

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

TAÍS ALVES SILVA RIBEIRO

Estudo das regiões estáveis e instáveis ao redor de corpos prolatos

Guaratinguetá
2023

Taís Alves Silva Ribeiro

Estudo das regiões estáveis e instáveis ao redor de corpos prolatos

Tese apresentada ao Conselho de Pós-Graduação em Física e Astronomia da Faculdade de Engenharia e Ciências do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Física e Astronomia, na área de Astronomia Dinâmica

Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter

Guaratinguetá

2023

R484e Ribeiro, Taís Alves Silva
Estudo das regiões estáveis e instáveis ao redor de
corpos prolatos / Taís Alves Silva Ribeiro - Guaratinguetá,
2023.
117 f : il.
Bibliografia: f. 109-113

Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista,
Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2023.

Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter

1. Mecânica celeste. 2. Órbitas. 3. Astronomia. 4. Elipsóide.
I. Título.

CDU 521.1(043)

TAÍS ALVES SILVA RIBEIRO

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“DOUTORA EM FÍSICA”**

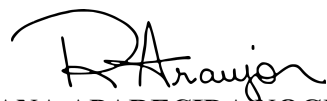
**PROGRAMA: FÍSICA
CURSO: DOUTORADO**

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO


Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

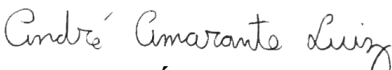
BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. OTHON CABO WINTER
Orientador - UNESP


Profa. Dra. ROSANA APARECIDA NOGUEIRA DE ARAUJO
UNESP

Prof. Dr. BRUNO SICARDY
Observatoire de Paris




Prof. Dr. ANDRÉ AMARANTE LUIZ
UNESP


Prof. Dr. CARLOS TABARE GALLARDO CASTRO
FCIEN / UDELAR/Montevideo

DADOS CURRICULARES

TAÍS ALVES SILVA RIBEIRO

NASCIMENTO 04/01/1993 - Taubaté / SP

FILIAÇÃO Lázaro Aparecido dos Reis Ribeiro
Mariana Maria de Jesus

2013 / 2015 Licenciatura em Matemática
Centro Universitário Salesiano de São Paulo

2016 / 2018 Mestrado em Física
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá

2018 / 2023 Doutorado em Física e Astronomia
Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá

Dedico este trabalho à minha família, por todo apoio demonstrado.

AGRADECIMENTOS

Eu me lembro do dia em que desejei que esse momento se tornasse realidade e desde então, muitas pessoas contribuíram para que esse sonho fosse possível. Em especial gostaria de agradecer:

Ao meu orientador, Prof. Dr. Othon Cabo Winter, por todo o conhecimento compartilhado, que permitiu a concretização desse trabalho. Pelo apoio e suporte dados nos momentos mais difíceis.

Agradeço aos meus pais, Mariana e Lázaro, por terem me ensinado desde criança que poderia mudar a minha vida através da educação. Obrigada por terem me incentivado a estudar.

À minha irmã e ao meu cunhado, Elizabeth e Maykow, por sempre se fazerem presentes e pelo apoio dado nos momentos difíceis.

Aos meus sobrinhos, Kauã e Pietro, por deixarem meus dias mais leves e divertidos.

Ao meu namorado, Wesley Fioreze, por ser meu grande incentivador, por ter me acalmado e encorajado nos momentos em que achei que não conseguiria. Obrigada por todo amor, carinho e dedicação.

Aos amigos/irmãos, Sávia e Júlio, pela sincera amizade e por sonharem comigo esse momento.

Ao meu grande amigo, Eliézer Guisso, que não teve a oportunidade de presenciar a finalização desse trabalho, mas que, pelos 9 anos de amizade, sempre me incentivou a batalhar pelos meus sonhos. Tenho certeza que, do céu, ele está feliz por essa realização.

Aos amigos da Pós-graduação, em especial à Jady Xavier, que se tornou uma grande companheira nessa jornada.

Às professoras Dra. Sílvia, Dra. Daniela e Dra. Alessandra, por todas as contribuições realizadas durante esses anos.

Aos colegas Gabriel Borderes, Gustavo Madeira, Gerson Barbosa, Jean Carvalho e Luiz Boldrin pelas colaborações nos trabalhos desenvolvidos.

À banca de defesa composta por Dr. Othon Cabo Winter, Dr. André Amarante, Dra. Rosana Araújo, Dr. Bruno Sicardy e Dr. Tabaré Gallardo, por aceitarem a analisar os resultados dos trabalhos que desenvolvi nos últimos anos, que estão resumidos nesta tese.

Por fim, agradeço a Deus pela realização desse sonho.

Este trabalho contou com o apoio das seguintes entidades:

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior

FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - Processo 2016/24561-0

*“A persistência é o caminho do êxito.”
(Charles Chaplin)*

RESUMO

A exploração dinâmica ao redor de corpos não esféricos tem aumentado nas últimas décadas devido ao interesse em estudar o movimento das órbitas de naves espaciais, luas e anéis de partículas ao redor desses corpos. A proposta desta tese é explorar a região em torno de corpos modelados por elipsoides prolatos, usando ferramentas computacionais para integrações numéricas das equações do problema gravitacional de N-corpos, a técnica da superfície de seção de Poincaré e o método de busca em grade. No âmbito de integrações numéricas para o estudo da dinâmica da região próxima a esses corpos elipsoidais, sabe-se que é necessário o uso de condições iniciais geométricas quando o objeto central é significativamente oblato. Assim, mostramos que para corpos alongados, há também a necessidade de adaptação da velocidade inicial ($\nu_{C_{22}}$) para que órbitas periódicas de primeira espécie em torno deste corpo tenham amplitudes de variações radiais menores, visto que a velocidade kepleriana produz elevada excentricidade osculadora e variação radial. Descrevemos um método empírico para obter a velocidade $\nu_{C_{22}}$ de um conjunto de simulações onde variamos os parâmetros físicos como massa, raio do primário, densidade, C_{22} e distância radial. Com os dados obtidos, desenvolvemos novas equações que permitem o cálculo da excentricidade orbital, velocidade inicial e a Terceira Lei de Kepler em função do coeficiente de elipticidade, semieixo maior da órbita e raio do corpo central. Além disso, identificamos uma importante mudança da localização do corpo primário em relação a órbita elíptica. Em uma órbita kepleriana usual o objeto central ocupa um dos focos da elipse. No caso das órbitas com mínima variação radial encontradas em nosso estudo, o corpo passa a ocupar o centro da órbita elíptica. Por fim, incluímos a rotação do corpo central nos sistemas estudados e analisamos suas implicações na dinâmica dessas órbitas de baixa variação radial. A estrutura dinâmica em torno desses objetos é definida por regiões regulares e caóticas. A técnica de superfície de seção de Poincaré permite mapear essas regiões, identificando a localização de ressonâncias e o tamanho das zonas regulares e caóticas, assim, auxiliando a compreensão da dinâmica ao redor desses corpos. Portanto, usando essa técnica, mapeamos o espaço $a - e$ das regiões estáveis e instáveis em torno de corpos elipsoidais, tais como o planeta anão Haumea, o centauro Chariklo e outros cinco corpos hipotéticos, nos quais mantemos parte dos parâmetros físicos de Haumea mas variamos seu período de rotação e elipticidade, a fim de analisarmos o impacto dessas alterações nas extensões das regiões estáveis e instáveis devido às órbitas periódicas de primeiro tipo e ressonâncias do tipo spin-órbita. Verificamos que as larguras das ressonâncias não são simétricas em relação ao centro da ressonância e identificamos uma grande região de estabilidade, em semieixo maior e excentricidade, devido às órbitas periódicas de primeiro tipo. As órbitas periódicas de primeiro tipo estão presentes em um grande intervalo de semieixo maior para todos os sistemas considerados e possuem excentricidade quase nula, enquanto que as órbitas ressonantes e as quase-periódicas apresentam excentricidades elevadas. Além disso, identificamos a bifurcação da ressonância 2:6 quando há redução do spin de um corpo com os mesmos parâmetros físicos de Haumea. Essa bifurcação gera uma região caótica, diminuindo a extensão da zona de estabilidade. Por fim, usando o método de busca em grade, identificamos e classificamos famílias de órbitas periódicas

simétricas em torno de corpos prolatos.

PALAVRAS-CHAVE: Mecânica Celeste. Pequenos corpos. Elipsoide triaxial. Evolução dinâmica e estabilidade. Família de órbitas periódicas simétricas.

ABSTRACT

Dynamic exploration around non-spherical bodies has increased in recent decades due to the interest in studying the motion of spacecraft orbits, moons and particle rings around these bodies. The purpose of this thesis is to explore the region around bodies modelled by prolate ellipsoids, using computational tools for numerical integrations of N-bodies, the Poincaré surface of section technique and the grid search method. In the context of numerical integrations for the study of the dynamics of the region close to these ellipsoidal bodies, it is known that it is necessary to use geometric initial conditions when the central object is significantly oblate. Thus, we show that for elongated bodies, there is also the need to adapt the initial velocity ($\nu_{C_{22}}$) so that periodic orbits of the first kind around this body have smaller amplitudes of radial variations since Keplerian velocity produces high osculating eccentricity and radial variation. We describe an empirical method to obtain the velocity $\nu_{C_{22}}$ from a set of simulations where we vary physical parameters such as mass, primary radius, density, C_{22} and radial distance, with the data obtained, we developed new equations that allow the calculation of orbital eccentricity, initial velocity and Kepler's Third Law as a function of the ellipticity coefficient, the semi-major axis of the orbit and radius of the central body. Furthermore, we identified an important change in the location of the primary body in the elliptical orbit. In a usual Keplerian orbit the central object occupies one of the foci of the ellipse. In the case of orbits with the minimal radial variation found in our study, the body occupies the centre of the elliptical orbit. Finally, we include the rotation of the central body in the studied systems and analyze its implications on the dynamics of these low radial variation orbits. The dynamic structure around these objects is defined by regular and chaotic regions. The Poincaré surface of section technique allows mapping these regions, identifying the location of resonances and the size of regular and chaotic zones, thus helping to understand the dynamics around these bodies. Therefore, using this technique, we map the $a - e$ space of stable and unstable regions around ellipsoidal bodies, such as the dwarf planet Haumea, the centaur Chariklo and five other hypothetical bodies, in which we maintain part of the physical parameters of Haumea but vary its period of rotation and ellipticity, to analyze the impact of these alterations on the extensions of the stable and unstable regions due to first kind periodic orbits and spin-orbit resonances. We verified that the widths of the resonances are not symmetrical about the center of the resonance and we identified a large region of stability, in semi-major axis and eccentricity, due to the first kind periodic orbits. Periodic orbits of the first kind are present in a large semi-major axis interval for all considered systems and have almost zero eccentricity, while resonant and quasi-periodic orbits have high eccentricities. Furthermore, we identified the bifurcation of the 2:6 resonance when there is a spin reduction of a body with the same physical parameters as Haumea. This bifurcation generates a chaotic region, reducing the extension of the stability zone. Finally, using the grid search method, we identify and classify families of symmetric periodic orbits around prolate bodies.

KEYWORDS: Celestial Mechanics. Dynamic evolution and stability. Family of symmetric periodic orbits.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 1 Órbitas equatoriais em torno de corpos esféricos e achatados, por um período orbital. A linha cinza é uma órbita circular em torno de um corpo esférico (em cinza) com velocidade inicial kepleriana circular (ν_k). A linha verde representa uma órbita elíptica ao redor de um corpo oblato localizado em um dos focos da órbita e com velocidade inicial kepleriana circular. A trajetória roxa determina uma órbita com velocidade inicial geométrica circular (ν_g) ao redor de um corpo achatado. 30
- Figura 2 Evolução longitudinal, durante um período orbital, do raio orbital (gráfico superior) e a excentricidade (gráfico inferior) das órbitas em torno de um primário com a mesma massa de Haumea. No gráfico superior, a linha verde indica a órbita da partícula com velocidade inicial kepleriana circular igual a $\nu_k = 1230,7 \text{ km h}^{-1}$ com $\Delta r = 203 \text{ km}$ e a linha roxa indica a órbita da partícula com velocidade geométrica circular igual a $\nu_g = 1257,6 \text{ km h}^{-1}$. No gráfico inferior, temos duas excentricidades para cada valor de velocidade inicial. Para o caso de ν_k , a linha verde aponta para a excentricidade calculada usando a equação 2, devido a geometria elíptica ($e_{J_2} = 0,047$) e a linha tracejada verde é o valor da excentricidade osculadora (com $\Delta e = 0,097$). Para o caso de ν_g a linha roxa indica a excentricidade geométrica, que é aproximadamente zero, e a linha roxa tracejada representa a excentricidade osculadora (com $e = 0,044$). 31
- Figura 3 Evolução longitudinal do raio orbital das trajetórias em torno de um corpo com a mesma massa e coeficiente de elipticidade, $C_{22} = 0,049$, de Haumea para o caso sem rotação do corpo central. A distância radial inicial de todas as órbitas ao centro de massa é de 2287 km. A linha verde indica a órbita com velocidade inicial kepleriana circular, $\nu_k = 1230,7 \text{ km h}^{-1}$, a linha vermelha representa a órbita com velocidade inicial $\nu_{C_{22}} = 1248,7 \text{ km h}^{-1}$ e as linhas pretas são órbitas de velocidade: $\nu_1 = 1236 \text{ km h}^{-1}$, $\nu_2 = 1243,3 \text{ km h}^{-1}$, $\nu_3 = 1252,8 \text{ km h}^{-1}$, $\nu_4 = 1256,4 \text{ km h}^{-1}$ e $\nu_5 = 1260 \text{ km h}^{-1}$. A excentricidade da órbita com velocidade ν_k é $\Delta e \approx 0,3$ e a variação radial é $\Delta r \approx 104 \text{ km}$. Para o caso da órbita com velocidade inicial $\nu_{C_{22}}$ a excentricidade é $\Delta e \approx 0,15$ e a amplitude da variação radial é $\Delta r \approx 27,5 \text{ km}$ 33

- Figura 4 Diagrama esquemático de órbitas em torno de corpos esféricos e prolatos. A linha tracejada cinza é uma órbita circular em torno de um corpo esférico (em cinza) com velocidade inicial kepleriana circular. A linha verde representa uma órbita altamente excêntrica ao redor de um corpo prolato localizado em um dos focos da órbita e com velocidade inicial kepleriana circular. A trajetória vermelha mostra uma órbita elíptica com baixa excentricidade ao redor do corpo prolato localizado no centro desta órbita. A velocidade inicial ($\nu_{C_{22}}$) dessa última órbita elíptica é diferente da velocidade circular kepleriana. O ângulo θ é a posição angular da partícula na órbita. As distâncias r_{min} e r_{max} indicam o menor e o maior raio da órbita em vermelho e a diferença entre esses valores define a variação radial Δr 34
- Figura 5 Órbita de uma partícula com velocidade inicial kepleriana circular em torno de Haumea. O gráfico superior mostra a evolução longitudinal do raio orbital. No gráfico inferior está a órbita no plano Oxy . A escala de cores indica o valor da velocidade. A distância inicial da partícula ao centro de massa é 2287 km e a velocidade inicial kepleriana circular é igual a $\nu_k = 1230,7 \text{ km h}^{-1}$. O corpo central está localizado em um dos focos da elipse e há um apocentro (P_1 em $r = 2287 \text{ km}$), um pericentro (P_3 em $r = 2183,32 \text{ km}$) e dois intermediários pontos (P_2 e P_4). . . 35
- Figura 6 Órbita ao redor de Haumea. No topo do gráfico está a evolução longitudinal do raio orbital. No gráfico inferior está a órbita no plano Oxy . A escala de cores indica a variação na velocidade da órbita. A distância inicial da partícula ao centro de massa é 2287 km e a velocidade inicial é $\nu_{C_{22}} = 1248,7 \text{ km h}^{-1}$. O corpo primário está no centro da órbita elíptica e há dois apocentros (P_1 e P_2 , ambos com $r = 2287 \text{ km}$) e dois pericentros (P_3 e P_4 , ambos com $r = 2259,52 \text{ km}$). 37
- Figura 7 Evolução da amplitude da variação radial Δr , em km, em função da velocidade inicial da órbita, em km h^{-1} . O sistema consiste em uma partícula com raio orbital inicial de 2287 km e um corpo central com a mesma massa ($4,006 \times 10^{21} \text{ kg}$) e coeficiente de elipticidade ($C_{22} = 0,049$) de Haumea, e sem sua rotação e coeficiente de achatamento. O ponto mínimo, em vermelho, indica o valor de $\nu_{C_{22}}$ que gera a menor amplitude de variação do raio orbital. 38
- Figura 8 Valores dos coeficientes α (equação 9) em função dos coeficientes de elipticidade C_{22} . Os pontos indicam os valores medidos de α para cada caso. As linhas são geradas por ajustes a partir dos dados obtidos e as cores estão associadas às distâncias radiais iniciais da órbita ao centro de massa do sistema (em unidades do raio equivalente do corpo central, R). 40

Figura 9	Valores de β (equação 10) em função da distância radial inicial das órbitas. Os pontos são os valores β medidos em cada caso e suas respectivas cores indicam as massas dos corpos. A linha azul mostra o ajuste para a equação 11 usando os coeficientes $\kappa = 2,354$ e $\gamma = 1,958$. A linha vermelha é gerada pela equação 11 mas adotando a aproximação dos coeficientes para $\kappa = 2,4$ e $\gamma = 2$	41
Figura 10	Órbitas no plano Oxy em torno de um corpo alongado (elipse preta) com massa de $1,13 \times 10^{22}$ kg, $C_{22} = 0,05$, $R = 1000$ km e sem rotação o corpo central. As cores indicam a distância radial inicial das órbitas em unidades do raio do primário. As linhas cinzas sobrepostas às linhas coloridas, são gráficos de equações de elipses usando os valores dos semieixos $a_{C_{22}}$ e $b_{C_{22}}$ obtidos através da medição de r_{max} e r_{min} , respectivamente, para cada órbita correspondente. Os valores dos eixos e excentricidades podem ser encontrados na tabela 3.	43
Figura 11	Valores de δ em função do coeficiente de elipticidade C_{22} . Os pontos referem-se ao valor de δ medido para cada C_{22} . As linhas são ajustes de curva aplicados para cada distância radial inicial da órbita, que corresponde ao semieixo maior, indicado pelas cores.	45
Figura 12	Valores do coeficiente τ em função do semieixo maior das órbitas em torno do corpo central. A curva vermelha é traçada usando a equação 16 com o coeficiente $\zeta = 2,74$ e $\eta = 1,94$	46
Figura 13	Valores de excentricidade em função do semieixo maior em unidades do raio equivalente do corpo central. Os pontos são os valores de excentricidade medidos para cada caso. As curvas foram ajustadas entre os dois elementos. A excentricidade é independente da massa do corpo central. As cores das linhas indicam o valor do coeficiente de elipticidade.	47
Figura 14	Valores do coeficiente Λ em função do semieixo maior. Os pontos são os valores Λ medidos para cada caso do semieixo maior. As curvas coloridas correspondem aos ajustes feitos com os dados. As cores estão associadas aos períodos de rotação do corpo central.	48
Figura 15	Valores de excentricidade em função do semieixo maior no sistema girante. Os pontos são os valores medidos de excentricidade para cada caso do semieixo maior. As curvas coloridas são os ajustes feitos com os dados coletados. As cores estão associadas aos períodos de rotação do corpo central.	49
Figura 16	Valores do período orbital $T_{C_{22}}$ em função do semieixo maior (em unidades do raio equivalente do corpo central) no sistema inercial. Os pontos são os valores medidos do período orbital para cada caso do semieixo maior e as cores são associadas aos períodos de rotação do corpo central. A curva vermelha é o ajuste feito com os dados coletados gerando a equação 19.	50
Figura 17	Diagrama esquemático do processo de distribuição de condições iniciais.	51

Figura 18	Variação temporal da distribuição de partículas ao redor de Haumea após 0, 1, 10, 100, 1000 e 10000 dias de integração numérica. A elipse central tem as dimensões equatoriais de Haumea e mostra a sua posição angular no tempo. No último quadro, a linha azul indica a posição da ressonância 2:6 e linha verde a borda interna da região estável.	53
Figura 19	Diagrama esquemático de uma trajetória equatorial em torno de um elipsoide de Jacobi. O plano O_{xy} é fixo no corpo, x_0 marca a posição inicial da trajetória e a seta indica a velocidade inicial.	57
Figura 20	Superfícies de seção de Poincaré para um sistema considerando Haumea como um corpo oblato, ou seja, o coeficiente de elipticidade é nulo. As ilhas em vermelho são órbitas quase-periódicas associadas a uma família de órbitas periódicas, indicada pelo único ponto no centro de todas as ilhas.	58
Figura 21	Superfícies de seção de Poincaré para dois valores diferentes da constante de Jacobi (C_j). Na esquerda é mostrada as ilhas de estabilidade da ressonância 2:5, indicada pela cor azul, enquanto que na figura da direita são mostradas as ilhas duplas de estabilidade da ressonância 2:6, representadas por tons diferentes de verde. Em ambas as superfícies de seções de Poincaré, há a presença das ilhas das órbitas quase-periódicas associadas às órbitas periódicas de primeiro tipo, além da região instável, preenchida de forma aleatória por pontos vermelhos.	59
Figura 22	Superfícies de seção de Poincaré do sistema Haumea ^d (consultar tabela 4) para quatro valores diferentes da constante de Jacobi (C_j), mostrando a evolução de duas famílias, de órbitas periódicas e quase-periódicas, indicadas pelas cores azul claro (F1) e azul escuro (F2).	60
Figura 23	Órbitas periódicas das duas famílias F1 (a) e F2 (b). As cores indicam os quatro valores da constante de Jacobi, os mesmos da Figura 22.	61
Figura 24	Evolução temporal por um período orbital das duas famílias de órbitas periódicas F1 (a) e F2 (b). As cores indicam os quatro valores da constante de Jacobi, os mesmos da Figura 22.	61
Figura 25	Superfícies de seção de Poincaré do sistema Haumea para seis valores diferentes da constante de Jacobi (C_j), mostrando a evolução das ressonâncias 2:4, 2:5 e 2:6, respectivamente. As ilhas de estabilidade da ressonância 2:4 (plots (a) e (b)) são duplicadas e estão representadas pelas cores rosa e lilás. O mesmo fenômeno ocorre com as ilhas da ressonância 2:6 (plots (e) e (f)), indicadas pelos tons diferentes de verde. A ressonância 2:5 é mostrada pelas ilhas em azul nos plots (c) e (d). As ilhas em vermelho são órbitas quase periódicas associadas a uma família de órbitas periódicas do primeiro tipo.	64

- Figura 26 Evolução das famílias associadas às ressonâncias 2:4, 2:5 e 2:6 nas superfícies da secção de Poincaré para o sistema Haumea. Para cada figura, tem-se uma amostra das maiores ilhas de estabilidade, uma ilha intermediária e os pontos internos que representam a órbita periódica, mostrando a estrutura para diferentes valores de C_j . As cores indicam os valores de $C_j(\text{km}^2 \text{s}^{-2})$ considerados. 65
- Figura 27 Superfícies de seção de Poincaré do sistema Haumea^e para seis valores diferentes da constante de Jacobi (C_j), mostrando a evolução das ressonâncias 2:4, 2:5 e 2:6, respectivamente. As ilhas de estabilidade da ressonância 2:4 (plots (a) e (b)) são duplicadas e estão representadas pelas cores rosa e lilás. O mesmo fenômeno ocorre com as ilhas da ressonância 2:6 (plots (e) e (f)), indicadas pelos tons diferentes de verde. A ressonância 2:5 é mostrada pelas ilhas em azul nos plots (c) e (d). As ilhas em vermelho são órbitas quase periódicas associadas a uma família de órbitas periódicas do primeiro tipo. 66
- Figura 28 Superfícies de seção de Poincaré do sistema Haumea^e para oito valores diferentes da constante de Jacobi (C_j), mostrando a evolução das ressonâncias 4:7, 2:4, 2:5 e 2:6, respectivamente. As ilhas de estabilidade da ressonância 2:4 são duplicadas e estão representadas pelas cores rosa e lilás. O mesmo fenômeno ocorre com as ilhas da ressonância 2:6, indicadas pelos tons diferentes de verde. As ressonâncias 4:7 e 2:5 são representadas pelas ilhas em amarelo e azul, respectivamente. As ilhas em vermelho são órbitas quase periódicas associadas a uma família de órbitas periódicas do primeiro tipo. 68
- Figura 29 Zoom da Superfície de seção de Poincaré do sistema Haumea^e para $C_j = 2.6115 \times 10^{-1} \text{ km}^2 \text{s}^{-2}$, mostrando a bifurcação de uma das famílias associadas à ressonância 2:6. 69
- Figura 30 Evolução das famílias associadas à ressonância 2:6 nas superfícies da secção de Poincaré para o sistema Haumea^e. O plot apresenta uma amostra das maiores ilhas de estabilidade, uma ilha intermediária e os pontos internos que representam a órbita periódica, mostrando a estrutura para diferentes valores de C_j . As cores indicam os valores de $C_j(\text{km}^2 \text{s}^{-2})$ considerados. 69
- Figura 31 Superfícies de seção de Poincaré do sistema Chariklo para seis valores diferentes da constante de Jacobi (C_j), mostrando a evolução das ressonâncias 2:4, 2:5 e 2:6, respectivamente. As ilhas de estabilidade da ressonância 2:4 (plots (a) e (b)) são duplicadas e estão representadas pelas cores rosa e lilás. O mesmo fenômeno ocorre com as ilhas da ressonância 2:6 (plots (e) e (f)), indicadas pelos tons diferentes de verde. A ressonância 2:5 é mostrada pelas ilhas em azul nos plots (c) e (d). As ilhas em vermelho são órbitas quase periódicas associadas a uma família de órbitas periódicas do primeiro tipo. 70

Figura 32	Órbitas periódicas da ressonância 2:4 para $C_j = 0.7903 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ no sistema girante. A evolução temporal das órbitas é dada pelos pontos numerados que estão igualmente espaçados no tempo, enquanto a escala de cores fornece a velocidade no sistema inercial. (a) Órbita periódica da família representada pela cor rosa nas superfícies de seções de Poincaré da Figura 25a. (b) Órbita periódica da família representada pela cor lilás nas superfícies de seções de Poincaré da Figura 25a.	71
Figura 33	Órbita periódica da ressonância 2:5 para $C_j = 0.8030 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ no sistema girante. A evolução temporal da órbita é dada pelos pontos numerados que estão igualmente espaçados no tempo, enquanto a escala de cores fornece a velocidade no sistema inercial.	71
Figura 34	Órbitas periódicas da ressonância 2:6 para $C_j = 0.8200 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ no sistema girante. A evolução temporal das órbitas é dada pelos pontos numerados que estão igualmente espaçados no tempo, enquanto a escala de cores fornece a velocidade no sistema inercial. (a) Órbita periódica da família representada pela cor verde claro nas superfícies de seções de Poincaré da Figura 25. (b) Órbita periódica da família representada pela cor verde escuro nas superfícies de seções de Poincaré da Figura 25	72
Figura 35	Órbita periódica da ressonância 4:7 do sistema Haumea ^e para $C_j = 0.25536 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ no sistema girante. A evolução temporal da órbita é dada pelos pontos numerados que estão igualmente espaçados no tempo, enquanto a escala de cores fornece a velocidade no sistema inercial.	73
Figura 36	Evolução temporal da distância radial das órbitas periódicas associadas às ressonâncias, para diferentes valores de C_j . O tempo é referente a um período orbital no sistema girante. As linhas tracejadas indicam a localização do semieixo das ressonâncias calculadas por dois métodos distintos.	74
Figura 37	Diagrama da comparação da localização dos semieixos das ressonâncias 2:4, 2:5 e 2:6, calculados por três métodos distintos: problema de dois corpos, frequências epicíclicas (η e κ) e geometria da órbita. Os tipos de tracejados indicam qual método usado. As cores rosa, azul e verde estão relacionadas as ressonâncias e as regiões cinzas indicam a variação radial da órbita periódica menos excêntrica de cada ressonância considerada.	75
Figura 38	Evolução temporal da variação radial das órbitas periódica (em rosa) e quase periódica (em amarelo). A órbita quase periódica se refere a maior ilha associada a ressonância 2:4 para a constante de Jacobi $C_j = 0.7912 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$. As linhas tracejadas e setas de cores amarela e cinza indicam os valores máximos e mínimos da distância radial usados para calcular os limites de semieixo maior e excentricidade das órbitas quase periódicas, enquanto que as linhas tracejadas e setas de cor rosa apontam para os valores máximos e mínimos da distância radial considerados para calcular o centro da ressonância.	77

Figura 39	Mapas das regiões estáveis e instáveis no espaço $a - e$ dos sistema (a) Haumea, (b) Huamea ^a , (c) Huamea ^b e (d) Huamea ^c , obtidos a partir das superfícies de seção de Poincaré. As partículas com semieixo maior e excentricidade dentro da região cinza colidem com o corpo central ou são ejetadas. Nas demais regiões, as partículas permanecem estáveis por mais de 10000 órbitas. As regiões rosa, azul e verde estão relacionadas às ressonâncias 2:4, 2:5 e 2:6, respectivamente. As linhas tracejadas em preto indicam os centros de cada ressonâncias determinados pela geometria das órbitas ressonantes. A linha vermelha inferior corresponde ao semieixo maior e excentricidade das órbitas periódicas de primeiro tipo e a linha vermelha superior às órbitas quase periódicas.	78
Figura 40	Mapas das regiões estáveis e instáveis no espaço $a - e$ dos sistema (a) Huamea ^d e (b) Huamea ^e , obtidos a partir das superfícies de seção de Poincaré. As partículas com semieixo maior e excentricidade dentro da região cinza colidem com o corpo central ou são ejetadas. Nas demais regiões, as partículas permanecem estáveis por mais de 10000 órbitas. As regiões amarela, rosa, azul e verde estão relacionadas às ressonâncias 4:7, 2:4, 2:5 e 2:6, respectivamente. A região roxa no plot (a) refere-se à família F1 e F2. As linhas tracejadas em preto indicam os centros de cada ressonância determinados pela geometria das órbitas ressonantes. A linha vermelha inferior corresponde ao semieixo maior e excentricidade das órbitas periódicas de primeiro tipo e a linha vermelha superior às órbitas quase periódicas.	80
Figura 41	Mapa das regiões estáveis e instáveis no espaço $a - e$ do sistema Chariklo, obtido a partir das superfícies de seção de Poincaré. As partículas com semieixo maior e excentricidade dentro da região cinza colidem com o corpo central ou são ejetadas. Nas demais regiões, as partículas permanecem estáveis por mais de 10000 órbitas. As regiões rosa, azul e verde estão relacionadas as ressonâncias 2:4, 2:5 e 2:6, respectivamente. As linhas tracejadas em preto indicam os centros de cada ressonâncias determinados através da geometria das órbitas ressonantes. A linha vermelha inferior corresponde ao semieixo maior e excentricidade das órbitas periódicas de primeiro tipo e a linha vermelha superior as órbitas quase periódicas.	81
Figura 42	Diagramas esquemáticos de órbitas periódicas e simétricas em relação ao eixos Ox e Oy	86
Figura 43	Mapa das condições iniciais das famílias de órbitas periódicas simétricas do caso $J_2 = 0.05$ e $C_{22} = 0.002$. Os quadros inferiores são ampliações dos quadrantes próximos às regiões proibidas (em cinza).	90
Figura 44	Evolução da família m de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$	91
Figura 45	Evolução da família l de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$	91

Figura 46	Evolução da família A_1 de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$	92
Figura 47	Evolução da família E_1 de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$	92
Figura 48	Evolução da família δ de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$	93
Figura 49	Evolução da família αb de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$	94
Figura 50	Evolução da família βa de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$	94
Figura 51	Evolução da família BD de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$	95
Figura 52	Evolução da família F_1 de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$	96
Figura 53	Evolução da família F_2 de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$	96
Figura 54	Evolução da família de órbitas ressonantes $4 : 3$ e simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$	97
Figura 55	Evolução da família L de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$	97
Figura 56	Evolução da família P de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$	98
Figura 57	Mapa das condições iniciais das famílias de órbitas periódicas simétricas para $J_2 = 0.2$ e $C_{22} = 0.05$	99
Figura 58	Evolução da família k de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,2$ e $C_{22} = 0,05$	99
Figura 59	Evolução da família ub de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,2$ e $C_{22} = 0,05$	100
Figura 60	Evolução da família va de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,2$ e $C_{22} = 0,05$	100
Figura 61	Mapa das condições iniciais das famílias de órbitas periódicas simétricas em torno de Chariklo.	101
Figura 62	Evolução das famílias de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox em torno de Chariklo. Os quatro pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema. .	102
Figura 63	Evolução das famílias de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox em torno de Chariklo. Os quatro pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema. .	103
Figura 64	Mapa das condições iniciais das famílias de órbitas periódicas simétricas em torno de Haumea.	104

Figura 65	Evolução das famílias de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox em torno de Haumea. Os quatro pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema. .	104
Figura 66	Mapa das condições iniciais das famílias de órbitas periódicas simétricas para $J_2 = 0.05$ e $C_{22} = 0.002$. Os quadros inferiores são ampliações dos quadrantes próximos às regiões proibidas (em cinza).	105
Figura 67	Mapa das condições iniciais das famílias de órbitas periódicas simétricas para $J_2 = 0.2$ e $C_{22} = 0.05$	106
Figura 68	Mapa das condições iniciais das famílias de órbitas periódicas simétricas em torno de Chariklo.	106
Figura 69	Evolução das famílias de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Oy em torno de Chariklo. Os quatro pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema. .	107
Figura 70	Mapa das condições iniciais das famílias de órbitas periódicas simétricas em torno de Haumea.	108
Figura 71	Evolução das famílias de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Oy em torno de Haumea. Os quatro pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema. .	108
Figura 72	Órbitas periódicas simétricas ao redor do asteroide Castália, com rotação lenta ($1/7$ do período de rotação real) . Os parâmetros físicos utilizados nas simulações numéricas foram: $\mu = 9,4 \times 10^{-8} \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$, $C_{20} = -0,07275 \text{ km}^2$, $C_{22} = 0,02984 \text{ km}^2$ e $\omega = 6,13 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ (HU; SCHEERES, 2008). O parâmetro de adimensionalização para distância aplicado no gráfico (b) é $r_s \approx 2,93 \text{ km}$	115
Figura 73	Evolução das famílias de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,2$ e $C_{22} = 0,05$. Os seis pontos pretos correspondem aos pontos de equilíbrio do sistema.	116
Figura 74	Evolução das famílias de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Oy . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,2$ e $C_{22} = 0,05$. Os seis pontos pretos correspondem aos pontos de equilíbrio do sistema.	116
Figura 75	Evolução das famílias de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Oy . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$. Os quatro pontos pretos correspondem aos pontos de equilíbrio do sistema.	117

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Parâmetros físicos adotados de Haumea.	32
Tabela 2	– Parâmetros físicos usados nas simulações numéricas	39
Tabela 3	– Semieixos maiores (km), semieixo menores (km) e valores de excentricidades orbitais em torno de um corpo alongado com massa de $1,13 \times 10^{22}$ kg, $C_{22} = 0,05$, $R = 1000$ km e sem rotação. Os dados referem-se a dois tipos de posição do corpo central em relação à órbita: no centro (colunas 1 a 3) e em um dos focos (colunas 4 a 6) com velocidade inicial kepleriana. A distância radial inicial da órbita ao centro de massa é a mesma em ambos os casos. O índice C_{22} indica que os elementos foram calculados devido à geometria da órbita.	42
Tabela 4	– Parâmetros físicos dos corpos centrais usados nas simulações numéricas. A unidade da massa de Chariklo é 10^{18} kg e de Haumea é 10^{21} kg.	62
Tabela 5	– Classificação das famílias de órbitas periódicas simétricas	88
Tabela 6	– Valores dos coeficientes adimensionalizados J_2 e C_{22} e do parâmetro de adimensionalização r_s . Os parâmetros físicos de Chariklo e Haumea que foram usados para calcular os coeficientes podem ser consultados nas tabela 4	101

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	24
2	ÓRBITAS QUASE-CIRCULARES AO REDOR DE CORPOS PROLATOS . . .	27
2.1	Introdução	27
2.2	Escolha de condições iniciais para o caso de primários com achatamento	28
2.3	Coeficiente de elipticidade	32
2.4	Método	36
2.5	Órbita em torno de um corpo alongado sem rotação	39
2.6	Adaptação da Terceira Lei de Kepler para o caso da elipticidade do corpo central . . .	42
2.7	Rotação do corpo central	45
2.8	Borda interna da região estável em torno de Haumea	48
2.8.1	Condições iniciais	49
2.8.2	Resultados	52
2.9	Comentários finais	52
3	DINÂMICA EM CORPOS SIMÉTRICOS E NÃO ESFÉRICOS	55
3.1	Introdução	55
3.2	Sistema dinâmico	56
3.3	Superfície de seção de Poincaré	57
3.3.1	Outras órbitas periódicas	60
3.3.2	Ressonância spin-órbita	62
3.4	Órbitas periódicas ao redor de corpos prolatos	67
3.5	Largura das ressonâncias	76
3.6	Aplicações: sondas, anéis e satélites	79
3.7	Comentários finais	82
4	FAMÍLIAS DE ÓRBITAS PERIÓDICAS SIMÉTRICAS	83
4.1	Introdução	83
4.2	Equações do movimento	84
4.3	Método	86
4.4	Resultados	88
4.4.1	Famílias de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox	89
4.4.1.1	Caso $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$	89
4.4.1.2	Caso $J_2 = 0,2$ e $C_{22} = 0,05$	95
4.4.1.3	Chariklo e Haumea	101

4.4.2	Simetria em relação ao eixo O_y	102
4.5	Comentários finais	106
5	CONCLUSÃO	109
	REFERÊNCIAS	110
	ANEXO A – COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS	115
	ANEXO B – OUTRAS FAMÍLIAS DE ÓRBITAS PERIÓDICAS SIMÉTRICAS	116
	ANEXO C – ARTIGO PUBLICADO - MNRAS	118
	ANEXO D – ARTIGO ACEITO PARA PUBLICAÇÃO - MNRAS	130

1 INTRODUÇÃO

Em geral, os corpos celestes do Sistema Solar não têm forma perfeitamente esférica. As formas desses objetos variam desde os mais arredondados como, por exemplo, os planetas, até corpos mais irregulares, como planetas anões, centauros, TNOs e asteroides. Essas irregularidades na forma dos corpos causam perturbações em seus campos gravitacionais. Para estudar a dinâmica em torno desses corpos, é necessário usar modelos físicos que representem satisfatoriamente suas formas. Para corpos não esféricos, a modelagem pode ser realizada usando elipsoides, como o triaxial e o de Jacobi ou o esferoide de Maclaurin. Este último, consiste em um corpo com raio equatorial A diferente do raio polar C , sendo $A = B$. O elipsoide triaxial é formado por três semieixos de tamanhos diferentes, $A > B > C$ e o elipsoide de Jacobi é um elipsoide triaxial que gira em torno do menor eixo físico (CHANDRASEKHAR, 1942). Entretanto, para corpos com formatos disformes, como é o caso do asteroide Cleópatra, são necessários outros métodos de modelagem. O modelo de Mascons, desenvolvido por Geissler et al. (1996), e de Poliedros, criado por Werner (1994), são capazes de representar com melhor precisão os contornos da superfície desses objetos, entretanto, demandam maiores custos computacionais.

Nas últimas décadas o interesse pelo estudo da dinâmica ao redor desses pequenos corpos e irregulares aumentou com o intuito de entender os tipos de composições, estruturas e processos de formação. Para isso, além das observações feitas com telescópios da Terra, algumas missões espaciais foram lançadas com o objetivo de criar imagens de asteroides em grande resolução como, por exemplo, a missão NEAR-Shoemaker (VEVERKA et al., 2000; PROCKTER et al., 2002), lançada pela NASA em 1996, que capturou imagens do asteroide (253) Mathilde, além de orbitar e pousar na superfície do asteroide (433) Eros. Em 2003 a Agência Espacial Japonesa lançou a espaçonave Hayabusa (FUJIWARA et al., 2006; YOSHIKAWA et al., 2015) destinada ao asteroide (25143) Itokawa. Esta foi a primeira missão que conseguiu coletar material de um asteroide e trazê-lo de volta à Terra para análise. Posteriormente, em 2014, foi lançada a missão Hayabusa 2 (KAWAGUCHI; FUJIWARA; UESUGI, 2008; MÜLLER et al., 2017), também pela Agência Espacial Japonesa. Assim como a missão Hayabusa, a Hayabusa 2 teve como objetivo coletar amostras do asteroide (162173) Ryugu e trazê-lo de volta à Terra. Posteriormente, em 2016, foi lançada a missão OSIRIS-Rex da NASA (LAURETTA et al., 2015; LAURETTA et al., 2017), que coletou amostras do asteroide (101955) Bennu para trazê-lo à Terra. Observações feitas com telescópios terrestres também permitiram, além de estudos sobre as características físicas desses corpos, a descoberta de luas orbitando os asteroides. O primeiro caso conhecido foi o asteroide (243) Ida, que é orbitado por Dactyl. A descoberta deste sistema binário de asteroide foi feita através da análise de imagens obtidas pela sonda Galileo em 1995 (CHAPMAN et al., 1995). Em 2001, o já conhecido asteroide (87) Sylvia teve sua primeira lua, Rômulo, detectada por imagens do telescópio Keck II (MARGOT; BROWN, 2001). Em 2004 foi descoberta a segunda lua, Remo, fazendo com que (87) Sylvia se tornasse o primeiro sistema triplo de asteroides conhecido (MARCHIS et al., 2005). Em 2014, através de ocultações estelares,

foi possível detectar pela primeira vez no Sistema Solar um corpo diferente de um planeta que possui um sistema de dois anéis de partículas (BRAGA-RIBAS et al., 2014). Esse corpo é o (10199) Chariklo, o segundo maior objeto dinamicamente classificado como um centauro. Seu período de rotação é de 7,004 h (FORNASIER et al., 2014), e ainda não há consenso na literatura quanto ao seu tamanho e forma. Em Leiva et al. (2017), cinco ocultações estelares observadas entre 2013 e 2016 foram usadas para restringir o formato Chariklo, resultando em quatro modelos: uma esfera com raio de 129 km; um esferoide de Maclaurin com semieixo $A = B = 143$ km e $C = 96$ km; um elipsoide triaxial com semieixos $A = 148$ km, $B = 132$ km e $C = 102$ km; e um elipsoide de Jacobi com semieixos $A = 157$ km, $B = 139$ km, $C = 86$ km. Com esses possíveis modelos, Leiva et al. (2017) determinou que a faixa de massa do centauro é de 6 a 8×10^{18} kg, assumindo que o corpo é homogêneo e está em equilíbrio hidrostático. Usando esses dados, foi possível estabelecer que a ressonância 1:3 entre o período de rotação de Chariklo e o movimento médio das partículas está localizada no semieixo maior $a_{1:3} = 408 \pm 20$ km, próximo dos raios orbitais dos dois anéis. Sicardy et al. (2019) discute a possibilidade do centauro ser esférico e possuir uma massa anômala em seu equador. Recentemente, o trabalho de Morgado et al. (2021) apresentou novos dados de ocultações estelares que ocorreram entre os anos de 2017 e 2020, possibilitando a determinação de uma nova solução para o formato de Chariklo, que consiste em um elipsoide triaxial com semieixos $a = 143,8$ km, $b = 135,2$ km e $c = 99,1$ km. Além disso, os autores também determinaram os possíveis raios orbitais e larguras dos anéis, sendo eles: C1R está localizado em 385,9 km com 4,8 – 9,1 km de largura e C2R encontra-se a 399,8 km do corpo central e com 0,117 km de extensão.

Em 2017, também por meio de ocultações estelares, foi detectado um anel denso ao redor do planeta anão (136108) Haumea (ORTIZ et al., 2017), que já possuía dois satélites conhecidos: Hi'iaka e Namaka. Haumea possui forma bem alongada, com semieixos $A = 1161 \pm 30$ km, $B = 852 \pm 4$ km e $C = 513 \pm 16$ km (ORTIZ et al., 2017), massa de $4,006 \times 10^{21}$ kg (RAGOZZINE; BROWN, 2009) e um curto período de rotação de 3,9155 h (RABINOWITZ et al., 2006). O anel encontrado tem cerca de 70 km de extensão e raio orbital de 2287^{+78}_{-45} km. Assim como em Chariklo, a localização do anel de Haumea encontra-se próximo à ressonância spin-órbita 1 : 3 ($a_{1:3} = 2285 \pm 8$ km), entre o movimento orbital das partículas do anel e o período de rotação do planeta anão (ORTIZ et al., 2017). Entretanto, através das seções de superfície de Poincaré e usando o potencial gravitacional de um elipsoide com os semieixos de Haumea, Winter, Borderes-Motta e Ribeiro (2019) mostram que órbitas na ressonância spin-órbita 1 : 3 têm excentricidades elevadas, impossibilitando a conservação de um anel circular e que órbitas periódicas de primeiro tipo definem regiões de estabilidade que compreendem a largura e a localização do anel de Haumea.

A proposta deste estudo é explorar a região em torno de corpos prolatos usando integrações numéricas das equações do problema gravitacional de N-corpos e a técnica da superfície de seção de Poincaré. O primeiro trabalho desenvolvido com esse objetivo, descrito no capítulo 2, estuda as órbitas quase periódicas e obtém equações empíricas para os novos elementos orbitais relacionados à geometria da órbita. Esta parte do trabalho foi publicada em Ribeiro et al. (2021) e está reproduzida no anexo C. Além disso, aplicamos o método empírico para determinar a borda interna da região estável em torno do planeta anão

Haumea.

No capítulo 3 é empregada a técnica da superfície de seção de Poincaré para mapear as larguras das ressonâncias ao redor de corpos como Haumea e Chariklo e delimitar as regiões estáveis e instáveis desses sistemas. Esta parte do trabalho foi submetida e aceita para publicação e está reproduzida no anexo D.

No capítulo 4, identificamos e classificamos as famílias de órbitas periódicas simétricas em torno de corpos centrais modelados por elipsoides prolatos.

Por fim, no capítulo 5 são apresentadas as conclusões finais, destacando os principais resultados.

Cada um dos capítulos 2, 3 e 4 são auto suficientes, ou seja, todas as informações, parâmetros e equações necessárias são apresentadas de maneira independente em cada um deles.

2 ÓRBITAS QUASE-CIRCULARES AO REDOR DE CORPOS PROLATOS

2.1 INTRODUÇÃO

No caso de corpos celestes que podem ser modelados usando elipsoides ou esferoides, o campo gravitacional pode ser estudado adicionando os coeficientes gravitacionais que calculam a perturbação em seu potencial. Para os esferoides, os termos J_n são incluídos como, por exemplo, J_2 , J_4 e J_6 , que correspondem ao achatamento dos polos. Para elipsoides, além de J_n , também é adicionado o termo C_{22} , que está relacionado à elipticidade na região equatorial do corpo. Devido aos inúmeros estudos sobre a dinâmica dos anéis planetários e das órbitas de satélites artificiais, os efeitos causados por um potencial gravitacional gerado por um corpo oblato são amplamente conhecidos, uma vez que os planetas do Sistema Solar que possuem anéis, como Saturno, são oblatos e no caso das órbitas de satélites artificiais próximos à Terra, é necessário levar em consideração o achatamento do planeta. Um dos efeitos conhecidos causados pelo coeficiente J_2 é a precessão secular da longitude do pericentro das órbitas. Além disso, sabe-se que os elementos osculadores das órbitas em torno dos corpos oblatos apresentam grandes variações de curto período. Essa variação é corrigida pelo uso de elementos geométricos, que também oscilam, mas com amplitudes bem menores. Os elementos geométricos são obtidos através da teoria epicíclica que foi desenvolvida inicialmente por Chandrasekhar (1942) para a dinâmica estelar e envolve movimentos quase circulares e equatoriais submetidos ao potencial oblato. Greenberg (1981) foi um dos primeiros a desenvolver equações para obter a variação real dos elementos orbitais dos satélites em torno de corpos oblatos. Posteriormente, Borderies e Longaretti (1987), Longaretti e Borderies (1991), Borderies e Longaretti (1994) relacionaram os elementos geométricos da teoria epicíclica à elementos orbitais para a aplicação ao estudo de anéis planetários de baixa excentricidade e pouca inclinação. Renner e Sicardy (2006) descreveram o uso de elementos geométricos em simulações numéricas.

Por meio de resultados numéricos, identifica-se que a inclusão de um termo C_{22} significativo no potencial gravitacional, causa um aumento considerável na excentricidade em órbitas circulares equatoriais de partículas cuja velocidade inicial é kepleriana. Portanto, supõe-se que esse aumento na excentricidade das órbitas obtidas por simulações numéricas seja semelhante ao efeito que ocorre ao se utilizar condições iniciais osculadoras para partículas que estão sujeitas à um potencial gravitacional de um corpo com achatamento. Isso sugere que é necessário encontrar um conjunto de condições iniciais adequadas para que as órbitas submetidas a potenciais com coeficiente de elipticidade C_{22} sejam circulares (ou quase circulares). Neste trabalho, exploramos as características dinâmicas de uma órbita quase circular em torno de um corpo prolato e discutimos as dificuldades em descrever essa trajetória usando elementos orbitais, além de apresentar uma proposta de solução empírica para este problema. Para isso, escolhemos os parâmetros físicos de Haumea para usar como exemplo na aplicação da nossa metodologia. Haumea foi escolhido por ser o corpo mais prolato conhecido no Sistema Solar, com parâmetros físicos bem definidos. Assim, as características dinâmicas de uma órbita quase circular em torno de um corpo altamente prolato

se destacam. No entanto, o estudo é geral; variamos os parâmetros físicos do corpo central para um conjunto de valores usados nas simulações numéricas.

Na seção seguinte, é feita uma breve revisão sobre os efeitos devido ao achatamento; na seção 2.3, a dinâmica das órbitas equatoriais em torno de um corpo prolato é analisada. A abordagem desenvolvida para a correção das condições iniciais de órbitas sob a influência de um potencial de corpo prolato é detalhada na seção 2.4. Os resultados obtidos com essa correção nas órbitas em torno de um corpo não rotativo são expostos e discutidos na seção 2.5. Na seção 2.6, são apresentadas as equações para excentricidade e o movimento médio das órbitas, com variação radial mínima, em torno de um corpo alongado sem rotação. Na seção 2.7, são discutidas as implicações causadas pela rotação do corpo central. Finalmente, na seção 2.9, são apresentados os comentários finais.

2.2 ESCOLHA DE CONDIÇÕES INICIAIS PARA O CASO DE PRIMÁRIOS COM ACHATAMENTO

Os efeitos devido ao J_2 e suas consequências dinâmicas têm sido amplamente discutidos na literatura, em estudos sobre as órbitas de satélites artificiais e a dinâmica dos anéis planetários do Sistema Solar, uma vez que esses planetas que possuem anéis apresentam achatamento significativo. Sabe-se que as órbitas em torno dos corpos oblatos apresentam precessão secular da longitude do pericentro. Além disso, sabe-se que os elementos osculadores dessas órbitas apresentam grandes variações de curto período. Isso ocorre porque os elementos osculadores se referem a uma órbita kepleriana em torno de um corpo esférico, ou seja, são os elementos determinados exclusivamente a partir da posição e velocidade de um corpo em uma órbita que não leva em conta as forças perturbadoras que atuam no sistema (MURRAY; DERMOTT, 1999). Na prática, os elementos osculadores são os elementos que uma partícula teria se o achatamento do corpo central fosse suprimido instantaneamente. Portanto, a amplitude da variação dos elementos se elevam conforme o aumento do achatamento do corpo central.

Para exemplificar, a Figura 1 apresenta integrações numérica de órbitas com uma distância radial inicial de 2287 km até o centro de massa de Haumea. Os parâmetros físicos adotados podem ser encontrados na tabela 1, exceto para o coeficiente de elipticidade, que nesse momento consideramos nulo. A órbita indicada pela cor cinza é a trajetória equatorial circular em torno de um corpo esférico (também em cinza) com velocidade inicial kepleriana, $\nu_k = 1230,70 \text{ km h}^{-1}$. A órbita equatorial excêntrica, em verde, tem a mesma velocidade inicial de $\nu_k = 1230,70 \text{ km h}^{-1}$, porém, ao redor do corpo com achatamento (em preto). Os corpos centrais cinza e preto têm a mesma massa; no entanto, o corpo cinza é uma esfera, enquanto que o corpo preto é achatado. Sendo assim, esse último é maior na região do equador do que no caso esférico, causando uma maior concentração de massa nessa região. Pode-se notar que ao usar a mesma velocidade circular kepleriana em ambos os sistemas, as órbitas resultantes são diferentes. Isso é justificado pela perturbação produzida pelo achatamento do corpo central. Na Figura 2, o gráfico superior mostra a evolução longitudinal do raio orbital da trajetória excêntrica (linha verde). Observe que a partícula não retorna à mesma distância inicial em $\theta = 360^\circ$ devido à precessão do pericentro. No entanto, desprezando essa precessão e assumindo que essa órbita é uma elipse fechada, sua excentricidade

geométrica pode ser calculada usando as distâncias do pericentro (2083, 43 km) e apocentro (2287 km), que são a menor (r_{min}) e maior (r_{max}) distâncias radiais, respectivamente, por meio das equações:

$$a_{J_2} = \frac{r_{min} + r_{max}}{2} \quad (1)$$

$$e_{J_2} = 1 - \frac{r_{min}}{a_{J_2}}. \quad (2)$$

O índice J_2 no semieixo maior e excentricidade indicam que se tratam dos elementos devido a geometria elíptica da órbita, cujos valores são $a_{J_2} = 2185,215$ km e $e_{J_2} = 0,047$, indicada pela linha verde no plot inferior da Figura 2. Porém, determinando a evolução longitudinal da excentricidade osculadora dessa órbita por um período orbital completo, linha verde tracejada no plot inferior da Figura 2, nota-se que há uma variação. Essa variação é explicada pelas equações de Lagrange, que para a excentricidade de uma órbita no plano equatorial é dada por (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$\frac{de}{dt} = \frac{(1 - e^2)}{na^2e} \frac{\partial F_{J_2}}{\partial M} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2e} \frac{\partial F_{J_2}}{\partial \omega} \quad (3)$$

onde F_{J_2} é a função perturbadora devido ao achatamento (CARVALHO, 2017):

$$F_{J_2} = \frac{9}{4} R^2 J_2 n^2 \left[e^2 \cos 2M + \frac{e^2}{3} + \frac{2e \cos M}{3} + \frac{2}{9} \right]. \quad (4)$$

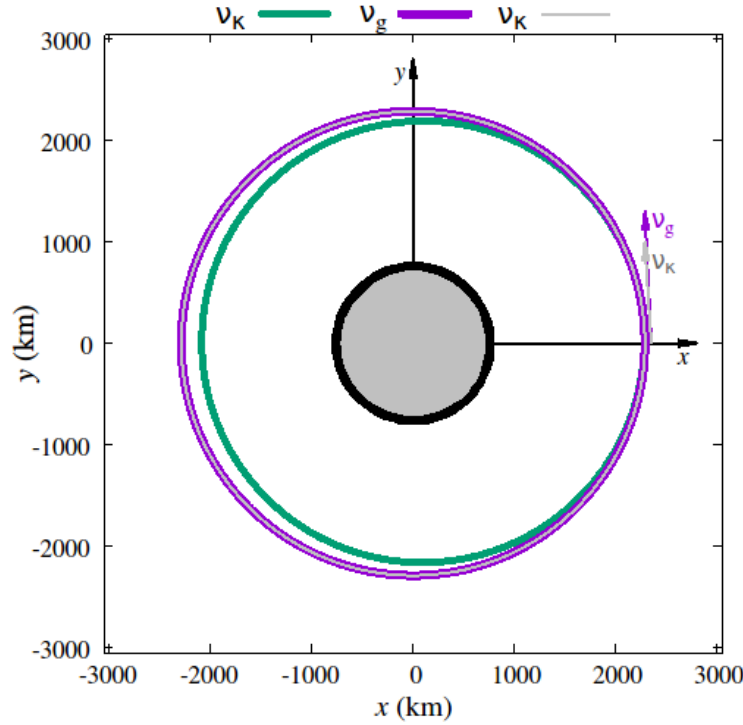
Portanto, a variação da excentricidade (equação 3) pode ser reescrita como

$$\frac{de}{dt} = -\frac{9}{2a^2} (1 - e^2) n R^2 J_2 \left[e \sin 2M + \frac{\sin M}{3} \right], \quad (5)$$

onde M é a anomalia média. Assim, quando um corpo achatado é considerado, a excentricidade oscila. Parece inconsistente para uma órbita elíptica com excentricidade fixa, como mostrado na Figura 1 e Figura 2, apresentar a alta variação de excentricidade dada pela equação 5. A explicação para essa inconsistência está no uso de elementos osculadores, que se baseiam no problema Kepleriano, para determinar a excentricidade de uma órbita que é perturbada pelo achatamento do corpo central.

Voltando à Figura 1, observa-se que é possível obter uma órbita quase circular ao redor de um corpo achatado usando uma velocidade apropriada, que é diferente da velocidade kepleriana circular, como é o caso da órbita roxa. Essa trajetória tem uma velocidade inicial igual a $\nu_g = 1257,65$ km h⁻¹. A evolução longitudinal do raio orbital desta órbita é constante, como mostrado no gráfico superior da Figura 2 (linha roxa). A excentricidade geométrica também é constante longitudinalmente e aproximadamente zero, como esperado. No entanto, como mostrado no gráfico inferior, observe que ao calcular a excentricidade osculadora dessa órbita (linha roxa tracejada), um valor constante de 0,044 é obtido, embora a órbita seja quase circular. Esse fato evidencia a incompatibilidade do uso de elementos osculadores para esse tipo de sistema, ou seja, os elementos osculadores não descrevem a geometria real da órbita quando o corpo central é significativamente oblato.

Figura 1 – Órbitas equatoriais em torno de corpos esféricos e achatados, por um período orbital. A linha cinza é uma órbita circular em torno de um corpo esférico (em cinza) com velocidade inicial kepleriana circular (ν_k). A linha verde representa uma órbita elíptica ao redor de um corpo oblato localizado em um dos focos da órbita e com velocidade inicial kepleriana circular. A trajetória roxa determina uma órbita com velocidade inicial geométrica circular (ν_g) ao redor de um corpo achatado.



fonte: Produção da própria autora.

A velocidade adequada (ν_g), que produz órbitas quase circulares, é chamada de velocidade geométrica. Os elementos geométricos surgiram da necessidade de determinar um novo conjunto de elementos que não tratasse mais o achatamento do corpo central como uma perturbação, mas como uma característica do sistema, representando a geometria real da órbita. Para resolver esse problema, Greenberg (1981), Borderies e Longaretti (1987), Longaretti e Borderies (1991), Borderies e Longaretti (1994) desenvolveram os elementos geométricos, que são derivados da teoria epicíclica.

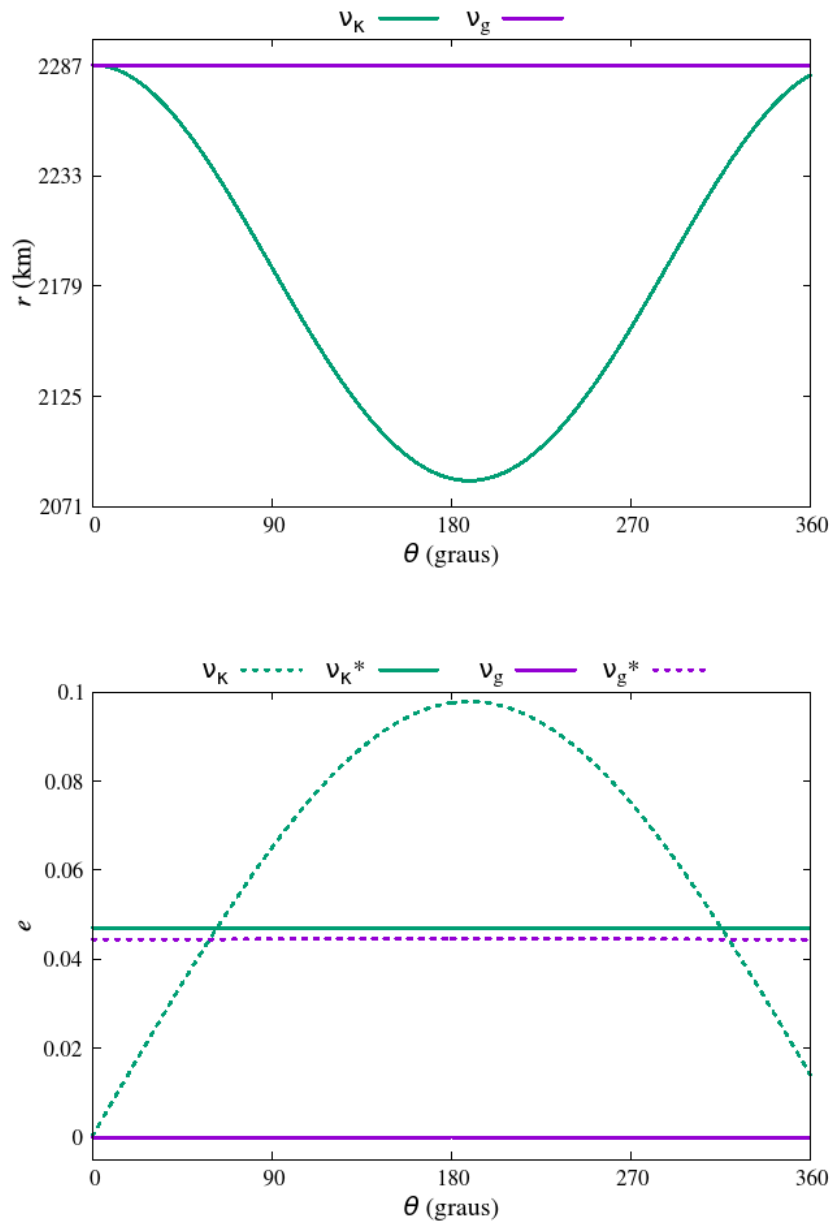
As equações do movimento médio do problema Kepleriano são dadas por (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$n = \left(\frac{\mu}{a^3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

e a equação do movimento médio do problema do corpo central com achatamento (BORDERIES; LONGARETTI, 1994):

$$n_{J_2} = \left(\frac{\mu}{a_g^3} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{R}{a_g} \right)^2 J_2 - \frac{9}{32} \left(\frac{R}{a_g} \right)^4 J_2^2 + \frac{27}{128} \left(\frac{R}{a_g} \right)^6 J_2^3 \right] \quad (7)$$

Figura 2 – Evolução longitudinal, durante um período orbital, do raio orbital (gráfico superior) e a excentricidade (gráfico inferior) das órbitas em torno de um primário com a mesma massa de Haumea. No gráfico superior, a linha verde indica a órbita da partícula com velocidade inicial kepleriana circular igual a $\nu_k = 1230,7 \text{ km h}^{-1}$ com $\Delta r = 203 \text{ km}$ e a linha roxa indica a órbita da partícula com velocidade geométrica circular igual a $\nu_g = 1257,6 \text{ km h}^{-1}$. No gráfico inferior, temos duas excentricidades para cada valor de velocidade inicial. Para o caso de ν_k , a linha verde aponta para a excentricidade calculada usando a equação 2, devido a geometria elíptica ($e_{J_2} = 0,047$) e a linha tracejada verde é o valor da excentricidade osculadora (com $\Delta e = 0,097$). Para o caso de ν_g a linha roxa indica a excentricidade geométrica, que é aproximadamente zero, e a linha roxa tracejada representa a excentricidade osculadora (com $e = 0,044$).



fonte: Produção da própria autora.

Tabela 1 – Parâmetros físicos adotados de Haumea.

Massa ¹ M	$4,006 \times 10^{21}$ kg
Raio equivalente R	798 km
Período de rotação ²	3,9155 h
Semieixos ³ $A \times B \times C$	$1161 \times 852 \times 513$ km
Coeficiente de achatamento ⁴ J_2	0,243
Coeficiente de elipticidade ⁴ C_{22}	0,049
Raio do anel ³	2287 km

¹ Ragozzine e Brown (2009).

² Rabinowitz et al. (2006).

³ Ortiz et al. (2017).

⁴ Winter, Borderes-Motta e Ribeiro (2019).
fonte: Produção da própria autora.

considerando $J_4 = J_6 = 0$, $e = I = 0$, a_g , o semieixo maior geométrico e $\mu = GM$. Observe que o movimento médio de uma órbita em torno de um corpo achatado possui um incremento em comparação ao movimento médio do problema dos dois corpos. Desta forma, para estudos de dinâmica na região de corpos com alta achatamento, recomenda-se que os elementos osculadores, que se baseiam no problema de dois corpos, sejam descartados e, em seu lugar, sejam utilizados elementos geométricos que se baseiam no problema com corpo central oblato

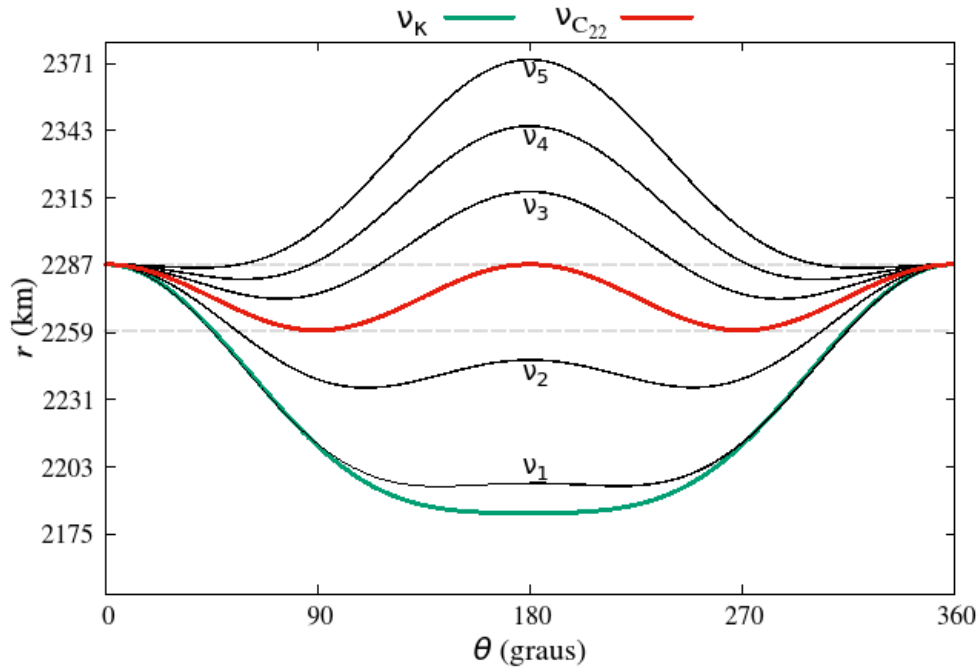
Portanto, conhecendo os efeitos dinâmicos causados por um corpo oblato, na seção seguinte são discutidas as implicações causadas por um corpo central prolato, considerando o coeficiente de elipticidade C_{22} no potencial gravitacional.

2.3 COEFICIENTE DE ELIPTICIDADE

Nesta seção, as implicações geométricas das órbitas quando o corpo primário é prolato serão discutidas. Novamente, um corpo com parâmetros físicos iguais a Haumea (tabela 1) é usado como exemplo. No entanto, considerando nesse caso $J_2 = 0$ e sem rotação do primário, integramos numericamente a órbita de uma partícula com distância radial inicial de 2287 km e com velocidade inicial kepleriana circular (linha verde na Figura 3). A amplitude de variação do raio orbital ($\Delta r \approx 104$ km) ainda é significativa mesmo sendo menor se comparada a variação do caso discutido na seção anterior, quando apenas o coeficiente de achatamento J_2 de Haumea foi considerado. Nesse caso, a excentricidade devido à geometria da órbita é de aproximadamente $e_{C_{22}} = 0,023$, considerando o raio da maior aproximação do centro de massa $r_{min} = 2183,32$ km e de menor aproximação $r_{max} = 2287$ km. O valor de excentricidade para esse caso foi determinado usando as equações (1) e (2), mudando apenas o índice J_2 por C_{22} .

No diagrama esquemático da Figura 4, o círculo em cinza ilustra um corpo esférico hipotético com mesma massa total do corpo com elipticidade representado em preto, como visto no plano Oxy . Note que há uma maior concentração de massa nos dois bojos do corpo (orientadas no eixo Ox) e menos material na região intermediária a esses bojos (orientadas no eixo Oy). Essa diferença na distribuição de massa em

Figura 3 – Evolução longitudinal do raio orbital das trajetórias em torno de um corpo com a mesma massa e coeficiente de elipticidade, $C_{22} = 0,049$, de Haumea para o caso sem rotação do corpo central. A distância radial inicial de todas as órbitas ao centro de massa é de 2287 km. A linha verde indica a órbita com velocidade inicial kepleriana circular, $\nu_k = 1230,7 \text{ km h}^{-1}$, a linha vermelha representa a órbita com velocidade inicial $\nu_{C_{22}} = 1248,7 \text{ km h}^{-1}$ e as linhas pretas são órbitas de velocidade: $\nu_1 = 1236 \text{ km h}^{-1}$, $\nu_2 = 1243,3 \text{ km h}^{-1}$, $\nu_3 = 1252,8 \text{ km h}^{-1}$, $\nu_4 = 1256,4 \text{ km h}^{-1}$ e $\nu_5 = 1260 \text{ km h}^{-1}$. A excentricidade da órbita com velocidade ν_k é $\Delta e \approx 0,3$ e a variação radial é $\Delta r \approx 104 \text{ km}$. Para o caso da órbita com velocidade inicial $\nu_{C_{22}}$ a excentricidade é $\Delta e \approx 0,15$ e a amplitude da variação radial é $\Delta r \approx 27,5 \text{ km}$

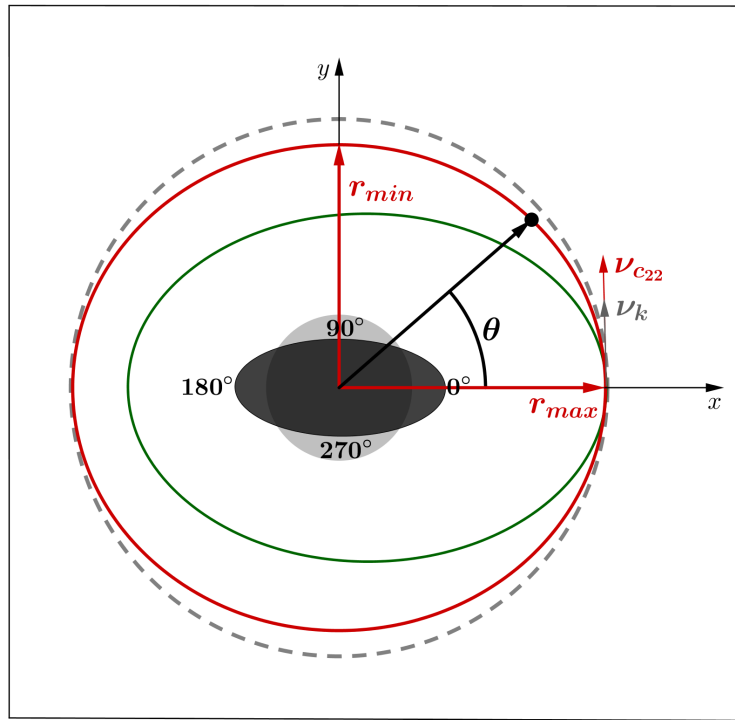


fonte: Produção da própria autora.

um corpo elipsoidal causa variação azimutal no potencial gravitacional.

A órbita circular (linha tracejada cinza na Figura 4), é a trajetória que a partícula com velocidade inicial kepleriana circular (ν_k) descreve em torno do corpo central esférico. A órbita excêntrica, indicada pela linha verde e com velocidade inicial kepleriana circular (ν_k), é gerada por uma partícula ao redor do corpo com elipticidade. Assim como ocorre quando o corpo é oblato, usar velocidade kepleriana como condição inicial de órbitas ao redor de corpos muito alongados, produz alta variação do raio orbital, como mostrado no gráfico da Figura 3. Isso se deve à diferença na distribuição da massa no corpo e a assimetria azimutal do equador. Para entender essa trajetória, podemos analisar a Figura 5, que mostra a evolução longitudinal do raio orbital (plot superior) e a variação do módulo de velocidade dessa órbita (plot inferior), visto no plano Oxy . Embora pareça visualmente circular, essa órbita é excêntrica com o corpo central em um dos focos. No ponto de partida P_1 , a velocidade é kepleriana circular, calculada a partir de elementos osculadores que remetem ao problema de dois corpos, onde se considera o corpo um ponto de massa. No entanto, neste local, o corpo alongado tem mais massa; portanto, a velocidade kepleriana circular é

Figura 4 – Diagrama esquemático de órbitas em torno de corpos esféricos e prolatos. A linha tracejada cinza é uma órbita circular em torno de um corpo esférico (em cinza) com velocidade inicial kepleriana circular. A linha verde representa uma órbita altamente excêntrica ao redor de um corpo prolato localizado em um dos focos da órbita e com velocidade inicial kepleriana circular. A trajetória vermelha mostra uma órbita elíptica com baixa excentricidade ao redor do corpo prolato localizado no centro desta órbita. A velocidade inicial (ν_{C22}) dessa última órbita elíptica é diferente da velocidade circular kepleriana. O ângulo θ é a posição angular da partícula na órbita. As distâncias r_{min} e r_{max} indicam o menor e o maior raio da órbita em vermelho e a diferença entre esses valores define a variação radial Δr .

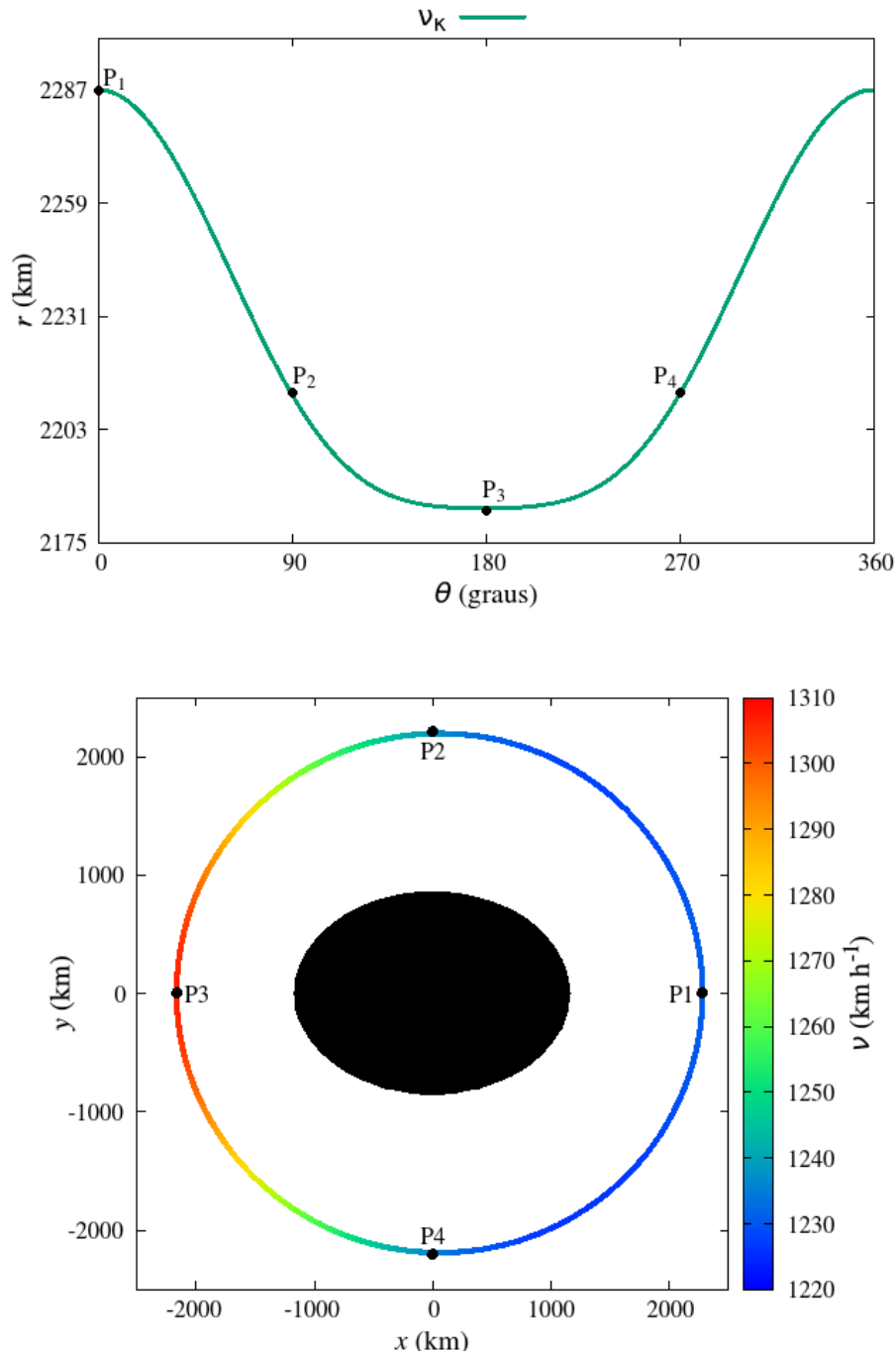


fonte: Produção da própria autora.

menor que o necessário para manter a partícula em uma órbita circular. O potencial do corpo prolato é maior do que esférico em $\theta = 0^\circ$ e menor em $\theta = 90^\circ$. Portanto, a velocidade deve ser maior do que a kepleriana circular em $\theta = 0^\circ$ e menor em $\theta = 90^\circ$. Como a partícula evolui no sentido anti-horário em sua trajetória e é atraída pelo corpo central devido à baixa velocidade inicial, o corpo elíptico tem sua concentração de massa diminuindo até atingir o ponto intermediário entre as duas protuberâncias, P_2 . A partir deste segundo ponto, a concentração de massa do corpo central aumenta novamente, e a partícula ganha velocidade até atingir o segundo bojo, P_3 , atingindo a maior velocidade orbital e a menor distância do centro de massa (pericentro). Entre os pontos P_3 e P_4 , a massa do corpo central diminui novamente, e a partícula se afasta do corpo e perde velocidade. Esse processo de perda de velocidade e distância do centro de massa continua até o ponto inicial da órbita, P_1 , quando a partícula atinge novamente a maior distância radial (apocentro).

A grande amplitude de variação da excentricidade e do raio orbital pode ser reduzida ajustando a velocidade inicial, gerando uma órbita mais próxima da circular, como foi feito para o caso do primário

Figura 5 – Órbita de uma partícula com velocidade inicial kepleriana circular em torno de Haumea. O gráfico superior mostra a evolução longitudinal do raio orbital. No gráfico inferior está a órbita no plano Oxy . A escala de cores indica o valor da velocidade. A distância inicial da partícula ao centro de massa é 2287 km e a velocidade inicial kepleriana circular é igual a $\nu_k = 1230,7 \text{ km h}^{-1}$. O corpo central está localizado em um dos focos da elipse e há um apocentro (P_1 em $r = 2287 \text{ km}$), um pericentro (P_3 em $r = 2183,32 \text{ km}$) e dois intermediários pontos (P_2 e P_4).



fonte: Produção da própria autora.

oblato, discutido na seção 2.2. Portanto, ao aumentar a velocidade inicial da partícula, observa-se que a amplitude da variação do raio orbital diminui, como visto pelas duas linhas pretas (ν_1 e ν_2) da Figura 3. Conforme ilustrado na Figura 4, o menor raio ocorre alinhado com o menor semieixo do corpo (em $\theta = 90^\circ$ e $\theta = 270^\circ$) e o maior raio ocorre alinhado com o semieixo maior (em $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 180^\circ$). A Figura 3 mostra que existe uma velocidade específica ($\nu_{C_{22}}$) que gera uma órbita com a menor variação radial, conforme indicado pela linha vermelha, com $r_{min} = 2259,51$ km e $r_{max} = 2287$ km resultando em $\Delta r \approx 27,5$ km, aproximadamente um quarto da variação radial da órbita com velocidade inicial kepleriana circular. À medida que a velocidade inicial continua a aumentar, a variação radial aumenta novamente, como pode ser visto nas outras três órbitas representadas pelas linhas pretas ν_3 , ν_4 e ν_5 . A velocidade $\nu_{C_{22}}$, encontrada empiricamente, além de reduzir consideravelmente a variação radial, também produz uma órbita simétrica. Porém, ao contrário do que ocorre quando se utiliza a velocidade geométrica para sistemas compostos por um corpo central achatado, em que a variação radial é quase nula, no caso de um corpo com elipticidade ainda há variação do raio, mesmo quando utilizada uma velocidade adequada. Isso se deve à assimetria do equador do corpo, conforme mencionado no início desta seção. Portanto, não é possível obter uma órbita circular, mas podemos conseguir reduzi-la a uma variação radial mínima, em casos de trajetórias próximas a corpos muito alongados.

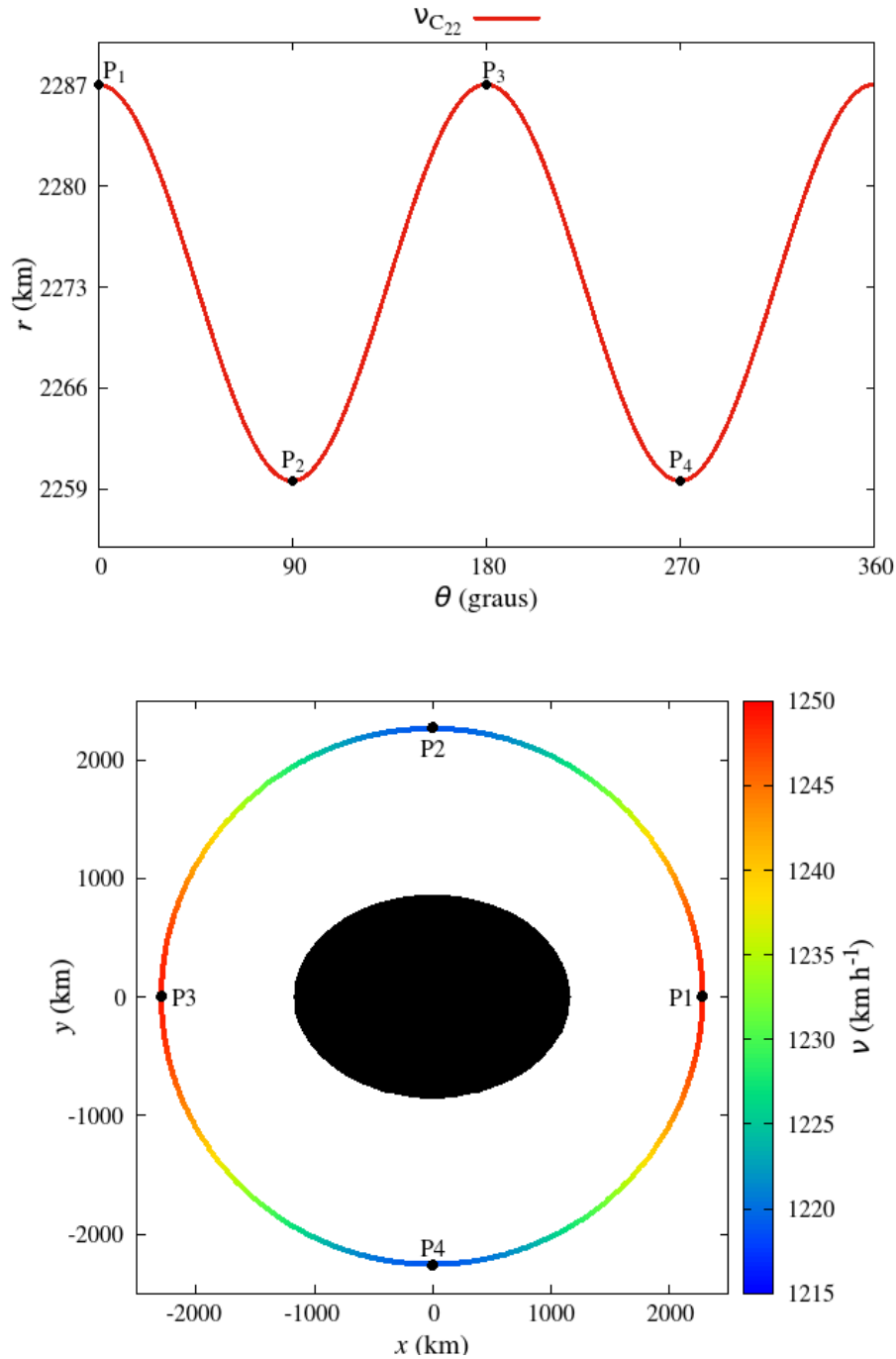
A Figura 6 mostra a evolução longitudinal do raio orbital (gráfico superior) e a variação na velocidade da órbita vista no plano Oxy (gráfico inferior). Observe que a órbita elíptica com velocidade inicial $\nu_{C_{22}}$ tem o corpo primário em seu centro e não em um dos focos. Consequentemente, há simetria na órbita, com dois pontos mais distantes do centro de massa (P_1 e P_3) e dois pontos mais próximos (P_2 e P_4). Os pontos P_1 e P_3 serão chamados de apocentro, e P_2 e P_4 serão chamados de pericentro. Devido a esta característica de descrever uma órbita elíptica centrada no corpo primário, que ocorre apenas para órbitas com uma velocidade inicial que produza a menor variação radial, a excentricidade da órbita com velocidade $\nu_{C_{22}}$ pode ser calculada usando o conceito de excentricidade de uma elipse; portanto, $e_{C_{22}} = 0,15$. Observe que a excentricidade é maior do que a da órbita com velocidade inicial kepleriana circular; entretanto, a variação radial é consideravelmente menor na órbita com velocidade inicial $\nu_{C_{22}}$. Isso se deve a uma mudança na configuração da órbita; em um caso, o primário está no foco da elipse, enquanto que no outro caso está no centro da elipse. Portanto, o melhor parâmetro de comparação é a variação radial. Essa mudança na configuração da órbita em torno de um corpo alongado também causa mudanças nos elementos orbitais. Tais mudanças serão apresentadas e discutidas na seção 2.6.

Portanto, sabendo que é possível diminuir a variação do raio orbital em torno dos corpos alongados ajustando a velocidade inicial, na seção seguinte é detalhada a abordagem utilizada nesse trabalho para determinar essa nova velocidade.

2.4 MÉTODO

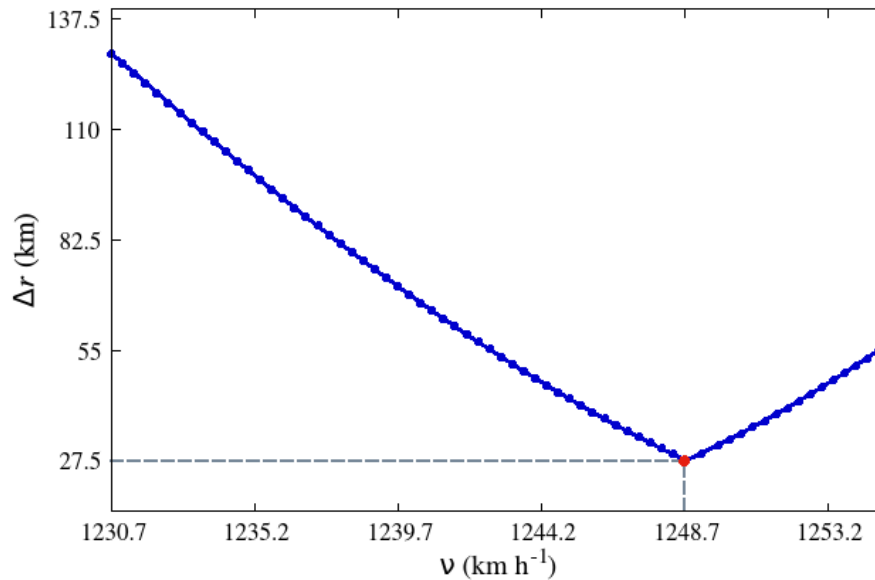
Para determinar a velocidade orbital que descreve uma órbita de mínima excentricidade levando em consideração o potencial gravitacional que considera o coeficiente C_{22} , identificamos que ao aumentar o

Figura 6 – Órbita ao redor de Haumea. No topo do gráfico está a evolução longitudinal do raio orbital. No gráfico inferior está a órbita no plano Oxy . A escala de cores indica a variação na velocidade da órbita. A distância inicial da partícula ao centro de massa é 2287 km e a velocidade inicial é $\nu_{C_{22}} = 1248,7 \text{ km h}^{-1}$. O corpo primário está no centro da órbita elíptica e há dois apocentros (P_1 e P_2 , ambos com $r = 2287 \text{ km}$) e dois pericentros (P_3 e P_4 , ambos com $r = 2259,52 \text{ km}$).



fonte: Produção da própria autora.

Figura 7 – Evolução da amplitude da variação radial Δr , em km, em função da velocidade inicial da órbita, em km h^{-1} . O sistema consiste em uma partícula com raio orbital inicial de 2287 km e um corpo central com a mesma massa ($4,006 \times 10^{21}$ kg) e coeficiente de elipticidade ($C_{22} = 0,049$) de Haumea, e sem sua rotação e coeficiente de achatamento. O ponto mínimo, em vermelho, indica o valor de $\nu_{C_{22}}$ que gera a menor amplitude de variação do raio orbital.



fonte: Produção da própria autora.

valor da velocidade inicial, a amplitude da variação radial da órbita diminui, como mostrado na Figura 7. Nesse exemplo, o sistema consiste em uma partícula com raio orbital inicial de 2287 km e um corpo central com a mesma massa e coeficiente de elipticidade Haumea sem rotação. Aumentamos a velocidade inicial e integramos a órbita repetidamente e comparamos a amplitude da variação radial de cada trajetória. Como pode ser visto na Figura 7, a uma dada velocidade $\nu_{C_{22}} = 1248,7 \text{ km h}^{-1}$, tem-se a menor variação radial com $\Delta r = 27.5 \text{ km}$.

Nesse trabalho, é realizado o processo descrito para encontrar o valor de $\nu_{C_{22}}$ para um conjunto de parâmetros físicos a fim de determinar uma equação empírica que permite que o valor aproximado dessa velocidade seja calculado como uma função do coeficiente de elipticidade, C_{22} , e a distância radial inicial da partícula ao centro de massa do primário. Os parâmetros podem ser encontrados na tabela 2 e foram escolhidos para cobrir as ordens de quantidades de massa de corpos como asteroides, centauros e planetas anões. Para calcular as massas, foram usadas a densidade do gelo de água $\rho = 917 \text{ kg m}^{-3}$ e basalto $\rho = 2700 \text{ kg m}^{-3}$, pois são os materiais mais comuns encontrados nos pequenos corpos do Sistema Solar. Os coeficientes de elipticidade foram selecionados com base nos valores conhecidos de C_{22} para corpos como Haumea, que tem $C_{22} = 0,049$ ou Chariklo, que pode assumir valores de $C_{22} = 0.014$ ou $C_{22} = 0.018$ para suas formas de elipsoides triaxial ou de Jacobi, respectivamente. Os coeficientes de elipticidade de Chariklo foram calculados usando os valores dos semieixos estimados por Leiva et

Tabela 2 – Parâmetros físicos usados nas simulações numéricas

Massa (kg)	R (km)		ρ (km/m ³)		
$3,84 \times 10^{12}$	1		917		
$3,84 \times 10^{18}$	100				
$3,84 \times 10^{21}$	1000				
$1,13 \times 10^{13}$	1		2700		
$1,13 \times 10^{19}$	100				
$1,13 \times 10^{22}$	1000				
C_{22}	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
	r_i (km)		r_f (km)	Δr (km)	
r (km)	$2R$		$5R$	0,2	

fonte: Produção da própria autora.

al. (2017) e adotando a mesma abordagem praticada em Winter, Borderes-Motta e Ribeiro (2019) para calcular o termo C_{22} para Haumea. O arranjo das simulações numéricas foi organizado de acordo com os parâmetros dados na tabela 2. Para cada combinação do coeficiente de massa e elipticidade, foram feitas simulações para distâncias radiais variando de $2R$ a $5R$, onde $R = (ABC)^{1/3}$ é o raio equivalente do corpo. As distâncias radiais neste trabalho são todas em unidades do raio equivalente do corpo central. O limite inferior de $2R$ é suficientemente próximo do corpo. Para distâncias mais curtas, seria necessário considerar outros harmônicos no potencial gravitacional para representar as possíveis características do corpo, como uma cratera. A escolha do limite superior de $5R$ também é apropriada para nossa análise, uma vez que para distâncias maiores o efeito de C_{22} torna-se desprezível. Além desses conjuntos de parâmetros, o corpo central é considerado sem rotação e $J_2 = 0$. Na seção 2.7, discutimos o caso de adicionar a rotação do corpo central. Na seção seguinte, apresentamos e discutimos os resultados obtidos para os casos em que o corpo central não rotaciona.

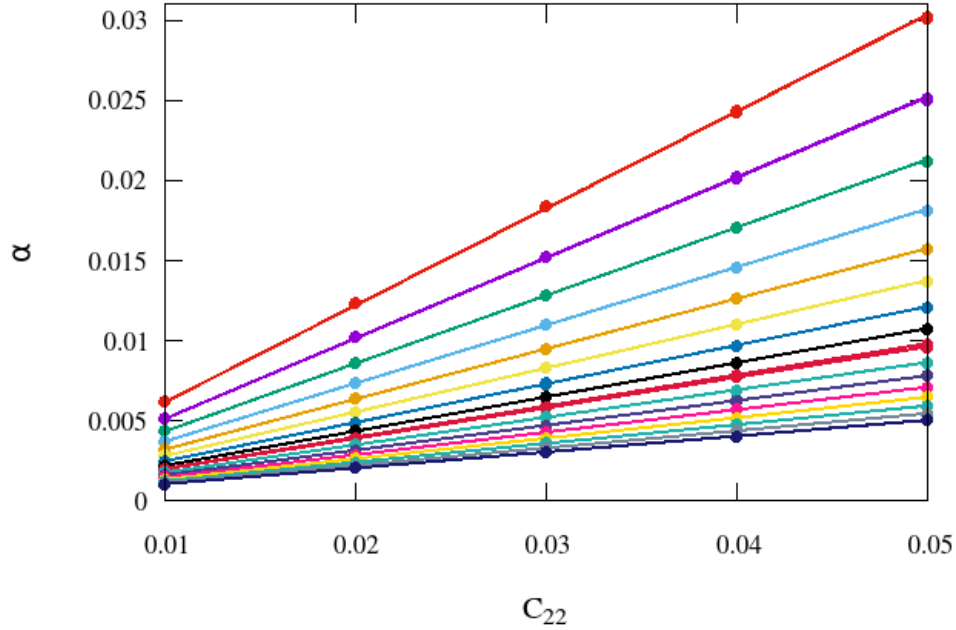
2.5 ÓRBITA EM TORNO DE UM CORPO ALONGADO SEM ROTAÇÃO

Um corpo, quando modelado por um elipsoide triaxial, tem seu potencial gravitacional de segunda ordem e grau descrito pela equação (HU; SCHEERES, 2004):

$$U(r, \theta) = -\frac{\mu}{r} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 J_2 + 3 \left(\frac{R}{r} \right)^2 C_{22} \cos(2\theta) \right] \quad (8)$$

onde $\mu = GM$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ é a distância radial e R é o raio equivalente do corpo. Usando as combinações de parâmetros físicos apresentados na tabela 2, integramos órbitas de partículas em torno de corpos elipsoidais usando o potencial da equação (8); entretanto, como nessa etapa estamos interessados em estudar apenas os efeitos da elipticidade do corpo, consideramos $J_2 = 0$ para realizar a correção da velocidade inicial. O tempo de integração para cada simulação foi um período orbital. Consequentemente, este tempo é diferente para cada conjunto de parâmetros considerados nas simulações.

Figura 8 – Valores dos coeficientes α (equação 9) em função dos coeficientes de elipticidade C_{22} . Os pontos indicam os valores medidos de α para cada caso. As linhas são geradas por ajustes a partir dos dados obtidos e as cores estão associadas às distâncias radiais iniciais da órbita ao centro de massa do sistema (em unidades do raio equivalente do corpo central, R).



fonte: Produção da própria autora.

A velocidade tangencial inicial $\nu_{C_{22}}$ pode ser escrita como uma função da velocidade kepleriana circular:

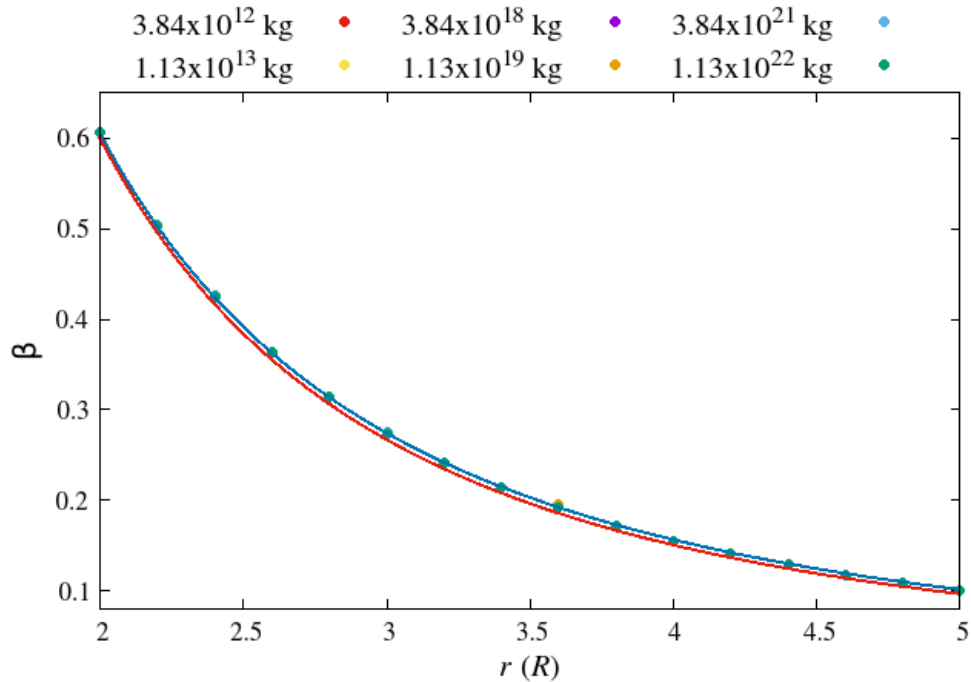
$$\nu_{C_{22}} = (\alpha + 1)\nu_k. \quad (9)$$

onde $(\alpha + 1)$ é o coeficiente de ajuste que deve ser aplicado à velocidade kepleriana circular para obter a velocidade inicial que descreverá uma órbita com variação radial mínima, $\nu_{C_{22}}$, em torno de um corpo prolato. Para determinar a velocidade $\nu_{C_{22}}$, podemos encontrar uma expressão empírica para α , uma vez que ν_k pode ser facilmente calculado pelo problema de dois corpos. Esse coeficiente α pode ser escrito de acordo com os parâmetros físicos do corpo central e, nesse caso, é pertinente escolher que α seja função de C_{22} , portanto:

$$\nu_{C_{22}} = \nu_k(1 + \beta C_{22}). \quad (10)$$

Assim, quando C_{22} é nulo, para o caso de um corpo esférico, $\alpha = 0$ e, portanto, $\nu_{C_{22}}$ torna-se a velocidade kepleriana circular do problema de dois corpos, ν_k . Para determinar os coeficientes β , fixamos a distância radial inicial r e ajustamos a curva entre $(\alpha - 1)$ e C_{22} para cada uma das distâncias radiais iniciais ao corpo central, como mostrado na Figura 8.

Figura 9 – Valores de β (equação 10) em função da distância radial inicial das órbitas. Os pontos são os valores β medidos em cada caso e suas respectivas cores indicam as massas dos corpos. A linha azul mostra o ajuste para a equação 11 usando os coeficientes $\kappa = 2,354$ e $\gamma = 1,958$. A linha vermelha é gerada pela equação 11 mas adotando a aproximação dos coeficientes para $\kappa = 2,4$ e $\gamma = 2$.



fonte: Produção da própria autora.

Para uma equação mais completa, é interessante incluir a dependência da distância radial. Portanto, fixando novamente a massa e analisando os pontos dos gráficos dos coeficientes β em função de r (Figura 9) encontramos que a equação (11) ajusta-se bem aos dados.

$$\beta = \kappa(r)^{-\gamma}. \quad (11)$$

Na Figura 9 as cores das curvas referem-se à massa do corpo central. Os valores dos coeficientes κ e γ são aproximadamente constantes em todos os ajustes em torno dos valores médios de $\kappa = 2,354 \pm 0,023$ e $\gamma = 1,958 \pm 0,009$. A linha azul mostra o ajuste da equação 11 para esses valores. A linha vermelha indica o ajuste para os valores aproximados de $\kappa = 2,4$ e $\gamma = 2$. Observe que os valores arredondados de κ e γ causam um pequeno descolamento do ajuste com maior precisão; no entanto, eles ainda preservam o bom ajuste para todas as simulações.

Assim, a equação 10 pode ser reescrita como:

$$\nu_{C_{22}} \approx \nu_k [1 + 2.4r^{-2}C_{22}]. \quad (12)$$

Usando a equação 12 para calcular a velocidade tangencial inicial $\nu_{C_{22}}$ da órbita de uma partícula com

Tabela 3 – Semieixos maiores (km), semieixo menores (km) e valores de excentricidades orbitais em torno de um corpo alongado com massa de $1,13 \times 10^{22}$ kg, $C_{22} = 0,05$, $R = 1000$ km e sem rotação. Os dados referem-se a dois tipos de posição do corpo central em relação à órbita: no centro (colunas 1 a 3) e em um dos focos (colunas 4 a 6) com velocidade inicial kepleriana. A distância radial inicial da órbita ao centro de massa é a mesma em ambos os casos. O índice C_{22} indica que os elementos foram calculados devido à geometria da órbita.

Centro			Foco		
$a_{C_{22}}$	$b_{C_{22}}$	$e_{C_{22}}$	$a_{C_{22}}$	$b_{C_{22}}$	$e_{C_{22}}$
2000	1949,04	0,22	1889,46	1886,17	0,059
3000	2969,43	0,15	2921,00	2919,94	0,027
4000	3974,90	0,11	3939,31	3939,87	0,015
5000	4979,94	0,09	4950,76	4950,52	0,010

fonte: Produção da própria autora.

$r = 2287$ km em torno de um corpo central sem rotação, com a mesma massa e coeficiente da elipticidade Haumea, encontra-se que $\nu_{C_{22}} = 1248,7$ km h⁻¹, que é a mesma velocidade inicial determinada pela abordagem empírica. Isso mostra que a equação tem uma boa precisão para os casos estudados neste trabalho. Portanto, para problemas compostos por corpos muito alongados e sem rotação, recomenda-se que esta nova equação seja adotada a fim de determinar a velocidade adequada.

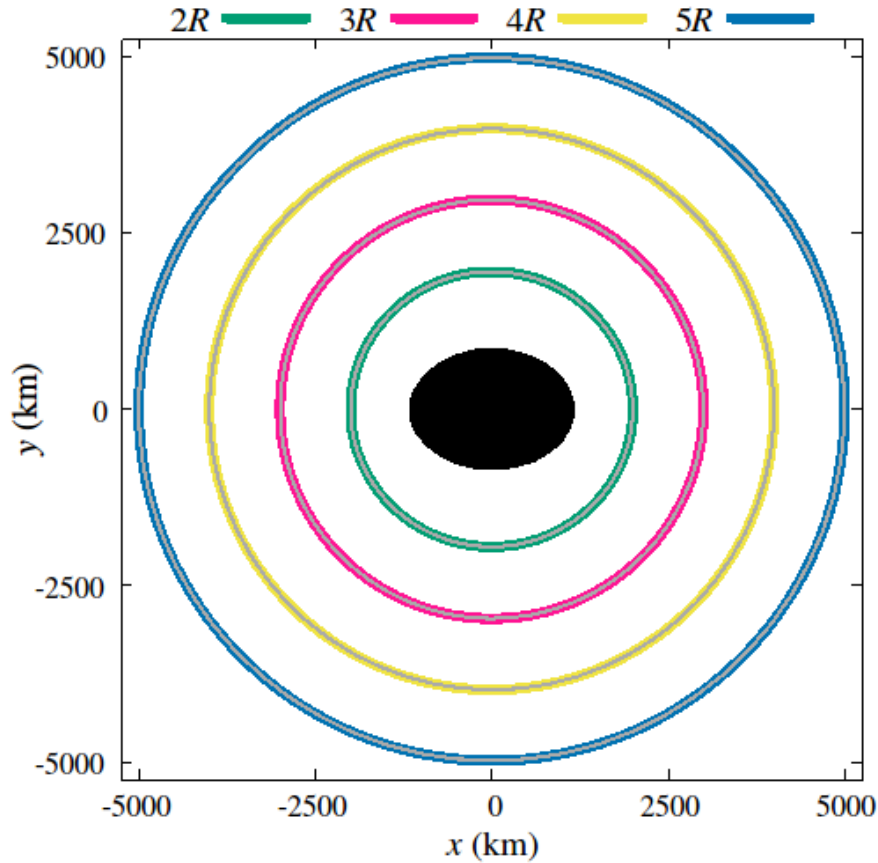
Outro parâmetro importante a ser determinado é o movimento médio, $n_{C_{22}}$, das órbitas em torno de um corpo central com coeficiente de elipticidade. Na seção seguinte, apresentamos essa discussão.

2.6 ADAPTAÇÃO DA TERCEIRA LEI DE KEPLER PARA O CASO DA ELIPTICIDADE DO CORPO CENTRAL

Como mostrado anteriormente, as órbitas com velocidade inicial $\nu_{C_{22}}$ apresentam pouca variação radial devido à assimetria do corpo central. A Figura 10 apresenta uma amostra de quatro órbitas em torno de um corpo com massa de $1,13 \times 10^{22}$ kg, $C_{22} = 0,05$, $R = 1000$ km e sem rotação. Observe que visualmente, as trajetórias parecem ser circulares (linhas coloridas), mas há uma pequena diferença entre r_{max} e r_{min} , que agora chamaremos de semieixo maior $a_{C_{22}}$ e semieixo menor $b_{C_{22}}$ da órbita, respectivamente. Neste trabalho, o índice C_{22} nos elementos é empregado quando se considera a geometria real da órbita, ou seja, usando os valores de $a_{C_{22}}$ e $b_{C_{22}}$ para um sistema que possui o corpo central prolato. Na tabela 3, podemos comparar os valores dos semieixos maiores e menores e excentricidades no caso de $\nu_{C_{22}}$, onde o corpo primário está no centro da órbita e ν_k , onde o corpo primário está localizado em um dos focos. Ajustando a velocidade inicial, usando a equação 12, diminui-se drasticamente a variação radial da órbita em comparação ao caso de uma órbita com velocidade inicial kepleriana circular.

Em um sistema kepleriano usual, o corpo central está localizado em um dos focos das órbitas elípticas ao seu redor. No entanto, identificamos em nosso estudo que essa característica não é preservada quando o corpo primário é significativamente alongado e as órbitas são iniciadas com a velocidade $\nu_{C_{22}}$. Nesse caso, as órbitas ainda são elípticas, com variação radial devido a assimetria do corpo central que ocupa o centro

Figura 10 – Órbitas no plano Oxy em torno de um corpo alongado (elipse preta) com massa de $1,13 \times 10^{22}$ kg, $C_{22} = 0,05$, $R = 1000$ km e sem rotação o corpo central. As cores indicam a distância radial inicial das órbitas em unidades do raio do primário. As linhas cinzas sobrepostas às linhas coloridas, são gráficos de equações de elipses usando os valores dos semieixos $a_{C_{22}}$ e $b_{C_{22}}$ obtidos através da medição de r_{max} e r_{min} , respectivamente, para cada órbita correspondente. Os valores dos eixos e excentricidades podem ser encontrados na tabela 3.



fonte: Produção da própria autora.

dessas órbitas, conforme mostrado na Figura 10.

Com os valores dos semieixos a e b das órbitas, traçamos elipses (linhas cinzas) correspondentes a cada órbita integrada numericamente (linhas coloridas). Observe que a órbita coincide com a elipse gerada usando os valores dos semieixos a e b . A diferença entre essas duas curvas pode ser desprezada. Isso mostra que a órbita em torno de um corpo alongado é uma elipse com o corpo no centro.

Mudar a localização do corpo central em relação às órbitas, provoca mudanças nos elementos orbitais e na Terceira Lei de Kepler. Assim, a partir dos dados obtidos pelas simulações numéricas desse trabalho, pode-se determinar uma adaptação para a Terceira Lei de Kepler no caso de corpos com elipticidade. Para simplificar, apresentaremos os dados para sistemas com massas menores e maiores. No entanto, os resultados obtidos são válidos para os outros quatro valores de massa usados nesse trabalho. Primeiramente, a adaptação será feita por meio do coeficiente, a seguir:

$$n_{C_{22}}^2 a_{C_{22}}^3 = \Gamma GM, \quad (13)$$

onde $G = 6,672 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ e $n_{C_{22}}$ é o movimento médio das órbitas, calculado por

$$n_{C_{22}} = \frac{2\pi}{T_{C_{22}}}. \quad (14)$$

O período orbital $T_{C_{22}}$ foi medido em cada uma das órbitas, computando o tempo necessário para a partícula retornar à posição inicial em que estava quando a integração numérica começou. O coeficiente Γ pode ser escrito de acordo com o coeficiente de elipticidade:

$$n_{C_{22}}^2 a_{C_{22}}^3 = (1 + \delta C_{22}) GM. \quad (15)$$

Assim, quando C_{22} é nulo, a Terceira Lei de Kepler torna-se a lei usual. Para determinar δ , fixamos o semieixo maior e fizemos os ajustes entre δ e os coeficientes de elipticidade C_{22} . Os resultados dos ajustes podem ser encontrados na Figura 11, onde as cores indicam o semieixo maior considerado. Observe que os resultados não dependem da massa do corpo central, mas apenas do semieixo maior da órbita, do raio do corpo e do coeficiente de elipticidade, pois para um dado $a_{C_{22}}/R$ e C_{22} o valor de δ é o mesmo para as duas massas analisadas. Portanto, é interessante incluir na expressão Γ o parâmetro $R/a_{C_{22}}$, além de C_{22} . Então, é feito um ajuste de curva entre os coeficientes de cada uma das curvas na Figura 11 e o semieixo maior, como mostrado na Figura 12. A equação 16 é a que melhor se ajusta aos dados. Os valores dos coeficientes ζ e η são aproximadamente constantes em torno dos valores médios de $\kappa = 2,730 \pm 0,012$ e $\gamma = 1,933 \pm 0,005$. A linha vermelha corresponde à curva obtida pela equação com os coeficientes $\zeta = 2,74$ e $\eta = 1,94$ aproximados.

$$\tau = \zeta (a_{C_{22}})^{-\eta} \quad (16)$$

Assim, a expressão da Terceira Lei de Kepler adaptada para o caso de corpo central alongado, equação 13, pode ser reescrita como:

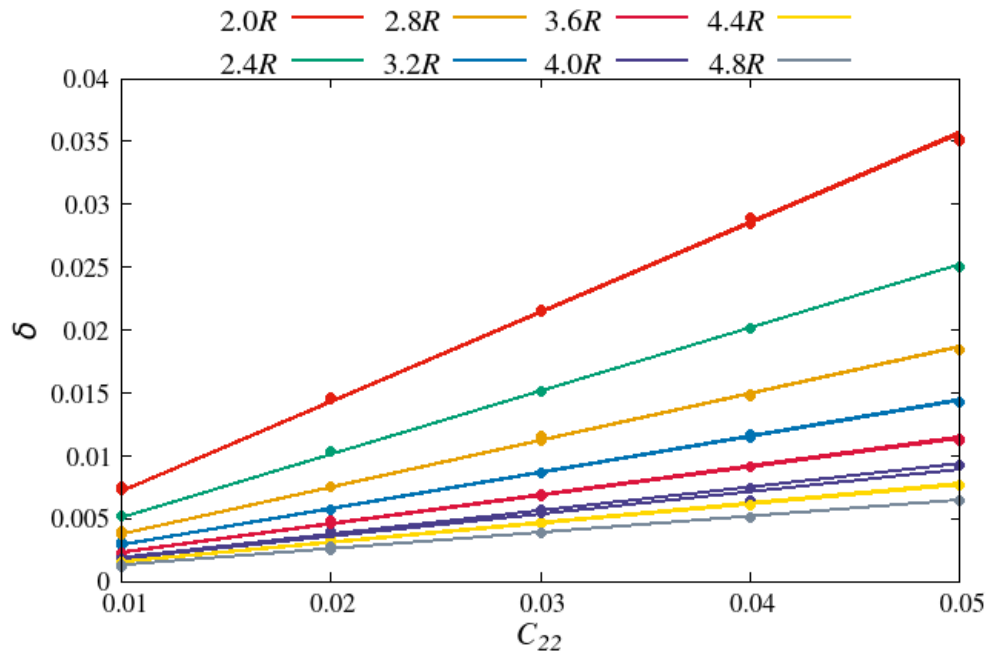
$$n_{C_{22}}^2 a_{C_{22}}^3 = [1 + 2.74 a_{C_{22}}^{-1.94} C_{22}] GM. \quad (17)$$

Além da equação para o movimento médio, é determinada uma equação empírica para a excentricidade da órbita. Essa expressão também foi obtida por meio de ajustes de curvas, fixando-se C_{22} e ajustando-se a curva entre a excentricidade e o semieixo maior, conforme mostrado na Figura 13. A excentricidade foi calculada para cada órbita tendo os valores de $a_{C_{22}}$ e $b_{C_{22}}$, que podem ser escritos como:

$$e_{C_{22}} = (0.11 + 9.6 C_{22} - 57 C_{22}^2) a_{C_{22}}^{-1}, 0.01 \leq C_{22} \leq 0.05. \quad (18)$$

O termo independente desta equação empírica varia em torno de $0,11 \pm 0,007$, o termo linear varia de $9,629 \pm 0,553$ e o termo quadrático com a maior variação de $-57,143 \pm 9,035$. Conforme mostrado na

Figura 11 – Valores de δ em função do coeficiente de elipticidade C_{22} . Os pontos referem-se ao valor de δ medido para cada C_{22} . As linhas são ajustes de curva aplicados para cada distância radial inicial da órbita, que corresponde ao semieixo maior, indicado pelas cores.



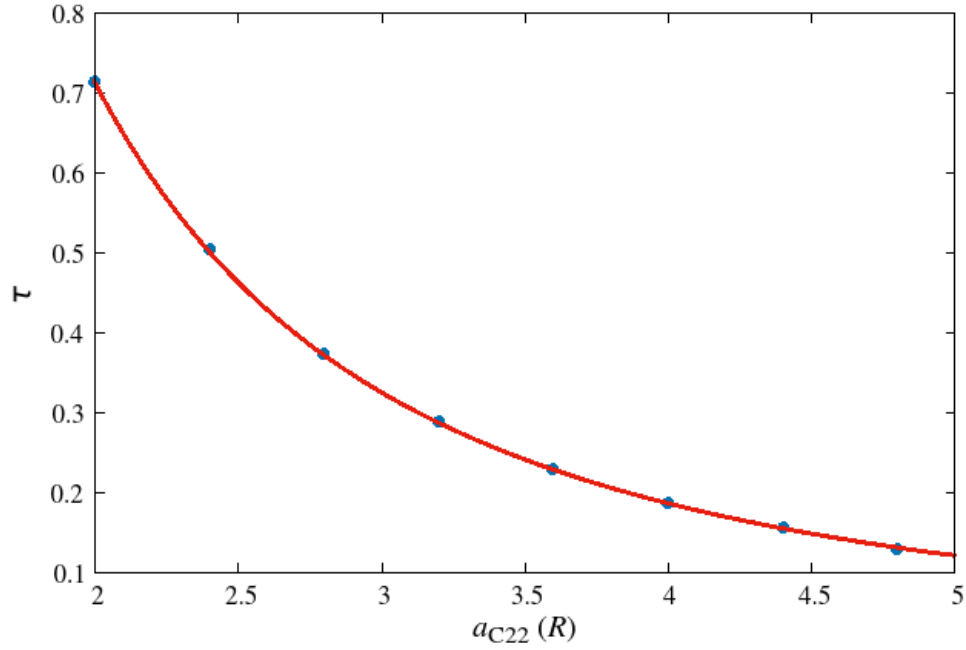
fonte: Produção da própria autora.

Figura 13, o arredondamento feito nos coeficientes preserva o bom ajuste para todas as simulações. A excentricidade é independente da massa. Analisando a Figura 13, pode-se perceber que quanto mais longe do corpo, menor é a excentricidade das órbitas. Assim, a uma dada distância do corpo central, as órbitas serão circulares porque o efeito da elipticidade é muito pequeno. Desta distância, a usual Terceira Lei de Kepler torna-se válida novamente.

2.7 ROTAÇÃO DO CORPO CENTRAL

Até o momento, todos os resultados e discussões apresentados estão relacionados aos sistemas nos quais o corpo central não gira. Nesta seção, é introduzido esse novo parâmetro nas simulações e determinado, empiricamente, a velocidade $\nu_{C_{22}}$ para cada órbita. Para entender a dependência da rotação, escolhemos apenas um caso, que se aproxima da massa Haumea, com parâmetros iguais a $M = 3,84 \times 10^{21}$ kg, $C_{22} = 0,05$ e $R = 1000$ km. Uma vez que Haumea tem um período de rotação de aproximadamente 3,9155 h que é considerado alto, escolhemos o intervalo de rotação do corpo central variando de 4 h a 15 h. O semieixo maior varia de $3R$ a $11R$. Distâncias inferiores a $3R$ causam colisões com o primário ou ejeções. Para distâncias maiores que $11R$, o efeito da elipticidade do corpo torna-se muito pequeno, sem necessidade de correções na velocidade inicial; ou seja, a velocidade kepleriana circular é adequada para produzir órbitas com variação radial mínima. Incluindo a rotação do corpo central, é possível encontrar

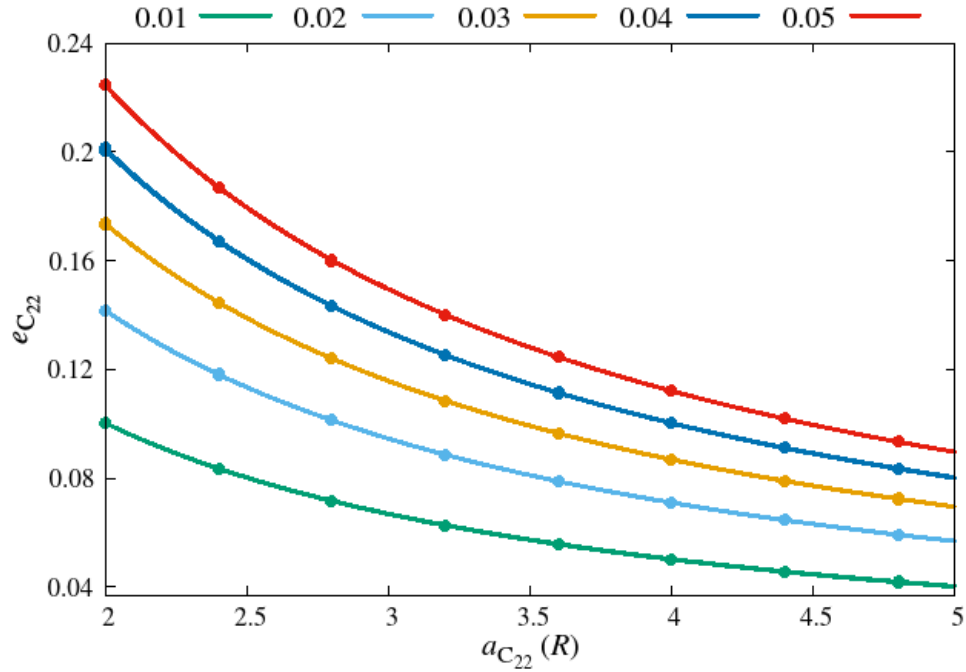
Figura 12 – Valores do coeficiente τ em função do semieixo maior das órbitas em torno do corpo central. A curva vermelha é traçada usando a equação 16 com o coeficiente $\zeta = 2,74$ e $\eta = 1,94$.



fonte: Produção da própria autora.

a velocidade ν_{C22} em que a órbita tem uma variação radial mínima, como no caso sem rotação. No caso do corpo estático, o ajuste da velocidade foi feito somando-se pequenas quantias até encontrar ν_{C22} ; entretanto, quando a rotação é adicionada, o ajuste é negativo, ou seja, a velocidade ν_{C22} deve ser menor que a velocidade circular kepleriana, para os casos estudados nesse trabalho. Isso ocorre porque o corpo central gira mais rápido do que o período orbital da partícula. Assim, a velocidade ν_{C22} pode ser escrita como uma função da velocidade circular kepleriana como $\nu_{C22} = (1 - \Lambda)\nu_k$, onde $(1 - \Lambda)$ é o coeficiente de ajuste. Na Figura 14 os pontos são os valores de Λ em função do semieixo maior (a_{C22}) para cada período de rotação do corpo central (indicado pelas cores). Observe que Λ tende a 0 com um aumento no semieixo maior, o que é esperado, pois quanto mais longe do centro de massa, menor o efeito de elipticidade. As curvas na Figura 14 são obtidas fazendo ajustes de acordo com uma equação na forma de $\Lambda = \epsilon a_{C22}^{-\xi}$. Essas curvas têm aproximadamente o mesmo comportamento, sofrendo apenas um deslocamento dependendo do período de rotação. Observe que as curvas não têm o mesmo número de pontos. Isso ocorre porque as colisões, ejeções e a região onde o efeito de elipticidade pode ser desprezado ocorrem em diferentes semieixos maiores para os períodos de rotação. Por exemplo, para o período de rotação de 4 h, as órbitas internas à $3R$ colidem ou são ejetadas e externas à $7R$ são órbitas nas quais a velocidade kepleriana circular é suficiente para descrever trajetórias com uma variação radial baixa. Não foi possível obter uma equação geral para a velocidade ν_{C22} em função do período de rotação do corpo central, devido à complexidade do caso. Porém, identificamos o tipo de comportamento descrito pela

Figura 13 – Valores de excentricidade em função do semieixo maior em unidades do raio equivalente do corpo central. Os pontos são os valores de excentricidade medidos para cada caso. As curvas foram ajustadas entre os dois elementos. A excentricidade é independente da massa do corpo central. As cores das linhas indicam o valor do coeficiente de elipticidade.



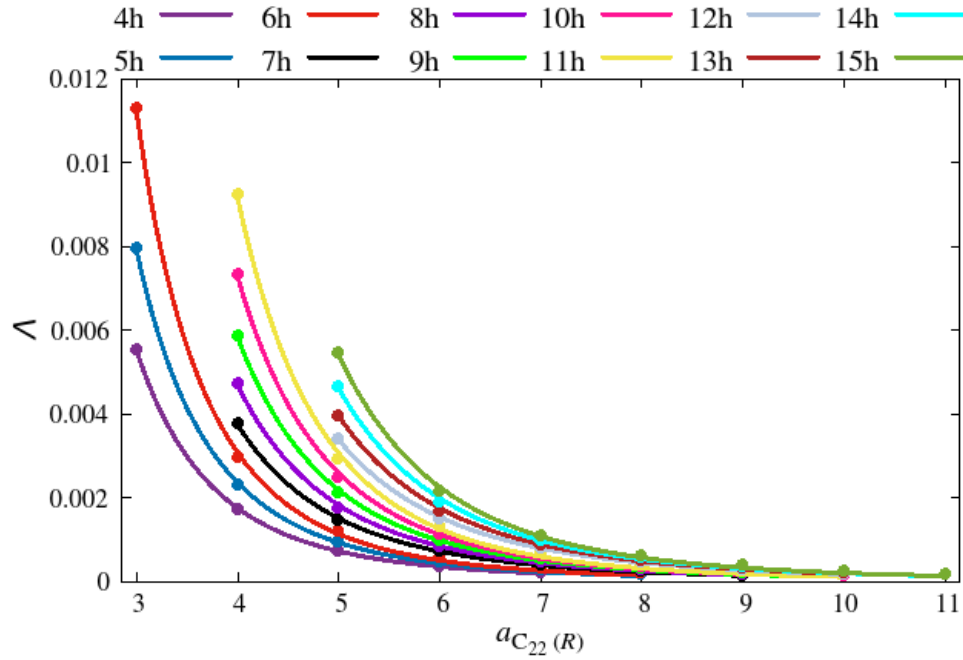
fonte: Produção da própria autora.

velocidade adaptada.

Conforme mostrado nas seções anteriores, a posição relativa entre a partícula em órbita e a forma do corpo central é importante para a compreensão da dinâmica da trajetória. Portanto, para obter a relação entre a excentricidade e o semieixo maior da órbita, utilizaremos o sistema girante (um plano que gira junto com o corpo central), assim, a posição relativa é preservada. Essa relação é mostrada na Figura 15. A excentricidade (pontos no gráfico) foi calculada para cada órbita pelo mesmo método utilizado no caso do corpo central sem rotação. As curvas são ajustes feitos a partir dos dados coletados usando uma função como $e_{C22} = \chi a_{C22}^{-\Psi}$. Tal como acontece com a velocidade ν_{C22} , o período de rotação (indicado pelas cores) provoca um descolamento entre as curvas. Devido à variação nos valores dos coeficientes χ e Ψ , não foi possível obter bons ajustes para uma equação geral de excentricidade que depende do semieixo maior e do período de rotação do corpo central. Porém, como mostrado na Figura 15, para um determinado período de rotação fixo, é possível obter uma equação entre a excentricidade e o semieixo maior.

O período da órbita em torno de um corpo prolato (T_{C22}), como mencionado anteriormente, muda em comparação com o período de uma órbita kepleriana circular em torno de um corpo esférico. Assim, medindo o período orbital de cada órbita considerada, conseguimos obter uma expressão em função do semieixo maior (em unidades de R) dada por:

Figura 14 – Valores do coeficiente Λ em função do semieixo maior. Os pontos são os valores Λ medidos para cada caso do semieixo maior. As curvas coloridas correspondem aos ajustes feitos com os dados. As cores estão associadas aos períodos de rotação do corpo central.



fonte: Produção da própria autora.

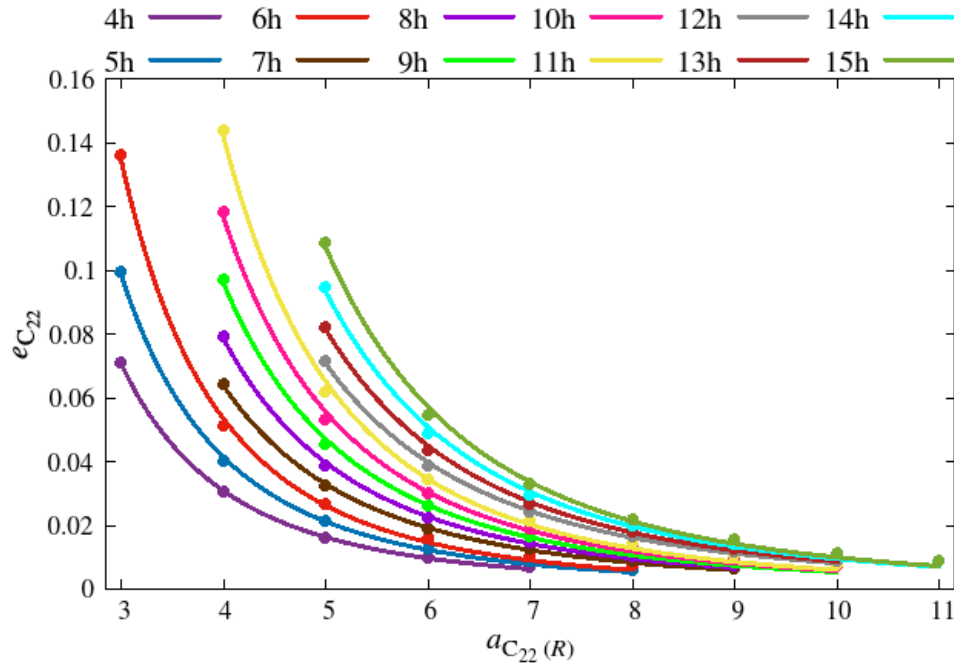
$$T_{C22} = 3.4a_{C22}^{1.5}. \quad (19)$$

Esta equação é válida independente do período de rotação do corpo central, conforme mostrado na Figura 16. Os coeficientes são aproximadamente constantes, em torno dos valores médios: $3,427 \pm 0,008$, $1,503 \pm 0,001$. Observe que o arredondamento desses coeficientes adotados na equação 19 preserva um bom ajuste para todas as simulações. A equação 19 assemelha-se à Terceira Lei de Kepler, exceto pelo coeficiente de 3,4.

2.8 BORDA INTERNA DA REGIÃO ESTÁVEL EM TORNO DE HAUMEA

Por ser um corpo com elipticidade elevada e possuir um anel de partículas, Haumea se tornou um alvo interessante para estudos da dinâmica de partículas ao seu redor. Em Sumida et al. (2020) é feita a análise do limite inferior da região estável em torno de Haumea por meio de simulação numérica de N-corpos, com distribuição aleatória de partículas. O limite encontrado é ≈ 2069.73 km. As partículas inferiores a essa distância radial são ejetadas ou colidem com o corpo central. Entretanto, as velocidades iniciais atribuídas às partículas são velocidades keplerianas circulares. Como abordado nesse trabalho, a velocidade kepleriana para trajetórias ao redor de corpos prolatos causam um aumento na excentricidade e

Figura 15 – Valores de excentricidade em função do semieixo maior no sistema girante. Os pontos são os valores medidos de excentricidade para cada caso do semieixo maior. As curvas coloridas são os ajustes feitos com os dados coletados. As cores estão associadas aos períodos de rotação do corpo central.



fonte: Produção da própria autora.

esse fato pode influenciar a localização da borda interna da região de estabilidade do sistema.

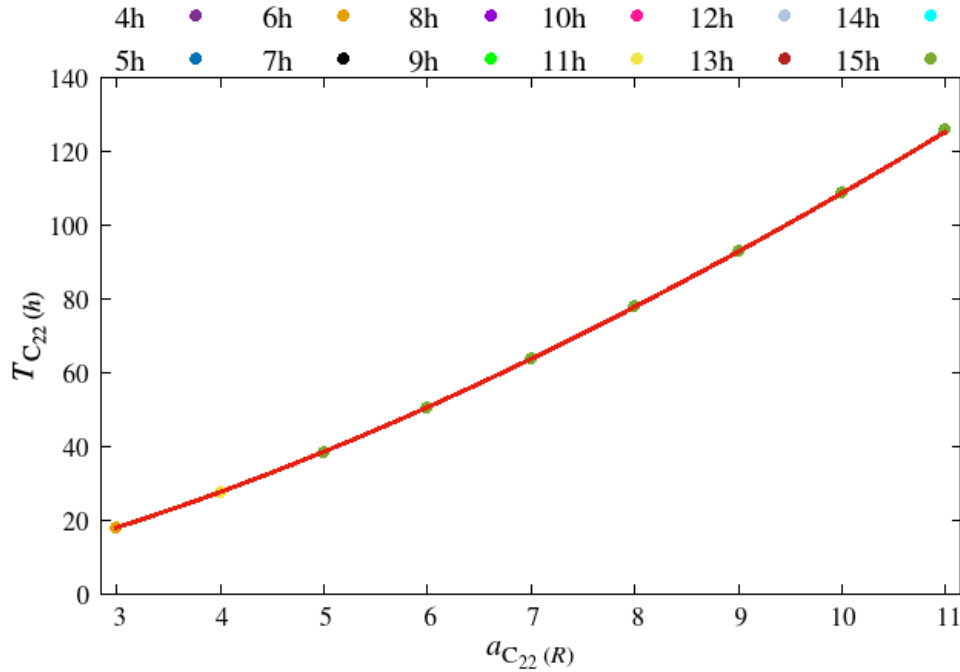
Nesta seção, determinamos a posição da borda interna da região estável, examinando a estabilidade do movimento das partículas girando em torno de Haumea. Para isso, consideramos apenas o campo gravitacional do corpo central, dado pela equação 8, ou seja, não há interação entre as partículas que giram em torno de Haumea. Ademais, utilizamos o método empírico para determinar a velocidade ν_{C22} das partículas usadas na simulação numérica.

A seguir explicamos como as condições iniciais da integração foram obtidas.

2.8.1 Condições iniciais

Devido a limitação do método adotado, não podemos calcular diretamente a velocidade ν_{C22} de uma distribuição angular de partículas ao redor da região equatorial de Haumea. Para fazer esse tipo de distribuição, foi necessário a utilização de algumas etapas de um processo que pode ser observado na Figura 17. Primeiramente, definimos qual a faixa radial desejada para que as partículas sejam distribuídas. Nesse estudo, essa faixa compreende as distâncias de 1811 km até 2700 km. Então, fazemos a primeira distribuição de condições iniciais apenas no eixo Ox , espaçadas igualmente com 25 km (ver etapa 1 na Figura 17). A velocidade ν_{C22} é então determinada para cada uma das condições iniciais usando o método

Figura 16 – Valores do período orbital T_{C22} em função do semieixo maior (em unidades do raio equivalente do corpo central) no sistema inercial. Os pontos são os valores medidos do período orbital para cada caso do semieixo maior e as cores são associadas aos períodos de rotação do corpo central. A curva vermelha é o ajuste feito com os dados coletados gerando a equação 19.



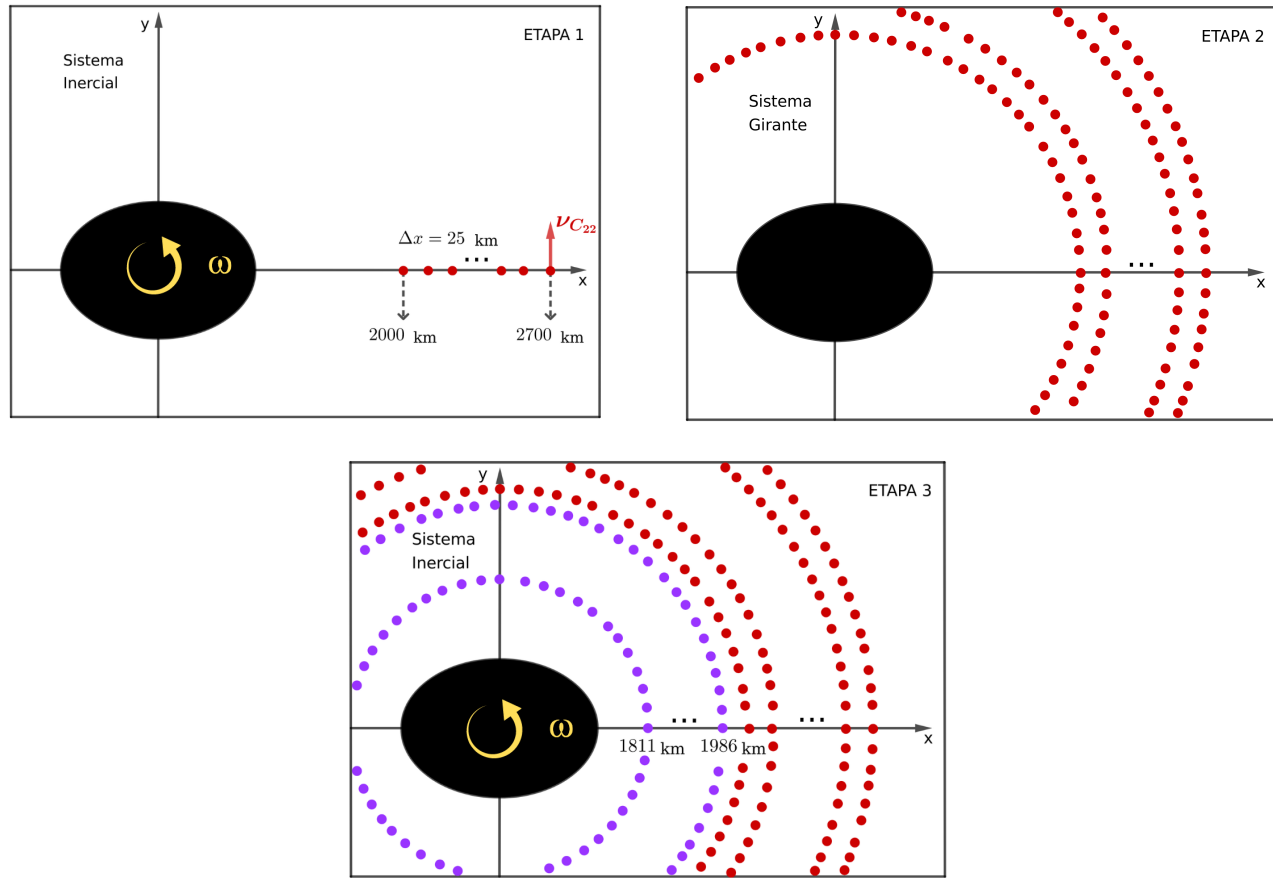
fonte: Produção da própria autora.

empírico, ou seja, ajustando a velocidade inicial até obter a menor variação radial da órbita. No caso de Haumea, a menor distância que foi possível encontrar a velocidade ν_{C22} foi para 2000km, para distâncias inferiores, não existe velocidade que diminua a variação radial da órbita descrita por uma partícula com velocidade inicial kepleriana circular. Portanto, de 1811 km a 1986 km as partículas são distribuídas com velocidades keplerianas (mas apenas na etapa 3). Feito isso, integramos (no sistema inercial) cada uma das condições iniciais por um período orbital, que é definido como o tempo que a partícula leva para partir do eixo Ox , dar a volta em torno do corpo e voltar a cruzar o eixo Ox novamente.

A cada passo de tempo das integrações, colhemos a posição e velocidade da partícula, que será usada posteriormente como condição inicial da integração final. Os valores das velocidades em cada passo de tempo são os valores de velocidade ν_{C22} , que inicialmente não conseguimos calcular diretamente. Mas como a integração ocorreu no sistema inercial, antes é necessário corrigir essas posições e velocidades para a posição relativa ao corpo no início da integração, ou seja, com os bojos alinhados com o eixo Ox (ver etapa 2 na Figura 17). Para isso usamos as equações a seguir (derivadas da matriz de rotação) para corrigir essas posições:

$$x = x_i \cos(\omega t) + y_i \sin(\omega t) \quad (20)$$

Figura 17 – Diagrama esquemático do processo de distribuição de condições iniciais.



fonte: Produção da própria autora.

$$y = -x_i \sin(\omega t) + y_i \cos(\omega t) \quad (21)$$

$$\dot{x} = \dot{x}_i \cos(\omega t) + \dot{y}_i \sin(\omega t) \quad (22)$$

$$\dot{y} = -\dot{x}_i \sin(\omega t) + \dot{y}_i \cos(\omega t) \quad (23)$$

ω é a velocidade de rotação do corpo central e t é o tempo.

Feitas as correções necessárias, na etapa 3, são incluídas as condições iniciais de 1800 km a 1975 km com velocidade kepleriana circular, representadas pelos pontos roxos na Figura 17. E, por fim, é realizada a integração numérica de todas as condições iniciais (≈ 12000) das partículas por um tempo de 10 mil dias .

2.8.2 Resultados

A Figura 18 mostra a evolução temporal da distribuição de partículas ao redor de Haumea após 0, 1, 10, 100, 1000 e 10000 dias de integração numérica. A elipse central, em preto, representa a dimensão equatorial do planeta anão e indica a posição angular do corpo central nos respectivos tempos. Após o primeiro dia de integração, Figura 18b, nota-se que as partículas que estavam mais próximas do corpo central, no momento inicial, são excitadas e adquirem excentricidade e são espalhadas pela região. Com a evolução do tempo, esse processo continua a limpar a região mais interna à faixa de distribuição das partículas e uma borda que divide a região estável da instável vai sendo delimitada. No último instante de integração, Figura 18f, observa-se que a região interna à linha verde não contém partículas, caracterizando a região instável do sistema. A linha verde é a borda inferior da zona estável. Ela não é circular, acompanha a forma do corpo, sendo a maior distância ao centro de massa 1945 km e a menor 1892. A maior distância ocorre alinhada com os bojos do corpo central. Comparando o método usado em Sumida et al. (2020) e usando a velocidade adequada $\nu_{C_{22}}$, a diferença entre os resultados da borda interna da zona estável varia de ≈ 124 km a ≈ 177 km. Ou seja, encontramos uma borda mais próxima ao corpo central.

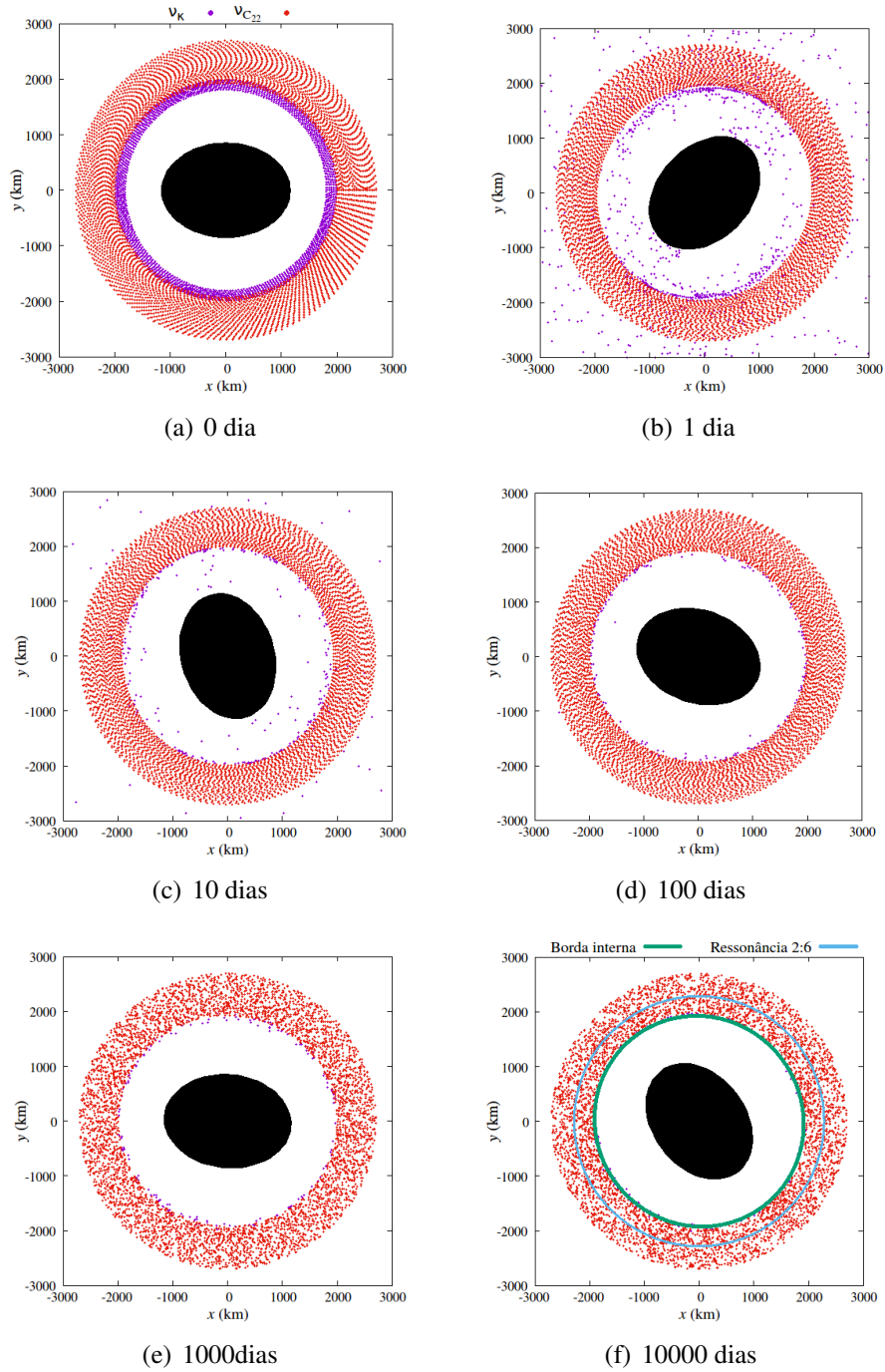
Uma das conclusões obtidas no estudo de Sumida et al. (2020) é que as partículas são removidas da região da ressonância spin-órbita 2:4. Essa conclusão é obtida por dois motivos: a borda encontrada é mais distante do que o real e a localização da ressonância é calculada sem considerar que o corpo central é prolato. Como será mostrado no próximo capítulo, usando a técnica da superfície de seção de Poincaré, a região da ressonância 2:4 está dentro da zona estável. Além disso, o limite inferior da região estável, encontrado no espaço de fase, coincide com a borda encontrada nessa abordagem.

2.9 COMENTÁRIOS FINAIS

Por meio de simulações numéricas, incluindo o coeficiente C_{22} no potencial gravitacional, identificamos que a elipticidade do corpo central causa um aumento considerável na variação radial das órbitas das partículas equatoriais ao usar a velocidade kepleriana circular como condição inicial para integração. Identificamos que este é um efeito dinâmico causado por uma escolha inadequada da velocidade inicial. Não há método na literatura para determinar a velocidade inicial apropriada para órbitas com variação radial mínima ao redor de corpos com elipticidade. Portanto, para determinar uma velocidade de forma que as órbitas submetidas aos potenciais gravitacionais de corpos com elipticidade sejam próximas da circular, foi encontrada empiricamente a velocidade corrigida $\nu_{C_{22}}$ para certas distâncias radiais para um conjunto de parâmetros físicos. Fazendo ajustes de curva gerados pelos dados das simulações numéricas, são desenvolvidas equações que podem ser usadas para calcular a velocidade $\nu_{C_{22}}$, excentricidade e movimento médio em função do coeficiente de elipticidade C_{22} , e o semieixo maior do primário. Identificamos que além da baixa amplitude de variação radial, a velocidade $\nu_{C_{22}}$ produz órbitas que são elipses, onde o corpo primário deixa de ocupar um dos focos e passa a ficar no centro do órbita.

Usando o mesmo processo empírico, a região ao redor do corpo com diferentes períodos de rotação é explorada. Para essa análise, considera-se um corpo com parâmetros semelhantes aos de Haumea. É

Figura 18 – Variação temporal da distribuição de partículas ao redor de Haumea após 0, 1, 10, 100, 1000 e 10000 dias de integração numérica. A elipse central tem as dimensões equatoriais de Haumea e mostra a sua posição angular no tempo. No último quadro, a linha azul indica a posição da ressonância 2:6 e linha verde a borda interna da região estável.



fonte: Produção da própria autora.

identificado que para corpos com alta rotação, a região em que é necessário usar a velocidade adequada $\nu_{C_{22}}$ é menor; isto é, períodos de rotação mais altos diminuem o efeito dinâmico do coeficiente C_{22} experimentado pelas partículas que orbitam esse corpo.

O comportamento da velocidade $\nu_{C_{22}}$ e da excentricidade para diferentes distâncias radiais são caracterizados, fixando o período de rotação. Finalmente, os períodos orbitais também foram medidos para determinar a equação empírica para calcular $T_{C_{22}}$ como uma função do semieixo maior.

Parte dos resultados apresentados neste capítulo fazem parte do artigo intitulado “*Quasi circular orbits around prolate bodies*” publicado no volume 506 da revista “*Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*”. Uma cópia do artigo pode ser encontrada no anexo C.

3 DINÂMICA EM CORPOS SIMÉTRICOS E NÃO ESFÉRICOS

3.1 INTRODUÇÃO

Com as crescentes descobertas de pequenos corpos não esféricos, como asteroides, centauros, cometas e objetos transnetunianos, o interesse em compreender a dinâmica das regiões ao redor desses corpos, submetidas a potenciais gravitacionais não esféricos, tem aumentado. Isso porque as órbitas em torno desses tipos de corpos geralmente diferem das órbitas keplerianas do problema de dois corpos (HU; SCHEERES, 2004; RIBEIRO et al., 2021), pois as irregularidades no formato dos objetos causam perturbações em seus campos gravitacionais.

A relevância desse tipo de exploração dinâmica justifica-se pelo interesse em estudar o movimento das órbitas de naves espaciais, luas e anéis de partículas ao redor desses corpos. Assim, vários trabalhos têm sido realizados nessa direção nas últimas décadas, como em Hu e Scheeres (2004), que, com o objetivo de estudar o movimento de naves espaciais em torno do equador do asteroide Castália, mapeou a região estável ao redor deste corpo, usando integrações numéricas para um campo gravitacional de segundo grau e rotação uniforme do corpo central. Para isso, Hu e Scheeres (2004) modelaram Castália por meio de um elipsoide triaxial e demonstraram que as ressonâncias entre um corpo em rotação e o movimento orbital médio podem desempenhar um papel importante na determinação da estabilidade das órbitas.

Em Olsen (2006), Castália é usado novamente como objeto alvo para o estudo de regiões estáveis ao seu redor, analisando órbitas prógradas com inclinação de 60° e retrógradas com inclinação de 150° . Neste mesmo trabalho, a região em torno de Itokawa também é explorada, por ser um asteroide com rotação mais lenta, se comparado ao Castália. Além dos experimentos numéricos, Olsen (2006) deriva expressões analíticas para as larguras de ressonâncias de movimento médio em campos gravitacionais de segundo grau e ordem de rotação uniforme. A comparação feita entre os dois modelos, analítico e numérico, aponta para um desacordo entre a teoria e o experimento, para distâncias próximas aos asteroides que foram objetos de estudo. Em Mysen, Olsen e Aksnes (2006) e Mysen e Aksnes (2007), uma abordagem semelhante a que foi feita em Olsen (2006) é realizada para o cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko, modelando o corpo como um elipsoide triaxial e mapeando as zonas instáveis e estáveis.

Neste capítulo, buscamos também mapear a região em torno de corpos elipsoidais utilizando a técnica de superfície de seção de Poincaré. Um dos corpos alvo desse estudo é o planeta anão Haumea que, por ser bastante alongado e possuir um anel de partículas, tornou-se objeto de estudo de diversos trabalhos nos últimos anos. Winter, Borderes-Motta e Ribeiro (2019), usando a técnica seção de superfície de Poincaré, mapearam a zona estável da ressonância $2 : 6$ e das órbitas periódicas de primeiro tipo para a região próxima ao anel.

Mapeamos também a região em torno do centauro 10199 Chariklo que possui um sistema com dois anéis estreitos e, possivelmente, pequenos satélites (BRAGA-RIBAS et al., 2014; BÉRARD et al., 2017). Neste trabalho, modelamos Chariklo como um elipsoide usando os dados observacionais mais recentes

sobre sua forma.

Além de Chariklo e Haumea, mapeamos as regiões estáveis e instáveis de outros cinco sistemas. Estes sistemas são de corpos hipotéticos nos quais mantemos parte dos parâmetros físicos de Haumea mas variamos sua elipticidade e período de rotação, a fim de analisarmos o impacto dessas alterações nas extensões das regiões estáveis e instáveis.

O sistema dinâmico adotado e a técnica da superfície de seção de Poincaré são abordados nas próximas seções. As características dinâmicas de algumas das órbitas periódicas encontradas nesse estudo são exploradas na seção 3.4. Os mapas das regiões estáveis e instáveis são apresentados e discutidos na seção 3.5. As aplicações desse estudo são explorados na seção 3.6 e, por fim, apresentamos nossas conclusões na seção 3.7.

3.2 SISTEMA DINÂMICO

Neste trabalho, analisamos a dinâmica de partículas ao redor de corpos prolatos no sistema girante (Figura 19). Os dados observacionais dos trabalhos de Ortiz et al. (2017), Leiva et al. (2017), Morgado et al. (2021), sugerem o elipsoide de Jacobi como um possível formato para os corpos escolhidos como alvo deste estudo. Sendo assim, o potencial gravitacional desses corpos será composto pelos harmônicos esféricos J_2 e C_{22} definidos como (BALMINO, 1994):

$$J_2 = -\frac{2C^2 - A^2 - B^2}{10R_e^2}, \quad (1)$$

e

$$C_{22} = \frac{A^2 - B^2}{20R_e^2}. \quad (2)$$

Consideramos $R_e = (ABC)^{1/3}$ o raio equivalente do corpo central.

As equações do movimento, com um plano Oxy fixo no corpo e girando com o mesmo período de rotação do corpo central, como ilustrado na Figura 19, são dadas por (HU; SCHEERES, 2004):

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \omega^2 x + U_x, \quad (3)$$

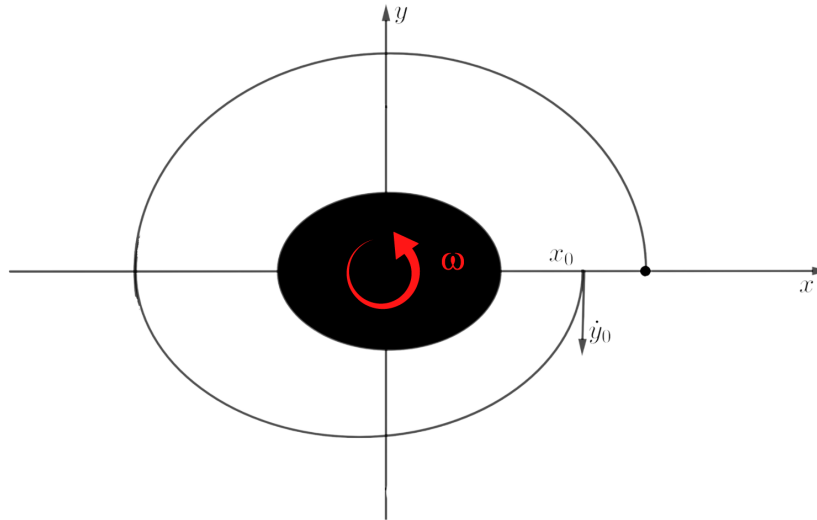
$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \omega^2 y + U_y, \quad (4)$$

onde ω é a velocidade de giro do corpo central, U_x e U_y são as derivadas do potencial gravitacional definido como:

$$U(x, y) = \frac{GM}{r} \left(1 - \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 \left[\frac{-J_2}{2} - \frac{3C_{22}}{r^2} (x^2 - y^2) \right] \right), \quad (5)$$

onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, G é a constante gravitacional e M é a massa do corpo central.

Figura 19 – Diagrama esquemático de uma trajetória equatorial em torno de um elipsoide de Jacobi. O plano O_{xy} é fixo no corpo, x_0 marca a posição inicial da trajetória e a seta indica a velocidade inicial.



fonte: Produção da própria autora.

Os sistemas explorados neste trabalho são conservativos, portanto, a constante de Jacobi C_j também é conservada e dada pela equação (HU; SCHEERES, 2004):

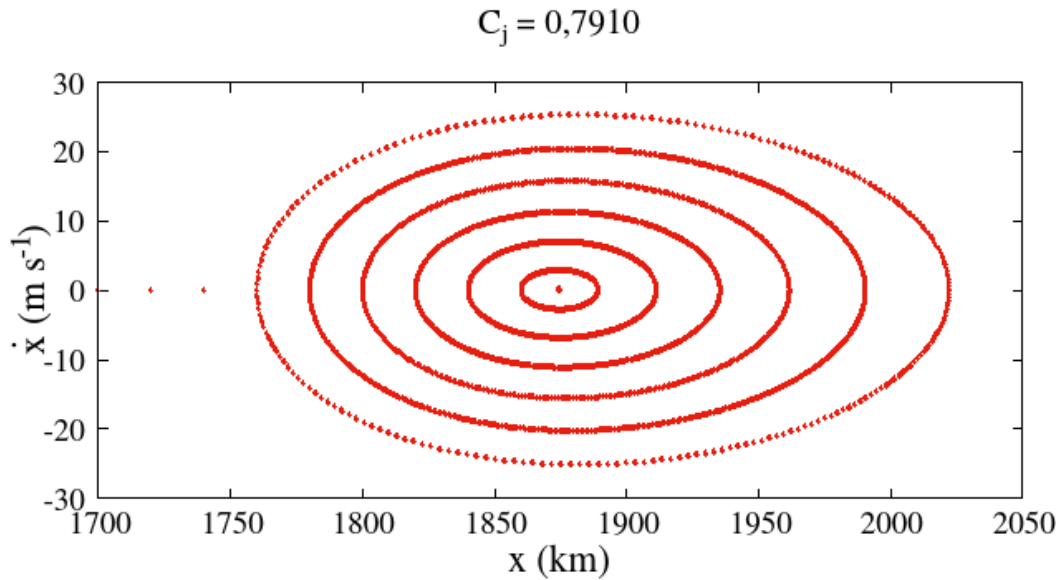
$$C_j = \omega^2(x^2 + y^2) + 2U(x, y) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2, \quad (6)$$

que será usada para obter as superfícies de seção de Poincaré. A unidade da constante de Jacobi é km^2s^{-2} , entretanto, por praticidade, omitiremos essa informação nas figuras apresentadas nesse capítulo. Na seção a seguir, exploramos a técnica da superfície de seção de Poincaré e algumas das famílias de órbitas periódicas encontradas nos sistemas estudados.

3.3 SUPERFÍCIE DE SEÇÃO DE POINCARÉ

As superfícies de seção de Poincaré são mapas gerados por pontos de cruzamento das órbitas em uma seção fixa no sistema. Esses mapas são gerados no espaço de fase para valores fixos da constante de Jacobi (equação 6). Essa técnica tem sido usada de forma abrangente em dinâmica celeste como ferramenta para a identificação da localização e extensão das regiões estáveis e instáveis no problema circular restrito de três corpos (HÉNON, 1965a; HÉNON, 1965b; HENON, 1966; HÉNON, 1966; HÉNON, 1969; JEFFERYS, 1971; WINTER; MURRAY, 1994a; WINTER; MURRAY, 1994b). Entretanto, nos últimos anos, as superfícies de seção de Poincaré foram aplicadas ao problema de dois corpos, cujo corpo central rotaciona e possui distribuição de massa não esférica (BORDERES-MOTTA; WINTER, 2018; WINTER; BORDERES-MOTTA; RIBEIRO, 2019; MADEIRA et al., 2022). A Figura 20 mostra uma seção de

Figura 20 – Superfícies de seção de Poincaré para um sistema considerando Haumea como um corpo oblato, ou seja, o coeficiente de elipticidade é nulo. As ilhas em vermelho são órbitas quase-periódicas associadas a uma família de órbitas periódicas, indicada pelo único ponto no centro de todas as ilhas.



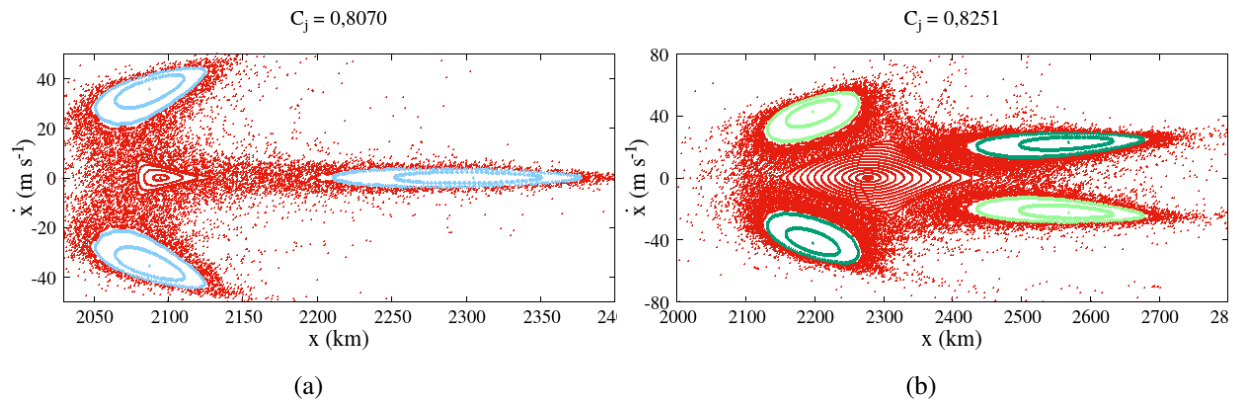
fonte: Produção da própria autora.

superfície de Poincaré aplicada ao problema de dois corpos cujo objeto central é oblato. O corpo primário tem os mesmos parâmetros físicos de Haumea (podem ser consultados na tabela 4), porém com coeficiente C_{22} nulo. Nesse caso, quando não há elipticidade, tem-se apenas: órbitas elípticas, indicadas pelas curvas vermelhas; uma órbita circular, representada pelo ponto no centro das curvas vermelhas e trajetórias hiperbólicas que colidem com o corpo central ou são ejetadas, indicadas os pontos vermelhos isolados.

Nos casos em que o corpo é prolato, a elipticidade do corpo conjuntamente com a sua rotação são responsáveis por perturbar a região e gerar estruturas mais complexas, relacionadas às ressonâncias entre a rotação do primário e o movimento orbital das partículas, como pode ser visto na Figura 21, que mostra duas superfícies de seções de Poincaré do sistema Haumea. Os parâmetros físicos usados podem ser consultados na tabela 4. Primeiramente, foram distribuídas algumas dezenas de condições iniciais para as distâncias $2000 \leq x \leq 2300$ km e $\dot{x} = 0$ m s⁻¹. Com a integração numérica, são geradas as superfícies de seção de Poincaré. Os pontos que preenchem as regiões de forma aleatória são de órbitas caóticas e determinam as regiões dinamicamente instáveis. Já as regiões estáveis, são delimitadas por pontos que formam curvas fechadas que não se cruzam entre si. Essas curvas são chamadas de ilhas de estabilidade. Os pontos aleatórios de orbitas caóticas não adentram essas regiões estáveis. Cada ilha de estabilidade é formada por uma órbita quase-periódica, que recebe essa nomenclatura por não possuir período orbital definido. Entretanto, essas órbitas quase-periódicas seguem o comportamento das órbitas periódicas que se localizam no centro das ilhas de estabilidade. As órbitas periódicas, sempre que cruzam a seção de Poincaré, passam pelos mesmos pontos do espaço de fase.

As órbitas periódicas presentes na Figura 21 podem ser classificadas, de acordo com Poincaré (1892),

Figura 21 – Superfícies de seção de Poincaré para dois valores diferentes da constante de Jacobi (C_j). Na esquerda é mostrada as ilhas de estabilidade da ressonância 2:5, indicada pela cor azul, enquanto que na figura da direita são mostradas as ilhas duplas de estabilidade da ressonância 2:6, representadas por tons diferentes de verde. Em ambas as superfícies de seções de Poincaré, há a presença das ilhas das órbitas quase-periódicas associadas às órbitas periódicas de primeiro tipo, além da região instável, preenchida de forma aleatória por pontos vermelhos.

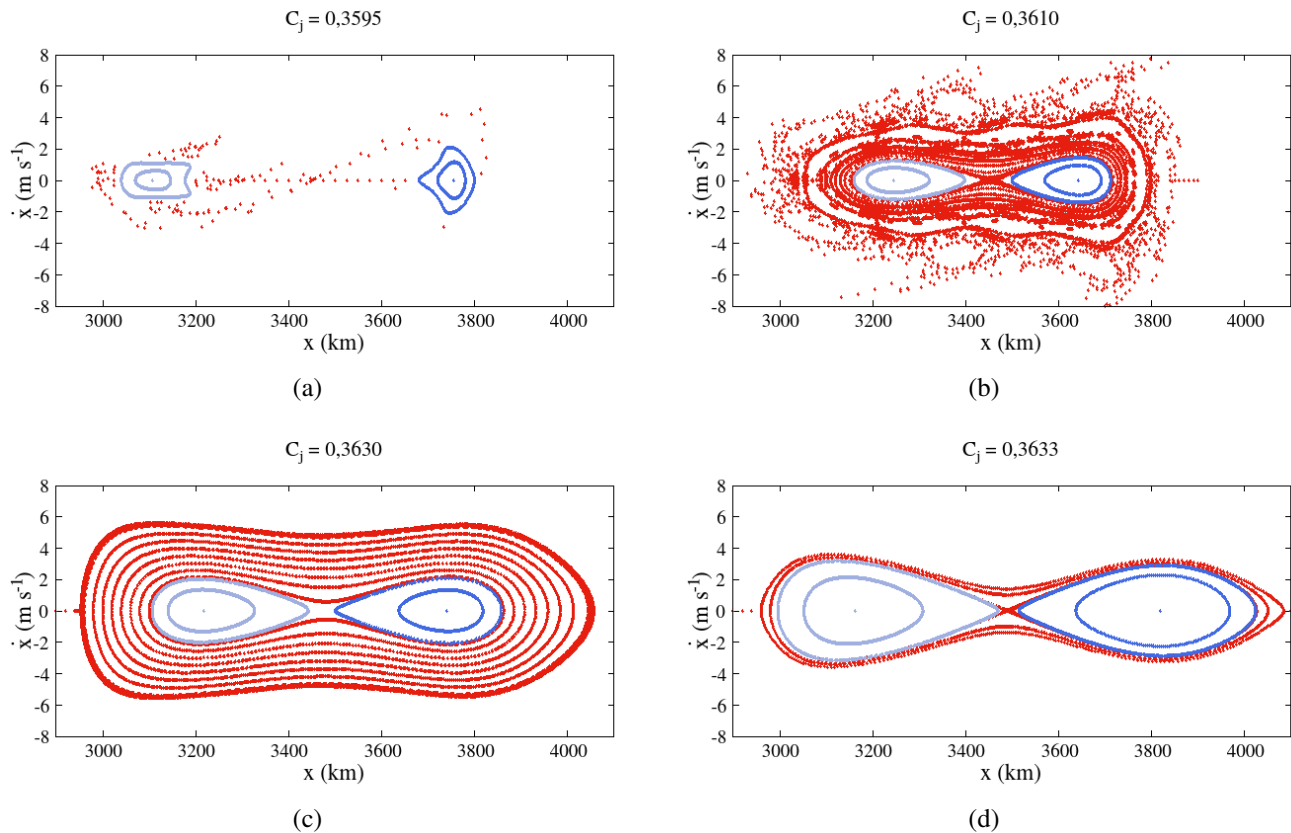


fonte: Produção da própria autora.

de primeiro tipo ou segundo tipo. As de primeiro tipo são órbitas quase-circulares, que não estão associadas à nenhuma ressonância. A Figura 21 mostra que essas órbitas periódicas de primeiro tipo interceptam a superfície de seção de Poincaré em um único ponto, no centro das ilhas de estabilidade representadas pela cor vermelha. As de segundo tipo são as órbitas periódicas associadas às ressonâncias. Nesse caso, ressonâncias spin-órbita, ou seja, ressonâncias entre a rotação do corpo primário e o movimento orbital do corpo secundário. As órbitas periódicas de primeiro tipo são identificadas por ilhas de estabilidade individuais na superfície de seção de Poincaré, enquanto que as de segundo tipo podem ser identificadas por ilhas unitárias, pares, ou por um número inteiro de ilhas de estabilidade; este número é igual ao valor da ordem da ressonância. Tendo como exemplo, na Figura 21a tem-se 3 ilhas azuis, logo é uma ressonância de terceira ordem associada à ressonância 2:5. Essas ilhas de estabilidade relacionadas à uma mesma ressonância ou a de primeiro tipo, ocorrem ao longo de um intervalo de valores de C_j , variando sua localização e tamanho no espaço de fase. A esse conjunto de órbitas periódicas é denominado o termo família.

Na Figura 21b são mostrados dois pares de ilhas de estabilidades em verde claro e verde escuro. Essas são duas famílias pertencentes a uma mesma ressonância. A duplicidade nas famílias é uma característica natural devido ao potencial do corpo ser invariante sob uma rotação π (SICARDY, 2020) e ocorre para todas as ressonâncias $1:n$, passando a serem classificadas como $2:2n$. Sendo assim, as duas famílias na Figura 21b estão associadas à ressonância 2:6.

Figura 22 – Superfícies de seção de Poincaré do sistema Haumea^d (consultar tabela 4) para quatro valores diferentes da constante de Jacobi (C_J), mostrando a evolução de duas famílias, de órbitas periódicas e quase-periódicas, indicadas pelas cores azul claro (F1) e azul escuro (F2).



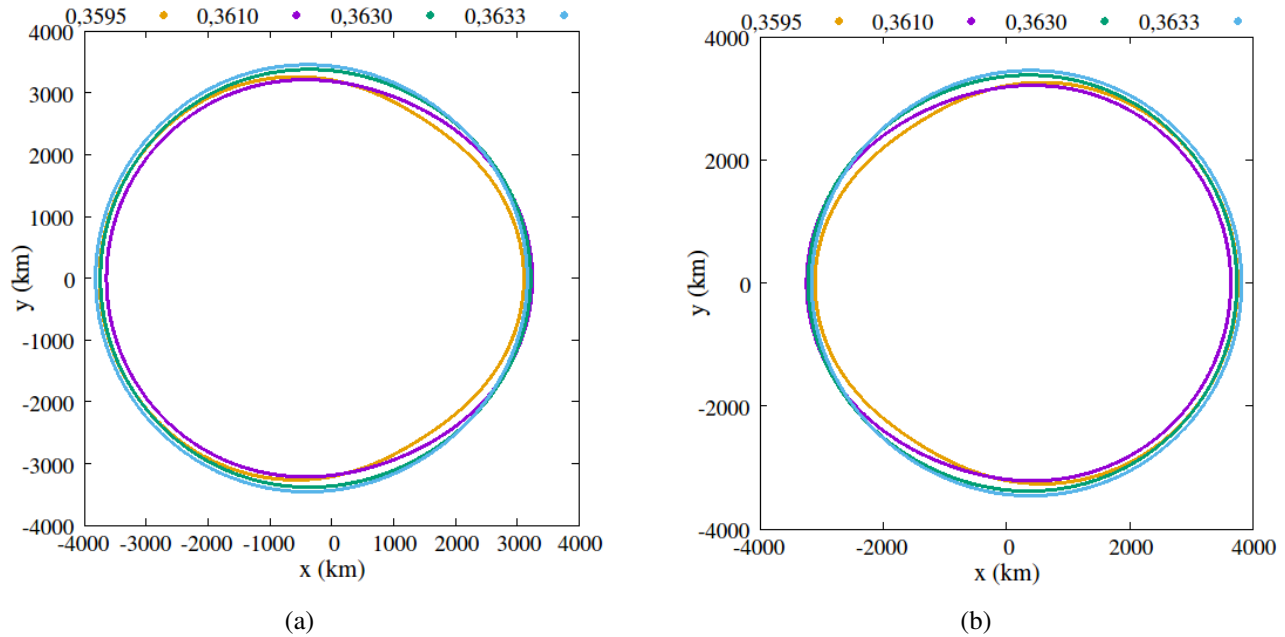
fonte: Produção da própria autora.

3.3.1 Outras órbitas periódicas

Existem órbitas periódicas que não se encaixam nas classificações de primeiro e segundo tipo, mas delimitam também regiões de estabilidade. Broucke (1968) mapeou e classificou diversas dessas órbitas no sistema Terra-Lua e Winter e Neto (2002) investigaram as zonas de estabilidade delimitadas por elas, também no sistema Terra-Lua. Neste trabalho, encontramos duas famílias dessas órbitas periódicas no corpo central composto por um corpo central com os mesmos parâmetros físicos de Haumea, porém com o triplo do período de rotação do planeta anão (ver dados na tabela 4, caso Haumea^d). A Figura 22 apresenta a evolução das duas famílias (em tons de azul) para quatro valores de constante de Jacobi. Devido a forma da trajetória no plano O_{xy} (Figura 23), essas duas famílias encaixam-se na classificação do tipo F, definidas no trabalho de Broucke (1968) que, por simplicidade, serão chamadas de F1 e F2. Observando as órbitas periódicas dessas duas famílias no plano O_{xy} , Figura 23, nota-se que os formatos de suas trajetórias são invertidos, apresentando uma simetria.

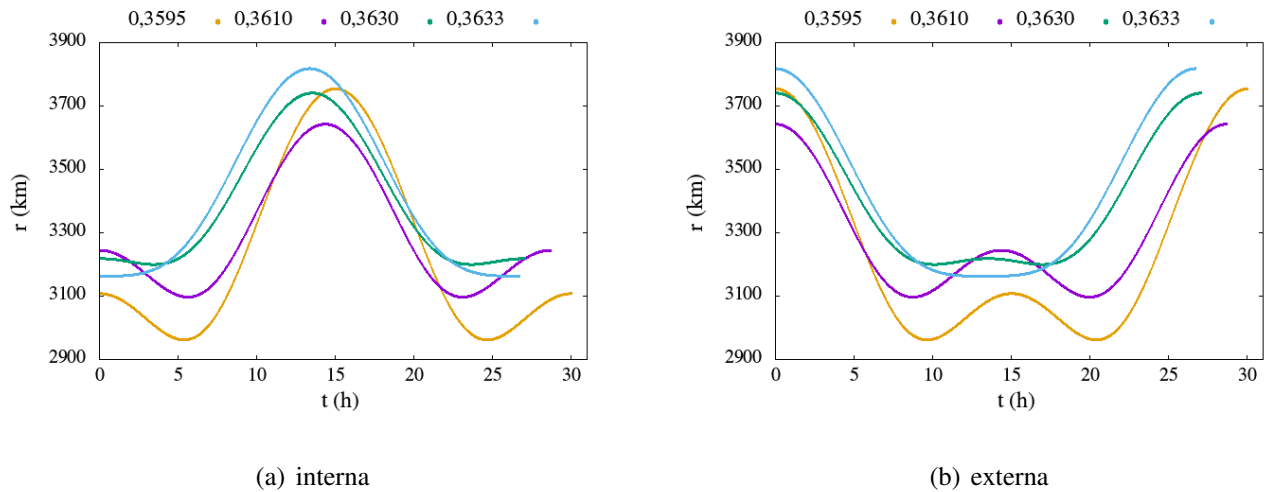
Na Figura 24, podemos observar a variação temporal do raio orbital das órbitas periódicas de F1 e F2. O tempo corresponde a um período orbital e nota-se que quanto maior o valor da constante de Jacobi, menor é o período da órbita. Observa-se também que são trajetórias com grande variação radial e que não

Figura 23 – Órbitas periódicas das duas famílias F1 (a) e F2 (b). As cores indicam os quatro valores da constante de Jacobi, os mesmos da Figura 22.



fonte: Produção da própria autora.

Figura 24 – Evolução temporal por um período orbital das duas famílias de órbitas periódicas F1 (a) e F2 (b). As cores indicam os quatro valores da constante de Jacobi, os mesmos da Figura 22.



fonte: Produção da própria autora.

são trajetórias elípticas.

Essas duas famílias delimitam regiões de estabilidade que serão abordadas na Seção 3.5. A seguir, apresentamos a evolução das famílias associadas às ressonâncias de até terceira ordem.

Tabela 4 – Parâmetros físicos dos corpos centrais usados nas simulações numéricas. A unidade da massa de Chariklo é 10^{18} kg e de Haumea é 10^{21} kg.

Sistema	Chariklo	Haumea	Haumea ^a	Haumea ^b	Haumea ^c	Haumea ^d	Haumea ^e
M (kg) ^{1,2}	6.432	4.006	4.006	4.006	4.006	4.006	4.006
R_e (km)	124.8	798	798	798	798	798	798
T (h) ^{1,3}	7.004	3.9155	3.9155	3.9155	3.9155	11.7465	19.5775
J_2	0.124	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243
C_{22}	0.007	0.049	0.034	0.018	0.003	0.049	0.049

¹ Leiva et al. (2017).

² Ragozzine e Brown (2009).

³ Rabinowitz et al. (2006).

fonte: Produção da própria autora.

3.3.2 Ressonância spin-órbita

Nesta seção, usamos a técnica da superfície de seção de Poincaré para determinar regiões estáveis e instáveis ao redor de corpos prolatos. Parte da região estável encontrada deve-se à presença de ressonâncias. Analisaremos as ressonâncias de até terceira ordem, que são as mais fortes presentes nos sistemas considerados neste trabalho. A fim de demonstrar a evolução dessas famílias de ressonâncias no espaço de fase, mostramos nessa seção, algumas das superfície de seção de Poincaré para quatro casos de corpo central do sistema: o centauro Chariklo; o planeta anão Haumea; o hipotético corpo Haumea^c, que tem os mesmos parâmetros físicos de Haumea, exceto pela elipticidade, com valor mínimo para que nas superfície de seção de Poincaré apareçam as estruturas ressonantes; e o hipotético sistema Haumea^e, que possui o período de rotação 5 vezes mais lento que o de Haumea. Além desses quatro casos, o estudo estende-se para mais três corpos centrais hipotéticos, que são variações do período de rotação e coeficiente de elipticidade de Haumea. A variação desses dois parâmetros foi feita para analisar suas implicações nas regiões de estabilidade dos sistemas. Os parâmetros físicos usados nas simulações numéricas para cada sistema podem ser consultados na tabela 4.

A Figura 25 apresenta uma sequência de superfície de seção de Poincaré para seis valores da constante de Jacobi, permitindo a visualização da evolução das estruturas das órbitas periódicas/quase-periódicas de primeiro e segundo tipo. Na sequência, são destacadas três ressonâncias: 2:4 ((a) e (b)), 2:5 ((c) e (d)) e 2:6 ((e) e (f)). A ressonância 2:4 é dupla, representadas pelas ilhas rosa e lilás nas figuras Figura 25a e Figura 25b. Para o primeiro valor de constante de Jacobi, não há órbitas periódicas/quase-periódicas de primeiro tipo, pois toda a região é caótica, como indica os pontos vermelhos aleatórios que preenchem a região em volta das ilhas de estabilidade da ressonância 2:4. Isso ocorre devido a proximidade com o corpo central fazendo com que as trajetórias colidam com o primário ou sejam ejetadas do sistema. Na Figura 25b, nota-se ainda a existência da região caótica, porém há uma região de estabilidade associada às órbitas quase-periódicas de primeiro tipo, curvas fechadas vermelhas. As ilhas de estabilidade associadas à ressonância 2:4 estão mais próximas e menores, movimento natural quando aumenta-se a constante de Jacobi. Devido a essa aproximação, surge uma separatriz entre as ilhas, gerando uma estreita região

de caos. O caos entre as ilhas destrói a órbita periódica de primeiro tipo. Portanto, para o intervalo de constante de Jacobi em que é possível identificar a existência da ressonância 2:4, a órbita periódica de primeiro tipo não existe.

A Figura 25c mostra as ilhas de estabilidade associadas à ressonância 2:5, em azul. Há uma pequena região com órbitas periódica/quase-periódicas de primeiro tipo e, em torno, uma grande região de caos. No plot seguinte, Figura 25d, pode-se ver que as ilhas da ressonância 2:5 estão mais próximas e menores, porém, nesse caso, essas ilhas não continuam se aproximando do centro das órbitas periódicas de primeiro tipo. Essa é a aproximação máxima entre elas e para valores de C_j maiores, essas ilhas não são mais identificadas nas superfícies de seção de Poincaré.

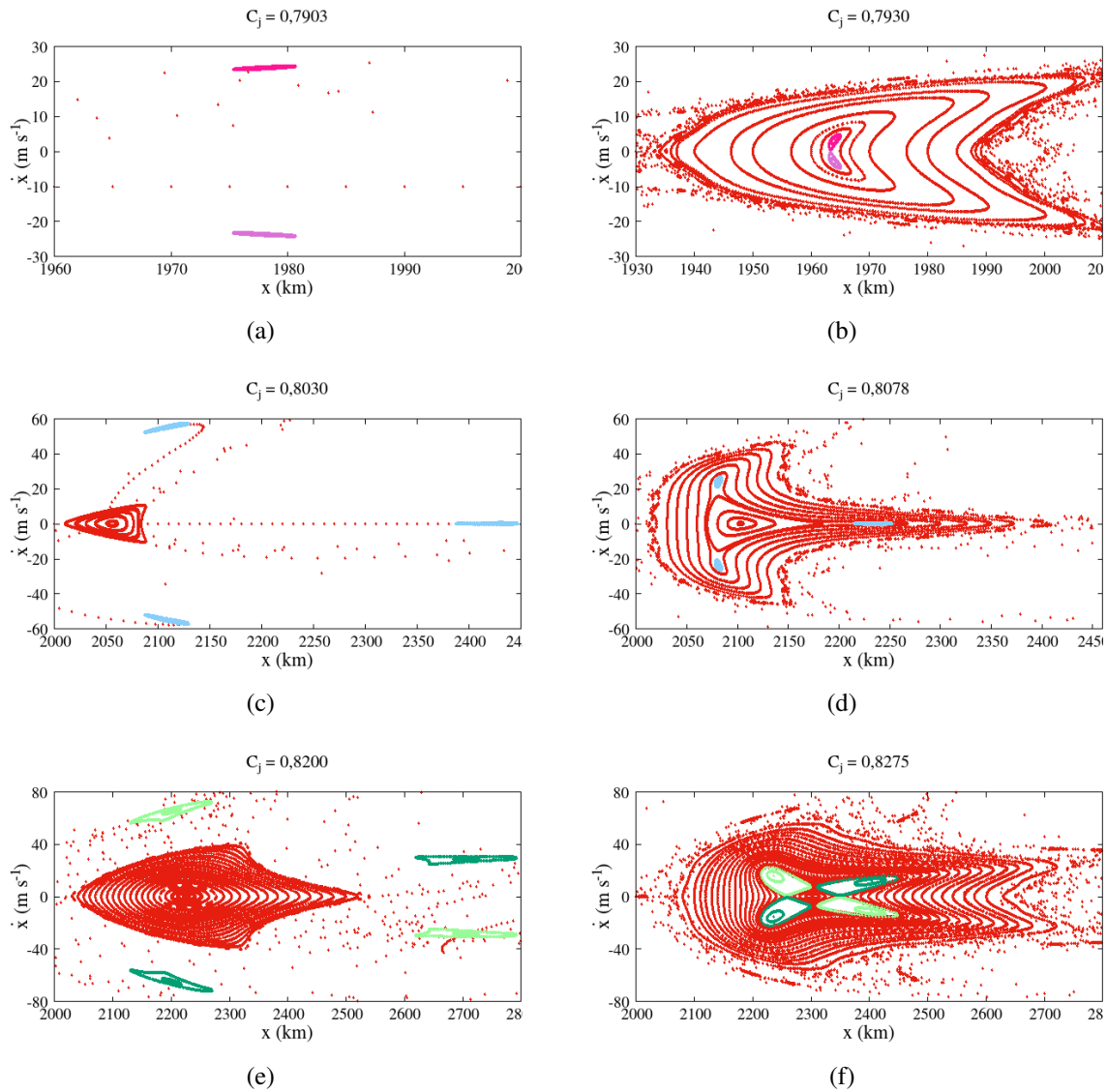
Passando para as superfícies de seção de Poincaré que aparecem as duas famílias da ressonância 2:6, Figura 25e e Figura 25f, nota-se um aumento considerável na região estável, tanto limitada pelas ilhas das órbitas periódicas de primeiro tipo, como pelas ilhas da ressonância. Esse fato é explicado pelo distanciamento do corpo central, diminuindo a perturbação devido a elipticidade no campo gravitacional.

A evolução das famílias associadas às ressonâncias 2:4, 2:5 e 2:6 pode ser vista nas figuras Figura 26a, Figura 26b e Figura 26c, respectivamente. Em um mesmo espaço de fase são apresentadas as ilhas de estabilidade para diferentes valores da constante de Jacobi, indicados pelas cores. Para cada C_j tem-se a ilha mais larga, uma intermediária e o ponto interno que corresponde à órbita periódica. Inicialmente, para o menor valor de C_j , as ilhas são pequenas e distantes entre si. Para valores intermediários de C_j , as ilhas atingem as maiores larguras e tendem a aproximarem-se. Quando chega-se ao valor mais alto da constante de Jacobi, as ilhas tornam-se pequenas e aproximam-se do centro da seção de superfície de Poincaré.

A Figura 27 mostra um conjunto de superfícies de seções de Poincaré para o sistema Haumea^e, que tem o coeficiente de elipticidade inferior ao C_{22} real de Haumea. Esse é o menor valor de C_{22} que gera estruturas relacionadas às ressonâncias spin-órbita, para esse sistema. A primeira mudança observável é o deslocamento das estruturas no eixo x : estão mais próximas do corpo central. Nota-se, de modo geral, que a região instável é menor, identificada pelos pontos vermelhos aleatórios. A família de órbitas periódicas do primeiro tipo continua não coexistindo com as famílias da ressonância 2:4. Na Figura 27b, os pontos que seguem um comportamento de curva na região entre $1765 \leq x \leq 1770$ km para $\dot{x} \leq 0$ m s⁻¹ e $1783 \leq x \leq 1790$ km para $\dot{x} \geq 0$ m s⁻¹ são órbitas que inicialmente têm o movimento de órbitas quase-periódicas, mas colidem com o corpo central após algum tempo. A colisão ocorre pois a proximidade com o corpo central aumenta a probabilidade de trajetórias mais excêntricas colidirem com o primário. O mesmo fenômeno ocorre nas figuras Figura 27b e Figura 27c.

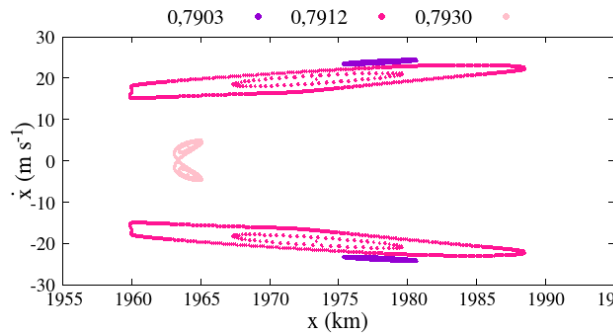
O spin elevado de Haumea somado à sua forma alongada, acarretam na colisão ou ejeção de partículas que orbitam próximo ao seu corpo. Diminuindo a rotação, os eixos ressonantes afastam-se do corpo central, permitindo que outras ressonâncias apareçam. A Figura 28 mostra um conjunto de superfícies de seções de Poincaré para o sistema Haumea^e, que possui o período de rotação mais lento. Diferentemente do que ocorre para os outros sistemas, o caso Haumea^e apresenta uma nova ressonância de terceira ordem: a ressonância 4:7, representadas pelas ilhas amarelas. Acompanhando a sequência dos valores da constante de Jacobi na Figura 28, nota-se a existência das demais ressonâncias encontradas nos sistemas discutidos

Figura 25 – Superfícies de seção de Poincaré do sistema Haumea para seis valores diferentes da constante de Jacobi (C_J), mostrando a evolução das ressonâncias 2:4, 2:5 e 2:6, respectivamente. As ilhas de estabilidade da ressonância 2:4 (plots (a) e (b)) são duplicadas e estão representadas pelas cores rosa e lilás. O mesmo fenômeno ocorre com as ilhas da ressonância 2:6 (plots (e) e (f)), indicadas pelos tons diferentes de verde. A ressonância 2:5 é mostrada pelas ilhas em azul nos plots (c) e (d). As ilhas em vermelho são órbitas quase periódicas associadas a uma família de órbitas periódicas do primeiro tipo.

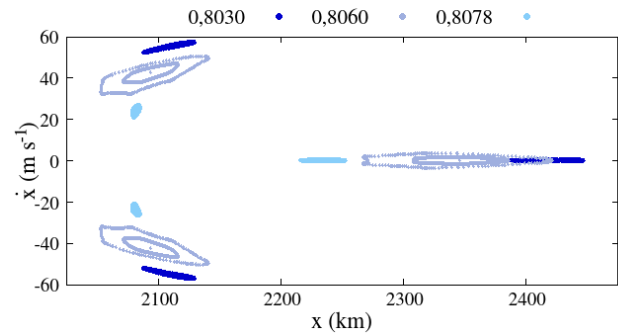


fonte: Produção da própria autora.

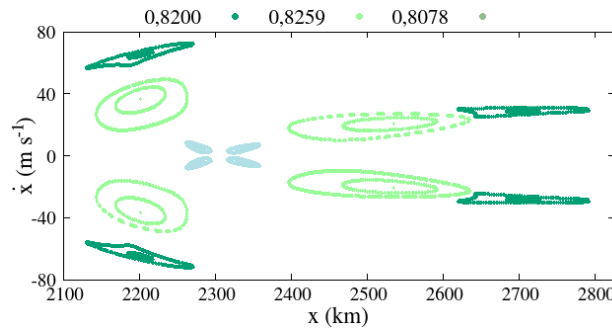
Figura 26 – Evolução das famílias associadas às ressonâncias 2:4, 2:5 e 2:6 nas superfícies da secção de Poincaré para o sistema Haumea. Para cada figura, tem-se uma amostra das maiores ilhas de estabilidade, uma ilha intermediária e os pontos internos que representam a órbita periódica, mostrando a estrutura para diferentes valores de C_j . As cores indicam os valores de C_j ($\text{km}^2 \text{s}^{-2}$) considerados.



(a) Famílias associadas à ressonância 2:4.



(b) Famílias associadas à ressonância 2:5.



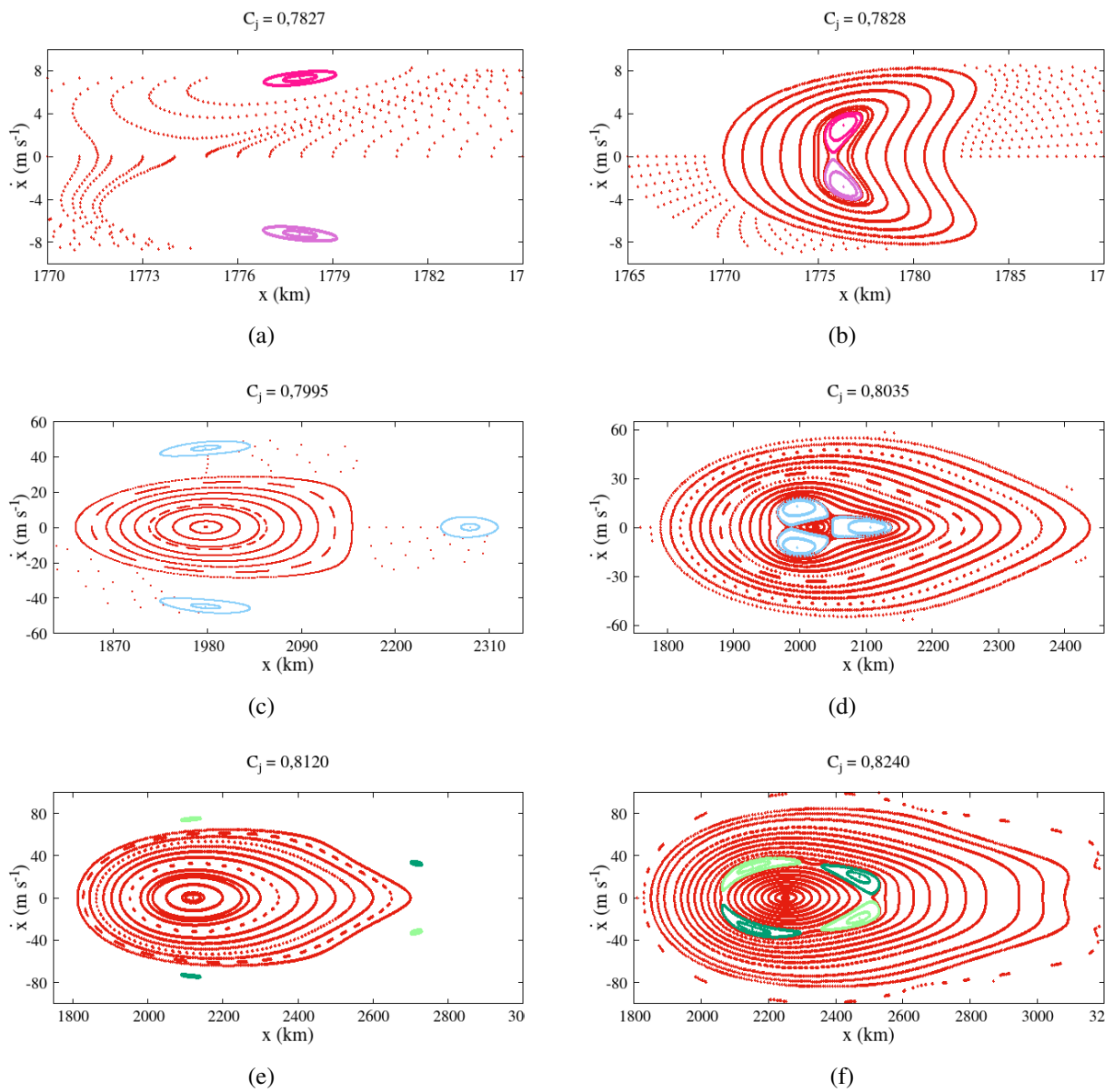
(c) Famílias associadas à ressonância 2:6.

fonte: Produção da própria autora.

anteriormente, entretanto, destacamos duas diferenças:

- a primeira deve-se à coexistência da ressonância 2:4 e das órbitas periódicas de primeiro tipo por um determinado intervalo da constante de Jacobi (figuras Figura 28c e Figura 28d). Com a aproximação das ilhas da ressonância 2:4, as órbitas periódicas/quase-periódicas de primeiro tipo são destruídas pelo caos da separatriz de ressonância (ver Figura 28e);
- a segunda se deve à bifurcação da ressonância 2:6, que pode ser observada na Figura 28e pelos pontos verdes escuros e claros. Anteriormente, a órbita periódica associada à ressonância 2:6 cruzava o espaço de fase em apenas dois pontos, com a bifurcação, passa a cruzar em quatro pontos distintos. A Figura 29 mostra o zoom das ilhas bifurcadas de uma das famílias associadas à ressonância 2:6. Entre elas, há uma região de caos intrínseco à separatriz, gerada pela bifurcação, restringindo a extensão da região estável da ressonância, se comparado aos casos em que não há bifurcação. Esse fenômeno acarreta algumas implicações como, por exemplo, a extensão radial de um possível anel ao redor deste corpo em ressonância spin-órbita 2:6, o caos gerado pela separatriz produziria uma

Figura 27 – Superfícies de seção de Poincaré do sistema Haumea^c para seis valores diferentes da constante de Jacobi (C_J), mostrando a evolução das ressonâncias 2:4, 2:5 e 2:6, respectivamente. As ilhas de estabilidade da ressonância 2:4 (plots (a) e (b)) são duplicadas e estão representadas pelas cores rosa e lilás. O mesmo fenômeno ocorre com as ilhas da ressonância 2:6 (plots (e) e (f)), indicadas pelos tons diferentes de verde. A ressonância 2:5 é mostrada pelas ilhas em azul nos plots (c) e (d). As ilhas em vermelho são órbitas quase periódicas associadas a uma família de órbitas periódicas do primeiro tipo.



fonte: Produção da própria autora.

falha dentro do anel. Com o aumento da constante de Jacobi, as ilhas bifurcadas aproximam-se até se unirem.

A evolução dessas famílias no espaço de fase pode ser visualizada na Figura 30.

Mudando novamente de sistema, a Figura 31 mostra algumas superfícies de seção de Poincaré para o sistema Chariklo. Este centauro tem o período de rotação mais lento e é menos alongado se comparado com Haumea. Mas nota-se que as estruturas na superfície de seção de Poincaré são semelhantes às aquelas identificadas nos outros dois sistemas explorados anteriormente. Por se tratar de um corpo com elipticidade menor, as regiões de caos também são menores, mas identificam-se as mesmas ressonâncias 2:4, 2:5 e 2:6, além de uma grande região dominada pelas órbitas periódicas/quase-periódicas de primeiro tipo.

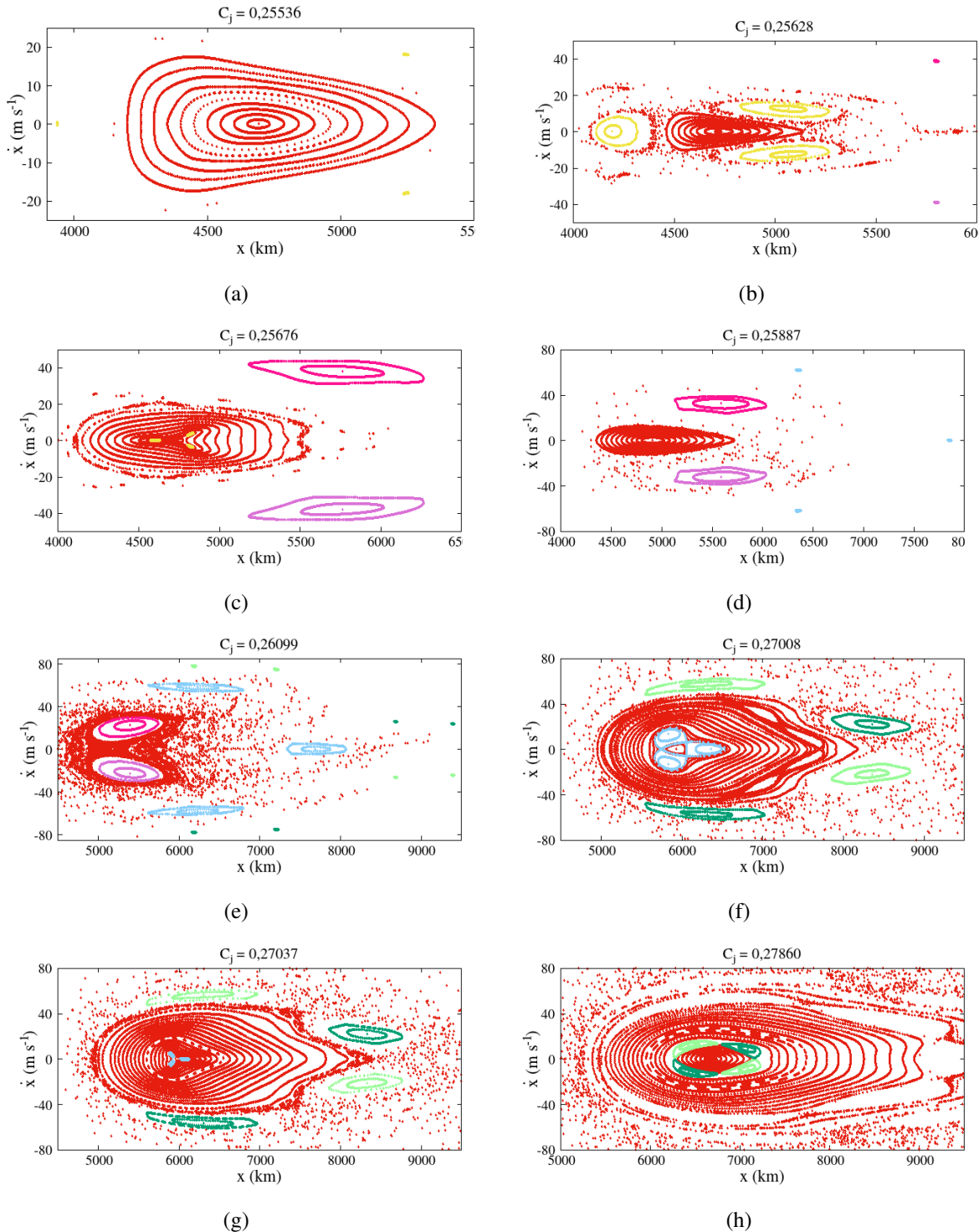
3.4 ÓRBITAS PERIÓDICAS AO REDOR DE CORPOS PROLATOS

As órbitas associadas às ressonâncias tratadas na seção 3.3.2 são estudadas nessa seção, a fim de discutir suas características dinâmicas. Para isso, escolhemos uma órbita periódica de cada ressonância do sistema Haumea e uma órbita periódica da ressonância 4:7 do sistema Haumea^e. Vale ressaltar que o comportamento das órbitas ressonantes dos outros sistemas são semelhantes às apresentadas nessa seção. Como dito, a ressonância 2:4 possui duas famílias de órbitas periódicas/quase-periódicas, assim, na Figura 32 são apresentadas um par dessas órbitas periódicas para $C_j = 0.7903 \text{ km}^2\text{s}^{-2}$, uma de cada família. A Figura 32a refere-se à órbita periódica representada pelo ponto central interno às ilhas de cor rosa da superfície de seção de Poincaré e a Figura 32b refere-se à órbita periódica lilás, ambas mostradas na Figura 25a. As trajetórias estão no sistema girante e são retrógradas. A órbita é fechada, pois a partícula encontra-se no ponto fixo da ressonância. A evolução temporal é dada pelos pontos numerados que estão igualmente espaçados no tempo, enquanto que a escala e cores fornece a velocidade no sistema inercial. Os pontos da órbita de maior proximidade com o corpo central têm os maiores módulos da velocidade, indicando o pericentro. Do mesmo modo, os menores valores de velocidades indicam a região do apocentro da órbita. As trajetórias são imagens espelhadas entre si, em relação à linha Oy . No eixo Oy , ocorre uma divisão das órbitas em partes simétricas. Essas são consequências que decorrem do potencial gravitacional ser invariante sob uma rotação π , equação 8. O período dessas órbitas correspondem a dois períodos de rotação de Haumea.

A Figura 33 mostra a órbita periódica, no sistema girante, associada à ressonância 2:5 para um $C_j = 0.8030 \text{ km}^2\text{s}^{-2}$. Essa órbita é a mesma representada pelo ponto central interno às ilhas de estabilidade de cor azul na superfície de seção de Poincaré da Figura 25c. Neste caso, a órbita é simétrica tanto em relação ao eixo Ox , como ao eixo Oy . O período dessa órbita é aproximadamente cinco vezes o período de rotação de Haumea e é uma trajetória fechada por estar no ponto fixo da ressonância.

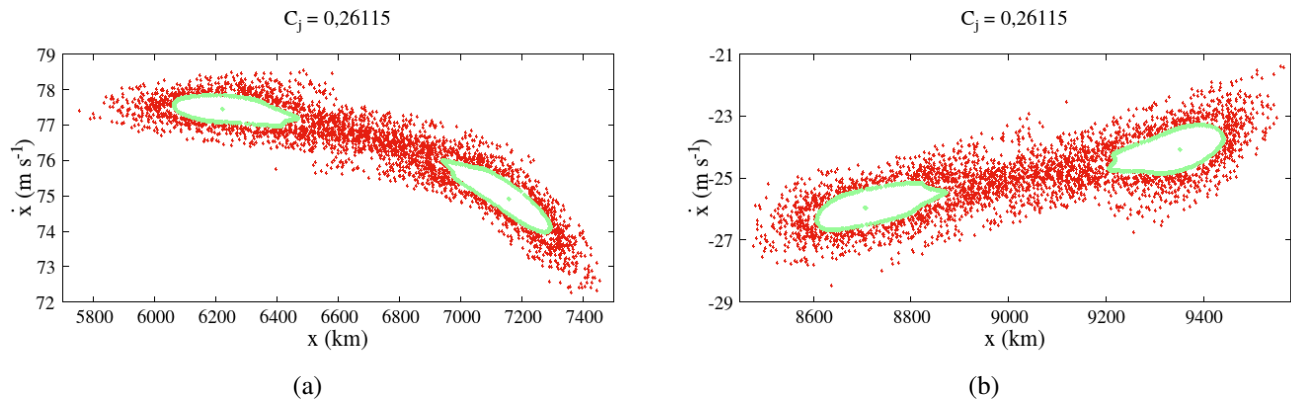
Assim como ocorre para a ressonância 2:4, existe a duplicidade de famílias de órbitas periódicas/quase-periódicas na ressonância 2:6, como foi visto nas superfícies de seção de Poincaré da subseção 3.3.2. A Figura 34 apresenta uma amostra dessas órbitas periódicas para o valor de $C_j = 0.8200 \text{ km}^2\text{s}^{-2}$. Na Figura 34a, tem-se a trajetória do ponto central interno às ilhas de cor verde claro da superfície de seção

Figura 28 – Superfícies de seção de Poincaré do sistema Haumea^e para oito valores diferentes da constante de Jacobi (C_J), mostrando a evolução das ressonâncias 4:7, 2:4, 2:5 e 2:6, respectivamente. As ilhas de estabilidade da ressonância 2:4 são duplicadas e estão representadas pelas cores rosa e lilás. O mesmo fenômeno ocorre com as ilhas da ressonância 2:6, indicadas pelos tons diferentes de verde. As ressonâncias 4:7 e 2:5 são representadas pelas ilhas em amarelo e azul, respectivamente. As ilhas em vermelho são órbitas quase periódicas associadas a uma família de órbitas periódicas do primeiro tipo.



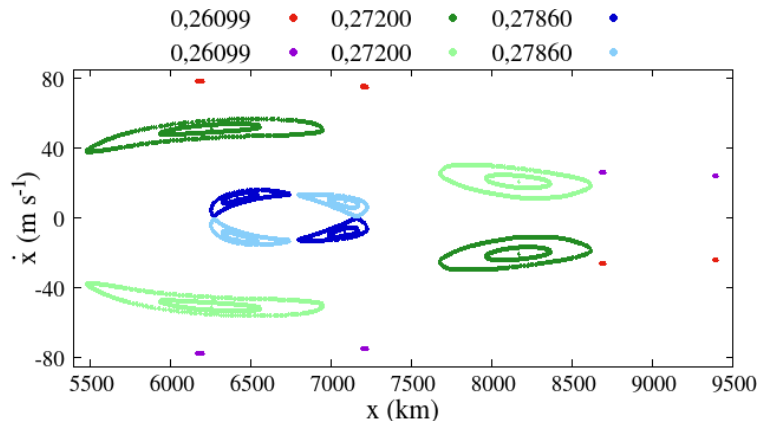
fonte: Produção da própria autora.

Figura 29 – Zoom da Superfície de seção de Poincaré do sistema Haumea^e para $C_j = 2.6115 \times 10^{-1} \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$, mostrando a bifurcação de uma das famílias associadas à ressonância 2:6.



fonte: Produção da própria autora.

Figura 30 – Evolução das famílias associadas à ressonância 2:6 nas superfícies da secção de Poincaré para o sistema Haumea^e. O plot apresenta uma amostra das maiores ilhas de estabilidade, uma ilha intermediária e os pontos internos que representam a órbita periódica, mostrando a estrutura para diferentes valores de C_j . As cores indicam os valores de $C_j (\text{km}^2 \text{ s}^{-2})$ considerados.

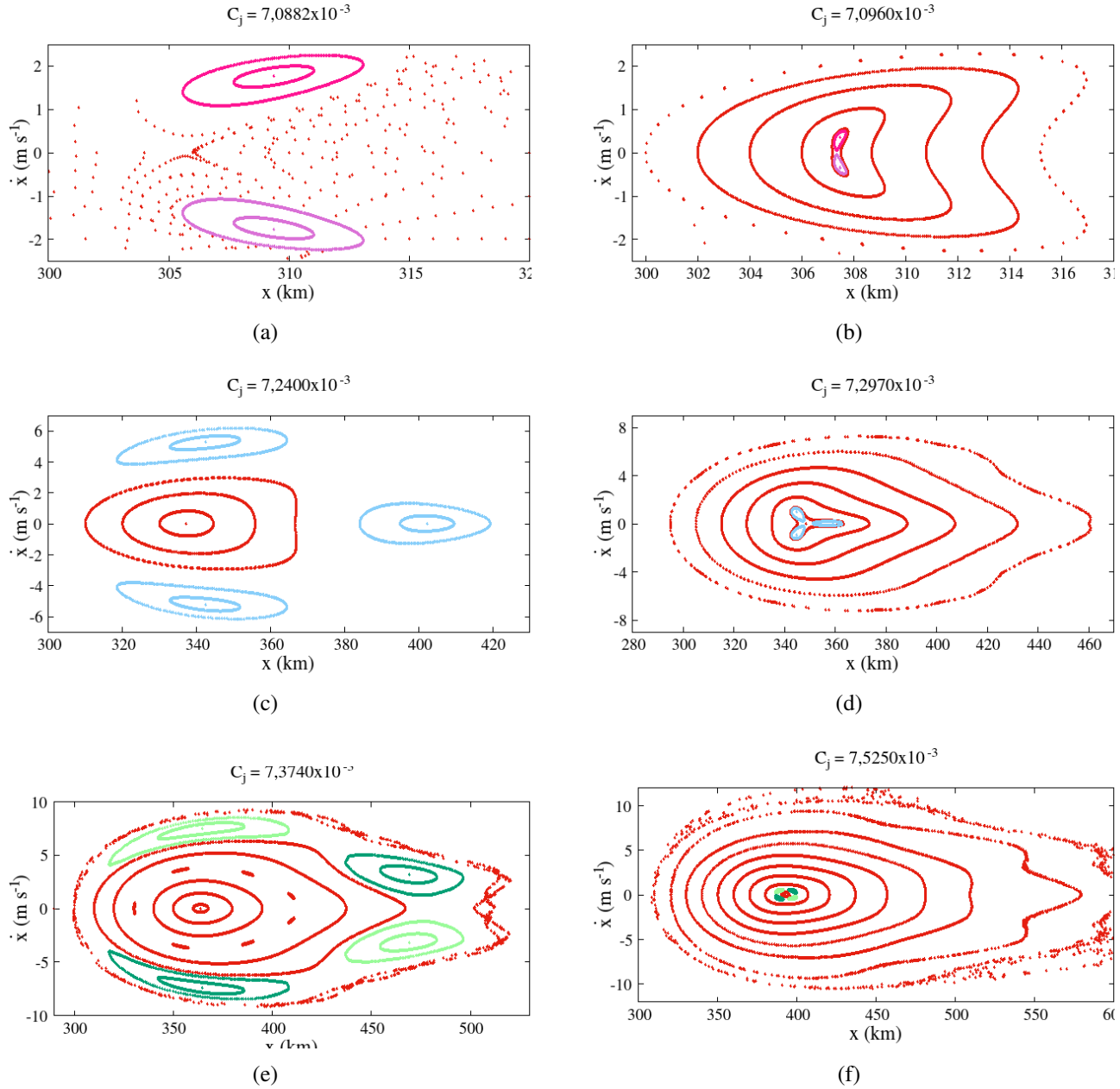


fonte: Produção da própria autora.

de Poincaré e a Figura 34b o ponto central interno às ilhas de cor verde escuro, ambas apresentadas na Figura 25e. As trajetórias são fechadas, pois as partículas encontram-se no ponto fixo da ressonância. O período orbital é o triplo do período rotacional de Haumea. Por se tratar de uma dupla família pertencente à mesma ressonância, as órbitas são imagens espelhadas entre si em relação ao eixo Ox . No eixo Oy ocorre uma divisão das órbitas em partes simétricas, devido a simetria do corpo em relação ao mesmo eixo citado. Os pontos de maior aproximação da trajetória com o corpo central são os mesmos onde o módulo da velocidade assume os maiores valores, indicando a região do pericentro. Nos pontos de menor aproximação com Haumea, as velocidades são menores, tratando-se do apocentro.

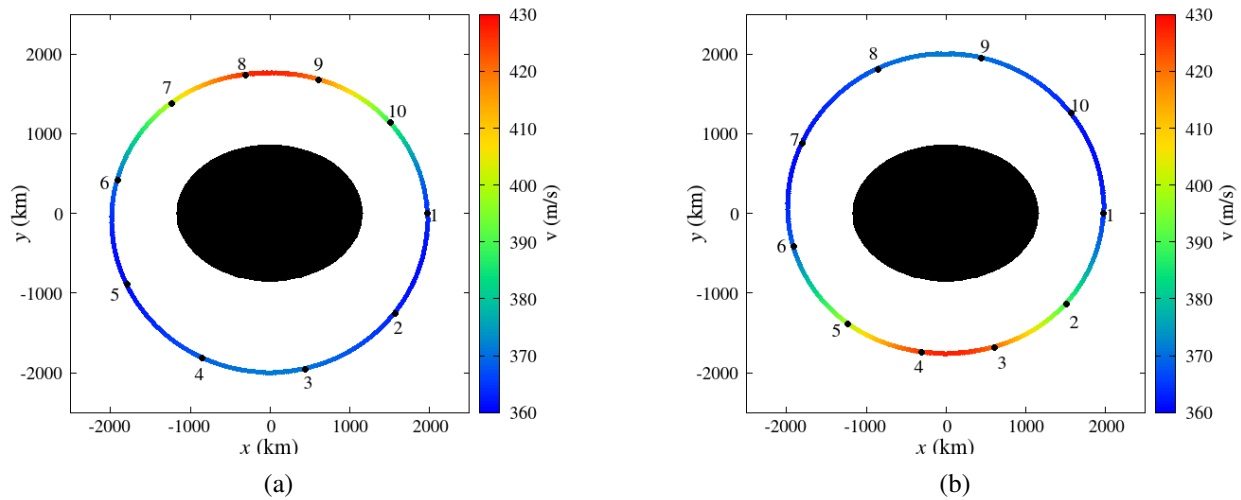
A Figura 35 apresenta a órbita periódica, no sistema girante, associada à ressonância 4:7 do sistema Haumea^e para um $C_j = 0.25536 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$. Essa órbita é a mesma representada pelo ponto central interno às ilhas de estabilidade de cor amarela na superfície de seção de Poincaré da Figura 28a. Por não ser uma

Figura 31 – Superfícies de seção de Poincaré do sistema Chariklo para seis valores diferentes da constante de Jacobi (C_J), mostrando a evolução das ressonâncias 2:4, 2:5 e 2:6, respectivamente. As ilhas de estabilidade da ressonância 2:4 (plots (a) e (b)) são duplicadas e estão representadas pelas cores rosa e lilás. O mesmo fenômeno ocorre com as ilhas da ressonância 2:6 (plots (e) e (f)), indicadas pelos tons diferentes de verde. A ressonância 2:5 é mostrada pelas ilhas em azul nos plots (c) e (d). As ilhas em vermelho são órbitas quase periódicas associadas a uma família de órbitas periódicas do primeiro tipo.



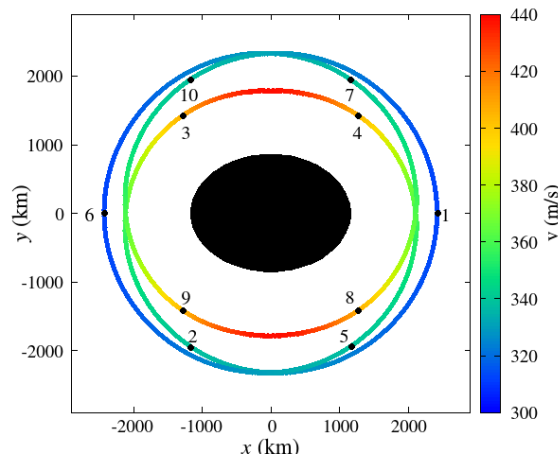
fonte: Produção da própria autora.

Figura 32 – Órbitas periódicas da ressonância 2:4 para $C_j = 0.7903 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ no sistema girante. A evolução temporal das órbitas é dada pelos pontos numerados que estão igualmente espaçados no tempo, enquanto a escala de cores fornece a velocidade no sistema inercial. (a) Órbita periódica da família representada pela cor rosa nas superfícies de seções de Poincaré da Figura 25a. (b) Órbita periódica da família representada pela cor lilás nas superfícies de seções de Poincaré da Figura 25a.



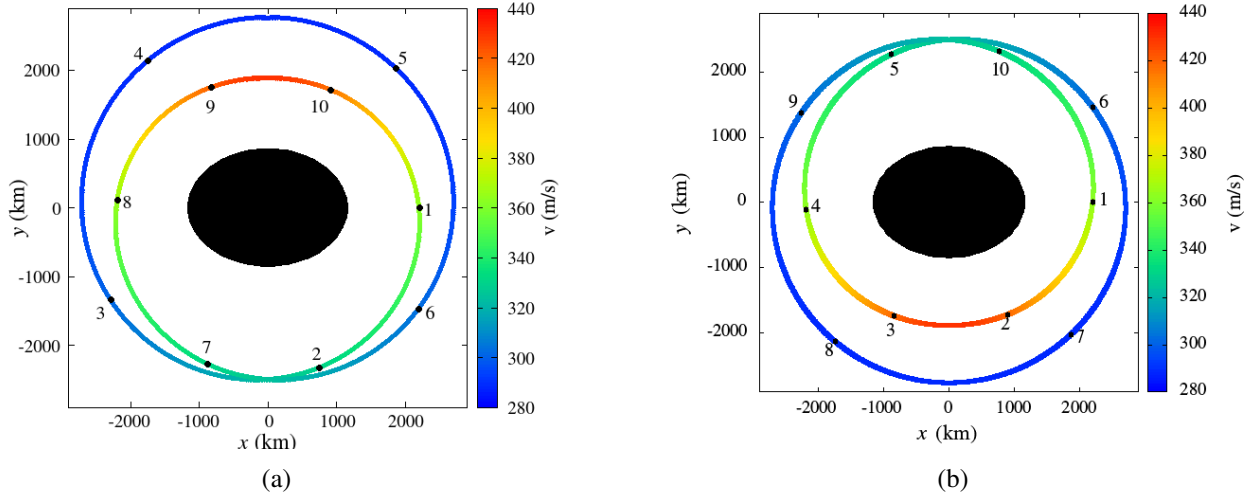
fonte: Produção da própria autora.

Figura 33 – Órbita periódica da ressonância 2:5 para $C_j = 0.8030 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ no sistema girante. A evolução temporal da órbita é dada pelos pontos numerados que estão igualmente espaçados no tempo, enquanto a escala de cores fornece a velocidade no sistema inercial.



fonte: Produção da própria autora.

Figura 34 – Órbitas periódicas da ressonância 2:6 para $C_j = 0.8200 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ no sistema girante. A evolução temporal das órbitas é dada pelos pontos numerados que estão igualmente espaçados no tempo, enquanto a escala de cores fornece a velocidade no sistema inercial. (a) Órbita periódica da família representada pela cor verde claro nas superfícies de seções de Poincaré da Figura 25. (b) Órbita periódica da família representada pela cor verde escuro nas superfícies de seções de Poincaré da Figura 25



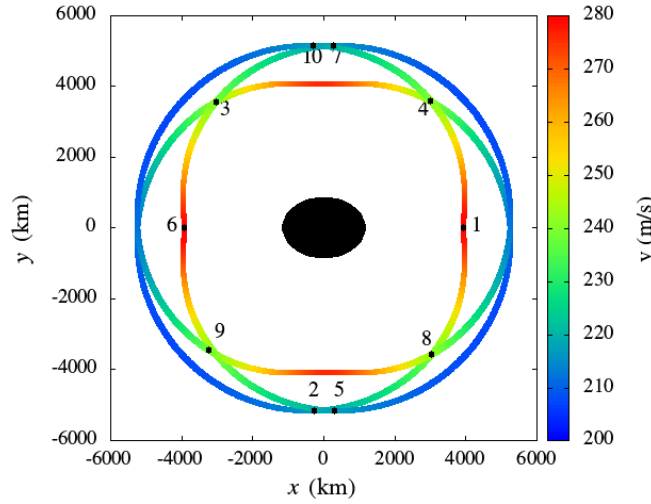
fonte: Produção da própria autora.

ressonância dupla, a órbita é simétrica tanto em relação ao eixo Ox , como ao eixo Oy . O período dessa órbita é sete vezes o período de rotação de Haumea e é uma trajetória fechada por estar no ponto fixo da ressonância.

Os gráficos da Figura 36 apresentam a evolução temporal da distância radial das órbitas periódicas associadas às ressonâncias 2:4, 2:5, 2:6 e 4:7, nessa ordem. As figuras Figura 36a e Figura 36c referem-se aos casos das famílias que foram representadas pelas cores rosa e verde claro, nas superfícies de seção de Poincaré da Figura 25. As cores das linhas cheias indicam valores de constante de Jacobi distintos. As órbitas com as maiores amplitudes radiais (amarelas) correspondem aos menores valores de C_j , enquanto que as trajetórias de menor amplitude radial (linhas cheias cinzas) aos maiores valores de C_j . Os intervalos das constantes de Jacobi considerados podem ser consultados nas legendas de cada gráfico da Figura 36. A comparação entre órbitas de uma mesma família para C_j diferentes, mostra que quanto maior o valor de C_j , menor é amplitude da variação radial. Essa atenuação ocorre conforme as ilhas de estabilidade se aproximam da órbita de primeiro tipo nas superfícies de seção de Poincaré, como pode ser visto na Figura 26. As linhas pontilhadas e tracejadas demarcam a localização do semieixo da ressonância usando dois métodos distintos: por meio das frequências epicíclicas e através da geometria da órbita, respectivamente. As frequências η e κ são definidas como (SICARDY, 2020):

$$\eta^2 = \frac{GM}{a^3} \left[1 + \frac{3f}{5} \left(\frac{R}{a} \right)^2 \right] \quad (7)$$

Figura 35 – Órbita periódica da ressonância 4:7 do sisema Haumea^e para $C_j = 0.25536 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ no sistema girante. A evolução temporal da órbita é dada pelos pontos numerados que estão igualmente espaçados no tempo, enquanto a escala de cores fornece a velocidade no sistema inercial.



fonte: Produção da própria autora.

e

$$\kappa^2 = \frac{GM}{a^3} \left[1 - \frac{3f}{5} \left(\frac{R}{a} \right)^2 \right] \quad (8)$$

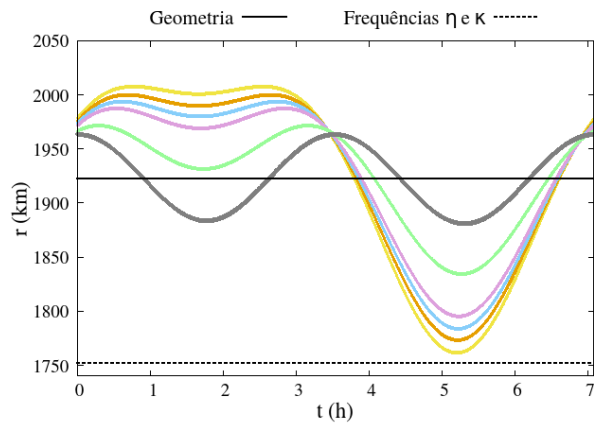
onde $f = 2.5J_2$. O semieixo da ressonância, a , é obtido por um processo de iteração numérica usando as duas frequências. Os valores apresentados nos gráficos da Figura 36 (linhas pontilhadas), usando esse método, são os mesmos obtidos no trabalho de Sicardy (2020).

O segundo método para encontrar o semieixo da ressonância é decorrente da geometria da órbita. Esse método foi discutido no trabalho de Ribeiro et al. (2021), que consiste em calcular o semieixo maior usando a equação:

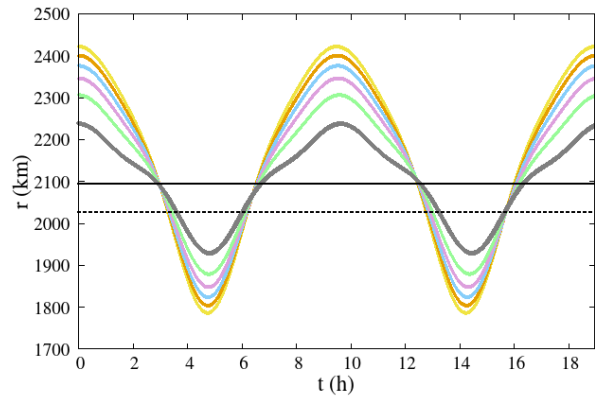
$$a = \frac{r_{max} + r_{min}}{2}, \quad (9)$$

onde a é o semieixo maior devido a geometria da órbita, r_{max} e r_{min} são as maiores e menores distâncias radiais de uma mesma órbita, respectivamente. O diagrama da Figura 37 mostra um panorama geral da comparação entre os métodos utilizados para a localização dos centros das ressonâncias e a largura radial descrita pelas órbitas ressonantes. O diagrama está dividido em faixas horizontais. Cada faixa refere-se a uma ressonância. As regiões cinzas limitam a largura da variação do raio orbital das trajetórias indicadas pela cor cinza na Figura 36. Essas são as órbitas periódicas com menores amplitudes da variação radial. Dentre as três órbitas analisadas, aquela associada à ressonância 2:5 é a que possui a maior extensão de variação radial, em torno de $\Delta r = 307 \text{ km}$, enquanto que a órbita associada a ressonância 2:4 tem $\Delta r = 83 \text{ km}$ e a 2:6 tem $\Delta r = 118 \text{ km}$. A extensão radial das órbitas da ressonância 2:5 é maior pois sua família não é dupla, como ocorre com as ressonâncias 2:4 e 2:6.

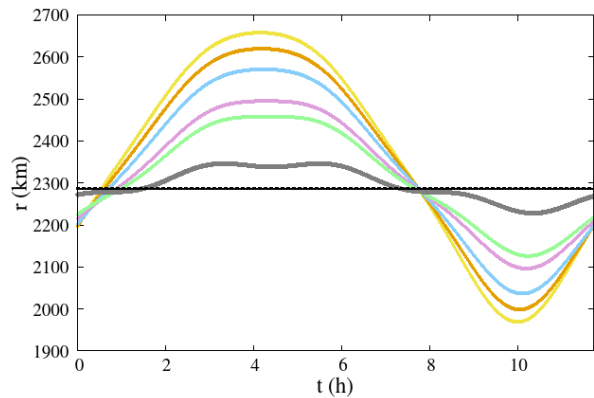
Figura 36 – Evolução temporal da distância radial das órbitas periódicas associadas às ressonâncias, para diferentes valores de C_j . O tempo é referente a um período orbital no sistema girante. As linhas tracejadas indicam a localização do semieixo das ressonâncias calculadas por dois métodos distintos.



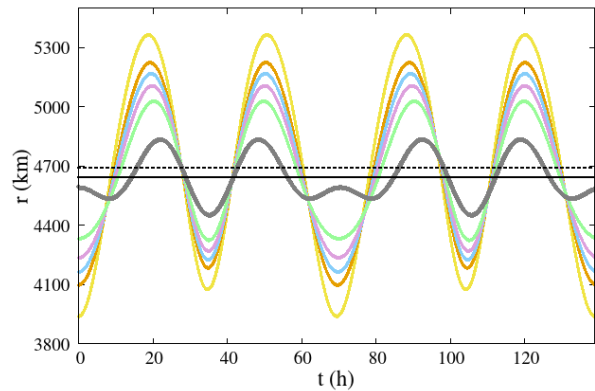
(a) Órbitas periódicas da ressonância 2:4 para valores de $0.7903 \leq C_j \leq 0.7930$, indicados pelas cores.



(b) Órbitas periódicas da ressonância 2:5 para valores de $0.8030 \leq C_j \leq 0.8078$, indicados pelas cores.



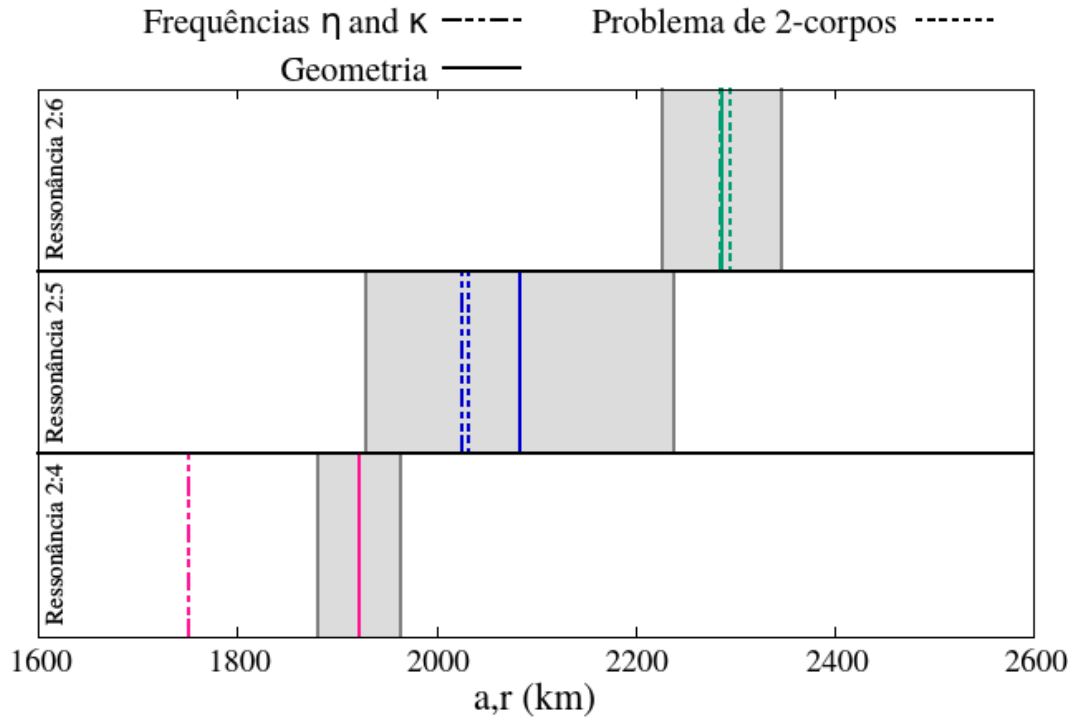
(c) Órbitas periódicas da ressonância 2:6 para valores de $0.8200 \leq C_j \leq 0.8277$, indicados pelas cores.



(d) Órbitas periódicas da ressonância 4:7 do sistema Haumea^e para valores de $0.25536 \leq C_j \leq 0.25676$, indicados pelas cores.

fonte: Produção da própria autora.

Figura 37 – Diagrama da comparação da localização dos semieixos das ressonâncias 2:4, 2:5 e 2:6, calculados por três métodos distintos: problema de dois corpos, frequências epicíclicas (η e κ) e geometria da órbita. Os tipos de tracejados indicam qual método usado. As cores rosa, azul e verde estão relacionadas as ressonâncias e as regiões cinzas indicam a variação radial da órbita periódica menos excêntrica de cada ressonância considerada.



fonte: Produção da própria autora.

Como explorado no trabalho de Ribeiro et al. (2021), existe uma dificuldade em descrever em termos de elementos orbitais as trajetórias em torno de corpos prolatos. O diagrama da Figura 37 evidencia essa dificuldade. Na faixa da ressonância 2:4 a localização do semieixo ressonante calculado usando o problema de dois corpos (linha pontilhada rosa), que considera o corpo central esférico, está fora da largura radial da órbita e distante cerca de 133 km do r_{min} dessa órbita. O mesmo ocorre com o semieixo ressonante obtido por meio das frequências epicíclicas (linha ponto-traço rosa), que considera apenas a perturbação do achatamento do corpo. Na Figura 37, as linhas que indicam a localização da ressonância 2 : 4 usando os dois métodos citados, estão sobrepostas. Voltando à Figura 36a, nota-se que o semieixo ressonante 2:4 obtido pelas frequências epicíclicas fica fora da região da órbita com maior amplitude de variação radial (linha amarela). Os dois métodos não levam em conta a perturbação devido a elipticidade do corpo central. Por estarem mais distantes do corpo primário, as órbitas na ressonância 2:5 são menos afetadas pelo efeito da elipticidade do corpo, quando comparada com as órbitas na ressonância 2:4. Por este motivo, a diferença entre o semieixo ressonante calculado pelos dois métodos mencionados estão mais próximos do centro da faixa radial da órbita. Não obstante, essa diferença, em torno de 69 km, ainda é considerável. Para a órbita ressonante 2:6 a diferença não atinge 2 km. Dado o fato dos modelos teóricos

não serem precisos para determinar os semieixos das ressonâncias que estão mais próximas do corpo central, usar a geometria da órbita torna-se uma alternativa. As linhas tracejadas no diagrama da Figura 37 indicam o semieixo de cada uma das ressonâncias fazendo uso da geometria da órbita de menor amplitude radial (linhas cheias cinza). Na seção a seguir as regiões estáveis e instáveis ao redor de corpos prolatos são identificadas por meio deste método.

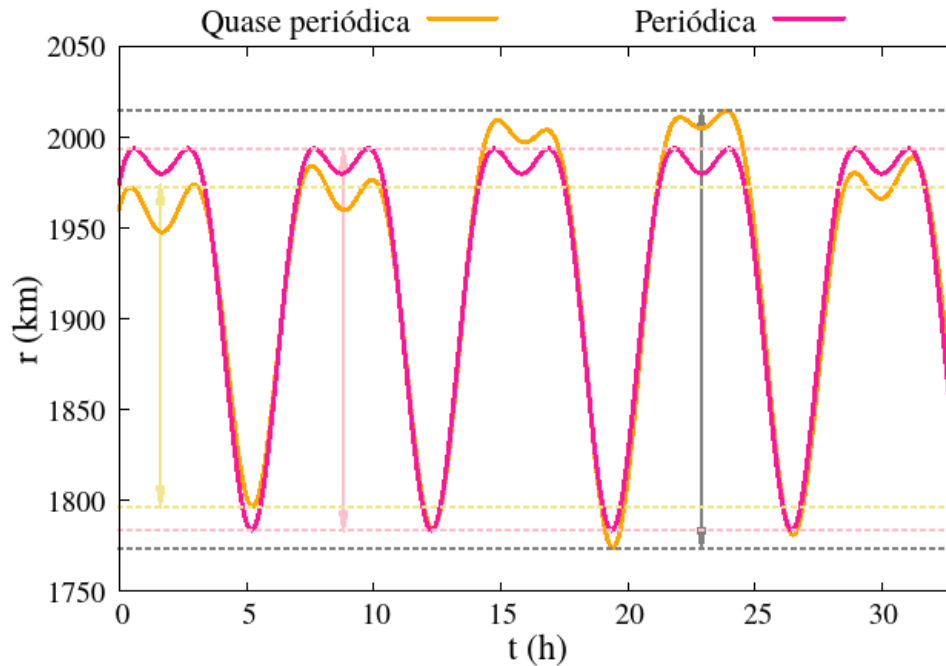
3.5 LARGURA DAS RESSONÂNCIAS

Definido o método que melhor se adéqua ao cálculo do semieixo ressonante, estendemos essa aplicação para determinar a largura das ressonâncias e os limites da região estável e instável em torno de corpos com elipticidade. A Figura 38 mostra como é feita a determinação da largura da ressonância para um determinado valor de C_j . Na Figura 38, tem-se a evolução temporal da variação radial das órbitas periódica (linha rosa) e quase-periódica (linha amarela) associada à ressonância 2:4. A órbita quase-periódica escolhida é sempre aquela da maior ilha de estabilidade encontrada na superfície de seção de Poincaré, pois assim, garante-se a demarcação da largura máxima da ressonância. Com a órbita periódica determina-se o centro da ressonância. Com a órbita quase-periódica determina-se os limites da largura da ressonância. Para determinar o limite inferior utiliza-se novamente a equação $a = (r_{min} + r_{max})/2$, onde os valores dos raios máximos e mínimos são aqueles indicados pelas linhas tracejadas e setas amarelas, que é a menor diferença da variação radial. Para o limite superior da largura, usa-se os valores de raio da maior variação radial, indicados pelas linhas tracejadas e setas cinzas. Esse processo é feito para todas as órbitas das ressonâncias 4:7, 2:4, 2:5, 2:6 e para as órbitas da família de primeiro tipo. Além de calcular o semieixo maior devido a geometria, também é calculado suas respectivas excentricidades pela equação $e = 1 - r_{min}/a$. Com os dados, é possível construir o mapa das regiões instáveis e estáveis no espaço $a - e$. Esse processo foi feito para os sete sistemas abordados neste trabalho.

A Figura 39 mostra o mapeamento da região em torno dos sistemas Haumea, Haumea^a, Haumea^b e Haumea^c, respectivamente. Começando pelo sistema Haumea (ver Figura 39a) por se tratar de um corpo bastante alongado a região de estabilidade devido a família de órbitas periódicas de primeiro tipo (região branca limitada pelas linhas vermelhas), é bastante afetada pela região instável (em cinza). Esse fenômeno também pode ser notado analisando as superfícies de seções de Poincaré, Figura 25, com a presença de regiões de caos, indicados pelos pontos vermelhos que preenchem de forma aleatória os espaços. As regiões rosa, azul e verde correspondem as larguras das ressonâncias conforme informado na legenda. Dentre as três, a maior em extensão de semieixo maior e excentricidade é a 2:6. Em decorrência da proximidade com o corpo central, a largura da ressonância 2:4 é consideravelmente pequena. Como visto nas superfícies de seção de Poincaré, esta ressonância é envolta por uma grande região de caos. Observa-se que, para baixas excentricidades, $e < 0.018$, não há regiões de estabilidade associadas a nenhuma das três ressonância consideradas. Entretanto, as órbitas periódicas de primeiro tipo, representadas pela linha vermelha inferior, permanecem sempre com excentricidade abaixo de 0.02.

Observando os mapas dos sistemas Haumea^a e Haumea^b (ver figuras Figura 39b e Figura 39c) nota-

Figura 38 – Evolução temporal da variação radial das órbitas periódica (em rosa) e quase periódica (em amarelo). A órbita quase periódica se refere a maior ilha associada a ressonância 2:4 para a constante de Jacobi $C_j = 0.7912 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$. As linhas tracejadas e setas de cores amarela e cinza indicam os valores máximos e mínimos da distância radial usados para calcular os limites de semieixo maior e excentricidade das órbitas quase periódicas, enquanto que as linhas tracejadas e setas de cor rosa apontam para os valores máximos e mínimos da distância radial considerados para calcular o centro da ressonância.

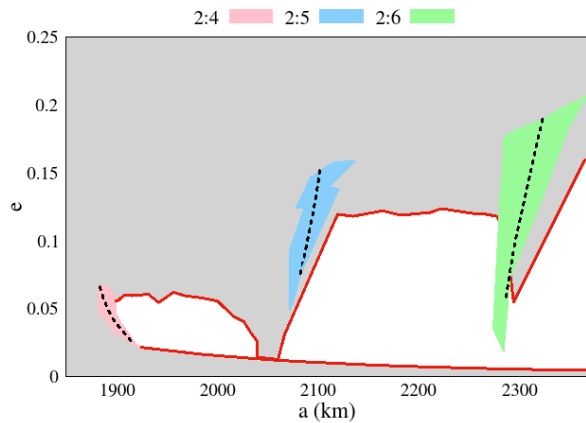


fonte: Produção da própria autora.

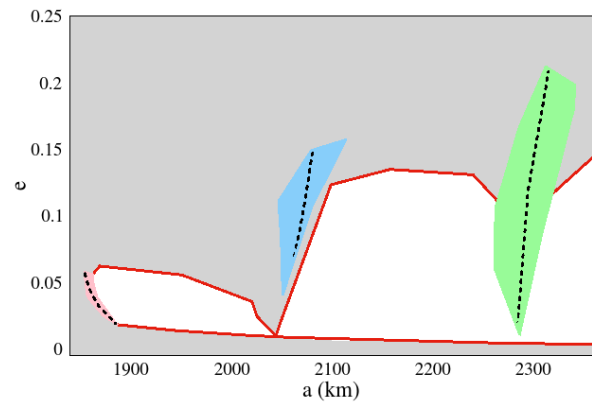
se que a região estável, devido às órbitas periódicas de primeiro tipo, fica maior à medida em que se diminui a elipticidade do corpo. Além disso, a excentricidade das órbitas periódicas de primeiro tipo aproximam-se de zero. A Figura 39d mostra o mapeamento das regiões em torno do sistema Haumea^c, que possui o menor coeficiente de elipticidade dos sistemas considerados neste trabalho. Para este caso, o coeficiente C_{22} foi minimizado para 0.003, que é o menor valor suficiente para gerar estruturas mais complexas, envolvendo ressonâncias entre a rotação de Haumea e o movimento orbital das partículas. Com a perturbação da elipticidade do corpo reduzida, a região estável torna-se maior e a linha superior vermelha tem um movimento suave de crescimento, diferente do que é mostrado na Figura 39a, onde tem-se quedas acentuadas na excentricidade das órbitas quase-periódicas de primeiro tipo. A linha inferior vermelha, que está relacionada às órbitas periódicas de primeiro tipo, mostra que a excentricidade é aproximadamente nula. Quanto às larguras das ressonâncias, para o caso da 2:4, houve redução considerável em seu tamanho e as ressonâncias 2:5 e 2:6 ficaram menos assimétricas em relação aos seus respectivos centros (linhas tracejadas), consequências provocadas pela atenuação da elipticidade do corpo central.

A Figura 40 mostra os mapas para os sistemas em que apenas o período de rotação foi alterado em

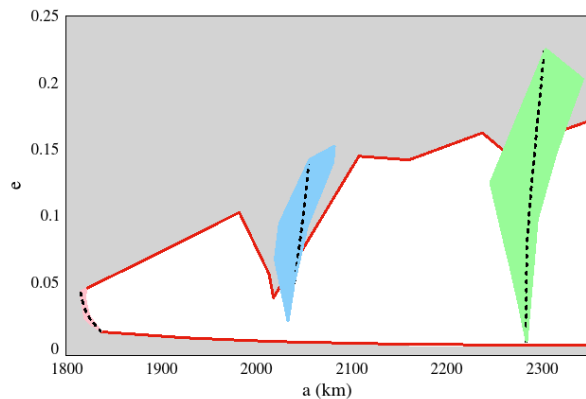
Figura 39 – Mapas das regiões estáveis e instáveis no espaço $a - e$ dos sistema (a) Haumea, (b) Huamea^a, (c) Huamea^b e (d) Huamea^c, obtidos a partir das superfícies de seção de Poincaré. As partículas com semieixo maior e excentricidade dentro da região cinza colidem com o corpo central ou são ejetadas. Nas demais regiões, as partículas permanecem estáveis por mais de 10000 órbitas. As regiões rosa, azul e verde estão relacionadas às ressonâncias 2:4, 2:5 e 2:6, respectivamente. As linhas tracejadas em preto indicam os centros de cada ressonâncias determinados pela geometria das órbitas ressonantes. A linha vermelha inferior corresponde ao semieixo maior e excentricidade das órbitas periódicas de primeiro tipo e a linha vermelha superior às órbitas quase periódicas.



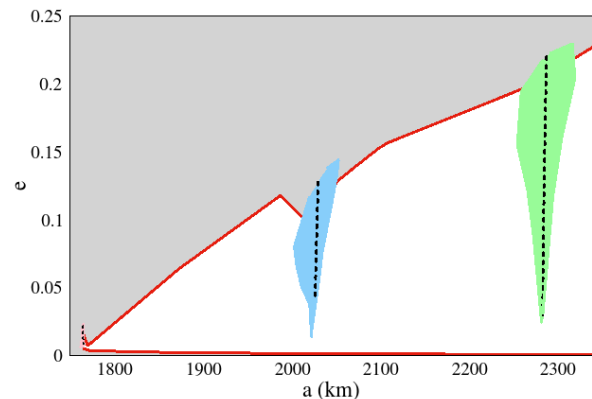
(a)



(b)



(c)



(d)

fonte: Produção da própria autora.

relação aos dados físicos de Haumea. De modo geral, nos dois casos, as regiões de estabilidade devido às ressonâncias ficaram mais largas em semieixo maior e cobrem um intervalo mais extenso de excentricidade. Isso ocorre pois a rotação é mais lenta, o que deixa as ressonâncias consideradas mais afastadas do corpo central, minimizando as colisões e ejeções. No sistema Haumea^e, ver Figura 40b, além do período de rotação mais lento permitir o surgimento da ressonância 4:7, região amarela, nota-se a segmentação da região de estabilidade devido às órbitas periódicas de primeiro tipo. Essa segmentação é ocasionada pelo caos da separatriz da ressonância 2:4. Diferentemente dos demais casos, em Haumea^e as órbitas periódicas de primeiro tipo também apresentam excentricidades mais elevadas, iniciando em $e \approx 0.1$. Na região de estabilidade da ressonância 2:6 na Figura 40b observa-se uma curvatura no semieixo ressonante, linha tracejada preta, ocasionada pela bifurcação da ressonância.

Mudando de sistema novamente, a Figura 41 mostra o mapeamento da região em torno de Chariklo. Este centauro é consideravelmente menos alongado e tem rotação mais lenta, quando comparado com Haumea. Consequentemente, a região estável (em branco) é maior e sem quedas abruptas em excentricidade na linha vermelha superior, associada às órbitas quase-periódicas de primeiro tipo. A largura da ressonância 2:4 é mais estreita em relação às demais. As órbitas associadas à ressonância 2:6 são mais excêntricas, com variação entre $0.05 < e < 0.29$.

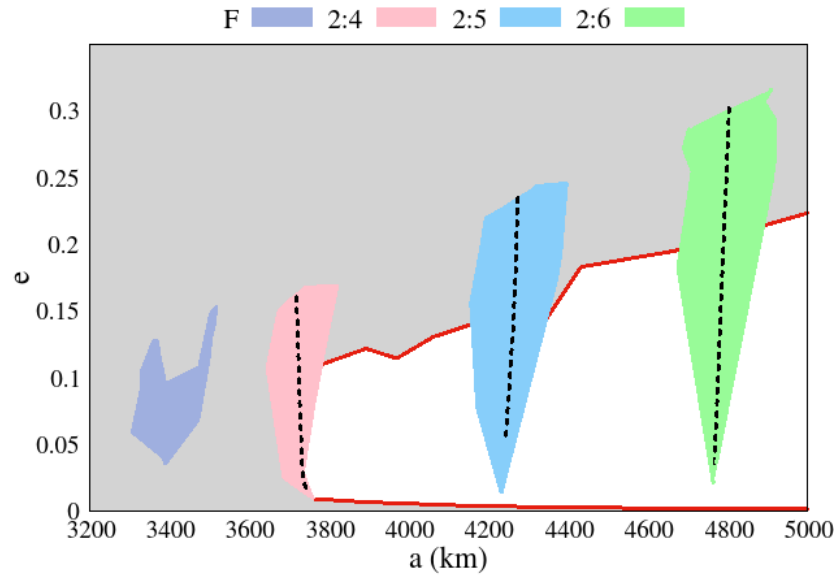
Os mapas apresentados nessa seção mostram o impacto da elipticidade e spin do corpo central nas regiões estáveis, instáveis e larguras das ressonâncias. É comum a construção desses mapas por meio de modelos teóricos no problema circular restrito de três corpos, entretanto, não foi possível usar essa técnica nos sistemas estudados neste trabalho, devido a dificuldade em descrever em elementos orbitais de trajetórias em torno de corpos prolatos. Esse desacordo entre modelo analítico e resultados numéricos foi apontado no trabalho de Olsen (2006), que encontrou discrepâncias na localização de ressonâncias próximas ao corpo central, ver figuras 1, 3, 4 e 5 do trabalho citado.

3.6 APLICAÇÕES: SONDAS, ANÉIS E SATÉLITES

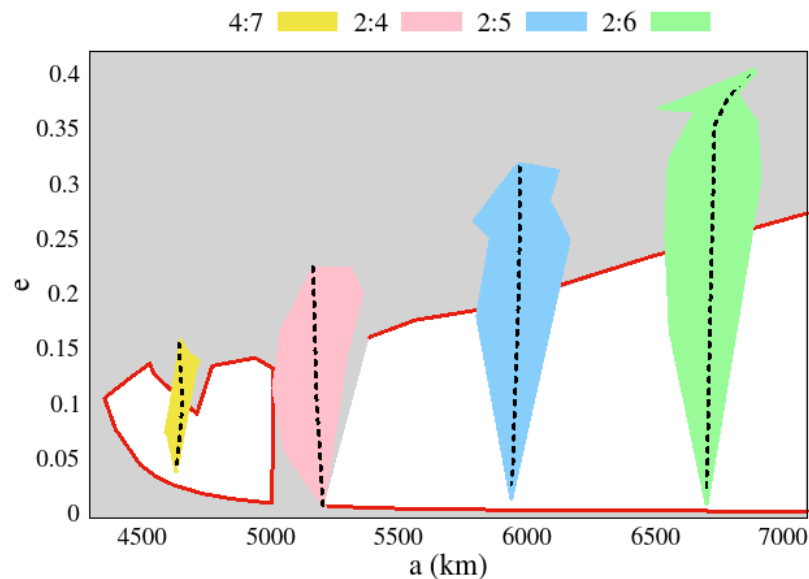
No presente estudo, identificamos regiões caóticas e de estabilidade ao redor de corpos prolatos. As zonas de estabilidade estão associadas às órbitas periódicas e quase periódicas, algumas delas são ressonantes e outras, não. Essas análises podem ser usadas em diversas aplicações como, por exemplo, missões espaciais, satélites naturais ou anéis de partículas. A seguir, apresentamos algumas dessas aplicações.

As *órbitas periódicas*, ressonantes ou não ressonantes, apresentam formato de trajetórias características, que se repetem ao longo do tempo como, por exemplo, aquelas mostradas nas figuras 14 a 17. A identificação da localização das órbitas periódicas pode ser vantajosa para missões espaciais, visto que ao colocar uma sonda nessa trajetória é possível prever qual será o seu comportamento ao longo do tempo e, além disso, a sonda estará inserida em uma zona estável, pois ao redor da órbita periódica há uma região de órbitas quase periódicas, como mostrado nas figuras Figura 22, Figura 25, Figura 27, Figura 28 e Figura 31.

Figura 40 – Mapas das regiões estáveis e instáveis no espaço $a - e$ dos sistema (a) Huamea^d e (b) Huamea^e, obtidos a partir das superfícies de seção de Poincaré. As partículas com semieixo maior e excentricidade dentro da região cinza colidem com o corpo central ou são ejetadas. Nas demais regiões, as partículas permanecem estáveis por mais de 10000 órbitas. As regiões amarela, rosa, azul e verde estão relacionadas às ressonâncias 4:7, 2:4, 2:5 e 2:6, respectivamente. A região roxa no plot (a) refere-se à família F1 e F2. As linhas tracejadas em preto indicam os centros de cada ressonância determinados pela geometria das órbitas ressonantes. A linha vermelha inferior corresponde ao semieixo maior e excentricidade das órbitas periódicas de primeiro tipo e a linha vermelha superior às órbitas quase periódicas.



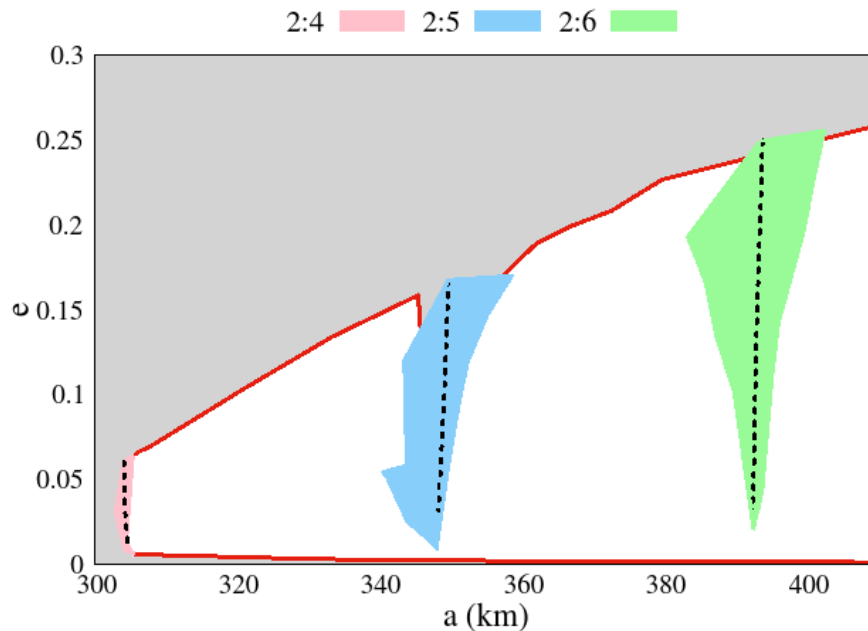
(a)



(b)

fonte: Produção da própria autora.

Figura 41 – Mapa das regiões estáveis e instáveis no espaço $a - e$ do sistema Chariklo, obtido a partir das superfícies de seção de Poincaré. As partículas com semieixo maior e excentricidade dentro da região cinza colidem com o corpo central ou são ejetadas. Nas demais regiões, as partículas permanecem estáveis por mais de 10000 órbitas. As regiões rosa, azul e verde estão relacionadas as ressonâncias 2:4, 2:5 e 2:6, respectivamente. As linhas tracejadas em preto indicam os centros de cada ressonância determinados através da geometria das órbitas ressonantes. A linha vermelha inferior corresponde ao semieixo maior e excentricidade das órbitas periódicas de primeiro tipo e a linha vermelha superior as órbitas quase periódicas.



fonte: Produção da própria autora.

Nas *regiões estáveis*, vinculadas às ressonâncias ou a outras órbitas periódicas, podem ser encontrados anéis de partículas. No momento em que o objeto se formou, é comum restar material remanescente dessa formação, que pode acumular-se nas regiões estáveis ao redor do objeto central e ser removido das regiões instáveis. O mesmo vale para satélites que se fragmentaram por algum motivo, seu material também permanecerá nessas zonas de estabilidade. Por outro lado, essas regiões precisam de cautela em missões espaciais, sendo primeiramente necessário certificar se não estão ocupadas por material natural. Pode-se encontrar também satélites naturais nas zonas de estabilidade. Um caso particular é a migração de satélites por efeito de maré, que podem ser capturados pelas regiões de ressonâncias mais fortes, interrompendo o processo de migração.

As *regiões caóticas* também são interessantes para sondas, pois é uma zona desprovida de material natural. Com o tempo, anéis ou luas que se formaram na região foram sendo removidos devido à instabilidade. Nos sistemas estudados neste trabalho, encontramos uma extensa região de caos como, por exemplo, a região interna à ressonância 2:4, como mostrado nos mapas das figuras Figura 39, Figura 40 e Figura 41. Essa é uma área próxima ao corpo que se torna interessante para missões que buscam estudar a superfície desses corpos. Claramente, pelo fato de serem zonas instáveis, é necessário utilizar algum

mecanismo de controle para guiar a sonda pelo tempo estipulado pela missão.

3.7 COMENTÁRIOS FINAIS

Neste trabalho, buscamos apresentar uma análise sobre a dinâmica da região em torno de corpos prolatos. Para isso, utilizamos a técnica de superfície de seção de Poincaré, que forneceu as informações necessárias para a identificação de regiões estáveis e instáveis no espaço de fase dos sete sistemas considerados. Os corpos centrais foram modelados por um potencial gravitacional elipsoidal de segunda ordem e grau. Dentre esses sistemas, alteramos o período de rotação, elipticidade e massa do primário, a fim de identificar como a região dinâmica em torno desses corpos são afetadas por esses parâmetros físicos. Nossos resultados são reunidos a seguir:

- Nas superfícies de seções de Poincaré, identifica-se as ressonâncias duplas, que foram apontadas nos trabalhos de Winter, Borderes-Motta e Ribeiro (2019) e Sicardy (2020), além disso, no sistema Haumea^e identificamos a bifurcação da ressonância 2:6. Analisando as superfícies de seções de Poincaré, verificamos que tanto a elipticidade do corpo central quanto o spin afetam a localização das ressonâncias.
- Para medir a extensão das regiões estáveis e instáveis, delimitadas pelas órbitas periódicas e quase-periódicas, utilizamos o método discutido no trabalho de Ribeiro et al. (2021), visto que utilizar as frequências epíclicas para calcular o semieixo maior de órbitas em torno de corpos prolatos induz à inconsistências com os resultados numéricos para as regiões próximas do corpo central. Tais desacordos foram também identificados no trabalho de Olsen (2006), que comparou simulações numéricas com um método analítico (elementos médios) para a determinação da largura de ressonâncias do tipo spin-órbita ao redor de corpos prolatos.
- Definido o método para calcular o semieixo maior e excentricidade das órbitas, construímos mapas de estabilidade no espaço $a - e$. Com os mapas, identificamos que as larguras das ressonâncias não são simétricas em relação ao centro da ressonância, definido pelo semieixo ressonante.
- Foi possível identificar uma grande região de estabilidade, em semieixo maior e excentricidade, devido às órbitas periódicas de primeiro tipo. As órbitas periódicas de primeiro tipo, em geral, possuem excentricidade quase nula e estão presentes em um grande intervalo de semieixo maior para todos os sistemas estudados, enquanto que as órbitas ressonantes e as quase-periódicas apresentam excentricidades elevadas.

Os resultados apresentados neste capítulo fazem parte do artigo intitulado *Dynamics in Non-Spherical Symmetric Bodies: II. The case of a prolate body* aceito para publicação na revista *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. Uma cópia do artigo pode ser encontrada no anexo D.

4 FAMÍLIAS DE ÓRBITAS PERIÓDICAS SIMÉTRICAS

4.1 INTRODUÇÃO

Como visto nos capítulos anteriores, as órbitas periódicas desempenham papel fundamental no estudo de sistemas dinâmicos, visto que demarcam grandes regiões de estabilidade, ressonantes ou não. Poincaré (1892) mostrou que essas trajetórias formam o "esqueleto" de qualquer sistema dinâmico. As órbitas periódicas aparecem em famílias, as quais são representadas por uma curva suave contínua no espaço das condições iniciais. Diferentes tipos de órbitas periódicas, sua classificação e evolução têm sido extensivamente estudadas há décadas. O avanço da astronáutica na segunda metade do século passado, impulsionou os estudos que buscavam as melhores trajetórias para os satélites e sondas lançadas no espaço. A exemplo, Broucke (1968) explorou a dinâmica ao redor do sistema Terra-Lua, identificando e classificando diversas famílias de órbitas periódicas. Nesse trabalho, o autor desenvolveu o potencial gravitacional do sistema, considerando tanto a Terra como a Lua como corpos esféricos. Ainda no campo do problema restrito de três corpos, Hénon (2003) também fez grande contribuição, ampliando a classificação dessas trajetórias. Na busca por modelos mais realistas, estudos de órbitas periódicas foram feitos no final do século passado, onde um corpo oblato foi considerado o primário mais massivo do problema restrito de três corpos (BHATNAGAR; CHAWLA, 1977; SHARMA, 1981). Elipe, Arribas e Kalvouridis (2007) consideraram um anel com N corpos de mesma massa ao redor de um corpo central oblato e, a partir desses sistemas, encontram famílias de órbitas periódicas e analisaram as órbitas estudando sua evolução e estabilidade ao longo da família para vários valores do parâmetro introduzido em suas simulações.

No campo do estudo da dinâmica ao redor de asteroides, outros trabalhos foram feitos, como o de Scheeres (1994) que encontrou famílias de órbitas periódicas planares prógradas e retrógradas ao redor de elipsoides triaxiais com rotação e densidade constantes. Os objetos alvos desse estudo foram os asteroides Vesta, Eros e Ida. O autor ainda classifica os asteroides em tipo 1 e tipo 2, conforme a estabilidade das órbitas síncronas ao redor desses objetos. O tipo 1 tem duas órbitas síncronas estáveis e duas instáveis, característica semelhante ao que ocorre com planetas. O tipo 2 tem apenas órbitas síncronas instáveis, comuns em asteroides com superfícies mais irregulares, menos densos ou que giram mais rápido. Scheeres et al. (1996) fornecem uma visão detalhada sobre a dinâmica orbital ao redor do asteroide 4769 Castalia e desenvolvem ferramentas de análise geral que descrevem a dinâmica de forma significativa. Além disso, os autores calculam as superfícies de velocidade zero do asteroide, identificam famílias de órbitas periódicas e determinam sua estabilidade, obtendo informações gerais sobre o movimento de partículas em vários regimes sobre o asteroide. Hu e Scheeres (2008), também usando o asteroide Castália como objeto de estudo, analisam os quatro pontos de equilíbrio no campo gravitacional de um elipsoide triaxial rotativo. O trabalho aponta que dois destes pontos de equilíbrio são sempre instáveis e os outros dois podem ser estáveis ou instáveis, dependendo da taxa de rotação do asteroide, do achatamento e elipticidade do corpo

central e da sua massa. Os autores mostram que a estabilidade desses pontos de equilíbrio tem estreita relação com a existência e estabilidade de suas órbitas periódicas próximas. Além disso, encontram cinco famílias de órbitas periódicas equatoriais (ressonantes e de primeiro tipo).

Hou, Xin e Feng (2018) estudam órbitas ressonantes em torno de um asteroide com rotação uniforme e identificam que três famílias de órbitas periódicas são fundamentais na organização das famílias de órbitas ressonantes. Para aplicar a metodologia desenvolvida por eles, usam o asteroide Eros como um estudo de caso, modelando-o com um potencial gravitacional com termos não esféricos de até quarta ordem. Nesse sistema, encontram órbitas extraordinárias como, por exemplo, órbitas congeladas estáveis com argumento de perigeu librando em torno de valores diferentes de 0° , 90° , 180° , 270° .

Neste capítulo, são estudadas famílias de órbitas periódicas simétricas considerando apenas forças gravitacionais. Para isso, o corpo central é modelado como um elipsoide prolato. Apesar de muitos trabalhos apresentarem análises sobre órbitas periódicas em torno de corpos elipsoidais, o presente estudo difere dos demais, pois apresenta resultados para corpos com massa e não-esfericidade mais acentuadas como, por exemplo, o planeta anão Haumea. Como apontado por Hu e Scheeres (2008) a região dinâmica ao redor de corpos elipsoidais são dependentes dos parâmetros relacionados à forma do corpo (achatamento e elipticidade), à massa, tamanho e taxa de rotação do asteroide. Para encontrar órbitas periódicas simétricas, foi adotado o método de busca em grade Markellos, Black e Moran (1974). Além disso, as famílias foram identificadas e determinadas suas respectivas evoluções.

Na seção a seguir, as equações do movimento e as adimensionalizações necessárias para o estudo são descritas. Em 4.3, o método e softwares utilizados são detalhados. Na seção 4.4 apresentamos e discutimos os resultados obtidos e, por fim, na seção 4.5 fazemos nossas considerações finais sobre o estudo.

4.2 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

As equações que regem o movimento das trajetórias no plano Oxy no sistema girante são escritas como (HU; SCHEERES, 2004):

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial x} \quad (1)$$

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \quad (2)$$

onde ω é a velocidade rotacional do corpo central e U é o potencial gravitacional efetivo de um corpo prolato rotacionando uniformemente. Esse potencial gravitacional pode ser escrito em coordenadas cartesianas como (HU; SCHEERES, 2008):

$$U = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + \frac{\mu}{r} - \frac{\mu C_{20}}{2r^3} + \frac{3\mu C_{22}(x^2 - y^2)}{r^5} \quad (3)$$

onde $\mu = GM$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ é a distância radial da partícula ao centro de massa do sistema e, C_{20} e C_{22} são os coeficientes de achatamento e elipticidade do corpo central definidos como (BALMINO, 1994):

$$C_{20} = \frac{2C^2 - A^2 - B^2}{10} \quad (4)$$

$$C_{22} = \frac{A^2 - B^2}{20} \quad (5)$$

onde $A > B > C$ são os semieixos físicos do corpo central. Note que os coeficientes de achatamento e elipticidade não são adimensionais pois, nas equações 4 e 5, não há a divisão pelo quadrado do raio equivalente do corpo central. A escolha por escrever esses coeficientes dessa forma é para que não seja necessário incluir o raio equivalente na equação do potencial gravitacional, equação 3.

As equações 1 e 2 possuem quatro parâmetros independentes ($\mu, \omega, C_{20}, C_{22}$). Ao adimensionalizar o potencial gravitacional, podemos reduzir para dois parâmetros independentes ($\bar{C}_{20}, \bar{C}_{22}$). Para que isso seja possível, introduzimos uma escala de comprimento (HU; SCHEERES, 2004):

$$r_s = \left(\frac{\mu}{\omega^2} \right)^{1/3}, \quad (6)$$

que é o raio orbital síncrono do caso Kepleriano, ou seja, é a distância radial de uma órbita que tem seu período igual ao tempo de rotação do corpo central, onde o corpo central na equação 6 é considerado como um ponto de massa. A velocidade de rotação é calculada como $\omega = 2\pi/T_{rot}$, onde T_{rot} é o período de rotação do primário. Deste modo, temos as seguintes relações para a adimensionalização:

$$\bar{r} = r/r_s, \quad \bar{x} = x/r_s, \quad \bar{y} = y/r_s, \quad (7)$$

$$\dot{\bar{x}} = \dot{x}/(\omega r_s), \quad \dot{\bar{y}} = \dot{y}/(\omega r_s), \quad (8)$$

$$\bar{C}_{20} = C_{20}/r_s^2, \quad \bar{C}_{22} = C_{22}/r_s^2. \quad (9)$$

Além disso, definimos que $\mu = 1$ e $\omega = 1$ no potencial gravitacional. Reescrevendo a equação 3 de forma adimensionalizada e, por praticidade, descartando a notação de barra em cima dos termos, temos que:

$$U = \frac{r^2}{2} + \frac{1}{r} - \frac{C_{20}}{2r^3} + \frac{3C_{22}(x^2 - y^2)}{r^5} \quad (10)$$

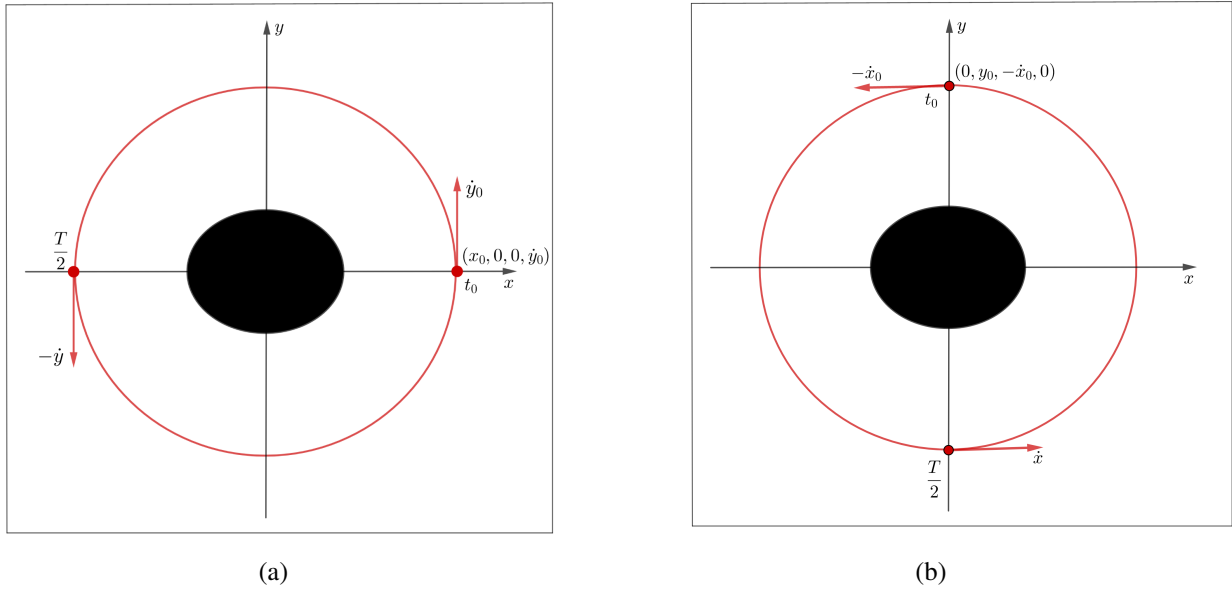
Com o novo potencial, as equações do movimento podem ser escritas como:

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial x} \quad (11)$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \quad (12)$$

e as derivadas parciais do potencial gravitacional passam a ser:

Figura 42 – Diagramas esquemáticos de órbitas periódicas e simétricas em relação ao eixos Ox e Oy



fonte: Produção da própria autora.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x - \frac{x}{r^3} - \frac{C_{20}x}{r^5} + \frac{5C_{20}x}{2r^5} + \frac{6C_{22}x}{r^5} - \frac{15C_{22}x(x^2 - y^2)}{r^7} \quad (13)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = y - \frac{y}{r^3} - \frac{C_{20}y}{r^5} + \frac{5C_{20}y}{2r^5} + \frac{6C_{22}y}{r^5} - \frac{15C_{22}y(x^2 - y^2)}{r^7} \quad (14)$$

Com a adimensionalização do potencial gravitacional, concentramos todos os parâmetros físicos do objeto central nos novos coeficientes $\bar{C}_{20}$ e $\bar{C}_{22}$ e, assim, temos a vantagem de poder generalizar para diversos corpos centrais os resultados das simulações numéricas que apresentaremos nesse trabalho, visto que são inúmeras as combinações possíveis de massa, rotação e semieixos físicos que geram os mesmos valores de $\bar{C}_{20}$ e $\bar{C}_{22}$.

Na seção a seguir, abordamos o método utilizado para encontrar as famílias de órbitas periódicas simétricas.

4.3 MÉTODO

Uma vez encontrada uma órbita periódica simétrica, existem diversos métodos para encontrar sua família. Uma das abordagens possíveis é utilizando a técnica de superfície de seção de Poincaré, gerando diversos mapas do espaço de fase a fim de seguir a evolução da família e determinar o intervalo de constantes de Jacobi em que essa família existe. Entretanto, o emprego dessa técnica para esse fim torna-se pouco eficiente, devido ao grande volume de seções de Poincaré que são necessárias para conseguir fazer o rastreamento da família. Outro método usado é por continuação numérica baseada em um procedimento de predição e correção (DEPRIT; HENRARD, 1966; LARA; DEPRIT; ELIPE, 1995) ou usando o método de

pesquisa em grade (MARKELLOS; BLACK; MORAN, 1974), o qual usaremos neste trabalho. A escolha por esse método se deu pelo fato de ser simples e eficiente para achar as condições iniciais de órbitas periódicas simétricas e suas respectivas famílias. O procedimento consiste em inicialmente considerar que da integral de Jacobi temos que $\dot{y}_0^2 = 2U - C_j$ e, assim, construímos uma grade regular de condições iniciais no plano (x_0, C_j) . Dessa grade, escolhemos dois pontos (x_i, C_{jk}) e (x_{i+1}, C_{jk}) , com $i, k \in \mathbb{N}$ e integramos numericamente para essas duas condições iniciais as equações do movimento (equações 11 e 12) até que as trajetórias cruzem o eixo Ox no instante $\frac{T}{2}$. Assim, temos:

$$(x_i, 0, 0, \dot{y}_i | C_{jk}; t = 0) \mapsto (x_i, 0, \dot{x}_i, \dot{y}_i | C_{jk}; t = T_i/2)$$

$$(x_{i+1}, 0, 0, \dot{y}_{i+1} | C_{jk}; t = 0) \mapsto (x_{i+1}, 0, \dot{x}_{i+1}, \dot{y}_{i+1} | C_{jk}; t = T_{i+1}/2)$$

Após a integração, é verificado o sinal do produto de $\dot{x}_i(T_i/2) \cdot \dot{x}_{i+1}(T_{i+1}/2)$. Se for negativo, por continuidade, existe um ponto intermediário x entre x_i e x_{i+1} cuja componente da velocidade $\dot{x}(T/2)$ é nula, ou seja, a trajetória intercepta de forma perpendicular o eixo Ox e, portanto, é uma órbita periódica simétrica, como ilustrado na Figura 42. Para encontrar a abscissa x que atende a condição de ortogonalidade da trajetória, usa-se o método de Brent (BRENT, 1971) que alia um processo de localização de raízes combinado a um integrador numérico. Uma vez alcançada a convergência, tem-se um conjunto de condições iniciais que satisfazem as condições de órbitas periódicas simétricas. Caso o produto $\dot{x}_i(T_i/2) \cdot \dot{x}_{i+1}(T_{i+1}/2)$ seja positivo, passa-se para o próximo valor de abscissa e repete-se o processo. Após todos os valores x_i da linha C_{jk} serem verificados, passa-se para o próximo valor C_{jk+1} até que todos os pontos da grade sejam testados. As famílias de órbitas periódicas simétricas aparecem como linhas contínuas no mapa de condições iniciais (x_0, C_j) .

Todo esse processo é realizado usando o programa TIDES (ABAD et al., 2012), *Taylor series Integrator for Differential Equations*, que é um integrador que usa séries de Taylor para resolver equações diferenciais de primeira ordem com alta precisão. O programa é dividido em duas partes:

- MathTIDES: é um pré-processador, escrito em linguagem Mathematica, que auxilia o usuário a escrever o código para integrar uma ODE específica. A partir dele é possível inserir o potencial gravitacional desejado juntamente com os parâmetros de integração. É necessário que o corpo central seja simétrico em relação a algum eixo para que exista órbitas periódicas simétricas.
- LIBTIDES: é a biblioteca usada, disponível em C e fortran.

TIDES é um *software* livre e o *download* dos arquivos para instalação ocorre por meio do *site*: <<https://iuma.unizar.es/es/investigacion/software/TIDES>>. Essa ferramenta computacional tem sido utilizada em diversos tipos de sistemas dinâmicos com o objetivo de estudar a evolução de órbitas periódicas simétricas. Elipe et al. (2021), utilizando o TIDES, exploram a evolução das trajetórias ao redor de um corpo central modelado como um dipolo segmento. Esse tipo de modelagem consiste em

Tabela 5 – Classificação das famílias de órbitas periódicas simétricas

Broucke (1968)	A_1	E_1	BD	F		
Elife et al. (2021)	m	l	k	δ	αb	βa
Novas famílias	D	L	P	T		

fonte: Produção da própria autora.

dois pontos de massa ligados por uma haste também massiva e pode ser utilizada para representar certos tipos de objetos como, por exemplo, o asteroide 216-Kleopatra. Boaventura (2023) estendeu o estudo, acrescentando mais uma massa ao dipolo segmento, passando a ser um tripolo segmento. Além disso, aplicou o modelo para estudar órbitas periódicas simétricas ao redor do asteroide Holiday. Abad et al. (2023) utiliza a mesma ferramenta para estudar órbitas periódicas simétricas no problema restrito de três corpos, aplicando para os sistemas Terra-Lua e Sol-Júpiter. No presente trabalho, usamos o *software* TIDES para investigar órbitas periódicas em torno de elipsoides prolatos. A fim de validar a utilização dessa ferramenta para o potencial gravitacional do elipsoide, reproduzimos parte dos resultados obtidos por Hu e Scheeres (2008) para o asteroide Castália com rotação lenta. A comparação dos resultados pode ser vista no anexo A.

A seguir, os resultados pela busca de famílias de órbitas periódicas simétricas são apresentados (curvas contínuas no mapa de condições iniciais) e o comportamento do sistema em torno dessas soluções é analisado.

4.4 RESULTADOS

Uma vez que o corpo central é simétrico em relação ao eixo Ox e ao eixo Oy , procuramos as famílias de órbitas periódicas simétricas também em relação a esses dois eixos. Após a identificação das famílias no mapa de condições iniciais, fizemos a classificação a partir da comparação das trajetórias características de cada uma delas com as órbitas das famílias encontradas e classificadas nos trabalhos de Broucke (1968) e Elife et al. (2021). Além das famílias que já foram classificadas em trabalhos anteriores, encontramos novas famílias nos sistemas estudados nesse capítulo, a tabela 5 lista os tipos de classificações.

Com a adimensionalização das unidades, condensamos os parâmetros físicos do corpo central nos coeficientes J_2 e C_{22} , como mostra a equação 9. Elaboramos um atlas com as órbitas periódicas simétricas em torno de corpos prolatos. Para isso, consideramos dois conjuntos de valores de J_2 e C_{22} : um para representar corpos menos alongados e com rotação lenta e outro pra representar corpos bem alongados com rotação rápida. Além desses dois casos, também identificamos as famílias de órbitas periódicas simétricas em torno de Haumea e Chariklo. Comparamos os resultados nos dois sistemas e identificamos as mudanças ocorridas nas famílias de órbitas periódicas encontradas.

4.4.1 Famílias de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox

O presente estudo aborda as órbitas periódicas simétricas ao redor de quatro sistemas. A grade de condições iniciais considerada em todos os casos varia entre -3 a 3 no eixo Ox e entre -5 a 5 no eixo C_j . Todos os gráficos no plano xy apresentados nesse capítulo estão no sistema girante. A seguir apresentamos as famílias de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox

4.4.1.1 Caso $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$

São diversas as possíveis combinações de parâmetros físicos do corpo central que resultam nos conjunto de valores de $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$, então, inicialmente, não estabelecemos o tamanho do corpo central e listamos todas as famílias encontradas, inclusive aquelas que podem ter órbitas de colisão de acordo com o tamanho do corpo central.

Primeiramente, começamos identificando as linhas contínuas no mapa de condições iniciais (x_0, C_j) , como mostra a Figura 43a. As áreas cinzas demarcam as regiões proibidas. Para essa combinação de parâmetros físicos, identificamos onze famílias que possuem classificação e outras três que não são conhecidas. A Figura 43b e Figura 43c são ampliações das duas regiões com maior aglomerado de famílias, mostrando com mais detalhes a disposição delas no mapa (x_0, C_j) .

Após a identificação das linhas contínuas no mapa de condições iniciais, fizemos a integração de cada uma das órbitas usando o programa SPO2D¹. Da Figura 44 a Figura 56, são apresentadas as evoluções das famílias identificadas para esse sistema. Todos os gráficos mostrados nesse capítulo estão com medidas adimensionais. Cada figura é composta por dois plots:

- (a) mostra a evolução da família no plano xy por meio da apresentação de três órbitas.
- (b) do lado direito superior está a ampliação da linha contínua do mapa de condições iniciais que corresponde à família. Os demais gráficos mostram, no plano xy , metade de três órbitas pertencentes a família. As setas indicam se a trajetória é prógrada ou retrógrada.

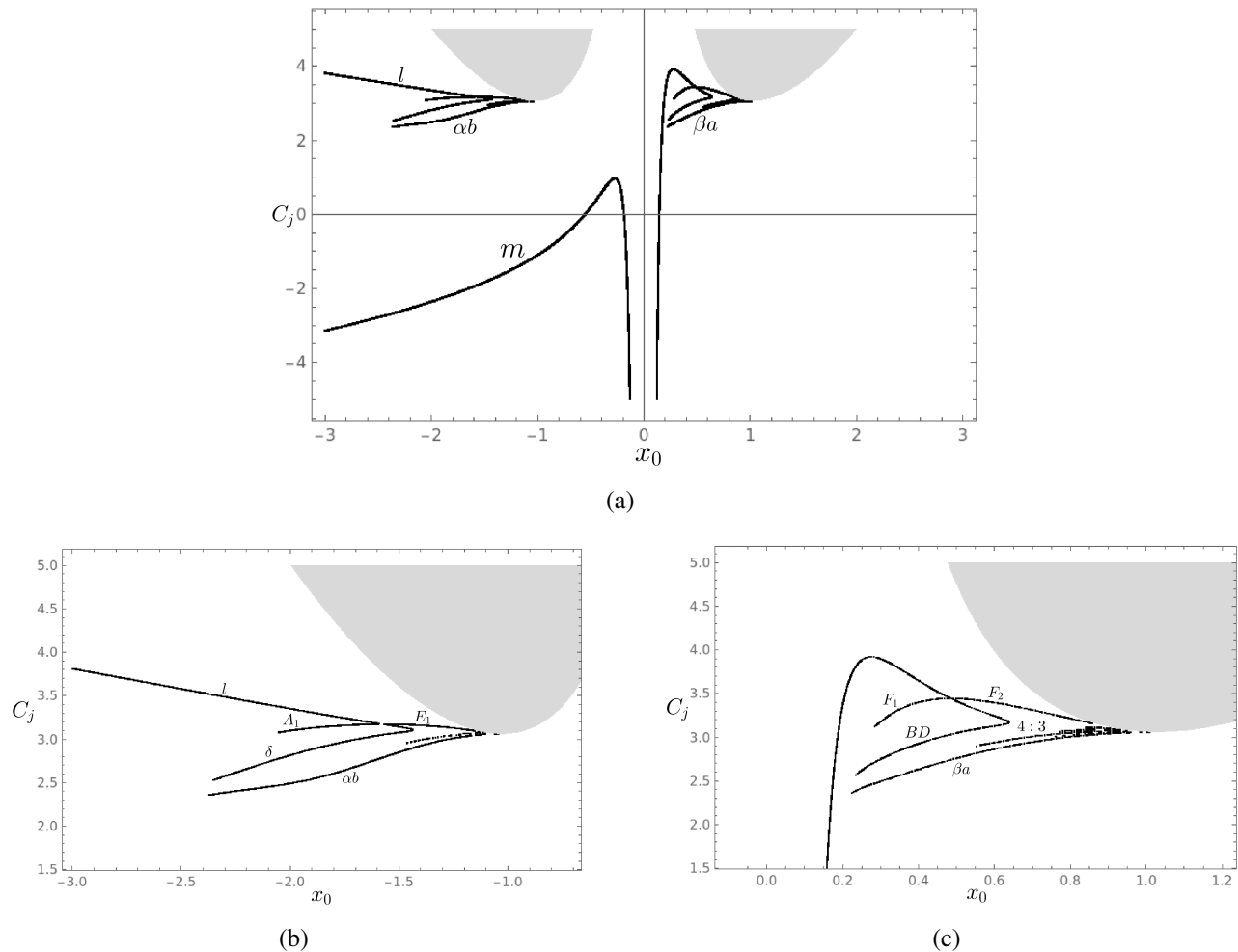
Os pontos pretos nos gráficos do plano xy correspondem aos pontos de equilíbrio que, neste caso, possuem coordenadas: $L_2(1,02849; 0)$, $L_3(-1,02849; 0)$, $L_4(0; 1,01801)$ e $L_5(0; -1,01801)$. As cores azul, vermelho e verde não representam as mesmas órbitas nos gráficos (a) e (b).

Trataremos a seguir de algumas das características das famílias de órbitas periódicas simétricas identificadas.

A Figura 44 refere-se a família m . Nota-se que em toda a existência da família, suas órbitas são simples, quase circulares e retrógradas. Parte das órbitas dessa família envolvem os quatro pontos de equilíbrio e as demais órbitas passam a ser internas, primeiramente, aos pontos L_4 e L_5 e, posteriormente, a todos os pontos. O final da família tende ao centro de massa, com órbitas de colisão com o corpo central.

¹ Abad. Alverto (IUMA, Universidad de Zaragoza), Disponibilizado para: Alessandra F.S. Ferreira (Departamento de Matemática, FEG/UNESP). 2019 Nov.

Figura 43 – Mapa das condições iniciais das famílias de órbitas periódicas simétricas do caso $J_2 = 0.05$ e $C_{22} = 0.002$. Os quadros inferiores são ampliações dos quadrantes próximos às regiões proibidas (em cinza).



fonte: Produção da própria autora.

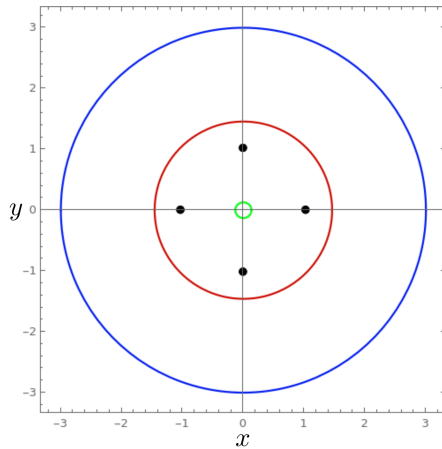
Outra família identificada é a de classificação l , apresentada na Figura 45. Essa família também se caracteriza por possuir órbitas quase circulares e retrógradas, circundando os quatro pontos de equilíbrio. Nessa família, não existem órbitas de colisão com o corpo central. As órbitas dessa família também são simétricas em relação ao eixo Oy .

Tanto a família l como a família m aparecem em todos os sistemas estudados nesse trabalho e ambas são simétricas também em relação ao eixo Oy .

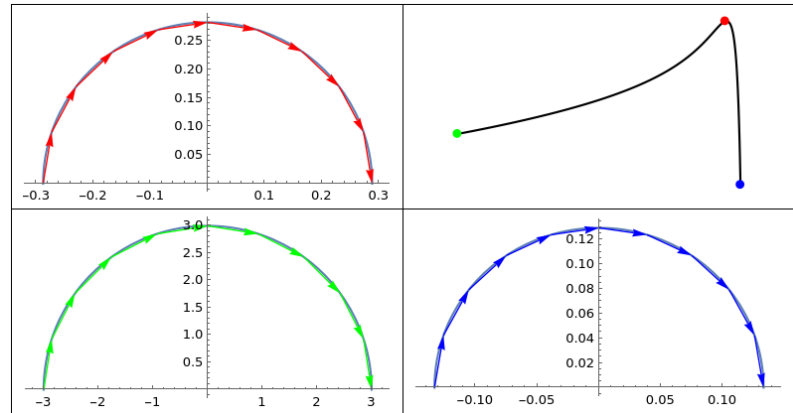
A Figura 46 mostra a evolução das órbitas retrógradas da família A_1 . A primeira órbita possui uma cúspide próxima ao ponto L_2 . Com a evolução das órbitas, essa cúspide se desfaz e a trajetória tende a um formato quase circular. Nessa família não há órbitas de colisão, pois nenhuma das órbitas avançam para a região interna aos pontos de equilíbrio do corpo.

A evolução da família E_1 , que é simétrica à família A_1 , pode ser vista na figura Figura 47. A classificação E_1 segue do trabalho de Broucke (1968), entretanto é necessário fazer uma ressalva: a família

Figura 44 – Evolução da família m de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$.



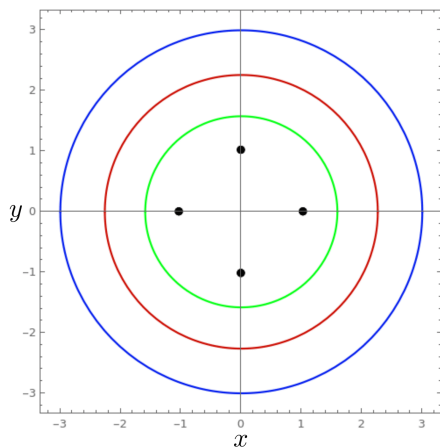
(a) Órbitas no plano xy . Os quatro pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema.



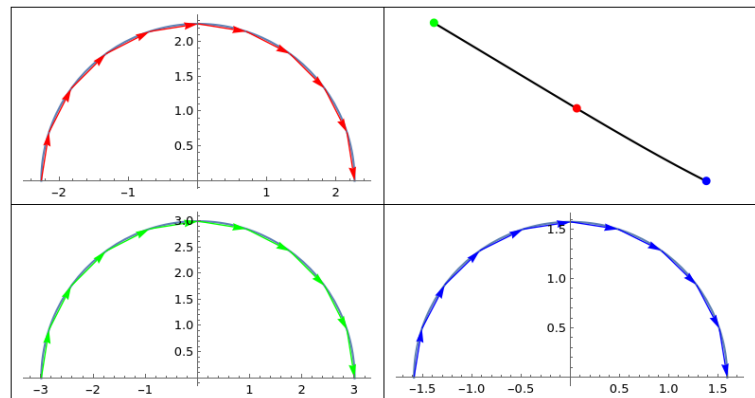
(b) Orientação das órbitas.

fonte: Produção da própria autora.

Figura 45 – Evolução da família l de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$.



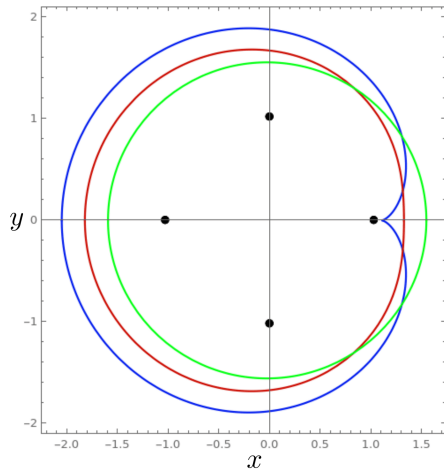
(a) Órbitas no plano xy . Os quatro pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema.



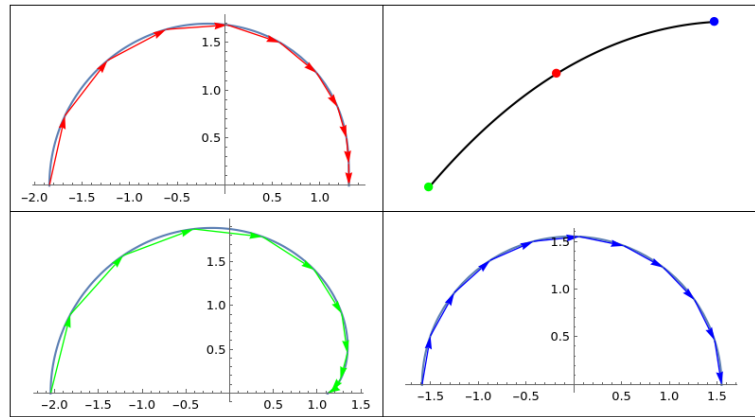
(b) Orientação das órbitas.

fonte: Produção da própria autora.

Figura 46 – Evolução da família A_1 de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$.



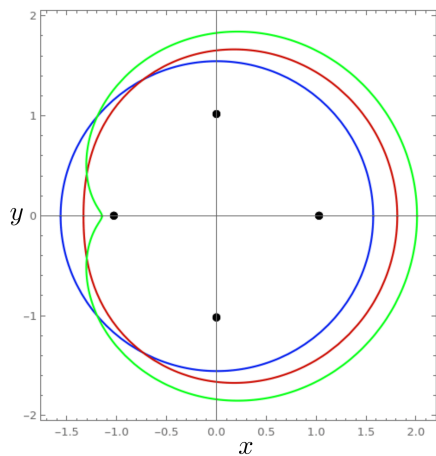
(a) Órbitas no plano xy . Os quatro pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema.



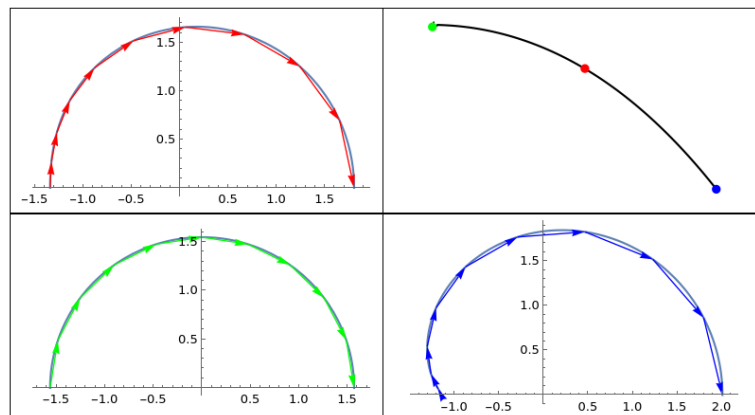
(b) Orientação das órbitas.

fonte: Produção da própria autora.

Figura 47 – Evolução da família E_1 de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$.



(a) Órbitas no plano xy . Os quatro pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema.



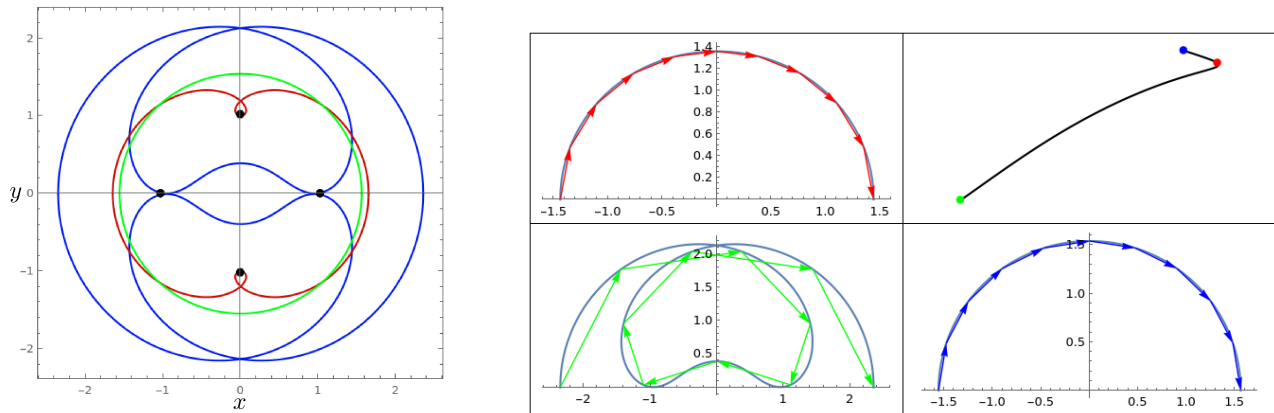
(b) Orientação das órbitas.

fonte: Produção da própria autora.

E_1 encontrada por Broucke (1968) é constituída por órbitas prógradas enquanto a que encontramos em nosso sistema é retrógrada. No mapa de condições iniciais, essas duas famílias estão localizadas bem próximas, no mesmo quadrante, como pode ser observado na Figura 43b. Além disso, são opostas a uma região de encontro entre quatro famílias: l , A_1 , E_1 e δ .

A evolução da família δ é apresentada pela Figura 48. As primeiras órbitas dessa família possuem dois laços que quase se tocam na região próxima aos pontos de equilíbrio no eixo Ox . Com a evolução das

Figura 48 – Evolução da família δ de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$.



(a) Órbitas no plano xy . Os quatro pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema.

(b) Orientação das órbitas.

fonte: Produção da própria autora.

órbitas na família, esses laços diminuem de tamanho, concentrando-se nos pontos de equilíbrio L_4 e L_5 . O tamanho da órbita também diminui e se torna quase circular, ao redor dos quatro pontos de equilíbrio. Essa família é composta por órbitas retrógradas, além de ser simétrica também em relação ao eixo Oy .

Como dito, as famílias l , A_1 , E_1 e δ tendem a uma região comum no mapa de condições iniciais, assim, a primeira ou a última órbita de cada uma dessas famílias tem a mesma geometria: todas são órbitas quase circulares e de quase mesmo raio.

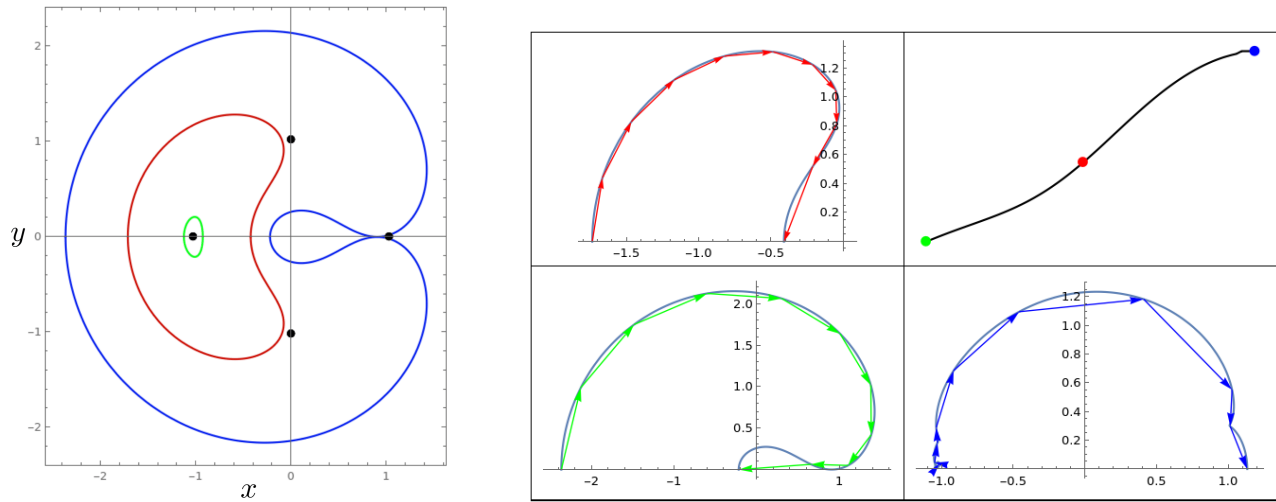
A próxima família é constituída por órbitas retrógradas do tipo ferradura (ver Figura 49) que, inicialmente, compreendem os pontos L_3 , L_4 e L_5 e, com a evolução, passam a englobar apenas o ponto L_3 . Sua classificação é αb e apresenta órbitas de colisão com o corpo central, visto que possui trajetórias que passam próximo da origem do sistema.

Nesse sistema, encontramos outra família simétrica, classificada como βa (ver Figura 50). Essa família é simétrica em relação a αb , entretanto, elas estão localizadas em quadrantes distintos do mapa de condições iniciais. Apesar dessa família estar na região de $x_0 > 0$, suas órbitas são retrógradas, pois circundam o ponto de equilíbrio L_2 . Assim como a família αb , βa tem órbitas de colisão com o corpo central.

A Figura 51 mostra a evolução da família BD de órbitas prógradas. As primeiras trajetórias da família são mais complexas, fazendo dois laços envolvendo os pontos L_4 e L_5 . A família chega ao seu fim com órbitas elípticas. Note que todas as órbitas pertencentes a essa família são trajetórias de colisão com o corpo central.

A Figura 52 mostra a evolução das órbitas da família F_1 que são prógradas. O índice 1 nessa classificação não existe no trabalho de Broucke (1968), mas como identificamos uma nova família simétrica à família F_1 (ver Figura 53), tomamos a liberdade de incluir os índices 1 e 2. Ambas as famílias

Figura 49 – Evolução da família αb de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$.

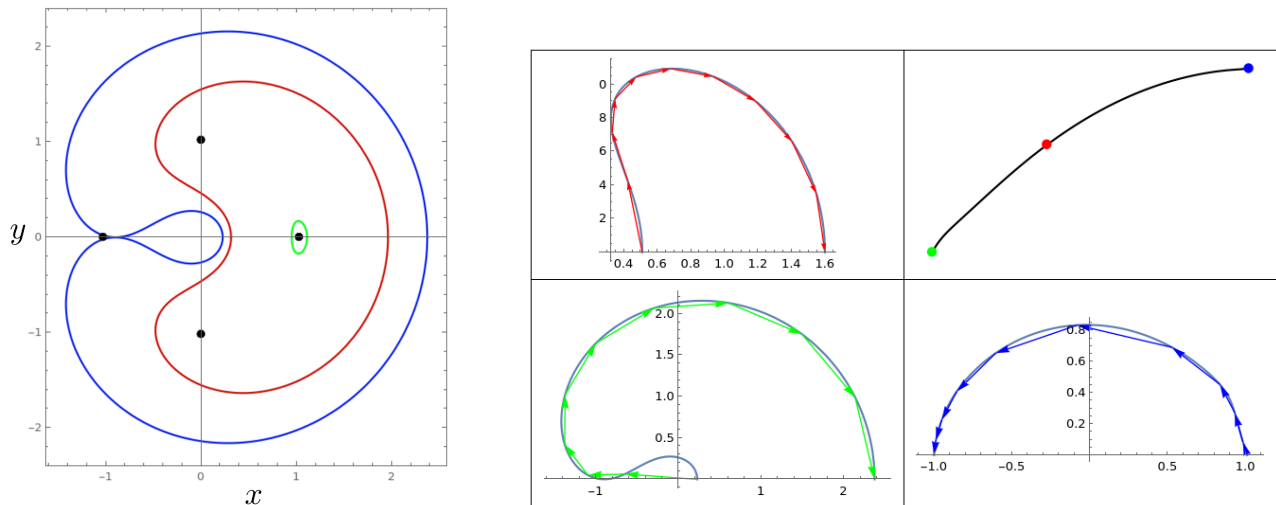


(a) Órbitas no plano xy . Os quatro pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema.

(b) Orientação das órbitas.

fonte: Produção da própria autora.

Figura 50 – Evolução da família βa de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$.

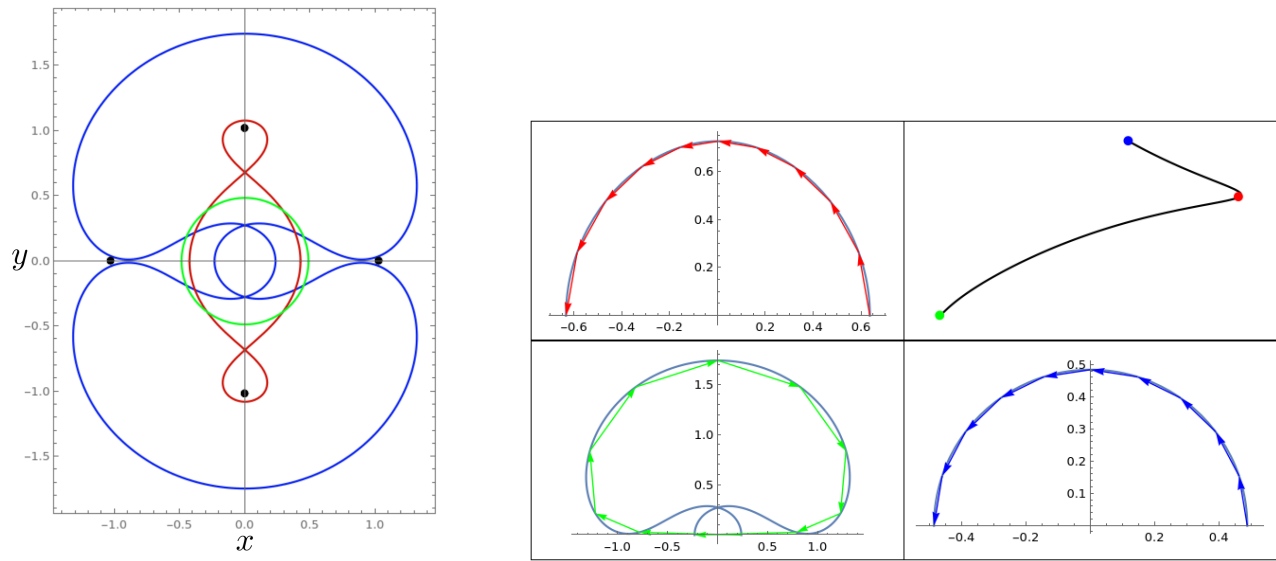


(a) Órbitas no plano xy . Os quatro pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema.

(b) Orientação das órbitas.

fonte: Produção da própria autora.

Figura 51 – Evolução da família BD de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$.



(a) Órbitas no plano xy . Os quatro pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema.

(b) Orientação das órbitas.

fonte: Produção da própria autora.

são compostas por órbitas de colisão com o corpo central.

O formato característico das trajetórias mostradas na Figura 54 indica que a família está associada à ressonância 4:3. (MURRAY; DERMOTT, 1999). As órbitas dessa família também são simétricas em relação ao eixo Oy .

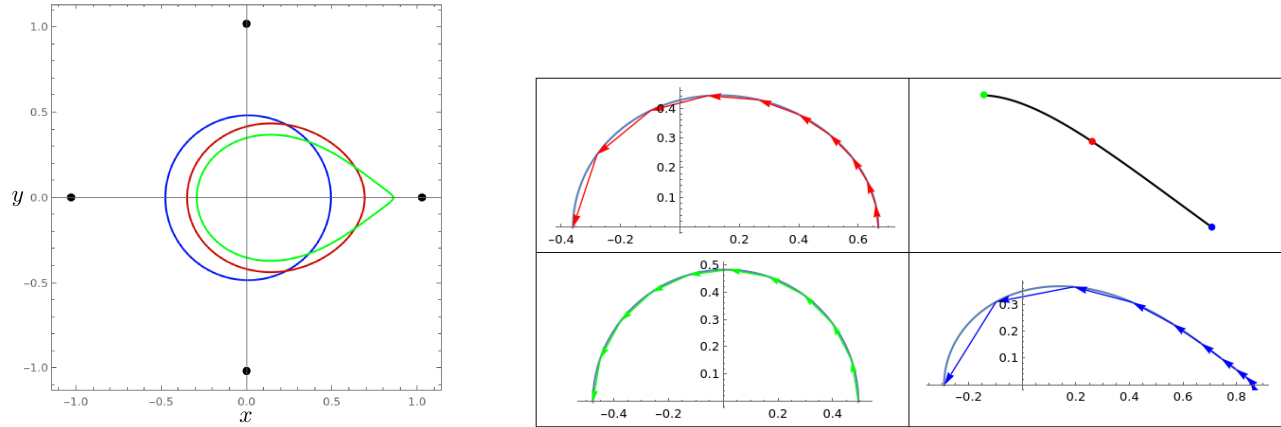
Exploramos a evolução de uma nova família, classificada como L , que abrange um grande intervalo de constate de Jacobi no mapa de condições iniciais (ver Figura 55). São todas trajetórias quase circulares e prógradas, entretanto, são quase todas órbitas de colisão com o corpo central, devido a proximidade com a origem do sistema de coordenadas.

Por fim, identificamos e apresentamos a evolução da família P na Figura 56. Essa família não é composta por trajetórias tão simples como aquelas apresentadas anteriormente. Elas possuem quatro laços internos. Com a evolução das órbitas, esses laços diminuem de tamanho até se tornarem cúspides. Diferentemente das outras novas órbitas identificadas nesse trabalho, a família P possui órbitas que não são de colisão com o corpo central.

4.4.1.2 Caso $J_2 = 0,2$ e $C_{22} = 0,05$

Aumentamos substancialmente os valores dos coeficientes a fim de identificar as mudanças nas famílias que foram identificadas. Esse conjunto de valores de coeficientes pode representar primários com maior rotação e/ou achatamento e elipticidade mais pronunciados. Inicialmente, começamos identificando as linhas contínuas no mapa de condições iniciais (x_0, C_j) (ver Figura 57a). Em seguida, realizamos a

Figura 52 – Evolução da família F_1 de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$.

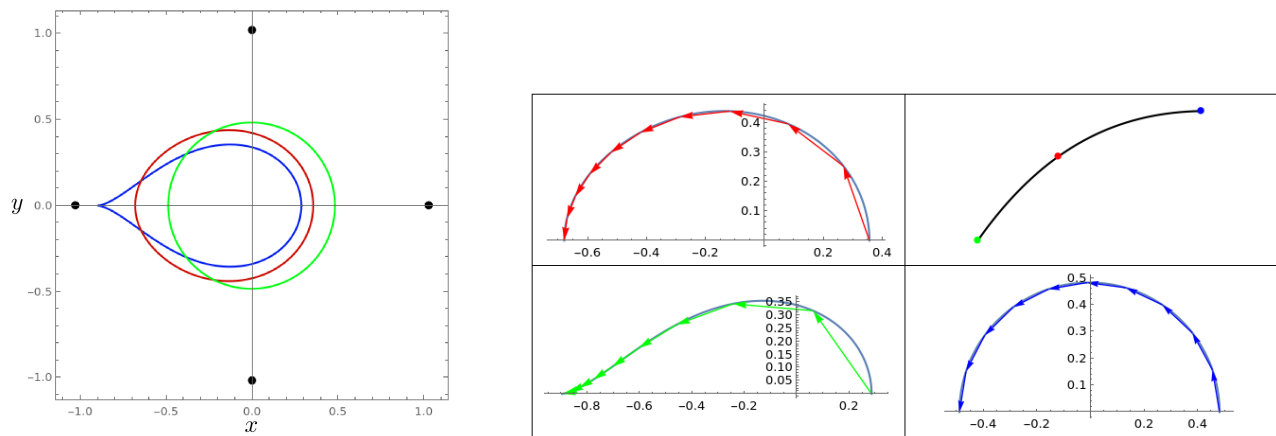


(a) Órbitas no plano xy . Os quatro pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema.

(b) Orientação das órbitas.

fonte: Produção da própria autora.

Figura 53 – Evolução da família F_2 de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$.

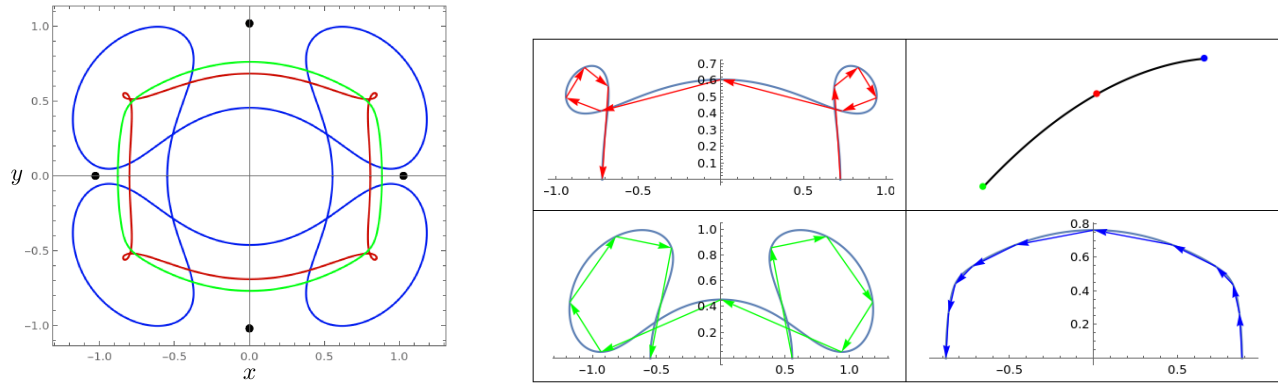


(a) Órbitas no plano xy . Os quatro pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema.

(b) Orientação das órbitas.

fonte: Produção da própria autora.

Figura 54 – Evolução da família de órbitas ressonantes 4 : 3 e simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$.

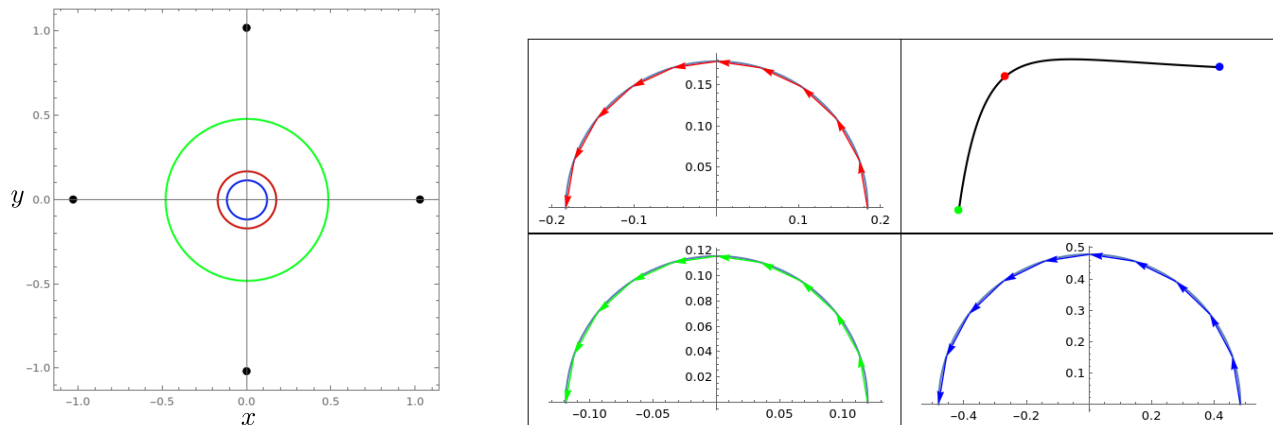


(a) Órbitas no plano xy . Os quatro pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema.

(b) Orientação das órbitas.

fonte: Produção da própria autora.

Figura 55 – Evolução da família L de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$.

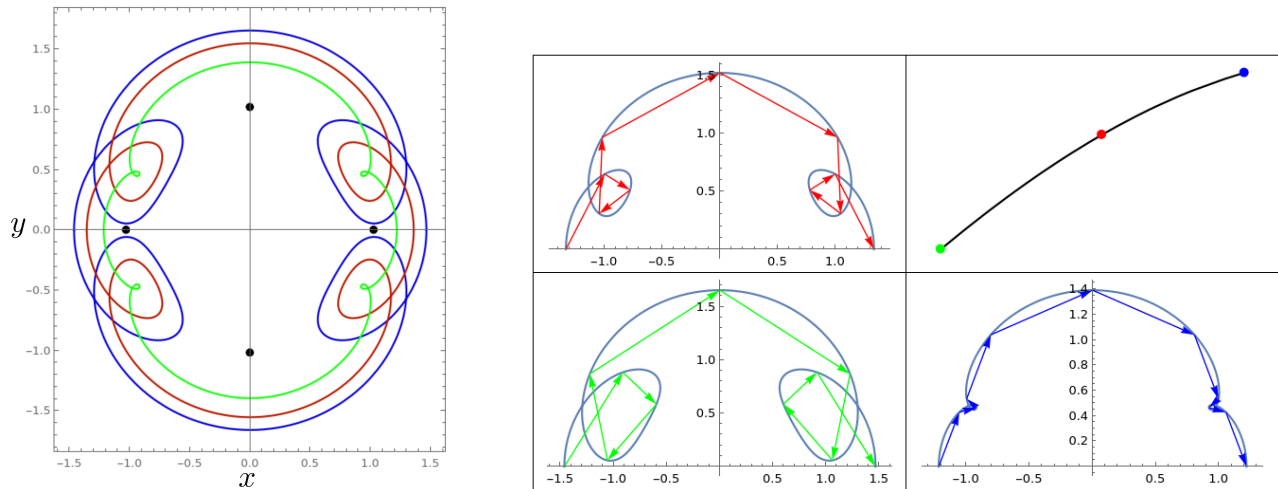


(a) Órbitas no plano xy . Os quatro pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema.

(b) Orientação das órbitas.

fonte: Produção da própria autora.

Figura 56 – Evolução da família P de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$.



(a) Órbitas no plano xy . Os quatro pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema.

(b) Orientação das órbitas.

fonte: Produção da própria autora.

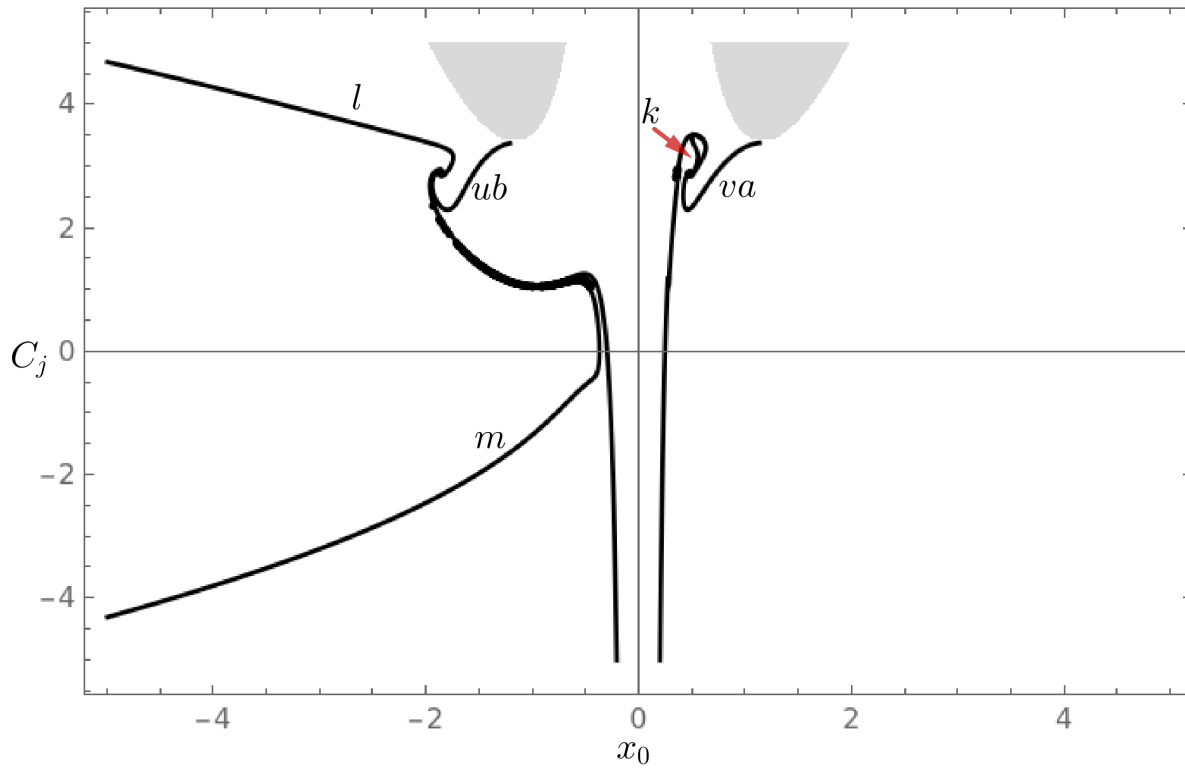
integração da órbita completa e analisamos a evolução das famílias. Para essa combinação de parâmetros físicos, conseguimos identificar cinco famílias. Duas delas, l e m , também estão presentes no sistema explorado na subseção anterior e apresentam evolução semelhante, por isso, os gráficos foram adicionados no anexo B. As famílias A_1 , E_1 , BD , F , δ , αb , βa , L , P e ressonância $4 : 3$ desapareceram com o aumento de J_2 e C_{22} . Em contrapartida, outras três famílias surgiram no mapa de condições iniciais: k , ub e va . Na figura Figura 57, as linhas contínuas que não estão identificadas referem-se às famílias de órbitas periódicas simétricas que não possuem classificação e são constituídas por órbitas de colisão com o corpo central, devido a esse fato, não apresentamos suas evoluções nesse trabalho.

Os pontos pretos nos gráficos do plano xy correspondem aos pontos de equilíbrio que, neste caso, possuem coordenadas: $L_2(1, 15929; 0)$, $L_3(-1, 15929; 0)$, $L_4(0; 0, 93985)$ e $L_5(0; -0, 93985)$. Em consequência do aumento dos valores dos coeficientes, surgiram outros dois pontos de equilíbrio no eixo Oy com coordenada $(0; \pm 0, 400357)$. Esses pontos serão sempre internos ao elipsoide.

A família k tem sua extensão compreendida em pequenos intervalos de constante de Jacobi e de posição inicial x_0 (ver Figura 57). É composta por órbitas prógradas e de colisão com o corpo central (ver Figura 58).

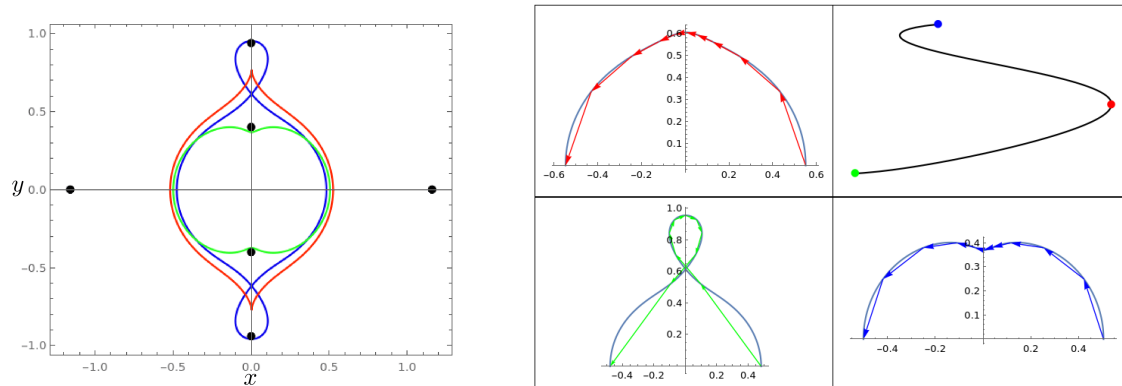
A Figura 59 e a Figura 60 apresentam as evoluções das famílias ub e va , respectivamente. Essas são duas famílias simétricas de órbitas retrógradas. Ambas as famílias são compostas por órbitas do tipo ferradura.

Figura 57 – Mapa das condições iniciais das famílias de órbitas periódicas simétricas para $J_2 = 0.2$ e $C_{22} = 0.05$



fonte: Produção da própria autora.

Figura 58 – Evolução da família k de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,2$ e $C_{22} = 0,05$.

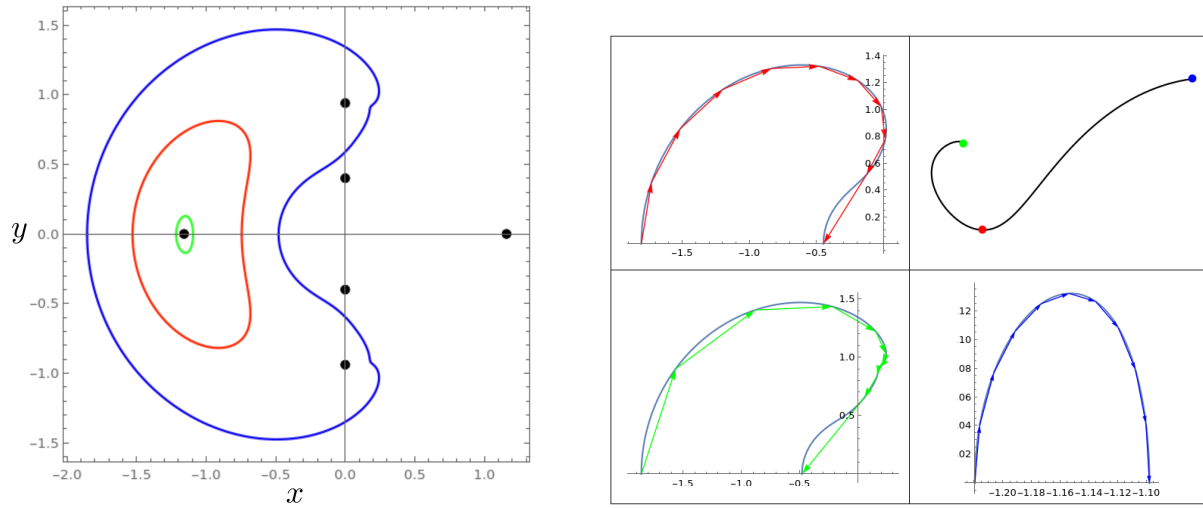


(a) Órbitas no plano xy . Os seis pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema.

(b) Orientação das órbitas.

fonte: Produção da própria autora.

Figura 59 – Evolução da família ub de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,2$ e $C_{22} = 0,05$.

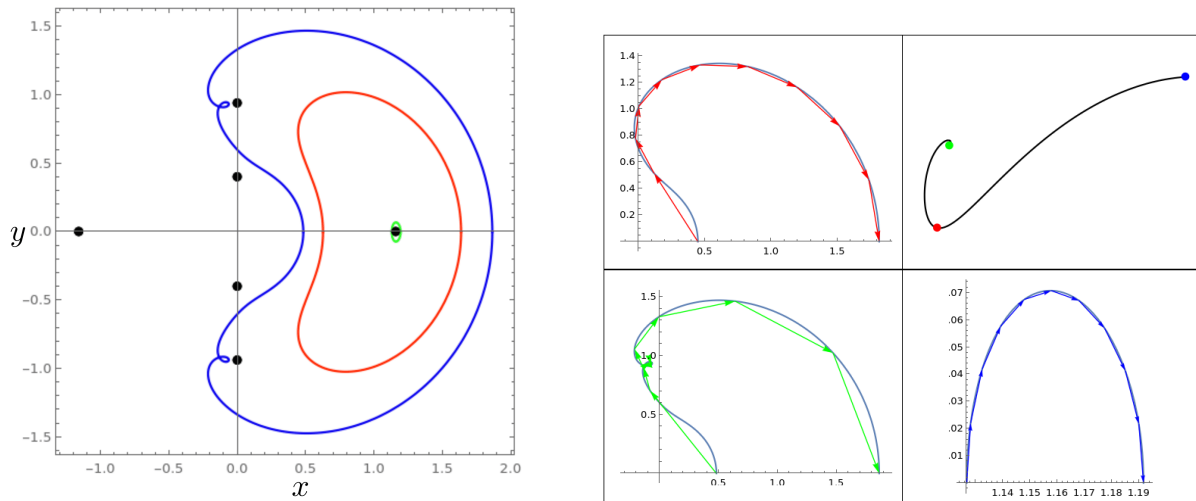


(a) Órbitas no plano xy . Os seis pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema.

(b) Orientação das órbitas.

fonte: Produção da própria autora.

Figura 60 – Evolução da família va de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,2$ e $C_{22} = 0,05$.



(a) Órbitas no plano xy . Os seis pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema.

(b) Orientação das órbitas.

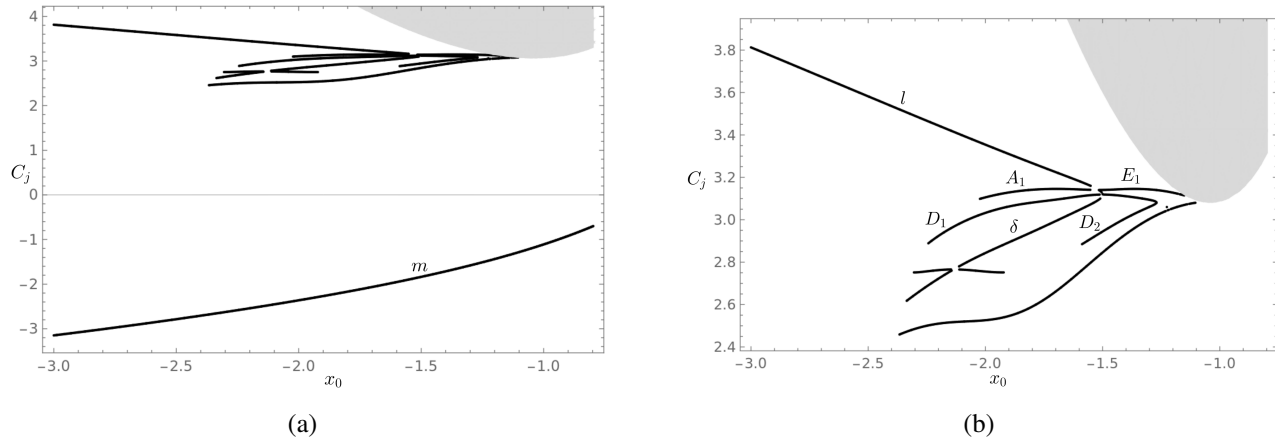
fonte: Produção da própria autora.

Tabela 6 – Valores dos coeficientes adimensionalizados J_2 e C_{22} e do parâmetro de adimensionalização r_s . Os parâmetros físicos de Chariklo e Haumea que foram usados para calcular os coeficientes podem ser consultados nas tabela 4

Corpo central	J_2	C_{22}	r_2 (m)
Chariklo	0,058057	0,005396	189183,6
Haumea	0,127167	0,025597	1104022,7

fonte: Produção da própria autora.

Figura 61 – Mapa das condições iniciais das famílias de órbitas periódicas simétricas em torno de Chariklo.



fonte: Produção da própria autora.

4.4.1.3 Chariklo e Haumea

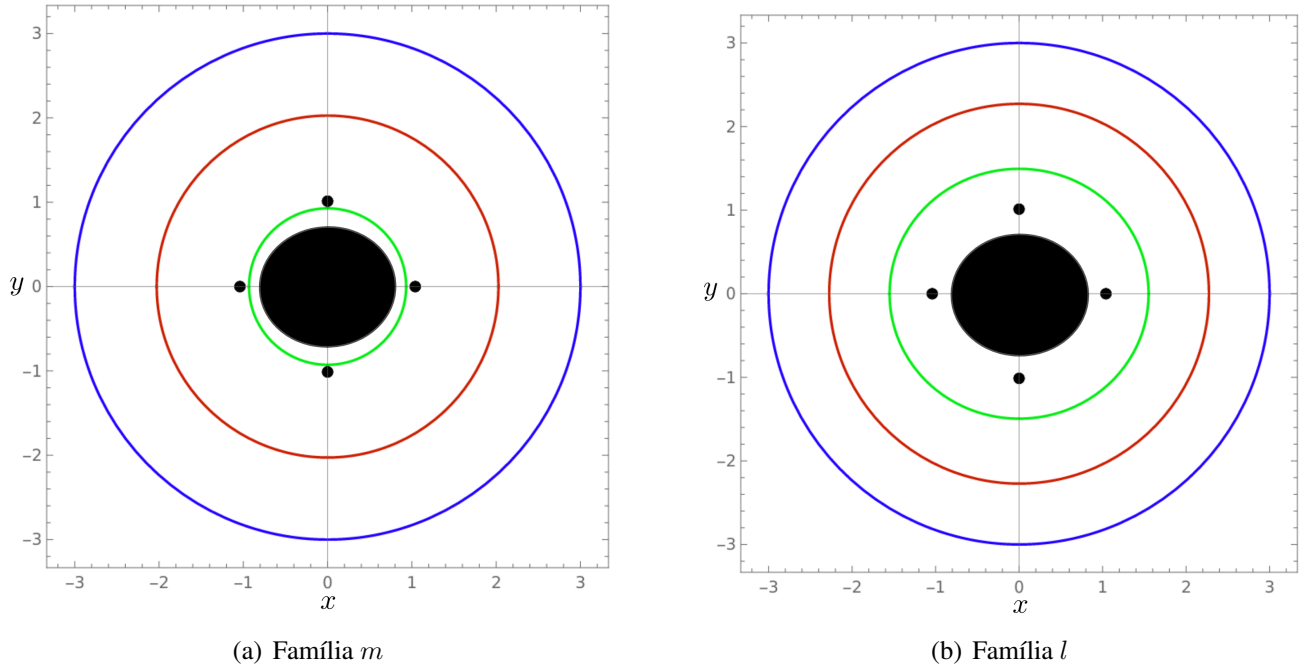
Após ter explorado as famílias de orbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox em torno de corpos centrais hipotéticos, aplicamos o método para dois corpos reais: Chariklo e Haumea. Os valores dos coeficientes J_2 e C_{22} usados nas simulações podem ser consultados na tabela 6. Desejamos identificar quais famílias sobrevivem nesses sistemas, considerando o tamanho do corpo central.

Ao redor do centauro Chariklo encontramos seis famílias conhecidas, que foram abordadas nos dois sistemas hipotéticos anteriores, e outras duas novas famílias. A identificação dessas novas famílias sugere que, entre o intervalo de coeficientes que escolhemos, existem outras novas famílias que ainda não foram classificadas.

O mapa da Figura 61 mostra as famílias de órbitas periódicas simétricas ao redor de Chariklo. Algumas linhas estão sem a classificação pois são famílias compostas apenas por órbitas que colidem com o corpo central, embora as condições iniciais estejam fora do corpo. Algumas das órbitas das famílias identificadas também colidem com o primário, portanto, nas figuras que apresentamos a evolução dessas famílias, filtramos apenas as órbitas que não invadem a região do corpo central.

A Figura 62 mostra as evoluções das famílias m e l . Como visto anteriormente, essas famílias são compostas quase integralmente por órbitas quase circulares e retrógradas. Todas as órbitas da família l são trajetórias externas ao corpo central e algumas órbitas da família m são de colisão. Os pontos pretos indicam os pontos de equilíbrio, cujas coordenadas são: $L_2(1,04016; 0)$, $L_3(-1,04016; 0)$, $L_4(0; 1,01237)$

Figura 62 – Evolução das famílias de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox em torno de Chariklo. Os quatro pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema.



fonte: Produção da própria autora.

e $L_5(0; -1, 01237)$

A Figura 63 apresenta as evoluções de outras seis famílias, sendo que as famílias A_1 , E_1 , va e δ são conhecidas e suas características foram discutidas nas subseções anteriores. Os dois últimos gráficos da Figura 63 trazem a evolução das famílias que classificamos como D_1 e D_2 , por serem simétricas. Ambas são órbitas retrógradas e não possuem órbitas internas ao corpo central.

Haumea é um corpo alongado e, conforme mostrado nos resultados dos capítulos anteriores, a região em torno do corpo é bastante perturbada gravitacionalmente, devido a esse fato, apenas as famílias l e m sobrevivem nesse sistema (ver Figura 64). Os gráficos da Figura 65 mostram a evolução dessas duas famílias de órbitas periódicas simétricas.

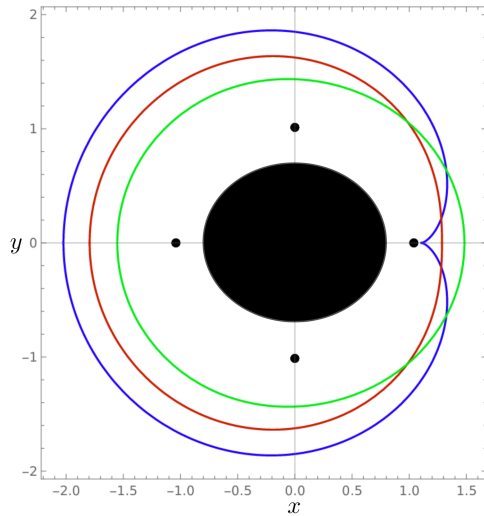
4.4.2 Simetria em relação ao eixo Oy

Nesta subseção mostramos a evolução das famílias de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Oy ao redor de Chariklo e Haumea. Os dois outros casos considerados não apresentam famílias diferentes daquelas que já foram abordadas, por isso apresentamos nessa subseção apenas os mapas de condições iniciais de cada um deles. A evolução das órbitas das famílias pode ser consultada no anexo B.

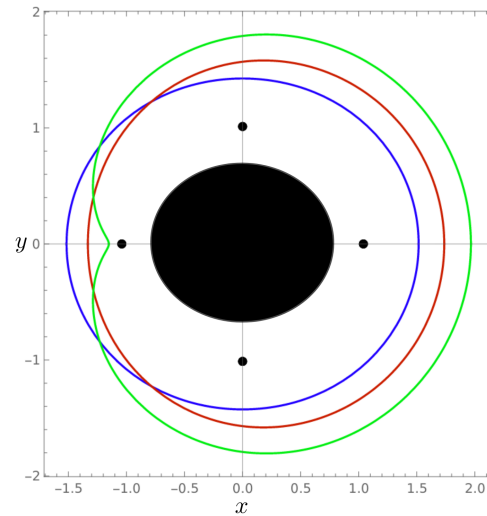
Os mapas de condições iniciais passam a ser (y_0, C_j) assim, escolhemos apresentar as órbitas no plano yx , ou seja, o eixo Oy está na horizontal.

No caso $J_2 = 0.05$ e $C_{22} = 0.002$, foram identificadas onze famílias e no caso $J_2 = 0.2$ e $C_{22} = 0.05$, cinco famílias. Essa redução se deve ao fato da grande perturbação gravitacional produzida por corpos

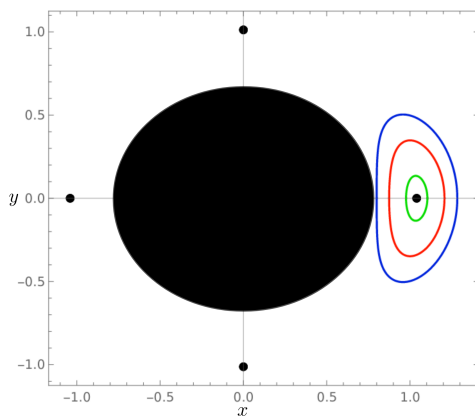
Figura 63 – Evolução das famílias de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox em torno de Chariklo. Os quatro pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema.



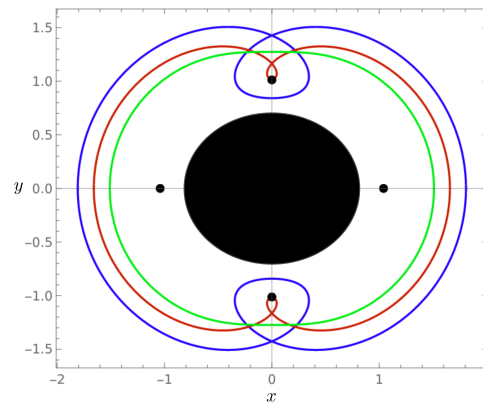
(a) Família A_1



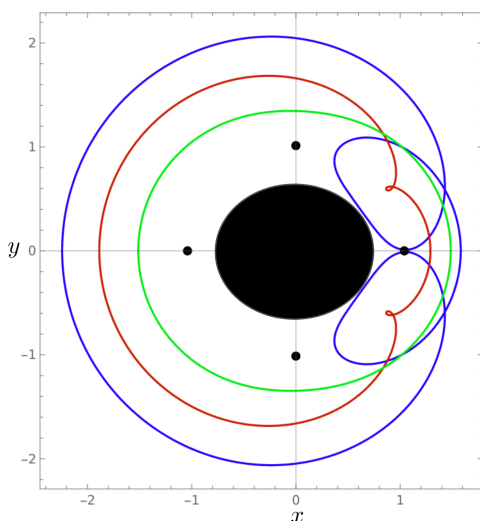
(b) Família E_1



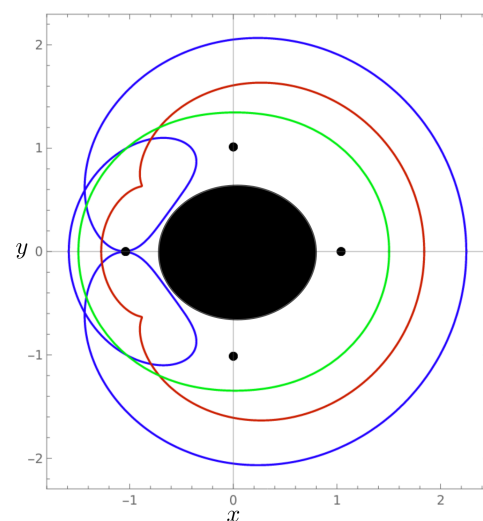
(c) Família va



(d) Família δ



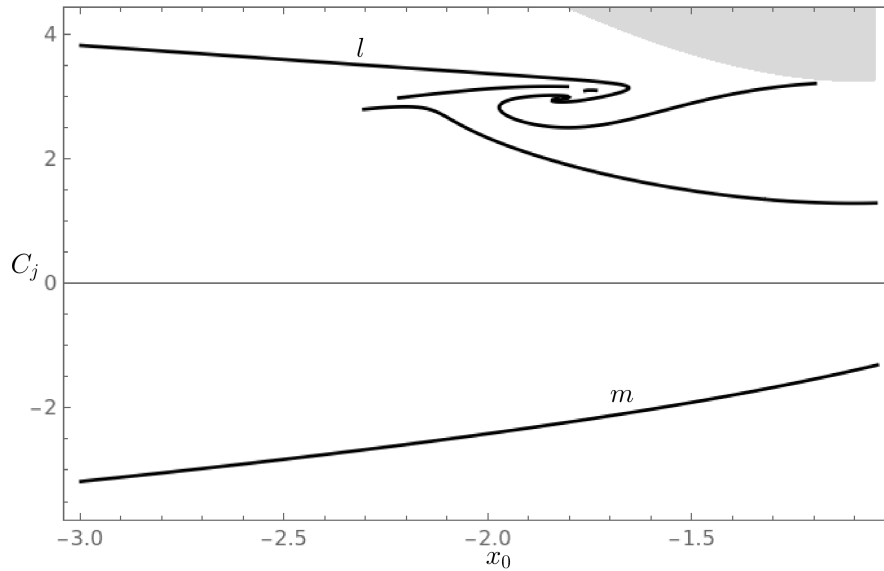
(e) Família D_1



(f) Família D_2

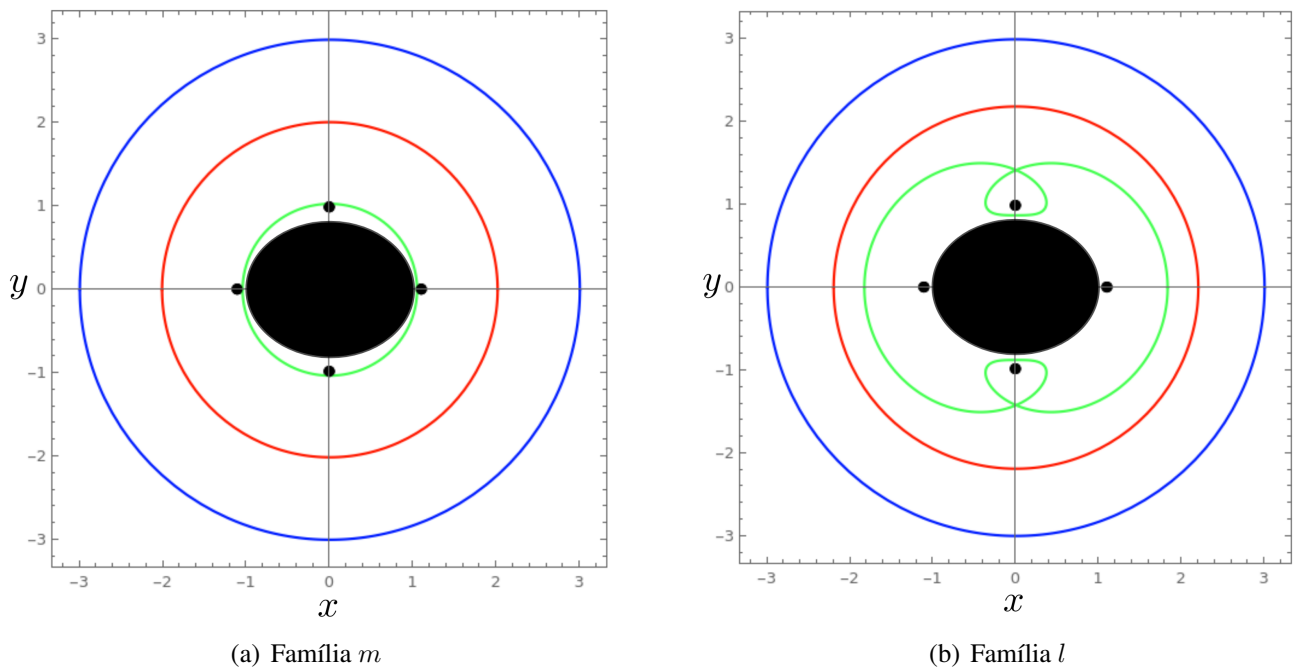
fonte: Produção da própria autora.

Figura 64 – Mapa das condições iniciais das famílias de órbitas periódicas simétricas em torno de Haumea.



fonte: Produção da própria autora.

Figura 65 – Evolução das famílias de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox em torno de Haumea. Os quatro pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema.

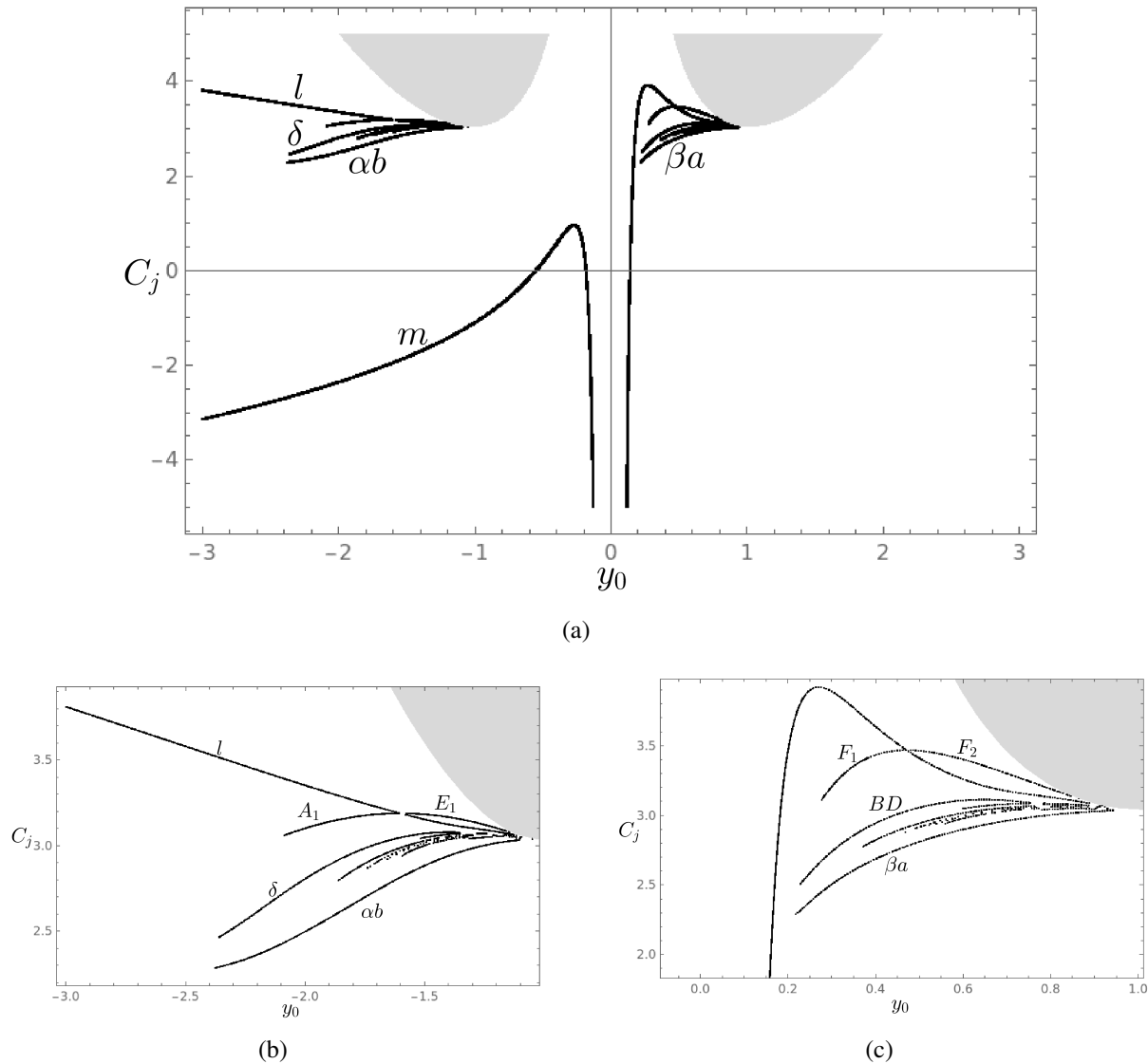


(a) Família m

(b) Família l

fonte: Produção da própria autora.

Figura 66 – Mapa das condições iniciais das famílias de órbitas periódicas simétricas para $J_2 = 0.05$ e $C_{22} = 0.002$. Os quadros inferiores são ampliações dos quadrantes próximos às regiões proibidas (em cinza).



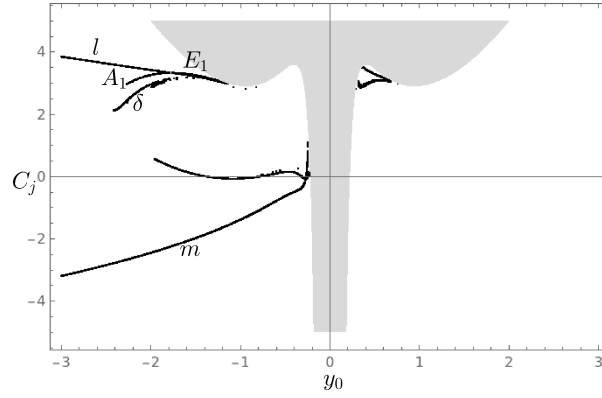
fonte: Produção da própria autora.

alongados e com rotação acentuada. A Figura 66 e a Figura 67 mostram a disposição das famílias no mapa de condições iniciais.

Em torno de Chariklo, encontramos seis famílias: l e m , como já previsto, uma vez que são simétricas em relação aos dois eixos; as famílias A_1 e E_1 , com as cúspides sobre o eixo de simetria Oy ; a família αb , circundando o ponto L_5 e, por último, a família que classificamos como T , composta por órbitas retrógradas. A evolução das órbitas das famílias A_1 , E_1 , αb e T são mostradas na figura Figura 71.

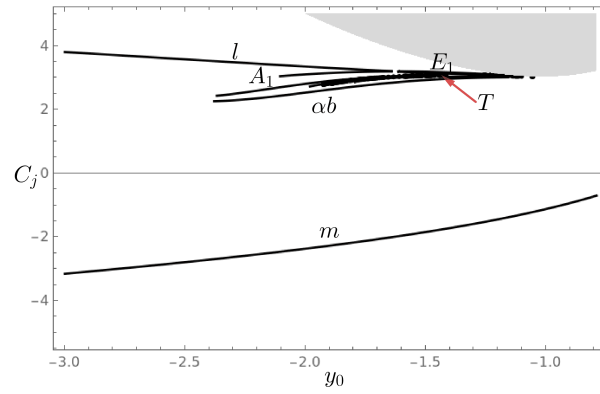
Por fim, no caso de Haumea, além das famílias l e m , sobreviveram também as famílias A_1 e E_1 (ver Figura 70). A evolução das famílias pode ser vista na figura Figura 71.

Figura 67 – Mapa das condições iniciais das famílias de órbitas periódicas simétricas para $J_2 = 0.2$ e $C_{22} = 0.05$.



fonte: Produção da própria autora.

Figura 68 – Mapa das condições iniciais das famílias de órbitas periódicas simétricas em torno de Chariklo.



fonte: Produção da própria autora.

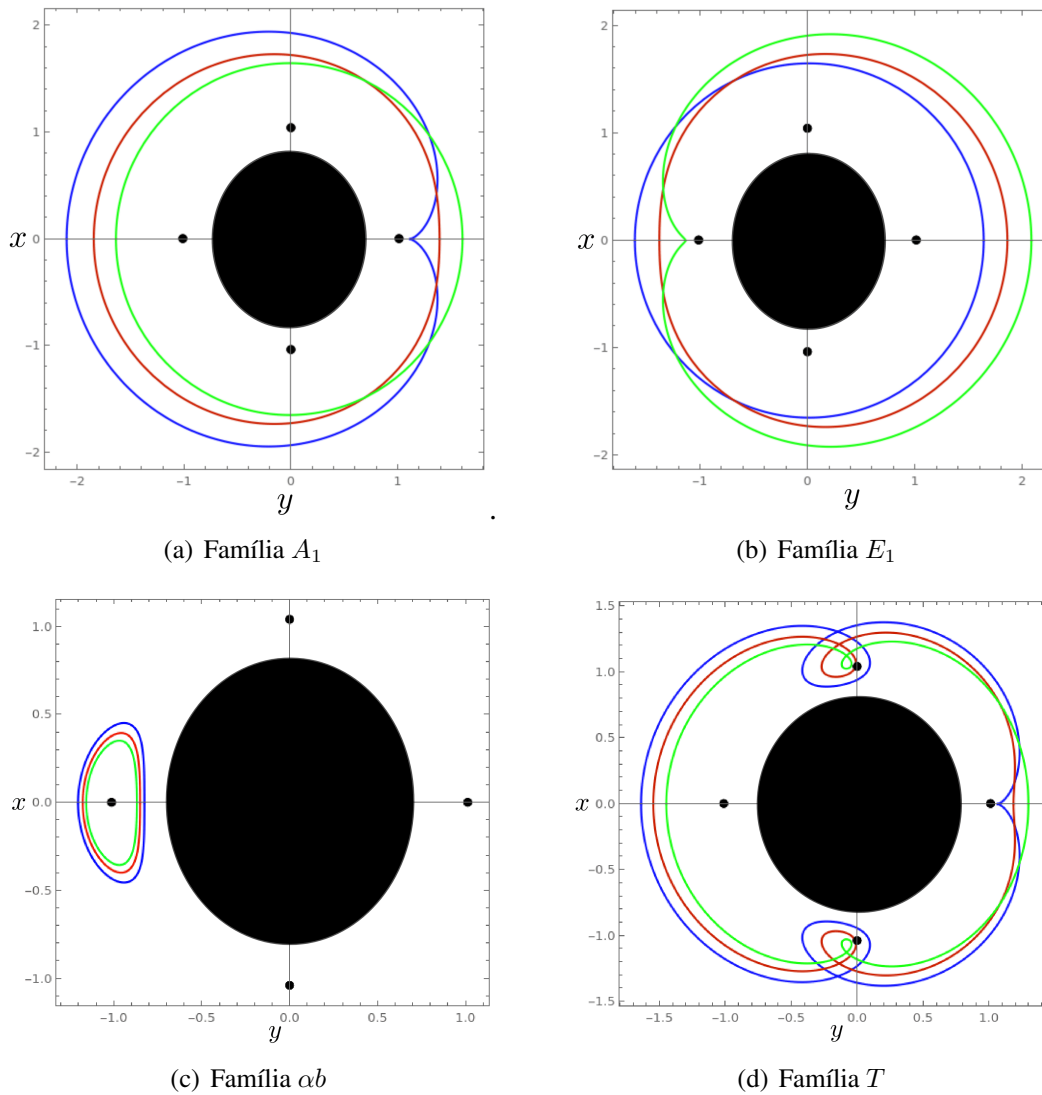
4.5 COMENTÁRIOS FINAIS

Nos capítulos anteriores estudamos a dinâmica da região equatorial em torno de corpos prolatos, nos concentrando em órbitas periódicas de primeiro e segundo tipo. Entretanto, existem outros tipos de órbitas, como aquelas apresentadas na seção 3.3.1, que não se enquadram em nenhuma dessas duas classes. Diante disso, neste capítulo, utilizamos o método de busca em grade, com o objetivo de identificar as famílias de órbitas periódicas simétricas em torno de elipsoides prolatos, que não necessariamente sejam de primeiro ou segundo tipo. Para classificar essas famílias, comparamos a geometria das órbitas encontradas nesse trabalho com a geometria das órbitas das famílias que foram identificadas nos trabalhos de Broucke (1968) e Elife et al. (2021). Além disso, encontramos outras quatro novas famílias que classificamos como D , L , P e T .

Comparando os dois casos hipotéticos, constatamos que para o conjunto de coeficientes com valores mais altos, a quantidade de famílias existentes é reduzida em comparação com o caso mais esférico e com rotação do corpo central mais lenta.

Além do estudo com objetos hipotéticos, aplicamos o método para explorar a região equatorial ao

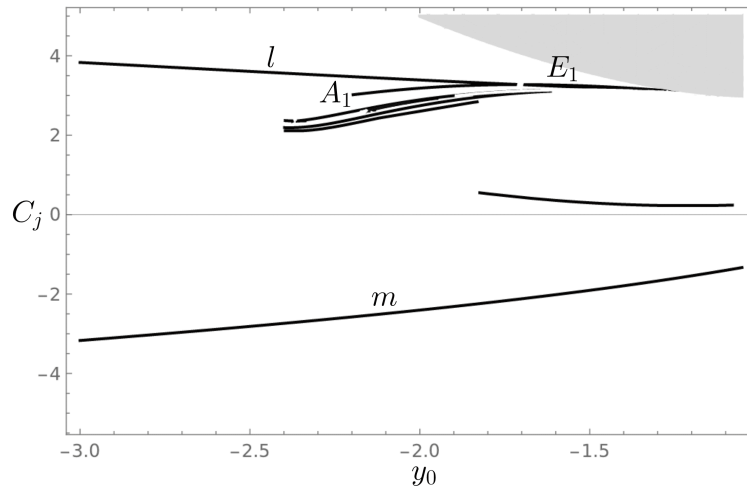
Figura 69 – Evolução das famílias de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Oy em torno de Chariklo. Os quatro pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema.



fonte: Produção da própria autora.

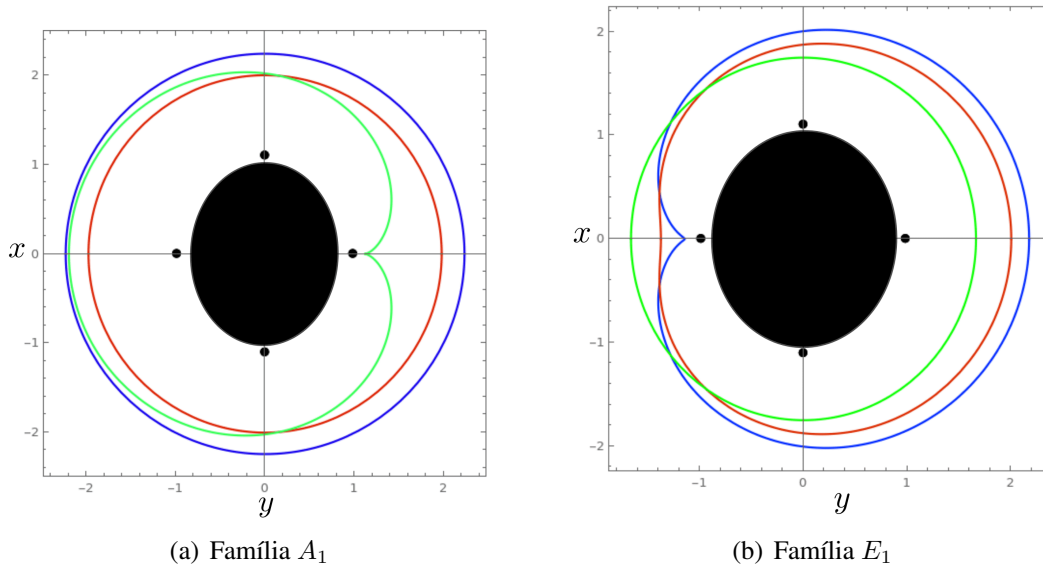
redor de Chariklo e Haumea. Identificamos que Chariklo possui mais famílias do que Haumea e que, as famílias que sobrevivem em torno do planeta anão tendem a ser trajetórias mais simples como, por exemplo, as famílias l e m .

Figura 70 – Mapa das condições iniciais das famílias de órbitas periódicas simétricas em torno de Haumea.



fonte: Produção da própria autora.

Figura 71 – Evolução das famílias de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Oy em torno de Haumea. Os quatro pontos pretos são os pontos de equilíbrio do sistema.



fonte: Produção da própria autora.

5 CONCLUSÃO

O objetivo desta tese foi explorar a região equatorial ao redor de corpos prolatos, identificando as zonas de estabilidade e instabilidade.

Iniciamos estudando as órbitas quase-circulares e como obtê-las a partir da escolha correta da velocidade inicial ($\nu_{C_{22}}$), visto que a inclusão a elipticidade do corpo central no potencial gravitacional causa um aumento considerável na variação radial das órbitas das partículas equatoriais ao usar a velocidade kepleriana circular como condição inicial para a integração numérica. Utilizamos o método empírico para determinar essa velocidade e identificamos que, além da baixa amplitude de variação radial, a velocidade $\nu_{C_{22}}$ produz órbitas que são elipses, onde o corpo primário deixa de ocupar um dos focos e passa a ficar no centro do órbita. Como estudo de caso, aplicamos o método empírico descrito para determinar a borda interna da região de estabilidade ao redor do planeta anão Haumea, considerando apenas os efeitos gravitacionais do corpo central. Além disso, elaboramos um método para calcular o semieixo maior e excentricidade de órbitas em torno de corpos prolatos a partir da geometria da trajetória. A partir da compreensão de como determinar esses elementos orbitais, mapeamos no espaço $a - e$ as extensões das regiões estáveis e instáveis, delimitadas pelas órbitas periódicas e quase-periódicas em torno de alguns corpos elipsoidais. Para o desenvolvimento desse estudo, utilizamos a técnica de superfície de seção de Poincaré, que forneceu as informações necessárias para a identificação dessas regiões.

Essa análise permitiu identificarmos as larguras de algumas das ressonâncias spin-órbita dos sistemas considerados, além disso, constatamos que essas larguras não são simétricas em relação ao centro da ressonância, definido pelo semieixo ressonante.

Com a construção dos mapas no espaço $a - e$, identificamos uma grande região de estabilidade decorrente das órbitas periódicas de primeiro tipo. As órbitas periódicas de primeiro tipo, em geral, possuem excentricidade quase nula e estão presentes em um grande intervalo de semieixo maior para todos os sistemas considerados nesse trabalho, enquanto que as órbitas ressonantes e as quase-periódicas apresentam excentricidades elevadas.

Por fim, exploramos a evolução das famílias de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox e Oy , utilizando o método de busca em grade. Nesse estudo, além de identificar famílias que já eram conhecidas do problema restrito de três corpos e do dipolo segmento, encontramos também outras quatro novas famílias.

REFERÊNCIAS

- ABAD, A. et al. Evolution of the characteristic curves in the restricted three-body problem in terms of the mass parameter. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, Springer, v. 135, n. 2, p. 1–23, 2023.
- ABAD, A. et al. Algorithm 924: Tides, a taylor series integrator for differential equations. **ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)**, ACM New York, NY, USA, v. 39, n. 1, p. 1–28, 2012.
- BALMINO, G. Gravitational potential harmonics from the shape of an homogeneous body. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 60, p. 331–364, 1994. ISSN 0032-0633. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00691901>>.
- BÉRARD, D. et al. The Structure of Chariklo's Rings from Stellar Occultations. **The Astronomical Journal**, v. 154, n. 4, p. 144, out. 2017.
- BHATNAGAR, K.; CHAWLA, J. The effect of oblateness of the bigger primary on collinear libration points in the restricted problem of three bodies. **Celestial mechanics**, Springer, v. 16, n. 2, p. 129–136, 1977.
- BOAVENTURA, G. A. S. **Análise de órbitas: missão Garatea e órbitas periódicas**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, São Paulo - Brasil, 2023.
- BORDERES-MOTTA, G.; WINTER, O. C. Poincaré surfaces of section around a 3D irregular body: the case of asteroid 4179 Toutatis. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 474, n. 2, p. 2452–2466, fev. 2018.
- BORDERIES, N.; LONGARETTI, P. Y. Description and behavior of streamlines in planetary rings. **Icarus**, v. 72, p. 593, 1987. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0019-1035\(87\)90055-8](https://doi.org/10.1016/0019-1035(87)90055-8)>.
- BORDERIES, N.; LONGARETTI, P. Y. Test particle motion around an oblate planet. **Icarus**, v. 107, p. 129, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1006/icar.1994.10118>>.
- BRAGA-RIBAS, F. et al. Discovery of the triple asteroidal system 87 sylvia. **Nature**, v. 508, p. 72, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/nature13155>>.
- BRENT, R. P. An algorithm with guaranteed convergence for finding a zero of a function. **The computer journal**, Oxford University Press, v. 14, n. 4, p. 422–425, 1971.
- BROUCKE, R. Periodic orbits in the restricted three-body problem with earth-moon masses. technical report 32-1168. **Jet Propulsion Laboratory, Cal. Tech**, 1968.
- CARVALHO, J. P. S. Analysis of the long and short-period terms due the nonsphericity of the central body: applications for mercury. **Journal of Physics: Conference Series**, IOP Publishing, v. 911, p. 012011, oct 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1742-6596/911/1/012011>>.
- CHANDRASEKHAR, S. **Principles of Stellar Dynamics**. [S.l.: s.n.], 1942. v. 50. 456 p.
- CHAPMAN, C. R. et al. Discovery and physical properties of dactyl, a satellite of asteroid 243 ida. **Nature**, v. 374, p. 783, 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/374783a0>>.

DEPRIT, A.; HENRARD, J. **Natural families of periodic orbits**. [S.l.], 1966.

ELIPE, A. et al. Symmetric periodic orbits in the dipole-segment problem for two equal masses. **The Astronomical Journal**, IOP Publishing, v. 161, n. 6, p. 274, 2021.

ELIPE, A.; ARRIBAS, M.; KALVOURIDIS, T. J. Periodic solutions in the planar $(n+1)$ ring problem with oblateness. **Journal of guidance, control, and dynamics**, v. 30, n. 6, p. 1640–1648, 2007.

FORNASIER, S. et al. The centaur 10199 chariklo: investigation into rotational period, absolute magnitude, and cometary activity. **A&A**, v. 568, p. L11, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201424439>>.

FUJIWARA, A. et al. The rubble-pile asteroid itokawa as observed by hayabusa. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 312, n. 5778, p. 1330, 2006. ISSN 0036-8075. Disponível em: <<https://science.sciencemag.org/content/312/5778/1330>>.

GEISLER, P. et al. Erosion and ejecta reaccrretion on 243 ida and its moon. **Icarus**, Elsevier, v. 120, n. 1, p. 140–157, 1996.

GREENBERG, R. Apsidal precession of orbits about an oblate planet. **Astronomical Journal**, v. 86, p. 912, 1981. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086/112968>>.

HÉNON, M. Exploration numérique du problème restreint. i. masses égales; orbites périodiques. In: **Annales d’Astrophysique**. [S.l.: s.n.], 1965. v. 28, p. 499.

HÉNON, M. Exploration numérique du problème restreint. ii. masses égales, stabilité des orbites périodiques. In: **Annales d’Astrophysique**. [S.l.: s.n.], 1965. v. 28, p. 992.

HÉNON, M. Numerical exploration of the restricted problem. iii- equal masses, nonperiodic orbits(plane restricted three-body problem for quasi- periodic, semiergodic and escape orbits). **BULLETIN ASTRONOMIQUE**, v. 1, n. 1, p. 57–79, 1966.

HENON, M. Numerical investigation of the restricted problem. iv- equal masses, nonperiodic orbits(restricted three-body problem in plane, with two equal masses and nonperiodic orbits). **BULLETIN ASTRONOMIQUE**, v. 1, n. 2, p. 49–66, 1966.

HÉNON, M. Numerical exploration of the restricted problem, v. **Astronomy and Astrophysics**, vol. 1, p. 223-238 (1969)., v. 1, p. 223–238, 1969.

HÉNON, M. **Generating families in the restricted three-body problem**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2003. v. 52.

HOU, X.; XIN, X.; FENG, J. Genealogy and stability of periodic orbit families around uniformly rotating asteroids. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, Elsevier, v. 56, p. 93–114, 2018.

HU, W.; SCHEERES, D. Numerical determination of stability regions for orbital motion in uniformly rotating second degree and order gravity fields. **Planetary and Space Science**, v. 52, n. 8, p. 685–692, 2004. ISSN 0032-0633. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0032063304000315>>.

HU, W.-D.; SCHEERES, D. J. Periodic orbits in rotating second degree and order gravity fields. **Chinese Journal of Astronomy and Astrophysics**, IOP Publishing, v. 8, n. 1, p. 108, 2008.

JEFFERYS, W. H. An Atlas of Surfaces of Section for the Restricted Problem of Three Bodies. **Publications of the Department of Astronomy. The University of Texas at Austin, Austin, TX, USA**, 1971.

KAWAGUCHI, J.; FUJIWARA, A.; UESUGI, T. Hayabusa—its technology and science accomplishment summary and hayabusa-2. **Acta Astronautica**, v. 62, n. 10, p. 639, 2008. ISSN 0094-5765. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094576508000441>>.

LARA, M.; DEPRIT, A.; ELIPE, A. Numerical continuation of families of frozen orbits in the zonal problem of artificial satellite theory. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, Springer, v. 62, p. 167–181, 1995.

LAURETTA, D. S. et al. Osiris-rex: Sample return from asteroid (101955) bennu. **A&A**, v. 599, p. A103, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201629134>>.

LAURETTA, D. S. et al. The osiris-rex target asteroid (101955) bennu: Constraints on its physical, geological, and dynamical nature from astronomical observations. **Meteoritics & Planetary Science**, v. 50, p. 834, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/maps.12353>>.

LEIVA, R. et al. Size and shape of chariklo from multi-epoch stellar occultations. **The Astronomical Journal**, American Astronomical Society, v. 154, n. 4, p. 159, sep 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/2F1538-3881/2Faa8956>>.

LONGARETTI, P. Y.; BORDERIES, N. Streamline formalism and ring orbit determination. **Icarus**, v. 94, p. 165, 1991. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0019-1035\(91\)90147-L](https://doi.org/10.1016/0019-1035(91)90147-L)>.

MADEIRA, G. et al. Dynamics around non-spherical symmetric bodies—i. the case of a spherical body with mass anomaly. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 510, n. 1, p. 1450–1469, 2022.

MARCHIS, F. et al. Discovery of the triple asteroidal system 87 sylvia. **Nature**, v. 436, p. 822, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/nature04018>>.

MARGOT, J. L.; BROWN, M. E. Discovery and characterization of binary asteroids 22 kalliope and 87 sylvia. **AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts**, v. 33, p. 52.02, 2001. Disponível em: <<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2001DPS....33.5202M>>.

MARKELLOS, V.; BLACK, W.; MORAN, P. A grid search for families of periodic orbits in the restricted problem of three bodies. **Celestial mechanics**, Springer, v. 9, p. 507–512, 1974.

MORGADO, B. et al. Refined physical parameters for chariklo's body and rings from stellar occultations observed between 2013 and 2020. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 652, p. A141, 2021.

MÜLLER, T. G. et al. Hayabusa-2 mission target asteroid 162173 ryugu (1999 ju3): Searching for the object's spin-axis orientation. **A&A**, v. 599, p. A103, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201629134>>.

MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar system dynamics**. [s.n.], 1999. 575 p. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/CBO9781139174817>>.

- MYSEN, E.; AKSNES, K. On the dynamical stability of the rosetta orbiter. ii. **A&A**, v. 470, n. 3, p. 1193–1199, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361:20077472>>.
- MYSEN, E.; OLSEN, O.; AKSNES, K. Chaotic gravitational zones around a regularly shaped complex rotating body. **Planetary and Space Science**, v. 54, n. 8, p. 750–760, 2006. ISSN 0032-0633. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0032063306000675>>.
- OLSEN, O. Orbital resonance widths in a uniformly rotating second degree and order gravity field. **A&A**, v. 449, n. 2, p. 821–826, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361:20054451>>.
- ORTIZ, J. L. et al. The size, shape, density and ring of the dwarf planet haumea from a stellar occultation. **Nature**, v. 550, p. 219, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/nature24051>>.
- POINCARÉ, H. **Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste**. [S.l.]: Gauthier-Villars et fils, imprimeurs-libraires, 1892. v. 2.
- PROCKTER, L. et al. The near shoemaker mission to asteroid 433 eros. **Acta Astronautica**, v. 51, n. 1, p. 491, 2002. ISSN 0094-5765. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S009457650200098X>>.
- RABINOWITZ, D. L. et al. Photometric observations constraining the size, shape and albedo of 2003 el61, a rapidly rotating, pluto-sized object in the kuiper belt. **The Astronomical Journal**, v. 639, p. 1238, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086%2F499575>>.
- RAGOZZINE, D.; BROWN, M. E. Orbits and masses of the satellites of the dwarf planet haumea (2003 el61). **The Astronomical Journal**, v. 137, p. 4766, 2009.
- RENNER, S.; SICARDY, B. Use of the geometric elements in numerical simulations. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 94, p. 237, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10569-005-5533-3>>.
- RIBEIRO, T. et al. Quasi circular orbits around prolate bodies. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford University Press, v. 506, n. 2, p. 3068–3078, 2021.
- SCHEERES, D. J. Dynamics about uniformly rotating triaxial ellipsoids: applications to asteroids. **Icarus**, Elsevier, v. 110, n. 2, p. 225–238, 1994.
- SCHEERES, D. J. et al. Orbits close to asteroid 4769 castalia. **Icarus**, Elsevier, v. 121, n. 1, p. 67–87, 1996.
- SHARMA, R. K. Periodic orbits of the second kind in the restricted three-body problem when the more massive primary is an oblate spheroid. **Astrophysics and Space Science**, Springer, v. 76, p. 255–258, 1981.
- SICARDY, B. Resonances in Nonaxisymmetric Gravitational Potentials. **The Astronomical Journal**, v. 159, n. 3, p. 102, mar. 2020.
- SICARDY, B. et al. Ring dynamics around non-axisymmetric bodies with application to Chariklo and Haumea. **Nature Astronomy**, v. 3, p. 146–153, abr. 2019.
- SUMIDA, I. et al. N-body simulations of the ring formation process around the dwarf planet haumea. **The Astrophysical Journal**, American Astronomical Society, v. 897, n. 1, p. 21, jun 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847/1538-4357/ab93bb>>.

VEVERKA, J. et al. Near at eros: Imaging and spectral results. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 289, n. 5487, p. 2088, 2000. ISSN 0036-8075. Disponível em: <<https://science.sciencemag.org/content/289/5487/2088>>.

WERNER, R. A. The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, Springer, v. 59, n. 3, p. 253–278, 1994.

WINTER, O.; NETO, E. V. Distant stable direct orbits around the moon. **Astronomy & Astrophysics**, EDP Sciences, v. 393, n. 2, p. 661–671, 2002.

WINTER, O. C.; BORDERES-MOTTA, G.; RIBEIRO, T. On the location of the ring around the dwarf planet haumea. **MNRAS**, v. 484, p. 3765, 2019.

WINTER, O. C.; MURRAY, C. D. **Atlas of the Planar, Circular, Restricted Three-Body Problem. I. Internal Orbits**. [S.l.]: QMW Maths Notes, London, 1994.

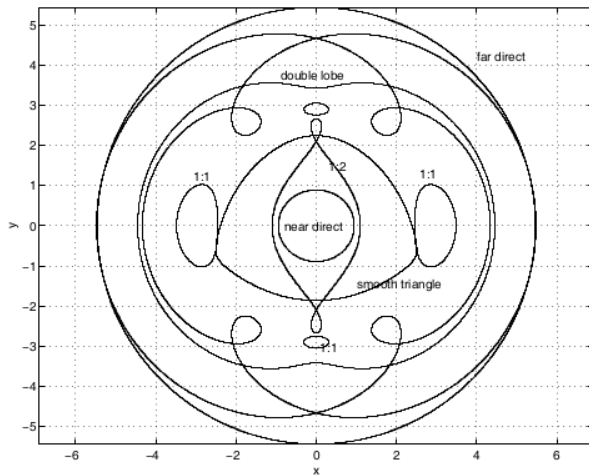
WINTER, O. C.; MURRAY, C. D. **Atlas of the Planar, Circular, Restricted Three-Body Problem. II. External Orbits**. [S.l.]: QMW Maths Notes, London, 1994.

YOSHIKAWA, M. et al. **Hayabusa Sample Return Mission**. [S.l.: s.n.], 2015. 397-418 p.

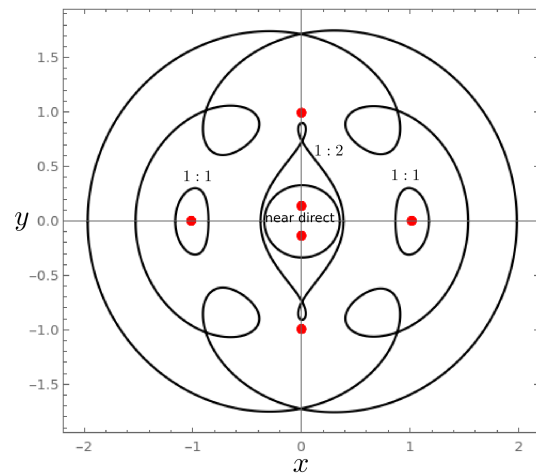
ANEXO A – COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS

Hu e Scheeres (2008) identificaram e classificaram algumas das famílias de órbitas periódicas simétricas ao redor do asteroide Castália, usando um potencial gravitacional considerando os coeficientes de achatamento e elipticidade do corpo central. Além disso, estudaram o comportamento dessas famílias variando o período de rotação do asteroide. Com o objetivo de validar o método utilizado no capítulo 4, buscamos pelas mesmas famílias encontradas por Hu e Scheeres (2008) ao redor de Castália. A Figura 72 apresenta a comparação entre os resultados: o gráfico (a) foi retirado do trabalho de Hu e Scheeres (2008) e o gráfico (b) mostra as órbitas periódicas simétricas encontradas usando o *software* TIDES. Há outras órbitas periódicas no gráfico da esquerda que são simétricas ao eixo Oy . O gráfico da direita traz apenas órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Note que os resultados são semelhantes, assegurando que as adaptações feitas no programa estão consistentes.

Figura 72 – Órbitas periódicas simétricas ao redor do asteroide Castália, com rotação lenta ($1/7$ do período de rotação real). Os parâmetros físicos utilizados nas simulações numéricas foram: $\mu = 9,4 \times 10^{-8} \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$, $C_{20} = -0,07275 \text{ km}^2$, $C_{22} = 0,02984 \text{ km}^2$ e $\omega = 6,13 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ (HU; SCHEERES, 2008). O parâmetro de adimensionalização para distância aplicado no gráfico (b) é $r_s \approx 2,93 \text{ km}$.



(a) fonte: Hu e Scheeres (2008)

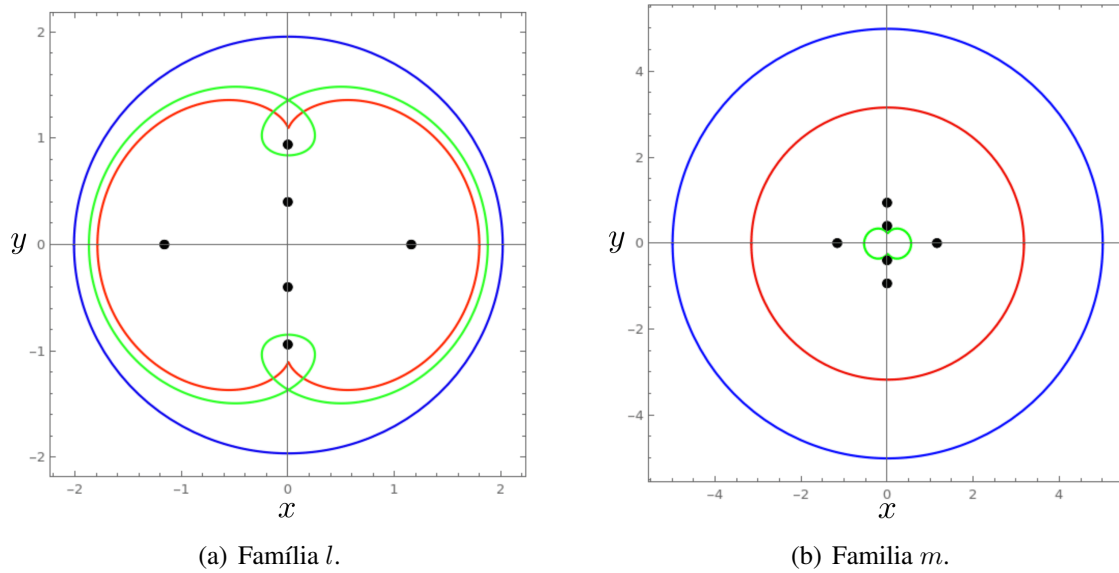


(b) fonte: Produção da própria autora.

ANEXO B – OUTRAS FAMÍLIAS DE ÓRBITAS PERIÓDICAS SIMÉTRICAS

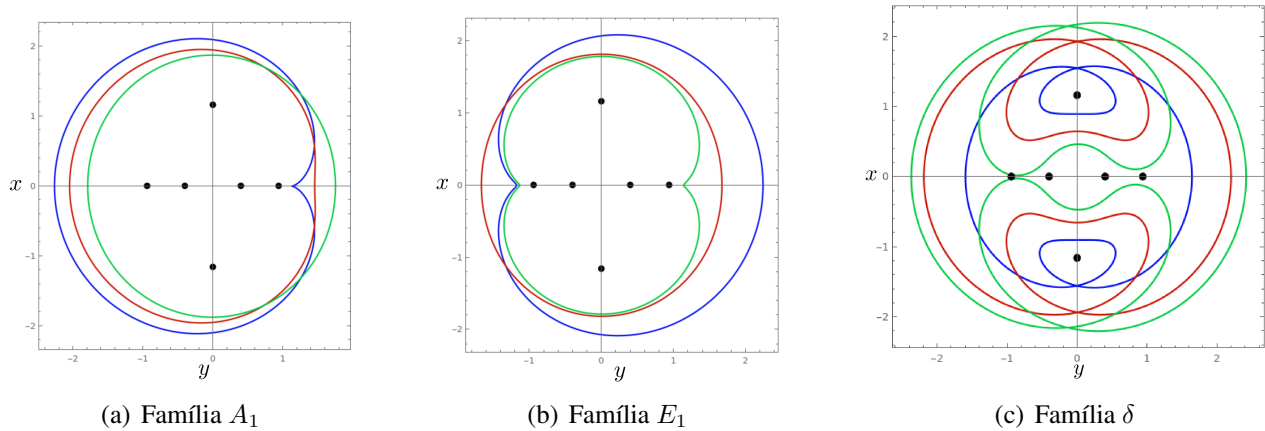
Apresentamos a seguir as evoluções das famílias de órbitas periódicas simétricas que não foram mostradas no capítulo 4.

Figura 73 – Evolução das famílias de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Ox . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,2$ e $C_{22} = 0,05$. Os seis pontos pretos correspondem aos pontos de equilíbrio do sistema.



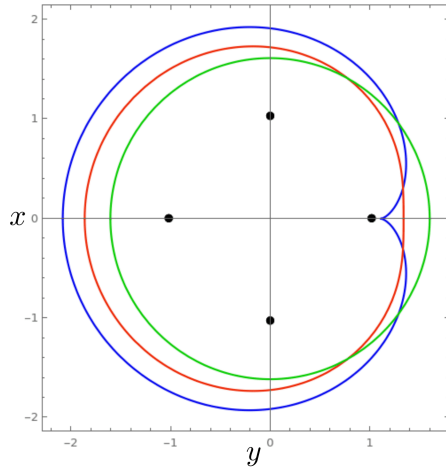
fonte: Produção da própria autora.

Figura 74 – Evolução das famílias de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Oy . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,2$ e $C_{22} = 0,05$. Os seis pontos pretos correspondem aos pontos de equilíbrio do sistema.

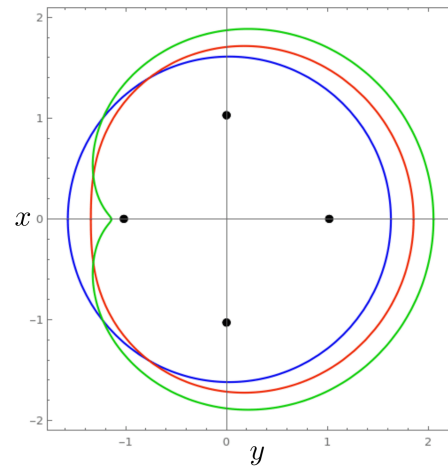


fonte: Produção da própria autora.

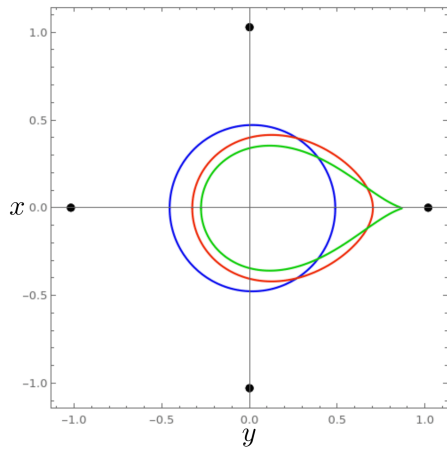
Figura 75 – Evolução das famílias de órbitas periódicas simétricas em relação ao eixo Oy . Corpo central composto pelos coeficientes $J_2 = 0,05$ e $C_{22} = 0,002$. Os quatro pontos pretos correspondem aos pontos de equilíbrio do sistema.



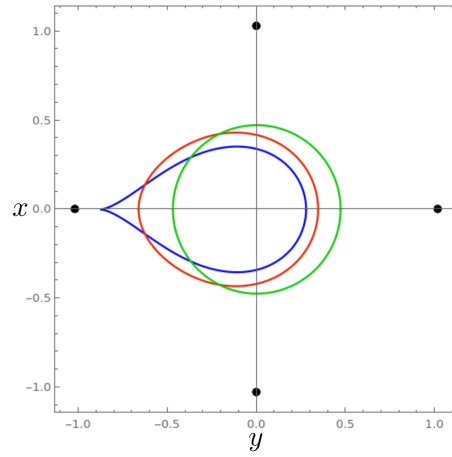
(a) Família A_1 .



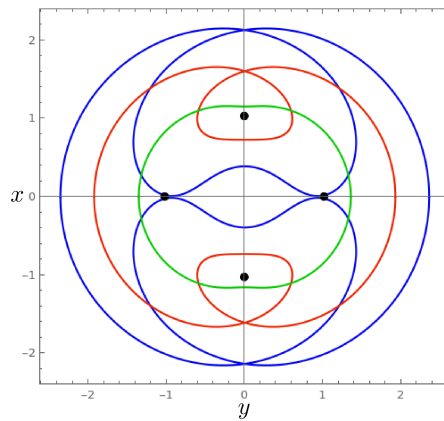
(b) Família E_1 .



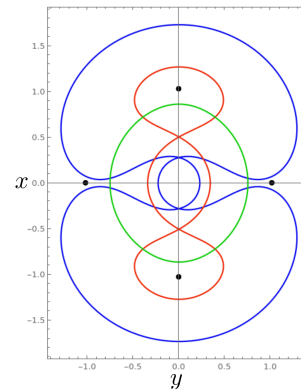
(c) Família F_1 .



(d) Família F_2 .



(e) Família δ .



(f) Família BD .

fonte: Produção da própria autora.

ANEXO C – ARTIGO PUBLICADO - MNRAS

Cópia da versão do artigo *Quasi circular orbits around prolate bodies* publicado na revista *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 506.

Quasi circular orbits around prolate bodies

T. Ribeiro¹,^{*} O. C. Winter,¹ D. Mourão,¹ L. A. G. Boldrin¹ and J. P. S. Carvalho²

¹Grupo de Dinâmica Orbital e Planetologia, São Paulo State University – UNESP, Guaratinguetá, CEP 12516-410 São Paulo, Brazil

²Centro de Ciência e Tecnologia em Energia e Sustentabilidade, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB), Feira de Santana-BA, 44.085-132, Brazil

Accepted 2021 June 26. Received 2021 June 20; in original form 2021 March 7

ABSTRACT

Recent observations of stellar occultations have revealed rings of particles around non-planetary bodies of the Solar system. These bodies are irregular and can be modelled by ellipsoids. In the context of numerical integrations for the study of studying the region close to these ellipsoidal bodies, it is known that the use of geometric initial conditions is necessary when the central object is significantly oblatened. In this paper, we show that for elongated bodies there is also a need for the adaptation of the initial velocity ($v_{C_{22}}$) so that equatorial periodic orbits of the first kind around this body have smaller radial variations since the circular Keplerian velocity produces a high oscillating eccentricity and radial variation. We describe an empirical method to obtain the velocity $v_{C_{22}}$ of a set of simulations where we vary the physical parameters of the central body. With the obtained data, developed empirical equations that allow the calculation of the orbital eccentricity, the initial velocity and an adapted Kepler's Third Law as a function of the ellipticity coefficient and the semimajor axis. In addition, we identify an important change in the location of the primary body in relation to the elliptical orbit. In the cases of the orbits with minimal radial variation found in our study, the body starts to occupy the centre of the elliptical orbit. Finally, we include the rotation of the central body in the studied systems and analyse its implications for the dynamics of these orbits of low radial variation.

Key words: celestial mechanics – minor planets, asteroids.

1 INTRODUCTION

Most of the celestial bodies in the Solar system are not spherical in shape. The shapes of these objects range from the most rounded, for example, planets, to more irregular bodies, such as dwarf planets, centaurs, TNOs, and asteroids. These irregularities in the shape of the bodies cause perturbations in their gravitational fields. To study the dynamics around these bodies, it is necessary to use physical models that satisfactorily represent their forms. For non-spherical bodies, modelling can be performed using ellipsoids, such as the triaxial and Jacobi's ellipsoids or Maclaurin's spheroid. The latter consists of a body with an equatorial radius A different from the polar radius C , where the triaxial ellipsoid is formed by three semi-axes with different sizes, $A > B > C$, and the Jacobi ellipsoid is a triaxial ellipsoid that revolves around the smallest axis (Chandrasekhar 1942).

In recent decades, interest in studying the dynamics around these small and irregular bodies has increased to understand their types of compositions, structures, and processes of formation. For this, in addition to the observations made with telescopes from Earth, some space missions have been launched with the objective of creating large-resolution images of asteroids. In 2014, through stellar occultations, it was possible to detect for the first time in the Solar system a body different from a planet that has a system of two rings of particles (Braga-Ribas et al. 2014). This body is the (10199) Chariklo, the second largest object dynamically classified as a centaur. Its

rotation period is 7.004 h (Fornasier et al. 2014), and there is still no consensus in the literature regarding its size and shape. In 2017, also through stellar occultations, a dense ring was detected around the dwarf planet (136108) Haumea (Ortiz et al. 2017), which already had two known satellites: Hi'iaka and Namaka. Unlike the other two centaurs with detected rings, Haumea's size and shape are well determined. It has a very elongated body, and its physical data can be found in Table 1. In Marzari (2020), numerical simulations on the evolution of the ring around the dwarf planet are presented. The location of Haumea's ring is close to the resonance 1 : 3 ($a_{1:3} = 2285 \pm 8$ km) between the orbital motion of the ring particles and the period of rotation of the dwarf planet (Ortiz et al. 2017). However, through the Poincaré Surface of Sections and using the gravitational potential of an ellipsoid with Haumea's semi-axes, Winter, Borderes-Motta & Ribeiro (2019) demonstrated that orbits in the 1 : 3 resonance have high eccentricities that would not allow for the preservation of a circular ring, and that periodic orbits of the first kind define regions of stability that comprise the width and location of Haumea's ring.

In the case of celestial bodies that can be modelled using ellipsoids or spheroids, the gravitational field can be studied by adding the gravitational coefficients that compute the perturbation in its potential. In the case of spheroids, the terms J_n are included, for example, J_2 , J_4 and J_6 , which correspond to the oblateness of the poles. For ellipsoids, in addition to J_n , the term C_{22} is also added, which is related to the ellipticity in the equatorial region of the body. Due to the numerous studies on the dynamics of planetary rings and the orbits of artificial satellites, the effects caused by a gravitational potential generated by an oblate body are widely

* E-mail: tais.a.ribeiro@unesp.br (TR); othon.winter@unesp.br (OCW)

Table 1. Haumea's adopted physical parameters.

Mass ^a M	4.006×10^{21} kg
Equivalent radius R	798 km
Rotation period ^b	3.9155 h
Semi-axes ^c $A \times B \times C$	$1161 \times 852 \times 513$ km
Oblateness coefficient ^d J_2	0.243
Elongation coefficient ^d C_{22}	0.049
Ring radii ^c	2287 km

Notes. ^aRagozzine & Brown (2009).

^bRabinowitz et al. (2006).

^cOrtiz et al. (2017).

^dWinter et al. (2019).

known, since planets in the Solar system that have rings, such as Saturn, are oblate, and in the cases of the orbits of artificial satellites close to Earth, it is necessary to take the oblateness of the planet into account. One of the known effects caused by the J_2 coefficient is the secular precession of the longitude of the pericentre of the orbits. In addition, it is known that the osculating elements of orbits around oblate bodies have large short-term variations. This variation in the osculating orbital elements is corrected by using geometric elements, which also oscillate, but with much smaller amplitudes. The geometric elements are obtained through the epicyclic theory that was initially developed by Chandrasekhar (1942) for stellar dynamics and involves almost circular and equatorial movements submitted to oblate potential. Greenberg (1981) was one of the first to develop equations to obtain the real variation of satellite orbital elements around oblate bodies. Borderies & Longaretti (1987, 1994) and Longaretti & Borderies (1991) related the geometric elements of epicyclic theory to orbital elements for application in the study of planetary rings that have low eccentricity and little inclination, and Renner & Sicardy (2006) described the use of geometric elements in numerical simulations.

Through numerical simulations, it is identified that the inclusion of a significant C_{22} term in the gravitational potential causes a considerable increase in the eccentricity in circular equatorial orbits of particles whose initial velocity is Keplerian. Therefore, it is assumed that this increase in eccentricity of the orbits obtained by numerical simulations is similar to the effect that occurs when using initial osculating elements of particles that are subject to a gravitational potential of an oblate central body. This suggests that it is necessary to find a set of adequate initial conditions so that the orbits submitted to potentials with an ellipticity coefficient, C_{22} , are circular (or almost circular). In this work, we explore the dynamic characteristics of an almost circular orbit around a prolate body and discuss the difficulties in describing this trajectory using orbital elements, in addition to presenting a proposal for an empirical solution to this difficulty. For this, we choose the physical parameters of Haumea to use as an example in the application of our methodology. Haumea was chosen because it is the most prolate body known in the Solar system with well-defined physical parameters. Thus, the dynamic characteristics of a quasi-circular orbit around a highly prolate body stand out. However, the study is general; therefore, we vary the physical parameters of the central body for a set of values used in numerical simulations.

In the following section, we briefly review the effects due to oblateness; in Section 3, we analyse the dynamics of equatorial orbits around a prolate body. The approach developed for the correction of the initial conditions of orbits under the influence of a prolate body potential is detailed in Section 4. The results obtained with this correction in the orbits around a non-rotating body are exposed

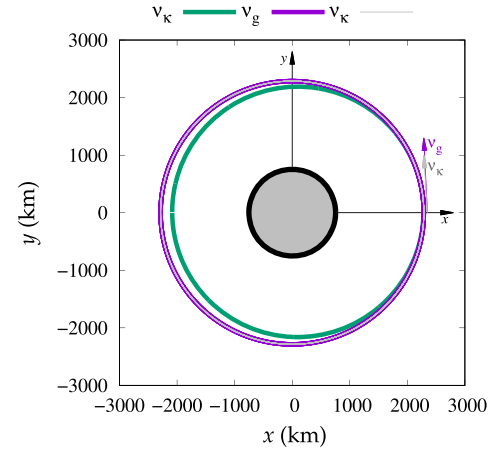


Figure 1. Equatorial orbits around spherical and oblate bodies, for one orbital period. The grey line is a circular orbit around a spherical body (in grey) with circular Keplerian initial velocity (v_k). The green line represents an elliptical orbit around an oblate body located in one of the foci of the orbit and with initial circular Keplerian velocity. The purple trajectory determines an orbit with initial circular geometric velocity (v_g) around an oblate body.

and discussed in Section 5. In Section 6, we present the equations for eccentricity and the mean motion of orbits, with minimal radial variation, around an elongated body without rotation. In Section 7, we discuss the implications caused by the rotation of the central body. Finally, in Section 8, we present our final comments.

2 CHOICE OF INITIAL CONDITIONS FOR THE CASE OF AN OBLATE PRIMARY

The effects due to J_2 and its dynamic consequences have been widely discussed in the literature, with studies on the orbits of artificial satellites and the dynamics of the planetary rings of the Solar system, since these planets that have rings have a significant oblateness. It is known that the orbits around oblate bodies have a secular precession of the longitude of the pericentre. In addition, it is known that the osculating elements of these orbits have large short-term variations. This is because the osculating elements refer to a Keplerian orbit around a spherical body, i.e. they are the elements determined exclusively from the position and velocity of an orbiting body that does not consider the disturbing force operating in the system (Murray & Dermott 1999). In practice, osculating elements are the elements that a particle would have if the oblateness of the central body was instantly suppressed. Therefore, the amplitude of the variation of the elements increases with an increase in the oblateness of the central body.

For example, we numerically integrate orbits with an initial radial distance of 2287 km to the centre of mass of Haumea (Fig. 1). The adopted physical parameters can be found in the Table 1, except for the ellipticity coefficient, which at this moment we consider null. The orbit indicated by the grey colour in Fig. 1 is the circular equatorial trajectory around a spherical body (also in grey) with Keplerian initial velocity, $v_k = 1230.70$ km h⁻¹. The eccentric equatorial orbit, in green, has the same initial velocity as $v_k = 1230.70$ km h⁻¹, but is instead around the oblateness body (in black). The grey and black central bodies have the same mass; however, the grey body is a sphere, while the blackbody is oblate. Therefore, the latter is greater in the equator region than in the spherical region, causing a greater concentration of mass in this region. It can be noted that when using the same circular Keplerian velocity in both systems,

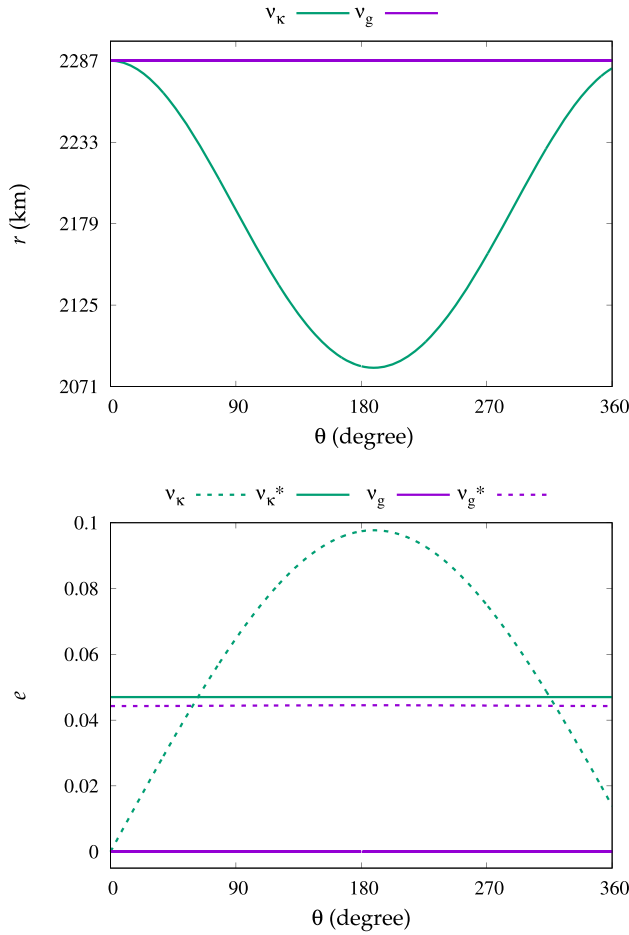


Figure 2. Longitudinal evolution, during an orbital period, of the orbital radius (top plot) and the eccentricity (bottom plot) of orbits around a primary with the Haumea mass. In the top plot, the green line indicates the particle's orbit with initial circular Keplerian velocity equal to $v_k = 1230.7 \text{ km h}^{-1}$ with $\Delta r = 203 \text{ km}$ and the purple line indicates the orbit of the particle with circular geometric velocity equal to $v_g = 1257.6 \text{ km h}^{-1}$. In the bottom plot, we have two eccentricities for each initial velocity value. For the case of v_k , the green line points to the eccentricity calculated using equation (2), due to the elliptical geometry ($e_{J_2} = 0.047$) and the green dashed line is the value of the osculating eccentricity (with $\Delta e = 0.097$). For the case of v_g the purple line indicates the geometric eccentricity, which is approximately zero, and the dashed purple line represents the osculating eccentricity (with $e = 0.044$).

the resulting orbits are different. This is justified by the perturbation produced by the oblateness of the central body. In Fig. 2, the top plot shows the longitudinal evolution of the orbital radius of the eccentric trajectory (green line). Note that the particle does not return to the same initial distance at $\theta = 360^\circ$ due to the precession of the pericentre. However, neglecting this precession and assuming that this orbit is a closed ellipse, its geometric eccentricity can be calculated using the distances of the pericentre ($r_{\min} = 2083.43 \text{ km}$) and apocentre ($r_{\max} = 2287 \text{ km}$), which are the smaller ($r_{\min}$) and larger ($r_{\max}$) radial distances, respectively, through equations:

$$a_{J_2} = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2}, \quad (1)$$

$$e_{J_2} = 1 - \frac{r_{\min}}{a_{J_2}}. \quad (2)$$

The J_2 index on the semimajor axis and eccentricity indicate that these are the elements due to the elliptical geometry of the orbit,

whose values are $a_{J_2} = 2185.215 \text{ km}$ and $e_{J_2} = 0.047$, indicated by the green line in the bottom plot of Fig. 2. However, determining the longitudinal evolution of the osculating eccentricity of this orbit for a complete orbital period, the dashed green line in the bottom plot of Fig. 2, it is noted that there is a variation. This variation can be understood through Lagrange's equations, which for the eccentricity of an orbit in the equatorial plane is given by (Murray & Dermott 1999)

$$\frac{de}{dt} = \frac{(1 - e^2)}{na^2e} \frac{\partial F_{J_2}}{\partial M} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2e} \frac{\partial F_{J_2}}{\partial \omega}, \quad (3)$$

where F_{J_2} is the disturbing function due to oblateness (Carvalho 2017):

$$F_{J_2} = \frac{9}{4} R^2 J_2 n^2 \left[e^2 \cos 2M + \frac{e^2}{3} + \frac{2e \cos M}{3} + \frac{2}{9} \right]. \quad (4)$$

Therefore, the variation of the eccentricity (equation 3) can be rewritten as

$$\frac{de}{dt} = -\frac{9}{2a^2} (1 - e^2) n R^2 J_2 \left[e \sin 2M + \frac{\sin M}{3} \right], \quad (5)$$

where M is the mean anomaly. Thus, when an oblate body is considered, the eccentricity oscillates.

It seems inconsistent for an elliptical orbit with fixed eccentricity, as shown in Figs 1 and 2, to present the high variation of eccentricity given by equation (5). The explanation for this inconsistency is in the use of osculating elements, which are based on the Keplerian problem, in order to determine the eccentricity of an orbit that is disturbed by the oblateness of the central body.

Returning to Fig. 1, note that it is possible to obtain an almost circular orbit around an oblate body using an appropriate velocity, which is different from the circular Keplerian velocity, as is the case for the purple orbit. This trajectory has an initial velocity equal to $v_g = 1257.65 \text{ km h}^{-1}$. The longitudinal evolution of the orbital radius of this orbit is constant, as shown in the top plot of Fig. 2 (purple line). The geometric eccentricity is also constant longitudinally and approximately zero, as expected. However, note that when calculating the osculating eccentricity of this orbit (the dashed purple line in the bottom plot), a constant value of 0.044 is obtained, even though the orbit is almost circular. This fact highlights the incompatibility of using osculating elements for this type of system, i.e. osculating elements do not describe the real geometry of the orbit when the central body is significantly oblate.

The proper velocity (v_g), which produces almost circular orbits, is called the geometric velocity. The geometric elements arose from the need to determine a new set of elements that would no longer treat the oblateness of the central body as a perturbation, but as a characteristic of the system, representing the real geometry of the orbit. To solve this problem, Greenberg (1981), Borderies & Longaretti (1987, 1994), and Longaretti & Borderies (1991) developed geometric elements, which are derived from epicyclic theory.

The equations of the mean motion of the Keplerian problem are given by (Murray & Dermott 1999)

$$n = \left(\frac{\mu}{a^3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

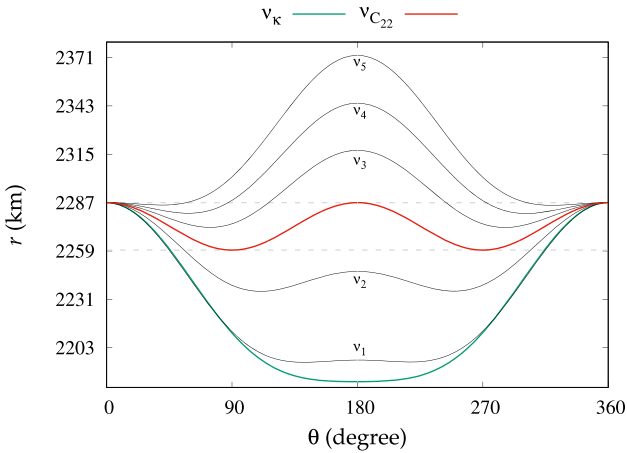


Figure 3. Longitudinal evolution of the orbital radius of orbits around a body with the same mass and ellipticity coefficient, $C_{22} = 0.049$, from Haumea for the case without central body rotation. The initial radial distance from all orbits to the centre of mass is 2287 km. The green line indicates the orbit with circular Keplerian initial velocity, $v_k = 1230.7 \text{ km h}^{-1}$, the red line represents the orbit with initial velocity $v_{C22} = 1248.7 \text{ km h}^{-1}$ and the black lines are velocity orbits: $v_1 = 1236 \text{ km h}^{-1}$, $v_2 = 1243.3 \text{ km h}^{-1}$, $v_3 = 1252.8 \text{ km h}^{-1}$, $v_4 = 1256.4 \text{ km h}^{-1}$, and $v_5 = 1260 \text{ km h}^{-1}$. The eccentricity of the orbit with velocity v_k is $\Delta e \approx 0.3$ and the radial variation is $\Delta r \approx 104 \text{ km}$. For the orbit case with initial velocity v_{C22} the eccentricity is $\Delta e \approx 0.15$ and the radial variation is $\Delta r \approx 27.5 \text{ km}$.

and the equation of the mean motion of the central body problem with oblateness (Borderies & Longaretti 1994):

$$n_{J_2} = \left(\frac{\mu}{a_g^3} \right)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{R}{a_g} \right)^2 J_2 - \frac{9}{32} \left(\frac{R}{a_g} \right)^4 J_2^2 + \frac{27}{128} \left(\frac{R}{a_g} \right)^6 J_2^3 \right], \quad (7)$$

considering $J_4 = J_6 = 0$, $e = I = 0$, a_g , the geometric semimajor axis, and $\mu = GM$. Note that the mean motion of an orbit around an oblate body has an increase compared to the mean motion of the two-body problem. Thus, for certain studies of dynamics in the region of bodies with high oblateness, it is recommended that the osculating elements, which are based on the problem of two bodies, are discarded, and to use geometric elements instead, which are based on the problem with an oblate central body.

Therefore, knowing the dynamic effects caused by an oblate body, in the following section we discuss the implications caused by a prolate central body, considering the ellipticity coefficient C_{22} in the gravitational potential.

3 ELLIPTICITY COEFFICIENT C_{22}

In this section, the geometric implications of orbits when the primary body is prolate will be discussed. Again a body with physical parameters equal to Haumea (Table 1) is used as an example. However, considering in this case $J_2 = 0$ and without rotation of the primary, we numerically integrate the orbit of a particle with an initial radial distance of 2287 km and with a circular Keplerian initial velocity (green line in Fig. 3). The amplitude of variation of the orbital radius ($\Delta r \approx 104 \text{ km}$) is still significant and even smaller when compared to the case discussed in the previous section, when only the oblateness coefficient J_2 of Haumea was considered. In this case,

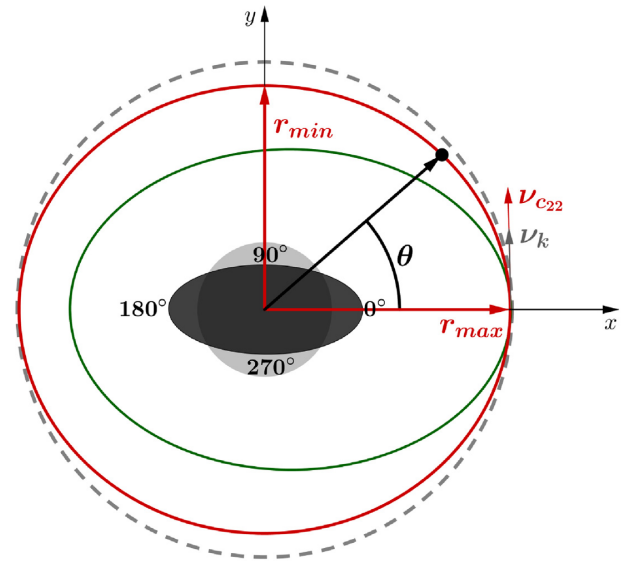


Figure 4. Schematic diagram of orbits around spherical and prolate bodies. The grey dashed line is a circular orbit around a spherical body (in grey) with circular Keplerian initial velocity. The green line represents a highly eccentric orbit around a prolate body located in one of the foci of the orbit and with initial circular Keplerian velocity. The red trajectory shows an elliptical orbit with low eccentricity around the prolate body located in the centre of this orbit. The initial velocity (v_{C22}) of this last elliptical orbit is different from the circular Keplerian velocity. The angle θ is the angular position of the particle in the orbit. At distances $r_{\min}$ and $r_{\max}$ indicates the smallest and largest radius of the orbit in red and the difference between these values defines the radial variation Δr .

the eccentricity due to the geometry of the orbit is approximately $e_{C22} = 0.023$, considering the radius of the furthest approximation to the centre of mass $r_{\min} = 2183.32 \text{ km}$ and the closest approximation $r_{\max} = 2287 \text{ km}$. The eccentricity value for this case was determined using equations (1) and (2), only changing the J_2 index by C_{22} .

In the schematic diagram of Fig. 4, the grey circle illustrates a hypothetical spherical body with the same total body mass with the ellipticity represented in black, as seen in the Ox - y plane. Note that there is a larger concentration of mass in the two bowls of the body (oriented in the Ox -axis) and less material in the region intermediate to these bowls (oriented in the Oy -axis). This difference in mass distribution in an ellipsoidal body causes azimuthal variation in the gravitational potential.

The circular orbit (the grey dashed line in Fig. 4) is the trajectory that the particle with a circular Keplerian initial velocity (v_k) describes around the spherical central body. The eccentric orbit, indicated by the green line and with an initial circular Keplerian velocity (v_k), is generated by a particle around the body with ellipticity. When the body is oblate, using circular Keplerian velocity as the initial condition of orbits around elongated bodies produces high variations in the eccentricity and orbital radius, as shown in the graphs of Fig. 3. This is due to the difference in the mass distribution in the body and the azimuthal asymmetry of the equator. To understand this trajectory, we can analyse Fig. 5, which shows the longitudinal evolution of the orbital radius and the variation in the velocity module of this orbit, as seen in the Ox - y plane. Although visually appearing circular, this orbit is eccentric with the central body in one of the foci. At starting point P1, the velocity is circular Keplerian, calculated from osculating elements that refer to the problem of two bodies, where a point of mass body is

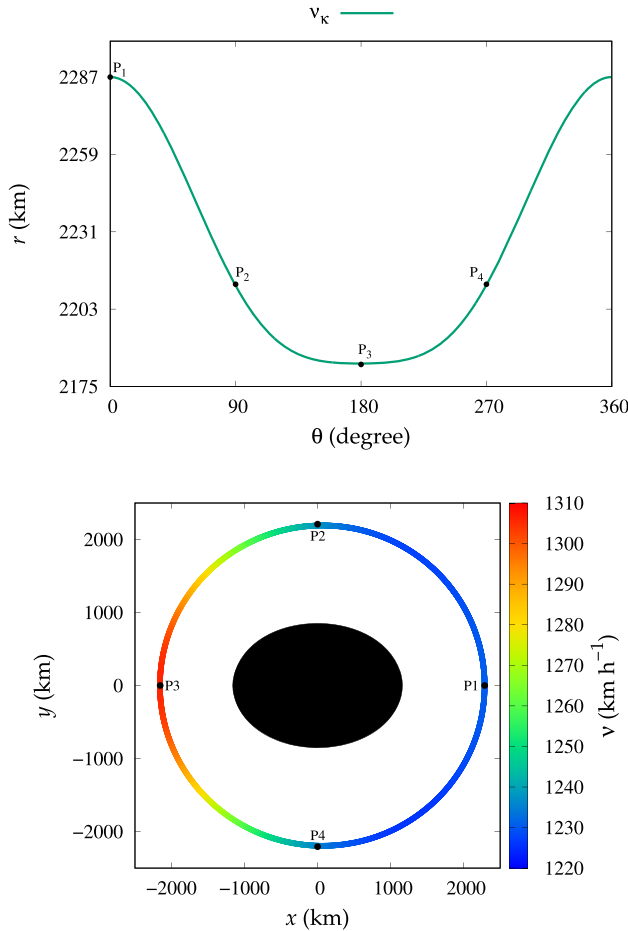


Figure 5. Orbit of a particle with initial circular Keplerian velocity around Haumea. On the top plot is shown the longitudinal evolution of the orbital radius. In the bottom plot is the orbit in the Oxy plane. The colour scale indicates the velocity value. The initial distance of the particle to the centre of mass is 2287 km and the initial circular Keplerian velocity is equal to $v_k = 1230.7 \text{ km h}^{-1}$. The central body is located in one of the foci of the ellipse and there is an apocentre (P_1 at $r = 2287 \text{ km}$), a pericentre (P_3 at $r = 2183.32 \text{ km}$), and two intermediate points (P_2 and P_4).

considered. However, at this location the elongated body has more mass; therefore, the circular Keplerian velocity is less than necessary to keep the particle in a circular orbit. The potential of the prolate body is larger than spherical at $\theta = 0^\circ$ and lower at $\theta = 90^\circ$. Therefore, the velocity has to be higher than the circular Keplerian at $\theta = 0^\circ$ and lower at $\theta = 90^\circ$. As the particle evolves counterclockwise in its trajectory and is attracted by the central body due to the low initial velocity, the elliptical body has its mass concentration decreasing until it reaches the intermediate point between the two bulges, P_2 . From this second point, the mass concentration of the central body increases again, and the particle gains velocity until it reaches the second bulge, P_3 , reaching the largest orbit velocity and the shortest distance from the centre of mass (pericentre). Between points P_3 and P_4 , the mass of the central body decreases again, and the particle moves away from the body and loses velocity. This process of a loss of velocity and the distance from the centre of mass continues until the starting point of the orbit, P_1 , when the particle reaches the largest radial distance again (apocentre).

The large range in variation of the eccentricity and orbital radius can be reduced by adjusting the initial velocity, generating an orbit

closer to circular, as was done for the case of the oblate primary, discussed in Section 2. Therefore, when increasing the initial velocity of the particle, it is observed that the amplitude of the orbital radius variation decreases, as seen by the two black lines (v_1 and v_2) of Fig. 3. As illustrated in Fig. 4, the smallest radius aligned with the smallest semi-axis of the body (in $\theta = 90^\circ$ and $\theta = 270^\circ$) and the largest radius aligned with the semimajor axis (in $\theta = 0^\circ$ and $\theta = 180^\circ$). Fig. 3 shows that there is a specific velocity (v_{C22}) that generates an orbit with the smallest radial variation, as indicated by the red line, with $r_{\min} = 2259.51 \text{ km}$ and $r_{\max} = 2287 \text{ km}$ resulting in a $\Delta r \approx 27.5$, approximately one quarter of the radial variation of the orbit with a circular Keplerian initial velocity. As the initial velocity continues to increase, the radial variation increases again, as seen from the other three orbits represented by the black lines v_3 , v_4 , and v_5 . The velocity v_{C22} , found empirically, in addition to considerably reducing the radial variation, also produces a symmetric orbit. However, unlike what occurs when using geometric velocity for systems composed of an oblate central body, in which the radial variation is almost zero, in the case of a body with ellipticity there is still a variation of the radius, even when using an adequate velocity. This is due to the asymmetry of the body's equator, as stated at the beginning of this section. Therefore, it is not possible to obtain a circular orbit, but we can manage to reduce it to a minimum radial variation in cases of trajectories close to very elongated bodies. Fig. 6 shows the longitudinal evolution of the orbital radius (top plot) and the variation in the orbit velocity seen in the Ox - y plane (bottom plot). Note that the elliptical orbit with initial velocity v_{C22} has the primary body at its centre and not in one of the foci. Consequently, there is symmetry in the orbit, with two points more distant to the centre of mass (P_1 and P_3) and two points closer (P_2 and P_4). The points P_1 and P_3 will be called the apocentre, and P_2 and P_4 will be called the pericentre. Due to this characteristic of describing an elliptical orbit centred on the primary body, which occurs only for orbits with an initial velocity that produce the least radial variation, the eccentricity of the orbit with velocity v_{C22} can be calculated using the concept of eccentricity of an ellipse; therefore, $e_{C22} = 0.15$. Note that the eccentricity is larger than that of the orbit with a circular Keplerian initial velocity; however, the radial variation is considerably smaller in the orbit with initial velocity v_{C22} . This is due to a change in the orbit configuration; in one case, the primary is in foci of the ellipse, while in the other case it is in the centre of the ellipse. Therefore, the best comparison parameter is the radial variation. This change in the configuration of the orbit around an elongated body also causes changes in the orbital elements. Such changes will be presented and discussed in Section 6.

Therefore, knowing that it is possible to decrease the variation in the orbital radius around elongated bodies by adjusting the initial velocity, in the following section we detail the approach used in this work to determine this new velocity.

4 APPROACH

To determine an orbital velocity that describes an orbit of minimal eccentricity taking the gravitational potential into account and considering the C_{22} coefficient, we identified that by increasing the initial velocity value, the amplitude of the radial variation of the orbit decreases, as shown in Fig. 7. In this example, the system consists of a particle with an initial orbital radius of 2287 km and a central body with the same mass and Haumea ellipticity coefficient without rotation. We increased the initial velocity and integrated the orbit repeatedly and compared the amplitude of the radial variation of

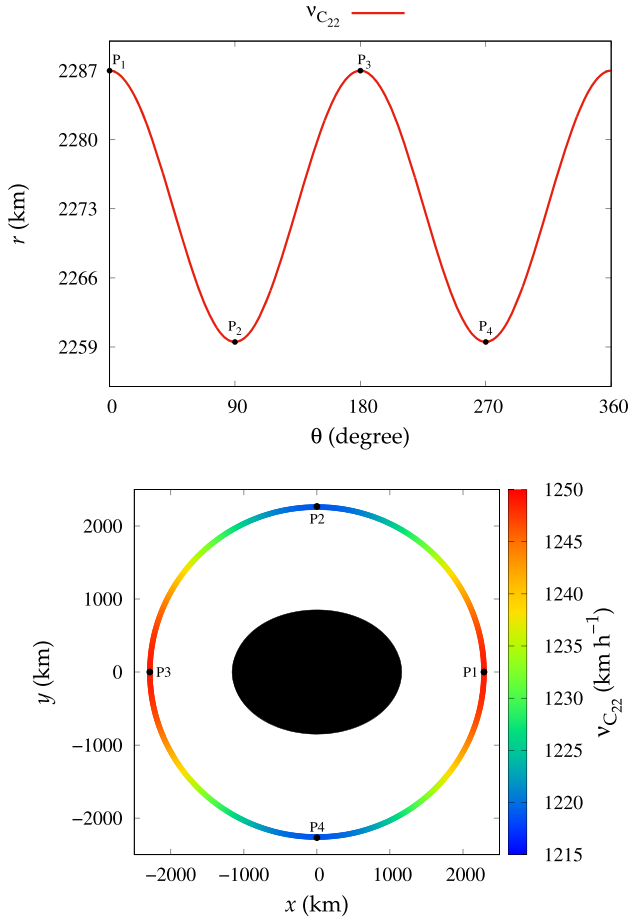


Figure 6. Orbit around Haumea. On the plot top is the longitudinal evolution of the orbital radius. In the bottom plot is the orbit in the Oxy plane. The colour scale indicates the variation in orbit velocity. The initial distance of the particle to the centre of mass is 2287 km and the initial velocity is $v_{C22} = 1248.7 \text{ km h}^{-1}$. The primary body is at the centre of the elliptical orbit and there are two apocentres (P_1 and P_2 , both with $r = 2287 \text{ km}$) and two pericentres (P_3 and P_4 , both with $r = 2259.52 \text{ km}$).

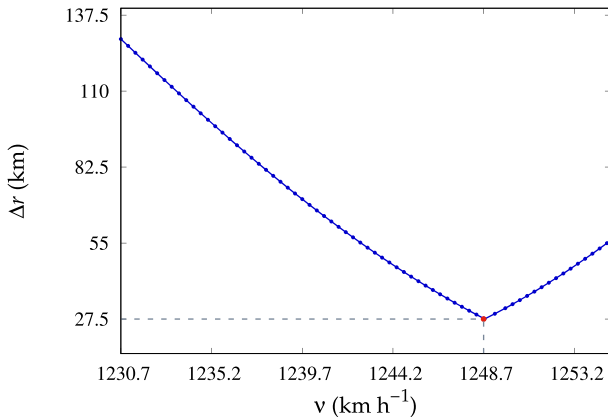


Figure 7. Evolution of the amplitude of the radial variation Δr , in km, as a function of the initial velocity of the orbit, in km h^{-1} . The system consists of a particle with an initial orbital radius of 2287 km and a central body with the same mass ($4.006 \times 10^{21} \text{ kg}$) and ellipticity coefficient ($C_{22} = 0.049$) of Haumea, and without its rotation. The minimum point, in red, indicates the value of v_{C22} that generates the smallest amplitude of variation in the orbital radius.

Table 2. Physical parameters used in the numerical simulations.

Mass (kg)	R (km)		ρ (km m ⁻³)		
3.84×10^{12}	1		917		
3.84×10^{18}	100				
3.84×10^{21}	1000				
1.13×10^{13}	1		2700		
1.13×10^{19}	100				
1.13×10^{22}	1000				
C_{22}	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
		r_i (km)	r_f (km)	Δr (km)	
r (km)		$2R$	$5R$	0.2	

each trajectory. As seen in Fig. 7, at a given velocity $v_{C22} = 1248.7 \text{ km h}^{-1}$, we have the smallest radial variation with $\Delta r = 27.5 \text{ km}$.

In this work, we performed the described process to find the value of v_{C22} for a set of physical parameters in order to determine an empirical equation that allows the approximate value of this velocity to be calculated as a function of the ellipticity coefficient, C_{22} , and the initial radial distance from the particle to the centre of mass of the primary. The parameters can be found in Table 2 and were chosen to cover the orders of mass quantities of bodies such as asteroids, centaurs, and dwarf planets. To calculate the masses, we used the density of ice water $\rho = 917 \text{ kg m}^{-3}$ and basalt $\rho = 2700 \text{ kg m}^{-3}$, as they are the most common materials found in the small bodies of the Solar system. The ellipticity coefficients were selected based on the known values of C_{22} for bodies such as Haumea, which has $C_{22} = 0.049$ or Chariklo, which can assume values of $C_{22} = 0.014$ or $C_{22} = 0.018$ for their triaxial or Jacobi ellipsoid forms, respectively. We calculated Chariklo's ellipticity coefficients using the semi-axis values estimated by Leiva et al. (2017) and by adopting the same approach practiced in Winter et al. (2019) for calculating the term C_{22} for Haumea. The arrangement of the numerical simulations was organized according to the parameters given in Table 2. For each combination of the mass and ellipticity coefficient, simulations were made for radial distances ranging from $2R$ to $5R$, where $R = (ABC)^{1/3}$ is the equivalent radius of the body. The radial distances in this work will be all in units of the equivalent radius of the central body. The lower limit of $2R$ is sufficiently close to the body. For shorter distances, it would be necessary to consider other harmonics in the gravitational potential to represent the possible features of the body, such as a crater. The choice of the upper limit of $5R$ is also appropriate for our analysis, since for larger distances the effect of C_{22} becomes negligible. In addition to these sets of parameters, the central body is considered to not be rotating. In Section 7, we discuss the case of adding the rotation of the central body. In the following section, we present and discuss the results obtained for cases in which the central body does not rotate.

5 ORBITS AROUND AN ELONGATED BODY WITHOUT ROTATION

A body when modelled by a triaxial ellipsoid has its gravitational potential, fixed in the plane (Oxy), as described by the equation:

$$U(r, \theta) = -\frac{\mu}{r} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 J_2 + 3 \left(\frac{R}{r} \right)^2 C_{22} \cos(2\theta) \right], \quad (8)$$

where G is the gravitational constant, M is the mass, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ is the radial distance, and R is the equivalent radius of the body.

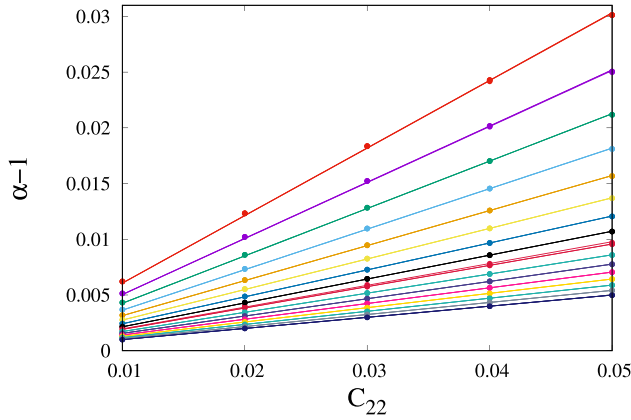


Figure 8. Values of the coefficients $(\alpha - 1)$ as a function of the ellipticity coefficients C_{22} . The dots indicate the measured values of $(\alpha - 1)$ for each case. The lines are generated by fits using the data obtained and the colours are associated with the initial radial distances from the orbit to the centre of mass of the system (in units of the equivalent radius of the central body, R).

Using the combinations of physical parameters presented in Table 2, we integrate particle orbits around ellipsoidal bodies using the potential of equation (8); however, we consider $J_2 = 0$ in order to perform the velocity correction by computing only the ellipticity coefficient. The integration time for each simulation was an orbital period. Consequently, this time is different for each set of parameters considered in the simulations.

The velocity $v_{C_{22}}$ can be written as a function of the circular Keplerian velocity:

$$v_{C_{22}} = (\alpha - 1)v_k, \quad (9)$$

where $(\alpha - 1)$ is the adjustment coefficient that must be applied at the circular Keplerian velocity in order to obtain the initial velocity that will describe an orbit with minimal radial variation, $v_{C_{22}}$, around a body prolate. To determine the velocity $v_{C_{22}}$, we may find an empirical expression for α , since v_k can be easily calculated by the two-body problem. This α coefficient can be written according to the physical parameters of the central body and, in this case, it is pertinent to choose that α is a function of C_{22} , therefore,

$$v_{C_{22}} = v_k(1 + \beta C_{22}). \quad (10)$$

Thus, when C_{22} is null, for the case of a spherical body, $\alpha = 1$ and thus, $v_{C_{22}}$ becomes the circular Keplerian velocity of the two-body problem, v_k . To determine the β coefficients, we fixed the initial radial distance r and adjusted the curve between $(\alpha - 1)$ and C_{22} for each of the initial radial distances to the central body, as shown in Fig. 8.

For a more complete equation, it is interesting to include the radial distance dependence. Therefore, fixing the mass again and analysing the points of the graphs of the coefficients β as a function of r (Fig. 9), we find that equation (11) fits the data well.

$$\beta = \kappa(r)^{-\gamma}. \quad (11)$$

In Fig. 9, the colours of the curves refer to the mass of the central body. The values of the κ and γ coefficients are approximately constant in all fits around the mean values of $\kappa = 2.354 \pm 0.023$ and $\gamma = 1.958 \pm 0.009$. The blue line shows the fit of equation (11) for these values. The red line indicates the fit for approximate values of $\kappa = 2.4$ and $\gamma = 2$. Note that the rounded values of κ and γ cause a small detachment from the fit with greater precision; however, they still preserve the good fit for all simulations.

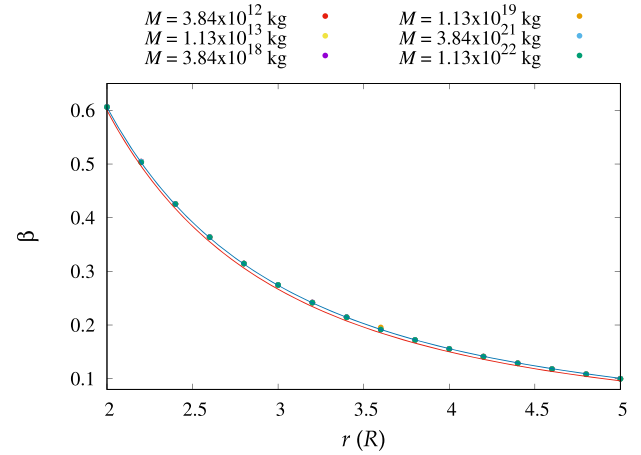


Figure 9. Values of β as a function of the initial radial distance of the orbits. The points are the β values measured in each case and their respective colours indicate the masses of the bodies. The blue line shows the fit for equation (11) using the coefficients $\kappa = 2.354$ and $\gamma = 1.958$. The red line is generated by equation (11) but adopting the approximation of the coefficients for $\kappa = 2.4$ and $\gamma = 2$.

Thus, equation (10) can be rewritten as

$$v_{C_{22}} = v_k [1 + 2.45r^{-2}C_{22}]. \quad (12)$$

It can be seen that the equation obtained does not depend on the mass of the central body. Using equation (12) to calculate the initial velocity $v_{C_{22}}$ of the orbit of a particle with $r = 2287$ km around a central non-rotating body with the same mass and coefficient of ellipticity Haumea, we find that $v_{C_{22}} = 1248.7$ km h⁻¹, which is the same initial velocity determined by the empirical approach. This shows that the equation has a good precision for the cases studied in this work. Therefore, for problems composed of very elongated and non-rotating bodies, it is recommended that this new equation be adopted in order to determine the proper velocity.

Another important parameter to be determined is the mean motion, $n_{C_{22}}$, of the orbits around a central body with an ellipticity coefficient. In the following section, we present this discussion.

6 ADAPTED KEPLER'S THIRD LAW FOR C_{22}

As shown previously, the orbits with an initial velocity $v_{C_{22}}$ show little radial variation due to the asymmetry of the central body. Fig. 10 shows a sample of four orbits around a body with a mass of 1.13×10^{22} kg, $C_{22} = 0.05$, $R = 1000$ km, and not rotating. Note that visually, the trajectories appear to be circular (coloured lines), but there is a small difference between $r_{\max}$ and $r_{\min}$, which we will now call the semimajor axis $a_{C_{22}}$ and semiminor axis $b_{C_{22}}$ of the orbit, respectively. In this work, the index C_{22} in the elements is used when considering the actual geometry of the orbit, i.e. using the values of $a_{C_{22}}$ and $b_{C_{22}}$, when the system has a prolate central body. In Table 3, we can compare the values of the major and minor semi-axes and eccentricities in the case of $v_{C_{22}}$, where the primary body is in the centre of the orbit, and v_k , where the primary body is located in one of the foci. Adjusting the initial velocity using equation (12) drastically decreases the radial variation of the orbit compared to the case of an orbit with a circular Keplerian initial velocity.

In a usual Keplerian system, the central body is located in one of the foci of the elliptical orbits around it. However, we identified in our study that this characteristic is not preserved when the primary body is significantly elongated, and the orbits are initiated with velocity

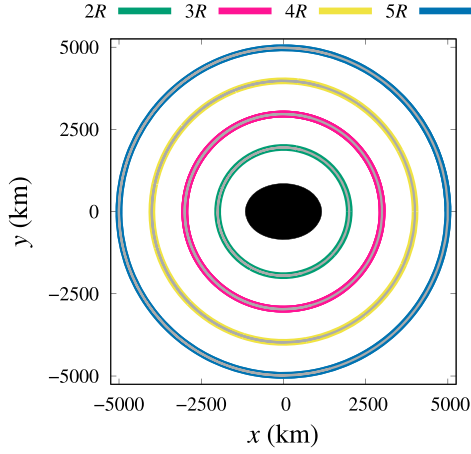


Figure 10. Orbits in the $Ox-y$ plane around an elongated body (black ellipse) with a mass of 1.13×10^{22} kg, $C_{22} = 0.05$, $R = 1000$ km, and without rotation the central body. The colours indicate the initial radial distance of the orbits in unit of the radius of the primary. The grey lines overlaid the coloured lines, are plots of equations of ellipses using the values of the semi-axes $a_{C_{22}}$ and $b_{C_{22}}$ obtained through measurement of $r_{\max}$ and $r_{\min}$, respectively, for each corresponding orbit. The values of the axes and eccentricities can be found in Table 3.

Table 3. Semi-axes (km) and orbital eccentricities values around an elongated body with a mass of 1.13×10^{22} kg, $C_{22} = 0.05$, $R = 1000$ km, and without rotation. The data refer to two types of position of the central body in relation to orbit: in the centre (columns 1–3) and in one of the foci (columns 4–6) with Keplerian initial velocity. The initial radial distance from the orbit to the centre of mass is the same in both cases. The index C_{22} indicates that the elements were calculated due to the geometry of the orbit.

$a_{C_{22}}$	Centre			Focus		
	$b_{C_{22}}$	$e_{C_{22}}$	$a_{C_{22}}$	$b_{C_{22}}$	$e_{C_{22}}$	$a_{C_{22}}$
2000	1949.04	0.22	1889.46	1886.17	0.059	1889.46
3000	2969.43	0.15	2921.00	2919.94	0.027	2921.00
4000	3974.90	0.11	3939.31	3939.87	0.015	3939.31
5000	4979.94	0.09	4950.76	4950.52	0.010	4950.76

$v_{C_{22}}$. In this case, the orbits are still elliptical, with a radial variation due to the asymmetry of the central body that occupies the centre of these orbits, as shown in Fig. 10. With the values of semi-axes a and b of the orbits, we plot ellipses (grey lines) corresponding to each orbit integrated numerically (coloured lines). Note that the orbit coincides with the ellipse generated using the values of the semi-axes a and b . The difference between these two curves can be neglected. This shows that the orbit around an elongated body is an ellipse with the body at its centre.

Changing the location of the central body in relation to the orbits causes changes in the orbital elements and in Kepler's Third Law. Thus, from the data obtained by the numerical simulations of this work, we were able to determine an adaptation for Kepler's Third Law in the case of an elongated body. For the sake of simplicity, we will present the data for systems with lower and higher masses. However, the results obtained are valid for the other four mass values used in this paper. First, the adaptation will be made through a coefficient, then

$$n_{C_{22}}^2 a_{C_{22}}^3 = \Gamma GM, \quad (13)$$

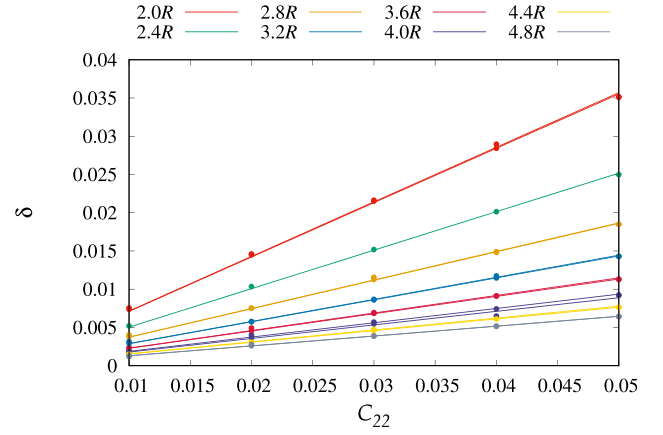


Figure 11. The values of δ as a function of the ellipticity coefficient C_{22} . The points refer to the value of δ measured for each C_{22} . The lines are made for each initial radial distance of the orbit that corresponds to the semimajor axis, indicated by the colours.

where $G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ and $n_{C_{22}}$ is the mean motion of orbits calculated by

$$n_{C_{22}} = \frac{2\pi}{T_{C_{22}}}. \quad (14)$$

The orbital period $T_{C_{22}}$ was measured in each of the orbits, computing the time necessary for the particle to return to the initial position it was in when the numerical integration began. The Γ coefficient can be written according to the ellipticity coefficient:

$$n_{C_{22}}^2 a_{C_{22}}^3 = (1 + \delta C_{22}) GM. \quad (15)$$

Thus, when C_{22} is null, Kepler's Third Law becomes the usual law. To determine δ , we fixed the semimajor axis and made the fits between δ and the ellipticity coefficients C_{22} . The results of the fits can be found in Fig. 11, where the colours indicate the semimajor axis considered. Note that the results do not depend on the mass of the central body, but only on the semimajor axis of the orbit, the radius of the body and the ellipticity coefficient, since for a given $a_{C_{22}}/R$ and C_{22} the value of δ is the same for the two analysed masses. Therefore, it is interesting to include in the Γ expression the parameter $R/a_{C_{22}}$, in addition to C_{22} . Therefore, we fit between the coefficients of each of the curves in Fig. 11 and the semimajor axis, as shown in Fig. 12. Equation (16) is the one that best fit the data. The values of the ζ and η coefficients are approximately constant around the mean values of $\kappa = 2.730 \pm 0.012$ and $\gamma = 1.933 \pm 0.005$. The red line corresponds to the curve obtained by the equation with the approximate $\zeta = 2.74$ and $\eta = 1.94$ coefficients.

$$\tau = \zeta (a_{C_{22}})^{-\eta} \quad (16)$$

Thus, the expression of Kepler's Third Law adapted for the case of an elongated central body, equation (13), can be rewritten as

$$n_{C_{22}}^2 a_{C_{22}}^3 = [1 + 2.74 a_{C_{22}}^{-1.94} C_{22}] GM. \quad (17)$$

In addition to the equation for the mean motion, we determine an empirical equation for the eccentricity of the orbit. This expression was also obtained by means of fitting, fixing the C_{22} and adjusting the curve between the eccentricity and the semimajor axis, as shown in Fig. 13. The eccentricity was calculated for each orbit having the values of $a_{C_{22}}$ and $b_{C_{22}}$, which can be written as

$$e_{C_{22}} = (0.11 + 9.6 C_{22} - 57 C_{22}^2) a_{C_{22}}^{-1}, \quad 0.01 \leq C_{22} \leq 0.05. \quad (18)$$

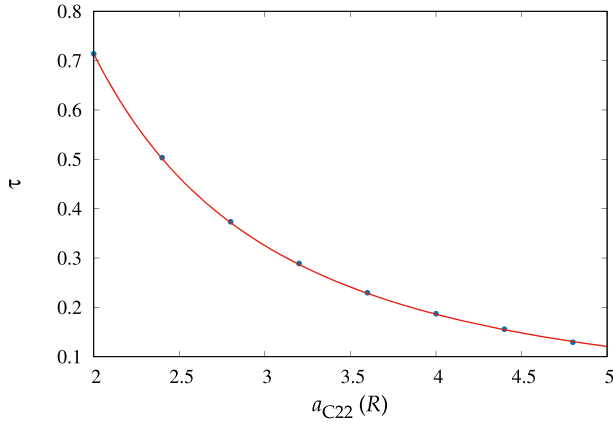


Figure 12. Values of the τ coefficient as a function of the semimajor axis of the orbits around the central body. The red curve is plotted using equation (16) with the coefficient $\zeta = 2.74$ and $\eta = 1.94$.

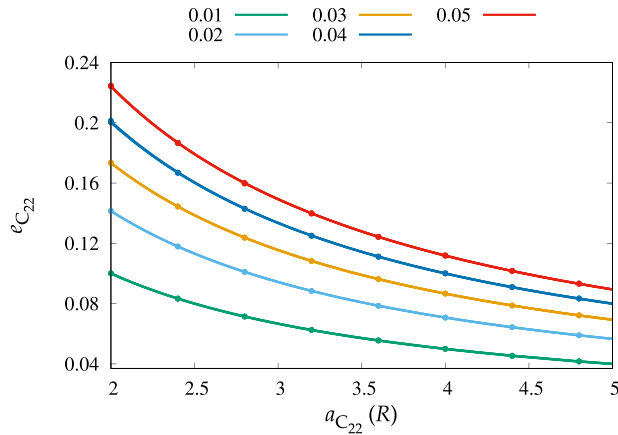


Figure 13. Eccentricity values as a function of the semimajor axis in units of the equivalent radius of the central body. The points are the eccentricity values measured for each case. The curves are fits between the two elements. The eccentricity is independent of the mass of the central body. The colours of the lines indicate the value of the ellipticity coefficient.

The independent term of this empirical equation varies around 0.11 ± 0.007 , the linear term varies from 9.629 ± 0.553 and the quadratic term with the largest variation from -57.143 ± 9.035 . As shown in Fig. 13, the rounding done on the coefficients preserves the good fit for all the simulations. The eccentricity is independent of the mass. Analysing Fig. 13, it can be seen that the further from the body, the smaller the eccentricity of the orbits. Thus, at a given distance from the central body, the orbits will be circular because the effect of the ellipticity is very small. From this distance, the usual Kepler's Third Law becomes valid again.

7 CENTRAL BODY ROTATION

Thus far, all the results and discussions presented are related to systems in which the central body does not rotate. In this section, we introduce this new parameter in the simulations and empirically determine the velocity v_{C22} for each orbit. To understand the dependence on rotation, we chose only one case, which approximates

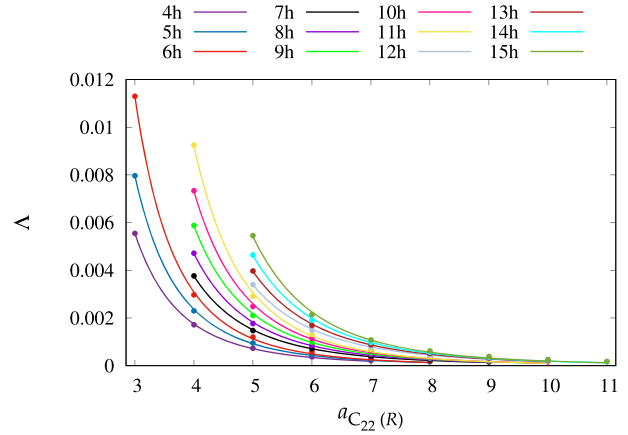


Figure 14. Values of the Λ coefficient as a function of the semimajor axis. The points are the Λ values measured for each case of the semimajor axis. The coloured curves correspond to the fits made using the data. Colours are associated with the rotation periods of the central body.

the Haumea mass, with parameters equal to $M = 3.84 \times 10^{21}$ kg, $C_{22} = 0.05$ and $R = 1000$ km. Since Haumea has a rotation period of approximately 3.9155 h which is considered low, we chose the rotation interval of the central body ranging from 4 h to 15 h. The semi-major axis ranges from $3R$ to $11R$. Distances less than $3R$ cause collisions with the primary or ejections. For distances larger than $11R$, the effect of the ellipticity of the body becomes very small, with no need for corrections in the initial velocity; that is, the circular Keplerian velocity is adequate to produce orbits with a minimal radial variation. Including the rotation of the central body, it is possible to find the velocity v_{C22} in which the orbit has a minimal radial variation, as for the case without rotation. In the case of the non-rotating body, the velocity adjustment was made by adding small amounts until finding v_{C22} ; however, when the rotation is added, the adjustment is negative, i.e. the velocity v_{C22} must be less than the circular Keplerian velocity, for the cases studied in this work. This is because the central body rotates faster than the particle's orbital period. Thus, the velocity v_{C22} can be written as a function of the circular Keplerian velocity as $v_{C22} = (1 - \Lambda)v_k$, where $(1 - \Lambda)$ is the adjustment coefficient. In Fig. 14, the points are the values of Λ as a function of the semimajor axis (a_{C22}) for each rotation period of the central body (indicated by the colours). Note that Λ tends to 0 with an increase in the semimajor axis, which is expected, because the further away from the centre of mass, the less the ellipticity effect. The lines in Fig. 14 are obtained by fitting according to an equation in the form of $\Lambda = \epsilon a_{C22}^{-\xi}$. These curves have approximately the same behaviour, undergoing only one shift depending on the rotation period. Note that the curves do not have the same number of points. This is because collisions, ejections, and the region where the ellipticity effect can be neglected occur at different semi-major axes for the rotation periods. For example, for the 4 h rotation period, orbits internal to $3R$ collide or are ejected and external to $7R$ are orbits in which the circular Keplerian velocity is sufficient to describe trajectories with a low radial variation. It was not possible to obtain a general equation for the velocity v_{C22} as a function of the rotation period of the central body, due to the complexity of the case. However, we identified the type of behaviour described by the adapted velocity.

As shown in the previous sections, the relative position between the orbiting particle and the shape of the central body is important

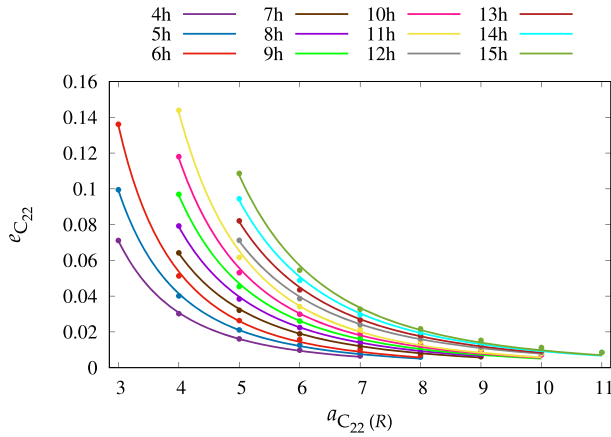


Figure 15. Eccentricity values as a function of the semimajor axis in the rotating system. The points are the measured values of eccentricity for each case of the semimajor axis. The coloured curves are the fits made using the collected data. Colours are associated with the rotation periods of the central body.

for understanding the dynamics of the orbit. Therefore, to obtain the relation between the eccentricity and the semimajor axis of the orbit, we will use the rotating system (a frame that rotates along with the central body) as in this system; thus, the relative position is preserved. This relation is shown in Fig. 15. The eccentricity (points on the plot) was calculated for each orbit via the same method used in the case of the central body without rotation. The curves are fits made from the collected data using a function such as $e_{C22} = \chi a_{C22}^{-\Psi}$. As with the velocity v_{C22} , the rotation period (indicated by the colours) causes a detachment between the curves. Due to the variation in the values of the χ and Ψ coefficients, it was not possible to obtain good fits for a general equation of eccentricity that depends on the semimajor axis and the rotation period of the central body. However, as shown in Fig. 15, for a given fixed rotation period, it is possible to obtain an equation between the eccentricity and semimajor axis.

The period of the orbit around a prolate body (T_{C22}), as mentioned earlier, changes compared to the period of a circular Keplerian orbit around a spherical body. Thus, by measuring the orbital period of each orbit considered, we were able to obtain an expression as a function of the semimajor axis (in units of R) given by

$$T_{C22} = 3.4a_{C22}^{1.5}. \quad (19)$$

This equation is valid independent of the central body rotation period, as shown in Fig. 16. The coefficients are approximately constant, around the mean values: 3.427 ± 0.008 and 1.503 ± 0.001 . Note that the rounding of these coefficients adopted in equation (19) preserves a good fit for all simulations. Equation (19) resembles Kepler's Third Law, except by the 3.4 coefficient.

8 CONCLUSIONS

Through numerical simulations, including the C_{22} coefficient in the gravitational potential, we identified that the ellipticity of the central body causes a considerable increase in the radial variation of the equatorial particle orbits when using the circular Keplerian velocity as an initial condition for integration. We identified that this is a dynamic effect caused by an inadequate choice of the initial velocity. There is no method in the literature for determining the appropriate

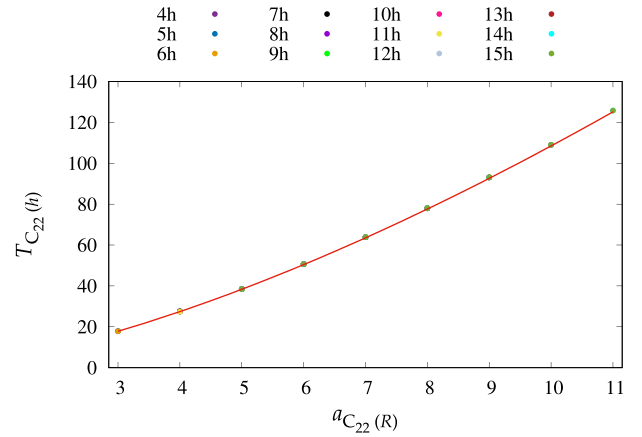


Figure 16. Values of the orbital period T_{C22} as a function of the semimajor axis (in units of the equivalent radius of the central body) in the inertial system. The points are the measured values of the orbital period for each case of the semimajor axis and the colours are associated with the rotation periods of the central body. The red curve is the fit made with the data collected generating the equation (19).

initial velocity for orbits with minimal radial variation around bodies with ellipticity. Therefore, to determine a velocity so that orbits submitted to the gravitational potentials of bodies with ellipticity are close to circular, we empirically found the corrected velocity v_{C22} for certain radial distances for a set of physical parameters. Making curve adjustments generated by the data from the numerical simulations, we developed equations that can be used to calculate the velocity v_{C22} , eccentricity and mean motion as a function of the ellipticity coefficient C_{22} , and the semimajor axis of the primary. We identified that in addition to the low amplitude of radial variation, the velocity v_{C22} produces orbits that are ellipses, where the primary body stops occupying one of the foci and starts to be in the centre of the orbit.

Using the same empirical process, we explore the region around the body with different rotation periods. For this analysis, we consider a body with parameters similar to those of Haumea. We found that for bodies with a high rotation, the region in which it is necessary to use the proper velocity v_{C22} is smaller; that is, higher rotation periods decrease the dynamic effect of the C_{22} coefficient experienced by particles that are orbiting this body.

We identified the behaviour of velocity v_{C22} and the eccentricity for different radial distances, fixing the rotation period. Finally, orbital periods were also measured to determine the empirical equation to calculate T_{C22} as a function of the semimajor axis.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was financed in part by Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES (Finance Code 001), National Council for Scientific and Technological Development (CNPq, proc. 305210/2018-1 and proc. 307724/2017-4) and FAPESP (process. 2016/03727-7 and process. 2016/24561-0). Their support is gratefully acknowledged.

DATA AVAILABILITY

The data underlying this article will be shared on reasonable request to the corresponding author.

REFERENCES

- Borderies N., Longaretti P. Y., 1987, *Icarus*, 72, 593
 Borderies N., Longaretti P. Y., 1994, *Icarus*, 107, 129
 Braga-Ribas F. et al., 2014, *Nature*, 508, 72
 Carvalho J. P. S., 2017, J. Phys. Conf. Ser., 911, 012011
 Chandrasekhar S., 1942, Principles of Stellar Dynamics, University of Chicago Press
 Fornasier S. et al., 2014, *A&A*, 568, L11
 Greenberg R., 1981, *AJ*, 86, 912
 Leiva R. et al., 2017, *AJ*, 154, 159
 Longaretti P. Y., Borderies N., 1991, *Icarus*, 94, 165
 Marzari F., 2020, *A&A*, 643, A67
 Murray C. D., Dermott S. F., 1999, Solar System Dynamics. Cambridge University Press, p. 575
 Ortiz J. L. et al., 2017, *Nature*, 550, 219
 Rabinowitz D. L., Barkume K., Brown M. E., Roe H., Schwartz M., Tourtellotte S., Trujillo C., 2006, *AJ*, 639, 1238
 Ragozzine D., Brown M. E., 2009, *AJ*, 137, 4766
 Renner S., Sicardy B., 2006, *Cel. Mech. Dyn. Astron.*, 94, 237
 Winter O. C., Borderes-Motta G., Ribeiro T., 2019, *MNRAS*, 484, 3765

This paper has been typeset from a $\text{\LaTeX}$ file prepared by the author.

ANEXO D – ARTIGO ACEITO PARA PUBLICAÇÃO - MNRAS

Cópia da versão do artigo *Dynamics in Non-Spherical Symmetric Bodies: II. The case of a prolate body* aceito para publicação na revista *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*.

Dynamics around Non-Spherical Symmetric Bodies: II. The case of a prolate body

T. Ribeiro,¹★ O. C. Winter,¹ G. Madeira^{2,1} and S. M. Giuliatti Winter¹

¹*Grupo de Dinâmica Orbital & Planetologia, São Paulo State University -UNESP, Av. Ariberto Pereira da Cunha, 333, Guaratinguetá SP, 12516-410, Brazil*

²*Université de Paris, Institut de Physique du Globe de Paris, CNRS F-75005 Paris, France*

Accepted XXX. Received YYY; in original form ZZZ

ABSTRACT

Dynamic exploration around non-spherical bodies has increased in recent decades due to the interest in studying the motion of spacecraft orbits, moons and particle ring around these bodies. The dynamic structure around these objects is defined by regular and chaotic regions. The Poincaré surface of section technique allows mapping these regions, identifying the location of resonances and the size of regular and chaotic zones, thus helping to understand the dynamics around these bodies. Using this technique, we map in the $a - e$ space the stable and unstable regions around ellipsoidal bodies, such as the dwarf planet Haumea, the centaur Chariklo and other five hypothetical bodies, in which we keep part of the physical parameters of Haumea but we varied its period of rotation and ellipticity, to analyze the impact of these alterations in the extensions of the stable and unstable regions due to first kind orbits and spin-orbit type resonances. We identified a large region of stability, in semi-major axis and eccentricity, due to the first kind orbits. Periodic orbits of the first kind are present in a large semi-major axis interval for all considered systems and have almost zero eccentricity, while resonant and quasi-periodic orbits have high eccentricities. Furthermore, we identified the bifurcation of the 2:6 resonance when there is a spin reduction of a body with the same physical parameters as Haumea. This bifurcation generates a chaotic region, reducing the extension of the stability zone.

Key words: celestial mechanics – Kuiper belt objects: individual: (136108) Haumea - minor planets, asteroids: general – planets and satellites: dynamical evolution and stability

1 INTRODUCTION

With the increasing discoveries of small non-spherical bodies, such as asteroids, centaurs, comets and trans-Neptunian objects, the interest in understanding the dynamics of regions around these bodies, subjected to non-spherical gravitational potentials, has increased. This is because the orbits around these bodies generally differ from the Keplerian orbits of the two-body problem (Hu & Scheeres 2004; Ribeiro et al. 2021), as irregularities in their shape cause disturbances in their gravitational fields. To study the dynamics around these bodies, through numerical simulations, it is necessary to use physical models that adequately represent their shapes. Modelling by triaxial and Jacobi ellipsoids or the Maclaurin spheroid are widely used because they demand lower computational costs and they are good approximations for symmetrical and non-spherical bodies. The Maclaurin spheroid consists of a body with an equatorial radius A different from the polar radius C , the triaxial ellipsoid is formed by three semi-axes with different sizes, $A > B > C$, and the Jacobi ellipsoid is an ellipsoid triaxial that revolves around the minor axis (Chandrasekhar 1942). However, other modelling methods are needed for bodies with more irregular shapes, as the case of the asteroid Kleopatra. The Mascons model, developed by Geissler et al. (1996), and the Polyhedra model, created by Werner (1994), are ca-

pable of representing the surface contours of these objects with better precision, however, they demand higher computational costs.

The relevance of this type of dynamic exploration is justified by the interest in studying the motion of spacecraft orbits, moons and ring particles around these bodies. Celestial bodies that can be modeled using ellipsoids or spheroids, the gravitational field can be studied by adding spherical harmonics. For oblate spheroids, the terms J_n are included, for example, J_2 , J_4 and J_6 , which correspond to the oblateness of the poles. For prolate ellipsoids, in addition to J_n , the term C_{22} is also added, which is related to the ellipticity in the equatorial region of the body. The effect of the gravitational potential generated by oblate spheroids is well known due to extensive studies of the dynamics of planetary rings and the orbits of artificial satellites, since planets with orbital rings in the solar system, such as Saturn, are oblate spheroids and, in the case of orbits of near Earth artificial satellites, it is necessary to take into account is oblateness of the planet. The same does not occur for prolate bodies, since the inclusion of the ellipticity term in the gravitational potential, produces effects that have been observed in recent decades, as in Hu & Scheeres (2004), which, intending to study the motion of a spacecraft around the equator of the asteroid Castalia, mapped the stable region around this body, using numerical integrations for a gravitational field of a uniformly rotating prolate body. For this, Hu & Scheeres (2004) modelled Castalia using a triaxial ellipsoid. Furthermore, they demonstrated that resonances between a rotating

★ E-mail: tais.a.ribeiro@unesp.br

body and the mean orbital motion can play an important role in determining the stability of orbits.

In [Olsen \(2006\)](#), Castalia is used again as a target object for the study of stable regions around it, analyzing prograde orbits with an inclination of 60° and retrograde orbits with an inclination of 150° . In the same work, the region around Itokawa is explored because it is an asteroid with slower rotation, compared to Castalia. In addition to the numerical experiments, [Olsen \(2006\)](#) derives analytical expressions for the widths of the mean motion resonances in gravitational fields of a uniformly rotating prolate body. The comparison made between the two models, analytical and numerical, points to a disagreement between theory and experiment for distances close to the asteroids that were objects of study. In [Mysen et al. \(2006\)](#) and [Mysen & Aksnes \(2007\)](#), a similar approach to the work studied in [Olsen \(2006\)](#) is performed for the comet 67P/Churyumov-Gerasimenko, modelling the body as a triaxial ellipsoid and mapping the unstable and stable zones.

In this work, the second in a series of articles that study Non-Spherical Symmetric Bodies (NSSBs) ([Madeira et al. 2022](#)), we also seek to map the region around ellipsoidal bodies using the Poincaré surface of section technique. One of the target bodies of this work is the dwarf planet Haumea, which, because it is quite elongated and has a ring of particles, has become the object of study in several works in recent years. [Ortiz et al. \(2017\)](#) suggests that the ring is at the location of the 1:3 resonance between the orbital period of the ring particles and the spin of Haumea. However, [Winter et al. \(2019\)](#) using the Poincaré surfaces of sections technique, shows that the orbits of this resonance have high eccentricities, above the limiting eccentricity to maintain the estimated ring width, concluding that the Haumea ring is not in resonance with the spin of the central body and the rings are possibly associated with the first kind orbits. They also show that the 1:3 resonance is double (2:6), generating a large region of chaos in the resonance separatrix. In addition, they mapped the stable zone of this resonance and the first kind orbits close to the ring.

We also mapped the region around the centaur 10199 Chariklo, which has a system with two narrow rings and possibly small satellites ([Braga-Ribas et al. 2014](#); [Bérard et al. 2017](#)). [Sicardy et al. \(2019\)](#) discusses the possibility that the centaur is spherical and has an anomalous mass at its equator. Other studies, based on observational data, suggest that Chariklo has a triaxial or Jacobi ellipsoid shape ([Leiva et al. 2017](#); [Morgado et al. 2021](#)). In this work, we model Chariklo as an ellipsoid using the most recent observational data on its shape ([Morgado et al. 2021](#)).

In addition to Chariklo and Haumea, we map the stable and unstable regions of five other systems. These systems are hypothetical bodies in which we maintain part of the physical parameters of Haumea, but vary its ellipticity and period of rotation, to analyze the impact of these changes on the extensions of the stable and unstable regions.

The dynamic system adopted and the Poincaré surface of section technique are considered in the next section. The dynamic characteristics of some of the controlled orbits found in this study are explored in Section 3. Maps of stable and unstable regions are presented and discussed in Section 4. The applications of this study are explored in Section 5 and finally, we present our conclusions in Section 6.

2 DYNAMICAL SYSTEM

In this work, we analyze the dynamics of particles around prolate bodies in the rotating system (Figure 1). Observational data from

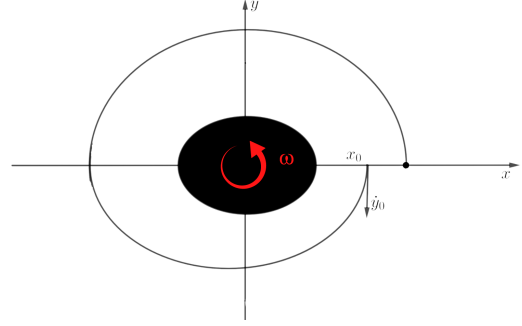


Figure 1. Schematic diagram of an equatorial path around a Jacobi ellipsoid. The plane Oxy is fixed on the body, x_0 marks the initial position of the trajectory and the arrow indicates the initial velocity.

the works of [Ortiz et al. \(2017\)](#); [Morgado et al. \(2021\)](#) suggests the Jacobi ellipsoid as a possible shape for the bodies chosen as the target of this study. Therefore, the gravitational potential of these bodies will be composed by the spherical harmonics J_2 and C_{22} defined as ([Balmino 1994](#)):

$$J_2 = -\frac{2C^2 - A^2 - B^2}{10R_e^2}, \quad (1)$$

and

$$C_{22} = \frac{A^2 - B^2}{20R_e^2}. \quad (2)$$

We take $R_e = (ABC)^{1/3}$ as the equivalent radius.

The equations of motion, with a plane Oxy fixed on the central body and rotating with the same period of rotation as the central body, as illustrated in Figure 1, are given by ([Hu & Scheeres 2004](#)):

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} = \omega^2x + U_x, \quad (3)$$

and

$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} = \omega^2y + U_y, \quad (4)$$

where ω is the velocity of rotation of the central body, U_x and U_y are the derivatives of the gravitational potential defined as:

$$U(x, y) = \frac{GM}{r} \left(1 - \left(\frac{R_e}{r} \right)^2 \left[\frac{-J_2}{2} - \frac{3C_{22}}{r^2} (x^2 - y^2) \right] \right), \quad (5)$$

where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, G is the gravitational constant and M is the mass of the central body.

The systems explored have the Jacobi constant C_j that can be given by ([Hu & Scheeres 2004](#)):

$$C_j = \omega^2(x^2 + y^2) + 2U(x, y) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2, \quad (6)$$

which will be used to obtain the Poincaré surface of section. The unit of Jacobi's constant is km^2s^{-2} , however, for practicality, we will omit this information in the figures presented in this work. In the following subsections, we explore the Poincaré surface of section technique and some of the families of periodic orbits found in the systems studied in this work.

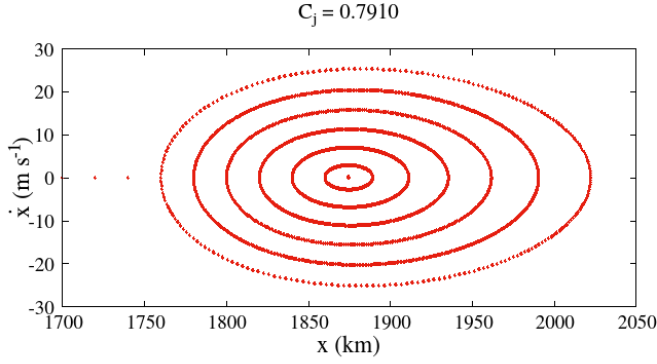


Figure 2. Poincaré surface of section for a system considering Haumea as an oblate body, i.e., the ellipticity coefficient (C_{22}) is equal to zero. The islands in red are quasi-periodic orbits associated with a family of periodic orbits, indicated by the single point at the centre of all the islands.

2.1 Poincaré surface of section

Poincaré surface of section are maps generated by crossing points of the trajectories in the phase space with a fixed section of the system. These maps are generated in phase space for fixed values of the Jacobi constant (equation 6). This technique has been used extensively in celestial dynamics as a tool for identifying the location and extent of stable and unstable regions in the circular restricted three-body problem (Hénon 1965a,b, 1966a,b, 1969; Jefferys 1971; Winter & Murray 1994a,b, 1997a,b). However, in recent years, Poincaré surface of section has been applied to the two-body problem, whose central body rotates and has a non-spherical mass distribution (Borderes-Motta & Winter 2018; Winter et al. 2019; Madeira et al. 2022). Figure 2 shows a Poincaré surface of section applied to the two-body problem whose central object is oblate. The primary body has the same physical parameters as Haumea (these parameters can be seen in table 1) but with the coefficient C_{22} equals to zero. In this case, when there is no ellipticity, we only have elliptical orbits, indicated by the red curves, a circular orbit, represented by the point in the centre of the red curves, and hyperbolic trajectories that collide with the central body or are ejected, indicated by isolated red points.

In cases where the body is prolate, the ellipticity of the body together with its rotation are responsible for disturbing the region and generating more complex structures, related to resonances between the rotation of the primary and the orbital motion of the particles, as can be seen in the Figure 3, which shows two Poincaré surfaces of sections of the Haumea system. The physical parameters used can be consulted in table 1. First, a few dozen initial conditions were distributed for distances $2000 < x < 2300$ km and $\dot{x} = 0$ ms⁻¹. Through a set of numerical integration, the Poincaré surface of sections are generated. The points randomly distributed correspond to chaotic orbits and determine the dynamically unstable regions. The stable regions are delimited by points that form closed curves, which do not cross each other. These curves are called islands of stability. Random points from chaotic orbits do not enter these stable regions. Each island of stability is formed by a quasi-periodic orbit, which receives this nomenclature because it does not have a defined orbital period. However, these quasi-periodic orbits follow the behaviour of the periodic orbits that are located in the centre of stability islands. Periodic orbits, whenever they cross the Poincaré surface of section, pass through the same points in the phase space.

The periodic orbits present in Figure 3 can be classified, according to Poincaré (1895), as first or second kinds. The first kind is quasi-

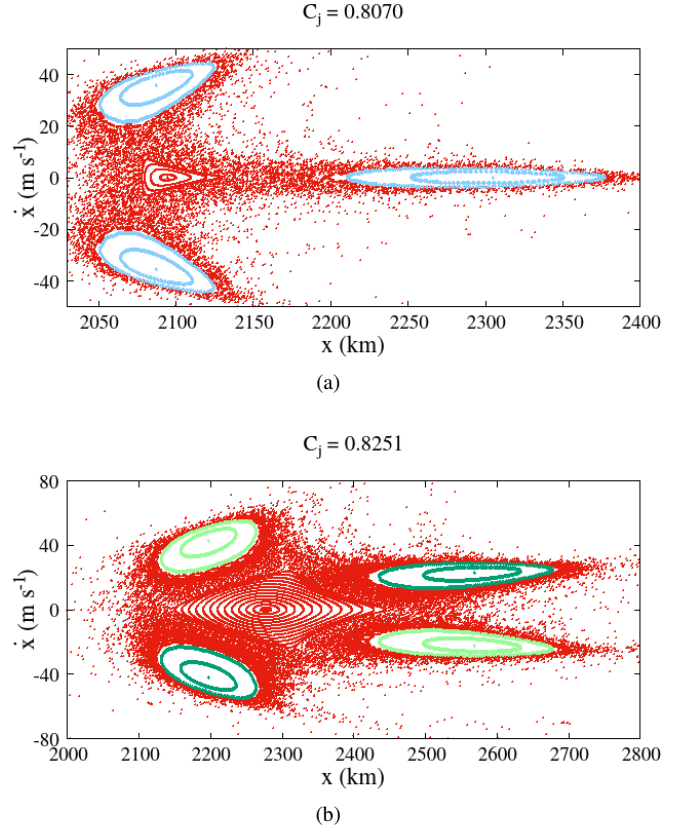


Figure 3. Poincaré surface of section for two different values of the Jacobi constant (C_J). The stability islands of the 2:5 resonance are shown at the top, indicated by the blue colour, while the double stability islands of the 2:6 resonance are shown in the bottom figure, represented by different shades of green. On both Poincaré surfaces of sections, there is the presence of islands of quasi-periodic orbits associated with periodic orbits of the first kind (closed red curves), in addition to the unstable region, filled randomly by red points.

circular orbits that are not associated with any resonance. Figure 3 are the points in the centres of the islands of stability represented by the red colour. The second kind are the periodic orbits associated with resonances. In this case, spin-orbit resonances, i.e., resonances between the rotation of the primary body and the orbital motion of the secondary body. Periodic orbits of the first kind are identified by single islands of stability in the Poincaré surface of section, while those of the second kind can be identified by unit islands, pairs or an integer number of islands of stability. This number is equal to the order of the resonance. For example, in Figure 3a there are 3 blue islands, therefore it is a third-order resonance associated with 2:5 resonance. These islands of stability related to the same resonance or the first kind periodic orbits, occur along an interval of C_J values, varying their location and size. This set of periodic orbits is called a family.

Figure 3b shows two pairs of stability islands in light green and dark green. These are two families belonging to the same resonance. Duplicity in families is a natural feature due to the potential of the body being invariant under a rotation π (Sicardy 2020) and it occurs for all $1:n$. Because of that, following Sicardy (2020), we will call them $2:2n$ resonance. Thus, the two families in Figure 3b are associated with the 2:6 resonance.

2.2 Other Periodic Orbits

There are periodic orbits that do not fit the first and second kinds classifications but also delimit regions of stability. Broucke (1968) mapped and classified several of these orbits in the Earth-Moon system and Winter & Neto (2002) investigated the stability zones delimited by them, in the same Earth-Moon system. In this work, we found two families of these periodic orbits in the system composed of a central body with the same physical parameters as Haumea, but with three times the rotation period of the dwarf planet (see data in table 1, case Haumea^d). Figure 4 presents the evolution of the two families (in shades of blue) for four Jacobi constant values. Due to the shape of the trajectory these two families fit into the F-type classification, defined in the work of Broucke (1968). For simplicity, they will be called F1 and F2. Furthermore, the periodic orbits of these two families are symmetric trajectories and with a large radial variation.

These two families delimit regions of stability that will be discussed in Section 4. Next, we present the evolution of the families associated with resonances of up to the third order.

2.3 Resonances

In this work, we use the Poincaré surface of section technique to determine stable and unstable regions around prolate bodies. Part of the stable region found is due to the presence of resonances. We will analyze the resonances of up to the third order, which is the strongest presence in the systems considered in this work. To demonstrate the evolution of these resonance families in the phase space, we show in this section some of the Poincaré surfaces of sections for four cases of the central body of the system: the dwarf planet Haumea; the hypothetical Haumea^c body, which has the same physical parameters as Haumea, except for the ellipticity, with a minimum value for the Poincaré surface of section to appear resonant structures; and the hypothetical system Haumea^e, which has a rotation period five times slower than that of Haumea. In addition to these four cases, the study extends to three more hypothetical central bodies, which are variations of the rotation period and ellipticity coefficient of Haumea and to the Chariklo system case. The variation of these two parameters was made to analyze its implications in the stability regions of the systems. The physical parameters used in the numerical simulations for each system are shown in table 1.

Figure 5 presents a sequence of the Poincaré surface of section for six values of the Jacobi constant, allowing the visualization of the evolution of the structures of the first and second kinds periodic/quasi-periodic orbits. Three resonances are highlighted: 2:4 ((a) and (b)), 2:5 ((c) and (d)) and 2:4 ((e) and (f)). The 2:4 resonance is double, represented by the pink and purple islands in figures 5a and 5b. For the first Jacobi constant value, there are no periodic/quasi-periodic orbits of the first kind, as the entire region is chaotic, as indicated by the random red points that fill the region around the islands of stability of the 2:4 resonance. This is due to the proximity to the central body, the particles collide or are ejected. In Figure 5b the existence of the chaotic region can still be seen, but there is a region of stability associated with quasi-periodic orbits of the first kind, closed red curves. The islands of stability associated with the 2:4 resonance are closer and smaller, a natural motion when the Jacobi constant is increased. Due to this approximation, a separatrix appears between the islands, generating a narrow region of chaos. The chaos between the islands destroys the periodic orbit of the first kind. Therefore, for the Jacobi constant interval, in which it is possible to identify the

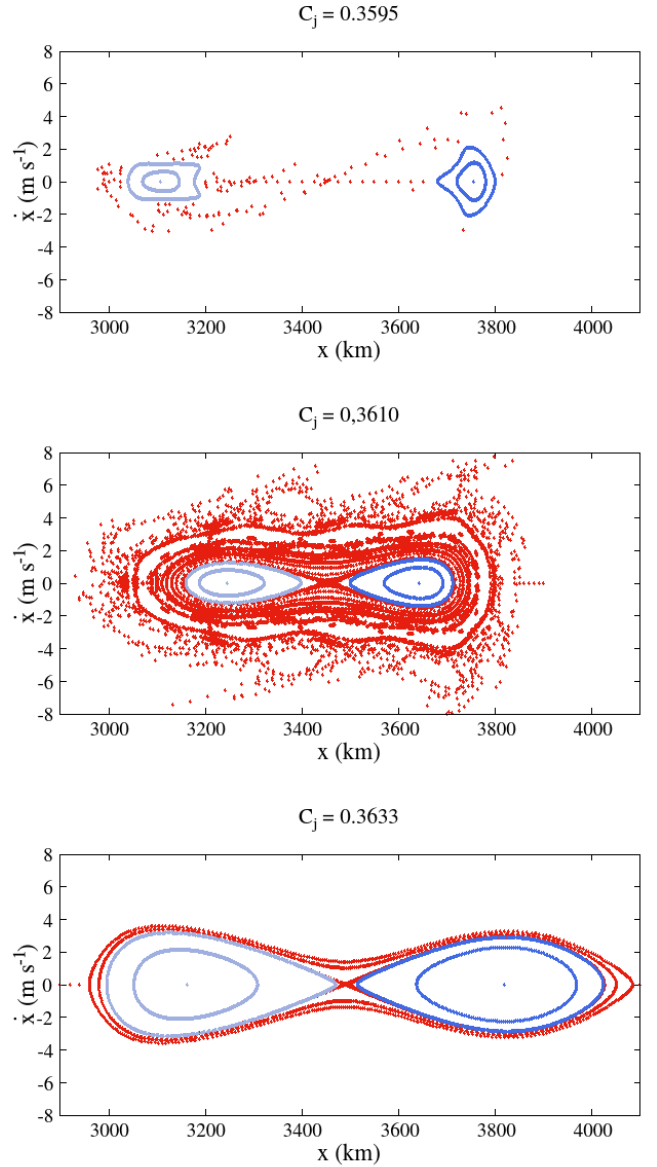


Figure 4. Poincaré surface of section of the Haumea^d system (see table 1) for four different values of the Jacobi constant (C_J), showing the evolution of two families, of periodic and quasi-periodic orbits, indicated by the colours light blue (F1) and dark blue (F2).

existence of the 2:4 resonance, the first kind of periodic orbit does not exist.

Figure 5c shows the stability islands associated with the 2:5 resonance, in blue. There is a small region with periodic/quasi-periodic orbits of the first kind and, around it, a large region of chaos. In the following plot, 5d, it can be seen that the islands of the 2:5 resonance are closer and smaller, however, in this case, these islands do not continue to approach the centre of the first kind periodic orbits. This is the closest approximation between them and for larger values of C_J , these islands are no longer identified in the Poincaré surface of section.

Changing on to the Poincaré surface of section where the two families of the 2:6 resonance appears, figures 5e and 5f, there is a considerable increase in the stable region, both limited by first kind and resonance orbits. This fact is explained by the distance from

Table 1. Physical parameters of central bodies used in the numerical simulations.

System	Chariklo	Haumea	Haumea ^a	Haumea ^b	Haumea ^c	Haumea ^d	Haumea ^e
Mass (kg) ^{1,2}	6.432×10^{18}	4.006×10^{21}	4.006×10^{21}	4.006×10^{21}	4.006×10^{21}	4.006×10^{21}	4.006×10^{21}
Equivalent radius (km)	124.8	798	798	798	798	798	798
Spin (h) ^{1,3}	7.004	3.9155	3.9155	3.9155	3.9155	11.7465	19.5775
J_2	0.124	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243
C_{22}	0.007	0.049	0.034	0.018	0.003	0.049	0.049

¹ Leiva et al. (2017).² Ragozzine & Brown (2009).³ Rabinowitz et al. (2006).

the central body, reducing the perturbation due to ellipticity in the gravitational field.

Figure 6 shows a set of Poincaré surface of section for the Haumea^c system, which has the ellipticity coefficient lower than the real Haumea value of C_{22} . This is the smallest value of C_{22} that generates structures related to spin-orbit resonances, for this system. The first observable change is the displacement of the structures on the x axis: they are closer to the central body. Note that, in general, the unstable region is smaller, identified by the random red points. The family of periodic orbits of the first kind still does not coexist with the families of the 2:4 resonance. In Figure 6b, the points that follow a curve in the region between $1765 < x < 1770$ km for $\dot{x} < 0$ m s⁻¹ and $1783 < x < 1790$ km for $\dot{x} > 0$ m s⁻¹ are orbits that initially have the motion of quasi-periodic orbits, but collide with the central body after some period of time. The collision occurs because the proximity to the central body increases the probability of more eccentric trajectories colliding with the primary. The same phenomenon occurs in figures 6b and 6c.

Haumea's high spin, added to its elongated shape, causes for those particles orbiting close to it to collide or to be ejected from the system. Decreasing the rotation, all the resonant semi-major axes move away from the central body, allowing other resonances to appear, for example, the 4:7 resonance represented by the yellow islands in Figure 7 present in the Haumea^e system. Also, on this system occurs the bifurcation of the 2:6 resonance, which can be seen in Figure 8a by the dark and light green points. Previously, each periodic orbit associated with the 2:6 resonance crossed the phase space at only two points, but due to the bifurcation, it now crosses at four different points. Figures 8b and 8c shows the zoom of the bifurcated islands of one of the families associated with the 2:6 resonance. Around them, there is a region of chaos intrinsic to the separatrix, generated by the bifurcation, restricting the extension of the stable region of the resonance, compared to cases in which there is no bifurcation. This phenomenon entails some implications, such as the radial extension of a possible ring around this body in 2:6 spin-orbit resonance: the chaos generated by the separatrix would produce a gap inside the ring. The evolution of these families in phase space can be seen in Figure 9.

3 PERIODIC ORBITS AROUND PROLATE BODIES

The orbits associated with the resonances discussed in section 2.3 are studied here in order to discuss their dynamical characteristics. For this, we choose a periodic orbit for each resonance of the Haumea system and a periodic orbit of the 4:7 resonance of the Haumea^e system. It is noteworthy that the behaviour of the resonant orbits of the other analyzed systems are similar to the one presented in this section. As said, the 2:4 resonance has two families of periodic/quasi-

periodic orbits, so in Figure 10 a pair of these periodic orbits are presented for $C_J = 0.7903$ km² s⁻², one from each family. Figure 10a refers to the periodic orbit represented by the central point interior to the pink islands of the Poincaré surface of section and Figure 10b refers to the purple periodic orbit, both shown in Figure 5a. The trajectories are in the rotating system and are retrograde. The orbit is closed because the particle is at the fixed point of the resonance. The temporal evolution is given by the numbered points that are equally spaced in time, while the scale and colours give the velocity in the inertial system. The points closest to the central body have the highest velocity modules, indicating the pericentre of the orbit. Likewise, the lowest values of velocities indicate the region of the apocentre of the orbit. The trajectories are mirror images of each other about the line Oy. These are consequences that result from the gravitational potential being invariant under a rotation π (equation 5). The period of these orbits corresponds to two periods of rotation of Haumea.

Figure 11 shows the periodic orbit, in the rotating system, associated with the 2:5 resonance for a $C_J = 0.8030$ km² s⁻². This orbit is represented by the central point interior to the blue islands of stability in Figure 5c. In this case, the orbit is symmetrical in both axes, the Ox axis and the Oy axis. The period of this orbit is approximately five times the period of rotation of Haumea and it is a closed trajectory because it is at the resonance fixed point.

As it happens for the 2:4 resonance, there is a duplicity of families of periodic/quasi-periodic orbits in the 2:6 resonance, as seen in the Poincaré surface of section in subsection 2.3. Figure 12 presents a sample of these periodic orbits for the value of $C_J = 0.8200$ km² s⁻². In Figure 12a, there is the trajectory of the central point interior to the light green islands of the Poincaré surface of section and Figure 12b shows the central point interior to the islands in dark green colour, both shown in Figure 5e. The orbital period is three times the rotational period of Haumea. As it is a double family belonging to the same resonance, the orbits are mirror images of each other about the Ox axis. In the Oy axis, there is a division of the orbits into symmetrical parts, due to the symmetry of the body to the same aforementioned axis. The closest points of the trajectory with the central body are the same where the velocity module assumes the highest values, indicating the pericentre locations. At the points of closest approximation to Haumea, the velocities are lower, corresponding to the apocentres.

Figure 13 shows the periodic orbit, in the rotating system, associated with the 4:7 resonance of the Haumea^e system for a $C_J = 0.25536$ km² s⁻². This orbit is represented by the central point interior to the yellow stability islands in Figure 7. Because it is not a double resonance, the orbit is symmetrical in both axes, the Ox axis and the Oy axis. The period of this orbit is seven times the period of rotation of Haumea.

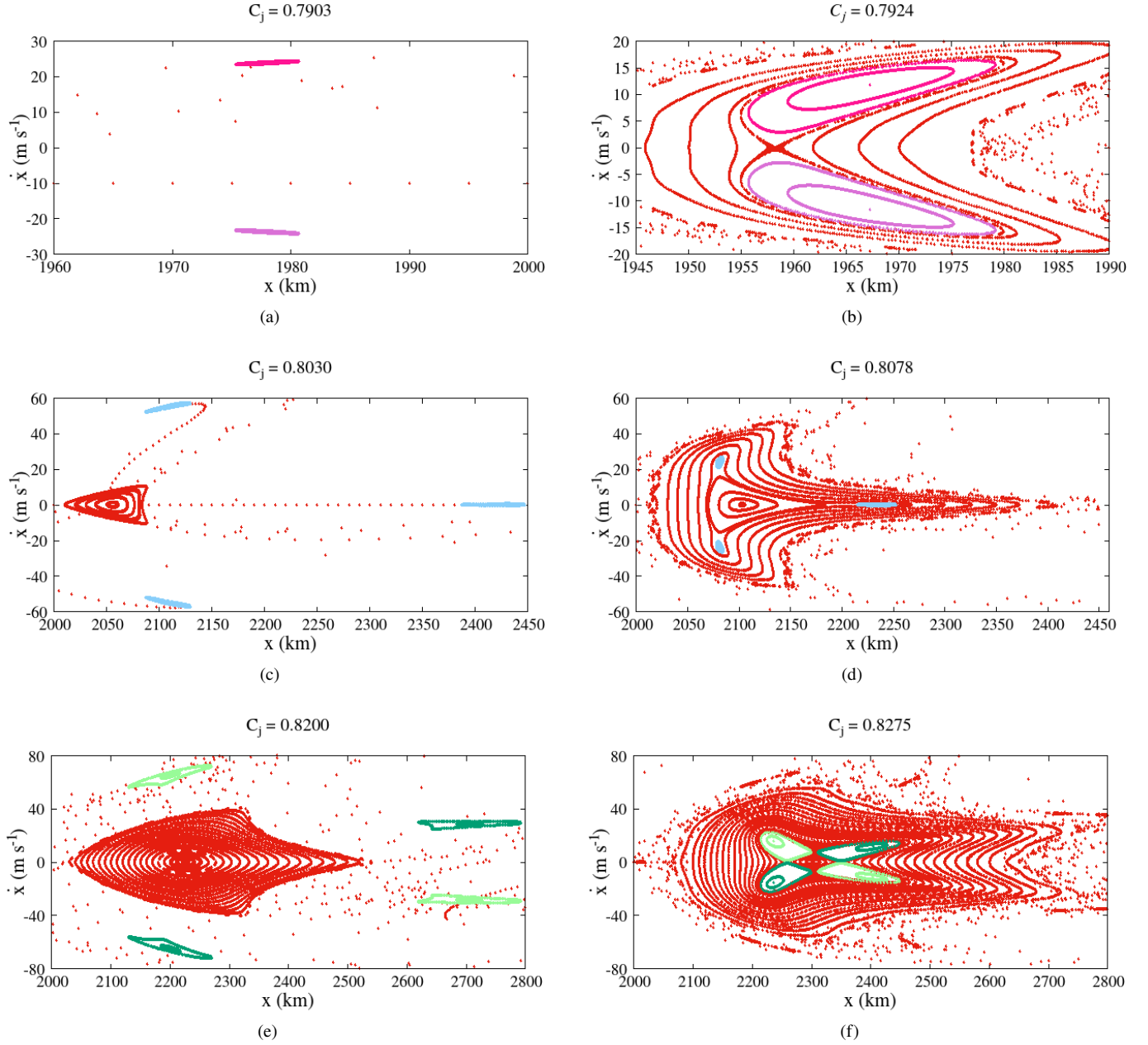


Figure 5. Poincaré surfaces of sections of the Haumea system for six different values of the Jacobi constant (C_J), showing the evolution of the 2:4, 2:5 and 2:6 resonances. The stability islands of the 2:4 resonance (plots (a) and (b)) are duplicated and are represented by pink and purple colours. The same phenomenon occurs with the islands of the 2:6 resonance (plots (e) and (f)), indicated by different shades of green. The 2:5 resonance is shown by the islands in blue in plots (c) and (d). The islands in red are quasi-periodic orbits associated with a family of periodic orbits of the first kind.

The plots in Figure 14 show the temporal evolution of the radial distance of the periodic orbits associated with the (a) 2:4, (b) 2:5, (c) 2:6 and (d) 4:7 resonances. Figures 14a and 14c refer to the families that were represented by pink and light green colours, in the Poincaré surface of section of Figure 5. The colours of the solid lines indicate distinct values of the Jacobi constant. The orbits with the highest radial amplitudes (yellow) correspond to the lowest values of C_J , while the trajectories with the lowest radial amplitude (solid grey lines) correspond to the highest values of C_J . The intervals of the considered Jacobi constants can be seen in the captions of each plot present in Figure 14. The comparison between the orbits of the same family for different C_J shows that the greater the value of C_J ,

the smaller is the amplitude of the radial variation. This attenuation occurs as the islands of stability approach the first kind orbit in the Poincaré surface of section. The dotted and dashed lines delimit the location of the resonant semi-major axis using two different methods: through the epicyclic frequencies (Borderies & Longaretti 1987, 1994; Longaretti & Borderies 1991) and the geometry of the orbit. The η and κ frequencies are defined as (Sicardy 2020):

$$\eta^2 = \frac{GM}{a^3} \left[1 + \frac{3f}{5} \left(\frac{R}{a} \right)^2 \right] \quad (7)$$

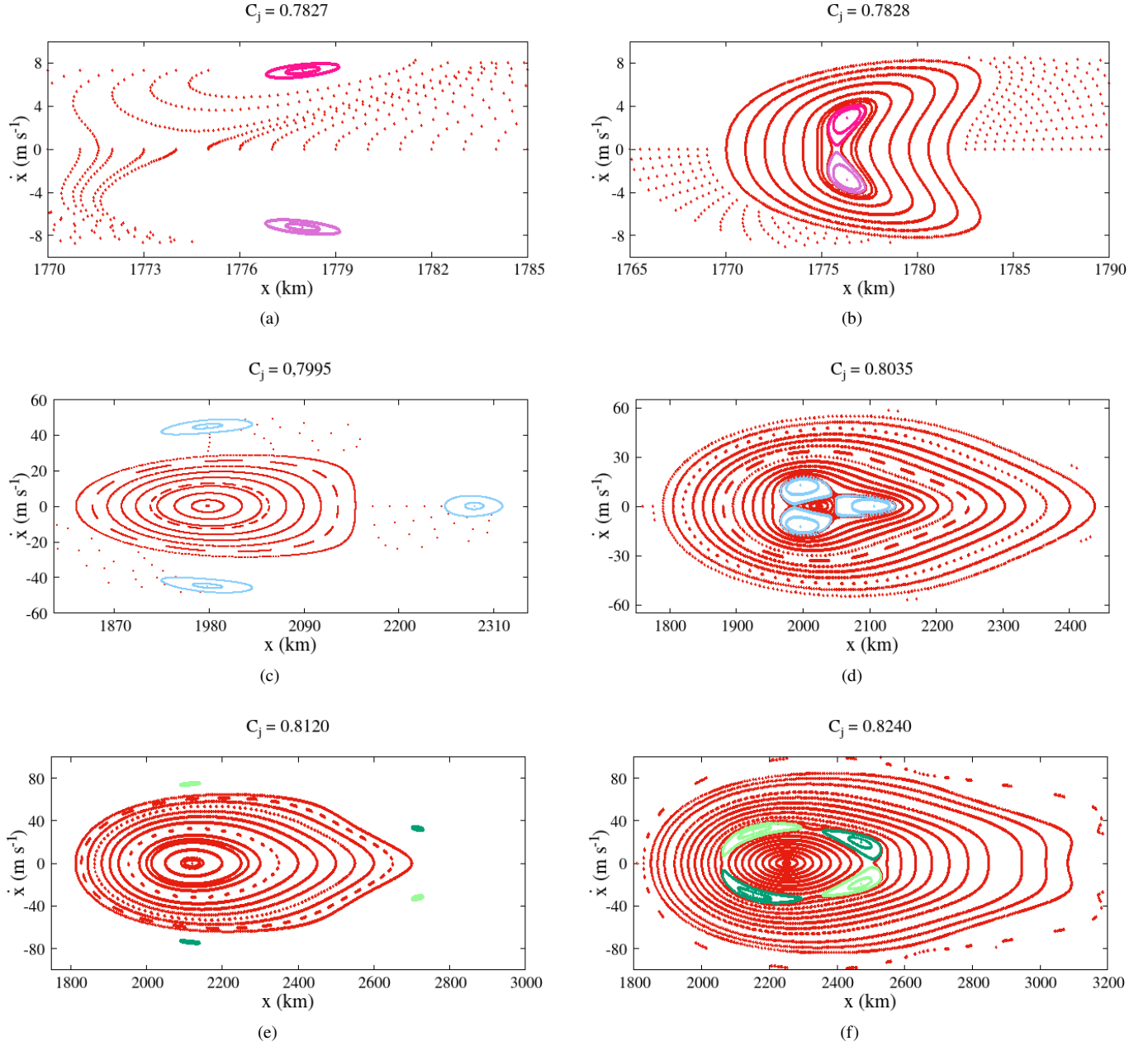


Figure 6. Poincaré surface of section of the Haumea^c system for six different values of the Jacobi constant (C_J), showing the evolution of the 2:4, 2:5 and 2:6 resonances. The stability islands of the 2:4 resonance (plots (a) and (b)) are duplicated and are represented by pink and purple colors. The same phenomenon occurs with the islands of the 2:6 resonance (plots (e) and (f)), indicated by different shades of green. The 2:5 resonance is shown by the islands in blue in plots (c) and (d). The islands in red are quasi-periodic orbits associated with a family of periodic orbits of the first kind.

and

$$\kappa^2 = \frac{GM}{a^3} \left[1 - \frac{3f}{5} \left(\frac{R}{a} \right)^2 \right] \quad (8)$$

where $f = 2.5 J_2$. The resonant semi-major axis, a , is obtained by a numerical iteration process using the two frequencies (for more details see Renner & Sicardy (2006)). The values presented in the graphs of Figure 14 (dotted lines) using this method are the same values obtained in Sicardy (2020).

The second method for finding the resonant semi-major axis is derived from the geometry of the orbit. This method was discussed

in Ribeiro et al. (2021), which consists of calculating the semi-major axis using the equation:

$$a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2}, \quad (9)$$

where a is the semi-major axis due to the geometry of the orbit, $r_{\max}$ and $r_{\min}$ are the largest and smallest radial distances of the same orbit, respectively. The diagram in Figure 15 shows an overview of the comparison between the three methods used to locate the centres of resonances and the radial width of the resonant orbits. The diagram is divided into three horizontal bands. Each track refers to one resonance. The grey regions limit the width of the orbital radius

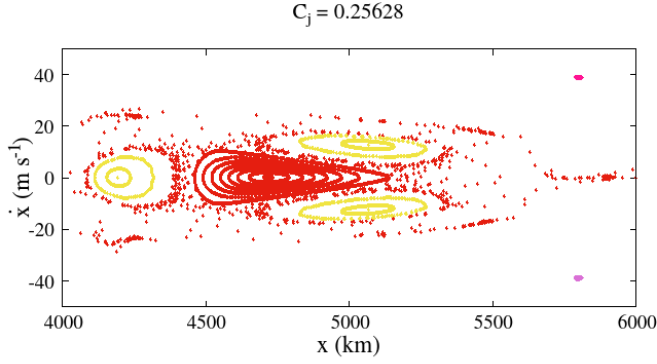


Figure 7. Poincaré surface of section of the Haumea^e. The 4:7 resonance is represented by the islands in yellow. The islands in red are quasi-periodic orbits associated with a family of periodic orbits of the first kind. The islands in pink and lilac belong to the 2:4 resonance.

variation of the trajectories indicated by the grey colours in Figure 14. These are the periodic orbits with smaller amplitudes of the radial variation. Among the three orbits analyzed, the one associated with 2:5 resonance is the one with the greatest extent of radial variation, around $\Delta r = 307$ km, while the orbit associated with 2:4 resonance has $\Delta r = 83$ km and at 2:6 has $\Delta r = 118$ km. The radial extent of the 2:5 resonance orbits is larger because its family is not double, as well as the 2:4 and 2:6 resonances.

As explored in Ribeiro et al. (2021), there is a difficulty in describing, in terms of orbital elements, trajectories around prolate bodies. The diagram in Figure 15 highlights this difficulty. In the 2:4 resonance range the location of the resonant semi-major axis calculated using the two-body problem (pink dotted line), which considers the central body to be spherical, is outside the radial width of the orbit and distant about 133 km from the r_{min} of this orbit. The same occurs with the resonant semi-major axis obtained through the epicyclic frequencies (pink dot-dash line), which only considers the perturbation of the oblateness of the body. Going back to Figure 14a, note that the 2:4 resonant semi-major axis obtained by the epicyclic frequencies is outside the region of the orbit with the greatest amplitude of radial variation (yellow line). Both methods do not take into account the perturbation due to the ellipticity of the central body.

Because they are farther from the primary body, particles at the 2:5 resonance are less affected by the effect of the ellipticity of the body, compared to the particles at the 2:4 resonance. For this reason, the difference between the resonant semi-major axis calculated by the two mentioned methods is closer to the centre of the radial band of the orbit. However, this difference, around 69 km, is still considerable. For the 2:6 resonant orbit, the difference does not reach 2 km. Because the theoretical models are not accurate to determine the resonant semi-major axis, especially those closer to the central body, to use the orbit geometry method becomes an alternative. The dashed lines in the diagram of the figure 15 indicate the semi-axis of each of the resonances making use of the geometry of the orbit of smaller radial amplitude (solid grey lines). In the following section, the stable and unstable regions around prolate bodies are identified using this method.

4 WIDTH OF RESONANCES

Having defined the method that best fits the calculation of the resonant semi-major axis, we extend this application to determine the

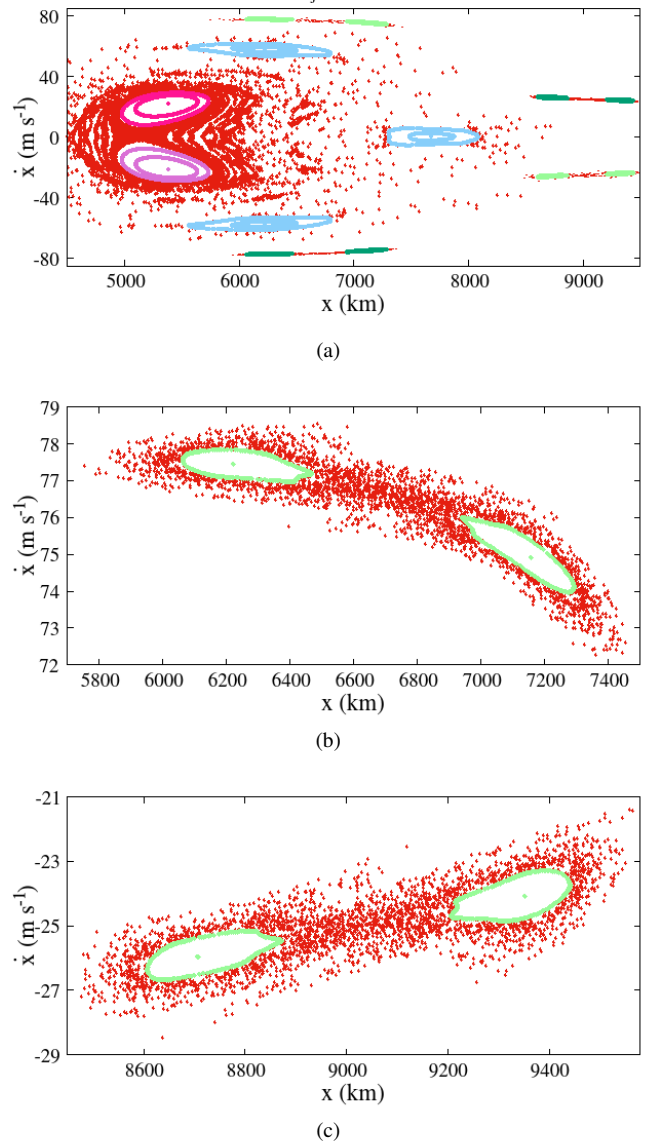


Figure 8. Poincaré surface of section of the Haumea^e system for $C_j = 2.6115 \times 10^{-1} \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$. (a) The stability islands of the 2:4 resonance are duplicated and are represented by pink and purple colors, the same phenomenon occurs with the islands of the 2:6 resonance indicated by different shades of green, the 2:5 resonance is shown by the islands in blue and the islands in red are quasi-periodic orbits associated with a family of periodic orbits of the first kind. (b) and (c) zoom of the bifurcation of one of the families associated with 2:6 resonance.

width of resonances and the limits of the stable and unstable regions around bodies with ellipticity. Figure 16 shows how the resonance width is determined for a given value of C_j . In Figure 16, we have the temporal evolution of the radial variation of the periodic (pink line) and quasi-periodic (yellow line) orbits associated with the 2:4 resonance. The quasi-periodic orbit chosen is always the largest island of stability found in the Poincaré surface of section, as this guarantees the maximum width of the resonance. With the periodic orbit, the centre of resonance is determined, while with the quasi-periodic orbit, the limits of the width of the resonance can be obtained. To determine the lower limit, the equation $a = (r_{min} + r_{max})/2$ is used again, where the values of the maximum and minimum radii are those indicated by the dashed lines and yellow arrows, which is the

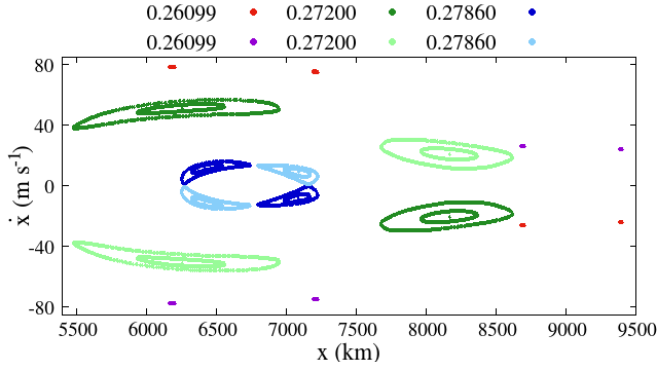
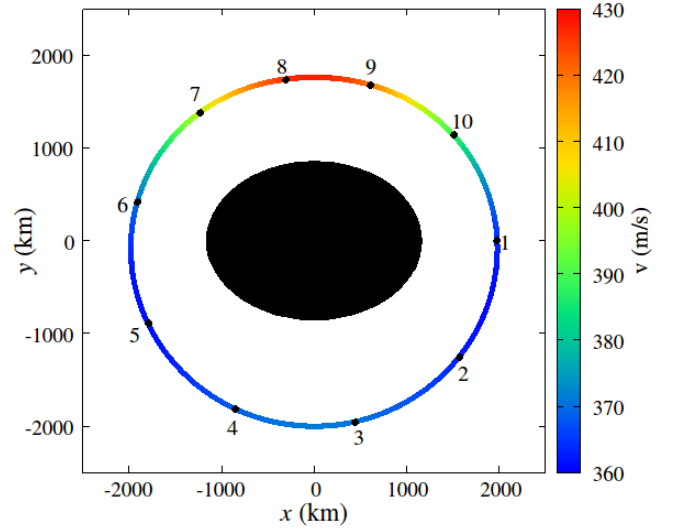


Figure 9. Evolution of the families associated with the 2:6 resonance in the Poincaré surface of section for the Haumea^e system. The plot presents a sample of the largest islands of stability, an intermediate island and the internal points that represent the periodic orbit, showing the structure for different values of C_j . The colours indicate the values of C_j .

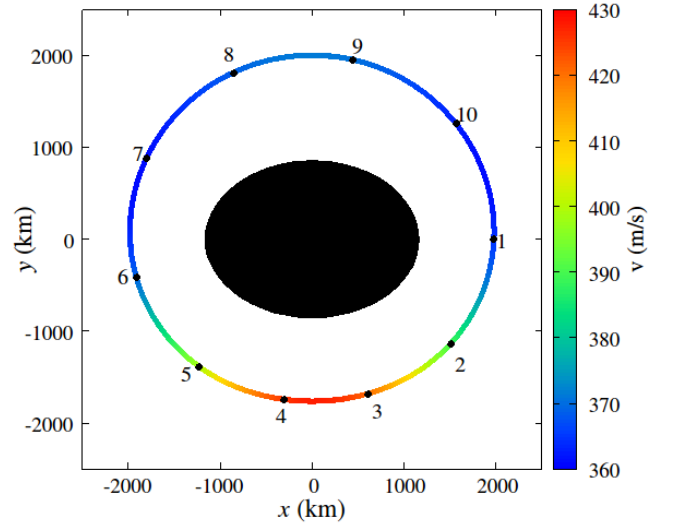
smallest difference of the radial variation. For the upper width limit, use the radius values of the greatest radial variation, indicated by the dashed lines and gray arrows. This process is done for all orbits of the 4:7, 2:4, 2:5, 2:6 resonances and for orbits of the first kind family. In addition to calculating the semi-major axis due to geometry, its respective eccentricities are also calculated by the equation $e = 1 - r_{min}/a$. With these data, it is possible to build the map of the unstable and stable regions in the $a - e$ space. This process was done for all the seven systems addressed in this work.

Figure 17 shows the mapping of the region around the Haumea systems, Haumea^a, Haumea^b and Haumea^c. Starting with the Haumea system, Figure 17a, since it is a very elongated body, the region of stability due to the family of the first kind orbits (white region limited by red lines), is greatly affected by the unstable region (in grey). This phenomenon can also be noticed by analyzing the Poincaré surface of section, Figure 5, with the presence of regions of chaos, indicated by the red points randomly filling the spaces. The pink, blue and green regions correspond to the widths of the 2:4, 2:5 and 2:6 resonances, respectively. Of the three, the largest in semi-major axis length and eccentricity is the 2:6 resonance. Due to the proximity to the central body, the width of the 2:4 resonance is considerably small. As seen in the Poincaré surface of section, this resonance is surrounded by a large region of chaos. It is observed that for low values of the eccentricity, $e < 0.018$, there are no regions of stability associated with any of the three considered resonances. However, the periodic orbits of the first kind, represented by the lower red line, always remain with an eccentricity below 0.02.

Observing the maps of the Haumea^a and Haumea^b systems, see figures 17b and 17c, it is noted that the stable region due to the first kind orbits is greater as the ellipticity of the body decreases. Furthermore, the eccentricity of periodic orbits of the first kind is also closer to zero. Figure 17d shows the mapping of regions around the Haumea^c system, which has the lowest ellipticity coefficient of the systems considered in this work. For this case, the coefficient C_{22} was minimized to 0.003, which is the smallest value sufficient to generate more complex structures, involving resonances between the Haumea rotation and the orbital motion of the particles. With the perturbation of the reduced ellipticity of the body, the stable region becomes larger and the upper red line has a smooth grow, different from what is shown in Figure 17a, where there are sharp drops on the eccentricity of quasi-periodic orbits of the first kind. The lower red line, which is related to periodic orbits of the first



(a)



(b)

Figure 10. Periodic orbits of the 2:4 resonance for $C_j = 0.7903 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ in the rotating system. The temporal evolution of the orbits is given by the numbered points that are equally spaced in time, while the colour scale gives the velocity in the inertial system. (a) The periodic orbit of the family represented by the pink colour in Figure 5a. (b) The periodic orbit of the family represented by the purple colour in Figure 5a.

kind, shows that the eccentricity is approximately zero. As for the widths of the resonances, for the case of the 2:4 resonance there was a considerable reduction in its size and the 2:5 and 2:6 resonances became less asymmetrical about their respective centres (dashed lines), consequences caused by the attenuation of the ellipticity of the central body.

Figure 18 shows the maps for the systems where only the rotation period has changed in relation to the physical data of Haumea. In general, in both cases, the regions of stability due to the resonances became wider in the semi-major axis and covered a wider range of eccentricity. This occurs because the rotation is slower, which leaves the resonances considered further away from the central body, minimizing collisions and ejections. In the Haumea^e system, see Figure 18b, in addition to the slower rotation period allowing the

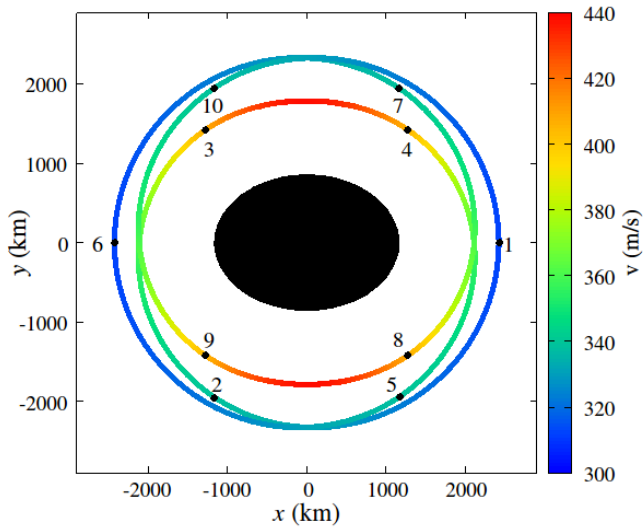


Figure 11. Periodic orbit of the 2:5 resonance for $C_j = 0.8030 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ in the rotating system. The temporal evolution of the orbit is given by the numbered points that are equally spaced in time, while the colour scale gives the velocity in the inertial system.

emergence of the 4:7 resonance, yellow region, one can note the segmentation of the stability region due to the orbits of the first kind. This segmentation is caused by the chaos of the separatrix of the 2:4 resonance. Unlike the other cases, in Haumea^e, the periodic orbits of the first kind have also higher eccentricities, starting at $e \approx 0.1$. In the stability region of the 2:6 resonance, Figure 18b, we can observe a curvature in the resonant semi-major axis, a black dashed line, caused by the bifurcation of the resonance.

Changing systems again, Figure 19 shows the mapping of the region around Chariklo. This centaur is considerably less elongated and rotates more slowly compared to Haumea. Consequently, the stable region (in white) is larger and without abrupt drops in eccentricity in the upper red line, associated with quasi-periodic orbits of the first kind. The width of the 2:4 resonance is narrower than the others. The orbits associated with the 2:6 resonance are more eccentric, with variations between $0.05 < e < 0.29$.

The maps presented in this section show the impact of the ellipticity and spin of the central body on the stable and unstable regions and, consequently, on the widths of the resonances. It is common to build the a - e maps through theoretical models using the circular restricted three body problem. However, it was not possible to use this model in the systems analyzed in this work, due to the difficulty in describing orbital elements of trajectories around prolate bodies. This disagreement between the analytical model and numerical results was pointed out in the work of Olsen (2006), who found discrepancies in the location of resonances close to the central body (see their Figures 1, 3, 4 and 5).

5 APPLICATIONS: SPACECRAFT, RINGS AND SATELLITES

In the present study, we identified chaotic and stable regions around prolate bodies. Stability zones are associated with periodic and quasi-periodic orbits, some of them are resonant and some are not. These analyses can be used in several applications, such as space missions,

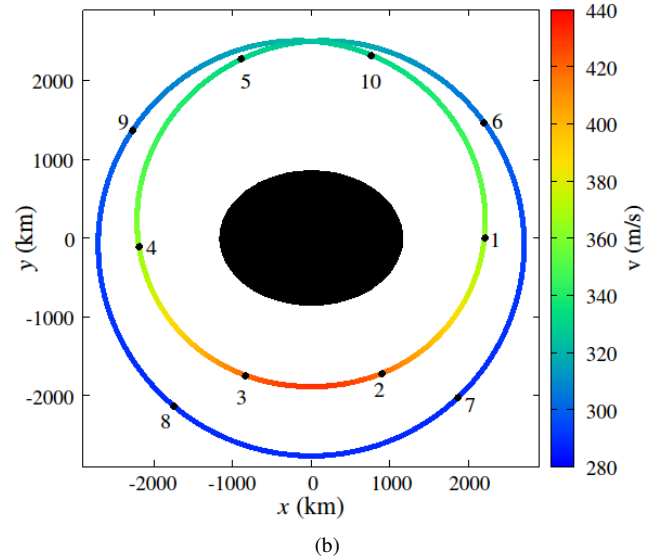
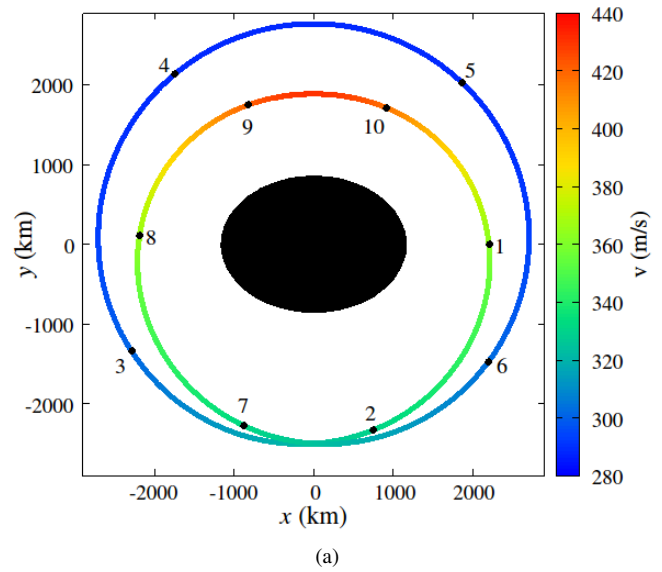


Figure 12. Periodic orbits of the 2:6 resonance for $C_j = 0.8200 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ in the rotating system. The temporal evolution of the orbits is given by the numbered points that are equally spaced in time, while the colour scale gives the velocity in the inertial system. (a) The periodic orbit of the family represented by the light green colour in Figure 5. (b) The periodic orbit of the family represented by the dark green colour in Figure 5.

natural satellites or rings particle. Next, we present some of these applications.

Periodic orbits, resonant or non-resonant, have characteristic trajectories format, which is repeated over time as, for example, those shown in Figures 10 to 13. Identifying the location of periodic orbits can be advantageous for space missions, as that by placing a spacecraft on this trajectory it is possible to predict what its behaviour will be over time, in addition, the spacecraft will be inserted in a stable zone, since around periodic orbit there is a region of quasi-periodic orbits, as shown in Figures 4, 5, 6 and 7. Several works have been developed in the last decades in order to discover periodic orbits for space missions around smaller and irregular celestial bodies, as is the case of the work of Jiang et al. (2018) that explores this type

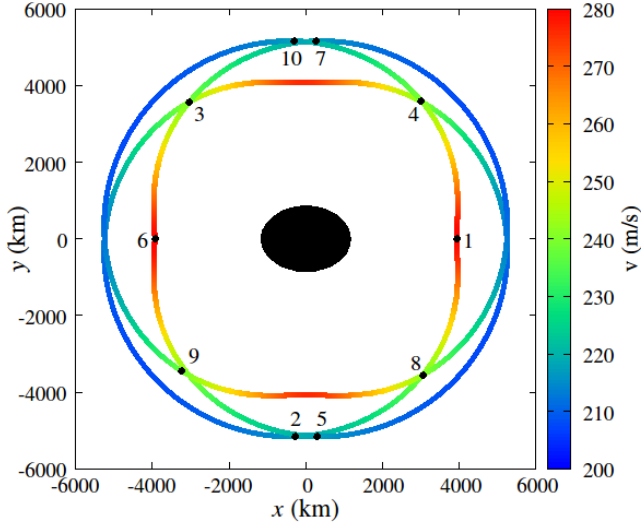


Figure 13. Periodic orbit of the 4:7 resonance of the Haumea^e system for $C_j = 0.25536 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ in the rotating system. The temporal evolution of the orbit is given by the numbered points that are equally spaced in time, while the colour scale gives the velocity in the inertial system.

of trajectory around the asteroids 243 Ida, 433 Eros, 6489 Golevka, 101955 Bennu, and comet 1P/Halley.

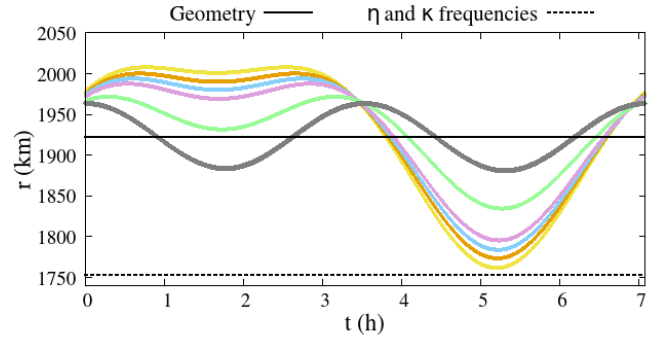
Stable regions, linked to resonances or other periodic orbits, correspond to the birth environment of rings and satellites. Ring particles located in stable regions are expected to have long lifetimes in the absence of external perturbation, possibly giving rise to moons (Madeira et al. 2023a,b). Satellites in stable regions, in turn, can give rise to rings, for example, by ejecting material due to external impacts (Madeira & Giulianti Winter 2020, 2022). On the other hand, these regions can be dangerous for a space mission, as they can be populated by natural objects.

The *chaotic regions* are also interesting for spacecraft, they be an areas devoid of natural material. Over time, rings or moons that formed in the region are removed due to instability. In the systems studied in this work, we found an extensive region of chaos, for example, the region internal to the 2:4 resonance, as shown in the maps of Figures 17, 18 and 19. This is an area close to the body that becomes interesting for missions that seek to study its surface. Because they are in unstable zones, it is necessary to use some control mechanism to guide the spacecraft for the time stipulated by the mission.

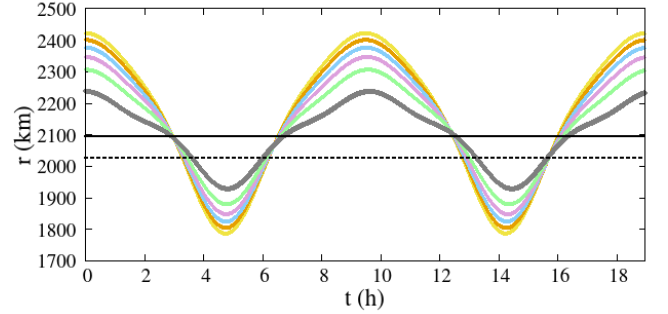
6 CONCLUSIONS

In this work, we seek to present an analysis of the dynamics of the region around prolate bodies. For this, we used the Poincaré surface of section technique, which provided the necessary information for the identification of stable and unstable regions in the phase space of the seven considered systems. The central bodies were modelled by an ellipsoidal gravitational potential of an ellipsoidal body. Among these systems, we change the rotation period, ellipticity and mass of the primary, to identify how the region around these bodies is affected by these physical parameters. Our results are summarized below:

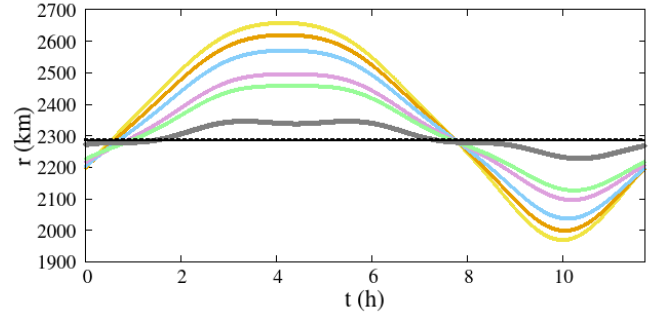
- On the Poincaré surface of section, we identify the double res-



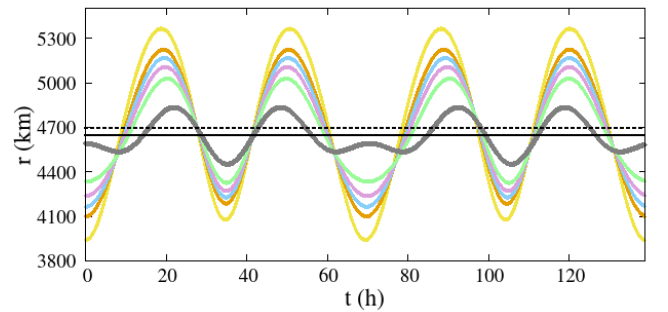
(a) Periodic orbits of the 2:4 resonance of the Haumea system for values of $0.7903 \leq C_j \leq 0.7930$, indicated by different colours.



(b) Periodic orbits of the 2:5 resonance of the Haumea system for values of $0.8030 \leq C_j \leq 0.8078$, indicated by different colours.



(c) Periodic orbits of the 2:6 resonance of the Haumea system for values of $0.8200 \leq C_j \leq 0.8277$, indicated by different colours.



(d) Periodic orbits of the 4:7 resonance of the Haumea^e system for values of $0.25536 \leq C_j \leq 0.25676$, indicated by different colours.

Figure 14. Temporal evolution of the radial distance of the periodic orbits associated with the resonances, for different values of C_j . Time refers to an orbital period in the rotating system. The dashed lines indicate the resonant semi-major axis location obtained from two different methods.

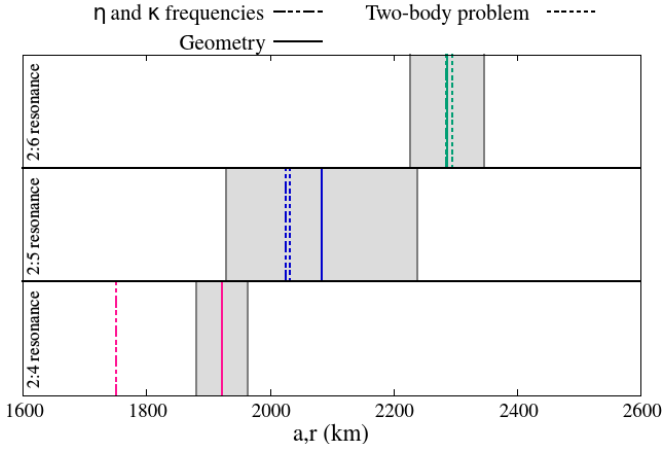


Figure 15. Diagram comparing the location of the semi-major axis of the 2:4, 2:5 and 2:6 resonances, calculated by three different methods: two-body problem, epicyclic frequencies (η and κ) and orbit geometry. The types of dashes indicate which method was used. The pink, blue and green colours are related to the resonances and the grey regions indicate the radial variation of the less eccentric periodic orbit of each considered resonance. In the case of the 2:4 resonance, the locations of the resonant semi-major axis calculated through the two-body problem and epicyclic frequencies are very close, with the lines almost overlapping.

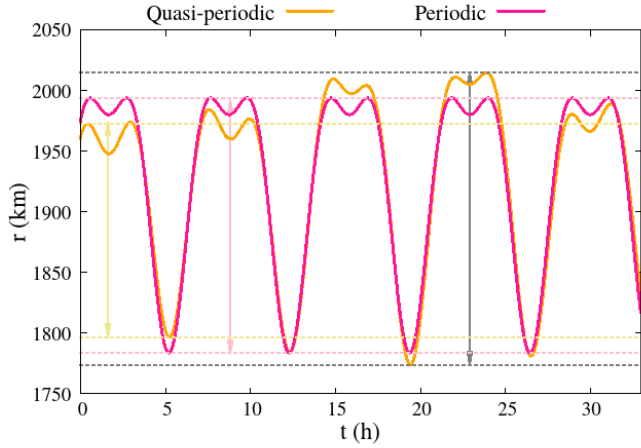


Figure 16. Temporal evolution of the radial variation of the periodic (in pink) and quasi-periodic (in yellow) orbits. The quasi-periodic orbit refers to the largest island associated with 2:4 resonance for the Jacobi constant $C_J = 0.7912 \text{ km}^2\text{s}^{-2}$. The yellow and grey dashed lines and arrows indicate the maximum and minimum radial distance values used to calculate the semi-major axis and eccentricity limits of the quasi-periodic orbits, while the pink dashed lines and arrows point to the maximum and minimum values of the radial distance considered to calculate the centre of resonance.

onances, which were pointed out in the works of Winter et al. (2019) and Sicardy (2020). In addition, in the Haumea^e system we identify the bifurcation of the 2:6 resonance. Analyzing the Poincaré surface of section, we find that both the ellipticity of the central body and the spin affect the location of the resonances.

- To measure the extent of stable and unstable regions, delimited by periodic and quasi-periodic orbits, we used the method discussed in Ribeiro et al. (2021). The use of epicyclic frequencies to calculate the semi-major axis of orbits around prolate bodies leads to

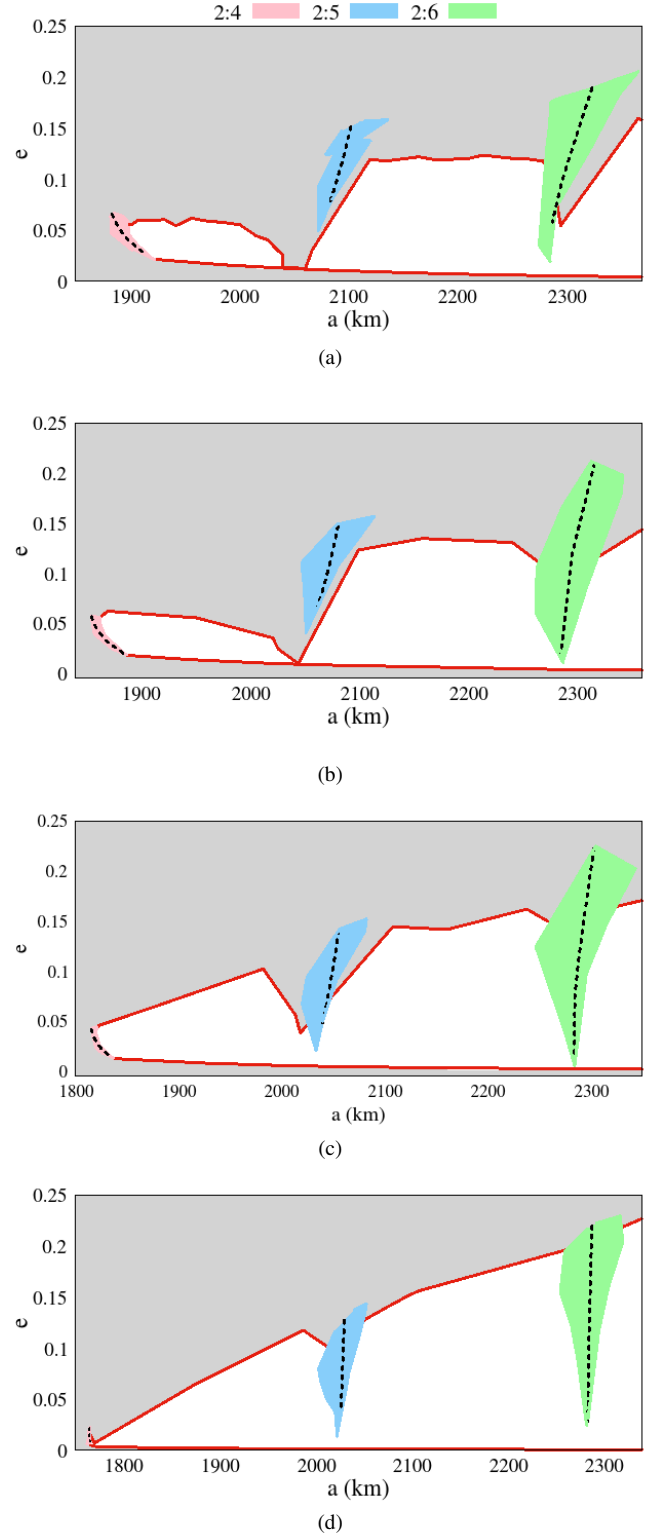


Figure 17. Maps of the stable and unstable regions in the $a - e$ space of the systems (a) Haumea, (b) Haumea^a, (c) Hamuea^b and (d) Haumea^c. Maps were obtained from the Poincaré surface of section. Particles with semi-major axis and eccentricity within the gray region either collide with the central body or are ejected. In the other regions, the particles remain stable for more than 10000 orbits. The pink, blue and green regions are related to the 2:4, 2:5 and 2:6 resonances, respectively. The black dashed lines indicate the centres of each resonance determined by the geometry of the resonant orbits. The lower red line corresponds to the semi-major axis and eccentricity of first kind periodic orbits and the upper red line to quasi-periodic orbits.

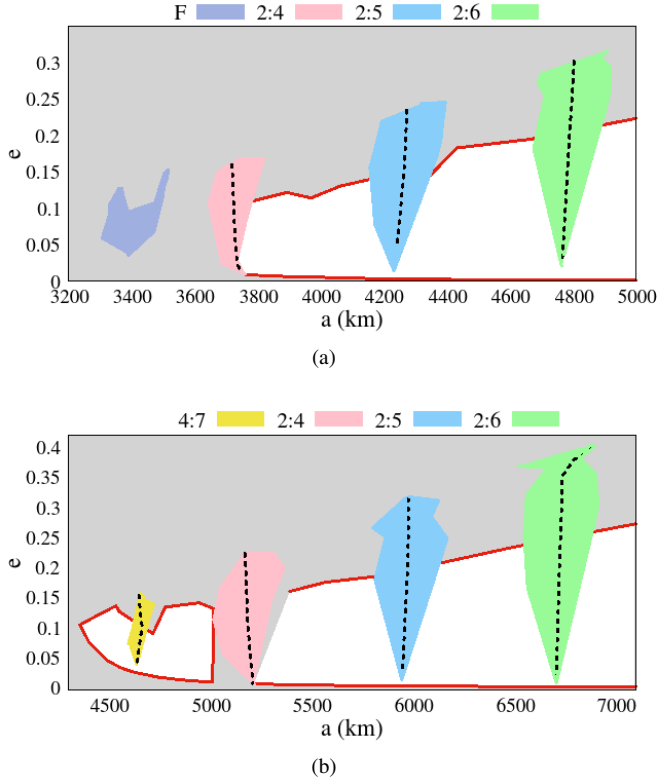


Figure 18. Maps of the stable and unstable regions in the $a - e$ space of the systems (a) Haumea^d and (b) Haumea^e, obtained from the Poincaré surface of section. Particles with semi-major axis and eccentricity within the grey region either collide with the central body or are ejected. In the other regions, the particles remain stable for more than 10000 orbits. The yellow, pink, blue and green regions are related to the 4:7, 2:4, 2:5 and 2:6 resonances, respectively. The purple region in plot (a) refers to the F1 and F2 family. The black dashed lines indicate the centres of each resonance determined by the geometry of the resonant orbits. The lower red line corresponds to the semi-major axis and eccentricity of first kind periodic orbits and the upper red line to quasi-periodic orbits.

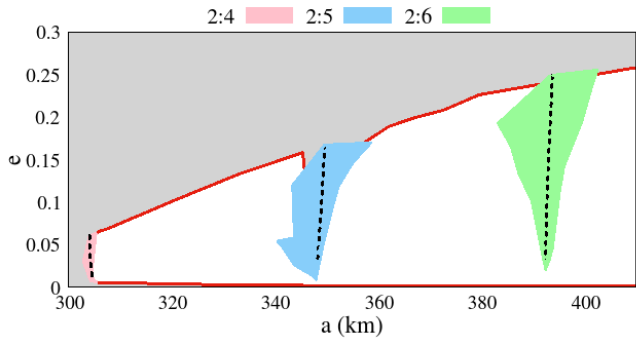


Figure 19. Map of the stable and unstable regions in the $a - e$ space of the Chariklo system, obtained from the Poincaré surface of section. Particles with semi-major axis and eccentricity within the grey region either collide with the central body or are ejected. In the other regions, the particles remain stable for more than 10000 orbits. The pink, blue and green regions are related to the 2:4, 2:5 and 2:6 resonances, respectively. The black dashed lines indicate the centres of each resonance determined through the geometry of the resonant orbits. The lower red line corresponds to the semi-major axis and eccentricity of first kind periodic orbits and the upper red line to quasi-periodic orbits.

inconsistencies with the numerical results for regions close to the central body. Such disagreements were also identified in the work of Olsen (2006), who compared numerical simulations with an analytical method (mean elements) for determining the width of spin-orbit resonances around prolate bodies.

- Having defined the method to calculate the semi-major axis and eccentricity of the orbits, we build stability maps in the $a - e$ space. With the maps, we identified that the widths of the resonances are not symmetrical about the centre of the resonance, defined by the resonant semi-major axis.

- It was possible to identify a large region of stability, in semi-major axis and eccentricity, due to the first kind of orbits. Periodic orbits of the first kind, in general, have almost zero eccentricity and are present in a large semi-major axis interval for all studied systems, while resonant and quasi-periodic orbits have high eccentricities.

ACKNOWLEDGEMENTS

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) - Proc. 2016/24561-0 and Proc. 2018/23568-6, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) - Proc. 305210/2018-1 and Proc. 313043/2020-5. G.M. thanks to the Centre National d'Études Spatiales (CNES) and European Research Council (ERC). Finally, we thank the anonymous reviewer for the comments that significantly improved our work.

DATA AVAILABILITY

The data underlying this article will be shared on reasonable request to the corresponding author.

REFERENCES

- Balmino G., 1994, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 60, 331
 Bérard D., et al., 2017, *AJ*, 154, 144
 Borderes-Motta G., Winter O. C., 2018, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 474, 2452
 Borderes N., Longaretti P. Y., 1987, *Icarus*, 72, 593
 Borderes N., Longaretti P. Y., 1994, *Icarus*, 107, 129
 Braga-Ribas F., et al., 2014, *Nature*, 508, 72
 Broucke R., 1968, Technical report, Periodic orbits in the restricted three body problem with earth-moon masses
 Chandrasekhar S., 1942, *Principles of Stellar Dynamics*
 Geissler P., Petit J.-M., Durda D. D., Greenberg R., Bottke W., Nolan M., Moore J., 1996, *Icarus*, 120, 140
 Hénon M., 1965a, *Ann. Astrophys.*, 28, 499
 Hénon M., 1965b, *Ann. Astrophys.*, 28, 992
 Hénon M., 1966a, *Ann. Astrophys.*, 29, 49
 Hénon M., 1966b, *Ann. Astrophys.*, 29, 57
 Hénon M., 1969, *Academie des Sciences Paris Comptes Rendus Serie B - Sciences Physiques*, 269, 223
 Hu W., Scheeres D., 2004, *Planetary and Space Science*, 52, 685
 Jefferys W. H., 1971, *Publications of the Department of Astronomy. The University of Texas at Austin, Austin, TX, USA*
 Jiang Y., Schmidt J. A., Li H., Liu X., Yang Y., 2018, *Astrodynamics*, 2, 69
 Leiva R., et al., 2017, *The Astronomical Journal*, 154, 159
 Longaretti P. Y., Borderes N., 1991, *Icarus*, 94, 165
 Madeira G., Giulietti Winter S. M., 2020, *The European Physical Journal Special Topics*, 229, 1527

- Madeira G., Giuliatti Winter S. M., 2022, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 513, 297
- Madeira G., Giuliatti Winter S., Ribeiro T., Winter O., 2022, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 510, 1450
- Madeira G., Charnoz S., Hyodo R., 2023a, *Icarus*, p. 115428
- Madeira G., Charnoz S., Zhang Y., Hyodo R., Michel P., Genda H., Winter S. G., 2023b, *The Astronomical Journal*, 165, 161
- Morgado B., et al., 2021, arXiv preprint arXiv:2107.07904
- Mysen E., Aksnes K., 2007, *Astronomy & Astrophysics*, 470, 1193
- Mysen E., Olsen Ø., Aksnes K., 2006, *Planetary and Space Science*, 54, 750
- Olsen Ø., 2006, *Astronomy & Astrophysics*, 449, 821
- Ortiz J. L., et al., 2017, *Nature*, 550, 219
- Poincaré H., 1895, *Gauthier-Villars et ls. Paris*, 3
- Rabinowitz D. L., Barkume K., Brown M. E., Roe H., Schwartz M., Tourtellotte S., Trujillo C., 2006, *The Astronomical Journal*, 639, 1238
- Ragozzine D., Brown M. E., 2009, *The Astronomical Journal*, 137, 4766
- Renner S., Sicardy B., 2006, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 94, 237
- Ribeiro T., Winter O., Mourão D., Boldrin L., Carvalho J., 2021, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 506, 3068
- Sicardy B., 2020, *AJ*, 159, 102
- Sicardy B., Leiva R., Renner S., Roques F., El Moutamid M., Santos-Sanz P., Desmars J., 2019, *Nature Astronomy*, 3, 146
- Werner R. A., 1994, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 59, 253
- Winter O. C., Murray C. D., 1994a, *Atlas of the Planar, Circular, Restricted Three-Body Problem. I. Internal Orbits. No. 1*, QMW Maths Notes, London
- Winter O. C., Murray C. D., 1994b, *Atlas of the Planar, Circular, Restricted Three-Body Problem. II. External Orbits. No. 2*, QMW Maths Notes, London
- Winter O. C., Murray C. D., 1997a, *A&A*, 319, 290
- Winter O. C., Murray C. D., 1997b, *A&A*, 328, 399
- Winter O., Neto E. V., 2002, *Astronomy & Astrophysics*, 393, 661
- Winter O. C., Borderes-Motta G., Ribeiro T., 2019, *MNRAS*, 484, 3765

This paper has been typeset from a $\text{\LaTeX}$ file prepared by the author.