



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS



Trabalho de Conclusão de Curso

Curso de Graduação em Física

EXPLORANDO O CONCEITO DE ONDAS EM VÁRIOS CONTEXTOS:
ONDAS ELETROMAGNÉTICAS, DUALIDADE ONDA-PARTÍCULA,
ONDAS GRAVITACIONAIS

Catarina Tesleno Cristineli Castro Pires

Prof. Dr. Mariano de Souza

Rio Claro (SP)

2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

CATARINA TESLENCO CRISTINELI CASTRO PIRES

EXPLORANDO O CONCEITO DE ONDAS EM VÁRIOS CONTEXTOS:
ONDAS ELETROMAGNÉTICAS, DUALIDADE ONDA-PARTÍCULA,
ONDAS GRAVITACIONAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Rio Claro (SP)

2024

P667e

Pires, Catarina Tesleno Cristineli Castro

Explorando o conceito de ondas em vários contextos: ondas eletromagnéticas, dualidade onda-partícula, ondas gravitacionais / Catarina Tesleno Cristineli Castro Pires. -- Rio Claro, 2024
42 p. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Física) -
Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e
Ciências Exatas, Rio Claro

Orientador: Mariano De Souza

1. Ondas eletromagnéticas. 2. Dualidade onda-partícula. 3. Ondas gravitacionais. 4. Comportamento ondulatório. I. Título.

CATARINA TESLENCO CRISTINELI CASTRO PIRES

EXPLORANDO O CONCEITO DE ONDAS EM VÁRIOS
CONTEXTOS: ONDAS ELETROMAGNÉTICAS, DUALIDADE
ONDA-PARTÍCULA, ONDAS GRAVITACIONAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Mariano de Souza

Dr. Lucas Squillante

Prof. Dr. Adriano Otuka

Rio Claro, 19 de novembro de 2024



Assinatura da aluna



Assinatura do orientador

“Tanto o insignificante quanto o extraordinário são arquitetos do mundo natural.”

Carl Edward Sagan

RESUMO

Onda é um fenômeno presente em diversos contextos da Física, sendo essencial para o entendimento do comportamento da natureza. O domínio do conceito é importante para a compreensão do modelo ondulatório da luz e identificação de determinados fenômenos, como a interferência e difração, propriedades corpusculares e os efeitos de propagação. Neste trabalho de conclusão de curso é explorado o conceito das mesmas em três diferentes áreas: ondas eletromagnéticas, dualidade onda-partícula e ondas gravitacionais. Mesmo que este tema seja amplamente discutido na literatura, ainda existem grandes lacunas a serem preenchidas. Limites da teoria eletromagnética clássica em condições extremas e a complexibilidade dos fenômenos não lineares, por exemplo, ainda apresentam desafios significativos. A transição entre comportamentos quânticos e clássicos e a natureza do entrelaçamento quântico também necessitam de mais estudos para a devida compreensão. É importante frisar que embora a detecção de ondas gravitacionais tenha sido um grande avanço, ainda há muito a se explorar em relação às suas origens e comportamento. A escrita dessa temática tem como propósito abordar esses três domínios interconectados, não apenas explorando a Física de cada contexto, mas também traçando paralelos entre eles. Em suma, o objetivo é o entendimento aprofundado de cada um dos temas. Para o desenvolvimento do estudo foi necessário usar como metodologia a conexão entre teoria e entendimento experimental, usufruindo das revisões bibliográficas. O principal meio de pesquisa para a compreensão teórica se baseia em artigos científicos relacionados com esta área da Física. Os resultados esperados ao final deste trabalho são baseados em análises precisas e aprofundadas dos tópicos envolvidos no tema, correlacionando-os, desenvolvendo e aprimorando o olhar sobre os mesmos. O final do estudo baseou-se no entrelaçamento entre as áreas e como elas se complementam.

Palavras-chave: Comportamento ondulatório; Ondas; Comportamentos da natureza; Ondas eletromagnéticas; Dualidade onda-partícula; Ondas gravitacionais. .

ABSTRACT

Wave is a phenomenon present in various contexts of Physics, and are essential for understanding the behavior of nature. Mastering this concept is important for comprehending the wave behavior of light and identifying certain phenomena, such as interference and diffraction, corpuscular properties, and propagation effects. This B.S.c. work explores the concept of waves in three different areas: electromagnetic waves, wave-particle duality, and gravitational waves. Although this topic is widely discussed in literature, there are still large gaps to be filled. Limits of classical electromagnetic theory in extreme conditions and the complexity of nonlinear phenomena, for example, still present significant challenges. The relation between quantum and classical behaviors and the nature of quantum entanglement also require further studies for proper understanding. It is important to emphasize that although the detection of gravitational waves was a great advance, there is still much to be explored in relation to their origins and behavior. The purpose of writing this thematic is to address these three interconnected domains, not only exploring the Physics of each context, but also drawing parallels between them. In short, the goal is to gain an in-depth understanding of each of the themes. The development of this study required using a methodology that connects theory with experimental understanding through literature reviews. The primary research source for theoretical comprehension is based on scientific articles related to this field of Physics. The expected outcomes of this work are grounded in precise and in-depth analyses of the topics involved, correlating them, and developing and refining perspectives on these subjects. In conclusion, the study is based on the interconnection between these areas and how they complement one another.

Keywords: Wave behavior; Waves; Behaviors of nature; Electromagnetic waves; Wave-particle duality; Gravitational waves.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	ONDAS ELETROMAGNÉTICAS	11
2.1	Introdução às ondas eletromagnéticas	11
2.1.1	Breve história e impacto na Física moderna	11
2.1.2	O espectro eletromagnético	12
2.2	Propriedades das ondas eletromagnéticas	14
2.2.1	Formulação geral das ondas eletromagnéticas no vácuo	14
2.2.2	A lei de Ampère-Maxwell e sua importância	15
2.2.3	Velocidade de propagação	16
2.2.4	Soluções das equações de onda e a transversalidade	17
2.2.5	Polarização linear das ondas eletromagnéticas	18
2.2.6	Energia e momento de ondas eletromagnéticas	19
2.3	Interação de ondas eletromagnéticas com a matéria	20
2.3.1	Polarização elétrica e magnética	21
2.3.2	Reflexão e transmissão	21
2.3.3	Absorção e dispersão	22
3	DUALIDADE ONDA-PARTÍCULA	24
3.1	primeiras concepções	24
3.1.1	A emergência de novos fenômenos: fótons e o Efeito fotoelétrico	25
3.2	A Contribuição de De Broglie e a Unificação da Dualidade	28
3.2.1	Energia relacionada ao momento: abordagem relativística	30
3.2.2	Integração com a mecânica quântica: a função de onda	31
3.3	Experimento da fenda dupla	32
3.3.1	Configuração experimental	32
3.3.2	O papel da observação e a interpretação de Copenhague	33
4	ONDAS GRAVITACIONAIS	35
4.1	Introdução às ondas gravitacionais - contexto histórico	35
4.1.1	Contexto teórico	36
4.2	Principais fontes de ondas gravitacionais	38
4.2.1	Supernovas e eventos cataclísmicos	38
4.3	Deteção de ondas gravitacionais	39
5	CONCLUSÃO	41

REFERÊNCIAS 42

1 INTRODUÇÃO

As ondas, sob diferentes formas, estão presentes em fenômenos naturais e tecnológicos, desempenhando um papel fundamental na descrição da natureza. As ondas eletromagnéticas, por exemplo, são centrais para a teoria de Maxwell e constituem a base de tecnologias modernas, desde comunicações por rádio até diagnósticos por imagem. Já a dualidade onda-partícula, consagrada pela mecânica quântica, desafiou o determinismo clássico ao revelar que partículas como elétrons podem exibir comportamentos tanto corpusculares quanto ondulatórios. Por fim, a descoberta e a observação de ondas gravitacionais, previstas pela relatividade geral de Einstein e confirmadas por meio de interferômetros como LIGO e VIRGO, abriram uma nova janela para o universo, permitindo a detecção de fenômenos até então não observados, como a fusão de buracos negros (Aguiar *et al.*, 2008; Tipler & Mosca, 2008).

A conexão entre esses três domínios não se refere apenas à temática; ela reflete uma busca por integrar teorias clássicas e modernas na descrição da realidade física. A teoria eletromagnética e a mecânica quântica exemplificam essa integração ao explicar fenômenos que vão do comportamento da luz à estrutura dos átomos. A recente detecção de ondas gravitacionais demonstra como conceitos puramente teóricos podem, eventualmente, encontrar validação experimental e transformar o campo da Astrofísica. Como destaca Pathria (2003), essas áreas da Física revelam não apenas a estrutura do universo, mas também os limites do conhecimento humano, apontando para questões ainda abertas sobre a unificação entre a gravidade e a mecânica quântica.

Este trabalho tem como objetivo aprofundar a análise do conceito de ondas em seus diferentes contextos, explorando as bases teóricas, as implicações experimentais e as aplicações tecnológicas associadas a cada uma. A metodologia combina uma abordagem teórica e analítica baseada em revisões bibliográficas das obras clássicas de Griffiths, Reitz *et al.*, Eisberg & Resnick, Aguiar, entre outros, além de referências a experimentos recentes, como as detecções do LIGO e VIRGO. A discussão ao longo dos capítulos visa mostrar como a Física avança por meio da integração de conceitos aparentemente distintos e pelo aprimoramento constante da observação experimental.

Ao final do estudo, espera-se fornecer uma visão abrangente da interconexão entre esses três temas e como eles moldam nossa compreensão moderna do universo. A Física de ondas, em suas múltiplas expressões, não apenas fornece ferramentas para a inovação tecnológica, mas também desafia os paradigmas teóricos estabelecidos, convidando à reflexão sobre a natureza última da realidade.

2 ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

2.1 INTRODUÇÃO ÀS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

As ondas eletromagnéticas podem ser descritas através das equações de Maxwell e, de acordo com Griffiths (2020), uma onda eletromagnética é uma perturbação periódica que envolve campos elétricos (\vec{E}) e magnéticos (\vec{B}) perpendiculares entre si e à direção de propagação da onda. Estas ondas não precisam de um meio material para se propagar, o que as torna essenciais na compreensão de formas de energia como a luz, a radiação eletromagnética e diversos dispositivos tecnológicos modernos. A teoria que descreve as ondas eletromagnéticas está intrinsecamente ligada à Eletrodinâmica Clássica, e é a partir das equações de Maxwell que podemos derivar matematicamente a existência dessas ondas.

2.1.1 Breve história e impacto na Física moderna

A descoberta das ondas eletromagnéticas e a formalização teórica das equações de Maxwell provocaram uma revolução científica no século XIX. Através de uma combinação dos trabalhos de diversos cientistas, como Michael Faraday e André-Marie Ampère, Maxwell propôs que a luz é apenas uma das formas de radiação eletromagnética, que engloba uma vasta gama de frequências, como ondas de rádio, micro-ondas, infravermelho, ultravioleta, raios X e raios gama.

Sabe-se que a indução eletromagnética descoberta por Faraday havia mostrado que variações em um campo magnético podem induzir uma corrente elétrica. Contudo, Maxwell foi além e sugeriu que o oposto também ocorre: uma variação temporal no campo elétrico gera um campo magnético, fenômeno que ele descreveu por meio da adição do termo da corrente de deslocamento à equação de Ampère. Com isso, Maxwell completou a simetria entre os campos, o que possibilitou a previsão teórica de que essas variações se propagam como ondas através do espaço.

As equações não apenas explicaram a propagação da luz, mas também desempenharam um papel fundamental na compreensão de como a energia e o momento são transportados pelas ondas eletromagnéticas. A intensidade de uma onda eletromagnética, por exemplo, está diretamente relacionada à magnitude dos campos elétrico e magnético, e sua direção de propagação está associada ao vetor de Poynting, do qual descreve a taxa de fluxo de energia através de uma superfície.

Um dos primeiros testes experimentais da teoria de Maxwell foi realizado por Heinrich Hertz, na década de 1880. Hertz provou que era possível gerar ondas eletromagnéticas de maneira controlada, utilizando circuitos ressonantes e antenas para emitir e detectar essas ondas. Segundo Reitz *et al.* (2001), os experimentos de Hertz demonstraram

a existência de ondas de rádio, confirmando as previsões teóricas de Maxwell.

Einstein, no início do século XX, baseou-se nos princípios do eletromagnetismo para formular sua Teoria da Relatividade Restrita. A invariância das equações de Maxwell em relação a transformações de coordenadas no espaço, foi explorada pelo cientista, que concluiu que a velocidade da luz no vácuo é a mesma para todos os observadores, independentemente do movimento relativo. Essa constatação, em conjunto com os experimentos de Michelson-Morley, que não detectaram variação na velocidade da luz com o movimento da Terra, solidificou a ideia de que a luz era uma onda eletromagnética com propriedades únicas e fundamentais.

2.1.2 O espectro eletromagnético

O espectro eletromagnético consiste na distribuição contínua de todas as frequências possíveis de ondas eletromagnéticas, desde ondas de rádio com baixas frequências até raios gama, que possuem altíssimas frequências e energias. Cada tipo de radiação é caracterizada por um intervalo específico de frequências (f) e comprimentos de onda (λ), e todas seguem as mesmas leis fundamentais da eletrodinâmica, descritas pelas equações de Maxwell (vide tópico 2.2.1).

A relação fundamental entre o comprimento de onda e sua frequência é dada pela equação:

$$c = \lambda \cdot f, \quad (2.1)$$

onde:

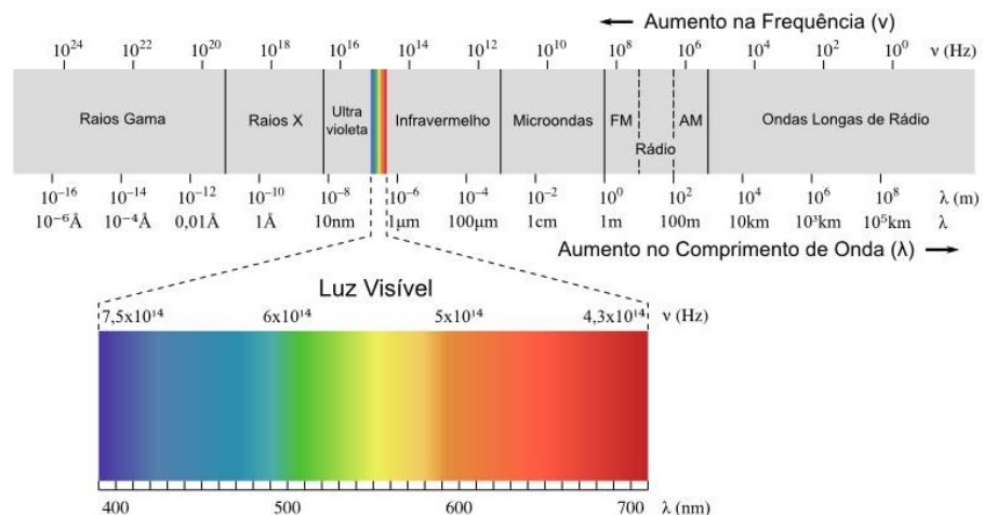
- c é a velocidade da luz no vácuo (3×10^8 m/s);
- λ é o comprimento de onda da radiação;
- f é a frequência da radiação.

Essa equação expressa que, à medida que a frequência de uma onda eletromagnética aumenta, seu comprimento de onda diminui, e vice-versa, mantendo constante a velocidade c no vácuo. No espectro eletromagnético, essa relação é crucial para definir as diferentes faixas de radiação.

O espectro em questão pode ser dividido em várias regiões (Figura 1), cada uma caracterizada por intervalos específicos de frequência e comprimento de onda, conforme descrito em Reitz et al. (2001) e Tipler (2004). As principais regiões do espectro e suas características associadas são:

- Ondas de rádio: frequências entre 10^3 Hz e 10^9 Hz, com comprimentos de onda variando de 10^4 m a 10^{-1} m. As ondas de rádio são amplamente utilizadas em telecomunicações e transmissão de sinais.
- Micro-ondas: frequências entre 10^9 Hz e 10^{12} Hz, com comprimentos de onda entre 10^{-1} m e 10^{-4} m.
- Infravermelho: frequências entre 10^{12} Hz e 10^{14} Hz, com comprimentos de onda variando de 10^{-4} m a 10^{-6} m.
- Luz visível: frequências entre 4×10^{14} Hz e 7.5×10^{14} Hz, com comprimentos de onda variando entre, aproximadamente, 400 nm a 700 nm.
- Ultravioleta: frequências entre 10^{15} Hz e 10^{17} Hz, com comprimentos de onda variando de 10^{-7} m a 10^{-8} m.
- Raios X: frequências entre 10^{17} Hz e 10^{20} Hz, com comprimentos de onda variando de 10^{-8} m a 10^{-12} m.
- Raios gama: frequências superiores a 10^{20} Hz e comprimentos de onda inferiores a 10^{-12} m.

Figura 1 - esquematização do espectro eletromagnético.



Fonte: Damasceno, H.; Bassini, A. (2021).

A energia (E) de um fóton de radiação eletromagnética é diretamente proporcional à sua frequência (f) e inversamente proporcional ao seu comprimento de onda (λ). A relação é dada pela equação de Planck, sendo sua constante igual a $h = 6,626 \times 10^{-34}$ J.s:

$$E = h \cdot f. \quad (2.2)$$

A energia de um fóton também pode ser expressa em termos do comprimento de onda usando a relação $f = \frac{c}{\lambda}$, obtendo-se:

$$E = \frac{hc}{\lambda}. \quad (2.3)$$

Essa equação revela que comprimentos de onda menores correspondem a fótons de maior energia, o que explica por que radiações como os raios gama, com comprimentos de onda extremamente curtos, possuem altíssimas energias.

2.2 PROPRIEDADES DAS ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

As ondas eletromagnéticas, resultantes da interação dinâmica entre os campos elétrico e magnético variáveis, possuem um conjunto de propriedades fundamentais que as distinguem e conferem seu caráter único no universo físico. A partir das equações de Maxwell, pode-se derivar não apenas a existência dessas ondas, mas também suas características, que são amplamente estudadas na Física clássica e moderna. As propriedades das ondas eletromagnéticas, como a sua transversalidade, velocidade de propagação, frequência, comprimento de onda, polarização, e energia, são intrinsecamente relacionadas à natureza ondulatória dos campos eletromagnéticos.

2.2.1 Formulação geral das ondas eletromagnéticas no vácuo

Como já citado anteriormente, o eletromagnetismo tem seu pilar estabelecido por meio das equações de Maxwell, já que, antes dele, fenômenos elétricos e magnéticos eram vistos como separados. O cientista, ao combinar os resultados desses experimentos com a teoria consolidada, mostrou que os dois fenômenos são na verdade manifestações de um mesmo campo eletromagnético.

Para derivar a equação de uma onda eletromagnética no vácuo, partimos delas escritas na forma diferencial:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0; \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0; \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.7)$$

Essas equações descrevem como os campos elétrico e magnético variam no espaço e no tempo. Para simplificar a análise, consideremos uma região livre de cargas e correntes ($\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$). A equação de onda pode ser obtida ao aplicar o operador rotacional (∇) em ambas as equações rotacionais ($\nabla \times \vec{E}$ e $\nabla \times \vec{B}$).

Primeiramente, tomando o rotacional de $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$:

$$\nabla(\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}). \quad (2.8)$$

Utilizando a identidade vetorial $\nabla(\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$ e sabendo que $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ no vácuo, temos:

$$-\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.9)$$

Portanto, a equação de onda para o campo elétrico no vácuo é:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (2.10)$$

onde μ_0 é a permeabilidade do vácuo e ϵ_0 é a permissividade do vácuo. Analogamente, podemos derivar a equação de onda para o campo magnético a partir de $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, obtendo:

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.11)$$

Essas equações de onda mostram que tanto o campo elétrico quanto o magnético podem se propagar no vácuo como ondas.

2.2.2 A lei de Ampère-Maxwell e sua importância

A versão original da Lei de Ampère estabelecia que o campo magnético \vec{B} era produzido por uma corrente elétrica, expressa por:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \quad (2.12)$$

onde \vec{J} é a densidade de corrente elétrica e μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo. No entanto, essa formulação era incompleta. James Clerk Maxwell, ao perceber essa limitação, introduziu o conceito de corrente de deslocamento para corrigir a equação, estendendo a validade da lei para situações mais gerais. A corrente de deslocamento é dada por:

$$\vec{J}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.13)$$

Assim, a Lei de Ampère-Maxwell toma a forma:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.14)$$

Essa adição é crucial, pois garante a conservação da carga elétrica e introduz a possibilidade de campos magnéticos gerados por variações temporais dos campos elétricos, mesmo na ausência de correntes físicas.

2.2.3 Velocidade de propagação

A velocidade de propagação de uma onda eletromagnética no vácuo é diretamente relacionada às propriedades elétricas e magnéticas do meio dado pela relação:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}. \quad (2.15)$$

Essa equação mostra que a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas no vácuo é uma constante universal que depende apenas dessas propriedades fundamentais do espaço.

Considerando o valor das constantes de permissividade e permeabilidade, tem-se:

$$c = \frac{1}{\sqrt{(4\pi \times 10^{-7})(8,854 \times 10^{-12})}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}. \quad (2.16)$$

Em meios materiais, a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas é reduzida, de acordo com a relação:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}. \quad (2.17)$$

2.2.4 Soluções das equações de onda e a transversalidade

As equações de onda têm soluções da forma geral de uma função harmônica, que as descreve viajando com uma frequência e comprimento específicos. Uma solução genérica para a equação de onda unidimensional, supondo uma onda propagando-se na direção x , pode ser escrita como:

$$E(x, t) = E_0 \cos(kx - \omega t + \varphi); \quad (2.18)$$

$$B(x, t) = B_0 \cos(kx - \omega t + \varphi), \quad (2.19)$$

onde:

- $E(x, t)$ é o campo elétrico no ponto x e tempo t ;
- $B(x, t)$ é o campo magnético;
- E_0 e B_0 são os vetores de amplitude dos campos elétrico e magnético;
- k é o número de onda, relacionado ao comprimento de onda λ por $k = \frac{2\pi}{\lambda}$;
- ω é a frequência angular, relacionada à frequência f por $\omega = 2\pi f$;
- φ é a fase inicial.

Uma característica importante das ondas eletromagnéticas é que os vetores \vec{E} e \vec{B} e a direção de propagação \vec{k} são mutuamente perpendiculares, evidenciando a transversalidade. Isso significa que, se a onda estiver se propagando na direção x , o campo elétrico pode estar na direção y e o campo magnético na direção z , obedecendo à relação $\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{k}$. A relação entre os campos pode ser dada por:

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{c} \vec{k} \times \vec{E}_0. \quad (2.20)$$

Além disso, a razão entre as amplitudes dos campos elétrico e magnético é constante, e é dada por:

$$\left| \frac{\vec{E}_0}{\vec{B}_0} \right| = c. \quad (2.21)$$

Essa relação indica que o campo elétrico é proporcional à velocidade da luz vezes o campo magnético. Esse fator c desempenha um papel crucial na descrição da radiação eletromagnética, conectando diretamente os dois campos.

2.2.5 Polarização linear das ondas eletromagnéticas

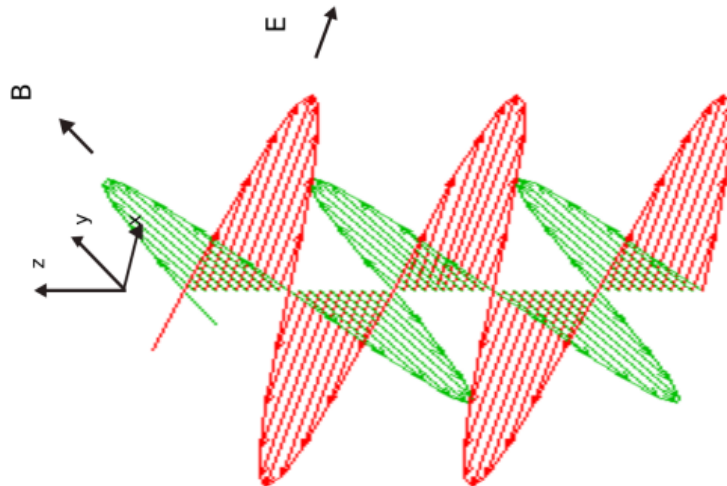
A polarização das ondas eletromagnéticas refere-se à orientação e ao comportamento do vetor campo elétrico \vec{E} durante a propagação da onda. Embora tanto os campos elétrico quanto magnético (\vec{E}, \vec{B}) sejam ortogonais à direção de propagação, é a orientação do campo elétrico que define o estado de polarização de uma onda eletromagnética.

No caso da polarização linear, o vetor campo elétrico \vec{E} oscila em uma única direção fixa ao longo do plano perpendicular à direção de propagação. Seja uma onda plana que se propaga na direção z , a solução para o campo elétrico, no regime de onda, pode ser expressa como:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cdot \hat{x} \cdot \cos(kz - \omega t). \quad (2.22)$$

Tem-se que E_0 é a amplitude do campo elétrico, k é o número de onda, ω é a frequência angular, e \hat{x} é o vetor unitário ao longo da direção x , indicando que o campo elétrico oscila apenas ao longo deste mesmo eixo. Neste caso, a onda é polarizada linearmente ao longo da direção x .

Figura 2 - Representação esquemática de uma onda eletromagnética plana.



Fonte - Ricardo Simão Pereira Lopes: Polarização, energia e momento de ondas eletromagnéticas e fótons em diferentes referenciais inerciais.

A relação entre os campos elétrico e magnético numa onda polarizada linearmente é dada pela equação:

$$\vec{B}(z, t) = \frac{E_0}{c} \cdot \hat{y} \cdot \cos(kz - \omega t). \quad (2.23)$$

Isso evidencia que o campo magnético \vec{B} está sempre perpendicular ao campo elétrico \vec{E} , bem como à direção de propagação z , formando um sistema ortogonal, evidenciado na Figura 2.

2.2.6 Energia e momento de ondas eletromagnéticas

As ondas eletromagnéticas transportam tanto energia quanto momento linear. Esses conceitos são fundamentais na análise do comportamento de tais ondas e podem ser descritos matematicamente em termos das densidades de energia e fluxo de energia dos campos.

A densidade de energia eletromagnética total é derivada a partir da energia contida nos campos elétrico e magnético. Segundo a formulação apresentada por Griffiths (2005), a densidade de energia u é dada pela soma das contribuições dos campos elétrico e magnético:

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\vec{B}|^2 \right), \quad (2.24)$$

sendo ϵ_0 a permissividade no vácuo, μ_0 a permeabilidade no vácuo, \vec{E} o vetor campo elétrico e \vec{B} o vetor campo magnético.

Essa expressão mostra que a energia associada a uma onda eletromagnética está igualmente dividida entre os campos elétrico e magnético, quando propagada no vácuo. Como observado por Reitz, Milford e Christy (2009), essa simetria reflete-se na relação $|\vec{E}| = c |\vec{B}|$, onde c é a velocidade da luz. Substituindo essa relação na equação de densidade de energia, obtém-se:

$$u = \epsilon_0 |\vec{E}|^2 = \frac{|\vec{B}|^2}{\mu_0}. \quad (2.25)$$

Isso implica que, no vácuo, as energias armazenadas nos campos elétrico e magnético são iguais, um fato que se verifica tanto nas análises clássicas quanto nas mais modernas de eletrodinâmica.

O fluxo de energia transportada por uma onda eletromagnética é quantificado pelo vetor de Poynting, dado pela equação:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{E} \times \vec{B}. \quad (2.26)$$

Como descrito por Tipler (2004), o vetor de Poynting aponta na direção de propagação da onda e tem magnitude proporcional ao produto dos campos elétrico e magnético. Para uma onda eletromagnética senoidal no vácuo, o valor médio temporal do vetor de Poynting pode ser expresso como:

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot c |E_0|^2, \quad (2.27)$$

onde $\langle S \rangle$ representa a intensidade média da onda, e E_0 é a amplitude do campo elétrico. Esta equação mostra que a potência transportada por uma onda eletromagnética é proporcional ao quadrado da amplitude do campo elétrico. Essa relação direta entre a intensidade do campo e a energia transportada pela onda torna-se particularmente importante na análise de fenômenos como a radiação eletromagnética em antenas e a propagação de ondas em meios materiais. Como destacado por Griffiths (2005), o vetor de Poynting representa uma ferramenta fundamental para o entendimento do transporte de energia em sistemas eletromagnéticos.

Ondas eletromagnéticas também transportam momento linear, o que pode ser compreendido pela relação entre o vetor de Poynting e o momento da onda. A densidade de momento linear P é dada por:

$$P'' = \frac{\vec{S}}{c^2}. \quad (2.28)$$

Essa equação indica que o momento transportado por uma onda eletromagnética está diretamente relacionado ao fluxo de energia, ou seja, ao vetor de Poynting. A relação entre energia e momento é então expressa como:

$$P = \frac{u}{c} \hat{k}. \quad (2.29)$$

Isso implica que o momento está diretamente associado à densidade de energia da onda, e ambos são transportados na mesma direção. Como destacado por Reitz, Milford e Christy (2009), essa propriedade é central para a compreensão de fenômenos como a pressão de radiação, na qual ondas eletromagnéticas exercem força sobre superfícies ao transferir momento linear.

2.3 INTERAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS COM A MATÉRIA

A interação de ondas eletromagnéticas com a matéria, conforme descrita nos livros de Griffiths, Reitz, Milford, Christy, e Tipler, explora os fenômenos fundamentais da

Física envolvendo campos elétricos e magnéticos, e a maneira como eles interagem com os constituintes materiais, como elétrons, átomos e moléculas. As ondas eletromagnéticas, que consistem em campos elétricos e magnéticos perpendiculares entre si e oscilando no espaço, provocam diferentes tipos de respostas ao entrarem em contato com meios materiais. Essas respostas incluem processos como reflexão, refração, absorção, transmissão, dispersão e polarização.

2.3.1 Polarização elétrica e magnética

Quando uma onda eletromagnética interage com a matéria, o campo elétrico pode induzir uma polarização elétrica P , ou seja, uma separação de carga nas moléculas ou átomos que compõem o meio. Em materiais dielétricos, essa polarização leva a uma modificação do campo elétrico interno, alterando a permissividade elétrica do meio. De acordo com Reitz, Milford e Christy (2009), o campo elétrico efetivo dentro do material é dado por:

$$\vec{E}_{\text{eff}} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \vec{E} + \frac{P}{\epsilon_0}, \quad (2.30)$$

onde \vec{D} é o vetor deslocamento elétrico. Esse processo de polarização está associado à constante dielétrica do material, que influencia a velocidade de propagação das ondas dentro dele.

De modo semelhante, o campo magnético da onda pode induzir uma magnetização \vec{M} no material, que é a resposta dos dipolos magnéticos internos à excitação externa. Em materiais magnéticos, isso leva à definição de um campo magnético efetivo dentro do meio:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = -\vec{B} - \mu_0 \vec{M}. \quad (2.31)$$

Tanto a polarização quanto a magnetização influenciam as características de propagação das ondas eletromagnéticas no interior da matéria.

2.3.2 Reflexão e transmissão

Quando uma onda eletromagnética incide sobre a interface entre dois meios com diferentes índices de refração, parte da onda é refletida de volta ao meio original, enquanto outra parte é transmitida para o segundo meio. O comportamento da onda em tal interface pode ser descrito pelas equações de Fresnel, que fornecem os coeficientes de reflexão e transmissão baseados no ângulo de incidência da onda e nas propriedades dos materiais. Para uma onda com componente de campo elétrico perpendicular ao plano de incidência (*s-polarizada*), os coeficientes são:

$$r_s = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}; \quad (2.32)$$

$$t_s = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}, \quad (2.33)$$

sendo n_1 e n_2 os índices de refração dos dois meios, i o ângulo de incidência e t o ângulo de transmissão. Essas equações descrevem a fração da onda refletida e transmitida em termos dos ângulos de incidência e transmissão, bem como dos índices de refração dos meios envolvidos. A quantidade de energia refletida ou transmitida depende dos módulos quadrados dos coeficientes de Fresnel, correspondendo às intensidades das ondas refletidas e transmitidas.

2.3.3 Absorção e dispersão

Quando uma onda eletromagnética atravessa um meio material, parte de sua energia pode ser absorvida, resultando em uma atenuação da intensidade da onda ao longo do caminho de propagação. A absorção de ondas eletromagnéticas é descrita pela lei de Beer-Lambert, que expressa a relação entre a intensidade $I(z)$ da onda em uma distância z no meio e a intensidade inicial I_0 :

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z}, \quad (2.34)$$

com α sendo o coeficiente de absorção, uma característica dependente do material e da frequência da onda eletromagnética. Esse coeficiente reflete a probabilidade de interação dos fótons da onda com os átomos ou moléculas do meio.

A absorção ocorre devido à interação dos campos elétricos e magnéticos da onda com os constituintes atômicos e moleculares do material. Essa interação pode excitar os elétrons para estados de energia mais altos, convertendo a energia da onda eletromagnética em energia interna do material, o que se manifesta como calor.

Pode-se explicar a dispersão como um fenômeno em que a velocidade de propagação de uma onda eletromagnética depende da sua frequência, ou seja, de seu meio. Isso ocorre porque diferentes frequências de uma onda interagem de forma diferente com as partículas do material, resultando em índices de refração que variam com a frequência.

A relação entre a frequência angular ω e o número de onda k de uma onda eletromagnética em um meio dispersivo é dada por uma equação de dispersão:

$$\omega(k) = c \cdot k \cdot n(\omega), \quad (2.35)$$

sendo $n(\omega)$ o índice de refração do meio, que depende da frequência da onda. Nos materiais dispersivos, $n(\omega)$ não é constante, e varia conforme a interação da onda com o material.

3 DUALIDADE ONDA-PARTÍCULA

3.1 PRIMEIRAS CONCEPÇÕES

No século XVII, Isaac Newton desenvolveu a teoria corpuscular da luz, consolidada em sua obra *Opticks* (1704). Nessa abordagem, Newton propunha que a luz era composta por pequenas partículas, ou “corpúsculos”, que se propagavam em linha reta. Acreditava-se que elas obedeciam às leis da mecânica clássica, sendo atraídas ou repelidas ao entrar em contato com diferentes meios, o que explicava fenômenos como a reflexão e a refração. Para Newton, as diferentes cores visíveis correspondentes ao espectro da luz branca eram associadas a corpúsculos com propriedades distintas, como tamanhos variados. Essa teoria fornecia uma explicação satisfatória para efeitos como a propagação retilínea da luz e a formação de sombras, características típicas do comportamento esperado para partículas.

No entanto, encontrou-se dificuldades para explicar fenômenos mais complexos, como a difração e a interferência. A formação de padrões de interferência, nos quais duas ondas se sobrepõem, produzindo regiões de maior ou menor intensidade, não poderia ser descrita no contexto de partículas rígidas. No início do século XVIII, Christiaan Huygens, um físico holandês, propôs uma teoria alternativa: a luz seria uma onda que se propagava em um meio contínuo, chamado éter luminífero. Segundo essa teoria, cada ponto de uma frente de onda atuaria como uma nova fonte de ondas secundárias, permitindo a propagação da luz em todas as direções.

A teoria ondulatória de Huygens conseguia explicar a refração como uma alteração na velocidade da luz ao atravessar diferentes meios e descreve fenômenos como difração e interferência de forma mais intuitiva. Além disso, ela sugeria que a luz poderia se comportar como uma onda transversal, implicando que a direção de oscilação seria perpendicular à de propagação. Durante algum tempo, as teorias de Newton e Huygens coexistiram, mas devido ao prestígio de Newton e à simplicidade intuitiva da teoria corpuscular, sua abordagem prevaleceu na comunidade científica por quase um século.

No início do século XIX, a teoria ondulatória ganhou força graças aos experimentos de Thomas Young e Augustin Fresnel. Em 1801, Young realizou o célebre experimento da fenda dupla, no qual uma fonte de luz atravessa duas aberturas estreitas e projeta um padrão de franjas claras e escuras em uma tela. Esse padrão de interferência era impossível de ser explicado pela teoria corpuscular. Young interpretou corretamente o fenômeno como uma evidência de que a luz se comportava como uma onda, com as franjas escuras correspondendo a regiões de interferência destrutiva e as claras, a interferência construtiva.

Nos anos seguintes, Fresnel aprimorou a teoria ondulatória ao introduzir descrições matemáticas precisas para a difração e a polarização, fortalecendo ainda mais a visão da luz como um fenômeno ondulatório. Como observado por Reitz, Milford e Christy, “os resultados dos experimentos de Young e Fresnel colocaram a teoria corpuscular em xeque, tornando quase inevitável a aceitação da luz como uma onda” (Reitz *et al.*, 1993).

Mesmo com a consolidação da teoria ondulatória, algumas questões permaneceram em aberto. O modelo de Maxwell pressupunha a existência de um meio contínuo — o éter — para a propagação das ondas, mas experimentos como o de Michelson e Morley (1887) não conseguiram detectar o movimento da Terra através de tal meio, lançando dúvidas sobre sua existência. Além disso, certos fenômenos, como o efeito fotoelétrico, desafiavam a teoria ondulatória e exigiram uma nova abordagem no século XX. Dessa forma, o debate entre as abordagens corpuscular e ondulatória se manteve vivo.

A transição entre esses paradigmas marca o início de uma era em que a distinção entre ondas e partículas começaria a ser dissolvida. Como Eisberg e Resnick enfatizam, “a aceitação da teoria ondulatória foi uma etapa essencial, mas não final, na compreensão da natureza da luz; a verdadeira natureza quântica da radiação só emergiria plenamente com a introdução da dualidade onda-partícula” (Eisberg & Resnick, 2002).

3.1.1 A emergência de novos fenômenos: fótons e o Efeito fotoelétrico

No final do século XIX, a teoria ondulatória da luz parecia ser definitiva e bem estabelecida. Contudo, uma série de fenômenos experimentais começou a colocar essa visão em xeque. Um dos mais notáveis foi o efeito fotoelétrico, observado inicialmente por Heinrich Hertz em 1887 e estudado mais a fundo por Philipp Lenard. Esse efeito consistia na emissão de elétrons por certos materiais metálicos ao serem irradiados com luz. A teoria ondulatória previa que a energia transportada por uma onda luminosa seria proporcional à sua intensidade, o que implicaria que uma luz mais intensa deveria sempre ejetar elétrons, independentemente de sua frequência. No entanto, os resultados experimentais mostraram que isso não era verdade: apenas luz com uma frequência mínima (chamada frequência de corte) conseguia liberar elétrons, enquanto a intensidade da luz apenas afetava a quantidade, mas não a energia dos elétrons emitidos.

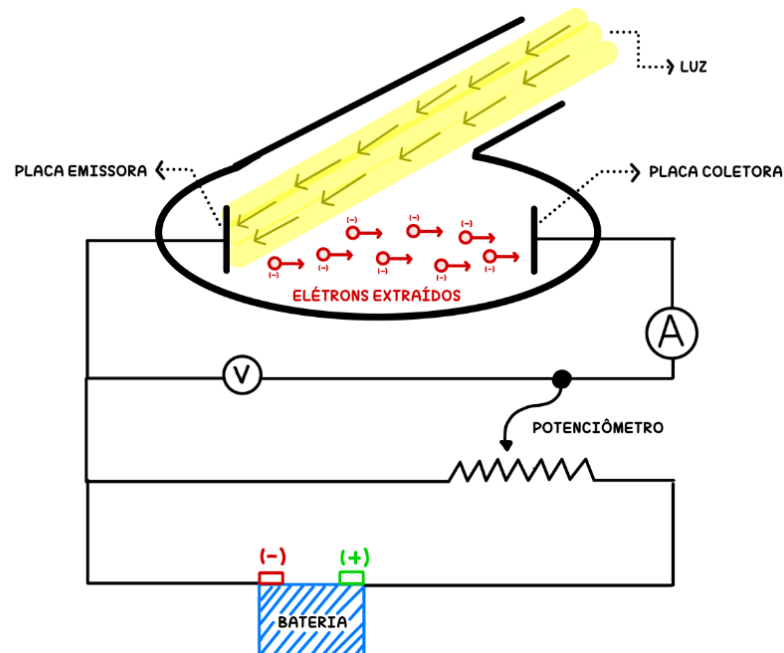
A teoria clássica previa que, ao aumentar a intensidade de uma onda luminosa (isto é, sua amplitude), haveria maior transferência de energia para os elétrons. Mas os experimentos revelaram que mesmo uma luz de baixa intensidade, se tivesse alta frequência, conseguia arrancar elétrons com energia significativa, enquanto luz intensa de baixa frequência não produzia efeito algum. Como já relatado, “os resultados experimentais do efeito fotoelétrico indicavam que a luz não podia ser compreendida apenas como uma onda contínua; alguma forma de quantização da energia estava em jogo” (Eisberg & Resnick, 2002).

Foi Albert Einstein, em 1905, quem forneceu a explicação teórica adequada para esse fenômeno, baseando-se na hipótese quântica de Max Planck, proposta inicialmente para explicar a radiação de corpo negro. Planck havia sugerido que a energia das ondas eletromagnéticas não era contínua, mas emitida em pacotes discretos, chamados *quanta*, cada um com energia dada por:

$$E = h \cdot \nu, \quad (3.1)$$

sendo ν a frequência de radiação. Einstein generalizou essa ideia, argumentando que a própria luz se propagava em pequenos pacotes de energia, que mais tarde seriam chamados de fótons. Segundo essa interpretação, cada fóton teria energia representada por (3.1), e a ejeção de elétrons do material metálico ocorreria apenas se a energia de um fóton fosse suficiente para superar a função trabalho do metal, que representa a energia mínima necessária para liberar um elétron.

Figura 3 - esquematização do efeito fotoelétrico.



Fonte - autoral.

Matematicamente, a energia cinética dos elétrons emitidos no efeito fotoelétrico pode ser expressa pela equação:

$$K_{\max} = h \cdot \nu - \phi, \quad (3.2)$$

onde K_{\max} é a energia cinética máxima do elétron e ϕ é a função trabalho do material. Ela implica que, se a frequência da luz for menor que um certo valor crítico, $\nu_c = \frac{h}{\phi}$, não haverá emissão de elétrons, independentemente da intensidade da luz.

Quando $\phi_{\text{emissor}} \neq \phi_{\text{receptor}}$, ocorre uma redistribuição de cargas entre os materiais, criando um potencial de contato natural entre eles. Esse potencial V_c é dado por:

$$eV_c = \phi_{\text{receptor}} - \phi_{\text{emissor}}. \quad (3.3)$$

- V_c atua como uma barreira que dificulta ou facilita a movimentação dos elétrons entre os materiais.
- Se $\phi_{\text{receptor}} > \phi_{\text{emissor}}$, V_c cria uma barreira adicional.
- Se $\phi_{\text{receptor}} < \phi_{\text{emissor}}$, V_c facilita o movimento dos elétrons.

"A interpretação de Einstein do efeito fotoelétrico forneceu evidências diretas da natureza corpuscular da luz, sugerindo que a energia eletromagnética é quantizada, um resultado que contrariava a visão puramente ondulatória herdada do eletromagnetismo clássico"(Griffiths, 1999).

Essa hipótese foi confirmada experimentalmente por Robert Millikan entre 1914 e 1916. Embora inicialmente cético quanto à proposta de Einstein, Millikan conduziu experimentos detalhados que mostram uma relação linear entre a energia cinética dos elétrons e a frequência da luz incidente, exatamente como previsto pela teoria quântica. Além disso, ele verificou que a constante de Planck, obtida a partir de suas medições, coincidia com o valor encontrado na análise da radiação de corpo negro.

"A confirmação experimental do efeito fotoelétrico consolidou a ideia de que a luz pode se comportar como uma partícula em certas condições, rompendo definitivamente com a visão clássica puramente ondulatória" (Tipler, 2004).

Outro fenômeno relevante que reforçava a quantização da luz foi o efeito Compton, descoberto por Arthur Compton em 1923. Nesse efeito, raios X ao colidirem com elétrons livres sofrem um desvio de comprimento de onda, que depende do ângulo de dispersão. Esse comportamento é facilmente explicado ao se tratar a radiação como uma partícula: durante a colisão, há uma transferência de momento e energia entre o fóton e o elétron, semelhante a uma colisão elástica entre duas partículas. A variação no comprimento de onda é dada pela equação:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e \cdot c}(1 - \cos\theta), \quad (3.4)$$

onde $\Delta\lambda$ é o aumento no comprimento de onda, m_e é a massa do elétron e θ é o ângulo de dispersão. Esse efeito não pode ser explicado de forma consistente pela teoria ondulatória da luz e representa mais uma evidência a favor do modelo corpuscular.

A interpretação quântica da luz, baseada na hipótese dos fótons, foi um marco fundamental na Física, pois mostrou que a luz podia se comportar tanto como onda quanto como partícula, dependendo do contexto experimental. Como Sakurai coloca, “a introdução da quantização da luz não apenas resolveu as anomalias da Física clássica, mas também inaugurou uma nova era na compreensão da natureza, na qual conceitos aparentemente contraditórios coexistem de forma coerente” (Sakurai, 2017).

Com a aceitação da existência dos fótons e da quantização da energia, a Física avançou para além das limitações da teoria ondulatória clássica, abrindo caminho para o desenvolvimento da mecânica quântica e para uma nova compreensão da natureza dual da matéria e da radiação.

3.2 A CONTRIBUIÇÃO DE DE BROGLIE E A UNIFICAÇÃO DA DUALIDADE

A dualidade onda-partícula, que inicialmente emergiu como uma tentativa de conciliar os aspectos corpusculares e ondulatórios da luz, foi estendida para a matéria em 1924 pelo físico francês Louis de Broglie. Em um de seus trabalhos, foi proposto que assim como a luz, partículas materiais, como elétrons, também deveriam exibir características tanto corpusculares quanto ondulatórias.

A inspiração veio da quantização da energia associada à radiação eletromagnética, como visto no efeito fotoelétrico e na radiação de corpo negro. Se a luz, que até então era compreendida como onda, podia apresentar comportamento corpuscular (em forma de fótons), então era razoável imaginar que partículas tradicionalmente tratadas como corpúsculos – como elétrons – poderiam, sob certas condições, exibir comportamentos ondulatórios. De Broglie propôs que toda partícula com momento p seria associada a uma onda com comprimento λ dado por:

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (3.5)$$

sendo $p = mv$ o momento linear da partícula e com m sendo a massa. Conhecido como comprimento de onda de de Broglie, tem-se uma medida direta da natureza ondulatória de qualquer partícula em movimento.

“A ideia de de Broglie sugeria uma relação fundamental entre a radiação e a matéria, postulando que ambos obedecem aos mesmos princípios quânticos e compartilham uma dualidade essencial” (Griffiths, 1999).

O físico também mostrou que essas ondas associadas às partículas obedeceriam a uma condição de fase, o que permite explicar certos fenômenos quando trata-se de interferência e difração. Em termos matemáticos, as ondas de de Broglie podem ser interpretadas como estacionárias em torno de trajetórias circulares específicas, como as observadas no átomo de Bohr. Neste modelo, os elétrons em um átomo só podem ocupar órbitas discretas nas quais o momento angular é quantizado, ou seja:

$$L = n \cdot \hbar; \quad (3.6)$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad (3.7)$$

sendo (3.6) a representação da constante de Planck reduzida, e n é um número inteiro positivo. De Broglie sugeriu que essa quantização do momento angular poderia ser compreendida de maneira mais natural se assumisse que o elétron em órbita ao redor do núcleo tem um comprimento de onda que se ajusta exatamente ao perímetro da órbita. Assim, a condição de quantização considerando o raio r é dada por:

$$n \cdot \lambda = 2\pi r. \quad (3.8)$$

Esse tratamento permitiu interpretar o comportamento dos elétrons em termos de interferência construtiva, reforçando a natureza ondulatória da matéria e explicando por que apenas certas órbitas específicas são permitidas.

A hipótese foi inicialmente uma conjectura teórica, mas recebeu confirmação experimental em 1927, quando Clinton Davisson e Lester Germer realizaram um experimento que demonstrou a difração de elétrons por um cristal de níquel. Nesse experimento, um feixe de elétrons colidiu com a superfície cristalina e produziu um padrão de difração semelhante ao produzido pela luz ao atravessar uma fenda dupla. A condição de interferência construtiva para esse sistema é dada por:

$$n\lambda = d \cdot \text{sen}\theta, \quad (3.9)$$

onde n é um número inteiro representando a ordem do máximo de interferência, d é a distância entre os planos cristalinos e θ é o ângulo de difração. O padrão de difração obtido para elétrons confirmou a validade da hipótese de de Broglie.

Esse resultado não poderia ser explicado pela mecânica clássica, mas se encaixava perfeitamente no que foi proposto pelo físico.

“A observação experimental da difração de elétrons foi uma confirmação espetacular da ideia de que as partículas materiais possuem propriedades ondulatórias, estabelecendo definitivamente a dualidade onda-partícula” (Tipler, 2004).

Outro experimento importante foi realizado por George Thomson, filho de J.J. Thomson, o descobridor do elétron. Curiosamente, enquanto o pai havia demonstrado que o elétron era uma partícula, o filho mostrou, por meio da difração de elétrons, que essa mesma partícula poderia exibir comportamento ondulatório. Esse tipo de complementaridade é uma característica central da mecânica quântica, em que os conceitos de onda e partícula não são excludentes, mas coexistem de maneira interdependente.

A teoria foi incorporada por Erwin Schrödinger na formulação de sua famosa equação de onda em 1926. A equação proposta pelo físico é a base da mecânica quântica não relativística e descreve a evolução temporal do estado quântico de uma partícula. Nesta interpretação, o comportamento de uma partícula é descrito por uma função de onda (r,t) que contém todas as informações sobre a probabilidade de encontrar a partícula em uma dada posição e momento. “A função de onda é a manifestação matemática mais clara da dualidade proposta por de Broglie, encapsulando a natureza probabilística e ondulatória das partículas quânticas” (Reitz *et al.*, 1993).

A desenvoltura teórica e a confirmação experimental, em complemento com uma nova perspectiva, levou à formulação do princípio da complementaridade por Niels Bohr, que argumentava que os aspectos ondulatórios e corpusculares são dependentes e que ambos são necessários para uma descrição completa dos fenômenos quânticos.

“a unificação da dualidade onda-partícula, iniciada por de Broglie e refinada por Schrödinger e Bohr, marcou a transição definitiva para uma nova era na Física, onde a certeza determinística foi substituída pela probabilidade” (Eisberg & Resnick).

3.2.1 Energia relacionada ao momento: abordagem relativística

A expressão para o comprimento de onda de de Broglie é válida para velocidades relativamente baixas. No entanto, quando as partículas se movem a velocidades próximas à da luz, é necessário adotar uma abordagem relativística. A energia total relativística E de uma partícula é dada por:

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2, \quad (3.10)$$

sendo m_0 a massa de repouso da partícula. A energia cinética é obtida subtraindo a energia de repouso m_0c^2 da energia total:

$$K = E - m_0c^2. \quad (3.11)$$

Para partículas sem massa de repouso, como o fóton, o comprimento de onda é dado por:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{E}. \quad (3.12)$$

3.2.2 Integração com a mecânica quântica: a função de onda

Erwin Schrödinger, em 1926, introduziu a função de onda $\psi(\mathbf{r}, t)$ para descrever o comportamento de uma partícula quântica, estabelecendo a equação como fundamental no que diz respeito à previsão de seus comportamentos em diversas situações. Em sistemas ligados, como o átomo de hidrogênio, a solução da equação fornece os níveis de energia quantizados, explicando fenômenos como a emissão e absorção de fótons por transições eletrônicas (Eisberg & Resnick, 1985). A função de onda é uma solução da equação de Schrödinger, dada por:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\mathbf{r})\psi, \quad (3.13)$$

onde i é a unidade imaginária, $V(\mathbf{r})$ é o potencial na posição \mathbf{r} , e ∇^2 é o operador laplaciano. Já a função de onda $\psi(\mathbf{r}, t)$, seu módulo ao quadrado, $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$, representa a densidade de probabilidade de encontrar a partícula em uma posição específica no tempo t . Esta equação descreve como a função de onda ψ evolui no tempo e como é influenciada pelo potencial $V(r)$, o que permite prever o comportamento de partículas em sistemas quânticos.

A relação de de Broglie é essencial para conectar a função de onda com o momento linear. Em uma partícula livre (ou seja, sem potencial, $V = 0$), a solução da equação de Schrödinger é uma onda plana dada por:

$$\psi(r, t) = Ae^{i(\vec{k}\cdot r - \omega t)}, \quad (3.14)$$

onde \vec{k} é o vetor de onda relacionado ao momento pela relação $p = \hbar\vec{k}$, e ω é a frequência angular, relacionada à energia pela expressão $E = \hbar\omega$. Dessa forma, o comprimento de onda da partícula é:

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|} = \frac{h}{p}, \quad (3.15)$$

reproduzindo a expressão original de de Broglie.

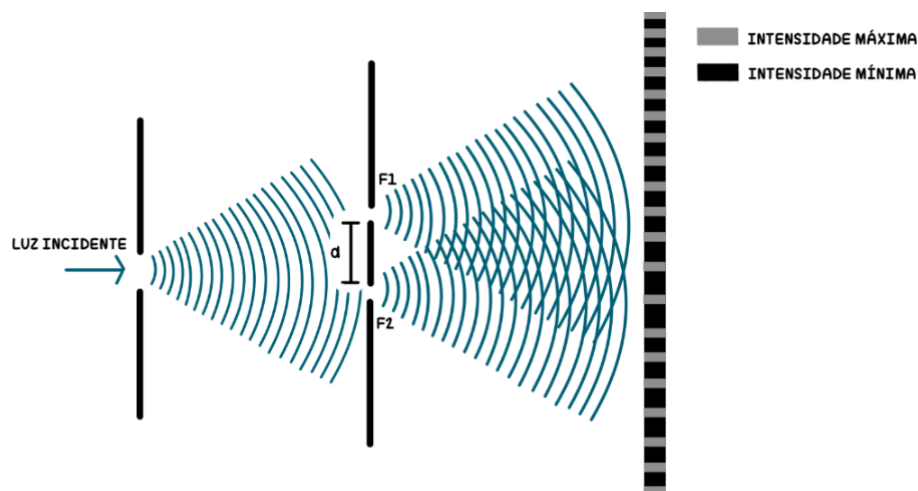
3.3 EXPERIMENTO DA FENDA DUPLA

O experimento foi inicialmente realizado por Thomas Young em 1801 para demonstrar a natureza ondulatória da luz. Foi utilizada uma fonte de luz monocromática que passava por duas fendas estreitas, resultando em um padrão de interferência na tela oposta. Com o advento da mecânica quântica, o experimento foi adaptado para investigar também a natureza dos elétrons, revelando a dualidade fundamental das partículas quânticas.

3.3.1 Configuração experimental

- **Fonte de Partículas:** Uma fonte de partículas, como um laser (para fótons) ou um canhão de elétrons, emite partículas que se dirigem em direção a uma barreira com duas fendas;
- **Fendas:** Duas fendas paralelas, separadas por uma distância d , são criadas na barreira. As fendas devem ser suficientemente estreitas e próximas uma da outra para permitir que a interferência ocorra;
- **Detector:** Uma tela ou detector é colocado a uma distância L da barreira para registrar as partículas que passam pelas fendas. Este detector pode ser uma tela fotográfica ou um detector de elétrons que mede a incidência de partículas.

Figura 4 - esquematização do experimento de fenda dupla.



Fonte - autoral.

Quando a fonte emite partículas de forma contínua, um padrão de interferência emerge no detector. Esse padrão é caracterizado por franjas alternadas de intensidade máxima (clara) e mínima (escura), resultante da superposição das ondas provenientes das duas fendas. O padrão de interferência pode ser descrito pelas condições de interferência construtiva e destrutiva.

A interferência construtiva ocorre quando as cristas de duas ondas coincidem. A condição é dada por:

$$d \cdot \text{sen}\theta = m \cdot \lambda, \quad (3.16)$$

onde d é a distância entre as fendas, θ é o ângulo de desvio em relação à linha normal à barreira e m é um inteiro (ordem de interferência).

A interferência destrutiva ocorre quando uma crista de uma onda coincide com um vale de outra onda. Sua condição é dada por:

$$d \cdot \text{sen}\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda. \quad (3.17)$$

Quando elétrons são utilizados como partículas, a situação torna-se ainda mais intrigante. Mesmo quando os elétrons são disparados um a um em direção às fendas, após um tempo, um padrão de interferência semelhante é observado no detector. Isso sugere que cada elétron age como uma onda, interferindo consigo mesmo. Este fenômeno pode ser descrito utilizando a função de onda de de Broglie, já descrita anteriormente.

3.3.2 O papel da observação e a interpretação de Copenhague

Um aspecto fascinante do experimento da fenda dupla é a influência da observação. Se um dispositivo de medição é introduzido para detectar por qual fenda um elétron passa, o padrão de interferência desaparece. Em vez disso, observa-se um padrão de duas franjas, como seria esperado para partículas clássicas. Isso implica que a ação de medir pela qual fenda a partícula passa altera o comportamento da partícula. Esse efeito é uma ilustração clara do princípio da incerteza de Heisenberg, que estabelece que não é possível conhecer simultaneamente a posição e o momento de uma partícula com precisão arbitrária (Griffiths, 2005; Sakurai, 2017).

A análise mais comum do experimento em questão é a interpretação de Copenhague, proposta por Niels Bohr e Werner Heisenberg. Foi sugerido que a função de onda representa uma superposição de todos os estados possíveis da partícula até que uma

medição seja realizada, momento em que a função de onda colapsa em um dos estados possíveis. Essa interpretação estabelece que a realidade quântica é fundamentalmente probabilística, desafiando as noções determinísticas da Física clássica (Eisberg & Resnick, 1985).

Um dos aspectos centrais da interpretação de Copenhague é o conceito de colapso da função de onda. Ele se refere à mudança abrupta e não determinística da função ψ , que descreve um sistema quântico, após a realização de uma medição. Antes da medição, ela representa uma superposição de vários estados possíveis, cada um associado a uma certa probabilidade de ocorrer. Após a medição, essa superposição "colapsa" para um único estado correspondente ao resultado medido.

Matematicamente, a função de onda antes da medição é uma combinação linear de estados $|\phi_n\rangle$ com probabilidades c_n :

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |\phi_n\rangle, \quad (3.18)$$

onde $|\phi_n\rangle$ são os autovalores do operador associado à grandeza que será medida (como energia ou posição), e c_n são os coeficientes complexos que indicam a amplitude de probabilidade associada a cada estado. O quadrado do módulo desses coeficientes, $|c_n|^2$, representa a probabilidade de que o sistema esteja no estado $|\phi_n\rangle$ após a medição. Um exemplo é a função de onda associada a uma partícula em uma caixa, onde cada $|\phi_n\rangle$ corresponde a um estado de energia bem definido.

Quando uma medição é realizada, a função de onda inicial, que pode representar uma superposição de múltiplos estados, colapsa para um único estado, com a probabilidade de encontrar o sistema nesse estado dada por $|c_n|^2$. Formalmente, se a medição revela que o sistema está no estado $|\phi_m\rangle$, então a função de onda do sistema após a medição se torna:

$$|\psi\rangle \rightarrow |\phi_m\rangle, \quad (3.19)$$

onde $|\phi_m\rangle$ é o estado correspondente ao resultado da medição.

4 ONDAS GRAVITACIONAIS

4.1 INTRODUÇÃO ÀS ONDAS GRAVITACIONAIS - CONTEXTO HISTÓRICO

As ondas gravitacionais são perturbações no tecido do espaço-tempo, propagando-se na forma de ondas. Essas perturbações são previstas pela Teoria da Relatividade Geral de Albert Einstein, publicada em 1916. Elas surgem de sistemas de massa acelerada, de modo análogo às ondas eletromagnéticas, que são geradas por cargas elétricas aceleradas. No entanto, a natureza dessas duas ondas é fundamentalmente diferente, pois as ondas gravitacionais envolvem a deformação do espaço-tempo em si, enquanto as ondas eletromagnéticas correspondem à propagação de campos elétricos e magnéticos no espaço.

Einstein, ao reformular a gravidade sob a ótica da relatividade geral, mostrou que ela não é uma força mediada por uma partícula (como no eletromagnetismo), mas sim a curvatura do espaço-tempo causada por massas e energia. Sob certas condições, alterações nessa curvatura podem se propagar como ondas. A previsão teórica de Einstein indicava que sistemas com massas massivas e em movimento acelerado, como sistemas binários de buracos negros ou estrelas de nêutrons, seriam fontes potenciais de ondas gravitacionais.

No entanto, acreditava-se que essas ondas seriam extremamente difíceis de detectar, devido à fraqueza intrínseca da interação gravitacional comparada à eletromagnética (Tipler, 2008). Por exemplo, enquanto uma antena de rádio pode facilmente detectar ondas eletromagnéticas de baixa intensidade, a observação de ondas gravitacionais exige o uso de interferômetros, como o LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) e o VIRGO, que medem deslocamentos na escala de frações de um átomo (Aguiar *et al.*, 2008).

Por décadas, as ondas gravitacionais permaneceram apenas uma previsão teórica. Foi apenas em 2015 que o observatório LIGO realizou a primeira detecção direta de uma onda gravitacional, confirmando a fusão de dois buracos negros. Esse evento, anunciado em 2016, não apenas confirmou uma das previsões mais importantes da relatividade geral, mas também inaugurou a astronomia de ondas gravitacionais, uma nova janela de observação do universo (Aguiar *et al.*, 2008).

Essa observação permite a detecção de eventos astrofísicos que antes eram inacessíveis pela astronomia tradicional, baseada em ondas eletromagnéticas. Buracos negros binários, por exemplo, não emitem luz, mas podem ser detectados por meio das ondas gravitacionais que emitem ao se fundirem. Essa nova forma de análise promove uma abordagem multi-mensageira, combinando dados eletromagnéticos e gravitacionais para aprofundar a compreensão do universo (Tipler, 2008).

4.1.1 Contexto teórico

Como citado anteriormente, ondas gravitacionais surgem no contexto da Teoria da Relatividade Geral, sendo uma consequência direta da descrição geométrica da gravidade. De acordo com essa teoria, a presença de massa e energia deforma o espaço-tempo, criando uma curvatura que influencia o movimento dos corpos. A equação fundamental da relatividade geral é expressa pelo tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, que descreve a curvatura do espaço-tempo, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento, e c é a velocidade da luz no vácuo. Essa formulação revela que, assim como perturbações em um campo eletromagnético podem gerar ondas eletromagnéticas, variações na distribuição de massa e energia podem criar ondas no espaço-tempo.

As ondas gravitacionais podem ser compreendidas ao linearizar as equações de campo da relatividade geral em uma região onde o campo gravitacional é fraco e as variações na métrica do espaço-tempo são pequenas. Nessa aproximação, a métrica $g_{\mu\nu}$, que é a métrica do espaço-tempo, pode ser decomposta como:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski (a métrica plana do espaço-tempo na relatividade especial), e $h_{\mu\nu}$ é uma pequena perturbação sobre essa métrica, ou seja, $h_{\mu\nu} \ll 1$. Essa abordagem simplifica as equações de Einstein, permitindo que sejam tratadas como uma equação de onda, semelhante àsquelas encontradas na teoria eletromagnética:

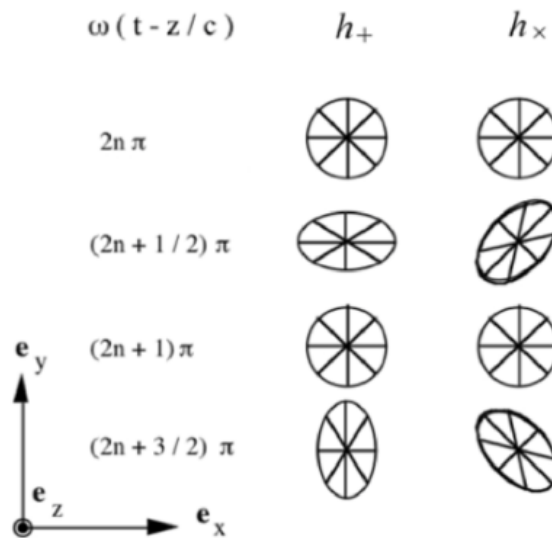
$$\square h_{\mu\nu} = 0, \quad (4.3)$$

onde $\square = \partial^\alpha \partial_\alpha$ É o operador d'Alembertiano, que descreve a propagação das perturbações no espaço-tempo. Essa equação sugere que as ondas gravitacionais são soluções das equações lineares de onda, propagando-se com a velocidade da luz no vácuo, c .

Diferentemente das ondas eletromagnéticas, que são descritas por campos vetoriais e possuem duas polarizações transversais, as ondas gravitacionais são caracterizadas por suas polarizações tensoriais. A solução da equação linearizada implica em duas polarizações independentes, chamadas de polarização $+$ e polarização \times . Elas deformam o espaço de maneira ortogonal entre si, produzindo alongamentos e compressões em direções perpendiculares à propagação da onda, determinando basicamente a forma como ela oscila no espaço (Aguiar *et al.*, 2008).

Pode-se considerar uma onda gravitacional se propagando ao longo de um determinado eixo z , na direção positiva z^+ , de forma perpendicular ao plano xy (Figura 5). Sob a influência da polarização $+$, um anel de partículas inicialmente em repouso e disposto em um formato semelhante a um círculo, começaria a oscilar, alternando entre alongamento e compressão ao longo dos eixos x e y , que são perpendiculares entre si. Por outro lado, na polarização \times , essa mesma circunferência também oscilaria no plano perpendicular ao eixo z , mas agora com as contrações e expansões ocorrendo em direções inclinadas a 45° em relação aos eixos x e y .

Figura 5 - Deformação de um círculo devido a forças induzidas por ondas h_+ ou h_\times



Fonte - O. D. Aguiar, “Detectores de Ondas Gravitacionais”, Cad. Astro., vol. 2, nº 2, p. 42, ago. 2021.

Esses modos são padrões distintos de deformação que uma onda gravitacional produz ao passar por uma região do espaço. O parâmetro $\omega(t - \frac{z}{c})$ indica a fase da onda ao longo do tempo. A ação dessas polarizações pode ser escrita simbolicamente como:

$$h_+ = A \cos(kx - t); \quad (4.4)$$

$$h_\times = A \sin(kx - t), \quad (4.5)$$

onde A é a amplitude da onda gravitacional, k é o número de onda, ω é a frequência angular, e t é o tempo. Pode-se também definir a amplitude de deformação da onda, dada por:

$$A = \sqrt{h_+^2 + h_\times^2}. \quad (4.6)$$

4.2 PRINCIPAIS FONTES DE ONDAS GRAVITACIONAIS

Fontes de ondas gravitacionais são eventos ou sistemas astrofísicos que causam distúrbios no espaço-tempo devido ao movimento acelerado de grandes massas ou pela interação entre objetos massivos. Essas fontes geram ondas que se propagam pelo universo, transmitindo informações sobre o comportamento e a dinâmica envolvida.

4.2.1 Supernovas e eventos cataclísmicos

Quando trata-se de uma supernova, tem-se que uma estrela massiva esgota seu combustível nuclear, colapsando sob a própria gravidade. Esse colapso pode levar à formação de uma estrela de nêutrons ou de um buraco negro e, dependendo da simetria do processo, gera ondas gravitacionais. A emissão dessas ondas depende de como a matéria é redistribuída durante o colapso, e a intensidade das ondas aumenta se houver assimetrias significativas.

No caso de colapsos assimétricos, como uma supernova em que uma parte do núcleo da estrela colapsa mais rapidamente do que outra, a emissão de ondas gravitacionais pode ser significativa. Estrelas de nêutrons recém-formadas, girando rapidamente e com deformações (como montanhas em sua superfície), também podem ser fontes contínuas de ondas gravitacionais. O comportamento dessas estrelas é modelado utilizando o formalismo relativístico para descrever a estrutura interna e a dinâmica rotacional (Eisberg & Resnick, 1985).

Além disso, a emissão de ondas gravitacionais pode ocorrer durante os processos de instabilidade nas fases finais de uma supernova. Modelos hidrodinâmicos sugerem que a instabilidade da colisão e outras formas de turbulência podem amplificar as ondas gravitacionais. Elas, no entanto, são difíceis de detectar diretamente, pois a energia emitida é dispersa e muitas vezes eclipsada por outras formas de radiação eletromagnética. Estudos, como os de Aguiar (2011), destacam a importância de complementar essas observações com interferômetros como os já citados anteriormente, que possuem sensibilidade para captar essas assinaturas.

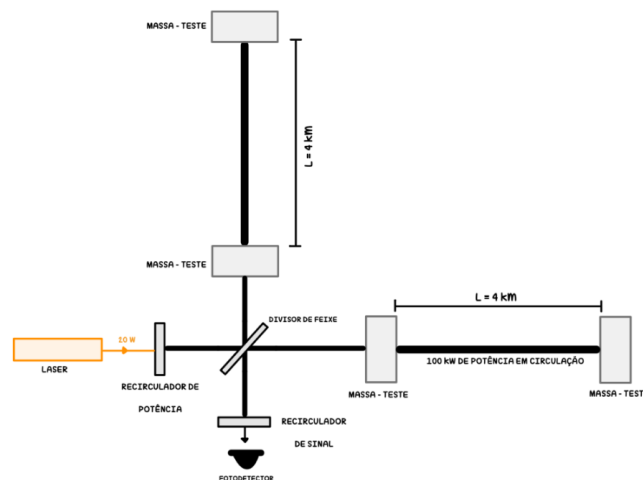
4.3 DETECÇÃO DE ONDAS GRAVITACIONAIS

O funcionamento de um interferômetro como detector de ondas gravitacionais é baseado em uma aplicação precisa da interferometria ótica para medir variações nas distâncias entre espelhos causadas pela passagem de uma onda gravitacional. Esses detectores são projetados para captar deformações extremamente pequenas no espaço-tempo.

Um interferômetro funciona enviando um feixe de laser dividido em duas direções perpendiculares por um divisor de feixes. Cada um viaja por braços longos (geralmente de alguns quilômetros) e reflete em espelhos posicionados nas extremidades desses braços, retornando para se recombinar no divisor de feixe. Em condições normais, os dois feixes se recombinam de maneira que suas ondas interfiram destrutivamente, gerando uma intensidade mínima de luz no detector. Entretanto, quando uma onda gravitacional passa pelo detector, há uma alteração no comprimento dos braços de forma diferencial. Isso faz com que as ondas de luz retornem com fases distintas, alterando o padrão de interferência e permitindo que a presença da onda gravitacional seja detectada (Griffiths, 1999; Reitz *et al.*, 2009).

O LIGO, com seus dois detectores localizados nos Estados Unidos (Hanford e Livingston), foi pioneiro na detecção de ondas gravitacionais em 2015, captando a fusão de dois buracos negros. Seus braços têm 4 km de comprimento e utilizam lasers ultra estáveis e sistemas de suspensão avançados para isolar os espelhos de vibrações externas. O VIRGO, localizado na Itália, é semelhante ao LIGO em conceito, mas tem braços de 3 km e tecnologias adicionais de amortecimento sísmico, tornando-o capaz de operar em sincronia com o LIGO e aumentar a precisão na triangulação das fontes de ondas gravitacionais (Aguiar, 2011).

Figura 6 - esquematização do Esquematização do interferômetro LIGO.



Fonte - autoral.

O interferômetro Mario Schenberg, por sua vez, é um detector de massa ressonante esférica desenvolvido no Brasil. Diferente do LIGO e do VIRGO, que utilizam interferometria ótica, o Schenberg foi projetado para detectar ondas gravitacionais por meio da ressonância de uma esfera metálica resfriada a temperaturas criogênicas. Quando uma onda gravitacional passa, ela provoca oscilações na esfera, e essas oscilações são medidas por sensores acoplados à superfície. Embora a sensibilidade do Schenberg seja inferior à dos interferômetros a laser, ele é capaz de complementar as observações ao atuar em uma faixa de frequência específica (Aguiar *et al.*, 2008).

A principal diferença entre interferômetros a laser e detectores de massa ressonante está na metodologia de detecção. Os primeiros medem diretamente variações minúsculas nos comprimentos dos braços, enquanto os detectores ressonantes como o Schenberg registram variações na frequência natural de oscilação de um objeto maciço. Além disso, interferômetros são mais sensíveis a faixas amplas de frequência e são capazes de detectar eventos únicos e rápidos, como fusões de buracos negros, enquanto detectores ressonantes têm maior estabilidade em frequências específicas e são menos suscetíveis a ruídos térmicos, mas ainda não atingiram a sensibilidade necessária para detectar eventos como aqueles observados pelo LIGO e VIRGO.

5 CONCLUSÃO

A conclusão deste trabalho busca sintetizar as principais reflexões e resultados alcançados ao longo da análise das ondas eletromagnéticas, dualidade onda-partícula e ondas gravitacionais. Esses fenômenos, embora distintos em suas naturezas e contextos, permitem estabelecer conexões históricas devido à ordem de acontecimento sequencial, demonstrando como a Física avança tanto pela especialização quanto pela convergência de diferentes campos de estudo. Ao integrar conceitos da teoria eletromagnética, da mecânica quântica e da relatividade geral, este estudo reforça a importância de uma abordagem interdisciplinar na compreensão da natureza.

As ondas eletromagnéticas, demonstradas pelas equações de Maxwell, continuam sendo uma base indispensável para o desenvolvimento e compreensão de fenômenos naturais, desde a propagação de luz até a transmissão de dados via rádio. Já a dualidade onda-partícula, conforme apresentada por autores como Eisberg e Resnick (1985), desafia o modelo clássico ao introduzir a incerteza e a probabilidade como aspectos fundamentais da realidade microscópica. A natureza dual de partículas como elétrons e fótons exemplifica a complexidade e elegância das leis quânticas, unificando comportamentos aparentemente opostos em uma mesma estrutura teórica.

No âmbito da relatividade, a recente confirmação das ondas gravitacionais representa um marco histórico, validando previsões feitas por Einstein há mais de um século e inaugurando uma nova era na Astrofísica experimental. Interferômetros como LIGO e VIRGO demonstraram a capacidade da ciência moderna de detectar perturbações extremamente sutis no espaço-tempo, abrindo uma nova janela de observação para eventos como a fusão de buracos negros e estrelas de nêutrons. A complementaridade desses resultados com a Astrofísica tradicional amplia significativamente nosso entendimento sobre a origem e evolução do universo (Aguiar, 2011; Pathria, 2003).

A importância da experimentação é outra conclusão central deste estudo. A capacidade de medir variações na métrica do espaço-tempo com interferômetros a laser e detectores de massa ressonante, como o projeto brasileiro Mário Schenberg, demonstra como o desenvolvimento tecnológico e a pesquisa básica se complementam mutuamente. Cada avanço instrumental não apenas confirma teorias preexistentes, mas também abre novas questões e possibilidades, reforçando o caráter dinâmico da ciência (Aguiar *et al.*, 2008).

REFERÊNCIAS

- Griffiths, D. J. **Eletrodinâmica**. 3. ed. São Paulo: Pearson Edition, 2011.
- Reitz, J. R.; Milford, F. J.; Christy, R. W. **Fundamentos da Teoria Eletromagnética**. 17^a tiragem. Rio de Janeiro: Campus/Elsevier, 1982.
- Tipler, P. A. **Física**, Vol. 1, 4^a ed. Guanabara Dois, 2000 (ou Vol. 2, 2^a ed., LTC Editora, 1999).
- Eisberg, R.; Resnick, R. **Física Quântica: Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas**. Rio de Janeiro: Campus Ltda, 1979.
- Sakurai, J. J. **Modern Quantum Mechanics**. New York: Addison-Wesley, 1994.
- Pathria, R. K. **The Theory of Relativity**. 2. ed. New York: Pergamon Press, 2003.
- Aguiar, O. D. et al. **The Schenberg spherical gravitational wave detector: the first commissioning runs**. *Class. Quantum Grav.*, v. 25, p. 114042, 2008.
- Aguiar, O. D. **Detectores de Ondas Gravitacionais**. *Cad. Astro.*, v. 2, n. 2, p. 42, ago. 2021.
- Aguiar, O. D. **Past, present and future of the Resonant-Mass gravitational wave detectors**. *Res. Astron. Astrophys.*, 2011.
- Lopes, R. S. P. **Polarização, energia e momento de ondas eletromagnéticas e fótons em diferentes referenciais inerciais**. Dissertação (Mestrado em Física) — Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Belo Horizonte, 2017.
- Moreira, S. V. **Experimento da Fenda Dupla: Dualidade Onda-Partícula e sua Quantificação e um Exemplo de Tomografia**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, 2014.
- Lima, N., Cavalcanti, C., Ostermann, F. **Concepções de Dualidade Onda-Partícula: Uma Proposta Didática Construída a Partir de Trechos de Fontes Primárias da Teoria Quântica**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 43, e20200270, 2021
- Suttini, R. S., Caluzi, J. J., Errobidart, N. C. G. **Tentativas Clássicas de Interpretação do Efeito Fotoelétrico – Parte 1: As Hipóteses de Philipp Lenard, Arthur Haas e J.J. Thomson**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 46, e20230369, 2024.