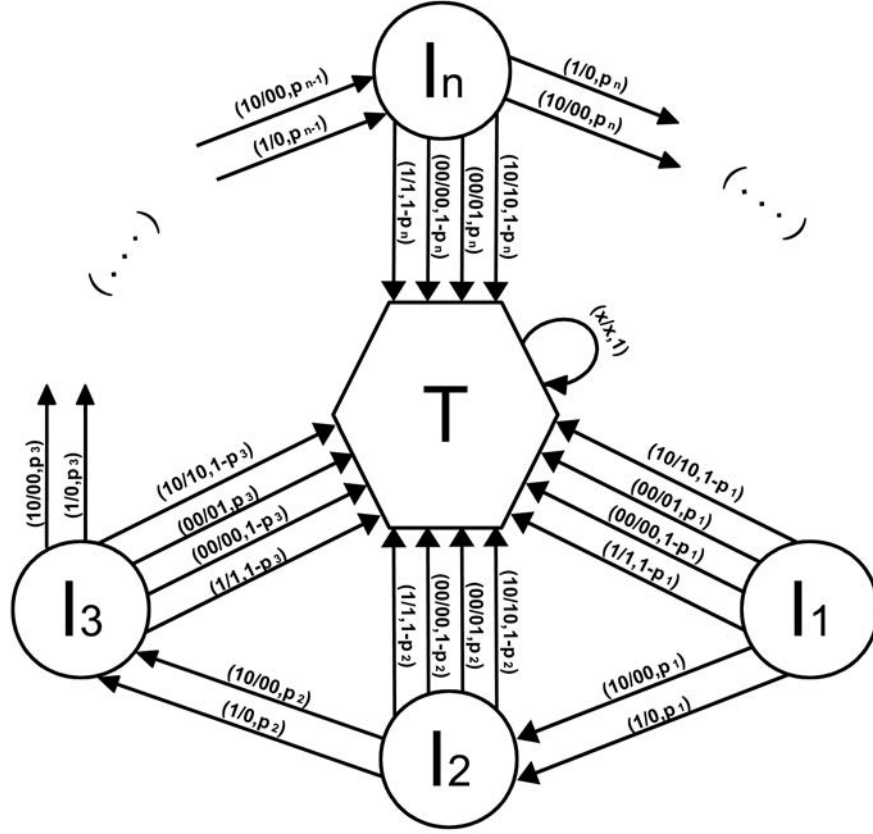


Figura 3.2: Transdutor $\mathcal{T}_{\bar{p}}$ da máquina de somar estocástica em base de Fibonacci com probabilidades não constantes $\bar{p} = (p_i)_{i \geq 1}$.

Exemplo 3.3 Seja $N = 17 = 100101_F$ escrito em base de Fibonacci. Então, no transdutor da máquina de somar estocástica em base de Fibonacci com as probabilidades mudando em cada estado, temos os seguintes caminhos:

- a) $(T, (1/1, 1), T)(T, (0/0, 1), T)(T, (0/0, 1), T)(T, (1/1, 1), T)(T, (0/0, 1), T)(T, (1/1, 1-p_1), I_1)$. Neste caso temos que $N = 17$ transita para 17 com probabilidade $1 - p_1$.
- b) $(T, (1/1, 1), T)(T, (0/0, 1), T)(T, (0/0, 1), T)(T, (10/10, 1-p_2), I_2)(I_2, (1/0, p_1), I_1)$. Neste caso temos que $N = 17$ transita para 16 com probabilidade $p_1(1 - p_2)$.
- c) $(T, (1/1, 1), T)(T, (00/00, 1 - p_3), I_3)(I_3, (10/00, p_2), I_2)(I_2, (1/0, p_1), I_1)$. Neste caso temos que $N = 17$ transita para 13 com probabilidade $p_1p_2(1 - p_3)$.
- d) $(T, (1/1, 1), T)(T, (00/01, p_3), I_3)(I_3, (10/00, p_2), I_2)(I_2, (1/0, p_1), I_1)$. Neste caso temos que $N = 17$ transita para 18 com probabilidade $p_1p_2p_3$.

A partir do transdutor probabilístico, podemos construir o operador de transição $S = (s_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$, onde $s_{i,j}$ é a probabilidade de transição do número i para o número j . Veja o operador S nas tabelas 3.1 (colunas de 0 à 16) e 3.2 (colunas de 17 à 33).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
F_0	0	$1-p_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F_1	1	$p_1(1-p_2)$	p_1p_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F_2	2	$p_1(1-p_2)$	$1-p_1$	p_1p_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F_3	3	0	0	$1-p_1$	p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	4	$p_1p_2(1-p_3)$	0	$p_1(1-p_2)$	$1-p_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F_3	5	0	0	0	$p_1p_2p_3$	$1-p_1$	p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	6	0	0	0	$1-p_1$	$p_1(1-p_2)$	$1-p_1$	p_1p_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	7	$p_1p_2(1-p_3)$	0	0	$p_1(1-p_2)$	$1-p_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F_4	8	0	0	0	0	0	0	0	$p_1p_2p_3$	0	0	0	0	0	0	0	0
	9	0	0	0	0	0	0	0	$1-p_1$	p_1	0	0	0	0	0	0	0
	10	0	0	0	0	0	0	0	$p_1(1-p_2)$	$1-p_1$	p_1p_2	0	0	0	0	0	0
	11	0	0	0	0	0	0	0	$p_1(1-p_2)$	0	$1-p_1$	p_1p_2	0	0	0	0	0
F_5	12	$p_1p_2p_3(1-p_4)$	0	0	0	0	0	0	$p_1p_2(1-p_3)$	0	$1-p_1$	$1-p_1$	0	0	0	0	0
	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$p_1p_2p_3p_4$	p_1	0	0
	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$1-p_1$	$1-p_1$	p_1p_2	0
	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$p_1(1-p_2)$	0	$1-p_1$	0
	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$1-p_1$
	17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$p_1p_2(1-p_3)$	0	0	$p_1(1-p_2)$
	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F_6	20	$p_1p_2p_3(1-p_4)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$p_1p_2p_3p_4$	$1-p_1$	p_1p_2	0
	21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$1-p_1$	0	0	0
	22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$p_1(1-p_2)$	0	$1-p_1$	0
	23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$p_1(1-p_2)$	0	0	0
	24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F_7	33	$p_1p_2p_3p_4(1-p_5)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabela 3.1: Matriz $S = (s_{ij})_{i,j \geq 0}$ do operador $S_{(p_i)_{i \geq 1}}$, para $i \in \{0, 1, \dots, 35\}$ e $j \in \{0, 1, \dots, 16\}$.

	17	18	19	20	F_6 21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	...
F_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
F_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
F_2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
F_3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
F_4	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
F_5	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	17	$1 - p_1$	$p_1 p_2 p_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	18	0	$1 - p_1$	p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	19	0	$p_1(1 - p_2)$	$1 - p_1$	$p_1 p_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	20	0	$p_1(1 - p_2)$	$1 - p_1$	$p_1 p_2 p_3 p_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
F_6	21	0	0	0	$1 - p_1$	p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	22	0	0	0	$p_1(1 - p_2)$	$1 - p_1$	$p_1 p_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	23	0	0	0	$p_1(1 - p_2)$	0	$1 - p_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	24	0	0	0	0	0	0	$1 - p_1$	p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	25	0	0	0	$p_1 p_2(1 - p_3)$	0	0	$1 - p_1$	p_1	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	26	0	0	0	0	0	0	$p_1 p_2 p_3$	$1 - p_1$	$p_1 p_2 p_3$	0	0	0	0	0	0	0	...
	27	0	0	0	0	0	0	$1 - p_1$	0	$1 - p_1$	p_1	$p_1 p_2$	0	0	0	0	0	...
	28	0	0	0	$p_1 p_2(1 - p_3)$	0	0	$p_1(1 - p_2)$	0	$p_1(1 - p_2)$	0	$1 - p_1$	$p_1 p_2 p_3$	0	0	0	0	...
	29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$1 - p_1$	p_1	0	0	0	...
	30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$p_1(1 - p_2)$	$1 - p_1$	$p_1 p_2$	0	0	...
	31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$p_1(1 - p_2)$	0	$1 - p_1$	$p_1 p_2$	0	...
	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$1 - p_1$	p_1	...
	33	0	0	0	$p_1 p_2 p_3(1 - p_4)$	0	0	0	0	0	0	0	$p_1 p_2(1 - p_3)$	0	0	$p_1(1 - p_2)$	$1 - p_1$	...
F_7	34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Tabela 3.2: Matriz $S = (s_{ij})_{i,j \geq 0}$ do operador $S_{(p_i)_{i \geq 1}}$, para $i \in \{0, 1, \dots, 35\}$ e $j \in \{17, 18, \dots, 33\}$.

Observe que S é uma matriz estocástica mas não é duplamente estocástica.

Definição 3.1 Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, seja $(q_n(\lambda))_{n \geq 1} = (q_n)_{n \geq 1}$ uma sequência definida por:

$$q_{F_0} = \frac{\lambda - (1-p_1)}{p_1}, \quad q_{F_1} = \frac{1}{p_2} q_{F_0}^2 - \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) \text{ e}$$

$$q_{F_n} = \frac{1}{r_n} q_{F_{n-1}} q_{F_{n-2}} - \left(\frac{1}{r_n} - 1 \right), \text{ onde } r_n = p_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Se $n = \sum_{i=0}^N \varepsilon_i F_i$, com $\varepsilon_i = 0, 1$ e $\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \neq 11$, então $q_n = q_{F_0}^{\varepsilon_0} \cdots q_{F_N}^{\varepsilon_N}$

Teorema 3.1 Seja S o operador associado à máquina de somar em base de Fibonacci e a uma sequência de probabilidades $\bar{p} = (p_i)_{i \geq 1}$. Então, em $l^\infty(\mathbb{N})$,

$$\sigma_{pt}(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (q_n(\lambda))_{n \geq 0} \text{ é limitada}\}.$$

Observação 3.1 Em particular, $\sigma_{pt}(S) \subset E := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\psi_n(q_{F_1}(\lambda), q_{F_0}(\lambda)))_{n \geq 2} \text{ é limitada}\}$ e $E = \psi(\{\lambda \in \mathbb{C} : (\bar{\psi}_n(\lambda, \lambda))_{n \geq 1} \text{ é limitada}\})$, onde $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é definida por $\psi(\lambda) = p_1 \lambda + 1 - p_1$, $\psi_n = g_n \circ g_{n-1} \circ \cdots \circ g_2$, $\bar{\psi}_n = \psi_n \circ g_1$ e $g_n : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ é definida por

$$g_n(x, y) = \left(\frac{1}{r_n} xy - \left(\frac{1}{r_n} - 1 \right), x \right), \quad \forall n \geq 1.$$

Observação: A prova do teorema 3.1 é uma adaptação da prova do mesmo teorema provado por A. Messaoudi e D. Smania em [18], no caso em que $p_i = p \in]0, 1]$ fixado, para todo $i \geq 1$. Para ajudar o leitor, exibiremos a demonstração.

Antes de demonstrarmos o teorema 3.1, será necessário provarmos alguns resultados.

Proposição 3.1 Seja N um número inteiro não negativo. Então os seguintes resultados são válidos:

- i)* N permanece em N com probabilidade $1 - p_1$.
- ii)* Se $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_0$, com $\varepsilon_1 \varepsilon_0 = 00$, então N transita para $N + 1$ com probabilidade p_1 .
- iii)* Se $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_t (10)^s$, com $\varepsilon_{t+1} \varepsilon_t = 00$, $s \geq 1$ e $t = 2s$, então N transita para $N + 1$ com probabilidade $p_1 p_2 \dots p_{s+1}$ e N transita para $N - F_{2m} + 1$, $0 < m \leq s$, com probabilidade $p_1 p_2 \dots p_m (1 - p_{m+1})$.
- iv)* Se $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_t (10)^s 1$, com $\varepsilon_{t+1} \varepsilon_t = 00$, $s \geq 1$ e $t = 2s + 1$, então N transita para $N + 1$ com probabilidade $p_1 p_2 \dots p_{s+2}$ e N transita para $N - F_{2m-1} + 1$, $0 < m \leq s + 1$, com probabilidade $p_1 p_2 \dots p_m (1 - p_{m+1})$.

Demonstração: (i) Seja $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_1 \varepsilon_0$. Assim temos que $\varepsilon_1 \varepsilon_0 \in \{10, 00, 01\}$.

a) Se $\varepsilon_1 \varepsilon_0 = 10$, então

$$(T, (\varepsilon_k/\varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_2/\varepsilon_2, 1), T)(T, (10/10, 1 - p_1), I_1)$$

é um caminho no transdutor $\mathcal{T}_{\bar{p}}$ (representado na figura 3.2).

b) Se $\varepsilon_1 \varepsilon_0 = 00$, então

$$(T, (\varepsilon_k/\varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_2/\varepsilon_2, 1), T)(T, (00/00, 1 - p_1), I_1)$$

é um caminho no transdutor $\mathcal{T}_{\bar{p}}$ (representado na figura 3.2).

c) Se $\varepsilon_0 = 1$, então

$$(T, (\varepsilon_k/\varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_1/\varepsilon_1, 1), T)(T, (1/1, 1 - p_1), I_1)$$

é um caminho no transdutor $\mathcal{T}_{\bar{p}}$ (representado na figura 3.2).

Em todos os casos, temos que N transita para N com probabilidade $1 - p_1$.

(ii) Se $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_0$, com $\varepsilon_1 \varepsilon_0 = 00$, então

$$(T, (\varepsilon_k/\varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_2/\varepsilon_2, 1), T)(T, (00/01, p_1), I_1)$$

é um caminho no transdutor $\mathcal{T}_{\bar{p}}$. Logo, N transita para $N + 1$ com probabilidade p_1 .

(iii) Se $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_t (10)^s$, com $\varepsilon_{t+1} \varepsilon_t = 00$, $s \geq 1$ e $t = 2s$, então

$$a) (T, (\varepsilon_k/\varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_{t+2}/\varepsilon_{t+2}, 1), T)(T, (00/01, p_{s+1}), I_{s+1})$$

$$\underbrace{(I_{s+1}, (10/00, p_s), I_s) \dots (I_3, (10/00, p_2), I_2)(I_2, (10/00, p_1), I_1)}_s$$

é um caminho no transdutor $\mathcal{T}_{\bar{p}}^s$. Neste caso, N transita para $N + 1$ com probabilidade $p_1 \dots p_s p_{s+1}$.

b) $(T, (\varepsilon_k/\varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_t/\varepsilon_t, 1), T)$

$$\underbrace{(T, (1/1, 1), T)(T, (0/0, 1), T) \dots (T, (1/1, 1), T)(T, (0/0, 1), T)}_{2s-2m-2}$$

$$(T, (10/10, 1 - p_{m+1}), I_{m+1})(I_{m+1}, (10/00, p_m), I_m) \dots (I_3, (10/00, p_2), I_2)(I_2, (10/00, p_1), I_1)$$

é um caminho no transdutor $\mathcal{T}_{\bar{p}}$. Neste caso, N transita para $N - F_{2m} + 1$ com probabilidade $p_1 \dots p_m (1 - p_{m+1})$.

(iv) Se $N = \varepsilon_k \dots \varepsilon_t (10)^s 1$, com $\varepsilon_{t+1} \varepsilon_t = 00$, $s \geq 1$ e $t = 2s + 1$, então

$$a) (T, (\varepsilon_k/\varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_{t+2}/\varepsilon_{t+2}, 1), T)(T, (00/01, p_{s+2}), I_{s+2})$$

$$\underbrace{(I_{s+2}, (10/00, p_{s+1}), I_{s+1}) \dots (I_4, (10/00, p_3), I_3)(I_3, (10/00, p_2), I_2)(I_2, (1/0, p_1), I_1)}_s$$

é um caminho no transdutor $\mathcal{T}_{\bar{p}}$. Neste caso, N transita para $N + 1$ com probabilidade $p_1 \dots p_{s+1} p_{s+2}$.

b) $(T, (\varepsilon_k/\varepsilon_k, 1), T) \dots (T, (\varepsilon_t/\varepsilon_t, 1), T)$

$$\underbrace{(T, (1/1, 1), T)(T, (0/0, 1), T) \dots (T, (1/1, 1), T)(T, (0/0, 1), T)}_{2s-2m} \\ (T, (10/10, 1 - p_{m+1}), I_{m+1}) \underbrace{(I_{m+1}, (10/00, p_m), I_m) \dots (I_3, (10/00, p_2), I_2)(I_2, (1/0, p_1), I_1)}_{m-1}$$

é um caminho no transdutor $\mathcal{T}_{\bar{p}}$. Neste caso, N transita para $N - F_{2m-1} + 1$ com probabilidade $p_1 \dots p_m(1 - p_{m+1})$.

□

Proposição 3.2 *Sejam $i, j \in \mathbb{N}^*$ tais que $F_n \leq i, j \leq F_{n+1} - 1$. Então a probabilidade de transição de i para j é igual a probabilidade de transição de $i - F_n$ para $j - F_n$, isto é, $s_{i,j} = s_{i-F_n, j-F_n}$.*

Demonstração: Se $i = j$, então, pela proposição 3.1, temos $s_{i,j} = s_{i-F_n, j-F_n} = 1 - p_1$.

Suponhamos $i \neq j$ e $s_{i,j} > 0$.

i) Se $i = \varepsilon_n \dots \varepsilon_2 00$ com $\varepsilon_n = 1$ então, pelo item (ii) da proposição 3.1, $j = i + 1 = \varepsilon_n \dots \varepsilon_2 01$ e $s_{i,j} = p_1$. Assim $i - F_n = \varepsilon_{n-1} \dots \varepsilon_2 00$, $j - F_n = \varepsilon_{n-1} \dots \varepsilon_2 01$ e $s_{i-F_n, j-F_n} = p_1 = s_{i,j}$.

ii) Se $i = \varepsilon_n \dots \varepsilon_t 00 \underbrace{1010 \dots 1010}_{2s}$, com $s \geq 1$, então, pelo item (iii) da proposição 3.1, temos dois casos: $j = \varepsilon_n \dots \varepsilon_t 01 \underbrace{0000 \dots 0000}_{2s}$ e $s_{i,j} = p_1 p_2 \dots p_{s+1}$ ou $j = i - F_{2m} + 1 = \varepsilon_n \dots \varepsilon_t 00 \underbrace{10 \dots 10}_{2s-2m} \underbrace{00 \dots 00}_{2m}$, com $1 \leq m \leq s$ e $s_{i,j} = p_1 p_2 \dots p_m(1 - p_{m+1})$. Como $F_n \leq i, j \leq F_{n+1} - 1$, então as expansões de Fibonacci de i e j são $i = 1c_{n-1} \dots c_0$ e $j = 1d_{n-1} \dots d_0$, onde $c_l, d_l \in \{0, 1\}$, $c_{n-1} = d_{n-1} = 0$, $c_{l+1}c_l \neq 11$ e $d_{l+1}d_l \neq 11$, para todo $l \in \{0, \dots, n-2\}$. Logo, no primeiro caso, existe um inteiro $t \leq n_0 \leq n-2$ tal que $\varepsilon_{n_0} = 1$ e $\varepsilon_l = 0$ para todo inteiro $n_0 < l \leq n-1$. Assim, temos $i - F_n = \varepsilon_{n_0} \dots \varepsilon_t 00 \underbrace{1010 \dots 1010}_{2s}$, $j - F_n = \varepsilon_{n_0} \dots \varepsilon_t 01 \underbrace{0000 \dots 0000}_{2s}$ e $s_{i-F_n, j-F_n} = p_1 p_2 \dots p_{s+1} = s_{i,j}$.

No segundo caso, existe um inteiro n_0 tal que $n_0 = 2s - 1$ ou $t \leq n_0 \leq n - 2$ tal que $\varepsilon_{n_0} = 1$ e $\varepsilon_l = 0$ para todo $n_0 < l \leq n - 1$. Logo, temos $i - F_n = \varepsilon_{n_0} \dots \varepsilon_t 00 \underbrace{1010 \dots 1010}_{2s}$ e $j - F_n = \varepsilon_{n_0} \dots \varepsilon_t 00 \underbrace{10 \dots 10}_{2s-2m} \underbrace{00 \dots 00}_{2m}$ (caso $t \leq n_0 \leq n - 2$) ou $i - F_n = 00 \underbrace{1010 \dots 1010}_{2s-2}$ e $j - F_n = 00 \underbrace{10 \dots 10}_{2s-2-2m} \underbrace{00 \dots 00}_{2m}$ (caso $n_0 = 2s - 1$). Assim, $s_{i-F_n, j-F_n} = p_1 p_2 \dots p_m(1 - p_{m+1}) = s_{i,j}$.

iii) O caso em que $N = \varepsilon_n \dots \varepsilon_t 00 \underbrace{1010 \dots 1010}_{2s} 1$ se prova da mesma maneira que o caso anterior.

□

Proposição 3.3 *Sejam $i, j, n \in \mathbb{N}^*$ tais que $0 < i < F_n \leq j$. Então $s_{j,i} = 0$.*

Demonstração: Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < i < F_n \leq j < F_{n+1}$. Assim, as expressões de i e j em base de Fibonacci são

$$i = \varepsilon'_{n-1} \dots \varepsilon'_0 \text{ e } j = 1\varepsilon_{n-1} \dots \varepsilon_0, \quad (3.1)$$

onde $\varepsilon_l, \varepsilon'_l \in \{0, 1\}$, $\varepsilon_{l+1}\varepsilon_l \neq 11$ e $\varepsilon'_{l+1}\varepsilon'_l \neq 11$ para todo $l \in \{0, \dots, n\}$. Se $s_{j,i} \neq 0$, então pela proposição 3.1 e o fato que $i < j$, deduzimos que $j = \varepsilon_n \dots \varepsilon_t 00 \underbrace{10 \dots 10}_{2s}$, com $s \geq 1$ e $n \geq t \geq 2s + 2$, e $i = j - F_{2m} + 1 = \varepsilon_n \dots \varepsilon_t 00 \underbrace{10 \dots 10}_{2s-2m} \underbrace{00 \dots 00}_{2m}$, com $1 \leq m \leq s$, ou $j = \varepsilon_n \dots \varepsilon_t 00 \underbrace{10 \dots 10}_{2s-2} 1$, com $s \geq 2$ e $n \geq t \geq 2s + 1$, e $i = j - F_{2m+1} + 1 = \varepsilon_n \dots \varepsilon_t 00 \underbrace{10 \dots 10}_{2s-2m} \underbrace{00 \dots 000}_{2m-1}$, com $1 \leq m \leq s$.

Em ambos os casos, obtemos uma contradição devido à relação (3.1).

□

Lema 3.1 *Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v \in l^\infty$ tal que $Sv = \lambda v$. Então $v_{F_0} = q_{F_0} v_0$ e $v_{F_1} = q_{F_1} v_0$.*

Demonstração:

- $(1 - p_1)v_0 + p_1v_1 = \lambda v_0 \implies v_1 = \frac{\lambda - (1 - p_1)}{p_1} v_0 = q_{F_0} v_0.$
- $p_1(1 - p_2)v_0 + (1 - p_1)v_1 + p_1p_2v_2 = \lambda v_1 \implies$
 $p_1p_2v_2 = (\lambda - (1 - p_1))v_1 - p_1(1 - p_2)v_0 = \left(\frac{(\lambda - (1 - p_1))^2}{p_1} - p_1(1 - p_2) \right) v_0 \implies$
 $v_2 = \left(\frac{(\lambda - (1 - p_1))^2}{p_1^2 p_2} - \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) \right) v_0 = \left(\frac{1}{p_2} q_{F_0}^2 - \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) \right) v_0 = q_{F_1} v_0.$

□

Lema 3.2 *Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v \in \mathbb{C}^\infty$ tal que $Sv = \lambda v$. Então, para cada $k \geq 1$, existe um número complexo $\beta_k = \beta_k(\bar{p}, \lambda)$, onde $\bar{p} = (p_i)_{i \geq 1}$, tal que $v_k = \beta_k v_0$. Além disso, se $m, n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, são tais que $0 < m < F_{n-1}$, então $\beta_{m+F_n} = \beta_{F_n} \beta_m$. Em particular, se $n = \sum_{i=0}^N b_i F_i$, onde $b_i b_{i-1} <_{lex} 11$, $\forall i = 1, \dots, N$, então $\beta_n = \beta_{F_0}^{b_0} \dots \beta_{F_N}^{b_N}$.*

Demonstração: Seja λ um autovalor de S associado ao autovetor $v = (v_i)_{i \geq 0} \in l^\infty(\mathbb{N})$. Como a probabilidade de transição de qualquer inteiro não negativo i para qualquer inteiro $i + k$, $k \geq 2$ é $p_{i,i+k} = 0$ (ver proposição (3.1)), o operador S satisfaz $S_{i,i+k} = 0$, para todo $i, k \in \mathbb{N}$, com $k \geq 2$. Logo, para todo inteiro $k \geq 1$, temos

$$\sum_{i=0}^k s_{k-1,i} v_i = \lambda v_{k-1}. \quad (3.2)$$

Assim, podemos provar por indução sobre k que para todo inteiro $k \geq 1$, existe um número complexo $\beta_k = \beta_k(\bar{p}, \lambda) \in \mathbb{C}$ tal que

$$v_k = \beta_k v_0.$$

Tome $k = F_n + j$, para algum $j = 1, \dots, m$, onde $0 < m < F_{n-1}$. Pela proposição 3.3, temos que $s_{k-1,i} = 0$, para todo $i = 0, \dots, F_n - 1$. Daí, para todo $j = 1, \dots, m$, temos que

$$\sum_{i=F_n}^{F_n+j} s_{F_n+j-1,i} v_i = \lambda v_{F_n+j-1}.$$

Pela proposição 3.2, $(s_{i,j} = s_{i-F_n,j-F_n})$, donde deduzimos que, para todo $j = 1, \dots, m$,

$$\lambda v_{F_n+j-1} = \sum_{i=F_n}^{F_n+j} s_{F_n+j-1,i} v_i = \sum_{i=F_n}^{F_n+j} s_{j-1,i-F_n} v_i = \sum_{l=0}^j s_{j-1,l} v_{l+F_n}. \quad (3.3)$$

Seja $(w_i)_{0 \leq i \leq j}$ definida por $w_i = v_{F_n+i}$. Assim,

$$\sum_{i=0}^j s_{j-1,i} w_i = \lambda w_{j-1}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Logo, $w_m = \beta_m w_0$, ou seja, $v_{m+F_n} = \beta_m v_{F_n}$. Como $v_{F_n} = \beta_{F_n} v_0$ e $v_{F_n+m} = \beta_{F_n+m} v_0$, segue que $\beta_{F_n+m} = \beta_m \beta_{F_n}$.

□

Demonstração do teorema 3.1: Seja λ um autovalor de S associado ao autovetor $v = (v_i)_{i \geq 0} \in l^\infty(\mathbb{N})$. Assim, pelo lema 3.2, temos que para todo inteiro $k \geq 1$, existe um número complexo $\beta_k = \beta_k(\bar{p}, \lambda) \in \mathbb{C}$ tal que

$$v_k = \beta_k v_0. \quad (3.4)$$

Afirmação: $\beta_k = q_k$, para todo $k \geq 1$.

Tome $k = F_{2n-1}$ na relação (3.2). Usando o fato que $F_{2n-1} - 1 = \underbrace{1010 \dots 10}_{2n-2} 1 = (10)^{n-1} 1$ e o item (iv) da proposição 3.1, obtemos, para todo inteiro $n \geq 1$,

$$(1 - p_1)v_{F_{2n-1}-1} + \sum_{i=1}^n p_1 p_2 \dots p_i (1 - p_{i+1})v_{F_{2n-1}-F_{2i-1}} + p_1 p_2 \dots p_{n+1}v_{F_{2n-1}} = \lambda v_{F_{2n-1}-1},$$

ou seja,

$$v_{F_{2n-1}} = \frac{-1}{p_1 p_2 \dots p_{n+1}} \left((1 - p_1 - \lambda)v_{F_{2n-1}-1} + \sum_{i=1}^n p_1 p_2 \dots p_i (1 - p_{i+1})v_{F_{2n-1}-F_{2i-1}} \right). \quad (3.5)$$

Da relação (3.5), trocando n por $n + 1$, obtemos

$$v_{F_{2n+1}} = \frac{-1}{p_1 p_2 \dots p_{n+2}} \left((1 - p_1 - \lambda)v_{F_{2n+1}-1} + \sum_{i=1}^{n+1} p_1 p_2 \dots p_i (1 - p_{i+1})v_{F_{2n+1}-F_{2i-1}} \right). \quad (3.6)$$

Assim, temos $v_{F_{2n+1}} = \left(1 - \frac{1}{p_{n+2}}\right)v_0 + \frac{1}{p_{n+2}}A_{F_{2n+1}}$, onde

$$A_{F_{2n+1}} = \frac{-1}{p_1 p_2 \dots p_{n+1}} \left((1 - p_1 - \lambda)v_{F_{2n-1}+F_{2n}-1} + \sum_{i=1}^n p_1 p_2 \dots p_i (1 - p_{i+1})v_{F_{2n-1}+F_{2n}-F_{2i-1}} \right).$$

Usando a relação (3.4) e o lema 3.2, temos

$$v_{F_{2n-1}+F_{2n}-1} = \beta_{F_{2n-1}+F_{2n}-1}v_0 = \beta_{F_{2n-1}-1}\beta_{F_{2n}}v_0 = \beta_{F_{2n}}v_{F_{2n-1}-1}.$$

Obtemos também

$$v_{F_{2n-1}+F_{2n}-F_{2i-1}} = \beta_{F_{2n}}v_{F_{2n-1}-F_{2i-1}}, \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

Assim, usando as relações (3.5) e (3.6), obtemos $A_{F_{2n+1}} = \beta_{F_{2n}}v_{F_{2n-1}} = \beta_{F_{2n}}\beta_{F_{2n-1}}v_0$.

Portanto, concluímos que

$$\begin{aligned} v_{F_{2n+1}} &= \left(\frac{1}{p_{n+2}}\beta_{F_{2n}}\beta_{F_{2n-1}} - \left(\frac{1}{p_{n+2}} - 1 \right) \right) v_0, \text{ para todo } n \geq 1 \\ \implies \beta_{F_{2n+1}} &= \frac{1}{p_{n+2}}\beta_{F_{2n}}\beta_{F_{2n-1}} - \left(\frac{1}{p_{n+2}} - 1 \right), \text{ para todo } n \geq 1. \end{aligned}$$

Agora, mostremos que

$$\beta_{F_{2n+2}} = \frac{1}{p_{n+2}}\beta_{F_{2n+1}}\beta_{F_{2n}} - \left(\frac{1}{p_{n+2}} - 1 \right), \text{ para todo } n \geq 1.$$

Tome $k = F_{2n}$ na relação (3.2). Usando o fato que $F_{2n} - 1 = \underbrace{1010 \dots 10}_{2n} = (10)^n$ e o item (iii) da proposição 3.1, obtemos, para todo inteiro $n \geq 1$,

$$(1 - p_1)v_{F_{2n}-1} + \sum_{i=1}^n p_1 p_2 \dots p_i (1 - p_{i+1})v_{F_{2n}-F_{2i}} + p_1 p_2 \dots p_{n+1}v_{F_{2n}} = \lambda v_{F_{2n}-1},$$

ou seja,

$$v_{F_{2n}} = \frac{-1}{p_1 p_2 \dots p_{n+1}} \left((1 - p_1 - \lambda)v_{F_{2n}-1} + \sum_{i=1}^n p_1 p_2 \dots p_i (1 - p_{i+1})v_{F_{2n}-F_{2i}} \right). \quad (3.7)$$

Da relação (3.7), trocando n por $n + 1$, obtemos

$$v_{F_{2n+2}} = \frac{-1}{p_1 p_2 \dots p_{n+2}} \left((1 - p_1 - \lambda)v_{F_{2n+2}-1} + \sum_{i=1}^{n+1} p_1 p_2 \dots p_i (1 - p_{i+1})v_{F_{2n+2}-F_{2i}} \right). \quad (3.8)$$

Assim, temos $v_{F_{2n+2}} = \left(1 - \frac{1}{p_{n+2}}\right)v_0 + \frac{1}{p_{n+2}}A_{F_{2n+2}}$, onde

$$A_{F_{2n+2}} = \frac{-1}{p_1 p_2 \dots p_{n+1}} \left((1 - p_1 - \lambda)v_{F_{2n+1}+F_{2n}-1} + \sum_{i=1}^n p_1 p_2 \dots p_i (1 - p_{i+1})v_{F_{2n+1}+F_{2n}-F_{2i}} \right).$$

Usando a relação (3.4) e o lema 3.2, temos

$$v_{F_{2n+1}+F_{2n}-1} = \beta_{F_{2n+1}+F_{2n}-1}v_0 = \beta_{F_{2n+1}}\beta_{F_{2n}-1}v_0 = \beta_{F_{2n+1}}v_{F_{2n}-1}.$$

Obtemos também

$$v_{F_{2n+1}+F_{2n}-F_{2i}} = \beta_{F_{2n+1}}v_{F_{2n}-F_{2i}}, \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

Assim, usando as relações (3.7) e (3.8), obtemos $A_{F_{2n+2}} = \beta_{F_{2n+1}}v_{F_{2n}} = \beta_{F_{2n+1}}\beta_{F_{2n}}v_0$.

Portanto, concluímos que

$$\begin{aligned} v_{F_{2n+2}} &= \left(\frac{1}{p_{n+2}}\beta_{F_{2n+1}}\beta_{F_{2n}} - \left(\frac{1}{p_{n+2}} - 1 \right) \right) v_0, \text{ para todo } n \geq 1 \\ \implies \beta_{F_{2n+2}} &= \frac{1}{p_{n+2}}\beta_{F_{2n+1}}\beta_{F_{2n}} - \left(\frac{1}{p_{n+2}} - 1 \right), \text{ para todo } n \geq 1. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos pelo lema 3.1 que

$$\beta_{F_0} = -\frac{1 - \lambda - p_1}{p_1} = q_{F_0} \quad \text{e} \quad \beta_{F_1} = \frac{1}{p_2}q_{F_0}^2 - \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) = q_{F_1}.$$

Logo $\beta_n = q_n$, para todo $n \geq 1$.

Com isso, checamos que $\sigma_{pt}(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (q_n(\lambda))_{n \in \mathbb{N}} \text{ é limitada}\}$.

□

Conjectura 3.1 Existe $0 < d < 1$ tal que se $p_i > d$, para todo $i \geq 1$, então $\sigma_{pt}(S) = E$.

No capítulo 4, provaremos um caso particular da conjectura 3.1. Particularmente, provaremos que se $p_i = p$, para todo $i \geq 1$, e $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < p < 1$, então $E \cap \mathbb{R} = \sigma_{pt}(S) \cap \mathbb{R}$.

Teorema 3.2 Em $l^\infty(\mathbb{N})$, temos $E \subset \sigma(S)$.

Demonstração: Seja $\lambda \in E$ e suponhamos que $\lambda \notin \sigma_{pt}(S)$. Provemos que $\lambda \in \sigma_a(S)$. De fato, para cada $k \geq 2$, considere

$$w^{(k)} = (w_0^k, w_1^k, w_2^k, \dots, w_k^k, w_{k+1}^k, w_{k+2}^k, \dots)^t = (1, q_1(\lambda), q_2(\lambda), \dots, q_k(\lambda), 0, 0, \dots)^t \in l^\infty(\mathbb{N}),$$

onde $(q_n(\lambda))_{n \geq 1} = (q_n)_{n \geq 1}$ é a sequência definida anteriormente. Seja $u^{(k)} = \frac{w^{(k)}}{\|w^{(k)}\|_\infty}$.

Afirmção: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(S - \lambda I)u^{(F_n)}\|_\infty = 0$.

De fato, $\forall i = 0, \dots, k-1$, temos $((S - \lambda I)u^{(k)})_i = 0$ e que $u_i = 0$, para todo $i > k$. Assim, observe que

$$\|(S - \lambda I)u^{(k)}\|_\infty = \sup_{i \geq 0} \left| \sum_{j=0}^{+\infty} (S - \lambda I)_{ij} w_j^{(k)} \right| = \sup_{i \geq k} \left\{ \frac{\left| \sum_{j=0}^k (S - \lambda I)_{ij} w_j^{(k)} \right|}{\|w^{(k)}\|_\infty} \right\}.$$

Se $k = F_n$, então, para $i \geq k = F_n$, temos que:

a) se $i = F_n$, então $S_{i,j} = 0$, para $j = 0, \dots, F_n - 1$, e $S_{F_n, F_n} = 1 - p_1$. Logo

$$\left| \sum_{j=0}^{F_n} (S - \lambda I)_{ij} w_j^{(F_n)} \right| = |1 - p_1 - \lambda| q_{F_n}.$$

b) se $F_n < i < F_{n+1} - 1$, então $S_{i,j} = 0$, para $j = 0, \dots, F_n - 1$, e $S_{i,j} \leq p_1$, para $j = F_n$. Logo

$$\left| \sum_{j=0}^{F_n} (S - \lambda I)_{ij} w_j^{(F_n)} \right| \leq p_1 |q_{F_n}|.$$

c) se $i = F_{n+1} - 1$, então $S_{i,j} = 0$, para $j = 1, \dots, F_n - 1$, e $S_{i,j} \leq p_1$, para $j = 0, F_n$. Logo

$$\left| \sum_{j=0}^{F_n} (S - \lambda I)_{ij} w_j^{(F_n)} \right| \leq p_1 + p_1 |q_{F_n}|.$$

d) se $i \geq F_{n+1}$, então $S_{i,j} = 0$, para $j = 1, \dots, F_n$, e $S_{i,j} \leq p_1$, para $j = 0$. Logo

$$\left| \sum_{j=0}^{F_n} (S - \lambda I)_{ij} w_j^{(F_n)} \right| \leq p_1.$$

Assim, de a), b), c) e d), segue que

$$\|(S - \lambda I)u^{(F_n)}\|_\infty \leq \frac{|1-p_1-\lambda|q_{F_n}|+p_1|q_{F_n}|+p_1}{\|w^{(F_n)}\|_\infty}.$$

Como $\lambda \in E$ e $\lambda \notin \sigma_{pt}(S)$ segue que $(q_{F_n})_{n \geq 0}$ é uma sequência limitada, mas $(q_n)_{n \geq 0}$ não é limitada. Portanto, temos $\|w^{(F_n)}\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, implicando pela desigualdade acima que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(S - \lambda I)u^{(F_n)}\|_\infty = 0$. Portanto, $\lambda \in \sigma_a(S) \subset \sigma(S)$.

□

Conjectura 3.2 $E = \sigma(S)$.

Teorema 3.3 *Suponhamos que existe $\delta > 0$ tal que $p_i > \delta$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Então E é compacto e $\mathbb{C} \setminus E$ é conexo.*

Antes de demonstrarmos o teorema 3.3, precisamos dos seguintes resultados.

Definição 3.2 *Seja $(f_n)_{n \geq 0}$, $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, uma sequência de funções definida por:*

$$f_0(z) = z, \quad f_1(z) = \frac{1}{p_2}z^2 - \left(\frac{1}{p_2} - 1\right) \text{ e } f_n(z) = \frac{1}{r_n}f_{n-1}(z)f_{n-2}(z) - \left(\frac{1}{r_n} - 1\right), \text{ para todo } n \geq 2,$$

onde $r_n = p_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1}$. Observe que $f_n(q_{F_0}) = q_{F_n}$, para todo $n \geq 0$.

Lema 3.3 *Se existe k inteiro tal que $|f_n(z)| > 1$ para $n \in \{k, k+1\}$, então $(f_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ não é limitada.*

Demonstração: Como $|f_n(z)| > 1$ para $n \in \{k, k+1\}$, então existe um número real $A > 1$ tal que $|f_n(z)| > A$ para $n \in \{k, k+1\}$. Daí, temos

$$\begin{aligned} |f_{k+2}(z)| &= \frac{1}{r_{k+2}} |f_{k+1}(z)f_k(z) - 1 + r_{k+2}| \geq \\ &\geq \frac{1}{r_{k+2}} |f_{k+1}(z)f_k(z)| - \frac{1}{r_{k+2}} |1 - r_{k+2}| > \frac{A^2}{r_{k+2}} - \frac{1}{r_{k+2}} + 1 \\ \implies |f_{k+2}(z)| - 1 &> \frac{1}{r_{k+2}} (A^2 - 1) \geq A^2 - 1 \implies |f_{k+2}(z)| > A^2. \end{aligned}$$

Da mesma maneira, temos

$$|f_{k+3}(z)| > A^3 \text{ e } |f_{k+4}(z)| > A^5.$$

Continuando dessa maneira, chegamos que

$$|f_{k+l}(z)| > A^{F_l-1}, \text{ para todo } l \in \mathbb{N}, l \geq 2.$$

Como $A > 1$, segue que $(f_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ não é limitada.

□

Proposição 3.4 *Suponhamos que existe $\delta > 0$ tal que $p_i > \delta$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Então existe $R > 1$ tal que*

$$|f_k(z)| > R \text{ para algum } k \in \mathbb{N} \implies (f_n(z))_{n \in \mathbb{N}} \text{ não é limitada.}$$

Demonstração: Seja $R > 1$ tal que $R > \frac{2}{\delta} - 1$. Com isso, temos que

$$\frac{2}{p_2} - 1 < R < R\delta \left(R + 1 - \frac{1}{\delta} \right). \quad (3.9)$$

Se $|f_0(z)| = |z| > R$, então

$$\begin{aligned} |f_1(z)| &= \left| \frac{1}{p_2} z^2 - \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) \right| \geq \frac{1}{p_2} |z|^2 - \left| \frac{1}{p_2} - 1 \right| > \frac{1}{p_2} R^2 - \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) = \frac{1}{p_2} (R^2 - 1) + 1 \\ &\implies |f_1(z)| - 1 > \frac{1}{p_2} (R^2 - 1) \geq R^2 - 1 \implies |f_1(z)| > R^2 > 1. \end{aligned}$$

Daí, segue pelo lema 3.3 que $(f_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ é ilimitada.

Se $|f_1(z)| > R$, então

$$\begin{aligned} R < |f_1(z)| &= \left| \frac{1}{p_2} z^2 - \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) \right| \leq \frac{1}{p_2} |z|^2 + \left| \frac{1}{p_2} - 1 \right| = \frac{1}{p_2} |z|^2 + \frac{1}{p_2} - 1 \\ &\implies |z|^2 > p_2 \left(R + 1 - \frac{1}{p_2} \right) > \delta \left(R + 1 - \frac{1}{\delta} \right) > 1, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é dada pela relação (3.9). Com isso, temos que $|f_0(z)| = |z| > 1$.

Logo, pelo lema 3.3, segue que $(f_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ é ilimitada.

Por indução, suponhamos que para todo $i = 0, 1, \dots, k-1$, vale:

$$|f_i(z)| > R \implies (f_n(z))_n \text{ ilimitada.}$$

Provemos que o resultado é válido para $i = k$. De fato, suponhamos que $|f_k(z)| > R$.

Se $|f_{k+1}(z)| > 1$, segue pelo lema 3.3 que $(f_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ é ilimitada.

Suponhamos $|f_{k+1}(z)| \leq 1$. Então

$$1 \geq |f_{k+1}(z)| = \left| \frac{1}{r_{k+1}} f_k(z) f_{k-1}(z) - \left(\frac{1}{r_{k+1}} - 1 \right) \right| \geq \frac{1}{r_{k+1}} |f_k(z)| |f_{k-1}(z)| - \left(\frac{1}{r_{k+1}} - 1 \right) >$$

$$> \frac{R}{r_{k+1}} |f_{k-1}(z)| - \frac{1}{r_{k+1}} + 1 \implies \frac{1}{r_{k+1}} > \frac{R}{r_{k+1}} |f_{k-1}(z)| \implies \frac{1}{R} > |f_{k-1}(z)|.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} R < |f_k(z)| &= \left| \frac{1}{r_k} f_{k-1}(z) f_{k-2}(z) - \left(\frac{1}{r_k} - 1 \right) \right| \leq \frac{1}{r_k} |f_{k-1}(z) f_{k-2}(z)| + \frac{1}{r_k} - 1 < \\ &< \frac{1}{r_k} \frac{1}{R} |f_{k-2}(z)| + \frac{1}{r_k} - 1 \implies R + 1 < \frac{1}{r_k} \left(\frac{1}{R} |f_{k-2}(z)| + 1 \right) \implies R(r_k(R + 1) - 1) < |f_{k-2}(z)| \\ &\implies |f_{k-2}(z)| > R(\delta(R + 1) - 1) = R\delta \left(R + 1 - \frac{1}{\delta} \right) > R \implies |f_{k-2}(z)| > R. \end{aligned}$$

Logo, por hipótese de indução, temos $(f_n(z))_n$ ilimitado.

□

Proposição 3.5 *Suponhamos que existe $\delta > 0$ tal que $p_i > \delta$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Então existe um número real $R > 0$ tal que $\mathcal{G} = \bigcap_{n=0}^{\infty} f_n^{-1} \overline{D(0, R)}$, onde $\overline{D(0, R)}$ é o fecho do disco de centro 0 e raio R e $\mathcal{G} := \{z \in \mathbb{C} : (f_n(z))_{n \geq 0} \text{ é limitada}\}$.*

Demonstração: Consequência direta da proposição 3.4.

□

Observação 3.2 *Da demonstração da proposição 3.4, temos que se $|f_k(z)| \geq R$ para algum inteiro k , então $(f_n(z))_{n \geq 0}$ não é limitada. Logo*

$$\mathcal{G} = \bigcap_{n=0}^{\infty} f_n^{-1} D(0, R)$$

Demonstração do teorema 3.3:

E é compacto

Observe que $E = \Psi(\mathcal{G})$, onde $\Psi(z) = p_1 z + 1 - p_1$, e da proposição 3.5 temos que $\mathcal{G}$ é compacto. Portanto E é compacto.

$\mathbb{C} \setminus E$ é conexo

Da proposição 3.4, existe $R > 0$ tal que

$$\mathbb{C} \setminus \mathcal{G} = \mathbb{C} \setminus \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} f_n^{-1} \overline{D(0, R)} \right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathbb{C} \setminus f_n^{-1} \overline{D(0, R)}.$$

Daí, como $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0, R)}$ é conexo, segue pelo teorema do módulo máximo, para cada função holomorfa f_n , que $\mathbb{C} \setminus f_n^{-1} \overline{D(0, R)}$ é conexo para todo $n \geq 0$. Mas, como $\mathbb{C} \setminus f_n^{-1} \overline{D(0, R)}$ contém uma vizinhança do infinito para todo $n \geq 0$, segue que

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathbb{C} \setminus f_n^{-1} \overline{D(0, R)} = \mathbb{C} \setminus \mathcal{G} \text{ é conexo.}$$

Logo, $\mathbb{C} \setminus \Psi^{-1}(E) = \mathbb{C} \setminus \mathcal{G}$ é conexo. Portanto, da definição de Ψ , segue que $\Psi(\mathbb{C} \setminus \Psi^{-1}(E)) = \mathbb{C} \setminus E$ é conexo. □

Conjectura 3.3 *O conjunto E é compacto e $\mathbb{C} \setminus E$ é conexo, mesmo supondo $\liminf_{i \rightarrow +\infty} p_i = 0$.*

Proposição 3.6 *Suponhamos que existe $\delta > 0$ tal que $p_i > \delta$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Então existe $R > 0$ tal que $\mathcal{G} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} f_n^{-1} D(0, R)$ e $f_{n+1}^{-1} D(0, R) \subset f_n^{-1} D(0, R)$, para todo $n \geq 0$.*

Demonstração: Seja R um número real tal que $R > \frac{2}{\delta} - 1$. Pela observação 3.2, temos $\mathcal{G} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} f_n^{-1} D(0, R)$.

Provemos por indução sobre k que $f_{k+1}^{-1} D(0, R) \subset f_k^{-1} D(0, R)$, para todo $k \geq 0$.

De fato, suponhamos que $f_{k+1}^{-1} D(0, R) \subset f_k^{-1} D(0, R)$, para todo $k = 0, \dots, n-1$, com $n \geq 5$. Seja $z \in f_{n+1}^{-1} D(0, R)$ e suponhamos que $f_n(z) \geq R$. Seja $A = 1 - \frac{1}{\delta}$, o que implica que $\left| 1 - \frac{1}{r_n} \right| < |A|$, para todo $n \geq 1$. Daí,

$$R > |f_{n+1}(z)| \geq \frac{1}{r_{n+1}} R |f_{n-1}(z)| - \left| \frac{1}{r_{n+1}} - 1 \right| \implies |f_{n-1}(z)| < \frac{r_{n+1}(R+|A|)}{R} < \frac{R+|A|}{R} = \mathcal{O}(1).$$

Logo, pela hipótese de indução, temos que

$$|f_k(z)| < R \text{ para todo } k = 1, \dots, n-2. \quad (3.10)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |f_n(z)| &\leq \frac{1}{r_n} |f_{n-1}(z)| |f_{n-2}(z)| + \left| \frac{1}{r_n} - 1 \right| < \frac{1}{r_n} \mathcal{O}(1) |f_{n-2}(z)| + |A| \implies \\ |f_{n-2}(z)| &> r_n \frac{|f_n(z)| - |A|}{\mathcal{O}(1)} > \delta \frac{R - |A|}{\mathcal{O}(1)} = \mathcal{O}(R). \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$|f_{n-1}(z)| \geq \frac{1}{r_{n-1}} |f_{n-2}(z)| |f_{n-3}(z)| - \left| \frac{1}{r_{n-1}} - 1 \right| \implies |f_{n-3}(z)| \leq r_{n-1} \frac{|f_{n-1}(z)| + |A|}{|f_{n-2}(z)|} < \frac{\mathcal{O}(1)}{\mathcal{O}(R)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right).$$

Ainda temos que

$$\begin{aligned} |f_{n-2}(z)| &\leq \frac{1}{r_{n-2}} |f_{n-3}(z)| |f_{n-4}(z)| + \left| \frac{1}{r_{n-2}} - 1 \right| < \frac{1}{\delta} \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right) |f_{n-4}(z)| + |A| \implies \\ |f_{n-4}(z)| &> \delta \frac{|f_{n-2}(z)| - |A|}{\mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right)} > \frac{\mathcal{O}(R)}{\mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right)} = \mathcal{O}(R^2). \end{aligned}$$

Sendo assim, escolhendo R suficientemente grande tal que $R < \mathcal{O}(R^2)$, temos $|f_{n-4}(z)| > R$, contradizendo a relação (3.10). Portanto $z \in f_n^{-1}(D(0, R))$.

Para terminarmos a prova, precisamos mostrar que tal propriedade é válida para os casos $k = 0, 1, 2, 3$.

Caso $k=0$

Seja $z \in f_1^{-1}D(0, R)$. Então $\left| \frac{1}{p_2} z^2 + 1 - \frac{1}{p_2} \right| < R$. Logo $\frac{1}{p_2} |z^2| - \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) < R$. Portanto,

$$\frac{1}{p_2} (|z^2| - 1) < R - 1 \implies |z^2| - 1 < R - 1 \implies |z| < \sqrt{R} < R,$$

ou seja, $z \in f_0^{-1}D(0, R)$.

Caso $k=1$

Seja $z \in f_2^{-1}D(0, R)$. Logo,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{r_2} f_1(z) f_0(z) + 1 - \frac{1}{r_2} \right| < R &\implies \frac{1}{r_2} |f_1(z)| |f_0(z)| + 1 - \frac{1}{r_2} < R \implies \\ |f_1(z)| |f_0(z)| &< r_2 R + 1 - r_2 < R. \end{aligned}$$

Com isso, temos $|f_1(z)| < (r_2 R + 1 - r_2)^{\frac{3}{4}}$ ou $|f_0(z)| < (r_2 R + 1 - r_2)^{\frac{1}{4}}$.

Se $|f_1(z)| < (r_2 R + 1 - r_2)^{\frac{3}{4}}$, então

$$|f_1(z)| < (r_2 R + 1 - r_2)^{\frac{3}{4}} < R \implies f_1(z) \in D(0, R) \implies z \in f_1^{-1}D(0, R).$$

Suponha $|z| = |f_0(z)| < (r_2 R + 1 - r_2)^{\frac{1}{4}}$. Com isso, temos

$$|f_1(z)| \leq \frac{1}{r_2} |z|^2 + \left| \frac{1}{r_2} - 1 \right| \leq \frac{1}{r_2} (r_2 R + 1 - r_2)^{\frac{1}{2}} + \left| \frac{1}{r_2} - 1 \right|.$$

Seja R suficientemente grande de tal forma que

$$\frac{1}{r_2} (r_2 R + 1 - r_2)^{\frac{1}{2}} + \left| \frac{1}{r_2} - 1 \right| < R, \text{ garantindo que } |f_1(z)| < R, \text{ ou seja, } z \in f_1^{-1}D(0, R).$$

Caso $k=2$

$$\begin{aligned}
z \in f_3^{-1}D(0, R) &\implies f_3(z) \in D(0, R) \implies \left| \frac{1}{r_3}f_2(z)f_1(z) + 1 - \frac{1}{r_3} \right| < R \\
&\implies \frac{1}{r_3}|f_2(z)||f_1(z)| + 1 - \frac{1}{r_3} < R \implies |f_2(z)||f_1(z)| < r_3R + 1 - r_3 \leq R.
\end{aligned}$$

Com isso, temos $|f_2(z)| < \sqrt{r_3R + 1 - r_3}$ ou $|f_1(z)| < \sqrt{r_3R + 1 - r_3}$.

Se $|f_2(z)| < \sqrt{r_3R + 1 - r_3}$, então

$$|f_2(z)| < \sqrt{r_3R + 1 - r_3} \leq R \implies f_2(z) \in D(0, R) \implies z \in f_2^{-1}D(0, R).$$

Se $|f_1(z)| < \sqrt{r_3R + 1 - r_3}$, então

$$\frac{1}{p_2}|z|^2 - \left(\frac{1}{p_2} - 1\right) \leq |f_1(z)| < \sqrt{r_3R + 1 - r_3} \implies |z| < \sqrt{p_2} \left(\sqrt{r_3R + 1 - r_3} + \left(\frac{1}{p_2} - 1\right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
|f_2(z)| &\leq \frac{1}{p_2}|f_1(z)||f_0(z)| + \left(\frac{1}{p_2} - 1\right) \\
&< \frac{1}{p_2}\sqrt{r_3R + 1 - r_3}\sqrt{p_2} \left(\sqrt{r_3R + 1 - r_3} + \left(\frac{1}{p_2} - 1\right) \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{p_2} - 1\right) \\
&< \frac{1}{\sqrt{p_2}} \left((r_3R + 1 - r_3)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{1}{p_2} - 1\right) (r_3R + 1 - r_3) \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{p_2} - 1\right) = \mathcal{O}(R^{\frac{3}{4}}).
\end{aligned}$$

Por fim, tomamos R suficientemente grande de tal forma que $\mathcal{O}(R^{\frac{3}{4}}) < R$, garantindo que $|f_2(z)| < R$, ou seja, $z \in f_2^{-1}D(0, R)$.

Caso k=3

$$\begin{aligned}
z \in f_4^{-1}D(0, R) &\implies f_4(z) \in D(0, R) \implies \left| \frac{1}{r_4}f_3(z)f_2(z) + 1 - \frac{1}{r_4} \right| < R \\
&\implies \frac{1}{r_4}|f_3(z)||f_2(z)| + 1 - \frac{1}{r_4} < R \implies |f_3(z)||f_2(z)| < r_4R + 1 - r_4 \leq R.
\end{aligned}$$

Com isso, temos $|f_3(z)| < (r_4R + 1 - r_4)^{\frac{3}{4}}$ ou $|f_2(z)| < (r_4R + 1 - r_4)^{\frac{1}{4}}$.

Se $|f_3(z)| < (r_4R + 1 - r_4)^{\frac{3}{4}}$, então

$$|f_3(z)| < (r_4R + 1 - r_4)^{\frac{3}{4}} \leq R \implies f_3(z) \in D(0, R) \implies z \in f_3^{-1}D(0, R).$$

Se $|f_2(z)| < (r_4R + 1 - r_4)^{\frac{1}{4}}$, então vamos tomar R suficientemente grande de tal forma que $|f_2(z)| < (r_4R + 1 - r_4)^{\frac{1}{4}}$ implique $|f_1(z)| < (r_4R + 1 - r_4)^{\frac{1}{4}}$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
|f_3(z)| &\leq \frac{1}{r_3}|f_2(z)||f_1(z)| + \left| 1 - \frac{1}{r_3} \right| \\
&< \frac{1}{r_3}(r_4R + 1 - r_4)^{\frac{1}{2}} + \left| 1 - \frac{1}{r_3} \right| = \frac{1}{r_3}(r_4R + 1 - r_4)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{r_3} - 1 \right).
\end{aligned}$$

Por fim, tomamos R suficientemente grande de tal forma que

$$\frac{1}{r_3}(r_4 R + 1 - r_4)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{r_3} - 1\right) < R, \text{ garantindo que } |f_3(z)| < R, \text{ ou seja, } z \in f_3^{-1}D(0, R).$$

□

Sejam $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ um polinômio não nulo e $\mathcal{F}_h := \{z \in \mathbb{C} : \psi_n(h(z), z) \text{ é limitado}\}$, onde $\psi_n : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ é definida por $\psi_n = g_n \circ g_{n-1} \circ \dots \circ g_2$ e $g_n : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ é definida por

$$g_n(x, y) = \left(\frac{1}{r_n}xy - \left(\frac{1}{r_n} - 1 \right), x \right), \text{ para todo } n \geq 2.$$

.

Observação 3.3 Se $h(z) = \frac{1}{r_2}z^2 - \left(\frac{1}{r_2} - 1\right)$, então E e $\mathcal{F}_h$ são isomorfos por l , onde $l : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é definida por $l(\lambda) = \frac{1}{p_1}\lambda - \left(\frac{1}{r_1} - 1\right)$. Além disso, temos $\mathcal{F}_h = \mathcal{G}$.

Afirmção 3.1 Os resultados anteriores podem ser generalizados para $\mathcal{F}_h$, para qualquer polinômio não nulo h . Em particular, se suponhamos que existe $\delta > 0$ tal que $p_i > \delta$, $\forall i \in \mathbb{N}$, então temos $\mathbb{C} \setminus \mathcal{F}_h$ conexo e existe $R > 0$ tal que $\mathcal{F}_h = \bigcap_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{-1}D(0, R)$, onde $\varphi_0(z) = z$, $\varphi_1(z) = h(z)$ e $\varphi_n(z) = \frac{1}{r_n}\varphi_{n-1}(z)\varphi_{n-2}(z) - \left(\frac{1}{r_n} - 1\right)$, para todo $n \geq 2$. Além disso, temos $\varphi_{n+1}^{-1}D(0, R) \subset \varphi_n^{-1}D(0, R)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.4 Seja $h(z) = a_2z^2 + a_3z^3 + \dots + a_nz^n$, com $n \geq 2$ e $a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, e suponhamos que $\liminf_{i \rightarrow +\infty} p_i > 0$. Então, temos os seguintes resultados:

- a) Se $p_2 \in (0, 1 - p_3) \cup \{1\}$ e $p_3 < \frac{1}{2}$, então $\mathcal{F}_h$ é desconexo.
- b) Se $p_i = 1$ para todo $i \in \{2, 3, \dots, k\}$ e $p_{k+1} < \frac{1}{2}$, para algum $k \geq 3$, então $\mathcal{F}_h$ é desconexo.

Para demonstrarmos o teorema 3.4, precisamos do seguinte lema que é um caso particular da fórmula de Riemann-Hurwitz.

Lema 3.4 Sejam $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função polinomial e $R > 0$. Então

$$\phi^{-1}D(0, R) \text{ é conexo} \iff \{z \in \mathbb{C} : \phi'(z) = 0\} \subset \phi^{-1}D(0, R).$$

Demonstração do teorema 3.4:

- a) Se $p_2 = 1$ e $p_3 < \frac{1}{2}$, então

$$\varphi_0(0) = \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0 \text{ e } |\varphi_3(0)| = |\varphi_4(0)| = \frac{1}{p_3} - 1 > 1,$$

o que implica pelo lema 3.3, que $(\varphi_n(0))_{n \geq 0}$ é ilimitada.

Se $p_2 \in (0, 1 - p_3)$ e $p_3 < \frac{1}{2}$, então $\varphi_0(0) = \varphi_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = 1 - \frac{1}{p_2}$, $|\varphi_3(0)| = \frac{1}{p_3} - 1 > 1$ e

$$p_2 < 1 - p_3 \implies \frac{1}{p_2} > \frac{1}{1-p_3} = \frac{p_3}{1-p_3} + 1 \implies \frac{1}{p_2} - 1 > \frac{p_3}{1-p_3} \implies \left(\frac{1}{p_3} - 1\right) \left(\frac{1}{p_2} - 1\right) > 1 \implies \frac{1}{p_3} \left(\frac{1}{p_3} - 1\right) \left(\frac{1}{p_2} - 1\right) - \frac{1}{p_3} + 1 > 1 \implies \varphi_4(0) > 1.$$

Logo, como $|\varphi_3(0)| > 1$ e $|\varphi_4(0)| > 1$, segue pelo lema 3.3 que $(\varphi_n(0))_n$ ilimitada.

Portanto, em ambos os casos, temos que $0 \notin \mathcal{F}_h$.

Logo, existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $0 \notin \varphi_k^{-1}D(0, R)$, para todo $k \geq n$, onde R é o número real definido na observação 3.1.

Como $\varphi'_n(0) = 0$, para todo $n \geq 1$, deduzimos pelo lema 3.4 que $\varphi_k^{-1}D(0, R)$ não é conexo para todo $k \geq n$. Como $\mathcal{F}_h = \bigcap_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{-1}D(0, R)$ e $\varphi_{n+1}^{-1}D(0, R) \subset \varphi_n^{-1}D(0, R)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, segue que $\mathcal{F}_h$ não é conexo.

b) Suponha que $p_i = 1$ para $i \in \{2, 3, \dots, k\}$ e $p_{k+1} < \frac{1}{2}$, para algum $k \geq 3$. Assim, temos que $\varphi_0(0) = \varphi_1(0) = \dots = \varphi_{2k-2}(0) = 0$ e $|\varphi_{2k-1}(0)| = |\varphi_{2k}(0)| = \frac{1}{p_{k+1}} - 1 > 1$. Assim, com raciocínio análogo ao que foi feito no item a), segue que $\mathcal{F}_h$ não é conexo.

□

Corolário 3.1 *Suponhamos que $\liminf_{i \rightarrow +\infty} p_i > 0$. Se $p_i = 1$ para todo $i \in \{2, 3, \dots, k\}$ e $p_{k+1} < \frac{1}{2}$, para algum $k \geq 2$, então $\mathcal{G}$ e E são conjuntos desconexos.*

Demonstração: Seja $h(z) = \frac{1}{p_2}z^2 - \left(\frac{1}{p_2} - 1\right) = z^2$. Daí, pela observação 3.3 temos que $\mathcal{F}_h = \mathcal{G}$ e pelo teorema 3.4 temos que $\mathcal{F}_h$ é desconexo. Portanto $\mathcal{G}$ é desconexo. Pela observação, segue também que E é desconexo.

□

Conjectura 3.4 *Existe $0 < \delta < 1$ tal que se $p_i > \delta$, para todo $i \geq 1$, então E é conexo.*

Na figura 3.3 (figura retirada do trabalho [26]), temos imagens do conjunto $\mathcal{G}$, considerando $p_i = p$, para todo $i \geq 1$, para os casos onde $p = 1$, $p = 0.9$, $p = 0.8$, $p = 0.7$, $p = 0.64$, $p = 0.6305$, $p = 0.6301$, $p = 0.63$, $p = 0.625$, $p = 0.6$, $p = 0.58$ e $p = 0.5$.

Generalização

Seja $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 1$, e considere a sequência $(F_n)_{n \geq 0}$ definida por

$$F_0 = 1, F_n = a_1 F_{n-1} + \dots + a_n F_0 + 1, \text{ para todo } n \in \{1, \dots, d-1\}, \text{ e}$$

$$F_{n+d} = a_1 F_{n+d-1} + \dots + a_d F_n, \text{ para todo } n \geq 0,$$

onde a_i são inteiros positivos, para todo $i \in \{1, \dots, d\}$, satisfazendo a relação

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_d > 1.$$

Usando o algoritmo fominha, podemos escrever todo inteiro natural N , de forma única, como $N = \sum_{i=0}^{k(N)} \varepsilon_i(N) F_i$, onde os dígitos $\varepsilon_j(N)$ satisfazem a relação

$$\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \dots \varepsilon_{i-d+1} <_{lex} a_1 a_2 \dots a_d, \text{ para todo } i \geq d-1.$$

Como vimos antes, sabemos que a soma de 1 à um número inteiro não negativo N , escrito em base $(F_n)_{n \geq 0}$, é dada por um transdutor. Usando a mesma construção como no caso da base de Fibonacci, podemos definir a máquina de somar estocástica associada à sequência $(F_n)_{n \geq 0}$ e à sequência de probabilidades $\bar{p} = (p_i)_{i \geq 1}$ e, podemos mostrar que $\sigma_{pt}(S_{\bar{p}}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (q_n(\lambda))_{n \geq 0} \text{ é limitada}\}$, onde $q_{F_i}(\lambda)$ são polinômios fixos em λ , para todo $i \in \{0, \dots, d-1\}$, $q_{F_n}(\lambda) = \frac{1}{r_n} q_{F_{n-1}}^{a_1}(\lambda) q_{F_{n-2}}^{a_2}(\lambda) \dots q_{F_{n-d}}^{a_d}(\lambda) - \left(\frac{1}{r_n} - 1\right)$, para todo $n \geq d$, e $q_N(\lambda) = q_{F_0}^{\varepsilon_0}(\lambda) \dots q_{F_n}^{\varepsilon_n}(\lambda)$, onde $N = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i F_i$.

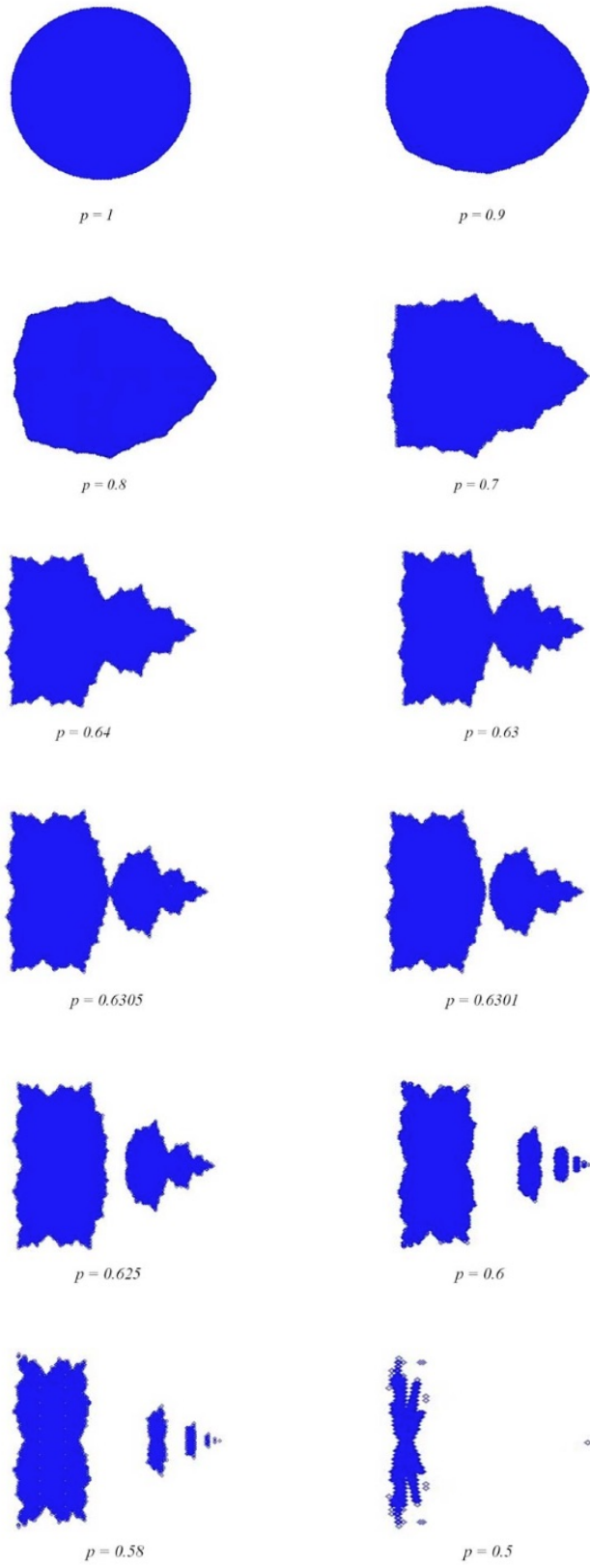


Figura 3.3: Imagem do conjunto $\mathcal{G}$, onde $p_i = p \in]0, 1]$, para todo $i \geq 1$.

Definição 3.3 Seja $\beta : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}_+$ uma aplicação definida por $\beta(n) = \Pi_r$ se $F_r \leq n < F_{r+1}$, para qualquer que seja $r \geq 0$, onde

$$\Pi_0 = 1, \Pi_1 = \frac{1}{p_2} \text{ e } \Pi_r := \prod_{i=2}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1} \frac{1}{p_i^2} \frac{1}{p^{\lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{r}{2} \rfloor}}, \forall r \geq 2,$$

ou seja,

$$\Pi_{2n} = \prod_{i=2}^{n+1} \frac{1}{p_i^2} = \frac{1}{p_2^2 p_3^2 \cdots p_{n+1}^2} \text{ e } \Pi_{2n+1} = \frac{1}{p_{n+2}} \prod_{i=2}^{n+1} \frac{1}{p_i^2} = \frac{1}{p_2^2 p_3^2 \cdots p_{n+1}^2} \frac{1}{p_{n+2}}, \forall n \geq 1.$$

Teorema 3.5 A cadeia de Markov é transiente se, e somente se, $\prod_{i=1}^{\infty} p_i > 0$.

Antes de provarmos o teorema 3.5, precisaremos do seguinte lema.

Seja $\tilde{S}$ a matriz obtida de S , retirando-se a sua primeira linha e a sua primeira coluna (ver a matriz representada na tabela 3.3).

Lema 3.5 Seja $v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$, $v = (v_1, v_2, v_3, \dots)$. Então $\tilde{S}v = v$ se, e somente se, $v_n = \beta(n)v_1$, para todo $n \geq 1$.

Demonstração: Suponhamos que $\tilde{S}v = v$. Como a probabilidade de transição de qualquer inteiro não negativo i para qualquer inteiro $i+k$, com $k \geq 2$, é $S_{i,i+k} = 0$ (ver proposição 3.1), segue que o operador $\tilde{S}$ satisfaz $\tilde{S}_{i,i+k} = S_{i,i+k} = 0$, $\forall i, k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 2$. Assim, podemos provar por indução que para cada $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 1$, existe $\alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que $v_n = \alpha_n v_1$.

Vamos mostrar que $\alpha_n = \beta(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. De fato:

0) $\alpha_{F_0} = \alpha_1 = 1 = \Pi_0 = \beta(F_0) = \beta(1);$

1) $(1 - p_1)v_1 + p_1 p_2 v_2 = v_1 \implies p_1 p_2 v_2 = p_1 v_1 \implies v_2 = \frac{1}{p_2} v_1$
 $\implies \alpha_{F_1} = \alpha_2 = \Pi_1 = \beta(2);$

2) $(1 - p_1)v_2 + p_1 p_2 v_3 = v_2 \implies p_1 p_2 v_3 = p_1 v_2 \implies v_3 = \frac{1}{p_2} v_2 = \frac{1}{p_2^2} v_1$

$\implies \alpha_{F_2} = \alpha_3 = \prod_{i=2}^{\lfloor \frac{2}{2} \rfloor + 1} \frac{1}{p_i^2} = \Pi_2 = \beta(F_2) = \beta(3);$

3) $(1 - p_1)v_3 + p_1 v_4 = v_3 \implies v_4 = v_3 = \alpha_3 v_1 \implies \alpha_4 = \alpha_3 = \Pi_2 = \beta(4);$

4) $p_1(1 - p_2)v_3 + (1 - p_1)v_4 + p_1 p_2 p_3 v_5 = v_4 \implies p_1(1 - p_2)v_4 + p_1 p_2 p_3 v_5 = p_1 v_4$
 $\implies p_2 p_3 v_5 = p_2 v_4 \implies v_5 = \frac{1}{p_3} \frac{1}{p_2} v_1$

$\implies \alpha_{F_3} = \alpha_5 = \prod_{i=2}^{\lfloor \frac{3}{2} \rfloor + 1} \frac{1}{p_i^2} \frac{1}{p^{\lfloor \frac{3+1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{3}{2} \rfloor}} = \Pi_3 = \beta(F_3) = \beta(5);$

$$5) (1 - p_1)v_5 + p_1v_6 = v_5 \implies v_6 = v_5 = \alpha_5v_1 \implies \alpha_6 = \alpha_5 = \Pi_3 = \beta(6);$$

$$6) p_1(1 - p_2)v_5 + (1 - p_1)v_6 + p_1p_2v_7 = v_6 \implies (1 - p_2)v_6 + p_2v_7 = v_6 \implies p_2v_7 = p_2v_6 \\ \implies v_7 = v_6 = \alpha_6v_1 \implies \alpha_7 = \alpha_6 = \Pi_3 = \beta(7);$$

Seja $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 7$, e suponhamos que $\alpha_n = \beta(n)$, para todo $n = 1, \dots, k$. Provemos que $\alpha_{k+1} = \beta(k+1)$.

Para isso, precisamos considerar dois casos:

(i) $k+1 = F_r$, para algum $r \geq 3$;

Neste caso, podemos ter $r = 2l+1$ ou $r = 2l+2$, para algum $l \geq 1$. Em ambos os casos, temos que

$$\left\{ \begin{array}{ll} k \rightarrow k+1, & \text{com probabilidade } p_1p_2 \dots p_{l+1}p_{l+2}; \\ k \rightarrow 0, & \text{com probabilidade } p_1p_2 \dots p_{l+1}(1 - p_{l+2}); \\ k \rightarrow \sum_{i=0}^j F_{r-1-2i}, & \text{com probabilidade } p_1p_2 \dots p_{l-j}(1 - p_{l-j+1}), \text{ para todo } j = 0, \dots, l-1; \\ k \rightarrow k, & \text{com probabilidade } 1 - p_1. \end{array} \right.$$

Fazendo $\tilde{S}v = v$, obtemos da k -ésima linha que

$$p_1p_2 \dots p_{l+1}p_{l+2}v_{k+1} + \sum_{j=0}^{l-1} p_1p_2 \dots p_{l-j}(1 - p_{l-j+1})v_{\sum_{i=0}^j F_{r-1-2i}} + (1 - p_1)v_k = v_k. \quad (3.11)$$

Assim, como

$$F_{r-1} \leq \sum_{i=0}^j F_{r-1-2i} \leq \sum_{i=0}^{l-1} F_{r-1-2i} < F_r = k+1, \forall j = 0, \dots, l-1$$

e

$$\alpha_n = \beta(n), \forall n = 1, \dots, k,$$

segue que $v_{\sum_{i=0}^j F_{r-1-2i}} = v_k = \Pi_{r-1}v_1$, para todo $j = 0, \dots, l-1$.

Logo, da relação (3.11), obtemos

$$p_1p_2 \dots p_{l+1}p_{l+2}v_{k+1} + \sum_{j=0}^{l-1} p_1p_2 \dots p_{l-j}(1 - p_{l-j+1})\Pi_{r-1}v_1 + (1 - p_1)\Pi_{r-1}v_1 = \Pi_{r-1}v_1 \\ \implies p_1p_2 \dots p_{l+1}p_{l+2}v_{k+1} = \left(- \sum_{j=0}^{l-1} p_1p_2 \dots p_{l-j}(1 - p_{l-j+1}) + p_1 \right) \Pi_{r-1}v_1 = p_1p_2 \dots p_{l+1}\Pi_{r-1}v_1$$

$$\implies v_{k+1} = \frac{1}{p_{l+2}} \Pi_{r-1} v_1 = \frac{1}{p_{l+2}} \prod_{i=2}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor + 1} \frac{1}{p_i^2} \frac{1}{p^{\lfloor \frac{r-1+1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor}} v_1.$$

Se $r = 2l + 1$, então

$$v_{k+1} = \frac{1}{p_{l+2}} \prod_{i=2}^{l+1} \frac{1}{p_i^2} \frac{1}{p_{l+2}} v_1 = \prod_{i=2}^{l+1} \frac{1}{p_i^2} \frac{1}{p_{l+2}} v_1 = \Pi_r v_1.$$

Se $r = 2l + 2$, então

$$v_{k+1} = \frac{1}{p_{l+2}} \prod_{i=2}^{l+1} \frac{1}{p_i^2} \frac{1}{p_{(l+1)-l}} v_1 = \prod_{i=2}^{l+2} \frac{1}{p_i^2} v_1 = \Pi_r v_1.$$

Portanto, temos que

$$v_{k+1} = \Pi_r v_1 = \beta(F_r) v_1 = \beta(k+1) v_1 \implies \alpha_{k+1} = \beta(k+1).$$

(ii) $F_r < k+1 < F_{r+1}$, para algum $r \geq 3$;

Nesse caso, temos que $F_r \leq k < F_{r+1} - 1$, o que implica que $s_{k,i} = 0$, para todo $i = 0, \dots, F_r - 1$.

Daí, temos

$$1 = \sum_{i=0}^{k+1} s_{k,i} = \sum_{i=F_r}^{k+1} s_{k,i} = \sum_{i=F_r}^{k+1} \tilde{s}_{k,i}.$$

Logo, fazendo $\tilde{S}v = v$ e sabendo que $\alpha_n = \beta(n) = \Pi_r$, $\forall n = F_r, \dots, k$, obtemos da k -ésima linha

$$\sum_{i=1}^{k+1} \tilde{s}_{k,i} v_i = v_k \implies \sum_{i=F_r}^{k+1} \tilde{s}_{k,i} v_i = v_k \implies \sum_{i=F_r}^k \tilde{s}_{k,i} \Pi_r v_1 + \tilde{s}_{k,k+1} v_{k+1} = \Pi_r v_1$$

$$\implies (1 - \tilde{s}_{k,k+1}) \Pi_r v_1 + \tilde{s}_{k,k+1} v_{k+1} = \Pi_r v_1 \implies \tilde{s}_{k,k+1} v_{k+1} = \tilde{s}_{k,k+1} \Pi_r v_1$$

$$\implies v_{k+1} = \Pi_r v_1 \implies \alpha_{k+1} = \Pi_r = \beta(k+1).$$

Com isso, concluímos que $\alpha_n = \beta(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, ou seja, $v = (\beta(n) v_1)_{n \geq 1}$.

□

Demonstração do teorema 3.5: Suponhamos que a cadeia de Markov é transiente. Então, pela proposição 1.1, existe $v = (v_1, v_2, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$, com $0 < v_i \leq 1$, tal que $\tilde{S}v = v$. Pelo lema 3.5, segue que $v_n = \beta(n) v_1$, para todo $n \geq 1$.

Assim, temos que $\prod_{i=1}^{+\infty} p_i > 0$, pois, caso contrário, teríamos $\beta(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, ou seja, $v_n = \beta(n)v_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, contradizendo o fato de $|v_i| \leq 1$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$.

Agora, suponhamos que $\prod_{i=1}^{+\infty} p_i > 0$. Vamos construir $v = (v_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$, com $0 < v_i \leq 1$, tal que $\tilde{S}v = v$.

Sejam $v_1 \in \mathbb{C}$, com $0 < |v_1| \leq \prod_{i=2}^{+\infty} p_i^2$ e $v = (v_n)_{n \geq 1} = (\beta(n)v_1)_{n \geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$. Pelo lema 3.5, temos que $\tilde{S}v = v$.

Como $\Pi_r > 0$, para todo $r \in \mathbb{N}$, segue que $\beta(n) > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, ou seja, $|v_n| = \beta(n)|v_1| > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Além disso, temos

$$|v_1| \leq \prod_{i=2}^{+\infty} p_i^2 \leq 1, \quad |v_2| = \beta(2)|v_1| = \Pi_1|v_1| = \frac{1}{p_2}|v_1| \leq \frac{1}{p_2} \prod_{i=2}^{+\infty} p_i^2 = p_2 \prod_{i=3}^{+\infty} p_i^2 \leq 1 \text{ e,}$$

para qualquer $n \geq 3$, tomando $r \in \mathbb{N}$ tal que $F_r \leq n < F_{r+1}$, temos

$$|v_n| = \beta(n)|v_1| = \Pi_r|v_1| \leq \prod_{i=2}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 2} \frac{1}{p_i^2} \prod_{i=2}^{+\infty} p_i^2 = \prod_{i=\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 3}^{+\infty} p_i^2 \leq 1.$$

Logo, temos que $0 < |v_i| \leq 1$, para todo $i \in \mathbb{N}^*$. Portanto, pela proposição 1.1, temos que a cadeia de Markov é transiente. □

Proposição 3.7 *Seja $\mu \in l^\infty(\mathbb{N})$, $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots)$. Então $\mu S = \mu$ se, e somente se, $\mu_n = \beta_n \mu_0$, para todo $n \geq 1$, onde $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = p_2$ e, para cada $n \geq 2$, temos*

- 1) $\beta_{F_n+k} = \beta_{F_n} \beta_k$, para cada $k \in \{1, \dots, F_{n-1} - 1\}$;
- 2) $\beta_{F_n} = p_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1}$.
- 3) $\beta_{F_n-1} = p_2 p_3 \dots p_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}$.

Demonstração: Fazendo $\mu S = \mu$, temos $\mu_j = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu_i S_{i,j} = \sum_{i=0}^{F_n-1} \mu_i S_{i,j}$, para todo $n \geq 1$ e $j \in \{1, \dots, F_n - 1\}$. Assim, por indução, podemos provar que existe $(\beta_j)_{j \geq 1} \in l^\infty(\mathbb{N})$ tal que $\mu_j = \beta_j \mu_0$, para todo $j \geq 1$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned} p_1 \mu_0 + (1 - p_1) \mu_1 &= \mu_1 \implies \beta_1 = 1, \\ p_1 p_2 \mu_1 + (1 - p_1) \mu_2 &= \mu_2 \implies \beta_{F_1} = \beta_2 = p_2 = p_{\lfloor \frac{1+1}{2} \rfloor + 1}, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} p_1 p_2 \mu_2 + (1 - p_1) \mu_3 + p_1 (1 - p_2) \mu_4 = \mu_3 \\ p_1 \mu_3 + (1 - p_1) \mu_4 = \mu_4 \end{cases} \implies \begin{cases} \mu_3 = \mu_2 \\ \mu_4 = \mu_3 \end{cases} \implies \begin{cases} \beta_{F_2} = \beta_3 = p_2 = p_{\lceil \frac{2+1}{2} \rceil + 1} \\ \beta_{F_2+1} = \beta_4 = p_2 = \beta_1 \beta_{F_2} \end{cases}.$$

Ademais, temos $\beta_{F_3-1} = \beta_4 = p_2 = \prod_{i=2}^{\lceil \frac{3}{2} \rceil + 1} p_i$.

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ e $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots) \in l^\infty(\mathbb{N})$. Suponhamos que se $\mu_j = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu_i S_{i,j}$, para todo $j \in \{1, \dots, F_n - 1\}$, então $\mu_j = \beta_j \mu_0$, para todo $j \in \{1, \dots, F_n - 1\}$, onde $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = p_2$ e, para cada $i \in \{2, \dots, n - 1\}$, vale:

- a) $\beta_{F_i+k} = \beta_{F_i} \beta_k$, para cada $k \in \{1, \dots, F_{i-1} - 1\}$;
- b) $\beta_{F_i} = p_{\lceil \frac{i+1}{2} \rceil + 1}$;
- c) $\beta_{F_{i+1}-1} = p_2 p_3 \dots p_{\lceil \frac{i+1}{2} \rceil + 1}$.

Provemos os seguintes itens:

- i) $\beta_{F_n+k} = \beta_k \beta_{F_n}$, para cada $k \in \{1, \dots, F_{n-1} - 1\}$;
- ii) $\beta_{F_n} = p_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil + 1}$;
- iii) $\beta_{F_{n+1}-1} = p_2 p_3 \dots p_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil + 1}$.

Prova de i): Para cada $k \in \{1, \dots, F_{n-1} - 1\}$, temos $\mu_{F_n+k} = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu_i S_{i, F_n+k}$. Como $S_{i, F_n+k} = 0$,

para cada $i \in \{0, \dots, F_n + k - 2\}$, segue que $\mu_{F_n+k} = \sum_{i=F_n+k-1}^{+\infty} \mu_i S_{i, F_n+k}$. Daí, da proposição 3.2, temos que

$$\mu_{F_n+k} = \sum_{i=F_n+k-1}^{+\infty} \mu_i S_{i, F_n+k} = \sum_{i=F_n+k-1}^{+\infty} \mu_i S_{i-F_n, k} = \sum_{i=k-1}^{+\infty} \mu_{i+F_n} S_{i, k} = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu_{i+F_n} S_{i, k},$$

ou seja, temos $\mu'_k = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu'_i S_{i, k}$, para todo $k \in \{1, \dots, F_{n-1} - 1\}$, onde $\mu'_i = \mu_{i+F_n}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Observe que, da hipótese de indução, cada β_k depende somente das probabilidades, para todo $k \in \{1, \dots, F_n - 1\}$. Assim, segue que $\mu'_k = \beta_k \mu'_0$, para todo $k \in \{1, \dots, F_{n-1} - 1\}$. Logo, $\mu_{F_n+k} = \beta_k \mu_{F_n} = \beta_{F_n} \beta_k \mu_0$, para todo $k \in \{1, \dots, F_{n-1} - 1\}$.

Prova de ii): Temos que

$$\mu_{F_n} = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu_i S_{i, F_n} = \sum_{i=F_n-1}^{+\infty} \mu_i S_{i, F_n} = \mu_{F_n-1} S_{F_n-1, F_n} + \mu_{F_n} S_{F_n, F_n} + \sum_{i=F_n+1}^{F_n+F_{n-1}-1} \mu_i S_{i, F_n},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\mu_{F_n} &= \mu_{F_n-1}S_{F_n-1,F_n} + \mu_{F_n}S_{F_n,F_n} + \sum_{i=F_n+1}^{F_n+F_{n-1}-1} \mu_i S_{i-F_n,0} \\ &= \mu_{F_n-1}S_{F_n-1,F_n} + \mu_{F_n}S_{F_n,F_n} + \sum_{i=1}^{F_{n-1}-1} \mu_{F_n+i} S_{i,0}.\end{aligned}$$

Assim, pela parte i), temos que

$$\begin{aligned}\mu_{F_n} &= \mu_{F_n-1}S_{F_n-1,F_n} + \mu_{F_n}S_{F_n,F_n} + \left(\sum_{i=1}^{F_{n-1}-1} \beta_i S_{i,0} \right) \mu_{F_n} \\ &= \mu_{F_n-1}S_{F_n-1,F_n} + \mu_{F_n}S_{F_n,F_n} + \left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_{F_i-1} S_{F_i-1,0} \right) \mu_{F_n},\end{aligned}$$

ou seja, pela proposição 3.1, temos que

$$\begin{aligned}\mu_{F_n} &= p_2 p_3 \dots p_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \mu_0 p_1 p_2 \dots p_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1} + (1 - p_1) \mu_{F_n} + \\ &+ (p_1(1 - p_2) + p_2 p_1(1 - p_2) + p_2 p_1 p_2(1 - p_3) + p_2 p_3 p_1 p_2(1 - p_3) + p_2 p_3 p_1 p_2 p_3(1 - p_4) + \dots + \\ &+ p_2 p_3 \dots p_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} p_1 p_2 \dots p_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(1 - p_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \right)) \mu_{F_n}.\end{aligned}$$

Disso, segue que

$$p_1 \mu_{F_n} = p_2 p_3 \dots p_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \mu_0 p_1 p_2 \dots p_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1} + \left(p_1 - p_2 p_3 \dots p_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} p_1 p_2 \dots p_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} p_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \right) \mu_{F_n},$$

ou seja,

$$p_2 p_3 \dots p_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} \mu_{F_n} = p_2 p_3 \dots p_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1} \mu_0 \implies \mu_{F_n} = p_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1} \mu_0.$$

Prova de iii): Temos que

$$\beta_{F_{n+1}-1} = \beta_{F_n+F_{n-1}-1} = \beta_{F_{n-1}-1} \beta_{F_n} = p_2 p_3 \dots p_{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} p_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1} = p_2 p_3 \dots p_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1}$$

□

Corolário 3.2 Se $\prod_{i=1}^{+\infty} p_i = 0$ e $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = +\infty$, então a cadeia de Markov é recorrente nula.

Demonstração: Como $\prod_{i=1}^{+\infty} p_i = 0$, temos pelo teorema 3.5 que a cadeia de Markov é recorrente.

Seja $\mu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots) \in l^1(\mathbb{N})$ uma medida invariante para S , ou seja, temos que $\mu S = \mu$. Logo, pela proposição 3.7, segue que

$$\|\mu\| = \sum_{i=0}^{+\infty} |\mu_i| \geq \sum_{i=1}^{+\infty} |\mu_{F_i}| = \sum_{i=2}^{+\infty} 2p_i = +\infty.$$

Absurdo, pois $\mu \in l^1(\mathbb{N})$. Portanto, se $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = +\infty$, então S não possui medida de probabilidade invariante. Sendo assim, segue que a cadeia de Markov não pode ser recorrente positiva, ou seja, ela é recorrente nula. □

Definição 3.4 Dados $a_{-1}, a_0 \in \mathbb{C}$, defina a sequência recorrente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por

$$a_n = \frac{1}{r_n} a_{n-1} a_{n-2} \text{ para todo } n \geq 1.$$

Temos que $g_n(x, y) = \left(\frac{1}{r_n} xy - \left(\frac{1}{r_n} - 1 \right), x \right)$, para todo $n \geq 1$.

Sejam $f_n : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ e $h_n : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ aplicações definidas por

$$\begin{aligned} f_n(x, y) &= (xy + c_n, x), \text{ onde } c_n = -\frac{1}{a_n} \left(\frac{1}{r_n} - 1 \right), \text{ para todo } n \geq 1, \\ &\text{e } h_n(x, y) = (a_n x, a_{n-1} y), \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

Com isso, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.8 $h_n \circ f_n = g_n \circ h_{n-1}$, para todo $n \geq 1$, ou seja, $\phi_n := f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1 = h_n^{-1} \circ g_n \circ g_{n-1} \circ \dots \circ g_1 \circ h_0$.

Assim, para estudarmos o conjunto $E = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\psi_n(q_{F_1}(\lambda), q_{F_0}(\lambda)))_{n \geq 2} \text{ é limitada}\} = \psi(\{\lambda \in \mathbb{C} : (\bar{\psi}_n(\lambda, \lambda))_{n \geq 1} \text{ é limitada}\})$, definidos no teorema 3.1, onde $\psi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é definida por $\psi(\lambda) = p_1 \lambda + 1 - p_1$, $\psi_n = g_n \circ g_{n-1} \circ \dots \circ g_2$ e $\bar{\psi}_n = \psi_n \circ g_1$, basta estudarmos a dinâmica de ϕ_n .

Proposição 3.9 Para todo $n \geq 3$, temos

$$a_n = \frac{a_0^{F_{n-3}} a_1^{F_{n-2}}}{p_2^{F_{n-3}} \prod_{i=1}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} p_{i+2}^{F_{n-1-2i}}}.$$

Demonstração: Da definição, temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} a_2 = \frac{1}{p_{2+1-\lfloor \frac{2}{2} \rfloor}} a_1 a_0 = \frac{1}{p_2} a_1 a_0 \\ a_3 = \frac{1}{p_{3+1-\lfloor \frac{3}{2} \rfloor}} a_2 a_1 = \frac{1}{p_3} a_2 a_1 \end{array} \right. \implies a_3 = \frac{a_0 a_1^2}{p_2 p_3} = \frac{a_0^{F_0} a_1^{F_1}}{p_2^{F_0} \prod_{i=1}^1 p_{i+2}^{F_{3-1-2i}}} = \frac{a_0^{F_{3-3}} a_1^{F_{3-2}}}{p_2^{F_{3-3}} \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{3-1}{2} \rfloor} p_{i+2}^{F_{3-1-2i}}},$$

ou seja, temos que a fórmula em questão vale para $n = 3$.

Suponhamos que a mesma valha para todo $3 \leq n \leq l$ e provemos que vale para $n = l + 1$.

Primeiramente, suponhamos $l = 2k + 1$, para algum $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Daí,

$$\begin{aligned} a_{l+1} &= a_{2(k+1)} = \frac{1}{p_{(k+1)+1}} a_{2k+1} a_{2k} = \frac{1}{p_{k+2}} a_l a_{l-1} = \\ &= \frac{1}{p_{k+2}} \left(\frac{a_0^{F_{l-3}} a_1^{F_{l-2}}}{p_2^{F_{l-3}} \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} p_{i+2}^{F_{l-1-2i}}} \right) \left(\frac{a_0^{F_{(l-1)-3}} a_1^{F_{(l-1)-2}}}{p_2^{F_{(l-1)-3}} \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{(l-1)-1}{2} \rfloor} p_{i+2}^{F_{(l-1)-1-2i}}} \right) = \\ &= \frac{1}{p_{k+2}} \frac{a_0^{F_{l-3}+F_{l-4}} a_1^{F_{l-2}+F_{l-3}}}{p_2^{F_{l-3}+F_{l-4}} \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{2k}{2} \rfloor} p_{i+2}^{F_{l-1-2i}} \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{2k-1}{2} \rfloor} p_{i+2}^{F_{(l-1)-1-2i}}} = \frac{1}{p_{k+2}} \frac{a_0^{F_{l-2}} a_1^{F_{l-1}}}{p_2^{F_{l-2}} \prod_{i=1}^k p_{i+2}^{F_{l-1-2i}} \prod_{i=1}^{k-1} p_{i+2}^{F_{(l-1)-1-2i}}} = \\ &= \frac{1}{p_{k+2}} \frac{a_0^{F_{l-2}} a_1^{F_{l-1}}}{p_2^{F_{l-2}} p_{k+2}^{F_0} \prod_{i=1}^{k-1} p_{i+2}^{F_{l-1-2i}+F_{(l-1)-1-2i}}} = \\ &= \frac{a_0^{F_{l-2}} a_1^{F_{l-1}}}{p_2^{F_{l-2}} p_{k+2}^2 \prod_{i=1}^{k-1} p_{i+2}^{F_{(l+1)-1-2i}}} = \frac{a_0^{F_{(l+1)-3}} a_1^{F_{(l+1)-2}}}{p_2^{F_{(l+1)-3}} \prod_{i=1}^k p_{i+2}^{F_{(l+1)-1-2i}}} = \frac{a_0^{F_{(l+1)-3}} a_1^{F_{(l+1)-2}}}{p_2^{F_{(l+1)-3}} \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{(l+1)-1}{2} \rfloor} p_{i+2}^{F_{(l+1)-1-2i}}}. \end{aligned}$$

De modo análogo, provamos que o mesmo vale para $l = 2k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Portanto, concluímos a demonstração da proposição. $\square$

A aplicação ϕ_n nos motivou a estudar o conjunto $\mathcal{K}^+$ definido por

$$\mathcal{K}^+ := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : \phi_n(x, y) \text{ é limitada}\},$$

onde $\phi_n(x, y) = f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1$ e $f_n : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ é definida por $f_n(x, y) = (xy + c_n, x)$, com $c_n \in \mathbb{C}$, para todo $n \geq 1$.

Capítulo 4

Propriedades de $\mathcal{K}^+$ e $K^+ = \mathcal{K}^+ \cap \mathbb{R}^2$

Sejam $(c_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de números complexos, $f_n : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ uma sequência de funções definidas por $f_n(x, y) = (xy + c_n, x)$ e $\mathcal{K}^+$ o conjunto definido por $\mathcal{K}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : \phi_n(x, y) \text{ é limitada}\}$, onde $\phi_n(x, y) = f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1$. Em $\mathbb{C}^2$, usaremos a norma $\|\cdot\|$ definida por $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$, para todo $x, y \in \mathbb{C}$.

Os conjuntos de Julia fibrados foram bastante estudados no caso em que f_n , $n \geq 1$, são polinômios definidos em $\mathbb{C}$. No caso em que f_n , $n \geq 1$, estão definidos em $\mathbb{C}^2$, não existem muitos trabalhos na literatura. Além disso, existem muitos resultados sobre propriedades dinâmicas e topológicas no caso em que f é aplicação de Hénon definida por $f(x, y) = (y, P(y) + c - ax)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, onde P é um polinômio complexo e a, c são números complexos fixados (ver [1], [11]). O caso em que $c_n = c$, para todo $n \geq 1$, foi considerado por S. Bonnot, A. de Carvalho e A. Messaoudi em [2]. Os resultados obtidos valem (como adaptação) para o caso em que $(c_n)_{n \geq 1}$ é limitada.

Sejam $R > 0$, $D_R = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq R\}$ e $V_R = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : \min\{|x|, |y|\} > R\}$.

Proposição 4.1 *Se $(c_i)_{i \geq 1}$ é limitada, então existe $R_0 > 0$ tal que, para todo $R > R_0$, temos $\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{K}^+ = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \phi_n^{-1}(V_R)$, onde $\phi_n^{-1}(V_R) \subset \phi_{n+1}^{-1}(V_R)$, para todo $n \geq 1$, ou seja, $\mathcal{K}^+ = \bigcap_{n=1}^{+\infty} Z_n$, onde $Z_n = \mathbb{C}^2 \setminus \phi_n^{-1}(V_R)$ e $Z_{n+1} \subset Z_n$, para todo $n \geq 1$.*

A proposição 4.1 é representada na figura (4.1), ou seja, um ponto z não pertence a $\mathcal{K}^+$ se, e somente se, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, $\phi_n(z) \in V_R$.

Corolário 4.1 *Se $(c_i)_{i \geq 1}$ é limitada, então as seguintes propriedades são válidas:*

1. $\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{K}^+ = \{z \in \mathbb{C}^2 : \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\phi_n(z)\| = +\infty\}$.
2. $\mathcal{K}^+$ é um subconjunto fechado e ilimitado de $\mathbb{C}^2$.

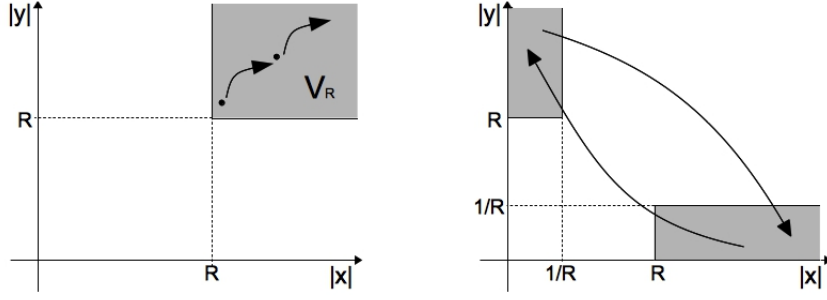


Figura 4.1: As duas filtrações.

Sejam $R > 0$ e $D = D_R$ o conjunto definido por $D_R = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq R\}$.

Proposição 4.2 *Se $(c_i)_{i \geq 1}$ é limitada, então existe $R_0 > 0$ tal que, para todo $R > R_0$, temos $D \cap \mathcal{K}^+ = \bigcap_{n=1}^{+\infty} D \cap \phi_n^{-1}(D)$, onde $D \cap \phi_{n+1}^{-1}(D) \subset \phi_n^{-1}(D)$, para todo $n \geq 1$.*

Para cada $n \geq 1$, defina $\mathcal{K}_n^+$ como sendo o conjunto

$$\mathcal{K}_n^+ = \{z \in \mathbb{C}^2 : f_m \circ f_{m-1} \circ \dots \circ f_{n+1} \circ f_n(z) \text{ é limitada, } \forall m \geq n\}.$$

Proposição 4.3 *Se $(c_i)_{i \geq 1}$ é limitada, então existe $R_0 > 0$ tal que, para todo $R > R_0$, temos $\mathcal{K}^+ = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \phi_n^{-1}(D \cap \mathcal{K}_{n+1}^+)$, onde $\phi_n^{-1}(D \cap \mathcal{K}_{n+1}^+) \subset \phi_{n+1}^{-1}(D \cap \mathcal{K}_{n+2}^+)$, para todo $n \geq 1$.*

A proposição 4.3 nos diz que um ponto z pertence ao conjunto $\mathcal{K}^+$ se, e somente se, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\phi_n(z) \in D$, para todo $n \geq N$.

Proposição 4.4 *Se $0 \leq |c_i| < \frac{1}{4}$, para todo $i \geq 1$, então $\lambda(\mathcal{K}^+) = +\infty$, onde λ é a medida de Lebesgue.*

4.1 Dinâmica de ϕ_n em $\mathbb{R}^2$

Seja $c \in \mathbb{R}$. Nesse capítulo iremos considerar $c_n = c$, para todo $n \geq 1$, ou seja, $f_n = f$, para todo $n \geq 1$, onde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é definida por $f(x, y) = (xy + c, x)$. Assim, teremos $\phi_n = f^n$, para todo $n \geq 1$.

O objetivo desse capítulo é estudar o conjunto de Julia $\mathcal{K}^+ \cap \mathbb{R}^2 = K^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (f^n(x, y))_{n \geq 0} \text{ é limitada}\}$. Esse conjunto foi estudado por S. Bonnot, A. de Carvalho e A. Messaoudi em [2], no caso $0 < c < \frac{1}{4}$. Em particular, ele provaram que se $0 < c < \frac{1}{4}$ então $K^+ = W^s(\alpha) \cup W^s(\theta) \cup W^s(p) \cup W^s(f(p)) \cup W^s(f^2(p))$, onde $p = (-1, -1)$, $\alpha = (a_1, a_1)$ e $\theta = (a_2, a_2)$, $a_1 = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$ e $a_2 = \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$. Além disso, ele provaram que $W^s(\alpha) = \text{int}(K^+)$ e

$\partial K^+ = W^s(\theta) \cup W^s(p) \cup W^s(f(p)) \cup W^s(f^2(p))$. Nesse capítulo, provaremos que o mesmo é verdadeiro quando supomos $-0,94 \leq c < 0$.

Observe que $f(x, y) = (x, y)$ se, e somente se, $xy + c = x$ e $y = x$, ou seja, $x^2 - x + c = 0$. Assim, temos que os únicos pontos fixo de f são $\alpha = (a_1, a_1)$ e $\theta = (a_2, a_2)$. Observe também que os únicos pontos periódicos de período 3 são α , θ , $p = (-1, -1)$, $f(p) = (1 + c, -1)$ e $f^2(p) = (-1, 1 + c)$.

Quando $c = 0$, temos que $\alpha = (0, 0)$, $\theta = (1, 1)$, $p = (-1, -1)$, $f(p) = (1, -1)$ e $f^2(p) = (-1, 1)$. Em [2], S. Bonnot, A. de Carvalho e A. Messaoudi consideraram este caso ($c = 0$) e provaram que $K^+ = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |y| \leq |x|^{-\beta}\}$, onde $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

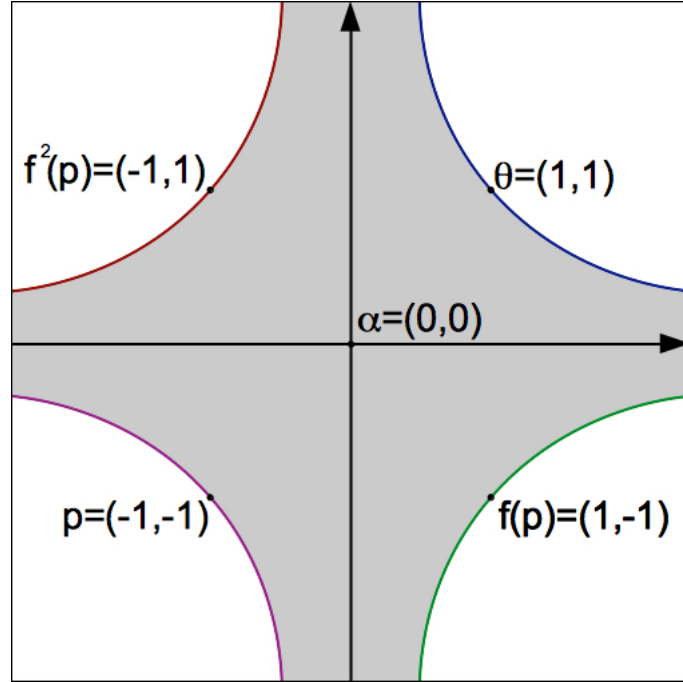


Figura 4.2: Caso $c = 0$.

Na figura 4.2, podemos ver K^+ (quando $c = 0$), onde $W^s(\alpha)$ é a região cinza, ou seja, $W^s(\alpha) = \text{int}(K^+)$, $W^s(\theta)$ é a curva azul, $W^s(p)$ é a curva rosa, $W^s(f(p))$ é a curva verde e $W^s(f^2(p))$ é a curva vermelha.

Nas próximas subseções, iremos nos concentrar na prova do seguinte teorema.

Teorema 4.1 *Suponhamos $\frac{-1-\sqrt{3}}{3} \leq c < 0$, então $K^+ = W^s(\alpha) \cup W^s(\theta) \cup W^s(p) \cup W^s(f(p)) \cup W^s(f^2(p))$, onde $p = (-1, -1)$, $\alpha = (a_1, a_1)$ e $\theta = (a_2, a_2)$. Além disso, $W^s(\alpha) = \text{int}(K^+)$ e $\partial K^+ = W^s(\theta) \cup W^s(p) \cup W^s(f(p)) \cup W^s(f^2(p))$.*

Observação 4.1 *Em geral, não é trivial provar que K^+ é igual a uma união de variedades estáveis.*

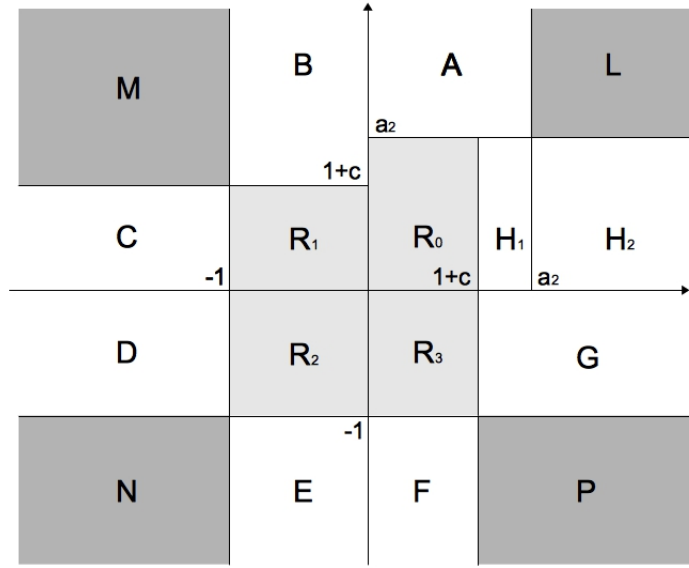


Figura 4.3: Retângulos R_0, R_1, R_2, R_3 e domínios L, M, N, P .

Para provarmos o teorema 4.1, precisaremos das seguintes notações (ver a figura 4.3).

Sejam $L = [a_2, +\infty[\times [a_2, +\infty[$, $M =]-\infty, -1] \times [1+c, +\infty[$, $N =]-\infty, -1] \times]-\infty, -1]$, $P = [1+c, +\infty[\times]-\infty, -1]$, $S' = L \cup M \cup N \cup P$ e $S = S' \setminus \{\theta, p, f(p), f^2(p)\}$.

4.1.1 Dinâmica de f em $L \cup M \cup N \cup P$

Nessa subseção, provaremos que $(L \cup M \cup N \cup P) \subset \mathbb{R}^2 \setminus K^+$.

Proposição 4.5 *As seguintes propriedades são válidas:*

1. $f(L) \subset L$, $f(M) \subset N$, $f(N) \subset P$ e $f(P) \subset M$.
2. Para todo $(x, y) \in S$, temos $\|f^n(x, y)\|_\infty$ diverge para $+\infty$ quando n vai para $+\infty$.
3. $\mathbb{R}^2 \setminus K^+ = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(S)$, onde $f^{-n}(S) \subset f^{-(n-1)}(S)$, para todo inteiro $n \geq 0$.

Demonstração:

1. Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Se $(x, y) \in L$, então $xy + c \geq a_2^2 + c = a_2$. Assim $f(x, y) = (xy + c, x) \in L$.

Se $(x, y) \in M$, então $xy + c \leq -1$. Assim $f(x, y) = (xy + c, x) \in N$.

Se $(x, y) \in N$, então $xy + c \geq 1 + c$. Assim $f(x, y) = (xy + c, x) \in P$.

Se $(x, y) \in P$, então $xy + c \leq -1$. Assim $f(x, y) = (xy + c, x) \in M$.

2. Seja $(x, y) \in S$. Logo, $(x, y) \in (L \setminus \{\theta\}) \cup (N \setminus \{p\}) \cup (P \setminus \{f(p)\}) \cup (M \setminus \{f^2(p)\})$.

Caso 1: $(x, y) \in L \setminus \{\theta\}$, $\theta = (a_2, a_2)$.

Caso 1.1: $\min(x, y) > d_0 a_2$, com $d_0 > 1$.

Afirmção: Para todo inteiro $n \geq 0$, temos $f^{2n}(x, y) = (x_{2n}, y_{2n})$ satisfazendo $\min(x_{2n}, y_{2n}) > d_n a_2$, onde $d_{n+1} = g(d_n)$, para todo $n \geq 0$, e $g(x) = a_2(x^2 - 1) + 1$. Além disso, $(d_n)_n$ é uma sequência crescente.

De fato, observe que

$$d_0 > 1 \implies d_1 = a_2(d_0^2 - 1) + 1 > 1 \implies d_2 = a_2(d_1^2 - 1) + 1 > 1 \implies \dots \implies d_n = a_2(d_{n-1}^2 - 1) + 1 > 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso,

$$d_{n+1} > d_n \Leftrightarrow a_2(d_n^2 - 1) + 1 > d_n \Leftrightarrow a_2 > \frac{d_n - 1}{d_n^2 - 1} = \frac{1}{d_n + 1},$$

o que é verdade, já que $a_2 > 1$, pois $-1 < c < 0$, e $\frac{1}{d_n + 1} < 1$, pois $d_n > 1$. Daí, para $n = 1$, temos $f^2(x, y) = (x_2, y_2) = ((xy + c)x + c, xy + c)$. Mas por hipótese, temos

$$\begin{aligned} y_2 &= xy + c > d_0^2 a_2^2 + c = d_0^2 a_2^2 + a_2 - a_2^2 = a_2^2(d_0^2 - 1) + a_2 = a_2 d_1 \text{ e} \\ x_2 &= (xy + c)x + c > d_1 a_2 d_0 a_2 + c > d_0^2 a_2^2 + c = a_2 d_1. \end{aligned}$$

Portanto, $\min\{x_2, y_2\} > d_1 a_2$. Suponhamos que $\min\{x_{2n}, y_{2n}\} > d_n a_2$, para $n = 0, 1, \dots, k$. Daí, $f^{2k+2}(x, y) = (x_{2k+2}, y_{2k+2}) = f^2(x_{2k}, y_{2k}) = ((x_{2k}y_{2k} + c)x_{2k} + c, x_{2k}y_{2k} + c)$. Mas por hipótese, temos

$$\begin{aligned} y_{2k+2} &= x_{2k}y_{2k} + c > d_k^2 a_2^2 + c = d_k^2 a_2^2 + a_2 - a_2^2 = a_2^2(d_k^2 - 1) + a_2 = a_2 d_{k+1} \text{ e} \\ x_{2k+2} &= (x_{2k}y_{2k} + c)x_{2k} + c > d_{k+1} a_2 d_k a_2 + c > d_k^2 a_2^2 + c = a_2 d_{k+1}. \end{aligned}$$

Portanto, por indução, provamos que a afirmação é verdadeira.

Pela afirmação, $(d_n)_n$ é crescente. Se $(d_n)_n$ for limitada então $(d_n)_n$ é convergente. Seja l o limite de d_n quando n tende a $+\infty$. Daí, temos

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= g(d_n) = a_2(d_n^2 - 1) + 1 \implies l = a_2(l^2 - 1) + 1 \implies \\ a_2 l^2 - l + 1 - a_2 &= 0 \implies l = 1 \text{ ou } l = \frac{1}{a_2} - 1 < 1. \end{aligned}$$

Como $d_n > d_0 > 1$, para todo $n \geq 1$, chegamos em uma contradição. Logo d_n não pode ser limitada. Em outras palavras, temos que $x_{2n+1} = y_{2n+2} > d_{n+1} a_2$ e $y_{2n+1} = x_{2n} > d_n a_2$, onde d_n diverge para $+\infty$ quando n tende a $+\infty$. Logo $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$.

Caso 1.2: $\min\{x, y\} = a_2$.

Como $\max\{x, y\} > a_2$, temos que existe $d_1 > 1$ tal que $\min\{x_2, y_2\} > d_1 a_2$ e assim o resultado segue do caso 1.1.

Caso 2: $(x, y) \in N \setminus \{p\}$, $p = (-1, -1)$.

Caso 2.1: $\max\{x, y\} < -1$.

Afirmção: Para todo $n \geq 0$, $f^{3n+3}(x, y) = (x_{3n+3}, y_{3n+3})$ com $x_{3n+3} < x_{3n} < -1$ e $y_{3n+3} < y_{3n} < -1$.

De fato, temos

$$y_{3n+3} = (x_{3n}y_{3n} + c)x_{3n} + c \text{ e } x_{3n+3} = y_{3n+3}(x_{3n}y_{3n} + c) + c, \text{ para todo } n \geq 0. \quad (4.1)$$

Se $\max\{x_{3n}, y_{3n}\} < -1$, então $x_{3n}y_{3n} + c > -y_{3n} + c > 0$. Daí,

$$\left. \begin{array}{l} x_{3n}y_{3n} + c > 0 \\ x_{3n} < -1 \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} x_{3n}(x_{3n}y_{3n} + c) < -(x_{3n}y_{3n} + c) < y_{3n} - c \\ \implies y_{3n+3} = x_{3n}(x_{3n}y_{3n} + c) + c < y_{3n}. \end{array}$$

Por outro lado,

$$\left. \begin{array}{l} x_{3n}y_{3n} + c > -x_{3n} + c > 0 \\ y_{3n} < -1 \end{array} \right\} \implies y_{3n}(x_{3n}y_{3n} + c) < -(x_{3n}y_{3n} + c) < x_{3n} - c,$$

ou seja, temos $x_{3n+3} = y_{3n+3}(x_{3n}y_{3n} + c) + c < y_{3n}(x_{3n}y_{3n} + c) + c < x_{3n}$, completando a prova da afirmação.

Se $(f^n(x, y))_{n \geq 0}$ é limitada, então as sequências $(x_{3n})_{n \geq 0}$ e $(y_{3n})_{n \geq 0}$ são convergentes. Sejam

$$l := \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{3n} < -1 \quad \text{e} \quad l' := \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{3n} < -1.$$

Pela relação (4.1), temos

$$l' = (l'l + c)l + c \text{ e } l = l'(ll' + c) + c \implies l' - l = (l'l + c)(l - l') \implies (l - l')(l'l + c + 1) = 0.$$

Como $l'l + c + 1 > 0$, segue que $l = l'$. Logo, temos $l^3 + (c - 1)l + c = 0$, ou seja, $l \in \{-1, a_1, a_2\}$.

Absurdo, pois $l < -1$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{3n}(x, y) = (-\infty, -\infty) &\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{3n+1}(x, y) = (+\infty, -\infty) \implies \\ &\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{3n+2}(x, y) = (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

Caso 2.2: $\max\{x, y\} = -1$ e $\min\{x, y\} < -1$.

Como antes, temos $x_3 < x \leq -1$ e $y_3 < y \leq -1$ e a prova segue do caso 2.1.

Os casos em que $(x, y) \in P \setminus \{f(p)\}$ e $(x, y) \in M \setminus \{f^2(p)\}$ seguem do ítem 1 da proposição e do caso 2.

3. Temos que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(S) \subset \mathbb{R}^2 \setminus K^+$.

Da proposição 4.1, sabemos que existe $R > 0$ suficientemente grande tal que $\mathbb{C}^2 \setminus K^+ = \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(V_R)$, onde $V_R = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : \min\{|x|, |y|\} > R\}$, e $f^{-n}(V_R) \subset f^{-n-1}(V_R)$, para todo $n \geq 0$. Daí, se escolhermos $R > a_2$ e tomarmos $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus K^+$ então

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(V_R) \cap \mathbb{R}^2; \\ (V_R \cap \mathbb{R}^2) \subset S; \end{array} \right\} &\implies \left\{ \begin{array}{l} (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ e existe } j \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^j(x, y) \in V_R; \\ (V_R \cap \mathbb{R}^2) \subset S; \end{array} \right. \\ &\implies \left\{ \begin{array}{l} f^n(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ e existe } j \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^j(x, y) \in V_R; \\ (V_R \cap \mathbb{R}^2) \subset S; \end{array} \right. \\ &\implies \left\{ \begin{array}{l} \text{existe } j \in \mathbb{N} \text{ tal que } (x, y) \in f^{-j}(V_R \cap \mathbb{R}^2); \\ (V_R \cap \mathbb{R}^2) \subset S; \end{array} \right. \\ &\implies \text{existe } j \in \mathbb{N} \text{ tal que } (x, y) \in f^{-j}(S) \implies (x, y) \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(S). \end{aligned}$$

□

4.1.2 Dinâmica de f em $R_0 \cup R_1 \cup R_2 \cup R_3$

Nessa subseção, provaremos que $(R_0 \cup R_1 \cup R_2 \cup R_3) \subset W^s(\alpha) \subset K^+$.

Sejam $R_0 = [0, 1 + c] \times [0, a_2]$, $R_1 = [-1, 0] \times [0, 1 + c]$, $R_2 = [-1, 0] \times [-1, 0]$, $R_3 = [0, 1 + c] \times [-1, 0]$ e $\mathcal{D} = R_0 \cup R_1 \cup R_2 \cup R_3$ (ver a figura 4.3).

Lema 4.1 *Os seguintes resultados são válidos:*

1. $f(R_0) \subset R_0 \cup R_1$.
2. $f(R_1) \subset R_2$.
3. $f(R_2) \subset R_2 \cup R_3$.
4. $f(R_3) \subset R_1$.

Demonstração: 1) $f(R_0) \subset [c, a_2(1+c) + c] \times [0, 1+c]$. Mas

$$\begin{aligned} a_2(1+c) + c \leq 1+c &\Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}(1+c) \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-4c} \leq \frac{1-c}{1+c} \Leftrightarrow \\ c^2 - 2c + 1 + (c^2 + 2c + 1)(4c - 1) &\geq 0 \Leftrightarrow 4c^3 + 8c^2 \geq 0 \Leftrightarrow c \geq -2. \end{aligned}$$

Assim, como $-1 < c < 0$, temos $f(R_0) \subset [c, 1+c] \times [0, 1+c] \subset R_0 \cup R_1$.

2) $f(R_1) \subset [-1, c] \times [-1, 0] \subset R_2$.

3) $f(R_2) \subset [c, 1+c] \times [-1, 0] \subset R_2 \cup R_3$.

4) $f(R_3) \subset [-1, c] \times [0, 1+c] \subset R_1$.

□

Corolário 4.2 *Sejam $R' = R_1 \cup R_2 \cup R_3$. Então $f(R') \subset R'$ e $\mathcal{D} = R' \cup R_0 \subset K^+$.*

Proposição 4.6 *Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(R_0) \subset R'$, ou seja, $f^n(R' \cup R_0) \subset R'$ para todo $n \geq N$.*

Demonstração: Pelo lema 4.1, temos que $f^n(R_0) \setminus R' = f^n(R_0) \cap R_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Observe que

$$\begin{aligned} f(R_0) \setminus R' &\subset [0, 1+c] \times [0, 1+c], \\ f^2(R_0) \setminus R' &\subset [0, (1+c)^2 + c] \times [0, 1+c], \\ f^3(R_0) \setminus R' &\subset [0, (1+c)^3 + c(1+c) + c] \times [0, (1+c)^2 + c] \subset [0, (1+c)^3 + c] \times [0, (1+c)^2], \\ f^4(R_0) \setminus R' &\subset [0, (1+c)^5 + c(1+c)^2 + c] \times [0, (1+c)^3 + c] \subset [0, (1+c)^5 + c] \times [0, (1+c)^3]. \end{aligned}$$

Continuando dessa maneira, temos que

$$f^n(R_0) \setminus R' \subset [0, (1+c)^{F_{n-1}} + c] \times [0, (1+c)^{F_{n-2}}], \text{ para todo } n \geq 4.$$

Mas como $0 < 1+c < 1$, segue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(1+c)^{F_{N-1}} + c < 0$, ou seja, temos $f^N(R_0) \setminus R' = \emptyset$, implicando que $f^N(R_0) \subset R'$.

□

Seja $Y = [c, 0] \times [c, 0] \subset R_2 = [-1, 0] \times [-1, 0]$.

Proposição 4.7 $f(Y) \subset Y$.

Demonstração: $f(Y) \subset [c, c^2 + c] \times [c, 0] \subset Y$.

□

Agora, iremos nos concentrar em provar que, para cada $z \in R_0 \cup R_1 \cup R_2 \cup R_3$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(z) \in Y$, para todo $n \geq n_0$.

Proposição 4.8 *Seja $z \in R_2$. Se $f(z) \in R_2$, então $f^n(z) \in Y$, para todo $n \geq 2$.*

Demonstração: Seja $z \in R_2$ tal que $f(z) \in R_2$. Então

$$f(z) \in f(R_2) \cap R_2 = [c, 1 + c] \times [-1, 0] \cap R_2 = [c, 0] \times [-1, 0].$$

Daí, $f^2(z) \in f([c, 0] \times [-1, 0]) \subset [c, 0] \times [c, 0] = Y$ e pela proposição 4.7 segue que $f^n(z) \in Y$, para todo $n \geq 2$.

□

Proposição 4.9 *Se $z \in ([-1, c] \times [c, 0]) \cup ([c, 0] \times [-1, c]) \subset R_2$, então $f^n(z) \in Y$, para todo $n \geq 2$.*

Demonstração: Temos que $f^2([-1, c] \times [c, 0]) \subset f([c, 0] \times [-1, c]) \subset [c, 0] \times [c, 0] = Y$.

Portanto, pela proposição 4.7, temos que

$$f^n([-1, c] \times [c, 0]) \subset f^{n-1}([c, 0] \times [-1, c]) \subset f^{n-2}([c, 0] \times [c, 0]) = f^{n-2}(Y) \subset Y,$$

para todo $n \geq 2$.

□

Proposição 4.10 *Se $z \in [-1, c] \times [-1, c] \setminus \{p\} \subset R_2$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(z) \in Y$.*

Demonstração: Seja $z = (x, y) \in [-1, c] \times [-1, c] \setminus \{p\}$.

Caso 1: $\min\{x, y\} > -1$.

Suponhamos que não existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(z) \in Y$. Assim, pela proposição 4.8 e pelo lema 4.1, temos que

$$f^{3n}(x, y) \in R_2, f^{3n+1}(x, y) \in R_3 \text{ e } f^{3n+2}(x, y) \in R_1, \text{ para todo inteiro } n \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

Seja $(x_n, y_n) = f^n(x, y)$. Observe que, se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(x_{3n}, y_{3n}) \in [-\sqrt{-c}, c] \times [-\sqrt{-c}, c]$, então $(x_{3n+1}, y_{3n+1}) \in [c^2 + c, 0] \times [-\sqrt{-c}, c] \subset [c, 0] \times [-1, c]$, do que segue pela proposição 4.9 que $(x_{3n+k}, y_{3n+k}) \in Y$, para todo $k \geq 3$.

Portanto, devemos supor que

$$\min\{x_{3n}, y_{3n}\} < -\sqrt{-c}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (4.3)$$

Seja $z_0 = \min\{x, y\}$. Logo, pela relação (4.3), temos $z_0 < -\sqrt{-c}$, o que implica que $z_0^2 + c > 0$. Daí, temos que $(x, y) \in [z_0, c] \times [z_0, c] \implies (x_1, y_1) \in [c^2 + c, z_0^2 + c] \times [z_0, c]$. Assim, da relação (4.2), segue que

$$(x_1, y_1) \in [0, z_0^2 + c] \times [z_0, c] \implies \begin{cases} (x_2, y_2) \in [z_0(z_0^2 + c) + c, c] \times [0, z_0^2 + c]; \\ (x_3, y_3) \in [(z_0(z_0^2 + c) + c)(z_0^2 + c) + c, c] \times [z_0(z_0^2 + c) + c, c]. \end{cases}$$

Observe que

$$z_0(z_0^2 + c) + c \leq (z_0(z_0^2 + c) + c)(z_0^2 + c) + c \Leftrightarrow z_0 \leq z_0(z_0^2 + c) + c \Leftrightarrow z_0^3 + (c - 1)z_0 + c \geq 0,$$

onde a primeira equivalência acontece pois $z_0^2 + c > 0$.

Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x^3 + (c - 1)x + c$. Não é difícil verificar que $h(x) \geq 0$ para $-1 < x < -\sqrt{-c}$. Logo temos $h(z_0) \geq 0$, ou seja, $(x_3, y_3) \in [z_0(z_0^2 + c) + c, c] \times [z_0(z_0^2 + c) + c, c]$.

Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x(x^2 + c) + c$ e defina $z_{n+1} = g(z_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Observe que $g(z_0) \geq z_0$ se, e somente se, $h(z_0) \geq 0$. Portanto, temos $z_1 = g(z_0) \geq z_0$ e, pela definição de g , $(x_3, y_3) \in [z_1, c] \times [z_1, c]$.

Pela relação (4.3), temos $z_1 < -\sqrt{-c}$, o que implica que $z_1^2 + c > 0$. Assim, continuando com o mesmo raciocínio, temos $(x_{3k}, y_{3k}) \in [z_k, c] \times [z_k, c]$, com $-1 < z_0 < z_1 < \dots < z_k < -\sqrt{-c}$ e $\min\{x_{3k}, y_{3k}\} < -\sqrt{-c}$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sendo assim, $(z_n)_n$ é uma sequência crescente e limitada. Portanto, $(z_n)_n$ admite limite l . Logo, temos

$$g(l) = l \implies l(l^2 + c) + c = l \implies l^3 + (c - 1)l + c = 0 \implies l \in \{-1, a_1, a_2\}.$$

Absurdo, pois por construção temos $-1 < z_0 < z_1 < \dots < z_k < \dots < l \leq -\sqrt{-c} < c < a_1 < a_2$. Assim, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(z) \in Y$.

Caso 2: $x = -1$ e $-1 < y < c$.

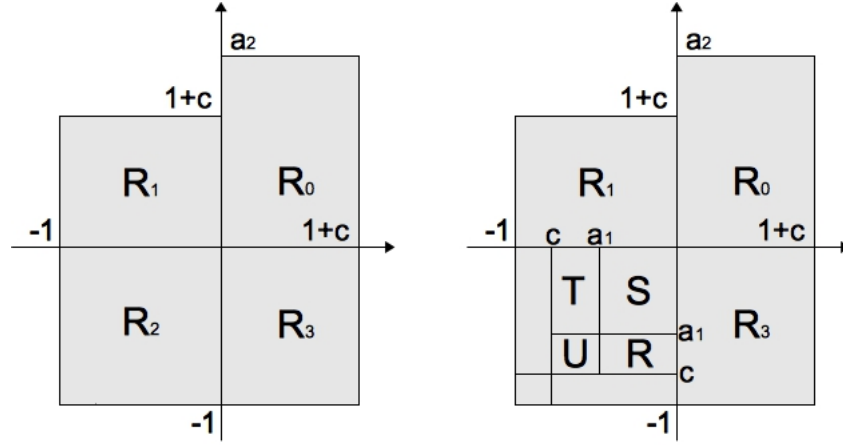


Figura 4.4: Retângulos R , S , T , U .

Temos que $f(x, y) = (-y + c, -1) \in R_3$, $f^2(x, y) = (y, -y + c) \in R_1$ e $f^3(x, y) = (-y^2 + cy + c, y) \in R_2$. Seja $(x_0, y_0) = f^3(x, y)$. Daí, temos $(x_0, y_0) \in R_2$, com $x_0 > -1$ e $y_0 > -1$, caindo no caso 1.

Caso 3: $-1 < x < c$ e $y = -1$.

Temos que $f(x, y) = (-x + c, x) \in R_3$, $f^2(x, y) = (-x^2 + cx + c, -x + c) \in R_1$ e $f^3(x, y) = ((-x^2 + cx + c)(-x + c) + c, -x^2 + cx + c) \in R_2$. Seja $(x_0, y_0) = f^3(x, y)$. Daí, temos $(x_0, y_0) \in R_2$, com $x_0 > -1$ e $y_0 > -1$, caindo no caso 1.

□

Denote por (ver a figura 4.4) $R = [a_1, 0] \times [c, a_1]$, $S = [a_1, 0] \times [a_1, 0]$, $T = [c, a_1] \times [a_1, 0]$ e $U = [c, a_1] \times [c, a_1]$. Então $Y = R \cup S \cup T \cup U$. Provaremos que, se $z \in Y$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = \alpha = (a_1, a_1)$.

Lema 4.2 *Os seguintes resultados são válidos:*

1. $f(R) \subset S \cup T$.
2. $f(S) \subset T$.
3. $f(T) \subset U \cup R$.
4. $f(U) \subset R$.

Demonstração: 1) $f(R) \subset [c, ca_1 + c] \times [a_1, 0]$.

Mas $ca_1 + c < 0$ (pois $ca_1 > 0$) e $ca_1 + c \leq c^2 + c < 0$. Logo $f(R) \subset S \cup T$.

2) $f(S) \subset [c, a_1] \times [a_1, 0] = T$.

3) $f(T) \subset ([c, ca_1 + c] \times [c, a_1]) \subset ([c, 0] \times [c, a_1]) = U \cup R$.

4) $f(U) \subset ([a_1, c^2 + c] \times [c, a_1]) \subset ([a_1, 0] \times [c, a_1]) = R$.

□

Lema 4.3 Se $-0,94 \leq c < 0$, então $|c||a_1| + |a_1|^3 + |c|^3|a_1|^3 < |c|$.

Demonstração: Seja $c \in \mathbb{R}$, $-1 < c < 0$. Queremos mostrar que $ca_1 - a_1^3 + c^3a_1^3 + c \leq 0$, ou seja, $ca_1 + (c^3 - 1)a_1^3 + c \leq 0$.

Observe que $a_1^3 = a_1a_1^2 = a_1(a_1 - c) = a_1^2 - ca_1 = a_1 - c - ca_1 = (1 - c)a_1 - c$. Daí,

$$\begin{aligned} ca_1 + (c^3 - 1)a_1^3 + c \leq 0 &\iff ca_1 + (c^3 - 1)((1 - c)a_1 - c) + c \leq 0 \\ \iff \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2} = a_1 &\geq \frac{c^4 - 2c}{-c^4 + c^3 + 2c - 1} \iff -\sqrt{1 - 4c} \geq \frac{3c^4 - c^3 - 6c + 1}{-c^4 + c^3 + 2c - 1} \\ \iff 1 - 4c &\leq \frac{9c^8 - 6c^7 + c^6 - 36c^5 + 18c^4 - 2c^3 + 36c^2 - 12c + 1}{c^8 - 2c^7 + c^6 - 4c^5 + 6c^4 - 2c^3 + 4c^2 - 4c + 1} \\ \iff c^8 - 4c^5 - 2c^4 + c^3 + 4c^2 + 4c - 1 &\leq 0. \end{aligned}$$

Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x^8 - 4x^5 - 2x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x - 1$. Daí, temos que $h'(x) = 8x^7 - 20x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 8x + 4$ e $h''(x) = 56x^6 - 80x^3 - 24x^2 + 6x + 8$.

Observe que, para $-1 < x < 0$, temos $h''(x) > -80x^3 - 24x^2$ e $-80x^3 - 24x^2 \geq 0$ se, e somente se, $x \leq -0,3$. Além disso, se $-0,3 < x < 0$, então $h''(x) > -24(0,3)^2 - 6 \cdot 0,3 + 8 = 4,04 > 0$.

Com isso, segue que o gráfico de h no intervalo $] -1, 0[$ apresenta concavidade voltada para cima. Além disso, temos que $h(-0,95) = 0,082156681 > 0$, $h(-0,94) = -0,072496892 < 0$ e $h(0) = -1$. Portanto, $h(c) < 0$, para todo $-0,94 \leq c < 0$, ou seja, $|c||a_1| + |a_1|^3 + |c|^3|a_1|^3 < |c|$.

□

Para demonstrarmos o próximo teorema, para cada $X \in \{R, S, T, U\}$, denotaremos por $X(a, b) = \{(x, y) \in X : |x - a_1| \leq a \text{ e } |y - a_1| \leq b\}$. Sendo assim, temos $R = R(|a_1|, |a_1|^2)$, $S = S(|a_1|, |a_1|)$, $T = T(|a_1|^2, |a_1|)$ e $U = U(|a_1|^2, |a_1|^2)$.

Teorema 4.2 Suponhamos $-0,94 \leq c < 0$. Se $z \in Y = [c, 0] \times [c, 0]$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(z) = (a_1, a_1)$.

Demonstração: Observe que $|c| = |a_1| + |a_1|^2$ e também que $xy - a_1^2 = xy + c - a_1$.

Seja $z = (x_0, y_0) \in Y$. Pelo lema 4.2, basta tomar $z \in R$.

1.1) Se $(x, y) \in R(|a_1|, |a_1|^2)$, $R = [a_1, 0] \times [c, a_1]$, então

$$\begin{cases} a_1 \leq x \leq a_1 + |a_1| \\ a_1 - |a_1|^2 \leq y \leq a_1 \end{cases} \implies a_1^2 - |a_1|^2 \leq xy \leq a_1^2 + |a_1|^3 \implies -|a_1|^2 \leq xy - a_1^2 \leq |a_1|^3,$$

ou seja, $f(R(|a_1|, |a_1|^2)) \subset S(|a_1|^3, |a_1|) \cup T(|a_1|^2, |a_1|)$.

1.2) Se $(x, y) \in S(|a_1|^3, |a_1|)$, $S = [a_1, 0] \times [a_1, 0]$, então

$$\begin{cases} a_1 \leq x \leq a_1 + |a_1|^3 \\ a_1 \leq y \leq a_1 + |a_1| \end{cases} \implies |a_1|^4 - |a_1|^2 - |a_1|^4 + a_1^2 \leq xy \leq a_1^2 \implies |xy - a_1^2| \leq |a_1|^2,$$

ou seja, $f(S(|a_1|^3, |a_1|)) \subset T(|a_1|^2, |a_1|^3)$.

1.3) Se $(x, y) \in T(|a_1|^2, |a_1|^3)$, $T = [c, a_1] \times [a_1, 0]$, então

$$\begin{cases} a_1 - |a_1|^2 \leq x \leq a_1 \\ a_1 \leq y \leq a_1 + |a_1|^3 \end{cases} \implies a_1^2 - |a_1|^4 \leq xy \leq a_1^2 + |a_1|^3 \implies -|a_1|^4 \leq xy - a_1^2 \leq |a_1|^3,$$

ou seja, $f(T(|a_1|^2, |a_1|^3)) \subset U(|a_1|^4, |a_1|^2) \cup R(|a_1|^3, |a_1|^2)$.

1.4) Se $(x, y) \in U(|a_1|^4, |a_1|^2)$, $U = [c, a_1] \times [c, a_1]$, então

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_1 - |a_1|^4 \leq x \leq a_1 \\ a_1 - |a_1|^2 \leq y \leq a_1 \end{cases} &\implies a_1^2 \leq xy \leq a_1^2 + |a_1|^3 + |a_1|^5 + |a_1|^6 \\ &\implies xy - a_1^2 \leq |a_1|^2(|a_1| + |a_1|^3 + |a_1|^4). \end{aligned}$$

Mas, temos que $|a_1| + |a_1|^3 + |a_1|^4 \leq |c| = |a_1| + |a_1|^2$ se, e somente se, $|a_1| + |a_1|^2 \leq 1$. Logo, $xy - a_1^2 \leq |c||a_1|^2$, ou seja, $f(U(|a_1|^4, |a_1|^2)) \subset R(|c||a_1|^2, |a_1|^4)$.

1.5) Se $(x, y) \in T(|a_1|^2, |a_1|)$, $T = [c, a_1] \times [a_1, 0]$, então

$$\begin{cases} a_1 - |a_1|^2 \leq x \leq a_1 \\ a_1 \leq y \leq a_1 + |a_1| \end{cases} \implies a_1^2 - |a_1|^2 \leq xy \leq a_1^2 + |a_1|^3 \implies -|a_1|^2 \leq xy - a_1^2 \leq |a_1|^3,$$

ou seja, $f(T(|a_1|^2, |a_1|)) \subset U(|a_1|^2, |a_1|^2) \cup R(|a_1|^3, |a_1|^2)$.

1.6) Se $(x, y) \in U(|a_1|^2, |a_1|^2)$, $U = [c, a_1] \times [c, a_1]$, então

$$\begin{cases} a_1 - |a_1|^2 \leq x \leq a_1 \\ a_1 - |a_1|^2 \leq y \leq a_1 \end{cases} \implies a_1^2 \leq xy \leq a_1^2 + 2|a_1|^3 + |a_1|^4 \implies xy - a_1^2 \leq |a_1|(2|a_1|^2 + |a_1|^3).$$

Mas, temos que $2|a_1|^2 + |a_1|^3 \leq |c| = |a_1| + |a_1|^2$ se, e somente se, $|a_1| + |a_1|^2 \leq 1$. Logo, $xy - a_1^2 \leq |c||a_1|$, ou seja, $f(U(|a_1|^2, |a_1|^2)) \subset R(|c||a_1|, |a_1|^2)$.

Com isso, temos o primeiro diagrama da dinâmica de f do caso 1.1 ao caso 1.6:

$$\begin{array}{ccccccc}
 R(|a_1|, |a_1|^2) & \xrightarrow{f} & S(|a_1|^3, |a_1|) & \xrightarrow{f} & T(|a_1|^2, |a_1|^3) & \xrightarrow{f} & U(|a_1|^4, |a_1|^2) \xrightarrow{f} R(|c||a_1|^2, |a_1|^4) \\
 & & & & & & \downarrow f \\
 & & & & & & R(|a_1|^3, |a_1|^2) \\
 & \searrow f & & & & & \\
 & & T(|a_1|^2, |a_1|) & \xrightarrow{f} & U(|a_1|^2, |a_1|^2) & \xrightarrow{f} & R(|c||a_1|, |a_1|^2) \\
 & & & & & & \downarrow f \\
 & & & & & & R(|a_1|^3, |a_1|^2)
 \end{array}$$

Seja $n_1 = \min\{n \in \mathbb{N} : n > 0 \text{ e } f^n(x_0, y_0) \in R\}$. Assim, temos que $f^{n_1}(x_0, y_0) \in R(|c||a_1|, |a_1|^2)$.

2.1) Se $(x, y) \in R(|c||a_1|, |a_1|^2)$, $R = [a_1, 0] \times [c, a_1]$, então

$$\begin{cases} a_1 \leq x \leq a_1 + |c||a_1| \\ a_1 - |a_1|^2 \leq y \leq a_1 \end{cases} \implies a_1^2 - |c||a_1|^2 \leq xy \leq a_1^2 + |a_1|^3 \implies -|c||a_1|^2 \leq xy - a_1^2 \leq |a_1|^3,$$

ou seja, $f(R(|c||a_1|, |a_1|^2)) \subset S(|a_1|^3, |c||a_1|) \cup T(|c||a_1|^2, |c||a_1|)$.

2.2) Se $(x, y) \in S(|a_1|^3, |c||a_1|)$, $S = [a_1, 0] \times [a_1, 0]$, então

$$\begin{cases} a_1 \leq x \leq a_1 + |a_1|^3 \\ a_1 \leq y \leq a_1 + \epsilon|a_1| \end{cases} \implies \epsilon|a_1|^4 - \epsilon|a_1|^2 - |a_1|^4 + a_1^2 \leq xy \leq a_1^2 \\
 \implies |xy - a_1^2| \leq \epsilon|a_1|^2 + |a_1|^4 - \epsilon|a_1|^4.$$

Como $|a_1| \leq |a_1| + |a_1|^2 = \epsilon$, temos que $|x - a_1^2| \leq \epsilon|a_1|(|a_1| + |a_1|^2 - |a_1|^3) \leq \epsilon^2|a_1|$ ou seja, $f(S(|a_1|^3, \epsilon|a_1|)) \subset T(\epsilon^2|a_1|, |a_1|^3)$.

2.3) Se $(x, y) \in T(|c|^2|a_1|, |a_1|^3)$, $T = [c, a_1] \times [a_1, 0]$, então

$$\begin{cases} a_1 - |c|^2|a_1| \leq x \leq a_1 \\ a_1 \leq y \leq a_1 + |a_1|^3 \end{cases} \implies a_1^2 - |a_1|^4 \leq xy \leq a_1^2 + |c|^2|a_1|^2 \implies -|a_1|^4 \leq xy - a_1^2 \leq |c|^2|a_1|^2,$$

ou seja, $f(T(|c|^2|a_1|, |a_1|^3)) \subset U(|a_1|^4, |c|^2|a_1|) \cup R(|c|^2|a_1|^2, |c|^2|a_1|)$.

2.4) Se $(x, y) \in U(|a_1|^4, |c|^2|a_1|)$, $U = [c, a_1] \times [c, a_1]$, então

$$\begin{cases} a_1 - |a_1|^4 \leq x \leq a_1 \\ a_1 - |c|^2|a_1| \leq y \leq a_1 \end{cases} \implies a_1^2 \leq xy \leq a_1^2 + |c|^2|a_1|^2 + |a_1|^5 + |c|^2|a_1|^5.$$

Como $|a_1| < |c| < 1$, então $xy - a_1^2 \leq |c|^2|a_1|^2 + |c||a_1|^4 + |c|^2|a_1|^5 \leq |c||a_1|(|a_1| + |a_1|^3 + |a_1|^4) \leq |c|^2|a_1|$. Assim, temos $f(U(|a_1|^4, |c|^2|a_1|)) \subset R(|c|^2|a_1|, |a_1|^4)$.

2.5) Se $(x, y) \in T(|c||a_1|^2, |c||a_1|)$, $T = [c, a_1] \times [a_1, 0]$, então

$$\begin{cases} a_1 - |c||a_1|^2 \leq x \leq a_1 \\ a_1 \leq y \leq a_1 + |c||a_1| \end{cases} \implies a_1^2 - |c||a_1|^2 \leq xy \leq a_1^2 + |c||a_1|^3 \implies -|c||a_1|^2 \leq xy - a_1^2 \leq |c||a_1|^3,$$

ou seja, $f(T(|c||a_1|^2, |c||a_1|)) \subset U(|c||a_1|^2, |c||a_1|^2) \cup R(|c||a_1|^3, |c||a_1|^2)$.

2.6) Se $(x, y) \in U(|c||a_1|^2, |c||a_1|^2)$, $U = [c, a_1] \times [c, a_1]$, então

$$\begin{cases} a_1 - |c||a_1|^2 \leq x \leq a_1 \\ a_1 - |c||a_1|^2 \leq y \leq a_1 \end{cases} \implies a_1^2 \leq xy \leq a_1^2 + 2|c||a_1|^3 + |c|^2|a_1|^4 \\ \implies xy - a_1^2 \leq |c||a_1|(2|a_1|^2 + |c||a_1|^3).$$

Logo, $xy - a_1^2 \leq |c|^2|a_1|$, ou seja, $f(U(|c||a_1|^2, |c||a_1|^2)) \subset R(|c|^2|a_1|, |c||a_1|^2)$.

Com isso, temos o segundo diagrama da dinâmica de f do caso 2.1 ao caso 2.6:

$$\begin{array}{ccccccc} R(|c||a_1|, |a_1|^2) & \xrightarrow{f} & S(|a_1|^3, |c||a_1|) & \xrightarrow{f} & T(|c|^2|a_1|, |a_1|^3) & \xrightarrow{f} & U(|a_1|^4, |c|^2|a_1|) & \xrightarrow{f} & R(|c|^2|a_1|, |a_1|^4) \\ & & & & & & \searrow f & & \\ & & & & & & & & R(|c|^2|a_1|^2, |c|^2|a_1|) \\ & \searrow f & & & & & & & \\ & & T(|c||a_1|^2, |c||a_1|) & \xrightarrow{f} & U(|c||a_1|^2, |c||a_1|^2) & \xrightarrow{f} & R(|c|^2|a_1|, |c||a_1|^2) \\ & & & & \searrow f & & \\ & & & & & & R(|c||a_1|^3, |c||a_1|^2) \end{array}$$

Seja $n_2 = \min\{n \in \mathbb{N} : n > n_1 \text{ e } f^n(x_0, y_0) \in R\}$. Assim, temos que

$$f^{n_2}(x_0, y_0) \in R(|c|^2|a_1|, |c|^2|a_1|).$$

Agora, para $i = 3, \dots, k+1$, seja $n_i = \min\{n \in \mathbb{N} : n > n_{i-1} \text{ e } f^n(x_0, y_0) \in R\}$. Suponha que para $i = 3, \dots, k$, tenhamos $f^{n_i}(x_0, y_0) \in R(|c|^i|a_1|, |c|^i|a_1|)$ e provemos que $f^{n_{k+1}}(x_0, y_0) \in R(|c|^{k+1}|a_1|, |c|^{k+1}|a_1|)$. De fato,

k+1.1) Se $(x, y) \in R(|c|^k|a_1|, |c|^k|a_1|)$, $R = [a_1, 0] \times [c, a_1]$, então

$$\begin{cases} a_1 \leq x \leq a_1 + |c|^k|a_1| \\ a_1 - |c|^k|a_1| \leq y \leq a_1 \end{cases} \implies a_1^2 - |c|^k|a_1|^2 \leq xy \leq a_1^2 + |c|^k|a_1|^2 \\ \implies -|c|^k|a_1|^2 \leq xy - a_1^2 \leq |c|^k|a_1|^2,$$

ou seja, $f(R(|c|^k|a_1|, |c|^k|a_1|)) \subset S(|c|^k|a_1|^2, |c|^k|a_1|) \cup T(|c|^k|a_1|^2, |c|^k|a_1|)$.

k+1.2) Se $(x, y) \in S(|c|^k|a_1|^2, |c|^k|a_1|)$, $S = [a_1, 0] \times [a_1, 0]$, então

$$\begin{cases} a_1 \leq x \leq a_1 + |c|^k|a_1|^2 \\ a_1 \leq y \leq a_1 + |c|^k|a_1| \end{cases} \implies |c|^{2k}|a_1|^3 - |c|^k|a_1|^2 - |c|^k|a_1|^3 + a_1^2 \leq xy \leq a_1^2.$$

Assim, temos $|xy - a_1^2| \leq |c|^k|a_1|^2 + |c|^k|a_1|^3 - |c|^{2k}|a_1|^3 \leq |c|^k|a_1|(|a_1| + |a_1|^2 - |c|^k|a_1|) \leq |c|^{k+1}|a_1|$.

Logo $f(S(|c|^k|a_1|^2, |c|^k|a_1|)) \subset T(|c|^{k+1}|a_1|, |c|^k|a_1|^2)$.

k+1.3) Se $(x, y) \in T(|c|^{k+1}|a_1|, |c|^k|a_1|^2)$, $T = [c, a_1] \times [a_1, 0]$, então

$$\begin{cases} a_1 - |c|^{k+1}|a_1| \leq x \leq a_1 \\ a_1 \leq y \leq a_1 + |c|^k|a_1|^2 \end{cases} \implies a_1^2 - |c|^k|a_1|^3 \leq xy \leq a_1^2 + |c|^{k+1}|a_1|^2$$

$$\implies -|c|^k|a_1|^3 \leq xy - a_1^2 \leq |c|^{k+1}|a_1|^2,$$

ou seja, $f(T(|c|^{k+1}|a_1|, |c|^k|a_1|^2)) \subset U(|c|^k|a_1|^3, |c|^{k+1}|a_1|) \cup R(|c|^{k+1}|a_1|^2, |c|^{k+1}|a_1|)$.

k+1.4) Se $(x, y) \in U(|c|^k|a_1|^3, |c|^{k+1}|a_1|)$, $U = [c, a_1] \times [c, a_1]$, então

$$\begin{cases} a_1 - |c|^k|a_1|^3 \leq x \leq a_1 \\ a_1 - |c|^{k+1}|a_1| \leq y \leq a_1 \end{cases} \implies a_1^2 \leq xy \leq a_1^2 + |c|^{k+1}|a_1|^2 + |c|^k|a_1|^4 + |c|^{2k+1}|a_1|^4,$$

ou seja, $xy - a_1^2 \leq |c|^k|a_1|(|c||a_1| + |a_1|^3 + |c|^{k+1}|a_1|^3) \leq |c|^k|a_1|(|c||a_1| + |a_1|^3 + |c|^3|a_1|^3)$. Como pelo lema 4.3 temos $|c||a_1| + |a_1|^3 + |c|^3|a_1|^3 \leq |c|$, segue que $xy - a_1^2 \leq |c|^{k+1}|a_1|$. Assim, temos $f(U(|c|^k|a_1|^3, |c|^{k+1}|a_1|)) \subset R(|c|^{k+1}|a_1|, |c|^k|a_1|^3)$.

k+1.5) Se $(x, y) \in T(|c|^k|a_1|^2, |c|^k|a_1|)$, $T = [c, a_1] \times [a_1, 0]$, então

$$\begin{cases} a_1 - |c|^k|a_1|^2 \leq x \leq a_1 \\ a_1 \leq y \leq a_1 + |c|^k|a_1| \end{cases} \implies a_1^2 - |c|^k|a_1|^2 \leq xy \leq a_1^2 + |c|^k|a_1|^3$$

$$\implies -|c|^k|a_1|^2 \leq xy - a_1^2 \leq |c|^k|a_1|^3,$$

ou seja, $f(T(|c|^k|a_1|^2, |c|^k|a_1|)) \subset U(|c|^k|a_1|^2, |c|^k|a_1|^2) \cup R(|c|^k|a_1|^3, |c|^k|a_1|^2)$.

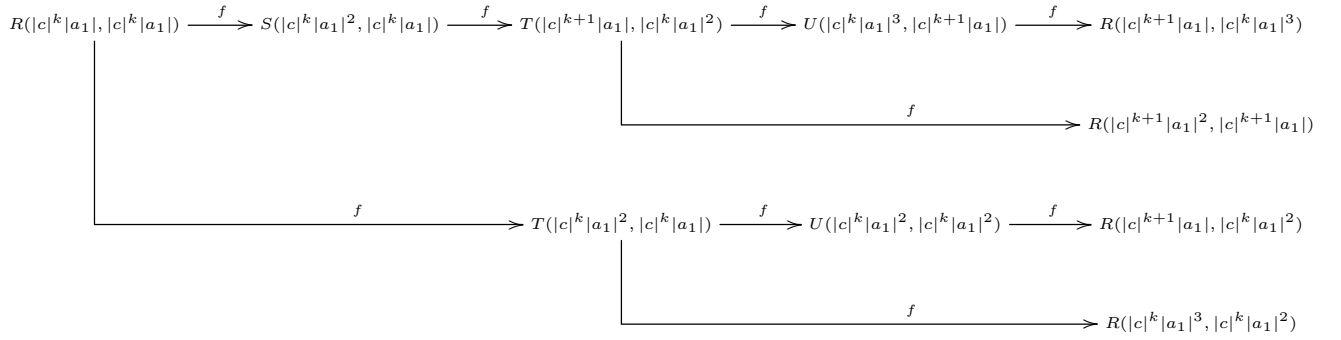
k+1.6) Se $(x, y) \in U(|c|^k|a_1|^2, |c|^k|a_1|^2)$, $U = [c, a_1] \times [c, a_1]$, então

$$\begin{cases} a_1 - |c|^k|a_1|^2 \leq x \leq a_1 \\ a_1 - |c|^k|a_1|^2 \leq y \leq a_1 \end{cases} \implies a_1^2 \leq xy \leq a_1^2 + 2|c|^k|a_1|^3 + |c|^{2k}|a_1|^4$$

$$\implies xy - a_1^2 \leq |c|^k|a_1|(2|a_1|^2 + |c|^k|a_1|^3).$$

Logo, $xy - a_1^2 \leq |c|^{k+1}|a_1|$, ou seja, $f(U(|c|^k|a_1|^2, |c|^k|a_1|^2)) \subset R(|c|^{k+1}|a_1|, |c|^k|a_1|^2)$.

Com isso, temos o (k+1)-ésimo diagrama da dinâmica de f do caso k+1.1 ao caso k+1.6:



Em outros termos, temos $f^{n_{k+1}}(x_0, y_0) \in R(|c|^{k+1}|a_1|, |c|^{k+1}|a_1|)$.

Além disso, observando os diagramas, provamos que para todo inteiro $k \geq 1$, temos

$$\max_{n_k \leq i < n_{k+1}} \{|x_i - a_1|, |y_i - a_1|\} \leq \epsilon^k |a_1|.$$

Como $-0,94 < c < 0$, temos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(z) = (a_1, a_1)$.

□

4.1.3 Caracterizando $W^s(\theta)$

Sejam $A_{H_2} = \{z \in \mathbb{R}^2 : f^{2n}(z) \in A, \forall n \in \mathbb{N}\}$ e $H_{2A} = \{z \in \mathbb{R}^2 : f^{2n}(z) \in H_2, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

Provaremos que $W^s(\theta) = A_{H_2} \cup H_{2A}$.

Denote por (ver a figura 4.3) $A = [0, a_2] \times [a_2, +\infty[$, $B = [-1, 0] \times [1 + c, +\infty[$, $C =]-\infty, -1] \times [0, 1 + c]$, $D =]-\infty, -1] \times [-1, 0]$, $E = [-1, 0] \times]-\infty, -1]$, $F = [0, 1 + c] \times]-\infty, -1]$, $G = [1 + c, +\infty[\times [-1, 0]$, $H_1 = [1 + c, a_2] \times [0, a_2]$, $H_2 = [a_2, +\infty[\times [0, a_2]$.

Lema 4.4 *Os seguintes resultados são válidos:*

1. $f(A) \subset B \cup R_0 \cup R_1 \cup H_1 \cup H_2$;
2. $f(B) \subset D \cup R_2$;
3. $f(C) \subset N \cup E$;
4. $f(D) \subset E \cup F \cup P$;
5. $f(E) \subset R_2 \cup R_3 \cup G$;
6. $f(F) \subset R_1 \cup C$;
7. $f(G) \subset M \cup B$;
8. $f(H_1) \subset B \cup R_0 \cup H_1$;
9. $f(H_2) \subset B \cup A \cup L$.

Demonstração: 1) $f(A) \subset [c, +\infty[\times [0, a_2] \subset B \cup R_0 \cup R_1 \cup H_1 \cup H_2$;

- 2) $f(B) \subset]-\infty, c] \times [-1, 0] \subset D \cup R_2$;
- 3) $f(C) \subset]-\infty, c] \times]-\infty, -1] \subset N \cup E$;
- 4) $f(D) \subset [c, +\infty[\times]-\infty, -1] \subset E \cup F \cup P$;
- 5) $f(E) \subset [c, +\infty[\times [-1, 0] \subset R_2 \cup R_3 \cup G$;
- 6) $f(F) \subset]-\infty, c] \times [0, 1 + c] \subset R_1 \cup C$;
- 7) $f(G) \subset]-\infty, c] \times [1 + c, +\infty[\subset M \cup B$;
- 8) $f(H_1) \subset [c, a_2] \times [1 + c, a_2] \subset B \cup R_0 \cup H_1$;
- 9) $f(H_2) \subset [c, +\infty[\times [a_2, +\infty[\subset B \cup A \cup L$.

□

Proposição 4.11 *Seja $z \in A$. Se $f^{2n-1}(z) \in H_2$ e $f^{2n}(z) \in A$, para todo inteiro $n \geq 1$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(z) = (a_2, a_2)$.*

Demonstração: Seja $z = (x_0, y_0) \in A$ e suponha que $f^{2n-1}(x_0, y_0) = (x_{2n-1}, y_{2n-1}) \in H_2$ e $f^{2n}(x_0, y_0) = (x_{2n}, y_{2n}) \in A$, para todo inteiro $n \geq 1$. Assim,

$$0 \leq x_0 \leq a_2, a_2 \leq y_0 < \infty,$$

$$a_2 - c \leq x_0 y_0 < +\infty, \quad -c \leq x_0 x_1 \leq a_2 - c, \quad a_2 - c \leq x_2 x_1 < +\infty. \quad (4.4)$$

Pela relação (4.4), temos $x_0 x_1 \leq a_2 - c \leq x_0 y_0$ e $x_0 x_1 \leq a_2 - c \leq x_2 x_1$, ou seja, $y_2 = x_1 \leq y_0$ e $x_0 \leq x_2$.

Assim, por indução, deduzimos que $(x_{2n})_n$ é uma sequência crescente convergente e $(y_{2n})_n$ é uma sequência decrescente convergente. Sejam $l = \lim x_{2n} = \lim y_{2n+1}$ e $l' = \lim y_{2n} = \lim x_{2n-1}$. Como $x_{2n+2} = x_{2n+1} y_{2n+1} + c$ e $y_{2n+2} = x_{2n+1} = x_{2n} y_{2n} + c$, segue que $l = l' l + c$ e $l' = l l' + c$, ou seja, $l = l'$. Logo, temos $l = l^2 + c$, ou seja $l \in \{a_1, a_2\}$. Como $l > 0$, segue que $l = a_2$.

□

Proposição 4.12 *Se $z \in H_1 \setminus \{(a_2, a_2)\}$ então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(z) \notin H_1$.*

Demonstração: Seja $z = (x_0, y_0) \in H_1 \setminus \{(a_2, a_2)\}$. Logo $1 + c \leq x_0 \leq a_2$ e $0 \leq y_0 \leq a_2$.

Caso 1: $\max\{x_0, y_0\} < a_2$.

Suponhamos que $f^n(z) \in H_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $z_0 = \max\{x_0, y_0\} < a_2$ e defina a sequência $z_1 = z_0^2 + c$ e $z_n = z_{n-1} z_{n-2} + c$, para todo inteiro $n \geq 2$. Daí, temos

$$\begin{aligned}
1 + c &\leq x_0 \leq z_0 < a_2, \quad 0 \leq y_0 \leq z_0 < a_2, \\
1 + c &\leq x_1 \leq z_0^2 + c = z_1, \quad 0 \leq y_1 \leq z_0 < a_2, \\
1 + c &\leq x_2 \leq z_0 z_1 + c = z_2, \quad 0 \leq y_2 \leq z_1, \\
&\vdots \\
1 + c &\leq x_n \leq z_n, \quad 0 \leq y_n \leq z_{n-1},
\end{aligned}$$

para todo inteiro $n \geq 1$. Observe que $z_n \geq 1 + c > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
0 < 1 + c \leq z_0 < a_2 &\implies 0 < 1 + c \leq z_1 = z_0^2 + c < z_0 < a_2 \implies \\
0 < 1 + c \leq z_2 = z_1 z_0 + c &< z_0^2 + c = z_1 < z_0 < a_2 \implies \\
0 < 1 + c \leq z_3 = z_2 z_1 + c &< z_1 z_0 + c = z_2 < z_1 < z_0 < a_2 \implies \dots \implies \\
0 < 1 + c \leq z_n &< z_{n-1} < \dots < z_1 < z_0 < a_2, \text{ para todo inteiro positivo } n.
\end{aligned}$$

Logo $(z_n)_n$ é uma sequência positiva, decrescente e convergente. Seja $l = \lim z_n$. Como $z_n = z_{n-1}z_{n-2} + c$ segue que $l = l^2 + c$, ou seja, $l \in \{a_1, a_2\}$. Absurdo, pois, por construção, temos $a_1 < 0 < 1 + c \leq l < z_0 < a_2$.

Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(z) \notin H_1$.

Caso 2: $x_0 = a_2$ e $0 \leq y_0 < a_2$.

Daí $x_1 = a_2 y_0 + c < a_2^2 + c = a_2$, $y_1 = a_2$, $x_2 = x_1 a_2 + c < a_2^2 + c = a_2$ e $y_2 < a_2$.

Se $(x_2, y_2) \in H_1$, então o resultado segue do caso 1.

Se $(x_2, y_2) \notin H_1$, então o resultado é válido para $N = 2$.

Caso 3: $1 + c \leq x_0 < a_2$ e $y_0 = a_2$.

Daí $x_1 = x_0 a_2 + c < a_2^2 + c = a_2$ e $y_1 < a_2$.

Se $(x_1, y_1) \in H_1$, então o resultado segue do caso 1.

Se $(x_1, y_1) \notin H_1$, então o resultado é válido para $N = 1$.

□

Observe que, pelo lema 4.4, temos que $f(z) \in (A \cup H_2)$, implica que $z \in (A \cup H_2)$. Além disso, $f(\mathbb{R}^2 \setminus (A \cup H_2)) \subset (\mathbb{R}^2 \setminus (A \cup H_2))$. Daí, pelas proposições 4.5, 4.11 e 4.12, segue que $A_{H_2} \cup H_{2A} = W^s((a_2, a_2))$.

4.1.4 Caracterizando $W^s(p) \cup W^s(f(p)) \cup W^s(f^2(p))$

Nessa subseção, provaremos que $(K^+ \setminus (W^s(\theta) \cup W^s(\alpha))) = (W^s(p) \cup W^s(f(p)) \cup W^s(f^2(p)))$.

Denote por $\mathcal{D} = R_0 \cup R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup A_{H_2} \cup H_{2A}$.

Proposição 4.13 *Seja $V := K^+ \setminus \bigcup_{n=0}^{+\infty} f^{-n}(\mathcal{D})$. Então, $V = W^s(p) \cup W^s(f(p)) \cup W^s(f^2(p))$.*

Demonstração: Supõe $V \neq \emptyset$. Então $V \subset A \cup B \cup C \cup D \cup E \cup F \cup G \cup H_1 \cup H_2$. Para cada $X \in \{A, B, C, D, E, F, G, H_1, H_2\}$, denote por $X' = X \cap V$.

Pelo lema 4.4, temos (ver figura 4.5)

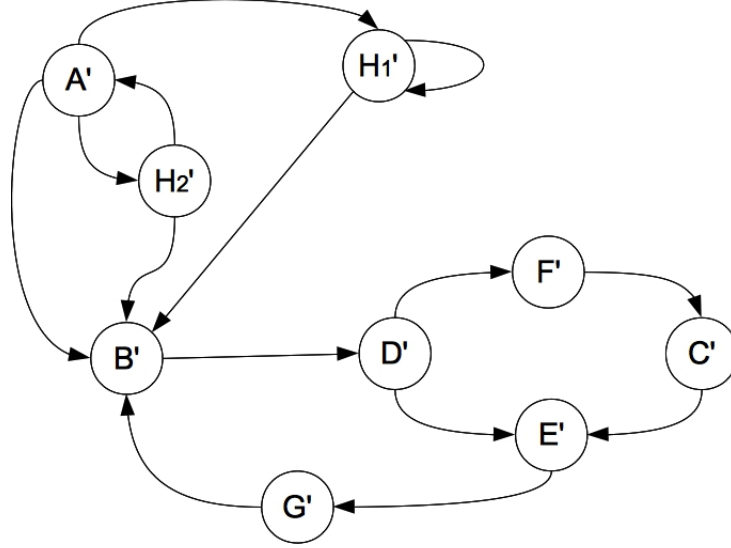


Figura 4.5: Ciclo na filtração.

1. $f(A') \subset B' \cup H_1' \cup H_2'$; 4. $f(D') \subset E' \cup F'$; 7. $f(G') \subset B'$;
2. $f(B') \subset D'$; 5. $f(E') \subset G'$; 8. $f(H_1') \subset B' \cup H_1'$;
3. $f(C') \subset E'$; 6. $f(F') \subset C'$; 9. $f(H_2') \subset B' \cup A'$.

Se $z \in A' \cup H_1' \cup H_2'$, então segue pelas proposições 4.11 e 4.12 que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{N_1}(z) \in B'$.

Se $z \in B' \cup C' \cup D' \cup E' \cup F' \cup G'$, então percebemos pela figura 4.5 que existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{N_2}(z) \in G'$. Assim, se $z \in G' \subset G$, então

$$f(z) \in f(G) \cap B \subset [-1, c] \times [1 + c, +\infty[,$$

$$f^2(z) \in (]-\infty, c(1 + c) + c] \times [-1, c]) \cap D \subset (]-\infty, -1] \times [-1, c]),$$

$$f^3(z) \in [0, +\infty[\times]-\infty, -1] \implies f^3(z) \in F' \implies f^4(z) \in C' \implies f^5(z) \in E',$$

e assim, como já vimos, teremos $f^{6n}(z) \in G'$, $f^{6n+1}(z) \in B'$, $f^{6n+2}(z) \in D'$, $f^{6n+3}(z) \in F'$, $f^{6n+4}(z) \in C'$, $f^{6n+5}(z) \in E'$, para todo $n \geq 1$.

Sendo assim, nos resta estudar o ciclo $G'B'D'F'C'E'G'$ (ciclo representado na figura 4.6). Sem perda de generalidade, seja $z = (x_0, y_0) \in F'$. Assim, para todo inteiro $n \geq 0$, temos $f^{6n}(z) \in F$, $f^{6n+1}(z) \in C$, $f^{6n+2}(z) \in E$, $f^{6n+3}(z) \in G$, $f^{6n+4}(z) \in B$, $f^{6n+5}(z) \in D$. Então, temos

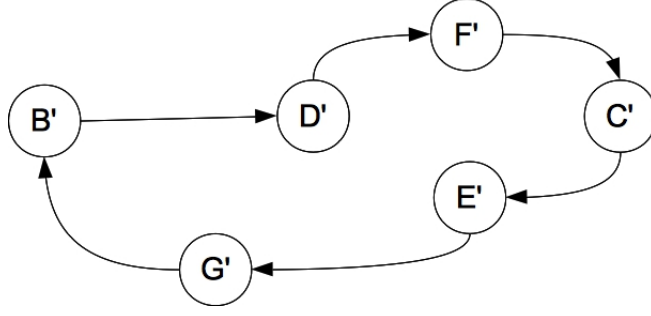


Figura 4.6: Ciclo na filtração.

$$0 \leq x_0 \leq 1 + c, \quad -\infty < y_0 \leq -1, \quad (4.5)$$

$$-\infty < x_0 y_0 \leq -1 - c, \quad -1 - c \leq x_1 x_0 \leq -c, \quad (4.6)$$

$$-1 - c \leq x_1 x_0 \leq -c, \quad 1 \leq x_2 x_1 < +\infty, \quad (4.7)$$

$$-1 - c \leq x_3 x_2 \leq -c, \quad -\infty < x_4 x_3 \leq -1 - c, \quad (4.8)$$

$$-c \leq x_5 x_4 \leq 1, \quad -\infty < x_6 x_5 \leq -1 - c. \quad (4.9)$$

Pela relação (4.6) temos $x_0 y_0 \leq x_0 x_1$, ou seja, $y_0 \leq x_1 = y_2$.

Pela relação (4.8) temos $x_3 x_4 \leq x_3 x_2$, ou seja $x_4 \leq x_2 \leq 0$.

Como $x_4 \leq x_2 \leq 0$ e $x_1 \leq 0$, segue que $x_1 x_4 \geq x_1 x_2$. Daí, pelas relações (4.9) e (4.7), temos $x_5 x_4 \leq x_2 x_1 \leq x_1 x_4$ e, como $x_4 < 0$, segue que $x_1 \leq x_5$. Daí, $y_0 \leq x_1 \leq x_5 = y_6$.

Pelas relações (4.9) e (4.7), temos $x_5 x_6 \leq x_1 x_0$. Como $x_1 \leq x_5 \leq -1$ e $x_0 \geq 0$, segue que $x_0 x_1 \leq x_0 x_5$. Logo, temos $x_5 x_6 \leq x_1 x_0 \leq x_0 x_5$, ou seja, $x_6 \geq x_0$.

Com isso, concluímos que $(x_{6n})_n$ e $(y_{6n})_n$ são sequências crescentes.

Afirmção: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{6n}(x_0, y_0) = (1 + c, -1) = f(p)$.

De fato, sejam $\lim x_{6n} = l$ e $\lim y_{6n} = l'$. Daí, temos $f^6(l, l') = (l, l')$. Suponha $(l, l') \neq (1 + c, -1)$ e seja $(a, b) = f^6(l, l')$. Da mesma forma que provamos que $x_0 \leq x_6$ e $y_0 \leq y_6$, temos que $l \leq a$ e $l' \leq b$. Como $0 \leq l < 1 + c$ ou $-\infty < l' < -1$, deduzimos que $l < a$ ou $l' < b$, ou seja, $f^6(l, l') \neq (l, l')$. Absurdo. Portanto, $(l, l') = (1 + c, -1)$.

□

Observação 4.2 Foi preciso supor que $-0,94 \leq c < 0$ somente para provar o lema 4.2. Conjeturamos que o teorema 4.1 é verdadeiro para $-1 < c < 0$. Além de provarmos o teorema 4.1, provamos que se $-1 < c < 0$ e $z \in K^+$, então ou existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(z) \in [c, 0] \times [c, 0]$, para todo $n \geq N$, ou $z \in W^s(\theta) \cup W^s(p) \cup W^s(f(p)) \cup W^s(f^2(p))$, onde $p = (-1, -1)$, $\theta = (a_2, a_2)$ e $a_2 = \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$.

4.2 Caso particular da conjectura 3.1

A conjectura 3.1, nos diz que $\sigma_{pt}(S) = E$, onde $\sigma_{pt}(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (q_n(\lambda))_{n \geq 0} \text{ é limitada}\}$ e $E = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\psi_n(q_{F_1}(\lambda), q_{F_0}(\lambda)))_{n \geq 2} \text{ é limitada}\}$, onde $q_n(\lambda) = q_n$ está definida na definição 3.1, para todo $n \geq 0$, $\psi_n = g_n \circ g_{n-1} \circ \dots \circ g_2$ e $g_n : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ é definido por $g_n(x, y) = \left(\frac{1}{r_n}xy - \left(\frac{1}{r_n} - 1\right), x\right)$, para todo $n \geq 2$.

Iremos provar um caso particular dessa conjectura. Seja $p_i = p$ para todo $i \geq 1$. Daí, temos que $g_n(x, y) = \left(\frac{1}{p}xy - \left(\frac{1}{p} - 1\right), x\right)$, para todo $n \geq 2$, ou seja, $\psi_{n+2} = g^n = \underbrace{g \circ \dots \circ g}_{n \text{ vezes}}$, para todo $n \geq 0$. Observe que $E \cap \mathbb{R} = \{\lambda \in \mathbb{R} : (g^n(q_{F_1}(\lambda), q_{F_0}(\lambda)))_{n \geq 2} \text{ é limitada}\} = \{\lambda \in \mathbb{R} : (g^n(q_{F_0}(\lambda), q_{F_0}(\lambda)))_{n \geq 0} \text{ é limitada}\}$.

Sabemos que $\sigma_{pt}(S) \subset E$. Iremos provar, nesse caso particular, que existe $\delta > 0$ tal que se $p > \delta$ então $E \cap \mathbb{R} \subset \sigma_{pt}(S)$.

Observação 4.3 Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e suponhamos que $(q_{F_n}(\lambda))_{n \geq 0}$ é limitada. Pela definição 3.1, se provarmos que $\prod_{n \in \mathcal{A}(\lambda)} |q_{F_n}(\lambda)| < +\infty$, onde $\mathcal{A}(\lambda) := \{n \in \mathbb{N} : |q_{F_n}(\lambda)| > 1\}$, então $(q_n(\lambda))_{n \geq 1}$ é limitada.

Teorema 4.3 Se $p > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, então $E \cap \mathbb{R} = \sigma_{pt}(S) \cap \mathbb{R}$.

Demonstração: Sejam $f, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ funções definidas por $f(x, y) = \left(xy + \frac{p-1}{p^2}, x\right)$ e $h(x, y) = (px, py)$. Observe que $g^n = h \circ f^n \circ h^{-1}$, para todo $n \geq 0$.

Seja $c = \frac{p-1}{p^2}$. Como $p > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, segue que $-1 < c < 0$.

Seja $\lambda \in E \cap \mathbb{R}$. Logo $(g^n(q_{F_0}, q_{F_0}))_{n \geq 0}$ é limitada, ou seja, $(h \circ f^n \circ h^{-1}(q_{F_0}, q_{F_0}))_{n \geq 0}$ é limitada. Seja $z = q_{F_0}$ e observe que $g^n(z, z) = (q_{F_n}, q_{F_{n-1}})$, para todo $n \geq 1$. Pela observação 4.2, segue que ou existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^n \circ h^{-1}(z, z) \in [c, 0] \times [c, 0]$, para todo $n \geq N$, ou $h^{-1}(z, z) \in W^s(\theta) \cup W^s(q) \cup W^s(f(q)) \cup W^s(f^2(q))$, onde $q = (-1, -1)$, $\theta = (a_2, a_2)$ e $a_2 = \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$.

Iremos considerar todos os casos:

a) Se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^n \circ h^{-1}(z, z) \in [c, 0] \times [c, 0]$, para todo $n \geq N$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(q_{F_n}, q_{F_{n-1}}) = g^n(z, z) \in [pc, 0] \times [pc, 0]$, para todo $n \geq N$, ou seja, temos que $|q_{F_n}| \leq |pc| < 1$, para todo $n > N$. Com isso, segue que $\mathcal{A}(\lambda)$ é um conjunto finito e, pela observação 4.3, $(q_n)_{n \geq 1}$ é limitada.

b) Se $h^{-1}(z, z) \in W^s(q) \cup W^s(f(q)) \cup W^s(f^2(q))$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{3n+l} \circ h^{-1}(z, z) = q$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{3n+l+1} \circ h^{-1}(z, z) = f(q)$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{3n+l+2} \circ h^{-1}(z, z) = f^2(q)$, para algum $l \in \{0, 1, 2\}$. Portanto, temos $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^{3n+l}(z, z) = h(q) = (-p, -p)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^{3n+l+1}(z, z) = h(f(q)) = (p + pc, -p)$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^{3n+l+2}(z, z) = h(f^2(q)) = (-p, p + pc)$, para algum $l \in \{0, 1, 2\}$. Assim, como $|-p|, |p + pc| < 1$ e $g^n(z, z) = (q_{F_n}, q_{F_{n-1}})$, para todo $n \geq 1$, segue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|q_{F_n}| < 1$, para todo $n \geq N$. Logo, segue que $\mathcal{A}(\lambda)$ é um conjunto finito e, pela observação 4.3, $(q_n)_{n \geq 1}$ é limitada.

c) Se $h^{-1}(z, z) \in W^s(\theta)$, então pelo que vimos no capítulo anterior, temos que ter $f^{2n}(h^{-1}(z, z)) \in H_2$ e $f^{2n+1}(h^{-1}(z, z)) \in A$, para todo $n \geq 0$, ou $f^{2n}(h^{-1}(z, z)) \in A$ e $f^{2n+1}(h^{-1}(z, z)) \in H_2$, para todo $n \geq 0$, onde $A = [0, a_2] \times [a_2, +\infty[$ e $H_2 = [a_2, +\infty[\times [0, a_2]$, ou seja, temos que ter $g^{2n}(z, z) \in [pa_2, +\infty[\times [0, pa_2] = [1, +\infty[\times [0, 1]$ e $g^{2n+1}(z, z) \in [0, pa_2] \times [pa_2, +\infty[= [0, 1] \times [1, +\infty[$, para todo $n \geq 0$, ou $g^{2n}(z, z) \in [0, pa_2] \times [pa_2, +\infty[= [0, 1] \times [1, +\infty[$ e $g^{2n+1}(z, z) \in [pa_2, +\infty[\times [0, pa_2] = [1, +\infty[\times [0, 1]$, para todo $n \geq 0$. Assim, para $n = 0$ teríamos $g^0(z, z) = (z, z) = (q_{F_0}, q_{F_0})$, com $q_{F_0} \in [1, +\infty[$ e $q_{F_0} \in [0, 1]$, ou seja, $q_{F_0} = 1$. Mas isso segue que $g^n(z, z) = (1, 1)$, para todo $n \geq 0$ e, portanto, temos $(q_n)_{n \geq 1}$ limitada.

De a), b) e c), segue que $\lambda \in \sigma_{pt}(S)$, ou seja $E \cap \mathbb{R} = \sigma_{pt}(S) \cap \mathbb{R}$.

□

Referências Bibliográficas

- [1] E. Bedford, J. Smillie *Polynomial diffeomorphisms of $\mathbb{C}^2$* . VI. Connectivity of J. Ann. of Math. (2) 148 (1998), no. 2, 695-735.
- [2] S. Bonnot, A. De Carvalho, A. Messaoudi *Julia Sets Fibonacci Endomorphisms on $\mathbb{C}^2$ and $\mathbb{R}^2$* . (em andamento)
- [3] L. Carleson *Complex Dynamics*. Lecture Notes UCLA 1990.
- [4] R. Devaney *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. 2nd ed., Addison-Wesley, 1989.
- [5] A. Douady *Disques de Siegel et anneaux de Herman*. Sémin. Bourbaki 39e année (1986-87) no 677.
- [6] A. Douady, J. Hubbard *Étude dynamique des polynôme complexes*. Prépublication mathématiques d'Orsay 2/4 (1984/1985)
- [7] H.R. Dowson *Spectral theory of linear operators*. London Mathematical Society Monographs, 1978.
- [8] H. El Abdalaoui, S. Bonnot, A. Messaoudi, O. Sester *On the Fibonacci complex dynamical systems*. arXiv:1304.4864v1 [math.DS]
- [9] H. El Abdalaoui, A. Messaoudi *On the spectrum stochastic perturbations of the shift and Julia Sets*. Fundamenta Mathematicae, v. 218, p. 47-68, 2012.
- [10] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Wiley 1990. (Ch. 14).
- [11] J. E. Fornæss, N. Sibony *Fatou and Julia sets for entire mappings in $\mathbb{C}^k$* . Math. Ann. 311 (1998), 27-40.

- [12] V. Guedj, N. Sibony, *Dynamics of polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^k$* . Ark. Mat., 40 (2002) 207-243.
- [13] G. Julia *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles*. J. Math. Pure Appl. 8 (1918) 47-245.
- [14] P.R. Killeen, T.J. Taylor *How the propagation of error through stochastic counters affects time discrimination and other psychophysical judgements*. Psychol. Rev 107 (2000) 430-459.
- [15] P.R. Killeen, T.J. Taylor *A stochastic adding machine and complex dynamics*. Nonlinearity 13 (2000) 1889-1903.
- [16] M. Lyubich *The dynamics of rational transforms: the topological picture*. Russian Math. Surveys 41:4 (1986), 43-117.
- [17] A. Messaoudi, O. Sester, G. Valle *Spectrum of stochastic adding machines and fibered Julia sets*. Stochastics and Dynamics, 13(3), 26 páginas, 2013.
- [18] A. Messaoudi, D. Smania *Eigenvalues of stochastic adding machine*. Stochastics and Dynamics, Vol.10. N0. 2 (2010) 291-313.
- [19] A. Messaoudi, R.M.A. Uceda *Stochastic adding machine and 2-dimensional Julia sets*. Discrete Contin. Dyn. Syst. 34, No. 12, 5247-5269, 2014.
- [20] A. Messaoudi, G. Valle *Spectra of stochastic adding machines based on Cantor Systems of Numeration*. arXiv:1307.6876v1 [math.PR]
- [21] J. Milnor *Dynamics in one complex variable*. (Third Edition), Annals of Mathematics Studies 160, Princeton University Press 2006.
- [22] J. Milnor, W. Thurston *Iterated maps of the interval*. pp. 465-563 of Dynamical Systems (Maryland 1986-87), edit. J.C.Alexander, Lect. Notes Math. 1342, Springer 1988.
- [23] J. Y. Ouyard *Probabilités*. Volume 2, Cassini, Paris, 2009.
- [24] W. Parry *On the β -expansions of real numbers*. Acta Math. Acad. Sci. Hungary 11 (1960), 401-416.
- [25] E. Seneta *Non-negative matrices and Markov chains*. Springer Series in Statistics No. 21. U.S.A. 2006.

- [26] R.M.A. Uceda *Máquina de Somar, Conjuntos de Julia e Fractais de Rauzy*. PhD Thesis, 2011.

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 08 / 04 / 2015

Danilo Antonio Caprio