

Marco Antonio Travassos

**Controle de Sistemas Periódicos Variantes no Tempo via
Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno e Transformação
Lyapunov-Floquet**

Ilha Solteira
2022



Marco Antonio Travassos

**Controle de Sistemas Periódicos Variantes no Tempo via
Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno e Transformação
Lyapunov-Floquet**

Tese de doutorado apresentado ao Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade
Estadual Paulista, campus de Ilha Solteira.
Área de Conhecimento: Automação.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Cardim

Ilha Solteira
2022



FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

T779c Travassos, Marco Antonio.
Controle de sistemas periódicos variantes no tempo via modelos Fuzzy Takagi-Sugeno e transformação Lyapunov-Floquet / Marco Antonio Travassos. - Ilha Solteira: [s.n.], 2022
109 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2022

Orientador: Rodrigo Cardim
Inclui bibliografia

1. Sistemas periódicos variantes no tempo. 2. Transformação Lyapunov-Floquet. 3. Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno. 4. Desigualdades Matriciais Lineares.


Raiane da Silva Santos

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: Controle de Sistemas Periódicos Variantes no Tempo via Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno e Transformação Lyapunov-Floquet

AUTOR: MARCO ANTONIO TRAVASSOS

ORIENTADOR: RODRIGO CARDIM

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. RODRIGO CARDIM (Participação Virtual)

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA (Participação Virtual)

Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO (Participação Virtual)

Departamento de Engenharia Eletrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. WALLYSONN ALVES DE SOUZA (Participação Virtual)

Coordenação de Ciências Matemáticas e Naturais / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins - IFTO

Prof. Dr. UILIAM NELSON LENDZION TOMAZ ALVES (Participação Virtual)

Departamento de Eixo de Controle e Processos Industriais / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná - IFPR

Ilha Solteira, 11 de fevereiro de 2022

*Dedico este trabalho à minha família,
com especial carinho para minha esposa
Natalia e à minha mãe Adenivia.*

Agradecimentos

Primeiramente a Deus que me capacitou, deu-me saúde e forças para que tudo isso fosse possível.

À minha melhor amiga e esposa amada Natalia pelo companheirismo, paciência e carinho que ela teve para comigo durante esse trabalho.

Aos meus pais amados, Adenivia e Orlando, que sempre acreditaram em mim e aos meus demais familiares.

À minha saudosa vó Alaide por todo amor e carinho que me deu.

Aos professores Dr. Rodrigo Cardim e Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira por aceitarem me orientar nesse trabalho, pelos ensinamentos, por compartilhar comigo seus conhecimentos acadêmicos, pela paciência, pelas sugestões a esse trabalho, por acreditarem em mim e no meu potencial e tornar esse trabalho um aprendizado prazeroso. Se cheguei até aqui foi porque tive pessoas iguais a você que acreditaram em mim.

A Sonia Maria Delai Pardo por acreditar naquele menino travesso, que sempre aprontava na escola onde ela era diretora, mas ao invés das broncas, dizia que ele era um bom menino e que acreditava nele.

A todos os professores que fizeram parte da minha formação, em especial ao Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza e ao Prof. Dr. Antonio Carlos Tamarozzi por me apresentarem a matemática nos meus primeiros anos de graduação, por sempre me incentivar a continuar meus estudos, sem eles, com certeza seria mais difícil chegar até aqui.

Ao Prof. Dr. Marcos Roberto Teixeira Primo pela parceria durante meu mestrado e me incentivar a continuar meus estudos.

A todos os meus amigos que tive a oportunidade de conhecer durante a minha vida acadêmica, por terem me motivado a prosseguir, dividirem comigo seus conhecimentos e tornarem essa jornada mais alegre e prazerosa.

À CAPES pelo apoio financeiro.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*"Se eu vi mais longe, foi por
estar sobre ombros de gigantes."
(Isaac Newton)*

Resumo

Este trabalho aborda a técnica de controle *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S) assim como a técnica de controle via transformação Lyapunov-Floquet (L-F) e suas aplicações em sistemas lineares variantes no tempo. Na literatura, a técnica de controle *fuzzy* T-S e a técnica de controle via transformação L-F são comumente utilizadas para controlar sistemas não lineares invariantes no tempo e sistemas lineares variantes no tempo, respectivamente. Neste trabalho, é mostrado que a técnica *fuzzy* T-S também pode ser aplicada a sistemas lineares variantes de tempo, assim, cada uma das técnicas é aplicada no controle de um sistema linear variante e seus desempenhos são comparados. Um método híbrido de controle envolvendo ambas as técnicas de controle é proposto. A estabilidade assintótica do sistema em malha fechada no método proposto é provada matematicamente. Comparado com o método *fuzzy* T-S, o método híbrido reduz o conservadorismo de sistemas lineares variantes no tempo e periódicos quando este possui dois ou mais termos variantes no tempo combinados com incertezas na matriz de entrada de controle. Finalmente, uma aplicação do método híbrido é apresentada considerando restrição na entrada e incertezas na matriz de entrada de controle, bem como taxa de decaimento. Neste exemplo é possível observar a eficiência da técnica do controle híbrido para reduzir o conservadorismo quando comparada com a técnica de controle *fuzzy* T-S.

Palavras-chave: Sistemas Periódicos Variantes no Tempo; Transformação Lyapunov-Floquet; Modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno; Desigualdades Matriciais Lineares.

Abstract

This thesis approaches the Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy control technique as well as the control technique via Lyapunov-Floquet (L-F) transformation and their applications in linear time-varying systems. In the literature, the T-S fuzzy control technique and the control technique via L-F transformation are commonly used to control nonlinear time-invariant systems and linear time-varying systems, respectively. In this work, it is shown that the T-S fuzzy technique can also be applied to linear time-varying systems, thus, each of the techniques is applied in the control of a linear time-varying system and their performances are compared. A hybrid control method involving both control techniques is proposed. The asymptotic stability of the closed loop system in the proposed method is mathematically proved. Compared with the T-S fuzzy method, the hybrid method reduces the conservatism of linear time-varying periodic systems when it has two or more time-varying terms combined with uncertainties in the control input matrix. Finally, an application of the hybrid method is presented considering input constraints and uncertainties in the control input matrix, as well as the specification of the decay rate. In this example, it is possible to observe the efficiency of the hybrid control technique to reduce conservatism when compared to the T-S fuzzy control technique.

Keywords: Time-Varying Periodic Systems; Lyapunov-Floquet Transformation; Takagi-Sugeno Fuzzy Models; Linear Matrix Inequalities (LMIs).

Lista de ilustrações

Figura 1 – Gráfico dos cinco primeiros polinômios de Chebyshev.	36
Figura 2 – Gráfico dos cinco primeiros polinômios de Chebyshev alterados.	37
Figura 3 – Aproximação de $\sin(2\pi t)$ por polinômios de Chebyshev alterados considerando $m = 5$ e $m = 6$	38
Figura 4 – Primeiras aproximações para o problema (39).	44
Figura 5 – Primeiro elemento da STM exata ($\Phi_{11}(t)$) e aproximada ($\Phi_{11}^{(p,m)}(t)$) sendo $\alpha = 0.1$, $p = 12$ e $m = 5$ (a); $m = 6$ (b); $m = 7$ (c); $m = 8$ (d).	51
Figura 6 – Primeiro elemento da transformação L-F exata e aproximada sendo $\alpha = 0.1$, $p = 13$ e $m = 5$ (a); $m = 6$ (b); $m = 7$ (c); $m = 8$ (d).	53
Figura 7 – Gráfico do parâmetro α por $\max\{ \rho_1 , \rho_2 \}$	54
Figura 8 – Comportamento dos estados do sistema sem controle.	59
Figura 9 – Plano de Fase do sistema sem controle.	60
Figura 10 – Comportamento dos estados do sistema controlado.	60
Figura 11 – Plano de Fase do sistema controlado.	60
Figura 12 – Sinais de controle $u_1(t)$ e $u_2(t)$	61
Figura 13 – Estados do sistema controlado com lei de controle aproximada.	61
Figura 14 – Plano de Fase do sistema controlado com lei de controle aproximada.	62
Figura 15 – Sinal de controle $u(t)$	62
Figura 16 – Pêndulo simples com excitação vertical no suporte.	64
Figura 17 – Movimento desejado do pêndulo.	65
Figura 18 – Comportamento dos estados do Pêndulo sem controle.	67
Figura 19 – Plano de Fase do Pêndulo sem controle.	68
Figura 20 – Deslocamento da massa do Pêndulo sem controle, no eixo cartesiano.	68
Figura 21 – Controle ponto de equilíbrio: comportamento dos estados $x_1(t)$ e $x_2(t)$ do Pêndulo controlado.	68
Figura 22 – Controle ponto de equilíbrio: Plano de Fase do Pêndulo controlado.	69
Figura 23 – Controle ponto de equilíbrio: Deslocamento da massa do Pêndulo controlado, no eixo cartesiano.	69
Figura 24 – Controle ponto de equilíbrio: Sinal de controle $v(t)$	69
Figura 25 – Controle órbita desejada: estado $x_1(t)$ do Pêndulo controlado.	70
Figura 26 – Controle órbita desejada: estado $x_2(t)$ do Pêndulo controlado.	70
Figura 27 – Controle órbita desejada: Plano de Fase do Pêndulo controlado. “- -” trajetória desejada; “-” trajetória do sistema.	70
Figura 28 – Controle órbita desejada: Deslocamento da massa do Pêndulo controlado, no plano cartesiano.	71
Figura 29 – Controle órbita desejada: Sinal de controle $v(t)$	71
Figura 30 – Região de estabilidade da Equação de Mathieu.	84

Figura 31 – Sistema em malha aberta.	85
Figura 32 – Sistema em malha fechada, controlado via transformação L-F.	86
Figura 33 – Plano de Fase do sistema em malha fechada, controlado via transformação L-F.	87
Figura 34 – Controlador obtido via transformação L-F.	87
Figura 35 – Funções de pertinência.	88
Figura 36 – Sistema em malha fechada controlado via controle <i>fuzzy</i> T-S.	88
Figura 37 – Plano de Fase do sistema em malha fechada, controlado via controle <i>fuzzy</i> T-S.	89
Figura 38 – Controlador <i>fuzzy</i> T-S.	89
Figura 39 – Região de factibilidade obtida considerando o controle <i>fuzzy</i> T-S.	95
Figura 40 – Região de factibilidade considerando o método proposto.	96
Figura 41 – Região de factibilidade, considerando estabilidade + taxa de decaimento + restrição de entrada.	97
Figura 42 – Estados do sistema em malha fechada considerando incertezas + estabilidade.	98
Figura 43 – Lei de controle considerando incertezas + estabilidade.	99
Figura 44 – Estados do sistema em malha fechada considerando incertezas + estabilidade + taxa de decaimento.	99
Figura 45 – Lei de controle do sistema de malha fechada considerando incertezas + estabilidade + taxa de decaimento.	100
Figura 46 – Estados do sistema em malha fechada considerando incertezas + estabilidade + taxa de decaimento + restrição na entrada.	100
Figura 47 – Lei de controle do sistema em malha fechada considerando incertezas + estabilidade + taxa de decaimento + restrição na entrada.	101

Lista de tabelas

Tabela 1 – Coeficientes da função $\sin(2\pi t)$ em polinômios de Chebyshev alterados com $m = 10$	38
Tabela 2 – Primeiro elemento da STM exata e da STM aproximada, considerando $p = 14$ e $m = 7$. (a) solução exata; (b) solução aproximada.	50
Tabela 3 – Multiplicadores de Floquet aproximados considerando $p = 15$, $\alpha = 0, 1; 0, 5; 2$ e $m = 5; 7; 9$	51
Tabela 4 – Elementos da matriz $R^{(p,m)}$ aproximados para $\alpha = 0.1$, $p = 15$ e $m = 5, m = 7$ e $m = 9$	52

Lista de abreviaturas e siglas

STM	State Transition Matrix
FTM	Floquet Transition Matrix
MATLAB	Matrix Laboratory
EDO	Equação Diferencial Ordinária
LTV	Linear Time-Varying
L-F	Lyapunov Floquet
T-S	Takagi Sugeno

Lista de símbolos

\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{R}_+	Conjunto dos números reais não negativos
\mathbb{R}^n	Espaço dos vetores coluna de dimensão n com entradas reais
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Espaço das matrizes de dimensão n por m com entradas reais
$\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$	Conjunto das funções vetoriais contínuas
$\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$	Conjunto das funções reais continuamente diferenciáveis
I_n	Matriz Identidade de ordem n
m	Número de termos da expansão em polinômios de Chebyshev alterados
p	Número de aproximações no método das aproximações sucessivas
G	Matriz Operacional de Integração
Q_d	Matriz Operacional do Produto
T	Período principal de $A(t)$
$T_r^*(t)$	Polinômio de Chebyshev alterado de grau r
$\hat{T}(t)$	Matriz Polinomial de Chebyshev
$\Phi(t)$	Matriz de Transição de Estados
$\Phi^{(p,m)}(t)$	Matriz de Transição de Estados aproximada
$\Phi(T)$	Matriz de Transição de Floquet
$\Psi(t)$	Matriz Fundamental
λ_i 's	Expoentes característicos
ρ_i 's	Multiplicadores de Floquet
$P(t)$	Transformação de Equivalência
$Q(t)$	Transformação de Lyapunov–Floquet $2T$ -periódica
R	Sistema Lyapunov equivalente após a aplicação da transformação $Q(t)$
\mathcal{A}	Espaço vetorial das soluções de um sistema LTV

$\Re(z)$	Parte real do número complexo z
$x(t)$	Vetor de estados
$u(t)$	Lei de controle
$z(t)$	Vetor premissa
r	Número de termos variantes da matriz $A(t)$
$N = 2^r$	Número de modelos locais <i>fuzzy</i>
$\alpha_i(t)$'s	Funções de pertinência
$V(x)$	Função de Lyapunov

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	19
2.1	SISTEMAS LTV	19
2.1.1	Matriz Fundamental	20
2.1.2	Sistemas LTV e Periódicos	23
2.1.3	Sistemas LTV Equivalentes	26
2.1.4	Estabilidade de Sistemas LTV	28
2.2	TRANSFORMAÇÃO LYAPUNOV–FLOQUET	32
3	MÉTODO NUMÉRICO PARA OBTER A STM	35
3.1	POLINÔMIOS DE CHEBYSHEV	35
3.1.1	Polinômios de Chebyshev Alterados	36
3.1.2	Expansão de Função em Polinômios de Chebyshev Alterados	37
3.2	MATRIZES OPERACIONAIS	38
3.2.1	Matriz Polinomial de Chebyshev	38
3.2.2	Matriz Operacional do Produto	39
3.2.3	Matriz Operacional de Integração	41
3.3	MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS	43
3.4	STM NUMÉRICA	44
3.4.1	Método (SINHA; BUTCHER, 1997)	46
3.5	VALIDAÇÃO DO MÉTODO E ANÁLISE DE ESTABILIDADE	49
3.5.1	Validação	49
3.5.2	Análise de Estabilidade	53
4	PROJETO DE CONTROLADORES	55
4.1	CONTROLE VIA TRANSFORMAÇÃO L-F	55
4.1.1	Controle de Sistemas LTV	55
4.1.2	Controle de um Sistema Comutativo	57
4.1.3	Controle de Sistemas não Lineares	62
4.1.4	Controle de um Pêndulo Simples Excitado Verticalmente	64
4.2	CONTROLE FUZZY TAKAGI-SUGENO	71
4.2.1	Condições de Estabilidade	74
4.2.2	Taxa de Decaimento e Restrições de Entrada	79
4.2.3	Equação de Mathieu	83
4.2.3.1	Equação de Mathieu: controle via transformação L-F	85
4.2.3.2	Equação de Mathieu: controle fuzzy Takagi-Sugeno	87

5	MÉTODO PROPOSTO	90
5.1	SÍNTESE DO CONTROLADOR	90
5.1.1	Estabilidade	91
5.1.2	Restrição na Entrada e Taxa de Decaimento	92
5.2	REDUZINDO O NÚMERO DE MODELOS LOCAIS <i>FUZZY</i>	93
5.2.1	Aplicando o Controle <i>Fuzzy</i> Takagi-Sugeno	94
5.2.2	Aplicando o Método Híbrido	95
5.2.3	Incertezas na Matriz $B(t)$	97
5.3	SIMULAÇÃO	98
5.3.0.1	Incertezas + estabilidade	98
5.3.0.2	Incertezas + estabilidade + taxa de decaimento	99
5.3.0.3	Incertezas + estabilidade + taxa de decaimento + restrição na entrada	100
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	102
	REFERÊNCIAS	104
	APÊNDICE A – LEMAS TÉCNICOS	106

1 INTRODUÇÃO

Sistemas lineares variantes no tempo (LTV, do inglês *Linear Time-Varying*) estão presentes em muitos problemas físicos e de engenharia, como o oscilador de Duffing (PERUZZI, 2005), sistemas de coleta de energia (DAQAQ et al., 2009), sistemas microeletromecânicos (PERUZZI et al., 2016) etc. Esses sistemas possuem uma dependência explícita da variável temporal, tornando a análise de estabilidade bem como o projeto do controlador mais complexos. Por exemplo, a condição de todos os autovalores da matriz do sistema possuírem parte real negativa não é suficiente para garantir a estabilidade assintótica do sistema (SLOTINE; LI, 1991; CHEN, 1998). Para sistemas LTV e periódicos, a estabilidade pode ser caracterizada em termos da Matriz de Transição de Estado (STM, do inglês *State Transition Matrix*) (SINHA; HENRICHS; RAVINDRA, 2000; PERUZZI et al., 2016).

A STM de um sistema LTV e periódico pode ser escrita como um produto de uma transformação, chamada transformação Lyapunov-Floquet, e uma matriz exponencial. Como consequência desse resultado, aplicando uma mudança de variáveis envolvendo a transformação Lyapunov-Floquet, obtém-se um sistema linear invariante equivalente ao sistema variante original (YAKUBOVICH; STARZHINSKII, 1975; SINHA; JOSEPH, 1994; MEIROVITCH, 2010). Assim, estudar o comportamento das soluções de um sistema LTV e periódico equivale a estudar as soluções de um sistema linear invariante.

Sinha e Joseph (1994) propuseram uma técnica de controle para sistemas LTV e periódicos com base na transformação Lyapunov-Floquet (L-F). Posteriormente, essa técnica foi estendida para sistemas não lineares (SINHA; HENRICHS; RAVINDRA, 2000). No entanto, para analisar a estabilidade desses sistemas ou projetar controladores via transformação L-F, a STM do sistema deve ser obtida. A menos que o sistema seja comutativo (LUKES, 1982), obter a STM analiticamente não é uma tarefa simples. Sinha e Butcher (1997) propuseram um método numérico para obter a STM de um sistema LTV e periódico. Esse método usa a técnica de iterações de Picard e a expansão de funções em polinômios de Chebyshev alterados. Nesta abordagem, matrizes operacionais (de Chebyshev, Integração e Produto) são utilizadas para obter uma aproximação da STM por meio de multiplicações e adições de matrizes, possibilitando a implementação computacional desse método.

Embora o método de controle via transformação L-F (SINHA; JOSEPH, 1994; SINHA; HENRICHS; RAVINDRA, 2000) seja eficiente para controlar sistemas periódicos variantes no tempo (SHERRILL et al., 2015; KIRKLAND; SINHA, 2016; PERUZZI et al., 2016), ele não garante a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada. Deshmukh e Sinha (2004) propuseram uma técnica de controle que usa a transformação L-F, bem como a transformação *Backstepping*. Neste método, a estabilidade assintótica é garantida.

No entanto, essa técnica não permite considerar algumas limitações do projeto tais como restrição na entrada do sistema, taxa de decaimento ou incertezas.

Takagi e Sugeno (1985) propuseram uma técnica de controle para uma classe de sistemas não lineares que consiste na descrição do modelo não linear como uma combinação de modelos lineares, também chamados de modelos locais *fuzzy*. Inicialmente, essa descrição foi feita de forma aproximada. Posteriormente, Taniguchi et al. (2001), usando a mesma técnica, propuseram a descrição do modelo não linear como uma combinação convexa de modelos locais *fuzzy*, obtidos a partir dos termos não lineares do sistema.

A técnica de controle *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S) é geralmente aplicada em sistemas não lineares invariantes no tempo. Neste trabalho, ela será aplicada a sistemas periódicos lineares variantes no tempo. No entanto, será visto que se o sistema tiver dois ou mais termos variantes combinados com incertezas, a técnica de controle *fuzzy* T-S poderá fornecer um resultado conservador.

Este trabalho apresenta uma técnica de controle híbrida que envolve o controle via transformação Lyapunov-Floquet e controle *fuzzy* T-S. Neste método, a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada é garantida matematicamente. Este método permite considerar restrições na entrada do sistema, taxa de decaimento e incertezas na matriz de entrada de controle. A proposta deste método é obter um novo sistema equivalente ao sistema original onde o número de termos variantes no tempo deste novo sistema seja menor, reduzindo assim o número de modelos locais e, conseqüentemente, o conservadorismo do projeto.

Esse trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 2 são apresentados fundamentos teóricos dos sistemas variantes, como por exemplo o conceito de sistemas Lyapunov equivalentes, que permite transferir o estudo da estabilidade de um sistema LTV para o estudo da estabilidade de um sistema invariante no tempo. Também são abordadas algumas matrizes importantes desta análise de estabilidade, como por exemplo as matrizes STM e FTM (do inglês, *Floquet Transition Matrix*) de um sistema LTV e periódico, assim como a transformação L-F.

No Capítulo 3 é exibido o método numérico proposto por Sinha e Butcher (1997) para obter tanto a STM bem como a transformação L-F, que são importantes na análise de estabilidade e projeto do controlador, respectivamente. Também são mostrados alguns resultados que validam o método numérico.

O Capítulo 4 aborda as técnicas de controle via transformação Lyapunov-Floquet e a técnica de controle *fuzzy* T-S. Condições de estabilidade para ambas as técnicas são exibidas. Para a técnica de controle *fuzzy* T-S são apresentadas condições LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) para estabilidade, estabilidade com taxa de decaimento e restrições na entrada de controle. São abordados exemplos ilustrando ambas as técnicas

e seus desempenhos são comparados.

O Capítulo 5 introduz a técnica de controle híbrido proposto neste trabalho. É apresentada a síntese do controlador híbrido bem como o teorema que garante a estabilidade assintótica do método proposto. Por fim, é exibido um exemplo numérico em que pode-se ver a eficiência do controlador híbrido quando se deseja controlar sistemas LTV e periódicos que apresentam dois ou mais termos variantes combinados com incertezas na matriz de entrada de controle.

O Capítulo 6 apresenta as conclusões deste trabalho e propostas para trabalhos futuros e o Apêndice A exhibe alguns lemas técnicos relacionados ao método numérico apresentado no Capítulo 3.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Com o objetivo de tornar este trabalho autossuficiente este capítulo aborda, de forma resumida, alguns conceitos importantes sobre os sistemas LTV, bem como algumas propriedades do espaço solução de tais sistemas. Também, será abordado o conceito de Matriz de Transição de Estados, bem como alguns pontos fundamentais a respeito da Teoria de Lyapunov–Floquet e suas consequências.

2.1 SISTEMAS LTV

Considere um sistema de n Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de primeira ordem que é escrito da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t), \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t), \end{cases} \quad (1)$$

sendo $a_{ij} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ para todo $i, j = 1, \dots, n$. Um conjunto de n funções $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, chama-se **solução** de (1) se

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}_+ \text{ e } i = 1, \dots, n.$$

O sistema (1) pode ser representado em um formato vetorial equivalente, descrito por

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad (2)$$

sendo $A(t) = (a_{ij}(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_n(t)]' \in \mathbb{R}^n$, para todo $t \in \mathbb{R}_+$. O sistema (2) é equivalente ao sistema (1) no seguinte sentido: um conjunto de n funções reais $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ é solução de (1) se, e somente se, o vetor $x(t)$ é solução de (2). Os sistemas (1) ou (2) são chamados de sistema **linear variante no tempo** (LTV, do inglês *linear time-varying*).

A representação matemática de um modelo físico no formato de (2) é chamada de representação em **espaço de estados**. Observe a dependência explícita da variável temporal na matriz $A(t)$. Esta dependência torna a análise de estabilidade deste tipo de sistema mais complexa, requerendo métodos mais sofisticados do que os métodos utilizados para analisar sistemas lineares invariantes no tempo.

O teorema a seguir, cuja prova pode ser encontrada em (SOTOMAYOR, 1979, p. 50), garante a existência e unicidade de soluções para sistemas LTV dados por (2).

Teorema 1 (Existência e Unicidade). *Para cada $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ existe uma única solução $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ de (2) definida em \mathbb{R}_+ tal que $x(t_0) = x_0$.*

Considere o conjunto $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ como espaço vetorial, munido das operações de soma de funções e produto de uma constante por uma função. Pode-se provar que a função nula é uma solução de (2) e que a soma de duas soluções é também uma solução. Portanto, o espaço \mathcal{A} das soluções de (2) forma um subespaço vetorial de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$.

Uma questão a ser explorada é: qual a dimensão do espaço vetorial \mathcal{A} ? Para responder à pergunta, para cada $t_0 \in \mathbb{R}_+$ considere a função $\varepsilon_{t_0} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\varepsilon_{t_0}(x) = x(t_0)$. O Teorema 1 garante que a função ε_{t_0} é um isomorfismo de \mathcal{A} em \mathbb{R}^n , ou seja, ε_{t_0} é uma transformação linear bijetora. Uma vez que os espaços vetoriais \mathcal{A} e \mathbb{R}^n são isomorfos pode-se concluir que $\dim \mathcal{A} = \dim \mathbb{R}^n = n$ (COELHO; LOURENCO, 2013, p. 90), respondendo assim a questão indagada. O Teorema 2 a seguir resume a discussão acima.

Teorema 2. (a) O conjunto \mathcal{A} de todas as soluções de (2) é um espaço vetorial de dimensão n . Mais ainda, para cada $t_0 \in \mathbb{R}_+$, a função que a cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ associa a solução $x(t, t_0, x_0)$ que passa por (t_0, x_0) é um isomorfismo de \mathbb{R}^n em \mathcal{A} . (b) Em particular, se v_1, v_2, \dots, v_n formam uma base de \mathbb{R}^n , então $x_1 = x(t, t_0, v_1), \dots, x_n = x(t, t_0, v_n)$ formam uma base de \mathcal{A} , isto é, toda solução de (2) se exprime de forma única como combinação linear de x_1, \dots, x_n .

2.1.1 Matriz Fundamental

A fim de introduzir uma matriz que será importante para o desenvolvimento deste estudo (Matriz de Transição de Estados), considere a equação matricial a seguir:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \quad (3)$$

sendo $X(t) = (x_{ij}(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Observe que as soluções de (3) são matrizes enquanto que as soluções de (2) são vetores. Entretanto, existe uma relação entre as soluções de (2) e (3) que é expressa pelo teorema a seguir.

Teorema 3. $X(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma solução de (3) se, e somente se, a j -ésima coluna $X^j(t)$ de $X(t)$ é solução de (2), para cada $j = 1, \dots, n$.

Demonstração. O teorema segue observando que

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) = A(t)X(t) &\Leftrightarrow \dot{x}_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_{kj}(t), \quad i, j = 1, \dots, n \\ &\Leftrightarrow \dot{X}^j(t) = A(t)X^j(t), \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

como desejado. □

Observação 1. Pelo Teorema 3, o sistema (3) equivale a n sistemas LTV e, portanto, o Teorema 1 se aplica para garantir a existência e unicidade das soluções de (3).

Uma matriz $\Psi(t)$ de ordem $n \times n$ cujas colunas formam uma base do espaço \mathcal{A} das soluções de (2) chama-se **matriz fundamental**. Em outras palavras, as colunas $\Psi^j(t)$ de uma matriz fundamental são formadas por soluções linearmente independentes de \mathcal{A} .

Exemplo 1. No caso $n = 1$, $A(t) = a(t)$ e $\dot{x}(t) = a(t)x(t)$, tem-se que

$$\Psi(t, t_0, x_0) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau},$$

é a solução que passa por (t_0, x_0) .

Dos Teoremas 1 e 2 segue o seguinte Corolário 1 (SOTOMAYOR, 1979, p. 54) que é útil para mostrar que uma solução matricial é uma matriz fundamental.

Corolário 1. $\Psi(t)$ é uma matriz fundamental de (2) se, e somente se, $\Psi(t)$ é uma solução de (3) tal que para algum $t_0 \in \mathbb{R}_+$, e portanto para todo $t_0 \in \mathbb{R}_+$, tem-se $\det \Psi(t_0) \neq 0$.

Demonstração. (\Rightarrow) Se $\Psi(t)$ é uma matriz fundamental, então pelo Teorema 3 segue que $\Psi(t)$ é uma solução de (3). Além disso, dado $t_0 \in \mathbb{R}_+$, tem-se $\Psi^j(t) = \Psi^j(t, t_0, \Psi^j(t_0))$ são soluções linearmente independentes em \mathcal{A} . Pelo Teorema 2 segue que $\Psi^1(t_0), \dots, \Psi^n(t_0)$ são linearmente independente em \mathbb{R}^n e, portanto, $\det[\Psi(t_0)] \neq 0$. Pela arbitrariedade de $t_0 \in \mathbb{R}_+$ fixado, segue que $\det[\Psi(t)] \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$.

(\Leftarrow) Seja $\Psi(t)$ uma solução de (3) tal que $\det[\Psi(t_0)] \neq 0$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Logo, $\Psi^1(t_0), \dots, \Psi^n(t_0)$ são linearmente independente em \mathbb{R}^n . Pelo Teorema 2 segue que $\Psi^j(t) = \Psi^j(t, t_0, \Psi^j(t_0))$ são soluções linearmente independente em \mathcal{A} e, portanto, $\Psi(t)$ é uma matriz fundamental. \square

Segue do corolário acima que se $\Psi(t)$ é uma matriz fundamental, então $\det \Psi(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e, portanto, $\Psi^{-1}(t)$ está bem definida. A seguir são exibidas algumas propriedades a respeito da matriz fundamental.

Lema 1. Se $\Psi(t)$ é uma matriz fundamental de (2), então $d/dt(\Psi^{-1}(t)) = -\Psi^{-1}(t)A(t)$.

Demonstração. Derivando a igualdade $\Psi(t)\Psi^{-1}(t) = I$ tem-se

$$\begin{aligned} d/dt(\Psi(t)\Psi^{-1}(t)) &= 0 \\ \Rightarrow d/dt(\Psi(t))\Psi^{-1}(t) + \Psi(t)d/dt(\Psi^{-1}(t)) &= 0 \\ \Rightarrow \Psi(t)d/dt(\Psi^{-1}(t)) &= -d/dt(\Psi(t))\Psi^{-1}(t) \\ \Rightarrow d/dt(\Psi^{-1}(t)) &= -\Psi^{-1}(t)A(t)\Psi(t)\Psi^{-1}(t) \\ \Rightarrow d/dt(\Psi^{-1}(t)) &= -\Psi^{-1}(t)A(t). \end{aligned} \tag{4}$$

\square

Teorema 4. *Sejam $\Psi(t)$ e $\Upsilon(t)$ soluções de (3), sendo $\Psi(t)$ uma matriz fundamental. Existe uma única matriz C de ordem $n \times n$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}_+$*

$$\Upsilon(t) = \Psi(t)C.$$

A matriz C é não singular se, e somente se, $\Upsilon(t)$ é uma matriz fundamental.

Demonstração. Se $\Psi(t)$ é uma matriz fundamental, pelo Lema 1 tem-se

$$d/dt(\Psi^{-1}(t)) = -\Psi^{-1}(t)A(t).$$

Utilizando a igualdade acima obtém-se

$$\begin{aligned} d/dt(\Psi^{-1}(t)\Upsilon(t)) &= d/dt(\Psi^{-1}(t))\Upsilon(t) + \Psi^{-1}(t)d/dt(\Upsilon(t)) \\ \Rightarrow d/dt(\Psi^{-1}(t)\Upsilon(t)) &= -\Psi^{-1}(t)A(t)\Upsilon(t) + \Psi^{-1}(t)A(t)\Upsilon(t) \\ \Rightarrow d/dt(\Psi^{-1}(t)\Upsilon(t)) &= 0. \end{aligned}$$

Por conseguinte tem-se $\Psi^{-1}(t)\Upsilon(t) = C$. □

O teorema a seguir mostra como obter a solução geral de (2) a partir do conhecimento de uma matriz fundamental.

Teorema 5. *Se $\Psi(t)$ é uma matriz fundamental de (2), então a solução deste sistema $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ tal que $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$ é dada por*

$$x(t, t_0, x_0) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)x_0. \quad (5)$$

Demonstração. Imediata por substituição direta de (5) em (2). □

Como pode ser observado, existem infinitas matrizes fundamentais para um sistema LTV. Este trabalho tem por interesse um caso particular de matriz fundamental que seja única.

Definição 1. *Seja $\Psi(t)$ uma matriz fundamental de (2). Então*

$$\Phi(t, t_0) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)$$

*é chamada de **matriz de transição de estados** (STM, do inglês State Transition Matrix). A STM é a solução única da equação*

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$$

com condição inicial $\Phi(t_0, t_0) = I$.

Uma vez que $\Psi(t)$ é não singular para todo $t \in \mathbb{R}_+$, sua inversa está bem definida. Da definição da STM segue as seguintes propriedades:

- $\Phi(t, t) = I$
- $\Phi^{-1}(t, t_0) = [\Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)]^{-1} = \Psi(t_0)\Psi^{-1}(t) = \Phi(t_0, t)$

para todo $t, t_0, t_1 \in \mathbb{R}_+$.

Observe que a STM é a matriz fundamental tal que $\Phi(t_0, t_0) = I$, portanto, todas as propriedades de matriz fundamental também são válidas para a STM.

Nas aplicações deste trabalho será considerado $t_0 = 0$ e, para simplificar a notação, será denotado $\Phi(t, 0)$ simplesmente por $\Phi(t)$ ficando subentendido que $t_0 = 0$.

2.1.2 Sistemas LTV e Periódicos

Nesta seção será abordado sistemas LTV cujos coeficientes variantes no tempo são periódicos. Além disso, o conjunto formado pelos períodos de cada um destes coeficientes são comensuráveis, dando origem assim ao sistema LTV e periódicos.

Devido sua importância para o entendimento de qual classe dos sistemas LTV este trabalho se refere, será apresentado o conceito de números comensuráveis. Dois números reais α e β são ditos ser **comensuráveis** se existirem números inteiros $p, q \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q},$$

caso contrário α e β são ditos **incomensuráveis**. Os números reais β_1, \dots, β_r são ditos comensuráveis se dois a dois são comensuráveis.

Exemplo 2. Dado um número não nulo $\beta \in \mathbb{R}$, claramente β é comensurável com ele mesmo, pois $\beta/\beta = 1/1$. Um exemplo clássico de números incomensuráveis é o comprimento da diagonal de um quadrado unitário e o comprimento de um dos seus lados.

Uma outra forma equivalente de definir números comensuráveis é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 6. Os números reais β_1, \dots, β_r são comensuráveis se, e somente se, existe um número $T \in \mathbb{R}$ e números inteiros $q_1, \dots, q_r \in \mathbb{Z}$ tais que

$$q_i \beta_i = T, \text{ para todo } i = 1, \dots, r.$$

Demonstração. (\Rightarrow) Se β_1, \dots, β_r são comensuráveis, então existem números inteiros n_{ij} e d_{ij} tais que

$$\frac{\beta_i}{\beta_j} = \frac{n_{ij}}{d_{ij}}, \text{ para } i = 1, \dots, r-1 \text{ e } j = i+1, \dots, r. \quad (6)$$

Definindo $T = \prod_{i=1}^r n_{ir} \beta_r$, para cada $i \in \{1, \dots, r-1\}$, de (6) segue que

$$\begin{aligned}
 & d_{ir}\beta_i = n_{ir}\beta_r \\
 \Rightarrow & \left(\prod_{j=1, j \neq i}^r n_{jr} \right) d_{ir}\beta_i = \left(\prod_{j=1, j \neq i}^r n_{jr} \right) n_{ir}\beta_r \\
 \Rightarrow & \left(\prod_{j=1, j \neq i}^r n_{jr} d_{ir} \right) \beta_i = \left(\prod_{j=1, j \neq i}^r n_{jr} n_{ir} \right) \beta_r \\
 \Rightarrow & \left(\prod_{j=1, j \neq i}^r n_{jr} d_{ir} \right) \beta_i = \prod_{j=1}^r n_{jr} \beta_r. \tag{7}
 \end{aligned}$$

Definindo $q_i = \prod_{j=1, j \neq i}^r n_{jr} d_{ir}$, de (7) decorre que $q_i \beta_i = T$, como desejado.

(\Leftarrow) Dados $\beta_i, \beta_j \in \{\beta_1, \dots, \beta_r\}$ existem q_i e q_j números inteiros tais que $q_i \beta_i = T = q_j \beta_j$, consequentemente, $\beta_i / \beta_j = q_j / q_i$ e portanto β_i e β_j são comensuráveis. \square

Agora, considere o sistema LTV dado em (2), e suponha que os coeficientes $a_{ij}(t)$ são funções contínuas e periódicas em \mathbb{R}_+ com período β_{ij} , ou seja, $a_{ij}(t + \beta_{ij}) = a_{ij}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Se os períodos β_{ij} 's são comensuráveis ou, equivalentemente, se existe T real e q_{ij} 's inteiros tais que

$$q_{ij} \beta_{ij} = T, \text{ para todo } i, j = 1, 2, \dots, n,$$

então o sistema é dito ser **periódico**. O menor número positivo T satisfazendo a equação acima é chamado de **período principal**. É fácil ver que se T é o período principal do sistema, então $A(t + T) = A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Caso β_{ij} 's sejam incomensuráveis, o sistema é chamado de **quase-periódico**. Neste trabalho serão abordados apenas os sistemas LTV periódicos. Para uma abordagem sobre sistemas LTV quase-periódicos veja (SHARMA; SINHA, 2017).

Considere um sistema LTV e periódico descrito por

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \tag{8}$$

sendo $A(t)$ uma matriz periódica de período principal T , ou seja

$$A(t + T) = A(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}_+. \tag{9}$$

Seja $\Phi(t)$ a STM de tal sistema e considere $\Psi(t) = \Phi(t + T)$. Decorre que

$$\begin{aligned}
 \dot{\Psi}(t) &= \dot{\Phi}(t + T) \\
 &= A(t + T)\Phi(t + T) \\
 &= A(t)\Phi(t + T) \\
 &= A(t)\Psi(t).
 \end{aligned}$$

Além disso, $\det[\Psi(0)] = \det[\Phi(T)] \neq 0$. Portanto, $\Psi(t) = \Phi(t + T)$ é uma matriz fundamental. Pelo Teorema 4 existe uma única matriz C não singular tal que

$$\Phi(t + T) = \Phi(t)C. \quad (10)$$

Substituindo $t = 0$ na equação acima obtém-se $C = \Phi(0)C = \Phi(T)$. A matriz $\Phi(T)$ é chamada de **Matriz de Transição de Floquet** (FTM, do inglês *Floquet Transition Matrix*) e os autovalores ρ_1, \dots, ρ_n de $\Phi(T)$ são chamados de **multiplicadores de Floquet**. Os multiplicadores de Floquet têm papel interessante na análise de estabilidade de sistemas LTV e periódicos. Na Seção 2.2 será visto que é possível caracterizar a estabilidade do sistema por meio dos multiplicadores de Floquet.

O resultado apresentado no teorema a seguir pode ser encontrado em Sinha e Butcher (1997) e apresenta uma propriedade sobre a STM de um sistema LTV e periódico, que é fundamental no método numérico para obter a STM aproximada e que será apresentado no próximo capítulo.

Teorema 7. *Seja $\Phi(t)$ a STM de (8) e considere $r \in \mathbb{R}_+$ e i um número natural, então é válida a seguinte igualdade*

$$\Phi(r + iT) = \Phi(r)\Phi(T)^i.$$

Demonstração. A prova deste teorema será feita por indução sobre i . Primeiramente, observe que o caso $i = 0$ é imediato e que o caso $i = 1$ está provado por (10). Agora, deve-se provar que se o resultado é válido para um natural i , então é válido para $i + 1$ também. De fato,

$$\begin{aligned} \Phi(r + (i + 1)T) &= \Phi((r + iT) + T) \\ &= \Phi(r + iT)\Phi(T) \\ &= \Phi(r)\Phi(T)^i\Phi(T) \\ &= \Phi(r)\Phi(T)^{i+1}, \end{aligned}$$

provando assim o teorema. □

A importância do teorema acima consiste em que é possível conhecer a expressão de $\Phi(t)$ para $t > T$ conhecendo apenas $\Phi(t)$ para $t \in [0, T]$. De fato, dado $t > T$, sejam $r \in \mathbb{R}$ e $i \in \mathbb{N}$ o resto e o divisor da divisão de t por T , respectivamente, ou seja, $t = r + iT$, sendo $0 \leq r < T$. Assim, pelo Teorema 7 decorre que

$$\Phi(t) = \Phi(r + iT) = \Phi(r)\Phi(T)^i. \quad (11)$$

O resultado acima, aplicado a um sistema normalizado, permitiram que os autores Sinha e Butcher (1997) utilizassem dos polinômios de Chebyshev alterados, consequentemente de suas propriedades, no método numérico para aproximar a STM. A aplicação de

tais polinômios permitiu obter uma aproximação da STM por meio de adições e multiplicações de matrizes que viabilizou sua implementação. No Capítulo 3 será explorado este aspecto com maiores detalhes.

2.1.3 Sistemas LTV Equivalentes

Nesta seção serão definidos os conceitos de transformações de equivalência e sistemas algebricamente equivalentes. Estes conceitos são interessantes pois, em alguns casos, o sistema algebricamente equivalente é mais simples de se trabalhar em relação ao sistema original. Além disso, a estabilidade do sistema é invariante sob certas transformações de equivalência (transformações de Lyapunov), conforme será visto na Seção 2.1.4.

Considere o sistema LTV dado por (2) e uma aplicação $P(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida sobre \mathbb{R}_+ . Suponha que $P(t)$ é não singular para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e que ambas $P(t)$ e $\dot{P}(t)$ são contínuas. Então $\tilde{x}(t) = P(t)x(t)$ é solução do seguinte sistema

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}(t)\tilde{x}, \quad (12)$$

sendo

$$\tilde{A}(t) = [P(t)A(t) + \dot{P}(t)]P^{-1}(t). \quad (13)$$

O sistema (12) é dito ser **algebricamente equivalente** a (2) e $P(t)$ é chamada de **transformação de equivalência**. A equação (12) é obtida substituindo $\tilde{x} = P(t)x$ em $\dot{\tilde{x}} = \dot{P}(t)x + P(t)\dot{x}$.

O seguinte teorema relaciona as matrizes fundamentais de dois sistemas algebricamente equivalentes.

Teorema 8. *Se $\Psi(t)$ é uma matriz fundamental de (2), então $\tilde{\Psi}(t) = P(t)\Psi(t)$ é uma matriz fundamental de (12).*

Demonstração. Por definição $P(t)$ e $\Psi(t)$ são não singulares para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Uma vez que produto de matrizes não singulares é uma matriz não singular, segue que $\tilde{\Psi}(t) = P(t)\Psi(t)$ é não singular para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Além disso,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\Psi}}(t) &= \dot{P}(t)\Psi(t) + P(t)\dot{\Psi}(t) \\ &= \dot{P}(t)\Psi(t) + P(t)A(t)\Psi(t) \\ &= [\dot{P}(t) + P(t)A(t)][P^{-1}(t)P(t)]\Psi(t) \\ &= \tilde{A}(t)P(t)\Psi(t) \\ &= \tilde{A}(t)\tilde{\Psi}(t). \end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{\Psi}(t) = P(t)\Psi(t)$ é uma matriz fundamental de $\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}(t)\tilde{x}$. □

O teorema a seguir mostra que sempre existe uma transformação de equivalência tal que $\tilde{A}(t)$ é uma constante.

Teorema 9. *Dada $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz constante, existe uma transformação de equivalência tal que $\tilde{A}(t) = A_0$.*

Demonstração. Seja $\Psi(t)$ uma matriz fundamental de (2). Pelo Lema 1 tem-se

$$d/dt(\Psi^{-1}(t)) = -\Psi^{-1}(t)A(t).$$

Uma vez que $\tilde{A}(t) = A_0$ é uma matriz constante, segue que $\tilde{\Psi}(t) = e^{A_0 t}$ é uma matriz fundamental de $\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}(t)\tilde{x} = A_0\tilde{x}$. Pelo Teorema 8, $P(t)$ deve satisfazer o seguinte:

$$\tilde{\Psi}(t) = P(t)\Psi(t) \quad \Rightarrow \quad P(t) = \tilde{\Psi}(t)\Psi^{-1}(t) = e^{A_0 t}\Psi^{-1}(t).$$

Portanto, considerando $P(t) = e^{A_0 t}\Psi^{-1}(t)$ segue que

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t) &= [P(t)A(t) + \dot{P}(t)]P^{-1}(t) \\ &= [e^{A_0 t}\Psi^{-1}(t)A(t) + A_0e^{A_0 t}\Psi^{-1}(t) + e^{A_0 t}d/dt(\Psi^{-1}(t))]P^{-1}(t) \\ &= [e^{A_0 t}\Psi^{-1}(t)A(t) + A_0e^{A_0 t}\Psi^{-1}(t) - e^{A_0 t}\Psi^{-1}(t)A(t)]\Psi(t)e^{-A_0 t} \\ &= A_0e^{A_0 t}\Psi^{-1}(t)\Psi(t)e^{-A_0 t} = A_0. \end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{A}(t) = A_0$, como desejado. □

Neste estudo estaremos interessados em um caso particular de transformação de equivalências, as chamadas transformações de Lyapunov. As transformações de Lyapunov são interessantes pois o conceito de estabilidade e estabilidade assintótica são invariantes sob este tipo de transformação, como será visto na Seção 2.1.4.

Definição 2. *Uma matriz $P(t)$ é chamada de **transformação de Lyapunov** se $P(t)$ é não singular, $P(t)$ e $\dot{P}(t)$ são contínuas, $P(t)$ e $P^{-1}(t)$ são limitadas para todo $t \in \mathbb{R}_+$. As equações (2) e (12) são ditas **Lyapunov equivalentes** se $P(t)$ é uma transformação de Lyapunov.*

Dado uma matriz constante A_0 , o Teorema 9 garante que sempre existe uma transformação de equivalências $P(t)$ tal que $\tilde{A}(t) = A_0$. Assumindo que transformações de Lyapunov preservam estabilidade e estabilidade assintótica a pergunta a ser feita é: se $P(t)$ for uma transformação de Lyapunov o Teorema 9 continua válido? Em caso afirmativo, o estudo da estabilidade de sistema LTV será então equivalente a estudar a estabilidade de um sistema Lyapunov equivalente, que é linear e invariante. Em geral a resposta para esta pergunta é negativa, entretanto, se o sistema for LTV e periódico então a resposta é afirmativa, como será visto na Seção 2.2.

2.1.4 Estabilidade de Sistemas LTV

Nesta seção serão definidos os conceitos de ponto de equilíbrio, estabilidade e estabilidade assintótica para sistemas LTV, ambas no sentido de Lyapunov. Nos livros disponíveis na literatura tais definições podem variar em algum detalhe dependendo dos autores. Neste trabalho foram adotadas as definições segundo Slotine e Li (1991).

Para as definições e demonstrações a seguir, considere um sistema LTV, as seguintes normas de vetor e matriz e propriedades (CHEN, 1998, p. 47 e 78) dadas por:

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sum_{i=1}^n |x_i| \\ \|A\| &= \max_j \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) = \max_j \|A^j\| \\ \|Ax\| &\leq \|A\| \|x\| \\ \|AB\| &\leq \|A\| \|B\|, \end{aligned}$$

sendo $x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n] \in \mathbb{R}^n$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e A^j a j -ésima coluna da matriz A . Vale ressaltar que, em espaços de dimensão finita quaisquer duas normas são equivalentes (KREYSZIG, 1978, p. 75).

Definição 3. Um ponto $x^* \in \mathbb{R}^n$ é dito ser um **ponto de equilíbrio** se

$$A(t)x^* = 0, \quad \forall t \geq t_0.$$

O significado físico de ponto de equilíbrio é que se for possível configurar o sistema tal que o vetor dos estados coincida com tal ponto, então o sistema ali permanecerá.

Pode-se verificar que o único ponto de equilíbrio do sistema será $x^* = 0$, a menos que $A(t)$ seja sempre singular.

Definição 4. O ponto de equilíbrio $x^* = 0$ é **estável** em t_0 se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon, t_0) = \delta > 0$ tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

A definição acima significa que o vetor dos estados permanece na bola de raio ε arbitrário, desde que a trajetória se inicie em uma bola de raio δ suficientemente pequeno.

Definição 5. O ponto de equilíbrio $x^* = 0$ é **assintoticamente estável** em t_0 se:

(a) ele é estável em t_0 ;

(b) existe $\delta(t_0) = \delta > 0$ tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta \implies \|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Geometricamente, a definição de estabilidade assintótica significa que existe uma “região de atração” tal que se a trajetória inicia dentro desta região, então a solução tende a zero conforme o tempo passa. A seguir, serão apresentados dois teoremas que permitem caracterizar os conceitos de estabilidade e estabilidade assintótica por meio da STM do sistema (CHEN, 1998, p. 138).

Teorema 10. *O ponto de equilíbrio $x^* = 0$ é estável em t_0 se, e somente se, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq M, \quad \forall t \geq t_0.$$

Demonstração. (\Leftarrow) Dado $\varepsilon > 0$ escolha $\delta(\varepsilon, t_0) = \frac{\varepsilon}{M}$. Assim, se $\|x(t_0)\| < \delta$ então

$$\|x(t)\| = \|\Phi(t, t_0)x(t_0)\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| \|x(t_0)\| < M\delta = \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

(\Rightarrow) Para $\varepsilon = 1$ existe $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|x(t)\| < 1 \quad \forall t \geq t_0.$$

Fixemos $t \geq t_0$ e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Seja $\Phi^j(t, t_0)$ a j -ésima coluna de $\Phi(t, t_0)$. Considere $x_0^j = \frac{\delta}{2} [\delta_{1j} \ \delta_{2j} \ \dots \ \delta_{nj}]' \in \mathbb{R}^n$, sendo que δ_{ij} denota o delta de kronecker. Seja $x^j(t)$ a solução de (2) tal que $x^j(t_0) = x_0^j$. Observe que $\|x^j(t_0)\| = \frac{\delta}{2} < \delta$ e que

$$x^j(t) = \Phi(t, t_0)x_0^j = \frac{\delta}{2}\Phi^j(t, t_0).$$

Das considerações acima tem-se:

$$\frac{\delta}{2}\|\Phi^j(t, t_0)\| = \left\| \frac{\delta}{2}\Phi^j(t, t_0) \right\| = \|x^j(t)\| < 1.$$

Pela arbitrariedade do $t \geq t_0$ e j fixados, da desigualdade acima decorre que

$$\begin{aligned} \|\Phi^j(t, t_0)\| &< \frac{2}{\delta} \quad \forall j = 1, \dots, n \text{ e } \forall t \geq t_0 \\ \Longrightarrow \max_j \|\Phi^j(t, t_0)\| &< \frac{2}{\delta} \quad \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

Portanto, escolhendo $M = \frac{2}{\delta}$ tem-se

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq M, \quad \forall t \geq t_0,$$

provando assim o resultado. □

Lema 2. *Se $\|\Phi(t, t_0)\| \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow +\infty$, então existe $M \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\|\Phi(t, t_0)\| < M, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Por hipótese, para $\varepsilon = 1$ existe $\zeta > 0$ tal que

$$\|\Phi(t, t_0)\| < 1, \quad \forall t \geq \zeta. \quad (14)$$

Por outro lado, como $\|\Phi^j(t, t_0)\|$ é contínua, existe $N^j \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|\Phi^j(t, t_0)\| < N^j, \quad \forall t \in [0, \zeta].$$

Defina $N = \max_j N^j$. Decorre que

$$\begin{aligned} & \|\Phi^j(t, t_0)\| < N, \quad \forall t \in [0, \zeta] \text{ e } j = 1, \dots, n \\ \implies & \max_j \|\Phi^j(t, t_0)\| < N, \quad \forall t \in [0, \zeta] \\ \implies & \|\Phi(t, t_0)\| < N, \quad \forall t \in [0, \zeta]. \end{aligned} \quad (15)$$

Considere $M = N + 1$. De (14) e (15) segue que

$$\|\Phi(t, t_0)\| < M, \quad \forall t \geq 0.$$

□

Teorema 11. $x^* = 0$ é assintoticamente estável em t_0 se, e somente se,

$$\|\Phi(t, t_0)\| \rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Demonstração. (\Leftarrow) Deve-se provar as condições (a) e (b) da Definição 5. De fato, por hipótese a condição (16) é válida. Pelo Lema 2 segue que $\|\Phi(t, t_0)\| < M$, para todo $t \geq t_0$. Portanto, pelo Teorema 10 segue que o sistema é estável em t_0 , provando a condição (a). Para demonstrar a condição (b) considere $\delta(t_0) = 1$. Dado $\varepsilon > 0$, por hipótese (16) é válida e, portanto, deve existir $\zeta > 0$ tal que

$$t \geq \zeta \implies \|\Phi(t, t_0)\| < \varepsilon.$$

Seja $x(t)$ uma solução tal que $\|x(t_0)\| < 1$. Decorre que, se $t \geq \zeta$ então

$$\|x(t)\| = \|\Phi(t, t_0)x_0\| \leq \|\Phi(t, t_0)\| \|x_0\| < \varepsilon.$$

Portanto, $\|x(t)\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ como desejado.

(\Rightarrow) Por definição existe $\delta(t_0) > 0$ tal que se $\|x(t_0)\| < \delta$ então

$$\|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $\zeta > 0$ tal que

$$t \geq \zeta \implies \|x(t)\| < \frac{\delta}{2}\varepsilon.$$

Considere $x_0^j = \frac{\delta}{2} [\delta_{1j} \delta_{2j} \cdots \delta_{nj}]'$ e seja $x^j(t)$ a solução tal que $x^j(t_0) = x_0^j$. Observe que $\|x^j(t_0)\| = \|x_0^j\| = \frac{\delta}{2} < \delta$. Logo,

$$\begin{aligned} t \geq \zeta &\implies \frac{\delta}{2} \|\Phi^j(t, t_0)\| = \left\| \frac{\delta}{2} \Phi^j(t, t_0) \right\| = \|x^j(t)\| < \frac{\delta}{2} \varepsilon, \quad \forall j = 1, \dots, n \\ &\implies \|\Phi^j(t, t_0)\| < \varepsilon, \quad \forall j = 1, \dots, n \\ &\implies \max_j \|\Phi^j(t, t_0)\| < \varepsilon \\ &\implies \|\Phi(t, t_0)\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\|\Phi(t, t_0)\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. □

Os Teoremas 10 e 11 são importantes pois permitem provar que, para sistema LTV, os conceitos de estabilidade e estabilidade assintótica são invariantes sob transformações de Lyapunov (CHEN, 1998, p. 139).

Teorema 12. *Os conceitos de estabilidade e estabilidade assintótica de um sistema LTV são invariantes sob qualquer transformação de Lyapunov.*

Demonstração. Seja $P(t)$ uma transformação de Lyapunov. Considere $\Psi(t)$ e $\tilde{\Psi}(t)$ matrizes fundamentais do sistema LTV $\dot{x} = A(t)x$ e do sistema Lyapunov equivalente $\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}(t)\tilde{x}$, respectivamente. Conforme o Teorema 8, as duas matrizes fundamentais estão relacionadas por

$$\tilde{\Psi}(t) = P(t)\Psi(t).$$

Da igualdade acima decorre o seguinte

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(t, t_0) &= \tilde{\Psi}(t)\tilde{\Psi}^{-1}(t_0) \\ &= P(t)\Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)P^{-1}(t_0) \\ &= P(t)\Phi(t, t_0)P^{-1}(t_0). \end{aligned}$$

Por definição $P(t)$ e $P^{-1}(t)$ são limitadas. Se $\|\Phi(t, t_0)\|$ é limitada, da igualdade acima segue que $\|\tilde{\Phi}(t, t_0)\|$ também é limitada. Por outro lado, se $\|\tilde{\Phi}(t, t_0)\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, pela igualdade acima tem-se $\|\Phi(t, t_0)\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, provando o teorema. □

O Teorema 12 afirma que se um sistema LTV possui uma transformação de Lyapunov então podemos “transferir” o estudo da estabilidade do sistema original para o sistema Lyapunov equivalente. Pode acontecer do sistema Lyapunov equivalente ser um sistema mais simples ou não de analisar a estabilidade. Entretanto, caso o sistema LTV for periódico existe uma transformação de Lyapunov tal que o sistema Lyapunov equivalente é invariante no tempo, como será visto na seção a seguir.

2.2 TRANSFORMAÇÃO LYAPUNOV–FLOQUET

Nesta seção será provada a existência de uma transformação de Lyapunov para todo sistema LTV e periódico, tal que o sistema Lyapunov equivalente é invariante no tempo. Tal transformação é conhecida na literatura como transformação de Lyapunov–Floquet (L–F).

O lema a seguir é importante para construir a transformação L–F, como será visto no Teorema 13. Entretanto, por fugir do escopo do estudo, a demonstração é omitida mas pode ser encontrada em (YAKUBOVICH; STARZHINSKII, 1975, p. 56).

Lema 3. *Dada uma matriz C não singular de ordem $n \times n$, existe uma matriz B real de ordem $n \times n$ tal que $e^{2B} = C^2$.*

Teorema 13. *(Floquet) Considere o sistema T -periódico (8) e $\Phi(t)$ a STM de tal sistema. Existem matrizes reais $Q(t)$ e R de ordem $n \times n$, sendo $Q(t)$ uma matriz $2T$ -periódica, não singular e $Q(0) = I$ tais que*

$$\Phi(t) = Q(t)e^{tR}.$$

Demonstração. Por (10) existe uma matriz não singular C tal que $\Phi(t + T) = \Phi(t)C$. Consequentemente $\Phi(t + 2T) = \Phi(t)C^2$. Pelo Lema 3 existe uma matriz real B tal que $e^{2B} = C^2$. Considere $R = \frac{1}{T}B$ e defina

$$Q(t) = \Phi(t)e^{-tR}. \tag{17}$$

Das considerações acima decorre que

$$\begin{aligned} Q(t + 2T) &= \Phi(t + 2T)e^{-(t+2T)R} \\ &= \Phi(t + 2T)e^{-(2T+t)R} \\ &= \Phi(t + 2T)e^{-2TR}e^{-tR} \\ &= \Phi(t)C^2[e^{2TR}]^{-1}e^{-tR} \\ &= Q(t), \end{aligned}$$

mostrando que $Q(t)$ é $2T$ -periódica. Além disso, $Q(0) = \Phi(0)e^0 = I$. Por fim, $Q(t)$ é não singular, pois é produto de duas matrizes não singulares. \square

A aplicação $Q(t)$ dada no teorema de Floquet ficou conhecida na literatura como **transformação de Lyapunov–Floquet** (L–F). Como será visto mais adiante, tal transformação é uma transformação de Lyapunov que transforma o sistema LTV e periódico em um sistema linear invariante. Além disso, ela também tem papel fundamental para a teoria de controle proposta por Sinha e Joseph (1994), como será visto na próxima seção.

Teorema 14. *A aplicação $Q(t)$ é uma transformação de Lyapunov.*

Demonstração. Como visto no Teorema 13, a transformação $Q(t)$ é $2T$ -periódica e não singular. Uma vez que

$$\dot{Q}(t) = \dot{\Phi}(t)e^{-tR} - \Phi(t)Re^{-tR},$$

e ambas função e^{-tR} e $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$ são contínuas, segue que $\dot{Q}(t)$ é contínua. Além disso, $Q(t)$ é contínua e $2T$ -periódica e portanto $Q(t)$ é limitada. O mesmo argumento é válido para $Q(t)^{-1}$. Logo, $Q(t)$ é uma transformação de Lyapunov. \square

Uma consequência do teorema de Floquet é o seguinte:

Teorema 15. *(Lyapunov) Sejam R e $Q(t)$ como no Teorema 13. A transformação L - F transforma o sistema LTV e periódico*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \tag{18}$$

no seguinte sistema Lyapunov equivalente

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}(t)\tilde{x}(t), \tag{19}$$

sendo $\tilde{x}(t) = Q(t)^{-1}x(t)$ e $\tilde{A}(t) = R$. Em outras palavras, a transformação L - F transforma um sistema LTV e periódico em um sistema linear invariante no tempo.

Demonstração. Considere $P(t) = Q(t)^{-1}$. Como discutido anteriormente, o sistema (18) é Lyapunov equivalente ao sistema (19), sendo que

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t) &= [P(t)A(t) + \dot{P}(t)]P^{-1}(t) \\ &= [Q(t)^{-1}A(t) + d/dt(Q(t)^{-1})]Q(t) \\ &= Q(t)^{-1}[A(t)Q(t) - \dot{Q}(t)]. \end{aligned} \tag{20}$$

Resta provar que $Q(t)^{-1}[A(t)Q(t) - \dot{Q}(t)] = R$. De fato, como $\Phi(t) = Q(t)e^{Rt}$ então

$$\begin{aligned} A(t)Q(t)e^{Rt} &= A(t)\Phi(t) = \dot{\Phi}(t) = \dot{Q}(t)e^{Rt} + Q(t)Re^{Rt} \\ \implies A(t)Q(t) &= \dot{Q}(t) + Q(t)R \\ \implies Q(t)R &= A(t)Q(t) - \dot{Q}(t) \\ \implies R &= Q(t)^{-1}[A(t)Q(t) - \dot{Q}(t)]. \end{aligned} \tag{21}$$

De (20) e (21) segue que $\tilde{A}(t) = R$, como desejado. \square

O Teorema 15 mostra que analisar a estabilidade de um sistema LTV e periódico é equivalente a analisar a estabilidade do sistema Lyapunov equivalente $\dot{\tilde{x}} = R\tilde{x}$ que é linear invariante. A análise de estabilidade de sistemas lineares e invariantes pode ser feita

por meio dos autovalores da matriz dos estados R . Portanto, para estudar a estabilidade do sistema LTV e periódico (8), basta analisar os autovalores do sistema Lyapunov equivalente $\dot{\tilde{x}} = R\tilde{x}$. Os autovalores da matriz R , denotados por $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, são chamados de **expoentes característicos**. A matriz R pode ser obtida em função da matriz FTM (SINHA; HENRICHS; RAVINDRA, 2000, p. 168)

$$R = \frac{1}{2T} \log \Phi(2T) = \frac{1}{2T} \log \Phi(T)^2. \quad (22)$$

Os expoentes característicos estão associados com os multiplicadores de Floquet pela seguinte relação (MEIROVITCH, 2010, p. 267)

$$\lambda_j = \frac{1}{T} (\log |\rho_j| + i \arg \rho_j), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (23)$$

A igualdade acima permite caracterizar a estabilidade de um sistema LTV e periódico em termos dos multiplicadores de Floquet. Esta caracterização é dada no teorema a seguir.

Teorema 16. *Se todos os multiplicadores de Floquet tiverem módulo estritamente menor do que 1, o sistema (8) será assintoticamente estável; se pelo menos um dos multiplicadores de Floquet tiver módulo maior do que 1, o sistema será instável.*

Demonstração. O resultado segue diretamente dos Teoremas 12, 15 e da igualdade (23), observando que $\Re(\lambda_j) < 0$ se $|\rho_j| < 1$ e que $\Re(\lambda_j) > 0$ se $|\rho_j| > 1$. \square

Em resumo, os resultados obtidos por Lyapunov e Floquet mostram que estudar a estabilidade de sistemas LTV e periódicos equivale estudar a estabilidade de um sistema linear e invariante. Além disso, pode-se concluir a respeito da estabilidade do sistema por meio dos multiplicadores de Floquet, conforme visto no Teorema 16. Infelizmente obter a STM de forma exata só é possível se o sistema for comutativo. Por isso, métodos numéricos para obter a STM se fazem necessário.

3 MÉTODO NUMÉRICO PARA OBTER A STM

Este capítulo tem por objetivo apresentar o método numérico desenvolvido por Sinha e Butcher (1997) para obter uma aproximação da STM de um sistema LTV e periódico. Para poder usar as propriedades dos polinômios de Chebyshev alterados, o método consiste em considerar um novo sistema chamado de sistema normalizado. O sistema normalizado tem a propriedade de que seus coeficientes são todos periódicos e de período principal unitário. Portanto, tais coeficientes podem ser expandidos em polinômios de Chebyshev alterados. A partir de tal expansão, uma aproximação da matriz STM é obtida envolvendo as matrizes operacionais (matriz do Produto, Integração e de Chebyshev). Os resultados a respeito dos polinômios de Chebyshev apresentados neste capítulo podem ser encontrados em (SNYDER, 1966; FOX; PARKER, 1968).

3.1 POLINÔMIOS DE CHEBYSHEV

Nesta seção será apresentados os polinômios de Chebyshev e Chebyshev alterados. Também, será mostrado como expandir funções em polinômios de Chebyshev alterados.

Os polinômios de Chebyshev, denotados por $T_n(t)$, são definidos por uma lei de recorrência e portanto, é necessário definir os dois primeiros polinômios, a saber

$$T_0(t) = 1 \quad \text{e} \quad T_1(t) = t.$$

Os **polinômios de Chebyshev** são definidos a partir dos dois polinômios acima e a relação de recorrência é dada a seguir

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), \quad t \in [-1, 1] \text{ e } n \geq 1.$$

O domínio destes polinômios é o intervalo $[-1, 1]$. Os primeiros polinômios de Chebyshev são dados por:

$$T_0(t) = 1$$

$$T_1(t) = t$$

$$T_2(t) = 2t^2 - 1$$

$$T_3(t) = 4t^3 - 3t$$

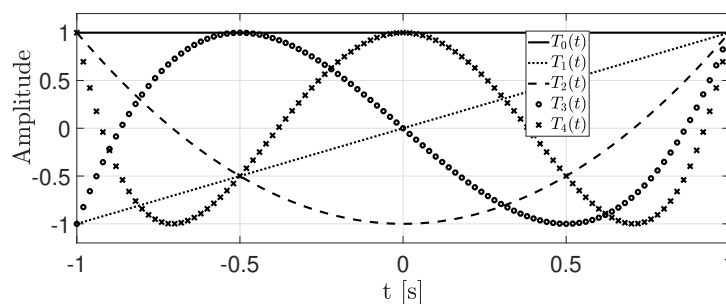
$$T_4(t) = 8t^4 - 8t + 1$$

$$T_5(t) = 16t^5 - 20t^3 + 5t$$

$$T_6(t) = 32t^6 - 48t^4 + 18t^2 - 1$$

$$T_7(t) = 64t^7 - 112t^5 + 56t^3 - 7t.$$

A Figura 1 mostra o gráfico dos cinco primeiros polinômios de Chebyshev.

Figura 1 – Gráfico dos cinco primeiros polinômios de Chebyshev.

Fonte: adaptado de Snyder (1966).

3.1.1 Polinômios de Chebyshev Alterados

Os **polinômios de Chebyshev alterados**, denotados por $T_n^*(t)$, são definidos a partir dos polinômios de Chebyshev $T_n(t)$ pela seguinte relação

$$T_n^*(t) = T_n(2t - 1).$$

Uma vez que o domínio de $T_n(t)$ é o intervalo $[-1, 1]$, segue que o domínio dos polinômios de Chebyshev alterado é $[0, 1]$. Os dois primeiros polinômios alterados são

$$\begin{aligned} T_0^*(t) &= T_0(2t - 1) = 1 \\ T_1^*(t) &= T_1(2t - 1) = 2t - 1. \end{aligned}$$

Os demais polinômios alterados são dados pela seguinte lei de recorrência

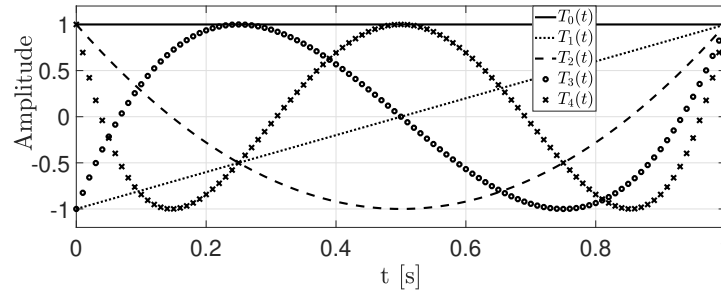
$$T_{n+1}^*(t) = 2(2t - 1)T_n^*(t) + T_{n-1}^*(t), \quad n \geq 1.$$

Os primeiros polinômios de Chebyshev alterados são:

$$\begin{aligned} T_0^*(t) &= 1 \\ T_1^*(t) &= 2t - 1 \\ T_2^*(t) &= 8t^2 - 8t + 1 \\ T_3^*(t) &= 32t^3 - 48t^2 + 18t - 1 \\ T_4^*(t) &= 128t^4 - 256t^3 + 160t^2 - 32t + 1 \\ T_5^*(t) &= 512t^5 - 1280t^4 + 1120t^3 - 400t^2 + 50t - 1 \\ T_6^*(t) &= 2048t^6 - 6144t^5 + 6912t^4 - 3584t^3 + 840t^2 - 72t + 1 \\ T_7^*(t) &= 8192t^7 - 28672t^6 + 39424t^5 - 26880t^4 + 9408t^3 - 1568t^2 + 98t - 1. \end{aligned}$$

A Figura 2 mostra os gráficos dos cinco primeiros polinômios de Chebyshev alterados.

Figura 2 – Gráfico dos cinco primeiros polinômios de Chebyshev alterados.



Fonte: adaptado de Snyder (1966).

3.1.2 Expansão de Função em Polinômios de Chebyshev Alterados

Seja $f(t)$ uma função contínua. Pode-se expandir a função f em termos dos polinômios de Chebyshev alterados da seguinte forma (SNYDER, 1966, p. 29)

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k^*(t), \quad (24)$$

onde os coeficientes a_i 's são dados por

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-t^2}} dt \quad (25)$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{f(t) T_k^*(t)}{\sqrt{t-t^2}} dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (26)$$

A série em (24) pode ser truncada a fim de obter uma aproximação para a função $f(t)$. Tal aproximação é dada por¹

$$f(t) \approx \sum_{k=0}^{m-1} a_k T_k^*(t) = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{m-1}] [T_0^*(t) \ T_1^*(t) \ \dots \ T_{m-1}^*(t)]'. \quad (27)$$

O vetor $[T_0^*(t) \ T_1^*(t) \ \dots \ T_{m-1}^*(t)]'$ será denotado simplesmente por $T^*(t)$, ficando subtendido o número de termos m da expansão.

Para efeito de ilustração, a Tabela 1 exhibe os dez primeiros coeficientes da expansão de função $\sin(2\pi t)$ em polinômios de Chebyshev alterados, que são obtidos pelas equações (25) e (26).

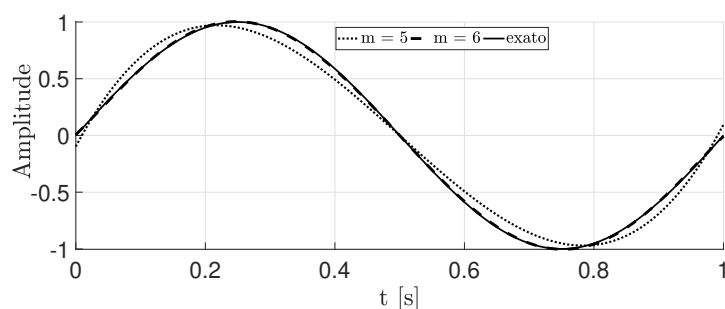
¹ Vale ressaltar aqui que o símbolo \approx está sendo usado para dizer que duas coisas são aproximadamente iguais.

Tabela 1 – Coeficientes da função $\sin(2\pi t)$ em polinômios de Chebyshev alterados com $m = 10$.

índices pares	índice ímpares
$a_0 = 0$	$a_1 = -0,56923$
$a_2 = 0$	$a_3 = +0,66691$
$a_4 = 0$	$a_5 = -0,10428$
$a_6 = 0$	$a_7 = +0,00684$
$a_8 = 0$	$a_9 = -0,00025$

Fonte: adaptado de Peruzzi (2005).

A Figura 3 mostra a aproximação da função $\sin(2\pi t)$ em polinômios de Chebyshev alterados considerando $m = 5$ e $m = 6$.

Figura 3 – Aproximação de $\sin(2\pi t)$ por polinômios de Chebyshev alterados considerando $m = 5$ e $m = 6$.

Fonte: autor.

Pode-se observar, pela figura acima, que para um número de termos relativamente pequeno, tem-se uma boa aproximação da função $\sin(2\pi t)$ em polinômios de Chebyshev alterados, no intervalo $[0,1]$.

3.2 MATRIZES OPERACIONAIS

As matrizes operacionais exercem um papel fundamental no método numérico que será apresentado. Como poderá ser visto, essas matrizes transformam os cálculos algébricos envolvidos na obtenção da aproximação da STM em multiplicações de matrizes, viabilizando a implementação computacionais.

3.2.1 Matriz Polinomial de Chebyshev

Antes de definir a matriz polinomial de Chebyshev, será definido o produto de Kronecker. Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$, então o **produto de Kronecker** de A por B é a

matriz definida por

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}. \quad (28)$$

Exemplo 3. *Sejam A e B definidas por*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Então

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} B & 2B & 3B \\ 3B & 2B & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 6 & 9 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

A seguir será definida a matriz polinomial de Chebyshev. Sejam m e n inteiros positivos, $T^*(t) = [T_0^*(t) \cdots T_{m-1}^*(t)]'$ em que $T_r^*(t)$ denota o polinômio de Chebyshev alterado de grau r e I_n a matriz identidade de ordem n . A **matriz polinomial de Chebyshev** é definida por

$$\widehat{T}(t) = I_n \otimes T^*(t). \quad (29)$$

Segue da definição de produto de Kronecker que $\widehat{T}(t) \in \mathbb{R}^{nm \times n}$. O exemplo a seguir ilustra como determinar a matriz polinomial de Chebyshev.

Exemplo 4. *Considere o caso particular em que $m = n = 2$. Neste caso, a matriz polinomial de Chebyshev é dada por*

$$\begin{aligned} \widehat{T}(t) &= I_2 \otimes T^*(t) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} T_0^*(t) \\ T_1^*(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T_0^*(t) & 0 \\ T_1^*(t) & 0 \\ 0 & T_0^*(t) \\ 0 & T_1^*(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 2}. \end{aligned}$$

3.2.2 Matriz Operacional do Produto

Uma das propriedades interessantes dos polinômios de Chebyshev alterados é que existe uma fórmula fechada para a multiplicação de dois destes polinômios. A multiplicação de dois polinômios de Chebyshev alterados é dada por (FOX; PARKER, 1968, p. 52)

$$T_r^*(t)T_k^*(t) = \frac{1}{2} \left(T_{|r-k|}^*(t) + T_{r+k}^*(t) \right). \quad (30)$$

Segue da equação (30) o seguinte resultado

$$T^*T'^* = \begin{bmatrix} T_0^* & T_1^* & T_2^* & \cdots & T_{m-1}^* \\ T_1^* & \frac{1}{2}(T_0^* + T_2^*) & \frac{1}{2}(T_1^* + T_3^*) & \cdots & \frac{1}{2}(T_{m-2}^* + T_m^*) \\ T_2^* & \frac{1}{2}(T_1^* + T_3^*) & \frac{1}{2}(T_0^* + T_4^*) & \cdots & \frac{1}{2}(T_{m-3}^* + T_{m-1}^*) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{m-1}^* & \frac{1}{2}(T_{m-2}^* + T_m^*) & \frac{1}{2}(T_{m-3}^* + T_{m+1}^*) & \cdots & \frac{1}{2}(T_0^* + T_{2(m-1)}^*) \end{bmatrix}. \quad (31)$$

onde

$$T^*(t) = [T_0^*(t) \cdots T_{m-1}^*(t)]'.$$

Considere duas funções $f(t)$ e $g(t)$ e suas respectivas aproximações por polinômios de Chebyshev alterados (ver (27))

$$f(t) \approx \sum_{i=0}^{m-1} a_i T_i^*(t) \quad \text{e} \quad g(t) \approx \sum_{i=0}^{m-1} b_i T_i^*(t).$$

O produto de $f(t)$ por $g(t)$ pode ser escrito por

$$f(t)g(t) = f(t)g(t)' \approx (aT^*(t))(bT^*(t))' = aT^*(t)T^*(t)'b', \quad (32)$$

onde

$$a = [a_0 \cdots a_{m-1}] \quad \text{e} \quad b = [b_0 \cdots b_{m-1}].$$

Calculando $aT^*(t)T^*(t)'$ e efetuando algumas simplificações (PERUZZI, 2005; SINHA; BUTCHER, 1997), pode-se mostrar que

$$f(t)g(t) \approx T^*(t)'Q_a b',$$

onde Q_a é dada por

$$Q_a = \begin{bmatrix} a_0 & \frac{a_1}{2} & \frac{a_2}{2} & \cdots & \frac{a_{m-1}}{2} \\ a_1 & a_0 + \frac{a_2}{2} & \frac{1}{2}(a_1 + a_3) & \cdots & \frac{1}{2}(a_{m-2} + a_m) \\ a_2 & \frac{1}{2}(a_1 + a_3) & a_0 + \frac{a_4}{2} & \cdots & \frac{1}{2}(a_{m-3} + a_{m+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1} & \frac{1}{2}(a_{m-2} + a_m) & \frac{1}{2}(a_{m-3} + a_{m+1}) & \cdots & a_0 + \frac{a_{2m-2}}{2} \end{bmatrix}_{m \times m}. \quad (33)$$

Os coeficientes a_r onde $r \geq m$ são considerados todos nulos. A matriz definida por (33) é chamada de **matriz operacional do produto**.

O exemplo a seguir ilustra como obter a matriz operacional do produto para um caso particular.

Exemplo 5. Considere o caso particular em que $m = 2$ e a e b são vetores arbitrários da forma

$$a = [a_0 \cdots a_{m-1}] \quad \text{e} \quad b = [b_0 \cdots b_{m-1}].$$

Segue que

$$\begin{aligned}
aT^*(t)T^*(t)'b' &= [a_0 \ a_1] \begin{bmatrix} T_0^* & T_1^* \\ T_1^* & \frac{1}{2}T_0^* + \frac{1}{2}T_2^* \end{bmatrix} b' \\
&= \begin{bmatrix} a_0T_0 + a_1T_1 & \frac{a_1}{2}T_0 + a_0T_1 + \frac{a_1}{2}T_2 \end{bmatrix} b' \\
&= [T_0 \ T_1 \ T_2] \begin{bmatrix} a_0 & \frac{a_1}{2} \\ a_1 & a_0 \\ 0 & \frac{a_1}{2} \end{bmatrix} b' \\
&\approx [T_0 \ T_1] \begin{bmatrix} a_0 & \frac{a_1}{2} \\ a_1 & a_0 \end{bmatrix} b' \\
&= T^*(t)'Q_a b',
\end{aligned}$$

onde,

$$Q_a = \begin{bmatrix} a_0 & \frac{a_1}{2} \\ a_1 & a_0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}.$$

3.2.3 Matriz Operacional de Integração

Outra matriz que exerce um papel fundamental é a matriz operacional de integração, que será definida a seguir. Tal matriz é interessante pois ela pode ser usada para aproximar a integral matricial $\int_0^\tau T^*(t)'dt$ na multiplicação de duas matrizes.

A seguinte propriedade fornece informações a respeito da integral de um polinômio de Chebyshev alterados (SNYDER, 1966, p. 20)

$$\int_0^\tau T_r^*(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{2}(T_0^*(\tau) + T_1^*(\tau)) & \text{se } r = 0, \\ \frac{1}{8}(T_2^*(\tau) - T_0^*(\tau)) & \text{se } r = 1, \\ \frac{1}{4} \left(\frac{T_{r+1}^*(\tau)}{r+1} - \frac{T_{r-1}^*(\tau)}{r-1} \right) - \frac{(-1)^r}{2(r^2-1)} & \text{se } r \geq 2. \end{cases} \quad (34)$$

Os exemplos a seguir mostram com a integral acima pode ser usada para transformar $\int_0^\tau T^*(t)'dt$ numa multiplicação matricial.

Exemplo 6. *Caso particular $m = 2$.*

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau T^*(t)'dt &= \begin{bmatrix} \int_0^\tau T_0^*(t)dt & \int_0^\tau T_1^*(t)dt \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T_0^*(\tau) + \frac{1}{2}T_1^*(\tau) & -\frac{1}{8}T_0^*(\tau) + \frac{1}{8}T_2^*(\tau) \end{bmatrix} \\
&= [T_0^*(\tau) \ T_1^*(\tau) \ T_2^*(\tau)] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \\
&\approx [T_0^*(\tau) \ T_1^*(\tau)] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= T^*(\tau)'G',$$

onde

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}.$$

Exemplo 7. Caso particular $m = 3$.

$$\begin{aligned} \int_0^\tau T^*(t)'dt &= \begin{bmatrix} \int_0^\tau T_0^*(t)dt & \int_0^\tau T_1^*(t)dt & \int_0^\tau T_2^*(t)dt \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T_0^*(\tau) + \frac{1}{2}T_1^*(\tau) & -\frac{1}{8}T_0^*(\tau) + \frac{1}{8}T_2^*(\tau) \\ -\frac{1}{6}T_0^*(\tau) - \frac{1}{4}T_1^*(\tau) - \frac{1}{12}T_3^*(\tau) \end{bmatrix} \\ &= [T_0^*(\tau) \quad T_1^*(\tau) \quad T_2^*(\tau) \quad T_3^*(\tau)] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{bmatrix} \\ &\approx [T_0^*(\tau) \quad T_1^*(\tau) \quad T_2^*(\tau)] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix} \\ &= T^*(\tau)'G', \end{aligned}$$

onde

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}.$$

De uma forma geral, a i -ésima linha de G é formada pelos coeficientes da integral do $(i - 1)$ -ésimo polinômio de Chebyshev alterado que aparecem na equação (34). Assim, se m é um inteiro positivo qualquer, a matriz G é dada por (SINHA; BUTCHER, 1997; PERUZZI, 2005)

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{(-1)^m}{2m(m-2)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-1}{4(m-2)} & 0 \end{bmatrix}_{m \times m}. \quad (35)$$

A matriz G dada acima é chamada de **matriz operacional de integração** e satisfaz a seguinte relação

$$\int_0^\tau T^*(t)'dt \approx T^*(\tau)'G'. \quad (36)$$

Na Seção 3.4 será visto como as matrizes operacionais do Produto, Integração e de Chebyshev foram usadas para obter um método eficiente para aproximar a STM por meio de soma e multiplicações matriciais.

3.3 MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS

Nesta seção será exibido o método das aproximações sucessivas. Será visto mais adiante que este método fornece uma aproximação para a STM de um sistema LTV. Entretanto, este método não é computacionalmente viável devido à complexidade dos cálculos envolvidos. Sinha e Butcher (1997) perceberam que, combinado o método das aproximações sucessivas com as matrizes operacionais, obtém-se um método para obter a STM aproximada que envolve apenas multiplicação e adição de matrizes, viabilizando assim sua implementação computacional.

Considere o sistema LTV com condição inicial, dado por

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (37)$$

A equação acima é equivalente a seguinte equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(\tau)x(\tau)d\tau.$$

Assumindo a aproximação inicial $x^{(0)}(t) = x_0$ obtém-se, por recorrência, uma seqüência de funções dadas por

$$x^{(k)}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(\tau)x^{(k-1)}(\tau)d\tau, \quad k = 1, 2, \dots \quad (38)$$

Pode-se mostrar que a seqüência dada em (38) converge para a solução $x(t)$ de (37) (SOTOMAYOR, 1979, p. 51). A forma de se obter a solução do sistema (37) utilizando a fórmula (38) é chamado de **método das aproximações sucessivas**, também conhecido como **método das iterações de Picard**.

Para ilustrar o método das aproximações sucessivas, considere o seguinte problema

$$\dot{x}(t) = ax(t), \quad x(0) = x_0. \quad (39)$$

A equação integral equivalente é dada por

$$x(t) = x_0 + \int_0^t ax(\tau)d\tau.$$

Considere a aproximação inicial $x^{(0)}(t) = x_0$. Aplicando a fórmula de recorrência dado por (38) obtém-se

$$x^{(1)}(t) = x_0 + \int_0^t ax^{(0)}(\tau)d\tau = x_0(1 + at).$$

Analogamente,

$$x^{(2)}(t) = x_0 + \int_0^t ax^{(1)}(\tau)d\tau = x_0 \left(1 + at + \frac{(at)^2}{2} \right).$$

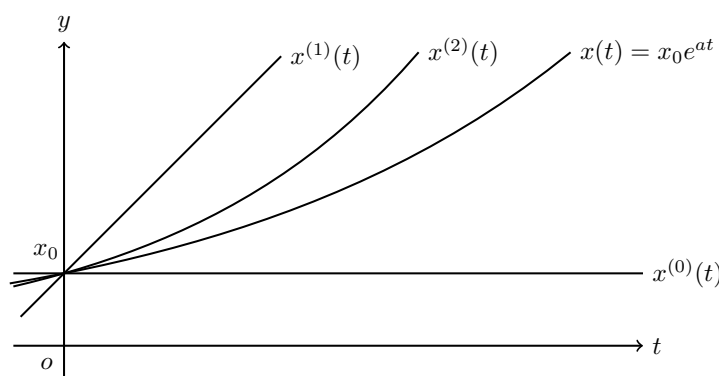
Prosseguindo com este raciocínio, a k -ésima aproximação é dada por

$$x^{(k)}(t) = x_0 \left(1 + at + \frac{(at)^2}{2} + \dots + \frac{(at)^k}{k!} \right). \quad (40)$$

Do conhecimento sobre séries de Taylor, sabe-se que $\sum_{k=0}^{\infty} (at)^k/k! = e^{at}$. Portanto, a série (40) converge para $x(t) = x_0 e^{at}$, que é a solução da equação (39).

A Figura 4 exhibe as primeiras aproximações do método acima e a solução exata do problema (39).

Figura 4 – Primeiras aproximações para o problema (39).



Fonte: adaptado de Sotomayor (1979).

O método das aproximações sucessivas tem grande importância na teoria de existência de soluções de equações do tipo (37), entretanto, a dificuldade de avaliar a integral em (38) torna essa técnica impraticável computacionalmente. Tal dificuldade pode ser contornada por meio das matrizes operacionais, como será visto na seção seguinte.

3.4 STM NUMÉRICA

Nesta seção será apresentado o método proposto por Sinha e Butcher (1997) para calcular a STM aproximada. Como será visto, tal método se baseia no método das aproximações sucessivas e nas matrizes operacionais. Inicialmente será analisado um método para obter a STM usando apenas as aproximações sucessivas. Posteriormente, será visto como a inclusão das matrizes operacionais simplificam os cálculos.

Para iniciar a discussão, considere o sistema LTV e periódico com condição inicial, dado por²

$$\dot{x}(t, \alpha) = A(t, \alpha)x(t, \alpha), \quad x(0, \alpha) = x_0, \quad (41)$$

² para preservar a notação original proposta em (SINHA; BUTCHER, 1997), o vetor dos parâmetros do sistema α será explicitado em $A(t, \alpha)$, na matriz $\Phi(t, \alpha)$ e no vetor $x(t, \alpha)$.

onde $x(t, \alpha) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $\alpha \in \mathbb{R}^L$ é o vetor dos parâmetros do sistema e a matriz $A(t, \alpha)$ é tal que $A(t + T, \alpha) = A(t, \alpha)$, onde T designa o período desta matriz. Se r é o número de coeficientes da matriz $A(t, \alpha)$ que são variantes, então

$$A(t, \alpha) = A_1(\alpha)f_1(t) + A_2(\alpha)f_2(t) + \cdots + A_r(\alpha)f_r(t), \quad (42)$$

sendo $f_1(t), f_2(t), \dots, f_r(t)$ os coeficientes variantes no tempo e periódicos.

Conforme o Teorema 5, a solução do sistema (41) para uma dada condição inicial x_0 pode ser expressa por

$$x(t, \alpha) = \Phi(t, \alpha)x_0.$$

Vejamos agora como calcular a matriz $\Phi(t, \alpha)$ via método das aproximações sucessivas. O sistema (41) na forma integral é dado por

$$x(t, \alpha) = x_0 + \int_0^t A(\tau, \alpha)x(\tau, \alpha)d\tau.$$

Considere a seguinte aproximação inicial $x^{(0)}(t, \alpha) = x_0$. Utilizando a equação (38) e o Lema 14 obtém-se a primeira aproximação dada por

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t, \alpha) &= x_0 + \int_0^t A(\tau_0, \alpha)x^{(0)}(\tau_0, \alpha)d\tau_0 \\ &= \left[I + \int_0^t A(\tau_0, \alpha)d\tau_0 \right] x_0, \end{aligned} \quad (43)$$

onde τ_0 está denotando a variável de integração.

A segunda aproximação é dada por

$$\begin{aligned} x^{(2)}(t, \alpha) &= x_0 + \int_0^t A(\tau_1, \alpha)x^{(1)}(\tau_1, \alpha)d\tau_1 \\ &= x_0 + \int_0^t A(\tau_1, \alpha) \left[I + \int_0^{\tau_1} A(\tau_0, \alpha)d\tau_0 \right] x_0 d\tau_1 \\ &= \left[I + \int_0^t A(\tau_1, \alpha)d\tau_1 + \int_0^t A(\tau_1, \alpha) \int_0^{\tau_1} A(\tau_0, \alpha)d\tau_0 d\tau_1 \right] x_0, \end{aligned} \quad (44)$$

onde τ_0, τ_1 estão indicando variáveis de integração.

Prosseguindo desta forma obtém-se a k -ésima aproximação dada por

$$\begin{aligned} x^{(k)}(t, \alpha) &= x_0 + \int_0^t A(\tau_{k-1}, \alpha)x^{(k-1)}(\tau_{k-1}, \alpha)d\tau_{k-1} \\ &= \left[I + \int_0^t A(\tau_{k-1}, \alpha)d\tau_{k-1} + \int_0^t A(\tau_{k-1}, \alpha) \int_0^{\tau_{k-1}} A(\tau_{k-2}, \alpha)d\tau_{k-2}d\tau_{k-1} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \int_0^t A(\tau_{k-1}, \alpha) \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} A(\tau_0, \alpha)d\tau_0 \cdots d\tau_{k-1} \right] x_0, \end{aligned} \quad (45)$$

onde os τ_i 's representam as variáveis de integração. Observe que a série truncada entre colchete é uma aproximação para STM, enquanto que a STM exata é obtida pela série infinita. A equação (45) pode ser usada para aproximar a STM, entretanto, observe a complexidade dos cálculos envolvidos nesta aproximação, especialmente se o número r dado em (42) for maior do que 1.

3.4.1 Método (SINHA; BUTCHER, 1997)

Para introduzir o método proposto por Sinha e Butcher (1997), deve-se considerar o sistema normalizado de período unitário dado por

$$\dot{x}(\tau, \alpha) = \bar{A}(\tau, \alpha)x(\tau, \alpha), \quad (46)$$

sendo

$$\bar{A}(\tau, \alpha) = TA(T\tau, \alpha).$$

Observe que o sistema normalizado é periódico de período principal unitário. De fato, segue que

$$\bar{A}(\tau + 1, \alpha) = TA(T(\tau + 1), \alpha) = TA(T\tau + T, \alpha) = TA(T\tau, \alpha) = \bar{A}(\tau, \alpha).$$

A STM do sistema original e do normalizado estão relacionadas pelo lema a seguir.

Lema 4. *Se $\bar{\Phi}(t, \alpha)$ é a STM do sistema normalizado, então $\Phi(t, \alpha) = \bar{\Phi}(t/T, \alpha)$ é a STM do sistema original.*

Demonstração. Seja $\bar{\Phi}(t, \alpha)$ a STM do sistema normalizado, então

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t, \alpha) &= \frac{d}{dt} [\bar{\Phi}(t/T, \alpha)] \\ &= \frac{1}{T} \dot{\bar{\Phi}}(t/T, \alpha) \\ &= \frac{1}{T} \bar{A}(t/T, \alpha) \bar{\Phi}(t/T, \alpha) \\ &= A(t, \alpha) \Phi(t, \alpha), \end{aligned}$$

e portanto, $\Phi(t, \alpha) = \bar{\Phi}(t/T, \alpha)$ é a STM do sistema original. \square

A matriz do sistema normalizado também pode ser escrita da seguinte forma

$$\bar{A}(\tau, \alpha) = \bar{A}_1(\alpha) \bar{f}_1(\tau) + \bar{A}_2(\alpha) \bar{f}_2(\tau) + \cdots + \bar{A}_r(\alpha) \bar{f}_r(\tau),$$

sendo que os $\bar{f}_i(\tau)$'s e as matrizes $\bar{A}_i(\alpha)$'s são dados por

$$\bar{f}_i(\tau) = f_i(T\tau), \quad \bar{A}_i(\alpha) = TA_i(\alpha), \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

A vantagem de trabalhar com o sistema normalizado é que os termos variantes $\bar{f}_i(\tau)$'s são periódico de período unitário, e portanto, pode-se expandi-los em polinômios de Chebyshev alterados no intervalo $[0, 1]$.

Após a normalização do sistema, deve-se fixar um inteiro positivo m , e expandir as funções $\bar{f}_i(\tau)$'s em polinômios de Chebyshev alterados no intervalo $[0, 1]$. Conforme as equações (25),(26) e (27), tal expansão é dada por

$$\bar{f}_i(\tau) \approx \sum_{j=0}^{m-1} d_{ij} T_j^*(\tau) = d_i T^*(\tau) = T^*(\tau)' d_i', \quad i = 1, \dots, s, \quad (47)$$

sendo que $d_i = [d_{i0} \ d_{i1} \ \dots \ d_{i(m-1)}]$ e os coeficientes d_{ij} 's dados por

$$d_{i0} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\bar{f}_i(\tau)}{\sqrt{\tau - \tau^2}} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{f_i(T\tau)}{\sqrt{\tau - \tau^2}} d\tau,$$

$$d_{ij} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\bar{f}_i(t) T_j^*(\tau)}{\sqrt{\tau - \tau^2}} d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{f_i(T\tau) T_j^*(\tau)}{\sqrt{\tau - \tau^2}} d\tau, \quad j = 1, \dots, (m-1).$$

Utilizando os Lemas técnicos exibidos no Apêndice A, a equação (43), considerando o sistema normalizado (46), pode ser escrita como

$$\begin{aligned} x^{(1,m)}(\tau, \alpha) &= x_0 + \int_0^\tau \bar{A}(t, \alpha) x_0 dt \\ &\stackrel{\text{(Lema 14)}}{=} x_0 + \left[\int_0^\tau \bar{A}(t, \alpha) dt \right] x_0 \\ &= \left[I + \int_0^\tau \bar{A}(t, \alpha) dt \right] x_0 \\ &\stackrel{\text{(Lema 16)}}{\approx} \left[I + \int_0^\tau \hat{T}(t)' D(\alpha) dt \right] x_0 \\ &\stackrel{\text{(Lema 17)}}{\approx} \left[I + \hat{T}(\tau)' \hat{G}' D(\alpha) \right] x_0 \\ &\stackrel{\text{(Lema 13)}}{=} \left[\hat{T}(\tau)' \hat{I} + \hat{T}(\tau)' \hat{G}' D(\alpha) \right] x_0 \\ &= \hat{T}(\tau)' \left[\hat{I} + \hat{G}' D(\alpha) \right] x_0, \end{aligned} \quad (48)$$

onde o par ordenado $(1, m)$ indica o número de aproximações pelo método das aproximações sucessivas, no caso 1 aproximação, e o número m indica a quantidade de termos da expansão das funções $\bar{f}_i(\tau)$'s em polinômios de Chebyshev alterados.

Prosseguindo com o mesmo raciocínio, a equação (44), também para o sistema normalizado, pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} x^{(2,m)}(\tau, \alpha) &= x_0 + \int_0^\tau \bar{A}(t, \alpha) x^{(1)}(t) dt \\ &\stackrel{\text{(Lema 16)}}{\approx} x_0 + \int_0^\tau \hat{T}(t)' D(\alpha) x^{(1)}(t) dt \\ &\stackrel{\text{(48)}}{=} x_0 + \int_0^\tau \hat{T}(t)' D(\alpha) \hat{T}(t)' \left(\hat{I} + \hat{G}' D(\alpha) \right) x_0 dt \\ &= \left[I + \int_0^\tau \hat{T}(t)' D(\alpha) \hat{T}(t)' \left(\hat{I} + \hat{G}' D(\alpha) \right) dt \right] x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{\text{(Lema 13)}}{=} \left[\widehat{T}(\tau)' \widehat{I} + \int_0^\tau \left(\widehat{T}(t)' D(\alpha) I + \widehat{T}(t)' D(\alpha) \widehat{T}(t)' \widehat{G}' D(\alpha) \right) dt \right] x_0 \\
 & \stackrel{\text{(Lema 17)}}{\approx} \left[\widehat{T}(\tau)' \widehat{I} + \widehat{T}(\tau)' \widehat{G}' D(\alpha) + \int_0^\tau D(\alpha) \widehat{T}(t) \widehat{T}(t)' \widehat{G}' D(\alpha) dt \right] x_0 \\
 & \stackrel{\text{(Lema 18)}}{\approx} \left[\widehat{T}(\tau)' \widehat{I} + \widehat{T}(\tau)' \widehat{G}' D(\alpha) + \int_0^\tau \widehat{T}(t)' \widehat{Q}_D \widehat{G}' D(\alpha) dt \right] x_0 \\
 & \stackrel{\text{(Lema 17)}}{\approx} \left[\widehat{T}(\tau)' \widehat{I} + \widehat{T}(\tau)' \widehat{G}' D(\alpha) + \widehat{T}(\tau)' \widehat{G}' \widehat{Q}_D \widehat{G}' D(\alpha) \right] x_0 \\
 & = \widehat{T}(\tau)' \left[\widehat{I} + (I_{nm} + \widehat{G}' \widehat{Q}_D) \widehat{G}' D(\alpha) \right] x_0 \\
 & = \widehat{T}(\tau)' \left[\widehat{I} + (I_{nm} + L(\alpha)) P(\alpha) \right] x_0,
 \end{aligned}$$

sendo

$$L(\alpha) = \widehat{G}' \widehat{Q}_D \text{ e } P(\alpha) = \widehat{G}' D(\alpha).$$

Continuando com este procedimento, a matriz $\bar{\Phi}(\tau, \alpha)$ do sistema normalizado (46) pode ser aproximada por (SINHA; BUTCHER, 1997, p. 68)

$$\bar{\Phi}^{(p,m)}(\tau, \alpha) = \widehat{T}(\tau)' \left[\widehat{I} + \left(\sum_{k=1}^{p-1} [L(\alpha)]^{k-1} \right) P(\alpha) \right]. \quad (49)$$

A equação (49) é uma aproximação para a STM do sistema normalizado (46) e, conseqüentemente,

$$\Phi^{(p,m)}(t, \alpha) = \bar{\Phi}^{(p,m)}(t/T, \alpha), \quad (50)$$

é uma aproximação para a STM do sistema original (41). Também, $\Phi^{(p,m)}(T, \alpha)$ é uma aproximação para a FTM e pode ser usada para estudar a estabilidade do sistema (41) através dos multiplicadores de Floquet.

A equação (50) é uma boa aproximação de $\Phi(t)$ apenas se $t \in [0, T]$, devido aos polinômios de Chebyshev alterados. Entretanto, para obter $\Phi(t)$ para $t > T$ basta considerar a equação (11) que fornece a seguinte relação

$$\begin{aligned}
 \Phi^{(p,m)}(t) &= \Phi^{(p,m)}(r + iT) \\
 &= \Phi^{(p,m)}(r) [\Phi^{(p,m)}(T)]^i \\
 &= \bar{\Phi}^{(p,m)}(r/T) [\bar{\Phi}^{(p,m)}(1)]^i,
 \end{aligned}$$

sendo $r \in \mathbb{R}$ e $i \in \mathbb{N}$ o resto e o divisor da divisão de t por T , respectivamente, onde $0 \leq r < T$. Vale ressaltar que na literatura são praticados os seguintes valores para os parâmetros p e m : $p = 40$ e $m = 20$.

3.5 VALIDAÇÃO DO MÉTODO E ANÁLISE DE ESTABILIDADE

3.5.1 Validação

A fim de validar a implementação computacional do método discutido, foi considerado um sistema π -periódico cuja STM exata é conhecida. O sistema considerado é dado pela seguinte equação

$$\dot{x}(t) = A(t, \alpha)x(t), \quad (51)$$

sendo α o parâmetro do sistema, $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]'$ o vetor dos estados e $A(t, \alpha)$ a matriz do sistema dada por

$$A(t, \alpha) = \begin{bmatrix} -1 + \alpha \cos^2 t & 1 - \alpha \sin t \cos t \\ -1 - \alpha \sin t \cos t & -1 + \alpha \sin^2 t \end{bmatrix}. \quad (52)$$

A STM exata é dada por (SINHA; BUTCHER, 1997, p. 71)

$$\Phi(t, \alpha) = \begin{bmatrix} e^{(\alpha-1)t} \cos^2 t & e^{-t} \sin t \\ -e^{(\alpha-1)t} \sin t & e^{-t} \cos t \end{bmatrix}. \quad (53)$$

A matriz (53) será comparada com a STM aproximada (50) a fim de validar o método discutido na subseção anterior.

Utilizando as seguintes relações trigonométricas

$$\cos^2(t) = \frac{1 + \cos(2t)}{2}, \quad \sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2} \quad \text{e} \quad \sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t),$$

a matriz $A(t, \alpha)$ pode ser escrita como

$$A(t, \alpha) = \begin{bmatrix} -1 + \frac{\alpha + \alpha \cos(2t)}{2} & 1 - \frac{\alpha}{2} \sin(2t) \\ -1 - \frac{\alpha}{2} \sin(2t) & -1 + \frac{\alpha - \alpha \cos(2t)}{2} \end{bmatrix}.$$

Observe que o período principal do sistema é $T = \pi$. Após a normalização do sistema original (51), o sistema normalizado a ser considerado é dado por

$$\dot{x}(\tau, \alpha) = \bar{A}(\tau, \alpha)x(\tau, \alpha),$$

sendo

$$\bar{A}(\tau, \alpha) = \pi A(\pi\tau, \alpha) = \pi \begin{bmatrix} -1 + \frac{\alpha + \alpha \cos(2\pi\tau)}{2} & 1 - \frac{\alpha}{2} \sin(2\pi\tau) \\ -1 - \frac{\alpha}{2} \sin(2\pi\tau) & -1 + \frac{\alpha - \alpha \cos(2\pi\tau)}{2} \end{bmatrix}.$$

A matriz $\bar{A}(\tau, \alpha)$, na equação acima, pode ser escrita como

$$\bar{A}(\tau, \alpha) = \bar{A}_1(\alpha) + \bar{A}_2(\alpha) \cos(2\pi\tau) + \bar{A}_3(\alpha) \sin(2\pi\tau),$$

onde

$$\bar{A}_1(\alpha) = \pi \begin{bmatrix} -1 + \alpha/2 & 1 \\ -1 & -1 + \alpha/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_2(\alpha) = \pi \begin{bmatrix} \alpha/2 & 0 \\ 0 & -\alpha/2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_3(\alpha) = \pi \begin{bmatrix} 0 & -\alpha/2 \\ -\alpha/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para o cálculo da STM aproximada, foram considerados $\bar{f}_1(\tau) = 1$, $\bar{f}_2(\tau) = \cos(2\pi\tau)$ e $\bar{f}_3(\tau) = \sin(2\pi\tau)$. A STM obtida numericamente foi comparada com a STM exata e os resultados estão apresentados nos gráficos e tabelas a seguir.

Tabela 2 – Primeiro elemento da STM exata e da STM aproximada, considerando $p = 14$ e $m = 7$. (a) solução exata; (b) solução aproximada.

τ	α		
	0.1	0.5	2
0	1,00000 ^a	1,00000 ^a	1,00000 ^a
	1,00006 ^b	0,99994 ^b	1,00094 ^b
$\frac{1}{4}$	0,34874 ^a	0,47746 ^a	1,55088 ^a
	0,34877 ^b	0,47754 ^b	1,55372 ^b
$\frac{1}{2}$	0,00000 ^a	0,00000 ^a	0,00000 ^a
	-0,00021 ^b	-0,00016 ^b	0,00208 ^b
$\frac{3}{4}$	-0,08483 ^a	-0,21769 ^a	-7,46049 ^a
	-0,08543 ^b	-0,21772 ^b	-7,45842 ^b
1	-0,05916 ^a	-0,20788 ^a	-23,14069 ^a
	-0,05908 ^b	-0,20797 ^b	-23,16206 ^b

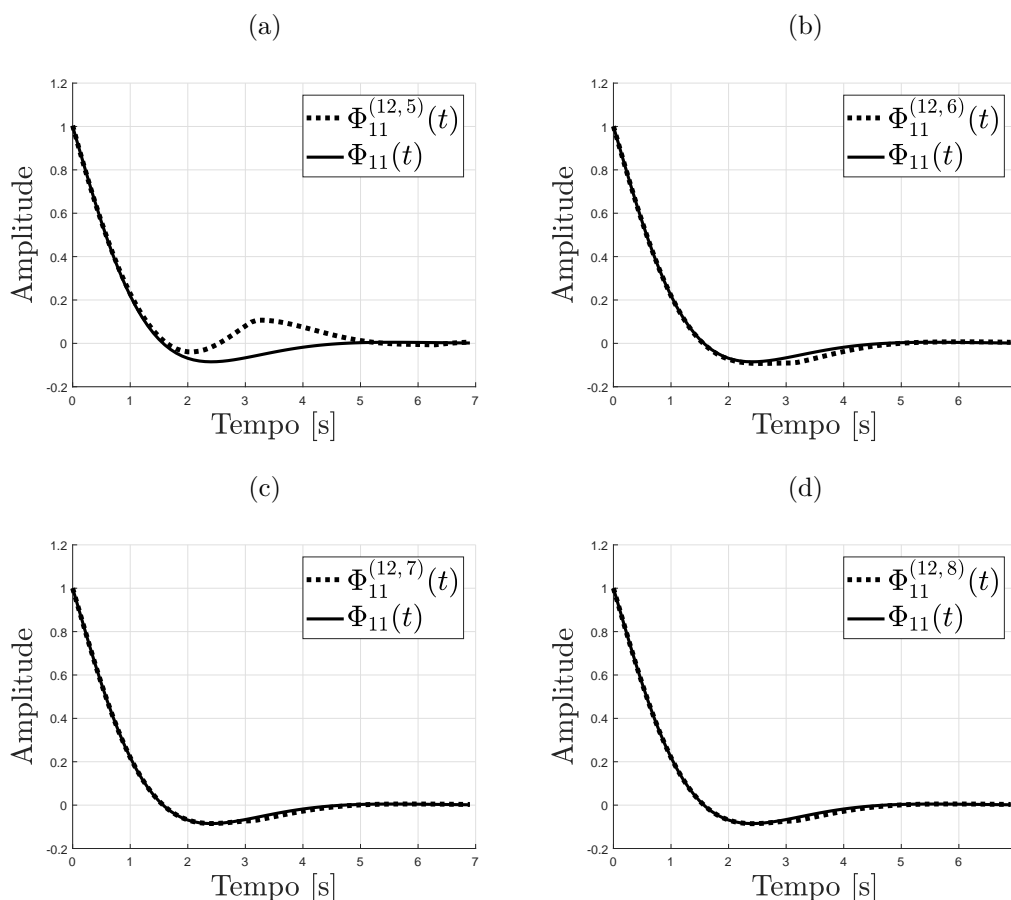
Fonte: adaptado de Sinha e Butcher (1997).

Os resultados apresentados na Tabela 2 são exatamente os mesmos obtidos por Sinha e Butcher (1997), comprovando a correta implementação do método.

A Figura 5 exibe o comportamento ao longo do tempo do primeiro elemento da STM aproximada, comparando-o com o primeiro elemento da STM exata. Os resultados mostram que para valores relativamente pequenos de p e m , os valores obtidos pela STM aproximada estão bem próximos dos valores da STM exata, mostrando a eficiência deste método.

Conforme discutido na Seção 2.2, os multiplicadores de Floquet tem um papel importante na análise de estabilidade de um sistema LTV, pois por meio deles é possível caracterizar a estabilidade do sistema. Para comprovar a eficiência do método numérico para obter os multiplicadores a Tabela 3 exibe os multiplicadores aproximados, obtidos considerando $p = 15$, diferentes valores de m e diferentes valores do parâmetro α .

Figura 5 – Primeiro elemento da STM exata ($\Phi_{11}(t)$) e aproximada ($\Phi_{11}^{(p,m)}(t)$) sendo $\alpha = 0.1$, $p = 12$ e $m = 5$ (a); $m = 6$ (b); $m = 7$ (c); $m = 8$ (d).



Fonte: autor.

Na Tabela 3 pode-se perceber que, na medida que o parâmetro m aumenta, os multiplicadores de Floquet ρ_1 e ρ_2 (ver (23)) convergem para seus respectivos valores exatos. Além disso, os valores aproximados são próximos dos exatos para valores de m relativamente pequenos.

Tabela 3 – Multiplicadores de Floquet aproximados considerando $p = 15$, $\alpha = 0, 1; 0, 5; 2$ e $m = 5; 7; 9$.

	$\alpha = 0, 1$	$\alpha = 0, 5$	$\alpha = 2$
$m = 5$	-0,06431;-0,05077	-0,20574;-0,05077	-20,5226;-0,05473
$m = 7$	-0,05902;-0,04311	-0,20786;-0,04331	-23,16205;-0,04321
$m = 9$	-0,05915;-0,0432	-0,20788;-0,04321	-23,14032;-0,04321
ρ_1 e ρ_2	-0,05916;-0,04321	-0,20787;-0,04321	-23,14069;-0,04321

Fonte: adaptado de Sinha e Butcher (1997).

Um dos objetivos deste trabalho é aplicar a técnica de controle discutida na Seção 4 para sistemas LTV e periódicos. Uma vez que no sinal de controle desta técnica aparecem

tanto a transformação L–F quanto sua inversa (ver (64)), deve-se obter um método para obter tal transformação.

Conforme visto no capítulo anterior, a transformação L–F é dada por

$$Q(t) = \Phi(t)e^{-Rt},$$

sendo R a matriz real e constante dada de forma exata por

$$R = \frac{1}{2T} \log \Phi(2T) = \frac{1}{2T} \log \Phi(T)^2.$$

Observe que a transformação L–F depende da STM e da matriz R . O método proposto por Sinha e Butcher (1997) pode ser aplicado para obter a STM aproximada por meio da equação (50). Consequentemente, a matriz R aproximada pode ser obtida da seguinte forma

$$R^{(p,m)} = \frac{1}{2T} \log \Phi^{(p,m)}(2T) = \frac{1}{2T} \log \Phi^{(p,m)}(T)^2. \quad (54)$$

Portanto, a transformação L–F aproximada pode ser obtida por

$$Q^{(p,m)}(t) = \Phi^{(p,m)}(t)e^{-R^{(p,m)}t}. \quad (55)$$

Para validar a equação (54), a Tabela 4 exhibe os elementos da matriz aproximada $R^{(p,m)}$ para diferentes valores de m , fixando $p = 15$ e $\alpha = 0, 1$, comparando-os com seus valores exatos.

Tabela 4 – Elementos da matriz $R^{(p,m)}$ aproximados para $\alpha = 0.1$, $p = 15$ e $m = 5$, $m = 7$ e $m = 9$.

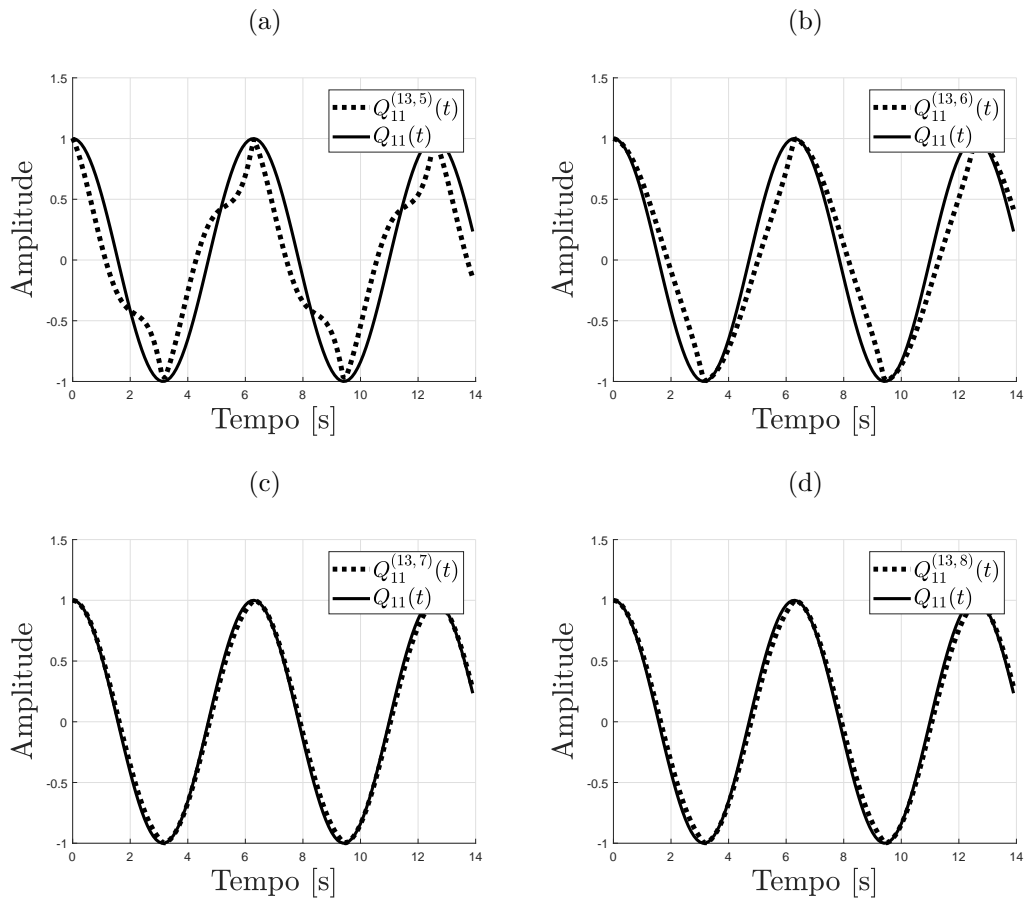
	$R_{11}^{(15,m)}$	$R_{12}^{(15,m)}$	$R_{21}^{(15,m)}$	$R_{22}^{(15,m)}$
$m = 5$	-0,8077	-0,0548	0,0398	-0,7661
$m = 7$	-0.9096	-0.0018	0.0010	-1.0125
$m = 9$	-0.8970	-0.0009	0.0009	-0.9958
valor exato de R_{ij}	-0,9	0	0	-1

Fonte: autor.

Para validar a equação (55), a Figura 6 apresenta o comportamento da transformação L–F numérica e exata ao longo do tempo.

Nos gráficos abaixo pode-se observar que para valores relativamente pequenos para p e m , o comportamento da transformação L–F aproximada está próximo do comportamento da transformação exata, comprovando a eficiência do método.

Figura 6 – Primeiro elemento da transformação L-F exata e aproximada sendo $\alpha = 0.1$, $p = 13$ e $m = 5$ (a); $m = 6$ (b); $m = 7$ (c); $m = 8$ (d).

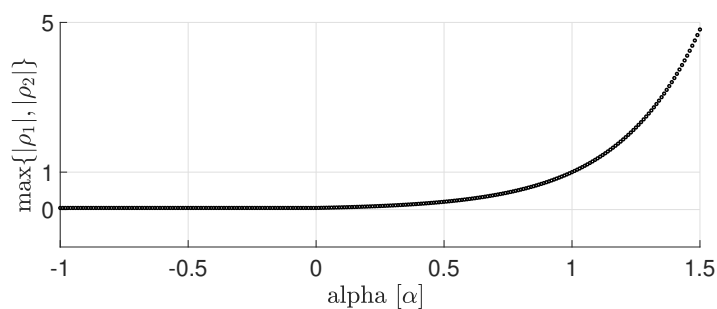


Fonte: autor.

3.5.2 Análise de Estabilidade

Foram analisados os multiplicadores de Floquet para estudar a influência do parâmetro α na estabilidade do sistema π -periódico dado por (51). A Figura 7 exibe o gráfico do parâmetro α pelo respectivo valor máximo dentre os módulos dos multiplicadores de Floquet ($\max\{|\rho_1|, |\rho_2|\}$).

Analisando a Figura 7, observa-se uma região de estabilidade e uma região de instabilidade. Para valores de α no intervalo $[-1, 1)$ o máximo dentre os módulos dos multiplicador de Floquet é menor do que 1, indicando assim que esta é a região de estabilidade. Analogamente, observa-se que para valores de α no intervalo $(1, 1,5]$ existe pelo menos um multiplicador de Floquet cujo o módulo é maior do que 1, indicando assim que esta é a região de instabilidade do sistema.

Figura 7 – Gráfico do parâmetro α por $\max\{|\rho_1|, |\rho_2|\}$.

Fonte: autor.

O resultado acima está de acordo com o esperado, uma vez que a estabilidade do sistema (51) pode ser verificada analisando a STM do sistema. Pelo Teorema 11 o sistema é assintoticamente estável se

$$\|\Phi(t, \alpha)\| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty.$$

Observe que a STM dada por (53) tende a zero se, e somente se, o parâmetro α for menor do que 1, pois neste caso cada uma das entradas da STM tenderá a zero quando t tender a ∞ , validando assim o resultado apresentado na Figura 7.

4 PROJETO DE CONTROLADORES

4.1 CONTROLE VIA TRANSFORMAÇÃO L-F

Nesta seção será apresentada uma técnica de controle para sistemas variantes no tempo e periódicos via transformação L-F. A técnica foi proposta por Sinha e Joseph (1994) e inicialmente era destinada apenas aos sistemas LTV e periódicos. Alguns anos depois, utilizando da equação do erro dinâmico¹ linearizada, Sinha, Henrichs e Ravindra (2000) generalizaram a técnica anterior para abranger o controle de sistemas não lineares. Nesta seção serão apresentadas as duas técnicas separadamente.

4.1.1 Controle de Sistemas LTV

Considere um sistema LTV e periódico, com lei de controle $u(t)$ dado a seguir

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (56)$$

sendo $A(t) = [a_{ij}(t)] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) = [b_{ik}(t)] \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ com $a_{ij}(t)$, $b_{ik}(t)$ e $u(t)$ funções limitadas e contínua e $A(t)$ uma matriz T -periódica. Seja $Q(t)$ a transformação L-F do sistema (56) não forçado ($u(t) = 0$). Considere a seguinte mudança de variável

$$q(t) = Q(t)^{-1}x(t),$$

e o seguinte sistema dado por

$$\dot{q}(t) = Rq(t) + Q(t)^{-1}B(t)u(t), \quad (57)$$

sendo R a matriz real e constante definida em (22). O objetivo é encontrar uma lei de controle $u(t)$ tal que o sistema realimentado (57) seja assintoticamente estável e Lyapunov equivalente ao sistema realimentado (56), via transformação L-F.

Observe que a matriz $Q(t)^{-1}B(t)$ de entrada do controlador em (57) é variante no tempo, portanto, será construído um sistema auxiliar cuja matriz de entrada do controlador seja invariante. Considere o seguinte sistema

$$\dot{\bar{q}} = R\bar{q} + B_0\bar{u}(t), \quad (58)$$

sendo B_0 uma matriz constante de posto completo tal que o par $[R, B_0]$ seja controlável (CHEN, 1998, p. 144). Considere a lei de controle $\bar{u}(t)$ dada por

$$\bar{u}(t) = F_0\bar{q}(t), \quad (59)$$

¹ erro dinâmico é a diferença entre a trajetória atual do sistema e a desejada

sendo F_0 o ganho do controlador $\bar{u}(t)$ que deve ser obtido tal que o sistema (58) realimentado com a lei de controle (59) seja assintoticamente estável. O ganho F_0 pode ser obtido aplicando a técnica de alocação de polos, por exemplo. Para cada instante t , considere o vetor $\varepsilon(t)$ dado por

$$\varepsilon(t) = q(t) - \bar{q}(t).$$

Derivando a equação acima com respeito ao tempo obtém-se

$$\dot{q}(t) - \dot{\bar{q}}(t) = R(q(t) - \bar{q}(t)) + Q(t)^{-1}B(t)u(t) - B_0F_0\bar{q}(t). \quad (60)$$

Somando e subtraindo $B_0F_0\varepsilon(t)$ na equação (60), obtém-se

$$\dot{\varepsilon}(t) = (R + B_0F_0)\varepsilon(t) + Q(t)^{-1}B(t)u(t) - B_0F_0q(t). \quad (61)$$

Desde que a matriz de estabilidade do sistema (61) é $(R + B_0F_0)$, os sistemas (57) e (58) podem ser considerados equivalentes se

$$Q(t)^{-1}B(t)u(t) = B_0F_0q(t). \quad (62)$$

Infelizmente, na maioria das aplicações não é possível obter uma lei de controle $u(t)$ satisfazendo a equação (62). Boghiu, Sinha e Marghitu (1998) propuseram considerar o vetor erro η definido por

$$\eta(t) = Q(t)^{-1}B(t)u(t) - B_0F_0q(t),$$

e obter o controlador $u(t)$ tal que o índice de performance $\eta'\eta$ seja minimizado. O controlador $u(t)$ assim obtido é dado por

$$u(t) = B^*(t)Q(t)B_0F_0q(t), \quad (63)$$

sendo que

$$B^*(t) = (B(t)'B(t))^{-1}B(t)',$$

é a inversa generalizada da matriz $B(t)$. Para obter a lei de controle em função dos estados do sistema original basta observar que $q(t) = Q(t)^{-1}x(t)$, e portanto, a lei de controle é dada por

$$u(t) = B^*(t)Q(t)B_0F_0Q(t)^{-1}x(t). \quad (64)$$

Observe que a matriz de ganho $F(t)$ do controlador $u(t)$ é variante no tempo e dada por

$$F(t) = B^*(t)Q(t)B_0F_0Q(t)^{-1}.$$

Portanto, o sistema (56) realimentado com a lei de controle (64) é descrito por

$$\dot{x}(t) = \left(A(t) + B(t)B^*(t)Q(t)B_0F_0Q(t)^{-1} \right) x(t). \quad (65)$$

A análise da estabilidade assintótica do sistema acima será separada em dois casos. **Caso 1º** - Suponha que seja possível obter a lei de controle de forma exata, por exemplo, quando a matriz $B(t)$ é quadrada e invertível para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Neste caso, a inversa generalizada $B^*(t)$ coincidirá com a inversa usual e, portanto, $B(t)B^*(t) = I$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$. Assim, o sistema realimentado será

$$\dot{x}(t) = \left(A(t) + Q(t)B_0F_0Q(t)^{-1} \right) x(t). \quad (66)$$

A mesma lei de controle (63) aplicada ao sistema (57), produz o seguinte sistema realimentado

$$\dot{q}(t) = (R + B_0F_0)q(t). \quad (67)$$

O sistema (67) é Lyapunov equivalente ao sistema (66) via transformação L-F. Uma vez que o sistema (67) é assintoticamente estável (por construção), a transformação L-F é uma transformação de Lyapunov (Teorema 14) e transformações de Lyapunov preservam estabilidade assintótica (Teorema 12), segue que o sistema (66) é assintoticamente estável.

Caso 2º - No caso em não é possível obter a lei de controle $u(t)$ de forma exata — que é o caso da maioria das aplicações — o sistema realimentado será (65). Os exemplos disponíveis na literatura (SINHA; JOSEPH, 1994; BOGHIU; SINHA; MARGHITU, 1998; SINHA; HENRICHS; RAVINDRA, 2000; SHERRILL et al., 2015) e as simulações feitas mostram que mesmo usando uma lei de controle aproximada é possível encontrar um ganho F_0 , conforme procedimento acima, que estabiliza assintoticamente o sistema (65).

4.1.2 Controle de um Sistema Comutativo

A seguir, será aplicada a técnica de controle via transformação L-F em um sistema comutativo. Considere o sistema π -comutativo definido em (52), com parâmetro $\alpha = 1, 2$ e sinal de controle $u(t)$ dado por

$$\dot{x}(t) = A(t, \alpha)x(t) + B(t)u(t), \quad (68)$$

sendo

$$A(t, \alpha) = \begin{bmatrix} -1 + \alpha \cos^2 t & 1 - \alpha \sin t \cos t \\ -1 - \alpha \sin t \cos t & -1 + \alpha \sin^2 t \end{bmatrix}; \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}';$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 - \cos(t) \end{bmatrix}; \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}. \quad (69)$$

Primeiramente deve-se obter os multiplicadores de Floquet do sistema acima para analisar a estabilidade do sistema não forçado ($u(t) = 0$). A FTM do sistema foi obtida pela equação (50), considerando $m = 20$ e $p = 40$. A FTM obtida foi:

$$\Phi(\pi) = \begin{bmatrix} -1,8744 & 0 \\ 0 & -0,0432 \end{bmatrix}.$$

Os multiplicadores de Floquet do sistema são

$$\rho_1 = -1,8744 \text{ e } \rho_2 = -0,0432,$$

onde se verifica a instabilidade do sistema devido ao primeiro multiplicador de Floquet, pois $|\rho_1| = 1,8744 > 1$.

Outra forma de analisar a estabilidade é por meio dos autovalores da matriz do sistema Lyapunov equivalente (expoentes característicos), via transformação L-F. Considere o sistema (68) sem o sinal de controle. Sendo este sistema LTV e periódico, existe um sistema Lyapunov equivalente, via transformação L-F, que é invariante no tempo, dado por

$$\dot{q} = Rq,$$

sendo R a matriz constante obtida pela equação (22), dada por

$$R = \begin{bmatrix} 0,1999 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (70)$$

Os autovalores da matriz do sistema Lyapunov equivalente acima são: $\lambda_1 = 0,1999$ e $\lambda_2 = -1$. O autovalor $\lambda_1 = 0,1999 > 0$ indica a instabilidade do sistema.

Uma vez que o sistema é instável, será projetado um controlador $u(t)$ tal que o sistema realimentado seja assintoticamente estável. Inicialmente, deve-se observar que a matriz $B(t)$, definida em (69), é quadrada e invertível e, portanto, a lei de controle $u(t)$ poderá ser obtida de forma exata.

Para projetar o controlador via transformação L-F, deve-se considerar a seguinte mudança de variável

$$q(t) = Q(t)^{-1}x(t),$$

e o seguinte sistema

$$\dot{q}(t) = Rq(t) + Q(t)^{-1}B(t)u(t), \quad (71)$$

sendo R a matriz dada por (70) e $Q(t)$ a transformação L-F do sistema sem o sinal de controle. Como a matriz que multiplica o controlador $u(t)$ no sistema acima é variante no tempo ($Q(t)^{-1}B(t)$), deve-se construir um sistema auxiliar cuja matriz que multiplica o controlador seja invariante. Considere o seguinte sistema

$$\dot{\bar{q}} = R\bar{q} + B_0\bar{u}(t), \quad (72)$$

sendo $\bar{u}(t) = F_0q(t)$ e B_0 uma matriz constante de posto completo tal que o par $[R, B_0]$ seja controlável. A matriz B_0 escolhida foi

$$B_0 = [1 \ 1]'$$

O ganho F_0 do controlador foi obtido por meio da técnica de alocação de polos, sendo que os polos desejáveis escolhidos foram -1 e -1 . O ganho assim obtido foi

$$F_0 = [-1, 1999 \ 0]. \quad (73)$$

Como vimos na Subseção 4.1, o erro dinâmico $\varepsilon(t)$ entre $q(t)$ e $\bar{q}(t)$ é dado por $\varepsilon(t) = q(t) - \bar{q}(t)$ e sua equação dada por

$$\dot{\varepsilon}(t) = (R + B_0 F_0)\varepsilon(t) + Q(t)^{-1}B(t)u(t) - B_0 F_0 q(t). \quad (74)$$

Desde que a matriz de estabilidade do sistema (74) é $(R + B_0 F_0)$, os sistemas (71) e (72) são equivalentes se

$$Q(t)^{-1}B(t)u(t) = B_0 F_0 q(t). \quad (75)$$

Como $Q(t)$ e $B(t)$ são invertíveis, a lei de controle $u(t)$ a ser considerada é

$$u(t) = B^*(t)Q(t)B_0 F_0 q(t) = B^*(t)Q(t)B_0 F_0 Q(t)^{-1}x(t), \quad (76)$$

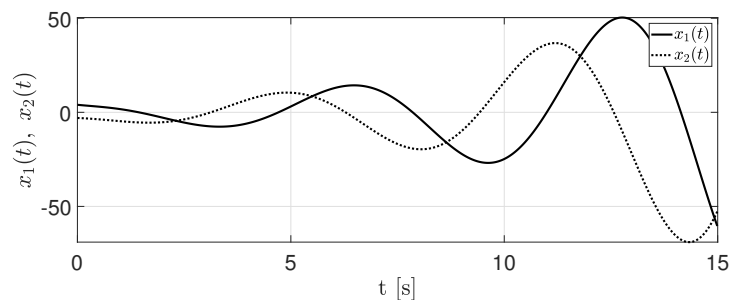
sendo $B^*(t)$ a inversa generalizada de $B(t)$, que neste caso coincide com $B(t)^{-1}$. O sistema (68) realimentado com a lei de controle (76) é dado por

$$\dot{x}(t) = \left(A(t, \alpha) + Q(t)B_0 F_0 Q(t)^{-1} \right) x(t). \quad (77)$$

As soluções foram simuladas no MATLAB[®] utilizando o pacote *ode45*. Os gráficos obtidos do comportamento do sistema, tanto do sistema controlado quanto do sistema sem controle, são apresentados a seguir. Foi escolhido $x_0 = [4 \ -3]'$ como condição inicial.

Na Figura 8, observe que o comportamento das variáveis de estado é oscilatório, tendo amplitudes mais elevadas a medida que o tempo passa.

Figura 8 – Comportamento dos estados do sistema sem controle.

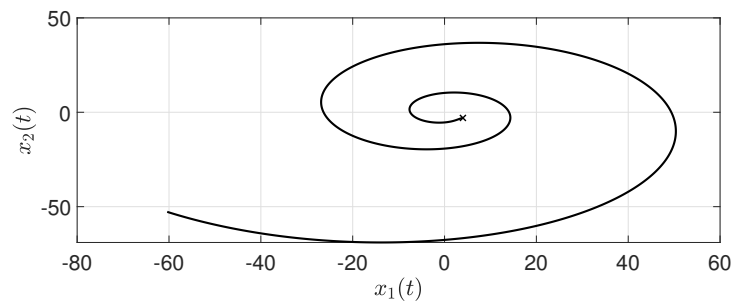


Fonte: autor.

Na Figura 9, que é o Plano de Fase do sistema, a trajetória diverge da origem a medida que o tempo passa. O ponto \mathbf{x} que aparece na Figura 9, e que aparecerá em

mais algumas figuras a seguir, está indicando o ponto de partida da trajetória, ou seja, a condição inicial.

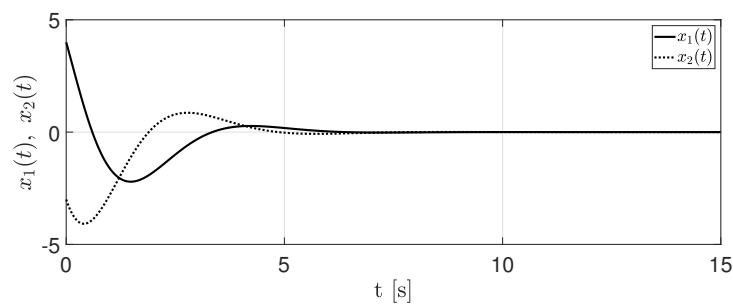
Figura 9 – Plano de Fase do sistema sem controle.



Fonte: autor.

A Figura 10 exibe o comportamento das variáveis de estados do sistema controlado. Observe que a técnica de controle foi eficiente para conduzir os estados a origem. Além disso, observe que o tempo de transitório foi de aproximadamente 7 segundos.

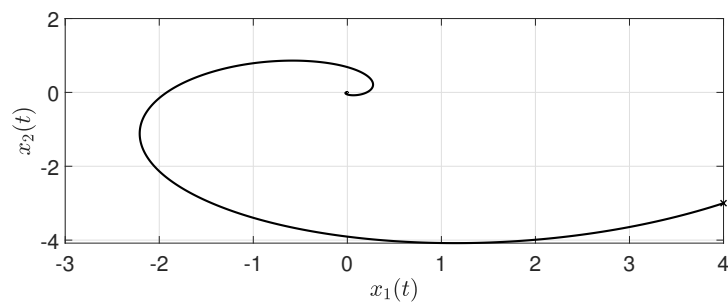
Figura 10 – Comportamento dos estados do sistema controlado.



Fonte: autor.

A Figura 11 exibe o Plano de Fase do sistema controlado. Observe que a trajetória parte da condição inicial em direção à origem, caracterizando a estabilidade assintótica do sistema.

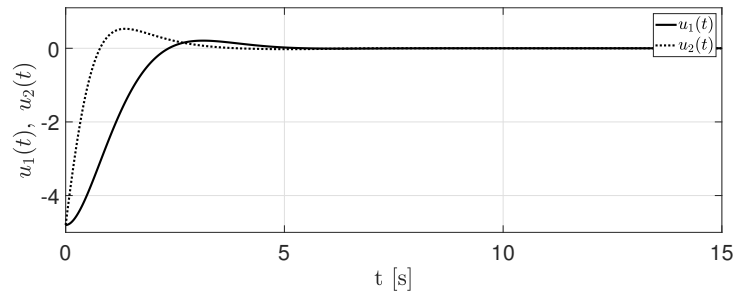
Figura 11 – Plano de Fase do sistema controlado.



Fonte: autor.

A Figura 12 exibe o comportamento dos sinais de controle $u_1(t)$ e $u_2(t)$. Pode-se observar que o controlador atua de forma suave, sem movimentos abruptos e com amplitude máxima menor do que 5, em módulo.

Figura 12 – Sinais de controle $u_1(t)$ e $u_2(t)$.



Fonte: autor.

Agora, suponha que a matriz $B(t)$ do sistema (68) seja da forma

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 - \cos(t) \end{bmatrix}'.$$

Neste caso, a matriz $B(t)$ sequer é quadrada e, portanto, uma lei de controle aproximada será considerada. Conforme a equação (64), a lei de controle aproximada é

$$u(t) = B^*(t)Q(t)B_0F_0q(t) = B^*(t)Q(t)B_0F_0Q(t)^{-1}x(t). \quad (78)$$

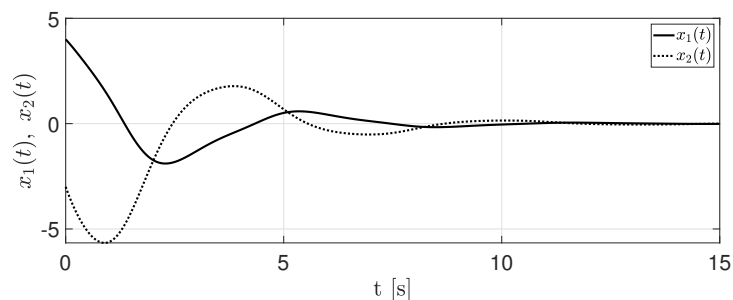
Assim, o sistema (68) realimentado com a lei de controle (78) é dado por

$$\dot{x}(t) = \left(A(t, \alpha) + B(t)B^*(t)Q(t)B_0F_0Q(t)^{-1} \right) x(t). \quad (79)$$

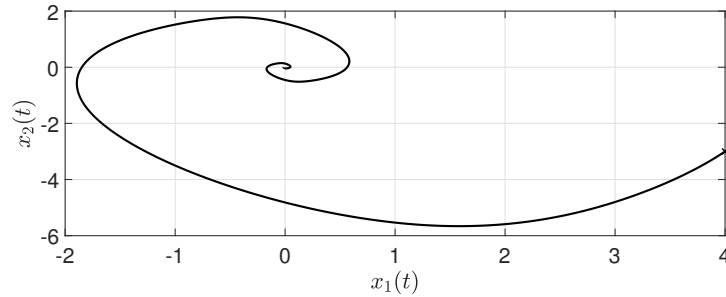
A seguir, são apresentados os gráficos do sistema controlado considerando a lei de controle aproximada e condição inicial $x_0 = [4 \quad -3]'$. Neste caso, o mesmo ganho F_0 dado em (72) foi utilizado.

Na Figura 13, pode-se observar a eficiência do controlador para conduzir os estados a zero, mesmo considerando a lei de controle aproximada.

Figura 13 – Estados do sistema controlado com lei de controle aproximada.



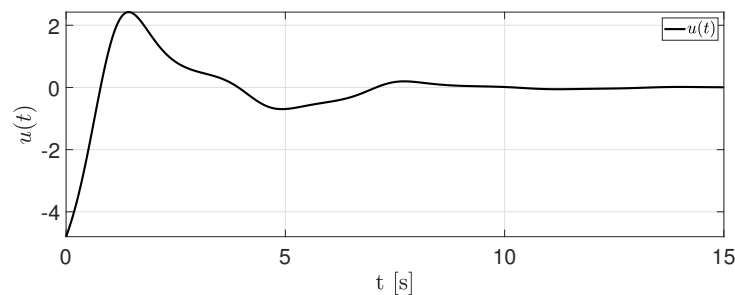
Fonte: autor.

Figura 14 – Plano de Fase do sistema controlado com lei de controle aproximada.

Fonte: autor.

Na Figura 14, pode-se observar o Plano de Fase do sistema considerando a lei de controle aproximada. Observe que a trajetória parte da condição inicial em direção a origem.

A Figura 15 exibe o comportamento do sinal de controle $u(t)$ ao longo do tempo. A lei de controle aproximada atua de forma suave assim como a lei de controle exata, como amplitude máxima de 5, em módulo.

Figura 15 – Sinal de controle $u(t)$.

Fonte: autor.

Observar que mesmo considerando a lei de controle aproximada, o ganho F_0 obtido em (72) também estabiliza assintoticamente o sistema (79).

4.1.3 Controle de Sistemas não Lineares

Para iniciar a discussão sobre o controle de sistema não lineares, considere o seguinte sistema, variante no tempo e com lei de controle $u(t)$ dado por

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + u(t). \quad (80)$$

Seja $y(t)$ a trajetória desejada e $x(t)$ a trajetória do sistema controlado. O objetivo da lei de controle $u(t)$ é conduzir a trajetória do sistema controlado $x(t)$ para a trajetória desejada $y(t)$. Neste método, o vetor de controle $u(t)$ é dado por

$$u(t) = u_f(t) + u_b(t), \quad (81)$$

onde

$$u_f(t) = \dot{y}(t) - f(t, y(t)), \quad (82)$$

e

$$u_b(t) = F(t) (x(t) - y(t)).$$

A parcela $u_f(t)$ é chamada de *feedforward* e a parcela $u_b(t)$ de *feedback*. A matriz $F(t)$ é chamada de ganho da parte *feedback* do controlador e será obtida a seguir. Com o termo de controle $u(t)$ dado por (81), a equação (80) pode ser escrita como

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + u_f(t) + u_b(t). \quad (83)$$

Substituindo (82) em (83) obtém-se

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + \dot{y}(t) - f(t, y(t)) + u_b(t),$$

ou seja,

$$\dot{x}(t) - \dot{y}(t) = f(t, x(t)) - f(t, y(t)) + u_b(t). \quad (84)$$

Definindo o erro dinâmico entre $x(t)$ (trajetória do sistema controlado) e $y(t)$ (trajetória desejada) como sendo

$$e(t) = x(t) - y(t),$$

tem-se

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{y}(t).$$

Considerando a função definida por

$$g(t, e(t)) = f(t, e(t) + y(t)) - f(t, y(t)),$$

e substituindo as três últimas igualdades acima em (84) obtém-se a equação do erro dinâmico entre a trajetória do sistema controlado e a trajetória desejada, dada por

$$\dot{e}(t) = g(t, e(t)) + u_b(t).$$

Defina a seguinte matriz

$$A(t) = \left[\frac{\partial g(t, e)}{\partial e} \right]_{e=0}.$$

Se a condição

$$\lim_{\|e\| \rightarrow 0} \sup_{t \geq 0} \frac{\|g(t, e) - A(t)e + u_b\|}{\|e\|} = 0,$$

for verificada, então o sistema

$$\dot{e}(t) = A(t)e(t) + u_b(t), \quad (85)$$

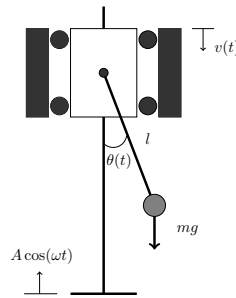
é chamado de linearização do sistema (80) ao redor do ponto de equilíbrio $e = 0$ (SINHA; HENRICHS; RAVINDRA, 2000).

Observe que o sistema (85) é um sistema LTV. Se, além disso, ele for periódico então pode-se aplicar a técnica descrita na seção anterior para encontrar a lei de controle $u_b(t)$ tal que o sistema (85) seja assintoticamente estável, ou seja, $e(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Consequentemente, $x(t) \rightarrow y(t)$ quando $t \rightarrow \infty$ como desejado.

4.1.4 Controle de um Pêndulo Simples Excitado Verticalmente

Para testar a eficiência da técnica de controle em sistemas não lineares, considerou-se o problema de controlar um pêndulo simples sujeito a uma excitação vertical, conforme ilustrado na figura a seguir.

Figura 16 – Pêndulo simples com excitação vertical no suporte.



Fonte: adaptado de Peruzzi (2005).

A equação dinâmica do pêndulo (PERUZZI, 2005, p. 51 e 173) é dada por

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{l}\dot{\theta} + \frac{A\omega^2}{l} \cos(\omega t) \sin(\theta) + \frac{g}{l} \sin(\theta) = v(t).$$

Definindo $q = \frac{A\omega^2}{l}$, $\beta = \frac{2}{l}$ e $\nu = \frac{g}{l}$, a equação acima pode ser escrita por

$$\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + (q \cos(\omega t) + \nu) \sin(\theta) = v(t). \quad (86)$$

Perceba que a equação (86) não está no formato de (80). Neste caso, o método de redução de ordem também pode ser utilizado. Considere a seguinte mudança de variáveis

$$x_1 = \theta, \quad x_2 = \dot{\theta} \quad \text{e} \quad x = [x_1 \quad x_2]'$$

Desta forma, decorre que

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{\theta} = x_2, \\ \ddot{x}_2 &= \ddot{\theta} = -\beta x_2 - (q \cos(\omega t) + \nu) \sin(x_1) + v(t). \end{aligned}$$

Considerando $f_1(t, x)$ e $f_2(t, x)$ definidas da seguinte forma

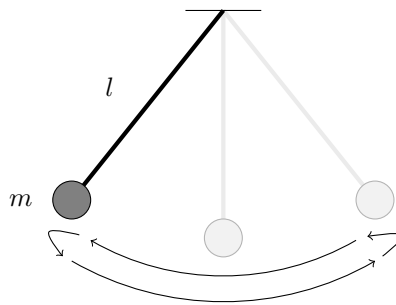
$$\begin{aligned} f_1(t, x) &= x_2, \\ f_2(t, x) &= -\beta x_2 - (q \cos(\omega t) + \nu) \sin(x_1), \end{aligned}$$

e definindo $f(t, x) = [f_1(t, x) \ f_2(t, x)]'$, decorre que

$$\dot{x} = f(t, x) + u(t), \tag{87}$$

sendo $u(t) = u_f(t) + u_b(t)$ o sinal de controle que é a soma da parcela *feedforward* e *feedback*, sendo que a parcela *feedback* é dada por $u_b(t) = [0 \ v(t)]'$. Deseja-se obter uma lei de controle $u(t)$ tal que o pêndulo simples com excitação vertical oscile da mesma forma que um pendulo simples sem a excitação vertical. O movimento desejado é ilustrado na Figura 17.

Figura 17 – Movimento desejado do pêndulo.



Fonte: autor.

Conforme Peruzzi (2005, p. 171 e 172), as coordenadas cartesianas $(z_1(t), z_2(t))$ do movimento da massa do pêndulo, no instante t , é dada por

$$z_1(t) = l \sin(\theta(t)), \quad z_2(t) = -l \cos(\theta(t)) - A \cos(\omega t),$$

sendo $\theta(t)$ a posição angular que o pêndulo faz com o eixo vertical. A solução desejada escolhida foi $y_1(t) = \sin(t)$, ou seja,

$$y(t) = [y_1(t) \ \dot{y}_1(t)]' = [\sin(t) \ \cos(t)]'.$$

A lei de controle $u(t)$ é dada por

$$u(t) = u_f(t) + u_b(t),$$

sendo $u_f(t)$ a parcela *feedforward* e $u_b(t)$ a parcela *feedback* do controlador que devem ser determinadas. Conforme a equação (82), a parcela *feedforward* é dada por

$$u_f(t) = \dot{y}(t) - f(t, y)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\beta \cos(t) - (q \cos(\omega t) + \nu) \sin(\sin(t)) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(t) + \beta \cos(t) + (q \cos(\omega t) + \nu) \sin(\sin(t)) \end{bmatrix}. \tag{88}
\end{aligned}$$

Substituindo (88) em (87) e considerando $e(t) = x(t) - y(t)$ obtém-se a equação do erro dinâmico entre a trajetória do sistema e a trajetória desejada, dada por

$$\dot{e}(t) = g(t, e(t)) + u_b(t), \tag{89}$$

sendo $g(t, e(t)) = f(t, e(t) + y(t)) - f(t, y(t))$. A linearização do sistema (89) ao redor do ponto $e = 0$ é dada por

$$A(t) = \left[\frac{\partial g}{\partial e}(t, e) \right]_{e=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q \cos(\omega t) - \nu & -\beta \end{bmatrix}.$$

Portanto, a equação dinâmica do sistema linearizado é dada por

$$\dot{e}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q \cos(\omega t) - \nu & -\beta \end{bmatrix} e(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t).$$

O sistema linearizado é LTV e periódico de período $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e, portanto, a técnica descrita na Subseção 4.1.1 será usada para obter a parcela *feedback* do controlador.

A transformação L-F do sistema linearizado o transforma em um sistema Lyapunov equivalente que é invariante no tempo, dado por $\dot{q} = Rq$, sendo R a matriz dada por (22). Para obter R , será utilizada o método descrito na Subseção 3.4.1. Primeiramente, deve-se considerar o sistema normalização dado por

$$\dot{e}(\tau) = \bar{A}(\tau)e(\tau),$$

sendo

$$\bar{A}(\tau) = \pi A(\pi\tau) = \pi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q \cos(\omega\pi\tau) - \nu & -\beta \end{bmatrix}.$$

A matriz $\bar{A}(\tau)$, da equação acima, pode ser escrita como

$$\bar{A}(\tau) = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 \cos(\omega\pi\tau),$$

onde

$$\bar{A}_1 = \pi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\nu & -\beta \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_2 = \pi \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -q & 0 \end{bmatrix}.$$

Para os cálculos numéricos foram considerados $m = 20$ e $p = 40$. Também, foram considerados os seguintes parâmetros: $l = 9,81$; $A = 4,905$; $\omega = 2$. Desta forma, segue que $q = 2$, $\nu = 1$ e $\beta = 0,2039$. A matriz R obtida é descrita a seguir

$$R = \begin{bmatrix} -0,1339 & -0,3137 \\ -0,6566 & -0,0700 \end{bmatrix}.$$

Para projetar a parcela *feedback* do controlador via transformação L-F, deve-se considerar a seguinte mudança de variável

$$q(t) = Q(t)^{-1}e(t),$$

e o seguinte sistema dado por

$$\dot{q}(t) = Rq(t) + Q(t)^{-1}Bv(t),$$

sendo $B = [0 \ 1]'$. Uma vez que a matriz que multiplica o controlador $v(t)$ no sistema acima é variante no tempo ($Q(t)^{-1}B$), deve-se construir um sistema auxiliar cuja matriz que multiplica o controlador seja invariante. Considere o seguinte sistema

$$\dot{\bar{q}} = R\bar{q} + B_0\bar{v}(t),$$

sendo $\bar{v}(t) = F_0q(t)$ e B_0 uma matriz constante de posto completo tal que o par $[R, B_0]$ seja controlável. A matriz B_0 escolhida foi

$$B_0 = [1 \ 1]'$$

O ganho F_0 do controlador foi obtido por meio da técnica de alocação de polos, cujos os polos desejáveis escolhidos foram $-0,8$ e $-1,4$. O ganho obtido foi

$$F_0 = [-8,46 \ 6,46].$$

Portanto, conforme a equação (64) a lei de controle $v(t)$ é dada por

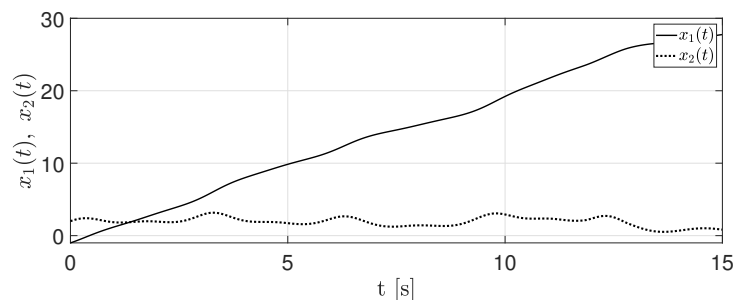
$$v(t) = B^*Q(t)B_0F_0Q(t)^{-1}(x(t) - y(t)),$$

sendo B^* a inversa generalizada da matriz B .

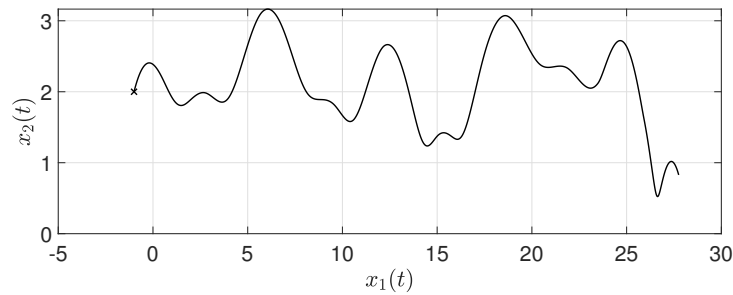
A seguir são apresentados os gráficos obtidos na simulação utilizando o pacote *ode45* do MATLAB[®]. Foi escolhido $x_0 = [-1 \ 2]'$ como condição inicial.

A Figura 18 exibe o comportamento dos estados do sistema sem controle. Perceba que os estados tendem a divergir da origem. A Figura 19 exibe o Plano de Fase do sistema sem controle.

Figura 18 – Comportamento dos estados do Pêndulo sem controle.

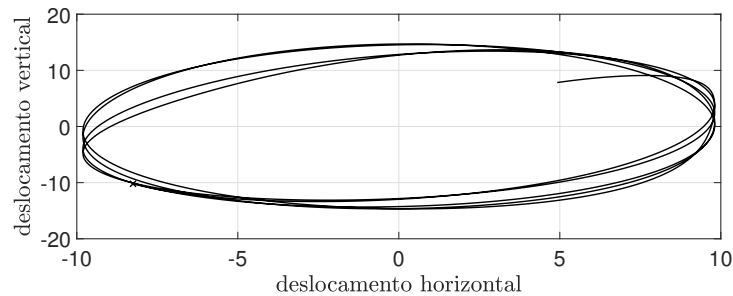


Fonte: autor.

Figura 19 – Plano de Fase do Pêndulo sem controle.

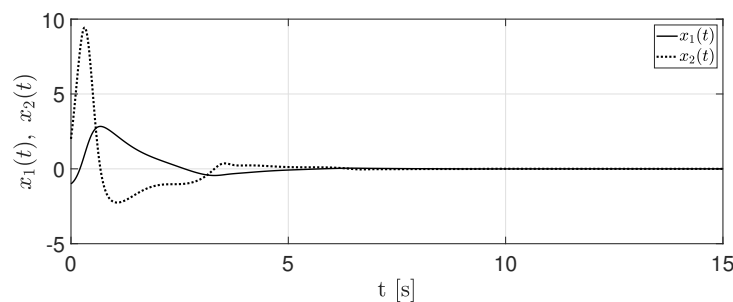
Fonte: autor.

A Figura 20 exibe o comportamento da massa do pêndulo no plano cartesiano. Perceba o comportamento oscilatório da massa do Pêndulo.

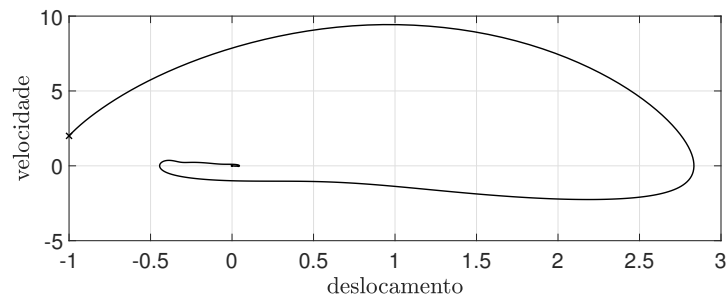
Figura 20 – Deslocamento da massa do Pêndulo sem controle, no eixo cartesiano.

Fonte: autor.

A Figura 21 exibe o comportamento das variáveis de estado controladas, considerando que a órbita desejada é o ponto de equilíbrio, ou seja, $[y_1(t) \ y_2(t)]' = [0 \ 0]'$. Neste caso, a parcela *feedforward* será nula. Ainda na Figura 21, observe que o tempo de transitório foi de aproximadamente 7 segundos, mostrando assim a eficiência da técnica de controle.

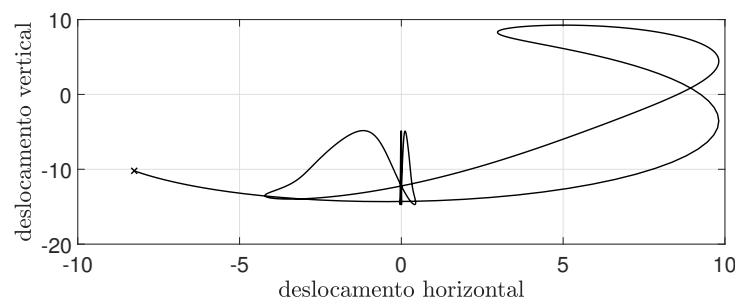
Figura 21 – Controle ponto de equilíbrio: comportamento dos estados $x_1(t)$ e $x_2(t)$ do Pêndulo controlado.

Fonte: autor.

Figura 22 – Controle ponto de equilíbrio: Plano de Fase do Pêndulo controlado.

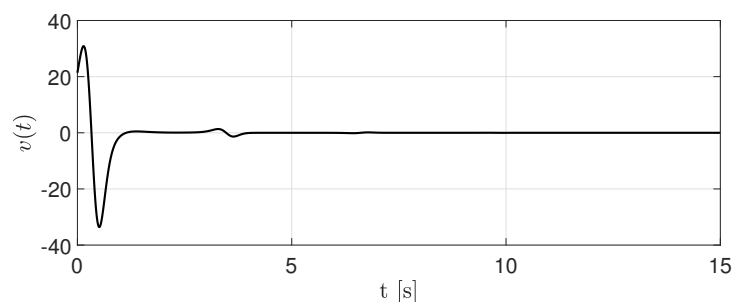
Fonte: autor.

A Figura 23 exibe o deslocamento da massa do Pêndulo controlado. Observe que, a partir de um certo instante, a massa do Pêndulo para de oscilar horizontalmente, sofrendo apenas oscilações verticais por conta da excitação do suporte.

Figura 23 – Controle ponto de equilíbrio: Deslocamento da massa do Pêndulo controlado, no eixo cartesiano.

Fonte: autor.

A Figura 24 exibe o comportamento do sinal de controle $v(t)$ ao longo do tempo. O controlador atua nos primeiros 5 segundos. Além disso, o controlador atua de forma suave com amplitude máxima de aproximadamente 30 unidades de medida, em módulo.

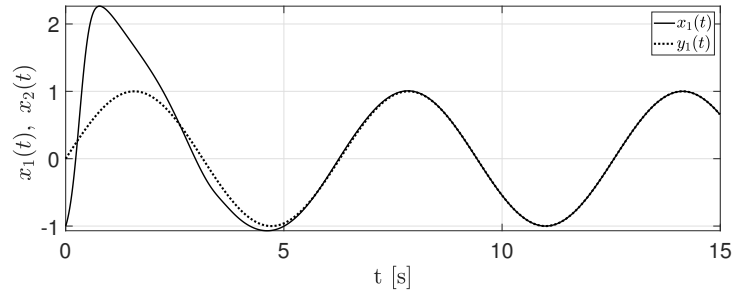
Figura 24 – Controle ponto de equilíbrio: Sinal de controle $v(t)$.

Fonte: autor.

A seguir, são apresentados os gráficos do sistema controlado, considerando como trajetória desejada $[y_1(t) \ y_2(t)]' = [\sin(t) \ \cos(t)]'$. As Figuras 25 e 26 exibem o comportamento dos estados $x_1(t)$ e $x_2(t)$ comparando-os com a trajetória desejada $y_1(t) =$

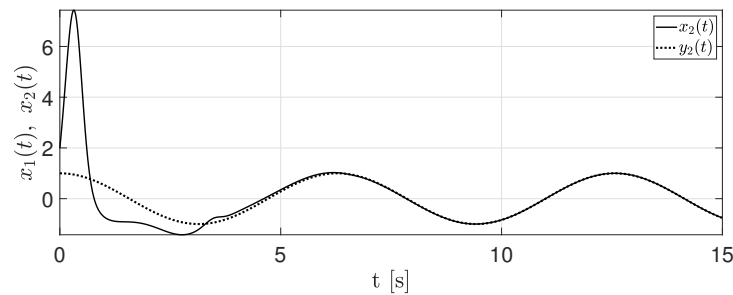
$\sin(t)$ e $y_2(t) = \cos(t)$, respectivamente. Observe que a técnica de controle é eficiente para conduzir a trajetória atual para a trajetória desejada. O tempo de assentamento foi de aproximadamente 5 segundos em ambos os casos.

Figura 25 – Controle órbita desejada: estado $x_1(t)$ do Pêndulo controlado.



Fonte: autor.

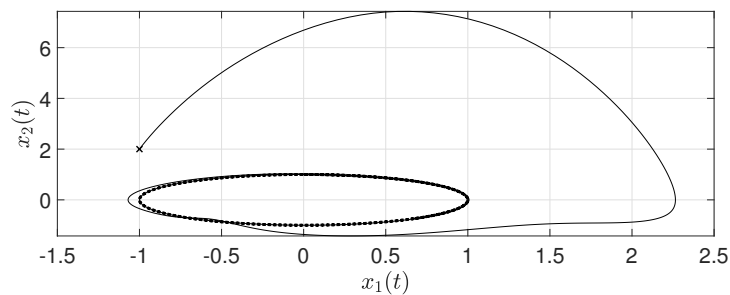
Figura 26 – Controle órbita desejada: estado $x_2(t)$ do Pêndulo controlado.



Fonte: autor.

A Figura 27 exibe o Plano de Fase do sistema controlado. Na figura estão a trajetória desejada e a trajetória do sistema. A trajetória desejada pode ser entendida como um ciclo limite. Tomando uma condição inicial próxima de $[0 \ 1]'$, a trajetória do sistema tende ao ciclo limite e ali permanecerá.

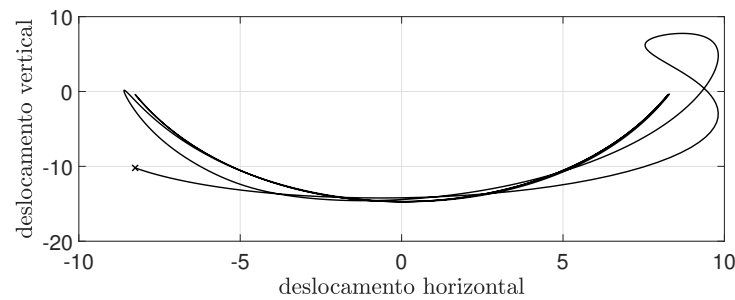
Figura 27 – Controle órbita desejada: Plano de Fase do Pêndulo controlado. “- -” trajetória desejada; “—” trajetória do sistema.



Fonte: autor.

A Figura 28 exibe o deslocamento da massa do Pêndulo no plano cartesiano. Compare a Figura 28 com a Figura 17 do movimento desejado do Pêndulo.

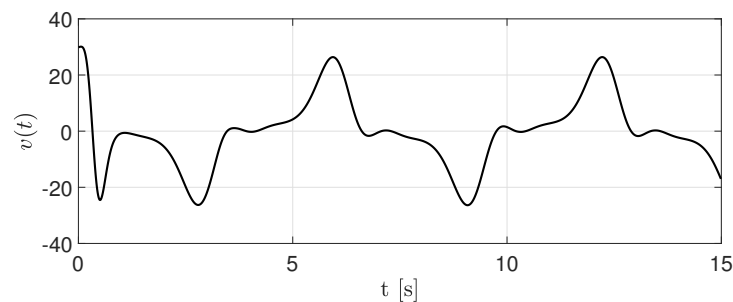
Figura 28 – Controle órbita desejada: Deslocamento da massa do Pêndulo controlado, no plano cartesiano.



Fonte: autor.

A Figura 29 exibe a lei de controle $v(t)$ do sistema controlado. Observe que a lei de controle atua de forma suave e continuamente a fim de conduzir a trajetória do sistema para a trajetória desejada. A amplitude máxima do controlador foi de 30 unidades de medida.

Figura 29 – Controle órbita desejada: Sinal de controle $v(t)$.



Fonte: autor.

4.2 CONTROLE FUZZY TAKAGI-SUGENO

Nesta seção vamos apresentar, de forma resumida, como obter o modelo *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S) de um sistema LTV. Para maiores detalhes o leitor pode consultar Taniguchi et al. (2001).

Novamente, considere o sistema LTV dado por

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (90)$$

sendo $A(t) = [a_{ij}(t)] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) = [b_{ik}(t)] \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ com $a_{ij}(t)$, $b_{ik}(t)$ e $u(t)$ funções limitadas e contínua e $A(t)$ uma matriz T -periódica. Pode ocorrer que nem todos os elementos da matriz $A(t)$ ou $B(t)$ são variantes no tempo. Seja $\{z_1(t), z_2(t), \dots, z_r(t)\}$ uma enumeração dos termos variantes das matrizes $A(t)$ e $B(t)$. O vetor $z(t)$ dado por

$$z(t) = [z_1(t) \quad \cdots \quad z_r(t)]',$$

é chamado de **vetor premissa**. Como as componentes $z_i(t)$'s são limitadas, pode-se considerar os seguintes valores de máximo e mínimo dados por

$$m_i = \min_{t \geq 0} \{z_i(t)\},$$

$$M_i = \max_{t \geq 0} \{z_i(t)\},$$

para todo $i = 1, \dots, r$. As funções $z_i(t)$ podem ser escritas como uma combinação convexa de seus respectivos máximos e mínimos da seguinte forma

$$z_i(t) = m_i \sigma_{i1} + M_i \sigma_{i2}, \quad (91)$$

onde

$$\sigma_{i1}, \sigma_{i2} \in [0, 1],$$

$$\sigma_{i1} + \sigma_{i2} = 1. \quad (92)$$

para todo $i = 1, \dots, r$. Das equações (91) e (92) seguem que

$$\sigma_{i1} = \frac{M_i - z_i(t)}{M_i - m_i},$$

$$\sigma_{i2} = \frac{z_i(t) - m_i}{M_i - m_i}.$$

As equações acima permitem escrever $z_i(t)$ como uma combinação convexa dos seus máximos e mínimos σ_{i1} e σ_{i2} , respectivamente. Entretanto, para obter o modelo *fuzzy* T-S do sistema (90) é necessário escrever $z_i(t)$ em função de todos os σ_{ij} 's. Para ilustrar tal manipulação podemos considerar, sem perda de generalidade que, $B \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ e $A(t) = [a_{ij}(t)]_{3 \times 3} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Além disso, assumamos que os termos variantes da matriz $A(t)$ são $a_{11}(t)$, $a_{12}(t)$, e $a_{33}(t)$. Considere $z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ z_3(t)]'$, onde $z_1(t) = a_{11}(t)$, $z_2(t) = a_{12}(t)$, e $z_3(t) = a_{33}(t)$. Assim

$$\begin{aligned} z_1 &= (m_1 \sigma_{11} + M_1 \sigma_{12})(\sigma_{21} + \sigma_{22})(\sigma_{31} + \sigma_{32}) \\ &= m_1 \sigma_{11} \sigma_{21} \sigma_{31} + m_1 \sigma_{11} \sigma_{21} \sigma_{32} + m_1 \sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{31} + m_1 \sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{32} + M_1 \sigma_{12} \sigma_{21} \sigma_{31} \\ &\quad + M_1 \sigma_{12} \sigma_{21} \sigma_{32} + M_1 \sigma_{12} \sigma_{22} \sigma_{31} + M_1 \sigma_{12} \sigma_{22} \sigma_{32}. \end{aligned}$$

Similarmente, pode-se mostrar que

$$\begin{aligned} z_2 &= m_2 \sigma_{11} \sigma_{21} \sigma_{31} + m_2 \sigma_{11} \sigma_{21} \sigma_{32} + M_2 \sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{31} + M_2 \sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{32} + m_2 \sigma_{12} \sigma_{21} \sigma_{31} \\ &\quad + m_2 \sigma_{12} \sigma_{21} \sigma_{32} + M_2 \sigma_{12} \sigma_{22} \sigma_{31} + M_2 \sigma_{12} \sigma_{22} \sigma_{32}, \\ z_3 &= m_3 \sigma_{11} \sigma_{21} \sigma_{31} + M_3 \sigma_{11} \sigma_{21} \sigma_{32} + m_3 \sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{31} + M_3 \sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{32} + m_3 \sigma_{12} \sigma_{21} \sigma_{31} \\ &\quad + M_3 \sigma_{12} \sigma_{21} \sigma_{32} + m_3 \sigma_{12} \sigma_{22} \sigma_{31} + M_3 \sigma_{12} \sigma_{22} \sigma_{32}. \end{aligned}$$

Defina as seguintes funções $\alpha_1, \dots, \alpha_8$ dadas por

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \sigma_{11}\sigma_{21}\sigma_{31}; & \alpha_2 &= \sigma_{11}\sigma_{21}\sigma_{32}; & \alpha_3 &= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{31}; & \alpha_4 &= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{32}; \\ \alpha_5 &= \sigma_{12}\sigma_{21}\sigma_{31}; & \alpha_6 &= \sigma_{12}\sigma_{21}\sigma_{32}; & \alpha_7 &= \sigma_{12}\sigma_{22}\sigma_{31}; & \alpha_8 &= \sigma_{12}\sigma_{22}\sigma_{32}.\end{aligned}$$

Pode-se mostrar que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 = 1.$$

As funções z_i 's podem ser escritas como

$$z_1 = m_1\alpha_1 + m_1\alpha_2 + m_1\alpha_3 + m_1\alpha_4 + M_1\alpha_5 + M_1\alpha_6 + M_1\alpha_7 + M_1\alpha_8 \quad (93)$$

$$z_2 = m_2\alpha_1 + m_2\alpha_2 + M_2\alpha_3 + M_2\alpha_4 + m_2\alpha_5 + m_2\alpha_6 + M_2\alpha_7 + M_2\alpha_8 \quad (94)$$

$$z_3 = m_3\alpha_1 + M_3\alpha_2 + m_3\alpha_3 + M_3\alpha_4 + m_3\alpha_5 + M_3\alpha_6 + m_3\alpha_7 + M_3\alpha_8. \quad (95)$$

Substituindo as equações (93)-(95) em (90) obtemos o modelo *fuzzy* T-S dado por

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^8 \alpha_i A_i \right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^8 \alpha_i B_i \right) u(t),$$

onde

$$\begin{aligned}A_1 &= \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & m_3 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & M_3 \end{bmatrix}, & A_3 &= \begin{bmatrix} m_1 & M_2 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & m_3 \end{bmatrix}, \\ A_4 &= \begin{bmatrix} m_1 & M_2 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & M_3 \end{bmatrix}, & A_5 &= \begin{bmatrix} M_1 & m_2 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & m_3 \end{bmatrix}, & A_6 &= \begin{bmatrix} M_1 & m_2 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & M_3 \end{bmatrix}, \\ A_7 &= \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & m_3 \end{bmatrix}, & A_8 &= \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & M_3 \end{bmatrix}, & B_i &= \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, 8.\end{aligned}$$

O par (A_i, B_i) é chamado de **modelo local fuzzy**. De uma forma geral, o modelo *fuzzy* T-S é descrito por

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i A_i \right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i B_i \right) u(t), \quad (96)$$

onde $N = 2^r$, e r é o número de termos variantes que aparecem nas matrizes $A(t)$ e $B(t)$ do sistema. As funções $\alpha_1(z(t)), \dots, \alpha_8(z(t))$ são chamadas de **funções de pertinência** e satisfazem as seguintes relações:

$$\alpha_i(z(t)) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad (97)$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i(z(t)) = 1. \quad (98)$$

Obtido o modelo *fuzzy* T-S de um sistema LTV, vamos tratar de obter uma lei de controle $u(t)$ que estabilize assintoticamente o sistema (96). Considere $u(t)$ dada por

$$u(t) = - \sum_{j=1}^N \alpha_j(z(t)) F_j x(t). \quad (99)$$

O sistema em malha fechada é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i(z(t)) A_i x(t) + \sum_{i=1}^N \alpha_i(z(t)) B_i \left(- \sum_{j=1}^N \alpha_j(z(t)) F_j x(t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) (A_i - B_i F_j) x(t). \end{aligned} \quad (100)$$

Se definirmos $G_{ij} = A_i - B_i F_j$ temos que

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i(z(t)) \alpha_j(z(t)) G_{ij} x(t). \quad (101)$$

Os ganhos F_1, \dots, F_n devem ser determinados tais que o sistema realimentado (101) seja assintoticamente estável.

4.2.1 Condições de Estabilidade

O lema a seguir será utilizado para obter uma condição de estabilidade para o sistema realimentados dado por (101).

Lema 5. *Seja N um número natural maior ou igual do que 2. Então*

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j G_{ij} = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 G_{ii} + 2 \sum_{i < j}^N \alpha_i \alpha_j \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right),$$

onde

$$\sum_{i < j}^N \alpha_i \alpha_j \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \alpha_i \alpha_j \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right).$$

Demonstração. Para simplificar a notação será usado a notação $\Delta_{ij} = \alpha_i \alpha_j \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)$. Observe que $\Delta_{ii} = \alpha_i^2 G_{ii}$ e $\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$. Assim, deve-se mostrar que

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Delta_{ij} = \sum_{i=1}^N \Delta_{ii} + 2 \sum_{i < j}^N \Delta_{ij}.$$

A prova será feita por indução sobre N . O resultado é válido para $N = 2$, pois

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Delta_{ij} = \Delta_{11} + \Delta_{12} + \Delta_{21} + \Delta_{22} = \sum_{i=1}^2 \Delta_{ii} + 2 \sum_{i < j}^2 \Delta_{ij}.$$

Agora, será mostrado que se o resultado é válido para $N \geq 2$ qualquer, então o resultado é válido também para $N + 1$. De fato, segue que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \Delta_{ij} &= \sum_{i=1}^N \sum_{i=1}^{N+1} \Delta_{ij} + \sum_{j=1}^{N+1} \Delta_{N+1,j} \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{i=1}^N \Delta_{ij} + \sum_{i=1}^N \Delta_{i,N+1} + \sum_{j=1}^N \Delta_{N+1,j} + \Delta_{N+1,N+1} \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{i=1}^N \Delta_{ij} + \sum_{i=1}^N \Delta_{i,N+1} + \sum_{i=1}^N \Delta_{i,N+1} + \Delta_{N+1,N+1} \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{i=1}^N \Delta_{ij} + 2 \sum_{i=1}^N \Delta_{i,N+1} + \Delta_{N+1,N+1}.
 \end{aligned}$$

Aplicando a hipótese de indução na primeira parcela da equação acima segue que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \Delta_{ij} &= \sum_{i=1}^N \Delta_{ii} + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \Delta_{ij} + 2 \sum_{i=1}^N \Delta_{i,N+1} + \Delta_{N+1,N+1} \\
 &= \sum_{i=1}^{N+1} \Delta_{ii} + 2 \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \Delta_{ij} + \sum_{i=1}^N \Delta_{i,N+1} \right)}_{= \Omega_{ij}}.
 \end{aligned} \tag{102}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
 \Omega_{ij} &= \left(\sum_{j=2}^N \Delta_{1j} + \sum_{j=3}^N \Delta_{2j} + \cdots + \Delta_{N-1,N} \right) + \sum_{i=1}^N \Delta_{i,N+1} \\
 &= \left(\sum_{j=2}^N \Delta_{1j} + \Delta_{1,N+1} \right) + \left(\sum_{j=3}^N \Delta_{2j} + \Delta_{2,N+1} \right) + \cdots + (\Delta_{N-1,N} + \Delta_{N-1,N+1}) + \Delta_{N,N+1} \\
 &= \sum_{j=2}^{N+1} \Delta_{1j} + \sum_{j=3}^{N+1} \Delta_{2j} + \cdots + \sum_{j=N}^{N+1} \Delta_{N-1,j} + \Delta_{N,N+1} \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^{N+1} \Delta_{ij} = \sum_{i < j}^{N+1} \Delta_{ij}.
 \end{aligned} \tag{103}$$

Substituindo (103) em (102) segue que

$$\sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} \Delta_{ij} = \sum_{i=1}^{N+1} \Delta_{ii} + 2 \sum_{i < j}^{N+1} \Delta_{ij},$$

como desejado. □

Corolário 2. *O sistema realimentado (101) pode ser reescrito como*

$$\dot{x}(t) = \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 G_{ii} + 2 \sum_{i < j}^N \alpha_i \alpha_j \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) \right] x(t). \tag{104}$$

Observação 2. A demonstração do Lema 5 independe das matrizes G_{ij} . Assim, escolhendo $G_{ij} = 1$, para todo i, j segue que

$$1 = \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \right) \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 + 2 \sum_{i<j}^N \alpha_i \alpha_j. \quad (105)$$

Lema 6. Sejam Θ e Γ dadas por

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \cdots & \Theta_{1N} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \cdots & \Theta_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta_{N1} & \Theta_{N2} & \cdots & \Theta_{NN} \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \alpha_1 x \\ \alpha_2 x \\ \vdots \\ \alpha_N x \end{bmatrix},$$

onde $\Theta_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Então

$$\Gamma' \Theta \Gamma = \sum_i \alpha_i^2 x' \Theta_{ii} x + 2 \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j x' \left(\frac{\Theta_{ij} + \Theta_{ji}}{2} \right) x. \quad (106)$$

Demonstração. Utilizando o Lema 5 decorre que

$$\begin{aligned} \Gamma' \Theta \Gamma &= [\alpha_1 x' \quad \alpha_2 x' \quad \cdots \quad \alpha_N x'] \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} & \cdots & \Theta_{1N} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & \cdots & \Theta_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta_{N1} & \Theta_{N2} & \cdots & \Theta_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 x \\ \alpha_2 x \\ \vdots \\ \alpha_N x \end{bmatrix} \\ &= \left[\sum_i \alpha_i x' \Theta_{i1} \quad \sum_i \alpha_i x' \Theta_{i2} \quad \cdots \quad \sum_i \alpha_i x' \Theta_{iN} \right] \begin{bmatrix} \alpha_1 x \\ \alpha_2 x \\ \vdots \\ \alpha_N x \end{bmatrix} \\ &= \sum_j \left(\sum_i \alpha_i x' \Theta_{ij} \right) \alpha_j x = \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j x' \Theta_{ij} x \\ &= \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 x' \Theta_{ii} x + 2 \sum_{i<j}^N \alpha_i \alpha_j x' \left(\frac{\Theta_{ij} + \Theta_{ji}}{2} \right) x, \end{aligned}$$

como desejado. □

No lema acima, observe que se $\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$, então a igualdade se resume a

$$\Gamma' \Theta \Gamma = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 x' \Theta_{ii} x + 2 \sum_{i<j}^N \alpha_i \alpha_j x' \Theta_{ij} x.$$

O próximo teorema apresenta uma condição suficiente para estabilidade do sistema realimentado (101).

Teorema 17. (KIM; LEE, 2000) O ponto de equilíbrio $x^* = 0$ do sistema (101) é assintoticamente estável se existirem matrizes simétricas P e X_{ij} tais que

$$P > 0, \quad (107)$$

$$\Lambda'_{ii}P + P\Lambda_{ii} + X_{ii} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (108)$$

$$\Lambda'_{ij}P + P\Lambda_{ij} + X_{ij} \leq 0, \quad i < j \leq N, \quad (109)$$

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1N} \\ X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1N} & X_{2N} & \cdots & X_{NN} \end{bmatrix} > 0, \quad (110)$$

sendo $\Lambda_{ij} = \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}$.

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov $V(x) = x'Px$. É sabido que o sistema (101) é assintoticamente estável se $V(x)$ for definida positiva e $\dot{V}(x)$ for negativa definida (SLOTINE; LI, 1991). Como $P > 0$ segue que $V > 0$. Além disso, considerando o Corolário 2, $\Lambda_{ij} = \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}$ e o Lema 6, a derivada de V é dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}'Px + x'P\dot{x} \\ &= \left(\sum_i \alpha_i^2 \Lambda_{ii} x + 2 \sum_{i < j} \alpha_i \alpha_j \Lambda_{ij} x \right)' Px + x'P \left(\sum_i \alpha_i \Lambda_{ii} x + 2 \sum_{i < j} \alpha_i \alpha_j \Lambda_{ij} x \right) \\ &= \left(\sum_i \alpha_i^2 x' \Lambda'_{ii} + 2 \sum_{i < j} \alpha_i \alpha_j x' \Lambda'_{ij} \right) Px + x'P \left(\sum_i \alpha_i \Lambda_{ii} x + 2 \sum_{i < j} \alpha_i \alpha_j \Lambda_{ij} x \right) \\ &= \sum_i \alpha_i^2 x' (\Lambda'_{ii}P + P\Lambda_{ii}) x + 2 \sum_{i < j} \alpha_i \alpha_j x' (\Lambda'_{ij}P + P\Lambda_{ij}) x \\ &\leq \sum_i \alpha_i^2 x' (-X_{ii}) x + 2 \sum_{i < j} \alpha_i \alpha_j x' (-X_{ij}) x \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 x \\ \alpha_2 x \\ \vdots \\ \alpha_N x \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -X_{11} & -X_{12} & \cdots & -X_{1N} \\ -X_{12} & -X_{22} & \cdots & -X_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -X_{1N} & -X_{2N} & \cdots & -X_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 x \\ \alpha_2 x \\ \vdots \\ \alpha_N x \end{bmatrix} < 0, \quad \text{se } x \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, V é uma função de Lyapunov, como desejado. \square

O conceito de matrizes congruentes é muito utilizado em desigualdades matriciais lineares a fim de obter uma desigualdade equivalente aquela que se deseja demonstrar, por isso será definido a seguir.

Definição 6. Duas matrizes D e U são **congruentes** se existir uma matriz H não singular tal que $D = H'UH$.

Uma propriedade de matrizes congruentes bastante utilizada é enunciada a seguir.

Lema 7. (*Transformação de Congruência*) Se D e U são congruentes então $D > 0$ se e somente se $U > 0$.

Demonstração. Suponha que $D > 0$. Como D e U são congruentes existe H não singular tal que $U = H'DH$. Dado $x \neq 0$, como H é não singular deve existir $y \neq 0$ tal que $y = Hx$. Assim,

$$x'Ux = x'H'DHx = (Hx)'D(Hx) = y'Dy > 0.$$

Pela arbitrariedade do x segue que $U > 0$. A recíproca se demonstra de forma análoga. \square

Observação 3. (a) se U e D são congruentes então $U < 0$ se e somente se $D < 0$; (b) se U é não singular e U é simétrica então U^{-1} é simétrica.

A seguir serão apresentadas condições LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) equivalentes as condições do Teorema 17.

Corolário 3. (*Condições LMIs*) O ponto de equilíbrio $x^* = 0$ do sistema (101) é assintoticamente estável se existirem matrizes simétricas W e Y_{ij} 's e matrizes M_i 's e X tais que

$$W > 0, \quad (111)$$

$$WA'_i + A_iW - M'_iB'_i - B_iM_i + Y_{ii} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (112)$$

$$\begin{aligned} &WA'_i + A_iW + WA'_j + A_jW - M'_jB'_i \\ &- B_iM_j - M'_iB'_j - B_jM_i + 2Y_{ij} \leq 0, \quad i < j \leq N, \end{aligned} \quad (113)$$

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{12} & Y_{22} & \cdots & Y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{1N} & Y_{2N} & \cdots & Y_{NN} \end{bmatrix} > 0, \quad (114)$$

Neste caso, $P = W^{-1}$ e $F_i = M_iW^{-1}$ é o i -ésimo ganho do controlador.

Demonstração. O resultado estará provado se demonstrado que (107) é equivalente a (111), (108) é equivalente a (112), (109) é equivalente a (113), e (110) é equivalente a (114). Considerando $P = W^{-1}$, claramente (107) é equivalente a (111). Utilizando o Lema 7 e a Observação 3 decorre que

$$\begin{aligned} \Lambda'_{ii}P + P\Lambda_{ii} + X_{ii} < 0 &\Leftrightarrow G'_{ii}P + PG_{ii} + X_{ii} < 0 \\ &\Leftrightarrow (A_i - B_iF_i)'P + P(A_i - B_iF_i) + X_{ii} < 0 \\ &\Leftrightarrow A'_iP - F'_iB'_iP + PA_i - PB_iF_i + X_{ii} < 0 \\ &\Leftrightarrow P^{-1}(A'_iP - F'_iB'_iP + PA_i - PB_iF_i + X_{ii})P^{-1} < 0 \\ &\Leftrightarrow P^{-1}A_i - (F_iP)'B'_i + A_iP^{-1} - B_i(F_iP^{-1}) + P^{-1}X_{ii}P^{-1} < 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow WA'_i - M'_i B'_i + A_i W - B_i M_i + Y_{ii} < 0, \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

sendo $Y_{ii} = P^{-1} X_{ii} P^{-1}$ e, portanto, (108) é equivalente a (112). Analogamente,

$$\begin{aligned} \Lambda'_{ij} P + P \Lambda_{ij} + X_{ij} &\Leftrightarrow \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)' P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) + X_{ij} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow G'_{ij} P + G'_{ji} P + P G_{ij} + P G_{ji} + 2X_{ij} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (A_i - B_i F_j)' P + (A_j - B_j F_i)' P + P(A_i - B_i F_j) + P(A_j - B_j F_i) + 2X_{ij} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow A'_i P - F'_j B'_i P + A'_j P - F'_i B'_j P + P A_i - P B_i F_j + P A_j - P B_j F_i + 2X_{ij} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow P^{-1} (A'_i P - F'_j B'_i P + A'_j P - F'_i B'_j P + P A_i - P B_i F_j + P A_j - P B_j F_i + 2X_{ij}) P^{-1} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow P^{-1} A'_i - (F_j P^{-1})' B'_i + P^{-1} A'_j - (F_i P^{-1})' B'_j + A_i P^{-1} - B_i F_j P^{-1} + A_j P^{-1} \\ &\quad - B_j F_i P^{-1} + 2P^{-1} X_{ij} P^{-1} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow WA'_i - M'_i B'_i + WA'_j - M'_j B'_j + A_i W - B_i M_j + A_j W - B_j M_i + 2Y_{ij} \leq 0, \end{aligned}$$

para todo $i < j \leq N$, ou seja, (109) é equivalente a (113) como desejado. Por fim, para verificar que (110) é equivalente a (114) basta observar que \tilde{Y} é obtida de \tilde{X} pré e pós multiplicando \tilde{X} pela matriz diagonal em blocos dada por $\text{diag}(W, W, \dots, W)$. \square

4.2.2 Taxa de Decaimento e Restrições de Entrada

Considere o sistema LTV dado a seguir

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t).$$

A taxa de decaimento do sistema acima é definida como o maior escalar $\beta > 0$ tal que

$$\|x(t)\| \leq C e^{-\beta t} \|x(0)\|, \quad (115)$$

para toda trajetória $x(t)$, sendo C uma constante positiva. Em (115) observe que quanto maior for a taxa de decaimento, mais rápido $\|x(t)\|$ converge a zero e, conseqüentemente, mais rápido o vetor de estados $x(t)$ converge a origem.

A seguir, será usada a função quadrática de Lyapunov para obter um limitante inferior para a taxa de decaimento.

Teorema 18. *Seja $\beta > 0$. Se a seguinte desigualdade for verificada*

$$\dot{V}(x(t)) \leq -2\beta V(x(t)), \quad (116)$$

para toda trajetória $x(t)$, então a taxa de decaimento é, no mínimo, β .

Observe que se a desigualdade (116) for verificada então o sistema é assintoticamente estável, pois $\dot{V}(x(t)) \leq -2\beta V(x(t)) < 0$.

Antes de fazer a prova do Teorema 18 será necessário enunciar os lemas a seguir.

Lema 8. Se a desigualdade (116) for verificada, então

$$V(x(t)) \leq V(x(0))e^{-2\beta t}. \quad (117)$$

Demonstração. De fato, considere $f(t) = \dot{V}(x(t)) + 2\beta V(x(t))$. Observe que $f(t) \leq 0$, para todo $t \geq 0$. Considerando $y(t) = V(x(t))$ temos a seguinte EDO:

$$\dot{y}(t) + 2\beta y(t) = f(t). \quad (118)$$

É conhecido que a solução da EDO acima é dada por

$$y(t) = e^{-\int_0^t 2\beta d\tau} \left(\int_0^t f(\tau) e^{\int_0^\tau 2\beta d\tau} d\tau + C \right). \quad (119)$$

Como $f(\tau) \leq 0$ segue que $f(\tau) e^{\int_0^\tau 2\beta d\tau} \leq 0$ e, portanto, $\int_0^t f(\tau) e^{\int_0^\tau 2\beta d\tau} d\tau \leq 0$. Portanto, de (119) segue que $y(t) \leq C e^{-2\beta t}$, ou seja $V(x(t)) \leq C e^{-2\beta t}$. Fazendo $t = 0$ em (119) decorre que $C = V(x(0))$ e, portanto $V(x(t)) \leq V(x(0)) e^{-2\beta t}$, como desejado. \square

Lema 9. Se $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica e definida positiva, então a função $\|\cdot\|_* : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\|x\|_* = \sqrt{x'Px}$ define uma norma em \mathbb{R}^n .

Demonstração. Considere a função $\langle \cdot, \cdot \rangle_* : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\langle x, y \rangle = x'Py$. A função $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ define um produto interno em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. De fato, segue que:

$$(P1) \quad \langle x + y, w \rangle_* = (x + y)'Pw = x'Pw + y'Pw = \langle x, w \rangle_* + \langle y, w \rangle_*;$$

$$(P2) \quad \langle \gamma x, y \rangle_* = (\gamma x)'Py = \gamma x'Py = \gamma \langle x, y \rangle_* ;$$

$$(P3) \quad \langle x, y \rangle_* = x'Py = y'Px = \langle y, x \rangle_* ;$$

$$(P4) \quad \text{se } x \neq 0, \text{ então } x'Px > 0 \text{ e, portanto, } \langle x, x \rangle_* > 0.$$

Portanto, $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ define um produto interno em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e, conseqüentemente

$$\|x\|_* = \sqrt{\langle x, x \rangle_*} = \sqrt{x'Px},$$

é a norma induzida por $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$. \square

A seguir, será feita a prova do Teorema 18.

Demonstração. Se a desigualdade (116) é verificada, então pelo Lema 8 segue que

$$\begin{aligned} x'(t)Px(t) &\leq x'(0)Px(0)e^{-2\beta t} \Rightarrow \sqrt{x'(t)Px(t)} \leq \sqrt{x'(0)Px(0)}e^{-\beta t} \\ &\Rightarrow \|x(t)\|_* \leq e^{-\beta t} \|x(0)\|_*. \end{aligned}$$

Como todas as normas em \mathbb{R}^n são equivalentes, existem escalares $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$c_1 \|x(t)\| \leq \|x(t)\|_* \leq c_2 \|x(t)\|.$$

Logo, $c_1 \|x(t)\| \leq e^{-\beta t} c_2 \|x(0)\|$, isto é, $\|x(t)\| \leq C(P) e^{-\beta t} \|x(0)\|$, onde $C(P) = c_1/c_2$. Portanto, a taxa de decaimento é no mínimo β , como desejado. \square

O teorema a seguir garante uma condição suficiente de estabilidade com taxa de decaimento $\beta > 0$ para o sistema (101).

Teorema 19. *O ponto de equilíbrio $x^* = 0$ do sistema (101) é assintoticamente estável, com taxa de decaimento no mínimo $\beta > 0$, se existirem matrizes simétricas P e X_{ij} 's tais que*

$$P > 0, \quad (120)$$

$$\Lambda'_{ii}P + P\Lambda_{ii} + X_{ii} + 2\beta P < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (121)$$

$$\Lambda'_{ij}P + P\Lambda_{ij} + X_{ij} + 2\beta P \leq 0, \quad i < j \leq N, \quad (122)$$

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1N} \\ X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1N} & X_{2N} & \cdots & X_{NN} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (123)$$

sendo $\Lambda_{ij} = \frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}$.

Demonstração. Será mostrado que se as condições (120)-(123) são factíveis, então vale a desigualdade $\dot{V}(x(t)) \leq -2\beta V(x(t))$. De fato, do Lema 6 e da condição (123) segue que

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \alpha_1 x \\ \alpha_2 x \\ \vdots \\ \alpha_N x \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} -X_{11} & -X_{12} & \cdots & -X_{1N} \\ -X_{12} & -X_{22} & \cdots & -X_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -X_{1N} & -X_{2N} & \cdots & -X_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 x \\ \alpha_2 x \\ \vdots \\ \alpha_N x \end{bmatrix} \leq 0 \\ \Rightarrow & x' \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 (-X_{ii}) + 2 \sum_{i<j}^N \alpha_i \alpha_j (-X_{ij}) \right] x \leq 0 \\ \Rightarrow & x' \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 (-X_{ii} - 2\beta P + 2\beta P) + 2 \sum_{i<j}^N \alpha_i \alpha_j (-X_{ij} - 2\beta P + 2\beta P) \right] x \leq 0 \\ \Rightarrow & x' \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 (-X_{ii} - 2\beta P) + 2 \sum_{i<j}^N \alpha_i \alpha_j (-X_{ij} - 2\beta P) \right] x \\ & + x' \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 2\beta P + 2 \sum_{i<j}^N \alpha_i \alpha_j 2\beta P \right] x \leq 0 \\ \Rightarrow & x' \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 (-X_{ii} - 2\beta P) + 2 \sum_{i<j}^N \alpha_i \alpha_j (-X_{ij} - 2\beta P) \right] x + x' 2\beta P x \leq 0. \quad (124) \end{aligned}$$

Por outro lado, de (121) e (122) segue que

$$\dot{V}(x(t)) = x' \left[\sum_i \alpha_i^2 (\Lambda'_{ii}P + P\Lambda_{ii}) + 2 \sum_{i<j} \alpha_i \alpha_j (\Lambda'_{ij}P + P\Lambda_{ij}) \right] x$$

$$\langle x' \left[\sum_i \alpha_i^2 (-X_{ii} - 2\beta P) + 2 \sum_{i < j} \alpha_i \alpha_j (-X_{ij} - 2\beta P) \right] x. \quad (125)$$

De (124) e (125) segue que

$$\dot{V}(x(t)) \leq -2\beta V(x(t)),$$

como desejado. \square

Corolário 4. (Condições LMIs) O ponto de equilíbrio $x^* = 0$ do sistema (101) é assintoticamente estável com taxa de decaimento no mínimo $\beta > 0$ se existirem matrizes simétricas W e Y_{ij} 's e matrizes M_i 's tais que

$$W > 0, \quad (126)$$

$$WA'_i + A_i W - M'_i B'_i - B_i M_i + Y_{ii} + 2\beta W < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (127)$$

$$WA'_i - M'_i B'_i + WA'_j - M'_i B'_j + A_i W - B_i M_j + A_j W - B_j M_i + 2Y_{ij} + 4\beta W \leq 0, \quad i < j \leq N, \quad (128)$$

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{12} & Y_{22} & \cdots & Y_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{1N} & Y_{2N} & \cdots & Y_{NN} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (129)$$

Além disso, $P = X^{-1}$ e $F_i = M_i P$ é o i -ésimo ganho do controlador.

Demonstração. Vamos mostrar que (120) é equivalente a (126); (121) é equivalente a (127), (122) é equivalente a (128), e (123) é equivalente a (129). De fato, considere que $W = P^{-1}$ e $Y_{ij} = P^{-1} X_{ij} P^{-1}$. Claramente (120) é equivalente a (126). Além disso,

$$\begin{aligned} \Lambda'_{ii} P + P \Lambda_{ii} + X_{ii} + 2\beta P < 0 &\Leftrightarrow G'_{ii} P + P G_{ii} + X_{ii} + 2\beta P < 0 \\ &\Leftrightarrow (A_i - B_i F_i)' P + P (A_i - B_i F_i) + X_{ii} + 2\beta P < 0 \\ &\Leftrightarrow A'_i P - F'_i B'_i P + P A_i - P B_i F_i + X_{ii} + 2\beta P < 0 \\ &\Leftrightarrow P^{-1} (A'_i P - F'_i B'_i P + P A_i - P B_i F_i + X_{ii} + 2\beta P) P^{-1} < 0 \\ &\Leftrightarrow P^{-1} A_i - (F_i P)' B'_i + A_i P^{-1} - B_i (F_i P^{-1}) + P^{-1} X_{ii} P^{-1} + 2\beta P^{-1} < 0 \\ &\Leftrightarrow WA'_i - M'_i B'_i + A_i W - B_i M_i + Y_{ii} + 2\beta W < 0, \quad \forall i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

ou seja, (121) é equivalente a (127). Analogamente,

$$\begin{aligned} \Lambda'_{ij} P + P \Lambda_{ij} + X_{ij} + 2\beta P &\Leftrightarrow \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)' P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) + X_{ij} + 2\beta P \leq 0 \\ &\Leftrightarrow G'_{ij} P + G'_{ji} P + P G_{ij} + P G_{ji} + 2X_{ij} + 4\beta P \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (A_i - B_i F_j)' P + (A_j - B_j F_i)' P + P (A_i - B_i F_j) + P (A_j - B_j F_i) + 2X_{ij} + 4\beta P \leq 0 \\ &\Leftrightarrow A'_i P - F'_j B'_i P + A'_j P - F'_i B'_j P + P A_i - P B_i F_j + P A_j - P B_j F_i + 2X_{ij} + 4\beta P \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow P^{-1}(A'_i P - F'_j B'_i P + A'_j P - F'_i B'_j P + P A_i - P B_i F_j + P A_j - P B_j F_i + 2X_{ij} \\
&\hspace{20em} + 4\beta P)P^{-1} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow P^{-1}A'_i - (F_j P^{-1})'B'_i + P^{-1}A'_j - (F_i P^{-1})'B'_j + A_i P^{-1} - B_i F_j P^{-1} + A_j P^{-1} \\
&\hspace{10em} - B_j F_i P^{-1} + 2P^{-1}X_{ij}P^{-1} + 4\beta P^{-1} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow W A'_i - M'_j B'_i + W A'_j - M'_i B'_j + A_i W - B_i M_j + A_j W - B_j M_i + 2Y_{ij} + 4\beta W \leq 0,
\end{aligned}$$

para todo $i < j \leq N$, ou seja, (122) é equivalente a (128). Por fim, (123) é equivalente a (129) como já demonstrado no teorema anterior. \square

Em alguns casos, devido a limitações no projeto do controlador, uma restrição na entrada $u(t)$ do sistema deve ser considerada. Assuma que a condição inicial $x(0)$ é conhecida. As LMIs que garantem a seguinte restrição na entrada do sistema

$$\|u(t)\|_2 \leq \mu, \text{ para todo } t \geq 0,$$

são dadas por (TANAKA; WANG, 2001)

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)' \\ x(0) & W \end{bmatrix} \geq 0, \quad (130)$$

$$\begin{bmatrix} W & M'_i \\ M_i & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (131)$$

As LMIs (126) - (129), que garantem a estabilidade do sistema com taxa de decaimento β , podem ser combinadas com as LMIs (130) e (131) para adicionar restrições à entrada $u(t)$, de acordo com a limitação do projeto.

Neste trabalho foram usados o *software* MatLab[®], o *solver* “SeDuMi” (STURM, 1999), e a *toolbox* “YALMIP”(LOFBERG, 2004) para resolver as LMIs.

4.2.3 Equação de Mathieu

Anteriormente, dois métodos de controle para sistemas LTV foram apresentados. Nesta seção, os dois métodos serão aplicados para controlar um sistema linear periódico e seus desempenhos serão comparados.

As duas técnicas de controle apresentadas neste capítulo serão aplicadas no controle da equação de Mathieu (SINHA; BUTCHER, 1997). A equação de Mathieu é dada por

$$\ddot{y}(t) + (a + b \cos(t))y(t) = u(t).$$

A representação em espaço de estados da equação de Mathieu é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(a + b \cos(t)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (132)$$

Antes de projetar o controlador, a técnica descrita na Seção 2.2 para estudar a estabilidade dos sistemas LTV será aplicada para obter a região de estabilidade da equação de Mathieu.

Observe que o sistema (132) é 2π periódico. A estabilidade da equação de Mathieu será analisada aplicando o Teorema 16. O método descrito por Sinha e Butcher (1997) foi usado para obter a STM do sistema e, conseqüentemente, os multiplicadores de Floquet.

Seguindo a metodologia descrita em (SINHA; BUTCHER, 1997) para obter o STM, o sistema normalizado é dado por

$$\dot{x}(\tau) = \bar{A}(\tau)x(\tau),$$

onde

$$\bar{A}(\tau) = 2\pi A(2\pi\tau) = 2\pi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-a - b \cos(2\pi\tau)) & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz $\bar{A}(\tau)$ pode ser escrita como

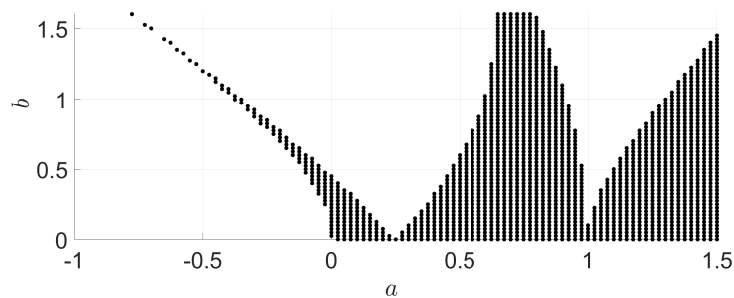
$$\bar{A}(\tau) = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 \cos(2\pi\tau),$$

sendo

$$\bar{A}_1 = 2\pi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_2 = 2\pi \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{bmatrix}.$$

Nos cálculos numéricos para obter a STM do sistema foram considerados² $m = 22$ e $p = 40$. Os parâmetros a e b foram considerados variantes no intervalo $[-1, 1.5]$ e $[0, 1.6]$, respectivamente. A figura a seguir mostra a região de estabilidade da equação de Mathieu.

Figura 30 – Região de estabilidade da Equação de Mathieu.



Fonte: adaptado de Sinha e Butcher (1997).

Agora, considere fixos os seguintes parâmetros

$$a = 1.2 \text{ e } b = 1. \tag{133}$$

² m e p são o número da expansão nos polinômios de Chebyshev alterados e o número das interações de Picard, respectivamente.

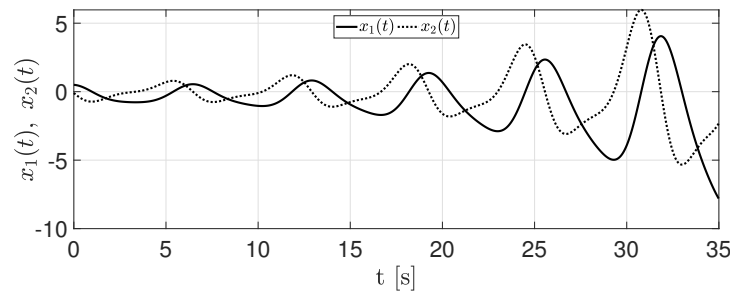
Para esses parâmetros, a FTM obtida foi

$$\Phi(2\pi) = \begin{bmatrix} 1,1552 & 0,5136 \\ 0,6514 & 1,1552 \end{bmatrix}.$$

Os multiplicadores de Floquet são $\rho_1 = 1,7337$ e $\rho_2 = 0,5768$. Desde que $|\rho_1| = 1,7337 > 1$, a equação de Mathieu com os parâmetros dados por (133) é instável. Esta informação está de acordo com a Figura 30.

A figura a seguir mostra o sistema em malha aberta, considerando (133) e $x_0 = [0,5 \quad -0,1]'$ como condição inicial.

Figura 31 – Sistema em malha aberta.



Fonte: autor.

A seguir serão projetados os dois controladores abordados neste capítulo, o primeiro considerando o controle via transformação Lyapunov-Floquet e a segundo aplicando o controle *fuzzy* Takagi-Sugeno. Ambas as técnicas serão aplicadas no controle da equação de Mathieu.

4.2.3.1 Equação de Mathieu: controle via transformação L-F

Considere o sistema em malha aberta (132). Como este é um sistema LTV e periódico, conforme discutido na Seção 2.2, existe um sistema Lyapunov equivalente, via transformação L-F, que é invariante no tempo. Nesse caso, esse sistema é dado por

$$\dot{q} = Rq,$$

onde R é a matriz constante obtida da equação (22) e dada por

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0,0778 \\ 0,0986 & 0 \end{bmatrix}. \quad (134)$$

Como já mencionado, para projetar o controlador via transformação L-F deve-se considerar a seguinte mudança de variável

$$q(t) = Q(t)^{-1}x(t),$$

e o seguinte sistema

$$\dot{q}(t) = Rq(t) + Q(t)^{-1}Bu(t), \quad (135)$$

onde $Q(t)$ é a transformação L-F do sistemas em malha aberta (132).

Como a matriz que multiplica o controlador é variável no tempo, o sistema a seguir precisa ser considerado

$$\dot{\bar{q}} = R\bar{q} + B_0\bar{u}(t), \quad (136)$$

onde $\bar{u}(t) = F_0q(t)$ e B_0 é uma matriz constante de posto completo e tal que o par $[R, B_0]$ seja controlável. A matriz B_0 escolhida foi

$$B_0 = [1 \quad 1]'. \quad (137)$$

O ganho F_0 do controlador foi obtido por meio da técnica de alocação de pólos. Os polos desejados foram $-0,26$ e $-0,25$ e o ganho obtido foi

$$F_0 = [1,07 \quad -1,58]. \quad (138)$$

Assim, o sistema em malha fechada é dado por

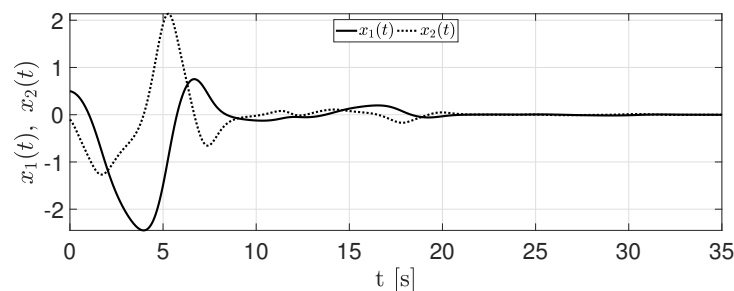
$$\dot{x}(t) = \left(A(t) + BB^*Q(t)B_0F_0Q(t)^{-1} \right) x(t),$$

onde as matrizes B_0 e F_0 são dadas por (137) e (138), respectivamente.

As soluções foram simuladas no MATLAB[®] usando o pacote *ode45*. O comportamento do sistema de malha fechada é apresentado abaixo. Foi escolhido $x_0 = [0,5 \quad -0,1]'$ como condição inicial.

Na Figura 32, pode-se observar a eficiência do controlador em conduzir os estados a zero, mesmo considerando a lei de controle aproximada. Observe que a resposta transitória foi de aproximadamente 23 segundos.

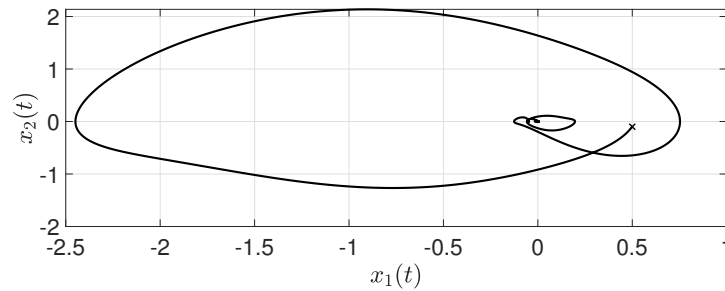
Figura 32 – Sistema em malha fechada, controlado via transformação L-F.



Fonte: autor.

Na Figura 33, pode-se observar o Plano de Fase do sistema. Observe que a trajetória começa na condição inicial (indicada na figura pelo símbolo \times) em direção à origem.

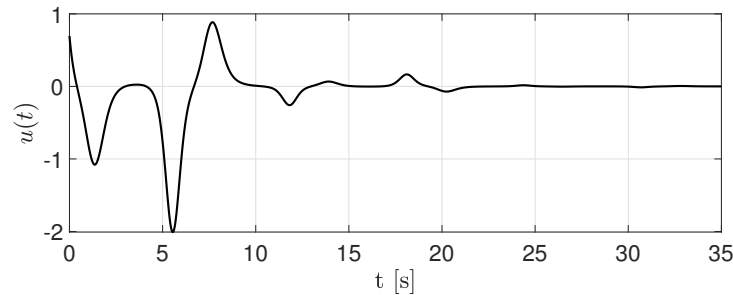
Figura 33 – Plano de Fase do sistema em malha fechada, controlado via transformação L-F.



Fonte: autor.

Na Figura 34 pode-se ver o comportamento do controlador $u(t)$ ao longo do tempo.

Figura 34 – Controlador obtido via transformação L-F.



Fonte: autor.

4.2.3.2 Equação de Mathieu: controle *fuzzy* Takagi-Sugeno

Agora, o controlador *fuzzy* Takagi-Sugeno será projetado para o sistema (132). Nesse caso, existe um único elemento variante na matriz $A(t)$ que é dado por $a_{21}(t) = -(a + b \cos t)$ e, portanto, o vetor premissa será $z(t) = a_{21}(t)$. Considerando os parâmetros (133), é possível mostrar que o mínimo e o máximo de $z(t)$ são

$$m = \min_{0 \leq t \leq 2\pi} \{z(t)\} = -2, 2000,$$

$$M = \max_{0 \leq t \leq 2\pi} \{z(t)\} = 0, 1996.$$

Como existe um único termo variante, as funções de pertinência serão

$$\alpha_1 = (M - z(t))/(M - m) \text{ e } \alpha_2 = (z(t) - m)/(M - m). \quad (139)$$

O modelo *fuzzy* T-S da equação de Mathieu é dado por

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i A_i \right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^2 \alpha_i B_i \right) u(t),$$

onde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 \\ -2.2000 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 \\ 0.1996 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}', \text{ para } i = 1, 2.$$

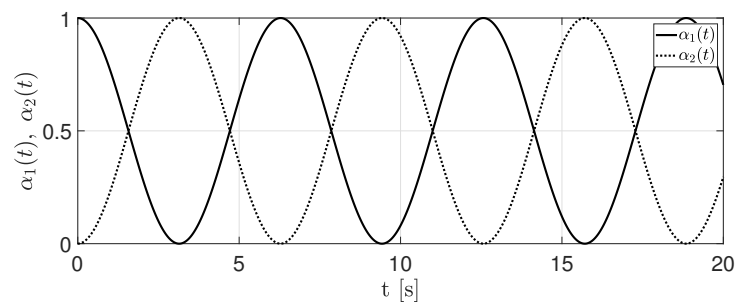
Os ganhos F_1 e F_2 do controlador foram obtidos através do Teorema 17 e são dados por

$$F_1 = [-0,6091 \quad 1,2728], \quad (140)$$

$$F_2 = [1,7905 \quad 1,2728]. \quad (141)$$

A Figura 35 exibe o comportamento das funções de pertinência dadas em (139).

Figura 35 – Funções de pertinência.

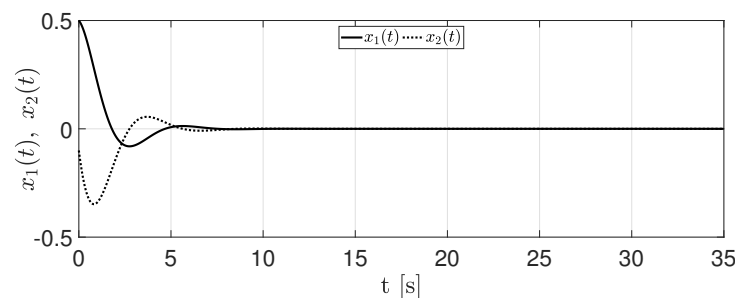


Fonte: autor.

Novamente, $x_0 = [0,5 \quad -0,1]'$ foi escolhido como condição inicial. As figuras a seguir mostram o comportamento do sistema em malha fechada.

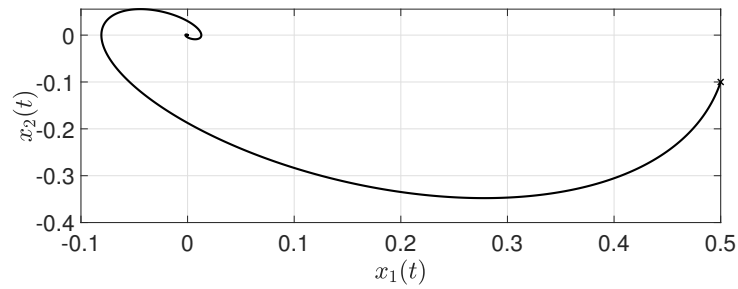
Na Figura 36, pode-se observar a eficiência do controlador para levar os estados a zero. Nesse caso, a resposta transitória foi de aproximadamente 10 segundos. Na Figura 37, pode-se observar o Plano de Fase do sistema de malha fechada.

Figura 36 – Sistema em malha fechada controlado via controle *fuzzy* T-S.



Fonte: autor.

Figura 37 – Plano de Fase do sistema em malha fechada, controlado via controle *fuzzy* T-S.

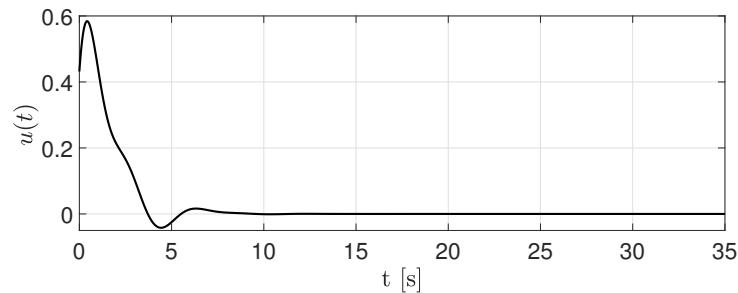


Fonte: autor.

A Figura 38 mostra o comportamento da entrada $u(t)$ ao longo do tempo.

Comparando as Figuras 32 e 36 pode-se observar que o controlador *fuzzy* obteve um menor *undershoot* e *overshoot* comparado ao controle via transformação L-F. Além disso, o controlador *fuzzy* levou as variáveis de estado à origem mais rapidamente.

Figura 38 – Controlador *fuzzy* T-S.



Fonte: autor.

Nos exemplos acima pode-se observar que ambas as técnicas foram eficientes para controlar o sistema referente a Equação de Mathieu. Também, pode-se observar que a técnica *fuzzy* T-S performou melhor em relação ao controle, pois obteve um tempo de transitório menor, bem como os *undershoot* e *overshoot* foram menores também.

Na próxima seção será visto como as duas técnicas podem trabalhar juntas a fim de obter um método híbrido que fornece resultados de estabilidade menos conservadores.

5 MÉTODO PROPOSTO

Neste capítulo, veremos como usar o controle *fuzzy* T-S e a técnica de controle via transformação L-F a fim de obter um método híbrido para sistemas LTV e periódicos.

5.1 SÍNTESE DO CONTROLADOR

Novamente, considere o seguinte sistema

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (142)$$

sendo $A(t) = [a_{ij}(t)] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) = [b_{il}(t)] \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ com $a_{ij}(t)$, $b_{il}(t)$ e $u(t)$ funções limitadas e contínua e $A(t)$ uma matriz T -periódica. Como foi visto, a mudança de variável $q(t) = Q(t)^{-1}x(t)$ produz o seguinte sistema Lyapunov equivalente dado por

$$\dot{q}(t) = Rq(t) + Q(t)^{-1}B(t)u(t), \quad (143)$$

sendo R a matriz real e constante dada em (22) e $Q(t)^{-1}$ a inversa da transformação L-F.

Para simplificar a notação e sem perda de generalidade, suponha que $A(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e $B(t) = [b_{i1}(t)]_{3 \times 1} \in \mathbb{R}^3$. Considerando $Q(t)^{-1} = [\Theta_{ij}(t)]_{3 \times 3}$ e definindo $\bar{B}(t) = Q(t)^{-1}B(t)$, segue que

$$\dot{q}(t) = Rq(t) + \bar{B}(t)u(t), \quad (144)$$

onde $\bar{B}(t)$ é dada por

$$\bar{B}(t) = \left[\sum_{k=1}^3 \Theta_{ik}(t)b_{k1}(t) \right]_{3 \times 1}.$$

O vetor premissa será definido como

$$z(t) = [z_1(t) \quad z_2(t) \quad z_3(t)]',$$

onde

$$z_i(t) = \sum_{k=1}^3 \Theta_{ik}(t)b_{k1}(t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (145)$$

Observe que $Q(t)^{-1}$ é limitada, pois é contínua e periódica de período $2T$. Como $Q(t)^{-1}$ e $B(t)$ são matrizes limitadas, então $\bar{B}(t)$ também é limitada. Assim, pode-se considerar os valores de mínimos e máximos dados por

$$m_i = \min_{t \geq 0} \{z_i(t)\},$$

$$M_i = \max_{t \geq 0} \{z_i(t)\},$$

para todo $i = 1, 2, 3$.

Assim, o modelo *fuzzy* T-S do sistema (143) é dado por

$$\dot{q}(t) = \left(\sum_{i=1}^8 \alpha_i R_i \right) q(t) + \left(\sum_{i=1}^8 \alpha_i \bar{B}_i \right) u(t), \quad (146)$$

onde $R_i = R$ para todo $i = 1, \dots, 8$ e \bar{B}_i 's são dadas por

$$\begin{aligned} \bar{B}_1 &= \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}; \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ M_3 \end{bmatrix}; \bar{B}_3 = \begin{bmatrix} m_1 \\ M_2 \\ m_3 \end{bmatrix}; \bar{B}_4 = \begin{bmatrix} m_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}; \\ \bar{B}_5 &= \begin{bmatrix} M_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}; \bar{B}_6 = \begin{bmatrix} M_1 \\ m_2 \\ M_3 \end{bmatrix}; \bar{B}_7 = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ m_3 \end{bmatrix}; \bar{B}_8 = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

O controlador $u(t)$ para o sistema equivalente Lyapunov (146) é dado por

$$u(t) = - \left(\sum_{i=1}^8 \alpha_i F_i \right) q(t), \quad (147)$$

onde F_i 's são os ganhos que devem ser determinados. Como $q(t) = Q(t)^{-1}x(t)$, a lei de controle acima pode ser reescrita da seguinte forma

$$u(t) = - \left(\sum_{i=1}^8 \alpha_i F_i \right) Q(t)^{-1}x(t), \quad (148)$$

que será a síntese do controlador, no método híbrido, para o sistema original (142).

5.1.1 Estabilidade

O teorema a seguir apresenta condições que garantem a estabilidade assintótica do sistema (142) quando realimentado com a lei de controle (148).

Teorema 20. *Se as LMIs (111)-(114), aplicadas ao modelo fuzzy (146) do sistema Lyapunov equivalente (144), forem factíveis, então o sistema (142) realimentado com a lei de controle (148) é assintoticamente estável.*

Demonstração. Considerando $K(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(z(t))F_i$, o sistema (144) realimentado com a lei de controle (147) é descrito por

$$\dot{q}(t) = \left(R - \bar{B}(t)K(t) \right) q(t). \quad (149)$$

O sistema (142) realimentado com a lei de controle (148) é dado por

$$\dot{x}(t) = \left(A(t) - B(t)K(t)Q(t)^{-1} \right) x(t). \quad (150)$$

Se as LMIs (111)-(114) aplicadas ao sistema Lyapunov equivalente (144) são factíveis, então o sistema em malha fechada (149) é assintoticamente estável. Além disso, o sistema (149) é Lyapunov equivalente ao sistema (150) via transformação L-F. De fato, considerando $x(t) = Q(t)q(t)$, das equações (13) e (21) seguem que

$$\begin{aligned}\tilde{A}(t) &= [Q(t)(R - \bar{B}(t)K(t)) + \dot{Q}(t)]Q(t)^{-1} \\ &= [Q(t)R - Q(t)Q(t)^{-1}B(t)K(t) + \dot{Q}(t)]Q(t)^{-1} \\ &= [Q(t)(Q(t)^{-1}(A(t)Q(t) - \dot{Q}(t)) - B(t)K(t)) + \dot{Q}(t)]Q(t)^{-1} \\ &= [A(t)Q(t) - \dot{Q}(t) - B(t)K(t) + \dot{Q}(t)]Q(t)^{-1} \\ &= A(t) - B(t)K(t)Q(t)^{-1}.\end{aligned}$$

Como transformações de Lyapunov preservam estabilidade, segue que (150) é assintoticamente estável. \square

5.1.2 Restrição na Entrada e Taxa de Decaimento

A seguir, será mostrado como pode-se adicionar restrição na entrada e taxa de decaimento no projeto do controlador via método híbrido.

Primeiro, observe que quando passamos do sistema original para o sistema Lyapunov equivalente por meio da transformação L-F, a lei de controle do sistema Lyapunov equivalente é exatamente a mesma lei de controle do sistema original, como pode ser visto nas equações (147) e (148). Portanto, ao aplicar restrições (LMIs (130)-(131)) à lei de controle do sistema Lyapunov equivalente (144), as mesmas restrições são garantidas para a lei de controle do sistema original (142).

Agora, será mostrado como as restrições que garantem uma taxa de decaimento mínima $\beta > 0$ e enunciadas nas LMIs (126)-(129) podem ser aplicadas ao modelo *fuzzy* (146) do sistema Lyapunov equivalente (144) e as mesmas garantir também a mesma taxa mínima β ao sistema original (142).

Inicialmente, suponha que as LMIs (126)-(129) aplicadas ao sistema Lyapunov equivalente (144), com taxa mínima $\beta > 0$ sejam factíveis. Portanto, deve existir uma constante $C > 0$ tal que

$$\|q(t)\| \leq Ce^{-\beta t}\|q(0)\|, \text{ para toda trajetória } q(t). \quad (151)$$

Seja $x(t)$ uma solução qualquer do sistema original (142). Sabemos que $q(t) = Q(t)^{-1}x(t)$. Para simplificar considere a notação $\Theta(t) = Q(t)^{-1}$. Assim, podemos escrever $q(t) = \Theta(t)x(t)$. Pelo Teorema 14 sabemos que $\Theta(t)$ é uma transformação de Lyapunov. Em particular $\det[\Theta(t)] \neq 0$ para todo $t \geq 0$. Decorre que, para todo $t \geq 0$:

$$\|q(t)\| \leq Ce^{-\beta t}\|q(0)\|$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \|q(t)\|^2 \leq C^2 e^{-2\beta t} \|q(0)\|^2 \\
&\Leftrightarrow q(t)'q(t) \leq C^2 e^{-2\beta t} q(0)'q(0) \\
&\Leftrightarrow [\Theta(t)x(t)]'\Theta(t)x(t) \leq C^2 e^{-2\beta t} [\Theta(0)x(0)]'\Theta(0)x(0) \\
&\Leftrightarrow x(t)'\Theta(t)'\Theta(t)x(t) \leq C^2 e^{-2\beta t} x(0)'\Theta(0)'\Theta(0)x(0). \tag{152}
\end{aligned}$$

Observe que $\det[\Theta(t)'\Theta(t)] \neq 0$, pois $\det[\Theta(t)] \neq 0$. Portanto, para todo $t \in \mathbb{R}$ tem-se $\Theta(t)'\Theta(t)$ é positiva definida (CHEN, 1998, p. 75). Além disso, porque $\Theta(t)'\Theta(t)$ é simétrica e definida positiva, segue que todos os autovalores de $\Theta(t)'\Theta(t)$ são reais e estritamente positivos (CHEN, 1998, p. 74). Seja $\lambda_{\min}(t)$ o menor autovalor de $\Theta(t)'\Theta(t)$. Sendo $\Theta(t)'\Theta(t)$ simétrica segue que

$$\lambda_{\min}(t)x(t)'x(t) \leq x(t)'[\Theta(t)'\Theta(t)]x(t) \leq \lambda_{\max}(t)x(t)'x(t), \tag{153}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, em que $\lambda_{\min}(t)$ e $\lambda_{\max}(t)$ designam o menor e o maior autovalor de $\Theta(t)'\Theta(t)$, respectivamente (LIMA, 2012, p. 240). Seja $\lambda_0 = \min_{t \geq 0} \{\lambda_{\min}(t)\}$. De (152) e (153) decorre que, para todo $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 x(t)'x(t) &\leq \lambda_{\min}(t)x(t)'x(t) \\
&\leq x(t)'[\Theta(t)'\Theta(t)]x(t) \\
&\leq C^2 e^{-2\beta t} x(0)'\Theta(0)'\Theta(0)x(0) \\
&\leq C^2 e^{-2\beta t} \lambda_{\max}(0)x(0)'x(0),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lambda_0 \|x(t)\|^2 \leq C^2 e^{-2\beta t} \lambda_{\max}(0) \|x(0)\|^2. \tag{154}$$

Considerando $C_0 = C \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(0)}{\lambda_0}}$, de (154) decorre que $\|x(t)\| \leq C_0 e^{-\beta t} \|x(0)\|$, para todo $t \geq 0$. Portanto, se as LMIs (126)-(129), com taxa mínima $\beta > 0$, são aplicadas ao sistema Lyapunov equivalente (144) e são factíveis, então fica assegurado ao sistema (142) também a mesma taxa mínima $\beta > 0$.

5.2 REDUZINDO O NÚMERO DE MODELOS LOCAIS FUZZY

Nesta seção, será mostrado a eficiência do método de controle híbrido para controlar sistemas LTV periódicos, especificamente aqueles cuja matriz $A(t)$ possui dois ou mais termos variantes combinados com incertezas na matriz de entrada de controle. Considere o seguinte sistema dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 10 \cos\left(\frac{20}{3}\pi t\right) \\ b \cos(20\pi t) & \sin\left(\frac{20}{3}\pi t\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} u, \tag{155}$$

onde a , b e c são constantes reais. Observe que o sistema LTV acima é periódico de período 0,3 segundos. Nesse caso, os dois métodos de controle descritos no capítulo anterior podem ser usados para projetar um controlador.

5.2.1 Aplicando o Controle *Fuzzy* Takagi-Sugeno

Nesta seção, o controle *fuzzy* T-S e o método híbrido proposto serão aplicados para controlar o sistema (155) e comparar suas regiões de factibilidade.

Primeiro, o controle *fuzzy* T-S será aplicado. Nesse caso, observe que o número de termos variantes do sistema é $r = 3$ e, portanto, o sistema possui $2^3 = 8$ modelos locais *fuzzy*. O vetor premissa é dado por

$$z(t) = [z_1(t) \quad z_2(t) \quad z_3(t)]',$$

onde

$$\begin{aligned} z_1(t) &= 10 \cos\left(\frac{20}{3}\pi t\right) \\ z_2(t) &= b \cos(20\pi t) \\ z_3(t) &= \sin\left(\frac{20}{3}\pi t\right). \end{aligned}$$

Sejam m_i e M_i os valores de mínimo e máximo de $z_i(t)$, respectivamente, então

$$\begin{aligned} m_1 &= \min_t \{z_1(t)\} = -10 \\ M_1 &= \max_t \{z_1(t)\} = 10 \\ m_2 &= \min_t \{z_2(t)\} = \min\{-b, b\} \\ M_2 &= \max_t \{z_2(t)\} = \max\{-b, b\} \\ m_3 &= \min_t \{z_3(t)\} = -1 \\ M_3 &= \max_t \{z_3(t)\} = 1. \end{aligned}$$

O modelo *fuzzy* T-S é dado por

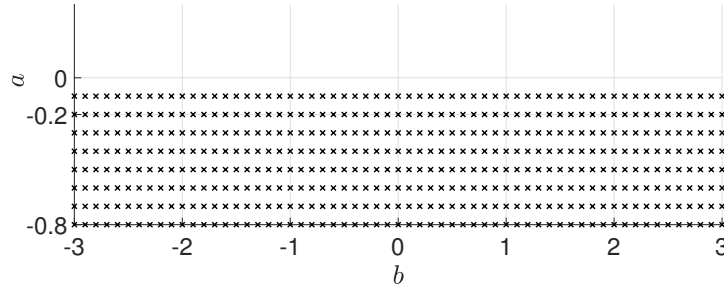
$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^8 \alpha_i A_i \right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^8 \alpha_i B_i \right) u(t), \quad (156)$$

onde

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} a & m_1 \\ m_2 & m_3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a & m_1 \\ m_2 & M_3 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} a & m_1 \\ M_2 & m_3 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} a & m_2 \\ M_2 & M_3 \end{bmatrix}, \\ A_5 &= \begin{bmatrix} a & M_1 \\ m_2 & m_3 \end{bmatrix}, A_6 = \begin{bmatrix} a & M_1 \\ m_2 & M_3 \end{bmatrix}, A_7 = \begin{bmatrix} a & M_1 \\ M_2 & m_3 \end{bmatrix}, A_8 = \begin{bmatrix} a & M_1 \\ M_2 & M_3 \end{bmatrix}, \\ B_i &= \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 8. \end{aligned}$$

O sistema (156) foi simulado para valores de $a \in [-0, 8, 0, 4]$, $b \in [-3, 3]$ e $c = 1$. Foram considerados as LMIs (126)-(129) considerando $\beta = 0$. A região de factibilidade obtida é mostrada na Figura 39 abaixo.

Figura 39 – Região de factibilidade obtida considerando o controle *fuzzy* T-S.



Fonte: autor.

Analisando a Figura 39, observa-se que para alguns valores dos parâmetros a e b o método de controle *fuzzy* T-S não obteve factibilidade. A seguir, será mostrado que o mesmo não ocorre quando aplicado o método híbrido.

5.2.2 Aplicando o Método Híbrido

Para cada $a \in [-0,8, 0,4]$, $b \in [-3, 3]$, considere a mudança de variável $q(t) = Q(t)^{-1}x(t)$ e o sistema Lyapunov equivalente é descrito por

$$\dot{q}(t) = Rq(t) + Q(t)^{-1}B(t)u(t), \quad (157)$$

onde R é obtida de (22), $Q(t)$ é a transformação L-F do sistema (155) não forçado e $B(t) = [0 \ 1]'$. Considerando $Q(t)^{-1} = [\Theta_{ij}(t)]_{2 \times 2}$ e $\bar{B}(t) = Q(t)^{-1}B(t)$ segue que

$$\dot{q}(t) = Rq(t) + \bar{B}(t)u(t), \quad (158)$$

onde, neste caso, $\bar{B}(t)$ é dada por

$$\bar{B}(t) = [\Theta_{12}(t) \ \Theta_{22}(t)]'.$$

Assim, o vetor premissa é dado por

$$z(t) = [z_1(t) \ z_2(t)]',$$

onde $z_i(t) = \Theta_{i2}(t)$, $i = 1, 2$. Observe que $Q(t)^{-1}$ é limitada e periódica de período 0,6 segundos. Logo, $\bar{B}(t)$ também é limitada. Assim, pode-se considerar os valores máximos e mínimos dados por

$$m_i = \min_{0 \leq t \leq 0,6} \{z_i(t)\},$$

$$M_i = \max_{0 \leq t \leq 0,6} \{z_i(t)\},$$

para todo $i = 1, 2$.

O modelo *fuzzy* T-S do sistema (158) é dado por

$$\dot{q}(t) = \left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i R_i \right) q(t) + \left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i \bar{B}_i \right) u(t),$$

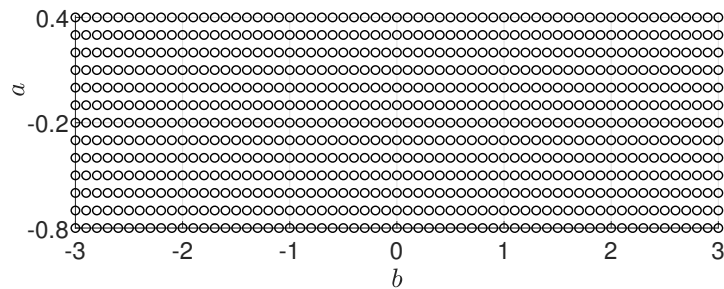
onde $R_i = R$ para todo $i = 1, \dots, 4$, R é obtida de (22) e \bar{B}_i 's são dadas por

$$\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}; \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} m_1 \\ M_2 \end{bmatrix}; \bar{B}_3 = \begin{bmatrix} M_1 \\ m_2 \end{bmatrix}; \bar{B}_4 = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}.$$

Observe que a aplicação do método proposto reduziu o número de termos variantes do sistema de três para dois. Como resultado, o número de modelos locais *fuzzy* foi reduzido de oito para quatro. Assim, é esperado um aumento da região de factibilidade ao aplicar o método híbrido.

A figura a seguir mostra a região de factibilidade obtida considerando o método proposto. Novamente, foi considerado as LMIs (126)-(129) com $\beta = 0$.

Figura 40 – Região de factibilidade considerando o método proposto.

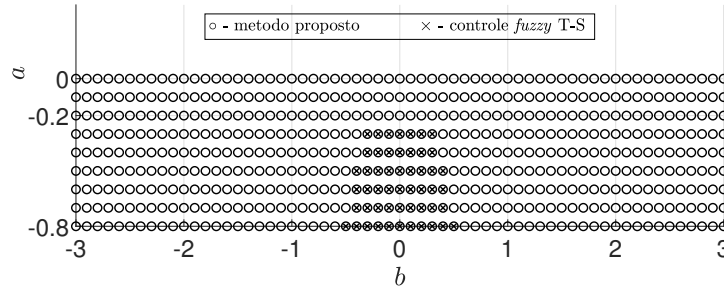


Fonte: autor.

Comparando as Figuras 39 e 40, podemos perceber que o método proposto fornece uma maior região de factibilidade. Neste caso, o método híbrido obteve factibilidade para todos os valores de a e b nos intervalos considerados, diferentemente do método de controle *fuzzy* T-S.

Ainda com o intuito de comparar as duas técnicas, suponha-se que uma restrição à entrada do sistema dada por $\|u(t)\|_2 \leq 3$ e uma taxa de decaimento dada por $\beta = 0, 2$ sejam consideradas. A figura a seguir compara a região de factibilidade encontrada pelos dois métodos considerando os índices de desempenho mencionados acima. Neste caso, foram consideradas a LMIs (126)-(131) com $\beta = 0, 2$, $\mu = 3$ e $x(0) = [0, 5 \quad -0, 8]'$.

Figura 41 – Região de factibilidade, considerando estabilidade + taxa de decaimento + restrição de entrada.



Fonte: autor.

Comparando as regiões de factibilidade dos dois métodos acima pode-se perceber uma maior região quando aplicado o método proposto. Observe que adicionando os índices de desempenho acima, o método *fuzzy* T-S teve uma redução significativa em sua região de factibilidade.

5.2.3 Incertezas na Matriz $B(t)$

Nesta seção, será visto como projetar um controlador usando o método híbrido e considerando incertezas na matriz $B(t)$ do sistema. Nesse caso, o sistema (155) será considerado com $a = -0,8$ e $b = -0,1$, e o parâmetro c será considerado incerto no intervalo $[0, 7, 1]$. Primeiramente, deve-se considerar o sistema Lyapunov equivalente dado em (158). Neste caso, as matrizes R e $\bar{B}(t)$ são dadas por

$$R = \begin{bmatrix} -0,799995 & -0,235413 \\ -0,000017 & -0,000006 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}(t) = \begin{bmatrix} c \times \Theta_{12}(t) \\ c \times \Theta_{22}(t) \end{bmatrix}.$$

Observe que as funções de pertinência passam a depender da variável temporal t e da incerteza c . Assim, $z_1(t, c) = c \times \Theta_{12}(t)$ e $z_2(t, c) = c \times \Theta_{22}(t)$ e os valores de máximo e mínimo são dados por

$$m_i = \min\{z_i(t, c) / 0,7 \leq c \leq 1 \text{ e } 0 \leq t \leq 0,6\},$$

$$M_i = \max\{z_i(t, c) / 0,7 \leq c \leq 1 \text{ e } 0 \leq t \leq 0,6\}.$$

Os valores de máximo e mínimo encontrados foram

$$m_1 = -0,45955 \quad M_1 = 0,49319 \quad m_2 = 0,63624 \quad M_2 = 1.$$

Assim, o modelo *fuzzy* T-S do sistema Lyapunov equivalente é dado por

$$\dot{q}(t) = \left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i R_i \right) q(t) + \left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i \bar{B}_i \right) u(t), \tag{159}$$

onde $R_i = R$ para todo $i = 1, \dots, 4$ e \bar{B}_i 's são dadas por

$$\bar{B}_1 = \begin{bmatrix} -0,45955 \\ 0,63624 \end{bmatrix}; \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} -0,45955 \\ 1 \end{bmatrix}; \bar{B}_3 = \begin{bmatrix} 0,49319 \\ 0,63624 \end{bmatrix}; \bar{B}_4 = \begin{bmatrix} 0,49319 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observação 4. Considerando o parâmetro incerto c , se aplicássemos apenas o controle fuzzy T-S, teríamos quatro termos variantes e, portanto, teríamos um número de modelos locais fuzzy igual a $2^4 = 16$. Aplicando o método de controle híbrido, o número de termos variantes diminui para 2 e, portanto, o número de modelos locais fuzzy diminui para 4, tornando o sistema menos conservador.

5.3 SIMULAÇÃO

A seguir são apresentados os gráficos do comportamento do sistema (155). Para a simulação foram fixados $c = 0,7$ e $x_0 = [-1, 2 \ 1]'$.

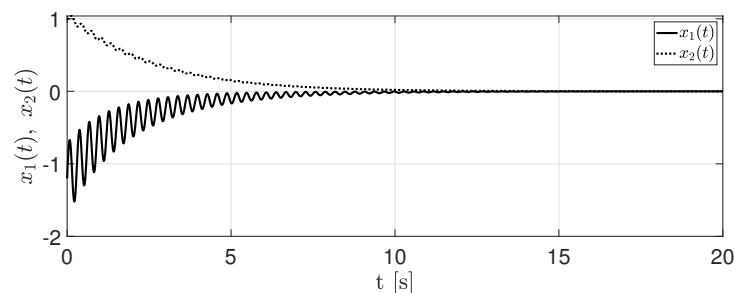
5.3.0.1 Incertezas + estabilidade

Primeiro, apenas a estabilidade do sistema foi considerada. As LMIs utilizadas foram (126)-(129) com $\beta = 0$. Os ganhos obtidos em F_i foram:

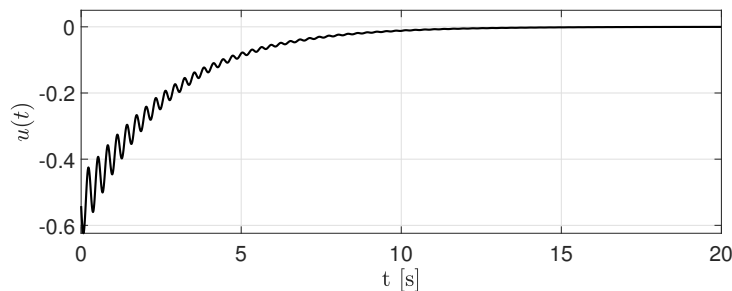
$$F_1 = \begin{bmatrix} -0,0411 & 0,6435 \end{bmatrix}; \quad F_3 = \begin{bmatrix} 0,2376 & 0,6956 \end{bmatrix}; \\ F_2 = \begin{bmatrix} -0,0134 & 0,5641 \end{bmatrix}; \quad F_4 = \begin{bmatrix} 0,2101 & 0,6082 \end{bmatrix}.$$

As figuras a seguir mostram o sistema em malha fechada, bem como o comportamento do sinal de controle $u(t)$.

Figura 42 – Estados do sistema em malha fechada considerando incertezas + estabilidade.



Fonte: autor.

Figura 43 – Lei de controle considerando incertezas + estabilidade.

Fonte: autor.

Pode-se observar que a técnica de controle foi eficiente no controle do sistema. Além disso, percebe-se que o sistema leva aproximadamente 12 segundos para entrar em regime permanente. A seguir, será mostrado como melhorar a resposta do sistema adicionando taxa de decaimento.

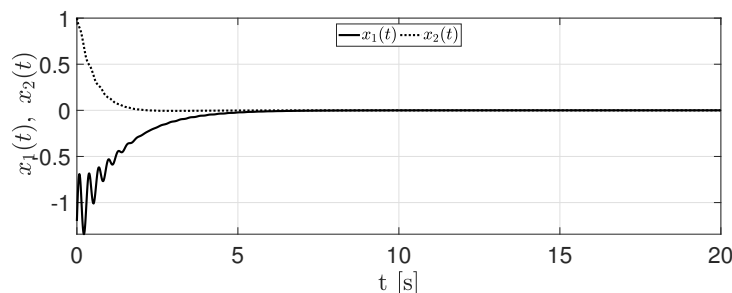
5.3.0.2 Incertezas + estabilidade + taxa de decaimento

As LMIs consideradas foram (126)-(129) e a taxa de decaimento escolhida foi de $\beta = 0,4$. Os ganhos F_i 's obtidos foram:

$$F_1 = \begin{bmatrix} -0,1614 & 2,8511 \end{bmatrix}; \quad F_3 = \begin{bmatrix} -0,0956 & 2,7977 \end{bmatrix};$$

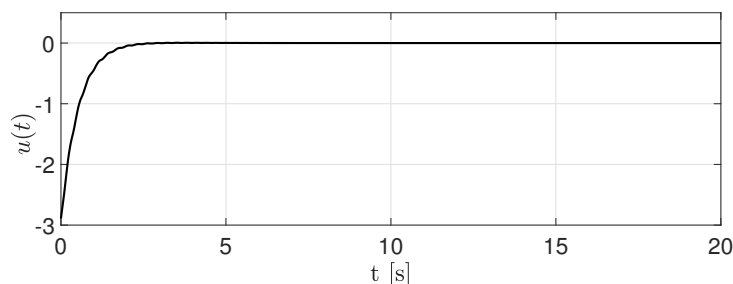
$$F_2 = \begin{bmatrix} -0,1328 & 2,3548 \end{bmatrix}; \quad F_4 = \begin{bmatrix} -0,0651 & 2,3206 \end{bmatrix}.$$

As Figuras 44 e 45 abaixo mostram o comportamento do sistema. Na Figura 44 observa-se que a estabilidade do sistema foi garantida. Além disso, comparando as figuras 42 e 44, observa-se que o tempo do transitório passou de 12 segundos para 5 segundos, ou seja, houve uma redução como esperado.

Figura 44 – Estados do sistema em malha fechada considerando incertezas + estabilidade + taxa de decaimento.

Fonte: autor.

Figura 45 – Lei de controle do sistema de malha fechada considerando incertezas + estabilidade + taxa de decaimento.



Fonte: autor.

5.3.0.3 Incertezas + estabilidade + taxa de decaimento + restrição na entrada

Suponha que, devido a uma limitação do projeto, haja uma restrição na entrada do sistema dada por

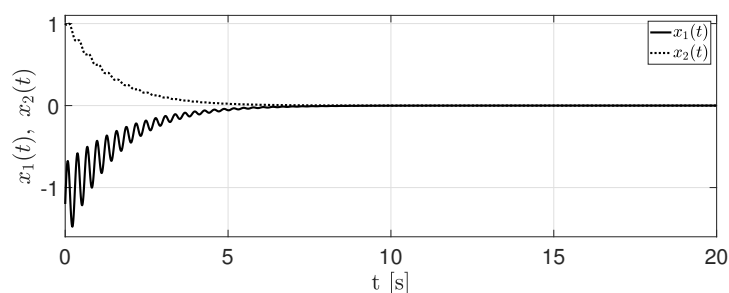
$$-2 \leq u(t) \leq 2, \text{ para todo } t \geq 0. \quad (160)$$

Analisando a Figura 45, pode-se observar que a lei de controle está acima do seu limite. Portanto, no projeto do controlador, uma restrição na entrada deve ser considerada. As LMIs consideradas foram (126)-(129) com $\beta = 0,4$ e (130)-(131) com $\mu = 2$. Os ganhos F_i obtidos foram:

$$F_1 = \begin{bmatrix} 0,0354 & 1,1343 \end{bmatrix}; \quad F_3 = \begin{bmatrix} -0,1107 & 1,1026 \end{bmatrix}; \\ F_2 = \begin{bmatrix} 0,0215 & 0,9401 \end{bmatrix}; \quad F_4 = \begin{bmatrix} -0,0352 & 0,9284 \end{bmatrix}.$$

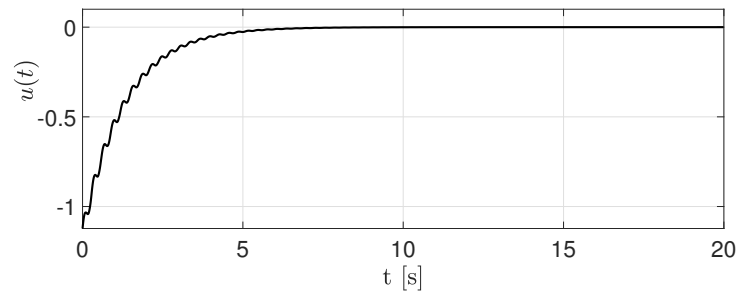
O comportamento do sistema em malha fechada e da lei de controle $u(t)$ estão ilustrados abaixo.

Figura 46 – Estados do sistema em malha fechada considerando incertezas + estabilidade + taxa de decaimento + restrição na entrada.



Fonte: autor.

Figura 47 – Lei de controle do sistema em malha fechada considerando incertezas + estabilidade + taxa de decaimento + restrição na entrada.



Fonte: autor.

Analisando as Figuras 46 e 47, pode-se observar que, além da estabilidade do sistema com taxa de decaimento $\beta = 0,4$, a restrição de entrada (160) também foi atendida.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em geral, estudar a estabilidade de sistemas LTV não é tão simples quanto estudar a estabilidade de sistemas invariantes no tempo. A condição de que a matriz do sistema tenha autovalores com parte real negativa não é suficiente para garantir a estabilidade do sistema (CHEN, 1998). Uma forma de estudar a estabilidade de sistemas LTV é por meio da STM, ou seja, o comportamento da STM determina a estabilidade do sistema, como foi visto na Seção 2.1.4. Infelizmente, obter tal matriz de forma analítica só é possível quando o sistema é comutativo e, por isso, métodos numéricos como o método descrito em (SINHA; BUTCHER, 1997) foram desenvolvidos para obter tal matriz numericamente. Conforme validado na Subseção 3.5, o método proposto por Sinha e Butcher (1997) se mostrou eficiente. Foi visto que se o sistema é LTV e periódico existe uma transformação, chamada de transformação Lyapunov–Floquet que transforma o sistema LTV e periódico em um sistema linear invariante no tempo, além disso, tal transformação preserva a estabilidade dos sistemas. Assim, estudar a estabilidade de um sistema LTV e periódico é equivalente a estudar a estabilidade de um sistema linear invariante.

Também, foi visto que a técnica de controle proposta por Sinha e Joseph (1994) e generalizada por Sinha, Henrichs e Ravindra (2000) se mostrou eficiente para controlar sistemas LTV e periódicos, lineares e não lineares. A técnica foi eficiente para controlar o sistema comutativo, considerando tanto a lei de controle exata quanto a aproximada. A técnica também se mostrou eficiente para controlar o pêndulo com excitação vertical no suporte, que é um sistema não linear, tanto para conduzir os estado para a origem quanto para conduzi-los para uma órbita desejada. Entretanto, a estabilidade assintótica não é matematicamente garantida. A técnica proposta por Deshmukh e Sinha (2004) garante a estabilidade assintótica do sistema, no entanto, não é possível adicionar algumas limitações no projeto do controlador, tais como restrição de entrada, taxa de decaimento ou incertezas.

Neste trabalho pode-se ver que a técnica de controle *fuzzy* T-S pode ser aplicada em sistemas lineares variantes de tempo. No entanto, foi visto que se o sistema tiver dois ou mais termos variantes e incertezas na matriz do do controlador, o controle *fuzzy* T-S pode fornecer resultados conservadores.

Neste trabalho foi proposta uma técnica de controle híbrida, que combina a técnica *fuzzy* T-S com o controle via transformação L-F. A técnica híbrida se mostrou eficiente para controlar sistemas LTV e periódicos. A estabilidade assintótica do sistema em malha fechada ficou garantida matematicamente. O método proposto também permitiu adicionar no projeto algumas limitações do sistema, como restrição de entrada, taxa de decaimento e incertezas na matriz do controlador. Além disso, quando o sistema possui dois ou mais termos variantes combinados com incertezas na matriz do controlador, o

método proposto forneceu resultados menos conservadores para a estabilidade do sistema quando comparado com o controle *fuzzy* T-S.

Uma vez que incertezas são inseridas no sistema, o método híbrido não poderia ser implementado na prática, pois a lei de controle proposta depende do valor da incerteza em cada instante de tempo. Entretanto, esse problema pode ser superado implementando o controle chaveado proposto em (SOUZA et al., 2013).

REFERÊNCIAS

- BOGHIU, D.; SINHA, S. C.; MARGHITU, D. B. Stability and control of a parametrically excited rotating system. part ii: Controls. *Dynamics and control*, Amsterdam, v. 8, n. 1, p. 19–35, 1998.
- CHEN, C.-T. *Linear system theory and design*. 3. ed. New York: Oxford University Press, Inc., 1998. ISBN 0-19-511777-8.
- COELHO, F. U.; LOURENCO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear*. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2013. ISBN 978-85-314-0594-5.
- DAQAQ, M. F.; STABLER, C.; QAROUSH, Y.; SEUACIUC-OSÓRIO, T. Investigation of power harvesting via parametric excitations. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, London, v. 20, n. 5, p. 545–557, 2009.
- DESHMUKH, V. S.; SINHA, S. C. Control of dynamic systems with time-periodic coefficients via the lyapunov-floquet transformation and backstepping technique. *Journal of Vibration and Control*, Thousand Oaks, v. 10, n. 10, p. 1517–1533, 2004.
- FOX, L.; PARKER, I. B. *Chebyshev polynomials in numerical analysis*. London: Oxford University Press, 1968.
- KIM, E.; LEE, H. New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 8, n. 5, p. 523–534, 2000.
- KIRKLAND, W. G.; SINHA, S. C. Symbolic computation of quantities associated with time-periodic dynamical systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, New York, v. 11, n. 4, p. 041022, 2016.
- KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. Canada: John Wiley & Sons, 1978. ISBN 0-471-50731-8.
- LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. 8. ed. Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012. Coleção Matemática Universitária. ISBN 978-85-244-0089-6.
- LOFBERG, J. Yalmip : a toolbox for modeling and optimization in matlab. In: *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation (IEEE Cat. No.04CH37508)*. New Orleans: [s.n.], 2004. p. 284–289.
- LUKES, D. L. *Differential equations: classical to controlled*. London: Academic Press, Inc., 1982. v. 162. Mathematics In Science and Engineering. ISBN 0-12-459980-X.
- MEIROVITCH, L. *Methods of analytical dynamics*. New York: McGraw-Hill, Inc., 2010.
- PERUZZI, N.; CHAVARETTE, F. R.; BALTHAZAR, J. M.; TUSSET, A. M.; PERTICARRARI, A. L. P. M.; BRASIL, R. The dynamic behavior of a parametrically excited time-periodic mems taking into account parametric errors. *Journal of Vibration and Control*, London, v. 22, n. 20, p. 4101–4110, 2016.

- PERUZZI, N. J. *Dinâmica não linear e controle de sistemas ideais e não-ideais periódicos*. 2005. 200 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, 2005.
- SHARMA, A.; SINHA, S. C. An approximate analysis of quasi-periodic systems via floquet theory. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, New York, v. 13, n. 2, 2017.
- SHERRILL, R. E.; SINCLAIR, A. J.; SINHA, S. C.; LOVELL, T. A. Lyapunov-Floquet control of satellite relative motion in elliptic orbits. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Piscataway, v. 51, n. 4, p. 2800–2810, 2015.
- SINHA, S. C.; BUTCHER, E. A. Symbolic computation of fundamental solution matrices for linear time-periodic dynamical systems. *Journal of Sound and Vibration*, London, v. 206, n. 1, p. 61–85, 1997.
- SINHA, S. C.; HENRICHS, J. T.; RAVINDRA, B. A general approach in the design of active controllers for nonlinear systems exhibiting chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Singapore, v. 10, n. 01, p. 165–178, 2000.
- SINHA, S. C.; JOSEPH, P. Control of general dynamic systems with periodically varying parameters via liapunov-floquet transformation. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, New York, v. 116, n. 4, p. 650–658, 1994.
- SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. *Applied nonlinear control*. New Jersey: Prentice Hall, Inc., 1991. ISBN 0-13-040890-5.
- SNYDER, M. A. *Chebyshev methods in numerical approximation*. [S.l.]: Prentice-Hall, Inc., 1966. Series in Automatic Computation.
- SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. Projeto Euclides.
- SOUZA, W. A. D.; TEIXEIRA, M.; SANTIM, M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. *Mathematical Problems in Engineering*, London, v. 2013, 2013.
- STURM, J. F. Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization methods and software*, Abingdon, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999.
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, Piscataway, n. 1, p. 116–132, 1985.
- TANAKA, K.; WANG, H. O. *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*. New York: John Wiley & Sons, 2001. ISBN 0-471-32324-1.
- TANIGUCHI, T.; TANAKA, K.; OHTAKE, H.; WANG, H. O. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of takagi-sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 9, n. 4, p. 525–538, 2001.
- YAKUBOVICH, V. A.; STARZHINSKII, V. M. *Linear differential equations with periodic coefficients*. New York: John Wiley & Sons, 1975. ISBN 0-470-96953-9.

APÊNDICE A – Lemas Técnicos

Para facilitar a compreensão dos cálculos que são feitos a fim de obter uma aproximação para a STM, alguns resultados preliminares envolvendo o produto de kronecker e as matrizes operacionais são necessários, e estão apresentados neste apêndice em forma de Lema.

O primeiro resultado desta seção apresenta uma relação entre o produto clássico de matrizes e o produto de kronecker.

Lema 10. *Sejam $A \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $B \in \mathbb{R}^{q \times s}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{n \times l}$. Então*

$$(AB) \otimes (CD) = (A \otimes C)(B \otimes D).$$

Demonstração. Uma prova direta é a seguinte:

$$\begin{aligned} (A \otimes C)(B \otimes D) &= \begin{bmatrix} a_{11}C & \cdots & a_{1q}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}C & \cdots & a_{pq}C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}D & \cdots & b_{1s}D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q1}D & \cdots & b_{qs}D \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^q a_{1k}b_{k1}CD & \cdots & \sum_{k=1}^q a_{1k}b_{kp}CD \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^q a_{pk}b_{k1}CD & \cdots & \sum_{k=1}^q a_{pk}b_{ks}CD \end{bmatrix} \\ &= (AB) \otimes (CD). \end{aligned}$$

□

Duas consequências do Lema 10 são apresentadas a seguir:

Lema 11. *Se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $T \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, então*

$$A(TD) = (I \otimes T)(A \otimes D).$$

Demonstração. Pelo Lema 10 segue que

$$(I \otimes T)(A \otimes D) = A \otimes (TD) = A(TD).$$

□

Lema 12. *Se $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{n \times l}$, então $I \otimes (CD) = (I \otimes C)(I \otimes D)$.*

Demonstração. Pelo Lema 10 segue que

$$I \otimes (CD) = (II) \otimes (CD) = (I \otimes C)(I \otimes D).$$

□

Lema 13. *Sejam m, n inteiros positivos. Então*

$$I = \widehat{T}(t)' \widehat{I} = \widehat{I}' \widehat{T}(t),$$

onde

$$\widehat{I} = I \otimes [1 \underbrace{0 \cdots 0}_{(m-1)}]'$$

Lema 14. *Sejam $A(t)$ uma matriz variante no tempo de dimensão $n \times m$ e B uma matriz constante $m \times n$. Então*

$$\int_0^\tau A(t)B dt = \left(\int_0^\tau A(t) dt \right) B. \quad (161)$$

Demonstração. Considere as seguintes notações indicias para matrizes

$$\begin{aligned} [a_{ij}(t)]_{n \times m} &= A(t); \\ [b_{ij}]_{m \times n} &= B; \\ [c_{ij}(t)]_{n \times n} &= A(t)B; \\ [d_{ij}(t)]_{n \times n} &= \left(\int_0^\tau A(t) dt \right) B. \end{aligned}$$

Da multiplicação de matrizes segue que

$$c_{ij}(t) = \sum_{k=1}^m a_{ik}(t)b_{kj} \text{ e } d_{ij}(t) = \sum_{k=1}^m \left(\int_0^\tau a_{ik}(t) dt \right) b_{kj}. \quad (162)$$

Decorre que

$$\begin{aligned} \int_0^\tau c_{ij}(t) dt &= \int_0^\tau \left(\sum_{k=1}^m a_{ik}(t)b_{kj} \right) dt \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\int_0^\tau a_{ik}(t) dt \right) b_{kj} \\ &= d_{ij}(t). \end{aligned}$$

□

Lema 15. *Sejam $A(t)$ uma matriz variante no tempo de dimensão $n \times m$. Então*

$$\int_0^\tau I_n \otimes A(t) dt = I \otimes \int_0^\tau A(t) dt. \quad (163)$$

Demonstração. Por (28) tem-se

$$I \otimes A(t) = \begin{bmatrix} A(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A(t) \end{bmatrix}. \quad (164)$$

De (164) decorre que

$$\int_0^\tau I \otimes A(t) dt = \begin{bmatrix} \int_0^\tau A(t) dt & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \int_0^\tau A(t) dt & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \int_0^\tau A(t) dt \end{bmatrix} = I \otimes \int_0^\tau A(t) dt.$$

□

Lema 16. *Sejam d_i o vetor dos coeficientes da expansão de $\bar{f}_i(\tau)$ em polinômios de Chebyshev alterados e α é o conjunto dos parâmetros do sistema normalizado (46). Definindo $D(\alpha) = \sum_{i=1}^s \bar{A}_i(\alpha) \otimes d'_i$, então*

$$\bar{A}(\tau, \alpha) \approx \hat{T}(\tau)' D(\alpha) = D(\alpha) T(\tau).$$

Demonstração. A demonstração será feita para $r = 2$. Os demais casos são análogos a este. Por (47) obtemos

$$\bar{f}_i(\tau) \approx [T_0^*(\tau) \cdots T_{m-1}^*(\tau)] [d_{i0} \cdots d_{i(m-1)}]' = T^*(\tau)' d'_i. \quad (165)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \bar{A}(\tau, \alpha) &= \bar{A}_1(\alpha) \bar{f}_1(\tau) + \bar{A}_2(\alpha) \bar{f}_2(\tau) \\ &\approx \bar{A}_1(\alpha) (T^*(\tau)' d'_1) + \bar{A}_2(\alpha) (T^*(\tau)' d'_2) \\ &\stackrel{\text{(Lema 11)}}{=} (I \otimes T^*(\tau)') (\bar{A}_1(\alpha) \otimes d'_1) + (I \otimes T^*(\tau)') (\bar{A}_2(\alpha) \otimes d'_2) \\ &= \hat{T}(\tau)' \sum_{i=1}^2 \bar{A}_i(\alpha) d'_i \\ &= \hat{T}(\tau)' D(\alpha). \end{aligned}$$

□

Lema 17. *Seja m um inteiro positivo. Considere a matriz polinomial de Chebyshev dada por (29) e a matriz de integração dada por (35). Então*

$$\int_0^\tau \hat{T}(t)' dt \approx \hat{T}(\tau)' \hat{G}'.$$

Demonstração. Uma prova direta é a seguinte:

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \hat{T}(t)' dt &= \int_0^\tau I \otimes T^*(t)' dt \\ &\stackrel{\text{(Lema 15)}}{=} I \otimes \int_0^\tau T^*(t)' dt \\ &\stackrel{(36)}{\approx} I \otimes (T^*(\tau)' G') \\ &\stackrel{\text{(Lema 12)}}{=} (I \otimes T^*(\tau)') (I \otimes G') \\ &= \hat{T}'(\tau) \hat{G}'. \end{aligned}$$

□

Lema 18. *Sejam m um inteiro positivo e $\widehat{T}(t)$ a matriz de Chebyshev. Então*

$$D(\alpha)\widehat{T}(t)\widehat{T}(t)' \approx \widehat{T}(t)'\widehat{Q}_D, \quad \text{onde } \widehat{Q}_D = \sum_{i=1}^s \bar{A}_i(\alpha) \otimes Q_{d_i}.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} D(\alpha)\widehat{T}(t)\widehat{T}(t)' &= \left(\sum_{i=1}^s \bar{A}_i(\alpha) \otimes d'_i \right) (I \otimes T^*(t)) (I \otimes T^*(t)') \\ &\stackrel{\text{(Lema 12)}}{=} \left(\sum_{i=1}^s \bar{A}_i(\alpha) \otimes d'_i \right) (I \otimes (T^*(t)T^*(t)')) \\ &= \sum_{i=1}^s \left\{ \left(\bar{A}_i(\alpha) \otimes d'_i \right) (I \otimes (T^*(t)T^*(t)')) \right\} \\ &\stackrel{\text{(Lema 10)}}{=} \sum_{i=1}^s \left\{ \left(\bar{A}_i(\alpha)I \right) \otimes (d'_i T^*(t)T^*(t)') \right\} \\ &\stackrel{\text{(33)}}{\approx} \sum_{i=1}^s \left\{ \left(I\bar{A}_i(\alpha) \right) \otimes (T^*(t)'Q_{d_i}) \right\} \\ &\stackrel{\text{(10)}}{=} \sum_{i=1}^s \left\{ (I \otimes T^*(t)') \left(\bar{A}_i(\alpha) \otimes Q_{d_i} \right) \right\} \\ &= (I \otimes T^*(t)') \left\{ \sum_{i=1}^s \left(\bar{A}_i(\alpha) \otimes Q_{d_i} \right) \right\} \\ &= \widehat{T}(t)'\widehat{Q}_D. \end{aligned}$$

□