



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.014/05

Fatores de Forma Eletromagnéticos do Píon e do Káon na Frente de Luz

Fabiano Pinto Pereira

Orientador

Lauro Tomio

Co-orientador

João Pacheco B. C. de Melo

Julho 2005

Palavras Chaves:

Teoria Quântica de Campos

Formalismo Covariante

Formalismo da Frente de luz

Correntes eletromagnéticas

Fator de Forma

Píon

Káon

Áreas do conhecimento:

Física das partículas elementares e campos: 1050300-5

Física nuclear: 1050400-1

Resumo

O pión e o káon, como estados ligados quark-antiquark, são sistemas apropriados para o estudo de aspectos da QCD em regiões de energias baixas e intermediárias. Estes mésons vêm recebendo muita atenção, quando se usa o modelo de quark constituinte no formalismo do cone de luz para testar o regime não-perturbativo da QCD. O fator de forma eletromagnético do pión e do káon é calculado em um modelo teórico de campo pseudo-escalar com quarks constituintes, e sua estrutura é apresentada através da corrente eletromagnética extraída dos diagramas de Feynman triangulares. Utilizando tais diagramas, são obtidas as componentes “ J_π^+ ” e “ J_π^- ”; para o pión, e as componentes “ J_K^+ ” e “ J_K^- ”; para o káon, da corrente eletromagnética no formalismo do cone de luz. Através destas correntes, são obtidos os fatores de forma, levando-se em conta momentos transferidos baixos e intermediários. Por meio da abordagem de Feynman, além do fator de forma eletromagnético, são calculados a constante de decaimento e o raio desses mésons no formalismo do cone de luz. Uma concordância muito boa em relação aos dados experimentais é obtida. Foi mostrado que os termos de pares são essenciais para manter a covariância completa do formalismo. Este trabalho restringiu-se ao estudo dos elementos de matriz da corrente eletromagnética na camada de massa.

Abstract

The pion and kaon, as quark-antiquark bound states, are appropriate systems to study aspects of QCD at low and intermediate energy regions. The pion and kaon has indeed received much attention, being used the constituent quark model in the light-cone formalism, to check the nonperturbative regime of QCD. The electromagnetic form factor of the pion and kaon is calculated in a pseudoscalar field theoretical model with constituent quarks, and your structure is presented in terms of the electromagnetic current extracted of the triangle diagrams. Using this diagrams, was obtained the components “ J_π^+ ” and “ J_π^- ”; for the pion, and the “ J_K^+ ” and “ J_K^- ”; for the kaon, of the electromagnetic current in the light-cone formalism. Following, the form factor of these mesons are obtained, considering low and intermediate transfer momenta. By means of the Feynman approach, besides of the light-cone form factor, is obtained the constant decay and charge radius for this mesons in the light-cone formalism. A fairly good agreement with experiment is obtained. It is shown that the quark-antiquark pair terms are essential for retaining full covariance. This work was restricted to the study of on-shell current matrix elements.

Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer aos professores do IFT, Rubens Adrovandi, José Geraldo Pereira, Diógenes Galetti, Bruto M. Pimentel e Accioly, por terem me dado aula e apresentado um esforço tão grande e digno em se preocupar com os alunos, se dedicando não somente em cumprir suas obrigações profissionais, mas como também em formar profissionais em potencial na área de física, mantendo muita simpatia e humildade. Suas contribuições serão muito mais do que meros artigos publicados... Gostaria de agradecer fortemente ao meu orientador aqui no IFT em meu curso de mestrado, o Prof. Lauro Tomio por ter me recebido de maneira tão cordial, e principalmente por ter demonstrado enorme paciência e incentivo ao decorrer do mestrado. Pessoa simples, e dedicadíssima, nem parece ter toda essa experiência profissional que realmente possui. Gostaria de lembrar também do meu co-orientador Prof. João Pacheco B. C. de Melo, cujo trabalho e dedicação tornaram possíveis os cálculos e a confecção de minha tese. Também gostaria de agradecer o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, “CAPES”, durante a realização deste trabalho. Com certeza não poderia me esquecer do Victo S. Filho que além de ter me dado aula, e foi uma das melhores que já tive, é uma pessoa excelente, sempre disposto a ajudar quando tínhamos alguma dúvida de informática qualquer, deixando seu próprio trabalho para se dedicar a ajudar seus semelhantes. Sem dúvida, é a pessoa mais autoísta do IFT. Gostaria de agradecer também ao Cassana e ao Ricardo Farias por terem me ajudado em algumas dúvidas e me terem dado algumas dicas em meus trabalhos, que me foram muito úteis, e por isso sou profundamente grato. Quero agradecer também aos funcionários da secretaria da pós Rosane, Meire, Luzinete e Wilma por sempre estarem dispostas a me ajudar a resolver as burocracias necessárias ao longo do mestrado. Agradecendo também aos funcionários da secretária geral José Francisco, Marcelo e Luciana por me darem suporte quando necessário. Aos funcionários do pólo computacional, por terem atendido meus chamados sempre que podiam. Agradecimentos aos funcionários gerais de manutenção, vigília; em especial ao Seu Jorge, cuja simpatia e bom humor sempre me contagiaram. Obviamente não poderia me esquecer do seu Luís motorista do IFT, ilustre Palmeirense, que juntamente com o Carlos Senise, foram responsáveis por tornarem o Palmeiras meu time preferido aqui em São Paulo. Lembrando sempre de que o principal tesouro que podemos obter nessa vida é a amizade e o amor, e que graças a Deus tive a capacidade; ou digamos

assim, virtude em fazer amigos. Quero lembrar o nome das pessoas que tornaram minha permanência aqui no IFT mais agradável e alegre, permitindo-me manter um espírito de segurança e tranquilidade. Dentre as muitas amizades gostaria de lembrar de: Daniel Pamplona, Sheila Holtz, Clóvis, Evandro, Carlos Mafra, Júlio, Mário, Dáfni, Gadelha, Douglas, o Colombiano Gérman e o David; e os alunos que chegaram posteriormente, mas não estão atrás em meu coração: Carlos Senise, Edinho, Fábio Yoshikazu, Ana, Thiago, Nadiane, Gisele, Marcelo carioca, Anderson, Geová, Bonin, Genílson, Samuel de Camarões e Hirosh. Gostaria de lembrar do Seu Walter e do Jorge, pois nossas conversas sobre filosofia da ciência e cosmologia, foram muito úteis para me abrir mais a mente. Também não poderia me esquecer dos meus companheiros de sala: Wagner, André, Gabriela e Léo, por serem pessoas tão simpáticas e prestativas, sempre mantendo o clima de cordialidade e união indispensáveis para se trabalhar em grupo e viver. Não esquecendo de tantos outros companheiros e amigos, que graças à Deus, por serem tantos minha fraca memória não conseguiu resgatar em seus registros. Quero agradecer do fundo do meu coração a minha família, Meus pais Hélio e Cleis, meus irmãos Simone e Cristiano, juntamente com minha cunhada Lisiane e minhas sobrinhas Cristiane e Ariane que acaba de nascer. realmente sem o suporte e incentivo que sempre me deram nunca poderia chegar até onde cheguei hoje. A minha noiva Cris, a pessoa mais especial, mais meiga, doce e carinhosa que já conheci em minha vida, além de minha companheira, minha musa inspiradora, é meu bálsamo, meu conforto, meu objetivo de vida, meu sonho, minha felicidade, meu amor, amor da minha vida, minha vida... Precisa falar mais alguma coisa? Finalmente, quero prestar minha homenagem, e meus profundos agradecimentos, pelo grande responsável por todos nós estarmos aqui hoje, responsável pela grande harmonia universal, responsável pelo universo ser regido por essa lei justa e sábia, assim como era no princípio, é agora e sempre será, Deus o Senhor sempre estará no meu coração aconteça o que acontecer, serei sempre seu humilde servo por toda a eternidade...

Índice

1	Introdução	1
2	Conceitos Fundamentais da Cromodinâmica Quântica	4
2.1	Introdução, Simetrias e Modelo de Quarks	4
2.2	Quebra Espontânea de Simetria Quiral, PCAC e Con- stante de Decaimento	12
2.3	Fator de Forma Eletromagnético	29
3	Formalismo da Frente de Luz e sua Dinâmica	34
3.1	Notações e Convenções	34
3.2	Geradores e Álgebra de Poincaré	40
3.3	Campo Escalar: Quantização, Relações de Comutação e Propagadores no Formalismo da Frente de Luz	44
4	Píon	47
4.1	Componente J_{π}^{+} da Corrente Eletromagnética	50
4.2	Componente J_{π}^{-} da Corrente Eletromagnética	56
4.3	Constante de Decaimento do Píon	59
4.4	Conclusão	60
5	O Méson K	62
5.1	Componente J_K^{+} da Corrente Eletromagnética	63
5.2	Componente J_K^{-} da Corrente Eletromagnética	65
5.3	Constante de Decaimento do Káon	69
5.4	Conclusão	70
6	Conclusões	72
A	Cálculos do Píon	75
A.1	Cálculos dos Traços das Componentes J_{π}^{+} e J_{π}^{-}	75
A.2	Cálculo do Traço de f_{π}	77

B	Cálculos do Káon	78
B.1	Cálculos dos Traços das Componentes J_K^+ e J_K^-	78
B.2	Cálculo do Traço de f_K	81
	Referências	83

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho iremos explorar o formalismo da Teoria Quântica de Campos na Frente de Luz (TQCFL) aplicada à física de partículas elementares, onde a função de onda é definida no plano-nulo [1], e comparamos vários cálculos com os resultados obtidos no formalismo usual da Teoria Quântica de Campos (formalismo Covariante) [2, 3].

Segundo Dirac propôs [4], podem existir várias formas de dinâmica para uma teoria relativística, uma delas, a dinâmica relativística do cone de luz (na literatura também encontra-se frente de luz ou plano-nulo).

No formalismo da mecânica quântica da frente de luz, utilizamos as coordenadas definidas no plano de luz $x^+ = t + z = 0$, $x^- = t - z = 0$ e $x^\perp = (x, y)$. No plano nulo temos em princípio a supressão de criação de pares [3, 5, 6], quando calculamos os fatores de forma eletromagnéticos. Utilizamos uma função de onda relativística do sistema ligado no plano-nulo, assim como o modelo proposto por [5, 7], que têm somente graus de liberdade de partículas [3]. Neste trabalho utilizamos o grau de liberdade de quark constituinte assim como discutido no capítulo 2 e ao decorrer do texto. Foi aplicado o formalismo da frente de luz para modelar a função de onda do nucleon [3, 8] obtida das equações de Faddeev no plano-nulo.

No formalismo da frente de luz, temos também a vantagem de que a relação de dispersão da energia é linear e não quadrática assim como no formalismo covariante [3], simplificando bastante os cálculos; assim como será comentado no capítulo 3 que justamente introduz o formalismo da dinâmica da frente de luz e ao longo do texto.

Outro ponto que deve ser notado é que a dinâmica do plano-nulo é invariante sobre transformações cinemáticas, facilitando o nosso trabalho na hora de fazer os cálculos dinâmicos. Este fato também será comentado no capítulo 3.

O objetivo principal deste trabalho foi realizar um estudo dos fatores de forma eletromagnéticos e a constante de decaimento de partículas compostas no plano-nulo;

que no nosso caso foram os dois mésons pseudo-escalares, o pión e o kaon.

Este trabalho está dividido em 6 capítulos, nos quais passamos a descrever com mais detalhes.

Para iniciar tal objetivo, primeiramente foi feita no capítulo 2 uma pequena introdução à QCD e ao modelo de quarks, como também uma breve introdução às noções de grupos e simetrias. Em seguida foi feita uma introdução a quebra espontânea de simetria quiral, a álgebra das correntes quirais, ao teorema de conservação parcial da corrente axial (PCAC) e a introdução da constante de decaimento de mésons através do teorema PCAC, que é justamente o caso do pión e do káon. Em seguida no capítulo 2, fizemos uma introdução sobre a significância do fator de forma tanto para a física hadrônica como para a nuclear, demonstramos a relação da “decomposição de Gordon”; a partir da equação de Dirac, onde extraímos uma relação para o fator de forma eletromagnético em função da corrente eletromagnética. Mostramos uma relação para o raio quadrático médio para o nucleon utilizando-se apenas o fator de forma eletromagnético. No capítulo 3 apresentamos o formalismo da frente de luz, [9]. Discutimos também neste capítulo as conexões entre o formalismo da frente de luz e o formalismo covariante, principalmente no caso de campos escalares; que é justamente o caso das duas partículas que estudamos neste trabalho, o pión e o káon, as quais são partículas pseudo-escalares.

No capítulo 4 estudamos o méson π , que é uma partícula pseudo-escalar, como um exemplo dos cálculos que faremos no capítulo 5 para o méson K, pelo fato de que o pión ser uma partícula bastante estudada e conhecida, exemplificando então explicitamente o que faremos à seguir no capítulo 5 com o káon.

No capítulo 5, o primeiro estudo que desenvolvemos corresponde ao cálculo da componente da corrente J^+ para o estado composto por dois férmions formando um estado S para o pión; assim como foi feito no capítulo 4, utilizando-se do referencial de Breit, onde o momento transferido pelo fóton é dado por $q^+ = q^- = 0$ e $\vec{q}_\perp = (q_x, 0, 0)$. A rotação em torno do eixo x é uma transformação não-cinemática no plano-nulo, e portanto deve incluir a interação, o que em princípio sugere que o processo de produção de pares deva ser considerado em J^- para que a igualdade seja satisfeita. Foi mostrado explicitamente, utilizando uma Lagrangiana efetiva para o acoplamento pión-quark, que para a componente J^+ não existe a contribuição de produção de pares (ou contribuição de diagramas tipo “Z”) quando $q^+ = 0$ [3, 5, 10].

No capítulo 4, a componente J^+ da corrente eletromagnética foi construída diretamente do diagrama triangular de Feynman para o pión [3, 10], onde a integração no momento k^- do “loop” interno foi efetuada analiticamente, levando-se em conta o pólo do propagador da partícula espectadora no processo de absorção do fóton,

assim como comentado no apêndice A. Em seguida foi feito no capítulo 4, o estudo da componente J^- da corrente eletromagnética, e observamos que considerando apenas o pólo do propagador da partícula espectadora na integração de Cauchy, ocorre a ruptura da invariância rotacional. Neste caso, devemos adicionar a contribuição do processo de criação de um par pelo fóton, para que a invariância rotacional da corrente seja restaurada [3, 6, 10].

Além disto, introduzimos um regularizador covariante no diagram triangular nas integrais que constituem as duas componentes da corrente eletromagnética do pión, assim como proposto nas Refs. [10, 11]. Dentro deste contexto também estudamos e calculamos a constante de decaimento do pión.

No capítulo 5, foram feitos para o kaon, similarmente ao que fizemos anteriormente para o pión, as componentes J^+ e J^- da corrente eletromagnética no referencial de Breit; acrescentando o termo de par para J^- ; restabelecendo assim sua covariância [12, 13]. Porém acrescentamos neste capítulo algo de novo; o cálculo da constante de decaimento, utilizando o modelo de função de onda [7].

Os cálculos apresentados nos capítulos 4 e 5 para o pión e o kaon respectivamente, foram feitos no formalismo da frente de luz e comparados com o formalismo covariante.

Os cálculos feitos para o pión e o kaon nos capítulos 4 e 5, foram indicados de maneira explícita nos apêndices A e B.

No capítulo 6, foram apresentadas as conclusões finais sobre este trabalho.

Capítulo 2

Conceitos Fundamentais da Cromodinâmica Quântica

2.1 Introdução, Simetrias e Modelo de Quarks

A cromodinâmica quântica (QCD) é a teoria que descreve as interações fortes, que são as interações entre seus constituintes fundamentais; os quarks e glúons, formando os estados ligados de mésons e bárions. Será dada neste capítulo uma pequena introdução ao modelo de quarks, necessária para os capítulos posteriores, onde será considerado o grau de liberdade efetivo do quark constituinte.

Os constituintes fundamentais da QCD são os quarks e glúons, sendo que os quarks podem existir em seis estados diferentes (sabor): u (up), d (down), s (strange); que são os mais leves e c (charm), b (bottom), t (top); que são os mais pesados. Para cada partícula existe uma anti-partícula correspondente.

Bárions são estados ligados constituídos por três quarks, enquanto os mésons são estados ligados constituídos de um quark e um anti-quark.

A QCD surge quando o modelo de quark é combinado com a invariância local de gauge no SU(3) [14].

Contudo, o modelo inicial para os quarks não era completo, porque o princípio da exclusão de Pauli poderia não permitir uma partícula como a Δ isobar $|\Delta^{++} \rangle = |uuu \rangle$ com spin 3/2, por exemplo.

O único jeito de construir uma função de onda completamente anti-simétrica ou simétrica para o exemplo da Δ^{++} , assim como para os demais hádrons; é postular um número quântico adicional, o qual foi chamado de “cor”. Os quarks podem existir em três estados de cor diferentes; vermelho, verde e azul.

Os estados ligados de quarks (mesons e bárions) são invariantes sob o grupo SU(3) para o espaço de cores, significando que os estados ligados são descoloridos, ou seja, não tem cor. A representação fundamental do grupo SU(3) para os quarks é dada por:

$$q(x) = \begin{pmatrix} q^R(x) \\ q^G(x) \\ q^B(x) \end{pmatrix}.$$

Seja q^a um quark com índice de cor “a” (a=1,2,3), o confinamento; obriga que estados ligados existam em singlete de cores (pois a função de onda total é anti-simétrica):

$$\begin{aligned} |b\acute{a}rion\rangle &= \epsilon_{abc} q^a q^b q^c, \\ |m\acute{e}son\rangle &= \delta_{ab} q^a \bar{q}^b. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Os glúons são as partículas responsáveis pela interação forte entre os quarks, e carregam as chamadas cargas de cor e podem ser formados por nove estados bicolores diferentes: $R\bar{R}, R\bar{G}, R\bar{B}, G\bar{R}, G\bar{G}, G\bar{B}, B\bar{R}, B\bar{G}, B\bar{B}$ [15, 16].

Os quarks além de seus números quânticos usuais, têm também outros números quânticos chamados “estranheza” e “hipercarga”. A hipercarga está relacionada com a terceira componente do isospin dos quarks “ I_3 ”, e com a carga elétrica pela fórmula abaixo, onde Y é a hipercarga:

$$Q = I^3 + \frac{Y}{2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

onde a hipercarga Y é dada por:

$$Y = B + S, \quad (2.2)$$

sendo B o número bariônico e S o número de estranheza. Os números quânticos dos quarks e de suas respectivas anti-partículas estão dados na Tabela 2.1.

q	B	Y	I	I_3	Q	S	$\bar{q}$	B	Y	I	I_3	Q	S
u	1/3	1/3	1/2	+1/2	2/3	0	$\bar{u}$	-1/3	-1/3	1/2	-1/2	-2/3	0
d	1/3	1/3	1/2	-1/2	-1/3	0	$\bar{d}$	-1/3	-1/3	1/2	+1/2	+1/3	0
s	1/3	-2/3	0	0	-1/3	-1	$\bar{s}$	-1/3	2/3	0	0	+1/3	+1
c	1/3	1/3	1/2	+1/2	2/3	0	$\bar{c}$	-1/3	-1/3	1/2	-1/2	-2/3	0
b	1/3	1/3	1/2	-1/2	-1/3	0	$\bar{b}$	-1/3	-1/3	1/2	+1/2	+1/3	0
t	1/3	1/3	1/2	+1/2	2/3	0	$\bar{t}$	-1/3	-1/3	1/2	-1/2	-2/3	0

Tabela 2.1: Números quânticos dos quarks e dos seus respectivos anti-quarks.

O isospin e a estranheza são conservados nas interações fortes, mas a carga elétrica é sempre conservada em todas as interações conhecidas.

O conjunto das rotações de um sistema formam um grupo, cada rotação (R) sendo um elemento do grupo. Duas rotações sucessivas (produto $R_1 R_2$) são equivalentes a uma única rotação; ou seja, o produto entre dois elementos do grupo levam a outro elemento do grupo. Há um elemento identidade (sem rotação) e toda rotação tem uma inversa. O produto não é necessariamente comutativo, mas a propriedade associativa é sempre válida $R_3(R_2 R_1) = (R_3 R_2) R_1$. O grupo de rotações é um grupo contínuo, para o caso de que cada rotação poder ser rotulada por um conjunto de parâmetros variando continuamente $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Estas podem ser consideradas como as componentes de um vetor α direcionado ao longo da abcissa da rotação com magnitude dada pelo ângulo de rotação [16].

O grupo de rotação é um grupo de Lie. A propriedade crucial aqui, é a que toda rotação pode ser expressa como o produto de uma sucessão de rotações infinitesimais; ou seja, rotações arbitrariamente próximas à identidade. O grupo é então completamente definido pela vizinhança à identidade. Sendo os R responsáveis pelas rotações em torno de algum eixo específico, são chamados de geradores do grupo de rotações. A álgebra de comutação dos geradores:

$$[R_j, R_k] = i\varepsilon_{jkl} R_l , \quad (2.3)$$

completamente define as propriedades do grupo; os coeficientes $\varepsilon_{jkl} R_l$ são chamados de constantes de estrutura do grupo. As álgebras de comutação dos R 's formam uma álgebra de Lie. Desde que dois R 's não comutem um com o outro (grupo não-abeliano), somente os autovalores de um gerador (L_3), são números quânticos utilizáveis.

O isospin surgiu porque o núcleon pode ser visto como tendo um grau de liberdade interno com dois estados permitidos, o próton e o nêutron, que a interação nuclear não consegue distinguir. Por essa razão temos uma simetria $SU(2)$ na qual o par (p,n) forma a representação fundamental [16]. Tal representação é bem similar a do spin, sendo que os geradores deste grupo $SU(2)$ com simetria de isospin têm seus geradores satisfazendo [16]:

$$[I_j, I_k] = i\varepsilon_{jkl} I_l . \quad (2.4)$$

Na representação fundamental, os geradores são denotados como:

$$I_i \equiv \frac{1}{2} \tau_i , \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (2.5)$$

onde:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

são as matrizes de Pauli em uma versão para isospin, que como as matrizes de Pauli para o spin, são hermiteanas e se transformam através das transformações unitárias, que representam rotações de isospin [16]:

$$U(\tau_i) = \exp \left(-\frac{i\theta_i \sigma_i}{2} \right). \quad (2.6)$$

As matrizes τ também podem formar combinações lineares que são frequentemente utilizadas :

$$\tau_{\pm} = \frac{1}{2} (\tau_1 \pm i\tau_2) \quad . \quad (2.7)$$

As matrizes τ atuam nos estados do próton e do neutron representados por :

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sendo assim, pode se concluir que:

$$\begin{aligned} \tau^+ d &= u, \\ \tau^- u &= d. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Os estados de isospin para um sistema composto por um par quark-antiquark, formando um meson, em uma representação irredutível 3 e 1, originada de $2 \otimes 2 = 3 \oplus 1$, onde:

$$\begin{aligned} |I=1, I_3=1> &= -u\bar{d}, \\ |I=1, I_3=0> &= \frac{u\bar{u} - d\bar{d}}{\sqrt{2}}, \\ |I=1, I_3=-1> &= d\bar{u}, \\ |I=0, I_3=0> &= \frac{u\bar{u} + d\bar{d}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Observando novamente a Tabela 1, pode se notar que cada quark tem número bariônico 1/3 e os antiquarks tem número bariônico -1/3, o sistema quark-antiquark $q\bar{q}$ tem número bariônico zero; o que corresponde a um estado ligado para mésons, que podem ser colocado em um singleto SU(3) e um octeto:

$$(q\bar{q}) \Rightarrow 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 . \quad (2.9)$$

O estado ligado para os bárions contém três quarks e podem ser colocados na representação de um singlete, dois octetos e um decuplete:

$$(qqq) \Rightarrow 3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \quad (2.10)$$

O conjunto das matrizes unitárias 3x3 formam o grupo SU(3). Os geradores podem ser tomados como sendo quaisquer $(N_c = 3)^2 - 1 = 8$ matrizes 3x3 hermiteanas ($UU^\dagger = U^\dagger U = 1$) de traço nulo e linearmente independentes; onde N_c é o número de cores. Essas matrizes U formam então a representação fundamental do SU(3):

$$U(x) = \exp(-i\phi[x]_a \lambda^a) , \quad (2.11)$$

onde $\phi[x]_a$ é o parâmetro do grupo, e funciona como uma fase; que neste caso é dependente da coordenada do espaço-tempo.

Considerando U como uma matriz de transformação infinitesimalmente próxima ao elemento 1 do grupo :

$$U(x) \simeq 1 - i\phi[x]_a \lambda^a , \quad (2.12)$$

ficando fácil de ver agora que as matrizes λ^a devem ser hermiteanas ($\lambda^a = \lambda^{a\dagger}$) e sem traço.

Se for possível ter somente duas dessas matrizes de traço nulo diagonais, quer dizer que o número máximo de geradores mutuamente comutantes será dois. Este número é considerado como sendo a ordem do grupo, sendo assim, SU(3) é de ordem 2 e SU(2) têm ordem 1.

A representação fundamental de estados para o SU(3) é um tripleto. As três cargas de cor de um quark, R, G e B formam a representação fundamental de estados do grupo de simetria SU(3) [16]:

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Nesta representação, os geradores são, matrizes 3x3. Elas são tradicionalmente denotadas por λ_a , com $a = 1, \dots, 8$, onde os λ_a são as matrizes de Gell-Mann:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

As matrizes de Gell-Mann são hermitianas, ou seja, $\lambda_\alpha^\dagger = \lambda_\alpha$. O traço destas matrizes é dado por :

$$\begin{aligned} Tr[\lambda_\alpha] &= 0 \\ Tr[\lambda_a \lambda_b] &= 2\delta_{ab} \quad (a, b = 1, \dots, 8). \end{aligned} \quad (2.13)$$

E as constantes de estrutura dadas por :

$$if^{abc} = \frac{1}{4}Tr[\lambda^a \lambda^b \lambda^c - \lambda^b \lambda^a \lambda^c], \quad f^{abc} = f_{abc}. \quad (2.14)$$

As matrizes de Gell-Mann obedecem a uma regra de anti-comutação dada por

$$\{\lambda_a, \lambda_b\} = \frac{4}{3}\delta_{ab}I + 2d_{abc}\lambda_c, \quad (a, b, c = 1, \dots, 8) \quad (2.15)$$

onde d_{abc} também são constantes de estrutura.

A QCD é baseada em um “grupo de calibre” (gauge) não-abeliano (cada λ não comuta com o outro) $SU(3)$, onde a equação do grupo é dada por [17]

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c, \quad (a, b, c = 1, \dots, 8) \quad (2.16)$$

A transição do modelo dos quarks para a QCD é feita quando se decide tratar cor similarmente à carga elétrica na eletrodinâmica. Como é bem conhecido, a estrutura da eletrodinâmica emerge do requerimento da invariância de gauge local. Por exemplo, invariância com respeito à fase da rotação do campo do elétron, $\exp(i\alpha(x))$, onde a fase alfa depende da coordenada do espaço-tempo. Pode se fazer uma invariância similar para o campo dos quarks, mantendo em mente que enquanto existe somente uma carga elétrica na QED, existem três cargas na QCD. Para tal finalidade vamos considerar que a Lagrangiana para um quark livre [14]:

$$\mathcal{L}_{\text{livre}} = \sum_{q=u,d,s,\dots} \sum_{\text{colors}} \bar{q}(x) \left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m_q \right) q(x) \quad (2.17)$$

seja invariante sob rotações do campo dos quarks no espaço de cor:

$$U : q^j(x) \rightarrow U_{jk}(x)q^k(x) \quad (2.18)$$

com $j, k \in 1 \dots 3$ (sempre somando-se sobre índices repetidos). Desde que a teoria seja construída desse jeito, será invariante com respeito a estas transformações de gauge; sendo todas quantidades fisicamente releva invariantes de gauge.

Se U for dependente de x , a Lagrangiana para um quark livre (2.16) não será invariante sob a transformação (2.18). Com a finalidade de preservar a invariância de gauge, deve se introduzir seguindo o caso familiar da eletrodinâmica, o campo de “gauge” (ou glúon) $A_{kj}^\mu(x)$ e substituir a derivada em (2.17) pela chamada derivada covariante:

$$\partial^\mu q^j(x) \rightarrow D_{kj}^\mu q^j(x) \equiv \delta_{kj} \partial^\mu - i A_{kj}^\mu(x) q^j(x) \quad (2.19)$$

sendo o campo de gauge

$$A_{kj}^\mu(x) = A_a^\mu \lambda_a^\mu(x) \quad (2.20)$$

assim como as derivadas covariantes; matrizes 3x3 no espaço das cores. Com a substituição dada pela Eq.(2.19), todas as mudanças na Lagrangeana sob transformações de gauge se cancelam, pois A^μ se transforma como:

$$U : A_{kj}^\mu(x) \rightarrow U(x) A_{kj}^\mu(x) U^\dagger(x) + i U(x) \partial^\mu U^\dagger(x) \quad (2.21)$$

A Lagrangeana da QCD será então

$$\mathcal{L}_{livre} = \sum_{q=u,d,s,\dots colors} \sum \bar{q}(x) (i \gamma_\mu D^\mu - m_q) q(x) - \frac{1}{g^2} \text{tr} G^{\mu\nu}(x) G_{\mu\nu}(x) , \quad (2.22)$$

onde o primeiro termo descreve a dinâmica dos quarks e de seu acoplamento com os gluons, enquanto o segundo termo descreve a dinâmica do campo do gluon. A constante de acoplamento forte “ g ” é o análogo da QCD da carga elétrica e na QED. O “tensor de força de campo” do glúon é dado por

$$G^{\mu\nu}(x) \equiv i[D^\mu, D^\nu] = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) - i[A^\mu(x), A^\nu(x)] , \quad (2.23)$$

onde este comutador origina as interações glúon-glúon. Esta última relação pode ser escrita em termos dos componentes de cor A_a^μ do campo de gauge,

$$G_a^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A_a^\nu(x) - \partial^\nu A_a^\mu(x) - f_{abc} A_b^\mu(x) A_c^\nu(x) . \quad (2.24)$$

Embora a teoria fundamental para se descrever as interações fortes e a estrutura hadrônica, seja a cromodinâmica quântica, as dificuldades práticas encontradas no regime não perturbativo para esta teoria motivou o surgimento de modelos efetivos, tais como o modelo de quarks constituintes [18] inspirados na QCD.

Estes “quarks” constituintes, são graus de liberdade efetivos “vestidos” com uma nuvem de glúons virtuais e de pares quark-antiquark.

Na fenomenologia de quarks para se descrever os estados ligados hadrônicos no espaço de Fock, não é em geral utilizado somente a configuração de quarks de valência $q\bar{q}$ ou qqq , mas também de um mar de pares quark-antiquark e glúons.

A QCD, representada em baixas energias por uma teoria efetiva de campos, tem um parâmetro de escala, baseado na massa dos quarks constituintes. Esta teoria efetiva, tem um parâmetro de corte da ordem de 1 GeV, sendo a massa dos quarks constituintes da ordem de 330 MeV [18].

Esta escala de massa para os quarks constituintes, é uma escala hadrônica relevante para todas as propriedades de mésons e bárions em baixos momentos. Em um modelo de quarks constituintes, um estado hadrônico é inteiramente representado pelo estado ligado de seus quarks constituintes.

De um modo formal, podemos descrever os hádrons em termos de uma série de componentes, sendo uma função de onda para cada canal (como na mecânica quântica não relativística), em particular, para um méson [3]

$$|m\acute{e}son\rangle = \sum_{q\bar{q}} |q\bar{q}\rangle \Psi_{q\bar{q}} + \sum_{q\bar{q}q} |q\bar{q}q\rangle \Psi_{q\bar{q}q} + \dots \quad (2.25)$$

Formalmente podemos fazer isto quantizando a “QCD” em um instante em particular, por exemplo $t = 0$, e usar os operadores de criação e aniquilação para os “campos” para se definir os estados na representação no espaço de Fock.

Mas nesta descrição, a um dado instante temos problemas, pois o estado de partícula zero é o vácuo perturbativo, que não é um auto-estado da Hamiltoniana do sistema. Podemos ter estados no espaço de Fock, criados de “flutuações do vácuo” que não estão associados com os estados ligados hadrônicos. Deste modo, a interpretação do espaço de Fock a um dado instante, em termos de funções de onda, pode se tornar muito complicada [3].

Fazendo-se a decomposição da função de onda hadrônica como na Eq. (2.25) porém, utilizando estados a um dado instante $x^+ = 0$ [19], temos que as componentes do espaço de Fock são estáveis por transformações cinemáticas que mantêm o plano-nulo invariante. Isto permite descrever estados interagentes em diferentes referências que sejam relacionados por transformações cinemáticas mantendo o mesmo truncamento do espaço de Fock. Isto não é possível com a representação da Eq.(2.25)

a um dado instante. O vácuo perturbativo associado ao espaço de Hilbert no plano-nulo é portanto estável por transformações cinemáticas que incluem “Boosts”, apenas neste aspecto podemos considerar o vácuo trivial [3].

2.2 Quebra Espontânea de Simetria Quiral, PCAC e Constante de Decaimento

Neste trabalho serão estudadas grandezas físicas relacionadas a duas partículas: o méson π e o méson k . Estas duas partículas possuem spin zero; obedecendo então, a equações dos campos pseudo-escalares.

O píon, visto como um bóson de Goldstone proveniente da quebra espontânea da simetria quiral, tem um papel relevante na fenomenologia da física hadrônica à baixas energias.

Com o intuito de esclarecer e ilustrar melhor os conceitos de simetria quiral, boson de Goldstone e modelo sigma; será feita em seguida uma breve revisão sobre estes conceitos que serão utilizados nos capítulos posteriores.

A simetria quiral pertence ao grupo $SU(3) \otimes SU(3)$; possuindo um sub-grupo $SU(2) \otimes SU(2)$, surgiu naturalmente da álgebra das correntes e da PCAC (Partial Conservation of Axial Currents) [17]. Na álgebra de correntes, podemos assumir oito correntes vetoriais do $SU(3)$ (referente a sabor), $V_a^\mu(x)$ e oito correntes vetoriais axiais do $SU(3)$, $A_a^\mu(x)$, com $a = 1, \dots, 8$ e $x \equiv (x_0, \vec{x})$, as quais satisfazem as famosas relações de comutação locais de Gell-Mann a tempos iguais (somando-se sobre índices repetidos):

$$\begin{aligned}\delta(x_0 - y_0)[V_a^0(x), V_b^0(y)] &= if_{abc}V_c^0(x)\delta^4(x - y) \\ \delta(x_0 - y_0)[V_a^0(x), A_b^0(y)] &= if_{abc}A_c^0(x)\delta^4(x - y) \\ \delta(x_0 - y_0)[A_a^0(x), A_b^0(y)] &= if_{abc}A_c^0(x)\delta^4(x - y)\end{aligned}\tag{2.26}$$

onde as f_{abc} são as constantes de estrutura do $SU(3)$.

As correntes vetoriais e vetoriais axiais do $SU(3)$ de sabor são dadas por

$$V_a^0(x) = \bar{q}(x)\gamma_\mu\left(\frac{\lambda_a}{2}\right)q(x) ,\tag{2.27}$$

e

$$A_a^0(x) = \bar{q}(x)\left(\frac{\lambda_a}{2}\right)\gamma_\mu\gamma_5q(x) ,\tag{2.28}$$

onde os λ_a são as matrizes de Gell-Mann já mencionadas antes e os $q(x)$ são os elementos do grupo $SU(3)$ de sabor no tripleto do modelo de quark. As correntes vetoriais e vetoriais axiais também estão associadas a transformações do $SU(3)$ dadas respectivamente por [17]

$$q_i \rightarrow q'_i + i\alpha^a \left(\frac{\lambda_a}{2} \right)_{ij} q_j, \quad \alpha^a \ll 1, \quad (2.29)$$

para as correntes vetoriais, e

$$q_i \rightarrow q'_i + i\beta^a \left(\frac{\lambda_a}{2} \right)_{ij} \gamma_5 q_j, \quad \beta^a \ll 1, \quad (2.30)$$

para as correntes vetoriais axiais. E as cargas generalizadas associadas com estas correntes são:

$$Q^a(t) = \int V_0^a(x) d^3x, \quad (2.31)$$

relacionadas as correntes vetoriais, e

$$Q^{5a}(t) = \int A_0^a(x) d^3x. \quad (2.32)$$

relacionadas as correntes vetoriais axiais, sendo que as cargas relacionadas a estas correntes formam as relações de comutação que geram a álgebra de Lie quiral do $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$

$$\begin{aligned} [Q^a(t), Q^b(t)] &= if^{abc} Q^c(t) \\ [Q^a(t), Q^{5b}(t)] &= if^{abc} Q^{5c}(t) \\ [Q^{5a}(t), Q^{5b}(t)] &= if^{abc} Q^c(t). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Definindo-se ainda, as cargas quirais de mão esquerda e de mão direita

$$\begin{aligned} Q_L^a &= \frac{1}{2}(Q^a(t) - Q^{5a}(t)), \\ Q_R^a &= \frac{1}{2}(Q^a(t) + Q^{5a}(t)), \end{aligned} \quad (2.34)$$

as relações de comutação (2.33) podem ser rescritas como

$$[Q_L^a(t), Q_L^b(t)] = if^{abc} Q_L^c(t)$$

$$\begin{aligned} [Q_R^a(t), Q_R^b(t)] &= if^{abc} Q_R^c(t) \\ [Q_L^a(t), Q_R^a(t)] &= 0 . \end{aligned} \quad (2.35)$$

assim as Q_L^a geram a álgebra do $SU(3)_L$ e as Q_R^a geram a álgebra $SU(3)_R$. A palavra “quiral” (mão) aplica-se em particular, às transformações geradas pelas cargas axiais Q^{5a} , sendo assim o fator $(1 \pm \gamma_5)$ implícito nos estados de helicidade Q_L^a e Q_R^a é:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)u &\equiv u_R , \\ \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)u &\equiv u_L . \end{aligned} \quad (2.36)$$

Os dois conjuntos de operadores Q-spin de “mão-esquerda” e de “mão direita”, Q_L^a e Q_R^a respectivamente, são então conectados pelo operador de paridade “P” para interações fortes

$$PQ_{L(R)}^a P^{-1} = Q_{R(L)}^a . \quad (2.37)$$

As transformações quirais ou ângulos quirais são:

$$U = \exp \left(i \frac{\pi \tau \gamma^5}{2f} \right) , \quad (2.38)$$

onde facilmente pode ser observado que U é unitária e anti-hermitiana; pois $\tau^\dagger = -\tau$, e o operador do campo do pion π (por exemplo) é um campo elementar.

Para o modelo de quarks livres do $SU(3)$, temos a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 , \quad (2.39)$$

com

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{q}\gamma^\mu \partial_\mu q , \quad (2.40)$$

e

$$\mathcal{L}_1 = m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d + m_s \bar{s}s , \quad (2.41)$$

$\mathcal{L}_0$ é invariante sob $SU(3)$, enquanto $\mathcal{L}_1$ não. Podemos notar também que o modelo de quarks livres têm mais duas simetrias $U(1)$. A primeira simetria $U(1)$ corresponde a $\mathcal{L}$ sendo invariante sob a mudança de fase comum para cada um dos campos dos quarks:

$$q_i(x) \rightarrow e^{i\beta} q_i(x) , \quad (2.42)$$

com a corrente conservada (número bariônico)

$$J_\mu^B \sim \bar{q}_i \gamma_\mu q_i(x) \quad , \quad (2.43)$$

A segunda simetria $U(1)$ correspondente à $\mathcal{L}_0$ sendo invariante sob

$$q_i(x) \rightarrow e^{i\beta\gamma_5} q_i(x) \quad , \quad (2.44)$$

com a corrente (parcialmente) conservada (número bariônico axial)

$$J_\mu^A \sim \bar{q}_i \gamma_\mu \gamma_5 q_i(x) \quad . \quad (2.45)$$

Nos estudos teóricos, estas correntes e cargas simétricas satisfazem relações de comutação definidas, as quais são válidas mesmo na presença de termos de quebra de simetria. Outro resultado importante, é que estas correntes simétricas são justo as correntes físicas aparecendo nas interações eletromagnéticas e fracas, isto é justamente as mesmas correntes de Noether, ou algumas combinações lineares delas, aparecem na Lagrangeana de interação. Assim a álgebra de correntes, a qual representa simetrias da interação forte, pode ser utilizada diretamente em processos eletromagnéticos ou fracos envolvendo hádrons [17].

A álgebra $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$, gerada pelas várias correntes físicas (Eq. 2.33), sugere que nós temos uma Hamiltoniana de interação forte

$$H = H_0 + \lambda H_1 \quad , \quad (2.46)$$

onde H_0 é invariante sob transformações $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ e H_1 não. No limite $\lambda = 0$, todos os geradores da álgebra quiral são conservados. Nós podemos esperar que as partículas formem multipletos degenerados correspondendo a representações irredutíveis do grupo $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$. Por exemplo, o octeto dos mésons pseudo-escalares deveriam estar acompanhados por um octeto de mésons escalares, e os bárions $J^p = (1/2)^+$ deveriam ter pares com paridades opostas. Mas na realidade, não há evidências deste larga estrutura de multipletos. Isto leva a idéia que a simetria $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ é espontaneamente quebrada e que esta simetria de H_0 não é realizada pelo espectro da partícula.

Vamos considerar agora a não-invariância do estado fundamental, como sendo uma condição de quebra de simetria. Sendo U um elemento do grupo de simetria no qual deixa H_0 invariante,

$$U H_0 U^\dagger = H_0 \quad , \quad (2.47)$$

e isto conecta estados que formam uma representação irredutível (base) do grupo,

$$U|A\rangle = |B\rangle . \quad (2.48)$$

Então dessas duas últimas equações pode-se chegar imediatamente a

$$E_A \langle A|H_0|A\rangle = \langle B|H_0|B\rangle = E_B . \quad (2.49)$$

Assim a simetria da Hamiltoniana H_0 é manifestada na degenerescência dos auto estados de energia correspondendo as representações irredutíveis do grupo de simetrias. Contudo, está implícito em (2.48) e em (2.49), a invariância do estado fundamental sob transformação de simetria. Assim ($|A\rangle$) e ($|B\rangle$) devem ser relacionados com o estado fundamental ($|0\rangle$) através de alguns operadores de criação e aniquilação apropriados ϕ_A e ϕ_B ,

$$|A\rangle = \phi_A|0\rangle , \quad |B\rangle = \phi_B|0\rangle , \quad (2.50)$$

e

$$U\phi_A U^\dagger = \phi_B , \quad (2.51)$$

a Eq. (2.47), só será válida somente se

$$U|0\rangle = |0\rangle . \quad (2.52)$$

A Eq.(2.52) não é satisfeita, isto inviabiliza (2.49) e a consequente degenerescência de níveis de energia proveniente da simetria. Esta situação é normalmente referida como uma “quebra espontânea de simetria”. Contudo, deve ser enfatizado que, mesmo a simetria não se manifestando nos estados de energia degenerados, há ainda relações de simetria provenientes do fato da Hamiltoniana ou a Lagrangiana serem ainda invariantes sob a transformação de simetria.

Assim a condição de quebra de simetria é a não invariância do vácuo (estado fundamental)

$$U|0\rangle \neq |0\rangle . \quad (2.53)$$

Para $U = \exp i\varepsilon^a Q^a$, onde os ε^a são os parâmetros de grupo contínuo, Eq. (2.53), pode ser expressa pelo estabelecimento de que a carga simétrica não aniquila o vácuo

$$Q^a|0\rangle \neq 0 . \quad (2.54)$$

Equivalentemente, certos operadores de campo têm valores esperados do vácuo diferente de zero,

$$\langle 0|\phi_i|0\rangle \neq 0 \quad . \quad (2.55)$$

Isto pode ser visto mais facilmente como uma transformação de simetria do tipo (2.51), podendo ser representadas em termos dos geradores como,

$$[Q^a, \phi_i] = it_{ij}^a \phi_j \quad , \quad (2.56)$$

onde t_{ij}^a é a matriz de representação apropriada. Também deve ser frizado que a invariância translacional do estado de vácuo leva à conclusão que estes elementos de matriz são constantes independentes do espaço-tempo,

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = \langle 0|e^{ipx}\phi(0)e^{-ipx}|0\rangle = \langle 0|\phi(0)|0\rangle \quad . \quad (2.57)$$

Uma corrente quirial pode atuar no estado de vácuo e produzir um bóson de Goldstone de momento zero (o estado da partícula e o estado de vácuo são normalizados diferentemente).

À baixas energias, somente os bósons de Goldstone podem ser produzidos, por que eles são as partículas mais leves. A seguir será elucidado como em Ref. [17], o funcionamento da quebra de simetria quirial relacionada ao aparecimento do bóson de Goldstone, através do teorema de Goldstone.

O passo para elucidar o teorema de Goldstone, será através do teorema de Noether. Uma simetria contínua de um Lagrangeana, pelo teorema de Noether, implica a existência de uma corrente conservada;

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad . \quad (2.58)$$

Podemos então, naturalmente considerar a carga como uma constante do movimento $dQ(t)/dt = 0$ com $Q(t) = \int J_0(x, t) d^3x$. Contudo, com a quebra espontânea de simetria (2.55), $Q(t)$ não é bem definida por causa da fraca propriedade de convergência do operador de campo no integrando. Mesmo o limite fraco, correspondendo ao elemento de matriz $\langle 0|Q^2|0\rangle$, não existe. A propriedade de invariância translacional do estado de vácuo leva ao resultado [17]

$$\langle 0|Q^2|0\rangle = \int \langle 0|J_0 Q(0)|0\rangle d^3x \quad , \quad (2.59)$$

o qual diverge por causa do integrando ser diferente de zero e independente de x . Para a transformação de um operador de campo genérico $\phi(x)$, temos

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\varepsilon Q} \phi(x) e^{-i\varepsilon Q} \quad . \quad (2.60)$$

Assumindo a existência do comutador e suas propriedades, a conservação da corrente (2.58) implica que

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^3[\partial^\mu J_\mu(x, t), \phi(0)] \\ &= \int d^3[J^0(x, t), \phi(0)] + \int dS[J(x, t), \phi(0)] \quad . \end{aligned} \quad (2.61)$$

Para uma superfície grande o suficiente e assim para separações do tipo-espaço, o segundo termo do lado direito desaparece. Logo, temos que

$$\frac{d}{dt}[Q(t), \phi(0)] = 0 \quad . \quad (2.62)$$

Este comutador sendo alguma combinação de campos, se ele têm um valor esperado do vácuo diferente de zero;

$$\langle 0|[Q(t), \phi(0)]|0 \rangle \equiv \eta \neq 0 \quad , \quad (2.63)$$

e dizemos que a simetria foi espontaneamente quebrada. Após inserir um conjunto completo de estados intermediários e usando o operador de translação, (2.63) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \sum_n (2\pi)^3 \delta^3(p_n) (\langle 0|J_0(0)|n \rangle \langle n|\phi(0)|0 \rangle e^{-iE_n t} \\ - \langle 0|\phi(0)|n \rangle \langle n|J_0|0 \rangle e^{iE_n t}) = \eta \quad . \end{aligned} \quad (2.64)$$

O lado direito é diferente de zero e independente do tempo por causa da Eq. (2.63) e da Eq. (2.62). Desde que as partes de frequência positiva e negativa não se cancelem mutuamente, Eq. (2.62) somente pode ser satisfeita se existir um estado intermediário no qual

$$E_n = 0 \quad \text{para} \quad p_n = 0 \quad . \quad (2.65)$$

Assim, isto é um estado sem massa; o bóson de Goldstone. Esta partícula tem a propriedade que:

$$\langle n|\phi(0)|0 \rangle \neq 0 \quad \text{e} \quad \langle 0|J_0(0)|n \rangle \neq 0 \quad . \quad (2.66)$$

Isto pode ser conectado ao vácuo pela corrente J_0 ou pelo operador $\phi(0)$.

Vamos estudar agora o modelo sigma, e para tal, considere uma teoria com os seguintes campos: isotripleto de pions $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$; um *campo* σ isoescalar; e um isodoubleto de nucleons $N = (p, n)$. A Lagrangeana é dada por [17]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu \sigma)^2 + (\partial_\mu \pi)^2] + \overline{N}i\gamma^\mu \partial_\mu N + g\overline{N}(\sigma + i\tau \cdot \pi \gamma^5)N - V(\sigma^2 + \pi^2) \quad , \quad (2.67)$$

com

$$V(\sigma^2 + \pi^2) = \frac{-\mu^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2 \quad , \quad (2.68)$$

o qual é invariante sob as transformações do SU(2):

$$\begin{aligned} \sigma \rightarrow \sigma' &= \sigma \quad , \\ \pi \rightarrow \pi' &= \pi + \alpha \times \pi \quad , \\ N \rightarrow N' &= N + i\alpha \cdot \frac{\tau}{2}N \quad , \end{aligned} \quad (2.69)$$

para $\alpha_i \ll 1$, e com a corrente conservada dada por

$$J_\mu^a = \overline{N}\gamma_\mu \frac{\tau^a}{2}N + \varepsilon^{abc}\pi^b \partial_\mu \pi^c \quad , \quad \text{para } a = 1, 2, 3 \quad . \quad (2.70)$$

Os geradores do SU(2) são

$$Q^a = \int J_0^a(x) d^3x \quad . \quad (2.71)$$

Esta Lagrangiana também é invariante sob as transformações axiais do SU(2),

$$\begin{aligned} \sigma \rightarrow \sigma' &= \sigma + \beta\pi \quad , \\ \pi \rightarrow \pi' &= \pi - \beta\sigma \quad , \\ N \rightarrow N' &= N + i\beta \cdot \frac{\tau}{2}\gamma_5 N \quad , \end{aligned} \quad (2.72)$$

com a corrente conservada dada por

$$A_\mu^a = \overline{N}\gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau^a}{2}N + (\partial_\mu \sigma)\pi^a - (\partial_\mu \pi^a)\sigma \quad , \quad (2.73)$$

e

$$Q^{5a} = \int A_0^a(x) d^3x \quad . \quad (2.74)$$

Estas cargas geram a álgebra $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$;

$$\begin{aligned} [Q^a, Q^b] &= i\varepsilon^{abc} Q^c , \\ [Q^a, Q^{5b}] &= i\varepsilon^{abc} Q^{5c} , \\ [Q^{5a}, Q^{5b}] &= i\varepsilon^{abc} Q^c . \end{aligned} \quad (2.75)$$

A quebra espontânea de simetria irá acontecer para $\mu^2 > 0$ e o mínimo do potencial é em

$$\sigma^2 + \pi^2 = v^2 \quad \text{com} \quad v = (\mu^2/\lambda)^{1/2} . \quad (2.76)$$

Podemos escolher $\langle 0|\pi|0 \rangle = 0$ e $\langle 0|\sigma|0 \rangle = v$.

Com o campo deslocado definido como $\sigma' = \sigma - v$ em $V(\sigma^2 + \pi^2)$; nós podemos checar facilmente que o π é um bóson de Goldstone de massa nula, utilizando-se dos comutadores na seguinte forma:

$$[Q^{5a}, \pi^b] = -i\sigma\delta^{ab} . \quad (2.77)$$

E a escolha de $\langle 0|\sigma|0 \rangle = v$ implica que as cargas axiais Q^{5a} não aniquilam o vácuo;

$$\langle 0|A_\mu^a(0)|\pi^a \rangle \neq 0 . \quad (2.78)$$

Assim, a simetria $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ é quebrada espontaneamente na simetria $SU(2)$ gerada pelas cargas Q^a (vetoriais), pois

$$Q^a|0 \rangle = 0 \quad \text{para} \quad a = 1, 2, 3 . \quad (2.79)$$

O acoplamento quiral simétrico de Yukawa de $g\bar{N}(\sigma + i\tau.\pi\gamma_5)N$ gera um termo de massa para o nucleon após a quebra espontânea de simetria,

$$g\bar{N}(\sigma + i\tau.\pi\gamma_5)N \rightarrow gv\bar{N}N + g\bar{N}(\sigma' + i\tau.\pi\gamma_5)N , \quad (2.80)$$

a massa do nucleon isodoubleto é

$$m_N = gv . \quad (2.81)$$

As massas dos mésons isoescalares são $m_\sigma = \sqrt{2\mu}$ e (isotripleto) $m_\pi = 0$.

Será preciso estudar também, para o melhor entendimento dos capítulos posteriores o conceito de mésons leves e o teorema PCAC.

Na álgebra $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ das correntes eletromagnéticas e fracas, queremos que a simetria seja quebrada espontaneamente de um modo que o vácuo seja somente simétrico em $SU(3)$. O teorema de Goldstone então implica que deverá haver oito mésons pseudo-escalares sem massa associados com a quebra espontânea de cargas axiais Q^{5a} , $a = 1, \dots, 8$. Na verdade, essas partículas não possuem massa nula, mas sim oito mésons relativamente leves, π , K , e η . Então podemos concluir que a simetria de sabor $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ também deve ser quebrada explicitamente e as massas dos mésons 0^- refletem esta quebra da simetria quiral [20];

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \lambda \mathcal{H}' \quad , \quad (2.82)$$

onde $\mathcal{H}_0$ é invariante em $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$, e $\mathcal{H}'$ não. Sendo também o isotripleto do pion muito mais leve que o méson K e eta (η), sugere que podemos decompor a Hamiltoniana da quebra de simetria em dois termos:

$$\lambda \mathcal{H}' = \lambda_1 \mathcal{H}_1 + \lambda_2 \mathcal{H}_2 \quad (2.83)$$

onde $\mathcal{H}_1$ é invariante em $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ e $\lambda_1 \gg \lambda_2$. Assim, $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$, é uma simetria muito melhor do que $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$. Um exemplo disso é o modelo de quarks livres onde a simetria quiral é quebrada explicitamente pelo termo de massa dos quarks $\mathcal{L}_1 = m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d + m_s \bar{s}s$, com $m_s \gg m_u, m_d$; e identificando $\lambda_1 \mathcal{H}_1 = m_s \bar{s}s$ e $\lambda_2 \mathcal{H}_2 = m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d$. Assim, é esperado que os píons tenham massas proporcionais as massas dos quarks não-estranhos e os mésons K e η , massas proporcionais as massas do quark estranho. Agora será comentado um pouco do teorema PCAC (Partial conservation of axial current), conceito importante para o entendimento das constantes de decaimento dos mésons leves pseudo escalares.

Como foi discutido anteriormente, os bósons de Goldstone $\pi^a(x)$ são diretamente ligados à quebra das simetrias das cargas Q^{5a} e das correntes A_μ^a axiais como na Eq. (2.79);

$$\langle 0 | A_\mu^a(0) | \pi^b(p) \rangle = i f^{ab} p_\mu \quad , \quad (2.84)$$

onde f^{ab} é alguma constante diferente de zero. Se assumirmos que a simetria de isospin do $SU(2)$ é inquebrável, isso pode ser escrito como

$$f^{ab} = f_\pi \delta^{ab} \quad , \quad (2.85)$$

onde f_π é a constante de decaimento do pión medida em $\pi^+ \rightarrow l^+ + \nu_l$ [17]. Aproximadamente temos $f_\pi \simeq 93 MeV$. Tomando a divergência da corrente axial, teremos

$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu^a(0) | \pi^b(p) \rangle = \delta^{ab} f_\pi m_\pi^2 \quad . \quad (2.86)$$

Assim, se $\lambda_2 = 0$ em (2.84), a simetria $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ na Hamiltoniana é exata, e

$$\partial^\mu A_\mu^a = 0 \quad . \quad (2.87)$$

o que implica que $m_\pi^2 = 0$ em (2.87), assim como requer o teorema de Goldstone. Contudo, se a simetria é explicitamente quebrada, $\lambda_2 \neq 0$, podemos reescrever (2.87)

$$< 0 | \partial^\mu A_\mu^a(0) | \pi^b(p) > = f_\pi m_\pi^2 < 0 | \phi^a(0) | \pi^b(p) > \quad , \quad (2.88)$$

onde ϕ^a é o operador do campo do pión com a normalização

$$< 0 | \phi^a(0) | \pi^b(p) > = \delta^{ab} \quad . \quad (2.89)$$

A generalização de (2.89) na forma operatorial,

$$\partial^\mu A_\mu^a = f_\pi m_\pi^2 \phi^a \quad , \quad a = 1, 2, 3 \quad , \quad (2.90)$$

é conhecida como a hipótese da corrente axial parcialmente conservada ou através da sigla PCAC (Partially Conserved Axial-vector Current), proposta por Gell-Mann, Nambu e Levy em 1960.

Na prática, com a finalidade de traduzir essa hipótese da PCAC, em relações de quantidades fisicamente mensuráveis, serão expostos à seguir aplicações.

Para tal, consideremos a “ condição de consistência de Adler ” na amplitude de espalhamento πN . Sendo a amplitude de espalhamento do pión-nucleon

$$< \pi^a(q_2) N(p_2) | \pi^b(q_1) N(p_1) > = i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2) T_{\pi N}^{ab} \quad , \quad (2.91)$$

a qual tem a decomposição invariante

$$T_{\pi N}^{ab} = \bar{u}(p_2) \left(A^{ab} + \gamma \cdot \frac{(q_1 + q_2)}{2} B^{ab} \right) u(p_1) \quad . \quad (2.92)$$

As amplitudes invariantes A e B são funções das variáveis de Mandelstam “s” e “t” ou as variáveis mais simétricas

$$\begin{aligned} \nu &\equiv q_1 \cdot (p_1 + p_2)/2 = q_2 \cdot (p_1 + p_2)/2 \quad , \\ \nu_B &\equiv -q_1 \cdot q_2/2 \quad . \end{aligned} \quad (2.93)$$

Podemos notar que se $\nu \rightarrow 0$, $\nu_B \rightarrow 0$; para os pions se tornando leves, ou $q_1 \rightarrow 0$ ou $q_2 \rightarrow 0$; e não ambos. A combinação de amplitudes invariantes (na qual

é justamente o espalhamento frontal ($q_1^2 = q_2^2$), não é singular nem para $q_1 \rightarrow 0$, nem para $q_2 \rightarrow 0$. Por essa razão temos as amplitudes de isospin pares e ímpares,

$$A^{ab} = \delta^{ab} A^{(+)} + \frac{1}{2} [\tau^a, \tau^b] A^{(-)} \quad , \quad (2.94)$$

e similarmente para $B^{(\pm)}$ e $T^{(\pm)}$.

Para se chegar ao teorema do méson, deve-se usar a fórmula de redução padrão (Bjorken e Drell 1965) para o operador de campo de um pión em (2.92);

$$\begin{aligned} T_{\pi N}^{ab} &= i(-q_2^2 + m_\pi^2) \langle N(p_2) | \phi^a(0) | \pi^b(q_1) N(p_1) \rangle \\ &= \frac{q_2^\mu (-q_2^2 + m_\pi^2)}{f_\pi m_\pi^2} \langle N(p_2) | A_\mu^a(0) | \pi^b(q_1) N(p_1) \rangle \quad , \end{aligned} \quad (2.95)$$

onde foi usada a relação do teorema PCAC (2.91). Tomando o limite $q_2 \rightarrow 0$, a amplitude $T(\nu, \nu_B, q_1^2, q_2^2)$ vai à zero,

$$T^{(+)}(0, 0, m_\pi^2, 0) = 0 \quad . \quad (2.96)$$

Esta é a “ condição de consistência de Adler do PCAC ” [17], onde $T^{(-)}$ também é zero, pois ela pode ser ímpar, e por ser proporcional a variável ν . Podemos chegar a uma expressão similar para o limite $q_2 \rightarrow 0$.

Para elementos de matriz envolvendo mais de uma corrente, os teoremas de baixas energias podem ser obtidos, se combinarmos a condição de PCAC e a álgebra de correntes.

Considerando a divergência dupla de um produto ordenado no tempo de duas correntes vetoriais axiais

$$\begin{aligned} \partial_x^\mu \partial_y^\lambda T(A_\mu^a(x) A_\lambda^b(y)) &= \partial_x^\mu \partial_y^\lambda (\theta(x_0 - y_0) A_\mu^a(x) A_\lambda^b(y) + \theta(y_0 - x_0) A_\lambda^b(y) A_\mu^a(x)) \\ &= \partial_x^\mu \theta(x_0 - y_0) A_\mu^a(x) \partial^\lambda A_\lambda^b(y) + \theta(y_0 - x_0) \partial^\lambda A_\lambda^b(y) A^{\mu a}(x) \\ &\quad - \delta(x_0 - y_0) A_\mu^a(x) A_0^b(y) + \delta(y_0 - x_0) A_0^b(y) A_\mu^a(x) \\ &= T(\partial^\mu A_\mu^a(x) \partial^\lambda A_\lambda^b(y)) + \delta(x_0 - y_0) [A_0^a(x), \partial^\lambda A_\lambda^b(y)] \\ &\quad - \partial_x^\mu \delta(x_0 - y_0) [A_\mu^a(x), A_0^b(y)] \quad . \end{aligned} \quad (2.97)$$

Aplicando esta identidade aos estados do nucleon e tomando a transformada de Fourier:

$$\int d^4x d^4y e^{iq_1 \cdot x} e^{-iq_2 \cdot y} \quad , \quad (2.98)$$

obteremos

$$\begin{aligned}
& q_1^\mu q_2^\lambda \int d^4 e^{iq_1 \cdot x} < N(p_2) | T(A_\mu^a(x) A_\lambda^b(0)) | N(p_1) > \\
& = \int d^4 e^{iq_1 \cdot x} (< N(p_2) | T(\partial^\mu A_\mu^a(x) \partial^\lambda A_\lambda^b(0)) | N(p_1) > \\
& \quad - i q_1^\mu < N(p_2) | \delta(x_0) [A_0^b(0), A_\mu^a(x)] | N(p_1) > \\
& \quad + < N(p_2) | \delta(x_0) [A_0^a(x), \partial^\lambda A_\lambda^b(0)] | N(p_1) >) , \tag{2.99}
\end{aligned}$$

onde foi usado a invariância translacional e fatorando $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + q_1 - p_2 - q_2)$. Esta relação entre os elementos de matriz das correntes e os elementos de matriz das divergências, é um exemplo de “identidade de Ward” [17, 21]. A PCAC implica que o primeiro termo do lado direito da Eq. (2.100) é o elemento de matriz (nucleon) de um produto ordenado temporalmente de dois operadores do pión; como por exemplo, a amplitude πN . O segundo termo pode ser calculado da álgebra de corrente $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$

$$\delta(x_0) [A_0^b(0), A_\mu^a(x)] = -i \delta(x) \varepsilon^{abc} V_\mu^c . \tag{2.100}$$

O terceiro termo do lado direito de (2.100) é um comutador à tempos iguais da corrente e da divergência. Este comutador, chamado de termo σ , e não é governado pela álgebra de correntes e depende do termo de quebra de simetria λ_2 em $\lambda_2 \mathcal{H}_2 = m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d$. Na configuração cinemática $p_1 \rightarrow p_2 \equiv p$, $q_1 \rightarrow q_2 \equiv q \rightarrow 0$, o termo σ é simétrico nos índices a e b. Para ver isso, basta escrever:

$$\begin{aligned}
\lim_{q \rightarrow 0} \sigma_N^{ab}(p, q) &= \sigma_N^{ab} \\
&= i \int d^4 x \delta(x_0) < N(p) | [A_0^a(x, x_0), \partial^\lambda A_\lambda^b(0, x_0)] | N(p) > \tag{2.101}
\end{aligned}$$

Usando invariância translacional e trocando variáveis x por -x, podemos escrever esta última equação como:

$$\begin{aligned}
\sigma_N^{ab} &= i \int d^3 x < N(p) | [A_0^a(0, x_0), \partial^\lambda A_\lambda^b(x, x_0)] | N(p) > \\
&= i \int d^3 x < N(p) | [A_0^a(x, x_0), \partial^0 A_0^b(0, x_0)] | N(p) > , \tag{2.102}
\end{aligned}$$

onde foi usado o fato de que a divergência espacial vai à zero sob uma integração feita sobre todo espaço.

O estudo sobre simetria quiral, foi concentrado até agora no $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$. A generalização para o $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ é simples. A relação do PCAC para correntes vetoriais axiais, considerando agora o octeto de mésons

$$\partial^\mu A_\mu^a = f_a m_a^2 \phi^a \quad a = 1, 2, \dots, 8 \quad , \quad (2.103)$$

onde os ϕ^a 's são os operadores de campo para o octeto de mésons pseudo-escalares. Também podemos obter os teoremas de baixas energias no limite de mésons leves, considerando outros elementos de matriz das correntes. Em particular, da última equação

$$\langle 0 | \partial^\mu A_\mu^a | P_b(k) \rangle = \delta_{ab} f_a m_a^2 \quad . \quad (2.104)$$

Usando a fórmula de redução e PCAC, pode se escrever esta última equação como

$$\begin{aligned} \delta_{ab} f_a m_a^2 &= \frac{i(m_b^2 - k^2)}{f_b m_b^2} \int d^4 x e^{-ik \cdot x} (\langle 0 | T(\partial^\mu A_\mu^a(0) \partial^\nu A_\nu^b(x)) | 0 \rangle) \\ &= \frac{i(m_b^2 - k^2)}{f_b m_b^2} (i k_\nu \int d^4 x (\langle 0 | T(\partial^\mu A_\mu^a(0) \partial^\nu A_\nu^b(x)) | 0 \rangle) e^{-ik \cdot x} \\ &\quad - \int d^4 x e^{-ik \cdot x} \langle 0 | \delta(x_0) [A_0^b(x), \partial^\mu A_\mu^a(0)] | 0 \rangle) \quad . \end{aligned} \quad (2.105)$$

O teorema da baixa energia é então

$$\delta_{ab} f_a m_a^2 = \int d^4 x \langle 0 | \delta(x_0) [A_0^b(x), \partial^\mu A_\mu^a(0)] | 0 \rangle = \sigma_0^{ab} \quad , \quad (2.106)$$

onde

$$\sigma_0^{ab} = \langle 0 | [Q^{5a}, [Q^{5a}, \mathcal{H}(0)]] | 0 \rangle \quad . \quad (2.107)$$

Assim as massas dos mésons pseudo-escalares são relacionadas aos elementos de matriz do termo σ , utilizando os auto-estados de vácuo [17, 20, 22]. Agora, com o formalismo que foi exposto, estamos aptos a descrever uma teoria mais formal para a quebra de simetria quiral. A simetria quiral é quebrada somente pelo termo de massa de quark, como citado anteriormente

$$\lambda \mathcal{H}' = m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d + m_s \bar{s}s \quad , \quad (2.108)$$

ou

$$\begin{aligned} \lambda_1 \mathcal{H}_1 &= m_s \bar{s}s \quad , \\ \lambda_2 \mathcal{H}_2 &= m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d \quad , \end{aligned} \quad (2.109)$$

sendo as componentes do campo dos quarks:

$$\begin{aligned} q_L &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)q \\ q_R &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)q \quad , \end{aligned} \quad (2.110)$$

pertencem ao grupo $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$.

Na linguagem teórica de grupos, dizemos [22]

$$\lambda \mathcal{H}' = c_0 u_0 + c_3 u_3 + c_8 u_8 \quad , \quad (2.111)$$

onde os u_a 's são um conjunto de densidades escalares. Em termos dos campos de quarks e das matrizes de Gell-Mann, eles têm a representação

$$u_i = \bar{q} \lambda_i q, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 8 \quad . \quad (2.112)$$

Similarmente, defini-se a densidade pseudo-escalar como

$$v_i = -i \bar{q} \lambda_i \gamma_5 q \quad . \quad (2.113)$$

Com a representação de u_i , v_i e as cargas Q^a e Q^{5a} podemos trabalhar as relações canônicas de anti-comutação para o campo de quarks

$$\{q_\alpha^\dagger(x, t), q_\beta(x, t)\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^3(x - y) \quad , \quad (2.114)$$

onde α, β são índices de Dirac e de sabor. Suprimindo toda dependência espaço-temporal teremos

$$\begin{aligned} \left[\bar{q} \frac{\lambda^a}{2} \gamma_0 \gamma_5 q, \bar{q} \lambda^b q \right] &= [q_\alpha^\dagger q_\beta, q_\gamma^\dagger q_\delta] (\lambda^a \gamma_5)_{\alpha\beta} (\lambda^b \gamma^0)_{\gamma\delta} \cdot 2 \\ &= (q_\alpha^\dagger q_\gamma^\dagger q_\beta, q_\delta + q_\alpha^\dagger q_\beta, q_\gamma^\dagger q_\delta - q_\alpha^\dagger q_\gamma^\dagger, q_\delta q_\beta \\ &\quad + q_\alpha^\dagger, q_\gamma^\dagger q_\beta q_\delta) (\lambda^a \gamma^5)_{\alpha\beta} (\lambda^b \gamma^0)_{\gamma\delta} \cdot 2 \\ &= q^\dagger [\lambda^a \gamma_5, \lambda^b \gamma^0] q / 2 \\ &= -\bar{q} \gamma_5 \{ \lambda^a, \lambda^b \} q / 2 \quad . \end{aligned} \quad (2.115)$$

Podemos definir o símbolo totalmente simétrico d^{abc} ; através da álebra das matrizes de Gell-Mann

$$\left\{ \frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right\} = i d^{abc} \frac{\lambda^c}{2} \quad , \quad (2.116)$$

onde os elementos diferentes de zero são:

$$\begin{aligned}
d_{118} &= d_{228} = d_{338} = \frac{1}{\sqrt{3}} , \\
d_{448} &= d_{558} = d_{668} = d_{778} = -\frac{\sqrt{3}}{2} , \\
d_{344} &= d_{355} = -d_{366} = -d_{377} = d_{146} = d_{157} = -d_{247} = d_{256} = \frac{1}{2} , \\
d_{0ab} &= \sqrt{(2/3)} .
\end{aligned} \tag{2.117}$$

Finalmente podemos chegar então, as relações de comutação [17, 22]

$$\begin{aligned}
\delta(x_0)[Q_a^5(x_0), u_j(x, x_0)] &= -id_{ajk}v_k(0)\delta^4(x) , \\
\delta(x_0)[Q_a^5(x_0), v_j(x, x_0)] &= -id_{ajk}u_k(0)\delta^4(x) .
\end{aligned} \tag{2.118}$$

Similarmente temos

$$\begin{aligned}
\delta(x_0)[Q_a(x_0), u_j(x, x_0)] &= -if_{ajk}v_k(0)\delta^4(x) \\
\delta(x_0)[Q_a(x_0), v_j(x, x_0)] &= -if_{ajk}u_k(0)\delta^4(x) ,
\end{aligned} \tag{2.119}$$

com $a = 1, \dots, 8$ e $j, k = 0, 1, \dots, 8$. As f_{abc} 's são as usuais constantes de estrutura do SU(3), com $f_{ab0} = 0$. Na linguagem do modelo de quarks

$$\begin{aligned}
u_0 &= \sqrt{\frac{2}{3}} (\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s) , \\
u_8 &= \sqrt{\frac{1}{3}} (\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s) , \\
u_3 &= (\bar{u}u + \bar{d}d) .
\end{aligned} \tag{2.120}$$

Os coeficientes c 's, correspondem as massas dos quarks

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (m_u + m_d + m_s) , \\
c_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{(m_u + m_d)}{2} - m_s \right) , \\
c_3 &= \frac{1}{3} (m_u + m_d) .
\end{aligned} \tag{2.121}$$

Neste trabalho será considerada a invariância de isospin, sendo $m_u = m_d$ ou $c_3 = 0$. O comutador duplo do termo σ pode ser calculado usando as relações de comutação da Eq. (2.119). Para simplificar deve se considerar $\lambda\mathcal{H}'$ e os Q_a^5 's, como

sendo matrizes 3 x 3 e calculando o anti-comutador da Eq. (2.116) diretamente. O resultado encontrado será então

$$\begin{aligned}
f_\pi^2 m_\pi^2 &= \frac{(m_u + m_d)}{2} \langle 0 | \bar{u}u + \bar{d}d | 0 \rangle , \\
f_k^2 m_k^2 &= \frac{(m_u + m_s)}{2} \langle 0 | \bar{u}u + \bar{s}s | 0 \rangle , \\
f_\eta^2 m_\eta^2 &= \frac{(m_u + m_d)}{6} \langle 0 | \bar{u}u + \bar{d}d | 0 \rangle + \frac{4m_s}{3} \langle 0 | \bar{s}s | 0 \rangle . \quad (2.122)
\end{aligned}$$

2.3 Fator de Forma Eletromagnético

Além de se calcular as constantes de decaimento do pión e do káon, o outro; e maior objetivo de nosso trabalho, é calcular os “fatores de forma”; e através destes, os respectivos raios quadráticos médios. Na teoria de espalhamento da mecânica quântica não relativística; um fator de forma é introduzido, e com o qual se relaciona alvos estendidos com alvos pontuais

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{estendida}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{pontual}} |F(q)|^2 . \quad (2.123)$$

O fator de forma $F(q)$ tem uma simples interpretação: é a transformada de Fourier da “distribuição de densidade $g(x)$ ” do centro de espalhamento estendido:

$$F(q) = \int d^3x g(\vec{x}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} . \quad (2.124)$$

Por analogia podemos identificar “ $G_E(q^2)$ ”, “ $G_M(q^2)$ ” e “ $G_D(q^2)$ ” com as transformadas de Fourier da densidade de distribuição da carga do hádron, do momento magnético e de dipolo, respectivamente [23].

Para as energias relativísticas, essas interpretações se tornam problemáticas, pois elas dependem do sistema de referência. Elas são válidas no chamado referencial de Breit; ou “breit-frame”, onde não há energia transferida para o nucleon, $q_0 = 0$; o que significa $P = (E, P)$ e $P' = (E, -P)$ [23, 24].

Para uma descrição mais realística do espalhamento relativístico de um elétron por um hádron, deve-se levar em conta a estrutura interna e o momento magnético anômalo do hádron. Para este fim, deve-se substituir a corrente de transição no espaço de momento, que se origina da equação de Dirac, pela expressão bilinear mais geral [23, 24]:

$$\bar{u}(P')\gamma_\mu u(P) \rightarrow \bar{u}(P')\Gamma_\mu(P', P)u(P) , \quad (2.125)$$

onde $\Gamma_\mu(P', P)$ é a função de que corrige o vértice acrescentando contribuições internas, assim como a distribuição de cargas, de momento magnético, dipolo, etc.

Com a finalidade de construir a função de vértice $\Gamma_\mu(P', P)$ temos ao nosso dispor, as duas quantidades P^μ e P'^μ . Desde que o hádron se mova livremente antes e depois da interação (na “camada de massa”), haverá somente uma única variável escalar independente, pois $P^2 = P'^2 = M^2$, que escolhemos como sendo o

quadrado do momento transferido $q^2 = (P' - P)^2$. Desde que $\Gamma_\mu(P', P)$ seja um vetor de Lorentz, um resultado mais geral pode ser obtido através dos “covariantes bilineares” da teoria de Dirac [24]:

$$\begin{aligned} \bar{u}(P')\Gamma_\mu(P', P)u(P) &= \bar{u}(P') [A(q^2)\gamma_\mu + B(q^2)P'_\mu + C(q^2)P_\mu \\ &+ iD(q^2)\sigma_{\mu\nu}P'^\nu + iE(q^2)P^\nu\sigma_{\mu\nu}] u(P) \quad , \end{aligned} \quad (2.126)$$

onde os $A(q^2), \dots, E(q^2)$ são funções escalares da variável q^2 e $\sigma_{\nu\mu} = (i/2)(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$. Se quisermos que elas sejam hermitianas, elas devem ser reais. Essas restrições vêm do fato de queremos que $\Gamma_\mu(P', P)$ seja invariante de gauge, ou seja,

$$q^\mu \bar{u}(P')\Gamma_\mu(P', P)u(P) = 0 \quad . \quad (2.127)$$

Esta última relação vem da condição da conservação da corrente, aplicada à corrente de transição eletromagnética do hádron.

Invariância de gauge implica

$$\int d^4x j_\mu(x)A^\mu(x) = \int d^4x j_\mu(x) (A^\mu(x) - \partial^\mu\chi(x)) \quad , \quad (2.128)$$

o que significa $\int d^4x j_\mu(x)\partial^\mu\chi(x) = 0$. Assumindo que o termo de superfície não contribui (a função $\chi(x)$ pode ser escolhida apropriadamente), a última condição pode ser reescrita como

$$\int d^4x \partial^\mu j_\mu(x)\chi(x) = 0 \quad . \quad (2.129)$$

Desde que $\chi(x)$ seja uma função arbitrária, esta última relação implica que a divergência $\partial^\mu j_\mu(x) = 0$.

O primeiro termo de (2.127) é justamente a corrente de Dirac usual, que preenche obviamente a condição (2.128). Isto pode ser facilmente mostrado com a ajuda da equação de Dirac. Para os termos sub-sequentes temos:

$$(P'^\mu - P^\mu)(BP'_\mu + CP_\mu) = (B - C)(M^2 - P' \cdot P) = 0 \quad , \quad (2.130)$$

e

$$\begin{aligned} i(P'^\mu - P^\mu)(DP'^\nu + EP^\nu) &= -iDP'^\mu P'^\nu\sigma_{\mu\nu} + iEP'^\mu P^\nu\sigma_{\mu\nu} \quad , \\ &= i(D + E)P'^\mu P^\nu\sigma_{\mu\nu} = 0 \quad , \end{aligned} \quad (2.131)$$

levando em conta a anti-simetria do tensor $\sigma_{\mu\nu}$. Assim podemos deduzir que $C = B$ e $E = -D$, por exemplo:

$$\begin{aligned}\bar{u}(P')\Gamma_\mu(P', P)u(P) &= \bar{u}(P') [A(q^2)\gamma_\mu + B(q^2)(P' + P)_\mu \\ &\quad + iD(q^2)(P' - P)^\nu\sigma_{\mu\nu}] u(P) \quad .\end{aligned}\quad (2.132)$$

Por causa da decomposição de Gordon [23, 24],

$$\bar{u}\gamma_\mu u = \frac{1}{2M_0}(P' + P)_\mu\bar{u}u + \frac{i}{2M_0}(P' - P)^\nu\bar{u}\sigma_{\mu\nu}u \quad , \quad (2.133)$$

estes três termos não são linearmente independentes. Por essa razão, um dos termos, por exemplo, $A(q^2)\gamma_\mu$, pode ser eliminado. Sendo assim, chegamos a relação

$$\bar{u}(P')\Gamma_\mu(P', P)u(P) = \bar{u} \left[\frac{1}{2M_0}(P' + P)_\mu + \frac{i}{2M_0}(P' - P)^\nu\sigma_{\mu\nu} \right] u \quad . \quad (2.134)$$

A partir de $\bar{u}(P')\Gamma_\mu(P', P)u(P)$, podemos calcular a corrente de transição, pois

$$J_{quark}^\mu(q^2) = \bar{u}(P')\Gamma_\mu(P', P)u(P) \quad , \quad (2.135)$$

é o seu elemento de matriz, considerando também a sua parte spinorial

$$\langle P, s | J_{quark}^\mu(q^2) | P', s' \rangle = ie_{quark}g^2N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \times \prod_n^m |\bar{u}_n(P', s')\Gamma_n^\mu u_n(P, s)| \quad , \quad (2.136)$$

onde para m vértices, se tem $|\bar{u}_n(P', s')\Gamma_n^\mu u_n(P, s)|$ multiplicado m vezes, sendo que para cada n, é considerado um vértice diferente. Será utilizado como exemplo dois vértices.

Calculando agora isoladamente o termo quadrático da integral e fazendo a soma sobre os spins, temos

$$\begin{aligned}|\bar{u}(P', s')\Gamma_\mu u(P, s)|^2 &= \sum_{s, s'} \left(\sum_{\mu=0}^3 [\bar{u}(P', s')\Gamma_\mu u(P, s)] \right) \times \left(\sum_{\nu=0}^3 [\bar{u}(P', s')\Gamma_\nu u(P, s)]^* \right) \\ &= \sum_{\mu, \nu=0}^3 \sum_{s, s'} [\bar{u}(P', s')\Gamma_\mu u(P, s)][\bar{u}(P', s')\Gamma_\nu u(P, s)]^\dagger \\ &= \sum_{\mu, \nu=0}^3 \sum_{s, s'} \sum_{\alpha, \beta, \delta, \varepsilon=0}^4 \bar{u}_\alpha(P', s')\Gamma_{\alpha\beta}^\mu u_\beta(P, s)\bar{u}_\delta(P, s)\Gamma_{\delta\varepsilon}^\nu u_\varepsilon(P', s') \\ &= \sum_{\mu, \nu=0}^3 \sum_{\alpha, \beta, \delta, \varepsilon=0}^4 \sum_{s'} \bar{u}_\alpha(P', s')\Gamma_{\alpha\beta}^\mu \left[\sum_s u_\beta(P, s)\bar{u}_\delta(P, s) \right] \Gamma_{\delta\varepsilon}^\nu u_\varepsilon(P', s')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mu, \nu=0}^3 \sum_{\alpha, \varepsilon=1}^4 \sum_{s'} \bar{u}_\alpha(P', s') u_\varepsilon(P', s') \left(\Gamma^\mu \frac{\not{P} + m_0}{2m_0} \Gamma^\nu \right)_{\alpha\varepsilon} \\
&= \sum_{\mu, \nu=0}^3 \sum_{\alpha, \varepsilon=1}^4 \left(\frac{\not{P}' + m_0}{2m_0} \right)_\varepsilon^\alpha \times \left(\Gamma^\mu \frac{\not{P} + m_0}{2m_0} \Gamma^\nu \right)_\alpha^\varepsilon \\
&= \sum_{\mu, \nu=0}^3 Tr \left[\frac{\not{P}' + m_0}{2m_0} \Gamma^\mu \frac{\not{P} + m_0}{2m_0} \Gamma^\nu \right] , \tag{2.137}
\end{aligned}$$

onde foi usado o fato de que a conjugação complexa e o adjunto são idênticos

$$[\bar{u}(P', s') \Gamma^\mu u(P, s)]^* = \sum_{\delta, \varepsilon}^4 \bar{u}_\delta(P, s) \Gamma_{\delta\varepsilon}^\mu u_\varepsilon(P', s') = [\bar{u}(P', s') \Gamma^\mu u(P, s)]^\dagger , \tag{2.138}$$

como também a definição do operador de projeção da energia

$$\sum_s u_\beta(P, s) \bar{u}_\delta(P, s) = \left(\frac{\not{P} + m_0}{2m_0} \right)_{\beta\delta} , \tag{2.139}$$

O traço de (2.138), pode ser generalizado de forma a conter n vértices (canais) possíveis:

$$Tr \left[\frac{\not{P}_1 + m_1}{2m_1} \Gamma^\mu \frac{\not{P}_2 + m_2}{2m_2} \Gamma^\nu \dots \frac{\not{P}_n + m_n}{2m_n} \Gamma^\tau \right] , \tag{2.140}$$

ou ainda

$$Tr [S(P_1, m_1) \Gamma^\mu S(P_2, m_2) \dots S(P_n, m_n) \Gamma^\tau] , \tag{2.141}$$

onde $S(P, m)$ é o propagador de Feynman para férmions (partículas de spin 1/2):

$$S(P, m) = \frac{\not{P} + m}{P^2 - m^2 + i\epsilon} . \tag{2.142}$$

A corrente poderá ser escrita como

$$\begin{aligned}
J_{quark}^\mu(q^2) &= ie_{quark} g^2 N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr [S(P_1, m_1) \Gamma^\mu S(P_2, m_2) \dots S(P_n, m_n) \Gamma^\tau] \\
&\times \Lambda(P_1) \Lambda(P_2) \dots \Lambda(P_n) . \tag{2.143}
\end{aligned}$$

onde a função

$$\Lambda(P) = \frac{N}{\not{P}^2 - m_R^2 + i\epsilon} , \tag{2.144}$$

é a função regularizadora, utilizada para regularizar a integral divergente, onde m_R é a massa regularizadora [3, 5, 10, 11, 12, 13, 25, 26].

Da equação (2.133) e de (2.144), poderemos finalmente escrever o fator de forma como

$$\begin{aligned}
F(q^2) &= \frac{1}{(2P)} i e_{quark} g^2 N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr [S(P_1, m_1) \Gamma^\mu S(P_2, m_2) \dots S(P_n, m_n) \Gamma^\tau] \\
&\times \Lambda(P_1) \Lambda(P_2) \dots \Lambda(P_n) \quad ,
\end{aligned} \tag{2.145}$$

onde foi considerado o referencial de Breit, $q^0 = (P' - P) = 0$.

E o raio da carga (raio quadrático médio do nucleon) é relacionado com o fator de forma pela expressão [27]:

$$r_{\text{nucleon}} \equiv \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{6 \left[\frac{dF(q^2)}{dq^2} \right]_{q^2=0}} . \tag{2.146}$$

Capítulo 3

Formalismo da Frente de Luz e sua Dinâmica

As razões pela qual será utilizado o formalismo da frente de luz neste trabalho, será; em primeiro lugar por que as amplitudes de processos físicos calculadas pela teoria de perturbação desenvolvida na frente de luz são invariantes por uma classe de transformações de Lorentz [1, 28], que correspondem às transformações cinemáticas. Estas transformações mantêm invariantes tais processos físicos no plano-nulo [3]; a segunda razão para estudarmos o formalismo da frente de luz é que podemos distinguir cinematicamente partículas de anti-partículas. Tal fato vem da relação de dispersão do formalismo da frente de luz ser “linear” e não “quadrática”, como na relação de Einstein (formalismo covariante), como veremos adiante neste capítulo. Este argumento é usado em geral para fundamentar a ausência de criação de pares em certos processos físicos [1, 3, 28].

Neste capítulo será desenvolvida uma introdução à dinâmica do cone de luz. Na forma convencional Hamiltoniana da dinâmica se utilizam variáveis dinâmicas relacionadas com condições físicas em algum instante de tempo, sendo o instante mais simples dado por $x^0 = 0$. Dirac mostrou serem possíveis outras formas de dinâmicas relativísticas [4], por exemplo pode ser usada uma teoria dinâmica na qual as variáveis dinâmicas são relacionadas à condição física $x^+ = x^0 + x^3 = 0$. Esta dinâmica é chamada da “dinâmica na frente de luz”.

3.1 Notações e Convenções

Definindo as variáveis da frente de luz como

$$\begin{aligned}x^+ &= x^0 + x^3, \\x^- &= x^0 - x^3,\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$x^\perp = (x^1, x^2) ,$$

onde x^+ é a variável temporal, x^- é a variável longitudinal e $x^\perp$ é a variável transversal.

Denotamos o quadrivetor covariante x^μ por

$$x^\mu = (x^0, x^3, x^1, x^2) = (x^0, x^3, x^\perp). \quad (3.2)$$

Vamos denotar o quadrivetor x^μ na frente de luz por

$$x^\mu = (x^+, x^-, x^\perp) . \quad (3.3)$$

Em analogia com as variáveis da frente de luz do espaço-tempo, define-se o momento longitudinal como sendo

$$k^+ = k^0 + k^3 , \quad (3.4)$$

e a energia da frente de luz é dada por

$$k^- = k^0 - k^3 . \quad (3.5)$$

O operador K^- de um sistema físico na dinâmica da frente de luz faz o papel da Hamiltoniana, correspondendo ao gerador de translação em x^+ . O significado disto é que todas as partículas físicas satisfazem o vínculo $k^+ \geq 0$, pois as velocidades das partículas são iguais ou menores que a velocidade da luz. Se a partícula está na camada de massa, da definição de produto escalar temos

$$\frac{1}{2}(k^+ k^- + k^- k^+) - \vec{k}_\perp^2 = m^2 . \quad (3.6)$$

Sendo assim, para uma partícula massiva livre $k^2 = m^2$ leva a $k^+ \geq 0$ a relação de dispersão ou energia, no plano-nulo é dado por

$$k^- = \frac{(k^\perp)^2 + m^2}{k^+} . \quad (3.7)$$

A relação acima nas coordenadas do plano-nulo, traz mudanças fortes em relação à dinâmica instantânea, pois a relação de Einstein neste caso para o quadrado da massa é quadrática em k_0 , enquanto que nas coordenadas do plano-nulo é linear. Isto significa que nas coordenadas do plano-nulo para $k^+ > 0$, temos somente graus de liberdade de partículas no espaço de Fock. Nas coordenadas instantâneas $(x^0, \vec{x})$, o sinal do momento cinemático não distingue o caráter de partícula ou anti-partícula, enquanto nas coordenadas do plano nulo, se $k^+ < 0$ temos também $k^- < 0$. Podemos distinguir cinematicamente partículas de anti-partículas. Este argumento é usado em

geral para fundamentar a ausência de criação de pares em certos processos físicos [3, 5, 10, 11, 12, 13, 25, 26]. Dando continuidade às definições, pode-se definir o tensor métrico na frente de luz como sendo

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (3.8)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (3.9)$$

Assim,

$$x_- = \frac{1}{2}x^+, \quad x_+ = \frac{1}{2}x^- . \quad (3.10)$$

O produto escalar na forma covariante é

$$x \cdot y = x^0 y^0 - x^3 y^3 - x^\perp \cdot y^\perp . \quad (3.11)$$

Com a métrica da frente de luz, podemos definir produto escalar no formalismo da frente de luz:

$$x \cdot y = \frac{1}{2}x^+ y^- + \frac{1}{2}x^- y^+ - x^\perp \cdot y^\perp . \quad (3.12)$$

E as derivadas parciais são:

$$\partial^+ = 2\partial_- = 2\frac{\partial}{\partial x^-} , \quad (3.13)$$

$$\partial^- = 2\partial_+ = 2\frac{\partial}{\partial x^+} . \quad (3.14)$$

O elemento de volume quadri-dimensional é

$$d^4x = dx^0 d^2x^\perp dx^3 = \frac{1}{2}dx^+ dx^- d^2x^\perp . \quad (3.15)$$

E o elemento de volume tridimensional,

$$[dx] = \frac{1}{2}dx^- d^2x^\perp , \quad (3.16)$$

Assim temos o elemento de volume invariante no espaço de Lorentz no espaço dos momenta é

$$[d^3k] = \frac{dk^+ d^2k^\perp}{2(2\pi)^3 k^+} . \quad (3.17)$$

A função degrau é

$$\begin{aligned} \theta(x) &= 0, \quad x < 0 \\ &= 1, \quad x > 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Neste trabalho foi escolhida a convenção de Bjorken e Drell [9] para as matrizes gama

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (3.19)$$

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} , \quad (3.20)$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad (3.21)$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad (3.22)$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (3.23)$$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad (3.24)$$

$$\vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma} , \quad (3.25)$$

$$\gamma^\pm = \gamma^0 \pm \gamma^3 , \quad (3.26)$$

Explicitamente, temos que

$$\gamma^\pm = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mp 1 \\ \mp 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (3.27)$$

$$\Lambda^\pm = \frac{1}{4} \gamma^\mp \gamma^\pm = \frac{1}{2} \gamma^0 \gamma^\pm = \frac{1}{2} (I \pm \alpha^3) . \quad (3.28)$$

Também explicitamente temos

$$\Lambda^+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad (3.29)$$

$$\Lambda^- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad (3.30)$$

$$(\Lambda^\pm)^2 = \Lambda^\pm , \quad (3.31)$$

$$(\Lambda^\pm)^\dagger = \Lambda^\pm , \quad (3.32)$$

$$\Lambda^+ + \Lambda^- = I , \quad (3.33)$$

$$\gamma^\perp \Lambda^\pm = \Lambda^\pm \gamma^\perp , \quad (3.34)$$

$$\gamma^0 \Lambda^\pm = \Lambda^\mp \gamma^0 , \quad (3.35)$$

$$\alpha^\perp \Lambda^\pm = \Lambda^\mp \alpha^\perp , \quad (3.36)$$

$$\gamma^5 \Lambda^\pm = \Lambda^\pm \gamma^5 , \quad (3.37)$$

$$\gamma^\mp = 2\Lambda^\pm \gamma^0 = \gamma^\mp \Lambda^\mp , \quad (3.38)$$

$$\gamma^i \Lambda^\mp = \frac{1}{2} \gamma^i \pm i \frac{1}{2} \epsilon^{ij} \gamma^j \gamma^5 , \quad (3.39)$$

$$\alpha^j \gamma^i \Lambda^+ = \frac{i}{2} \epsilon^{ij} \gamma^+ \gamma^5 , \quad (3.40)$$

E os espinores “u” de Dirac, são definidos como

$$u_\lambda(k) = \sqrt{\frac{1}{m_F k^+}} [m_F \Lambda^- + (k^+ + \alpha^\perp \cdot k^\perp) \Lambda^+] \chi_\lambda , \quad (3.41)$$

$$\chi_\uparrow = \sqrt{2 m_F} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (3.42)$$

$$\chi_\downarrow = \sqrt{2 m_F} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (3.43)$$

$$u_\uparrow(k) = \frac{1}{\sqrt{2k^+}} \begin{pmatrix} k^+ + m_F \\ k^1 + i k^2 \\ k^+ - m_F \\ k^1 + i k^2 \end{pmatrix} , \quad (3.44)$$

$$u_\downarrow(k) = \frac{1}{\sqrt{2k^+}} \begin{pmatrix} -k^1 + i k^2 \\ k^+ + m_F \\ k^1 - i k^2 \\ -k^+ + m_F \end{pmatrix} , \quad (3.45)$$

$$u_\uparrow^+(k^+) = \sqrt{\frac{k^+}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (3.46)$$

$$u_\downarrow^+(k^+) = \sqrt{\frac{k^+}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} , \quad (3.47)$$

$$v_\lambda(k) = C (\bar{u}_\lambda(k))^T , \quad (3.48)$$

onde $C = i\gamma^2\gamma^0$ é o operador de conjugação de carga.

E os espinores “v” de Dirac, são definidos como

$$v_\lambda(k) = \sqrt{\frac{1}{m_F k^+}} [m_F \Lambda^- + (k^+ + \alpha^\perp \cdot k^\perp) \Lambda^+] \eta_\lambda , \quad (3.49)$$

$$\eta_\uparrow = \sqrt{2 m_F} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad (3.50)$$

$$\eta_\downarrow = \sqrt{2 m_F} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (3.51)$$

$$v_\uparrow(k) = \frac{1}{\sqrt{2 k^+}} \begin{pmatrix} k^1 - i k^2 \\ -k^+ + m_F \\ -k^1 + i k^2 \\ k^+ + m_F \end{pmatrix} , \quad (3.52)$$

$$v_\downarrow(k) = \frac{1}{\sqrt{2 k^+}} \begin{pmatrix} -k^+ + m_F \\ -k^1 - i k^2 \\ -k^+ - m_F \\ -k^1 - i k^2 \end{pmatrix} , \quad (3.53)$$

$$v_\uparrow^+(k) = \sqrt{\frac{k^+}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad (3.54)$$

$$v_\downarrow^+(k) = \sqrt{\frac{k^+}{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (3.55)$$

3.2 Geradores e Álgebra de Poincaré

Vamos primeiro considerar somente um "boost" ao longo de x^3 (sentido negativo). A relação entre espaço e tempo dos dois sistemas de coordenadas, um $\tilde{S}$ em movimento uniforme ao longo de x^3 (sentido negativo), com velocidade v relativa ao outro S é dada por $\tilde{x}^0 = \gamma(x^0 + \beta x^3)$, $\tilde{x}^3 = \gamma(x^3 + \beta x^0)$, com $\beta = \frac{v}{c}$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Introduzindo o parâmetro ϕ tal que $\gamma = \cosh \phi$, $\beta\gamma = \sinh \phi$, temos que em termos das variáveis da frente de luz

$$\tilde{x}^+ = e^\phi x^+, \quad \tilde{x}^- = e^{-\phi} x^-. \quad (3.56)$$

Assim um “boost” ao longo de x^3 se torna uma transformação de escala para as variáveis $\tilde{x}^+$ e $\tilde{x}^-$, $x^+ = 0$ é invariante sob um boost ao longo de x^3 [3, 9].

Vamos definir os três geradores dos boosts por K^i e os três geradores das rotações por J^i , considerando a dinâmica à tempo iguais. Definindo $E^1 = -K^1 + J^2$, $E^2 = -K^2 - J^1$, $F^1 = -K^1 - J^2$, e $F^2 = -K^2 + J^1$. As expressões explícitas para os seis geradores K^3 , E^1 , E^2 , J^3 , F^1 , e F^2 na representação dimensionalmente finita usando as convenções de Ryder (1985) [9] são:

$$\begin{aligned} K^3 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E^1 = -i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ E^2 &= -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^3 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ F^1 &= -i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Note que K^3 , E^1 , E^2 , e J^3 deixam $x^+ = 0$ invariante e são geradores cinemáticos, enquanto F^1 e F^2 não são, porém estes dois últimos são geradores dinâmicos.

Disso, segue que

$$\begin{aligned} [F^1, F^2] &= 0 \quad . \\ [J^3, F^i] &= i\epsilon^{ij} F^j \quad . \end{aligned}$$

Assim J^3 , F^1 e F^2 formam uma álgebra fechada. Também

$$\begin{aligned} [E^1, E^2] &= 0 \\ [K^3, E^i] &= iE^i. \end{aligned}$$

Assim K^3 , E^1 e E^2 também formam uma álgebra fechada.

Da densidade Lagrangiana pode se construir o tensor $T^{\mu\nu}$ e deste tensor, pode-se, construir um quadri-momento P^μ e um momento angular generalizado $M^{\mu\nu}$:

$$P^\mu = \frac{1}{2} \int dx^- d^2 x^\perp T^{+\mu}, \quad (3.57)$$

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int dx^- d^2 x^\perp [x^\nu T^{+\mu} - x^\mu T^{+\nu}]. \quad (3.58)$$

Note que $M^{\mu\nu}$ é anti-simétrico e assim tem seis componentes independentes. A álgebra de Poincaré em termos de P^μ e $M^{\mu\nu}$ é [9]:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \quad (3.59)$$

$$[P^\mu, M^{\rho\sigma}] = i[g^{\mu\rho} P^\sigma - g^{\mu\sigma} P^\rho], \quad (3.60)$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i[-g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} + g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma}]. \quad (3.61)$$

Na dinâmica da frente de luz, P^- é a Hamiltoniana e P^+ e P^i ($i = 1, 2$) são os momentos. $M^{+-} = 2K^3$ e $M^{+i} = E^i$ são os boosts. $M^{12} = J^3$ e $M^{-i} = F^i$ são as rotações [3, 9].

Como um exemplo, vamos construir geradores de Poincaré de um campo escalar livre, na representação de Fock [3, 9].

Da densidade Lagrangiana, obtemos o tensor simétrico conservado

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (3.62)$$

onde

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\sigma \phi \partial^\sigma \phi - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2. \quad (3.63)$$

Os operadores de momento são dados por

$$P^+ = \frac{1}{2} \int dx^- d^2 x^\perp \partial^+ \phi \partial^+ \phi, \quad (3.64)$$

$$P^i = \frac{1}{2} \int dx^- d^2 x^\perp \partial^+ \phi \partial^i \phi. \quad (3.65)$$

O operador Hamiltoniano é definido como sendo

$$P^- = \frac{1}{2} \int dx^- d^2 x^\perp [\partial^i \phi \partial^i \phi + \mu^2 \phi^2]. \quad (3.66)$$

Os geradores dos boosts são (em $x^+ = 0$):

$$K^3 = \frac{1}{4} \int dx^- d^2 x^\perp x^- \partial^+ \phi \partial^+ \phi, \quad (3.67)$$

e

$$E^i = \frac{1}{2} \int dx^- d^2 x^\perp x^i \partial^+ \phi \partial^+ \phi. \quad (3.68)$$

Os geradores das rotações são:

$$J^3 = -\frac{1}{2} \int dx^- d^2 x^\perp \partial^+ \phi \left[x^1 \partial^2 \phi - x^2 \partial^1 \phi \right]. \quad (3.69)$$

e

$$F^i = -\frac{1}{2} \int dx^- d^2 x^\perp \left[x^- \partial^+ \phi \partial^i \phi - x^i (\partial^\perp \phi \cdot \partial^\perp \phi + \mu^2 \phi^2) \right]. \quad (3.70)$$

Em termos dos operadores do espaço de Fock, nós temos

$$P^+ = \int \frac{dk^+ d^2 k^\perp}{2k^+ (2\pi)^3} k^+ a^\dagger(k) a(k), \quad (3.71)$$

$$P^i = \int \frac{dk^+ d^2 k^\perp}{2k^+ (2\pi)^3} k^i a^\dagger(k) a(k), \quad (3.72)$$

$$P^- = \int \frac{dk^+ d^2 k^\perp}{2k^+ (2\pi)^3} \frac{\mu^2 + (k^\perp)^2}{k^+} a^\dagger(k) a(k), \quad (3.73)$$

$$K^3 = i \int \frac{dk^+ d^2 k^\perp}{2k^+ (2\pi)^3} \left(\frac{\partial}{\partial k^+} a^\dagger(k) \right) k^+ a(k), \quad (3.74)$$

$$E^i = -i \int \frac{dk^+ d^2 k^\perp}{2k^+ (2\pi)^3} \left(\frac{\partial}{\partial k^i} a^\dagger(k) \right) k^+ a(k), \quad (3.75)$$

$$J^3 = -i \int \frac{dk^+ d^2 k^\perp}{2k^+ (2\pi)^3} \left([k^1 \frac{\partial}{\partial k^2} - k^2 \frac{\partial}{\partial k^1}] a^\dagger(k) \right) a(k), \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} F^i &= -i \int \frac{dk^+ d^2 k^\perp}{2k^+ (2\pi)^3} \frac{\mu^2 + k^{\perp 2}}{k^+} \left(\frac{\partial}{\partial k^i} a^\dagger(k) \right) a(k) \\ &\quad - 2i \int \frac{dk^+ d^2 k^\perp}{2k^+ (2\pi)^3} k^i \left(\frac{\partial a^\dagger(k)}{\partial k^+} \right) a(k). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Para uma única partícula, nós temos, as seguintes relações abaixo:

$$P^+ |p\rangle = p^+ |p\rangle, \quad (3.78)$$

$$P^i |p\rangle = p^i |p\rangle, \quad (3.79)$$

$$P^- |p\rangle = \frac{(p^\perp)^2 + \mu^2}{p^+} |p\rangle, \quad (3.80)$$

$$K^3 |p\rangle = ip^+ \frac{\partial}{\partial p^+} |p\rangle, \quad (3.81)$$

$$E^i |p\rangle = -ip^+ \frac{\partial}{\partial p^i} |p\rangle, \quad (3.82)$$

$$J^3 |p\rangle = i \left[p^2 \frac{\partial}{\partial p^1} - p^1 \frac{\partial}{\partial p^2} \right] |p\rangle, \quad (3.83)$$

$$F^i |p\rangle = -[i \frac{(p^\perp)^2 + \mu^2}{p^+} \frac{\partial}{\partial p^i} + 2ip^i \frac{\partial}{\partial p^+}] |p\rangle. \quad (3.84)$$

3.3 Campo Escalar: Quantização, Relações de Comutação e Propagadores no Formalismo da Frente de Luz

Neste trabalho iremos estudar duas partículas pseudo-escalares o pión e o káon, e por isso torna-se importante se falar das características do campo escalar nas variáveis da frente de luz [3, 5, 10, 11, 12, 13, 25, 26]. A densidade Langrangiana expressa nas variáveis da frente de luz é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_- \phi \partial_+ \phi - \frac{1}{2} \partial^\perp \phi \cdot \partial^\perp \phi - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2. \quad (3.85)$$

A equação de movimento é

$$[\partial^+ \partial^- - (\partial^\perp)^2 + \mu^2] \phi = 0. \quad (3.86)$$

O campo escalar livre quantizado pode ser escrito como [9]

$$\phi(x) = \int_{0^+}^{\infty} [a(k) e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(k) e^{ik \cdot x}]. \quad (3.87)$$

Os comutadores são dados abaixo:

$$\begin{aligned} [a(k), a^\dagger(k')] &= 2(2\pi)^3 k^+ \delta^3(k - k'), \\ [a(k), a(k')] &= [a^\dagger(k), a^\dagger(k')] = 0. \end{aligned} \quad (3.88)$$

E o estado de uma partícula, será dado pela expressão

$$|k\rangle = a^\dagger(k) |0\rangle, \quad (3.89)$$

e tem como normalização:

$$\langle k' | k \rangle = 2(2\pi)^3 k^+ \delta^3(k - k'). \quad (3.90)$$

Primeiro vamos encontrar a relação de comutação canônica de x^+ igual para o campo escalar. Para teoria de campo livre, o comutador de $\phi(x)$ e $\phi(y)$ é conhecido para x e y arbitrários. Nós temos, então [9]

$$[\phi(x), \phi(y)] = i\Delta(x - y), \quad (3.91)$$

onde

$$\Delta(x - y) = -i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k^2 - \mu^2) \epsilon(k^0) e^{-ik \cdot (x - y)}. \quad (3.92)$$

Seja $k^+ = k^0 + k^3$. Sendo assim $\frac{k^+}{k^0} = 1 + \frac{k^3}{k^0} > 0$ está na camada de massa e assim $\epsilon(k^0) \rightarrow \epsilon(k^+)$. Assim em termos das variáveis da frente de luz,

$$\begin{aligned} \Delta(x - y) = & -\frac{i}{2} \int \frac{d^2 k^\perp}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dk^+ \int_{-\infty}^{+\infty} dk^- \delta(k^+ k^- - (k^\perp)^2 - \mu^2) \\ & \epsilon(k^+) e^{-i(\frac{1}{2}k^-(x^+ - y^+) + \frac{1}{2}k^+(x^- - y^-) - k^\perp \cdot (x^\perp - y^\perp))}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

De (3.91) e (3.93) mostra-se que:

$$[\phi(x), \phi(y)]_{x^+ = y^+} = -\frac{i}{4} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\perp - y^\perp), \quad (3.94)$$

onde ϵ é a função degrau anti-simétrica, $\epsilon(x) = \theta(x) - \theta(-x)$.

A relação de comutação acima é contrastada com a relação de comutação correspondente da teoria à tempos iguais a saber, [2]:

$$[\phi(x), \phi(y)]_{x^0 = y^0} = 0. \quad (3.95)$$

Note que para $x^0 = y^0$, os dois campos são separados por um intervalo do tipo espaço, então o comutador tem que ser zero (condição da causalidade microscópica). Para $x^+ = y^+$, se $x^\perp \neq y^\perp$, os dois campos são separados por uma distância do tipo espaço e assim o comutador tem que ser nulo. Por outro lado, para $x^+ = y^+$ e $x^\perp = y^\perp$, os dois campos são separados por uma distância tipo luz e assim o comutador não precisa ser zero [3, 9].

Em seguida será considerado o propagador do campo escalar. Vamos denotar o propagador do campo escalar na teoria da frente de luz como $\tilde{S}_B$. Temos

$$\begin{aligned}
i\bar{S}_B(x-y) &= \langle 0 | T^+ \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \\
&= \theta(x^+ - y^+) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \\
&\quad + \theta(y^+ - x^+) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle .
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Usando (3.87) e (3.88) pode se mostrar que

$$\begin{aligned}
i\bar{S}_B(x-y) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{i}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \\
&= iS_B^{FL}(x-y) ,
\end{aligned} \tag{3.97}$$

onde S_B^F é o propagador de Feynman para o campo escalar. Assim para um campo escalar, o propagador da frente de luz é o mesmo que o propagador de Feynman (covariante).

Os propagadores de férmions, partículas de spin 1/2, podem ser escritos no formalismo da frente de luz como [3]

$$\frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{2} \frac{\gamma^+ \bar{k}^- + \gamma^- k^+}{k^+ (k^- - \frac{k_\perp^2 + m^2 - i\epsilon}{k^+})} + \frac{\gamma_\perp k_\perp}{k^+ (k^- - \frac{k_\perp^2 + m^2 - i\epsilon}{k^+})} . \tag{3.98}$$

Quando a partícula está na camada de massa, temos

$$\bar{k}^- = \frac{k_\perp^2 + m^2}{k^+} , \tag{3.99}$$

onde $\bar{k}^\mu$ está na “camada de massa”.

Somando-se e subtraindo a condição da camada de massa no propagador teremos

$$\frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{2} \frac{\gamma^+ (k^- + \bar{k}^-)}{k^+ (k^- - \frac{k_\perp^2 + m^2 - i\epsilon}{k^+})} + \frac{\gamma^+ \bar{k}^- + \gamma^- k^+}{2k^+ (k^- - \frac{k_\perp^2 + m^2 - i\epsilon}{k^+})} + \frac{\gamma_\perp k_\perp - m}{k^+ (k^- - \frac{k_\perp^2 + m^2 - i\epsilon}{k^+})} \tag{3.100}$$

Fazendo as simplificações necessárias, obteremos

$$\frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{\not{k} + m}{k^+ (k^- - \frac{k_\perp^2 + m^2 - i\epsilon}{k^+})} + \frac{\gamma^+}{2k^+} . \tag{3.101}$$

Podemos observar então que no formalismo da frente de luz, temos um termo no propagador de Feynman, de “contato” ou “instantâneo” no tempo x^+ [3, 9, 10, 26, 28]. Este fato será discutido melhor no capítulo 4.

Capítulo 4

Píon

Neste capítulo iremos estudar o méson π , o qual é um estado ligado quark-antiquark ($|q\bar{q}\rangle$). Para tanto utilizaremos o formalismo da frente de luz [9, 28, 4] e o modelo de quark constituintes desenvolvidos nas Refs.[3, 5, 11, 25], formulado com base na teoria quântica de campos na frente de luz. No formalismo da frente de luz, o principal objetivo para o problema de auto-estados ligados, é resolver a equação

$$H_{LC}|\Psi\rangle = M^2|\Psi\rangle \quad . \quad (4.1)$$

Na equação acima, a Hamiltoniana do cone de luz H_{LC} , têm os auto-valores dados pela massa invariante M^2 , onde os auto-valores são associados à partículas físicas, que por sua vez, são associadas a auto-estados de H_{LC} [11].

As funções de onda hadrônicas na frente de luz são relacionadas com as equações de Beth-Salpeter [25]. Com as funções de onda da frente de luz, é possível calcular os elementos de matriz da corrente entre os estados ligados hadrônicos. Na frente de luz a função de onda de estado ligado do méson é uma superposição para todos estados de Fock, assim sendo, são dadas por [3, 5, 9, 10, 11, 25, 26, 28]:

$$|\Psi_{meson}\rangle = \Psi_{q\bar{q}}|q\bar{q}\rangle + \Psi_{q\bar{q}q}|q\bar{q}q\rangle + \dots \quad . \quad (4.2)$$

Com a função de onda hadrônica na frente de luz é possível calcular os fatores de forma eletromagnéticos dos hádrons, através do elemento de matriz da corrente entre os estados final e inicial,

$$(P + P')^\mu F_\pi(Q^2) = \langle \pi(P') | J^\mu | \pi(P) \rangle, \quad Q = P' - P, \quad (4.3)$$

onde J^μ é a corrente eletromagnética do píon, a qual pode ser expressa em termos dos campos de quarks q_f (f é o sabor do campo de quark) e “ e ” é a carga [11]

$$\sum_f e_f \bar{q}_f \gamma_\mu q_f \quad . \quad (4.4)$$

Os elementos de matriz da corrente eletromagnética podem ser escritos assim como mencionado no capítulo 2 e nas Ref.[3, 10], por

$$\begin{aligned} J_{\text{pion}}^\mu(q^2) &= ieg^2 N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[S(k) \gamma^5 S(P' - k) \gamma^\mu S(P - k) \gamma^5 \right] \times \\ &\quad \times \Lambda(P', k) \Lambda(P, k) \quad , \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde “ e ” é a carga do quark e $\Lambda(k, P)$ é a função de vértice regularizadora, utilizada para regularizar a integral divergente:

$$\Lambda(P, k) = \left[\frac{N}{(P - k)^2 - m_R^2 + i\epsilon} \right] \quad . \quad (4.6)$$

onde m_R é a massa regularizadora.

O fator de forma eletromagnético para o pión, poderá ser encontrado à partir da Eq. (4.3) e da Eq. (4.5)

$$\begin{aligned} F_\pi(q^2) &= -\frac{i2eN_c m^2}{(2P) f_{\pi^2}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[S(k) \gamma^5 S(P' - k) \gamma^\mu S(P - k) \gamma^5 \right] \times \\ &\quad \times \Lambda(P', k) \Lambda(P, k) \quad , \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde foi considerado o referencial de Breit.

Outra expressão importante é a Lagrangiana responsável pelo acoplamento entre o campo do pión e dos quarks. Para encontrar essa Lagrangiana, à princípio basta aplicar a transformação quiral [3, 5, 10]

$$q' = \exp \left(i \frac{\pi \cdot \tau \gamma^5}{2f_\pi} \right) q \quad . \quad (4.8)$$

na Lagrangiana livre:

$$\mathcal{L} = \bar{q} (i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m}) q \quad (4.9)$$

onde $\hat{m}$ é a média entre as massas nuas dos quarks up e down.

Considerando que o acoplamento do campo do pión com o dos quarks é obtido pela expansão da transformação quiral citada logo acima, e mantendo os termos em primeira ordem no campo do pión e segunda ordem no termo escalar ($q\bar{q}$), chegaremos a [5]

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \bar{q} (i\gamma^\mu \partial_\mu - \hat{m}) q - i \frac{1}{2f_\pi} \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \bar{q} \gamma^5 \vec{\tau} q \\ & - i \frac{\hat{m}}{f_\pi} \vec{\pi} \cdot \bar{q} \gamma^5 \vec{\tau} q + \frac{\hat{m}}{2f_\pi^2} \vec{\pi}^2 \bar{q} q \quad .\end{aligned}\tag{4.10}$$

onde M é a massa do quark constituinte.

Se considerarmos que os efeitos da quebra espontânea de simetria domina a função de onda do pión, será uma boa aproximação considerar $i\partial_\mu = Mq$ no segundo termo da Eq. (4.10). Então a Lagrangiana de interação responsável pelo acoplamento pseudo-escalar do pión com os quarks é dada por [5]

$$\mathcal{L}_I = -i \frac{M}{f_\pi} \vec{\pi} \cdot \bar{q} \gamma^5 \vec{\tau} q \quad ,\tag{4.11}$$

O terceiro termo da Eq. (4.10) é desprezado, pois a massa nua do quark é pequena. E o quarto termo da Eq. (4.10) dá a relação de Gell-Mann, Oakes e Renner para m_π [5]

Neste capítulo estudaremos a equivalência entre as formulações covariantes e a da frente de luz em um modelo específico [3, 10] para a corrente eletromagnética do pión no referencial de Breit, no caso em que $q^+ = 0$. Mostraremos que o termo de “criação de pares” para a componente J_π^+ é cancelado exatamente e portanto o resultado covariante é obtido também no formalismo da frente de luz [3, 10].

Para a componente J_π^- da corrente eletromagnética do pión, mostramos que temos que incluir no cálculo do formalismo da frente de luz o termo de par; ou seja, levamos em conta os diagramas tipo “Z”, para a completa equivalência entre o cálculo nas coordenadas do plano-nulo e o cálculo covariante [3, 5, 10, 11, 26]. Também calcularemos a constante de decaimento para o pión no formalismo da frente de luz comparando com o formalismo covariante.

4.1 Componente J_π^+ da Corrente Eletromagnética

O pión é uma partícula pseudo-escalar. Isso se deve ao fato de que o pión é um estado ligado de um par quark-antiquark com spin igual à zero e que seu estado troca de sinal sob transformação de paridade. Utilizando um acoplamento pseudo-escalar do pión com o par quark-antiquark, representado pela seguinte Lagrangeana efetiva [3, 5, 10];

$$L_I = -i \frac{m}{f_\pi} \vec{\pi} \cdot \bar{q} \gamma^5 \vec{\tau} q \quad , \quad (4.12)$$

onde m denota a massa do quark constituinte e f_π a constante de decaimento do pión.

O campo eletromagnético é acoplado minimalmente sugerindo invariância de gauge. As coordenadas do cone de luz são definidas como $k^+ = k^0 + k^z$, $k^- = k^0 - k^z$, $k_\perp = (k^x, k^y)$. À partir do diagrama triangular de Feynman, que representa o processo de absorção de um fóton pelo sistema composto [3, 5, 10],

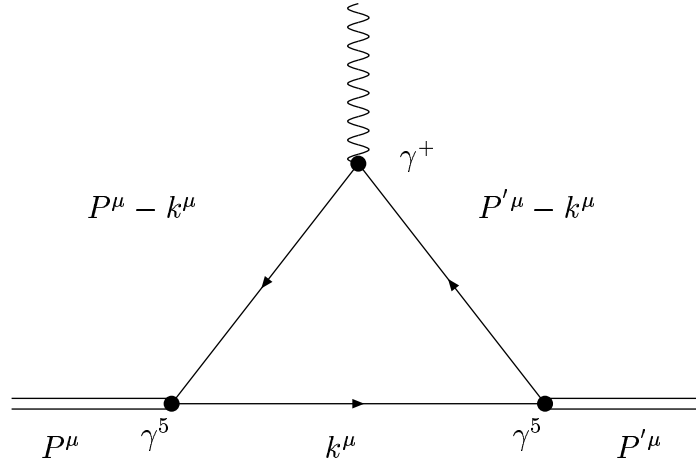


Figura 4.1: Diagrama triangular de Feynman com seus momentos correspondentes, onde P é o estado inicial do pión, P' é o estado final do pión, e $q = P' - P$ é o momento transferido.

obtemos a componente “ J_π^+ ” da corrente eletromagnética do pión

$$J_\pi^+ = e(P^+ + P'^+)F_\pi(q^2)$$

$$\begin{aligned}
&= i2eN_c \frac{m^2}{f_\pi^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[S(k)\gamma^5 S(P' - k)\gamma^+ S(P - k)\gamma^5] \times \\
&\quad \times \Lambda(P', k)\Lambda(P, k) \quad , \quad (4.13)
\end{aligned}$$

com $S(p) = 1/(\not{p} - m + i\epsilon)$ e $N_c = 3$ é o número de cores. O fator 2 vêm da álgebra de isospin. Iremos trabalhar no referencial de Breit, onde o momento transferido é $q^2 = -(\vec{q}_\perp^2)$, $P^0 = P'^0$ e $\vec{P}'_\perp = -\vec{P}_\perp = \frac{\vec{q}_\perp}{2}$. A função $\Lambda(k, p) = N/((P - k)^2 - m_R^2 + i\epsilon)$ é nossa escolha para regularizar o diagrama triangular para o pión, de tal forma que quando fazemos a integração em k^- , podemos interpretar o resultado como uma função de onda no formalismo da frente de luz [3, 10]. A constante de normalização N é encontrada impondo a condição $F_\pi(0) = 1$ no fator de forma do pión.

Reescrevendo então a Eq. (4.13), temos

$$\begin{aligned}
J_\pi^+(q^2) &= e(P^+ + P'^+)F_\pi(q^2) \\
&= ieg^2 N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[\frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^5 \frac{\not{P}' - \not{k} + m}{(P' - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^+ \times \\
&\quad \times \frac{\not{P} - \not{k} + m}{(P - k)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma^5 \Lambda(k, P')\Lambda(k, P)] \quad , \quad (4.14)
\end{aligned}$$

onde $F_\pi(q^2)$ é o fator de forma eletromagnético. O quadri-momento para o pión no referencial de Breit, onde $q^+ = 0$, é dado por $P^\mu = (P^0, P^0, -q_x/2, 0)$ para o estado inicial e $P'^\mu = (P^0, P^0, q_x/2, 0)$ para o estado final, sendo $P^0 = \sqrt{m_\pi^2 + q_x^2/4}$.

O traço de Dirac na equação acima, é escrito nas coordenadas do cone de luz (ver também no apêndice A):

$$\begin{aligned}
\text{Tr}[J_\pi^+] &= \text{Tr}[(\not{k} + m)\gamma^5(\not{k} - \not{P}' + m)\gamma^+(\not{k} - \not{P} + m)\gamma^5] \\
&= -4k^-(k^+ - P^+)^2 + 4(k_\perp^2 + m^2)(k^+ - 2P^+) + k^+ q^2 \quad . \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Finalmente a Eq.(4.13) pode ser escrita nas coordenadas do cone de luz como

$$\begin{aligned}
J_\pi^+ &= 2ie \frac{m^2 N^2}{f_\pi^2} N_c \int \frac{d^2 k_\perp dk^+ dk^-}{2(2\pi)^4} \frac{(-4k^-(k^+ - P^+)^2 + k^+ q^2)}{k^+(P^+ - k^+)^2(P'^+ - k^+)^2(k^- - \frac{f_1 - i\epsilon}{k^+})} \\
&\quad \times \frac{+4(k_\perp^2 + m^2)(k^+ - 2P^+)}{(P^- - k^- - \frac{f_2 - i\epsilon}{P^+ - k^+})(P'^- - k^- - \frac{f_3 - i\epsilon}{P'^+ - k^+})(P^- - k^- - \frac{f_4 - i\epsilon}{P^+ - k^+})} \\
&\quad \times \frac{1}{(P'^- - k^- - \frac{f_5 - i\epsilon}{P'^+ - k^+})} \quad (4.16)
\end{aligned}$$

onde $f_1 = k_\perp^2 + m^2$, $f_2 = (P - k)_\perp^2 + m^2$, $f_3 = (P' - k)_\perp^2 + m^2$, $f_4 = (P - k)_\perp^2 + m_R^2$ e $f_5 = (P' - k)_\perp^2 + m_R^2$.

Podemos notar que na expressão acima, de acordo com [3, 10, 26], e com o que será discutido na próxima seção, os “termos ruins” em (Tr_π^{ruins}) no elemento de matriz, são termos proporcionais a k^- . Por essa razão definimos os traços como

$$\begin{aligned} Tr_\pi^{\text{bons}} &= 4(k_\perp^2 + m^2)(k^+ - 2P^+) + k^+ q^2, \\ Tr_\pi^{\text{ruins}} &= -4k^-(k^+ - P^+)^2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Para os “termos bons”, somente momentos no intervalo $0 < k^+ < P^+$ contribuem para a integração de Cauchy, o que significa que a partícula espectadora está na camada de massa e a contribuição de pólo é $k^- = (k_\perp^2 + m^2)/k^+$. Construímos também os termos ruins para os elementos de matriz da corrente do pion:

$$\begin{aligned} \Delta_\pi &= \int \frac{d^2 k_\perp dk^+ dk^-}{2(2\pi)^4} \frac{4k^-(k^+ - P^+)^2}{k^+(P^+ - k^+)^2(P'^+ - k^+)^2(k^- - \frac{f_1 - i\epsilon}{k^+})(P^- - k^- - \frac{f_2 - i\epsilon}{P^+ - k^+})} \\ &\times \frac{1}{(P'^- - k^- - \frac{f_3 - i\epsilon}{P'^+ - k^+})(P^- - k^- - \frac{f_4 - i\epsilon}{P^+ - k^+})(P'^- - k^- - \frac{f_5 - i\epsilon}{P'^+ - k^+})}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Esta integral tem apenas contribuições em dois intervalos:

- I) $0 < k^+ < P^+$;
- II) $P^+ < k^+ < P'^+$;

onde $P'^+ = P^+ + \delta$. Note que no referencial de Breit $P^+ = P'^+$, o que implica que deve aparecer pólos coincidentes na Eq. (4.18). Utilizamos o método do “deslocamento do pólo” Ref. [10, 21]. O intervalo (I) corresponde a uma partícula espectadora na camada de massa. No limite em que $\delta \rightarrow 0$, por exemplo, $P'^+ = P^+$, a cinemática exata do referencial de Breit é recuperada. Vamos considerar o intervalo (II), $P^+ < k^+ < P'^+$. Após integração em k^- obteremos

$$\begin{aligned} \Delta_\pi^{II} &= i \int \frac{d^2 k_\perp dk^+}{2(2\pi)^3} \frac{(P'^- - \frac{f_3}{P'^+ - k^+})}{k^+(P'^+ - k^+)^2(P'^- - \frac{f_3}{P'^+ - k^+} - \frac{f_1}{k^+})} \\ &\times \frac{\theta(P'^+ - k^+)\theta(k^+ - P^+)}{(\frac{f_3}{P'^+ - k^+} - \frac{f_2}{P^+ - k^+})(\frac{f_3}{P'^+ - k^+} - \frac{f_4}{P^+ - k^+})(\frac{f_3}{P'^+ - k^+} - \frac{f_5}{P^+ - k^+})} \end{aligned} \quad (4.19)$$

O limite para o referencial de Breit é tomado, e depois a fração de momento é usada como uma variável de integração; $x = (k^+ - P^+)/(P'^+ - P^+)$. No limite delta tendendo a zero, a integral anterior se torna

$$\Delta_{\pi}^{II} = i \frac{\delta}{P^+} \int \frac{d^2 k_{\perp} dx}{2(2\pi)^3} \frac{\theta(x)\theta(1-x)}{(1-x)^2 (\frac{f_3}{1-x} + \frac{f_2}{x})(\frac{f_3}{1-x} + \frac{f_4}{x})(\frac{f_3}{1-x} + \frac{f_5}{x})} \rightarrow 0, \quad (4.20)$$

onde se anula linearmente com δ quando o referencial de Breit é recuperado. Assim vimos que neste modelo, os termos correspondentes a criação de pares na corrente eletromagnética desaparecem.

Por essa razão tomaremos somente contribuições dos “termos bons”. Como consequência, os cálculos entre o formalismo do cone de luz e o covariante estão de acordo [3, 10, 11, 26]. Em geral o fator de forma é extraído da expressão covariante

$$J^{\mu} = e(P^{\mu} + P'^{\mu})F_{\pi}(q^2). \quad (4.21)$$

A equação para o fator de forma escrito nas coordenadas do cone de luz para esse modelo é [3, 10]

$$\begin{aligned} F_{\pi}(q^2) &= 2ie \frac{m^2 N^2}{2P^+ f_{\pi}^2} N_c \int \frac{d^2 k_{\perp} dk^+ dk^-}{2(2\pi)^4} \frac{(-4k^-(k^+ - P^+)^2 + k^+ q^2)}{k^+(P^+ - k^+)^2 (P'^+ - k^+)^2 (k^- - \frac{f_1 - i\epsilon}{k^+})} \\ &\quad + 4(k_{\perp}^2 + m^2)(k^+ - 2P^+) \\ &\quad \times \frac{1}{(P^- - k^- - \frac{f_2 - i\epsilon}{P^+ - k^+})(P'^- - k^- - \frac{f_3 - i\epsilon}{P'^+ - k^+})(P^- - k^- - \frac{f_4 - i\epsilon}{P^+ - k^+})} \\ &\quad \times \frac{1}{(P'^+ - k^- - \frac{f_5 - i\epsilon}{P'^+ - k^+})} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Considerando que somente o pólo da camada de massa $k^- = (k_{\perp}^2 + m^2)/k^+$ contribui para a integração em k^- , temos

$$\begin{aligned} F_{\pi}(q^2) &= \frac{m^2 N^2}{P^+ f_{\pi}^2} N_c \int \frac{d^2 k_{\perp} dk^+}{2(2\pi)^3} \frac{[-4(\frac{f_1}{k^+})(k^+ - P^+)^2 + k^+ q^2]}{k^+(P^+ - k^+)^2 (P'^+ - k^+)^2} \\ &\quad + 4(k_{\perp}^2 + m^2)(k^+ - 2P^+) \theta(p'^+ - k^+) \theta(k^+ - P^+) \\ &\quad \times \frac{1}{(P^- - \frac{f_1}{k^+} - \frac{f_2}{P^+ - k^+})(P'^- - \frac{f_1}{k^+} - \frac{f_3}{P'^+ - k^+})(P^- - \frac{f_1}{k^+} - \frac{f_4}{P^+ - k^+})} \\ &\quad \times \frac{1}{(P'^+ - \frac{f_1}{k^+} - \frac{f_5}{P'^+ - k^+})} \end{aligned} \quad (4.23)$$

A parte de momenta da componente de valência da função de onda da frente de luz, $\Phi_i(x, k_{\perp})$, pode ser obtida pela eliminação de fatores contendo matrizes gama no numerador e os fatores que aparecem com k^+ e $(P^+ - k^+)$ no denominador [7, 11, 25].

Sendo assim, a função de onda para o méson π será dada por [3, 10]:

$$\Phi_i(x, k_\perp) = \frac{1}{(1-x)^2} \frac{N}{(m_\pi^2 - M_0^2)(m_\pi^2 - M_R^2)} , \quad (4.24)$$

onde $x = k^+/P^+$. M_R^2 é dado pela função

$$M_R^2 = \mathcal{M}^2(m^2, m_R^2) = \frac{k_\perp^2 + m^2}{x} + \frac{(P-k)_\perp^2 + m_R^2}{1-x} - P_\perp^2 . \quad (4.25)$$

O operador de massa livre M_0 , é dado por

$$M_0^2 = \mathcal{M}^2(m^2, m^2) . \quad (4.26)$$

Deste modo, obtemos uma função de onda na frente de luz para o méson π , a qual remete a solução da equação de Bethe-Salpeter na frente de luz [7, 11, 25].

O fator de forma para a componente “+” da corrente eletromagnética do pión pode ser finalmente escrito como

$$\begin{aligned} F_\pi(q^2) &= \frac{m^2}{P^+ f_\pi^2} N_c \times \\ &\times \int \frac{d^2 k_\perp dx}{2(2\pi)^3} \frac{(-4(\frac{f_1}{xP^+})(xP^+ - P^+)^2 + 4(k_\perp^2 + m^2)(xP^+ - 2P^+) + k^+ q^2)}{x} \times \\ &\times \theta(x)\theta(1-x)\Phi_f^*(x, k_\perp)\Phi_i(x, k_\perp) , \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde o restante das integrais são calculadas numericamente. Este modelo de fator de forma calculado no formalismo do cone de luz, está de acordo com o obtido no formalismo covariante [3, 10, 11].

Apresentamos na figura a seguir, os resultados numéricos para o fator de forma eletromagnético no formalismo da frente de luz e no covariante calculado com a Eq.(5.12), que foi baseada em nosso modelo de função de onda, utilizando-se os dados experimentais de [29]. Os dois parâmetros livres neste modelo, a massa do quark constituinte m_q e a massa reguladora m_R tem os valores (fixos, constantes), $m_q = 0.220$ GeV, $m_R = 0.946$ GeV, e para a massa do pión temos $m_\pi = 0.140$ GeV.

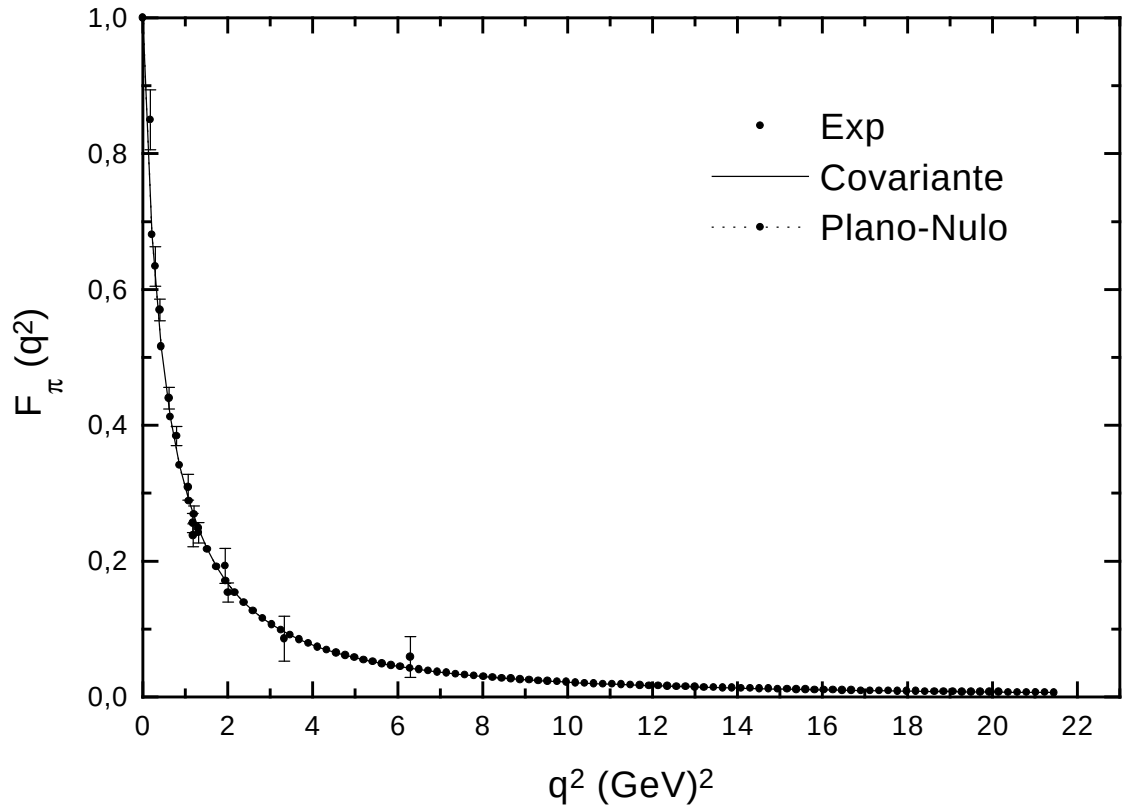


Figura 4.2: Fator de forma do pión obtido da componente J_π^+ da corrente eletromagnética calculada no formalismo Covariante e do Plano-Nulo. Onde a massa do méson $\pi = 0.140$ GeV, massa do quark $m = 0.220$ GeV, massa do regulador $= m_R = 0.946$ GeV, dados experimentais (Exp) [29]. Na figura acima, temos que $q^2 = -Q^2$

4.2 Componente J_π^- da Corrente Eletromagnética

Para a componente “-” da corrente eletromagnética J^μ , também obtemos a expressão correspondente ao diagrama triangular de Feynman, que representa o processo de absorção de um fóton pelo sistema composto [10]:

$$\begin{aligned}
J_{\text{píon}}^-(q^2) &= e(P^- + P'^-)F_\pi(q^2) \\
&= ie_{quark}g^2N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{\not{k} + m}{k^2 - m_R^2 + i\epsilon} \gamma^5 \frac{\not{k} - \not{P}' + m}{(P' - k)^2 - m_R^2 + i\epsilon} \gamma^- \times \right. \\
&\quad \left. \times \frac{\not{k} - \not{P} + m}{(P - k)^2 - m_R^2 + i\epsilon} \gamma^5 \right] \Lambda(k, P') \Lambda(k, P) \quad , \quad (4.28)
\end{aligned}$$

onde $F_\pi^2(q^2)$ é o fator de forma eletromagnético. O quadrimomento para o píon no referencial de Breit, onde $q^+ = 0$, é dado por $P^\mu = (P^0, -q_x/2, 0, 0)$ para o estado inicial e $P'^\mu = (P^0, q_x/2, 0, 0)$ para o estado final, sendo $P^0 = \sqrt{m_\pi^2 + q_x^2/4}$

O traço de Dirac na equação acima, é escrito nas coordenadas do cone de luz como (apêndice A)

$$\begin{aligned}
Tr_\pi^+ &= Tr \left[(\not{k} + m) \gamma^5 (\not{k} - \not{P}' + m) \gamma^- (\not{k} - \not{P} + m) \gamma^5 \right] \\
&= -4k^-k^+ - 4P^+(2k_\perp^2 + k^+P^+ + 2m^2) \\
&\quad + k^-(4k_\perp^2 + 8k^+P^+ + q^2 + 4m^2) \quad . \quad (4.29)
\end{aligned}$$

No traço acima, separamos os termos proporcionais a k^- , que são os termos da corrente eletromagnética que apresentam o mecanismo de produção de pares, os quais chamamos de termos “ruins”

$$\delta_\pi^- = -4k^-k^+ + k^-(4k_x^2 + 4k_y^2 + 8k^+P^+ + q^2 + 4m^2) \quad , \quad (4.30)$$

onde a convenção utilizada foi $q = q_x > 0$ no traço.

A integração de Cauchy sobre k^- na Eq. (4.28) tem duas contribuições diferentes de zero ao cálculo do resíduo,

- i) $0 < k^+ < P^+$
- ii) $P^+ < k^+ < P'^+$

onde usamos $q^+ > 0$.

Podemos escrever o termo quadrático em k^- do elemento de matriz δ_π^- como

$$k^{-2}k^+ = k^-[(k^2 - m^2) + (k_\perp^2 + m^2)] \quad . \quad (4.31)$$

Sendo o pólo que contribui para a integração de Cauchy em k^- no intervalo ii) [3, 6]

$$k^- = P'^- - \frac{f_3}{P'^+ - k^+} \quad . \quad (4.32)$$

Substituindo essa última expressão para o pólo no intervalo ii) e fazendo a integração de Cauchy em k^- , temos

$$\begin{aligned} J_\pi^{-ii} = & \int \frac{d^2k_\perp dk^+}{2(2\pi)^4} \frac{-4(P^- - \frac{f_3}{P'^+ - k^+})[(k^2 - m^2) + (k_\perp^2 + m^2)](P^- - \frac{f_3}{P'^+ - k^+})}{k^+(P^+ - k^+)(P'^+ - k^+)(P^- - \frac{f_3}{P'^+ - k^+} - \frac{f_1}{k^+})} \\ & \times \frac{(4k_x^2 + 4k_y^2 + 8k^+P^+ + q^2 + 4m^2)\Theta(P'^+ - k^+)\Theta(k^+ - P^+)}{(\frac{f_3}{P'^+ - k^+} - \frac{f_2}{k^+})} \quad . \end{aligned} \quad (4.33)$$

Podemos comparar esta última equação com a função geral de restabelecimento da covariância (TRC), para a componente J_π^- da corrente eletromagnética do méson π , onde temos termos de criação de par no intervalo ii), que sobrevive no limite de $q^+ \rightarrow 0$ [10, 6]:

$$\begin{aligned} J_\pi^{-ii} = & - \int \frac{d^2k_\perp}{2(2\pi)^3} \left(-4P^+ - 4\frac{k_\perp^2 + m^2}{P^+} - 4\frac{k_\perp^2}{P^+} + 8P^+ + \frac{q^2}{P^+} + \frac{4m^2}{P^+} \right) \times \\ & \times \sum_{i=2}^5 \frac{\ln(f_i)}{\prod_{j=2, i \neq j}^5 (-f_i + f_j)} \quad . \end{aligned} \quad (4.34)$$

Somando as duas contribuições dos dois intervalos i) e ii) para a corrente J_π^- , resultará no estabelecimento completo da invariância rotacional. Na figura 4.3 podemos ver o efeito do termo que restabelece a simetria rotacional da corrente. Nesta figura comparamos o cálculo do fator de forma eletromagnético utilizando-se a componente da corrente eletromagnética J_π^+ e também da componente J_π^- e observamos numericamente o restabelecimento da simetria rotacional. Podemos notar também nesta figura a comprovação do fato que se a covariância da corrente eletromagnética for satisfeita, o fator de forma para uma partícula pseudo-escalar é o mesmo independente da componente da corrente eletromagnética que estamos usando para calculá-lo [3, 10]

Comparamos o modelo utilizado na frente de luz [3, 10, 11], com o modelo do “Vector Meson Dominance” (VMD), o que é dado pela equação abaixo [30, 31, 32]:

$$F_{\pi}^{VMD} = \frac{1}{1 + \frac{m_{\rho}^2}{q^2}} = \frac{q^2}{q^2 + m_{\rho}^2} . \quad (4.35)$$

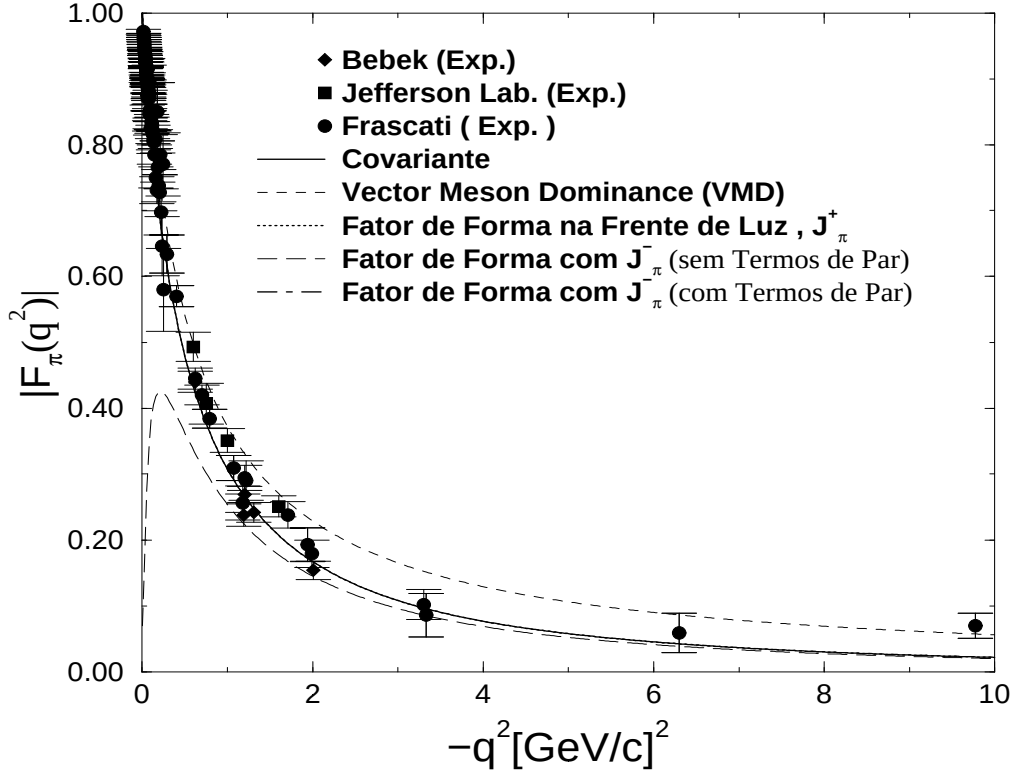


Figura 4.3: O losango representa os dados experimentais provenientes da Ref. Bebek [29]. O quadrado representa os dados experimentais provenientes do Jefferson Lab. Ref.[33]. O círculo representa os dados experimentais provenientes da Ref. Frascati [34]. A linha sólida representa o fator de forma eletromagnético do pión obtido da componente J_{π}^{+} da corrente eletromagnética calculada no formalismo Covariante e do Plano-Nulo. A linha tracejada representa o fator de forma eletromagnético calculado através da componente J_{π}^{-} da corrente eletromagnética. Os parâmetros do modelo são: a massa do méson $\pi = 0.140$ GeV , a massa do quark $m = 0.220$ GeV e a massa do regulador $= m_R = 0.946$ GeV. E para a “Vector Meson Dominance” utilizamos Refs. [30, 31, 32].

4.3 Constante de Decaimento do Píon

A constante de decaimento f_π é medida no decaimento leptônico fraco do píon carregado, como por exemplo em [16]

$$\pi^+(q) \rightarrow \mu^+(P) + \nu_\mu(k) \quad , \quad (4.36)$$

e aparece no elemento de matriz da corrente vetorial parcialmente conservada

$$P_\mu < 0 | A_i^\mu | \pi_j > = i m_\pi^2 f_\pi \delta_{ij} \quad . \quad (4.37)$$

Na conservação parcial da corrente axial vetorial (PCAC); assim como mostrado no capítulo 2, a constante de decaimento (f_π) é expressa pelos elementos de matriz de [3, 5]

$$A_i^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau_i}{2} q \quad , \quad (4.38)$$

e usando a Lagrangeana de interação eq. (4.12) para a função de vértice $\bar{q}q$ do pion. Desse jeito, obtemos

$$p_\mu < 0 | \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 \tau_i q | \pi_j > = 2 i p_\pi^2 \delta_{ij} \quad , \quad (4.39)$$

que governa o decaimento leptônico do píon carregado via a corrente axial. Neste modelo, temos

$$i P^2 f_\pi = \frac{m}{f_\pi} N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr \left[\not{P} \gamma^5 S(\not{P} - \not{k} + m) \gamma^5 S(\not{k} + m) \right] \quad , \quad (4.40)$$

onde o traço desta última equação foi calculado (ver apêndice A) e é dado por

$$Tr_{f_\pi} [\dots] = -4 m m_\pi^2 \quad . \quad (4.41)$$

Após calcular o traço no centro de massa do sistema do píon (quark-antiquark), a equação (4.40) é reescrita nas coordenadas do cone de luz como

$$\begin{aligned} i m_\pi^2 f_\pi &= N \frac{m}{f_\pi} N_c \int \frac{d^2 k_\perp dk^+ dk^-}{2 (2\pi)^4} \frac{-4 m m_\pi^2}{k^+ (P^+ - k^+) (k^- - \frac{f_1 - i\epsilon}{k^+}) (P^- - k^- - \frac{f_2 - i\epsilon}{P^+ - k^+})} \\ &\times \frac{1}{(P^- - k^- - \frac{f_4 - i\epsilon}{P^+ - k^+})} \quad , \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde N é constante de normalização da função de onda. Fazendo a integração de Cauchy em k^- , chegaremos a

$$f_\pi^2 = NN_c \int \frac{d^2 k_\perp dk^+}{(2\pi)^3} \frac{2m^2}{k^+(P^+ - k^+)(P^- - \frac{f_1}{P^+} - \frac{f_2}{P^+ - k^+})(P^- - \frac{f_1}{P^+} - \frac{f_4}{P^+ - k^+})} . \quad (4.43)$$

A expressão final para a constante de decaimento f_π em termos do modelo da função de onda do cone de luz será

$$f_\pi^2 = N_c \int \frac{d^2 k_\perp dx}{(2\pi)^3} \frac{2}{x} \frac{m^2}{x} \Phi_\pi(x, k_\perp) . \quad (4.44)$$

Resolvendo esta última equação numericamente foi obtido o valor $f_\pi = 101 \text{ MeV}$. O valor experimental da Ref. [29, 35] é $f_\pi = 93 \text{ MeV}$. Comparando os dois resultados, podemos observar que o modelo escolhido é satisfatório para ser usado.

4.4 Conclusão

Em um modelo de quarks constituintes, calculamos o fator de forma eletromagnético do pión no formalismo do cone de luz, assim como também no covariante. Os resultados estão de acordo em ambos formalismos, descrevendo bem o fator de forma eletromagnético em relação aos dados experimentais considerados [29].

Sendo o raio (raio quadrático médio) do pión, relacionado com o fator de forma do pión, dado por

$$\langle r_{\pi^+}^2 \rangle = 6 \left[\frac{dF_{\pi^+}(q^2)}{dq^2} \right]_{q^2=0} , \quad (4.45)$$

utilizando-se os parâmetros $m_q = 0.220 \text{ GeV}$, que é a massa do quark, $m_R = 0.946 \text{ GeV}$, que é a massa reguladora; $m_\pi = 0.140 \text{ GeV}$, que é o valor experimental para a massa do pión, calculamos o raio quadrático médio do pión $\langle r_{\pi^+}^2 \rangle_{exp} = 0.456 \pm 0.675 \text{ fm}^2$ $r_\pi = 0.675 \pm 0.821 \text{ fm}$, que é muito próximo ao raio experimental $\langle r_{\pi^+}^2 \rangle_{exp} = 0.444 \pm 0.0023 \text{ fm}^2$ e $r_\pi^{exp} = 0.666 \pm 0.02 \text{ fm}$ [35].

Numericamente, calculamos a Eq.(4.44), obtendo um valor numérico para a constante de decaimento do pión de $f_\pi = 101 \text{ MeV}$ para ser comparada com o valor experimental Ref. [29] $f_\pi = 93 \text{ MeV}$. Foram calculados o fator de forma eletromagnético para as componentes J_π^+ e J_π^- da corrente eletromagnética do pión no formalismo da frente de luz, utilizando o modelo de função de onda citados em

Refs. [3, 10]; levando-se em conta o termo de par, e chegando a resultados bem satisfatórios em comparação aos dados experimentais [29]. Da mesma forma, utilizando o mesmo modelo de função de onda, calculamos a constante de decaimento do e o raio do píon; também obtendo bons resultados em comparação com os dados experimentais [29].

Capítulo 5

O Méson K

Neste capítulo utilizaremos o formalismo da frente de luz, para estudar o káon, que assim como o píon, é uma partícula pseudo-escalar. O káon pode ser descrito como um estado ligado de um par quark-antiquark constituintes. Utilizaremos neste capítulo, o modelo de funções de onda como foi utilizado para o píon [3, 10]. Nessas últimas referências, os fatores de forma de um acoplamento pseudo-escalar é obtido utilizando as componentes $J^+ = J^0 + J^3$ e $J^- = J^0 - J^3$ da corrente eletromagnética, no referencial de Drell-Yan ($q^+ = 0$). A contribuição do termo de par está presente em J^- e não em J^+ , onde a contribuição do termo de par desaparece. A contribuição de valência para a corrente J^- é necessária para partículas pseudo-escalares e vetoriais, a fim de manter as propriedades de simetria rotacional da corrente no formalismo da frente de luz [10, 26]. As componentes $J^{(\mu=\pm)}$ da corrente eletromagnética para o kaon têm contribuição para o quark (q) e anti-quark ($\bar{q}$), dadas por:

$$\begin{aligned} J_q^\mu(q^2) &= ie_q g^2 N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} Tr[S(k - m_q) \gamma^5 S(P' - k - m_q) \gamma^\mu S(P - k - m_q) \gamma^5 \times \\ &\quad \times \Lambda(k, P') \Lambda(k, P)] \quad , \\ J_{\bar{q}}^\mu(q^2) &= q \leftrightarrow \bar{q} \text{ em } J_q^\mu(q^2) \quad , \end{aligned} \quad (5.1)$$

sendo $N_c = 3$, é o número de cores, g é a constante de acoplamento e e_q ($e_{\bar{q}}$) são as cargas do quark (anti-quark). O referencial de Breit é utilizado, onde o momento transferido é $q^2 = -(\vec{q}_\perp)^2$, $P^0 = P'^0$ e $\vec{P}'_\perp = -\vec{P}_\perp = \frac{\vec{q}_\perp}{2}$. A função $\Lambda(k, p) = N/((p-k)^2 - M_R^2 + i\epsilon)$ é usada com a finalidade de regularizar a divergência da integral, onde M_R é a massa reguladora e $m_{q(\bar{q})}$ é a massa do quark (anti-quark). A função $S(P)$ é o propagador do bóson. Lembrando que as coordenadas da frente de luz são definidas como $k^+ = k^0 + k^3$, $k^- = k^0 - k^3$, $k_\perp = (k^1, k^2)$. A contribuição do termo de par para as componentes J^+ e J^- da corrente eletromagnética vem dos

elementos de matriz proporcionais a k^- em ambos casos, assim como será discutido adiante.

5.1 Componente J_K^+ da Corrente Eletromagnética

Para a componente “ J_K^+ ” da corrente eletromagnética do káon, obtemos a expressão correspondente ao diagrama triangular de Feynman, que representa o processo de absorção de um fóton pelo sistema composto, onde podemos perceber que diferentemente do píon, temos que somar outro diagrama para que haja conservação de carga.

A corrente obtida através deste diagrama triangular para a componente J^+ , é

$$J_K^+ = i2e \frac{m^2}{f_\pi^2} N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr}[S(k)\gamma^5 S(P' - k)\gamma^+ S(P - k)\gamma^5 \Lambda(P', k)\Lambda(P, k)], \quad (5.2)$$

com $S(p) = 1/(\not{p} - m + i\epsilon)$ e $N_c = 3$ é o número de cores e o fator 2 vêm da álgebra de isospin. Iremos trabalhar no referencial de Breit, onde o momento transferido é $q^2 = -(\vec{q}_\perp^2)$, $P^0 = P'^0$ e $\vec{P}'_\perp = -\vec{P}_\perp = \frac{\vec{q}_\perp}{2}$. A função $\Lambda(k, p) = N/((P - k)^2 - m_R^2 + i\epsilon)$ é nossa escolha para regularizar o diagrama triangular para o káon (a integral), de tal forma que quando fazemos a integração em K^- , podemos interpretar o resultado como uma função de onda no formalismo da frente de luz [3, 10]. A constante de normalização N é encontrada impondo a condição $F_K(0) = 1$ no fator de forma eletromagnético do káon.

O traço resultante é a soma dos dois traços

$$\text{Tr}_{\text{kaon}}[\dots] = \text{Tr}[1] + \text{Tr}[2] \quad , \quad (5.3)$$

onde

$$\begin{aligned} \text{Tr}[1] &= \left[\gamma^5 (\not{k} - \not{P} + m_u) \gamma^\mu (\not{k} - \not{P}' + m_u) \gamma^5 (\not{k} + m_{\bar{s}}) \right] \quad , \\ \text{Tr}[2] &= \left[\gamma^5 (\not{k} - \not{P} + m_{\bar{s}}) \gamma^\mu (\not{k} - \not{P}' + m_{\bar{s}}) \gamma^5 (\not{k} + m_u) \right] \quad . \end{aligned} \quad (5.4)$$

Efetuando os cálculos para o traço total do káon, através da soma dos traços $\text{Tr}[1]$ e $\text{Tr}[2]$, obteremos para a componente J_K^+ nas coordenadas da frente de luz [12] (ver apêndice B)

$$Tr_{J_K^+}[\dots] = -4 \left(k^- k^{+2} - k^+ k_\perp^2 - 2k^- k^+ P^+ + k^- P^{+2} + 2k_\perp^2 P^+ - k^+ q^2/4 \right) - 4k^+ m_q^2 + 8(k^+ - P^+) m_q m_{\bar{q}} \quad (5.5)$$

Sendo assim, poderemos encontrar o fator de forma através da expressão para a componente J_K^+ da corrente eletromagnética do káon

$$J_K^+(q^2) = e(P^+ + P'^+) F_K^+(q^2) \quad (5.6)$$

Pode se verificar que somente o pólo na camada de massa $\bar{k}^- = (f_1 - i\epsilon)/k^+$ contribui para a integração de Cauchy no intervalo $0 < k^+ < P^+$

$$\begin{aligned} F_{\bar{q}}^+(q^2) &= e_q \frac{N^2 g^2 N_c}{P^+} \times \\ &\times \int \frac{d^2 k_\perp dk^+}{2(2\pi)^3} \frac{-4(\bar{k}^- k^{+2} - k^+ k_\perp^2 - 2\bar{k}^- k^+ P^+ + k^- P^{+2} + 2k_\perp^2 P^+ - k^+ q^2/4)}{k^+ (P^+ - k^+)^2 (P'^+ - k^+)^2 (P^- - \bar{k}^- - \frac{f_2 - i\epsilon}{P^+ - k^+})} \times \\ &\times \frac{-4k^+ m_q^2 + 8(k^+ - P^+) m_q m_{\bar{q}} \theta(P'^+ - k^+) \theta(k^+ - P^+)}{(P'^- - \bar{k}^- - \frac{f_3 - i\epsilon}{P'^+ - k^+}) (P^- - \bar{k}^- - \frac{f_4 - i\epsilon}{P^+ - k^+}) (P'^- - \bar{k}^- - \frac{f_5 - i\epsilon}{P'^+ - k^+})} \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$F_q^+(q^2) = [q \leftrightarrow \bar{q} \text{ em } F_{\bar{q}}^+(q^2)] \quad (5.8)$$

onde $f_1 = k_\perp^2 + m_{\bar{q}}^2$, $f_2 = (P - k)_\perp^2 + m_q^2$, $f_3 = (P' - k)_\perp^2 + m_q^2$, $f_4 = (P - k)_\perp^2 + M_R^2$, $f_5 = (P' - k)_\perp^2 + M_R^2$.

No caso em que, o quark está na camada de massa a contribuição do pólo é $\bar{k}^- = (f_6 - i\epsilon)/k^+$ e $f_6 = k_\perp^2 + m_q^2$.

A função de onda da frente de luz para o káon aparece depois da integração em k^- , é

$$\Phi_{\bar{q}}^i(x, k_\perp) = \frac{1}{(1-x)^2} \frac{N}{(m_{K^+}^2 - M_0^2)(m_{K^+}^2 - M_R^2)} \quad (5.9)$$

onde $x = k^+/P^+$. A função M_R^2 é

$$M_R^2 = M^2(m_{\bar{q}}, M_R) = \frac{k_\perp^2 + m_{\bar{q}}^2}{x} + \frac{(P - k)_\perp^2 + M_R^2}{1-x} - P_\perp^2 \quad , \quad (\bar{q} \leftrightarrow q) \quad (5.10)$$

O operador de massa livre é dado por $M_0^2 = M^2(m_{\bar{q}}, m_{\bar{q}})$, $(\bar{q} \leftrightarrow q)$. Para as funções de onda finais $(\Phi_{\bar{q}}^f$ e $\Phi_q^f)$ é necessário trocar $P \leftrightarrow P'$.

A expressão obtida para o fator de forma eletromagnético em termos da função inicial $(\Phi_{\bar{q}}^i)$ e da final (Φ_q^f) é

$$\begin{aligned}
F_{\bar{q}}^+(q^2) &= e_q \frac{N^2 g^2 N_c}{P^+} \times \\
&\times \int \frac{d^2 k_{\perp} dx}{2(2\pi)^3 x} \left[-4 \left(f_1 x P^+ - x P^+ k_{\perp}^2 - 2 f_1 P^+ + 2 k_{\perp}^2 P^+ + \frac{f_1 P^+}{x} - \frac{x P^+ q^2}{4} \right) \right. \\
&\times \left. - \frac{4 f_1 P^+}{x} + 8 P^+ (x-1) m_q m_{\bar{q}} - 4 x P^+ m_q^2 \right] \theta(x) \theta(1-x) \Phi_{\bar{q}}^{*f}(x, k_{\perp}) \Phi_{\bar{q}}^i(x, k_{\perp}),
\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$F_q^+(q^2) = [q \leftrightarrow \bar{q} \text{ em } F_{\bar{q}}^+(q^2)] . \tag{5.12}$$

A expressão final obtida para o fator de forma eletromagnético através da componente J^+ da corrente eletromagnética é a soma das duas contribuições, da corrente eletromagnética

$$F_{K^+}^+(q^2) = F_q^+(q^2) + F_{\bar{q}}^+(q^2) , \tag{5.13}$$

onde a normalização é dada por $F_{K^+}^+(0) = 1$. Esta expressão é livre das contribuições do termo de par, devido ao fato de que as contribuições para o termo de par para a componente J_K^+ da corrente eletromagnética ser zero no intervalo (II) [12, 13]. O cálculo do fator de forma eletromagnético na frente de luz com J^+ , dá o mesmo resultado do formalismo covariante (ver Fig. 5.1).

5.2 Componente J_K^- da Corrente Eletromagnética

Para a componente “ J_K^- ” da corrente eletromagnética do káon, obtemos a expressão correspondente ao diagrama triangular de Feynman

$$J_K^+ = i 2 e \frac{m^2}{f_{\pi}^2} N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} [S(k) \gamma^5 S(k-P') \gamma^- S(k-P) \gamma^5 \Lambda(k, P') \Lambda(k, P)] . \tag{5.14}$$

Efetuando os cálculos para o traço total do káon, através da soma dos traços $\text{Tr}[1]$ e $\text{Tr}[2]$, obteremos para a componente J_K^- nas coordenadas da frente de luz [12] (ver apêndice B)

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{J_K^-}[\dots] &= -4(k^{-2} k^+ - k^- k_{\perp}^2 - 2k^- k^+ P^+ + 2k_{\perp}^2 P^+ + k^+ P^{+2} - k^- q^2/4) \\
&\quad - 4k^{-2} m_{\bar{q}}^2 + 8(k^- - P^+) m_q m_{\bar{q}} .
\end{aligned} \tag{5.15}$$

A partir daí podemos encontrar o fator de forma através da expressão para a componente J_k^- da corrente eletromagnética do káon

$$J_K^-(q^2) = e(P^- + P'^-)F_K^-(q^2) . \quad (5.16)$$

A contribuição para o fator de forma eletromagnético obtido com J_K^- no intervalo I) $0 < k^+ < P^+$ é dada por

$$\begin{aligned} F_q^{-(I)}(q^2) &= 2ie_q \frac{N^2 g^2 N_c}{2P^+} \times \\ &\times \int \frac{d^2 k_\perp dk^+ dk^-}{(2\pi)^4} \frac{-4(k^{-2}k^+ - k^-k_\perp^2 - 2k^-k^+P^+ + 2k_\perp^2P^+ + k^+P^{+2})}{k^+(P'^+ - k^+)^2(k^- - \frac{f_6 - i\epsilon}{k^+})} \times \\ &\times \frac{-k^-q^2/4 - 4k^{-2}m_q^2 + 8(k^- - P^+)m_qm_{\bar{q}}}{(P^- - k^- - \frac{f_2 - i\epsilon}{P^+ - k^+})(P'^- - k^- - \frac{f_3 - i\epsilon}{P'^+ - k^+})(P^- - k^- - \frac{f_4 - i\epsilon}{P^+ - k^+})} \times \\ &\times \frac{1}{(P'^- - k^- - \frac{f_5 - i\epsilon}{P'^+ - k^+})} , \end{aligned} \quad (5.17)$$

onde $f_2 = (P - k)_\perp^2 + m_q^2$ e $k^- = \frac{k_\perp^2 + m_q^2}{k^+} = f_6/k^+$.

A segunda contribuição vem da corrente do anti-quark

$$\begin{aligned} F_{\bar{q}}^{-(I)}(q^2) &= -2ie_{\bar{q}} \frac{Ng^2N_c}{2P^+} \times \\ &\times \int \frac{d^2 k_\perp dk^+ dk^-}{2(2\pi)^4} \frac{-4(k^{-2}k^+ - k^-k_\perp^2 - 2k^-k^+P^+ + 2k_\perp^2P^+ + k^+P^{+2})}{k^+(P'^+ - k^+)^2(k^- - \frac{f_1 - i\epsilon}{k^+})} \times \\ &\times \frac{-k^-q^2/4 - 4k^{-2}m_q^2 + 8(k^+ - P^+)m_qm_{\bar{q}}}{(P^- - k^- - \frac{f_2 - i\epsilon}{P^+ - k^+})(P'^- - k^- - \frac{f_3 - i\epsilon}{P'^+ - k^+})(P^- - k^- - \frac{f_4 - i\epsilon}{P^+ - k^+})} \times \\ &\times \frac{1}{(P'^- - k^- - \frac{f_5 - i\epsilon}{P'^+ - k^+})} , \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde $k^- = \frac{k_\perp^2 + m_{\bar{q}}^2}{k^+} = f_1/k^+$.

Após a integração em k^- os fatores de forma eletromagnéticos são:

$$\begin{aligned} F_{\bar{q}}^{-(I)}(q^2) &= e_q \frac{N^2 g^2 N_c}{P^+} \times \\ &\times \int \frac{d^2 k_\perp dx}{2(2\pi)^3 x} \left[-4 \left(\frac{f_1^2}{xP^+} - \frac{f_1 k_\perp^2}{xP^+} - 2f_1P^+ + 2k_\perp^2P^+ + xP^{+3} - \frac{f_1 q^2}{4xP^+} \right) \right. \\ &- \left. \frac{4f_1 m_q^2}{xP^+} + 8 \left(\frac{f_1}{xP^+} - P^+ \right) m_q m_{\bar{q}} \right] \theta(x) \theta(1-x) \Phi_q^{*f}(x, k_\perp) \Phi_{\bar{q}}^i(x, k_\perp) . \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$F_q^{-(I)}(q^2) = [q \leftrightarrow \bar{q} \text{ em } F_{\bar{q}}^{-(I)}(q^2)] . \quad (5.20)$$

Quando se usa J^- para se obter o fator de forma eletromagnético, além da contribuição do intervalo (I), temos a contribuição do termo de par no intervalo (II) ($P^+ < k^+ < P'^+$) para o fator de forma eletromagnético. A contribuição do termo de par para o fator de forma, como mostrado em [3, 10, 6, 12], é dada por $F^{-(II)}(q^2)$

$$F^{-(II)}(q^2) = \frac{N^2 g^2 N_c}{P^+} \left[e_q \Delta_q^{-(II)}(q^2) + e_{\bar{q}} \Delta_{\bar{q}}^{-(II)}(q^2) \right] , \quad (5.21)$$

onde $\Delta_q^{-(II)}$ e $\Delta_{\bar{q}}^{-(II)}$ serão dadas à seguir. Estes termos correspondem a contribuição de pares na componente J^- da corrente eletromagnética, a qual é obtida após integração de Cauchy em k^- e do limite $P'^+ \rightarrow P^+$ ser feito. Então, temos a seguinte equação para os termos de par [13]

$$\Delta_{\bar{q}}^{-(II)} = \frac{-1}{4\pi^3} \int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^4} \mathcal{N}_{\bar{q}}^{-(II)} \sum_{i=2}^5 \frac{\ln(f_i)}{\prod_{j=2, i \neq j}^5 (f_j - f_i)} , \quad (5.22)$$

onde $f_2 \equiv f_{2,q}$, $f_3 \equiv f_{3,q}$ e

$$\mathcal{N}_{\bar{q}}^{-(II)} = \frac{-1}{P^+} \left[P^{+2} + \frac{q^2}{4} - (m_q - m_{\bar{q}})^2 \right] . \quad (5.23)$$

Obtemos a contribuição da corrente de quark correspondente como nas equações acima (5.22) e (5.23) somente substituindo $q \leftrightarrow \bar{q}$.

No limite $P'^+ \rightarrow P^+$, a contribuição do termo de par é diferente de zero. A soma das contribuições para os intervalos (I) e (II) para J_K^- na frente de luz dá o mesmo resultado que nos cálculos covariantes [12, 13]. A expressão final para o fator de forma eletromagnético para o káon, obtido de J_K^- é

$$F_{K^+}^-(q^2) = [F_q^{-(I)}(q^2) + F_{\bar{q}}^{-(I)}(q^2) + F^{-(II)}(q^2)] , \quad (5.24)$$

a qual é normalizada pela conservação de carga, $F_{K^+}^-(0) = 1$.

O cálculo do fator de forma eletromagnético na frente de luz considerando J^+ , e J^- com e sem termo de par adicionado (ver apêndice B para melhor explicação sobre os métodos de cálculo utilizados) é apresentado à seguir. Foram adicionados ao gráfico feito por nós os dados experimentais extraídos da Ref. [35]

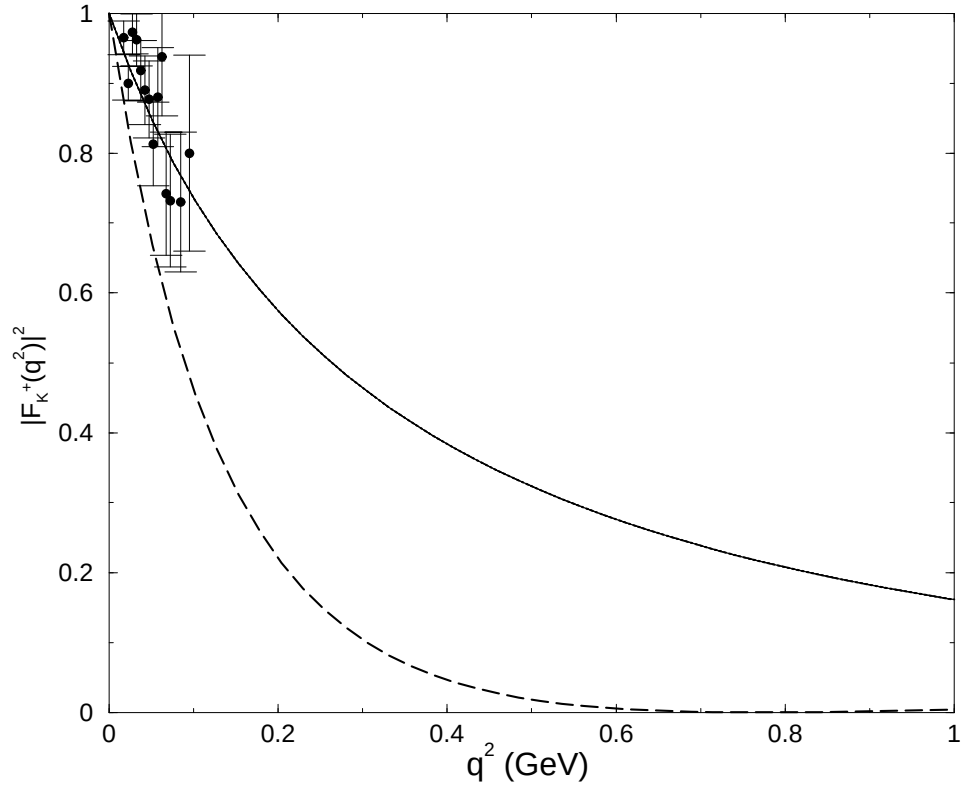


Figura 5.1: Fator de forma do káon (K^+) calculado nos formalismos covariante e da frente de luz com J^+ e J^- . as linhas pontilhadas dão os resultados de J^- sem o termo de par da frente de luz. A linha sólida dá os resultados, quando adicionamos o termo de par a J^- , o que faz com que coincida com os cálculos feitos no formalismo covariante e da frente de luz para J^+ . Os dados experimentais vêm da referência [35].

5.3 Constante de Decaimento do Káon

A constante de decaimento f_K é medida no decaimento leptônico fraco do káon carregado, seguindo como exemplo [16]

$$k^+(q) \rightarrow \mu^+(P) \nu_\mu(k) \quad (5.25)$$

e aparece no elemento de matriz da corrente vetorial parcialmente conservada [3, 5]

$$P_\mu < 0 | A_i^\mu | k_j > = i m_K^2 f_K \delta_{ij} \quad . \quad (5.26)$$

Na conservação parcial da corrente axial vetorial (PCAC), assim como mostrado no capítulo 2, a constante de decaimento (f_K) é expressa pelos elementos de matriz de [5]

$$A_i^\mu = \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 \frac{\tau_i}{2} q \quad , \quad (5.27)$$

e usando a Lagrangeana de interação Eq. (4.12) para a função de vértice $\bar{q}q$ do pión. Deste modo obtemos

$$P_\mu < 0 | \bar{q} \gamma^\mu \gamma^5 \tau_i q | k_j > = 2 i P_K^2 \delta_{ij} \quad , \quad (5.28)$$

que governa o decaimento leptônico do káon carregado via a corrente axial. Neste modelo, temos

$$i P^2 f_K = \frac{m_q}{f_K} N_c \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\not{P} \gamma^5 S(\not{P} - \not{k} + m_{\bar{q}}) \gamma^5 S(\not{k} + m_q) \right] \quad , \quad (5.29)$$

onde o traço desta última equação foi calculado (ver apêndice B), como

$$\text{Tr}_{f_K} [\dots] = -4 m_K^2 (2m_q - m_{\bar{q}}) \quad . \quad (5.30)$$

Após calcular o traço no centro de massa do

$$\begin{aligned} i m_K^2 f_K &= N \frac{m_q}{f_K} N_c \int \frac{d^2 k_\perp dk^+ dk^-}{2 (2\pi)^4} \frac{-4 m_K^2 (2m_q - m_{\bar{q}})}{k^+ (P^+ - k^+) (k^- - \frac{f_1 - i\epsilon}{k^+}) (P^- - k^- - \frac{f_2 - i\epsilon}{P^+ - k^+})} \times \\ &\times \frac{1}{(P^- - k^- - \frac{f_4 - i\epsilon}{P^+ - k^+})} \quad , \end{aligned} \quad (5.31)$$

onde N é constante de normalização da função de onda. Fazendo a integração de Cauchy em k^- , chegaremos a

$$f_K^2 = NN_c \int \frac{d^2 k_\perp dk^+}{(2\pi)^3} \frac{2 m_q (2m_q - m_{\bar{q}}) \Theta(k^+) \Theta(P^+ - k^+)}{k^+ (P^+ - k^+) (P^- - \frac{f_1}{P^+} - \frac{f_2}{P^+ - k^+}) (P^- - \frac{f_1}{P^+} - \frac{f_4}{P^+ - k^+})} . \quad (5.32)$$

Em termos do modelo da função de onda do cone de luz, obteremos como uma expressão final para a constante de decaimento f_K

$$f_K^2 = N_c \int \frac{d^2 k_\perp dx}{(2\pi)^3} \frac{2 m_q (2m_q - m_{\bar{q}})}{x} \Phi(x, k_\perp) . \quad (5.33)$$

Com o modelo utilizado para a função de onda do káon na frente de luz [12, 13], reproduzimos de uma maneira satisfatória o raio deste méson, o que nos leva a ter também um acordo com a constante de decaimento do káon, a qual é $f_K = 112.4 \pm 1.0 \pm 0.3 \text{ MeV}$ [36].

5.4 Conclusão

Os parâmetros do modelo são as massas dos quarks constituintes $m_q = m_u = 0.220 \text{ GeV}$ e $m_{\bar{q}} = m_{\bar{s}} = 0.419 \text{ GeV}$, e a massa reguladora $M_R = 0.946 \text{ GeV}$, que é ajustada para fitar o raio eletromagnético do káon. Sendo o raio (raio quadrático médio) do káon relacionado com o fator de forma do káon, dado por [27]:

$$\langle r_{k^+}^2 \rangle = 6 \left[\frac{dF_{k^+}(q^2)}{dq^2} \right]_{q^2=0} . \quad (5.34)$$

Utilizando-se ainda os parâmetros citados acima, calculamos (numericamente) o raio eletromagnético do káon $\langle r_{k^+}^2 \rangle = 0.354 fm^2$, que é muito próximo ao raio experimental $\langle r_{k^+}^2 \rangle_{exp} = 0.340 fm^2$ [35]. O fator de forma eletromagnético é mostrado na figura 5.1. Devido ao fato de que J_K^+ não têm a contribuição do termo de par, os fatores de forma calculados nas Eq. (5.8) são iguais aos obtidos nos cálculos do formalismo covariante. No caso de J_K^- , os cálculos na frente de luz das Eqs. (5.20) são diferentes dos resultados obtidos no formalismo covariante, como mostra a Fig.5.1. Após a inclusão do termo de par no fator de forma calculado com J_K^- , a Eq. (5.24), fica em completo acordo entre os cálculos no formalismo da frente de luz e do covariante. Concluindo, as componentes J_K^+ e J_K^- da corrente eletromagnética para o káon são obtidas nos formalismos da frente de luz e no covariante, no modelo de quarks constituintes. No caso de J_K^- , a inclusão do termo de par é essencial para obter a concordância entre os cálculos do fator de forma eletromagnético nos formalismos da frente de luz e no covariante [12, 13]. Similarmente,

utilizando o mesmo modelo de função de onda da frente de luz, o raio para o káon foi obtido com resultados satisfatórios em relação aos resultados experimentais [35].

Capítulo 6

Conclusões

O objetivo principal de nosso trabalho foi realizar um estudo dos fatores de forma eletromagnéticos de partículas compostas no plano-nulo, que no nosso caso foram os dois mésons pseudo-escalares, o pión e o káon.

No capítulo 3 introduzimos o formalismo da frente de luz, apresentando seus vários aspectos, tais como suas coordenadas, sua métrica, produto escalar, volume de integração e como devemos formular os spinors de Dirac na frente de luz. Discutimos também neste capítulo as conexões entre o formalismo da frente de luz e o formalismo covariante, principalmente no caso de campos escalares, que é justamente o caso das duas partículas que estudamos neste trabalho, o pión e o káon.

No capítulo 4, estudamos o pión, como sendo um estado ligado do par quark-antiquark constituintes, com uma Lagrangiana efetiva de interação.

Com este modelo, calculamos as componentes J_π^+ e J_π^- para a corrente eletromagnética.

No caso da componente J_π^+ da corrente eletromagnética do pión, mostramos que apesar de existir um termo proporcional a k^- no elemento de matriz, que conforme a nossa classificação é um termo “ruim”, não temos a contribuição de par, pois este termo tem contribuição zero para os elementos de matriz.

Para a componente J_π^- , temos no elemento de matriz termos proporcionais a k^- e k^{-2} , levando-se a se ter contribuição dos termos de par. Calculando-se as contribuição dos termos de par para o formalismo da frente de luz se obtêm o mesmo resultado que no formalismo covariante. Deste modo, a covariância para esta componente da corrente eletromagnética do pión é restaurada com a inclusão da contribuição do processo de par no referencial de Breit com $q^+ = 0$.

Como visto, no caso de não se ter a quebra da simetria rotacional que é um aspecto da covariância, o cálculo do fator de forma eletromagnético do pión, é independente da componente da corrente utilizada. Mas no formalismo da frente de

luz, a simetria rotacional é quebrada, quando não levamos em conta a contribuição dos termos de par. Concluimos que temos que levar em conta os termos de par no formalismo da frente de luz, para calcular o fator de forma eletromagnético do pión independente da componente da corrente, sendo isto essencial para se ter a simetria rotacional respeitada.

Em seguida calculamos neste modelo a constante de decaimento do pión, f_π , e mostramos que para este observável não temos a contribuição dos termos de par no formalismo da frente de luz.

Em conclusão, para o caso do pión, a inclusão da contribuição dos termos de par é necessária para se ter o reestabelecimento da covariância quando utilizamos o formalismo da frente de luz.

No capítulo 5, estudamos o káon, que assim como o pión, também é uma partícula pseudo-escalar e também é um estado ligado do par quark-antiquark constituintes, com uma Lagrangiana efetiva de interação. Com este modelo, calculamos as componentes J_k^+ e J_k^- para a corrente eletromagnética.

No caso da componente J_k^+ da corrente eletromagnética do káon, mostramos que apesar de existir um termo proporcional a k^- no elemento de matriz, que conforme a nossa classificação é um termo “ruim”, não temos a contribuição dos termos de par, pois estes termos têm como resultado zero; semelhantemente ao caso do pión. Notamos também, que se fizermos $m_q = m_{\bar{q}}$ na expressão final calculada para a componente J_k^+ , chegaremos a mesma expressão para a componente J_π^+ do pión.

Para a componente J_k^- , também temos no elemento de matriz termos proporcionais a k^- e k^{-2} , levando-se a ter contribuição dos termos de par. Calculando-se a contribuição dos termos de par, que vêm destes termos no formalismo da frente de luz, temos o mesmo resultado tanto no formalismo da frente de luz, como no formalismo covariante. Deste modo, a covariância para esta componente da corrente eletromagnética do káon, semelhantemente a do pión, é restaurada com a inclusão da contribuição do processo de termos de par no referencial de Breit com $q^+ = 0$. Novamente notamos, que se fizermos $m_q = m_{\bar{q}}$ na expressão final calculada para a componente J_k^- , chegaremos a mesma expressão para a componente J_π^- do pión.

Concluimos que para o káon, também temos que levar em conta os termos de par no formalismo da frente de luz, para calcular o fator de forma eletromagnético do káon independente da componente da corrente eletromagnética, sendo isto essencial para se ter a simetria rotacional restaurada.

Em seguida calculamos neste modelo a constante de decaimento do káon f_k . Novamente, se fizermos $m_q = m_{\bar{q}}$ na expressão final calculada f_k , chegaremos a mesma expressão para a constante de decaimento f_π do pión.

Em conclusão, para o caso do káon, a inclusão da contribuição dos termos de

par, também é necessária para se ter o reestabelecimento da covariância quando utilizamos o formalismo da frente de luz.

Concluindo, foram calculados o fator de forma eletromagnético para as componentes J_{π}^{+} e J_{π}^{-} da corrente eletromagnética do pión e o fator de forma eletromagnético para as componentes J_k^{+} e J_k^{-} da corrente eletromagnética do káon, no formalismo da frente de luz, utilizando o nosso modelo de função de onda, levando-se em conta os termos de par, chegamos a resultados bem satisfatórios em comparação aos dados experimentais. Da mesma forma, utilizando o mesmo modelo de função de onda, calculamos a constante de decaimento e o raio para o pión e o káon, também obtendo bons resultados em comparação com os dados experimentais.

Apêndice A

Cálculos do Píon

A.1 Cálculos dos Traços das Componentes J_π^+ e J_π^-

Nesta seção serão feitos os cálculos para os traços das componentes j_π^+ e j_π^- da corrente eletromagnética para o píon na frente de luz. Os cálculos para os traços foram feitos no referencial de Breit, onde $q^+ = 0$; e o quadrimomento é $P^\mu = (P^0, -q_x/2, 0, 0)$ para o estado inicial e $P'^\mu = (P^0, q_x/2, 0, 0)$ para o estado final; sendo $P^0 = \sqrt{m_\pi^2 + q_x^2/4}$.

O traço de Dirac, escrito nas coordenadas do cone de luz é dado por

$$Tr_\pi^+ = Tr \left[(\not{k} + m) \gamma^5 (\not{k} - \not{P}' + m) \gamma^\mu (\not{k} - \not{P} + m) \gamma^5 \right] . \quad (\text{A.1})$$

Utilizando as propriedades das matrizes γ de Dirac,

$$\gamma^\mu \gamma^5 + \gamma^5 \gamma^\mu = 0 , \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} Tr[\not{P} \gamma^\mu] &= Tr[\gamma^\nu P_\nu \gamma^\mu] , \\ P_\nu Tr[\gamma^\nu \gamma^\mu] &= 4g^{\mu\nu} P_\nu = 4P^\mu , \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

e

$$\begin{aligned} Tr[\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}] &= ab Tr[\not{c} \not{d}] - ac Tr[\not{b} \not{d}] + ad Tr[\not{b} \not{c}] \\ &= 4abcd - 4acbd + 4adbc . \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Utilizando também a propriedade de que o traço de um número ímpar de matrizes γ é zero, chegaremos ao resultado final para o traço da eq.(A.1), no formalismo covariante

$$Tr_{J_\pi} = 4 \left[(m^2 - k^2 + PP')k^\mu + (k^2 - m^2 - kP')P^\mu + (k^2 - m^2 - kP)P'^\mu \right] . \quad (\text{A.5})$$

Para passarmos do formalismo covariante para o da frente de luz, basta tomarmos as coordenadas do cone de luz $P^+ = P^0 + P^3$, $P^- = P^0 - P^3$ e $P^\perp = (P^x, P^y)$ no referencial de Breit, $q^+ = 0$, sendo que $P^\mu = (P^0, -q_x/2, 0, 0)$ para o estado inicial e $P'^\mu = (P^0, +q_x/2, 0, 0)$ para o estado final, sendo ainda, $P^0 = \sqrt{m_\pi^2 + q^2}/4$.

Com estas definições, calculamos agora esse último traço para para as componentes J_π^+ e J_π^- da corrente eletromagnética do pión. Primeiramente, calculamos o traço para a componente J_π^+

$$\begin{aligned} Tr_{J_\pi^+} &= 4((m^2 - k^+k^- + k_\perp^2 + P^+P'^- - P_\perp P'_\perp)k^+ \\ &\quad + (k^+k^- - k_\perp^2 - m^2 - k^+P'^- + k_\perp P'_\perp)P^+ \\ &\quad + (k^+k^- - k_\perp^2 - m^2 - k^+P^- + k_\perp P_\perp)P'^+) \\ &= 4(m^2k^+ - k^-(k^+)^2 + k_\perp^2k^+ + P^+P'^-k^+ + k^+\frac{q^2}{4} \\ &\quad + k^+k^-P^+ - k_\perp^2P^+ - m^2P^+ - k^+P'^+P^+ + k_\perp P'_\perp P^+ \\ &\quad + k^+k^-P'^+ - k_\perp^2P'^+ - m^2P'^+ - k^+P^-P'^+ + k_\perp P_\perp P'^+) \\ &= 4(-k^-(k^+)^2 - 2k^+P^+ + P'^2) + (k_\perp^2 + m^2)K^+ \\ &\quad - 2P^+(k_\perp^2 + m^2) + k^+\frac{q^2}{4} \\ &= -4k^-(k^+ - P^+)^2 + 4(k_\perp^2 + m^2)(k^+ - 2P^+) + k^+q^2 , \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

onde usamos o fato de que no referencial de Breit $P'_\perp = -P_\perp$, $P'^+ = P^+$, $P'^- = P^-$.

Para a componente J_π^- , teremos

$$\begin{aligned} Tr[J_\pi^-] &= 4((m^2 - k^+k^- + k_\perp^2 + P^+P'^- - P_\perp P'_\perp)k^- \\ &\quad + (k^+k^- - k_\perp^2 - m^2 - k^+P'^- + k_\perp P'_\perp)P^- \\ &\quad + (k^+k^- - k_\perp^2 - m^2 - k^+P^- + k_\perp P_\perp)P'^-) \\ &= 4(m^2k^- - k^+k^{-2} + k_\perp^2k^- + P^+P'^-k^- + k^-q^2/4 \\ &\quad + k^+k^-P^+ - k_\perp^2P^- - m^2P^- - k^+P'^+P^- + k_\perp P'_\perp P^- \\ &\quad + k^+k^-P'^- - k_\perp^2P'^- - m^2P'^- - k^+P^-P'^- + k_\perp P_\perp P'^-) \\ &= -4k^{-2}k^+ + 4P^+(-2k_\perp^2P^+ - k^+P^+P^+ - 2m^2P^+) \\ &\quad + 4(k_\perp^2k^- + 2k^-k^+P^+ + \frac{q^2}{4}k^- + m^2k^-) \\ &= -4k^{-2}k^+ - 4P^+(2k_\perp^2 + k^+P^+ + 2m^2) \\ &\quad + k^-(4k_\perp^2 + 8k^+P^+ + q^2 + 4m^2) . \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

onde também usamos o fato de que no referencial de Breit $P'_\perp = -P_\perp$, $P'^+ = P^+$, $P'^- = P^-$.

A.2 Cálculo do Traço de f_π

Considerando o traço para f_π , utilizado no capítulo 4

$$Tr_{f_\pi}[\dots] = Tr \left[\not{P} \gamma^5 (\not{P} - \not{k} + m) \gamma^5 (\not{k} + m) \right] \quad . \quad (\text{A.8})$$

Para calculá-lo, primeiramente vamos considerar a propriedade $\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu$, então a eq.(A.8) ficará

$$\begin{aligned} Tr_{f_\pi}[\dots] &= -Tr \left[\not{P} (\gamma^5)^2 (\not{P} - \not{k} + m) (\not{k} + m) \right] \\ &= -Tr \left[\not{P} (\not{P} - \not{k} + m) (\not{k} + m) \right] \\ &= -Tr \left[\not{P} \not{P} - \not{P} \not{k} + \not{P} m \right] (\not{k} + m) \\ &= -Tr \left[\not{P} \not{P} \not{k} + \not{P} \not{P} m - \not{P} \not{k} \not{k} - \not{P} \not{k} m + m^2 \not{P} \right] \quad . \end{aligned}$$

Utilizando o fato de que o traço de um número ímpar de matrizes γ é zero, chegaremos então a

$$\begin{aligned} Tr_{f_\pi}[\dots] &= -Tr [\not{P} \not{P} m] \\ &= -m Tr [\gamma^\mu \gamma_\mu P^\mu P_\mu] \quad . \end{aligned}$$

Do fato de $\gamma^\mu \gamma_\mu = 1$, que $P^\mu P_\mu = P^2$ e de que $P^2 = m_\pi^2$; chegamos finalmente a:

$$Tr_{f_\pi}[\dots] = -4mP^2 = -4mm_\pi^2 \quad . \quad (\text{A.9})$$

Que foi o resultado utilizado no capítulo 4.

Apêndice B

Cálculos do Káon

B.1 Cálculos dos Traços das Componentes J_K^+ e J_K^-

Nesta seção serão feitos os cálculos para os traços das componentes J_K^+ e J_K^- da corrente eletromagnética para o pión na frente de luz. Os cálculos para os traços foram feitos no referencial de Breit, onde $q^+ = 0$; e o quadri-momento é $P^\mu = (P^0, -q_x/2, 0, 0)$ para o estado inicial e $P'^\mu = (P^0, q_x/2, 0, 0)$ para o estado final, sendo $P^0 = \sqrt{m_\pi^2 + q_x^2/4}$.

Para o káon é necessário fazer a soma de dois diagrams de Feynman para que haja conservação de carga dos quarks, por isso será necessário fazer o cálculo do dois traços separadamente e depois somá-los para obter o traço resultante, que é o traço resultante da soma dos dois traços

$$Tr_{J_\mu}^{kaon}[\dots] = \frac{2}{3}Tr[1] + \frac{1}{3}Tr[2] \quad , \quad (B.1)$$

onde os fatores 1/3 e 2/3 são fatores de isospin que somados dão a conservação da carga. Calculando explicitamente os traços 1 e 2

$$\begin{aligned} Tr[1] &= \left[\gamma^5 (\not{k} - \not{P} + m_u) \gamma^\mu (\not{k} - \not{P}' + m_u) \gamma^5 (\not{k} + m_{\bar{s}}) \right] \quad , \\ Tr[2] &= \left[\gamma^5 (\not{k} - \not{P} + m_{\bar{s}}) \gamma^\mu (\not{k} - \not{P}' + m_{\bar{s}}) \gamma^5 (\not{k} + m_u) \right] \quad . \end{aligned} \quad (B.2)$$

Utilizando as propriedades das matrizes γ de Dirac

$$\gamma^\mu \gamma^5 + \gamma^5 \gamma^\mu = Tr[\not{P} \gamma^\mu] = Tr[\gamma^\nu P_\nu \gamma^\mu] = P_\nu Tr[\gamma^\nu \gamma^\mu] = 4g^{\mu\nu} P_\nu = 4P^\mu \quad , \quad (B.3)$$

e

$$\begin{aligned} Tr[\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}] &= abTr[\not{c}\not{d}] - acTr[\not{b}\not{d}] + adTr[\not{b}\not{c}] \\ &= 4abcd - 4acbd + 4adbc \quad . \end{aligned} \quad (B.4)$$

Utilizando também a propriedade de que o traço de um número ímpar de matrizes γ é zero, chegaremos ao resultado final para o traço da eq.(A.1), no formalismo covariante

$$\begin{aligned} Tr_{\text{cov}}[1] &= 4(k^2 - m_q m_{\bar{q}} - kP')P^\mu + (2m_q m_{\bar{q}} - m_q^2 - k^2 + PP')k^\mu \\ &\quad + (k^2 - m_q m_{\bar{q}} - kP)P'^\mu \quad , \end{aligned} \quad (B.5)$$

e

$$\begin{aligned} Tr_{\text{cov}}[2] &= 4(k^2 - m_q m_{\bar{q}} - kP')P^\mu + (2m_q m_{\bar{q}} - m_q^2 - k^2 + PP')k^\mu \\ &\quad + (k^2 - m_q m_{\bar{q}} - kP)P'^\mu \quad . \end{aligned} \quad (B.6)$$

Somando os dois traços:

$$\begin{aligned} Tr_{\text{káon}}^{\text{cov}} &= \frac{2}{3}Tr[1]_{\text{cov}} + \frac{1}{3}Tr[2]_{\text{cov}} \\ &= 4(k^2 - m_q m_{\bar{q}} - kP')P^\mu + (2m_q m_{\bar{q}} - m_q^2 - k^2 + PP')k^\mu \\ &\quad + (k^2 - m_q m_{\bar{q}} - kP)P'^\mu \quad . \end{aligned}$$

Para passarmos do formalismo covariante para o da frente de luz, basta tomarmos as coordenadas do cone de luz $P^+ = P^0 + P^3$, $P^- = P^0 - P^3$ e $P^\perp = (P^x, P^y)$ no referencial de Breit, $q^+ = 0$, sendo que $P^\mu = (P^0, -q_x/2, 0, 0)$ para o estado inicial e $P'^\mu = (P^0, +q_x/2, 0, 0)$ para o estado final, sendo ainda, $P^0 = \sqrt{m_\pi^2 + q^2/4}$. Precisaremos também da definição do produto escalar no formalismo da frente de luz $x.y = \frac{x^+y^- + x^-y^+}{2} - x^\perp.y^\perp$.

Com de todas essas definições, calcularemos agora esse último traço para para as componentes J_K^+ e J_K^- da corrente eletromagnética do pión. Primeiramente, calculamos o traço para a componente J_K^+

$$\begin{aligned} Tr_{J_K^+}^{FL}[\dots] &= 4((2m_q m_{\bar{q}} - m_q^2 - k^+k^- + k_\perp^2 + P^+P'^- - P_\perp P'_\perp)k^+ \\ &\quad + (k^+k^- - k_\perp^2 - m_q m_{\bar{q}} - k^+P'^- + k_\perp P'_\perp)P^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(k^+k^- - k_\perp^2 - m_q m_{\bar{q}} - k^+P^- + k_\perp P_\perp)P'^+ \\
= & 4(m_q^2 k^+ - k^-k^{+2} + k_\perp^2 k^+ + P^+P'^-k^+ + k^+q^2/4 \\
& +k^+k^-P^+ - k_\perp^2 P^+ - m_q m_{\bar{q}} P^+ - k^+P'^+P^+ + k_\perp P'_\perp P^+ \\
& +k^+k^-P'^+ - k_\perp^2 P'^+ - m_q m_{\bar{q}} P'^+ - k^+P^-P'^+ + k_\perp P_\perp P'^+) \\
= & 4(k^-k^{+2} - 2k^-k^+P^+ - k^-P^{+2} + 2k_\perp^2 P^+ + k^+ \frac{q^2}{4} - k^+m_q \\
& +2m_q m_{\bar{q}}(k^+ - P^+)) \\
= & -4(k^-k^{+2} - k^+k_\perp^2 - 2k^-k^+P^+ - k^-P^{+2} + 2k_\perp^2 P^+ - k^+q/4) \\
& -4k^+m_q^2 + 8(k^+ - P^+)m_q m_{\bar{q}} \quad . \tag{B.7}
\end{aligned}$$

Então efetuando os cálculos para o traço total do kaon, através da soma dos traços $\text{Tr}[1]$ e $\text{Tr}[2]$, obtivemos para a componente J_k^+ nas coordenadas da frente de luz [12]

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{J_k^+}[\dots] = & -4 \left(k^-k^{+2} - k^+k_\perp^2 - 2k^-k^+P^+ - k^-P^{+2} + 2k_\perp^2 P^+ - k^+q/4 \right) \\
& -4k^+m_q^2 + 8(k^+ - P^+)m_q m_{\bar{q}} \quad . \tag{B.8}
\end{aligned}$$

Agora vamos calcular o traço resultante para a componente J_k^- da corrente eletromagnética para o káon

$$\begin{aligned}
\text{Tr}_{J_k^-}^{FL}[\dots] = & 4((2m_q m_{\bar{q}} - m_q^2 - k^+k^- + k_\perp^2 + P^+P'^- - P_\perp P'_\perp)k^- \\
& +(k^+k^- - k_\perp^2 - m_q m_{\bar{q}} - k^+P'^- + k_\perp P'_\perp)P^- \\
& +(k^+k^- - k_\perp^2 - m_q m_{\bar{q}} - k^+P^- + k_\perp P_\perp)P'^-) \\
= & 4(m_q^2 k^- - k^+k^{-2} + k_\perp^2 k^- + P^+P'^-k^- + k^-q^2/4 \\
& +k^+k^-P^+ - k_\perp^2 P^- - m_q m_{\bar{q}} P^- - k^+P'^+P^- + k_\perp P'_\perp P^- \\
& +k^+k^-P'^- - k_\perp^2 P'^- - m_q m_{\bar{q}} P'^- - k^+P^-P'^- + k_\perp P_\perp P'^-) \\
= & 4(-k^{-2}k^+ + k^-k_\perp^2 + 2k^-k^+P^+ + 2k_\perp^2 P^+ - k^+P^{+2} + k^- \frac{q^2}{4}) \\
& -4k^-m_q^2 + 4(2m_q m_{\bar{q}} k^- - 2m_q m_{\bar{q}} P^+) \\
= & -4 \left(k^{-2}k^+ - k^-k_\perp^2 - 2k^-k^+P^+ + 2k_\perp^2 P^+ + k^+P^{+2} - k^-q^2/4 \right) \\
& -4k^{-2}m_q^2 + 8(k^- - P^+)m_q m_{\bar{q}} \quad . \tag{B.9}
\end{aligned}$$

Então efetuando os cálculos para o traço total do kaon, através da soma dos traços $\text{Tr}[1]$ e $\text{Tr}[2]$, obtivemos para a componente J_K^+ nas coordenadas da frente de luz [12]:

$$\begin{aligned}
Tr_{J_k^-}[\dots] &= -4 \left(k^{-2} k^+ - k^- k_\perp^2 - 2k^- k^+ P^+ + 2k_\perp^2 P^+ + k^+ P^{+2} - k^- q^2/4 \right) \\
&\quad - 4k^{-2} m_{\bar{q}}^2 + 8(k^- - P^+) m_q m_{\bar{q}} \quad .
\end{aligned} \tag{B.10}$$

B.2 Cálculo do Traço de f_K

Considerando o traço para f_K , utilizado no capítulo 5

$$Tr_{f_K}[\dots] = Tr \left[\not{P} \gamma^5 (\not{P} - \not{k} + m_{\bar{q}}) \gamma^5 (\not{k} + m_q) \right] \quad . \tag{B.11}$$

Para calculá-lo, primeiramente vamos considerar a propriedade $\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu$, então a eq.(B.11) ficará

$$\begin{aligned}
Tr_{f_K}[\dots] &= -Tr \left[\not{P} (\gamma^5)^2 (\not{P} - \not{k} + m_{\bar{q}}) (\not{k} + m_q) \right] \\
&= -Tr \left[\not{P} (\not{P} - \not{k} + m_{\bar{q}}) (\not{k} + m_q) \right] \\
&= -Tr \left[\not{P} \not{P} - \not{P} \not{k} + \not{P} m_{\bar{q}} \right] (\not{k} + m_q) \\
&= -Tr \left[\not{P} \not{P} \not{k} + \not{P} \not{P} m_q - \not{P} \not{k} \not{k} - \not{P} \not{k} m_q + \not{P} \not{k} m_{\bar{q}} m_q \not{P} \right] \quad ,
\end{aligned}$$

utilizando o fato de que o traço de um número ímpar de matrizes γ é zero, chegaremos então a

$$\begin{aligned}
Tr_{f_K}[\dots] &= -Tr \left[\not{P} \not{P} m_q + (m_{\bar{q}} - m_q) \not{P} \not{k} \right] \\
&= -m_q Tr \left[\gamma^\mu \gamma_\mu P^\mu P_\mu \right] - (m_{\bar{q}} - m_q) Tr \left[\gamma^\mu \gamma_\nu P^\mu k_\nu \right] \quad .
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Utilizando o fato de que $\gamma^\mu \gamma_\mu = 1$, que $P^\mu P_\mu = P^2$ e de que $P^2 = m_k^2$, chegaremos finalmente a

$$\begin{aligned}
Tr_{f_K}[\dots] &= -4m_q P^2 - 4(m_{\bar{q}} - m_q) P \cdot k \\
&= -4 \left(m_q m_k^2 + (m_{\bar{q}} - m_q) P \cdot k \right) \quad .
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Agora iremos passar para as coordenadas da frente de luz, novamente utilizando o referencial de Breit $q^+ = q^- = q_y = 0$, $q_x \neq 0$. Considerando ainda $P^2 = m_k^2$ a última equação será

$$\begin{aligned}
Tr_{f_K}[\dots] &= -4 \left(m_q m_k^2 + (m_{\bar{q}} - m_q) P.(-P) \right) \\
&= -4 \left(m_q m_k^2 - (m_{\bar{q}} - m_q) (P)^2 \right) \\
&= -4 \left(m_q m_k^2 - (m_{\bar{q}} - m_q) m_k^2 \right) \\
&= -4 m_k^2 (m_q - (m_{\bar{q}} - m_q)) \\
&= -4 m_k^2 (2m_q - m_{\bar{q}}) \quad .
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Que foi o resultado utilizado por nós no capítulo 5.

Referências

- [1] H.Leutwyler e J. Stern, Ann.Phys. **112** 94 (1978).
- [2] C. Itzykson e Jean-Bernard Zuber, “Quantum Field Theory”, (McGraw-Hill, Inc. 1980).
- [3] J. P. B. C. de Melo, Tese de Doutorado: *Covariância na Frente de luz*, IFUSP (1998).
- [4] P.A.M.Dirac, Rev. Mod. Phy. **21** 392 (1949).
- [5] T. Frederico, G. A. Miller, Phys. Rev. D **45**, 4207 (1992).
- [6] J.P.B.C. de Melo, J.H.O. Sales, T. Frederico, P.U. Sauer, Nucl. Phys. A **631** 574c (1998).
- [7] T. Frederico, G. A. Miller, Phys. Rev. D **50**, 210 (1994).
- [8] W. R. B. Araújo, J. P. B. C. de Melo e T. Frederico, Phys. Rev. C **52**, 2733 (1995).
- [9] A. Harindranath, hep-ph/9612244.
- [10] J. P. B. C. de Melo, H. W. L. Naus, T. Frederico, Phys. Rev. C **59**, 2278 (1999).
- [11] J. P. B. C. de Melo, hep-ph/0507265 (2005).
- [12] J.P.B.C. de Melo, Lauro Tomio e T. Frederico, hep-ph/0207198 (2002).
- [13] F. P. Pereira, J.P.B.C. de Melo, T. Frederico, L. Tomio, hep-ph/0506032 (2005). Aceito para publicação no “Physics of Atomic Nuclei”, 2005.
- [14] D.E. Kharzeev e J. Raufeisen, Nucl-th/0206073, (2002).
- [15] K. Huang, “*Quarks, Leptons and Gauge Fields*”, (Word Scientific, Singapore 1982).

- [16] Francis Halzen e Alan D. Martin, “*Quarks and Leptons: An Introductory Course in Particle Physics*”, (ed. John Wiley and Sons 1984).
- [17] T.P. Cheng e L.F. Li, “*Gauge Theory of Elementary Particle Physics*”, (Oxford University Press 1984).
- [18] S. Godfrey and N. Isgur, Phys. Rev. D **32**, 189 (1985).
- [19] J.M.Namylowski, Progress in Particle and Nuclear Physics **14**, 49 (1985).
- [20] R.Dashen Phys. Rev. **183** 1245 (1969).
- [21] H. W. L. Naus, J. P. B. C. de Melo, T. Frederico, Few Body Syst. **24**, 99 (1998).
- [22] M. Gell-Mann, R.J.Oakes, B. Renner, Phys. Rev. **175**, 2195 (1968).
- [23] W. Greiner e J. Reinhardt, “*Quantum Eletrodynamics*”, (Springer; 2^a edição 1994).
- [24] W. Greiner, “*Relativistic Quantum Mechanics*”, (Springer; 2^a edição 1994).
- [25] J.P.B.C. de Melo, T. Frederico, E. Pace, G. Salmè, Nucl. Phys. A **707**, 399 (2002).
- [26] J. P. B. C. de Melo, T. Frederico, Phys. Rev. C **55**, 2043 (1997).
- [27] Scadron M. D., Rupp G., Kleefeld F., Van Beveren, Phys. Rev. D **69** 014010 (2005).
- [28] S. J. Brodsky, H. C. Pauli e S. S. Pinsky, Phys. Rept. **301** 299 (1998).
- [29] L.J. Bebek et al., Phy. Rev. D **13**, 1693 (1978).
- [30] G. Krein, A. W. Thomas e A. G. Williams, Phys. Lett. B **317** 293 (1993).
- [31] H. B. O’Connell, B. C. Pearce, A. W. Thomas e A. G. Williams, Phys. Lett. B **354**, 14 (1995).
- [32] H. B. O’Connell et al., Progr. Part. Nucl. Phys. **39**, 2001 (1997).
- [33] J. Volmer et al., Phys. Rev. Lett. **86**, 1713 (2001).
- [34] R. Baldini et al., Eur. Phys. J. C **11**, 709 (1999); R. Baldini et al., Nucl. Phys A **666** & **667** 3 (2000).

- [35] S.R. Amendolia, G. Batignani, G.A. Beck, et al., Phys. Lett. B **178**, 435 (1986).
- [36] S. Eidelman et al. (Particle Data Group), Phys. Lett. B **592**, 1 (2004).