

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

MARIA ISABEL IGUTI

Tensor Energia-Momento para partículas de spin-3/2

Guaratinguetá

2024

Maria Isabel Iguti

Tensor Energia-Momento para partículas de spin-3/2

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Física.

Orientador: Profº Dr. Elias Leite Mendonça
Coorientador:

Guaratinguetá

2024

I24t	Iguti, Maria Isabel Tensor energia-momento para partículas de spin-3/2 / Maria Isabel Iguti - Guaratinguetá, 2024. 53 f : il. Bibliografia: f. 52 Trabalho de Graduação em Física – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2024. Orientador: Prof. Dr. Elias Leite Mendonça 1. Relatividade especial (Física). 2. Férmions. 3. Mecânica analítica. 4. Teoria clássica de campos. I. Título. CDU 530.12
------	---

Luciana Máximo
Bibliotecária/CRB-8 3595

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

MARIA ISABEL IGUTI

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO
REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE "GRADUANDO EM FÍSICA"

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM
FÍSICA

Profº Dr. ELIAS LEITE MENDONÇA
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:



Documento assinado digitalmente
ELIAS LEITE MENDONÇA
Data: 13/01/2025 11:01:36-0300
Verifique em <https://validar.j6.gov.br>

Profº Dr. Elias Leite Mendonça
Orientador/UNESP-FEG



Documento assinado digitalmente
SAULO HENRIQUE PEREIRA
Data: 06/01/2025 23:47:59-0300
Verifique em <https://validar.j6.gov.br>

Profº Dr. Saulo Henrique Pereira
UNESP-FEG



Documento assinado digitalmente
MARCIO EDUARDO DA SILVA ALVES
Data: 14/01/2025 14:50:37-0300
Verifique em <https://validar.j6.gov.br>

Profº Dr. Márcio Eduardo da Silva Alves
UNESP-Campus SJC
Novembro , 2024

DADOS CURRICULARES

MARIA ISABEL IGUTI

NASCIMENTO 31/01/2001 - São José dos Campos / SP

FILIAÇÃO Fabio Daizo Iguti
Ana Cristina Ramos Iguti

Dedico este trabalho à minha querida família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, por tornar esse sonho possível, em especial à minha mãe Cristina, meu pai Fabio, minha tia Antônia e meu tio Edgar. Muito obrigada pelo apoio e paciência.

Fico grata aos amigos que fiz durante esses anos de graduação, em especial a minha amiga Amanda, que ouviu horas sobre o tensor energia-momento.

Agradeço também a todos os professores que fizeram parte da minha trajetória, muito obrigada pelo conhecimento. Agradeço também ao meu companheiro de estudos, Husdon, obrigada pelas horas de estudo e pelo apoio.

Este trabalho contou com o apoio da(s) seguinte(s) entidade(s):

FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo

Processo: 2022/14199-2.

RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo inicial introduzir o formalismo lagrangiano, afim de enunciar o princípio de mínima ação, este será necessário para obtenção da equação de campo de Einstein para o vácuo e do tensor energia-momento. Posteriormente, partindo das transformações de Galileu seguidas pelas transformações de Lorentz estabelecemos as bases matemáticas do chamado espaço de Minkowski. Isso nos permitiu estabelecer objetos geométricos fundamentais da relatividade geral, tais como, o tensor de Riemann e suas contrações com a métrica. Tais resultados são utilizados para a obtenção das equação de Einstein no vácuo. Em seguida, obteve-se o tensor energia-momento canônico, a partir do teorema de Noether e do princípio de mínima ação, e observou-se que este não era adequado para se igualar ao tensor de Einstein, pois este não era simétrico, então utilizou-se o método de simetrização de Belinfante-Rosenfeld afim de simetrizar o tensor energia-momento canônico. Ainda, apresentamos o método da métrica, a qual é possível obter o tensor energia-momento simétrico. Aplicamos esses métodos para teoria de Maxwell, Dirac e Rarita-Schwinger. Em que, para as teorias de Dirac e Rarita-Schwinger tratamos das sutilezas de se lidar com férmions, para o cálculo do tensor energia-momento.

PALAVRAS-CHAVE: tensor energia-momento; relatividade geral; férmions.

ABSTRACT

The present work's initial objective was to introduce the Lagrangian formalism, in order to state the principle of least action, which will be necessary to obtain Einstein's field equation for the vacuum and the energy-momentum tensor. Subsequently, starting from Galileo's transformations followed by Lorentz's transformations, we established the mathematical foundations of the so-called Minkowski space. This allowed us to establish fundamental geometric objects of general relativity, such as the Riemann tensor and its contractions with the metric. Such results are necessary to derive Einstein's equations in a vacuum. Then, the canonical energy-momentum tensor was obtained, based on Noether's theorem and the principle of least action, and it was observed that it was not suitable to equal Einstein's tensor, because it's not symmetric, so the method of Belinfante-Rosenfeld symmetrization in order to symmetrize the canonical energy-momentum tensor. Furthermore, we present the metric method, which makes it possible to obtain the symmetric energy-momentum tensor. We apply these methods to Maxwell, Dirac and Rarita-Schwinger theory. In which, for the Dirac and Rarita-Schwinger theories we deal with the subtleties of dealing with fermions, for the calculation of the energy-momentum tensor.

KEYWORDS: energy momentum tensor; general relativity; fermions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Movimento relativo entre referenciais S e S'	16
----------	--	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	MECÂNICA CLÁSSICA	14
2.1	FORMALISMO LAGRANGIANO E HAMILTONIANO	14
3	RELATIVIDADE RESTRITA	16
3.1	TRANSFORMAÇÃO DE GALILEU	16
3.2	AS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ	17
4	TEORIA DE GRUPOS	20
4.1	INTRODUÇÃO À TEORIA DE GRUPOS	20
4.2	GRUPO DE LIE	21
4.3	GRUPO $SO(3)$	21
4.4	GRUPO $SU(2)$	22
4.5	GRUPO DE LORENTZ	25
5	RELATIVIDADE GERAL	27
5.1	CONEXÃO AFIM E TENSOR MÉTRICO	27
5.2	TENSOR DE RIEMANN E SUAS CONTRAÇÕES	29
5.3	EQUAÇÃO DE EINSTEIN	30
6	TENSOR ENERGIA-MOMENTO	33
6.1	TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS	34
6.2	TEOREMA DE NOETHER	35
6.2.1	Invariância por translação	37
6.3	APLICAÇÃO À TEORIA DE MAXWELL	38
6.4	CORREÇÃO VIA BELINFANTE-ROSENFELD	40
6.5	MÉTODO DA MÉTRICA OU MÉTODO DE HILBERT	42
7	TENSOR ENERGIA-MOMENTO PARA PARTÍCULAS DE SPIN- 1/2	45
7.1	CORREÇÃO DE BELINFANTE-ROSENFELD	46
7.2	MÉTODO DA MÉTRICA	46
8	TENSOR ENERGIA-MOMENTO PARA PARTÍCULAS DE SPIN- 3/2	48
8.1	TENSOR ENERGIA-MOMENTO VIA TEOREMA DE NOETHER	49
8.2	TENSOR ENERGIA-MOMENTO VIA BELINFANTE-ROSENFELD	49
8.3	TENSOR ENERGIA-MOMENTO VIA MÉTRICA	50

9	CONCLUSÃO	52
	REFERÊNCIAS	53
	ANEXO A – TENSOR ENERGIA-MOMENTO VIA MÉTRICA	54

1 INTRODUÇÃO

Sabemos que o universo é descrito pelo modelo cosmológico padrão Λ CDM. Temos conhecimento que a matéria bariônica corresponde a 5% da matéria total do universo e que 95% são divididos em matéria escura ou não bariônica com 25% e energia escura com 70%. Sendo esses componentes importantes devido à sua interação gravitacional. Então, buscam-se partículas candidatas à matéria escura, sabendo que estas estão fora do modelo padrão. Acreditamos que um possível candidato seriam partículas de spin-3/2, descritas por um espinor-vetor de Majorana, portanto desprovido de carga elétrica. A maneira pela qual isso poderia ser considerado no contexto da cosmologia seria através do cálculo do tensor energia-momento, o qual compõe o lado direito da equação de Einstein.

O cálculo do tensor energia-momento é um passo fundamental na formulação da teoria clássica de campos, pois captura a conservação da energia e do momento, aspectos essenciais para a compreensão das interações e da dinâmica de sistemas físicos. Esse tensor também é central para a descrição da interação entre campos e a gravitação, uma vez que, segundo a relatividade geral, ele atua como a fonte do campo gravitacional. Portanto, compreender e calcular corretamente o tensor energia-momento é crucial para qualquer teoria de campos que vise descrever de maneira consistente as propriedades e a evolução dos sistemas físicos. Nosso interesse aqui recai especialmente em cenários envolvendo partículas com spin elevado, como no caso das teorias de spin-3/2.

E ainda, os modelos de spin-3/2 podem ser descritos em termos de espinores-vetores de Majorana de duas componentes. Isso significa que esses espinores são simétricos sob a operação de conjugação de carga, ou seja, comportam-se de maneira auto-conjugada. Tal característica os torna particularmente interessantes para cosmologia, pois abre a possibilidade de utilizá-los como representantes da matéria escura.

É certo que uma tal afirmação, no âmbito do trabalho aqui realizado, precisa ser encarada com cuidado: uma vez que tratamos aqui apenas dos espinores que entraram como coeficientes de expansão do campo quântico (e não do campo quântico em si) um estudo sistemático mostrando que a neutralidade dos mesmos se coaduna com a neutralidade dos estados de uma partícula advindos da atuação do campo quântico se faz mister para o estabelecimento de uma primeira característica necessária (embora não suficiente) para elencar o modelo como passível de descrição de parte de matéria escura. O ponto a ser enfatizado no presente contexto, entretanto, é que como os espinores de Majorana não possuem carga elétrica e não interagem eletromagneticamente, compartilham características com os candidatos à matéria escura previstos em muitos modelos cosmológicos, sugerindo potenciais aplicações na compreensão da composição do universo e sua evolução.

Portanto, antes do cálculo do tensor energia momento para partículas de spin-3/2, estudaremos brevemente mecânica analítica, temos interesse no princípio de mínima ação, ferramenta essencial para o estudo do tensor energia-momento e para obtenção da equação

de campo de Einstein, e ainda, temos interesse em fazer a passagem de discretos graus de liberdade para infinitos graus de um sistema.

Posteriormente, uma revisão sobre teoria de grupos, pois desejamos entender o que é um espinor e a álgebra que este descreve, portanto, faremos um estudo sobre grupo de Lie, $SO(3)$, $SU(2)$ e grupo de Lorentz. Nos interessamos na representação espinorial do grupo de Lorentz, e o gerador da parte de spin-1 do grupo de Lorentz.

Em seguida será feita uma introdução à relatividade geral, bem como elementos dela, com o intuito de construir a ação de Einstein-Hilbert e obter a equação de campo de Einstein, utilizando o ferramental apresentado a cima.

Posteriormente, obteremos o tensor energia-momento a partir do teorema de Noether, e surgirá a necessidade de simetrização, utilizando o método de Belinfante-Rosenfeld e um cálculo alternativo para o tensor energia-momento, via métrica. Com tais motivações, este trabalho tem o intuito de calcular o tensor energia-momento para teoria de spin-3/2, passando por outras teorias, como a teoria de Maxwell e a teoria de Dirac, como passo intermediário. De certa forma, este trabalho também se propõe à uma revisão das diferentes maneiras de se calcular o tensor energia-momento, bem como se presta a entender as sutilezas relacionadas a este tema.

2 MECÂNICA CLÁSSICA

2.1 FORMALISMO LAGRANGIANO E HAMILTONIANO

Nesta seção faremos uma breve revisão da formulação lagrangiana e hamiltoniana no contexto da mecânica analítica, utilizando (LEMOS, 2013). Seja a função lagrangiana $L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$, ou de maneira compacta, $L(q_k, \dot{q}_k, t)$, com $k = 1, \dots, n$, onde os q 's denotam as coordenadas generalizadas.

$$L = T - V, \quad (2.1)$$

onde T é a energia cinética e V a energia potencial. A partir da função lagrangiana definimos o funcional:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (2.2)$$

chamado de ação. Do cálculo variacional sabemos que no espaço das coordenadas generalizadas há inúmeras possibilidades de caminhos entre os instantes t_1 e t_2 , entretanto, o caminho escolhido pela natureza é aquele cuja ação é mínima, esse é o chamado princípio de Hamilton codificado pela variação de (2.2), de tal forma que:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0, \quad (2.3)$$

ao variar S , devemos ressaltar que o conjunto das coordenadas generalizadas formam um conjunto linearmente independente, logo, as variações δq_k s também serão independentes, exceto nos extremos do intervalo, quando se anulam. Portanto, a variação da ação resulta em:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right). \quad (2.4)$$

Note que, é possível integrar por partes o segundo termo de (2.4):

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k + \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2}, \quad (2.5)$$

sendo que o segundo termo é nulo, pois as variações se anulam nos extremos do intervalo. Utilizando o princípio de mínima ação em (2.5)

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.6)$$

Como as variações são arbitrárias e mutualmente independentes a integral só pode ser

nula se o integrando for nulo:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.7)$$

as equações (2.7) são chamadas de equação de Euler-Lagrange para sistemas holônomos.

Note que, a partir da lagrangiana, que é função de $(q, \dot{q})$, utilizando (2.7) é possível encontrar as equações de movimento que descrevem o sistema. Entretanto, é possível introduzir outra função que gera a dinâmica do sistema, essa é chamada de Hamiltoniana, definida por:

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t), \quad (2.8)$$

em que p_i é chamado de momento canonicamente conjugado à q_i , definido por:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

Tomando o diferencial de (2.8):

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i + q_i d\dot{q}_i) - \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \right], \quad (2.10)$$

utilizando (2.7) e (2.9), ficamos com:

$$dH = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt, \quad (2.11)$$

entretanto o diferencial de H também é, pela definição de diferencial, dado por:

$$dH = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (2.12)$$

Comparando as equações (2.11) e (2.12), concluímos que:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.13)$$

e

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.14)$$

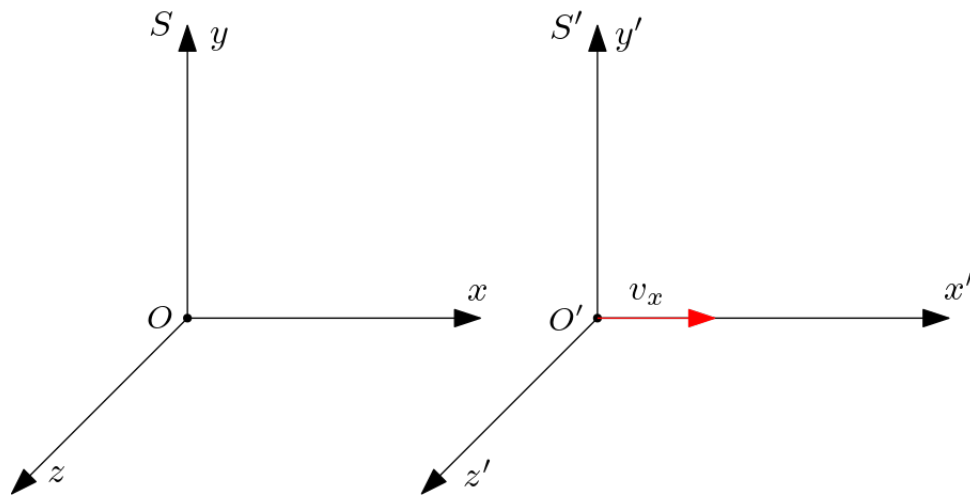
As equações (2.13) são chamadas de equações de Hamilton, essas formam um conjunto de $2n$ equações de primeira ordem que descrevem o sistema. Entretanto no presente estamos particularmente interessados em sistemas com infinitos graus de liberdade, portanto, surgirá a necessidade da passagem dos discretos graus de liberdade para contínuos graus de liberdade, o que será fundamental para a descrição lagrangiana de teorias de campos o que será abordado no capítulo 4. Tendo em vista que nossa discussão está tomando o rumo das chamadas teorias de campos, no próximo capítulo faremos uma breve revisão de aspectos da relatividade restrita que serão fundamentais para a compreensão de tais teorias.

3 RELATIVIDADE RESTRITA

3.1 TRANSFORMAÇÃO DE GALILEU

Para pensar nas Transformações de Galileu (TG), podemos considerar uma correspondência entre referenciais inerciais S e S' . Se adotarmos o caso particular em que a velocidade v_x produz o movimento do referencial S' em relação a S , conforme mostra a (Figura 1),

Figura 1 – Movimento relativo entre referenciais S e S' .



Fonte: Autora

então, teremos uma correspondência entre os eixos dos referenciais, tal que:

$$\begin{cases} x' = x - v_x t, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t. \end{cases} \quad (3.1)$$

Que são as chamadas Transformações de Galileu.

Percebemos que é possível obter a cinemática do movimento para o referencial S' a partir de uma cinemática do movimento para o referencial S e vice-versa. A principal característica das Transformações de Galileu é que consideramos o tempo uma grandeza absoluta entre os dois referenciais. Além disso a segunda lei de Newton é invariante perante tais transformações¹. No entanto, pode-se demonstrar que as leis de Maxwell não seguem o mesmo caminho e isso nos levará às chamadas Transformações de Lorentz que trataremos a seguir.

¹ Por hipótese a massa inercial com relação à S' é a mesma que em relação a S , o que se trata de uma excelente aproximação em regimes de baixas velocidades $v \ll c$.

3.2 AS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

Como mencionado anteriormente, as leis de Maxwell não são invariantes perante às transformações de Galileu, no entanto, serão invariantes pelas chamadas transformações de Lorentz, dadas por:

$$\begin{aligned}x' &= \lambda(x - v_x t), \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= \lambda\left(t - \frac{v_x}{c^2}x\right),\end{aligned}\tag{3.2}$$

em que:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},\tag{3.3}$$

$$\beta = \frac{v_x}{c}.\tag{3.4}$$

Percebe-se que o tempo perde o status de quantidade absoluta e isso por sua vez acarretará nos seguintes postulados:

- As leis físicas são as mesmas em todos os referenciais inerciais;
- A velocidade da luz é um invariante.

As variáveis (x, y, z, t) , podem ser organizadas através do que chamamos de quadri-vetores. Os quadri-vetores são quantidades vetoriais importantes na matemática do espaço-tempo, podemos entender o conceito, usando o exemplo do quadri-vetor posição (x^μ) . Este, é definido por:

$$x^\mu = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3),\tag{3.5}$$

em que μ é chamado de índice contravariante e representa de maneira simplificada cada componente do 4-vetor, notemos também que temos uma nova componente temporal, a coordenada x^0 e as demais espaciais. As transformações de Lorentz, nesta notação ficam:

$$x'^0 = \lambda(x^0 - \beta x^1),\tag{3.6}$$

$$x'^1 = \lambda(x^1 - \beta x^0),\tag{3.7}$$

$$x'^2 = x^2,\tag{3.8}$$

$$x'^3 = x^3.\tag{3.9}$$

Podemos definir também

$$x_\mu \equiv (ct, -x, -y, -z) = (x_0, x_1, x_2, x_3).\tag{3.10}$$

Assim, o índice μ da equação (3.10) é chamado de índice covariante ². Nesta notação o produto escalar entre x^μ e x_μ , se dá por meio da notação:

$$x^\mu x_\mu \equiv x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3. \quad (3.11)$$

e as transformações de Lorentz estão codificadas na matriz Λ com elementos (α, β) . Esta matriz satisfaz:

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \eta_{\alpha\beta}, \quad (3.12)$$

onde η é chamado de Tensor métrico de Minkowski dado por:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu = \nu = 0 \\ -1 & \text{se } \mu = \nu = i; (i = 1, 2, 3) \\ 0 & \text{se } \mu \neq \nu \end{cases} \quad (3.13)$$

Este tensor é responsável por transformar um tensor ou um quadri vetor da notação covariante para contravariante e vice-versa, subindo e descendo seus índices.

Sabemos que o tempo perde o caráter absoluto pelas transformações de Lorentz (pois veja que ele também sofre transformações), de modo que teremos outra constante, a velocidade da luz. Estamos interessados em encontrar um invariante pelas transformações de Lorentz e esse é chamado de elemento de linha ds^2 , dado por:

$$ds^2 \equiv c^2 dt^2 - dx^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (3.14)$$

Para comprovarmos que este se trata de um invariante, pensemos em um sistema de coordenadas x'^α descrito por:

$$dx'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\gamma dx^\gamma, \quad (3.15)$$

então o elemento de linha será:

$$ds'^2 = \eta_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta. \quad (3.16)$$

Pela equação (3.15), a equação acima fica:

$$\begin{aligned} ds'^2 &= \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu dx^\mu dx^\nu \\ &= \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= ds^2, \end{aligned} \quad (3.17)$$

² Na verdade a nomenclatura contravariante e covariante está relacionada à forma como os quadri vetores se transformam perante transformações de Lorentz. Em resumo, aqueles que se transformarem como o diferencial se transformam serão chamados de contravariantes e o que se transformarem como o gradiente se transformam serão chamados de covariantes e essa ideia poderá ser estendida para objetos tensoriais fazendo sentido chamar um tensor de rank arbitrário de contravariante, covariante ou misto (aquele que possui índices em cima e em baixo).

que evidencia a invariância do elemento de linha por transformações de Lorentz. As transformações de Lorentz, guiadas pela matriz Λ , satisfazem um conjunto de axiomas matemáticos que define o que chamamos de grupo. Na próxima seção nossa revisão aborda esse tema com a intenção de conferir robustez ao nosso texto.

4 TEORIA DE GRUPOS

4.1 INTRODUÇÃO À TEORIA DE GRUPOS

Inicialmente, apresentamos de forma sucinta as definições fundamentais de grupos e suas representações, como uma base para a compreensão dos grupos $SO(3)$, $SU(2)$ e o grupo de Lorentz, os quais serão abordados posteriormente. Para começar, consideramos os axiomas que formalizam o conceito de grupo:

Definição 4.1.1. *Supondo G um conjunto não vazio que respeita uma operação " $*$ ", dizemos que G é um grupo se as seguintes propriedades são respeitadas:*

- *Fechamento: Se $a \in G$ e $b \in G$, então $(a * b) \in G$;*
- *Associatividade: $\forall a, b, c \in G$, teremos, $(a * b) * c = a * (b * c)$;*
- *Identidade: Existe um elemento identidade, $I \in G$, tal que, $\forall a \in G$, teremos, $I * a = a * I = a$;*
- *Elemento inverso: $\forall a \in G$, existe um elemento inverso $a^{-1} \in G$, tal que, $a * a^{-1} = a^{-1} * a = I$.*

Além disso, se as propriedades anteriores forem satisfeitas e, adicionalmente, houver comutatividade, isto é, se para todo $a, b \in G$ tivermos $a * b = b * a$, então o grupo é dito abeliano ou comutativo.

Para definir representações, consideremos primeiramente a definição de homomorfismo.

Definição 4.1.2. *Seja um mapeamento entre um grupo G em um grupo G' , de modo que:*

$$g_i \in G \rightarrow g'_i \in G'. \quad (4.1)$$

*Esse mapeamento é chamado de homomorfismo se as operações de ambos os grupos forem preservadas. Ou seja, se $g_1 * g_2 = g_3$ para $g_1, g_2, g_3 \in G$, então $g'_1 * g'_2 = g'_3$ para os correspondentes elementos em G' . Se, além disso, o mapeamento for injetor, o homomorfismo é chamado de isomorfismo.*

Introduzimos então o conceito de representação.

Definição 4.1.3. *Seja um homomorfismo entre um grupo G e um grupo de operadores $T(G)$ em um espaço vetorial V , dizemos que $T(G)$ forma uma representação do grupo G , no espaço V , isto é:*

$$g \in G \rightarrow T(g); \quad (4.2)$$

logo,

$$T(g_1)T(g_2) = T(g_1g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G. \quad (4.3)$$

Notamos que a dimensão da representação é a mesma do espaço vetorial V .

Se a dimensão de V é n então a dimensão da representação é n . Veja que há a possibilidade de inúmeras representações de um grupo.

4.2 GRUPO DE LIE

Um grupo de Lie é um grupo cujos elementos podem ser caracterizados por um número finito de parâmetros contínuos, com a dependência desses elementos em relação aos parâmetros sendo suave, ou seja, diferenciável. A parametrização dos elementos do grupo deve permitir transformações da forma:

$$a' = f(a), \quad (4.4)$$

onde f é uma função infinitamente diferenciável, e os novos parâmetros a' são funções dos parâmetros anteriores a . Observe que o grupo obviamente deve satisfazer aos axiomas que apresentamos anteriormente. Além disso, se todos os seus elementos são conectados à identidade 1 por uma sequência contínua e todas as características descritas acima forem respeitadas, o grupo é denominado grupo de Lie conexo.

Pelo que expusemos acima de maneira sucinta, os elementos de um grupo de Lie conexo, A , permitem uma parametrização do tipo:

$$A(a) = e^{ia^\beta X_\beta}. \quad (4.5)$$

Sendo a^β o parâmetro e X_β o chamado gerador das transformações do grupo com $\beta = 1, \dots, N$. Vale ressaltar que, a parametrização acima é válida para todos os elementos do grupo, pois estamos falando do grupo de Lie conexo, como por exemplo, o setor ortócrono próprio do Grupo de Lorentz, que será tratado no decorrer do trabalho. Nesse caso, os geradores X_β satisfazem a seguinte álgebra:

$$[X_m, X_n] = if_{mn}^\beta X_\beta, \quad (4.6)$$

chamada de álgebra de Lie, onde f_{mn}^β é chamada de constante de estrutura do grupo. São exemplos de grupo de Lie, o grupo de matrizes ortogonais $n \times n$ ($O(N)$), o grupo de matrizes unitárias $n \times n$ ($U(N)$), o grupo especial (pois essas matrizes tem determinante igual a 1) de matrizes $n \times n$ unitárias ($SU(N)$), o grupo linear de matrizes $n \times n$ inversíveis ($GL(n)$), dentre outros. Neste relatório, vamos abordar especialmente os grupos: $SO(3)$, $SU(2)$ e o grupo de Lorentz. A seguir apresentaremos o grupo $SO(3)$.

4.3 GRUPO $SO(3)$

O grupo $SO(3)$ é o conjunto de todas as matrizes ortogonais 3×3 com determinante igual a 1, também conhecido como o grupo das matrizes de rotação. Pode-se demonstrar

que os elementos desse grupo, representados pelas matrizes A , podem ser expressos na forma (4.5):

$$A = \exp(i\beta_a H_a), \quad a = 1, 2, 3. \quad (4.7)$$

Veja que o número de parâmetros corresponde ao número de ângulos de rotação. A transposta da matriz A fica:

$$A^T = \exp(-i\beta_a H_a), \quad (4.8)$$

multiplicando (4.7) por (4.8):

$$A^T A = (1 + \beta_a H_a^T + \dots)(1 + \beta_a H_a \dots), \quad (4.9)$$

pela condição de ortogonalidade do grupo, os geradores devem obedecer:

$$H_a^T = -H_a. \quad (4.10)$$

portanto, a forma geral de $i\beta_a H_a$ deve ser uma matriz antissimétrica do tipo:

$$i\beta_a H_a = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Podemos relacionar os parâmetros β_a com a, b, c , de modo que obtemos:

$$i\beta_a H_a = iaH_1 + ibH_2 + icH_3, \quad (4.12)$$

e por fim, obter os geradores H_a :

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ b & i & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Verifica-se que essas matrizes representando os geradores H_a devem obedecer a seguinte relação de comutação:

$$[H_a, H_b] = i\epsilon_{abp} H_p, \quad (4.14)$$

a qual corresponde à álgebra de Lie do grupo.

4.4 GRUPO SU(2)

Seja uma matriz U , dizemos que U é unitária se respeita a seguinte relação:

$$U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbf{1}, \quad (4.15)$$

onde $\dagger$ denota a matriz transposta conjugada de U e $\mathbf{1}$ denota a matriz identidade. O conjunto das matrizes unitárias $n \times n$ formam um grupo, com respeito ao produto de matrizes, denominado Grupo Unitário $U(N)$. Caso as matrizes tenham determinante igual a um, isto é:

$$\det U = 1, \quad (4.16)$$

e respeitem a relação (4.15), essas matrizes formam um grupo chamado de $SU(N)$, um subgrupo de $U(N)$, chamado de grupo especial unitário, formado por matrizes de dimensão $n \times n$. Entretanto, estamos interessados em um caso específico, o $SU(2)$, com matrizes de ordem 2. O grupo $SU(2)$ é um grupo de Lie (NETO, 2010), no geral, em um grupo de Lie os elementos são determinados a partir de um número finito de parâmetros que variam continuamente.

A princípio, teremos oito parâmetros independentes, pois cada entrada da matriz tem um número complexo, que pode ser estrito na forma de $a + ib$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, e como temos 4 entradas com dois números reais, teremos oito parâmetros reais livres. Utilizando as condições (4.15) e (4.16), podemos encontrar dependência entre cinco parâmetros, nos restando apenas 3 parâmetros livres.

Como o $SU(2)$ é um grupo de Lie, podemos representar seus elementos por:

$$U = \exp(i\alpha_a G_a), \quad (4.17)$$

onde α_a são os parâmetros do grupo e G_a denota os geradores do grupo, com $a = 1, 2, 3$. Logo, $U^\dagger$ será:

$$U^\dagger = \exp(-i\alpha_a G_a^\dagger), \quad (4.18)$$

Podemos escrever (4.15) em termos de (4.17) e (4.18) e expandir em torno de zero numa série de Taylor:

$$\begin{aligned} U^\dagger U &= (1 - i\alpha_a G_a^\dagger + \dots)(1 + i\alpha_a G_a + \dots) \\ &= 1 + i\alpha_a (G_a - G_a^\dagger) + \mathcal{O}(\alpha^2), \end{aligned} \quad (4.19)$$

desconsideramos termos de $\mathcal{O}(\alpha^2)$. Para que a condição (4.15) seja satisfeita teremos:

$$G_a = G_a^\dagger. \quad (4.20)$$

Portanto, concluímos que o geradores do $SU(2)$ devem ser matrizes hermitianas, que podem ser escritas de maneira geral, como:

$$\alpha_a G_a = \begin{pmatrix} c & a - ib \\ a + ib & d \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

note que, aparecem quatro parâmetros em (4.21), pois não utilizamos a relação (4.16),

devemos tomar o traço de $\alpha_a G_a$ e igualá-lo à zero:¹

$$\alpha_a G_a = \begin{pmatrix} c & a - ib \\ a + ib & -c \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

a matriz (4.21) pode ser decomposta como:

$$\alpha_a G_a = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Relacionamos a , b e c com os parâmetros α_1 , α_2 e α_3 , e além disso identificamos:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

que são chamadas de matrizes de *spin* de Pauli. Podemos relacioná-las com os geradores do grupo:

$$G_1 = \frac{1}{2}\sigma_1, \quad G_2 = \frac{1}{2}\sigma_2, \quad G_3 = \frac{1}{2}\sigma_3. \quad (4.25)$$

Note que, adicionamos o fator $1/2$ nas relações para que possamos verificar a álgebra correta do grupo. As matrizes de Pauli obedecem a seguinte relação:

$$\sigma_a \sigma_b = i\epsilon_{abc}\sigma_c + \delta_{ab}\mathbf{1}, \quad (4.26)$$

utilizando a relação (4.26) e (4.25), encontramos a seguinte relação de comutação:

$$[G_a, G_b] = i\epsilon_{abc}G_c, \quad (4.27)$$

que é álgebra de Lie dos geradores do grupo SU(2).

Essa discussão é pertinente, pois, a álgebra encontrada em (4.27) é a mesma álgebra do SO(3) (4.14).

Consideramos, $N(N-1)/2$ matrizes que respeitam a seguinte relação:

$$[X_a, X_b]_+ \equiv X_a X_b + X_b X_a = 2\delta_{ab}, \quad (4.28)$$

onde, $[\dots]_+$ é chamado de anti-comutador. Definindo a matriz M_{ab} :

$$M_{ab} = -\frac{i}{4}[X_a, X_b]. \quad (4.29)$$

essa por sua vez satisfaz a álgebra do SO(N):

$$[M_{ab}, M_{cd}]_{mn} = i[\delta_{ac}(M_{bd})_{mn} - \delta_{ad}(M_{bc})_{mn} - \delta_{bc}(M_{ad})_{mn} + \delta_{bd}(M_{ac})_{mn}]. \quad (4.30)$$

¹ Como as matrizes hermitianas são diagonalizáveis devem obedecer a seguinte expressão (NETO, 2010): $\det U = \det(SUS^{-1}) = e^{a_1} e^{a_1} = e^{tr A}$.

Logo, se trata de uma representação diferente do mesmo grupo e essa representação é denominada representação espinorial. Para $N = 3$ as matrizes que respeitam (4.28) são as matrizes de Pauli (4.24), assim, teremos:

$$[\sigma_a, \sigma_b]_+ = 2\delta_{ab}, \quad (4.31)$$

por consequência:

$$M_{ab} = -\frac{i}{4}[\sigma_a, \sigma_b]. \quad (4.32)$$

Como (4.32) é composta pelos geradores do SU(2) e respeita (4.30), notamos que o SU(2) é a representação espinorial das rotações e o espinor é objeto transformado por essas matrizes.

4.5 GRUPO DE LORENTZ

Considere uma transformação de um sistema de coordenadas no espaço-tempo:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\nu, \quad (4.33)$$

em que a^ν e $\Lambda^\mu{}_\nu$ são quantidades contantes.

Para o conjunto de transformações dadas por (4.33) que respeitam:

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu \eta_{\alpha\beta}; \quad (4.34)$$

forma-se o grupo de Lorentz não homogêneo ou grupo de Poincaré. Para o caso particular, em que $a^\nu = 0$, isto é, uma transformação sem translação, constitui-se o Grupo de Lorentz homogêneo.

Sendo o grupo de Lorentz um grupo de Lie, podemos tomar a seguinte parametrização para os elementos do grupo:

$$\Lambda = \exp\left(-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}\right). \quad (4.35)$$

Pela equação (4.34), a matriz Λ possui 6 componentes independentes, em que três delas são associadas com *boost* e as outras três associam-se com a rotação. Essas, podem ser representados por $\omega^{\mu\nu}$, que é um parâmetro infinitesimal, e $J_{\mu\nu}$ representa seus geradores, sendo ambas quantidades antissimétricas.

Tomamos a expansão da equação (4.35):

$$\Lambda = 1 - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}, \quad (4.36)$$

que em termos dos elementos de matriz, fica:

$$\Lambda^\rho{}_\lambda = \delta^\rho_\lambda - \frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} (J_{\mu\nu})^\rho{}_\lambda, \quad (4.37)$$

podemos tomar uma transformação de Lorentz infinitesimal:

$$x'^{\rho} = \Lambda^{\rho}_{\lambda} x^{\lambda}, \quad (4.38)$$

substituindo a equação (38) em (4.38), ficamos com:

$$\delta x^{\rho} = -\frac{i}{2} \omega^{\mu\nu} (J_{\mu\nu})^{\rho}_{\lambda} x^{\lambda}, \quad (4.39)$$

em que $\delta x^{\rho} = x'^{\rho} - x^{\rho}$. Por outro lado, uma transformação de Lorentz infinitesimal pode ser dada por:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} + \omega^{\mu}_{\nu}, \quad (4.40)$$

substituindo (4.40) em (4.38):

$$\delta x^{\rho} = \omega^{\rho}_{\lambda} x^{\lambda}, \quad (4.41)$$

Igualando as relações (4.39) e (4.41) e isolando o gerador $(J_{\mu\nu})^{\rho}_{\lambda}$:

$$(J_{\mu\nu})^{\rho}_{\lambda} = i(\delta^{\rho}_{\mu} \eta_{\nu\lambda} - \delta^{\rho}_{\nu} \eta_{\mu\lambda}), \quad (4.42)$$

que obedecem a seguinte álgebra:

$$[J_{\mu\nu}, J_{\kappa\sigma}] = i(\eta_{\mu\sigma} J_{\nu\kappa} + \eta_{\nu\kappa} J_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\kappa} J_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} J_{\mu\kappa}). \quad (4.43)$$

Portanto, foi possível encontrar os geradores do Grupo de Lorentz e checar sua álgebra de Lie. Isso justificará pontos importantes quando tratarmos da discussão sobre as correções de Belinfante-Rosenfeld para tensores energia-momento. Dentre as possíveis definições de tensores energia-momento, uma em especial, é particularmente útil em cosmologia. Ela consiste de uma derivação funcional com respeito ao tensor métrico da parte da lagrangiana correspondente à matéria. Neste sentido no próximo capítulo nossa revisão abordará aspectos introdutórios da relatividade geral.

5 RELATIVIDADE GERAL

5.1 CONEXÃO AFIM E TENSOR MÉTRICO

De acordo com (WEINBERG, 1972), o princípio da equivalência se enuncia da seguinte maneira: "Em todo ponto do espaço-tempo, em um campo gravitacional arbitrário é possível escolher um sistema de coordenadas localmente inercial, de tal modo que, numa região suficientemente pequena em torno do ponto em questão, as leis da natureza tomam a forma daquela em um referencial não acelerado na ausência de gravitação." Neste caso, sendo as coordenadas no referencial não acelerado, dadas por ξ^α e τ , o tempo próprio neste referencial, a equação de movimento de uma certa partícula livre movendo-se somente pela influência de forças gravitacionais é dada por por:

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0. \quad (5.1)$$

Agora, se pensarmos em qualquer outro sistema de coordenadas x^μ em que não sabemos se este encontra-se em repouso ou se descreve um movimento curvilíneo ou qualquer outro, podemos escrever os movimentos em ξ^α com relação a x^α e teremos então

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = 0. \quad (5.2)$$

Então, desenvolvendo o lado esquerdo das equação (5.2), temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}, \end{aligned}$$

logo:

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0, \quad (5.3)$$

multiplicando (5.3) pela inversa $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$ e utilizando as propriedades do *Delta de Kronecker*¹ ficamos com a equação de movimento:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0, \quad (5.4)$$

ou ainda:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0. \quad (5.5)$$

A equação (5.5) é chamada de equação da geodésica, essa descreve a menor distância

¹ (δ_μ^λ) , se $\delta_\mu^\lambda = 0$ então $\lambda \neq \mu$. Se $\delta_\mu^\lambda = 1$ então $\lambda = \mu$.

entre dois pontos de um espaço não trivial, como um espaço curvo, por exemplo. Note que, definimos uma quantidade importante, chamada de Conexão Afim, definida por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}}. \quad (5.6)$$

Note agora que o tempo próprio de (5.1), pode ser escrito como:

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^{\alpha} d\xi^{\beta}, \quad (5.7)$$

ou ainda, em termos de um sistema de coordenadas arbitrário:

$$d\tau^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (5.8)$$

onde definimos $g_{\mu\nu}$:

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \quad (5.9)$$

De modo que $g_{\mu\nu}$ é chamado de tensor métrico para o sistema de coordenadas arbitrário. Portanto:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}}. \quad (5.10)$$

Por fim, podemos achar uma relação direta entre o tensor métrico e a Conexão Afim, derivando com respeito a x^{λ} a equação (5.10), ou seja:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{\beta}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta},$$

sabendo que, vide (5.6):

$$\frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\kappa}}, \quad (5.11)$$

então

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \Gamma_{\lambda\nu}^{\kappa} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\mu}} \eta_{\alpha\beta} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\kappa} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\kappa}} \eta_{\alpha\beta}.$$

Podemos agora utilizar a definição (5.10) para encontrar

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \Gamma_{\lambda\nu}^{\kappa} g_{\kappa\mu} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\kappa} g_{\kappa\nu}.$$

Agora, vamos adicionar à equação acima a mesma equação, porém com μ e ν trocados e subtrair a mesma equação porém com ν e λ trocados, de forma que:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} = g_{\kappa\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^{\kappa} + g_{\kappa\mu} \Gamma_{\lambda\nu}^{\kappa} + g_{\kappa\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\kappa} + g_{\kappa\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} - g_{\kappa\lambda} \Gamma_{\nu\mu}^{\kappa} - g_{\kappa\mu} \Gamma_{\nu\lambda}^{\kappa}.$$

Como temos simetria entre os índices covariantes da conexão afim, $\Gamma_{\mu\nu}^{\kappa} = \Gamma_{\nu\mu}^{\kappa}$, então a expressão obtida fica

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} = g_{\kappa\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^{\kappa}.$$

Definindo a métrica $g^{\nu\sigma}$ como a inversa de $g_{\kappa\nu}$, então ela deve satisfazer:

$$g^{\nu\sigma} g_{\kappa\nu} = \delta_{\kappa}^{\sigma},$$

obtemos então a relação entre a Conexão Afim e a métrica arbitrária, dada por:

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right), \quad (5.12)$$

ou seja, dada a métrica do espaço em questão, é possível resolver a equação da geodésica

5.2 TENSOR DE RIEMANN E SUAS CONTRAÇÕES

Observa-se que sob uma transformação geral de coordenadas, isto é, que leva $x_{\mu} \rightarrow x'_{\mu}$ a conexão afim se transforma como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}} \frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}, \quad (5.13)$$

agora, podemos isolar o termo que impede que este objeto se transforme como um tensor, o segundo termo do lado direito,

$$\frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}}, \quad (5.14)$$

então, vamos derivá-lo com respeito a x^{κ}

$$\frac{\partial^3 x'^{\tau}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \left(\frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \right), \quad (5.15)$$

e juntando os termos similares e fazendo a troca de alguns índices adequadamente, ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x'^{\tau}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} = & \frac{\partial'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} \right) - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\kappa}} \left(\frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\eta}}{\partial x'^{\eta}} - \Gamma_{\rho\lambda}^{\tau} \Gamma_{\eta\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\sigma}^{\tau} \Gamma_{\eta\rho}^{\lambda} \right) \\ & - \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \left(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma_{\kappa\nu}^{\lambda} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\kappa\mu}^{\lambda} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\nu}} \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Vamos subtrair a mesma equação, porém com ν e κ trocados

$$\begin{aligned} & \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \right) \\ & - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\kappa}} \left(\frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\eta}}{\partial x'^{\eta}} - \frac{\partial \Gamma_{\rho\eta}^{\tau}}{\partial x'^{\sigma}} - \Gamma_{\lambda\sigma}^{\tau} \Gamma_{\eta\rho}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\eta}^{\tau} \Gamma_{\sigma\rho}^{\lambda} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Podemos finalmente escrever a seguinte regra de transformação para o termo entre

parêntesis, que passamos a chamar de $R_{\mu\nu\kappa}^\lambda$.

$$R'^\tau{}_{\rho\sigma\eta} = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\eta} R_{\mu\nu\kappa}^\lambda. \quad (5.18)$$

Este objeto, como pode ser observado, se transforma como um tensor e recebe o nome de tensor de Riemann:

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda \equiv \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda, \quad (5.19)$$

note que este objeto está ligado a Conexão Afim, e essa com a geometria do espaço. Temos também, outro tensor importante, o tensor de Ricci, que é definido por:

$$R_{\mu\kappa} \equiv R_{\mu\nu\kappa}^\nu = g^{\sigma\nu} R_{\sigma\mu\nu\kappa}, \quad (5.20)$$

e ainda o escalar de curvatura, contraindo os índices restantes com a métrica, ficamos com:

$$R \equiv R_\kappa^\kappa = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}. \quad (5.21)$$

Essas quantidades serão importantes para a construção da equação de Einstein a partir da ação de Einstein Hilbert.

Temos ainda que o tensor de Riemann apresenta algumas propriedades de simetria. Ele é simétrico pela troca dos dois pares de índices

$$R_{\sigma\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\sigma\mu}, \quad (5.22)$$

e é anti-simétrico pela troca de dois índices dentro dos pares.

$$R_{\sigma\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\sigma\nu\kappa} = -R_{\sigma\mu\kappa\nu}, \quad (5.23)$$

e ainda, mantendo o primeiro índice fixo, haverá uma relação de ciclicidade entre os demais índices, tal que:

$$R_{\sigma\mu\nu\kappa} + R_{\sigma\kappa\mu\nu} + R_{\sigma\nu\kappa\mu} = 0. \quad (5.24)$$

Temos também que o tensor de Ricci é simétrico pela troca de seus índices, isto é:

$$R_{\mu\kappa} = R_{\kappa\mu}. \quad (5.25)$$

5.3 EQUAÇÃO DE EINSTEIN

Na relatividade, é possível separar a ação em duas diferentes contribuições:

$$I = I_g + I_m, \quad (5.26)$$

em que I_g é a ação relacionada ao campo gravitacional e I_m se relaciona com a contribuição de matéria, de modo que:

$$I = \int_{\Omega} (\mathcal{L}_g + \mathcal{L}_m) d\Omega \quad (5.27)$$

Trabalharemos com a ação de relacionada ao campo gravitacional, pois queremos encontrar uma equação de campo para métrica ($g_{\mu\nu}$), então precisamos montar uma lagrangiana que descreva o movimento. Tendo em vista que a lagrangiana é um escalar, o escalar de curvatura é um ótimo eleito para esse papel, pois é o mais simples dos objetos. Como queremos que ele seja invariante pelas transformações de Lorentz, teremos um elemento de volume com um fator de correção $\sqrt{-g}$. Então, pensando em uma ação em termos de g , teremos

$$I_g = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} R d^4x, \quad (5.28)$$

em que G é a constante da gravitação universal. Sabemos que a curvatura R da equação acima é definida por $g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, portanto, podemos tomar o princípio da mínima ação na equação (5.28), e ficamos com:

$$\delta(\sqrt{g}R) = \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + R \delta \sqrt{-g} + \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}, \quad (5.29)$$

de modo que

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu} - (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda}. \quad (5.30)$$

Então, o último termo da equação (5.29) fica:

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}) - \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}). \quad (5.31)$$

Pensemos no segundo termo da equação (5.29), utilizando a seguinte relação para o determinante de uma matriz e seu traço, segundo (NETO, 2010):

$$\delta \det B = \text{tr}(B^{-1} \delta B) \det B, \quad (5.32)$$

em que B é uma matriz qualquer, B^{-1} é sua inversa e tr é o traço da matriz. Podemos pensar analogamente para métrica $g^{\mu\nu}$, com $B = g_{\mu\nu}$, $B^{-1} = g^{\mu\nu}$ e $\det B = g$, logo:

$$\delta g = g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} g, \quad (5.33)$$

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g, \quad (5.34)$$

substituindo (5.33) em (5.34), ficamos com:

$$\delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (5.35)$$

Sabemos também que

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta g_{\rho\sigma}. \quad (5.36)$$

O termo (5.31) desaparecerá quando integrarmos sobre todo o espaço, pois é um termo de superfície, então podemos reescrever (5.29) a partir de (5.35) e (5.36) como:

$$\delta I_g = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{g} \left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right] \delta g_{\mu\nu} d^4 x. \quad (5.37)$$

Se I_g for zero, consideramos $\delta g_{\mu\nu}$ uma variação arbitrária, ela não pode ser zero, então:

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = 0, \quad (5.38)$$

que é a equação de Einstein para o vácuo, em que $G^{\mu\nu}$ é chamado de tensor de Einstein. Portanto, com o estudo de alguns objetos como a conexão afim e a métrica, foi possível a partir do termo não homogêneo da conexão afim, encontrar o tensor de Riemann. Com a contração desse tensor, encontramos o escalar de curvatura, que foi o escolhido para a construção da ação de Einstein Hilbert. Então a partir do princípio de mínima ação e algumas manipulações matemáticas obtemos a equação de Einstein para o vácuo, e esta por sua vez descreve a geometria do espaço-tempo sem a adição de matéria.

Com esses capítulos introdutórios estamos prontos para atacar a temática do tensor-energia momento. Veremos que ela possui inúmeras sutilezas e que quando trabalhamos com teorias fermiônicas os cuidados devem ser redobrados.

6 TENSOR ENERGIA-MOMENTO

O tensor energia-momento é uma grandeza central na teoria de campos, pois descreve a densidade e o fluxo de energia e momento para diferentes processos físicos, desempenhando um papel crucial na compreensão das interações e conservação de quantidades fundamentais em teorias relativísticas. Esse tensor, tipicamente denotado como $T^{\mu\nu}$, contém componentes que representam a energia e o momento em uma forma unificada e permite expressar as leis de conservação associadas às simetrias de translação no espaço-tempo, em conformidade com o teorema de Noether. Em particular, em relatividade geral e teorias de campo clássicas, ele vincula diretamente as características de uma fonte de campo (como um campo eletromagnético ou gravitacional) à curvatura do espaço-tempo, fornecendo a base para a interação entre matéria e gravidade.

Existem várias abordagens para calcular o tensor energia-momento. A maneira mais comum, conhecida como "tensor energia-momento canônico", surge da aplicação direta do teorema de Noether para simetrias de translação. Essa forma, no entanto, frequentemente possui limitações — por exemplo, não é garantido que seja simétrica ou invariante de calibre, características desejáveis em muitas teorias físicas. Para contornar essas deficiências, métodos de “melhoria” são frequentemente aplicados, como o procedimento de Belinfante-Rosenfeld, que adiciona termos de divergência ao tensor canônico, corrigindo simetria e outras propriedades necessárias para certos sistemas.

Outro método mais geral, proposto por Bessel-Hagen, envolve considerar simetrias de calibre além das translações espaciais e temporais. Esse procedimento permite derivar um tensor energia-momento que já atende aos requisitos físicos sem a necessidade de melhorias ad hoc, especialmente em teorias como a eletrodinâmica. Em teorias onde o tensor energia-momento resulta de uma ação exatamente invariante de calibre, essa abordagem é particularmente vantajosa, pois evita a dependência de condições de contorno e correções externas.

Cada uma dessas abordagens destaca um aspecto particular do tensor energia-momento: enquanto a forma canônica é direta e derivada de simetrias básicas, o método de melhoria visa atender critérios físicos adicionais, e o método de Bessel-Hagen amplia o uso de simetrias para obter uma descrição mais completa. Dessa forma, o estudo das diferentes formulações do tensor energia-momento permite uma compreensão profunda de como simetrias e leis de conservação interagem na estrutura de teorias de campo.

Aqui nós iremos explorar os métodos de Noether, de Belinfante-Rosenfeld e o método de Hilbert (diferenciação com respeito à métrica). Veremos que ao lidar com teorias fermiônicas alguns cuidados adicionais serão necessários, em geral relacionados com a hermitização da lagrangiana e dos resultados. Caso nosso leitor tenha interesse nas sutilezas relacionadas ao processo de determinação do tensor energia-momento recomendamos uma leitura da tese de Robert Baker bem como seus trabalhos subsequentes (BAKER;

LINNEMANN; SMEENK, 2021. *Preprint*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2107.10329>).

6.1 TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS

Sistemas contínuos possuem infinitos graus de liberdade, anteriormente, vimos que um sistema era descrito por q'_k s coordenadas generalizadas, agora temos simplesmente um campo que é expresso em termos de todos os pontos do espaço-tempo $\phi(x, t)$, onde todas as coordenadas generalizadas são simplesmente denotadas pelo índice x , que é contínuo.

Vimos anteriormente que a lagrangiana de um sistema era função de todas as coordenadas generalizadas e de suas velocidades (ambas em número finito, isto é, com $k = 1, \dots, n$), agora, passamos a usar $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$, uma densidade de lagrangiana, pois temos uma densidade de pontos no espaço de configuração, que é um funcional, pois depende do campo $\phi(x, t)$ e do quadri-gradiente do campo mas não diretamente de x .

$$L = \int_{\Omega} d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (6.1)$$

note que a expressão acima está integrada sob todo volume, aqui também lembrada pelo índice Ω com índice do símbolo de integração; então (2.2) fica:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (6.2)$$

Agora, pensemos no princípio de mínima ação:

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \delta (\partial^\mu \phi) \right), \quad (6.3)$$

note que, está sub-entendido a dependência dos campos com as coordenadas x, t .

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right), \quad (6.4)$$

mas sabemos que a variação se anula nos extremos do intervalo, portanto o segundo termo de (6.4) é nulo. Utilizando o princípio de mínima ação:

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi \stackrel{!}{=} 0, \quad (6.5)$$

novamente, como as variações são arbitrárias, a integral só é nula se o integrando for nulo, portanto:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0, \quad (6.6)$$

que é a equação de Euler-Lagrange para o campo $\phi(x)$. Iremos agora abordar o teorema de Noether sob a perspectiva mais usual da teoria clássica de campos, aquela devida à Noether, ou seja, promovendo transformações arbitrárias de x_μ .

6.2 TEOREMA DE NOETHER

O teorema de Noether nos diz que simetrias implicam em quantidades conservadas, então a partir de (GREINER; REINHARD, 1996) e (LEMOS, 2013) vamos entender o que são essas quantidades. Primeiro, partimos de uma transformação infinitesimal do tipo:

$$x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu; , \quad (6.7)$$

que induz sobre um certo campo $\phi_r(x)$ uma certa transformação em seu argumento e em sua forma, dada por:

$$\phi'_r(x') = \phi_r(x) + \delta\phi_r(x), \quad (6.8)$$

em que o índice r indica que o campo pode representar um escalar, vetor ou tensor. Naturalmente, teremos uma mudança na densidade de Lagrangiana:

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x). \quad (6.9)$$

Note que a densidade de lagrangiana é um funcional, pois $\mathcal{L}(x) \equiv \mathcal{L}(\phi(x), \partial\phi/\partial x_\mu)$ que foi escrita nessa notação por simplicidade, e após a transformação passa a ser $\mathcal{L}'(\phi'(x'), \partial\phi'/\partial x'_\mu)$. As mudanças (6.7) e (6.8) são chamadas de variações totais, pois causam uma mudança na coordenada e na forma funcional do campo.

Podemos definir uma variação modificada no campo:

$$\bar{\delta}\phi_r(x) \equiv \phi'_r(x) - \phi_r(x), \quad (6.10)$$

em que $\bar{\delta}$ é chamada de variação funcional, pois leva em conta apenas mudanças na forma funcional do campo. Partindo de (6.10), somando e subtraindo $\phi'(x')$, temos:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}\phi_r(x) &= \phi'_r(x) - \phi'(x') + \phi'(x') - \phi_r(x); \\ &= \delta\phi_r(x) - (\phi'(x') - \phi'(x)); \\ &= \delta\phi_r(x) - \frac{\partial\phi'(x)}{\partial x_\mu} \delta x_\mu; \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$= \delta\phi_r(x) - \frac{\partial\phi(x)}{\partial x_\mu} \delta x_\mu. \quad (6.12)$$

em (6.11), utilizamos o fato de que $\phi'(x') = \phi(x)$ e $\partial_\mu\phi_r(x) = \partial_\mu\phi'_r(x)$ é válido em primeira ordem ¹, temos então uma relação entre a variação total e a variação modificada.

Podemos tomar o gradiente de $\delta\phi_r(x)$:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\delta\phi_r(x)) = \delta\left(\frac{\partial\phi_r(x)}{\partial x_\mu}\right) + \frac{\partial\delta x^\nu}{\partial x_\mu} \frac{\partial\phi_r(x)}{\partial x^\nu}, \quad (6.13)$$

¹ Note que, utilizamos a notação $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$.

onde utilizamos a validade de $\phi'(x') = \phi(x)$ em primeira ordem, notamos que a derivada não comuta com a variação δ .

Caso (6.7) e (6.8) forem transformações de simetria, então o teorema de Noether garante uma quantidade conservada, isto é:

$$\delta S \equiv \int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}'(x') - \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(x) \stackrel{!}{=} 0, \quad (6.14)$$

pelo princípio de mínima ação, impomos que (6.14) seja zero, para que a ação δS seja invariante pois queremos saber as consequências dessa imposição. Utilizando (6.9):

$$\delta S = \int_{\Omega'} d^4x' \delta \mathcal{L}(x) + \int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}(x) - \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(x). \quad (6.15)$$

Segundo (WEINBERG, 1972), $d^4x' = \left(1 + \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu}\right) d^4x$, então a equação (6.15) fica:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \delta \mathcal{L}(x) + \int_{\Omega} d^4x \delta \mathcal{L}(x) \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} + \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(x) + \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(x) \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} - \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(x), \quad (6.16)$$

como a variação δ é infinitesimal, desconsideramos o segundo termo de (6.16), pois é de ordem δ^2 , teremos:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \delta \mathcal{L}(x) + \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(x) \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu}. \quad (6.17)$$

Como a densidade de Lagrangiana é um funcional, ela pode ser escrita na forma de (6.11), portanto reescrevemos (6.17):

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\Omega} d^4x \left(\bar{\delta} \mathcal{L}(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \right) + \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(x) \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu} \\ &= \int_{\Omega} d^4x \left(\bar{\delta} \mathcal{L} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\mathcal{L} \delta x^\mu) \right). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Podemos escrever $\bar{\delta} \mathcal{L}$, em termos dos campos e suas derivadas:

$$\bar{\delta} \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi_r} \bar{\delta} \phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_r)} \bar{\delta} \left(\frac{\partial \phi_r(x)}{\partial x^\mu} \right) \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi_r} \bar{\delta} \phi_r + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_r)} \right) \bar{\delta} \phi_r(x) + \\ &- \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_r)} \right) \bar{\delta} \phi_r(x) + \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_r)} \bar{\delta} \left(\frac{\partial \phi_r(x)}{\partial x^\mu} \right); \end{aligned} \quad (6.20)$$

rearranjando os termos, ficamos com:

$$\bar{\delta} \mathcal{L}(x) = \left[\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_r)} \right) \right] \bar{\delta} \phi_r + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_r)} \bar{\delta} \phi_r \right); \quad (6.21)$$

note que a variação $\bar{\delta}$ comuta com a derivada, o que não vale para variação total. Substi-

tuindo (6.21) em (6.18):

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_r)} \right) \right] \bar{\delta} \phi + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_r)} \bar{\delta} \phi_r + \mathcal{L}(x) \delta x_\mu \right) = 0. \quad (6.22)$$

O primeiro termo da equação (6.22) é a equação de Euler-Lagrange, e portanto, é nulo. O segundo termo é chamado de equação de continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_r)} \left(\delta \phi_r - \frac{\partial \phi_r}{\partial x_\nu} \delta x_\nu \right) + \mathcal{L}(x) \delta x_\mu \right] = 0; \quad (6.23)$$

que pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} f_\mu = 0; \quad (6.24)$$

donde,

$$f_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_r)} \delta \phi_r - \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial (\partial^\mu \phi_r)} \frac{\partial \phi_r}{\partial x^\nu} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}(x) \right) \delta x^\nu. \quad (6.25)$$

A equação (6.24) é chamada de equação de continuidade e (6.25) é chamada de densidade de corrente. Se integramos (6.24) sob todo espaço:

$$0 = \int_V d^3x \frac{\partial}{\partial x_\mu} f_\mu = \int_V d^3x \frac{\partial}{\partial x_0} f_0 + \int_V d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{f}; \quad (6.26)$$

$$0 = \frac{d}{dx_0} \int_V d^3x f_0 + \int_S ds \vec{f} \cdot \hat{n}. \quad (6.27)$$

em que S é a superfície bidimensional que delimita o volume V , e utilizou-se o teorema de Gauss no segundo termo em (6.26). Como a região de integração engloba todo espaço e os campos tendem a zero no infinito, a integral de superfície é nula. Portanto,

$$\int_V d^3x f_0(x) = C. \quad (6.28)$$

na qual C é uma quantidade conservada pois é constante no tempo. Portanto, para transformações infinitesimais das coordenadas e dos campos que deixam a ação invariante, temos uma quantidade conservada C , dada por (6.28), conhecida como **carga de Noether**.

6.2.1 Invariância por translação

A invariância por translação decorre da homogeneidade do espaço-tempo, de modo que a forma dos campos não muda, temos transformações do tipo:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + \epsilon^\mu; \\ \phi'_r(x') &= \phi_r(x). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Aplicando as transformações (6.29) em (6.25), teremos:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \theta_{\mu\nu} = 0; \quad (6.30)$$

onde,

$$\theta_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi_r)} \frac{\partial \phi_r}{\partial x^\nu} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}(x). \quad (6.31)$$

em que $\theta_{\mu\nu}$ é chamado de **tensor energia-momento** canônico, obtido pelo método do teorema de Noether. As cargas conservadas serão:

$$P^\nu = \int_V d^3x \theta^{0\nu}(x) = \text{constante}. \quad (6.32)$$

Como $\nu = 0, 1, 2, 3$, isso implica em quatro quantidades conservadas. A componente zero desse quadrivetor é a integral da densidade de hamiltoniana, a energia. Como a conservação do momento linear está associado a invariância por translações espaciais, estabelece-se que P^ν é a conservação do quadrimomento do campo.

6.3 APLICAÇÃO À TEORIA DE MAXWELL

As equações de Maxwell formam o núcleo da teoria do eletromagnetismo, descrevendo a interação fundamental entre campos elétricos e magnéticos. Essas equações, ao unificar eletricidade e magnetismo, consolidaram o entendimento de que as variações temporais de um campo produzem o outro, criando assim a base para a propagação das ondas eletromagnéticas. Essenciais para a física teórica, elas impõem condições de simetria e continuidade ao comportamento dos campos e revelam que a luz é uma onda eletromagnética. A consistência dessas equações foi um passo crucial para o desenvolvimento da relatividade restrita, pois estabelecem a velocidade da luz como uma constante universal, independente do referencial. Utilizando o sistema CGS gaussianas, as equações de Maxwell no vácuo são dadas por:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (6.33)$$

As equações (6.33) devem ser válidas em todos os referenciais inerciais, portanto é possível escrevê-las utilizando a notação covariante. Aplicando a divergência na lei de Ampère:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0; \quad (6.34)$$

e introduzindo o quadrivetor:

$$J^\mu = (c\rho, j_x, j_y, j_z) \equiv (c\rho, \mathbf{j}); \quad (6.35)$$

em que J^μ é definido como *quadricorrente*, de modo que a equação (6.34) pode ser escrita como:

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (6.36)$$

que é chamada de equação de continuidade, que descreve a conservação da carga/corrente elétrica.

Podemos introduzir os potenciais escalares e vetoriais, respectivamente, ϕ e $\mathbf{A}$, de modo que:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad , \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (6.37)$$

Por meio de manipulações da equação (6.37) consideramos que, $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$. Onde podemos introduzir o tensor de *rank*-dois $F^{\mu\nu}$, definido como o rotacional de A^μ :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (6.38)$$

que é representado pela matriz antissimétrica $F^{\mu\nu}$:

$$[F^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.39)$$

onde, $F^{\mu\nu}$ é chamado de Tensor do campo eletromagnético, sendo antissimétrico, ou seja:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}. \quad (6.40)$$

Se introduzirmos a transformação $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ em (6.38), pode se verificar que:

$$F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}. \quad (6.41)$$

Segue-se que, a teoria eletromagnética é invariante por essa transformação, que é conhecida como transformação de calibre. A lagrangiana de Maxwell, na ausência de fontes, é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (6.42)$$

Note que esta é hermitiana, e a partir de (6.31), podemos calcular o tensor energia-momento para teoria eletromagnética:

$$\begin{aligned} \theta^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} \partial^\nu A_\sigma - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}; \\ &= -F^{\mu\sigma} \partial^\nu A_\sigma + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Que não é simétrico com respeito a troca de μ e ν . É desejável que esse tensor seja simétrico e invariante de calibre, portanto faremos uma simetrização, apresentada na próxima seção, sem alterar a equação de continuidade e portanto manter o quadrimomento invariante perante essa simetrização.

6.4 CORREÇÃO VIA BELINFANTE-ROSENFELD

O procedimento de simetrização de Belinfante-Rosenfeld possibilita simetrizar o tensor energia-momento canônico, a partir da seguinte construção:

$$T^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda K^{\lambda\mu\nu}, \quad (6.44)$$

onde, $K^{\lambda\mu\nu}$ é um tensor de ordem 3 arbitrário e antissimétrico com respeito a troca de λ por μ , ou seja,

$$K^{\lambda\mu\nu} = -K^{\mu\lambda\nu} \quad (6.45)$$

Como comentado anteriormente, esse novo tensor deve obedecer a equação de continuidade (6.30):

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = \underbrace{\partial_\mu \theta^{\mu\nu}}_{=0} + \partial_\mu \partial_\lambda K^{\lambda\mu\nu}; \quad (6.46)$$

$$\therefore \partial_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\lambda K^{\lambda\mu\nu} = 0. \quad (6.47)$$

A equação (6.47) é nula, pois temos um tensor antissimétrico contraído com um produto simétrico de quadri-derivadas. Note que, $T^{\mu\nu}$ obedece a equação de continuidade (6.30), por consequência, o quadrimomento permanece inalterado. Agora, construiremos $T^{\mu\nu}$, de modo que, se garanta:

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \quad (6.48)$$

Para isso é útil introduzir o tensor densidade de Momento angular:

$$M^{\lambda\mu\nu} = x^\mu \theta^{\lambda\nu} - x^\nu \theta^{\lambda\mu} - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda \phi_r)} \Sigma^{\mu\nu} \phi_r, \quad (6.49)$$

onde, $\Sigma^{\mu\nu}$ é o gerador da transformação, sendo uma quantidade antissimétrica. Note que, $M^{\lambda\mu\nu}$ deve obedecer a equação de continuidade:

$$\partial_\lambda M^{\lambda\mu\nu} = 0; \quad (6.50)$$

portanto,

$$\begin{aligned} \partial_\lambda x^\mu \theta^{\lambda\nu} + x^\mu \underbrace{\partial_\lambda \theta^{\lambda\nu}}_{=0} - \partial_\lambda x^\nu \theta^{\lambda\mu} - x^\nu \underbrace{\partial_\lambda \theta^{\lambda\mu}}_{=0} - \partial_\lambda \left(i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda \phi_r)} \Sigma^{\mu\nu} \phi_r \right) &= 0; \\ \delta_\lambda^\mu \theta^{\lambda\nu} - \delta_\lambda^\nu \theta^{\lambda\mu} &= \partial_\lambda \left(i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda \phi_r)} \Sigma^{\mu\nu} \phi_r \right); \\ \theta^{\mu\nu} - \theta^{\nu\mu} &= \partial_\lambda \left(i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\lambda \phi_r)} \Sigma^{\mu\nu} \phi_r \right). \end{aligned} \quad (6.51)$$

Agora, podemos escrever explicitamente (6.48):

$$\theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda K^{\lambda\mu\nu} = \theta^{\nu\mu} + \partial_\lambda K^{\lambda\nu\mu}; \quad (6.52)$$

$$\theta^{\mu\nu} - \theta^{\nu\mu} = -\partial_\lambda (K^{\lambda\mu\nu} - K^{\lambda\nu\mu}); \quad (6.53)$$

$$\partial_\lambda \left(i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda \phi_r)} \Sigma^{\mu\nu} \phi_r \right) = -\partial_\lambda (K^{\lambda\mu\nu} - K^{\lambda\nu\mu}). \quad (6.54)$$

Utilizou-se o resultado de (6.51) em (6.53). Note que a expressão (6.54) tem a solução:

$$K^{\lambda\mu\nu} - K^{\lambda\nu\mu} = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda \phi_r)} \Sigma^{\mu\nu} \phi_r. \quad (6.55)$$

Podemos permutar os índices ciclicamente,

$$K^{\mu\nu\lambda} - K^{\mu\lambda\nu} = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \Sigma^{\nu\lambda} \phi_r. \quad (6.56)$$

permutando os índices ciclicamente da equação (6.56), temos:

$$K^{\nu\lambda\mu} - K^{\nu\mu\lambda} = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi_r)} \Sigma^{\lambda\mu} \phi_r. \quad (6.57)$$

Por fim, somando (6.55) e (6.56) e subtraindo (6.57), isolamos finalmente $K^{\lambda\mu\nu}$:

$$K^{\lambda\mu\nu} = \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi_r)} \Sigma^{\lambda\mu} \phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \Sigma^{\lambda\nu} \phi_r - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda \phi_r)} \Sigma^{\mu\nu} \phi_r \right). \quad (6.58)$$

Portanto, como (6.58) é solução da equação (6.52), temos o tensor energia momento simetrizado via procedimento de Belinfante-Rosenfield, e esse é dado por:

$$T^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \partial_\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi_r)} \Sigma^{\lambda\mu} \phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \Sigma^{\lambda\nu} \phi_r - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda \phi_r)} \Sigma^{\mu\nu} \phi_r \right). \quad (6.59)$$

Agora, estamos aptos a simetrizar (6.43). Tendo posse de (6.59) é possível simetrizar (6.43),

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= -F^{\mu\sigma} \partial^\nu A_\sigma + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \\ &+ \frac{i}{2} \partial_\lambda \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A^\alpha)} (S^{\lambda\mu})^\alpha{}_\beta A^\beta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\alpha)} (S^{\lambda\nu})^\alpha{}_\beta A^\beta - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda A^\alpha)} (S^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta A^\beta \right) \end{aligned} \quad (6.60)$$

Em que $(S^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta$ é o gerador do grupo de Lorentz para parte de *Spin*, dado por (4.42). Calculemos o primeiro termo de parêntese do (6.60), utilizando a lagrangiana (6.42) e o gerador (4.42):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A^\alpha)} (S^{\lambda\mu})^\alpha{}_\beta A^\beta = -i (F^{\nu\lambda} A^\mu - F^{\nu\mu} A^\lambda). \quad (6.61)$$

O cálculo para o demais termos é análogo. Portanto $T^{\mu\nu}$, será:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= -F^{\mu\lambda}\partial^\nu A_\lambda + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + \partial_\lambda(F^{\mu\lambda}A^\nu); \\ &= F^{\mu\lambda}(F_\lambda{}^\nu - \partial_\lambda A^\nu) + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + \partial_\lambda F^{\mu\lambda}A^\nu + F^{\mu\lambda}\partial_\lambda A^\nu; \end{aligned} \quad (6.62)$$

$$= F^{\mu\lambda}F_\lambda{}^\nu + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} - j^\mu A^\nu. \quad (6.63)$$

Note que, utilizou-se o fato de:

$$\partial_\lambda F^{\lambda\mu}A^\nu = j^\mu A^\nu, \quad (6.64)$$

em (6.62), na ausência de fontes, $j^\mu = 0$, portanto, o tensor energia momento será:

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda}F_\lambda{}^\nu + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \quad (6.65)$$

Sendo este simétrico e invariante de calibre. Pode-se mostrar que através desta expressão somos capazes de encontrar um valor para T^{00} que de fato corresponde a densidade de energia do campo eletromagnético, portanto trata-se de um resultado com interpretação física correta. A seguir usaremos o método de obtenção por meio da derivada funcional com respeito da métrica, por vezes chamado de método de Hilbert.

6.5 MÉTODO DA MÉTRICA OU MÉTODO DE HILBERT

Tal como na obtenção da equação de campo de Einstein, partimos da densidade de lagrangiana que descreve a matéria no espaço:

$$I_m = \int_\Omega \mathcal{L}_m d\Omega, \quad (6.66)$$

Podemos definir a variação da ação como:

$$\delta I_m = \int_\Omega \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} d\Omega = -\frac{1}{2} \int_\Omega \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} d\Omega \quad (6.67)$$

em que

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (6.68)$$

que é o Tensor Energia- Momento fatorado da métrica, este descreve como a matéria deforma o espaço tempo, e deve completar o lado direito da equação de campo de Einstein (5.38).

No momento, nos interessamos em comparar o tensor energia momento simetrizado via procedimento de Belinfante-Rosenfeld e o tensor energia momento calculado via métrica para mesma teoria. Nos casos abordados, estudaremos apenas o espaço-tempo plano, o espaço de Minkowski.

Reescrevendo a lagrangiana (6.42) em termos da métrica explicitamente, temos:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F_{\kappa\lambda} g^{\kappa\alpha} g^{\beta\lambda}. \quad (6.69)$$

Explicitando o lado direito de (6.68):

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{g}} \left(\frac{\delta \sqrt{g}}{\delta g_{\mu\nu}} \mathcal{L} + \sqrt{g} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} \right). \quad (6.70)$$

utilizando (5.35) e (5.36), temos

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} \left(F_{\alpha\beta} F_{\kappa\lambda} \delta g^{\kappa\alpha} g^{\beta\lambda} + F_{\alpha\beta} F_{\kappa\lambda} g^{\kappa\alpha} \delta g^{\beta\lambda} \right); \\ &= -\frac{1}{4} \left[F_{\alpha\beta} F_{\kappa\lambda} (-g^{\kappa\eta} g^{\alpha\theta} \delta g_{\eta\theta}) g^{\beta\lambda} + F_{\alpha\beta} F_{\kappa\lambda} g^{\kappa\alpha} (-g^{\beta\eta} g^{\lambda\theta} \delta g_{\eta\theta}) \right]. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Temos então, após as substituições de (6.71) e (5.35) em (6.70):

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{g}} \left[\frac{1}{2} \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} \mathcal{L} + \frac{1}{4} \sqrt{g} \left(F_{\alpha\beta} F_{\kappa\lambda} g^{\kappa\eta} g^{\alpha\theta} \frac{\delta g_{\eta\theta}}{\delta g_{\mu\nu}} g^{\beta\lambda} + F_{\alpha\beta} F_{\kappa\lambda} g^{\kappa\alpha} g^{\beta\eta} g^{\lambda\theta} \frac{\delta g_{\eta\theta}}{\delta g_{\mu\nu}} \right) \right]; \quad (6.72)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \left(F_{\alpha\beta} F_{\kappa\lambda} g^{\kappa\mu} g^{\alpha\nu} g^{\beta\lambda} + F_{\alpha\beta} F_{\kappa\lambda} g^{\kappa\alpha} g^{\beta\mu} g^{\lambda\nu} \right); \\ &= \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left(-F^{\nu\lambda} F^{\mu}{}_{\lambda} - F^{\kappa\mu} F_{\kappa}{}^{\nu} \right); \end{aligned} \quad (6.73)$$

portanto, o tensor energia momento será:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + F^{\mu\lambda} F_{\lambda}{}^{\nu}. \quad (6.74)$$

Mas, $g^{\mu\nu} \rightarrow \eta^{\mu\nu}$, então:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + F^{\mu\lambda} F_{\lambda}{}^{\nu}. \quad (6.75)$$

No segundo termo de (6.73) utilizou-se $F^{\lambda\nu} F^{\mu}{}_{\lambda} = F^{\mu\lambda} F_{\lambda}{}^{\nu}$, vamos prová-la,

$$\begin{aligned} F^{\lambda\nu} F^{\mu}{}_{\lambda} &= (\partial^{\lambda} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\lambda})(\partial^{\mu} A_{\lambda} - \partial_{\lambda} A^{\mu}) \\ &= \partial^{\lambda} A^{\nu}(\partial^{\mu} A_{\lambda} - \partial_{\lambda} A^{\mu}) - \partial^{\nu} A^{\lambda}(\partial^{\mu} A_{\lambda} - \partial_{\lambda} A^{\mu}) \\ &= (\partial^{\lambda} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\lambda})(\partial^{\mu} A_{\lambda} - \partial_{\lambda} A^{\mu}) \\ &= (\partial^{\mu} A_{\lambda} - \partial_{\lambda} A^{\mu})(\partial^{\lambda} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\lambda}) = F^{\mu}{}_{\lambda} F^{\lambda\nu} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Notamos que as expressões (6.75) e (6.65) para o tensor energia momento da teoria

eletromagnética são idênticas, com a diferença do cálculo do tensor energia momento calculado via métrica já é obtido naturalmente em sua forma simetrizada.

7 TENSOR ENERGIA-MOMENTO PARA PARTÍCULAS DE SPIN-1/2

As equações de Dirac são fundamentais na teoria quântica de campos, pois descrevem o comportamento relativístico de partículas de spin-1/2, como os elétrons. Formuladas por Paul Dirac em 1928, essas equações incorporaram princípios de mecânica quântica e relatividade, prevendo a existência de antipartículas e explicando o espectro de energia relativístico do elétron. Diferente da equação de Schrödinger, que é aplicável apenas em regimes não relativísticos, as equações de Dirac acomodam naturalmente os conceitos de transformação sob o grupo de Lorentz, estabelecendo uma descrição coerente para férmions e suas interações com campos eletromagnéticos. Esse formalismo representa uma das bases para a eletrodinâmica quântica e tem um papel essencial no desenvolvimento da teoria de partículas, sendo indispensável para a construção de modelos relativísticos de partículas fundamentais e a compreensão do comportamento de partículas em regimes de alta energia. Nosso contato com espinores, primeiro será pela teoria de spin-1/2 (NETO, 2017) e se dá por meio da Lagrangiana de Dirac, dada por:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi; \quad (7.1)$$

a equação de movimento correspondente para $\bar{\psi}$ é:

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0, \quad (7.2)$$

que é a equação de Dirac. Podemos calcular o tensor energia momento canônico, dado por (6.31):

$$\theta^{\mu\nu} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial^\nu\psi. \quad (7.3)$$

Note que, este não é simétrico, portanto podemos simetrizá-lo via procedimento de Belinfante-Rosenfeld. Para o procedimento, devemos tornar a densidade de lagrangiana (7.1) hermitiana, adicionando uma derivada total:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{i}{2}\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi); \\ &= +\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{i}{2}\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi; \end{aligned} \quad (7.4)$$

que tem a mesma equação de movimento de (7.1).

Hermitizar a densidade de lagrangiana é conveniente, pois segundo (ANDROVANDI; PEREIRA, 2008 (Apostila)) a densidade de lagrangiana deve ser auto-adjunta, ou simplesmente hermitiana, pois uma lagrangiana não hermitiana quebra a conservação de probabilidade e viola a unitariedade da matriz de espalhamento S .

7.1 CORREÇÃO DE BELINFANTE-ROSENFELD

Podemos calcular o tensor energia momento para (7.4), este é:

$$\theta_H^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi - \partial^\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right). \quad (7.5)$$

Segundo (BANDYOPADHYAY, 2001) o tensor de Belinfante que simetriza (7.5) é:

$$K^{\lambda\mu\nu} = \bar{\psi} \left[\gamma^\lambda, \gamma^{\mu\nu} \right]_+ \psi \quad (7.6)$$

em que

$$\gamma^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (7.7)$$

utilizando as relação de anti-comutação, aplicando a derivada em (7.6) e utilizando a equação de movimento:

$$\partial_\lambda K^{\lambda\mu\nu} = \frac{i}{4} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi + \partial^\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - \partial^\mu \bar{\psi} \gamma^\nu \psi). \quad (7.8)$$

Portanto, o tensor Energia-Momento simetrizado fica:

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{4} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi + \bar{\psi} \gamma^\nu \partial^\mu \psi) - \frac{i}{4} (\partial^\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \partial^\mu \bar{\psi} \gamma^\nu \psi), \quad (7.9)$$

este é simétrico e hermitiano.

7.2 MÉTODO DA MÉTRICA

Para o cálculo do Tensor energia-momento via métrica, utilizamos a densidade de lagrangiana hermitizada (7.4), na equação (6.68):

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g_{\mu\nu}} \mathcal{L} + \sqrt{-g} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} \right),$$

o primeiro termo é nulo, devido a equação de movimento (7.2), portanto:

$$T^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (7.10)$$

pelos mesmos motivos apresentados acima, fatoramos a métrica de (7.4):

$$\delta \mathcal{L}_H = \frac{i}{2} g^{\lambda\alpha} \bar{\psi} \gamma_\alpha \partial_\lambda \psi - \frac{i}{2} g^{\lambda\beta} \bar{\psi} \partial_\lambda \bar{\psi} \gamma_\alpha \psi - m \bar{\psi} \psi. \quad (7.11)$$

Colocando (7.11) o tensor Energia-Momento fica:

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi + \bar{\psi} \gamma^\nu \partial^\mu \psi) - \frac{i}{2} (\partial^\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \partial^\mu \bar{\psi} \gamma^\nu \psi) \quad (7.12)$$

que é simétrico, hermitiano e quase igual ao calculado via simetrização de Belinfante-Rosenfeld, a menos de uma constante global, que não deve fazer diferença no resultado físico que este tensor carrega.

8 TENSOR ENERGIA-MOMENTO PARA PARTÍCULAS DE $SPIN-3/2$

A teoria de Rarita-Schwinger é fundamental para a descrição de partículas de spin-3/2 em um contexto relativístico, sendo a base teórica para modelos de férmions de alto spin, como o gravitino em teorias de supergravidade. Desenvolvida por William Rarita e Julian Schwinger em 1941, a teoria expande o formalismo de Dirac, aplicando-se a partículas que possuem graus de liberdade adicionais devido ao spin fracionário maior que 1/2. A equação de Rarita-Schwinger, que combina características de vetores e espinores, enfrenta desafios matemáticos e físicos, como as condições de consistência e causalidade, especialmente em interações com campos gravitacionais. A teoria é central para o desenvolvimento de modelos teóricos que exploram a supersimetria, pois o gravitino é considerado o superparceiro do gráviton nessas teorias. Portanto, a teoria de Rarita-Schwinger é crucial para estender as fronteiras do modelo padrão, fornecendo uma estrutura para explorar novas simetrias fundamentais e partículas hipotéticas em física de altas energias e cosmologia. Nosso primeiro contato com uma teoria de spin-3/2 se dará por meio da Lagrangiana de Rarita-Schwinger (RARITA; SCHWINGER, 1941; RAHMAN, 2009) onde ψ_μ é um espinor-vetor de Dirac. A lagrangiana de Rarita-Schwinger é dada por:

$$\mathcal{L} = -i\bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \psi_\rho - im\bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu; \quad (8.1)$$

onde, $\gamma^{\mu\nu\rho}$ é totalmente antissimétrico e obedece a seguinte relação:

$$\gamma^{\mu\nu\rho} = \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho - g^{\mu\nu} \gamma^\rho + g^{\mu\rho} \gamma^\nu - g^{\nu\rho} \gamma^\mu. \quad (8.2)$$

A equação de movimento derivada da densidade de lagrangiana (8.1) é:

$$K^\mu = -i\gamma^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \psi_\rho - im\gamma^{\mu\nu} \psi_\nu = 0;$$

perceba ainda que, a densidade de Lagrangiana (8.1), pode ser escrita como:

$$\mathcal{L} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} \partial_\nu \psi_\rho - \frac{i}{2}m\bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu} \psi_\nu + \frac{i}{2}\partial_\nu \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} \psi_\rho + \frac{i}{2}m\bar{\psi}_\nu \gamma^{\mu\nu} \psi_\mu, \quad (8.3)$$

note que, a equação de movimento continua a mesma. E ainda,

$$\mathcal{L} = \frac{\mathcal{L}}{2} + \frac{\mathcal{L}^\dagger}{2}. \quad (8.4)$$

Segundo (BENAKLI, 2018), temos os seguintes vínculos, obtidos dinamicamente,

chamadas condições de Fierz-Pauli:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi^\nu = 0; \quad (8.5)$$

$$\gamma^\mu \psi_\mu = 0; \quad (8.6)$$

$$\bar{\psi}_\mu \gamma^\mu = 0; \quad (8.7)$$

$$\partial^\mu \psi_\mu = 0. \quad (8.8)$$

essas constantes serão úteis para o cálculo do tensor energia-momento. Queremos calcular o tensor energia momento para essa teoria, que descreve partículas massivas de *spin*-3/2. Nas próximas seções, o calcularemos de três diferentes métodos, vistos anteriormente, via teorema de Noether, Belinfante-Rosenfeld e Métrica.

8.1 TENSOR ENERGIA-MOMENTO VIA TEOREMA DE NOETHER

A partir de (6.31) e utilizando a lagrangiana de Rarita-Schwinger (8.1), podemos calcular o tensor energia momento canônico para a teoria, obtemos assim:

$$\theta^{\mu\nu} = i\bar{\psi}_\alpha \gamma^{\alpha\mu\beta} \partial^\nu \psi_\beta - g^{\mu\nu} \mathcal{L}; \quad (8.9)$$

mas, usando a equação de movimento, vem que:

$$\theta^{\mu\nu} = i\bar{\psi}_\alpha \gamma^{\alpha\mu\beta} \partial^\nu \psi_\beta. \quad (8.10)$$

Perceba que o tensor energia momento obtido não é simétrico a exemplo do que também ocorre com a teoria de Maxwell. Usaremos então o método de Belinfante-Rosenfeld para tentar obter um resultado simétrico, como fizemos para partículas de *spin*-1/2.

8.2 TENSOR ENERGIA MOMENTO VIA BELINFANTE- ROSENFELD

Com a intenção de deixar (8.10) simétrico utilizamos (6.59). Mas antes, calculemos o tensor energia-momento para densidade lagrangiana hermitizada (8.3):

$$\theta_H^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \bar{\psi}_\alpha \gamma^{\alpha\mu\beta} \partial^\nu \psi_\beta - \frac{i}{2} \partial^\nu \bar{\psi}_\alpha \gamma^{\alpha\mu\beta} \psi_\beta, \quad (8.11)$$

utilizando a relação (8.2) e as condições de Fiers-Pauli o tensor energia-momento fica:

$$\theta_H^{\mu\nu} = \frac{i}{2} \bar{\psi}_\alpha \gamma^\mu \partial^\nu \psi_\alpha + \frac{i}{2} \partial^\nu \bar{\psi}^\alpha \gamma^\mu \psi_\alpha. \quad (8.12)$$

Para simetrizá-lo, precisamos do gerador de rotações (parte de *spin*) do grupo de Lorentz na representação de espinores vetores *spin*-3/2, em $D = 3 + 1$, esse gerador é dado

por (SILVA et al., 2024):

$$(S^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta = i(g^{\alpha\mu}\delta^\nu_\beta - g^{\nu\alpha}\delta^\mu_\beta) - \frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}\delta^\alpha_\beta. \quad (8.13)$$

Portanto, o tensor energia momento obtido a partir do procedimento de Belinfante-Rosenfeld, será:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = & \frac{i}{2}\bar{\psi}_\alpha\gamma^\mu\partial^\nu\psi_\alpha + \frac{i}{2}\partial^\nu\bar{\psi}_\alpha\gamma^\mu\psi_\alpha + \frac{i}{2}\left(\frac{1}{2}\bar{\psi}_\alpha\gamma^{\mu\alpha\rho}\partial^\nu\psi_\rho + \frac{1}{2}\partial_\rho\bar{\psi}_\rho\gamma^{\mu\alpha\rho}\partial^\nu\psi_\alpha + \right. \\ & \left. - \bar{\psi}^\rho\gamma^{\mu\nu\alpha}\partial_\rho\psi_\alpha - \partial_\rho\bar{\psi}_\alpha\gamma^{\mu\nu\alpha}\psi^\rho - \frac{1}{2}\bar{\psi}_\alpha\gamma^{\nu\alpha\rho}\partial^\mu\psi_\rho - \partial^\mu\bar{\psi}_\rho\gamma^{\nu\alpha\rho}\psi_\alpha\right). \end{aligned} \quad (8.14)$$

O resultado não é simétrico, mas acredita-se que o problema seja o tensor energia-momento canônico (8.12), pois este não é hermitiano, como calculado para spin-1/2. A seguir apresentamos nosso resultado obtido com respeito ao método da métrica.

8.3 TENSOR ENERGIA-MOMENTO VIA MÉTRICA

O tensor energia momento será dado pela expressão (6.70), note que o primeiro termo dessa expressão é nulo, devido ao uso da equação de movimento (8.3), de modo que (6.70) se reduz a:

$$T^{\mu\nu} = -2\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (8.15)$$

De modo que:

$$T^{\mu\nu} = T'^{\mu\nu} + T''^{\mu\nu}, \quad (8.16)$$

onde, utilizando (8.4) em (8.15) :

$$T'^{\mu\nu} = -\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}}; \quad (8.17)$$

$$T''^{\mu\nu} = -\frac{\delta\mathcal{L}^\dagger}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (8.18)$$

Faremos a conta para (8.17), portanto, fatorando a métrica dos dois primeiros termos de (8.3) ;

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = & i\bar{\psi}_\kappa\gamma_{\alpha\beta\rho}\partial_\lambda\psi_\varepsilon g^{\alpha\kappa}g^{\beta\lambda}g^{\rho\varepsilon} + i\bar{\psi}_\kappa\gamma_{\alpha\beta\rho}\partial_\lambda\psi_\varepsilon g^{\alpha\kappa}\delta g^{\beta\lambda}g^{\rho\varepsilon} + \\ & + i\bar{\psi}_\kappa\gamma_{\alpha\beta\rho}\partial_\lambda\psi_\varepsilon g^{\alpha\kappa}g^{\beta\lambda}\delta g^{\rho\varepsilon} + im\bar{\psi}_\kappa\gamma_{\alpha\beta}\psi_\sigma\delta g^{\alpha\kappa}g^{\sigma\beta} + im\bar{\psi}_\kappa\gamma_{\alpha\beta}\psi_\beta g^{\alpha\kappa}\delta g^{\lambda\beta} \end{aligned} \quad (8.19)$$

Utilizando a equação (5.36) e o primeiro termo da equação (8.19) em (8.15), teremos:

$$\begin{aligned} -i\bar{\psi}_\kappa\gamma_{\alpha\beta\rho}\partial_\lambda\psi_\varepsilon g^{\beta\lambda}g^{\rho\varepsilon}\frac{\delta g^{\alpha\kappa}}{\delta g_{\mu\nu}} & = -i\bar{\psi}_\kappa\gamma_{\alpha\beta\rho}\partial_\lambda\psi_\varepsilon(-g^{\alpha\xi}g^{\kappa\omega}\frac{\delta g_{\xi\omega}}{\delta g_{\mu\nu}})g^{\beta\lambda}g^{\rho\varepsilon}; \\ & = -\frac{i}{2}(\bar{\psi}^\nu\gamma^{\mu\lambda\beta}\partial_\lambda\psi_\beta + \bar{\psi}^\mu\gamma^{\nu\lambda\beta}\partial_\lambda\psi_\beta). \end{aligned} \quad (8.20)$$

Analogamente para os demais termos e usado a propriedade (8.10):

$$T'^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\bar{\psi}^\nu \gamma^{\mu\lambda\epsilon} \partial_\lambda \psi_\epsilon + \bar{\psi}^\mu \gamma^{\nu\lambda\epsilon} \partial_\lambda \psi_\epsilon + \bar{\psi}^\alpha \gamma_\alpha^{\mu\epsilon} \partial^\nu \psi_\epsilon + \bar{\psi}^\alpha \gamma_\alpha^{\nu\epsilon} \partial^\mu \psi_\epsilon + \bar{\psi}_\kappa \gamma^{\kappa\lambda\mu} \partial_\lambda \psi^\nu + \bar{\psi}_\kappa \gamma^{\kappa\lambda\nu} \partial_\lambda \psi^\mu + m [\bar{\psi}^\nu \gamma^\mu \gamma^\beta \psi_\beta - \bar{\psi}^\nu \gamma^\beta \gamma^\mu \psi_\beta + \bar{\psi}_\kappa \gamma^\kappa \gamma^\mu \psi^\nu - \bar{\psi}_\kappa \gamma^\mu \gamma^\kappa \psi^\nu]). \quad (8.21)$$

Utilizando os vínculos de Fiers-Pauli em (8.21) e utilizando as relações:

$$\gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 = \gamma_\mu^\dagger, \quad \gamma_0^\dagger = \gamma_0, \quad \gamma_i^\dagger = -\gamma_i. \quad (8.22)$$

Teremos uma parte do tensor energia momento:

$$T'^{\mu\nu} = \frac{i}{4} (\bar{\psi}^\lambda \gamma^\mu \partial_\lambda \psi^\nu + \bar{\psi}^\lambda \gamma^\nu \partial_\lambda \psi^\mu - \bar{\psi}^\beta \gamma^\mu \partial^\nu \psi_\beta - \bar{\psi}^\beta \gamma^\nu \partial^\mu \psi_\beta). \quad (8.23)$$

O cálculo para (8.18) é análogo. Juntando todos os termos, o tensor energia momento, fica simetrizado e hermitiano:

$$T^{\mu\nu} = \frac{i}{4} (\bar{\psi}^\lambda \gamma^\mu \partial_\lambda \psi^\nu + \bar{\psi}^\lambda \gamma^\nu \partial_\lambda \psi^\mu - \bar{\psi}^\beta \gamma^\mu \partial^\nu \psi_\beta - \bar{\psi}^\beta \gamma^\nu \partial^\mu \psi_\beta) + c.h.. \quad (8.24)$$

que conclui a obtenção do tensor energia momento via métrica o qual como esperado é simétrico com respeito a troca dos índices μ e ν . Esse cálculo foi checado computacionalmente, utilizando o pacote *Fields-X* (FRÖB, 2020. *Preprint*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2008.1242>), no *Mathematica Wolfram* e estará no anexo A. Partido do resultado final obtido, aplicou-se as condições de Fierz-Pauli e a relação (8.2) obteve-se (8.24).

Nossa intenção inicial era estender este estudo para o caso das teorias de spin-3/2, massivas em $D = 2 + 1$ dimensões e que foram exploradas pelo grupo de pesquisa de Guaratinguetá em (MENDONÇA; SANTOS; LIMA, 2017; MENDONÇA; LIMA; SANTOS, 2018; LIMA, 2018). Porém como vemos as sutilezas encontradas ao lidar com férmions foram tecnicamente um pouco impeditivas e portanto o trabalho deve continuar após a conclusão de nossa graduação.

9 CONCLUSÃO

No presente trabalho, exploramos aspectos de mecânica analítica, teoria de grupos, relatividade geral e teoria clássica de campos. Esses tópicos foram fundamentais para a construção e compreensão do tensor energia-momento. O estudo da mecânica analítica foi relevante devido ao princípio da ação mínima, utilizado para a obtenção da equação de campo de Einstein para o vácuo e para o cálculo do tensor energia-momento.

Durante a derivação do tensor energia-momento pelo teorema de Noether, encontramos dificuldades relacionadas à sua simetria, o que exigiu a busca de métodos alternativos para a sua formulação. Observamos, por exemplo, a necessidade de hermitizar a densidade lagrangiana para garantir a conservação da probabilidade, aplicando essa abordagem às densidades lagrangianas de Dirac e Rarita-Schwinger.

Para partículas de spin-1, o cálculo do tensor energia-momento através do procedimento de Belinfante-Rosenfeld foi relativamente simples, já que a densidade lagrangiana era hermitiana, e o gerador da transformação simétrica era direto. A escolha desta teoria como primeira aplicação revelou-se adequada, pois possibilitou confirmar a validade do método, conforme demonstrado em (BELINFANTE, 1940), sem grandes nuances.

Contudo, o método de Belinfante-Rosenfeld apresentou complexidades para partículas fermiônicas devido à independência dos campos espinoriais, ao gerador da componente de spin, e à necessidade de hermitização da densidade lagrangiana. A simetrização do tensor energia-momento canônico foi desafiadora, especialmente para partículas de spin-3/2, e, mesmo com suporte computacional, não foi possível concluir o cálculo do tensor energia-momento para este caso.

Já com o método métrico, o cálculo foi consideravelmente mais simples, exigindo apenas que a densidade lagrangiana fosse hermitiana e utilizando as relações (5.35) e (5.36). Assim como no método de Belinfante, foi necessário empregar as condições de Fierz-Pauli para eliminar constantes indesejadas. Nesse método, conseguimos obter o tensor energia-momento com sucesso para todas as teorias abordadas neste trabalho.

REFERÊNCIAS

- ANDROVANDI, R.; PEREIRA, J. **Notes for a course on classical fields**. [S.l.]: Instituto de Física Teórica da Universidade Estadual Paulista, 2008 (Apostila).
- BAKER, M. R.; LINNEMANN, N.; SMEENK, C. Noether's first theorem and the energy-momentum tensor ambiguity problem. **arXiv**, 2021. *Preprint*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2107.10329>.
- BANDYOPADHYAY, A. **Improvement of stress-energy tensor using space-time symmetries**. [S.l.]: 2001. Thesis (Doctor of Philosophy in Physics) - University of Illinois at Urbana-Champaign, 2001.
- BELINFANTE, F. J. On the current and the density of the electric charge, the energy, the linear momentum and the angular momentum of arbitrary fields. **Physica**, Manioba, v. 7, n. 5, p. 449–474, 1940.
- BENAKLI, K. Gravitational waves from spin-3/2 fields hunting susy in the sky. In: **Spin**. [S.l.: s.n.], 2018. v. 3, n. 2, p. 3.
- FRÖB, M. B. Fieldsx—an extension package for the xact tensor computer algebra suite to include fermions, gauge fields and brst cohomology. **arXiv**, 2020. *Preprint*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2008.1242>.
- GREINER, W.; REINHARD, J. **Field quantization**. Heidelberg, Berlin: Springer Verlag, 1996.
- LEMOES, N. **Mecânica analítica**. São Paulo, SP.: Livraria da Física, 2013.
- LIMA, D. S. **Teorias duais massivas de spin-3/2 em $d = 2+1$** . 2018. 66f. Dissertação (Mestrado em Física) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2018.
- MENDONÇA, E.; LIMA, D.; SANTOS, A. dos. Soldering spin-3/2 fermions in $d = 2 + 1$. **Physics Letters B**, Amsterdam, v.783, p. 387–391, 2018.
- MENDONÇA, E.; SANTOS, A.; LIMA, D. Massive spin-3/2 models in $d = 2 + 1$. **Physics Letters B**, Amsterdam, v.775, p. 147–151, 2017.
- NETO, J. B. **Matemática para físicos com aplicações: vetores, tensores e spinores**. São Paulo: LF, 2010.
- NETO, J. B. **Teoria de campos e a natureza: parte quântica**. São Paulo: LF, 2017.
- RAHMAN, M. R. **Interacting massive higher spin fields**. 2009. Thesis (Doctor of Physics) – New York University, New York, 2009.
- RARITA, W.; SCHWINGER, J. On the neutron-proton interaction. **Physical Review Journals Archive**, [S.l.], 1941.
- SILVA, H. A. et al. Generators of the poincaré group for arbitrary tensors and spinor-tensors. **High Energy Physics, Theory**, [S.l.], v. 464, p. 169646, 2024.
- WEINBERG, S. **Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity**. New York: Wiley, 1972.

ANEXO A – TENSOR ENERGIA-MOMENTO VIA MÉTRICA

Tensor Energia-Momento Via métrica

Resumo: O pacote Fields-X do Mathematica/Wolfram é uma poderosa ferramenta voltada para a manipulação simbólica e o cálculo em teorias de campos clássicas e quânticas. Projetado para simplificar o trabalho com tensores, o Fields-X permite realizar cálculos complexos em teorias de calibre, relatividade geral, teorias de campos espinoriais, entre outras, com alto grau de automatização. Suas funcionalidades incluem o cálculo do tensor energia-momento, a aplicação do teorema de Noether para encontrar correntes conservadas e a manipulação de densidades lagrangianas com simetrias internas e de espaço-tempo.

Além disso, o Fields-X facilita a hermitização de densidades lagrangianas e a análise de condições de consistência, como as condições de Fierz-Pauli para campos espinoriais. Com sua interface integrada ao Mathematica, o pacote amplia significativamente as capacidades do software em teorias de campos, permitindo cálculos simbólicos e algébricos complexos de forma acessível e precisa, tornando-se uma ferramenta essencial para pesquisadores em física teórica e matemática aplicada.

Aqui iremos usá-lo para calcular o tensor energia-momento pelo método de Hilbert para uma teoria de spin-3/2.

Definindo o Manifold a métrica e a estrutura de índices espinoriais

Com os comando a seguir carregamos o pacote Fields-X e definimos um manifold M de quatro dimensões equipado com uma métrica plana que chamaremos de gg. Definimos um conjunto de índices gregos correspondentes ao manifold e uma estrutura de índices latinos maiúsculos correspondentes aos índices espinoriais.

```
In[ ]:= Block[{Print}, << xAct`FieldsX`];  
[bloqueia [apresenta o resultado]
```

```
In[ ]:= DefManifold[M, 4, {α, β, γ, δ, μ, ν, ρ, σ}]
```

```
** DefManifold: Defining manifold M.
```

```
** DefVBundle: Defining vbundle TangentM.
```

```
In[ ]:= $CenterDotTexSymbol = ".";
```

```
In[ ]:= DefMetric[-1, gg[-μ, -ν], PD, PrintAs → "g",  
FlatMetric → True, SymbolOfCovD → {"", "∂"}]  
[verdadeiro]
```

```

** DefTensor: Defining symmetric metric tensor gg[-μ, -ν].
** DefTensor: Defining antisymmetric tensor epsilon[-α, -β, -γ, -δ].
** DefTensor: Defining tetrametric Tetragg[-α, -β, -γ, -δ].
** DefTensor: Defining tetrametric Tetragg+[-α, -β, -γ, -δ].
** DefMetric: Associating fiducial flat derivative PD to metric.
** DefTensor: Defining weight +2 density Detgg[.]. Determinant.

```

$$\ln[\bullet] :=$$

```
DefSpinStructure[gg, {A, B, F, G, H, J, K, L, Q}];
```

VBundlesOfCovD[PD] has been used.

```
** DefVBundle: Defining vbundle SpinM.
```

ValidateSymbol: System name K is overloaded as an abstract index.

VBundlesOfCovD[PD] has been used.

⋮ UpSet: Tag PD in VBundlesOfCovD[PD] is Protected. ⓘ

```
** DefTensor: Defining nonsymmetric AChristoffel tensor AChristoffelPD[A, -β, -F].
```

```
** DefSpinStructure: Assuming metric signature  $(-, +, \dots, +)$ .
```

```
** DefTensor: Defining tensor Gammagg1[ $\alpha$ , -A, B].
```

```
** DefTensor: Defining tensor Gammagg0[-A, B].
```

```
** DefTensor: Defining tensor Gammagg2[ $\alpha$ ,  $\beta$ , -A, B].
```

**** DefTensor:** Defining tensor $\text{Gammagg3}[\alpha, \beta, \gamma, -A, B]$.

```
** DefTensor: Defining tensor Gammagg4[ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, -A, B$ ].
```

```
** DefTensor: Defining tensor GammaggStar[-A, B].
```

⋮ SetDelayed: Tag Zero in

$$\text{Zero} \quad \text{xAct'FieldsX'Private' mu\$xAct'FieldsX'Private' nu\$xAct'FieldsX'Private' a\$xAct'FieldsX'Private' b\$} \quad /; \text{VBundleOfIndex[}$$

xAct`FieldsX`Private`a\$] == SM is Protected.

```
** DefSpinStructure: Precomputing  $\gamma$  products... done.
```

Definindo a massa e o espinor-vetor

$$\ln[\bullet] :=$$

DefConstantSymbol [m]

```
** DefConstantSymbol: Defining constant symbol m.
```

$$\ln[\bullet] :=$$
$$\text{DefOddSpinor}[\psi[-\mu, -A], M]$$

```
** DefTensor: Defining tensor  $\psi[-\mu, -A]$ .
```

```
** DefTensor: Defining tensor  $\bar{\psi}[-\mu, A]$ .
```

Definindo a Lagrangiana de Rarita-Schwinger hermitizada

```
In[*]:=

$$\mathcal{L} = \text{ReplaceDummies}[-\frac{i}{2} * \text{bar}\psi[\mu, A] \cdot \text{Gammagg3}[-\mu, -\nu, -\rho, -A, B] \times \text{PD}[\nu] @ \psi[\rho, -B] +$$


$$\frac{i}{2} * m * \text{bar}\psi[-\mu, A] \cdot \text{Gammagg2}[\mu, \nu, -A, B] \cdot \psi[-\nu, -B] +$$


$$\frac{i}{2} * \text{PD}[\nu] @ \text{bar}\psi[\mu, A] \cdot \text{Gammagg3}[-\mu, -\nu, -\rho, -A, B] \times \psi[\rho, -B]]$$


Out[*]:=

$$\frac{i}{2} m \bar{\psi}_\alpha^A \cdot \psi_{\beta B} \gamma[g]_{\alpha\beta}^A{}^B + \frac{1}{2} i \gamma[g]_{\alpha\beta\gamma A}{}^B \psi^\gamma_B \partial^\beta \bar{\psi}^{\alpha A} - \frac{1}{2} i \bar{\psi}^{\alpha A} \gamma[g]_{\alpha\beta\gamma A}{}^B \partial^\beta \psi^\gamma_B$$

```

Impondo as condições de Fierz-Pauli sobre o espinor

Condição de transversalidade dos campos

```
In[*]:=

$$\psi /: \text{PD}[a\_] @ \psi[b_, A_] /; \text{PairQ}[a, b] := 0$$


$$\text{bar}\psi /: \text{PD}[a\_] @ \text{bar}\psi[b_, A_] /; \text{PairQ}[a, b] := 0$$

```

Condição Gama-traço-nulo dos campos:

```
In[*]:=

$$\psi /: \text{Gammagg1}[\beta_, -A_, B_] \cdot \psi[\alpha_, -B_] /; \text{PairQ}[\alpha, \beta] := 0$$


$$\text{bar}\psi /: \text{bar}\psi[\alpha_, A_] \cdot \text{Gammagg1}[\beta_, -A, B_] /; \text{PairQ}[\alpha, \beta] := 0$$


$$\psi /: \text{Gammagg1}[\beta_, -A_, B_] \times \psi[\alpha_, -B_] /; \text{PairQ}[\alpha, \beta] := 0$$


$$\text{bar}\psi /: \text{bar}\psi[\alpha_, A_] \times \text{Gammagg1}[\beta_, -A, B_] /; \text{PairQ}[\alpha, \beta] := 0$$

```

```
In[*]:=
SetGammaTraceless[expr_] :=
Module[{dummy},
  
$$\text{dummy} = \text{expr} /. \text{CenterDot} \rightarrow \text{"CenterDot"};$$

  
$$\text{dummy} = \text{dummy} //. \text{Gammagg1}[\beta_, -A_, B_] \text{"CenterDot"}[_, \psi[\alpha_, -B_], _] /; \text{PairQ}[\alpha, \beta] \Rightarrow 0;$$

  
$$\text{dummy} = \text{dummy} //. \text{Gammagg1}[\beta_, -A_, B_] \text{"CenterDot"}[_, \text{bar}\psi[\alpha_, A_], _] /; \text{PairQ}[\alpha, \beta] \Rightarrow 0;$$

  
$$\text{dummy} = \text{dummy} //. \text{Gammagg1}[\beta_, -A_, B_] \text{"CenterDot"}[_, \text{PD}[_] @ \text{bar}\psi[\alpha_, A_], _] /; \text{PairQ}[\alpha, \beta] \Rightarrow 0;$$

  
$$\text{dummy} = \text{dummy} //. \text{Gammagg1}[\beta_, -A_, B_] \text{"CenterDot"}[_, \text{PD}[_] @ \psi[\alpha_, -B_], _] /; \text{PairQ}[\alpha, \beta] \Rightarrow 0;$$

  
$$\text{dummy} /. \text{"CenterDot"} \rightarrow \text{CenterDot}$$

]
```

Partindo para o cálculo do Tensor Energia-Momento pelo método de Hilbert

```
In[*]:= T[μ_, ν_] = -2 * LeftVarD[gg[μ, ν]][ℒ] - 2 * RightVarD[gg[μ, ν]][ℒ] //
CollectTensors // SetGammaTraceless;
```

```
In[*]:= CollectTensors@JoinGammaMatrices[T[μ, ν]]
```

```
Out[*]=
```

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{12} \mathfrak{m} \bar{\psi}_\mu^A \cdot \psi_{\nu A} + \frac{1}{12} \mathfrak{m} \bar{\psi}_\nu^A \cdot \psi_{\mu A} + \frac{1}{12} \mathfrak{m} \bar{\psi}_\alpha^A \cdot \partial_\mu \psi_{\nu B} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_A + \\
& \frac{1}{12} \mathfrak{m} \bar{\psi}_\alpha^A \cdot \partial_\nu \psi_{\mu B} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_A - \frac{1}{3} \mathfrak{m} \bar{\psi}_\mu^A \cdot \partial_\alpha \psi_{\nu B} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_A + \frac{1}{12} \mathfrak{m} \bar{\psi}_\mu^A \cdot \partial_\nu \psi_{\alpha B} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_A - \\
& \frac{1}{3} \mathfrak{m} \bar{\psi}_\nu^A \cdot \partial_\alpha \psi_{\mu B} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_A + \frac{1}{12} \mathfrak{m} \bar{\psi}_\nu^A \cdot \partial_\mu \psi_{\alpha B} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_A + \frac{1}{6} \mathfrak{m} \bar{\psi}^{\alpha A} \cdot \partial_\alpha \psi_{\nu B} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_{\mu A} - \\
& \frac{1}{4} \mathfrak{m} \bar{\psi}^{\alpha A} \cdot \partial_\nu \psi_{\alpha B} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_{\mu A} + \frac{1}{6} \mathfrak{m} \bar{\psi}^{\alpha A} \cdot \partial_\alpha \psi_{\mu B} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_{\nu A} - \frac{1}{4} \mathfrak{m} \bar{\psi}^{\alpha A} \cdot \partial_\mu \psi_{\alpha B} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_{\nu A} + \\
& \frac{1}{2} \mathfrak{m} \bar{\psi}_\alpha^A \cdot \psi_{\nu B} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_{\mu A} - \frac{1}{2} \mathfrak{m} \bar{\psi}_\nu^A \cdot \psi_{\alpha B} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_{\mu A} + \frac{1}{2} \mathfrak{m} \bar{\psi}_\alpha^A \cdot \psi_{\mu B} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_{\nu A} - \\
& \frac{1}{2} \mathfrak{m} \bar{\psi}_\mu^A \cdot \psi_{\alpha B} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_{\nu A} - \frac{1}{3} \mathfrak{m} \bar{\psi}_\alpha^A \cdot \partial_\beta \psi_{\nu B} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha \beta B}_{\mu A} + \frac{1}{4} \mathfrak{m} \bar{\psi}_\alpha^A \cdot \partial_\nu \psi_{\beta B} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha \beta B}_{\mu A} + \\
& \frac{1}{3} \mathfrak{m} \bar{\psi}_\nu^A \cdot \partial_\beta \psi_{\alpha B} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha \beta B}_{\mu A} - \frac{1}{3} \mathfrak{m} \bar{\psi}_\alpha^A \cdot \partial_\beta \psi_{\mu B} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha \beta B}_{\nu A} + \frac{1}{4} \mathfrak{m} \bar{\psi}_\alpha^A \cdot \partial_\mu \psi_{\beta B} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha \beta B}_{\nu A} + \\
& \frac{1}{3} \mathfrak{m} \bar{\psi}_\mu^A \cdot \partial_\beta \psi_{\alpha B} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha \beta B}_{\nu A} - \frac{1}{6} \mathfrak{m} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_{\nu A} \psi^\alpha_B \partial_\alpha \bar{\psi}_\mu^A + \frac{1}{6} \mathfrak{m} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_A \psi_{\nu B} \partial_\alpha \bar{\psi}_\mu^A - \\
& \frac{1}{6} \mathfrak{m} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_{\mu A} \psi^\alpha_B \partial_\alpha \bar{\psi}_\nu^A + \frac{1}{6} \mathfrak{m} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_A \psi_{\mu B} \partial_\alpha \bar{\psi}_\nu^A + \frac{1}{2} \mathfrak{m} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_{\nu \alpha \beta B} \psi_{\mu A} \partial^\beta \bar{\psi}^{\alpha B} + \\
& \frac{1}{2} \mathfrak{m} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_{\mu \alpha \beta B} \psi_{\nu A} \partial^\beta \bar{\psi}^{\alpha B} - \frac{1}{3} \mathfrak{m} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_{\nu \alpha \beta B} \psi^\alpha_A \partial^\beta \bar{\psi}_\mu^B - \frac{1}{3} \mathfrak{m} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_{\mu \alpha \beta B} \psi^\alpha_A \partial^\beta \bar{\psi}_\nu^B + \\
& \frac{1}{6} \mathfrak{m} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_{\nu A} \psi^\alpha_B \partial_\mu \bar{\psi}_\alpha^A - \frac{1}{6} \mathfrak{m} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_A \psi_{\nu B} \partial_\mu \bar{\psi}_\alpha^A + \frac{1}{3} \mathfrak{m} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_{\nu \alpha \beta B} \psi^\alpha_A \partial_\mu \bar{\psi}^{\beta B} + \\
& \frac{1}{6} \mathfrak{m} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_{\mu A} \psi^\alpha_B \partial_\nu \bar{\psi}_\alpha^A - \frac{1}{6} \mathfrak{m} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_A \psi_{\mu B} \partial_\nu \bar{\psi}_\alpha^A + \frac{1}{3} \mathfrak{m} \gamma[\mathbf{g}]^{\alpha B}_{\mu \alpha \beta B} \psi^\alpha_A \partial_\nu \bar{\psi}^{\beta B}
\end{aligned}$$