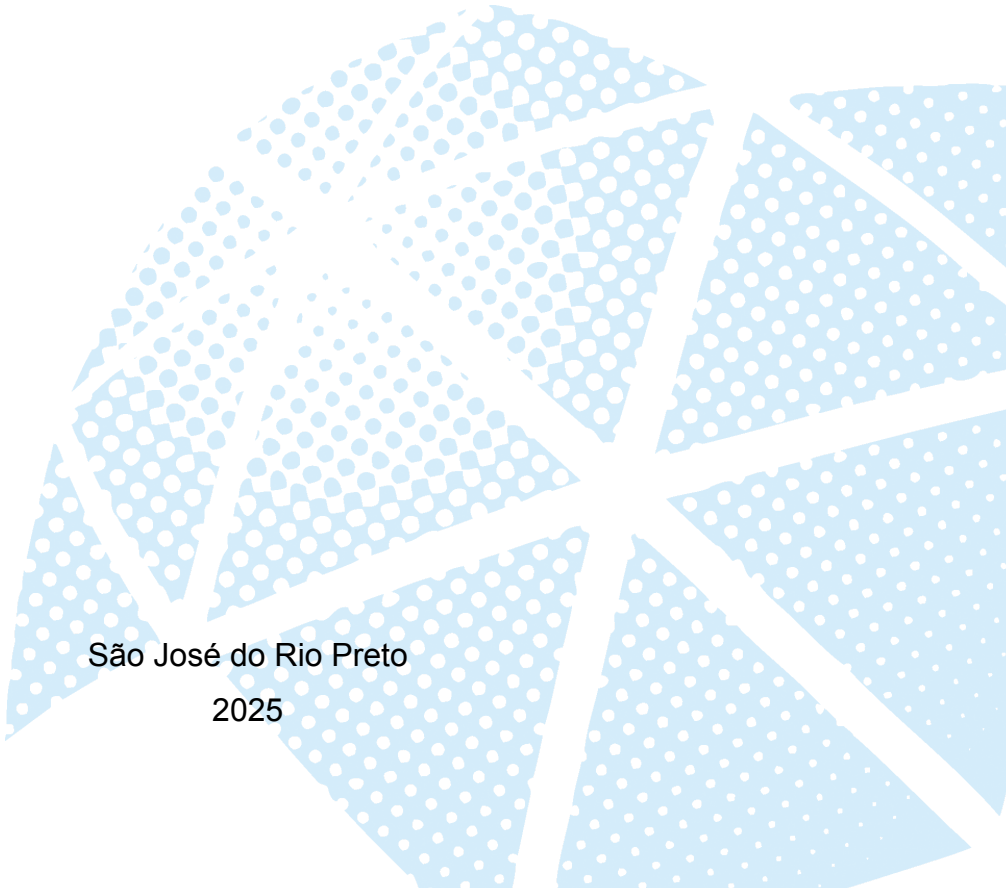


UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - Campus de São José do
Rio Preto

Lucas Pedro Martins

Singularidades de Thom-Boardman e multiplicidade associada a extensões
jacobianas iteradas

São José do Rio Preto
2025



Lucas Pedro Martins

**Singularidades de Thom-Boardman e multiplicidade associada a extensões
jacobianas iteradas**

Dissertação de Mestrado apresentada à
Universidade Estadual Paulista (UNESP),
Instituto de Biociências, Letras e Ciências
Exatas, São José do Rio Preto, para
obtenção do título de Mestre em
Matemática.

Área de Concentração: Geometria e
Sistemas Dinâmicos

Orientador(a): Profa. Dra. Michelle
Ferreira Zanchetta Morgado

São José do Rio Preto

2025

M386m Martins, Lucas Pedro
Multiplicidade de extensões Jacobianas associadas a
símbolos de Boardman de germes quase homogêneos /
Lucas Pedro Martins. -- São José do Rio Preto, 2025
1 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista
(UNESP), Instituto de Biociências Letras e Ciências
Exatas, São José do Rio Preto
Orientadora: Michelle Ferreira Zancheta Morgado

1. Singularidades. 2. Álgebra Comutativa. I. Título.

Lucas Pedro Martins

**Singularidades de Thom-Boardman e multiplicidade associada a extensões
jacobianas iteradas**

Dissertação de Mestrado apresentada à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria e Sistemas Dinâmicos.

Data da defesa: 02 / 07 / 2025.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Michelle Ferreira Zanchetta Morgado
UNESP - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - Campus de São José do Rio Preto

Prof. Dr. Roberto Carlos Alvarenga da Silva Junior
UNESP - Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - Campus de São José do Rio Preto

Profa. Dra. Thaís Maria Dalbello
UFSCar - Universidade Federal de São Carlos

À minha família e aos meus amigos...

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, à minha namorada pelo apoio em diversos momentos de dúvida, tensão e dificuldades, bem como pelas valiosas orientações e sugestões no âmbito acadêmico. Expresso, também, minha gratidão à minha família, que esteve ao meu lado em todas as situações, especialmente nos momentos mais difíceis, com destaque para minha mãe e minha sogra, que foram as principais fontes de apoio e inspiração. Registro ainda, um agradecimento especial à minha orientadora, pelo voto de confiança em minhas capacidades, pelo direcionamento e pelo auxílio prestado ao longo da produção desta dissertação. Finalmente, manifesto minha gratidão aos meus amigos e colegas, cujo apoio e cujas contribuições foram essenciais durante todo o período do mestrado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 88887.801453/2023-00.

“Vencer a si próprio é a maior das vitórias”

Platão.

RESUMO

Este trabalho está estruturado em torno de três objetivos fundamentais. O primeiro consiste em definir e caracterizar as singularidades de Thom-Boardman no espaço dos jatos. Essas singularidades estão intrinsecamente ligadas a vetores conhecidos como símbolos de Boardman e a um tipo especial de germes. O segundo objetivo foca na definição da multiplicidade de Hilbert-Samuel de um anel quociente, associada a um germe de aplicação na origem e a um símbolo de Boardman fixado. O ideal que define este quociente é denominado extensão jacobiana iterada do germe inicial associado ao símbolo de Boardman. Este é um número que generaliza o número de Milnor de um germe de função na origem. Por fim, o terceiro objetivo busca caracterizar essa multiplicidade para o tipo especial de germes mencionados anteriormente, particularizando para famílias de germes quase-homogêneos, apresentando fórmulas para essa multiplicidade que dependam apenas dos graus e pesos associados.

Palavras-chave: singularidades de Thom-Boardman; multiplicidade de ideais e germes; germes quase-homogêneos.

ABSTRACT

This work is structured around three fundamental objectives. The first consists of defining and characterizing Thom-Boardman singularities in the space of jets. These singularities are intrinsically linked to vectors known as Boardman symbols and to a special type of germs. The second objective focuses on the definition of the Hilbert-Samuel multiplicity of a quotient ring, associated with an application germ at the origin and a fixed Boardman symbol. The ideal that defines this quotient is called the iterated Jacobian extension of the initial germ associated with the Boardman symbol. This is a number that generalizes the Milnor number of a function germ at the origin. Finally, the third objective seeks to characterize this multiplicity for the special type of germs mentioned above, particularizing for families of quasi-homogeneous germs, presenting formulas for this multiplicity that depend only on the degrees and weights associated.

Keywords: Thom-Boardman singularities; multiplicity of ideals and germs; weighted homogeneous map germs.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	PRELIMINARES	12
2.1	GEOMETRIA COMPLEXA E O ESPAÇO DOS JATOS	12
2.2	ESTRUTURA ALGÉBRICA LOCAL DE APLICAÇÕES	19
2.2.1	Germes e diferenciabilidade associada	20
2.2.2	Anel dos germes de funções	22
2.2.3	Variedades analíticas	24
2.2.4	Blow-up de variedade analítica	27
3	MULTIPLICIDADE DE IDEAIS ASSOCIADA A MÓDULOS	30
3.1	MÓDULOS	30
3.1.1	Módulos Noetherianos e Artinianos	36
3.1.2	Dimensão e profundidade de módulos	41
3.2	SÉRIE DE HILBERT	46
3.3	MULTIPLICIDADE DE HILBERT-SAMUEL	59
3.4	ANEL QUOCIENTE POR MENORES DE MATRIZES	66
4	Singularidades associadas a símbolos de Boardman	77
4.1	SINGULARIDADES DE ORDEM SUPERIOR	77
4.2	EXTENSÕES JACOBIANAS ITERADAS	85
4.3	SINGULARIDADES DE THOM-BOARDMAN	87
4.4	IDEAL DE MORIN	91
5	Multiplicidade de germes de aplicações	96
5.1	CONCEITOS E RESULTADOS NO CASO GERAL	96
5.2	CASO PARTICULAR: GERMES QUASE HOMOGÊNEOS	105
6	CONCLUSÃO	118
	REFERÊNCIAS	119

1 INTRODUÇÃO

Um dos números mais conhecidos na Teoria das Singularidades é o número de Milnor de um germe de função holomorfa, definido para uma função que apresenta uma singularidade isolada, estando associado ao ideal jacobiano desse germe.

No trabalho [1], J. J. Nuño-Ballesteros e M. J. Saia definem um número, $c_i(f)$, associado a germes de aplicações holomorfas para um vetor $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$, denominado símbolo de Boardman, que é obtido por um processo iterativo a partir dos menores da matriz jacobiana do germe, induzidos por $\mathbf{i}$. Esse número é uma generalização do número de Milnor para o caso de funções e um símbolo de Boardman específico.

Ambos os números mencionados são dimensões de anéis quocientes, vistos como espaços vetoriais complexos, que são finitos somente para o caso em que os germes de aplicações holomorfas têm singularidades isoladas. Assim, uma questão natural é se um símbolo de Boardman e um germe de aplicação holomorfa, produzem um número no caso em que as singularidades não são isoladas, generalizando o número anterior.

Os autores C. Bivià-Ausina e J.J. Nuño-Ballesteros em [2] definem um número, $e_i(f)$, associado a germes de aplicações holomorfas, que satisfaz essas condições impostas, ou seja, um número obtido por um processo iterativo com os menores da matriz jacobiana do germe, o qual permanece finito mesmo no caso de singularidades não isoladas e generaliza o número anterior. Para definir este número, necessitamos de uma ferramenta algébrica, que foi um dos focos deste trabalho e recebe o nome de multiplicidade de Hilbert-Samuel. Especificamente, trata-se da multiplicidade de Hilbert-Samuel de um anel quociente particular, associado a um símbolo de Boardman e a um germe de aplicação holomorfa.

Com este número bem definido, nosso objetivo passa a ser determinar conjuntos em que este número se mantém invariante e apresentar fórmulas para casos específicos de símbolos de Boardman e germes de aplicações quase homogêneas. Para atingir resultados que auxiliam nesta tarefa, faz-se necessário uma classe especial de germes, germes estes que determinam, sob certas condições, um conjunto do espaço dos jatos, denominados Singularidades de Thom-Boardman.

Sendo assim, para a exposição de tais conceitos e resultados, este trabalho foi estruturado da seguinte maneira:

No Capítulo 2 apresentamos conceitos de algumas teorias visando caracterizar elementos importantes que fundamentam o desenvolvimento das seções subsequentes. Começamos apresentando conceitos relacionados a aplicações de várias variáveis complexas, noções básicas de variedades diferenciáveis e sua generalização para variedades complexas, abordando o conceito de transversalidade. Destacamos um conjunto particular, chamado espaço dos jatos, onde o conceito de transversalidade resulta em um conjunto denso no espaço das aplicações holomorfas. Na sequência, voltamos nossa atenção para o estudo local de aplicações holomorfas, ou seja, discutimos sobre germes de aplicações holomorfas e sua estrutura diferencial, bem como jatos associados. No caso de germes de funções

holomorfas, exploramos a estrutura algébrica associada, apresentando definições como variedades analíticas e blow-up associado, o que propicia uma caracterização geométrica futura.

Já no Capítulo 3, o foco principal é definir a multiplicidade de Hilbert-Samuel para ideais especiais de um anel local Noetheriano com relação a módulos finitamente gerados sobre este anel. Para isso, apresentamos os elementos algébricos e suas propriedades necessárias ao entendimento deste conceito e seus desdobramentos, destacando os anéis Cohen-Macaulay e suas características.

O Capítulo 4 tem como objetivo definir uma classe importante de variedades associadas a um germe de aplicação e um vetor especial. Nesta direção, apresentamos conjuntos relacionados a um germe de aplicação, focando em suas singularidades, como o conjunto singular e as singularidades de primeira ordem. Essa discussão motiva a introdução de conjuntos mais gerais, independentes de um germe específico, denominados conjuntos de singularidades de primeira ordem e ordem superior. Essa generalização, por sua vez, motiva a definição de um tipo específico de vetores, chamados símbolos de Boardman associados ao germe, conceito estendido posteriormente. Na sequência, apresentamos ideais especiais associados a um germe de aplicação, caracterizados por um tipo particular de vetor, chamados de extensões jacobianas iteradas. Finalizamos introduzindo uma classe especial de germes de aplicação associada a símbolos de Boardman e extensões jacobianas iteradas, além de apresentar um conjunto específico relacionado a esses objetos, que vivem no espaço dos jatos, são variedades complexas e ainda temos controle sobre sua codimensão neste espaço.

Finalmente, no Capítulo 5, retomamos o número denominado multiplicidade de Hilbert-Samuel, com o objetivo de estudar sua invariância e obter fórmulas explícitas em casos particulares. Portanto, neste capítulo, definimos o número derivado da multiplicidade de Hilbert-Samuel, que é construído em um anel específico e é associado a germes de aplicações holomorfas e símbolos de Boardman. Uma propriedade relevante é que, sob certas hipóteses, esse número permanece constante em um dado intervalo. Encerramos o capítulo apresentando resultados, para uma classe particular de germes, os germes quase-homogêneos, que facilitam o cálculo deste número para símbolos de Boardman específicos.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos conceitos de algumas teorias, como Geometria Complexa e Geometria Algébrica, visando caracterizar elementos importantes em Teoria de Singularidades, necessários para embasar, motivar e permitir que a teoria das seções futuras seja desenvolvida.

2.1 GEOMETRIA COMPLEXA E O ESPAÇO DOS JATOS

Nesta seção apresentamos conceitos relacionados a aplicações de várias variáveis complexas, dando estrutura complexa a espaços topológicos. Destacamos um conjunto particular, chamado espaço dos jatos, com resultados direcionados ao desenvolvimento do trabalho. Vamos admitir conhecidos as teorias de Análise do $\mathbb{R}^n$ e de Análise Complexa para funções complexas de uma variável, além de conceitos básicos de Topologia Geral.

Admitindo conhecido o conceito de função holomorfa de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, iniciamos com a extensão deste conceito.

Definição 2.1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ um aberto. Uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é dita **holomorfa** se para cada $j = 1, \dots, n$ e cada $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ fixados, a função $\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por $\alpha(\zeta) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, \zeta, x_{j+1}, \dots, x_n)$ é holomorfa, ou seja, f é holomorfa em cada variável separadamente.*

*Para $p > 1$, uma aplicação $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^p$ é **holomorfa** se é holomorfa em cada entrada, ou seja, a função $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa para todo $i = 1, \dots, p$, onde $f = (f_1, \dots, f_p)$.*

O objetivo é obter espaços topológicos que são localmente modelados em abertos de $\mathbb{C}^n$. Para isso, primeiro abordamos a obtenção da estrutura em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.1.2. *Um **atlas diferenciável** em um espaço topológico M , denotador por $\mathcal{U}$, é uma coleção de pares (U_i, ϕ_i) chamados de **cartas** ou **sistema de coordenadas locais**, onde os U_i são abertos cobrindo M , cada $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo sobre um aberto de $\mathbb{R}^n$, e sempre que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, a transição*

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$$

*é uma aplicação diferenciável. O atlas $\mathcal{U}$ é dito **maximal** se para todo homeomorfismo $\psi : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, com W aberto de M , se $W \cap U_i \neq \emptyset$, então $\psi \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(W \cap U_i) \rightarrow \psi(W \cap U_i)$ e $\phi_i \circ \psi^{-1} : \psi(W \cap U_i) \rightarrow \phi_i(W \cap U_i)$ são aplicações diferenciáveis.*

*Uma **variedade diferenciável** é um espaço topológico M , Hausdorff e com base enumerável, equipado com um atlas diferenciável maximal. O número n é chamado de **dimensão** de M .*

Para obter a estrutura complexa, basta trocar a exigência das aplicações serem diferenciáveis para serem holomorfas, que reescrevemos para fixar a nomenclatura.

Definição 2.1.3. Um **atlas holomorfo** em um espaço topológico M , denotador por $\mathcal{U}$, é uma coleção de pares (U_i, ϕ_i) , onde os U_i são abertos cobrindo M , cada $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ é um homeomorfismo sobre um aberto de $\mathbb{C}^n$, e sempre que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, a transição

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$$

é uma aplicação holomorfa. O atlas $\mathcal{U}$ é dito **maximal** se para todo homeomorfismo $\psi : W \rightarrow \mathbb{C}^n$, com W aberto de M , se $W \cap U_i \neq \emptyset$, então $\psi \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(W \cap U_i) \rightarrow \psi(W \cap U_i)$ e $\phi_i \circ \psi^{-1} : \psi(W \cap U_i) \rightarrow \phi_i(W \cap U_i)$ são aplicações holomorfas.

Uma **variedade complexa** é um espaço topológico M , Hausdorff e com base enumerável, equipado com um atlas holomorfo maximal. O número n é chamado de dimensão de M .

Observação 2.1.4. Como $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ e usando o fato de que toda aplicação holomorfa é diferenciável, segue que uma variedade complexa de dimensão n é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$.

Exemplo 2.1.5. Um aberto U de $\mathbb{C}^k$ é uma variedade complexa de dimensão k , pois basta tomar o atlas definido por (U, ϕ) sendo $\phi : U \rightarrow U$ a identidade.

Exemplo 2.1.6. Um espaço vetorial complexo V de dimensão n é uma variedade complexa de dimensão n , pois existe um isomorfismo ψ (linear e bijetor), tal que $V \cong \mathbb{C}^n$. Logo, basta tomar o atlas definido por (U, ϕ) sendo $\phi = \psi$.

Exemplo 2.1.7. Se M e N são variedades complexas de dimensões m e n , respectivamente, então $M \times N$ é uma variedade complexa de dimensão $m + n$, onde o atlas em $M \times N$ é tomado da forma (W, ϕ) onde $\phi = \phi_1 \times \phi_2$, com (U_1, ϕ_1) no atlas de M , (U_2, ϕ_2) no atlas de N e $W = U_1 \times U_2$.

O próximo passo é o conceito de aplicação holomorfa entre variedades complexas, que de maneira análoga é obtido o conceito de aplicações diferenciáveis para o caso de variedades diferenciáveis.

Definição 2.1.8. Dadas duas variedades complexas M e N , uma aplicação contínua $f : M \rightarrow N$ é **holomorfa** se para toda carta (U, ϕ) de M e toda carta (V, φ) de N com $f(U) \subset V$, a aplicação $\varphi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \varphi(f(U))$ é holomorfa.

Exemplo 2.1.9. Seja f uma aplicação holomorfa entre as variedades complexas M e N de dimensões m e n , respectivamente. O gráfico de f ,

$$\text{Graf}(f) = \{(x, f(x)) \in M \times N \mid x \in M\},$$

é uma variedade complexa de dimensão m .

Para cada carta (U, ϕ) de M , considere $\psi : \phi(U) \rightarrow \text{Graf}(f)$ dada por $\psi(u) = (\phi^{-1}(u), f(\phi^{-1}(u)))$, ou seja, $\psi = (\phi^{-1}, f \circ \phi^{-1})$ que é injetora (pois a primeira função coordenada é injetora). Logo, bijetora sobre a sua imagem. Assim, as inversas (composição da aplicação projeção de $M \times N$ em M com as cartas) geram um atlas para $\text{Graf}(f)$.

Definição 2.1.10. Um subconjunto N de uma variedade complexa M de dimensão $n+k$ é uma **subvariedade** de dimensão n de M se para todo ponto $p \in N$ existe uma carta em p , ou seja, (U, ϕ) carta de M com $p \in U$ tal que $\phi(N \cap U) = U' \cap (\mathbb{C}^n \times \{0\})$, onde $0 \in \mathbb{C}^k$, U' aberto de $\mathbb{C}^{n+k}$.

Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão m e $p \in M$. Indicaremos por $\mathcal{C}_p$ o conjunto de todos os caminhos $\lambda : J \rightarrow M$, definidos num intervalo aberto $J \subset \mathbb{R}$, contendo 0, tais que $\lambda(0) = p$ e λ é diferenciável em 0.

Dizemos que dois caminhos $\lambda, \mu \in \mathcal{C}_p$ são **equivalentes**, e escrevemos $\lambda \sim \mu$, quando existir um sistema de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , com $p \in U$, tal que $x \circ \lambda : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $x \circ \mu : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfaçam $(x \circ \lambda)'(0) = (x \circ \mu)'(0)$.

Pode-se mostrar que esta relação define uma relação de equivalência em $\mathcal{C}_p$.

Definição 2.1.11. O conjunto quociente $\mathcal{C}_p / \sim$ será indicado por $T_p M$ e será chamado de **espaço tangente** à variedade M em p .

Para cada sistema de coordenadas locais $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, definimos $\bar{x} = \bar{x}(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$ por $\bar{x}([\lambda]) = (x \circ \lambda)'(0)$, está bem definida e é uma bijeção (Ver [3, p. 135]).

Logo, $T_p M$ tem estrutura de espaço vetorial real m -dimensional.

Além disso, indicamos por $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right\}$ a base de $T_p M$ que é levada pelo isomorfismo $\bar{x}$ sobre a base canônica $\{e_1, \dots, e_m\}$ de $\mathbb{R}^m$, ou seja, $\frac{\partial}{\partial x^i}$ é a classe de equivalência de qualquer caminho $\lambda \in \mathcal{C}_p$ tal que $(x \circ \lambda)'(0) = e_i$. Denotamos $T_p M = \mathbb{R} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right\}$.

Definição 2.1.12. Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensões m e n , respectivamente, e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável no ponto $p \in M$. A **derivada** de f no ponto p é a transformação linear

$$d_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

que associa a cada $v = [\lambda] \in T_p M$ o elemento $d_p f(v) = [(f \circ \lambda)] \in T_{f(p)} N$.

Pode-se verificar que a definição independe do representante e a matriz em relação às bases $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right\}$ de $T_p M$ e $\left\{ \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right\}$ de $T_{f(p)} N$ é a matriz jacobiana da aplicação $y \circ f \circ x^{-1}$ no ponto $x(p)$ (Ver [3, p. 138]).

Agora se M é uma variedade complexa de dimensão m e $p \in M$, considere um sistema de coordenadas locais $z = (z^1, \dots, z^m) : U \rightarrow \mathbb{C}^m$ em M . Temos algumas maneiras diferentes de definir espaço tangente.

Uma delas é considerando M como variedade diferenciável, ou seja, podemos associar cada z^j ao par $(x^j, y^j) : U \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, que é um sistema de coordenadas locais olhando M como uma variedade diferenciável. Assim definimos

$$T_{\mathbb{R},p} M := \mathbb{R} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right\} = \mathbb{R} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial y^j} \right\}_j,$$

que é um espaço vetorial real de dimensão $2m$.

Como espaço vetorial complexo, uma das maneiras de definir o espaço tangente é do seguinte modo $T_{\mathbb{C},p} M := T_{\mathbb{R},p} M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ (produto tensorial dos espaços vetoriais reais $T_{\mathbb{R},p} M$ e $\mathbb{C}$). Mostra-se que uma base para $T_{\mathbb{C},p} M$ é $\left\{ \frac{\partial}{\partial z^j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} \right\}_j$, ou seja,

$$T_{\mathbb{C},p} M = \mathbb{C} \left\{ \frac{\partial}{\partial z^j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} \right\}_j,$$

onde $\frac{\partial}{\partial z^j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} - i \frac{\partial}{\partial y^i} \right)$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + i \frac{\partial}{\partial y^i} \right)$.

Definição 2.1.13. *Sejam M e N variedades complexas de dimensões m e n , respectivamente, e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação holomorfa no ponto $p \in M$. A **derivada** de f no ponto p é a transformação linear*

$$d_{\mathbb{C},p}f : T_{\mathbb{C},p}M \rightarrow T_{\mathbb{C},f(p)}N$$

que é a extensão natural de $d_p f : T_{\mathbb{R},p}M \rightarrow T_{\mathbb{R},f(p)}N$.

Para mais detalhes ver Seção 2 de [4].

Por simplicidade, denotamos $d_{\mathbb{C},p}f$ e $T_{\mathbb{C},p}M$ somente por $d_p f$ e $T_p M$ e variedades complexas ou diferenciáveis simplesmente por variedades, ficando subentendidas no contexto.

Definição 2.1.14. *Dado $f : M \rightarrow N$ uma aplicação holomorfa, com $p \in M$, dizemos que f é uma **submersão** em p se $d_p f$ é sobrejetora e é uma **imersão** em p se $d_p f$ é injetora. Um ponto $p \in M$ é dito um **ponto regular** de f se f é imersão ou submersão em p e um ponto $y \in N$ é dito um **valor regular** de f se p é ponto regular de f , $\forall p \in f^{-1}(y)$.*

Com a definição de espaço tangente de uma variedade num ponto, definimos um conceito que estuda o comportamento da interseção de duas variedades.

Definição 2.1.15. *Duas subvariedades N_1 e N_2 de uma variedade N se encontram **transversalmente** (ou são **transversais**) em um ponto $x \in N_1 \cap N_2$ se $T_x N_1 + T_x N_2 = T_x N$. Dizemos que elas são **transversais** se forem transversais para todo ponto da interseção.*

Notação: $N_1 \pitchfork N_2$.

Definição 2.1.16. *Sejam $f : N \rightarrow P$ uma aplicação holomorfa e Q uma subvariedade de P . Dizemos que f é **transversal** a Q se $\text{Graf}(f)$ e $N \times Q$ são transversais (como subvariedades) em $N \times P$.*

Notação: $f \pitchfork Q$.

Exemplo 2.1.17. *Sejam $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $f(t) = (0, t)$ e $Q = \{(u, 0), u \in \mathbb{C}\}$. Então,*

$$\text{Graf}(f) = \{(t, 0, t) \in \mathbb{C}^3\} = \langle (1, 0, 1) \rangle \text{ e } N \times Q = \{(t, u, 0) \in \mathbb{C}^3\} = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle.$$

Como $(1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$ são linearmente independentes, $\text{Graf}(f) + N \times Q = \mathbb{C}^3$ e, portanto, $f \pitchfork Q$.

Proposição 2.1.18. *Sejam $f : N \rightarrow P$ uma aplicação holomorfa e Q subvariedade de P . Então $f \pitchfork Q$ se, e somente se, $df_x(T_x N) + T_y Q = T_y P$, $\forall x \in N$ e $y = f(x)$ em Q .*

Demonstração. Suponha $f \pitchfork Q$. Então $\text{Graf}(f) \pitchfork N \times Q$ em $N \times P$, ou seja $T_{(x,y)} \text{Graf}(f) + T_{(x,y)} N \times Q = T_{(x,y)} N \times P$, com $y = f(x) \in Q$.

Como $T_{(x,y)} \text{Graf}(f) = \text{Graf}(df_x)$, $T_{(x,y)} N \times Q = T_x N \times T_y Q$ e $T_{(x,y)} N \times P = T_x N \times T_y P$, então

$$\text{Graf}(df_x) + T_x N \times T_y Q = T_x N \times T_y P. \quad (2.1)$$

Além disso, como sempre ocorre que $df_x(T_x N) + T_y Q \subset T_y P$, basta mostrar a inclusão contrária.

Seja $v \in T_y P$. Se $w \in T_x N$, segue da Equação (2.1) que $(w, v) = (w_1, df_x(w_1)) + (w_2, u)$ para algum $w_1, w_2 \in T_x N$ e $u \in T_y Q$. Portanto $v = df_x(w_1) + u \in df_x(T_x N) + T_y Q$.

Reciprocamente, precisamos mostrar que $T_{(x,y)} \text{Graf}(f) + T_{(x,y)} N \times Q \supset T_{(x,y)} N \times P$, pois a inclusão contrária sempre vale. Se provarmos essa inclusão, temos a igualdade e então está provado que $f \pitchfork Q$. Como já mencionado,

$$T_{(x,y)} \text{Graf}(f) = \text{Graf}(df_x), T_{(x,y)} N \times Q = T_x N \times T_y Q \text{ e } T_{(x,y)} N \times P = T_x N \times T_y P.$$

Deste modo, devemos mostrar que $\text{Graf}(df_x) + T_x N \times T_y Q \supset T_x N \times T_y P$.

De fato, seja $(w, v) \in T_x N + T_y P$, então $w \in T_x N$ e $v \in T_y P$. Por hipótese, se $v \in T_y P$, então $v = a + b$, onde $a \in df_x(T_x N)$ e $b \in T_y Q$. Logo, $a = df_x(h)$, com $h \in T_x N$. Portanto,

$$(w, v) = (w, df_x(h) + b) = (h, df_x(h)) + (w - h, b) \in \text{Graf}(df_x) + T_x N \times T_y Q,$$

como queríamos. □

Exemplo 2.1.19. Se $f : N \rightarrow P$ é uma submersão, então para qualquer subvariedade Q de P , $f \pitchfork Q$. De fato, se f é submersão, $df_x(T_x N) = T_{f(x)} P$ e assim, $df_x(T_x N) + Q = T_{f(x)} P, \forall Q \subset P$. Pela Proposição 2.1.18, concluímos que $f \pitchfork Q$.

Os dois próximos resultados omitiremos as demonstrações e exibiremos como referência um material que aborda somente o caso diferenciável, mas o caso holomorfo segue de maneira análoga.

O primeiro deles utiliza o conceito de transversalidade para obtenção de variedades, que é utilizado na sequência e num capítulo a frente para caracterizar um conjunto especial.

Proposição 2.1.20. Sejam $f : N \rightarrow P$ uma aplicação holomorfa e Q uma subvariedade de P com $f \pitchfork Q$. Então $M = f^{-1}(Q) = \emptyset$ ou é uma subvariedade em N com a mesma codimensão de Q em P . Além disso, se $x \in N$ tal que $f(x) = y \in Q$, então $T_x M = (df_x)^{-1}(T_y Q)$.

Demonstração. Pode ser vista em [5, p. 41, (1.2)]. □

Com estes elementos e resultados em mente, enunciamos o seguinte teorema, que recebe o nome de Teorema de Sard e, por sua vez, é fundamental para o resultado principal desta seção.

Teorema 2.1.21. Seja $f_i : N_i \rightarrow P$ uma família contável de aplicações holomorfas. A interseção dos conjuntos dos valores regulares de todas as f_i é denso em P .

Demonstração. Pode ser vista em [5, p. 49, (2.1)]. □

Como aplicação do Teorema de Sard, temos o seguinte resultado:

Lema 2.1. Se $F : N \times S \rightarrow P$ é uma aplicação holomorfa com $F \pitchfork Q_i$, para uma família finita de subvariedades Q_i de P , então existe um conjunto denso de parâmetros $s \in S$ tal que $f_s \pitchfork Q_i$ para todo i .

Demonstração. Pela Proposição 2.1.20, temos que $M_i = F^{-1}(Q_i)$ é uma subvariedade em $N \times S$. Considerando a restrição $\pi|_{M_i}$ da projeção $\pi : N \times S \rightarrow S$, basta mostrar que $\pi_i := \pi|_{M_i} \pitchfork \{s\}$ se, e somente se, $f_s \pitchfork Q_i$, e o resultado segue do Teorema 2.1.21.

Como $F \pitchfork Q$, para todo $z = (x, s) \in N \times S$ com $w = F(z)$, temos

$$d_z F(T_x N \times T_s S) + T_w Q_i = T_w P \quad (2.2)$$

Considere:

- (1) $f_s \pitchfork Q_i$, assim $d_x f_s(T_x N) + T_w Q_i = T_w P$, ou seja, $d_z F(T_x N \times \{0\}) + T_w Q_i = T_w P$.
- (2) $\pi_i \pitchfork \{s\}$ implica que $d_z \pi(T_z M_i) = T_s S$. Como π é linear, segue que $\pi(T_z M_i) = T_s S$, logo, $T_x N \times \{0\} + T_z M_i = T_x N + T_s S$. Temos que $T_z M_i = (d_z F)^{-1}(T_w Q_i)$,

Queremos mostrar que as condições 1 e 2 são equivalentes.

Suponha que vale (2). Aplicando $d_z F$ em (2) temos

$d_z F(T_x N \times \{0\}) + T_w Q_i = d_z F(T_x N + T_s S)$, assim $d_z F(T_x N \times \{0\}) + T_w Q_i = T_w P$, onde a última implicação vem da Equação (2.2). Logo, vale (1).

Agora suponha que vale (1). Seja $(u, t) \in T_x N \times T_s S$. Então $d_z F(u, t) \in T_w P$ e, como vale 1, obtemos $d_z F(u, t) = d_z F(v, 0) + u'$, onde $v \in T_x N$ e $u' \in T_w Q_i$. Portanto de $d_z F$ ser linear, temos $u' = d_z F(u, t) - d_z F(v, 0) = d_z F(u - v, t) \in T_w Q_i$, concluindo que $(u - v, t) \in T_z M_i$. Assim $(u, t) = (v, 0) + (u - v, t)$, onde $(v, 0) \in T_x N \times \{0\}$ e $(u - v, t) \in T_z M_i$. Logo, vale 2. $\square$

Para finalizar apresentamos uma importante ferramenta para o desenvolvimento do trabalho, que é um espaço vetorial complexo e, portanto uma variedade complexa. Com auxílio do lema anterior, temos como objetivo obter a densidade de um conjunto específico desta variedade complexa.

Definição 2.1.22. Definimos o **espaço dos jatos** $J^k(n, p)$ sendo o espaço vetorial complexo de todas as aplicações $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ onde cada componente f_i de f é um polinômio de grau menor ou igual a k nas coordenadas $x_1, x_2, \dots, x_n$ em $\mathbb{C}^n$ com termo independente nulo. Os elementos de $J^k(n, p)$ são chamados de **k-jatos**.

Observação 2.1.23. Note que $J^k(n, p)$ é um espaço vetorial complexo e do Exemplo 2.1.6, segue que $J^k(n, p)$ é uma variedade complexa.

Além disso, como $J^k(n, p)$ pode ser identificado com $\mathbb{C}^N$, para algum N , podemos considerar uma norma nele como sendo a norma em $\mathbb{C}^N$ dos elementos correspondentes nesta identificação.

Denotamos por $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p)$ o espaço das aplicações holomorfas de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$.

Uma propriedade importante de aplicações holomorfas é que elas tem derivadas de todas as ordens ([6, Corolário 4.6]), logo podemos considerar a expansão de Taylor delas em torno de um ponto.

Definição 2.1.24. Dado $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p)$, definimos a aplicação

$$j^k f : \mathbb{C}^n \rightarrow J^k(n, p),$$

onde, para cada $u \in \mathbb{C}^n$, $j^k f(u)$ é a expansão de Taylor em torno de u de f até ordem k , sem termo independente, que é chamado de **k-jato** de f em u .

Exemplo 2.1.25. Se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, então

$$j^k f(u) = f'(u)x + \frac{f''(u)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(u)}{k!}x^k.$$

Exemplo 2.1.26. Se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = \sin(x)$, vamos calcular o seu 3-jato na origem.

$$j^3 f(0) = f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = \cos(0)x - \frac{\sin(0)}{2}x^2 - \frac{\cos(0)}{6}x^3 = x - \frac{x^3}{6}.$$

Com a aplicação anterior, é possível obter uma topologia em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p)$, que é gerada pela base (vizinhanças fundamentais)

$$V_f = V(f, \epsilon, R, k) = \left\{ g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p) \mid \|j^k g(x) - j^k f(x)\| \leq \epsilon, \forall x \in \mathbb{C}^n, \|x\| \leq R \right\},$$

para $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p)$ e $R, \epsilon > 0$, onde $\|\cdot\|$ é a norma em $J^k(n, p)$ correspondente a norma usual em $\mathbb{C}^N$ da identificação anterior mencionada.

Observação 2.1.27. Considerando a topologia anterior, um subconjunto $X \subset \mathcal{H}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p)$ é denso quando dada qualquer aplicação $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p)$ e qualquer vizinhança fundamental V de f , podemos encontrar uma aplicação g em $X \cap V$.

Teorema 2.1.28. Sejam $Q_1, \dots, Q_p$ subvariedades em $J^k(n, p)$. Então o conjunto de todas as aplicações holomorfas $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ tais que $j^k f : \mathbb{C}^n \rightarrow J^k(n, p)$ é transversal a todas as Q_i é denso em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p)$.

Demonstração. Aqui, fixemos $S = J^k(n, p)$. Seja

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C}^n \times J^k(n, p) &\rightarrow J^k(n, p) \\ (x, s) &\mapsto j^k(f + s)(x) = j^k f(x) + s \end{aligned}$$

Para cada x fixado, temos

$$\begin{aligned} F_x : J^k(n, p) &\rightarrow J^k(n, p) \\ s &\mapsto j^k f(x) + s \end{aligned}$$

ou seja, para cada x temos uma transformação afim (linear). Assim, $d_x F$ é isomorfismo. Portanto, F é uma submersão e do Exemplo 2.1.19, $F \pitchfork Q_i, \forall i$.

Pelo Lema 2.1, $A = \{s \in J^k(n, p) \mid f_s \pitchfork Q_i, \forall i\}$ é denso, com $f_s(x) = F(x, s) = j^k f(x) + s$. Agora, queremos mostrar que $B = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p) \mid j^k f \pitchfork Q_i, \forall i\}$ é denso em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p)$.

Seja $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p)$ e V_f uma vizinhança fundamental qualquer de f , ou seja, $V_f = \{g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p) \mid \|j^k g(x) - j^k f(x)\| \leq \epsilon, \forall x \in \mathbb{C}^n, \|x\| \leq R\}$. Então, mostrar que B é denso em $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p)$ é o mesmo que mostrar que $V_f \cap B \neq \emptyset$.

Como A é denso, existe $s \in J^k(n, p)$ com $\|s(x)\| \leq \epsilon$ com $\|x\| < R$ e $f_s \pitchfork Q_i, \forall i$. Tome $g = f + s$. Note que

$$j^k g(x) = j^k f(x) + j^k s(x) = j^k f(x) + s(x) = f_s(x) \Rightarrow j^k g \pitchfork Q_i, \forall i$$

e $\|j^k g(x) - j^k f(x)\| = \|j^k f(x) + s(x) - j^k f(x)\| = \|s(x)\| < \epsilon$ com $\|x\| < R$. Portanto $g \in V_f \cap B$, concluindo a demonstração. $\square$

Por fim, relacionamos de uma maneira especial um k -jato com um elemento de um espaço $\mathbb{C}^N$, para N suficientemente grande.

Observação 2.1.29. *Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ com $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\alpha! = (|\alpha|)!$ tal que $1 \leq |\alpha| \leq k$.*

Dado $\sigma \in J^k(n, p)$, ele pode ser escrito como

$$\sigma(x) = \sigma(x_1, \dots, x_n) = \left(\sigma^1(x_1, \dots, x_n), \dots, \sigma^p(x_1, \dots, x_n) \right), \quad (2.3)$$

com cada $\sigma^l(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \frac{z_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}^l}{\alpha!} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $l = 1, \dots, p$.

Portanto, podemos associar $\sigma^l(x_1, \dots, x_n)$ com os $z_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}^l$ e assim, identificar $\sigma^l(x_1, \dots, x_n)$ com o vetor $z^l = (z_{\alpha}^l)_{1 \leq |\alpha| \leq k}$ de $\mathbb{C}^{N_l}$, onde N_l é a quantidade desses coeficientes. Sendo assim, podemos escrever

$$\sigma(x) = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} \frac{z_{\alpha}}{\alpha!} x^{\alpha},$$

onde $z_{\alpha} = (z_{\alpha}^1, \dots, z_{\alpha}^p)_{1 \leq |\alpha| \leq k} \in \mathbb{C}^N$ para $N = N_1 + \dots + N_p$ e $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$.

Portanto, para um N suficientemente grande, podemos identificar σ com um elemento τ de $\mathbb{C}^N$ para N e, portanto identificar $J^k(n, p)$ com $\mathbb{C}^N$.

Exemplo 2.1.30. *Em $J^3(2, 2)$, seguindo a notação anterior, um jato $\sigma \in J^3(2, 2)$ pode ser escrito na forma*

$$\sigma(x, y) = \left(\sum_{1 \leq i+j \leq 3} \frac{z_{(i,j)}}{(i+j)!} x^i y^j, \sum_{1 \leq r+s \leq 3} \frac{z_{(r,s)}}{(r+s)!} x^r y^s \right).$$

Sendo $z_{\alpha} = (z_{\alpha}^1, z_{\alpha}^2)_{1 \leq |\alpha| \leq 3}$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, temos as seguintes possibilidades:

$$\alpha \in \{(3, 0), (0, 3), (2, 1), (1, 2), (2, 0), (0, 2), (1, 1), (1, 0), (0, 1)\}.$$

Deste modo,

$$\sigma(x, y) = \left(\frac{z_{(3,0)}^1}{3!} x^3 + \frac{z_{(0,3)}^1}{3!} y^3 + \frac{z_{(2,1)}^1}{3!} x^2 y + \frac{z_{(1,2)}^1}{3!} x y^2 + \frac{z_{(2,0)}^1}{2!} x^2 + \frac{z_{(0,2)}^1}{2!} y^2 + \frac{z_{(1,1)}^1}{2!} x y + z_{(1,0)}^1 x + z_{(0,1)}^1 y, \right. \\ \left. \frac{z_{(3,0)}^2}{3!} x^3 + \frac{z_{(0,3)}^2}{3!} y^3 + \frac{z_{(2,1)}^2}{3!} x^2 y + \frac{z_{(1,2)}^2}{3!} x y^2 + \frac{z_{(2,0)}^2}{2!} x^2 + \frac{z_{(0,2)}^2}{2!} y^2 + \frac{z_{(1,1)}^2}{2!} x y + z_{(1,0)}^2 x + z_{(0,1)}^2 y \right).$$

Logo, σ é identificado com $\tau = (z_{(3,0)}^1, z_{(0,3)}^1, z_{(2,1)}^1, z_{(1,2)}^1, z_{(2,0)}^1, z_{(0,2)}^1, z_{(1,1)}^1, z_{(1,0)}^1, z_{(0,1)}^1, z_{(3,0)}^2, z_{(0,3)}^2, z_{(2,1)}^2, z_{(1,2)}^2, z_{(2,0)}^2, z_{(0,2)}^2, z_{(1,1)}^2, z_{(1,0)}^2, z_{(0,1)}^2) \in \mathbb{C}^{18}$.

Agora seja $\sigma \in J^3(2, 2)$ dado por $\sigma(x, y) = (x^3 - 2xy + x - 2y, x^2 + 2y^2 - 3x + y)$.

Deste modo temos

$$z_{(3,0)}^1 = 1.3!, z_{(0,3)}^1 = 0, z_{(2,1)}^1 = 0, z_{(1,2)}^1 = 0, z_{(2,0)}^1 = 0, z_{(0,2)}^1 = 0, z_{(1,1)}^1 = -2.2!, \\ z_{(1,0)}^1 = 1.1!, z_{(0,1)}^1 = -2.1!, z_{(3,0)}^2 = 0, z_{(0,3)}^2 = 0, z_{(2,1)}^2 = 0, z_{(1,2)}^2 = 0, z_{(2,0)}^2 = 1.2!, \\ z_{(0,2)}^2 = 2.2!, z_{(1,1)}^2 = 0, z_{(1,0)}^2 = -3.1!, z_{(0,1)}^2 = 1.1!.$$

Portanto σ pode ser identificado com $\tau = (6, 0, 0, 0, 0, 0, -4, 1, -2, 0, 0, 0, 0, 2, 4, 0, -3, 1)$.

2.2 ESTRUTURA ALGÉBRICA LOCAL DE APLICAÇÕES

Nesta seção introduzimos ferramentas para o estudo local de aplicações holomorfas de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$. No caso de funções ($p = 1$), abordamos a estrutura algébrica associada, apresentando conceitos e resultados necessários para o desenvolvimento do trabalho.

2.2.1 Germes e diferenciabilidade associada

Seja X o conjunto das aplicações holomorfas de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$. Ressaltamos ainda que as definições desta seção não dependem da escolha do representante.

Definição 2.2.1. Considere $f_1, f_2 \in X$ e $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^n$. Dizemos que f_1 e f_2 são **equivalentes** em $\mathbf{a}$ quando existir um aberto $U \subset \mathbb{C}^n$ contendo $\mathbf{a}$ tal que as restrições $f_1|_U$ e $f_2|_U$ coincidem.

Notação: Esta definição estabelece uma relação $\sim$ entre os elementos de X , ou seja, $f_1 \sim f_2$ quando f_1 e f_2 são equivalentes.

Proposição 2.2.2. A relação $\sim$ é uma relação de equivalência em X , ou seja, valem as seguintes propriedades:

1. $f_1 \sim f_1, \forall f_1 \in X$
2. $f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_2 \sim f_1, \forall f_1, f_2 \in X$
3. $f_1 \sim f_2$ e $f_2 \sim f_3 \Rightarrow f_1 \sim f_3, \forall f_1, f_2, f_3 \in X$

Demonstração. 1. Para qualquer aberto $U \subset \mathbb{C}^n$ temos $f_1|_U = f_1|_U$. Assim, $f_1 \sim f_1$.

2. Se $f_1 \sim f_2$, então existe um aberto $U \subset \mathbb{C}^n$ contendo $\mathbf{a}$ tal que $f_1|_U = f_2|_U$. Assim, $f_2|_U = f_1|_U$ e, portanto, $f_2 \sim f_1$.

3. Por hipótese $f_1 \sim f_2$ e $f_2 \sim f_3$, então existe um aberto $U \subset \mathbb{C}^n$ contendo $\mathbf{a}$ tal que $f_1|_U = f_2|_U$ e existe também um aberto $V \subset \mathbb{C}^n$ contendo $\mathbf{a}$ tal que $f_2|_V = f_3|_V$. Seja $W = U \cap V$, que é um aberto, pois é a interseção de dois abertos, e que contém $\mathbf{a}$. Assim, $f_1|_W = f_2|_W$ e $f_2|_W = f_3|_W$. Portanto, existe o aberto $W \subset \mathbb{C}^n$ contendo $\mathbf{a}$ tal que $f_1|_W = f_3|_W$, ou seja, $f_1 \sim f_3$. □

Definição 2.2.3. As classes de equivalência desta relação são chamadas de **germes de aplicações** em $\mathbf{a}$ e um elemento da classe de equivalência é chamado de **representante do germe**.

Notação: Denotamos por $f : (\mathbb{C}^n, \mathbf{a}) \rightarrow (\mathbb{C}^p, f(\mathbf{a}))$ ou $f : (\mathbb{C}^n, \mathbf{a}) \rightarrow \mathbb{C}^p$ o germe de uma aplicação $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ em $\mathbf{a}$.

Definição 2.2.4. Seja $V \subset \mathbb{C}^n$. Definimos o **germe** de V em um ponto $\mathbf{a} \in V$, como sendo o conjunto $[V, \mathbf{a}] = \{W \subset \mathbb{C}^n \mid \exists U \text{ aberto de } \mathbb{C}^n, \mathbf{a} \in W \text{ e } V \cap U = W \cap U\}$.

A definição anterior vem de uma relação de equivalência como no caso de aplicações e $[V, \mathbf{a}]$ é uma classe de equivalência.

Como derivação de uma aplicação é um conceito local, temos bem definido este conceito para germes.

Definição 2.2.5. Para cada germe $f : (\mathbb{C}^n, \mathbf{a}) \rightarrow \mathbb{C}^p$ definimos a sua **diferencial** em $\mathbf{a}$, denotada por $\mathbf{d}_{\mathbf{a}}f$, como sendo a diferencial em $\mathbf{a}$ de qualquer um de seus representantes, ou seja,

$$\mathbf{d}_{\mathbf{a}}f := d_{\mathbf{a}}f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p,$$

onde o segundo f é um representante do germe inicial.

Como na definição anterior, muitas vezes a notação de um germe e de seu representante se confundem, ficando subentendido no contexto.

Definição 2.2.6. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, \mathbf{a}) \rightarrow \mathbb{C}^p$ um germe. Definimos a sua **matriz jacobiana** em $\mathbf{a}$, denotada por $Df(\mathbf{a})$, como sendo a matriz jacobiana neste ponto de qualquer um de seus representantes, ou seja,*

$$Df(\mathbf{a}) := Df(\mathbf{a}) = D(f_1, \dots, f_p)(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}_{p \times n},$$

onde o segundo f é um representante do germe inicial com $f = (f_1, \dots, f_p)$.

Da teoria para aplicações temos que também vale para germes que a sua diferencial é uma transformação linear onde a matriz associada é a matriz jacobiana onde

$$\mathbf{d}_{\mathbf{a}}f(v) = Df(\mathbf{a}).v = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Como a diferencial de uma aplicação é uma transformação linear, no que segue, trabalhamos com resultados de Álgebra Linear aplicados a este conceito.

Definição 2.2.7. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, \mathbf{a}) \rightarrow \mathbb{C}^p$. O **posto** do germe f em $\mathbf{a}$, denotado por $\text{posto}_{\mathbf{a}}(f)$, é definido como o posto de sua diferencial em $\mathbf{a}$, ou seja, é o posto da sua matriz jacobiana em $\mathbf{a}$.*

Deste modo,

$$\text{posto}_{\mathbf{a}}(f) = \text{posto } \mathbf{d}_{\mathbf{a}}f = \text{posto}(Df(\mathbf{a})) = \dim(\text{Im}(\mathbf{d}_{\mathbf{a}}f)).$$

Proposição 2.2.8. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, \mathbf{a}) \rightarrow \mathbb{C}^p$ um germe. Se o $\text{posto}_{\mathbf{a}}(f) = n$, então sua diferencial é injetora. Se o $\text{posto}_{\mathbf{a}}(f) = p$, então sua diferencial é sobrejetora.*

Demonstração. Se $\text{posto}_{\mathbf{a}}(f) = n$, então $\dim(\text{Im}(\mathbf{d}_{\mathbf{a}}f)) = n$. Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que $\dim(N(\mathbf{d}_{\mathbf{a}}f)) = 0$ e, assim, $\mathbf{d}_{\mathbf{a}}f$ é injetora.

Se $\text{posto}_{\mathbf{a}}(f) = p$, então $\dim(\text{Im}(\mathbf{d}_{\mathbf{a}}f)) = p$. Logo, $\text{Im}(\mathbf{d}_{\mathbf{a}}f) = \mathbb{C}^p$ e, com isso, $\mathbf{d}_{\mathbf{a}}f$ é sobrejetora. $\square$

Estes resultados a respeito de posto de um germe fornecem uma classificação de germes.

Definição 2.2.9. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, \mathbf{a}) \rightarrow \mathbb{C}^p$ um germe. Dizemos que f é **imersão** em $\mathbf{a}$ se $\text{posto}_{\mathbf{a}}(f) = n$ e é **submersão** em $\mathbf{a}$ se $\text{posto}_{\mathbf{a}}(f) = p$.*

Observação 2.2.10. *Note que valem as recíprocas da Proposição 2.2.8. Assim, o germe f é imersão em $\mathbf{a}$ se $\mathbf{d}_{\mathbf{a}}f$ é injetora e é submersão em $\mathbf{a}$ se $\mathbf{d}_{\mathbf{a}}f$ é sobrejetora.*

Baseado nesta caracterização de germes, podemos classificar pontos numa vizinhança de onde um germe é definido.

Definição 2.2.11. Para um germe $f : (\mathbb{C}^n, \mathbf{a}) \rightarrow \mathbb{C}^p$, dizemos que $\mathbf{a}$ é um **ponto regular** se f é uma imersão ou submersão em $\mathbf{a}$. Caso contrário, $\mathbf{a}$ é um **ponto singular** de f .

Observação 2.2.12. Concluimos que $\mathbf{a}$ é um ponto regular de f se o $\text{posto}_{\mathbf{a}}(f)$ é máximo e é singular se $\text{posto}_{\mathbf{a}}(f)$ não é máximo.

No que segue, definimos uma aplicação associada a um germe, que já abordamos no caso de aplicações (Observação 2.1.23), utilizando o espaço dos jatos, já que a diferencial de um germe é a diferencial de um representante do germe. Bem como o Teorema 2.1.28 pode ser feito a nível de germes de uma aplicação suave.

Definição 2.2.13. Dado um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, \mathbf{a}) \rightarrow \mathbb{C}^p$, definimos o **k -jato** deste germe como sendo a aplicação $j^k f : \mathbb{C}^n \rightarrow J^k(n, p)$ onde, para $u \in \mathbb{C}^n$, $j^k f(u)$ é o desenvolvimento até a ordem k da série de Taylor em torno de u de um de seus representantes, sem termo independente.

Observação 2.2.14. Devido à identificação do final da seção anterior, se $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é um germe de aplicação holomorfa e $j^k f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow J^k(n, p)$ é extensão como k -jato de f , então

$$z_{\alpha}^l \circ j^k f = \frac{\partial^{|\alpha|} f_i}{\partial x^{\alpha}}.$$

2.2.2 Anel dos germes de funções

Vamos considerar agora o conjunto dos germes de aplicações holomorfas de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$ em torno da origem, que vamos denotar por $\mathcal{O}_{n,p}$. Quando $p = 1$ denotamos apenas $\mathcal{O}_n$.

No que segue, abordamos a estrutura algébrica de $\mathcal{O}_n$ e elementos associados.

Para não haver confusão entre germe e aplicação, neste momento denotamos $[f] \in \mathcal{O}_n$ sendo o germe que tem f como representante. É fácil verificar que $\mathcal{O}_n$ com as operações

$$[f] + [g] := [f + g] \text{ e } [f] \cdot [g] := [f \cdot g]$$

tem estrutura de anel.

Voltando a utilizar somente f para indicar um germe em $\mathcal{O}_n$, os quatro resultados subsequentes são para descrever e caracterizar este anel.

Proposição 2.2.15. $f \in \mathcal{O}_n$ é invertível se, e somente se, $f(0) \neq 0$.

Demonstração. Suponhamos $f \in \mathcal{O}_n$ invertível. Então existe $g \in \mathcal{O}_n$ tal que $fg = 1$, onde 1 é o elemento neutro multiplicativo de $\mathcal{O}_n$. Em particular, $f(0) \cdot g(0) = 1$. Logo, $f(0) \neq 0$.

Reciprocamente, consideremos $f(0) \neq 0$. Pelo Teorema da Conservação do Sinal, existe uma vizinhança aberta $U \subset \mathbb{C}^n$ contendo 0 tal que $f(x) \neq 0$, para todo $x \in U$. Assim, para $x \in U$, existe $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, logo, $f(x) \cdot g(x) = 1$. Portanto, o germe f é invertível. $\square$

Proposição 2.2.16. $\mathcal{O}_n$ é um anel local, ou seja, possui um único ideal maximal, dado por $\mathbf{m}_n = \{f \in \mathcal{O}_n \mid f(0) = 0\}$.

Demonstração. Vamos mostrar que $\mathcal{O}_n$ possui um único ideal maximal: $\mathbf{m}_n$.

Temos que $\mathbf{m}_n \neq \emptyset$ pois o germe da função nula está em $\mathbf{m}_n$. Além disso,

$$(f_1 + f_2)(0) = (f_1 + f_2)(0) = f_1(0) + f_2(0) = 0 + 0 = 0, \forall f_1, f_2 \in \mathbf{m}_n$$

e

$$(f \cdot f_1)(0) = (f \cdot f_1)(0) = f(0)f_1(0) = f(0) \cdot 0 = 0, \forall f \in \mathcal{O}_n \text{ e } f_1 \in \mathbf{m}_n.$$

Assim, $\mathbf{m}_n$ é um ideal de $\mathcal{O}_n$.

Seja I um ideal em $\mathcal{O}_n$ tal que $\mathbf{m}_n \subset I$. Queremos mostrar que $I = \mathbf{m}_n$. Se $\mathbf{m}_n \neq I$, então existe $f \in I$ tal que $f \notin \mathbf{m}_n$. Assim, $f(0) \neq 0$, o que garante que f é invertível, pela proposição anterior. Logo $1 \in I$, o que assegura que $I = \mathcal{O}_n$ e portanto $\mathbf{m}_n$ é um ideal maximal.

Seja J um ideal maximal de $\mathcal{O}_n$ com $J \neq \mathbf{m}_n$. Assim existe $f \in J$ tal que $f(0) \neq 0$. Novamente pela proposição anterior f é invertível e, portanto, $J = \mathcal{O}_n$. Assim $\mathbf{m}_n$ é o único ideal maximal de $\mathcal{O}_n$ e, portanto, $\mathcal{O}_n$ é um anel local. $\square$

Lema 2.2. (Lema de Hadamard) *Sejam U uma vizinhança convexa de 0 em $\mathbb{C}^n$ e $f : U \times \mathbb{C}^q \rightarrow \mathbb{C}$ suave tal que $f(0, y) = 0$, para qualquer $y \in \mathbb{C}^q$. Então existem funções $f_1, \dots, f_n$ definidas em $U \times \mathbb{C}^q$ tais que $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_q) = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$.*

Demonstração. Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_q)$ e $\gamma(t) = (tx_1, \dots, tx_n, y_1, \dots, y_q)$.

Notemos que

$$\frac{df}{dt}(tx_1, \dots, tx_n, y_1, \dots, y_q) = (f \circ \gamma)'(t).$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\int_0^1 (f \circ \gamma)' dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(x, y) - f(0, y) = f(x, y) - 0 = f(x, y).$$

Pela Regra da Cadeia temos que $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$. Notemos que

$$f'(\gamma(t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t)), \frac{\partial f}{\partial y_1}(\gamma(t)), \dots, \frac{\partial f}{\partial y_q}(\gamma(t)) \right) \text{ e } \gamma'(t) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$

$$\text{Assim, } f'(\gamma(t))\gamma'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t))x_n. \text{ Logo,}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f \circ \gamma)' dt &= \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t))x_n \right) dt \\ &= x_1 \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t)) dt + \dots + x_n \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t)) dt. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(x, y) = \int_0^1 (f \circ \gamma)' dt = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n, \text{ onde } f_i = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) dt,$$

como queríamos. $\square$

Proposição 2.2.17. *O ideal $\mathbf{m}_n$ de $\mathcal{O}_n$ é gerado por $\{x_1, \dots, x_n\}$.*

Demonstração. Seja $f \in \mathbf{m}_n$. Aplicando o Lema de Hadamard para o caso $q = 0$, temos que existem $f_1, \dots, f_n$ tais que $f = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$ e, assim, $f \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Logo $\mathbf{m}_n \subset \langle x_1, \dots, x_n \rangle$.

Seja $f \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, ou seja, $f = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$. Temos que $f \in \mathbf{m}_n$, pois $f(0) = 0f_1 + \dots + 0f_n = 0$. Logo $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \subset \mathbf{m}_n$ e, portanto, $\mathbf{m}_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. $\square$

2.2.3 Variedades analíticas

Agora vamos considerar conjuntos em $\mathbb{C}^n$ associados aos ideais de $\mathcal{O}_n$.

Definição 2.2.18. *Seja $I \subset \mathcal{O}_n$ um ideal. Definimos o **conjunto dos zeros** de I como sendo o conjunto*

$$V(I) := \{p \in \mathbb{C}^n \mid f(p) = 0, \forall f \in I\}.$$

Proposição 2.2.19. *Sejam I e J ideais de $\mathcal{O}_n$. Se $I \subset J$ então $V(J) \subset V(I)$.*

Demonstração. Seja $a \in V(J)$. Então $f(a) = 0, \forall f \in J$. Como $I \subset J$, segue que $f(a) = 0, \forall f \in I$ e, portanto, $a \in V(I)$. Logo, $V(J) \subset V(I)$. $\square$

Observação 2.2.20. *Se um ideal I é finitamente gerado, então $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$. Para p pertencer a $V(I)$, basta que p anule os geradores de I . Portanto, podemos escrever $V(I) = \{p \in \mathbb{C}^n \mid f_1(p) = \dots = f_s(p) = 0\}$ e denotamos $V(I) = V(f_1, \dots, f_s)$. Neste caso, dizemos que este é o **conjunto de zeros** de $f_1, \dots, f_s$. Em particular, se $I = \langle f \rangle$, denotamos $V(I)$ por $V(f)$.*

Exemplo 2.2.21. *Considere $f \in \mathcal{O}_2$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. O conjunto de zeros de $I = \langle f \rangle$ ou de f é dado por:*

$$V(f) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}.$$

Definição 2.2.22. *Dado $V \subset \mathbb{C}^n$ aberto, dizemos que V é um **conjunto analítico** se para todo $p \in V$, existe um aberto U contendo p tal que $V \cap U$ é o conjunto de zeros de uma coleção finita de funções holomorfas $f_1, \dots, f_s$ em $\mathbb{C}^n$.*

*Dizemos que um conjunto analítico V é **irredutível** se V não pode ser escrito como a união de dois conjuntos analíticos. Se V é um conjunto analítico irredutível, então dizemos que V é uma **variedade analítica**.*

Observação 2.2.23. *Note que o germe na origem de um conjunto analítico coincide com o germe na origem do conjunto de zeros de uma coleção finita de funções holomorfas, que por sua vez coincide com o conjunto de zeros dos germes na origem que têm estas funções holomorfas como representantes.*

Por simplicidade, na sequência nos referimos a conjunto analítico significando que é o germe na origem de um conjunto analítico. Assim, dado um conjunto analítico X , denotamos $X = V(f_1, \dots, f_s)$, onde $f_i \in \mathcal{O}_n, i = 1, \dots, n$. Como $V(I) = V(f_1, \dots, f_s)$, dizemos que $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ define X .

Agora dado um subconjunto de $\mathbb{C}^n$ podemos associar um ideal em $\mathcal{O}_n$, como segue:

Definição 2.2.24. *Seja $X \subset \mathbb{C}^n$, definimos o **ideal associado** à X como sendo*

$$I(X) := \{f \in \mathcal{O}_n \mid f(x) = 0, \forall x \in X\}.$$

Proposição 2.2.25. *Seja X um conjunto analítico em $\mathbb{C}^n$. Então, $X = V(I(X))$.*

Demonstração. Seja $a \in X$, então para $f \in I(X)$ temos que $f(a) = 0$ e assim $a \in V(I(X))$. Logo, $X \subset V(I(X))$. Temos que $X = V(J)$ onde J é um ideal de $\mathcal{O}_n$.

Seja $f \in J$. Assim, para $b \in V(J)$ temos $f(b) = 0$. Então, $f \in I(V(J))$. Logo, $J \subset I(V(J))$. Então, pela Proposição 2.2.19 temos $V(I(V(J))) \subset V(J)$, ou seja, $V(I(X)) \subset X$. Portanto, $X = V(I(X))$. $\square$

As definições anteriores estabelecem uma relação entre os ideais de $\mathcal{O}_n$ e os conjuntos analíticos de $\mathbb{C}^n$:

$$\begin{array}{ccc} V: \{I \subseteq \mathcal{O}_n; I \text{ ideal}\} & \longrightarrow & \{\text{conjuntos analíticos de } \mathbb{C}^n\} \\ I & \longmapsto & V(I) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} I: \{\text{conjuntos analíticos de } \mathbb{C}^n\} & \longrightarrow & \{I \subseteq \mathcal{O}_n; I \text{ ideal}\} \\ X & \longmapsto & I(X) \end{array}.$$

Da proposição anterior, temos que $V \circ I$ é a identidade. Porém $I \circ V$ não necessariamente é a identidade.

Observação 2.2.26. Note que se $I \subset \mathcal{O}_n$ é um ideal primo, então ele coincide com o seu radical ($I = \sqrt{I} = \{f \in \mathcal{O}_n \mid f^n \in I, \text{ para algum } n \geq 1\}$).

Com efeito, claramente $I \subset \sqrt{I}$, pois basta tomar $n = 1$.

Se $f \in \sqrt{I}$, então $f^n \in I$ para algum $n \geq 1$. Como $f^{n-1} \cdot f \in I$ e I é primo, então $f^{n-1} \in I$ ou $f \in I$. Se $f \in I$, temos que $\sqrt{I} \subset I$ e assim, obtemos a igualdade. Suponha que $f \notin I$, então $f^{n-1} \in I$, ou seja, $f^{n-2} \cdot f \in I$. Logo, $f^{n-2} \in I$ ou $f \in I$ e o raciocínio é análogo. Assim, com um número finito de passos, $f \in I$, obtendo a igualdade desejada ($I = \sqrt{I}$).

Usando este fato, com o Teorema dos Zeros de Hilbert mostra-se que $I(V(I)) = I$ quando I é um ideal primo ([7, Corolário 1, p. 11]).

Proposição 2.2.27. Se X é uma variedade analítica, então $I(X)$ é um ideal primo.

Demonstração. Sejam $f, g \in \mathcal{O}_n$ com $f \cdot g \in I(X)$, ou seja, $f(p) \cdot g(p) = 0$ para todo $p \in X$. Consideremos agora os conjuntos $X' = \{p \in X \mid f(p) = 0\}$ e $X'' = \{p \in X \mid g(p) = 0\}$. Estes conjuntos são conjuntos analíticos e a união deles é X . Como X é irredutível, $X' = X$ ou $X'' = X$, ou seja, $f(p) = 0$ ou $g(p) = 0$ para todo $p \in X$. Sendo assim, $f \in I(X)$ ou $g \in I(X)$. $\square$

Exemplo 2.2.28. $I(\mathbb{C}^n) = \{0\}$ (função identicamente nula).

Proposição 2.2.29. Se I é um ideal primo, então $V(I)$ é uma variedade analítica.

Demonstração. Suponha que $V(I)$ não seja irredutível, então existem ideais próprios $J, W \subset \mathcal{O}_n$ tais que

$$V(I) = V(J) \cup V(W), \text{ com } V(J) \neq V(W). \quad (2.4)$$

Afirmção 1: $V(J) \cup V(W) = V(J \cap W)$.

De fato, como $J \cap W \subset J$ e $J \cap W \subset W$, pela Proposição 2.2.19 segue que $V(J) \subset V(J \cap W)$ e $V(W) \subset V(J \cap W)$. Logo, $V(J) \cup V(W) \subset V(J \cap W)$.

Suponha que $b \in V(J \cap W)$ com $b \notin V(J)$. Então, existe $f \in J$ tal que $f(b) \neq 0$. Ainda, para todo $g \in W$ temos $f \cdot g \in J \cdot W \subset J \cap W$ e assim $(f \cdot g)(b) = 0$, pois $b \in V(J \cap W)$. Logo, $f(b)g(b) = 0$ e assim, como $f(b) \neq 0$, deve ocorrer que $g(b) = 0$, pois $f(b), g(b) \in \mathbb{C}$ (corpo). Portanto, $b \in V(W)$ e com isso $b \in V(J) \cup V(W)$. Assim, $V(J) \cup V(W) = V(J \cap W)$.

Afirmção 2: $\sqrt{J \cap W} = \sqrt{J} \cap \sqrt{W}$.

De fato, temos que

$$f \in \sqrt{J \cap W} \Leftrightarrow f^n \in J \cap W, \text{ para algum } n \geq 1 \Leftrightarrow f^n \in J \text{ e } f^n \in W \Leftrightarrow f \in \sqrt{J} \cap \sqrt{W}.$$

Afirmção 3: $V(\sqrt{J}) = V(J)$.

Como $J \subset \sqrt{J}$, da Proposição 2.2.19 segue que $V(\sqrt{J}) \subset V(J)$. Agora tome $p \in V(J)$. Para $f \in \sqrt{J}$, existe um $n \geq 1$ tal que $f^n \in J$, então $f^n(p) = 0$, pois $p \in V(J)$. Logo, $(f(p))^n = f^n(p) = 0$, ou seja, $f(p) = 0$. Sendo assim, obtemos que $p \in V(\sqrt{J})$, concluindo que $V(J) \subset V(\sqrt{J})$. Portanto, das duas inclusões, $V(J) = V(\sqrt{J})$.

Com estas afirmações, retornamos na Equação (2.4) e tomamos I de ambos os lados, ficando com

$$I = I(V(I)) = I(V(J) \cup V(W)) = I(V(J \cap W)), \quad (2.5)$$

onde a primeira igualdade vem do fato de I ser primo e a última igualdade advém da Afirmção 1.

Pelo Teorema dos Zeros de Hilbert, obtemos que $I(V(J \cap W)) = \sqrt{J \cap W}$ e da Afirmção 2, temos que $\sqrt{J \cap W} = \sqrt{J} \cap \sqrt{W}$. Logo, da Equação (2.5), $I = \sqrt{J} \cap \sqrt{W}$.

Note que $\sqrt{J} \neq \sqrt{W}$, pois se $\sqrt{J} = \sqrt{W}$, aplicando V de ambos os lados, temos $V(\sqrt{J}) = V(\sqrt{W})$ e da Afirmção 3, concluimos que $V(J) = V(W)$, que é um absurdo, pois tomamos $V(J) \neq V(W)$. Então $I \subsetneq \sqrt{J}$ e $I \subsetneq \sqrt{W}$. Logo existem $a \in \sqrt{J}$ com $a \notin I$ e $b \in \sqrt{W}$ com $b \notin I$. Com isso, $a \cdot b \in \sqrt{J} \cap \sqrt{W}$, que é um absurdo com o fato de I ser um ideal primo.

Logo, $V(I)$ deve ser irredutível. $\square$

Observação 2.2.30. Da discussão anterior, concluimos que existe uma bijeção entre os ideais primos de $\mathcal{O}_n$ e as variedades analíticas de $\mathbb{C}^n$.

Para X uma variedade analítica em $\mathbb{C}^n$, vamos considerar o anel quociente $\frac{\mathcal{O}_n}{I(X)}$, que é um domínio, já que $I(X)$ é um ideal primo (Proposição 2.2.27). Assim, podemos obter o seu corpo de frações.

Denotamos $\mathbb{C}[X] := \frac{\mathcal{O}_n}{I(X)}$. Sobre $\mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X]^*$ definimos a seguinte relação, que é de equivalência,

$$(f, g) \sim (h, k) \Leftrightarrow f \cdot k = g \cdot h.$$

Denotamos $\frac{f}{g} = \{(h, k) \mid (f, g) \sim (h, k)\}$ a classe de equivalência de (f, g) por essa relação de equivalência.

O conjunto destas classes de equivalências é denotado por $\mathbb{C}(X)$, que é o corpo de frações de $\mathbb{C}[X]$ com as seguintes operações

$$\oplus : \quad \mathbb{C}(X) \times \mathbb{C}(X) \longrightarrow \mathbb{C}(X) \quad \text{e} \quad \odot : \quad \mathbb{C}(X) \times \mathbb{C}(X) \longrightarrow \mathbb{C}(X)$$

$$\left(\frac{f}{g}, \frac{h}{k} \right) \longmapsto \frac{f \cdot k + g \cdot h}{g \cdot k} \quad \text{e} \quad \left(\frac{f}{g}, \frac{h}{k} \right) \longmapsto \frac{f \cdot h}{g \cdot k}.$$

Com estas definições, consideramos para cada ponto $x \in X$, um anel associado ao corpo de frações de $\mathbb{C}[X]$, da seguinte maneira:

$$\mathcal{O}_{X,x} := \left\{ \frac{g}{h} \mid g, h \in \mathbb{C}[X], h(x) \neq 0 \right\} \subset \mathbb{C}(X).$$

Definição 2.2.31. Sejam X uma variedade analítica e $x \in X$. Dizemos que um subconjunto $W \subset X$ é uma **subvariedade analítica em x** se é o conjunto de zeros de uma família $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}_{X,x}$, ou seja,

$$W = \{y \in \mathbb{C}^n \mid f_1(y) = \dots = f_k(y) = 0\}.$$

Semelhante a Definição 2.2.24, definimos o **ideal associado** à W como sendo

$$I(W) := \{f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid f_1(u) = \dots = f_k(u) = 0, \forall u \in W\}.$$

2.2.4 Blow-up de variedade analítica

Esta seção consiste em apresentar uma ferramenta que viabiliza uma caracterização geométrica futura (final da Seção 5.1). Esta ferramenta consiste em obter um objeto associado a variedade analítica $\mathbb{P}^n$.

Em $\mathbb{C}^n$, consideremos a seguinte relação: dados $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$ em $\mathbb{C}^n$,

$(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n)$ se existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $(y_1, \dots, y_n) = \lambda(x_1, \dots, x_n)$,

que é uma relação de equivalência.

Definição 2.2.32. Definimos o **espaço projetivo** $\mathbb{P}^{n-1}$ sendo o quociente

$$\mathbb{P}^{n-1} = (\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) / \sim .$$

Notação: Um ponto em $\mathbb{P}^{n-1}$ é denotado por $[z_1 : \dots : z_n]$, onde

$$\begin{aligned} [z_1 : \dots : z_n] &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid (x_1, \dots, x_n) \sim (z_1, \dots, z_n)\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid (x_1, \dots, x_n) = \lambda(z_1, \dots, z_n), \lambda \in \mathbb{C}^*\}. \end{aligned}$$

Observação 2.2.33. $\mathbb{P}^{n-1}$ pode ser visto como um espaço topológico, considerando a topologia quociente, e uma variedade complexa, onde as cartas são dadas por

$$\begin{aligned} U_j &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ (z_1 : \dots : z_n) &\mapsto \left(\frac{z_1}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right), \end{aligned}$$

onde $U_j = \{(z_1 : \dots : z_n) \mid z_j \neq 0\}$, para $j = 1, \dots, n$.

Consideremos o seguinte subconjunto de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$:

$$\tilde{\mathbb{C}}^n = \{(x; l) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \mid x \in l\}$$

e a aplicação $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ definida por $\pi(x, l) = x$.

Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $l = (z_1 : \dots : z_n)$. Se $x \in l$ então existe $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $\lambda_0 \neq 0$, tal que $(x_1, \dots, x_n) = \lambda_0(z_1, \dots, z_n)$. Assim, $x_i = \lambda_0 z_i$, $\forall i = 1, \dots, n$ e com isso podemos escrever $\tilde{\mathbb{C}}^n$ na forma

$$\tilde{\mathbb{C}}^n = \{(x; l) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \mid x_i z_j = x_j z_i, \forall i, j\}.$$

Temos que $\tilde{\mathbb{C}}^n$ é uma variedade complexa de dimensão n onde as cartas coordenadas são da forma (V_i, φ_i) , $i = 1, \dots, n$ onde $V_i = \{(x; l) \in \tilde{\mathbb{C}}^n : z_i \neq 0\}$ e

$$\begin{aligned} \varphi_i : V_i &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ (x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_n) &\mapsto \left(\frac{z_n}{z_i}, \dots, \frac{z_{i+1}}{z_i}, x_i, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \dots, \frac{z_1}{z_i} \right). \end{aligned}$$

Denotemos por

$$u_{i,1} = \frac{z_n}{z_i}, \dots, u_{i,n-i} = \frac{z_{i+1}}{z_i}, u_{i,n+1-i} = x_i, u_{i,n+2-i} = \frac{z_{i-1}}{z_i}, \dots, u_{i,n} = \frac{z_1}{z_i}.$$

Nestas novas coordenadas, a projeção π em V_i é dada por

$$\begin{aligned} \pi_i(u_{i,1}, \dots, u_{i,n-i}, u_{i,n+1-i}, u_{i,n+2-i}, \dots, u_{i,n}) = \\ ((u_{i,n})(u_{i,n+1-i}), (u_{i,n-1})(u_{i,n+1-i}), (u_{i,n-2})(u_{i,n+1-i}), \dots, (u_{i,1})(u_{i,n+1-i})). \end{aligned}$$

Note que $\pi|_{V_i} = \pi_i \circ \varphi_i$.

Definição 2.2.34. O par $(\tilde{\mathbb{C}}^n, \pi)$ ou $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ é chamado de **blow-up** do ponto $0 = (0, \dots, 0)$ em $\mathbb{C}^n$ (ou **blow-up** de $\mathbb{C}^n$ em 0) e $\pi^{-1}(0)$ é chamado de **divisor excepcional** deste blow-up.

Esta construção pode ser feita de maneira análoga para a explosão em um ponto qualquer, diferente da origem.

Exemplo 2.2.35. Se $n = 2$, temos $\tilde{\mathbb{C}}^2 = \{(x; l) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid x \in l\}$ com as cartas (V_j, φ_j) , onde $V_j = \{(x; z) \in \tilde{\mathbb{C}}^2 \mid z_j \neq 0\}$, $j = 1, 2$.

Sendo $u_1 = u_{1,1} = \frac{z_2}{z_1}$, $v_1 = u_{1,2} = x_1$, $u_2 = u_{2,1} = \frac{z_1}{z_2}$, $v_2 = u_{2,2} = x_2$, portanto, a projeção π está dada pelas seguintes equações nas cartas coordenadas correspondentes:

$$\pi_1(u_1, v_1) = (v_1, u_1 v_1) \text{ e } \pi_2(u_2, v_2) = (u_2 v_2, u_2).$$

Se $n = 3$, temos $\tilde{\mathbb{C}}^3 = \{(x; l) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^2 \mid x \in l\}$ com as cartas (V_j, φ_j) , onde $V_j = \{(x; z) \in \tilde{\mathbb{C}}^3 \mid z_j \neq 0\}$, $j = 1, 2, 3$.

Sendo $u_1 = u_{1,1} = \frac{z_3}{z_1}$, $v_1 = u_{1,2} = \frac{z_2}{z_1}$, $w_1 = u_{1,3} = x_1$, $u_2 = u_{2,1} = \frac{z_3}{z_2}$, $v_2 = u_{2,2} = x_2$, $w_2 = u_{2,3} = \frac{z_1}{z_2}$, $u_3 = u_{3,1} = x_3$, $v_3 = u_{3,2} = \frac{z_2}{z_3}$, $w_3 = u_{3,3} = \frac{z_1}{z_3}$, portanto, a projeção π está dada pelas seguintes equações nas cartas coordenadas correspondentes:

$$\pi_1(u_1, v_1, w_1) = (w_1, v_1 w_1, u_1 w_1), \quad \pi_2(u_2, v_2, w_2) = (w_2 v_2, v_2, u_2 v_2),$$

$$\pi_3(u_3, v_3, w_3) = (w_3 u_3, v_3 u_3, u_3).$$

Definição 2.2.36. Seja $Y \subset \mathbb{C}^n$ uma variedade analítica com $0 \in Y$. O **blow-up** de Y em $0 \in \mathbb{C}^n$ é

$$\text{o fecho em } \tilde{\mathbb{C}}^n \text{ de } \pi^{-1}(Y - \{0\}) \text{ ou } \tilde{\pi} := \pi|_{\overline{\pi^{-1}(Y - \{0\})}},$$

onde π é o blow-up de $\mathbb{C}^n$ em 0 . Podemos também dizer que este é o **blow-up** de $\mathbb{C}^n$ ao longo de Y em 0 .

Como já mencionado, a construção é análoga para um ponto qualquer. Na maioria das vezes fica subentendido o ponto, dizendo somente **blow-up** de $\mathbb{C}^n$ em Y .

Exemplo 2.2.37. Considere Y a curva em $\mathbb{C}^2$, dada pelo polinômio $f(x, y) = y^2 - x^3$.

Em V_1 temos:

$$\begin{aligned} (\pi_1)^{-1}(Y - \{(0, 0)\}) &= \{(u_1, v_1) \mid u_1^2 v_1^2 - v_1^3 = 0 \text{ e } (v_1, u_1 v_1) \neq (0, 0)\} \\ &= \{(u_1, v_1) \mid u_1^2 - v_1 = 0\}. \end{aligned}$$

Logo,

$$(\pi|_{V_1})^{-1}(Y - \{(0, 0)\}) = \{(x_1, x_2; z_1, z_2) \mid z_2^2 - x_1 z_1^2 = 0\}.$$

De maneira análoga, em V_2 temos:

$$(\pi_2)^{-1}(Y - \{(0, 0)\}) = \{(u_2, v_2) \mid 1 - u_2^3 v_2 = 0\}.$$

Logo,

$$(\pi|_{V_2})^{-1}(Y - \{(0, 0)\}) = \{(x_1, x_2; z_1, z_2) \mid z_2^3 - x_2 z_1^3 = 0\}.$$

Exemplo 2.2.38. *Seja Y em $\mathbb{C}^3$, definido pelos polinômios $f(s, x, y) = x$ e $g(s, x, y) = y$, ou seja, $Y = \mathbb{C} \times \{(0, 0)\}$.*

De maneira análoga ao exemplo anterior, calculamos

$$\begin{aligned} (\pi_1)^{-1}(Y - \{(0, 0, 0)\}) &= \{(u_1, v_1, w_1) \mid v_1 w_1 = 0, u_1 w_1 = 0, (w_1, v_1 w_1, u_1 w_1) \neq (0, 0, 0)\} \\ &= \{(0, 0, w_1) \mid w_1 \neq 0\}. \end{aligned}$$

$$(\pi_2)^{-1}(Y - \{(0, 0, 0)\}) = \emptyset \text{ e } (\pi_3)^{-1}(Y - \{(0, 0, 0)\}) = \emptyset$$

Logo,

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(Y - \{(0, 0, 0)\}) &= (\pi|_{V_1})^{-1}(Y - \{(0, 0, 0)\}) = (\varphi_1)^{-1}((\pi_1)^{-1}(Y - \{(0, 0, 0)\})) \\ &= \{(x_1, x_2, x_3; z_1 : z_2 : z_3) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^2 \mid \frac{z_3}{z_1} = 0, \frac{z_2}{z_1} = 0, x_1 \neq 0\} \\ &= \{(x_1, 0, 0; z_1 : 0 : 0) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^2\}. \end{aligned}$$

Neste caso, podemos ir de maneira mais direta:

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(Y - \{(0, 0, 0)\}) &= \{(x_1, x_2, x_3; z_1 : z_2 : z_3) \in \tilde{\mathbb{C}}^3 \mid x_2 = 0, x_3 = 0 \text{ e } x_1 \neq 0\} \\ &= \{(x_1, 0, 0; z_1 : z_2 : z_3) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^2 \mid x_1 z_2 = 0, x_1 z_3 = 0 \text{ e } x_1 \neq 0\} \\ &= \{(x_1, 0, 0; z_1 : 0 : 0) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^2 \mid x_1 \neq 0\}. \end{aligned}$$

Logo o blow-up de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C} \times \{(0, 0)\}$ é o fecho de $\pi^{-1}(Y - \{(0, 0, 0)\})$, ou seja,

$$\tilde{Y} := \{(x_1, 0, 0; z_1 : 0 : 0) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^2\}$$

e $\tilde{\pi} = \pi|_{\tilde{Y}}$.

3 MULTIPLICIDADE DE IDEAIS ASSOCIADA A MÓDULOS

Neste capítulo, o foco principal é definir a multiplicidade de Hilbert-Samuel para ideais de definição de um anel local Noetheriano com relação a módulos finitamente gerados sobre este anel. Para isso, apresentamos os elementos algébricos e suas propriedades necessárias ao entendimento deste conceito e seus desdobramentos, destacando um tipo especial de anel, anel Cohen-Macaulay, e suas características. Por fim, exploramos aspectos sobre a multiplicidade de um tipo particular de anel. Conceitos básicos da teoria de anéis são assumidos conhecidos, embora alguns sejam revisitados para fixar notação e garantir clareza na exposição.

3.1 MÓDULOS

Nesta seção, estudamos de forma sucinta algumas definições e propriedades de módulos, fixando notações e destacando alguns casos especiais.

Definição 3.1.1. *Sejam $(M, +)$ um grupo abeliano e $(R, \oplus, \bullet)$ um anel comutativo com unidade 1_R . Dizemos que M é um **R-módulo** (ou um **módulo** sobre R) se existe uma multiplicação de elementos de R por elementos de M que satisfaz:*

- (a) $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$, para todo $a \in R, x, y \in M$;
- (b) $(a \oplus b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$, para todo $a, b \in R, x \in M$;
- (c) $(a \bullet b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$, para todo $a, b \in R, x \in M$;
- (d) $1_R \cdot x = x$, para todo $x \in M$.

No que segue não fazemos distinção na simbologia das operações envolvidas na definição de módulo, ficando subentendido em cada situação.

Observação 3.1.2. *Se R é um corpo então um R -módulo é um R -espaço vetorial.*

Fixamos R um anel comutativo com unidade até o final do capítulo, a menos que seja especificado.

Exemplo 3.1.3. *Diretamente da definição, todo ideal de um anel R é um R -módulo.*

Nosso objetivo é apresentar um exemplo especial de módulo.

Exemplo 3.1.4. *Considerando o conjunto $\mathcal{O}_{n,p}$ dos germes de aplicações na origem de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$, temos que ele tem estrutura de $\mathcal{O}_n$ -módulo considerando o seguinte produto:*

$$[f] \cdot [g] := ([f] \cdot [g_1], \dots, [f] \cdot [g_p]), \text{ para todo } [g] \in \mathcal{O}_{n,p}, \text{ com } g = (g_1, \dots, g_p) \text{ e } [f] \in \mathcal{O}_n.$$

Definição 3.1.5. Seja M um R -módulo. Dizemos que M é **finitamente gerado** se existem finitos $x_i \in M$, $1 \leq i \leq n$, tais que

$$M = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i \mid a_i \in R \right\}.$$

Definição 3.1.6. Sejam M um R -módulo e $L \subset M$ um subconjunto não vazio de M . Dizemos que L é um **submódulo** de M se $(L, +)$ é um subgrupo de $(M, +)$ e é fechado para a multiplicação de R em M .

Observação 3.1.7. Seja L um submódulo do R -módulo M . O grupo $\frac{M}{L}$ herda então uma estrutura de R -módulo de M , definida por $a(x + L) = ax + L$, chamado **módulo quociente** de M por L .

Definição 3.1.8. Seja $(M_i)_{i \in I}$ uma família de R -módulos. Definimos a **soma direta** destes módulos por

$$\bigoplus_{i \in I} M_i := \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \neq 0 \text{ para um número finito de índices}\},$$

que é um R -módulo usando a aplicação $\mu : R \times \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} M_i$ dada por $\mu(a, (x_i)_{i \in I}) = (ax_i)_{i \in I}$.

Definição 3.1.9. Sejam M e N dois R -módulos e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação. Dizemos que f é um **homomorfismo de R -módulos** se para todo $x, y \in M$ e para todo $a \in R$ tivermos

- i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
- ii) $f(ax) = af(x)$.

Quando o homomorfismo f for bijetor, então denotamos $M \cong N$.

Exemplo 3.1.10. Um exemplo clássico de homomorfismo de R -módulos é a derivação em um espaço de polinômios. Considere o anel $R = \mathbb{R}$ (com as operações usuais de soma e multiplicação) e o R -módulo $M = N = \mathbb{R}[x]$, o conjunto dos polinômios com coeficientes reais. Defina a função $f : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ por

$$f(p(x)) = p'(x),$$

onde $p'(x)$ é a derivada do polinômio $p(x)$.

Pelas propriedades de derivação, f é um homomorfismo de R -módulos. De fato:

1. Para quaisquer $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$,

$$f(p(x) + q(x)) = (p(x) + q(x))' = p'(x) + q'(x) = f(p(x)) + f(q(x)).$$

2. Para qualquer $a \in \mathbb{R}$ e $p(x) \in \mathbb{R}[x]$,

$$f(ap(x)) = (ap(x))' = ap'(x) = af(p(x)).$$

Observação 3.1.11. Dado um R -homomorfismo $f : M \rightarrow N$, o **núcleo** de f , $N(f) := \{x \in M \mid f(x) = 0_N\}$, e a **imagem** de f , $Im(f) := \{f(x) \mid x \in M\}$, são submódulos de M e N , respectivamente. Também o **conúcleo** de f , $coN(f) := \frac{N}{Im(f)}$, é um R -módulo.

A seguir algumas propriedades associadas ao conceito de homomorfismo.

Proposição 3.1.12. *Sejam $f : M \rightarrow N$ um homomorfismo de R -módulos e M_1, M_2, M_3 submódulos de M . Então*

1. $\frac{M}{N(f)} \cong \text{Im}(f)$. (Teorema do Isomorfismo)
2. $\frac{(M_1/M_3)}{(M_2/M_3)} \cong \frac{M_1}{M_2}$;
3. $\frac{M_1 + M_2}{M_2} \cong \frac{M_1}{M_1 \cap M_2}$.

Demonstração. Pode ser vista em [8, Proposição 2.1, p.19]. □

Definição 3.1.13. Um **anel graduado** é um anel R junto com uma família $(R_n)_{n \geq 0}$ de subgrupos do grupo aditivo R , tal que $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ e $R_m \cdot R_n \subseteq R_{m+n}$, para todo $m, n \geq 0$.

Exemplo 3.1.14. O anel de polinômios $\mathbb{C}[x]$ pode ser escrito como um anel graduado do tipo

$$\mathbb{C}[x] = \bigoplus_{n \geq 0} R_n,$$

onde $R_n = \{a_n x^n \mid a_n \in \mathbb{C}\}$. A verificação de que $R_m \cdot R_n \subseteq R_{m+n}$ vem diretamente do fato de $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.

Exemplo 3.1.15. Analogamente podemos definir uma graduação do anel de polinômios de maneira mais geral. Seja o anel de polinômios $K[x_1, \dots, x_s]$ sobre um corpo K . Então podemos graduá-lo como

$$K[x_1, \dots, x_s] = \bigoplus_{n \geq 0} G_n,$$

onde G_n consiste nos polinômios de grau n , ou seja, combinações lineares de monômios $x_1^{a_1} \cdots x_s^{a_s}$ com $a_1 + \cdots + a_s = n$.

A seguir, um resultado que caracteriza cada subgrupo da graduação do anel graduado em função do primeiro subgrupo.

Proposição 3.1.16. Se $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ um anel graduado, então, R_0 é um subanel de R e R_n é um R_0 -módulo para todo $n \geq 0$.

Demonstração. Para verificar que R_0 é um subanel de R , basta notar que por definição, R_0 é um subgrupo aditivo de R , portanto, é fechado para a adição. Porém, ainda por definição, temos que $R_0 \cdot R_0 \subseteq R_{0+0} = R_0$, portanto, R_0 é fechado para a multiplicação. Os axiomas para R_0 ser subanel decorrem trivialmente.

Agora, para verificar que R_n é um R_0 -módulo para todo n , basta notar que, por definição $R_0 \cdot R_n \subseteq R_n$, portanto, R_n é fechado para a multiplicação por elementos de R_0 . Como já foi verificado que R_0 é um anel, os axiomas para R_n ser um R_0 -módulo também decorrem de maneira trivial. □

Definição 3.1.17. Seja $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ um anel graduado, um elemento $x \in R$ é dito **homogêneo** se $x \in R_k$, para algum k , onde k é chamado de **grau** de x .

Exemplo 3.1.18. No Exemplo 3.1.14 em que $\mathbb{C}[x] = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$, qualquer polinômio do tipo ax^k pertence a R_k e assim é chamado de *homogêneo de grau k* .

No que segue temos a extensão do conceito de graduação para o caso de módulos.

Definição 3.1.19. Seja $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ um anel graduado. Dizemos que um R -módulo M é um **R -módulo graduado** se existir uma família $(M_n)_{n \geq 0}$ de subgrupos de M tal que $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ e $R_m \cdot M_n \subseteq M_{m+n}$, para todo $m, n \geq 0$.

Proposição 3.1.20. Sejam $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ um anel graduado e M um R -módulo graduado. Então cada M_n é um R_0 -módulo, para todo $n \geq 0$.

Demonstração. Segue com raciocínio análogo ao que foi feito na Proposição 3.1.16. $\square$

Definição 3.1.21. Se $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ um R -módulo graduado, um elemento $x \in M$ é dito **homogêneo** se $x \in M_k$, para algum k , onde k é chamado de **grau** de x . Um submódulo $N \subset M$ é dito **homogêneo** se é gerado por elementos homogêneos.

Observação 3.1.22. Como todo ideal em anel comutativo R é um R -módulo, então chamamos ele de **ideal homogêneo** se ele é homogêneo como R -módulo.

A graduação também deve ser controlada em um homomorfismo, por isso necessitamos da próxima definição.

Definição 3.1.23. Sejam $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ e $N = \bigoplus_{n \geq 0} N_n$ R -módulos graduados. Definimos um **homomorfismo de R -módulos graduados** sendo um R -homomorfismo

$$f : M \rightarrow N \text{ tal que } f(M_n) \subseteq N_n, \forall n \geq 0.$$

Exemplo 3.1.24. Para o anel graduado $\mathbb{C}[x] = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ do Exemplo 3.1.14, considere a aplicação $f : \bigoplus_{n \geq 0} R_n \rightarrow \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ dada por $f\left(\sum_i a_i x^i\right) = \lambda\left(\sum_i a_i x^i\right)$, onde $\lambda \in \mathbb{C}$.

Como $\lambda\left(\sum_i a_i x^i\right) = \sum_i (\lambda a_i) x^i$ e $\lambda a_i \in \mathbb{C}$, claramente f é um $\mathbb{C}[x]$ -homomorfismo.

Sendo $R_n = \{a_n x^n \mid a_n \in \mathbb{C}\}$, $f(a_n x^n) = \lambda(a_n x^n) = (\lambda a_n) x^n \in R_n$ e, com isso, $f(R_n) \subseteq R_n$.

Portanto f é um homomorfismo de R -módulos graduados.

Definição 3.1.25. Considere uma família $(x_i)_{i \in I}$, com I um conjunto de índices, de elementos do R -módulo M . Dizemos que $(x_i)_{i \in I}$ é uma **base** de M se

1. Todo elemento $x \in M$ pode ser escrito com combinação linear de $(x_i)_{i \in I}$, ou seja, $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ para $(\lambda_i)_{i \in I}$ uma família de elementos de R ;
2. Toda família $(\lambda_i)_{i \in I}$ de elementos de R que satisfazem

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall i \in I.$$

Um R -módulo M que possui uma base é dito um **módulo livre**.

Definição 3.1.26. Sejam M, N e P três R -módulos e $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow P$ R -homomorfismos. Dizemos que o diagrama

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

é uma **sequência exata** em N se a imagem de f é igual ao núcleo de g ($\text{Im}(f) = N(g)$).

Definição 3.1.27. Seja $\{M_i\}_{i \in I}$ uma família, eventualmente infinita, de R -módulos e $\{f_i : M_i \rightarrow M_{i+1}\}_{i \in I}$ uma família de R -homomorfismos. Dizemos que

$$\cdots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

é uma **sequência exata**, se é exata em M_i , $\forall i$.

Exemplo 3.1.28.

1. A sequência $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} 0$ é exata se, e somente se, f é sobrejetora.
2. A sequência $0 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ é exata se, e somente se, g é injetora.
3. Dos exemplos anteriores, temos que a sequência $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ é exata se, e somente se, f é um isomorfismo.

Definição 3.1.29. Um **complexo** D é uma sequência de R -módulos e R -homomorfismos

$$D : \cdots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots$$

tal que a composição $f_i \circ f_{i-1} = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Observação 3.1.30. Observe que $f_i \circ f_{i-1} = 0$ é equivalente a $\text{Im}(f_{i-1}) \subset N(f_i)$. Logo, se uma sequência é exata então ela é um complexo.

Definição 3.1.31. Seja M um R -módulo. Uma **cadeia de submódulos** de M é uma sequência de submódulos de M , (M_i) para $i = 1, \dots, r$ tal que

$$\{0\} = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_r = M.$$

Chamamos r de **comprimento** da cadeia anterior.

Uma **série de composição** de M é uma cadeia maximal, isto é, $\{0\} = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_r = M$ tal que entre M_n e M_{n+1} não existe nenhum R -submódulo de M para $n = 0, \dots, r-1$.

Para o próximo conceito é importante o seguinte resultado:

Proposição 3.1.32. Se um R -módulo M tem uma série de composição de comprimento n . Então toda série de composição de M tem comprimento n .

Demonstração. Pode ser vista em [8, Proposição 6.7, p.77]. □

Definição 3.1.33. Seja M um R -módulo que tem uma série de composição. Dizemos que o **comprimento** ou **longitude** de M , denotado por $\ell(M)$, é o comprimento de uma (e portanto todas) série de composição de M .

Se M não possuir uma série de composição, dizemos que M tem **comprimento infinito**.

Exemplo 3.1.34. Considere o $\mathbb{Z}$ -módulo $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ com a seguinte série de composição

$$0 \subset \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

Note que não há nenhum outro $\mathbb{Z}$ -módulo entre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, logo, $\ell(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) = 2$.

Exemplo 3.1.35. Note que nem sempre existe uma série de composição. Considere o anel $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$ -módulo. Sabendo que os $\mathbb{Z}$ -submódulos de $\mathbb{Z}$ são do tipo $\langle a \rangle$, onde $a \in \mathbb{Z}$, para toda série de composição de $\mathbb{Z}$ do tipo

$$0 \subset \langle a \rangle \subset \langle b \rangle \subset \cdots \subset \langle 1 \rangle = \mathbb{Z},$$

sempre há um elemento $\langle 2.a \rangle$ que está entre 0 e $\langle a \rangle$. Logo, não é possível exibir uma série de composição de $\mathbb{Z}$. Portanto, $\ell(\mathbb{Z}) = +\infty$.

O próximo resultado nos dá, quando M é um módulo sobre um corpo, que o comprimento de M é igual a dimensão como espaço vetorial de M .

Proposição 3.1.36. Seja M um K -módulo com K um corpo. Nesse caso M é um espaço vetorial e $\ell(M) = \dim_K M$.

Demonstração. Como K é um corpo, o K -módulo M é um espaço vetorial sobre K .

Vamos construir uma série de composição para M .

Seja $\dim_K M = n$. Então, M tem uma base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Definimos os submódulos M_i como:

$$M_i = \langle v_1, v_2, \dots, v_i \rangle, \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

onde $M_0 = 0$ e $M_n = M$.

Isso nos dá uma cadeia de submódulos:

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n = M.$$

Para verificar que cada quociente M_{i+1}/M_i é simples basta notar que o quociente M_{i+1}/M_i é isomorfo a K para todo i , pois:

$$M_{i+1}/M_i \cong \langle v_{i+1} \rangle \text{ e } \langle v_{i+1} \rangle \cong K.$$

Como K é um corpo, K é um K -módulo simples (não possui submódulos próprios não triviais). Logo, a cadeia

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n = M$$

é uma série de composição, pois cada quociente M_{i+1}/M_i é simples.

Portanto, como o comprimento desta cadeia é n e é uma série de composição, segue que $\ell(M) = n = \dim_K M$. $\square$

Exemplo 3.1.37. Para o anel de polinômios $R = K[x_1, \dots, x_s]$, K um corpo, com a graduação

$$R = \bigoplus_{n \geq 0} G_n,$$

onde G_n é o conjunto de todos os monômios do tipo $\alpha(x_1^{a_1} \dots x_s^{a_s})$, $\alpha \in K$ e $a_1 + \dots + a_s = n$. Portanto, cada G_n é gerado pelos monômios $x_1^{a_1} \dots x_s^{a_s}$, onde $a_1 + \dots + a_s = n$ e, com isso, a dimensão de G_n sobre K é igual a quantidade destes monômios, ou seja,

$$\dim_K G_n = \binom{s+n-1}{s-1}.$$

Logo, da proposição anterior, segue diretamente que

$$\ell(G_n) = \binom{s+n-1}{s-1}, \quad \forall n \geq 0.$$

3.1.1 Módulos Noetherianos e Artinianos

No que segue, definimos uma classe especial de módulos, bem como apresentamos resultados que os caracterizam.

Definição 3.1.38. *Seja M um R -módulo e considere o conjunto de todos os submódulos de M ordenados por inclusão.*

Se para toda sequência de submódulos de M (cadeia crescente ou ascendente)

$$M_0 \subseteq \dots \subseteq M_{k-1} \subseteq M_k \subseteq M_{k+1} \subseteq \dots$$

*existe $n \geq 0$ tal que $M_n = M_{n+1} = \dots$ (ou seja, **estacionária**), então M é chamado de um R -módulo **Noetheriano** e a propriedade anterior é chamada **condição de cadeia ascendente**.*

Se para toda sequência de submódulos de M (cadeia decrescente ou descendente)

$$M_0 \supseteq \dots \supseteq M_{k-1} \supseteq M_k \supseteq M_{k+1} \supseteq \dots$$

*existe $n \geq 0$ tal que $M_n = M_{n+1} = \dots$ (ou seja, **estacionária**), então M é chamado de um R -módulo **Artiniano** e a propriedade anterior é chamada **condição de cadeia descendente**.*

*Dizemos que um anel R é **Noetheriano** (resp. **Artiniano**) se é Noetheriano (resp. Artiniano) como R -módulo.*

Observação 3.1.39. *Isomorfismo de módulos (anéis) preserva o conceito de Noetheriano (resp. Artiniano).*

Exemplo 3.1.40. *Todo corpo K é uma anel Noetheriano pois os submódulos de um anel K como K -módulo são os seus ideais, que no caso de um corpo, são só os triviais. Com isso a única sequência de submódulos de K , $\{0\} \subseteq K$, é finita.*

Primeiramente, optamos em citar (sem demonstração) os resultados que precisamos para o caso de anéis Noetherianos (resp. Artinianos). Depois descrevemos alguns resultados para módulos Noetherianos (resp. Artinianos) e estes apresentamos as demonstrações.

Sejam $R[x_1, \dots, x_n]$ o anel dos polinômios com coeficientes em R nas variáveis $x_1, \dots, x_n$ e $R\{x_1, \dots, x_n\}$ o anel das séries formais com coeficientes em R .

Proposição 3.1.41. *Se R é uma anel Noetheriano, então $R[x_1, \dots, x_n]$ e $R\{x_1, \dots, x_n\}$ são anéis Noetherianos.*

Demonstração. Pode ser vista em [9, Teorema 3.3, p. 16]. □

Definição 3.1.42. *Sejam I, J dois ideais de um anel R . O **produto** deles, denotado por IJ , é o ideal gerado por todos os produtos xy tal que $x \in I$ e $y \in J$. Analogamente definimos o produto de uma quantidade finita de ideais.*

Notação: O produto de um mesmo ideal I , n vezes, é representado por I^n .

Exemplo 3.1.43. *O anel $\mathcal{O}_n$ é um anel Noetheriano.*

De fato, sendo $\mathbb{C}$ um anel Noetheriano (Exemplo 3.1.40), pela Proposição 3.1.41, $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ é um anel Noetheriano. Se mostramos que $\mathcal{O}_n \cong \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$, temos o desejado.

Com efeito, considere a aplicação $\phi : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$, dada por $\phi(f)$ sendo a série de Taylor de um representante de f em torno da origem.

Como este conceito depende das derivadas parciais, que é um conceito local, então independe do representante do germe e , portanto, ϕ está bem definida.

As operações entre séries de potências decorrem de maneira natural das operações com funções, logo ϕ é um homomorfismo de anéis.

Para toda série de potências de $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$, conseguimos uma f tal que sua função de Taylor em torno da origem é exatamente esta série ([10, Teorema de Borel, 1.5.4 p. 30]).

Ainda do Teorema de Borel temos que

$$\frac{\mathcal{O}_n}{N(\phi)} \cong \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$$

com $N(\phi) = \bigcap_k \mathfrak{m}_n^k := \mathfrak{m}_n^\infty$.

Como $\mathfrak{m}_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, então $\mathfrak{m}_n^k$ é o ideal gerado pelos monômios de grau k . Logo, $\mathfrak{m}_n^\infty = \{0\}$ e, com isso, $\mathcal{O}_n \cong \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$.

Proposição 3.1.44. *Seja R um anel Noetheriano (resp. Artiniano) e I um ideal de R . Então R/I é Noetheriano (resp. Artiniano).*

Demonstração. Pode ser vista em [Proposição 6.6. p. 76 [8]]. □

Agora descrevemos os resultados onde módulos Noetherianos (resp. Artinianos) estão envolvidos.

Proposição 3.1.45. *Em um R -módulo M , as seguintes condições são equivalentes:*

- (a) *Toda cadeia crescente de submódulos de M é estacionária;*
- (b) *Todo conjunto não vazio de submódulos de M tem um elemento maximal.*

Demonstração. Suponha que a condição (a) é verdadeira e que (b) é falsa. Logo, existe um subconjunto não vazio M' de M que não possui elemento maximal. Deste modo, pode-se construir indutivamente uma cadeia crescente em M' (e, portanto em M) que não termina, contradizendo o item (a).

Dada uma cadeia crescente

$$M_0 \subseteq \dots \subseteq M_{k-1} \subseteq M_k \subseteq M_{k+1} \subseteq \dots$$

de M , considere $T = \bigcup_{i \geq 0} M_i$. Pelo item (b), seja M_n o elemento maximal de M' . Logo n é o índice que deixa a cadeia estacionária. □

Proposição 3.1.46. *Seja M um R -módulo com R um anel. Se M é Noetheriano, então todo submódulo de M é finitamente gerado.*

Demonstração. Suponha que M é Noetheriano. Considere N um submódulo de M e Σ o conjunto de todos os submódulos de N finitamente gerados (note que também serão submódulos de M). Como Σ não é vazio ($0 \in \Sigma$) e M é Noetheriano com Σ um subconjunto de M , da proposição anterior Σ tem um elemento maximal. Seja N_0 este elemento. Se $N_0 \neq N$, existe um elemento $x \in N$ e $x \notin N_0$ e portanto podemos considerar o submódulo $N_0 + Rx$ de N . Este novo submódulo claramente é finitamente gerado, pois N_0 é. Como N_0 é o maximal de Σ , deve ocorrer que $N_0 + Ax \in N_0$, o que é um absurdo, pois $x \notin N_0$. Portanto, $N = N_0$ e assim N é finitamente gerado. □

Observação 3.1.47. Note que se M é um R -módulo Noetheriano, então satisfaz a condição (a) do lema anterior. Logo, todo conjunto não vazio de submódulos de M possui elemento maximal (em particular M também).

Proposição 3.1.48. Seja $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$ uma sequência exata de R -módulos. Então M_2 é Noetheriano (resp. Artiniano) se, e somente se, M_1 e M_3 são Noetherianos (resp. Artinianos)

Demonstração. O caso Noetheriano será demonstrado e o caso Artiniano segue de maneira análoga. Suponhamos M_2 Noetheriano. Considere uma cadeia ascendente de submódulos de M_1 , que pela f obtemos uma cadeia ascendente de submódulos de M_2 . Se M_2 é Noetheriano então esta nova cadeia é estacionária e, portanto, a cadeia inicial é estacionária. Agora se consideramos uma cadeia ascendente de submódulos de M_3 , usando imagem inversa pela g , obtemos uma cadeia ascendente de submódulos de M_2 . Novamente, M_2 é Noetheriano então esta nova cadeia é estacionária e, portanto, a cadeia inicial é estacionária. Logo, M_1 e M_3 são Noetherianos.

Reciprocamente, seja $(L_n)_{n \geq 0}$ uma cadeia ascendente de M_2 . Usando f e g geramos duas novas cadeias ascendentes $(f^{-1}(L_n))_{n \geq 0}$, $(g(L_n))_{n \geq 0}$ em M_1 e M_3 respectivamente. Sendo M_1 e M_3 Noetherianos, existem índices n_1 e n_2 tal que $f^{-1}(L_n) = f^{-1}(L_{n+1}) = \dots$ para $n \geq n_1$ e $g(L_n) = g(L_{n+1}) = \dots$ para $n \geq n_2$. Assim, para $n \geq \max\{n_1, n_2\}$, provemos que $L_k = L_{k+1}$ para $k \geq n$.

De fato, seja $x \in L_{k+1}$. Como $g(L_k) = g(L_{k+1})$, existe um $y \in L_k$ tal que $g(x) = g(y)$, ou seja, $g(x - y) = 0$ e $x - y \in N(g)$. Como $N(g) = \text{Im}(f)$ (exatidão da sequência), obtemos que existe um $z \in M_1$, tal que $f(z) = x - y$.

Agora, como $x \in L_{k+1}$ e $y \in L_k \subseteq L_{k+1}$, temos que $f(z) = x - y \in L_{k+1}$. Portanto, $z \in f^{-1}(L_{k+1})$. Logo, de $f^{-1}(L_n) = f^{-1}(L_{k+1})$, temos que $z \in f^{-1}(L_k)$, ou seja, $f(z) \in L_k$. Sendo $f(z) = x - y$ e $f(z) \in L_k$, obtemos $x - y \in L_k$. Portanto, como $y \in L_k$, segue que $x = y + (x - y) \in L_k + L_k = L_k$. Logo, da arbitrariedade que tomamos $x \in L_{k+1}$, segue que $L_{k+1} \subseteq L_k$ e como a outra inclusão já era válida pela sequência tomada, segue que para $k \geq n$ que $L_k = L_{k+1}$. $\square$

Proposição 3.1.49. Seja R um anel Noetheriano (resp. Artiniano) e M um R -módulo finitamente gerado. Então M é Noetheriano (resp. Artiniano).

Demonstração. Como M é finitamente gerado, tomemos $\{m_1, \dots, m_n\}$ elementos que geram M . Considere agora $R^n = \bigoplus_{i=1}^n R_i$, onde cada R_i é igual a R e representamos um elemento de R^n por $(r_1, \dots, r_n)$, onde $r_i \in R$.

Então definimos $\phi : R^n \rightarrow M$ dada por $\phi(r_1, \dots, r_n) = r_1.m_1 + \dots + r_n.m_n$ que está bem definida, pois $r_1.m_1 + \dots + r_n.m_n$ é um elemento de M .

Facilmente prova-se que ϕ é um homomorfismo de módulos e é sobrejetora, pois M é gerada por $\{m_1, \dots, m_n\}$ e assim, todo elemento de M pode ser escrito como combinação de elementos desse conjunto com escalares em R . Portanto, pelo Teorema do Isomorfismo temos

$$M \cong R^n / N(\phi).$$

Se provamos que R^n é Noetheriano, então M também será Noetheriano pela Proposição 3.1.44. De fato, primeiro construímos a sequência

$$0 \rightarrow R_n \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i=1}^n R_i \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{i=1}^{n-1} R_i \rightarrow 0$$

que é exata, pois α é a inclusão (injetora), β é a projeção (sobrejetora) e claramente $Im(\alpha) = N(\beta)$.

Observe que para $n = 2$ ficamos com

$$0 \rightarrow R_2 \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i=1}^2 R_i \xrightarrow{\beta} R_1 \rightarrow 0,$$

com R_1 e R_2 Noetherianos por hipótese (são iguais a R). Pela Proposição 3.1.48, temos $\bigoplus_{i=1}^2 R_i$ é Noetheriano. Pelo Processo de Indução sobre n temos o desejado. $\square$

Proposição 3.1.50. *Seja M um R -módulo. Então M possui série de composição se, e somente se, M satisfaz ambas as condições de cadeia.*

Demonstração. Se M possui série de composição, digamos de comprimento n , todas as cadeias de submódulos de M tem comprimento limitado por n . Portanto M satisfaz ambas as condições de cadeia.

Reciprocamente, vamos construir uma série de composição de M . Pela Proposição 3.1.45, como $M = M_0$ satisfaz a condição de máximo, tem um submódulo maximal $M_1 \subsetneq M_0$. Analogamente, M_1 tem um submódulo maximal $M_2 \subsetneq M_1$, e assim sucessivamente. Assim temos uma cadeia descendente em sentido estrito, que pela condição de cadeia descendente deve ser finita e, portanto, é uma série de composição de M . $\square$

Corolário 3.1.51. *Se M é um R -módulo Noetheriano e Artiniano, então $\ell(M) < \infty$.*

Demonstração. Como M é Noetheriano e Artiniano, então M satisfaz ambas as condições de cadeia (ascendente e descendente). Sendo assim, o resultado segue diretamente da Proposição 3.1.50. $\square$

Proposição 3.1.52. *Sejam M e N R -módulos de comprimento finito. Se $M \cong N$ então $\ell(M) = \ell(N)$.*

Demonstração. Sendo $M \cong N$, então existe um R -homomorfismo $\phi : M \rightarrow N$ que é bijetor. Vamos mostrar que $\ell(M) = \ell(N)$. De fato, suponha que $\ell(M) = n$ e então considere a seguinte série de composição

$$0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M.$$

Aplicando o isomorfismo em cada termo da cadeia, temos

$$0 \subsetneq \phi(M_1) \subsetneq \cdots \subsetneq \phi(M_n) = N.$$

Como ϕ é um isomorfismo, cada $\phi(M_i)$ é um submódulo de N e a inclusão $\phi(M_i) \subsetneq \phi(M_{i+1})$ é válida. Se existir algum submódulo J entre $\phi(M_i)$ e $\phi(M_{i+1})$, então $\phi^{-1}(J)$ estará entre M_i e M_{i+1} . Sendo assim, esta nova sequência é de fato uma série de composição com n elementos. Concluindo que $\ell(N) = n = \ell(M)$. $\square$

Proposição 3.1.53. *Sejam M e N R -módulos de comprimento finito com $N \subseteq M$. Então $\ell(M/N) = \ell(M) - \ell(N)$.*

Demonstração. Primeiramente, note que M e N possuem comprimento finito, então possuem série de composição. Sendo assim, M/N também possui série de composição. De fato, observe que qualquer cadeia de submódulos de M/N é do tipo

$$0 = N/N \subsetneq M_1/N \subsetneq M_2/N \subsetneq \cdots \subsetneq M_k/N = M/N, \quad (3.1)$$

portanto estas inclusões só são satisfeitas se ocorrer

$$0 \subsetneq N \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_k = M.$$

Logo, toda cadeia de submódulos de M/N do tipo da Equação (3.1) deve ser uma série de composição, pois caso contrário, obteríamos que M não teria série de composição.

Suponha que $\ell(N) = n$ e $\ell(M/N) = k$. Logo, existem sequências de composição do tipo

$$0 = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N_n = N \quad (3.2)$$

e

$$0 = Q_0 \subsetneq Q_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_k = M/N, \quad (3.3)$$

onde cada Q_i é um submódulo de M/N , ou seja, é do tipo $Q_i = M_i/N$ com $N \subseteq M_i$ e M_i submódulo de M para todo i . Observe que para $Q_0 = N/N$, ou seja, $M_0 = N$ e, portanto, conseguimos gerar uma nova cadeia

$$0 = N_0 \subsetneq N_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N_n = N = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_k = M, \quad (3.4)$$

onde as inclusões $M_j \subsetneq M_{j+1}$ advém de $Q_j \subsetneq Q_{j+1} \Leftrightarrow M_j/N \subsetneq M_{j+1}/N$. Portanto, as inclusões estão bem definidas.

Resta mostrar que não há nenhum submódulo de M entre cada dois elementos da cadeia.

Observe que isto é válido para N_j para todo j , pois a Equação (3.2) é uma série de composição.

Também é válido para os M_t para todo t . Com efeito, se houver um submódulo Z tal que $M_t \subsetneq Z \subsetneq M_{t+1}$, teríamos as seguintes inclusões

$$M_t/N \subsetneq Z/N \subsetneq M_{t+1}/N,$$

ou seja, $Q_t \subsetneq Z/N \subsetneq Q_{t+1}$, o que é um absurdo, pois a Equação (3.3) é uma série de composição.

Portanto, a cadeia da Equação (3.4) é uma série de composição. Concluindo que $\ell(M) = n + k = \ell(N) + \ell(M/N)$, ou seja, $\ell(M/N) = \ell(M) - \ell(N)$. $\square$

Observação 3.1.54. Observe que na proposição anterior a prova de M e N possuírem série de composição também é útil para excluir o caso em que $\ell(M) = \ell(N) = \infty$, resultando num absurdo ao calcular $\ell(M/N) = \ell(M) - \ell(N)$.

Com estes fatos em mente, vejamos alguns resultados para o comprimento de um módulo associado a sequências exatas. Nos resultados subsequentes os R -módulos possuem comprimento finito.

Proposição 3.1.55. Se M, N, P são R -módulos, então numa sequência exata do tipo $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$, ocorre $\ell(N) = \ell(M) + \ell(P)$.

Demonstração. Como a sequência é exata, então f é injetiva e, pelo Teorema do Isomorfismo, $M \cong M/N(f) \cong \text{Im}(f)$. Portanto, podemos ver M como submódulo de N . Como g é sobrejetora, novamente pelo Teorema do Isomorfismo, $N/N(g) \cong \text{Im}(g) = P$. Por ser uma sequência exata também temos que $\text{Im}(f) = N(g)$ e, assim, $N/M \cong P$. Pelas Proposições 3.1.52 e 3.1.53,

$$\ell(P) = \ell(N/M) = \ell(N) - \ell(M), \text{ ou seja, } \ell(N) = \ell(M) + \ell(P).$$

□

Proposição 3.1.56. *Considere uma família de R -módulos $(M_i)_{i=1}^n$ e seja*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\phi_1} M_2 \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_{n-1}} M_n \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de R -módulos. Então vale $\sum_{i=1}^n (-1)^i \ell(M_i) = 0$.

Demonstração. Como a sequência anterior é exata, então temos que $\text{Im}(\phi_{i-1}) = N(\phi_i)$. Para cada M_i , podemos criar uma nova sequência exata do tipo

$$0 \longrightarrow \text{Im}(\phi_{i-1}) \xrightarrow{i} M_i \xrightarrow{\phi_i} \text{Im}(\phi_i) \longrightarrow 0$$

que é exata trivialmente.

Portanto, pela Proposição 3.1.55, temos que $\ell(M_i) = \ell(\text{Im}(\phi_{i-1})) + \ell(\text{Im}(\phi_i))$ e a série alternada $\sum_{i=1}^n (-1)^i \ell(M_i)$ será realmente igual a 0, pois os fatores irão se cancelar. □

Proposição 3.1.57. *Se M_1 e M_2 são R -módulos, então $\ell(M_1 \oplus M_2) = \ell(M_1) + \ell(M_2)$.*

Demonstração. Basta construir a sequência

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{i} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{j} M_2 \rightarrow 0,$$

onde i é a inclusão e j a projeção. A sequência claramente é exata, pois i é injetora, j é sobrejetora e $\text{Im}(i) = N(j)$. Em seguida, basta aplicar a proposição anterior e mostramos que $\ell(M_1 \oplus M_2) = \ell(M_1) + \ell(M_2)$. □

Corolário 3.1.58. *Para uma família de R -módulos $(M_i)_{i \geq 0}$,*

$$\ell \left(\bigoplus_{i \geq 0} M_i \right) = \ell(M_0) + \dots + \ell(M_k) + \ell \left(\bigoplus_{i > k} M_i \right), \quad \forall k \geq 0.$$

Demonstração. A demonstração é feita por indução sob a quantidade de R -módulos e usa a proposição anterior em cada etapa. □

3.1.2 Dimensão e profundidade de módulos

Para finalizar esta seção, apresentamos mais dois conceitos associados a módulos, que estão relacionados com ideais do anel associado. Nos resultados finais deste trabalho, precisamos de módulos onde estes conceitos coincidam.

Definição 3.1.59. *Dizemos que a **dimensão de Krull**, ou simplesmente a **dimensão**, de um anel R , denotado por $\dim R$, é o supremo dos comprimentos de todas as cadeias estritamente decrescentes de ideais primos de R .*

Exemplo 3.1.60. A dimensão de Krull de corpos é igual a zero. De fato, basta notar que os únicos ideais de um corpo K são $\{0\}$ e K . Logo, não há ideais próprios, concluindo que $\dim K = 0$.

Exemplo 3.1.61. Sejam R um anel Noetheriano e $x_1, \dots, x_n$ indeterminadas sobre R . Então $\dim R[x_1, \dots, x_n] = \dim R\{x_1, \dots, x_n\} = \dim R + n$, cuja a justificativa pode ser vista em [9, Teorema 15.4].

Para estender este conceito para o caso de um R -módulo, precisamos de um conjunto especial de R .

Definição 3.1.62. Seja M um R -módulo. Dizemos que um elemento $r \in R$ é **divisor de zero** em M se existe um elemento $m \in M$, $m \neq 0_R$ (elemento neutro para a primeira operação de R) tal que $rm = 0$.

Definimos o **anulador** de M , denotado por $\text{ann}(M)$, sendo o conjunto de todos os divisores de zero em M , ou seja, $\text{ann}(M) = \{r \in R \mid r \cdot m = 0_R, \forall m \in M\}$.

Observação 3.1.63. Note que sendo M um R -módulo, então $\text{ann}(M)$ é um ideal.

Claramente $0_R \in \text{ann}(M)$, pois $0_R \cdot m = 0_R, \forall m \in M$.

Se $a, b \in \text{ann}(M)$, então $a \cdot m = 0_R$ e $b \cdot m = 0_R$ para todo $m \in M$. Logo, $(a - b) \cdot m = a \cdot m - b \cdot m = 0_R - 0_R = 0_R$ para todo $m \in M$. Sendo assim, $\text{ann}(M)$ é um subgrupo aditivo de R .

Seja $r \in R$ e $a \in \text{ann}(M)$, então $a \cdot m = 0_R, \forall m \in M$. Então $(r \cdot a) \cdot m = r \cdot (a \cdot m) = r \cdot (0_R) = 0_R$. Sendo assim, $r \cdot a \in \text{ann}(M)$. Logo, $\text{ann}(M)$ é um ideal de R .

Definição 3.1.64. Seja M um R -módulo. Definimos a **dimensão de Krull** do módulo de M como sendo a dimensão de Krull do anel $R/\text{ann}(M)$ e denotamos por $\dim M$, ou seja, $\dim M := \dim(R/\text{ann}(M))$.

Observação 3.1.65. Note que se dois anéis são isomorfos, então eles têm a mesma dimensão de Krull. O mesmo ocorre para R -módulos isomorfos. Se dois R -módulos M_1, M_2 são isomorfos, então $\text{ann}(M_1) = \text{ann}(M_2)$. Assim, M_1 e M_2 tem a mesma dimensão de Krull.

Exemplo 3.1.66. Do Exemplo 3.1.43 vimos que $\mathcal{O}_n$ e $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ são isomorfos. Portanto, vamos obter a dimensão de $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ e, com isso, obter a dimensão de $\mathcal{O}_n$.

Do Exemplo 3.1.40 podemos observar que $\mathbb{C}$ é Noetheriano. Logo, do Exemplo 3.1.61, obtemos que $\dim \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\} = \dim \mathbb{C} + n$. Sendo assim, do Exemplo 3.1.60, concluímos que $\dim \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\} = n$.

Aproveitamos este momento para definir a dimensão de uma variedade analítica e um conceito associado (Subseção 2.2.3).

Definição 3.1.67. Seja X uma variedade analítica em $\mathbb{C}^n$. A dimensão de X , denotada por $\dim X$, é a dimensão de Krull do anel quociente $\frac{\mathcal{O}_n}{I(X)}$. Se $W \subset X$ é uma subvariedade analítica em $x \in X$, a dimensão de W , denotada por $\dim W$, é a dimensão de Krull do anel quociente $\frac{\mathcal{O}_{X,x}}{I(W)}$.

Definição 3.1.68. Seja X uma variedade analítica em $\mathbb{C}^n$ de dimensão k . Dizemos que X é uma **intersecção completa** se o número (mínimo) de geradores de $I(X)$ é a codimensão de X , ou seja, $n - \dim X$.

Observação 3.1.69. Note que se J é um ideal primo, então $X = V(J)$ é uma variedade analítica (Proposição 2.2.29). Além disso, J é ideal radical e

$$\dim V(J) = \dim \frac{\mathcal{O}_n}{I(V(J))} = \dim \frac{\mathcal{O}_n}{J},$$

onde a última igualdade vem da Observação 2.2.26. Neste caso é comum dizer que o ideal I define uma intersecção completa ou que $\frac{\mathcal{O}_n}{I}$ é uma intersecção completa.

O conceito de dimensão de um anel estabelece uma relação com anéis Noetherianos e Artinianos, cuja demonstração será omitida.

Teorema 3.1.70. Seja R um anel comutativo com unidade, então R é Artiniano se, e somente se, R é Noetheriano e $\dim R = 0$.

Demonstração. Pode ser vista em [8, Teorema 8.5]. □

No que segue, definimos a altura e o grau de um ideal.

Definição 3.1.71. Para um ideal primo P de R , definimos a **altura** de P , denotado por $ht(P)$, como o supremo dos comprimentos das cadeias decrescentes do tipo

$$P = P_0 \supset P_1 \supset \dots \supset P_r,$$

onde P_k são ideais primos de R .

Definição 3.1.72. Para I um ideal qualquer de R definimos a altura de I sendo o ínfimo das alturas dos ideais primos que contém I , ou seja,

$$ht(I) = \inf\{ht(P) \mid I \subset P \text{ e } P \text{ é primo}\}.$$

Observação 3.1.73. Com esta definição, podemos ver uma definição equivalente de dimensão de Krull de um anel R :

$$\dim R = \sup\{ht(P) \mid P \text{ primo de } R\}.$$

Proposição 3.1.74. Para I um ideal primo de R , vale que $ht(I) + \dim R/I \leq \dim R$.

Demonstração. Suponha que $ht(I) = n$, então, existe uma cadeia de ideais primos

$$I = P'_0 \supset P'_1 \supset \dots \supset P'_n.$$

Agora, $\dim R/I$ é o supremo dos comprimentos das cadeias do tipo

$$Q_0 \supset Q_1 \supset \dots \supset Q_r,$$

onde cada Q_i pode ser visto como P_i/I , com P_i ideal primo de R tal que $I \subset P_i$. Então

$$\frac{P_0}{I} \supset \frac{P_1}{I} \supset \dots \supset \frac{P_r}{I} \Leftrightarrow P_0 \supset P_1 \supset \dots \supset P_r \supset I.$$

Então, geramos a seguinte cadeia de ideais primos

$$P_0 \supset P_1 \supset \dots \supset P_r \supset I \supset P'_1 \supset \dots \supset P'_n,$$

onde seu comprimento deve ser menor ou igual a $\dim R$. Portanto,

$$ht(I) + \dim R/I \leq \dim R.$$

□

No que segue, I é um ideal próprio de R .

Definição 3.1.75. O **grau** de I é o maior valor de k para o qual existem elementos $a_1, a_2, \dots, a_k$ de I tendo a propriedade que

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_{i-1} \rangle : a_i = \langle a_1, \dots, a_{i-1} \rangle, \quad 1 \leq i \leq k,$$

onde $\langle a_1, a_2, \dots, a_{i-1} \rangle : a_i = \{r \in R \mid r \cdot a_i \in \langle a_1, a_2, \dots, a_{i-1} \rangle\}$.

Observação 3.1.76. Observe que se temos um ideal I de R tal que $\text{grau}(I) = k$, então por definição temos que $\{0\} : a_1 = \{0\}$, ou seja, $\{r \in R \mid r \cdot a_1 \in \{0\}\} = \{0\}$. Então, se a_1 for divisor de 0 em R , existe um $r' \neq 0$ tal que $a_1 \cdot r' = 0$, o que é um absurdo, pois se isso ocorrer, $r' \in \{r \in R \mid r \cdot a_1 \in \{0\}\} = \{0\}$, mas r' foi tomado diferente de 0. Então a_1 não pode ser divisor de 0 em R .

Ademais, temos que $\langle a_1 \rangle : a_2 = \langle a_1 \rangle$, ou seja, $\{r \in R \mid r \cdot a_2 \in \langle a_1 \rangle\} = \langle a_1 \rangle$. Então, se a_2 for divisor de 0 em $\frac{R}{\langle a_1 \rangle}$ deveria existir $r' + \langle a_1 \rangle \in \frac{R}{\langle a_1 \rangle}$ tal que $a_2 \cdot (r' + \langle a_1 \rangle) = \langle a_1 \rangle$, ou seja, $r' \cdot a_2 + \langle a_1 \rangle = \langle a_1 \rangle$. Portanto, $r' \in \{r \in R \mid r \cdot a_2 \in \langle a_1 \rangle\} = \langle a_1 \rangle$. Logo, temos um absurdo, pois $r' + \langle a_1 \rangle$ é tomado em $\frac{R}{\langle a_1 \rangle}$. Sendo assim, a_2 não é divisor de zero em $\frac{R}{\langle a_1 \rangle}$.

Seguindo analogamente, prova-se que a_{i+1} não é divisor de zero em $\frac{R}{\langle a_1, \dots, a_i \rangle}$.

Introduzimos agora um tipo de especial de sequência de um ideal. Esta por sua vez, ajuda a relacionar os conceitos de grau e a altura de um ideal. Além disso, este conceito é de suma importância para a obtenção do último conceito relacionado a módulos, importante na construção de uma classe importante de módulos.

Definição 3.1.77. Sejam M um R -módulo e I um ideal de R . Uma sequência $\{x_1, \dots, x_n\}$ contida em R é uma **M -sequência** se x_1 não é divisor de zero em M e x_i não é divisor de zero em

$$M / \langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle M, \quad \forall i = 2, \dots, n.$$

Dizemos que uma M -sequência $\{x_1, \dots, x_n\}$ de I é **maximal** quando $x_1, \dots, x_n, x$ não é uma M -sequência, para todo $x \in I$.

Observação 3.1.78. Note que um ideal I pode ou não possuir uma R -sequência. Para o caso de I não possuir uma R -sequência, devemos ter que todo elemento de I é divisor de zero em R .

Exemplo 3.1.79. Sejam $M = R = \mathbb{C}[x, y]$ e $I = \langle x, y \rangle$, ideal de R .

Mostremos que a sequência $\{x, y\}$ contida em I é R -sequência.

De fato, note que x não é divisor de zero em R , pois R é domínio.

Além disso, y não é divisor de zero em $R/\langle x \rangle$, pois $R/\langle x \rangle$ é domínio já que $\langle x \rangle$ é primo.

Ainda, note que uma R -sequência ser maximal, deve ocorrer que $\{x, y, f\}$ não pode ser uma sequência R -sequência para todo $f \in I$ ($f = ax + by$).

Note que para $r + \langle x, y \rangle \in R/\langle x, y \rangle$ temos que $f \cdot (r + \langle x, y \rangle) = (ax + by) \cdot r + \langle x, y \rangle = (r \cdot a)x + (r \cdot b)y + \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle$. Concluindo que a sequência $\{x, y, f\}$ não é R -sequência para todo $f \in I$ e, portanto, $\{x, y\}$ é R -sequência maximal.

Na sequência, enunciamos dois resultados sobre sequências regulares que são essenciais para a continuidade da teoria.

Proposição 3.1.80. *Seja M um R -módulo com R Noetheriano. Então toda M -sequência maximal de I tem o mesmo número de elementos.*

Demonstração. Pode ser vista em [9, Teorema 16.7]. $\square$

Proposição 3.1.81. *Seja R um anel Noetheriano e $\{a_1, \dots, a_r\}$ uma R -sequência, então $ht(I) = r$, onde $I = \langle a_1, \dots, a_r \rangle$.*

Demonstração. Pode ser vista em [9, Teorema 13.5 e p. 132]. $\square$

Observação 3.1.82. *Seja I um ideal próprio de R , então se $\text{grau}(I) = k$, existe uma R -sequência $\{x_1, \dots, x_k\}$ em I .*

De fato, note que se $\text{grau}(I) = k$, existem $x_1, \dots, x_k$ elementos em I que satisfazem que

$$\langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle : x_i = \langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle,$$

ou seja, x_i não é divisor de zero em $R/\langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle$ (Observação 3.1.76). Então o resultado vale por definição.

Lema 3.1. *Seja R um anel Noetheriano. Então $ht(I) \geq \text{grau}(I)$, para todo I .*

Demonstração. Suponha inicialmente que $\text{grau}(I) = s$. Note que para toda R -sequência $a_1, \dots, a_r$ de I , da Proposição 3.1.81 obtemos que $ht(a_1, \dots, a_r) = r$. Portanto, temos que $r = ht(a_1, \dots, a_r) \leq ht(I)$, pois a R -sequência é de I . Assim, do fato de $\text{grau}(I) = s$ e da Observação 3.1.82, obtemos que existirá uma R -sequência $\{b_1, \dots, b_s\}$. Logo, do que foi feito, obtemos que

$$\text{grau}(I) = s = ht(b_1, \dots, b_s) \leq ht(I).$$

$\square$

Por fim, com este tipo especial de sequência de um ideal em mente, damos início ao processo de exibição da nova classe de anéis.

Definição 3.1.83. *Sejam R um anel Noetheriano e M um R -módulo. Chamamos de **profundidade de I em M** , denotada por $\text{depth}(I, M)$, o número de elementos de uma M -sequência maximal de I .*

*Além disso, se R for um anel local (ou seja, possui um único ideal maximal $\mathfrak{m}$) e $I = \mathfrak{m}$, então denotamos $\text{depth}(\mathfrak{m}, M)$ por $\text{depth}(M)$ e será chamado simplesmente **profundidade de M** . Se $M = R$, escrevemos simplesmente $\text{depth}(I)$.*

Observação 3.1.84. *Prova-se ainda que sendo $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e $M \neq 0$ um R -módulo finitamente gerado. Se $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathfrak{m}$ é uma M -sequência, então vale que $\dim\left(\frac{M}{\langle x_1, \dots, x_n \rangle M}\right) = \dim(M) - n$, que pode ser vista [9, 16.1, p. 132].*

Deste fato, decorre o seguinte resultado.

Proposição 3.1.85. *Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local Noetheriano e $M \neq 0$ um R -módulo finitamente gerado. Então $\text{depth } M \leq \dim M$.*

Demonstração. Seja $n = \text{depth}(M)$. Se $n = 0$, como $\dim(M) \geq 0$, vale o resultado. Suponha $n \neq 0$. Então, existe uma M -sequência maximal $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathfrak{m}$. Pela observação anterior, $\dim\left(\frac{M}{\langle x_1, \dots, x_n \rangle M}\right) = \dim(M) - n$. Como $\dim\left(\frac{M}{\langle x_1, \dots, x_n \rangle M}\right) \geq 0$, então $\dim(M) - n \geq 0$, ou seja, $\dim(M) \geq n$. $\square$

Definição 3.1.86. *Sejam R um anel Noetheriano local e M um R -módulo. Dizemos que M é **Cohen-Macaulay** quando $\text{depth } M = \dim M$ ou $M = 0$. Em particular, R é um **anel Cohen-Macaulay** quando R é um módulo Cohen-Macaulay sobre si mesmo.*

Exemplo 3.1.87. *Seja K um corpo, então é Cohen-Macaulay, pois $\dim K = 0$ (Exemplo 3.1.60) e como $0 \leq \text{depth } M \leq \dim M = 0$ para todo M , segue que $\text{depth } K = \dim K = 0$. Logo, K é Cohen-Macaulay.*

Exemplo 3.1.88. *Se R é um anel Cohen-Macaulay, então $R[x_1, \dots, x_n]$ e $R\{x_1, \dots, x_n\}$ são anéis Cohen-Macaulay, que pode ser visto em [9, Teorema 17.7 e Observação, p. 137].*

Para finalizar, dois resultados importantes onde R é um anel local Cohen-Macaulay.

Teorema 3.1.89. *Para um ideal próprio I de R ,*

$$ht(I) = \text{depth}(I, R) = \text{grau}(I) \text{ e } ht(I) + \dim R/I = \dim R.$$

Demonstração. Pode ser vista em [9, Teorema 17.4, p. 135]. $\square$

Teorema 3.1.90. *Se R é uma interseção completa, então R é Cohen-Macaulay.*

Demonstração. Pode ser vista em [9, p. 171]. $\square$

Exemplo 3.1.91. *Observe que $\mathbb{C}$ é Cohen-Macaulay, pois é um corpo (Exemplo 3.1.87), então $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ é Cohen-Macaulay (Exemplo 3.1.88). Logo, $\mathcal{O}_n$ é Cohen-Macaulay, pois é isomorfo a $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$.*

3.2 SÉRIE DE HILBERT

Nesta seção $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ é um anel graduado Noetheriano com R_0 Artiniano e $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ é um R -módulo graduado finitamente gerado.

Neste contexto apresentamos uma ferramenta muito importante, que é uma série associada a esta graduação.

Esta é uma teoria muito vasta, onde nesta seção, exploramos somente a fim de obter os objetos necessários para o caso que precisamos no último capítulo.

Definição 3.2.1. *A **série de Hilbert** de M é definida como*

$$P(M, t) := \sum_{n=0}^{\infty} \ell(M_n) t^n,$$

onde $\ell(M_n)$ denota o comprimento de cada M_n como R_0 -módulo (Definição 3.1.33).

Proposição 3.2.2. *Nas condições da definição anterior, vale que $\ell(M_n) < \infty$.*

Demonstração. Primeiramente note que M é um R -módulo finitamente gerado, com R Noetheriano. Logo, M é Noetheriano também (Proposição 3.1.49). Sendo assim, da Proposição 3.1.46 obtemos que M_n é finitamente gerado, para todo $n \geq 0$.

Como cada M_n é um R_0 -módulo (Proposição 3.1.20), sendo R_0 é Artiniano, então M_n é Artiniano (Proposição 3.1.49), para todo $n \geq 0$.

Além disso, do Teorema 3.1.70, temos que do fato de R_0 ser Artiniano, temos que R_0 também é Noetheriano. Portanto, novamente da Proposição 3.1.49, segue que M_n é Noetheriano, para todo $n \geq 0$.

Logo, M_n é Noetheriano e Artiniano, e assim, do Corolário 3.1.51 que $\ell(M_n) < \infty$, para todo $n \geq 0$. $\square$

Exemplo 3.2.3. Consideremos $R = K[x_1, \dots, x_s]$, com K corpo, mas diferente do Exemplo 3.1.37, vamos considerar as variáveis $x_1, \dots, x_s$ com pesos, modificando a graduação, ou seja, os G_n , $n \geq 0$. Indutivamente no número de variáveis (em s), descrevemos G_n e, com isso, a série de Hilbert associada.

- Seja $R = K[x]$ com x de grau 1. Então G_n é o conjunto de todos os monômios do tipo $\alpha x^{a_1 \cdot 1}$ tal que $\alpha \in K$ e $a_1 \cdot 1 = n$, ou seja, $a_1 = n$. Portanto, para cada n , há apenas 1 tipo de monômio. Logo, $\ell(G_n) = 1, \forall n$. Assim,

$$P(R, t) = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots = \frac{1}{1 - t}.$$

Seja $R = K[x]$ com x de grau 2. Então G_n é o conjunto de todos os monômios do tipo $\alpha x^{a_1 \cdot 2}$ tal que $\alpha \in K$ e $a_1 \cdot 2 = n$, ou seja, $2a_1 = n$. Portanto, para cada n , há apenas 1 tipo de monômio. Logo, $\ell(G_n) = 1, \forall n$.

Note ainda que G_n é vazio para n ímpar, pois não existe monômio de grau n , com n ímpar, que satisfaça $2a_1 = n$.

Logo,

$$P(R, t) = 1 + t^2 + t^4 + t^6 + \dots = 1 + (t^2)^1 + (t^2)^2 + (t^2)^3 + \dots = \frac{1}{1 - t^2}.$$

Analogamente, para $R = K[x_i]$ com x_i de grau w_i , temos

$$P(R, t) = 1 + t^{w_1} + (t^{w_1})^2 + (t^{w_1})^3 + \dots = \frac{1}{1 - t^{w_1}}.$$

- Para $R = K[x, y]$ com x de grau w_1 e y de grau w_2 . Os monômios de $K[x, y]$ são do tipo $\alpha(x^{w_1 \cdot a_1} \cdot y^{w_2 \cdot a_2})$. Portanto, $\ell(G_n)$ é o número de tipos de monômios $\alpha(x^{w_1 \cdot a_1} \cdot y^{w_2 \cdot a_2})$ tal que $w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 = n$.

Por outro lado, considere o produto $(1 + t^{w_1} + t^{2w_1} + \dots)(1 + t^{w_2} + t^{2w_2} + \dots)$. Para cada índice n , o coeficiente que acompanha o termo t^n nesse produto é a soma das possibilidades de multiplicação de termos de cada fator dando t^n , ou seja, a quantidade de pares (a_1, a_2) tais que $w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 = n$.

$$\begin{aligned} P(R, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \ell(G_n) t^n \\ &= (1 + t^{w_1} + t^{2w_1} + \dots)(1 + t^{w_2} + t^{2w_2} + \dots) = \left(\frac{1}{1 - t^{w_1}} \right) \left(\frac{1}{1 - t^{w_2}} \right) \end{aligned}$$

Por exemplo, considere $n = 4$, $w_1 = 1$ e $w_2 = 2$. As combinações possíveis tais que $1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 = 4$ são $(a_1, a_2) = (4, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 2)$. Logo, são 3 tipos em G_4 , x^4 , x^2y , y^2 . Considerando o produto temos

$$1 + t + 2t^2 + 2t^3 + 3t^4 + \dots = (1 + t + t^2 + t^3 + \dots)(1 + t^2 + t^4 + t^6 + \dots).$$

Generalizando, se $R = K[x_1, \dots, x_s]$ com x_i de grau w_i . Então,

$$P(R, t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^s (1 - t^{w_i})}.$$

É muito comum denotarmos, para $\lambda \in \mathbb{N}$, por $M[\lambda]$ o mesmo módulo M , mas com sua graduação deslocada por λ , isto é, $M[\lambda]_n = M_{n-\lambda}$. O próximo resultado mostra a relação da graduação na série de Hilbert associada.

Proposição 3.2.4. *Seja $M[\lambda]$ a nova graduação de M vista anteriormente. Então*

$$P(M[\lambda], t) = t^\lambda \cdot P(M, t).$$

Demonstração. Note que ocorre

$$M_{n-\lambda} = \begin{cases} \nexists & \text{se } n - \lambda < 0 \\ M_0 & \text{se } n - \lambda = 0 \\ M_1 & \text{se } n - \lambda = 1 \\ \vdots & \vdots \end{cases}.$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} P(M[\lambda], t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \ell(M[\lambda]_n) \cdot t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \ell(M_{n-\lambda}) \cdot t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \ell(M_{n-\lambda}) \cdot t^{n-\lambda+\lambda} = \\ &= t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \ell(M_{n-\lambda}) \cdot t^{n-\lambda} = t^\lambda \sum_{n-\lambda=0}^{\infty} \ell(M_{n-\lambda}) \cdot t^{n-\lambda} = t^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \ell(M_n) \cdot t^n = t^\lambda P(M, t). \end{aligned}$$

□

O próximo resultado melhora a expressão deste conceito para um anel dos polinômios com coeficientes em um anel Artiniano.

Teorema 3.2.5. *Se $R = R_0[x_1, \dots, x_r]$ com x_i de grau d_i , então $P(M, t)$ é uma função racional de t e pode ser escrita na forma*

$$P(M, t) = f(t) / \prod_{i=1}^r (1 - t^{d_i}),$$

onde $f(t)$ é um polinômio com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

Demonstração. A prova é feita por indução em r , que é o número de geradores de R .

Quando $r = 0$ temos $R = R_0$ e assim R é Artiniano (também Noetheriano). Logo, da Proposição 3.1.49, M é Artiniano e Noetheriano e assim, a Proposição 3.1.50 garante que $\ell(M) < \infty$. Suponha $\ell(M) = k$.

Não podemos ter mais de k elementos não nulos na graduação $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ pois, caso contrário, do Corolário 3.1.58, teríamos que $\ell(M) > k$, pois para todo N submódulo de M temos $\ell(N) \geq 1$. Logo, $\ell(M_n) \neq 0$ somente para uma quantidade finita de M_n e assim, por definição, $P(M, t)$ é polinomial.

Quando $r > 0$, a multiplicação por x_r define uma R_0 aplicação linear $M_n \xrightarrow{x_r} M_{n+d_r}$. Escrevendo K_n e L_{n+d_r} para o núcleo e o conúcleo desta aplicação respectivamente, obtemos uma sequência exata

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow M_n \xrightarrow{x_r} M_{n+d_r} \rightarrow L_{n+d_r} \rightarrow 0$$

Defina $K = \bigoplus_{n \geq 0} K_n$ e $L = \bigoplus_{n \geq 0} L_n$. Então K é um submódulo de M e como M é Noetheriano, segue que K é finitamente gerado (Proposição 3.1.46).

Ainda, provamos que $L \cong M/x_r M$

Sendo $L_n = \frac{M_n}{x_r M_n}$ e $\bigoplus_{n \geq 0} L_n = \bigoplus_{n \geq 0} \frac{M_n}{x_r M_n}$, provamos que existe um isomorfismo entre $\bigoplus_{n \geq 0} L_n$ e $\frac{M}{x_r M}$ dado por

$$\alpha : \begin{array}{ccc} \bigoplus_{n \geq 0} L_n & \rightarrow & \frac{M}{x_r M} \\ (m_n + x_r M_n)_{n \geq 0} & \mapsto & \sum_{n \geq 0} m_n + x_r M_n \end{array},$$

Provemos os seguintes fatos:

- α está bem definida, pois se $(m_n + x_r M_n)_{n \geq 0} = (m'_n + x_r M_n)_{n \geq 0}$, então $\sum_{n \geq 0} m_n - \sum_{n \geq 0} m'_n \in x_r M$, ou seja, $\sum_{n \geq 0} m_n + x_r M_n = \sum_{n \geq 0} m'_n + x_r M_n$.
- α é claramente sobrejetora.
- α é injetora, pois se um elemento $\sum_{n \geq 0} m_n \in x_r M$, então $m_n \in x_r M_n$ para todo n ,

ou seja, é o elemento neutro em L_n .

De $L \cong M/x_r M$, podemos ver L como quociente de M e assim é finitamente gerado. Da exatidão da sequência e da Proposição 3.1.56 segue que

$$\ell(K_n) - \ell(M_n) + \ell(M_{n+d_r}) - \ell(L_{n+d_r}) = 0.$$

Multiplicando por t^{n+d_r} e fazendo o somatório, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ell(K_n) t^{n+d_r} - \sum_{n=0}^{\infty} \ell(M_n) t^{n+d_r} + \sum_{n=0}^{\infty} \ell(M_{n+d_r}) t^{n+d_r} - \sum_{n=0}^{\infty} \ell(L_{n+d_r}) t^{n+d_r} = 0,$$

ou seja, obtemos

$$t^{d_r} P(K, t) - t^{d_r} P(M, t) + P(M, t) - P(L, t) = 0,$$

que rearranjando ficamos com

$$P(M, t) \cdot (1 - t^{d_r}) = P(L, t) - t^{d_r} P(K, t)$$

e por fim

$$P(M, t) = \frac{P(L, t) - t^{d_r} P(K, t)}{1 - t^{d_r}}. \quad (3.5)$$

Note que dado $l \in L = M/x_r M$, ele é da forma $l = m + x_r M$. Logo,

$$x_r.l = x_r.(m + x_r M) = x_r.m + x_r M = x_r M,$$

concluindo que $x_r L = 0$.

Ademais, como K_n é o núcleo da aplicação x_r , então $x_r K = 0$.

Isto garante que L e K (que são $R_0[x_1, \dots, x_r]$ -módulos), podem ser vistos como $R_0[x_1, \dots, x_{r-1}]$ -módulos. Sendo assim, pela hipótese de indução em L e K , temos

$$P(L, t) = \frac{h(t)}{\prod_{i=1}^{r-1} (1 - t^{d_i})}, \quad P(K, t) = \frac{w(t)}{\prod_{i=1}^{r-1} (1 - t^{d_i})},$$

com $h(t)$ e $w(t)$ polinomiais.

Retornando na Equação 3.5 obtemos

$$\frac{h(t) - t^{d_r} w(t)}{(1 - t^{d_r}) \prod_{i=1}^{r-1} (1 - t^{d_i})} = \frac{f(t)}{\prod_{i=1}^r (1 - t^{d_i})},$$

onde $f(t) = h(t) - t^{d_r} w(t)$, que é polinomial, como desejado. $\square$

Corolário 3.2.6. *Nas condições anteriores, se $d_1 = \dots = d_r = 1$, então*

$$P(M, t) = f(t)(1 - t)^{-r}.$$

Notação: Se $f(t)$ tem $(1 - t)$ como um fator, fazendo o cancelamento, escrevemos

$$P(M, t) = f(t)(1 - t)^{-d}, \quad 0 \leq d \leq r.$$

e denotamos $d = d(M)$.

Proposição 3.2.7. *Nas condições do Corolário 3.2.6, se R é semilocal (possui uma quantidade finita de ideais maximais) vale que $d(M) = \dim M$.*

Demonstração. Pode ser vista em [9, Teorema 13.4]. $\square$

Observação 3.2.8. *Note que sendo $(1 - t)^{-1} = 1 + t + t^2 + \dots$ e calculando a derivada repetidamente d vezes de ambos os lados, obtemos*

$$(1 - t)^{-d} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n-1}{d-1} t^n. \quad (3.6)$$

Se $f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_s t^s$, então do que fizemos, segue que

$$\begin{aligned} P(M, t) &= f(t) \cdot (1 - t)^{-d} = (a_0 + a_1 t + \dots + a_s t^s) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d+n-1}{d-1} t^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_0 \binom{d+n-1}{d-1} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_1 \binom{d+n-2}{d-1} t^n + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} a_s \binom{d+n-s-1}{d-1} t^n. \end{aligned}$$

Como $P(M, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell(M_n) t^n$, comparando com a descrição anterior obtemos

$$\ell(M_n) = a_0 \binom{d+n-1}{d-1} + a_1 \binom{d+n-2}{d-1} + \cdots + a_s \binom{d+n-s-1}{d-1}, \quad (3.7)$$

onde $\binom{m}{d-1} = 0$ para $m < d-1$.

Além disso, o lado direito da Equação (3.7) pode ser reorganizado da seguinte forma

$$\begin{aligned} & a_0 \binom{d+n-1}{d-1} + a_1 \binom{d+n-2}{d-1} + \cdots + a_s \binom{d+n-s-1}{d-1} \\ &= a_0 \frac{(d+n-1)!}{((d+n-1)-(d-1))!(d-1)!} + \cdots + a_s \frac{(d+n-s-1)!}{((d+n-s-1)-(d-1))!(d-1)!} \\ &= a_0 \frac{(d+n-1) \cdots (d+n-(d-1))}{(d-1)!} + \cdots + a_s \frac{(d+n-s-1) \cdots (d+n-s-(d-1))}{(d-1)!} \\ &= \frac{(a_0 + \cdots + a_s)}{(d-1)!} n^{(d-1)} + (\text{termos de grau menor}) \\ &= \frac{f(1)}{(d-1)!} n^{(d-1)} + (\text{termos de grau menor}). \end{aligned}$$

Portanto, para $d+n-s-1 \geq d-1$, ou seja, $n \geq s$, temos que

$$\ell(M_n) = \frac{f(1)}{(d-1)!} n^{d-1} + (\text{termos de grau menor}).$$

O próximo resultado nos garante que quando estamos com um anel graduado $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ com R_0 Artiniano, podemos aplicar o Teorema 3.2.5.

Proposição 3.2.9. *Sendo $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ um anel graduado Noetheriano com R_0 Artiniano, então $R_+ = \bigoplus_{n \geq 1} R_n$ é um ideal homogêneo, R_+ é gerado por elementos $\zeta_1, \dots, \zeta_s$, onde cada ζ_i é homogêneo de grau d_i , e além disso, $R = R_0[\zeta_1, \dots, \zeta_s]$.*

Demonstração. Provemos que R_+ é um ideal homogêneo de R .

Observe que da Proposição 3.1.16 todo R_n é um R_0 -módulo. Portanto, R_+ também será um R_0 -módulo de maneira natural.

Como por hipótese R_0 é Artiniano, segue que é também Noetheriano e da Proposição 3.1.49 obtemos que R_+ é um R_0 -módulo Noetheriano e Artiniano. Logo, do Corolário 3.1.51, $\ell(R_+)$ é finito.

Portanto, R_+ deve possuir apenas uma quantidade finita de elementos (suponha que seja N) em sua graduação.

Sendo assim, $R_+ = \bigoplus_{n=1}^N R_n$ e como $R = R_0 \oplus R_+$, devemos ter uma quantidade finita de elementos na graduação de R também.

Tomando $r = r_0 + r_1 + \cdots + r_N \in R$ e $r^+ = r_1^+ + \cdots + r_N^+ \in R_+$. Claramente, $r \cdot r^+ \in R_+$, concluindo que R_+ é fechado para a multiplicação de R (produto direto).

Obviamente todo elemento $r^+ \in R_+$ está contido em R e as propriedades para ser ideal de R decorrem facilmente.

Por fim, ainda temos que todo elemento de R_+ é escrito como $r^+ = r_1^+ + \cdots + r_N^+$, onde cada elemento $r_n^+ \in R_n$, concluindo que R_+ é homogêneo.

Como R é um anel Noetheriano, todo ideal é finitamente gerado (Proposição 3.1.46), digamos que R_+ seja gerado por $\zeta_1, \dots, \zeta_s$, que então serão homogêneos, pois R_+ é um ideal homogêneo.

Sendo $R = R_0 \oplus R_+$ e $R_+ = \langle \zeta_1, \dots, \zeta_s \rangle$, então $R = R_0 \oplus \langle \zeta_1, \dots, \zeta_s \rangle$. Aqui, $\langle \zeta_1, \dots, \zeta_s \rangle$ pode ser visto como um R_0 -módulo, pois cada R_n é um R_0 -módulo. Logo, R_+ pode ser visto como um R_0 -módulo. Concluindo, se tomamos um elemento qualquer $r \in R$, pela igualdade anterior, podemos dividir $r = r_0 + r_+$, onde $r_0 \in R_0$ e $r_+ \in R_+ = \langle \zeta_1, \dots, \zeta_s \rangle$, portanto, claramente $r \in R_0[\zeta_1, \dots, \zeta_s]$. A outra inclusão é direta, pois são todos submódulos de R .

Sendo assim, para $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ um anel graduado, com R_0 Artiniano e $R_+ = \bigoplus_{n > 0} R_n$ um ideal gerado por $\zeta_1, \dots, \zeta_s$, onde cada ζ_i é homogêneo de grau d_i , escrevemos $R = R_0[\zeta_1, \dots, \zeta_s]$. $\square$

Observação 3.2.10. *Portanto, dado R um anel graduado Noetheriano com R_0 Artiniano, sempre podemos aplicar o Teorema 3.2.5 e o Corolário 3.2.6 para exibir a série de Hilbert de um módulo sobre R de maneira mais simples.*

No que segue, descrevemos a série de Hilbert de um anel especial, o anel quociente $R/I_m(U)$, onde U é uma matriz $n \times m$, $n \geq m$, com entradas homogêneas no anel graduado $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$, onde $I_k(U)$ é o ideal gerado pelos menores $k \times k$ da matriz U onde o $k = 1, \dots, m$.

Iniciamos com resultados que caracterizam este anel, buscando que este quociente esteja nas condições para a definição da série de Hilbert associada.

Lema 3.2. *Seja $U = (u_{ij})$ uma matriz $n \times m$ com entradas em R e $n \geq m$, onde cada u_{ij} é homogêneo de grau d_{ij} . Se*

$$d_{ij} + d_{kl} = d_{il} + d_{kj}, \forall i, j, k, l, \quad (3.8)$$

então todos os $I_k(U)$ são homogêneos.

Demonstração. Note primeiramente que quando temos um $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ um anel graduado, ao tomar $x \in R_k$ e $y \in R_j$ dois elementos homogêneos de R , não necessariamente $x + y$ é homogêneo, porém, se x e y forem de mesmo grau, então garantimos que sua soma é homogênea. Ademais, se tomamos x, y , temos que xy será de grau $k + j$.

Por outro lado, ao calcular o determinante de uma submatriz de $U = (u_{ij})$ com cada u_{ij} de grau d_{ij} , sempre podemos decompor em somas que dependem de determinantes de matrizes menores (Laplace), e com um número finito de passos, terminamos os cálculos numa soma de determinantes de matrizes 2×2 , onde estes determinantes são da forma

$$(u_{ij} \cdot u_{kl} - u_{il} \cdot u_{kj}), \forall i, j, k, l,$$

onde $u_{ij} \cdot u_{kl}$ possui grau $d_{ij} + d_{kl}$ e $u_{il} \cdot u_{kj}$ possui grau $d_{il} + d_{kj}$. Portanto, a condição $d_{ij} + d_{kl} = d_{il} + d_{kj}, \forall i, j, k, l$ garante que sempre temos menores de ordem k de U homogêneos, pois o determinante das submatrizes de ordem k são uma soma de elementos homogêneos, que podem ser de mesmo grau ou não. Logo, $I_k(U)$ é homogêneo (Definição 3.1.21). $\square$

Proposição 3.2.11. *O anel quociente $R_k(U) = R/I_k(U)$ é um R -módulo graduado finitamente gerado.*

Demonstração. Observe que aqui, $I_k(U)$ é um ideal, mas pode ser visto como R -módulo (Exemplo 3.1.3). Então, trivialmente podemos gerar em $R_k(U)$ uma estrutura de R -módulo. Ainda, $I_k(U)$ tem finitos geradores e assim, o quociente $R/I_k(U)$ é gerado por $\{1 + I_k(U)\}$, onde 1 é a unidade de R , portanto, $R_k(U)$ é finitamente gerado.

Resta mostrar que $R_k(U)$ é graduado como R -módulo. Basta notar que

$$R_k(U) = \bigoplus_{n \geq 0} \frac{R_n}{(I_k(U))_n}, \text{ onde } (I_k(U))_n = I_k(U) \cap R_n \text{ e } R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n.$$

Com essas condições, $R_k(U)$ se torna um R -módulo graduado finitamente gerado. (Detalhes sobre o porquê desta decomposição ser válida pode ser vista em [9, p.92-93]). $\square$

Apesar dos resultados anteriores serem para $R_k(U)$, onde $k = 1, \dots, m$, nosso objetivo é descrever a série de Hilbert de $R_m(U)$, ou seja, para o maior índice k possível. Para isso, vamos construir uma sequência especial, que é exata.

Sendo $U = (u_{ij})$ uma matriz $n \times m$ com entradas em R , com $n \geq m$ e $r = n - m$, para cada $k = 0, \dots, r$, consideramos o seguinte R -módulo livre,

$$F_k = \bigoplus_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}} R,$$

onde a quantidade de fatores é $\binom{n}{m+k} \binom{m+k-1}{m-1}$ e denotamos a base canônica correspondente de F_k por

$$\left\{ e_{i_1, \dots, i_{m+k}, j_1, \dots, j_k} \right\}_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}}.$$

Além disso, definimos o R -homomorfismo $\partial : F_{k+1} \rightarrow F_k$ por

$$\partial(e_{i_1, \dots, i_{m+k+1}, j_1, \dots, j_{k+1}}) = \sum_{\alpha=1}^{m+k+1} \sum_{\beta=1}^{k+1} (-1)^{\alpha+1} u_{i_\alpha j_\beta} e_{i_1, \dots, \hat{i}_\alpha, \dots, i_{m+k+1}, j_1, \dots, \hat{j}_\beta, \dots, j_{k+1}},$$

onde a notação $\hat{i}_\alpha$ significa que estamos removendo este fator (análogo para $\hat{j}_\beta$).

Por fim, definimos o R -homomorfismo $\nu : F_0 \rightarrow R$ por

$$\nu(e_{i_1, \dots, i_m}) = \begin{vmatrix} u_{i_1 1} & \dots & u_{i_1 m} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{i_m 1} & \dots & u_{i_m m} \end{vmatrix}.$$

Exemplo 3.2.12. *Caso $n = 3$, $m = 2$ para entender melhor as aplicações. Então $r = 3 - 2 = 1$, portanto $k = 0, 1$.*

$$1. F_0 = \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} R, \text{ onde } (i_1, i_2) = (1, 2), (1, 3), (2, 3).$$

A base canônica para F_0 é $\{e_{1,2}; e_{1,3}; e_{2,3}\}$;

$$2. F_1 = \bigoplus_{\substack{1 \leq j_1 \leq 2 \\ 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 3}} R, \text{ onde } (i_1, i_2, i_3) = (1, 2, 3), \text{ para } j_1 = 1, 2.$$

A base canônica para F_1 é $\{e_{1,2,3,1}; e_{1,2,3,2}\}$;

Calculemos $\partial : F_1 \rightarrow F_0$. Um elemento $x \in F_1$ é do tipo $x = a.e_{1,2,3,1} + b.e_{1,2,3,2}$, então

$$\begin{aligned} \partial(x) &= a.\partial(e_{1,2,3,1}) + b.\partial(e_{1,2,3,2}) \\ &= a(u_{11}e_{2,3} - u_{21}e_{1,3} + u_{31}e_{1,2}) + b(u_{12}e_{2,3} - u_{22}e_{1,3} + u_{32}e_{1,2}) \\ &= e_{2,3}(au_{11} + bu_{12}) + e_{1,3}(-au_{21} - bu_{22}) + e_{1,2}(au_{31} + bu_{32}) \end{aligned}$$

Agora, vamos calcular $\nu : F_0 \rightarrow R$. Novamente, um elemento $y \in F_0$ é do tipo $y = a.e_{1,2} + b.e_{1,3} + c.e_{2,3}$, então

$$\begin{aligned} \nu(y) &= a. \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} + b. \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{31} & u_{32} \end{vmatrix} + c. \begin{vmatrix} u_{21} & u_{22} \\ u_{31} & u_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a.(u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}) + b.(u_{11}u_{32} - u_{12}u_{31}) + c.(u_{21}u_{32} - u_{22}u_{31}). \end{aligned}$$

Com estas aplicações bem definidas obtemos o seguinte complexo.

Lema 3.3. *Seja $U = (u_{ij})$ uma matriz $n \times m$ com entradas em R , com $n \geq m$. Se $I_m(U)$ tiver grau $n - m + 1$, então a seguinte sequência é exata:*

$$0 \longrightarrow F_r \xrightarrow{\partial} F_{r-1} \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} F_0 \xrightarrow{\nu} R \longrightarrow R_m(U) \longrightarrow 0.$$

Demonstração. Faremos a demonstração para um caso particular, mas pode ser facilmente generalizada.

Para $n = 3$ e $m = 2$, mostremos que se $I_2(U)$ possuir grau 2, então a sequência

$$0 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\partial} F_0 \xrightarrow{\nu} R \longrightarrow R_2(U) \longrightarrow 0$$

é exata.

Para facilitar notações, considere $d_1 = u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}$, $d_2 = u_{11}u_{32} - u_{12}u_{31}$ e $d_3 = u_{21}u_{32} - u_{22}u_{31}$. Sendo assim, observe que em nosso caso

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \\ u_{31} & u_{32} \end{bmatrix} \text{ e } I_2(U) = \langle d_1, d_2, d_3 \rangle.$$

Logo, como $I_2(U)$ tem grau $n - m + 1 = 2$, devemos ter 2 elementos de $I_2(U)$ que satisfazem a definição de ter grau 2, suponha que sejam $a_1 = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3$ e $a_2 = \gamma_1 d_1 + \gamma_2 d_2 + \gamma_3 d_3$ esses elementos. Assim, devemos ter que $\langle a_1 \rangle : a_2 = \langle a_1 \rangle$ e não pode ocorrer que $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ (caso contrário teríamos $I_2(U) = \{0\}$ e um absurdo com o fato de $I_2(U)$ possuir grau 2). Portanto, garantimos que $d_i \neq 0$, para algum $i = 1, 2, 3$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $d_1 \neq 0$.

Do exemplo anterior $\{e_{1,2,3,1}; e_{1,2,3,2}\}$ e $\{e_{1,2}; e_{1,3}; e_{2,3}\}$ são bases canônicas para F_1 e F_0 respectivamente.

1. Provemos que $0 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\partial} F_0$ é exata. Para isso, basta mostrar que $N(\partial) = 0$. Portanto, seja $x = a.e_{1,2,3,1} + b.e_{1,2,3,2} \in F_1$, então

$$\begin{aligned}
\partial(x) = 0 &\Leftrightarrow a.\partial(e_1, 2, 3, 1) + b.\partial(e_{1,2,3,2}) = 0 \\
&\Leftrightarrow a(u_{11}e_{2,3} - u_{21}e_{1,3} + u_{31}e_{1,2}) + b(u_{12}e_{2,3} - u_{22}e_{1,3} + u_{32}e_{1,2}) = 0 \\
&\Leftrightarrow e_{2,3}(au_{11} + bu_{12}) + e_{1,3}(-au_{21} - bu_{22}) + e_{1,2}(au_{31} + bu_{32}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} au_{11} + bu_{12} = 0 \\ au_{21} + bu_{22} = 0 \\ au_{31} + bu_{32} = 0 \end{cases},
\end{aligned}$$

pois $\{e_{1,2}; e_{1,3}; e_{2,3}\}$ é base canônica para F_0 . Agora, como $d_1 \neq 0$, então podemos escalonar o sistema, ficando com

$$\begin{cases} au_{11} + bu_{12} = 0 \\ b(u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}) = 0 \end{cases},$$

onde a única solução é $a = b = 0$, pois $d_1 \neq 0$, portanto $x = 0$ e assim, ∂ é injetiva, concluindo que a sequência é exata.

2. Provemos que $F_1 \xrightarrow{\partial} F_0 \xrightarrow{\nu} R$ é exata. Para isso, mostremos que $Im(\partial) = N(\nu)$.

Seja $x = a.e_{1,2,3,1} + b.e_{1,2,3,2} \in F_1$, então

$$\partial(x) = e_{2,3}(au_{11} + bu_{12}) + e_{1,3}(-au_{21} - bu_{22}) + e_{1,2}(au_{31} + bu_{32}). \text{ Logo,}$$

$$\begin{aligned}
\nu(\partial(x)) &= (u_{21}u_{32} - u_{22}u_{31}).(au_{11} + bu_{12}) + \\
&+ (u_{11}u_{32} - u_{12}u_{31}).(-au_{21} - bu_{22}) + \\
&+ (u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}).(au_{31} + bu_{32}) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $Im(\partial) \subseteq N(\nu)$.

Vamos mostrar que dimensão de $Im(\partial)$ é igual a dimensão de $N(\nu)$.

Claramente, $\langle \partial(e_{1,2,3,1}), \partial(e_{1,2,3,2}) \rangle$ gera $Im(\partial)$, então vamos provar que é L.I. Suponha que $\alpha\partial(e_{1,2,3,1}) + \beta\partial(e_{1,2,3,2}) = 0$, então analogamente ao que já foi feito, temos a única solução $\alpha = \beta = 0$. Concluindo que $Im(\partial)$ tem dimensão 2.

Agora, note que

$$N(\nu) = \{a.e_{1,2} + b.e_{1,3} + c.e_{2,3} \in F_0 \mid \nu(a.e_{1,2} + b.e_{1,3} + c.e_{2,3}) = 0\},$$

$$\text{com } \nu(a.e_{1,2} + b.e_{1,3} + c.e_{2,3}) = 0 \Leftrightarrow a.d_1 + b.d_2 + c.d_3 = 0.$$

Porém, vimos que $d_i \neq 0$ para algum $i = 1, 2, 3$, então temos alguma combinação linear com os coeficientes nem todos nulos para a, b, c como variáveis. Portanto, $N(\nu)$ é gerado por 2 elementos L.I. (Se fosse gerado por 1 elemento, deveríamos ter que d_1 e d_2 são múltiplos, implicando que $d_2 \in \langle d_1 \rangle$, logo, teríamos um absurdo com o fato de grau $I_2(U)$ ser 2). Concluindo que $N(\nu)$ tem dimensão 2 e assim $Im(\partial) = N(\nu)$, provando que a sequência é exata.

3. $F_0 \xrightarrow{\nu} R \xrightarrow{j} R_2(U)$ é exata, onde

$$\begin{aligned}
j: R &\rightarrow R_2(U) \\
r &\mapsto r + I_2(U)
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} N(j) &= \{r \in R \mid j(r) = I_2(U)\} = \{r \in R \mid r + I_2(U) = I_2(U)\} = \\ &= \{r \in R \mid r \in I_2(U)\} = I_2(U), \end{aligned}$$

com $I_2(U) = \langle d_1, d_2, d_3 \rangle$.

Por outro lado, sendo $x = a.e_{1,2} + b.e_{1,3} + c.e_{2,3} \in F_0$, então

$$\nu(x) = a.\nu(e_{1,2}) + b.\nu(e_{1,3}) + c.\nu(e_{2,3}) = a.d_1 + b.d_2 + c.d_3,$$

provando que $Im(\nu) = I_2(U) = N(j)$, e assim, a sequência é exata.

4. $R \xrightarrow{j} R_2(U) \longrightarrow 0$ é exata.

Basta notar que j é sobrejetora, pois $Im(j) = R_2(U)$, concluindo que a sequência é exata.

De todos os itens, segue que a sequência inicial é exata. $\square$

Definição 3.2.13. Chamamos a sequência exata do lema anterior de **Complexo de Eagon-Northcott**.

Observação 3.2.14. Suponha agora que R é um anel graduado Noetheriano, que cada u_{ij} é homogêneo de grau d_{ij} e a condição do Lema 3.9 é satisfeita. Observe que todos os módulos desse complexo são graduados pela forma que os definimos, porém, os homomorfismos ∂, ν não são homomorfismos graduados (Definição 3.1.23), pois não preservam elementos homogêneos. Para obter tal fato, temos que modificar a graduação desses R -módulos para obter uma sequência exata de R -módulos graduados onde os homomorfismos são homogêneos.

Sendo $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ e lembrando que $R[\lambda]_n = R_{n-\lambda}$, definimos

$$\tilde{F}_k = \bigoplus_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}} R[d_{i_1 1} + \dots + d_{i_m m} + d_{i_{m+1} j_1} + \dots + d_{i_{m+k} j_k}].$$

As definições para a base canônica de $\tilde{F}_k$, os homomorfismos ∂ e ν seguem da mesma maneira, pois alteramos apenas a graduação dos elementos.

Exemplo 3.2.15. Vejamos como ficam as aplicações ∂ e ν para esta modificação com um caso específico, que pode ser facilmente generalizado. Para $n = 3$ e $m = 2$, temos

$$\tilde{F}_0 = R[d_{11} + d_{22}] \oplus R[d_{11} + d_{32}] \oplus R[d_{21} + d_{32}] \quad e$$

$$\tilde{F}_1 = R[d_{11} + d_{22} + d_{31}] \oplus R[d_{11} + d_{22} + d_{32}].$$

• Então tomando para $\nu : \tilde{F}_0 \rightarrow R$ temos

1. $e_{1,2} \in \tilde{F}_0$, tem grau $d_{11} + d_{22}$ e $\nu(e_{1,2}) = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} = u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21}$ tem grau $d_{11} + d_{22}$ (pois satisfaz a condição do Lema 3.9).

2. $e_{1,3} \in \tilde{F}_0$, tem grau $d_{11} + d_{32}$ e $\nu(e_{1,3}) = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{31} & u_{32} \end{vmatrix} = u_{11}u_{32} - u_{12}u_{31}$ tem grau $d_{11} + d_{32}$ (pois satisfaz a condição do Lema 3.9).

3. $e_{2,3} \in \tilde{F}_0$, tem grau $d_{21} + d_{32}$ e $\nu(e_{2,3}) = \begin{vmatrix} u_{21} & u_{22} \\ u_{31} & u_{32} \end{vmatrix} = u_{21}u_{32} - u_{22}u_{31}$ tem grau $d_{21} + d_{32}$ (pois satisfaz a condição do Lema 3.9).

• Para $\partial : \tilde{F}_1 \rightarrow \tilde{F}_0$ temos

1. $e_{1,2,3,1} \in \tilde{F}_1$ tem grau $d_{11} + d_{22} + d_{31}$ e $\partial(e_{1,2,3,1}) = u_{11}e_{2,3} - u_{21}e_{1,3} + u_{31}e_{1,2}$, onde

(a) $u_{11}e_{2,3}$ tem grau $d_{11} + d_{21} + d_{32} = d_{11} + d_{22} + d_{31}$ (condição do Lema 3.9);

(b) $u_{21}e_{1,3}$ tem grau $d_{21} + d_{11} + d_{32} = d_{11} + d_{22} + d_{31}$ (condição do Lema 3.9);

(c) $u_{31}e_{1,2}$ tem grau $d_{11} + d_{22} + d_{31}$.

Logo, $\partial(e_{1,2,3,1})$ possui grau $d_{11} + d_{22} + d_{31}$.

2. $e_{1,2,3,2} \in \tilde{F}_1$ tem grau $d_{11} + d_{22} + d_{32}$ e $\partial(e_{1,2,3,2}) = u_{12}e_{2,3} - u_{22}e_{1,3} + u_{32}e_{1,2}$, onde

(a) $u_{12}e_{2,3}$ tem grau $d_{12} + d_{21} + d_{32} = d_{11} + d_{22} + d_{32}$ (condição do Lema 3.9);

(b) $u_{22}e_{1,3}$ tem grau $d_{22} + d_{11} + d_{32}$;

(c) $u_{32}e_{1,2}$ tem grau $d_{11} + d_{22} + d_{32}$.

Logo, $\partial(e_{1,2,3,2})$ possui grau $d_{11} + d_{22} + d_{32}$.

Em geral, também se conclui que ν e ∂ são homomorfismos graduados, ou seja, elementos de determinado grau são levados para elementos de mesmo grau. Com esta modificação, conseguimos um novo complexo que recebe o nome de **complexo graduado de Eagon-Northcott**.

Para finalizar, dois resultados onde fixamos $U = (u_{ij})$ uma matriz $n \times m$ com entradas em R , com $n \geq m$, onde cada u_{ij} é homogêneo de grau d_{ij} com a condição do Lema 3.9 satisfeita.

Lema 3.4. Se $I_m(U)$ tem grau $n - m + 1$, então a seguinte sequência é exata:

$$0 \longrightarrow \tilde{F}_r \xrightarrow{\partial} \tilde{F}_{r-1} \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} \tilde{F}_0 \xrightarrow{\nu} R \longrightarrow R_m(U) \longrightarrow 0.$$

Demonstração. A demonstração segue de maneira análoga ao que foi feito para o Lema 3.3, pois apenas alteramos as graduações dos módulos. $\square$

Note que o fato da sequência ser exata e o fato dos homomorfismos ∂ e ν serem graduados, segue que a sequência é exata em cada fator da graduação, ou seja, a sequência

$$0 \rightarrow (\tilde{F}_r)_k \xrightarrow{\partial} (\tilde{F}_{r-1})_k \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} (\tilde{F}_0)_k \xrightarrow{\nu} R_k \rightarrow (R_m(U))_k \rightarrow 0$$

é exata para todo $k \geq 0$.

O Lema 3.4, juntamente com a Proposição 3.1.56 nos permite calcular imediatamente a série de Hilbert de $R_m(U)$.

Teorema 3.2.16. *Se $I_m(U)$ tem grau $n - m + 1$, então a série de Hilbert de $R_m(U)$, $P(R_m(U), t)$, é dada por*

$$P(R, t) \left(1 + \sum_{k=0}^r (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}} t^{d_{i_1 1} + \dots + d_{i_m m} + d_{i_{m+1} j_1} + \dots + d_{i_{m+k} j_k}} \right),$$

onde $r = n - m$.

Demonstração. Para tal demonstração, novamente iremos considerar o caso $n = 3$ e $m = 2$, mas pode ser facilmente generalizada.

Antes da demonstração, lembremos que em geral para um M um módulo graduado, a notação M_k denota o fator k da graduação de M . Além disso, usando que, neste novo complexo, ∂ e ν são graduadas, então temos bem definida a sequência

$$0 \longrightarrow (\tilde{F}_1)_k \xrightarrow{\partial} (\tilde{F}_0)_k \xrightarrow{\nu} R_k \longrightarrow (R_2(U))_k \longrightarrow 0.$$

com

$$1. \tilde{F}_1 = \bigoplus_{\substack{1 \leq j_1 \leq 2 \\ 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 3}} R[d_{i_1 1} + d_{i_2 2} + d_{i_3 j_1}];$$

$$2. \tilde{F}_0 = \bigoplus_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} R[d_{i_1 1} + d_{i_2 2}].$$

Claramente as sequências serão exatas para todo k , pois a sequência toda (com as somas diretas) é exata (Lema 3.4).

Com esse fato em mente, voltando para a demonstração, pela Proposição 3.1.56 e da exatidão da sequência anterior, temos que $\ell((\tilde{F}_1)_k) - \ell((\tilde{F}_0)_k) + \ell(R_k) = \ell((R_2(U))_k)$.

Portanto, por definição

$$P(R_2(U), t) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell((R_2(U))_n) t^n$$

e do que fizemos, podemos reescrever cada fator $\ell((R_2(U))_n)$, obtendo

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ell((R_2(U))_n) t^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ell((\tilde{F}_1)_n) - \ell((\tilde{F}_0)_n) + \ell(R_n) \right) t^n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \ell((\tilde{F}_1)_n) t^n - \sum_{n=1}^{\infty} \ell((\tilde{F}_0)_n) t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \ell(R_n) t^n = P(\tilde{F}_1, t) - P(\tilde{F}_0, t) + P(R, t), \end{aligned}$$

onde a última igualdade é garantida por definição. Sendo assim, concluímos que

$$P(R_2(U), t) = P(\tilde{F}_1, t) - P(\tilde{F}_0, t) + P(R, t).$$

1. Na forma geral de $\tilde{F}_1$, temos por definição que

$$P(\tilde{F}_1, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \ell((\tilde{F}_1)_n) t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \ell \left(\left(\bigoplus_{\substack{1 \leq j_1 \leq 2 \\ 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 3}} R[d_{i_1 1} + d_{i_2 2} + d_{i_3 j_1}] \right)_n \right) t^n.$$

Do Corolário 3.1.58 temos

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \ell \left(\left(\bigoplus_{\substack{1 \leq j_1 \leq 2 \\ 1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 3}} R[d_{i_1 1} + d_{i_2 2} + d_{i_3 j_1}] \right)_n \right) t^n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \ell \left((R[d_{i_1 1} + d_{i_2 2} + d_{i_3 j_1}])_n \right) t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \ell \left((R[d_{i_1 1} + d_{i_2 2} + d_{i_3 j_2}])_n \right) t^n. \end{aligned}$$

Agora, por definição conseguimos

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \ell \left((R[d_{i_1 1} + d_{i_2 2} + d_{i_3 j_1}])_n \right) t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \ell \left((R[d_{i_1 1} + d_{i_2 2} + d_{i_3 j_2}])_n \right) t^n \\ &= P(R[d_{i_1 1} + d_{i_2 2} + d_{i_3 j_1}], t) + P(R[d_{i_1 1} + d_{i_2 2} + d_{i_3 j_2}], t). \end{aligned}$$

Por fim, da Proposição 3.2.4 temos que

$$\begin{aligned} & P(R[d_{i_1 1} + d_{i_2 2} + d_{i_3 j_1}], t) + P(R[d_{i_1 1} + d_{i_2 2} + d_{i_3 j_2}], t) = \\ &= P(R, t) \cdot (t^{d_{i_1 1} + d_{i_2 2} + d_{i_3 j_1}} + t^{d_{i_1 1} + d_{i_2 2} + d_{i_3 j_2}}) = P(R, t) \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq 2 \\ 1 \leq i_1 < i_2 < i_2 + 1 \leq 3}} t^{d_{i_1 1} + d_{i_2 2} + d_{i_2 + 1 j_1}}, \end{aligned}$$

onde a última igualdade é um arranjo melhor dos expoentes.

2. Com raciocínio análogo para $\tilde{F}_0$, temos que

$$P(\tilde{F}_0, t) = P(R, t) \cdot (t^{d_{11} + d_{22}} + t^{d_{11} + d_{32}} + t^{d_{21} + d_{32}}) = P(R, t) \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} t^{d_{i_1 1} + d_{i_2 2}}.$$

Retornando para $P(R_2(U), t)$, concluímos que

$$\begin{aligned} P(R_2(U), t) &= P(R, t) \left(1 + \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq 2 \\ 1 \leq i_1 < i_2 < i_2 + 1 \leq 3}} t^{d_{i_1 1} + d_{i_2 2} + d_{i_2 + 1 j_1}} - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} t^{d_{i_1 1} + d_{i_2 2}} \right) = \\ &= P(R, t) \left(1 + \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_k \leq 2 \\ 1 \leq i_1 < i_2 < i_{(2+k)} \leq 3}} t^{d_{i_1 1} + d_{i_2 2} + d_{i_{(2+k)} j_k}} \right). \end{aligned}$$

Generalizando, temos a fórmula que queríamos. $\square$

3.3 MULTIPLICIDADE DE HILBERT-SAMUEL

No que segue, amparados por um tipo específico de função, definimos um importante número associado a uma classe de ideais e ao seu módulo associado. Número este que será muito abordado em seções futuras.

Para a obtenção da referida classe de ideais, quando não informado, vamos considerar R um anel Noetheriano, que é semilocal (ou seja, que possui uma quantidade finita de ideais maximais). Um anel local (um único ideal maximal) é um anel semilocal.

Antes de apresentar esta classe, vamos listar operações e propriedades de ideais que serão utilizados para a definição e na manipulação dos resultados envolvendo este conceito, que valem para um anel comutativo com unidade qualquer

Definição 3.3.1. Dados I um ideal R e M um R -módulo. O **produto** de I por M , denotado por IM , é o submódulo de M gerado por todos os elementos da forma $a.m$, $a \in I$ e $m \in M$.

Observação 3.3.2. Claramente $I^n I^m \subseteq I^{n+m}$ e $I^n(I^m M) \subset I^{n+m} M$.

Proposição 3.3.3. Sejam I, J ideais de um anel R . Vale que $IJ \subset I \cap J$.

Demonstração. Um elemento z de IJ é uma soma de elementos do tipo λxy tal que $x \in I$, $y \in J$ e $\lambda \in R$. Como I e J são ideais, segue que $\lambda xy = (\lambda y)x \in I$ e $\lambda xy = (\lambda x)y \in J$. Portanto, $\lambda xy \in I \cap J$. Assim, $z \in I \cap J$ e, com isso, $IJ \subset I \cap J$. $\square$

Observação 3.3.4. Este conceito pode ser estendido trivialmente para uma quantidade finita de ideais, ou seja, para uma família $(I_i)_{i=1}^n$, temos

$$\prod_{i=1}^n I_i \subset \bigcap_{i=1}^n I_i.$$

Proposição 3.3.5. Sejam I, J e P ideais de um anel R qualquer com P um ideal primo. Se $IJ \subset P$, então $I \subset P$ ou $J \subset P$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que $I \not\subset P$ e $J \not\subset P$. Isso significa que existem elementos $a \in I \setminus P$ e $b \in J \setminus P$.

Como $a \in I$ e $b \in J$, o produto $ab \in IJ$. Pela hipótese $IJ \subseteq P$, segue que $ab \in P$. Mas P é primo, então se $ab \in P$, devemos ter $a \in P$ ou $b \in P$. Isso contradiz a escolha de a e b fora de P . $\square$

Em particular, temos o seguinte resultado.

Corolário 3.3.6. Sejam I e P ideais de R com P ideal primo. Se $I^n \subset P$, então $I \subset P$.

Demonstração. Basta usar o Princípio de Indução Finita e o resultado anterior. $\square$

A partir daqui R precisa ser Noetheriano semilocal.

Definição 3.3.7. Seja I um ideal de R . Dizemos que I é um **ideal de definição** de R se existe $k > 0$ tal que $\mathbf{J}^k \subset I \subset \mathbf{J}$, onde $\mathbf{J}$ é o radical de Jacobson de R , ou seja, a interseção de todos os ideais maximais de R .

Observação 3.3.8. Seja R um anel local com $\mathbf{m}$ seu único ideal maximal. Então a condição para I ser um ideal de definição de R é $\mathbf{m}^k \subset I$ para algum $k > 0$. Note que $\mathbf{m}$ é um ideal de definição de R pois basta tomar $k = 1$.

Exemplo 3.3.9. No anel dos germes de funções de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}$ em torno da origem, $\mathcal{O}_n$, que é um anel local, seu único ideal maximal $\mathbf{m}_n$ (Proposição 2.2.16) é um ideal de definição de $\mathcal{O}_n$.

Proposição 3.3.10. Seja I um ideal de definição de R , então R/I é Artiniano.

Demonstração. Se P/I é um ideal primo de R/I que não é maximal, então P é um ideal primo de R (que não é maximal) que contém I . Do fato de I ser ideal de definição de R , temos que existe $k > 0$ com $\mathbf{J}^k \subset I \subset P$, onde $\mathbf{J}$ é o radical de Jacobson de R . Sendo R um anel semilocal, $\mathbf{J} = \bigcap_{i=1}^n m_i$, onde m_i , $i = 1, 2, \dots, n$ são os ideais maximais de R .

Como P é primo e $\mathbf{J}^k \subset P$, temos que $\mathbf{J} \subset P$ (Corolário 3.3.6). Portanto,

$$\prod_{i=1}^n m_i \subset \bigcap_{i=1}^n m_i = \mathbf{J} \subset P$$

onde o primeiro contido segue da Observação 3.3.4. Do fato de todo ideal maximal ser um ideal primo e aplicando a Proposição 3.3.5 na expressão anterior, temos que algum $m_i \subset P$, o que é um absurdo, pois m_i é maximal. Logo, provamos que os únicos ideais maximais de R/I são m_i/I , ou seja, $\dim(R/I) = 0$. Como R é Noetheriano, segue que R/I é Noetheriano (Proposição 3.1.44) e, pelo Teorema 3.1.70, temos que R/I é Artiniano. $\square$

Com esta classe de ideais em mente, iniciamos o processo de construção de uma aplicação especial, onde omitimos alguns detalhes, dando somente a referência. Então daqui até o final da seção I é um ideal de definição de R e vamos considerar M um R -módulo finitamente gerado.

Observação 3.3.11. Considere $gr_I(R) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n/I^{n+1}$.

- $gr_I(R)$ é um anel graduado.

Com efeito, especificamos apenas o fato de ser graduado, pois os axiomas para ser anel decorrem naturalmente do fato de R ser um anel (detalhes em [9, p.97]).

Naturalmente a multiplicação de um elemento $a \in I^n$ por um elemento $b \in I^m$ é ab e está contido em I^{n+m} (Observação 3.3.2).

Definimos a multiplicação de um elemento $a + I^{n+1}$ de I^n/I^{n+1} por um elemento $b + I^{m+1}$ de I^m/I^{m+1} sendo

$$(a + I^{n+1}).(b + I^{m+1}) = ab + I^{n+m+1}.$$

Esta aplicação está bem definida. De fato, suponha que $a + I^{n+1} = a' + I^{n+1}$, ou seja, $a - a' \in I^{n+1}$. Suponha também que $b + I^{m+1} = b' + I^{m+1}$, ou seja, $b - b' \in I^{m+1}$.

Queremos mostrar que

$$ab + I^{n+m+1} = a'b' + I^{n+m+1}, \text{ ou seja, } ab - a'b' \in I^{n+m+1}.$$

Note que podemos escrever

$$ab - a'b' = ab - a'b + a'b - a'b' = (a - a')b + a'(b - b').$$

Como $a - a' \in I^{n+1}$ e $b \in I^m$, temos $(a - a')b \in I^{n+1} \cdot I^m \subset I^{n+m+1}$ e como $b - b' \in I^{m+1}$ e $a' \in I^n$, temos $a'(b - b') \in I^n \cdot I^{m+1} \subset I^{n+m+1}$. Portanto, $ab - a'b' \in I^{n+m+1}$, como desejado.

- $gr_I(R)$ é Noetheriano.

Sendo R é Noetheriano, temos que R/I é Noetheriano (Proposição 3.1.44) e I é um ideal finitamente gerado (Proposição 3.1.46). Suponha que I é gerado por $x_1, \dots, x_r$.

Tome ζ_i sendo a imagem de x_i em I/I^2 . Pode-se mostrar que todo elemento de $gr_I(R)$ é gerado pelos elementos $\zeta_1, \dots, \zeta_r$. Logo, $gr_I(R)$ pode ser visto como $(I^0/I^1)[\zeta_1, \dots, \zeta_r] = (R/I)[\zeta_1, \dots, \zeta_r]$.

Porém, como R/I é Noetheriano, segue que $(R/I)[\zeta_1, \dots, \zeta_r]$ também é Noetheriano (Proposição 3.1.41). Concluindo que $gr_I(R)$ é Noetheriano também.

Alguns fatos foram omitidos, mais detalhes podem ser vistos em [9, p. 93 e p. 97].

Observação 3.3.12. Considere $gr_I(M) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n M / I^{n+1} M$.

- $gr_I(M)$ é um módulo graduado sobre o anel $gr_I(R)$.

Com efeito, também mostramos somente à respeito da graduação, pois as propriedades de ser um $gr_I(R)$ -módulo decorrem naturalmente do fato de M ser um R -módulo (detalhes em [9, p.97]).

A operação de um elemento $a + I^{n+1}$ de I^n / I^{n+1} por um elemento $m + I^{m+1}$ de $I^m M / I^{m+1} M$ é dada por

$$(a + I^{n+1}).(m + I^{m+1}) = a.m + I^{n+m+1} \subset I^{n+m} M / I^{n+m+1} M,$$

onde a inclusão decorre de maneira natural como feito para $gr_I(R)$.

Suponha que $w_1, \dots, w_s$ são geradores de M , pois é finitamente gerado. Consideremos ainda $\overline{w}_1, \dots, \overline{w}_s$, onde $\overline{w}_i$ é a imagem de w_i em $M'_0 = M/IM$. Como anteriormente, pode-se mostrar que todo elemento de $gr_I(M)$ é gerado pelos elementos $\overline{w}_1, \dots, \overline{w}_s$, tornando $gr_I(M)$ um $gr_I(R)$ -módulo finitamente gerado.

Notação: Sendo $R' = gr_I(R)$ e $M' = gr_I(M)$, então denotamos um fator k da graduação de R' e M' por R'_k e M'_k respectivamente.

Observação 3.3.13. Da Observação 3.3.11, R' é um anel graduado Noetheriano com $R' = R'_0[\zeta_1, \dots, \zeta_r]$ e ζ_i sendo homogêneos de grau 1 pois pertencem a I/I^2 e da Proposição 3.3.10 $R'_0 = R/I$ é Artiniano. Além disso, da Observação 3.3.12, M' é um R' -módulo graduado finitamente gerado.

Observe que $\ell(I^n M / I^{n+1} M) = \ell(M'_n) < \infty$ para todo $n \geq 0$, pois estamos com o comprimento como R'_0 -módulo e R'_0 é Artiniano (diretamente da Proposição 3.2.2).

Proposição 3.3.14. Nas condições anteriores, vale que

$$\sum_{i=0}^n \ell(M'_i) = \ell(M / I^{n+1} M).$$

Demonstração. Primeiramente, note que da observação anterior, $\ell(M'_i) < \infty$. Logo, a soma está bem definida.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \ell(M'_i) &= \sum_{i=0}^n \ell(I^i M / I^{i+1} M) = \ell(M/IM) + \ell(IM/I^2 M) + \dots + \ell(I^n M / I^{n+1} M) \\ &= \ell(M) - \ell(IM) + \ell(IM) - \ell(I^2 M) + \dots + \ell(I^n M) - \ell(I^{n+1} M) = \ell(M / I^{n+1} M), \end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade é usada a Proposição 3.1.53 pois todos os módulos envolvidos são finitamente gerados (segue de M e I serem finitamente gerados). $\square$

Portanto, esta proposição nos motiva à seguinte definição.

Definição 3.3.15. Seja M um R -módulo finitamente gerado e I um ideal de definição de R . Definimos a **função de Samuel** de M e I por $\chi_M^I(n) = \ell(M / I^{n+1} M)$.

Com essa aplicação estabelecida, podemos definir um número relevante que advém da função de Samuel sob determinadas condições. Para atingir este objetivo, iniciamos com resultados combinatórios, visando expressar a função de Samuel em uma forma polinomial.

Lema 3.5. Vale que $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}$.

Demonstração. Observe que

$$\binom{m-1}{n-1} = \frac{(m-1)!}{(m-n)!(n-1)!} = \frac{(m-1)!}{(m-n)!(n)!} \cdot n$$

$$\binom{m-1}{n} = \frac{(m-1)!}{(m-n-1)!(n)!} = \frac{(m-1)!}{(m-n)!(n)!} \cdot (m-n)$$

$$\text{Somando, temos } \frac{(m-1)! \cdot m}{(m-n)!n!} = \frac{m!}{(m-n)!n!} = \binom{m}{n}. \quad \square$$

Doravante, vamos restringir a condição do anel R , considerando um anel local Noetheriano e não mais semilocal. Mantemos M um R -módulo finitamente gerado e I um ideal de definição de R .

Observação 3.3.16. *Pelas Observações 3.3.13 e 3.2.9, podemos aplicar para R' e M' o Corolário 3.2.6. Logo, existe uma $f(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_st^s$ tal que $P(M', t) = f(t) \cdot (1-t)^{-d}$ com $d = d(M') = \dim M'$.*

Proposição 3.3.17. *Nas notações anteriores temos*

$$\chi_M^I(n) = a_0 \binom{d+n}{d} + a_1 \binom{d+n-1}{d} + \dots + a_s \binom{d+n-s}{d}.$$

Demonstração. Primeiramente, observe que da Proposição 3.3.14 e da definição de $\chi_M^I(n)$, temos

$$\chi_M^I(n) = \ell(M/I^{n+1}M) = \sum_{i=0}^n \ell(M'_i).$$

Por outro lado, analogamente ao que fizemos na Observação 3.2.8, obtemos

$$\ell(M'_i) = a_0 \binom{d+i-1}{d-1} + a_1 \binom{d+i-2}{d-1} + \dots + a_s \binom{d+i-s-1}{d-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \chi_M^I(n) &= \sum_{i=0}^n \ell(M'_i) = \sum_{i=0}^n \left[a_0 \binom{d+i-1}{d-1} + a_1 \binom{d+i-2}{d-1} + \dots + a_s \binom{d+i-s-1}{d-1} \right] = \\ &= a_0 \binom{d+n}{d} + a_1 \binom{d+n-1}{d} + \dots + a_s \binom{d+n-s}{d}, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue por indução na fórmula do lema anterior, ou seja,

$$\sum_{i=0}^n \binom{d+i-1}{d-1} = \binom{d+n}{d}.$$

$\square$

Observação 3.3.18. *Nas condições da proposição anterior, analogamente ao que já fizemos na Observação 3.2.8, podemos rearranjar*

$$\chi_M^I(n) = a_0 \binom{d+n}{d} + a_1 \binom{d+n-1}{d} + \dots + a_s \binom{d+n-s}{d}$$

da proposição anterior, ficando com a função de Samuel na seguinte forma polinomial

$$\chi_M^I(n) = \frac{e(I, M)}{d!} n^d + (\text{termos de menor grau}).$$

Definição 3.3.19. O termo $e(I, M)$ da expressão anterior é chamado de **multiplicidade de Hilbert-Samuel** de I em M .

Analisamos esse número por diferentes abordagens, adotando aquela que for mais adequada conforme o contexto.

Nas notações da Observação 3.3.16, uma ferramenta importante é o seguinte resultado:

Teorema 3.3.20. Seja M um R -módulo finitamente gerado e I um ideal de definição de R . Então $e(I, M) = f(1)$.

Demonstração. Faremos a demonstração para o caso em que $d = 2$, mas pode ser facilmente generalizada. Observe que pela Proposição 3.3.17, obtemos que

$$\chi_M^I(n) = a_0 \binom{d+n}{d} + a_1 \binom{d+n-1}{d} + \dots + a_s \binom{d+n-s}{d}$$

Porém, o lado direito desta igualdade, pode ser rearranjado por

$$\begin{aligned} & a_0 \binom{2+n}{2} + a_1 \binom{2+n-1}{2} + \dots + a_s \binom{2+n-s}{2} = \\ & = a_0 \cdot \frac{(n+2)!}{n!2!} + a_1 \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} + \dots + a_s \frac{(n-s+2)!}{(n-s)!2!} = \\ & = a_0 \frac{(n+2)(n+1)}{2!} + a_1 \frac{(n+1)(n)}{2!} + \dots + a_s \frac{(n-s+2)(n-s+1)}{2!} = \\ & = \frac{(a_0 + a_1 + \dots + a_s)}{2!} n^2 + (\text{termos de grau menor}) = \\ & = \frac{f(1)}{2!} n^2 + (\text{termos de grau menor}). \end{aligned}$$

Generalizando, obtemos o que queríamos, pois $e(I, M)$ é exatamente o coeficiente que acompanha o termo de maior grau de $\chi_M^I(n)$ (Observação 3.3.18), que nesse caso é justamente $f(1)$. $\square$

Observação 3.3.21. Nas condições anteriores, diretamente do teorema anterior, temos que $e(I, M)$ é finito.

Observação 3.3.22. Da Proposição 3.3.17, a função de Samuel $\chi_M^I(n) (= \ell(M/I^{n+1}M))$ é exatamente igual ao polinômio $a_0 \binom{d+n}{d} + a_1 \binom{d+n-1}{d} + \dots + a_s \binom{d+n-s}{d}$ para $d+n-s > d$, ou seja, $n > s$.

Ainda, podemos rearranjar conforme a Observação 3.3.18 obtendo

$$\ell(M/I^{n+1}M) = \chi_M^I(n) = \frac{e(I, M)}{d!} n^d + (\text{termos de menor grau}),$$

onde a primeira igualdade ocorre por definição.

Por fim, como os resultados temos que $\chi_M^I(n) = \ell(M/I^{n+1}M)$ só é igual ao polinômio $a_0 \binom{d+n}{d} + a_1 \binom{d+n-1}{d} + \dots + a_s \binom{d+n-s}{d}$ para $n > s$, então rearranjando os fatores e aplicando o limite, obtemos a seguinte caracterização de $e(I, M)$, que consideraremos como uma definição equivalente (alguns argumentos foram omitidos, detalhes podem ser vistos em [9, p.107]).

Proposição 3.3.23. *Suponha que R tem dimensão d . Então temos a seguinte caracterização da **multiplicidade de Hilbert-Samuel** de I em M por*

$$e(I, M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{d!}{n^d} \right) \ell(M/I^n M).$$

Demonstração. Segue direto do que foi abordado na observação anterior. $\square$

Proposição 3.3.24. *Se $d = 0$, então $e(I, M) = \ell(M)$.*

Demonstração. e $d = 0$, da Proposição 3.3.23 obtemos

$$e(I, M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{0!}{n^0} \right) \ell(M/I^n M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(M/I^n M).$$

Como sempre vale que $IM \supset I^2M \supset \cdots \supset I^nM \supset \cdots \supset \{0\}$ e, com isso

$$\frac{M}{IM} \subset \frac{M}{I^2M} \subset \cdots \subset \frac{M}{I^nM} \subset \cdots \subset \frac{M}{\{0\}} = M,$$

então $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell(M/I^n M) = \ell(M)$, concluindo da equação anterior que $e(I, M) = \ell(M)$. $\square$

Notação: Se $I = \mathfrak{m}$ (ideal maximal de R) e $M = R$, então $e(\mathfrak{m}, R)$ pode ser denotado simplesmente por $e(R)$ e chamamos de **multiplicidade de Hilbert-Samuel** do anel R .

Proposição 3.3.25. *Seja (R, m_R) e (S, m_S) anéis locais de dimensões r e s respectivamente. Se $R \cong S$, então $e(R) = e(S)$.*

Demonstração. Note que $e(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r!}{n^r} \right) \ell(R/m_R^n)$ e $e(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{s!}{n^s} \right) \ell(S/m_S^n)$. Do isomorfismo, $r = s$ e $\ell(R/m_R^n) = \ell(S/m_S^n)$ para todo n . Logo, os limites coincidem. $\square$

Exemplo 3.3.26. *Um caso especial é quando $R = \mathcal{O}_n$, onde temos que $e(\mathcal{O}_n) = 1$.*

De fato, observe que

$$e(\mathcal{O}_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{n!}{k^n} \right) \ell(\mathcal{O}_n/\mathfrak{m}_n^k)$$

onde $\mathfrak{m}_n$ é o ideal maximal de $\mathcal{O}_n$.

Vimos que $\mathfrak{m}_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ (Proposição 2.2.17). Logo $\mathfrak{m}_n^k$ é o ideal gerado pelos monômios em $x_1, \dots, x_n$ de grau k . Logo, o quociente $\mathcal{O}_n/\mathfrak{m}_n^k$ representa os monômios de grau total menor que k . Do fato de $\mathcal{O}_n/\mathfrak{m}_n^k$ poder ser visto como um espaço vetorial, pois $\mathcal{O}_n$ é isomorfo a $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ (Exemplo 3.1.66), então o comprimento de $\mathcal{O}_n/\mathfrak{m}_n^k$ é igual a dimensão de $\mathcal{O}_n/\mathfrak{m}_n^k$ como $\mathbb{C}$ -espaço vetorial (Proposição 3.1.36).

Como $\mathcal{O}_n/\mathfrak{m}_n^k$ é gerado pelos monômios de grau total menor que k , para contar esses monômios, podemos observar que a quantidade de monômios de grau j em n variáveis é dada pelo número de soluções inteiras não negativas da equação

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_n = j,$$

que é uma combinação com repetição e possui $\binom{n+j-1}{j}$ soluções.

Assim, a dimensão de $\mathcal{O}_n/\mathbf{m}_n^k$ é a soma do número de monômios de graus menores que k , ou seja,

$$\ell(\mathcal{O}_n/\mathbf{m}_n^k) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n+j-1}{j}.$$

Note que $\binom{n+j-1}{j} = \binom{n+j-1}{n-1}$.

Por outro lado, $\binom{n+j-1}{n-1} = \frac{(n+j-1) \cdots (j+1)}{(n-1)!}$, onde o numerador se aproxima de j^{n-1} quando $j \rightarrow \infty$.

Sendo assim, quando $k \rightarrow \infty$, temos que $\sum_{j=0}^{k-1} \binom{n+j-1}{j} \approx \sum_{j=0}^{k-1} \frac{j^{n-1}}{(n-1)!}$.

Ademais, para k grande, a soma $\sum_{j=0}^{k-1} j^{n-1}$ se comporta como a integral $\int_0^k x^{n-1} dx$, que vale $\frac{k^n}{n}$. Portanto,

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{j^{n-1}}{(n-1)!} \approx \frac{1}{(n-1)!} \cdot \frac{k^n}{n} = \frac{k^n}{n!},$$

concluindo que quando $k \rightarrow \infty$ obtemos que $e(\mathcal{O}_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n!}{k^n} \cdot \frac{k^n}{n!} = 1$.

Para finalizar apresentamos dois resultados envolvendo a multiplicidade de Hilbert-Samuel, onde o primeiro serve para caracterizar um anel Cohen-Macaulay no contexto que estamos estudando e o segundo tem controle da quantidade dos geradores do ideal que caracteriza a mesma multiplicidade de Hilbert-Samuel de um ideal de definição.

Lema 3.6. *As seguintes condições são equivalentes:*

1. R é Cohen-Macaulay;
2. $e(J, R) = \ell(R/J)$, para algum ideal J de R onde o número de geradores de J é a dimensão de R e $\dim\left(\frac{R}{J}\right) = 0$.

Demonstração. Pode ser vista em [9, Teorema 17.11, p. 138]. □

Proposição 3.3.27. *Sejam d a dimensão de R e I um ideal de definição de R . Suponha que o corpo $k = \frac{R}{\mathbf{m}}$ é infinito, sendo $\mathbf{m}$ o ideal maximal de R . Então, existem elementos $a_1, \dots, a_d$ em R tais que*

$$e(\langle a_1, \dots, a_d \rangle, R) = e(I, R).$$

Demonstração. Pode ser vista em [2, Proposição 2.5]. □

3.4 ANEL QUOCIENTE POR MENORES DE MATRIZES

Vamos retomar o estudo do anel quociente $R_m(U) = R/I_m(U)$ visto na Subseção 3.2, que é um R -módulo graduado finitamente gerado (Proposição 3.2.11) e foi calculada sua série de Hilbert (Teorema 3.2.16), segundo as hipóteses sobre R consideradas na referida subseção.

Nesta seção usamos a série de Hilbert de $R_m(U)$ e alguns resultados combinatórios para obter algumas consequências sobre o comprimento e a multiplicidade de Hilbert-Samuel de $R_m(U)$. A partir daqui, sempre que nos referirmos à multiplicidade de um anel, estamos falando da multiplicidade de Hilbert-Samuel deste anel.

No que segue, apresentamos alguns resultados auxiliares, referente a este contexto.

Lema 3.7. *Para R um anel Noetheriano de dimensão d , U uma matriz p por q com entradas em R e $I_r(U)$ o ideal gerado pelos menores de ordem r de U , vale que*

$$\dim(R/I_r(U)) \geq d - (p - r + 1)(q - r + 1).$$

Demonstração. Pode ser vista em [11]. □

Para a obtenção de fórmulas mais explícitas do comprimento e multiplicidade do referido anel, trabalhamos com matrizes $U = (d_{ij})$ de ordem $n \times m$ ($n \geq m$) de números racionais que satisfaçam a seguinte condição

$$d_{ij} + d_{kl} = d_{il} + d_{kj}, \quad \forall i, j, k, l. \quad (3.9)$$

Com estes tipos de matrizes, mostramos uma equivalência que facilita as demonstrações de resultados.

Lema 3.8. *Uma matriz $U = (d_{ij})$ satisfaz que $d_{ij} + d_{kl} = d_{il} + d_{kj}$ para todo i, j, k, l se, e somente se, existem $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{Q}$ tais que $d_{ij} = a_i + b_j$, para qualquer i, j .*

Demonstração. Suponha que $U = (d_{ij})$ satisfaz que $d_{ij} + d_{kl} = d_{il} + d_{kj}$ para todo i, j, k, l . Em particular, satisfaz para $k = l = 1$. Então, nesse caso, temos $d_{ij} = d_{i1} + d_{1j} - d_{11}$, e, portanto, definimos $a_i = d_{i1} - d_{11}$ e $b_j = d_{1j}$ para todo i, j . Logo, $d_{ij} = a_i + b_j, \forall i, j$.

Reciprocamente, suponha que vale que $d_{ij} = a_i + b_j$ para todo i, j e a_i, b_j racionais. Logo,

$$d_{ij} + d_{kl} = (a_i + b_j) + (a_k + b_l) = (a_i + b_l) + (a_k + b_j) = d_{il} + d_{kj}.$$

□

No que segue, apresentamos alguns lemas envolvendo resultados combinatórios, com o objetivo de facilitar a demonstração dos dois teoremas finais desta seção, que são os principais deste trabalho.

Lema 3.9. *Para $r = n - m$, temos*

$$\sum_{k=0}^r (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}} 1 = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^{k+1} \binom{m+k-1}{k} \binom{n}{m+k} = -1.$$

Demonstração. Vamos mostrar que

$$\sum_{k=0}^{n-m} (-1)^{k+1} \binom{m+k-1}{k} \binom{n}{m+k} = -1, \quad (3.10)$$

pois a outra igualdade vale claramente.

Faremos com indução em n (note que $n \geq m$).

Fixado m , o primeiro n que podemos tomar é $n = m$. Logo,

$$\sum_{k=0}^0 (-1)^{k+1} \binom{m+k-1}{k} \binom{m}{m+k} = -\binom{m-1}{0} \binom{m}{m} = -1.$$

Agora, suponha que para $n \in \{1, \dots, N\}$, vale que $\sum_{k=0}^{n-m} (-1)^{k+1} \binom{m+k-1}{k} \binom{n}{m+k} = -1$. Vamos provar que vale para $n = N+1$.

Então, queremos provar que $\sum_{k=0}^{N+1-m} (-1)^{k+1} \binom{m+k-1}{k} \binom{N+1}{m+k} = -1$.

Como $\binom{N+1}{m+k} = \binom{N}{m+k} + \binom{N}{m+k-1}$, obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{N+1-m} (-1)^{k+1} \binom{m+k-1}{k} \binom{N+1}{m+k} \\ = & \sum_{k=0}^{N+1-m} (-1)^{k+1} \binom{m+k-1}{k} \binom{N}{m+k} + \sum_{k=0}^{N+1-m} (-1)^{k+1} \binom{m+k-1}{k} \binom{N}{m+k-1} \\ = & \sum_{k=0}^{N-m} (-1)^{k+1} \binom{m+k-1}{k} \binom{N}{m+k} + (-1)^{N-m+2} \binom{N}{N+1-m} \binom{N}{N+1} + \sum_{k=0}^{N+1-m} (-1)^{k+1} \binom{m+k-1}{k} \binom{N}{m+k-1} \\ = & \sum_{k=0}^{N-m} (-1)^{k+1} \binom{m+k-1}{k} \binom{N}{m+k} + \sum_{k=0}^{N+1-m} (-1)^{k+1} \binom{m+k-1}{k} \binom{N}{m+k-1} \\ = & -1 + \sum_{k=0}^{N+1-m} (-1)^{k+1} \binom{m+k-1}{k} \binom{N}{m+k-1}. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\sum_{k=0}^{N+1-m} (-1)^{k+1} \binom{m+k-1}{k} \binom{N}{m+k-1} = 0$.

A partir daqui, para facilitar notações, vamos tomar $N+1-m = \lambda$, então queremos mostrar que $\sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^{k+1} \binom{m+k-1}{k} \binom{\lambda+m-1}{m+k-1} = 0$.

Ainda, note que nunca podemos ter $\lambda = 0$, pois $N \geq m$, assim, $N+1-m \geq 1$. Com uma verificação rápida, temos que

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\lambda} (-1)^{k+1} \binom{m+k-1}{k} \binom{\lambda+m-1}{m+k-1} = \\ = & (\lambda+m-1) \dots m \cdot \begin{cases} (-1)^{\lambda/2} \frac{1}{(\lambda/2)! (\lambda/2)!} + \sum_{t=0}^{(\lambda/2)-1} (-1)^{t+1} \frac{1}{t! (\lambda-t)!}, & \text{se } \lambda \text{ é par} \\ \sum_{t=0}^{(\lambda+1)/2} (1/(t! (\lambda-t)! - 1/(t! (\lambda-t)!)), & \text{se } \lambda \text{ é ímpar} \end{cases}, \end{aligned}$$

que se anula em ambos os casos. Portanto, por indução, obtemos que vale sempre que

$$\sum_{k=0}^{n-m} \binom{m+k-1}{k} \binom{n}{m+k} = -1, \text{ para } n \geq m.$$

□

Lema 3.10. *Seja $U = (d_{ij})$ uma matriz que satisfaz a Equação (3.9). Então,*

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^r (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}} \left(d_{i_1 1} + \dots + d_{i_m m} + d_{i_{m+1} j_1} + \dots + d_{i_{m+k} j_k} \right)^{r+1} \\ = & (-1)^{r+1} (r+1)! \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n} d_{i_1 i_1} d_{i_2 i_2 - 1} \dots d_{i_{r+1} (i_{r+1} - r)}, \text{ onde } r = n - m. \end{aligned}$$

Demonstração. A demonstração é feita segundo a notação introduzida no Lema 3.8 ($d_{ij} = a_i + b_j$), ou seja, para $a_1, \dots, a_n$ e $b_1, \dots, b_m$ números racionais e seja $r = n - m \geq 0$. Então, temos que provar a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^r (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}} (a_{i_1} + \dots + a_{i_{m+k}} + b_{j_1} + \dots + b_{j_k} + b_1 + \dots + b_m)^{r+1} = \\ = (-1)^{r+1} (r+1)! \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n} (a_{i_1} + b_{i_1}) (a_{i_2} + b_{i_2-1}) \dots (a_{i_{r+1}} + b_{i_{r+1}-r}). \end{aligned}$$

A fim de facilitar notações, usarmos

$$A_{nm} = \sum_{k=0}^r (-1)^{r+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}} (a_{i_1} + \dots + a_{i_{m+k}} + b_{j_1} + \dots + b_{j_k} + b_1 + \dots + b_m)^{r+1}$$

$$\text{e } B_{nm} = (-1)^{r+1} (r+1)! \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n} (a_{i_1} + b_{i_1}) (a_{i_2} + b_{i_2-1}) \dots (a_{i_{r+1}} + b_{i_{r+1}-r}).$$

Iniciando, para qualquer m fixado, como $n \geq m$, o primeiro n que podemos tomar é $n = m$ (e $r = 0$), então ficamos com

$$\begin{aligned} A_{mm} &= \sum_{k=0}^0 (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq m}} (a_{i_1} + \dots + a_{i_{m+k}} + b_{j_1} + \dots + b_{j_k} + b_1 + \dots + b_m)^1 \\ &= -(a_1 + \dots + a_m + b_1 + \dots + b_m). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{mm} &= - \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq m} (a_{i_1} + b_{i_1}) (a_{i_2} + b_{i_2-1}) \dots (a_{i_{r+1}} + b_{i_{r+1}-r}) \\ &= -(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) - \dots - (a_m + b_m) = A_{mm}. \end{aligned}$$

Suponhamos que valha para $m \geq 1$ e $n \geq m$, vamos provar que vale para $n+1$. Primeiramente, observe que

$$\begin{aligned} B_{n+1,m} &= (-1)^{r+2} (r+2)! \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+2} \leq n+1} (a_{i_1} + b_{i_1}) \dots (a_{i_{r+2}} + b_{i_{r+2}-(r+1)}) = \\ &= (-1)^{r+2} (r+2)! \left[\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+2} \leq n} (a_{i_1} + b_{i_1}) \dots (a_{i_{r+2}} + b_{i_{r+2}-(r+1)}) \right] + \\ &+ (-1)^{r+2} (r+2)! \left[\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n} (a_{i_1} + b_{i_1}) \dots (a_{i_{r+1}} + b_{i_{r+1}-r}) (a_{n+1} + b_{n+1-(r+1)}) \right] = \\ &= B_{n,m-1} - (r+2)(a_{n+1} + b_m) B_{n,m}. \end{aligned}$$

Mostremos que $A_{n+1,m} = A_{n,m-1} - (r+2)(a_{n+1} + b_m) A_{n,m}$. Para nossa igualdade, decompomos $A_{n+1,m}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A_{n+1,m} &= \sum_{k=0}^{r+1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n+1}} (a_{i_1} + \dots + a_{i_{m+k}} + b_{j_1} + \dots + b_{j_k} + b_1 + \dots + b_m)^{r+2} = \\ &\sum_{k=0}^{r+1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k-1} \leq n}} (a_{i_1} + \dots + a_{i_{m+k-1}} + a_{n+1} + b_{j_1} + \dots + b_{j_k} + b_1 + \dots + b_m)^{r+2} + \\ &+ \sum_{k=0}^r (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}} (a_{i_1} + \dots + a_{i_{m+k}} + b_{j_1} + \dots + b_{j_k} + b_1 + \dots + b_m)^{r+2} = \\ &= S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Ainda, podemos reescrever S_1 da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \sum_{k=0}^{r+1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m-1 \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k-1} \leq n}} (a_{i_1} + \dots + a_{i_{m+k-1}} + a_{n+1} + b_{j_1} + \dots + b_{j_k} + b_1 + \dots + b_m)^{r+2} + \\
 &\sum_{k=0}^{r+1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k-1} \leq n}} (a_{i_1} + \dots + a_{i_{m+k-1}} + a_{n+1} + b_{j_1} + \dots + b_{j_k} + b_m + b_1 + \dots + b_m)^{r+2} \\
 &= (\star) + (\star\star).
 \end{aligned}$$

Para $(\star)$ podemos reescrevê-lo como

$$\begin{aligned}
 (\star) &= \sum_{l=0}^{r+2} \binom{r+2}{l} (a_{n+1} + b_m)^l. \\
 &\left[\sum_{k=0}^{r+1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m-1 \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k-1} \leq n}} (a_{i_1} + \dots + a_{i_{m+k-1}} + b_{j_1} + \dots + b_{j_k} + b_1 + \dots + b_{m-1})^{r+2-l} \right] = \\
 &= A_{n,m-1} + S_{12}, \text{ onde} \\
 S_{12} &= \sum_{l=1}^{r+2} \binom{r+2}{l} (a_{n+1} + b_m)^l. \\
 &\left[\sum_{k=0}^{r+1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m-1 \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k-1} \leq n}} (a_{i_1} + \dots + a_{i_{m+k-1}} + b_{j_1} + \dots + b_{j_k} + b_1 + \dots + b_{m-1})^{r+2-l} \right]
 \end{aligned}$$

Continuando, podemos fazer uma mudança de variáveis em $(\star\star)$ ficando com

$$\begin{aligned}
 (\star\star) &= \\
 &= - \sum_{k=0}^r (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}} (a_{i_1} + \dots + a_{i_{m+k}} + a_{n+1} + b_{j_1} + \dots + b_{j_k} + b_m + b_1 + \dots + b_m)^{r+2}
 \end{aligned}$$

Aplicando o Binômio obtemos

$$\begin{aligned}
 &= - \sum_{l=0}^{r+2} \binom{r+2}{l} (a_{n+1} + b_m)^l. \\
 &\left[\sum_{k=0}^r (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}} (a_{i_1} + \dots + a_{i_{m+k}} + b_{j_1} + \dots + b_{j_k} + b_1 + \dots + b_m)^{r+2-l} \right] = \\
 &= -S_2 - (r+2)(a_{n+1} + b_m)A_{n,m} - \sum_{l=2}^{r+2} \binom{r+2}{l} (a_{n+1} + b_m)^l. \\
 &\left[\sum_{k=0}^r (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}} (a_{i_1} + \dots + a_{i_{m+k}} + b_{j_1} + \dots + b_{j_k} + b_1 + \dots + b_m)^{r+2-l} \right]
 \end{aligned}$$

Portanto, obtemos que

$$A_{n+1,m} = A_{n,m-1} - (r+2)(a_{n+1} + b_m)A_{n,m} + S_{12} + (\Delta), \text{ onde}$$

$(\Delta) = - \sum_{l=2}^{r+2} \binom{r+2}{l} (a_{n+1} + b_m)^l$ (note que S_2 não aparece, pois em nossa manipulação surge um termo $-S_2$, que anula).

$$\left[\sum_{k=0}^r (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}} (a_{i_1} + \dots + a_{i_{m+k}} + b_{j_1} + \dots + b_{j_k} + b_1 + \dots + b_m)^{r+2-l} \right].$$

Porém, $S_{12} + (\Delta) = 0$ (veremos com o exemplo seguinte, para o caso $n = 3$ e $m = 2$, como ocorre esse anulamento, que pode ser facilmente generalizado).

Portanto, ficamos com

$$A_{n+1,m} = A_{n,m-1} - (r+2)(a_{n+1} + b_m)A_{n,m} \quad (3.11)$$

Por hipótese de indução, vale que $A_{n,m-1} = B_{n,m-1}$ e $A_{n,m} = B_{n,m}$. Assim, concluímos diretamente que $A_{n+1,m} = B_{n+1,m}$, provando o que queríamos. $\square$

Exemplo 3.4.1. *Mostremos que, nas condições do lema anterior*

$$S_{12} + (\Delta) = 0.$$

Faremos um exemplo para o caso $n = 3, m = 2$, logo, $r = 1, r + 1 = 2$ e $r + 2 = 3$.

$$\begin{aligned} S_{12} &= 3(a_4 + b_2) \cdot [-(a_1 + b_1)^2 - (a_2 + b_1)^2 - (a_3 + b_1)^2 + (a_1 + a_2 + b_1 + b_1)^2 + \\ &+ (a_1 + a_3 + b_1 + b_1)^2 + (a_2 + a_3 + b_1 + b_1)^2 - (a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_1 + b_1)^2] + \\ &3(a_4 + b_2)^2 \cdot [-(a_1 + b_1) - (a_2 + b_1) - (a_3 + b_1) + (a_1 + a_2 + b_1 + b_1) + \\ &+ (a_1 + a_3 + b_1 + b_1) + (a_2 + a_3 + b_1 + b_1) - (a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_1 + b_1)] - (a_4 + b_2)^3 = \\ &= -(a_4 + b_2)^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Delta) &= -3(a_4 + b_2)^2 \cdot [-(a_1 + a_2 + b_1 + b_2) - (a_1 + a_3 + b_1 + b_2) - (a_2 + a_3 + b_1 + b_2) + \\ &+ (a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_1 + b_2) + (a_1 + a_2 + a_3 + b_2 + b_1 + b_2)] - (a_4 + b_2)^3 \cdot (-1) = \\ &= (a_4 + b_2)^3. \end{aligned}$$

Portanto, somando S_{12} com (Δ) , claramente se anulam.

Lema 3.11. *Sejam m e n quaisquer, tal que $n \geq m$. Para todo $p \in \{1, \dots, r\}$, temos*

$$\sum_{k=0}^r (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}} (a_{i_1} + \dots + a_{i_{m+k}} + b_{j_1} + \dots + b_{j_k} + b_1 + \dots + b_m)^p = 0.$$

Demonstração. A demonstração é feita com indução sobre p . Para cada p fixado, usamos um argumento de indução análogo à demonstração do Lema 3.10. Mais detalhes podem ser vistos em [2]. $\square$

Exemplo 3.4.2. Vejamos para um caso particular como ocorre o anulamento dos fatores. Considere o caso $n = 4$, $m = 2$ e $p = 1$, ou seja,

$$\sum_{k=0}^2 (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq 2 \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{2+k} \leq 4}} (a_{i_1} + \dots + a_{i_{2+k}} + b_{j_1} + \dots + b_{j_k} + b_1 + b_2)^1 = 0.$$

Temos

$$\begin{aligned} & -(a_1 + a_2 + b_1 + b_2) - (a_1 + a_3 + b_1 + b_2) - (a_1 + a_4 + b_1 + b_2) - (a_2 + a_3 + b_1 + b_2) - (a_2 + a_4 + b_1 + b_2) - (a_3 + a_4 + b_1 + b_2) + (a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_1 + b_2) + (a_1 + a_2 + a_4 + b_1 + b_1 + b_2) + (a_1 + a_3 + a_4 + b_1 + b_1 + b_2) + (a_2 + a_3 + a_4 + b_1 + b_1 + b_2) + (a_1 + a_2 + a_3 + b_2 + b_1 + b_2) + (a_1 + a_2 + a_4 + b_2 + b_1 + b_2) + (a_1 + a_3 + a_4 + b_2 + b_1 + b_2) + (a_2 + a_3 + a_4 + b_2 + b_1 + b_2) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + b_1 + b_1 + b_1 + b_2) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + b_1 + b_2 + b_1 + b_2) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + b_2 + b_2 + b_1 + b_2) = \\ & = a_1(-1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1) + \\ & + a_2(-1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1) + \\ & + a_3(-1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1) + \\ & + a_4(-1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1) + \\ & + b_1(-1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 - 3 - 2 - 1) + \\ & + b_2(-1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 3) = 0. \end{aligned}$$

Por fim, com esses lemas, podemos apresentar dois novos teoremas, cujas demonstrações são simplificadas pelos resultados anteriores. Lembrando que nos próximos dois teoremas, $R = \oplus_{n \geq 0} R_n$ é um anel graduado Noetheriano com R_0 Artiniano.

Teorema 3.4.3. Suponha que R pode ser gerado sobre R_0 por elementos de grau 1. Seja $U = (u_{ij})$ uma matriz $n \times m$ com entradas em R , de modo que cada u_{ij} seja homogêneo de grau d_{ij} e a Equação (3.9) seja satisfeita. Se $I_m(U)$ tem grau $n - m + 1$, temos que a multiplicidade de $R_m(U)$ é dada por

$$e(R_m(U)) = e(R) \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n} d_{i_1 i_1} d_{i_2 i_2 - 1} \dots d_{i_{r+1} (i_{r+1} - r)},$$

onde $r = n - m$.

Demonstração. Como R pode ser gerado sobre R_0 por elementos de grau 1, da Observação 3.2.10 temos que a série de Hilbert de R é escrita como $P(R, t) = f(t)/(1 - t)^d$, onde d é a dimensão de R (Proposição 3.2.7). Então, pelo Teorema 3.2.16, a série de Hilbert de $R_m(U)$ é dada por

$$P(R_m(U), t) = \frac{f(t)\Delta(t)}{(1 - t)^d},$$

onde

$$\Delta(t) = 1 + \sum_{k=0}^r (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}} t^{d_{i_1 1} + \dots + d_{i_m m} + d_{i_{m+1} j_1} + \dots + d_{i_{m+k} j_k}}.$$

Do Lema 3.1, $ht(I_m(U)) \geq \text{grau}(I_m(U))$ e temos da Proposição 3.1.74 que

$$\dim R_m(U) = \dim R/I_m(U) \leq \dim R - ht(I_m(U)) \leq \dim R - \text{grau}(I_m(U)).$$

Logo, $\dim R_m(U) \leq d - (n - m + 1)$. Além disso, a outra desigualdade é sempre verdadeira pelo Lema 3.7. Então, a dimensão de $R_m(U)$ deve ser igual a $d - (n - m + 1)$. Sendo assim, multiplicamos e dividimos $P(R_m(U), t)$ por $(1 - t)^{-(n-m+1)}$, ficando com

$$P(R_m(U), t) = \frac{f(t)\Delta(t) \cdot (1 - t)^{-(n-m+1)}}{(1 - t)^d (1 - t)^{-(n-m+1)}} = \frac{f(t)\Delta(t)(1 - t)^{-(r+1)}}{(1 - t)^{d-(n-m+1)}}.$$

Portanto, o polinômio de Hilbert de $R_m(U)$ está na forma $\frac{f(t)\Delta(t)(1 - t)^{-(r+1)}}{(1 - t)^{d-(n-m+1)}}$ com o denominador elevado à dimensão de $R_m(U)$.

Sendo assim, do Teorema 3.3.20 temos que

$$e(R_m(U)) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t)\Delta(t)}{(1 - t)^{r+1}}, \text{ onde } r = n - m.$$

Note que $\Delta(1) = 0$ diretamente do Lema 3.9 e o denominador aplicado em $t = 1$ também se anula. Portanto, podemos usar L'Hopital para resolver o limite.

Vamos fazer uma análise das derivadas de $\Delta(t)$ e calcular as derivadas de $\Delta(t)$ em $t = 1$. Fixemos $A = d_{i_1 1} + \dots + d_{i_m m} + d_{i_{m+1} j_1} + \dots + d_{i_{m+k} j_k}$ para facilitar notações.

$$\Delta'(t) = \sum_{k=0}^r (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}} A \cdot t^{A-1}.$$

Logo, $\Delta'(1) = \sum_{k=0}^r (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}} A = 0$, onde a última igualdade vem do Lema

3.11. Então

$$\Delta''(t) = \sum_{k=0}^r (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}} A(A-1) \cdot t^{A-2}.$$

Do mesmo modo,

$$\Delta''(1) = \sum_{k=0}^r (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}} A \cdot (A-1) = \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}} A^2 - A = 0,$$

onde, novamente, a última igualdade vem do Lema 3.11.

Para $\ell \in \{1, \dots, r\}$, temos

$$\Delta^{(\ell)}(t) = \sum_{k=0}^r (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}} A(A-1) \cdot \dots \cdot (A-(\ell-1)) \cdot t^{A-\ell}.$$

Logo, $\Delta^{(\ell)}(1) = 0$ novamente do Lema 3.11.

O Lema 3.11 nos garante que para $\ell \in \{1, \dots, r\}$ as derivadas aplicadas em 1 são sempre 0. Para $\ell = r + 1$, temos que

$$\Delta^{(r+1)}(1) = \sum_{k=0}^r (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}} A^{r+1} - \alpha_r A^r + \alpha_{r-1} A^{r-1} - \dots + (-1)^k \alpha_1 A.$$

Portanto, pelo Lema 3.11, todos os termos em que A elevado até grau r se anulam, restando

$$\begin{aligned}\Delta^{(r+1)}(1) &= \sum_{k=0}^r (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}} A^{r+1} \\ &= \sum_{k=0}^r (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq n}} (d_{i_1 1} + \dots + d_{i_m m} + d_{i_{m+1} j_1} + \dots + d_{i_{m+k} j_k})^{r+1},\end{aligned}$$

que pelo Lema 3.10, pode ser reescrito por

$$\Delta^{(r+1)}(1) = (-1)^{r+1} (r+1)! \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n} d_{i_1 i_1} d_{i_2 (i_2-1)} \dots d_{i_{r+1} (i_{r+1}-r)}.$$

Então, todas as derivadas até ordem r , aplicadas em 1 se anulam no numerador e no denominador. O mesmo ocorre para $(1-t)^{r+1}$. Portanto, devemos aplicar L'Hopital até ordem $r+1$.

Aplicando a fórmula de Leibniz para as derivadas de $f(t) \cdot \Delta(t)$:

$$(h \cdot g)^{(l)}(t) = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} h^{(k)}(t) \cdot g^{(l-k)}(t),$$

obtemos

$$(f \cdot \Delta)^{(l)}(t)|_{t=1} = \sum_{k=0}^l \binom{l}{k} f^{(k)}(t)|_{t=1} \cdot \Delta^{(l-k)}(t)|_{t=1} = 0, \text{ para } l \in \{1, \dots, r\}.$$

Do que foi feito, vimos que todas as derivadas de $\Delta(t)$ se anulam até ordem r quando aplicado em $t = 1$, restando apenas o termo $f(1) \cdot \Delta^{(r+1)}$. No denominador, após derivar $r+1$ vezes e aplicar em $t = 1$, obtemos $(-1)^{r+1} (r+1)!$.

Portanto, finalizamos no cálculo do limite com

$$\begin{aligned}e(R_m(U)) &= \frac{(f \Delta)^{r+1}(1)}{(-1)^{r+1} (r+1)!} = \frac{f(1) \cdot \Delta^{(r+1)}(1)}{(-1)^{r+1} (r+1)!} \\ &= e(R) \cdot \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n} d_{i_1 i_1} d_{i_2 (i_2-1)} \dots d_{i_{r+1} (i_{r+1}-r)},\end{aligned}$$

concluindo o teorema. $\square$

Finalmente, observe que o mesmo tipo de cálculo pode ser feito quando R não é gerado sobre R_0 por elementos de grau 1, mas o anel quociente $R_m(U)$ precisa ter comprimento finito.

Teorema 3.4.4. *Sejam $R = K[x_1, \dots, x_s]$, K corpo, onde cada x_i tem grau w_i em R e $U = (u_{ij})$ uma matriz $(s+m-1) \times m$ com entradas em R , de modo que cada u_{ij} é homogêneo de grau d_{ij} e satisfaz $d_{ij} + d_{kl} = d_{il} + d_{kj}$. Se o comprimento de $R_m(U)$ for finito, então*

$$\ell(R_m(U)) = \frac{1}{w_1 \dots w_s} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq s+m-1} d_{i_1 i_1} d_{i_2 (i_2-1)} \dots d_{i_s (i_s-s+1)} \right).$$

Demonstração. Primeiramente, note que como $R = K[x_1, \dots, x_s]$ com K um corpo, então $\dim R = s$ (Exemplos 3.1.61 e 3.1.60). Ainda note que K é um anel Cohen-Macaulay (Exemplo 3.1.87). Portanto, do Exemplo 3.1.88, segue que R é um anel Cohen-Macaulay.

Seguidamente, como $\ell(R_m(U)) < \infty$, suponha que $\ell(R_m(U)) = l$. Sendo assim, $R_m(U)$ possui série de composição, logo, da Proposição 3.1.50, $R_m(U)$ satisfaz ambas as condições de cadeia, ou seja, $R_m(U)$ é Artiniano e Noetheriano. Portanto, $R_m(U)$ tem dimensão 0 (Teorema 3.1.70).

Então, de $0 = \dim R_m(U) = \dim R/I_m(U)$ e $\dim R = s$, do Teorema 3.1.89 e do fato de R ser Cohen-Macaulay, obtemos que $\text{grau}(I_m(U)) = s = (s + m - 1) - m + 1$ com U sendo uma matriz $(s + m - 1) \times m$.

Logo, usando o Teorema 3.2.16, obtemos que

$$P(R_m(U), t) = P(R, t) \cdot \Delta(t), \quad (3.12)$$

onde $\Delta(t)$ é como no teorema anterior.

Vimos que $R_m(U)$ é um módulo graduado (Proposição 3.2.11), ou seja, $R_m(U) = \bigoplus_{k \geq 0} R_k/(I_m(U))_k$, onde $(I_m(U))_k = I_m(U) \cap R_k$. Como, por hipótese, $R_m(U)$ tem comprimento finito igual a l , então devemos ter no máximo l fatores de $R_k/(I_m(U))_k$ não nulos na graduação.

De fato, suponha que tenhamos $l + 1$ elementos não nulo na graduação de $R_m(U)$ e, sem perda de generalidade, que sejam os primeiros $l + 1$ termos. Então do Corolário 3.1.58 deve ocorrer que

$$\ell(R_m(U)) = \ell(R_0/(I_m(U))_0) + \ell(R_1/(I_m(U))_1) + \dots + \ell(R_l/(I_m(U))_l) \geq l + 1, \quad (3.13)$$

pois $\ell(R_j/(I_m(U))_j) \geq 1$ para todo j . Portanto, $R_m(U)$ deve ter no máximo l elementos não nulos em sua graduação e, com isso, a série de Hilbert

$$P(R_m(U), t) = \sum_{n=0}^{l-1} \ell(R_n/(I_m(U))_n) t^n \text{ é polinomial com no máximo } l \text{ fatores.}$$

Deste modo, das Equações (3.13) e (3.12), $\ell(R_m(U)) = P(R_m(U), 1) = P(R, 1) \Delta(1)$.

Ainda, do Exemplo 3.2.3, podemos representar a série de Hilbert de R por

$$P(R, t) = \frac{1}{\prod_{i=1}^s (1 - t^{w_i})}.$$

$$\text{Portanto } \ell(R_m(U)) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\Delta(t)}{\prod_{i=1}^s (1 - t^{w_i})}.$$

Como $\Delta(1) = 0$ (análogo ao que vimos no teorema anterior) e $\prod_{i=1}^s (1 - t^{w_i}) = 0$ quando aplicamos $t = 1$, então podemos aplicar L'Hopital.

Analogamente ao que fizemos no teorema anterior, devemos aplicar L'Hopital $(r + 1)$ vezes, onde nesse caso $r = (s + m - 1) - m = s - 1$, ou seja, aplicaremos s vezes.

Além disso,

$$\Delta^{(s)}(1) = \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq m \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_{m+k} \leq s+m-1}} (d_{i_1 1} + \dots + d_{i_m m} + d_{i_{m+1} j_1} + \dots + d_{i_{m+k} j_k})^s$$

$$= \Delta^{(s)}(1) = (-1)^s (s)! \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq s+m-1} d_{i_1 i_1} d_{i_2(i_2-1)} \dots d_{i_s(i_s-s+1)},$$

onde a última igualdade vem do Lema 3.10

Agora, ao derivar $\prod_{i=1}^s (1 - t^{w_i})$ s vezes e aplicar cada uma de suas derivadas em $t = 1$, todas as derivadas até ordem $s - 1$ se anularão, restando apenas a derivada de ordem s , que aplicada em 1, resulta em $(-1)^s \cdot s! (w_1 \dots w_s)$. Portanto, voltando ao limite, ficamos com

$$\begin{aligned} \ell(R_m(U)) &= P(R_m(U), 1) = \frac{(-1)^s \cdot s! \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq s+m-1} d_{i_1 i_1} d_{i_2(i_2-1)} \dots d_{i_s(i_s-s+1)}}{(-1)^s \cdot s! (w_1 \dots w_s)} = \\ &= \frac{1}{w_1 \dots w_s} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq s+m-1} d_{i_1 i_1} d_{i_2(i_2-1)} \dots d_{i_s(i_s-s+1)} \right), \end{aligned}$$

finalizando o teorema. □

4 Singularidades associadas a símbolos de Boardman

O objetivo deste capítulo é definir um tipo importante de variedade associada a um germe de aplicação e um vetor especial.

Como apresentado nos capítulos iniciais, $\mathcal{O}_n$ é o anel dos germes de funções na origem de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}$, $\mathcal{O}_{n,p}$ é o $\mathcal{O}_n$ -módulo dos germes de aplicações na origem de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$, notando que $\mathcal{O}_{n,1} = \mathcal{O}_n$, e $J^k(n, p)$ é o conjunto dos k -jatos de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$, que é um espaço vetorial.

4.1 SINGULARIDADES DE ORDEM SUPERIOR

Nesta seção apresentamos conjuntos associados a um germe de aplicação, relativos a suas singularidades, como o conjunto singular e as singularidades de 1ª ordem do germe. Isso motiva a obtenção de conjuntos mais gerais (que não dependem de um germe específico), chamados de conjunto de singularidades de 1ª ordem e ordem superior. Isso motiva um tipo específico de vetores, chamados de símbolos de Boardman associados ao germe, conceito estendido na próxima seção.

Definição 4.1.1. *Seja $f \in \mathcal{O}_{n,p}$. O **conjunto singular** de f , denotado por $\Sigma(f)$, é o conjunto de todos os seus pontos singulares. A imagem de $\Sigma(f)$ é chamada de **conjunto de bifurcação**.*

Definição 4.1.2. *Seja $f \in \mathcal{O}_{n,p}$. Para cada $i = 1, \dots, \min\{n, p\}$ o **conjunto de singularidades de 1ª ordem** $\Sigma^i(f)$ de f é definido como o conjunto:*

$$\Sigma^i(f) = \{x \in \mathbb{C}^n : \dim(N(d_x f)) = i\},$$

onde $N(d_x f)$ é o núcleo da diferencial de f no ponto x .

Da definição de ponto singular de um germe (Definição 2.2.11),

$$\Sigma(f) = \bigcup_{i=0}^{r-1} \Sigma^{r-i}(f), \text{ onde } r = \min\{n, p\}.$$

Exemplo 4.1.3. *Considere $f \in \mathcal{O}_{2,2}$ definida por $f(x, y) = (x^2, y^2)$. Note que $N(d_{(x,y)} f) = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 \mid d_{(x,y)} f(u, v) = (0, 0)\}$.*

$$d_{(x,y)} f(u, v) = Df(x, y) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x) \cdot u = 0 \\ (2y) \cdot v = 0 \end{cases}.$$

Assim,

- Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$, então $u = v = 0$. Assim, $\Sigma^0(f) = \{x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\}$.

- Se $x \neq 0$ e $y = 0$, então $u = 0$ e v pode ser qualquer. Ainda, se $x = 0$ e $y \neq 0$, então $v = 0$ e u pode ser qualquer. Assim, $\Sigma^1(f) = (\{x = 0\} \cup \{y = 0\}) - \{(0, 0)\}$.
- Se $x = 0$ e $y = 0$, então u e v podem ser quaisquer. Logo, $\dim(N(d_{(x,y)}f)) = 2$ se, e somente se, $(x, y) = (0, 0)$. Portanto, $\Sigma^2(f) = \{(0, 0)\}$.

Deste modo, $\Sigma(f) = \Sigma^2(f) \cup \Sigma^1(f) = \{x = 0\} \cup \{y = 0\}$.

Observe que neste exemplo $\Sigma^i(f)$ é subvariedade de codimensão i , para todo i .

Exemplo 4.1.4. Considere $f \in \mathcal{O}_{2,2}$ definida por $f(x, y) = (x^2 + y, y^2)$.

Temos

$$d_{(x,y)}f(u, v) = Df(x, y) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Note que $\Sigma^2(f) = \emptyset$ pois $\dim(N(d_{(x,y)}f)) \neq 2$, para qualquer (x, y) pertencente a $\mathbb{C}^2$.

Temos que $\dim(N(d_{(x,y)}f)) = 1$ apenas se $x = 0$ ou $y = 0$, incluindo $(0, 0)$. Logo, $\Sigma^1(f) = \{x = 0\} \cup \{y = 0\}$.

Como $\dim(N(d_{(x,y)}f)) = 0$ somente para $x \neq 0$ e $y \neq 0$, obtemos que $\Sigma^0(f)$ é formado por todos os pontos fora dos eixos de coordenadas.

Observação 4.1.5. No exemplo anterior $\Sigma^1(f)$ não é uma subvariedade. Porém podemos fazer uma mudança de variáveis em f , f_s , de tal forma que $\Sigma^1(f_s)$ passe a ser uma subvariedade para todo $s \neq 0$.

Considere a seguinte mudança $f_s \in \mathcal{O}_{2,2}$ definida por

$$f_s(x, y) = (x^2 + y, y^2 + 4sx), \quad s \neq 0.$$

Então $Df_s(x, y) \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 4s & 2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Se fixarmos $s \neq 0$, então

$$\begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 4s & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (2x) \cdot u + v = 0 \\ (4s) \cdot u + (2y) \cdot v = 0 \end{cases}.$$

Assim, da primeira equação obtemos $v = -2xu$, substituindo na segunda equação, temos que $4su - 2y \cdot 2xu = 0 \Leftrightarrow u(s - xy) = 0$. Se $u = 0$, então da primeira equação, $v = 0$, logo, nos pontos onde $u = 0$ é solução, estão em $\Sigma^0(f_s)$. Portanto, para $\Sigma^1(f_s)$, devemos ter que $s - xy = 0$. Sendo assim, os pontos de $\Sigma^1(f_s)$ são dados por uma hipérbole $xy = s$, que é uma subvariedade.

Logo, o conjunto de singularidade $\Sigma^1(f_s)$ mudou de um par de retas se interceptando para um par de curvas disjuntas.

Definição 4.1.6. Em $J^1(n, p)$ definimos o seguinte conjunto:

$$\Sigma^i = \{j^1 f(x) \in J^1(n, p) : \dim(N(j^1 f(x))) = i\}.$$

Observação 4.1.7. Note que tomamos o 1-jato da f em x , então queremos a expansão de Taylor apenas de ordem 1, ou seja, algo em função da diferencial, que é uma transformação linear e pode ser vista como uma matriz.

Teorema 4.1.8. *O conjunto Σ^i é uma subvariedade de $J^1(n, p)$ de codimensão $i(p-n+i)$.*

Demonstração. Essa demonstração é feita em dois passos:

1. Seja $E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ uma matriz $p \times n$ e A uma matriz $k \times k$ invertível.

Afirmção: E tem posto k se, e somente se, $D = CA^{-1}B$.

Note que se tomamos

$$E' = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix},$$

como A tem posto k , segue imediatamente que:

- (a) Se $\text{posto } E = k = \text{posto } E'$ segue que existem k linhas ou colunas L.I. na matriz E' , porém A é $k \times k$ invertível, portanto devemos ter que $-CA^{-1}B + D$ é múltiplo da matriz 0, ou seja, $D = CA^{-1}B$.
- (b) Agora, se $D = CA^{-1}B$.
 - i. Em E' temos um bloco $-CA^{-1}B + D$ nulo, assim, $\text{posto}(E') = k$.
 - ii. Em E temos $E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -CA^{-1}B \end{pmatrix}$ é múltiplo de C e assim, como A é $k \times k$ invertível, segue que $\text{posto}(E) = k$.

Portanto, segue a afirmação E tem posto k se, e somente se, $D = CA^{-1}B$.

2. Sejam E_0 uma matriz em Σ^i , ou seja, $\exists f$ tal que $E_0 = j^1 f(x)$ e $\dim N(j^1 f(x)) = i$. Logo, $\text{posto}(E_0) = \text{posto}(j^1 f(x)) = \dim(\text{Im}(j^1 f(x))) = k = n - i$, então k é tal que $i + k = n$, onde a última igualdade vem do Teorema do Núcleo e da Imagem. Podemos supor sem perda de generalidade que

$$E_0 = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix},$$

com A_0 uma matriz $k \times k$ invertível. Devemos exibir uma vizinhança aberta U de E_0 em $J^1(n, p)$ e mostrar que $U \cap \Sigma^i$ é uma subvariedade de codimensão $i(p-n+i)$. Definimos então uma vizinhança aberta U de E_0 , com a propriedade que para cada matriz

$$E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

nesta vizinhança a matriz $A_{k \times k}$ é invertível. Considere, agora, a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{ccc} f : & U & \rightarrow J^1(p-k, n-k) \\ & E & \mapsto D - CA^{-1}B \end{array}.$$

Se f é uma submersão, do Exemplo 2.1.19 e a Proposição 2.1.20, segue que $f^{-1}(0)$ é uma subvariedade de codimensão:

$$(p-k)(n-k) = (p-k)i = i(p-n(n-i)) = i(p-n+1).$$

Mas $f^{-1}(0) = U \cap \Sigma^i$, pois se $E \in f^{-1}(0)$ então, $D = CA^{-1}B$ se, e somente se, E tem posto k se, e somente se, $\dim(N(E)) = n - k = i$, portanto $E \in \Sigma^i$.

Portanto, resta mostrar que f é submersão, ou seja, para todo $x \in J^k(n, p) \simeq \mathbb{C}^{n \cdot p}$, $d_x f$ é sobrejetora. Seja

$$d_x f : T_x U \rightarrow T_{f(x)} J^1(p - k, n - k),$$

com $x = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ e $T_x U = \{\lambda'(0) \mid \lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \text{ suave e } \lambda(0) = x\}$.

Seja $y \in J^1(p - k, n - k) \Rightarrow y$ é uma matriz $(p - k) \times (n - k)$. Definimos $\lambda(t) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & ty + D \end{pmatrix}$. Logo, $d_x f(x) = d_x f(\lambda'(0)) = d_0(f \circ \lambda) = y$, pois

$$(f \circ \lambda)(t) = f \begin{pmatrix} A & B \\ C & ty + D \end{pmatrix} = (ty + D) - CA^{-1}B, \text{ e } (f \circ \lambda)'(t) = y \Rightarrow (f \circ \lambda)'(0) = y.$$

Assim, $d_x f$ é sobrejetora. Assim, f é submersão, pois x é qualquer. $\square$

No que segue, abordamos conceitos necessários para a definição do conjunto de singularidades de ordem superior.

Definição 4.1.9. Para um ideal $I = \langle f_1, \dots, f_p \rangle$ em $\mathcal{O}_n$. Para cada s inteiro, com $1 \leq s \leq \min\{n, p\}$ definimos o ideal $\Gamma_s I = I + I_s(Df)$ onde Df é a matriz jacobiana de f num ponto geral (Definição 2.2.6) e $I_s(Df)$ é o ideal gerado por todos menores de ordem s da matriz jacobiana de $f = (f_1, \dots, f_p)$ num ponto geral com relação ao sistema de coordenadas $y_1, \dots, y_n$ em $\mathbb{C}^n$, que é:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial y_n} \end{pmatrix}_{p \times n}. \quad (4.1)$$

Quando $s > \min\{n, p\}$, convencionamos que $I_s(Df) = \{0\}$.

Teorema 4.1.10. O ideal $\Gamma_s I$ não depende da escolha dos geradores e nem da escolha das coordenadas, isto é, se $g_1, \dots, g_q$ é outro sistema de geradores de I em relação a um sistema de coordenadas $z_1, \dots, z_n$, então $\Gamma_s I$ coincide com o ideal gerado por I e pelo ideal gerado pelos menores de ordem s da matriz jacobiana:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial g_q}{\partial z_n} \end{pmatrix}_{q \times n}. \quad (4.2)$$

Demonstração. Queremos mostrar que $\Gamma_s \langle f_1, \dots, f_p \rangle = \Gamma_s \langle g_1, \dots, g_q \rangle$ para todo s , ou seja, vamos mostrar que

$$\langle f_1, \dots, f_p \rangle + I_s(Df) = \langle g_1, \dots, g_q \rangle + I_s(Dg),$$

onde $\langle f_1, \dots, f_p \rangle = I = \langle g_1, \dots, g_q \rangle$.

É suficiente mostrar que qualquer menor de ordem s de (4.2) pertence a $\Gamma_s \langle f_1, \dots, f_p \rangle$, pois se isso ocorre, temos que $I_s(Dg) \subset \Gamma_s \langle f_1, \dots, f_p \rangle$, portanto, temos que

$$\Gamma_s \langle g_1, \dots, g_q \rangle = I + I_s(Dg) \subset I + \Gamma_s \langle f_1, \dots, f_p \rangle = \Gamma_s \langle f_1, \dots, f_p \rangle.$$

A outra inclusão $(\Gamma_s \langle g_1, \dots, g_q \rangle \supset \Gamma_s \langle f_1, \dots, f_p \rangle)$ é análoga.

Como cada $g_i \in I = \langle f_1, \dots, f_p \rangle = \langle g_1, \dots, g_q \rangle$, então g_i pode ser escrito como uma combinação linear de f_k , com coeficientes em $\mathcal{O}_n$, seja $g_i = \sum_{t=1}^p a_{i,t} f_t$. Portanto, cada $\frac{\partial g_i}{\partial z_j}$ pode ser escrito como a mesma combinação linear de $\frac{\partial f_k}{\partial z_j}$ mais um elemento de I , pois

$$\frac{\partial g_i}{\partial z_j} = \sum_{k=1}^p \frac{\partial a_{i,k}}{\partial z_j} \cdot f_k + \frac{\partial f_k}{\partial z_j} \cdot a_{i,k},$$

onde os termos da primeira parte do somatório estão em $I = \langle f_1, \dots, f_p \rangle$. Logo, a matriz da Equação (4.2) fica da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^p \frac{\partial a_{1,k}}{\partial z_1} \cdot f_k + \frac{\partial f_k}{\partial z_1} \cdot a_{1,k} & \cdots & \sum_{k=1}^p \frac{\partial a_{1,k}}{\partial z_n} \cdot f_k + \frac{\partial f_k}{\partial z_n} \cdot a_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^p \frac{\partial a_{q,k}}{\partial z_1} \cdot f_k + \frac{\partial f_k}{\partial z_1} \cdot a_{q,k} & \cdots & \sum_{k=1}^p \frac{\partial a_{q,k}}{\partial z_n} \cdot f_k + \frac{\partial f_k}{\partial z_n} \cdot a_{q,k} \end{pmatrix}_{q \times n}. \quad (4.3)$$

Usando a multilinearidade do determinante temos que qualquer menor $s \times s$ de (4.3) pertence ao ideal gerado por $I = \langle f_1, \dots, f_p \rangle$ e pelos menores $s \times s$ da matriz jacobiana:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial z_n} \end{pmatrix}_{p \times n}. \quad (4.4)$$

Portanto, basta mostrar que qualquer menor de ordem s da Equação (4.4) pertence a $\Gamma_s \langle f_1, \dots, f_p \rangle$.

Para isto, observe que pela Regra da Cadeia, podemos escrever cada $\frac{\partial}{\partial z_j}$ como combinação linear de $\frac{\partial}{\partial y_k}$, com coeficientes em $\mathcal{O}_n$. O resultado segue novamente usando a multilinearidade do determinante, concluindo que $I_s(Dg) \subset \Gamma_s \langle f_1, \dots, f_p \rangle$. $\square$

Observação 4.1.11. *Temos as inclusões:*

$$I \subseteq \Gamma_n I \subseteq \Gamma_{n-1} I \subseteq \dots \subseteq \Gamma_1 I.$$

De fato, tome $I = \langle f_1, \dots, f_p \rangle$, com o sistema de coordenadas $\{x_1, \dots, x_n\}$. Vamos mostrar que $\Gamma_n I \subset \Gamma_{n-1} I = I + I'$, onde I' é o ideal gerado pelos menores de ordem $n-1$ de

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Seja $x \in \Gamma_n I = I + I''$. Então $x = r + s$, com $r \in I$ e $s \in I''$, onde I'' é o ideal gerado pelos menores de ordem n de A . Então queremos mostrar que $s \in I'$.

Como $s \in I''$, segue que s é combinação linear dos menores de ordem n de A . Por Laplace, os menores de ordem n podem ser decompostos como combinação linear dos menores de ordem $n-1$ de A e, com isso, $s \in I'$.

As outras inclusões seguem de maneira análoga.

Exemplo 4.1.12. Seja $I = \langle x^k \rangle$ em $\mathcal{O}_1$, com $k \geq 1$. $\Gamma_1 I$ é o ideal gerado por I e pelo ideal dos menores 1×1 da matriz jacobiana (kx^{k-1}) , logo $\Gamma_1 I = \langle x^{k-1} \rangle$ e $\Gamma_s I = \langle x^k \rangle$, para $s \geq 2$.

Exemplo 4.1.13. Seja $I = \langle xy, x^2 + y^2 \rangle$ em $\mathcal{O}_2$. $\Gamma_1 I$ é o ideal gerado por I e pelo ideal dos menores 1×1 da matriz jacobiana:

$$D(I) = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}.$$

Logo $\Gamma_1 I = \langle x, y \rangle$. O ideal $\Gamma_2 I$ é gerado por I e pelo ideal do menor 2×2 da matriz J , assim $\Gamma_2 I = \langle xy, x^2 + y^2, y^2 - x^2 \rangle = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$ e $\Gamma_s I = I$ para $s \geq 3$.

Notação: Dado um ideal $I \subseteq \mathcal{O}_n$ adotamos a notação: $\Delta^s I = \Gamma_{n-s+1} I$.

Definição 4.1.14. Nos referimos a $\Delta^1 I, \Delta^2 I, \dots, \Delta^n I$ como as **sucessivas extensões jacobianas** do ideal I .

Observação 4.1.15. Temos portanto as seguintes inclusões:

$$I = \Delta^0 I \subseteq \Delta^1 I \subseteq \Delta^2 I \subseteq \dots \subseteq \Delta^n I. \quad (4.5)$$

Definição 4.1.16. Se I é um ideal próprio de $\mathcal{O}_n$ ($I \neq \mathcal{O}_n$), a **extensão jacobiana crítica** de I é o último ideal $\Delta^{i_1} I$ na sequência (4.5) que é próprio.

Observação 4.1.17. Considerando $I' = \Delta^{i_1} I$ a extensão jacobiana crítica de I , denotamos por $\Delta^{i_1 i_2} I$ a extensão jacobiana crítica de I' . Desta maneira, obtemos uma sequência crescente $\Delta^{i_1} I, \Delta^{i_1 i_2} I, \dots$ de sucessivas extensões jacobianas críticas de I .

Definição 4.1.18. Nas condições da observação anterior dizemos que I é de **símbolo de Boardman** $(i_1, i_2, \dots, i_k; 0)$ ou $(i_1, i_2, \dots, i_k; 0)$ é o **símbolo de Boardman** de I , onde a notação denota que o último elemento do vetor deve ser 0.

Notação: Denotamos 1_k para $(1, \dots, 1)$, com k -repetições do número 1.

Exemplo 4.1.19. 1. O símbolo de Boardman do ideal $I = \langle x^k \rangle$ em $\mathcal{O}_1$, é $(1_{(k-1)}; 0)$. De fato,

$$\Delta^0 I = \Gamma_{1-0+1} I = \Gamma_2 I = \langle x^k \rangle + I_2([kx^{k-1}]) = \langle x^k \rangle;$$

$$\Delta^1 I = \Gamma_{1-1+1} I = \Gamma_1 I = \langle x^k \rangle + I_1([kx^{k-1}]) = \langle x^k \rangle + \langle x^{k-1} \rangle = \langle x^{k-1} \rangle;$$

$$\Delta^2 I = \Gamma_{1-2+1} I = \Gamma_0 I = \mathcal{O}_1 \text{ (por convenção).}$$

Logo, $i_1 = 1$. Seja $I' = \Delta^1 I = \langle x^{k-1} \rangle$, então

$$\Delta^0 I' = \Gamma_{1-0+1} I' = \Gamma_2 I' = \langle x^{k-1} \rangle + I_2([(k-1)x^{k-2}]) = \langle x^{k-1} \rangle;$$

$$\Delta^1 I' = \Gamma_{1-1+1} I' = \Gamma_1 I' = \langle x^{k-1} \rangle + I_1([(k-1)x^{k-2}]) = \langle x^{k-2} \rangle;$$

$$\Delta^2 I' = \Gamma_{1-2+1} I' = \Gamma_0 I' = \mathcal{O}_1 \text{ (por convenção).}$$

Logo, $i_2 = 1$. Prosseguindo analogamente, temos que $i_3 = i_4 = \dots = i_{k-1} = 1$ e para determinar o i_k temos 1 no determinante jacobiano de I . Logo, $i_k = 0$ e não temos continuação, pois não teríamos escolha para o $I^{(k)}$ ($I^{(k)}$ é o k -ésimo termo de $I', I'', I''', \dots$).

2. O símbolo de Boardman do ideal $I = \langle xy, x^2 + y^2 \rangle$ em $\mathcal{O}_2$, é $(2; 0)$. De fato,

$$\Delta^0 I = I;$$

$$\Delta^1 I = \Gamma_2 I = I + I_2 \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = \langle xy, x^2 + y^2 \rangle + \langle 2y^2 - 2x^2 \rangle = \langle y^2 - x^2, xy, x^2 + y^2 \rangle;$$

$$\Delta^2 I = \Gamma_1 I = I + I_1 \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = \langle x, xy, y \rangle = \langle x, y \rangle;$$

$$\Delta^3 I = \Gamma_0 I = \mathcal{O}_2.$$

Logo, $i_1 = 2$ e $I' = \Delta^2 I = \langle x, y \rangle$, então

$$\Delta^0 I' = I';$$

$\Delta^1 I' = \Gamma_{2-1+1} I' = \Gamma_2 I' = I' + I_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{O}_2$, pois $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ tem um menor de ordem 2 com determinante igual a 1. Logo, $i_2 = 0$ e assim, o símbolo de Boardman é $(2; 0)$.

Definição 4.1.20. O **símbolo de Boardman** de um germe $f = (f_1, \dots, f_p) \in \mathcal{O}_{n,p}$ é definido como o símbolo de Boardman do ideal $I_f = \langle f_1, \dots, f_p \rangle$. Quando f tem um símbolo de Boardman $(i_1, \dots, i_k; 0)$ dizemos que f **tem tipo** $\Sigma^{i_1, \dots, i_k}$.

Exemplo 4.1.21. 1. Seja $f \in \mathcal{O}_{1,1}$, um germe dado por $f(x) = x^k$. Por definição, é o ideal gerado por $I_f = \langle x^k \rangle$, logo, conforme visto no Exemplo 4.1.19, f terá $(1_{(k-1)}; 0)$ como símbolo de Boardman.

2. Seja $f \in \mathcal{O}_{2,2}$, dada por $f(x, y) = (xy, x^2 + y^2)$, logo, $I_f = \langle xy, x^2 + y^2 \rangle$, que tem $(2; 0)$ como símbolo de Boardman do Exemplo 4.1.19.

Observação 4.1.22. Note que é possível definir símbolos de Boardman para um germe numa vizinhança de qualquer ponto e mostrar que é equivalente a tomar os símbolos de Boardman de um germe numa vizinhança do zero.

Teorema 4.1.23. Os primeiros k inteiros no símbolo de Boardman de um germe de aplicação $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ dependem apenas do k -jato de f .

Demonstração. Sejam I o ideal gerado pelas componentes $f_1, \dots, f_p$ de f e $(i_1, i_2, \dots, i_k; 0)$ o símbolo de Boardman de I .

Portanto, temos que $\Delta^{i_1} I = I + I_{n-i_1+1}$, onde I depende da f e dos menores de ordem $n - i_1 + 1$ da $D(I)$ que depende das derivadas de ordem 1 das componentes da f , ou seja, Δ^{i_1} depende das f_i e das derivadas parciais de ordem 1. Definimos $\Delta^{i_1} I = I'$.

Agora, se tomamos

$$\Delta^{i_2}(\Delta^{i_1} I) = \Delta^{i_2} I' = I' + I_{n-i_2+1}(D(I')),$$

onde I' depende das f_i e das derivadas parciais de ordem 1, logo, $\Delta^{i_2}(\Delta^{i_1} I)$ irá depender das f_i e das derivadas parciais até ordem 2.

Continuando, provamos por indução que o ideal $\Delta^s(\Delta^{i_{k-1}} \dots \Delta^{i_1} I)$, sendo próprio ou não, dependerá dos valores das derivadas parciais até ordem k das f_i . Portanto i_k depende apenas do k -jato de f . $\square$

Definição 4.1.24. Definimos $\Sigma^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ como o subconjunto do espaço dos jatos, composto dos jatos que têm um representante de germe que tem símbolo de Boardman $(i_1, i_2, \dots, i_k; 0)$. Este conjunto recebe o nome de conjunto das **singularidades de ordem superior**.

Teorema 4.1.25. Uma condição necessária e suficiente para que o conjunto $\Sigma^{i_1, i_2, \dots, i_k} \subseteq J^k(n, p)$ seja não vazio é que as seguintes condições estejam satisfeitas:

1. $n \geq i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_k \geq 0$;
2. $i_1 \geq n - p$;
3. se $i_1 = n - p$ então $i_1 = i_2 = \dots = i_k$.

Demonstração. Necessidade: Suponhamos que o conjunto $\Sigma^{i_1, i_2, \dots, i_k} \subseteq J^k(n, p)$ seja não vazio, portanto, obtemos $n \geq i_1$ e $i_l \geq 0$ para qualquer $l = 1, \dots, k$.

Porém resta mostrar que $i_j \geq i_{j+1}$. Suponha que ocorre $i_j < i_{j+1}$:

Observe que para tomar i_{j+1} , o ideal $\Delta^{i_{j+1}}(\Delta^{i_j} \Delta^{i_{j-1}} \dots \Delta^{i_1} I)$ é próprio e é gerado pelos menores $n - i_{j+1} + 1$ da matriz jacobiana de $\Delta^{i_j} \Delta^{i_{j-1}} \dots \Delta^{i_1} I$;

Para tomar i_j , o ideal $\Delta^{i_j}(\Delta^{i_{j-1}} \dots \Delta^{i_1} I)$ é próprio e é gerado pelos menores $n - i_j + 1$ da matriz jacobiana de $\Delta^{i_{j-1}} \dots \Delta^{i_1} I$;

Então, obtemos de $i_j < i_{j+1}$ que $n - i_j + 1 > n - i_{j+1} + 1$. Logo,

para i_j , o ideal $\Delta^{i_j}(\Delta^{i_{j-1}} \dots \Delta^{i_1} I)$ (que é próprio) é gerado por menores de maior ordem com a matriz jacobiana dependendo de derivadas parciais de ordem menor que as da matriz jacobiana para gerar o i_{j+1} ;

para i_{j+1} , o ideal $\Delta^{i_{j+1}}(\Delta^{i_j} \Delta^{i_{j-1}} \dots \Delta^{i_1} I)$ (que é próprio) é gerado por menores de menor ordem com a matriz jacobiana dependendo de derivadas parciais de ordem maior que as da matriz jacobiana para gerar o i_j ;

Porém, para i_{j+1} , aparecerão os geradores de $\Delta^{i_j}(\Delta^{i_{j-1}} \dots \Delta^{i_1} I)$. Sendo assim, é impossível que ocorra $i_j < i_{j+1}$, segue diretamente que $\Delta^s(\Delta^{i_j}(\Delta^{i_{j-1}} \dots \Delta^{i_1} I))$ deve ser próprio para s no máximo igual a i_j .

Para mostrar o item 2, faremos por absurdo. Suponha que

$$i_1 < n - p \Rightarrow i_1 + 1 \leq n - p \Rightarrow n - (i_1 + 1) + 1 \geq n - (n - p) + 1.$$

Logo, pela Observação 4.1.15, temos que $\Delta^{i_1+1} I = \Gamma_{n-(i_1+1)+1} I \subseteq \Gamma_{n-(n-p)+1} I = \Gamma_{p+1} I = I$. Portanto, $\Delta^{i_1+1} I \subseteq I \Rightarrow \Delta^{i_1+1} I$ é próprio, concluindo o absurdo, pois i_1 é tomado tal que $\Gamma_{i_1} I$ é próprio e Γ_{i_1+1} não é próprio. Assim, $i_1 \geq n - p$.

O item 3 segue do fato que se $i_1 = n - p$, então como $i_1 = n - p$, temos $\Delta^{i_1} I = \Delta^{n-p} I = \Gamma_{n-(n-p)+1} I = \Gamma_{p+1} I = I$ e portanto $i_1 = i_2 = \dots = i_k$.

Suficiência: Suponhamos que 1, 2 e 3 estejam satisfeitas.

Temos que encontrar um germe $f \in \mathcal{O}_{n,p}$, com componentes $f_1, \dots, f_p$, que tenha tipo $\Sigma^{i_1, i_2, \dots, i_k}$. Considere dois casos:

1º caso: $i_1 = n - p$. Neste caso, escolhemos: $f_1 = x_1, \dots, f_p = x_p$.

Note que $f = (f_1, \dots, f_p)$ realmente está em $\Sigma^{i_1, \dots, i_k}$ porque

$$D(I) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x_1)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial(x_1)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial(x_p)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial(x_p)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [Id]_{k \times k} & [0]_{k \times (n-k)} \\ [0]_{(p-k) \times k} & [0]_{(p-k) \times (n-k)} \end{pmatrix}$$

terá um bloco $p \times p$ sendo a matriz identidade e o restante, completo de 0. Portanto, sempre que tomarmos $\Delta^s I$ com $s > i_1 = n - p \Rightarrow n - s + 1 < n - (n - p) = p$, como temos a matriz identidade $p \times p$, sempre temos um menor igual a 1, deixando de ser próprio.

Quando $s \leq i_1 = n - p$ temos os menores todos nulos, fazendo com que $\Delta^s I$ sejam sempre próprios. Portanto, $f \in \Sigma^{i_1, \dots, i_k}$ pois $i_1 = n - p$ e do passo 3 segue que $i_1 = i_2 = \dots = i_k$ e o processo se repete de maneira análoga.

2º caso: $i_1 > n - p$. Escolhemos:

$$\begin{cases} f_i = x_i, & \text{se } 1 \leq i \leq n - i_1; \\ f_i = 0, & \text{se } n - i_1 + 2 \leq i \leq p; \\ f_{n-i_1+1} = \sum_{n-i_1+1}^{n-i_2} x_j^2 + \sum_{n-i_2+1}^{n-i_3} x_j^3 + \dots, & \text{se caso contrário.} \end{cases}$$

Esse caso não será demonstrado com detalhes, mas em resumo, as f_i são tomadas de maneira conveniente para que aconteça perfeitamente que $\Delta^{i_j} U$ seja próprio e $\Delta^{i_j+1} U$ não seja próprio (aqui U representa os ideais em que iremos calcular as extensões jacobianas). $\square$

Exemplo 4.1.26. Como consequência do resultado anterior, os únicos conjuntos Σ^i não vazios no espaço dos jatos $J^2(2, 2)$ são: $\Sigma^{2,2}, \Sigma^{2,1}, \Sigma^{2,0}, \Sigma^{1,1}, \Sigma^{1,0}$ e $\Sigma^{0,0}$.

4.2 EXTENSÕES JACOBIANAS ITERADAS

Nesta seção, apresentamos ideais especiais associados a um germe de aplicação, caracterizados por um tipo especial de vetor.

Definição 4.2.1. Sejam $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ e $I = \langle g_1, \dots, g_r \rangle$ um ideal de $\mathcal{O}_n$. Para cada $t \in \{1, \dots, n\}$ definimos o ideal

$$\Delta_t(f, I) := I + I_t(D(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_r)),$$

onde $I_t(*)$ é o ideal gerado por todos menores de ordem t da matriz jacobiana associada. Por convenção, escrevemos, $\Delta_t(f, I) = I$, quando $t > \min\{n, p\}$.

Exemplo 4.2.2. Sejam $f \in \mathcal{O}_{2,2}$, dada por $f(x, y) = (xy, y)$, e $I = \langle y^2, xy, x^2y \rangle$.

1. $t = 1$: $\Delta_1(f, I) = I + I_1(D(f_1, f_2, g_1, g_2, g_3))$.

$$D(f_1, f_2, g_1, g_2, g_3) = \begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 1 \\ 0 & 2y \\ y & x \\ 2xy & x^2 \end{bmatrix} \Rightarrow I_1(D(f_1, f_2, g_1, g_2, g_3)) = \langle 1, x, y, xy \rangle.$$

Logo, $\Delta_1(f, I) = I + I_1(D(f_1, f_2, g_1, g_2, g_3)) = \langle y^2, xy, x^2y \rangle + \langle 1, x, y, xy \rangle = \mathcal{O}_2$, pois 1 é um dos geradores.

2. $t = 2$: $\Delta_2(f, I) = I + I_2(D(f_1, f_2, g_1, g_2, g_3)) = \langle y^2, xy, x^2y \rangle + \langle y, 2y^2, xy - xy, yx^2 - 2x^2y, -y, -2xy, -2y^2, -4xy^2, x^2y - 2x^2y \rangle = \langle y, xy, y^2, x^2y, xy^2 \rangle$.
3. $t > 2$: Note que $n = 2$, portanto nesse caso $\Delta_t(f, I) = I, \forall t > 2$.

Note que na Seção 4.1 vimos que os símbolos de Boardman dependiam de um ideal de $\mathcal{O}_n$ ou uma $f \in \mathcal{O}_{n,p}$. Do Teorema 4.1.25 concluímos que se forem satisfeitas algumas propriedades, garantimos que existe um germe f com o determinado Símbolo de Boardman. Portanto, nos motiva para a seguinte definição e garante que está bem definida.

Definição 4.2.3. Dados $n, p \geq 1$, definimos o **conjunto dos símbolos de Boardman** $\mathcal{B}(n, p)$ sendo formado pelos vetores $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$ de números inteiros tais que :

1. $k \geq 1$;
2. $n \geq i_1 \geq \dots \geq i_k \geq 0$;
3. $i_1 \geq n - p$;
4. se $i_1 = n - p$, então $i_1 = i_2 = \dots = i_k$.

Se $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$, o **comprimento** de $\mathbf{i}$, denotado por $|\mathbf{i}|$, é o número k .

Observação 4.2.4. A definição anterior para símbolo de Boardman está num contexto mais geral do que foi feito na Seção 4.1, não necessariamente dependendo de um germe de $\mathcal{O}_{n,p}$ ou ideal de $\mathcal{O}_n$.

Observação 4.2.5. Segue da definição que

$$\mathcal{B}(n, p) \subset \mathcal{B}(n + 1, p + 1) \subset \mathcal{B}(n + 2, p + 2) \subset \dots$$

Note que da natureza de como que são descritos os símbolos de Boardman, é dificultoso mapeá-los. No que segue, exemplificamos isso.

Exemplo 4.2.6. 1. Sejam $n = p = 2$.

Para $k = 1$, temos que (a_1) é símbolo de Boardman se, e somente se, $a_1 = 0, 1, 2$;

Para $k = 2$, temos que $\mathbf{i} = (a_1, a_2)$ é símbolo de Boardman se, e somente se, $\mathbf{i} = (2, 2), (2, 1), (2, 0), (1, 1), (1, 0), (0, 0)$;

Para $k = 3$, temos que $\mathbf{i} = (a_1, a_2, a_3)$ é símbolo de Boardman se, e somente se, $\mathbf{i} = (2, 2, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 0), (2, 1, 1), (2, 1, 0), (2, 0, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 0)$;

Para $k = 4$, temos que $\mathbf{i} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ é símbolo de Boardman se, e somente se, $\mathbf{i} = (2, 2, 2, 2), (2, 2, 2, 1), (2, 2, 2, 0), (2, 2, 1, 1), (2, 2, 1, 0), (2, 2, 0, 0), (2, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 0), (2, 1, 0, 0), (2, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 0)$.

⋮

2. Seja $n = 4, p = 1$. Os vetores $(2), (2, 1) \in \mathcal{B}(n, p)$. Já o símbolo $(1, 1) \notin \mathcal{B}(n, p)$, pois $i_1 < n - p$.

Definição 4.2.7. *Sejam $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ e $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{B}(n, p)$. Definimos indutivamente, a **extensão jacobiana iterada** de f em relação a $\mathbf{i}$, como segue:*

$$J_{i_1, \dots, i_k}(f) := \begin{cases} \Delta_{n-i_1+1}(f, \{0\}) & \text{se } k = 1 \\ \Delta_{n-i_k+1}(f, J_{i_1, \dots, i_{k-1}}(f)) & \text{se } k > 1 \end{cases}.$$

Observação 4.2.8. *Note que*

Se $k = 1$: $J_{i_1}(f) = \Delta_{n-i_1+1}(f, \{0\}) = \{0\} + I_{n-i_1+1}(D(f, 0)) = I_{n-i_1+1}(D(f))$.

Se $k > 1$: Supondo que $J_{i_1, \dots, i_{k-1}}(f) = \langle g_1, \dots, g_r \rangle$. Então

$J_{i_1, \dots, i_k}(f) = J_{i_1, \dots, i_{k-1}}(f) + I_{n-i_k+1}(D(f, g))$, onde $(f, g) = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_r)$.

Exemplo 4.2.9. *Sejam $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ e $\mathbf{i} = (n)$. Então, temos que*

$$J_{(n)} = \Delta_{n-n+1}(f, \{0\}) = I_1(Df) = \langle \partial f_i / \partial x_j, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, n \rangle.$$

Exemplo 4.2.10. *Sejam $f \in \mathcal{O}_{2,2}$, dada por $f(x, y) = (xy, y^2)$, $\mathbf{i} = (2, 1, 1)$, que é um símbolo de Boardman de $\mathcal{B}(2, 2)$ (vimos no Exemplo 4.2.6). Vamos encontrar $J_{\mathbf{i}}(f)$.*

$$J_{\mathbf{i}}(f) = \Delta_{2-1+1}(f, J_{2,1}(f)) = \Delta_2(f, J_{2,1}(f)), \text{ mas}$$

$$J_{2,1}(f) = \Delta_{2-1-1}(f, J_2(f)) = \Delta_2(f, J_2(f)) \text{ e } J_2(f) = \Delta_{2-2+1}(f, \{0\}) = \Delta_1(f, \{0\}) = I_1(D(f)) = I_1\left(\begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 2y \end{bmatrix}\right) = \langle x, y \rangle = \langle g_1, g_2 \rangle = \langle g \rangle.$$

$$\text{Portanto, } J_{2,1}(f) = \Delta_2(f, \langle x, y \rangle) = \langle x, y \rangle + I_2(D(f, g)) = \langle x, y \rangle + I_2\left(\begin{bmatrix} y & x \\ 0 & 2y \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\langle x, y \rangle + \langle 2y^2, -x, y, 1 \rangle = \mathcal{O}_2 = \langle 1 \rangle = \langle h \rangle. \text{ Sendo assim,}$$

$$J_{\mathbf{i}}(f) = J_{2,1}(f) + I_2(D(f, h)) = \mathcal{O}_2 + I_2(D(f, h)) = \mathcal{O}_2.$$

Observação 4.2.11. *Note que para $\mathcal{O}_n$, $\mathbf{i}$ um símbolo de Boardman, então $\mathcal{O}_n/J_{\mathbf{i}}(f)$ é um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial. De fato, note que $\mathcal{O}_n$ sendo o espaço dos germes de aplicações de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}$ na origem, é naturalmente um $\mathbb{C}$ -espaço vetorial. Portanto, para qualquer ideal I de $\mathcal{O}_n$, o quociente $\mathcal{O}_n/I$ herda uma estrutura de espaço vetorial com a adição e multiplicação por escalar de $\mathbb{C}$ bem definida. Em particular, $J_{\mathbf{i}}(f)$ é um ideal de $\mathcal{O}_n$. Logo, $\mathcal{O}_n/J_{\mathbf{i}}(f)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.*

4.3 SINGULARIDADES DE THOM-BOARDMAN

Apresentamos uma classe especial de germes de aplicação associada a símbolos de Boardman e extensões jacobianas iteradas, bem como mostramos um conjunto associado a elas.

Definição 4.3.1. *Sejam $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ e $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$ um símbolo Boardman de $\mathcal{B}(n, p)$. Dizemos que f é um **germe de tipo** $\Sigma^{\mathbf{i}}$ quando*

1. *O posto de f , na origem, é $n - i_1$;*
2. *Para todo $s = 2, \dots, k$, o posto de (f, g) , na origem, é $n - i_s$, sendo $g = (g_1, \dots, g_r)$ e $g_1, \dots, g_r$ geradores de $J_{i_1, \dots, i_{s-1}}(f)$.*

Exemplo 4.3.2. Seja $f(x, y) = (x + y, (x + 1)y)$ de $\mathcal{O}_{2,2}$. Note que

$$\Delta^0 I = I;$$

$$\Delta^1 I = \Gamma_{2-1+1} I = I + I_2 \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & (x+1) \end{bmatrix} \right) = \langle x + y, (x + 1)y, x + 1 - y \rangle;$$

$$\Delta^2 I = \Gamma_{2-2+1} I = I + I_1 \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & (x+1) \end{bmatrix} \right) = \langle 1 \rangle = \mathcal{O}_{2,2}.$$

Então $i_1 = 1$. Fixe $I' = \Delta^1 I = \langle x + y, (x + 1)y, x + 1 - y \rangle$.

$$\Delta^0 I' = I';$$

$$\Delta^1 I' = \Gamma_{2-1+1} I' = I' + I_2 \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & (x+1) \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right) = \langle (x+1)-y, -1-1, -y-(x+1) \rangle = \mathcal{O}_{2,2}.$$

Então temos que o símbolo de Boardman para f é $(1; 0)$ (Definição 4.1.20), o que também significa que $(1; 0)$ é um símbolo de Boardman (Definição 4.2.3).

Logo $f \in \Sigma^1$ (Definição 4.1.24) mas não é do tipo Σ^1 pois, caso fosse, f deveria ter posto $2 - 1 = 1$, mas isso não ocorre já que

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y & (x+1) \end{bmatrix} e, \text{ com isso, } Df(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ que tem posto 2.}$$

Exemplo 4.3.3. Seja $f \in \mathcal{O}_{3,2}$, definido por $f(x, y, z) = (xy + x, yz + y)$. Note que $n = 3$ e $p = 2$.

1. Vamos determinar o posto de f no ponto $(0, 0, 0)$.

$$Df = Df(x, y, z) = \begin{bmatrix} y+1 & x & 0 \\ 0 & z+1 & y \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}_{(0,0,0)}(f) = \text{posto}(Df(0, 0, 0)) = 2.$$

Sendo $n = 3$ e $n - i_1 = 2$, podemos ter que f é do tipo Σ^1 ($i_1 = 1$).

2. Para $s = 2$, vamos determinar o posto de (f, g) em $(0, 0, 0)$. Precisamos determinar $J_{i_1}(f)$ para encontrar g .

$J_{i_1}(f) = \Delta_{n-i_1+1}(f, \{0\}) = \Delta_{3-1+1}(f, \{0\}) = I_3(Df) = \langle 0 \rangle$, pois Df é uma matriz 2×3 . Assim, $g = (g_1) = (0)$. Logo,

$$D(f, g) = \begin{bmatrix} y+1 & x & 0 \\ 0 & z+1 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{posto}_{(0,0,0)}(f, g) = \text{posto}(D(f, g)(0, 0, 0)) = 2 =$$

$n - i_2 \Rightarrow f$ pode ser do tipo $\Sigma^{1,1}$ ($i_2 = 1$).

3. Para $s = 3$, vamos determinar o posto de (f, h) , onde h são os geradores de $J_{i_1, i_2}(f) = \Delta_{n-i_1+1}(f, J_1(f)) = \Delta_3(f, J_1(f)) = J_1(f) + I_3(D(f, g))$, onde g são os geradores de $J_1(f)$.

$$\text{Logo, } J_{1,1}(f) = \{0\} + I_3 \left(\begin{bmatrix} y+1 & x & 0 \\ 0 & z+1 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \langle 0 \rangle = \langle h \rangle.$$

Portanto, novamente $\text{posto}_{(0,0,0)}(f, h) = \text{posto}(D(f, h)(0, 0, 0)) = 2 = 3 - 1 = n - i_3$. Assim, f pode ser do tipo $\Sigma^{1,1,1}$ ($i_3 = 1$).

Prosseguindo analogamente, temos que f pode ser do tipo Σ^{1_k} , $\forall k$, onde 1_k é a k -upla $(1, \dots, 1)$.

Definição 4.3.4. Para cada símbolo de Boardman $\mathbf{i} \in \mathcal{B}(n, p)$ de comprimento $\leq k$, podemos definir o seguinte subconjunto de $J^k(n, p)$:

$$\Sigma^{\mathbf{i}} = \left\{ \sigma \in J^k(n, p) : \sigma \text{ de tipo } \Sigma^{\mathbf{i}} \right\}.$$

Observação 4.3.5. Note que na definição anterior fizemos um abuso de notação, pois não está definido neste trabalho um k -jato ser do tipo $\Sigma^{\mathbf{i}}$. Portanto, nesta definição dizemos sobre σ ser representante de um germe de tipo $\Sigma^{\mathbf{i}}$. Ademais, do Exemplo 4.3.2, temos que os conjuntos $\Sigma^{\mathbf{i}}$ e $\Sigma^{\mathbf{j}}$ são distintos.

Observação 4.3.6. Pela definição, o conjunto $\Sigma^{\mathbf{i}}$ é composto dos k -jatos que satisfazem algumas propriedades, tornando muito difícil de ser mapeado. Porém, em alguns casos é possível, como no caso seguinte.

Exemplo 4.3.7. Considere $\mathbf{i} = (2, 2, 2) \in \mathcal{B}(2, 2)$ e $k = 3$. Observe ainda que um elemento qualquer de $\Sigma^{(2,2,2)}$ seria um elemento $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in J^3(2, 2)$ que é a expansão de Taylor até ordem 3 de uma aplicação f sem o fator constante (pois estamos no espaço dos jatos). Ainda estes elementos, pela definição de $\Sigma^{(2,2,2)}$ devem satisfazer que σ , (σ, g) e (σ, h) tem posto 0, onde g e h são geradores de $J_2(\sigma)$ e h são geradores de $J_{2,2}(\sigma)$. Isto significa que

$$D\sigma = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial z} \end{bmatrix}$$

tem posto 0, ou seja, todas as derivadas de ordem 1 são nulas.

Ainda $J_1(\sigma) = I_{2-2+1}(D\sigma) = \left\langle \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}, \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}, \frac{\partial \sigma_1}{\partial z}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial z} \right\rangle$. Logo,

$J_{2,2}(\sigma) = J_2(\sigma) + I_{2-2+1}(D(\sigma, g))$, onde

$$D(\sigma, g) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial y} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial z \partial x} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial z^2} \end{bmatrix}.$$

Portanto, $J_{2,2}(\sigma)$ é gerado por todas as derivadas de ordem 1 e 2 das σ_1 e σ_2 . Sendo assim, como (σ, g) deve ter posto 0 na origem, então todas as derivadas de ordem 1 e 2 devem ser nulas na origem.

Prosseguindo analogamente, verificamos que todas as derivadas de ordens 1, 2 e 3 de σ_1 , σ_2 se anulam na origem. Portanto, todo σ de $\Sigma^{(2,2,2)}$ deve ser nulo.

Definição 4.3.8. Dado $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{B}(n, p)$ definimos:

$$\nu(\mathbf{i}, n, p) = (p - n + i_1) \mu(i_1, \dots, i_k) - (i_1 - i_2) \mu(i_2, \dots, i_k) \dots (i_{k-1} - i_k) \mu(i_k),$$

onde $\mu(\mathbf{j})$ é o número de símbolos de Boardman $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_k)$ tais que

$$j_s \leq i_s, \forall s; j_1 \geq \dots \geq j_k \geq 0 \text{ e } j_1 > 0.$$

Notações: Por simplicidade, escrevemos $\nu(\mathbf{i})$ no lugar de $\nu(\mathbf{i}, n, p)$, quando não houver confusão.

Observação 4.3.9. 1. Note que para um símbolo de Boardman $\mathbf{i} = (i_1) \in \mathcal{B}(n, p)$ temos que $\mu(i_1) = i_1$, então $\nu(i_1) = (p - n + i_1) \cdot i_1$.

2. Para um símbolo de Boardman $\mathbf{i} = (i_1, i_2) \in \mathcal{B}(n, p)$ temos

$$\nu(i_1, i_2) = (p - n + i_1)\mu(i_1, i_2) - (i_1 - i_2)\mu(i_2).$$

Ainda, $\mu(i_1, i_2)$ é dado por

$$\frac{(i_1 + 1) \cdot i_1}{2} + i_2 - \frac{i_1 \cdot (i_1 - 1)}{2} = i_1 + i_2.$$

Logo,

$$\nu(i_1, i_2) = (p - n + i_1)i_1 + (p - n + i_1)i_2 - i_1i_2 + i_2^2 = (p - n + i_1)i_1 + (p - n + i_2)i_2 = \nu(i_1) + \nu(i_2).$$

Exemplo 4.3.10. Seja $\mathbf{i} = (2, 1, 1) \in \mathcal{B}(2, 2)$, calculemos $\nu(\mathbf{i})$.

$$\nu(2, 1, 1) = (2 - 2 + 2)\mu(2, 1, 1) - (2 - 1)\mu(1, 1) = 2\mu(2, 1, 1) - \mu(1, 1).$$

As possibilidades para $j = (j_1, j_2, j_3)$ em $\mu(2, 1, 1)$ são

$$j = (2, 1, 1), (2, 1, 0), (2, 0, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0).$$

As possibilidades para $t = (t_1, t_2)$ em $\mu(1, 1)$ são $t = (1, 1), (1, 0)$.

Logo, temos que $\nu(\mathbf{i}) = 2 \cdot 6 - 2 = 10$.

Observação 4.3.11. 1. Caso $k = 1$. Neste caso, $\mathbf{i} = (i)$, temos então as seguintes possibilidades para $j = i, i - 1, \dots, 1$. Logo, $\mu(\mathbf{i}) = i$ e, portanto, $\nu(\mathbf{i}) = i(p - n + i)$.

2. Suponha $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_k) = (1, 1, \dots, 1)$. Temos $\mu(1, \dots, 1) = k$, pois temos as seguintes possibilidades para $j = (j_1, \dots, j_k)$:

$$(1, 1, \dots, 1)(1, 1, \dots, 1, 0), (1, 1, \dots, 0, 0), \dots (1, 0, 0, \dots, 0).$$

Logo, $\nu(1, \dots, 1) = (p - n + 1)k$. Note que, no caso $n = p$, ocorre $\nu(\mathbf{i}) = k$.

3. Caso $k = 2$. Para $k = 2$, provemos que $\mu(\mathbf{i}) = \mu(i_1, i_2) = i_1(i_2 + 1) - \frac{i_2(i_2 - 1)}{2}$.

De fato, para $\mathbf{j} = (j_1, j_2)$, devemos ter que $j_1 > 0$, $j_1 \geq j_2$ e $j_1 \leq i_1$, $j_2 \leq i_2$. Para j_1 temos as possibilidades $j_1 = 1, 2, \dots, i_1$. Portanto, para j_2 temos

j_1	j_2
1	0, 1
2	0, 1, 2
$\vdots$	$\vdots$
i_2	0, 1, 2, $\dots$, i_2
$i_2 + 1$	0, 1, 2, $\dots$, i_2
$\vdots$	$\vdots$
i_1	0, 1, 2, $\dots$, i_2

Portanto, a quantidade de possibilidades é

$$\begin{aligned}
& (2 + 3 + \dots + (i_2 + 1)) + (i_1 - i_2)(i_2 + 1) \\
&= \frac{(2 + (i_2 + 1)) \cdot i_2}{2} + (i_1 - i_2)(i_2 + 1) \\
&= \frac{2i_2 + i_2(i_2 + 1) + 2i_1(i_2 + 1) - 2i_2(i_2 + 1)}{2} \\
&= i_1(i_2 + 1) + \frac{2i_2 + i_2^2 + i_2 - 2i_2^2 - 2i_2}{2} = i_1(i_2 + 1) - \frac{i_2(i_2 - 1)}{2}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\nu(\mathbf{i}) &= (p - n + i_1)\mu(i_{1,2}) - (i_1 - i_2)\mu(i_2) \\
&= (p - n + i_1) \cdot \left(i_1(i_2 + 1) - \frac{i_2}{2}(i_2 - 1) \right) - (i_1 - i_2)i_2 \\
&= (p - n + i_1)(i_1(i_2 + 1)) - (p - n + i_1) \cdot \frac{i_2}{2}(i_2 - 1) + (i_2 - 1)i_2 \\
&= (p - n + i_1)(i_1i_2 + i_1) - (p - n + i_1) \left(\frac{i_2^2}{2} - \frac{i_2}{2} \right) + i_2^2 - i_1i_2 \\
&= (p - n + i_1)i_1 + (p - n + i_1)i_1i_2 - (p - n + i_1) \left(\frac{i_2^2}{2} - \frac{i_2}{2} \right) + i_2^2 - i_1i_2 \\
&= (p - n + i_1)i_1 + \frac{i_2}{2} [(p - n + i_1)2i_1 - (p - n + i_1)(i_2 - 1) + 2i_2 - 2i_1] \\
&= (p - n + i_1)i_1 + \frac{i_2}{2} [(p - n + i_1)(2i_1 - i_2 + 1) - 2i_1 + 2i_2].
\end{aligned}$$

4.4 IDEAL DE MORIN

Seja $\mathbf{i}$ um símbolo de Boardman com $|\mathbf{i}| = k$. Aqui apresentamos a construção de um ideal $\Delta^{\mathbf{i}}$ definido no anel de polinômios $\mathbb{C}[z_{\alpha}^{\mathbf{i}}]$ cujas variáveis são as coordenadas do espaço de jatos $J^k(n, p)$, vista no final da Seção 2.2. Utilizando este ideal, mostramos que o conjunto apresentado na seção anterior é uma subvariedade, e ainda temos controle sobre sua codimensão em relação ao espaço dos jatos.

Seja $\Phi : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^p$ definida por $\Phi(\tau, x) = (\tau, \tau(x))$, onde τ é definido na Equação (2.3) da Seção 2.2, onde é associado a um $\sigma \in J^k(n, p)$. Da Observação 2.1.29, N é um número natural, no qual identificamos $J^k(n, p)$ com algum $\mathbb{C}^N$.

Como Φ é uma aplicação polinomial, para cada símbolo de Boardman $\mathbf{i} \in \mathcal{B}(n, p)$, $|\mathbf{i}| = k$, podemos considerar $J_{\mathbf{i}}(\Phi)$ como um ideal no anel de polinômios $\mathbb{C}[z_{\alpha}^l, x_j]$.

Definição 4.4.1. Nas notações anteriores, o **ideal de Morin** associado a $\mathbf{i}$ e a Φ , denotado por $\Delta^{\mathbf{i}}\mathcal{O}_{N,\sigma}$, é definido por $\Delta^{\mathbf{i}}\mathcal{O}_{N,\sigma} = \psi(J_{\mathbf{i}}(\Phi))$, sendo $\psi : \mathbb{C}[z_{\alpha}^l, x_j] \rightarrow \mathbb{C}[z_{\alpha}^l]$ o epimorfismo natural que aplica x_j em 0.

Por simplicidade e não havendo confusão na identificação dos elementos anteriores, escrevemos somente Δ^i .

Exemplo 4.4.2. No Exemplo 2.1.30, temos que $\Phi : \mathbb{C}^{18} \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^{18} \times \mathbb{C}^2$, definida por $\Phi(\tau, (x, y)) = (\tau, \tau(x, y))$, onde τ é representado pelo germe σ do exemplo citado. Logo, τ é identificado com

$$(6, 0, 0, 0, 0, 0, -4, 1, -2, 0, 0, 0, 0, 2, 4, 0, -3, 1).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Phi(\tau, (x, y)) &= \Phi(6, 0, 0, 0, 0, 0, -4, 1, -2, 0, 0, 0, 0, 2, 4, 0, -3, 1, (x, y)) \\ &= (6, 0, 0, 0, 0, 0, -4, 1, -2, 0, 0, 0, 0, 2, 4, 0, -3, 1, \tau(x, y)) \\ &= (6, 0, 0, 0, 0, 0, -4, 1, -2, 0, 0, 0, 0, 2, 4, 0, -3, 1, \sigma(x, y)), \end{aligned}$$

pois τ é representado pelo germe σ .

Portanto, $\Phi(\tau, \tau(x, y)) = (6, 0, 0, 0, 0, 0, -4, 1, -2, 0, 0, 0, 0, 2, 4, 0, -3, 1, x^3 - 2xy + x - 2y, x^2 + 2y^2 - 3x + y)$.

Seja $\mathbf{i} = (2, 2, 2) \in \mathcal{B}(2, 2)$, então iremos obter $J_{(2,2,2)}(\Phi)$.

$$J_{(2)}(\Phi) = \Delta_{2-2+1}(\Phi, \{0\}) = \Delta_1(\Phi, \{0\}) = I_1(D(\Phi))$$

com

$$D(\Phi) = \begin{bmatrix} [0]_{18 \times 1} & [0]_{18 \times 1} \\ 3x^2 - 2y + 1 & -2x - 2 \\ 2x - 3 & 4y + 1 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Assim, $I_1(D(\Phi)) = \langle 3x^2 - 2y + 1, -2x - 2, 2x - 3, 4y + 1 \rangle$ é ideal do anel $\mathbb{C}[z_\alpha^1, z_\alpha^2, x, y]$, para todo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ visto no Exemplo 2.1.30.

$J_{(2,2)}(\Phi) = J_{(2)}(\Phi) + I_{2-2+1}D(\Phi, g)$, onde $g = (3x^2 - 2y + 1, -2x - 2, 2x - 3, 4y + 1)$, com

$$D(\Phi, g) = \begin{bmatrix} [0]_{18 \times 1} & [0]_{18 \times 1} \\ 3x^2 - 2y + 1 & -2x - 2 \\ 2x - 3 & 4y + 1 \\ 6x & -2 \\ -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Então $J_{(2,1)}(\Phi) = \langle 3x^2 - 2y + 1, -2x - 2, 2x - 3, 4y + 1 \rangle + \langle 3x^2 - 2y + 1, -2x - 2, 2x - 3, 4y + 1, 6x, -2, -2, 4 \rangle = \mathbb{C}[z_\alpha^1, z_\alpha^2, x, y]$, pois $J_{(2,2)}(\Phi)$ é um ideal de $\mathbb{C}[z_\alpha^1, z_\alpha^2, x, y]$ e temos um gerador pertencente a $\mathbb{C}$.

Como $J_{(2,2,2)}(\Phi) = J_{(2,2)}(\Phi) + I_{2-2+1}(D(\Phi, h))$, onde h são os geradores de $J_{(2,2)}(\Phi)$, segue de $J_{(2,2)}(\Phi) = \mathbb{C}[z_\alpha^1, z_\alpha^2, x, y]$ que $J_{(2,2,2)}(\Phi) = \mathbb{C}[z_\alpha^1, z_\alpha^2, x, y]$.

Portanto, inferimos que $\Delta^{(2,2,2)}\mathcal{O}_{18,\sigma} = \psi(J_{(2,2,2)}(\Phi)) = \mathbb{C}[z_\alpha^1, z_\alpha^2]$.

Exemplo 4.4.3. Seja $f \in \mathcal{O}_{2,2}$, dada por $f(x, y) = (x^2 + y, y^2)$.

Conforme definido na Seção 2.2, temos que $z_\alpha = (z_\alpha^1, z_\alpha^2)_{1 \leq |\alpha| \leq 2}$ e para $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, temos $\alpha \in \{(2, 0), (0, 2), (1, 1), (1, 0), (0, 1)\}$. Portanto, σ é identificado com

$$(z_{(2,0)}^1, z_{(0,2)}^1, z_{(1,1)}^1, z_{(1,0)}^1, z_{(0,1)}^1, z_{(2,0)}^2, z_{(0,2)}^2, z_{(1,1)}^2, z_{(1,0)}^2, z_{(0,1)}^2),$$

onde $z_{(2,0)}^1 = 1.2!$, $z_{(0,2)}^1 = 0$, $z_{(1,1)}^1 = 0$, $z_{(1,0)}^1 = 0$, $z_{(0,1)}^1 = 1.1!$, $z_{(2,0)}^2 = 0$, $z_{(0,2)}^2 = 1.2!$, $z_{(1,1)}^2 = 0$, $z_{(1,0)}^2 = 0$, $z_{(0,1)}^2 = 0$.

Logo, σ é identificado com $(2, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 0, 0, 0) \in \mathbb{C}^{10}$ e então $N = 10$. Sendo assim, $\Phi(\sigma, x, y) = (2, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 0, 0, 0, x^2 + y, y^2)$.

Considere $\mathbf{i} = (1, 1, \dots)$. Então,

$$J_1(\Phi) = I_2(D\Phi) = \langle xy \rangle \text{ e } J_{1,1}(\Phi) = I_2(D(\Phi, xy)) = \langle xy, x^2, y^2 \rangle,$$

concluindo que $\Delta^{(1,1)}\mathcal{O}_{10,\sigma} = \psi(J_{(1,1)}(\Phi)) = \psi(\langle xy, x^2, y^2 \rangle) = 0$ (aplicação nula).

Observação 4.4.4. Se Φ é a aplicação dada por $\Phi(\tau, x) = (\tau, \tau(x))$, temos

$$J_{i_1}(\Phi) = I_{n-i_1+1} \left[\frac{\partial \tau_l(x)}{\partial x_j} \right], \quad \tau_l(x) = \sum_{|\alpha|=1}^k \frac{z_\alpha^l}{\alpha!} x^\alpha, \quad l = 1, \dots, p.$$

Logo, $J_{i_1}(\Phi)$ será o ideal gerado pelos menores de ordem $n-i_1+1$ de $\left[\frac{\partial \tau_l}{\partial x_j}(x) \right]$, como ψ leva

cada x_j em 0, temos que nos $\frac{\partial \tau_l}{\partial x_j}(x)$ resta apenas os coeficientes que acompanham os termos lineares após aplicar a ψ , ou seja, resta apenas os $z_{e_j}^l$, onde $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ com 1 na j -ésima coordenada. Portanto, $\psi(J_{i_1}(\Phi)) = I_{n-i_1+1}[z_{e_j}^l]$.

Lema 4.1. Sejam $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ um germe de aplicação analítica e $\mathbf{i} \in \mathcal{B}(n, p)$. Então

$$J_{\mathbf{i}}(f) = (j^k f)^* (\Delta^{\mathbf{i}} \mathcal{O}_{N,\sigma}),$$

onde $\Delta^{\mathbf{i}} \mathcal{O}_{N,\sigma}$, está com N e σ associados à Φ como visto anteriormente, e $(j^k f)^*$ é o homomorfismo induzido pela extensão como k -jato

$$j^k f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (J^k(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^p), \sigma), \text{ com } \sigma = j^k f(0).$$

Demonstração. Se Φ é a aplicação dada por $\Phi(\tau, x) = (\tau, \tau(x))$ temos

$$J_{i_1}(\Phi) = I_{n-i_1+1} \left[\frac{\partial \tau_l(x)}{\partial x_j} \right],$$

com $\tau_l(x) = \sum_{|\alpha|=1}^k \frac{z_\alpha^l}{\alpha!} x^\alpha$, para $l = 1, \dots, p$. Como o epimorfismo ψ leva cada variável x_j a 0, então

$$\Delta^{i_1} \mathcal{O}_{N,\sigma} = \psi(J_{i_1}(\Phi)) = I_{n-i_1+1} [z_{e_j}^l],$$

onde $e_j = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ com 1 na j -ésima posição. Logo,

$$(j^k f)^* (\Delta^{i_1} \mathcal{O}_{N,\sigma}) = (j^k f)^* (I_{n-i_1+1} [z_{e_j}^l]) = I_{n-i_1+1} [(j^k f)^* (z_{e_j}^l)] = I_{n-i_1+1} \left(\frac{\partial f_l}{\partial x_j} \right) = J_{i_1}(f),$$

onde para a primeira igualdade usamos a Observação 4.4.4, e para a última igualdade, usamos a Observação 2.2.14 e que $z_\alpha^i \circ j^k f = \frac{\partial^{|\alpha|} f_l}{\partial x_j}$ e $(j^k f)^*(z_{e_j}^l) = z_{e_j}^l \circ j^k f$.

De modo análogo, mostra-se por indução sobre o comprimento de $\mathbf{i}$, a igualdade requerida, observando apenas que para cada $l = 1, \dots, p$ e cada índice múltiplo α , temos:

$$(j^k f)^* \left(\psi \left(\frac{\partial^{|\alpha|} \tau_l(x)}{\partial x^\alpha} \right) \right) = (j^k f)^* (z_\alpha^l) = \frac{\partial^{|\alpha|} f_l}{\partial x^\alpha}.$$

□

O resultado seguinte é essencial para termos controle da codimensão de $\Sigma^{\mathbf{i}}$.

Observação 4.4.5. De maneira isolada, a notação $\mathcal{O}_{N,\sigma}$ significa $\mathcal{O}_{V,\sigma}$ onde $V = J^k(n, p)$. A identificação de $J^k(n, p)$ com $\mathbb{C}^N$ nos garante o isomorfismo $\mathcal{O}_{N,\sigma} \cong \mathcal{O}_N$, onde o segundo conjunto é o dos germes de funções analíticas em $\mathbb{C}^n$ em torno da origem, lembrado no início do capítulo.

Teorema 4.4.6. Sejam $\mathbf{i} \in \mathcal{B}(n, p)$ um símbolo de Boardman de comprimento k . Então se $\sigma \in \Sigma^{\mathbf{i}}$:

- a) $\Sigma^{\mathbf{i}}$ e $V(\Delta^{\mathbf{i}}\mathcal{O}_{N,\sigma})$ coincidem;
- b) $\frac{\mathcal{O}_{N,\sigma}}{\Delta^{\mathbf{i}}\mathcal{O}_{N,\sigma}}$ é um anel regular de dimensão $N - \nu(\mathbf{i})$.

Demonstração. Pode ser vista em [p. 14 [12]]. □

Exemplo 4.4.7. Considere Φ do Exemplo 4.4.2, onde temos $N = 18$, e $\mathbf{i} = (2, 2, 2) \in \mathcal{B}(2, 2)$. Como vimos em Exemplo 4.3.7, em alguns casos conseguimos mapear o conjunto $\Sigma^{\mathbf{i}}$, como fizemos para $\Sigma^{(2,2,2)}$, o que não é fácil em geral, tornando ainda mais importante o primeiro item do teorema anterior. Deste exemplo obtemos que $\Sigma^{(2,2,2)}$ é somente o jato nulo.

Agora, do Exemplo 2.1.30 temos 18 possibilidades para o $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, então $\mathbb{C}[z_\alpha^1, z_\alpha^2] \cong \mathcal{O}_{18}$. Portanto, do Exemplo 4.4.2,

$$V(\Delta^{(2,2,2)}) = V(\mathbb{C}[z_\alpha^1, z_\alpha^2]) = \emptyset.$$

Portanto, $\Sigma^{(2,2,2)}$ e $V(\mathbb{C}[z_\alpha^1, z_\alpha^2])$ não são identificados, tornando muito importante a hipótese de $\sigma \in \Sigma^{\mathbf{i}}$, que não ocorre neste caso.

$$\text{Além disso, } \dim \frac{\mathcal{O}_{18,\sigma}}{\Delta^{(2,2,2)}} = \dim \frac{\mathcal{O}_{18}}{\mathcal{O}_{18}} = 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \nu(2, 2, 2) &= (p - n + i_1) \cdot \mu(i_1, i_2, i_3) - (i_1 - i_2) \mu(i_1, i_2) - (i_2 - i_3) \mu(i_1) \\ &= (2 - 2 + 2) \cdot \mu(2, 2, 2) = 2 \cdot 9 = 18, \text{ com} \end{aligned}$$

$$\mu(2, 2, 2) = \#\{(2, 2, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 0), (2, 1, 1), (2, 1, 0), (2, 0, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}.$$

Logo, diretamente do teorema anterior,

$$\dim \frac{\mathcal{O}_{18,\sigma}}{\Delta^{(2,2,2)}\mathcal{O}_{18,\sigma}} = 18 - \nu(2, 2, 2) = 18 - 18 = 0, \text{ que de fato coincide com o cálculo anterior.}$$

O teorema a seguir foi provado de duas maneiras: por Boardman [13, p. 408] e por Morin em [12, p. 15]. Seguimos o segundo caminho.

Teorema 4.4.8. Se $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{B}(n, p)$, então o subconjunto $\Sigma^{\mathbf{i}}$ é uma subvariedade de $J^k(n, p)$ de codimensão $\nu(\mathbf{i})$.

Demonstração. Para $\sigma \in \Sigma^{\mathbf{i}}$, pelo Teorema 4.4.6, temos que $V(\Delta^{\mathbf{i}}\mathcal{O}_{N,\sigma}) = \Sigma^{\mathbf{i}}$ e $\dim \frac{\mathcal{O}_{N,\sigma}}{\Delta^{\mathbf{i}}\mathcal{O}_{N,\sigma}} = N - \nu(\mathbf{i})$. Deste modo, temos que

$$N - \nu(\mathbf{i}) = \dim \frac{\mathcal{O}_{N,\sigma}}{\Delta^{\mathbf{i}}\mathcal{O}_{N,\sigma}} = \dim V(\Delta^{\mathbf{i}}\mathcal{O}_{N,\sigma}) = \dim \Sigma^{\mathbf{i}},$$

onde a segunda igualdade advém da Observação 3.1.69.

Concluindo que $\dim \Sigma^{\mathbf{i}} = N - \nu(\mathbf{i})$. Como $N = \dim J^k(n, p)$, então a codimensão de $\Sigma^{\mathbf{i}}$ em $J^k(n, p)$ é $\nu(\mathbf{i})$. □

Definição 4.4.9. Para um símbolo de Boardman $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$, as subvariedades $\Sigma^{\mathbf{i}}$ de $J^k(n, p)$ são chamadas de **singularidade de Thom-Boardman**.

Teorema 4.4.10. O conjunto de todas as aplicações $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ tais que $j^k f$ é transversal a todas as subvariedades de Thom-Boardman $\Sigma^{i_1, \dots, i_k}$ é denso em $\mathcal{O}_{n,p}$.

Demonstração. Esse resultado é uma consequência imediata do Teorema 2.1.28. □

5 Multiplicidade de germes de aplicações

Na Seção 3.2 vimos um número que recebeu o nome de multiplicidade de Hilbert-Samuel, que está associado a um anel local Noetheriano. Neste capítulo, definimos um número que advém desta multiplicidade e que depende de extensões jacobianas iteradas, para um anel específico. Deste modo, temos um número associado a um germe de aplicação.

Uma propriedade importante é que, sob algumas hipóteses, este número se mantém constante em um determinado intervalo.

Finalizamos obtendo resultados que melhoram a fórmula desse número, para um conjunto específico de germes.

5.1 CONCEITOS E RESULTADOS NO CASO GERAL

Nesta seção estudamos o anel quociente $\mathcal{O}_n/J_{\mathbf{i}}(f)$, onde $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ e $J_{\mathbf{i}}(f)$ é a extensão jacobiana iterada de f associada ao símbolo de Boardman $\mathbf{i}$, conceitos vistos no capítulo anterior. A obtenção de um número associado a este anel quociente é o objetivo deste trabalho.

Vimos (Proposição 3.1.43) que o anel $\mathcal{O}_n$ é um anel Noetheriano. Portanto, da Proposição 3.1.44, como $J_{\mathbf{i}}(f)$ é um ideal de $\mathcal{O}_n$, então $\frac{\mathcal{O}_n}{J_{\mathbf{i}}(f)}$ é um anel Noetheriano.

Ainda, sabemos que $\mathcal{O}_n$ é um anel local, com $\mathbf{m}_n$ sendo seu único ideal maximal (Exemplo 3.3.9).

Proposição 5.1.1. *O ideal $\mathbf{m}_n + J_{\mathbf{i}}(f)$ é um ideal maximal de $\frac{\mathcal{O}_n}{J_{\mathbf{i}}(f)}$ com $\mathbf{m}_n$ sendo o ideal maximal de $\mathcal{O}_n$.*

Demonstração. Primeiramente, observe que de um resultado de Álgebra Comutativa (Proposição 2.5.3, [14]) temos uma bijeção entre os seguintes conjuntos

$$\varphi : \{m \text{ ideais maximais de } \mathcal{O}_n \mid m \supset J_{\mathbf{i}}(f)\} \longrightarrow \left\{ \text{ideais maximais de } \frac{\mathcal{O}_n}{J_{\mathbf{i}}(f)} \right\}$$

e ainda $\varphi(m) = m + J_{\mathbf{i}}(f)$.

Portanto, basta provar que $\mathbf{m}_n \supset J_{\mathbf{i}}(f)$, para isso, suponhamos que $\mathbf{m}_n \not\supset J_{\mathbf{i}}(f)$.

Por outro lado $J_{\mathbf{i}}(f)$ não pode ser maximal de $\mathcal{O}_n$, pois $\mathbf{m}_n$ é o único ideal maximal de $\mathcal{O}_n$, então deve existir um ideal T' de $\mathcal{O}_n$ com $J_{\mathbf{i}}(f) \subseteq T'$. Porém, se não há nenhum

outro ideal próprio que contém T' , então T' é um ideal maximal, mas $\mathbf{m}_n$ é o único ideal maximal de $\mathcal{O}_n$ e, portanto, T' deveria ser igual a $\mathbf{m}_n$, concluindo que $J_{\mathbf{i}}(f) \subseteq T' = \mathbf{m}_n$.

Logo, deve existir um ideal próprio T'' de $\mathcal{O}_n$ com $J_{\mathbf{i}}(f) \subseteq T' \subseteq T''$ e se não houvesse nenhum ideal que contenha T'' , então T'' seria maximal, porém $\mathbf{m}_n$ é o único ideal maximal de $\mathcal{O}_n$ e, portanto, teríamos $J_{\mathbf{i}}(f) \subset T' \subset T''$.

Prosseguindo de maneira análoga, temos

$$J_{\mathbf{i}}(f) \subseteq T' \subseteq T'' \subseteq \dots$$

uma cadeia crescente de ideais de $\mathcal{O}_n$, que deve ser estacionária, pois $\mathcal{O}_n$ é Noetheriano.

Tome K o ideal que "estaciona" a cadeia, ou seja, $K = T^r = T^{r+1} = \dots$, então este ideal não está contido em nenhum outro ideal de $\mathcal{O}_n$, tornando-se um ideal maximal de $\mathcal{O}_n$. Como $\mathbf{m}_n$ é o único ideal maximal de $\mathcal{O}_n$, então $K = \mathbf{m}_n$. Concluindo que $J_{\mathbf{i}}(f) \subseteq \mathbf{m}_n$ e assim, do resultado, $\mathbf{m}_n + J_{\mathbf{i}}(f)$ é um ideal maximal de $\frac{\mathcal{O}_n}{J_{\mathbf{i}}(f)}$. $\square$

Observação 5.1.2. Note que como $\mathbf{m}_n + J_{\mathbf{i}}(f)$ é um ideal maximal de $\frac{\mathcal{O}_n}{J_{\mathbf{i}}(f)}$, então $\mathbf{m}_n + J_{\mathbf{i}}(f)$ é um ideal de definição de $\frac{\mathcal{O}_n}{J_{\mathbf{i}}(f)}$ (Definição 3.3.7).

O quociente $\mathcal{O}_n/J_{\mathbf{i}}(f)$ é um espaço vetorial complexo (Observação 4.2.11). Logo, o primeiro número natural associado é a sua dimensão como $\mathbb{C}$ -espaço vetorial. Este número possui várias descrições e é bastante importante, onde sua definição foi retirada de [1].

Definição 5.1.3. Definimos o número $c_{\mathbf{i}}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/J_{\mathbf{i}}(f)$.

Exemplo 5.1.4. Note que para $f \in \mathcal{O}_n$, $\mathbf{i} = (n)$ e do Exemplo 4.2.9, temos que

$$c_{\mathbf{i}}(f) = c_{(n)}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/J_{(n)}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/Jf,$$

onde Jf é o ideal gerados pelas derivadas parciais de f , chamado de ideal jacobiano de f . Portanto, neste caso $c_{\mathbf{i}}(f)$, no caso da origem ser um ponto singular isolado, é o clássico **número de Milnor** de f .

Observação 5.1.5. Note que a igualdade do exemplo anterior sempre ocorre, mas para existir número de Milnor associado a uma f , a hipótese de ter singularidade isolada é necessária. Os dois exemplos subsequentes foram feitos no software **SINGULAR**, que pode ser baixado gratuitamente em <https://www.singular.uni-kl.de/> onde o primeiro é para o caso de singularidade isolada e o segundo para singularidade não isolada.

Exemplo 5.1.6. Considere o germe $f \in \mathcal{O}_2$, dado por $f(x, y) = x^2 - y^3$. Sendo $Df(x, y) = (2x, -3y^2)$, então

$$Df(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Logo, temos o único ponto singular sendo a origem (uma singularidade isolada). Vamos verificar usando o **SINGULAR** o que ocorre com $c_{(2)}(f)$.

No **SINGULAR** digitamos

>ring r=0, (x,y), ds;

```
>poly f=x2-y3;
>module jf=jacob(f);
>matrix J=jf;
>ideal i = minor(J,1);
>vdim(std(i));
2 (número que aparece depois que pressionamos ENTER).
```

Isto significa que a dimensão complexa de $\mathcal{O}_n/J_{(2)}(f)$ é igual a 2, onde ideal i na programação acima é $Jf = J_{(2)}(f)$.

É possível obter este número com uma programação mais direta, usando um pacote próprio. Porém este caminho nos ajuda a entender o caminho para o caso de aplicações (ou seja, $f \in \mathcal{O}_{n,p}$, $p > 1$).

Exemplo 5.1.7. Considere o germe $f \in \mathcal{O}_3$ dado por $f(x, y, z) = x^2 - yz^2$. Sendo $Df(x, y, z) = (2x, -z^2, -2yz)$, então

$$Df(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x = 0, z = 0.$$

Logo, temos que todo ponto do tipo $(0, y, 0)$ é um ponto singular (origem não é uma singularidade isolada). Vamos verificar usando o **SINGULAR** o que ocorre com $c_{(3)}(f)$.

```
No SINGULAR digitamos
>ring r=0, (x,y,z), ds;
>poly f=x2-yz2;
>module jf=jacob(f);
>matrix J=jf;
>ideal i = minor(J,1);
>vdim(std(i));
-1 (número que aparece depois que pressionamos ENTER).
```

Isto significa que a dimensão complexa de $\mathcal{O}_n/J_{(2)}(f)$ é infinita.

Exemplo 5.1.8. Seja $f \in \mathcal{O}_{2,2}$, dado por $f(x, y) = (x^2 + y, y^2 + 4sx)$, s fixo. Calculemos $c_{1,1}(f)$, lembrando que

$$c_{(1,1)}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/J_{(1,1)}(f),$$

onde $J_{1,1}(f) = I_2(D(f)) + I_2(D(f, g))$, com $I_2(D(f)) = \langle g \rangle$ e $g = \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial x} = 4xy - 4s$, sendo $f = (f_1, f_2)$.

No **SINGULAR**, vamos calcular primeiro $c_{(1,1)}(f)$ para $s = 0$. A programação é a seguinte:

```
>ring r=0, (x,y), ds;
>poly f1=x2+y;
>poly f2=y2;
>ideal f=f1,f2;
>module jf=jacob(f);
>matrix Df=jf;
>ideal i = minor(Df,2);
>poly g=i[1];
>ideal fg =f,g;
>module jfg=jacob(fg);
```

```

>matrix Dfg=jfg;
>ideal j=minor(Dfg,2);
>ideal l=i,j;
>vdim(std(l));
    
```

3 (número que aparece depois que pressionamos ENTER), ou seja, $c_{(1,1)}(f) = 3$.

Agora para $s = \frac{1}{4}$, basta mudar somente o terceiro comando (`>poly f2=y2+x;`) e obtemos que $c_{(1,1)}(f) = 0$.

Exemplo 5.1.9. Seja $f \in \mathcal{O}_{2,2}$, dado por $f(x, y) = (x^2 + y, y^2 + s)$, s fixo.

Neste caso, $J_{1,1}(f) = \langle 4xy \rangle + \langle 4xy, 8xy - 4y, -8xy \rangle$, que não depende de s .

Usando o **SINGULAR** como anteriormente, obtemos que

$$c_{(1,1)}(f) = \infty, \forall s.$$

A seguir, damos uma extensão do número $c_i(f)$, associada a multiplicidade de Hilbert-Samuel de $\mathcal{O}_n/J_i(f)$.

Definição 5.1.10. Para cada germe de aplicação $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ e símbolo de Boardman $\mathbf{i} \in \mathcal{B}(n, p)$, definimos a **multiplicidade** de f em relação a $\mathbf{i}$, denotada por $e_i(f)$, como a multiplicidade, no sentido Hilbert-Samuel (no sentido da Definição 3.3.23), do anel local $\mathcal{O}_n/J_i(f)$, ou seja,

$$e_i(f) = e(\mathcal{O}_n/J_i(f)).$$

Proposição 5.1.11. Nas condições da definição anterior, essa multiplicidade pode ser expressa usando a fórmula limite para a multiplicidade como

$$e_i(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d!}{k^d} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\mathbf{m}_n^k + J_i(f)},$$

onde d é a dimensão de $\mathcal{O}_n/J_i(f)$ (como anel (Definição 3.1.59)).

Demonstração. Da Observação 5.1.2, $\mathbf{m}_n + J_i(f)$ é um ideal de definição de $\frac{\mathcal{O}_n}{J_i(f)}$.

Logo, basta considerar na Definição 3.3.23, $R = \frac{\mathcal{O}_n}{J_i(f)}$ e $I = \mathbf{m}_n + J_i(f)$ o ideal de definição de R , ficando com

$$\begin{aligned}
 e\left(\mathbf{m}_n + J_i(f), \frac{\mathcal{O}_n}{J_i(f)}\right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{d!}{k^d}\right) \ell\left(\frac{\frac{\mathcal{O}_n}{J_i(f)}}{(\mathbf{m}_n + J_i(f))^k}\right) = \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{d!}{k^d}\right) \dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\mathcal{O}_n}{\mathbf{m}_n^k + J_i(f)}\right) = e_i(f).
 \end{aligned}$$

Note que $\dim_{\mathbb{C}}(M) = \ell(M)$, quando M é um espaço vetorial e podemos tomar $\frac{\mathcal{O}_n}{\mathbf{m}_n^k + J_i(f)}$ sendo um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ (análogo ao que foi feito para $\mathcal{O}_n/J_i(f)$ na Observação 4.2.11).

□

Proposição 5.1.12. Quando o anel $\mathcal{O}_n/J_i(f)$ tem dimensão zero, este número é dado por

$$e_i(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J_i(f)} = c_i(f).$$

Demonstração. Basta usar a Proposição 3.3.24. Então temos que

$$e_i(f) = \ell \left(\frac{\mathcal{O}_n}{J_i(f)} \right) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J_i(f)} = c_i(f),$$

pois estamos com dimensão como espaço vetorial. $\square$

Proposição 5.1.13. Para $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ e $i \in \mathcal{B}(n, p)$, $e_i(f)$ sempre é finito.

Demonstração. Segue diretamente da Observação 3.3.21. $\square$

Das duas últimas proposições, temos o seguinte resultado:

Corolário 5.1.14. Se o anel $\mathcal{O}_n/J_i(f)$ tem dimensão zero então $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J_i(f)} < \infty$.

Seguem dois resultados, que para o caso de $\mathcal{O}_n/J_i(f)$ ter dimensão 0, então garantimos que a origem é uma singularidade isolada.

Proposição 5.1.15. $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/I < \infty$ se, e somente se, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{m}_n^k \subset I$, onde $\mathbf{m}_n = \{f \in \mathcal{O}_n \mid f(0) = 0\}$.

Demonstração. Suponha que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/I < \infty$, então $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{O}_n/I$ tem uma base com k elementos $\mathcal{B} = \{f_1 + I, \dots, f_k + I\}$, onde f_i são germes de funções analíticas de $\mathcal{O}_n$.

Se supomos que $\mathbf{m}_n^k \not\subset I$, então existe uma $g \in \mathbf{m}_n^k$ e $g \notin I$. Logo, existe a classe $g + I$ tal que g tem grau maior ou igual a k .

Porém, $g + I \in \mathcal{O}_n/I$, ou seja, $g + I$ é gerado pela base $\mathcal{B}$, ou seja,

$$g + I = \sum_{j=1}^k c_j(f_j + I), \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

Então, necessariamente, existe uma f_r de grau maior ou igual a k e, nesse caso, contraria o fato de $\mathcal{B}$ ter apenas k elementos para gerar $\mathcal{O}_n/I$, pois as classes $f_1 + I, \dots, f_k + I$ não seriam suficientes para gerar todos os elementos de grau menor que k .

Reciprocamente, suponha que $\mathbf{m}_n^k \subseteq I$. então todas as funções analíticas de grau maior ou igual a k estão em I . Isto significa que no quociente só precisamos considerar as classes de funções analíticas que começam com termos de grau menor que k . Esses termos incluem as funções representadas por um número finito de monômios, como $1, x_1, x_2, \dots, x_n, x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, \dots$ com grau menor que k .

Como existe apenas um número finito de monômios de grau total menor que k , o espaço gerado por essas classes tem dimensão finita, ou seja, $\dim \mathcal{O}_n/I < \infty$. $\square$

Corolário 5.1.16. Suponha $I = Jf$ com $f \in \mathcal{O}_n$ e Jf é o ideal gerado pelas derivadas parciais de f . Então

$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/I < \infty$ se, e somente se, a origem é uma singularidade isolada de f .

Demonstração. Da proposição anterior, temos $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/Jf < \infty \Leftrightarrow \exists k \mid \mathbf{m}_n^k \subseteq Jf \Leftrightarrow \exists k$ tal que os monômios $x_1^k, \dots, x_n^k$ são combinações lineares de $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Tome $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ um ponto singular. Logo, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = 0, \forall i$, mas

$$x_j^k = \sum a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \forall j.$$

Portanto, a origem é o único ponto singular. $\square$

Exemplo 5.1.17. *Sejam $p = 1$ e $\mathbf{i} = (n)$, com o anel $\mathcal{O}_n/J_{\mathbf{i}}(f)$ de dimensão zero. Nesse caso, o número $e_{(n)}(f) = c_{(n)}(f)$ é o número de Milnor do germe $f \in \mathcal{O}_n$, onde a origem é um ponto singular isolado (Corolários 5.1.14 e 5.1.16).*

Observação 5.1.18. *Considere um germe de aplicação $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ e um símbolo de Boardman $\mathbf{i} \in \mathcal{B}(n, p)$ tal que o anel $\mathcal{O}_n/J_{\mathbf{i}}(f)$ tenha dimensão d .*

Sendo $e_{\mathbf{i}}(f) = e\left(\frac{\mathcal{O}_n}{J_{\mathbf{i}}(f)}\right)$, aplicando a Proposição 3.3.27 ao ideal maximal de $\mathcal{O}_n/J_{\mathbf{i}}(f)$, temos que existem d formas lineares $g_1, \dots, g_d$ tal que $e_{\mathbf{i}}(f)$ é expresso como

$$e_{\mathbf{i}}(f) = e\left(\langle \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_d \rangle, \frac{\mathcal{O}_n}{J_{\mathbf{i}}(f)}\right),$$

onde $\bar{g}_i$ denota a imagem de g_i em $\mathcal{O}_n/J_{\mathbf{i}}(f)$.

Proposição 5.1.19. *Nas condições anteriores, se o anel $\mathcal{O}_n/J_{\mathbf{i}}(f)$ é Cohen-Macaulay, então*

$$e_{\mathbf{i}}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J_{\mathbf{i}}(f) + \langle g_1, \dots, g_d \rangle}.$$

Demonstração. Temos pelo Lema 3.6 que se I é um ideal de parâmetros de R (em nosso caso, $R = \frac{\mathcal{O}_n}{J_{\mathbf{i}}(f)}$), então $\ell\left(\frac{R}{I}\right) = e(I, R)$. Por outro lado, pela Proposição 3.3.27, $e(I, R) = e(\langle a_1, \dots, a_d \rangle, R)$ com I um ideal de definição de R e $\langle a_1, \dots, a_d \rangle$.

Como $\mathbf{m}_n + J_{\mathbf{i}}(f)$ é um ideal de definição de $\frac{\mathcal{O}_n}{J_{\mathbf{i}}(f)}$ (Observação 5.1.2), então da Proposição 3.3.27 e do Lema 3.6, temos

$$\begin{aligned} e_{\mathbf{i}}(f) &= e\left(\frac{\mathcal{O}_n}{J_{\mathbf{i}}(f)}\right) = e\left(\langle \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_d \rangle, \frac{\mathcal{O}_n}{J_{\mathbf{i}}(f)}\right) = \\ &= \ell\left(\frac{\frac{\mathcal{O}_n}{J_{\mathbf{i}}(f)}}{\langle \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_d \rangle}\right) = \ell\left(\frac{\frac{\mathcal{O}_n}{J_{\mathbf{i}}(f)}}{\langle g_1, \dots, g_d \rangle + J_{\mathbf{i}}(f)}\right) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J_{\mathbf{i}}(f) + \langle g_1, \dots, g_d \rangle}. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 5.1.20. *Calculamos $e_3(f)$ com $f \in \mathcal{O}_3$ dado por $f(x, y, z) = x^2 - yz^2$, utilizando o software **SINGULAR**.*

Inicialmente vamos calcular $d = \dim \mathcal{O}_3/J_3(f)$, onde

$$Df = \begin{bmatrix} 2x & -z^2 & -2yz \end{bmatrix} \text{ e } J_3(f) = I_{3-3+1}(Df) = I_1(Df) = \langle x, z^2, yz \rangle.$$

No software **SINGULAR** digitamos

>ring r =0, (x,y,z), ds;

>ideal I = x,z^2,yz;

>dim(std(I));

1 (Valor mostrado ao teclar ENTER, significando que $d = \dim \mathcal{O}_3/J_3(f) = 1$).

Logo, pela descrição dada pela Proposição 5.1.11, temos

$$e_3(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\mathfrak{m}_3^k + J_3(f)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\langle x, y, z \rangle^k + \langle x, z^2, yz \rangle}.$$

Notemos que, para $k \geq 2$ $\langle x, y, z \rangle^k + \langle x, z^2, yz \rangle = \langle x, y^k, yz, z^2 \rangle$. Então,

$$\frac{\mathcal{O}_3}{\langle x, y^k, yz, z^2 \rangle} \cong \mathbb{C}\{1, y, y^2, \dots, y^{k-1}, z\},$$

ou seja, tem $k + 1$ geradores. Logo,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\langle x, y^k, yz, z^2 \rangle} = k + 1.$$

Portanto

$$e_3(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (k + 1) = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{k} = 1.$$

Da descrição do resultado anterior, obtemos que $g_1 = y$, ou seja,

$$e_3(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{J_1(f) + \langle g_1 \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\langle x, z^2, yz \rangle + \langle y \rangle} = 1.$$

Neste momento o objetivo é obter a invariância da multiplicidade associada a um germe, sob algumas hipóteses, num determinado intervalo. Mais especificamente, dados $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ e $\mathbf{i} \in \mathcal{B}(n,p)$, considerando $F(u, x) = (u, f_u(x))$ um desdobramento a r -parâmetros de f , ou seja, existe uma

$$h : (\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0) \text{ e } F : (\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^p, (0, 0)),$$

onde $F(u, x) = (u, f_u(x)) = (u, h(u, x))$, com $h(0, x) = f(x)$, $\forall x$, queremos determinar a invariância de $e_1(f_u)$, para u numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^r$.

Para obter esta invariância, utilizamos uma nova ferramenta chamada de equimultiplicidade, que é definida a seguir em um contexto geral, cujos objetos envolvidos estão definidos na Seção 2.2.

Definição 5.1.21. *Sejam $V \subset \mathbb{C}^n$ uma variedade analítica, $R = \mathcal{O}_{V,v}$ com $v \in V$, $W \subseteq V$ uma subvariedade analítica em v e*

$$P = \{f \mid f \text{ é um germe analítico com } f(q) = 0, \forall q \in W\} \text{ contido em } R,$$

*que é um ideal primo. Dizemos que V é **equimúltiplo ao longo de W em v** se R e R_P possuem a mesma multiplicidade, onde R_P denota a localização de R em P .*

Como caracterização geométrica, apresentamos um resultado que utiliza o conceito de blow-up (também visto na Subseção 2.2.4) para descrever a equimultiplicidade.

Proposição 5.1.22. *Seja $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^n$ o blow-up de $\mathbb{C}^n$ ao longo de W e seja V' tal que π restrita a V' é exatamente igual a V . Então, V é equimúltiplo ao longo de W em v se, e somente se, todas as fibras sobre W próximas de v da restrição $\pi : V' \rightarrow V$ são puramente dimensionais (ou seja, todas suas componentes tem a mesma dimensão), de dimensão igual a $\text{codim}_V W - 1$.*

Demonstração. Pode ser vista em [15, p. 137]. $\square$

Precisamente, o conceito que nos dará a invariância de $e_i(f_u)$ é a equimultiplicidade de $V(J_i(F))$ ao longo de $\mathbb{C}^r \times 0$. Começamos exemplificando duas deformações F de um mesmo germe f , onde somente uma delas a condição $\mathbb{C}^r \times 0 \subset V(J_i(F))$ ocorre, o que é essencial para este conceito.

Exemplo 5.1.23. *Consideremos $f \in \mathcal{O}_{2,2}$, dada por $f(x, y) = (x^2 + y, y^2)$ e $F(s, x, y) = (s, x^2 + y, y^2 + 4sx)$ um desdobramento a 1-parâmetro de f . Como no Exemplo 5.1.8, $e_{(1,1)}(f) = c_{(1,1)}(f) = 3$ e $e_{(1,1)}(F(s = \frac{1}{4})) = c_{(1,1)}(F(s = \frac{1}{4})) = 0$.*

Note que $J_{(1,1)}(F) = J_1(F) + I_{3-1+1}(D(F, g))$, onde g são os geradores de $J_1(F)$.

$$\text{Como } J_1(F) = I_{3-1+1}(DF) = I_3 \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2x & 1 \\ 4x & 4s & 2y \end{bmatrix} \right) = \langle 4xy - 4s \rangle = \langle xy - s \rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} J_{(1,1)}(F) &= J_1(F) + I_3 \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2x & 1 \\ 4x & 4s & 2y \\ -1 & y & x \end{bmatrix} \right) \\ &= \langle 4xy - 4s, 2x^2 - y, 4sx - 2y^2, -8x^3 + 4s \rangle = \langle 4xy - 4s, 2x^2 - y, 4sx - 2y^2 \rangle. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} V(J_{(1,1)}(F)) &= \{(s, x, y) \in \mathbb{C}^3, 4xy - 4s = 2x^2 - y = 4sx - 2y^2 = 0\} \\ &= \{(-4\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 4), (4\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2})\}, \end{aligned}$$

onde os cálculos foram feitos no Wolfram Alpha. Logo $\mathbb{C} \times \{(0, 0)\} = \{(s, 0, 0), s \in \mathbb{C}\} \not\subset V(J_{(1,1)}(F))$.

Exemplo 5.1.24. *Considere agora o seguinte desdobramento $F(s, x, y) = (s, x^2 + y, y^2 + s)$ um desdobramento a 1-parâmetro da mesma f do exemplo anterior.*

$$\text{Agora, como } J_1(F) = I_{3-1+1}(DF) = I_3 \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2x & 1 \\ 1 & 0 & 2y \end{bmatrix} \right) = \langle 4xy \rangle.$$

$$\begin{aligned} \text{Portanto, } J_{(1,1)}(F) &= J_1(F) + I_3 \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2x & 1 \\ 1 & 0 & 2y \\ 0 & y & x \end{bmatrix} \right) = \langle 4xy, 2x^2 - y, -2y^2, -2x^2 + y \rangle = \\ &= \langle 4xy, 2x^2 - y, -2y^2 \rangle. \text{ Portanto,} \end{aligned}$$

$$V(J_{(1,1)}(F)) = \{(s, x, y) \in \mathbb{C}^3 \mid 4xy = 2x^2 - y = -2y^2 = 0\} = \mathbb{C} \times \{(0, 0)\}.$$

Seguindo a descrição do Exemplo 5.1.9, $J_{(1,1)}(F) = J_{(1,1)}(f)$. Desde modo,

$$e_i(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d!}{k^d} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\mathbf{m}_n^k + J_i(F)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d!}{k^d} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\mathbf{m}_n^k + J_i(f)} = e_i(f), \forall s,$$

dando a invariância da multiplicidade da deformação neste caso.

A seguir dois resultados que caracterizam a equimultiplicidade de $V(J_i(F))$ ao longo de $\mathbb{C}^r \times \{0\}$ em 0, que só faz sentido se $\mathbb{C}^r \times \{0\} \subseteq V(J_i(F))$. O primeiro dá uma interpretação geométrica deste conceito e o segundo é que de fato dá a invariância mencionada anteriormente.

Proposição 5.1.25. *Sejam $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^n$ o blow-up de $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^r \times \{0\}$ e V' tal que π restrita a V' é exatamente $V(J_i(F))$. Então, $V(J_i(F))$ é equimúltiplo ao longo de $\mathbb{C}^r \times \{0\}$ em 0 se, e somente se, as fibras sobre $\mathbb{C}^r \times \{0\}$ em uma vizinhança de 0 da restrição $\pi : V' \rightarrow V(J_i(F))$ são puramente dimensionais de dimensão $d - 1$, onde $d = \dim \mathcal{O}_n / J_i(f)$.*

Demonstração. Basta aplicar a Proposição 5.1.22, para $V = V(J_i(F))$ e $W = \mathbb{C}^r \times \{0\}$. $\square$

Exemplo 5.1.26. *Sejam $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ o blow-up de $\mathbb{C}^3$ em $\{(0, 0, 0)\}$ e $\tilde{\pi}$ o blow-up de $\mathbb{C}^3$ em $\mathbb{C} \times \{(0, 0)\}$ (Exemplo 2.2.38).*

Do exemplo anterior temos que

$$\begin{aligned} V' &= \tilde{\pi}^{-1}(V(J_{(1,1)}(F))) = \tilde{\pi}^{-1}(\mathbb{C} \times \{(0, 0)\}) \\ &= \{(x_1, 0, 0; z_1 : 0 : 0) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^2, \forall x_1, z_1 \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

Agora dado $u = (s, x, y) \in V(J_{(1,1)}(F)) = \mathbb{C} \times \{(0, 0)\}$, temos que

$$\tilde{\pi}^{-1}(u) = \tilde{\pi}^{-1}(s, 0, 0) = \{(s, 0, 0; z_1 : 0 : 0) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^2, \forall z_1 \in \mathbb{C}\},$$

isomorfo a um ponto em $\mathbb{P}^2$, que é uma reta em $\mathbb{C}^3$. Com isso, dimensão de $\tilde{\pi}^{-1}(u) = 1$.

Ainda, note que no exemplo anterior, para $f(x, y) = (x^2 + y, y^2)$, temos que $J_{(1,1)}(f) = \langle 0 \rangle$. Assim, $d = \dim \mathcal{O}_2 / J_{(1,1)}(f) = 2$. Portanto $d - 1 = 1$, conferindo o fato das fibras $\pi^{-1}(u) \cap V'$ serem puramente dimensionais de dimensão 1.

Portanto concluímos da proposição anterior, que $V(J_{(1,1)}(F))$ é equimúltiplo ao longo de $\mathbb{C}^r \times \{0\}$.

Para $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ e $\mathbf{i}$ um símbolo de Boardman com $|\mathbf{i}| = k$, seja $\sigma = j^k f(0)$. Deste modo temos definido $\Phi : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^p$, onde $\Phi(\tau, x) = (\tau, \tau(x))$, com τ está associada a σ e tendo o ideal de Morin $\Delta^{\mathbf{i}} \mathcal{O}_{N,\sigma}$, definido na última seção do capítulo anterior.

Neste último resultado a demonstração será omitida, pois utiliza objetos que não são o foco dessa dissertação.

Proposição 5.1.27. *Nas notações anteriores, seja $V(\Delta^{\mathbf{i}} \mathcal{O}_{N,\sigma})$ Cohen-Macaulay, com $\text{codim } V(J_i(f)) = \dim \mathcal{O}_{N,\sigma} - \dim V(\Delta^{\mathbf{i}} \mathcal{O}_{N,\sigma})$ e $F(u, x) = (u, f_u(x))$ um desdobramento a r -parâmetros de f , tal que $\mathbb{C}^r \times \{0\} \subseteq V(J_i(F))$. Então,*

$$\begin{aligned} e_i(f) &= e_i(f_u) \text{ para todo } u \text{ numa vizinhança de } 0 \in \mathbb{C}^r, \text{ se, e somente se,} \\ &V(J_i(F)) \text{ é equimúltiplo ao longo de } \mathbb{C}^r \times \{0\} \text{ em } 0. \end{aligned}$$

Demonstração. Pode ser vista em [2, Proposição 3.2]. $\square$

Exemplo 5.1.28. Seja $f \in J^2(2, 2)$, dada por $f(x, y) = (x^2 + y, y^2)$. Pelo Exemplo 5.1.26, concluímos que $V(J_{(1,1)}(f))$ é equimúltiplo ao longo de $\mathbb{C} \times \{0\}$ e calculamos que $\dim \mathcal{O}_2/J_{(1,1)}(f) = 2$, então segue que

$$\text{codim} V(J_{(1,1)}(f)) = \dim \mathbb{C}^n - \dim V(J_{(1,1)}(f)) = n - \dim \mathcal{O}_2/J_{(1,1)}(f) = 2 - 2 = 0.$$

Por outro lado, no Exemplo 4.4.3, obtemos Φ e consequentemente N e σ . Considerando $i = (1, 1)$, neste mesmo exemplo, obtemos que

$$\Delta^{(1,1)}\mathcal{O}_{10,\sigma} = \psi(J_{(1,1)}(\Phi)) = \psi(\langle xy, x^2, y^2 \rangle) = 0 \text{ (aplicação nula)}.$$

Portanto, $V(\Delta^{(1,1)}\mathcal{O}_{10,\sigma}) = \mathcal{O}_{10,\sigma}$, que é Cohen-Macaulay (Exemplo 3.1.91). Além disso, $\dim \mathcal{O}_{10,\sigma} - \dim V(\Delta^{(1,1)}\mathcal{O}_{10,\sigma}) = 0$. Portanto, temos todas as hipóteses da proposição anterior verificadas.

Sendo assim, pelo resultado anterior, $e_i(f) = e_i(f_u)$ para todo u numa vizinhança de 0. Isso foi confirmado no final do Exemplo 5.1.24.

5.2 CASO PARTICULAR: GERMES QUASE HOMOGÊNEOS

Nesta seção exploramos o conceito de multiplicidade para o caso particular de germes quase homogêneos, obtendo fórmulas melhores (que dependem dos pesos e graus de homogeneidade), tornando mais fácil a sua determinação.

Definição 5.2.1. Um germe de aplicação $f \in \mathcal{O}_{n,p}$, com $f = (f_1, \dots, f_p)$, é dito ser quase homogêneo com graus $d_1, \dots, d_p$ e pesos $w_1, \dots, w_n$ se, para cada $l = 1, \dots, p$, tivermos:

$$f_l(\lambda^{w_1}x_1, \dots, \lambda^{w_n}x_n) = \lambda^{d_l}f_l(x), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Proposição 5.2.2. Seja $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ quase homogêneo com graus $d_1, \dots, d_p$ e pesos $w_1, \dots, w_n$. Então suas derivadas parciais também são quase homogêneas de mesmos pesos.

Demonstração. De fato, suponha que f seja quase homogêneo com graus $d_1, \dots, d_i$ e pesos $w_1, \dots, w_n$. Então, para cada $l = 1, \dots, p$, temos

$$f_l(\lambda^{w_1}x_1, \dots, \lambda^{w_n}x_n) = \lambda^{d_l}f_l(x), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Portanto, aplicando a derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x_j}$ de ambos os lados da igualdade, temos que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_j} (f_l(\lambda^{w_1}x_1, \dots, \lambda^{w_n}x_n)) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\lambda^{d_l}f_l(x)) \\ \Leftrightarrow & \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_l}{\partial (\lambda^{w_k}x_k)} (\lambda^{w_1}x_1, \dots, \lambda^{w_n}x_n) \cdot \frac{\partial (\lambda^{w_k}x_k)}{\partial x_j} = \lambda^{d_l} \frac{\partial f_l}{\partial x_j} (x_1, \dots, x_n) \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial f_l}{\partial x_j} (x_1, \dots, x_n) \cdot \lambda^{w_j} = \lambda^{d_l} \frac{\partial f_l}{\partial x_j} (x_1, \dots, x_n) \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial f_l}{\partial x_j} (x_1, \dots, x_n) = \lambda^{d_l - w_j} \frac{\partial f_l}{\partial x_j} (x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

pois $\frac{\partial (\lambda^{w_k}x_k)}{\partial x_j} = \begin{cases} \lambda^{w_k}, & \text{se } k = j \\ 0, & \text{se } k \neq j \end{cases}$. Note que nesse caso (da derivada em relação a j -ésima variável), temos grau $d_l - w_j$ para a $\frac{\partial f_l}{\partial x_j}$. $\square$

Observação 5.2.3. Com esse resultado, podemos notar que quando f é quase homogêneo, os geradores do ideal $J_{\mathbf{i}}(f)$ também são homogêneos com os mesmos pesos, para qualquer símbolo de Boardman $\mathbf{i}$, pois $J_{\mathbf{i}}(f)$ é gerado por f e suas derivadas parciais, que são homogêneas de mesmos pesos. Ademais, podemos observar que como

$$e_{\mathbf{i}}(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{d!}{k^d} \cdot \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\mathbf{m}_n^k + J_{\mathbf{i}}(f)},$$

então é esperado que $e_{\mathbf{i}}(f)$ é determinado pelos pesos e graus de f .

Notação: Dado os vetores $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ e $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_p)$, tais que suas coordenadas são números inteiros não negativos, denotamos por $\mathcal{H}(\mathbf{w}; \mathbf{d})$ o **espaço vetorial complexo das aplicações quase homogêneas** com pesos $w_1, \dots, w_n$ e graus $d_1, \dots, d_p$. Quando $w_1 = \dots = w_n = 1$ (caso homogêneo), denotamos $\mathcal{H}(\mathbf{w}; \mathbf{d})$ por $\mathcal{H}_n(\mathbf{d})$.

A proposição que segue nos dá, sob algumas hipóteses, a constância da multiplicidade, $e_{\mathbf{i}}(f)$ para toda f num conjunto aberto de $\mathcal{H}(\mathbf{w}; \mathbf{d})$. Ela é consequência da Proposição 5.1.27, cuja demonstração será omitida

Proposição 5.2.4. *Seja $\mathbf{i} \in \mathcal{B}(n, p)$ um símbolo de Boardman. Suponha que exista um subconjunto aberto de Zariski $\Omega \subseteq \mathcal{H}_n(\mathbf{w}, \mathbf{d})$ tal que para todo $f \in \Omega$, o germe $V(\Delta^{\mathbf{i}} \mathcal{O}_{N, \sigma})$ é Cohen-Macaulay e $\text{codim } V(J_{\mathbf{i}}(f)) = \text{codim}_{\sigma} V(\Delta^{\mathbf{i}} \mathcal{O}_{N, \sigma}) = \dim \mathcal{O}_{N, \sigma} - \dim V(\Delta^{\mathbf{i}} \mathcal{O}_{N, \sigma}) = n$, onde $\sigma = j^k f(0)$. Então, a multiplicidade $e_{\mathbf{i}}(f)$ é constante em Ω .*

Demonstração. Pode ser vista em [2, Corolário 3.4]. $\square$

Se $f \in \Sigma^{\mathbf{i}}$ e $n = \nu(\mathbf{i})$, da Proposição 5.2.4, a segunda condição da proposição anterior pode ser substituída por $\text{codim } V(J_{\mathbf{i}}(f)) = \nu(\mathbf{i})$. Por exemplo, isso ocorre nos seguintes casos:

1. $\mathbf{i} = (1)$, $p = 2n - 1$, pois $\nu(\mathbf{i}) = (p - n + i_1)\mu(1) = (2n - 1 + n + 1) = n$;
2. $\mathbf{i} = (n)$, $p = 1$, pois $\nu(n) = (p - n + i_1) \cdot \mu(n) = (1 - n + n)n = n$;
3. $\mathbf{i} = (1, 1)$, $n = p = 2$, pois $\nu(1, 1) = (p - n + i_1) \cdot \mu(1, 1) - (i_1 - i_2) \cdot \mu(i_2) = 1 \cdot 2 = 2 = n$.

A partir daqui trataremos de resultados sobre a multiplicidade de germes quase homogêneos em função apenas de seus graus e pesos.

Proposição 5.2.5. *Seja $f \in \mathcal{O}_{n, p}$ um germe quase homogêneo com graus $d_1, \dots, d_p$ e pesos $w_1, \dots, w_n$. Considere o símbolo de Boardman $\mathbf{i} = (1)$ quando $n \leq p$ ou $\mathbf{i} = (n - p + 1)$ quando $n > p$. Suponha que $\dim \mathcal{O}_n / J_{\mathbf{i}}(f) = n - \nu(\mathbf{i})$ e $w_1 = \dots = w_n = 1$, ou $\nu(\mathbf{i}) = n$. Então,*

$$e_{\mathbf{i}}(f) = \frac{1}{w_1 \cdots w_n} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq \max\{p, n\}} d_{i_1, i_1} \cdots d_{i_{r+1}, (i_{r+1} - r)},$$

onde $r = |p - n|$ e $d_{ij} = d_i - w_j$.

Demonstração. Observe que $f \in \mathcal{O}_{n, p}$, então Df é uma matriz $p \times n$.

Quando $n \leq p$, para $\mathbf{i} = (1)$, temos

$J_{\mathbf{i}}(f) = I_{n-1+1}(Df) = I_n(Df)$, que é o menor maximal de Df , ou seja, é o maior menor possível de Df .

Quando $n > p$, para $\mathbf{i} = (n - p + 1)$, temos

$J_{\mathbf{i}}(f) = I_{n-(n-p+1)+1}(Df) = I_p(Df)$, que é o menor maximal de Df nesse caso.

Primeiramente, note que $\mathcal{O}_n$ é Cohen-Macaulay (Exemplo 3.1.91), então o conceito de altura e grau de um ideal de $\mathcal{O}_n$ são iguais (Teorema 3.1.89). Ainda, ele é um anel local, portanto, vale que

$$\dim \mathcal{O}_n/J_{\mathbf{i}}(f) = \dim \mathcal{O}_n - ht(J_{\mathbf{i}}(f)) = \dim \mathcal{O}_n - grau(J_{\mathbf{i}}(f)) = n - grau(J_{\mathbf{i}}(f)).$$

Porém, por hipótese, $\dim \mathcal{O}_n/J_{\mathbf{i}}(f) = n - \nu(\mathbf{i})$. Logo, obtemos que $grau(J_{\mathbf{i}}(f)) = \nu(\mathbf{i})$.

Portanto, $J_{(1)}(f) = I_n(Df)$ terá grau $p - n + 1 = \nu((1)) = \nu(\mathbf{i})$ se $n \leq p$ ou $J_{(n-p+1)}(f) = I_p(Df)$ terá grau $1 = \nu((n-p+1)) = \nu(\mathbf{i})$ se $n > p$.

Da Proposição 5.2.2, obtemos que as entradas de Df serão germes quase homogêneos com pesos e graus $d_{ij} = d_i - w_j$. Esse resultado segue do Teorema 3.4.3 no caso em que $w_1 = \dots = w_n = 1$ e $R = \mathcal{O}_n$, $U = [Df]_{p \times n}$, $I_m(U) = I_n(Df)$ se $n \leq p$ com grau $p - n + 1$ e $I_m(U) = I_p(Df)$ se $n > p$ com grau $p - p + 1 = 1$. Então, para $n \leq p$, $r = p - n$ e

$$\begin{aligned} e_{\mathbf{i}}(f) &= e(\mathcal{O}_n/J_{(1)}(f)) \\ &= e(\mathcal{O}_n/I_n(Df)) \\ &= e(\mathcal{O}_n) \cdot \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n} d_{i_1 i_1} d_{i_2 i_2 - 1} \dots d_{i_{r+1} (i_{r+1} - r)} \right) \\ &= \frac{1}{w_1 \dots w_n} \cdot \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq n} d_{i_1 i_1} d_{i_2 i_2 - 1} \dots d_{i_{r+1} (i_{r+1} - r)} \right). \end{aligned}$$

Note que do Exemplo 3.3.26, temos que $e(\mathcal{O}_n) = 1$ e estamos no caso em que $w_1 = \dots = w_n = 1$. Então vale que $e(\mathcal{O}_n) = \frac{1}{w_1 \dots w_n}$.

Para $n > p$ o raciocínio é análogo e chegamos no mesmo resultado apenas trocando n por p no somatório, então, podemos reescrever como

$$e_{\mathbf{i}}(f) = \frac{1}{w_1 \dots w_n} \cdot \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq \max\{n, p\}} d_{i_1 i_1} d_{i_2 i_2 - 1} \dots d_{i_{r+1} (i_{r+1} - r)} \right), \quad r = |n - p|.$$

Para o caso em que $\nu(\mathbf{i}) = n$ temos que $\dim \mathcal{O}_n/J_{\mathbf{i}}(f) = 0$, portanto, da Definição 3.3.23, segue que

$$\begin{aligned} e(\mathcal{O}_n/J_{\mathbf{i}}(f)) &= \ell(\mathcal{O}_n/J_{\mathbf{i}}(f)) = \\ &= \frac{1}{w_1 \dots w_s} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq \max\{n, p\}} d_{i_1 i_1} d_{i_2 (i_2 - 1)} \dots d_{i_{r+1} (i_{r+1} - r)} \right), \end{aligned}$$

como queríamos. □

Exemplo 5.2.6. Considere o germe $f \in \mathcal{O}_{2,2}$, dado por $f(x, y) = (x^2, y^3)$, que é quase homogêneo com graus $d_1 = 2$, $d_2 = 3$ e pesos $w_1 = w_2 = 1$.

Observe que estamos com $n \leq p$, logo, para $\mathbf{i} = (1)$, temos

$$\nu(1) = (p - n + 1) \cdot \mu(1) = (2 - 2 + 1) \cdot 1 = 1.$$

Ainda, note que $J_1(f) = I_{2-1+1}(Df) = I_2 \left(\begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{bmatrix} \right) = \langle xy^2 \rangle$ e

$\dim \frac{\mathcal{O}_2}{J_1(f)} = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{\langle xy^2 \rangle} = 1 (= n - \nu(1))$, onde o cálculo da dimensão foi feito via o software **SINGULAR** com comandos já informados. Usamos este recurso também nos exemplos seguintes.

Logo, pela proposição anterior, deveríamos ter que, para $r = 0$,

$$e_1(f) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{r+1} \leq \max\{n, p\}} d_{i_1 i_1} \dots d_{i_{r+1} (i_{r+1} - r)},$$

onde $d_{ij} = d_i - w_j$. Então $e_1(f) = d_{11} + d_{22}$, com

$$d_{11} = d_1 - w_1 = 1; d_{12} = d_1 - w_2 = 1; d_{21} = d_2 - w_1 = 2; d_{22} = d_2 - w_2 = 2.$$

Portanto, pela proposição anterior, concluímos que $e_1(f) = 3$.

Por outro lado, calculando $e_1(f)$ pela fórmula da Proposição 5.1.11, como $\dim \frac{\mathcal{O}_2}{J_1(f)} = 1$, temos que

$$e_1(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\frac{k}{2} + J_1(f)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\mathbf{m}_2^k + \langle x^2 y \rangle}.$$

Para $k \geq 2$,

$$\frac{\mathcal{O}_2}{\langle x^k, x^{k-1}y, \dots, y^k \rangle} \cong \mathbb{C}\{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, xy^2, y^3, \dots, x^{k-1}, xy^{k-2}, y^{k-1}\},$$

concluindo que $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\langle x^k, x^{k-1}y, \dots, y^k \rangle} = (k-1).3$

Sendo assim, voltando ao limite, temos

$$e_1(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\mathbf{m}_{2,2}^k + J_1(f)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \cdot (k-1).3 = 3. \left(\lim_{k \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{k} \right) = 3,$$

conferindo exatamente com o valor dado pela fórmula.

No próximo resultado particularizamos a família de germes a ser considerada ($\mathcal{O}_{n,n}$, ou seja $p = n$) mas com outro símbolo de Boardman não contemplado na proposição anterior. É uma aplicação do raciocínio utilizado na proposição anterior, mas não é uma extensão dela.

Proposição 5.2.7. *Seja $f \in \mathcal{O}_{n,n}$ um germe quase homogêneo com graus $d_1, \dots, d_n$ e pesos $w_1, \dots, w_n$. Suponha que $\dim \mathcal{O}_n/J_{1,1}(f) = n - 2$ e $w_1 = \dots = w_n = 1$, ou $\dim \mathcal{O}_n/J_{1,1}(f) = 0$. Então,*

$$e_{1,1}(f) = \frac{1}{w_1 \dots w_n} \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} d_{i,i} d_{j,j-1},$$

onde $d_{n+1} = d_1 + \dots + d_n - w_1 - \dots - w_n$ e $d_{ij} = d_i - w_j$.

Demonstração. Primeiramente, note que Df é uma matriz $n \times n$, portanto, $J_1(f) = I_{n-1+1}(Df) = I_n(Df) = \langle g_1 \rangle$, pois terá apenas um menor. Logo,

$$J_{(1,1)}(f) = J_1(f) + I_{n-1+1}(D(f, g)) = I_n(Df) + I_n(D(f, g)) = I_n(D(f, g)),$$

pois vale que $I_n(Df) \subseteq I_n(D(f, g))$. Observe que $D(f, g)$ é uma matriz $(n+1) \times n$.

Com raciocínio análogo ao resultado anterior, temos que $J_{(1,1)}(f) = I_n(D(f, g))$ tem grau $\nu((1, 1)) = 2 = (n+1) - n + 1$. Portanto, podemos aplicar o Lema 3.4.3 com $r = (n+1) - n = 1$ e concluir que

$$e_{1,1}(f) = e(\mathcal{O}_n/J_{(1,1)}) = \frac{1}{w_1 \cdots w_n} \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} d_{i,i} d_{j,j-1},$$

onde $d_{n+1} = d_1 + \dots + d_n - w_1 - \dots - w_n$ e $d_{ij} = d_i - w_j$.

Quando $\dim \mathcal{O}_n/J_{1,1}(f) = 0$, temos que $e_{1,1}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/J_{1,1}(f) = \ell(\mathcal{O}_n/J_{1,1}(f))$ e segue diretamente do Teorema 3.4.4 que $e_{1,1}(f) = \frac{1}{w_1 \cdots w_n} \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} d_{ii} d_{j(j-1)}$, com $d_{n+1} = d_1 + \dots + d_n - w_1 - \dots - w_n$ e $d_{ij} = d_i - w_j$. $\square$

Exemplo 5.2.8. *Seja $f \in \mathcal{O}_{3,3}$, dada por $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z)$, que é quase homogênea com pesos $w_1 = w_2 = w_3 = 1$ e graus $d_1 = 2, d_2 = 2$ e $d_3 = 1$. Então $J_{(1,1)}(f) = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$ e $\dim \mathcal{O}_3/J_{(1,1)}(f) = 1 = 3 - 2 (= n - 2)$.*

Portanto,

$$e_{1,1}(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\mathbf{m}_n^k + J_{(1,1)}(f)}.$$

$$\text{Ademais, } \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\mathbf{m}_n^k + J_{(1,1)}(f)} \cong \mathbb{C}\{1, x, y, z, xz, yz, z^2, \dots, xz^{k-2}, xy^{k-2}, z^{k-1}\}.$$

$$\text{Sendo assim, } \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_3}{\mathbf{m}_n^k + J_{(1,1)}(f)} = 3(k-1) + 1 \text{ e, concluindo que}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} [3(k-1) + 1] = 3, \text{ ou seja, } e_{1,1}(f) = 3.$$

Pela fórmula da proposição anterior, com $d_4 = d_1 + d_2 + d_3 - w_1 - w_2 - w_3 = 2 + 2 + 1 - 1 - 1 - 1 = 2$, temos

$$\begin{aligned} d_{11} &= d_1 - w_1 = 1, & d_{21} &= d_2 - w_1 = 1, \\ d_{32} &= d_3 - w_2 = 0, & d_{43} &= d_4 - w_3 = 1, \\ d_{22} &= d_2 - w_2 = 1, & d_{33} &= d_3 - w_3 = 0, \end{aligned}$$

devendo satisfazer que $1 \leq i < j \leq 4$, ou seja, $(i, j) = (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)$. Logo, pela fórmula dada, temos

$$e_{1,1}(f) = d_{11}d_{21} + d_{11}d_{32} + d_{11}d_{43} + d_{22}d_{32} + d_{22}d_{43} + d_{33}d_{43} = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 3,$$

conferindo exatamente com o resultado.

Nos próximos resultados f é do tipo $\Sigma^{\mathbf{i}}, \mathbf{i}$, símbolo de Boardman.

Proposição 5.2.9. *Para todo símbolo de Boardman $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$, se $\text{codim} V(J_{\mathbf{i}}(f)) = \nu(\mathbf{i})$, segue-se que $\mathcal{O}_n/J_{\mathbf{i}}(f)$ é uma interseção completa, ou seja, o ideal $J_{\mathbf{i}}(f)$ pode ser gerado por $g_1, \dots, g_{\nu(\mathbf{i})} \in \mathcal{O}_n$.*

Demonstração. Como f é do tipo $\Sigma^{\mathbf{i}}$, então f tem posto $n - i_1$ e podemos fazer uma mudança de coordenadas para f , ficando com $f(u, x) = (u, g(u, x))$ com $u \in \mathbb{C}^{n-i_1}$ e $x \in \mathbb{C}^{i_1}$. Logo, temos que $J_{\mathbf{i}_1}(f) = I_{n-i_1+1}(Df)$ com

$$Df = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_{n-i_1}} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{i_1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{p-n+i_1}}{\partial u_1} & \frac{\partial g_{p-n+i_1}}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial g_{p-n+i_1}}{\partial u_{n-i_1}} & \frac{\partial g_{p-n+i_1}}{\partial x_1} & \frac{\partial g_{p-n+i_1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_{p-n+i_1}}{\partial x_{i_1}} \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$I_{n-i_1+1}(Df) = \left\langle \frac{\partial g_j}{\partial x_i} : j = 1, \dots, p - n + i_1, i = 1, \dots, i_1 \right\rangle.$$

Sendo assim, $I_{n-i_1+1}(Df)$ é gerado por $(p - n + i_1).i_1 = \nu(i_1)$.

Ainda temos que (f, h) é do tipo $n - i_2$, onde h são os geradores de $J_{i_1}(f)$. Então temos a mudança de coordenadas $(f, h)(u, x) = (u, x)$ com $u \in \mathbb{C}^{n-i_2}$ e $x \in \mathbb{C}^{i_2}$. Portanto, como $J_{i_1, i_2}(f) = J_{i_1}(f) + I_{n-i_2+1}(D(f, g))$. Prosseguindo analogamente como o caso anterior, $J_{i_1, i_2}(f)$ será gerado por $\nu(i_1) + \nu(i_2)$ que é igual a $\nu(i_1, i_2)$ da Observação 4.3.9.

Portanto, seguindo indutivamente, obtemos que $J_{\mathbf{i}}(f)$ é gerado por $\nu(\mathbf{i}) = \text{codim} V(J_{\mathbf{i}}(f))$ elementos, tornando $\mathcal{O}_n/J_{\mathbf{i}}(f)$ uma interseção completa. $\square$

Exemplo 5.2.10. Para $f \in \mathcal{O}_{3,3}$ dada por $f(x, y, z) = (x^2, y, z)$ temos que f é do tipo

$$\Sigma^{(1,0)}, \text{ pois } Df = \begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Logo, } f \text{ tem posto 2 na origem e } J_1(f) = \langle x \rangle = \langle g \rangle.$$

$$\text{Como } D(f, g) = \begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (f, g) \text{ tem posto 3 na origem e } J_{1,0}(f) = \langle x \rangle.$$

Note que $\nu(1, 0) = (p - n + i_1)\mu(1, 0) - (i_1 - i_2).\mu(0) = (3 - 3 + 1).1 + (1 - 0).0 = 1$.

Usando o **SINGULAR**, temos que $\dim \frac{\mathcal{O}_3}{J_{1,0}(f)} = 2 (= n - \nu(1, 0))$. Logo

$$\text{codim} \frac{\mathcal{O}_3}{J_{1,0}(f)} = \nu(1, 0).$$

Para completar, $J_{1,0}(f)$ é gerado por $\nu(1, 0) = 1$ elemento, conferindo a proposição anterior.

O próximo resultado caracteriza a multiplicidade de um germe quase homogêneo f com graus $d_1, \dots, d_p$ e pesos $w_1, \dots, w_n$ nas condições da proposição anterior. Assim, dado um símbolo de Boardman $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$, o ideal $J_{\mathbf{i}}(f)$ é gerado por $g_1, \dots, g_{\nu(\mathbf{i})}$, que vem das derivadas do germe inicial. Pela Proposição 5.2.2, cada g_j é quase homogêneo de mesmos pesos e graus digamos D_j . A parte principal da demonstração será omitida.

Proposição 5.2.11. *Se $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ é quase homogêneo nas notações anteriores com $\text{codim} V(J_{\mathbf{i}}(f)) = \nu(\mathbf{i})$, então*

$$e_{\mathbf{i}}(f) = \frac{D_1 \dots D_{\nu(\mathbf{i})}}{w_1 \dots w_n}$$

quando $\dim \mathcal{O}_n/J_{\mathbf{i}}(f) = 0$, onde cada g_j tem grau D_j e pesos $w_1, \dots, w_n$.

Demonstração. Como visto, pela proposição anterior $J_{\mathbf{i}}(f)$ é gerado por $g_1, \dots, g_{\nu(\mathbf{i})}$, que são quase homogêneos de graus D_j e pesos $w_1, \dots, w_n$.

Como $\dim \mathcal{O}_n/J_{\mathbf{i}}(f) = 0$, então $e_{\mathbf{i}}(f) = c_{\mathbf{i}}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J_{\mathbf{i}}(f)} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle g_1, \dots, g_{\nu(\mathbf{i})} \rangle}$.

Por [16, Teorema 2, Corolário 3],

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle g_1, \dots, g_{\nu(\mathbf{i})} \rangle} = \frac{D_1 \dots D_{\nu(\mathbf{i})}}{w_1 \dots w_n},$$

concluindo o desejado. $\square$

Exemplo 5.2.12. *Sejam $f \in \mathcal{O}_1$, dada por $f(x) = x^3$ de peso 1 e grau 2, e $\mathbf{i} = (1)$. Então f é do tipo $\Sigma^{(1)}$, pois f tem posto $0 = 1 - 1 (= n - i_1)$.*

Ainda temos que $J_1(f) = \langle x^2 \rangle$ e $\dim \frac{\mathcal{O}_1}{\langle x^2 \rangle} = 0$.

Sendo assim, verifica as hipóteses da Proposição 5.2.11, portanto, por esta proposição $e_1(f) = \frac{2}{1} = 2$.

Por outro lado, $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_1}{\langle x^2 \rangle} = 2$, pois $\frac{\mathcal{O}_1}{\langle x^2 \rangle} \cong \mathbb{C}\{1, x\}$, verificando exatamente a fórmula dada pela proposição.

Não é fácil, em geral, obter uma expressão do D_j em termos dos graus d_j do germe f . Na proposição a seguir, fazemos isso para o caso especial $i_1 = \dots = i_k$. De agora em diante, denotamos por $\mathbf{i} = (i_{(k)})$ o símbolo de Boardman em qual o inteiro i é repetido k vezes.

Proposição 5.2.13. *Sejam $\mathbf{i} = (i_{(k)})$ e $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ dado por $f(x) = (g(x), x_{i+1}, \dots, x_n)$, onde g é quase homogêneo de graus $d_1, \dots, d_{p-n+i}$ e pesos $w_1, \dots, w_n$. Suponha que $\dim \mathcal{O}_n/J_{\mathbf{i}}(f) = 0$. Então*

$$e_{\mathbf{i}}(f) = \frac{1}{w_1 \dots w_n} \prod_{\substack{\alpha=1, \dots, p-n+i \\ \beta=1, \dots, k \\ 1 \leq \ell_1 \leq \dots \leq \ell_\beta \leq i}} (d_\alpha - w_{\ell_1} - \dots - w_{\ell_\beta}).$$

Demonstração. Para $f = (g, x_{i+1}, \dots, x_n)$ e $\mathbf{i} = (i_{(k)})$ temos que $J_{(i)}(f) = I_{n-i+1}(Df)$ com

$$Df = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial g}{\partial x_i} \right]_{(p-n+i) \times n} \\ [0]_{(n-i) \times i} [Id]_{(n-i) \times (n-i)} \end{bmatrix}.$$

Logo, pela fórmula para determinantes de Laplace, como queremos os menores $(n - i + 1) \times (n - i + 1)$ e temos uma submatriz identidade $(n - i) \times (n - i)$ de Df . Pela demonstração da Proposição 5.2.9 obtemos que

$$I_{(n-i)+1}(Df) = \left\langle \frac{\partial g_1}{\partial x_l}, \dots, \frac{\partial g_{p-n+i}}{\partial x_l} : l = 1, \dots, i \right\rangle.$$

Para obter $J_{i_{(k)}}(f)$, o próximo passo é obter $J_{i,i}(f) = J_i(f) + I_{n-i+1}(D(f, h))$, com $h = \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_l}, \dots, \frac{\partial g_{p-n+i}}{\partial x_l} : l = 1, \dots, i \right)$. Note que

$$D(f, g) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_i} \end{bmatrix}_{(p-n+i) \times n} \\ [0]_{(n-i) \times i} \quad [Id]_{(n-i) \times (n-i)} \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2}} : l_1 = 1, \dots, i \text{ e } l_2 = 1, \dots, n \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Observe ainda que ao tomar $I_{n-i+1}(D(f, h))$, aparecem novamente os geradores de $J_i(f)$. Sendo assim, podemos concluir que

$$J_{i,i}(f) = J_i(f) + \left\langle \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2}}, \dots, \frac{\partial^2 g_{p-n+i}}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2}} : 1 \leq l_1 \leq l_2 \leq i \right\rangle.$$

Continuando de maneira análoga, obtemos que

$$J_{i_{(k)}}(f) = J_{i_{(k-1)}}(f) + \left\langle \frac{\partial^k g_1}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_k}}, \dots, \frac{\partial^k g_{p-n+i}}{\partial x_{l_1} \dots \partial x_{l_k}} : 1 \leq l_1 \dots \leq l_k \leq i \right\rangle.$$

Observe que a quantidade de elementos para gerar $J_{i_{(s)}}(f)$ é a quantidade de elementos para gerar $J_{i_{(s-1)}}(f)$ somado com

$$(p - n + i) \cdot \#\{(l_1, \dots, l_s) : 1 \leq l_1 \leq \dots \leq l_s \leq i\} = (p - n + i) \binom{i + s - 1}{s},$$

onde $\#$ denota a quantidade de elementos do conjunto. Porém, note que esse valor é igual a $\nu(i_{(s)}) - \nu(i_{(s-1)})$, pois sendo

$$\nu(i_1, \dots, i_k) = (p - n + i_1)\mu(i_1, \dots, i_k) - (i_1 - i_2)\mu(i_2, \dots, i_k) - \dots - (i_{k-1} - i_k)\mu(i_k),$$

temos

$$\nu(i_{(s)}) = (p - n + i)\mu(i_{(s)}) = (p - n + i) \cdot \sum_{j=1}^s \binom{i+j-1}{j} \text{ e}$$

$$\nu(i_{(s-1)}) = (p - n + i)\mu(i_{(s-1)}) = (p - n + i) \cdot \sum_{j=1}^{s-1} \binom{i+j-1}{j}.$$

$$\text{Segue que } \nu(i_{(s)}) - \nu(i_{(s-1)}) = (p - n + i) \binom{i+s-1}{s}.$$

Disso, segue que $J_{i_{(k)}}(f)$ é gerado por $\nu(i_{(k)}) - \nu(i_{(k-1)})$ somado com o número de geradores de $J_{i_{(k-1)}}(f)$, que é igual a $\nu(i_{(k-1)}) - \nu(i_{(k-2)})$ somado com o número de geradores de $J_{i_{(k-2)}}(f)$, prosseguindo analogamente, obtemos que o número de geradores de $J_{i_{(k)}}(f)$ é $\nu(i_{(k)}) - \nu(i_{(k-1)}) + \nu(i_{(k-1)}) - \nu(i_{(k-2)}) + \dots + \nu(i_{(2)}) - \nu(i_{(1)}) + \nu(i) = \nu(i_{(k)})$.

Logo, da Proposição 5.2.11, segue que $e_i(f)$ é dado por $\frac{D_1 \dots D_{\nu(i)}}{w_1 \dots w_n}$, onde os D_i são os graus das $\nu(i)$ que geram $J_{i_{(k)}}(f)$, ou seja, são os graus de todas as derivadas parciais até

ordem k das g_i nas derivadas $x_1, \dots, x_n$. Como são todas as derivadas parciais até ordem k , com raciocínio análogo à Proposição 5.2.2, ficamos com

$$e_i(f) = \frac{1}{w_1 \cdots w_n} \prod_{\substack{\alpha=1, \dots, p-n+i \\ \beta=1, \dots, k \\ 1 \leq \ell_1 \leq \dots \leq \ell_\beta \leq i}} (d_\alpha - w_{\ell_1} - \dots - w_{\ell_\beta}).$$

□

Exemplo 5.2.14. Seja $f \in \mathcal{O}_{4,4}$ dada por $f(x, y, z, w) = (xy, xz + wy, y, w)$, que é quase homogênea de pesos $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 1$ e graus $d_1 = d_2 = 2$. Note que para $\mathbf{i} = (2)$, temos $\nu(2) = 4 (= n)$ e $J_2(f) = \langle x, y, z, w \rangle$.

Ademais, note que $\dim \frac{\mathcal{O}_4}{\langle x, y, z, w \rangle} = 0$. Portanto, verifica as hipóteses da proposição anterior. Logo,

$$e_2(f) = (d_1 - w_1) \cdot (d_1 - w_2) \cdot (d_2 - w_1) \cdot (d_2 - w_2) = 1.$$

Agora, como $\dim \frac{\mathcal{O}_4}{\langle x, y, z, w \rangle} = 0$, segue que $e_2(f) = c_2(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_4}{\langle x, y, z, w \rangle} = 1$, pois $\frac{\mathcal{O}_4}{\langle x, y, z, w \rangle} \cong \mathbb{C}\{1\}$.

Teorema 5.2.15. Seja f um germe quase homogêneo expresso como na Proposição 5.2.13 e considere o símbolo de Boardman $\mathbf{i} = (i_{(k)}, 1)$. Suponha que $\dim \mathcal{O}_n / J_{\mathbf{i}}(f) = n - \nu(\mathbf{i})$. Se $w_1 = \dots = w_n = 1$ ou $\nu(\mathbf{i}) = n$, então,

$$e_{i_{(k)},1}(f) = e_{i_{(k)}}(f) \sum_{1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_{r+1} \leq t} (D_{\alpha_1} - w_{\alpha_1}) \cdots (D_{\alpha_{r+1}} - w_{\alpha_{r+1}}),$$

onde $t = (p - n + 1) \binom{i+k-1}{k}$, $r = t - i$ e $D_1, \dots, D_t$ são os elementos do conjunto

$$\{d_\alpha - w_{\ell_1} - \dots - w_{\ell_k} : \alpha = 1, \dots, p - n + i, 1 \leq \ell_1 \leq \dots \leq \ell_k \leq i\}.$$

Demonstração. Primeiramente, perceba que temos

$$\begin{aligned} n - \nu(i_{(k)}, 1) &= \dim \mathcal{O}_n / J_{i_{(k)},1}(f) = (n - (n - \dim \mathcal{O}_n / J_{i_{(k)},1}(f))) \\ &= n - (\dim \mathbb{C}^n - \dim V(J_{i_{(k)},1})) = n - \text{codim } V(J_{i_{(k)},1}). \end{aligned}$$

Logo, $\text{codim } V(J_{i_{(k)},1}) = \nu(i_{(k)})$. Como por hipótese f é do tipo $\Sigma^{\mathbf{i}}$, então pela Proposição 5.2.9, $\mathcal{O}_n / J_{i_{(k)},1}(f)$ é uma interseção completa. Portanto, pela Proposição 3.1.90, o anel $\mathcal{O}_n / J_{i_{(k)},1}(f)$ é Cohen-Macaulay.

Por outro lado, $J_{i_{(k)},1}(f) = J_{i_{(k)}}(f) + I_n(D(f, h))$, onde h são os geradores de $J_{i_{(k)}}(f)$, que pela proposição anterior são todas as derivadas até ordem k das $g_1, \dots, g_{p-n+i}$ nas variáveis $x_1, \dots, x_i$.

Portanto, ao tomar $D(f, h)$ ficamos com a matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_i} & \frac{\partial g_1}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_{p-n+i}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{p-n+i}}{\partial x_i} & \frac{\partial g_{p-n+i}}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial g_{p-n+i}}{\partial x_n} \\ & [0]_{(n-i) \times i} & & [Id]_{(n-i) \times (n-i)} & & \\ \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_i \partial x_1} & \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_{i+1} \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_1 \partial x_i} & \cdots & \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_i^2} & \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_{i+1} \partial x_i} & \cdots & \frac{\partial^2 g_1}{\partial x_n \partial x_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 g_{p-n+i}}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 g_{p-n+i}}{\partial x_i \partial x_1} & \frac{\partial^2 g_{p-n+i}}{\partial x_{i+1} \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 g_{p-n+i}}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 g_{p-n+i}}{\partial x_1 \partial x_i} & \cdots & \frac{\partial^2 g_{p-n+i}}{\partial x_i^2} & \frac{\partial^2 g_{p-n+i}}{\partial x_{i+1} \partial x_i} & \cdots & \frac{\partial^2 g_{p-n+i}}{\partial x_n \partial x_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

que vai até as derivadas de até ordem $k + 1$ das g_i em relação às variáveis $x_1, \dots, x_n$. Portanto, como f é dada por $f(x) = (g(x), x_{i+1}, \dots, x_n)$, segue da lei de definição de f que ao tomar $I_n(D(f, h))$ aparecerão as derivadas parciais das $g_1, \dots, g_{p-n+i}$ até ordem $k + 1$ em relação à $x_1, \dots, x_i$. Porém, as derivadas parciais até ordem k já aparecem em $J_{i_{(k)}}(f)$ e assim $J_{i_{(k)},1}(f)$ pode ser expressa como $J_{i_{(k)}}(f) + I_i(A)$, onde A é a matriz cujas entradas são dadas por todas as derivadas parciais de ordem $k + 1$ das $g_1, \dots, g_{p-n+i}$ nas variáveis $x_1, \dots, x_i$.

Nesse caso A é uma matriz com $t = (p - n + i) \binom{i+k-1}{k}$ linhas por i colunas e ainda a interseção de $I_i(A)$ com $J_{i_{(k)}}(f)$ é somente $\{0\}$, pois A foi tomada de forma que os elementos em comum de $D(f, h)$ e $J_{i_{(k)}}(f)$ sejam "retirados".

Para o caso $\dim \mathcal{O}_n / J_i(f) = n - \nu(\mathbf{i})$, precisamos mostrar que $I_i(A)$ tem grau

$$[n^\circ \text{ de linhas de } A] - [n^\circ \text{ de colunas de } A] + 1,$$

ou seja, $I_i(A)$ deve ter grau $(p - n + i) \binom{i+k-1}{k} - i + 1$ para usar o Lema 3.4.3.

Usando as propriedades de isomorfismos de módulos (Proposição 3.1.12) temos:

$$J_{i_{(k)},1}(f) / J_{i_{(k)}}(f) = (J_{i_{(k)}}(f) + I_i(A)) / J_{i_{(k)}}(f) \cong I_i(A) / I_i(A) \cap J_{i_{(k)}}(f) \cong I_i(A).$$

$$\frac{\mathcal{O}_n / J_{i_{(k)}}(f)}{J_{i_{(k)},1}(f) / J_{i_{(k)}}(f)} \cong \frac{\mathcal{O}_n / J_{i_{(k)}}(f)}{I_i(A) / I_i(A) \cap J_{i_{(k)}}(f)} = \frac{\mathcal{O}_n / J_{i_{(k)}}(f)}{\tilde{I}_i(A)},$$

onde $\tilde{I}_i(A) = I_i(A) + J_{i_{(k)}}(f)$ (como elemento do anel quociente).

Note que $R = \mathcal{O}_n/J_{i_{(k)}}(f)$ é um anel Noetheriano, pois $\mathcal{O}_n$ é Noetheriano. Por hipótese, temos $n - \nu(i_{(k)}, 1) = \dim \mathcal{O}_n/J_{i_{(k)},1}(f)$ e, dos isomorfismos citados anteriormente, temos

$$\dim \mathcal{O}_n/J_{i_{(k)},1}(f) = \dim \frac{\mathcal{O}_n/J_{i_{(k)}}(f)}{J_{i_{(k)},1}(f)/J_{i_{(k)}}(f)} = \dim \frac{\mathcal{O}_n/J_{i_{(k)}}(f)}{\tilde{I}_i(A)}.$$

Logo, do Lema 3.7,

$$\begin{aligned} \dim \frac{\mathcal{O}_n/J_{i_{(k)}}(f)}{I_i(A)} &\geq \dim \frac{\mathcal{O}_n}{J_{i_{(k)}}(f)} - \left[(p - n + i) \binom{i + k - 1}{k} - i + 1 \right] = \\ &= \dim \frac{\mathcal{O}_n}{J_{i_{(k)}}(f)} - \left[(\nu(i_{(k)}) - \nu(i_{(k-1)})) - i + 1 \right], \end{aligned}$$

onde a última igualdade foi provada na demonstração da proposição anterior.

Logo, obtemos a seguinte desigualdade

$$n - \nu(i_{(k)}, 1) = \dim \frac{\mathcal{O}_n}{J_{i_{(k)},1}(f)} \geq \dim \frac{\mathcal{O}_n}{J_{i_{(k)}}(f)} - \left[(\nu(i_{(k)}) - \nu(i_{(k-1)})) - i + 1 \right]. \quad (5.1)$$

Temos ainda que $\nu(i_{(k)}) = (p - n + i) \binom{i+k-1}{k}$ e $\nu(i_{(k-1)}) = (p - n + i) \binom{i+(k-1)-1}{k-1}$, mas

$$\nu(i_{(k),1}) = (p - n + i) \mu(i_{(k),1}) - (i - 1) \mu(1) = (p - n + i) \mu(i_{(k),1}) - i + 1,$$

onde o número $\mu(i_{(k)}, 1) = \mu(i_1, \dots, i_k, i_{k+1})$, com $i_1 = \dots = i_k = i$ e $i_{k+1} = 1$ é a quantidade de vetores $j = (j_1, \dots, j_k, j_{k+1})$ que satisfazem $j_1 > 0$, $j_s \leq i_s$, $\forall s$ e $j_1 \geq \dots \geq j_{k+1}$.

Então, para obter $\mu(i_{(k)}, 1)$ com $j_{k+1} = 0$, é exatamente $\binom{i+k-1}{k} = \mu(i_{(k)})$, e para $j_{k+1} = 1$, é o valor $\binom{i+k-1}{k} = \mu(i_{(k)})$ subtraído $\binom{i+(k-1)-1}{k-1} = \mu(i_{(k-1)})$.

Resultando que

$$\begin{aligned} \nu(i_{(k),1}) &= (p - n + i) \mu(i_{(k),1}) - i + 1 = \\ &= (p - n + i) \left[\mu(i_{(k)}) + \mu(i_{(k)}) - \mu(i_{(k-1)}) \right] - i + 1 = 2\nu(i_{(k)}) - \nu(i_{(k-1)}) - i + 1. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Das Equações (5.1) e (5.2), obtemos

$$n - \nu(i_{(k)}) \geq \dim \frac{\mathcal{O}_n}{J_{i_{(k)}}(f)}. \quad (5.3)$$

Vimos na demonstração da Proposição 5.2.13 que $J_{i_{(k)}}(f)$ é gerado por $\nu(i_{(k)})$ elementos, logo vale a igualdade na Equação (5.3). Como f é do tipo $\Sigma^{\mathbf{i}}$, onde $\mathbf{i} = (i_{(k)}, 1)$, então f é do tipo $\Sigma^{i_{(k)}}$ e, da Proposição 5.2.9, segue que $\frac{\mathcal{O}_n}{J_{i_{(k)}}(f)}$ é um anel Cohen-Macaulay.

Assim,

$$\dim \frac{\mathcal{O}_n}{J_{i_{(k)},1}(f)} = \dim \frac{\mathcal{O}_n/J_{i_{(k)}}(f)}{\tilde{I}_i(A)} = \dim \frac{\mathcal{O}_n}{J_{i_{(k)}}(f)} - \text{grau}(\tilde{I}_i(A)) = \dim \frac{\mathcal{O}_n}{J_{i_{(k)}}(f)} - \text{grau}(I_i(A)). \quad (5.4)$$

Além disso, valendo a igualdade da Equação (5.3), vale a igualdade na Equação (5.1), ou seja,

$$\dim \frac{\mathcal{O}_n}{J_{i_{(k)},1}(f)} = \dim \frac{\mathcal{O}_n}{J_{i_{(k)}}(f)} - \left[(\nu(i_{(k)}) - \nu(i_{(k-1)})) - i + 1 \right] \quad (5.5)$$

Das Equações (5.4) e (5.5) obtemos

$$\text{grau}(I_i(A)) = \nu(i_{(k)}) - \nu(i_{(k-1)}) - i + 1 = (p - n + i) \binom{i + k - 1}{k} - i + 1 = t - i + 1.$$

Note que como as entradas de A são derivadas parciais das k -ésimas derivadas das $g_1, \dots, g_{p-n+i}$ e essas derivadas até ordem k possuem grau do tipo do seguinte conjunto

$$\{d_\alpha - w_{\ell_1} - \dots - w_{\ell_k} : \alpha = 1, \dots, p - n + i, 1 \leq \ell_1 \leq \dots \leq \ell_k \leq i\}.$$

Logo, as entradas de A possuem graus do tipo $(D_{\alpha_s} - w_{\alpha_s})$ com D_{α_s} pertencente ao conjunto anterior.

Até o momento, usamos somente a hipótese que $\dim \mathcal{O}_n / J_{\mathbf{i}}(f) = n - \nu(\mathbf{i})$, agora vamos considerar os dois casos separadamente:

1º caso: $w_1 = \dots = w_n = 1$.

Segue diretamente do Teorema 3.4.3 para $R = \mathcal{O}_n / J_{i_{(k)}}(f)$ e $R_m(U) = \frac{R}{J_{\mathbf{i}}(f) / J_{i_{(k)}}(f)}$ que

$$e_{i_{(k)},1}(f) = e_{i_{(k)}}(f) \sum_{1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_{r+1} \leq t} (D_{\alpha_1} - w_{\alpha_1}) \dots (D_{\alpha_{r+1}} - w_{\alpha_{r+1}-r}),$$

onde $t = (p - n + 1) \binom{i+k-1}{k}$ é o número de linhas da matriz A , i é o número de colunas da matriz A , $r = t - i$, e $D_1, \dots, D_t$ são os elementos do conjunto

$$\{d_\alpha - w_{\ell_1} - \dots - w_{\ell_k} : \alpha = 1, \dots, p - n + i, 1 \leq \ell_1 \leq \dots \leq \ell_k \leq i\}.$$

2º caso: $\nu(\mathbf{i}) = n$.

Logo $\dim \mathcal{O}_n / J_{\mathbf{i}}(f) = n - \nu(\mathbf{i}) = 0$. Como da Proposição 3.3.24 temos

$$e_{i_{(k)},1}(f) = e \left(\frac{\mathcal{O}_n}{J_{i_{(k)},1}(f)} \right) = \ell \left(\frac{\mathcal{O}_n}{J_{i_{(k)},1}(f)} \right)$$

e do Lema 3.4.4 temos

$$\ell \left(\frac{\mathcal{O}_n}{J_{i_{(k)},1}(f)} \right) = e \left(\frac{\mathcal{O}_n}{J_{i_{(k)}}(f)} \right) \sum_{1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_{r+1} \leq t} (D_{\alpha_1} - w_{\alpha_1}) \dots (D_{\alpha_{r+1}} - w_{\alpha_{r+1}-r}),$$

onde $t = (p - n + 1) \binom{i+k-1}{k}$ é o número de linhas da matriz A , i é o número de colunas da matriz A , $r = t - i$, e $D_1, \dots, D_t$ são os elementos do conjunto

$$\{d_\alpha - w_{\ell_1} - \dots - w_{\ell_k} : \alpha = 1, \dots, p - n + i, 1 \leq \ell_1 \leq \dots \leq \ell_k \leq i\},$$

temos o desejado. $\square$

Exemplo 5.2.16. Sejam $f \in \mathcal{O}_{2,2}$, dada por $f(x, y) = (xy^2 + x^3, y)$ e $\mathbf{i} = (1, 1)$ ($k = 1$ e $i_{(k)} = (1)$). Considere $g(x, y) = xy^2 + x^3$.

Temos que $J_1(f) = \langle y^2 + 3x^2 \rangle$ e $J_{1,1}(f) = \langle y + 3x^2, 6x \rangle$.

Note que $\dim \mathcal{O}_2 / J_{1,1}(f) = 0$ e assim estamos nas hipóteses do teorema anterior, onde com g quase homogêneo com pesos $w_1 = w_2 = 1$ e grau $d_1 = 3$.

Assim, pelo teorema anterior, sendo

$$t = (p - n + 1) \binom{i + k - 1}{k} = (2 - 2 + 1) \binom{1 + 1 - 1}{1} = 1, \quad r = t - i = 1 - 1 = 0,$$

temos $e_{1,1}(f) = e_1(f) \cdot (D_1 - w_1) = e_1(f)$, pois $D_1 = d_1 - w_1 = 2$ e $w_1 = 1$.

Logo, precisamos calcular $e_1(f)$. Para isso, primeiro perceba que $\dim \mathcal{O}_4/J_1(f) = 1$ e então temos da Proposição 5.1.11, que

$$e_1(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{\mathbf{m}_n^k + J_1(f)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \cdot (2(k - 1) + 1) = 2,$$

pois $\frac{\mathcal{O}_2}{\mathbf{m}_n^k + J_1(f)} \cong \mathbb{C}\{1, x, y, x^2, y^2, \dots, x^{k-1}, y^{k-1}\}$. Logo, $e_{1,1}(f) = 2$.

Por outro lado, como $\dim \frac{\mathcal{O}_2}{J_{1,1}(f)} = 0$, então $e_{1,1}(f) = c_{1,1}(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_2}{J_{1,1}(f)} = 2$, chegando no mesmo resultado e lembrando que os cálculos de dimensão foram feitos usando o software **SINGULAR**.

6 CONCLUSÃO

Como já mencionado, o principal objetivo deste trabalho foi definir um número capaz de caracterizar as singularidades de germes de aplicações holomorfas, especialmente no caso de singularidades não isoladas. Este número representa uma extensão significativa de importantes invariantes desta teoria, como descrevemos na introdução deste trabalho.

Assim, destacamos que o assunto escolhido é relevante em Teoria de Singularidades, pois são poucos os trabalhos que exploram aplicações com singularidades não isoladas, a maioria foca em funções com singularidades isoladas.

Exaltamos que a relevância deste trabalho reside justamente na riqueza das ferramentas algébricas necessárias para seu desenvolvimento. Definir e compreender o número em questão exigiu um aprofundamento algébrico, foram necessários conceitos avançados de álgebra comutativa, como a série de Hilbert, a função de Samuel, e as estruturas dos anéis Noetherianos, Artinianos e Cohen-Macaulay. Esses elementos não apenas fundamentam a definição do número estudado, mas também se entrelaçam de forma essencial na construção teórica do tema. No contexto dos germes quase homogêneos, a análise se torna mais sofisticada, pois determinar a multiplicidade em função dos pesos e graus requer um certo cuidado com fórmulas combinatórias.

O desafio, portanto, não está apenas na presença desses objetos matemáticos, mas na necessidade de conectá-los de maneira coerente e precisa. Como essas ferramentas não são apresentadas de forma linear na literatura, o trabalho exigiu um esforço para integrá-las ao nosso contexto de maneira sólida e consistente.

Enfim, acreditamos que este trabalho contribuiu significativamente para a formação acadêmica do discente. As ferramentas desenvolvidas e os conhecimentos adquiridos ampliam as perspectivas para estudos futuros, não apenas nesta área específica, mas também em diversos problemas algébricos.

REFERÊNCIAS

- [1] NUNO-BALLESTEROS, J. J.; SAIA, M. J. Multiplicity of thom-boardman strata and deformations of map germs. *Glasgow J. Math.*, v. 40, p. 21–32, 1998.
- [2] BIVIA-AUSINA, C.; NUNO-BALLESTEROS, J. J. Multiplicity of iterated jacobian extensions of weighted homogeneous map germs. *Hokkaido Mathematical Journal*, v. 29, 2000.
- [3] LIMA, E. L. *Variedades diferenciáveis*. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. (Publicações Matemáticas 25).
- [4] GRIFFITHS, P.; HARRIS, J. *Principles of Algebraic Geometry*. [S.l.]: Wiley Classics Library Edition, 1994.
- [5] GIBSON, C. G. *Singular points of smooth mappings*. [S.l.]: Pitman Publishing - London, 1979.
- [6] FRITZSCHE, K.; GRAUERT, H. *From Holomorphic Functions to Complex Manifolds*. [S.l.]: Springer, 2002. (Graduate Texts in Mathematics).
- [7] FULTON, W. *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*. [S.l.]: W. A. Benjamin, 2008.
- [8] ATIYAH, M. F.; MACDONALD, I. G. *Introduction to commutative algebra*. [S.l.]: Addison-Wesley, series in Mathematics, 1969.
- [9] MATSUMURA, H. *Commutative ring theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1986. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics 8).
- [10] NARASIMHAN, R. *Analysis on Real and Complex Manifolds*. [S.l.]: North-Holland, 1968. (North-Holland Mathematical Studies, Vol. 35).
- [11] HOCHSTER, M.; EAGON, J. Cohen-macaulay rings, invariant theory, and the generic perfection of determinantal loci. *Amer. J. Math.*, v. 93, p. 1020–1058, 1971.
- [12] MORIN, B. Calcul jacobian. *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, v. 8, p. 1–98, 1975.
- [13] BOARDMAN, J. Singularities of differentiable maps. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, v. 33, p. 21–57, 1967.
- [14] SILVA, T. *O Senhor dos Anéis Comutativos com Unidade*. 2024. Universidade Federal do Espírito Santo.

-
- [15] LIPMAN, J. Equimultiplicity, reduction and blowing up. *Lect. Notes Pure and Appl. Math.*, v. 68, 1982.
 - [16] DAMON, J. A bézout theorem for determinantal modules. *Compositio Mathematica*, v. 98, p. 117–139, 1995.