IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO IFT–D.001/11

Estrutura Hamiltoniana da Hierarquia PIV

Danilo Virges Ruy

Orientador

Prof.Dr. Abraham Hirsz Zimerman

Fevereiro de 2011

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Prof. A. H. Zimerman, pela oportunidade de realizar este trabalho em conjunto e pela experiência que adquiri ao longo do processo. Agradeço também aos professores Prof. José Francisco Gomes (IFT-UNESP) e Prof. Henry Aratyn (University of Illinois at Chicago) pelas discussões. Agradeço também a CAPES pelo apoio financeiro.

Agradeço especialmente a minha família pela motivação e apoio incondicional em todos os momentos.

Resumo

Esta dissertação trata da construção de hierarquias compatíveis com a equação PIV a partir dos modelos: AKNS, dois bósons e dois bósons quadráticos. Também são construidos os problema linear de Jimbo-Miwa dos três modelos e discutimos a hamiltoniana correspondente a equação PIV a partir do formalismo lagrangiano.

Palavras Chaves: modelos integráveis; equações de Painlevé

Áreas do conhecimento: Ciências Exatas e da Terra/Área: Física/Subárea: Física das Partículas Elementares e Campos; Ciências Exatas e da Terra/Área: Física/Subárea:Física Geral/Especialidade: Métodos Matemáticos da Física

Abstract

This dissertation contains the construction of compatible hierarchies with the PIV equation from the models: AKNS, two-boson and quadratic two-boson. Also it is build the Jimbo-Miwa linear problem for the three models and we discuss the hamiltonian corresponding to fouth Painlevé equation from the Lagrangian formalism.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A primeira vez que um modelo integrável foi associado a uma das equações de Painlevé foi na referência [15], onde foi associado a equação PII ao modelo mKdV através de uma transformação por auto-similaridade e, desde então, vários trabalhos vem sendo feitos afim de associar modelos integráveis a hierarquias do tipo Painlevé.

Em [2], [3] e [4], a relação entre a hierarquia mKdV e a hierarquia PII já foi estudado em detalhe. Enquanto que a hierarquia PIV foi construida pela primeira vez a partir de um modelo integrável em [16], onde foi mostrado que a hierarquia PIV corresponde a uma hierarquia de equações diferenciais acopladas.

No capítulo 2, será explicado brevemente o que são as equações de Painlevé e desenvolvido o instrumental teórico que nos permitirá construir a hierarquia PIV. Veremos que, do mesmo modo que a representação matricial do par de Lax é usada para obter uma hierarquia de equações diferenciais **parciais** e não-lineares, usaremos as matrizes do problema linear de Jimbo-Miwa para obter uma hierarquia de equações diferenciais **ordinárias** e não-lineares.

No capítulo 3, faremos uma análise detalhada das hierarquias AKNS, de dois bósons (que corresponde ao modelo de ondas dispersivas na água usado em [16]) e de dois bósons quadráticos. Veremos que os três modelos são representações equivalentes (por uma transformação de gauge) de uma hierarquia KP reduzida com dois campos bosônicos, de acordo com [11], e explicaremos como construir todas as equações das hierarquias. Usando a representação matricial, obteremos os pares de

Lax dos três modelos para um tempo genérico, t_n. Exploraremos também a redução por auto-similaridade de modo detalhado para a hierarquia AKNS e veremos, de acordo com [4], que pode-se generalizar esta redução de modo que vários tempos sejam transformados. Finalmente, obteremos as matrizes do problema linear de Jimbo-Miwa dos três modelos.

Quando analizarmos o modo de obter a hierarquia PIV a partir destes modelos no capítulo 4, encontraremos resultados diversos. A hierarquia AKNS mostrou-se particularmente difícil neste aspecto e explicitaremos algumas tentativas para eventuais consultas futuras. Já para o modelo de dois-bósons, construiremos a hierarquia PIV de modo que ficará explicito a dependência das hamiltonianas nas equações da hierarquia, complementando assim o trabalho feito em [16]. Finalmente, para o modelo de dois bósons quadráticos, que é uma transformação de Miura generalizada do modelo de dois bósons (como mostrado em [11] e [9]), veremos que a hierarquia PIV surge de forma bastante natural. Por fim, exploraremos o método de obter as hamiltonianas a partir das lagrangianas para as duas primeiras equações da hierarquia PII e, em seguida, obteremos a primeira hamiltoniana da hierarquia PIV e relacionaremos com a obtida em [17].

Para completar, nos apêndices, analizaremos os vínculos que relacionam os modelos de dois campos tratados com os modelos KdV e mKdV, contruiremos a hierarquia PII e desenvolveremos alguns tópicos do formalismo hamiltoniano.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Introdução as equações diferenciais no plano complexo do tipo Painlevé

As equações de Painlevé foram descobertas na virada para o século vinte pelo matemático frances Paul Painlevé enquanto analisava as equações diferenciais não-lineares de segunda ordem no plano complexo do tipo

$$u_{zz} = F(z, u, u_z)$$

sendo F racional em u e u_z e possuindo apenas singularidades do tipo pólo em todo plano complexo. Painlevé e colegas de sua época buscaram classificar todas as equações desse tipo cujas soluções possuem apenas pólos como singularidades movíveis. De fato, mesmo equações diferenciais não-lineares de ordens superiores que satisfazem esta propriedade ficaram conhecidas como equações do tipo Painlevé.

Vamos fazer um parênteses para explicar melhor o que seria um ponto de singularidade movível. Considere as duas equações diferenciais não-lineares de primeira ordem a seguir:

i) $u_z + 2zu^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{z^2 + u_0^{-1}}$

ii) $u_z + \frac{u}{z-\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad u = -\frac{u_0 \alpha}{z-\alpha}$

No primeiro caso, a condição inicial (digamos $u(z=0) = u_0$) determina o local da singularidade, já no segundo caso, temos uma singularidade fixa em $z = \alpha$, isto é, independentemente da condição inicial.

A motivação por buscarmos equações diferenciais que satisfazem esta propriedade é que as soluções das equações podem ser extendidas analiticamente para todo plano complexo, excluindo os pontos de singularidades. Para equações diferenciais de segunda ordem, foi mostrado que existem cinquenta equações que satisfazem tal propriedade, sendo que elas podiam ser reduzidas a equações lineares, equações de Riccati, equações contendo funções elípticas ou a seis novas equações . Estas novas equações ficaram conhecidas como equações de Painlevé e são

Tabela 2.1: Equações de Painlevé

PI	$u_{zz} = 6u^2 + z$
PII	$u_{zz} = zu + 2u^3 + \alpha$
PIII	$u_{zz} = \frac{1}{u}u_z^2 - \frac{u_z}{z} + \frac{1}{z}(\alpha u^2 + \beta) + \gamma u^3 + \frac{\delta}{u}$
PIV	$u_{zz} = \frac{1}{2u}u_z^2 + \frac{3}{2}u^3 + 4zu^2 + 2(z^2 - \alpha)u + \frac{\beta}{u}$
PV	$u_{zz} = \frac{3u-1}{2u(u-1)}u_z^2 - \frac{1}{z}u_z + \frac{(u-1)^2}{z^2}(\alpha u + \frac{\beta}{u}) + \frac{\gamma u}{z} + \frac{\delta u(u+1)}{u-1}$
PVI	$u_{zz} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u-z}\right)u_z^2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{u-z}\right)u_z + \frac{u(u-1)(u-z)}{z^2(z-1)^2}\Big(\alpha + \beta\frac{z}{u^2}$ $+\gamma\frac{z-1}{(u-1)^2} + \delta\frac{z(z-1)}{(u-z)^2}\Big)$

Essas equações desempenham na física não-linear o mesmo papel que outras funções especiais, como Bessel e Airy, desempenham na física linear e possuem aplicabilidade nas teorias de matrizes aleatórias, cordas, gravitação quântica, processos de crescimento, modelo de Ising em 2 dimensões entre outros (para mais aplicações ver [6]). Em meados dos anos 70, o estudo das equações de Painlevé encarou um renascimento devido a descoberta de M. J. Ablowitz e H. Segur de que a equação PII aparece através de uma transformação por auto-similaridade (através da qual elimina-se uma variável do problema) do modelo mKdV. Isso tem motivado muitos trabalhos recentes na construção de hierarquias correspondentes as equações de PII e PIV.

2.2 Modelos Integráveis

No trabalho que desenvolveremos a partir do próximo capítulo, construiremos uma hierarquia de equações diferenciais compativeis com a equação PIV usando modelos integráveis já conhecidos. Nesta seção explicaremos brevemente o que é um modelo integrável.

2.2.1 Estrutura hamiltoniana

Antes de falarmos sobre a integrabilidade do sistema, vamos falar um pouco sobre a estrutura hamiltoniana de um sistema dinâmico discreto e fazer a correspondência com sistemas continuos.

Vamos assumir um sistema descrito sobre um espaço de fase M de $2n$ dimensões, com coordenadas canônicas

$$(q_i, p_i), \qquad i = 1, 2, ..., n$$

Uma trajetória sobre este espaço de fase será parametrizada pelo tempo t e determinada pela hamiltoniana do sistema, $H = H(q, p, t)$, tal que

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{2.1}$$

Assim, uma variável dinâmica será definida como $f : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f = f(q, p, t)$.

Definição 1. *O parênteses de Poisson de duas variáveis dinâmicas, f e g, é*

$$\{f, g\} \equiv \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \Big) \tag{2.2}$$

e possui as seguintes relações :

$\{f, g\} = -\{g, f\},$ *(anti-simetria)*

$\{f, \alpha g_1 + \beta g_2\} = \alpha\{f, g_1\} + \beta\{f, g_2\}$ *(linearidade)*

$\{f_1, f_2 f_3\} = \{f_1, f_2\} f_3 + f_2\{f_1, f_3\}$ *(Regra de Leibnitz)*

$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0,$ *(identidade de Jacobi)*

Usando a definição do parênteses de Poisson acima, podemos definir coordenadas canônicas como sendo as coordenadas que satisfazem

$$\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0, \qquad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

Usando (2.1) e (2.2), podemos escrever a evolução temporal de uma variável dinâmica como

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$$

O próximo passo será associar o formalismo que desenvolvemos acima ao caso continuo. Para isso trocaremos o espaço de fase M pelo espaço de funções suaves e com condições de contorno periódicas ou de decaimento. Neste espaço de fase, a hamiltoniana de um sistema com n campos $\phi_i(x, t)$ será um funcional dos campos, isto é,

$$H[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} f[\phi, \phi_x, ...] dx,$$

A derivada funcional é dada por

$$\frac{\delta H}{\delta \phi_i(x, t)} = \frac{\partial f}{\partial \phi_i(x, t)} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \phi_{i,x}(x, t)} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial \phi_{i,xx}(x, t)} + ...$$

sendo

$$\frac{\delta\phi_i(x,t)}{\delta\phi_j(y,t)} = \delta_{ij}\delta(x-y) \tag{2.3}$$

O parênteses de Poisson de funcionais dos campos é generalizado como

$$\{A[\phi], B[\phi]\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdy \frac{\delta A}{\delta\phi_i(x,t)}\{\phi_i(x,t), \phi_j(y,t)\}\frac{\delta B}{\delta\phi_j(y,t)}$$

Desta forma, a evolução temporal dos campo é dada por

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial t}(x,t) = \{\phi_i(x,t), H[\phi]\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx'dy \frac{\delta\phi_i(x,t)}{\delta\phi_k(x',t)}\{\phi_k(x',t), \phi_j(y,t)\}\frac{\delta H}{\delta\phi_j(y,t)}$$

Assim, usando (2.3), temos

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial t}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\{\phi_i(x,t), \phi_j(y,t)\}\frac{\delta H}{\delta\phi_j(y,t)}$$

Na análise acima, explicitamos a dependência de todos os fatores com relação ao tempo afim de eliminar qualquer ambiguidades, mas usaremos uma notação simplificada daqui em diante.

2.2.2 O que é um modelo integrável?

Podemos dizer que um sistema hamiltoniano será integrável se for possível encontrar uma solução analítica de suas variáveis dinâmicas; contudo, podemos determinar um critério para a integrabilidade do sistema antes de encontrarmos tal solução analítica.

Definição 2. *Um sistema definido sobre um espaço de fase com $2n$ dimensões será integrável se possuir n constantes de movimento F_i (também chamadas de integrais primeiras) linearmente independentes e em involução . Ou seja, deve satisfazer as seguintes propriedades:*

$\{H, F_i\} = 0,$ *(para os F_i serem constantes de movimento)*

$\sum_i a_i \nabla F_i = 0 \Leftrightarrow a_i = 0$ *(para os F_i serem linearmente independentes)*

$\{F_i, F_j\} = 0$ *(para os F_i estarem em involução)*

Veja que pela definição de um sistema integrável, cada constante de movimento F_i pode ser tomada como uma hamiltoniana do sistema e por isso fazemos a associação $F_i \to H_i$. Como cada hamiltoniana determina uma trajetória sobre o sistema, generalizaremos também o parâmetro de evolução temporal de tal forma que associaremos um parâmetro de evolução temporal para cada hamiltoniana, isto é,

$$\frac{dA}{dt_i} = \{A, H_i\} + \frac{\partial A}{\partial t_i}$$

O teorema que garante a existência de uma solução analítica para sistemas integráveis é o teorema de Liouville. Abaixo, apresentaremos o enunciado do teorema de Arnold-Liouville sem demonstra-lo; contudo, a demonstração pode ser encontrada em textos como por exemplo [18].

Teorema 1 (Teorema de Arnold-Liouville)**.** *Considere um sistema integrável definido sobre o espaço de fase M, tal que suas integrais primeiras descrevam uma superfície de dimensão n no espaço de fase, isto é,*

$$M_F \equiv \{(q,p) \in M; F_k(q,p) = c_k\}, \qquad c_k = constante, \qquad k = 1, ..., n$$

Então teremos as seguintes propriedades:

- *Se M_F for compacto e conexo, então será difeomórfico a um toro*

$$T^n = S^1 \times S^1 \times ... \times S^1$$

  tal que pode-se introduzir variáveis ação -angulo na vizinhança deste toro, isto é,

$$I_1, ..., I_n, \phi_1, ...\phi_n; \qquad 0 \leq \phi_k \leq 2\pi$$

  de modo que ϕ_k serão as coordenadas de M_F e $I_k = I_k(F_1, ..., F_n)$ serão integrais primeiras.

- *As equações de Hamilton serão*

$$\dot{I}_k = 0, \qquad \dot{\phi}_k = \omega_k(I_1, ..., I_n), \qquad k = 1, ..., n$$

  Logo, o sistema poderá ser resolvido por quadratura, isto é, através de um número finito de operações algébricas e integrações de funções conhecidas.

Acima, desenvolvemos a definição de modelos integráveis para sistemas de coordenadas discretos. Afim de generalizar nossa definição para campos, devemos buscar infinitas constantes de movimento linearmente independentes e em involução para que um sistema contínuo seja integrável. Para o desenvolvimento dos próximos capítulos, afirmaremos sem demonstrar (para mais detalhes ver [18]) que para um sistema continuo satisfazer a condição de integrabilidade basta que exista uma estrutura bi-hamiltoniana do tipo

$$\{\phi_i, H_n\}_1 = \lambda_n \{\phi_i, H_{n-1}\}_2, \qquad \lambda_n = constante$$

Desta forma, partindo de uma hamiltoniana inicial podemos encontrar infinitas hamiltonianas, conforme será visto no próximo capítulo.

2.2.3 O par de Lax e o método de curvatura nula

Nesta seção veremos que é possível associar sistemas dinâmicos não-lineares (equações diferenciais parciais) com operadores lineares. Esta associação é dada através do par de Lax, que possui implicações no espalhamento inverso (como pode ser visto em [20] e [18]), ou através do método de curvatura nula.

O método do par de Lax consiste em encontrar um operador escalar cujo auto-valor não seja dependente do parâmetro de evolução , isto é

$$L\Psi = \varepsilon\Psi, \qquad \varepsilon_t = 0 \tag{2.4}$$

sendo que a evolução da auto-função é

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = B\Psi \tag{2.5}$$

Se derivamos (2.4) e usamos (2.5), temos a equação de Lax como condição de compatibilidade, isto é

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [B, L]$$

Veja por exemplo que se usarmos

$$L = -D^2 - U, \qquad B = 4D^3 + 3(UD + DU)$$

e pegarmos a projeção sobre D^0 obtemos a equação KdV, isto é,

$$U_t + 6UU_x + U_{xxx} = 0$$

Agora veremos uma representação matricial do par Lax. Para isso, considera o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \mathcal{L}(\varepsilon)\Psi, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \mathcal{M}(\varepsilon)\Psi \tag{2.6}$$

sendo $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ matrizes dependêntes dos campos e do parâmetro spectral ε.

O método de curvatura nula consiste em garantir que podemos inverter a ordem das derivadas, isto é,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial t} = 0$$

Desta forma, usando (2.6), obtemos a seguinte condição de compatibilidade

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} + [\mathcal{L}, \mathcal{M}] = 0 \tag{2.7}$$

Veremos no próximo capítulo como os dois métodos descritos acima se relacionam num caso particular do modelo KP.

2.3 Redução por auto-similaridade e o problema linear de Jimbo-Miwa

Nesta seção analizaremos de forma geral a redução por auto-similaridade.

Definição 3. *A redução por auto-similaridade consiste numa transformação nas coordenadas e nos campos, tal que eliminamos uma variável das equações de movimento. Para dada equação espectral*

$$L\Psi = \varepsilon\Psi$$

A tranformação é dada por

$$z_n = (nt_n)^{-\frac{1}{n}} x, \qquad T_k = (nt_n)^{-\frac{k}{n}} k t_k, \qquad k = 1, 2, ..., n$$

$$\phi_i(x, \tau) = (nt_n)^{\mu_i} \Phi_i(z_n, \tau')$$

Sendo $\tau = \{t_2, t_3, ...\}$ *o conjunto dos tempos antigos,* $\tau' = \{T_2, T_3, ... \| T_1 \propto z_n, T_n = 1\}$ *os tempos transformados,* ϕ_i *e* Φ_i *os campos antigos e novos do modelo em questão respectivamente, tal que os expoentes* μ_i *são determinados para cada modelo em questão.*

Como será visto no próximo capítulo, a transformação nos tempos não é necessaria para reduzirmos uma variável das equações de movimento, mas ela foi introduzida em [4] como uma generalização .

Também podemos aplicar a transformação acima na representação matricial do par Lax, o qual nos dará o problema linear de Jimbo-Miwa. Isto é, temos o seguinte problema linear

$$\partial_x \Psi = \mathcal{L} \Psi \tag{2.8}$$

$$\partial_{t_k} \Psi = \mathcal{M}^{(k)} \Psi \tag{2.9}$$

Para isso usamos as transformações adicionais

$$\tilde{\Psi}(z_n, \tau', \lambda) = U(t_n) \Psi(x, \tau, \varepsilon), \qquad \lambda = (nt_n)^{\frac{1}{n}} \varepsilon, \tag{2.10}$$

sendo que a matrix $U(t_n)$ é determinada tal que o problema linear fique independente da variável t_n. Sob a transformação de auto-similaridade, usaremos a notação

$$\mathcal{L} \to \hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(z_n, \Phi, \lambda)$$

$$\mathcal{M}^{(k)} \to \hat{\mathcal{M}}^{(k)} = \mathcal{M}^{(k)}(z_n, \Phi, \lambda)$$

Logo, de (2.8), temos

$$\partial_x [U^{-1} \tilde{\Psi}] = U^{-1} \frac{\partial z_n}{\partial x} \partial_{z_n} \tilde{\Psi} = \mathcal{L} U^{-1} \tilde{\Psi}$$

Multiplicando pela esquerda U, ficamos com

$$\partial_{z_n} \tilde{\Psi} = (nt_n)^{\frac{1}{n}} [U \hat{\mathcal{L}} U^{-1}] \tilde{\Psi} \equiv \mathcal{A} \tilde{\Psi} \tag{2.11}$$

Similarmente, de (2.9) temos

$$\partial_{t_k}[U^{-1}\tilde{\Psi}] = (\partial_{t_k}U^{-1})\tilde{\Psi}+U^{-1}\frac{\partial z_n}{\partial t_k}\partial_{z_n}\tilde{\Psi}+U^{-1}\sum_{m=2}^{n-1}\frac{\partial T_m}{\partial t_k}\partial_{T_m}\tilde{\Psi}+U^{-1}\frac{\partial \lambda}{\partial t_k}\partial_\lambda\tilde{\Psi} = \mathcal{M}^{(k)}U^{-1}\tilde{\Psi}$$

A partir da equação acima podemos identificar dois casos diferentes, ou seja, para $k \neq n$ temos

$$k\partial_{T_k}\tilde{\Psi} = (nt_n)^{\frac{k}{n}}[U\hat{\mathcal{M}}^{(k)}U^{-1}]\tilde{\Psi} \equiv \mathcal{B}^{(k)}\tilde{\Psi}, \qquad k = 2, 3, ..., n-1 \tag{2.12}$$

e também para $k = n$ temos

$$(\partial_{t_n}U^{-1})\tilde{\Psi} - U^{-1}[(nt_n)^{-\frac{1}{n}-1}x]\partial_{z_n}\tilde{\Psi} - U^{-1}\sum_{m=2}^{n-1}[m^2 t_m(nt_n)^{-\frac{m}{n}-1}]\partial_{T_m}\tilde{\Psi}+$$

$$+U^{-1}[(nt_n)^{\frac{1}{n}-1}\varepsilon]\partial_\lambda\tilde{\Psi} = \mathcal{M}^{(n)}U^{-1}\tilde{\Psi}$$

multiplicando a expressão acima pelo lado esquerdo por $(nt_n)U$ e usando (2.11) e (2.12), temos

$$\partial_\lambda\tilde{\Psi} = \frac{1}{\lambda}\Big[z_n\mathcal{A} + \sum_{m=2}^{n}T_m\mathcal{B}^{(k)} - (nt_n)U(\partial_{t_n}U^{-1})\Big]\tilde{\Psi} \equiv \mathcal{C}^{(n)}\tilde{\Psi} \tag{2.13}$$

Portanto, para dado $\mathcal{L}$, nosso problema consiste em encontrar as matrizes $\mathcal{M}^{(j)}$ apropriadas e em seguida obter $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}^{(k)}$ e $\mathcal{C}^{(n)}$. Similarmente ao método de curvatura nula, a relação de compatibilidade entre (2.11) e (2.13) é

$$\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial\lambda} - \frac{\partial\mathcal{C}^{(n)}}{\partial z_n} + [\mathcal{A}, \mathcal{C}^{(n)}] = 0 \tag{2.14}$$

Esta condição resulta em uma hierarquia de equações diferenciais ordinárias não-lineares como será visto no próximo capítulo. Desta forma, vemos que o problema linear de Jimbo-Miwa é o análogo da representação matricial do par de Lax para modelos em uma única dimensão.

Da relação de compatibilidade entre (2.11) e (2.12), isto é,

$$k\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial T_k} - \frac{\partial\mathcal{B}^{(k)}}{\partial z_n} + [\mathcal{A}, \mathcal{B}^{(k)}] = 0 \tag{2.15}$$

obtemos a equação de evolução dos campos em relação ao parâmetro T_k, isto é

$$k\frac{\partial\Phi}{\partial T_k} = \{\Phi, \hat{H}_k(z,\Phi)\} \tag{2.16}$$

Expressamos a equação acima de forma a representar um modelo genérico (detalhes podem ser encontrados em [4]), sendo $\hat{H}_k$ a hamiltoniana reduzida por auto-similaridade. A expressão (2.16) garante que podemos fazer a associação $\mathcal{M}^{(n)} \to \mathcal{M}^{(k)}$ trocando apenas n por k. Por fim, a relação de compatibilidade entre (2.12) e (2.13) é

$$\frac{\partial\mathcal{B}^{(k)}}{\partial\lambda} - k\frac{\partial\mathcal{C}^{(n)}}{\partial T_k} + [\mathcal{B}^{(k)}, \mathcal{C}^{(n)}] = 0 \tag{2.17}$$

A consistência entre (2.14), (2.15) e (2.17) pode ser mostrado da seguinte forma; calculando a comutador de (2.14) com $\mathcal{B}^{(k)}$, de (2.15) com $\mathcal{C}^{(n)}$ e de (2.17) com $\mathcal{A}$, temos

$$[\mathcal{B}^{(k)}, \partial_\lambda\mathcal{A}] - [\mathcal{B}^{(k)}, \partial_z\mathcal{C}^{(n)}] + [\mathcal{B}^{(k)}, [\mathcal{A}, \mathcal{C}^{(n)}]] = 0 \tag{2.18}$$

$$[\mathcal{C}^{(n)}, k\partial_{T_k}\mathcal{A}] - [\mathcal{C}^{(n)}, \partial_z\mathcal{B}^{(k)}] + [\mathcal{C}^{(n)}, [\mathcal{A}, \mathcal{B}^{(k)}]] = 0 \tag{2.19}$$

$$[\mathcal{A}, \partial_\lambda\mathcal{B}^{(k)}] - [\mathcal{A}, k\partial_{T_k}\mathcal{C}^{(n)}] + [\mathcal{A}, [\mathcal{B}^{(k)}, \mathcal{C}^{(n)}]] = 0 \tag{2.20}$$

Fazendo (2.20)+(2.19)−(2.18) e usando a identidade de Jacobi, isto é,

$$[\mathcal{A}, [\mathcal{B}^{(k)}, \mathcal{C}^{(n)}]] + [\mathcal{C}^{(n)}, [\mathcal{A}, \mathcal{B}^{(k)}]] + [\mathcal{B}^{(k)}, [\mathcal{C}^{(n)}, \mathcal{A}]] = 0$$

temos

$$\partial_\lambda[\mathcal{A}, \mathcal{B}^{(k)}] - k\partial_{T_k}[\mathcal{A}, \mathcal{C}^{(n)}] + \partial_z[\mathcal{B}^{(k)}, \mathcal{C}^{(n)}] = 0$$

Finalmente, substituindo (2.14), (2.16) e (2.17) na expressão acima temos

$$\partial_\lambda\Big(k\partial_{T_k}\mathcal{A} - \partial_z\mathcal{B}^{(k)}\Big) - k\partial_{T_k}\Big(\partial_\lambda\mathcal{A} - \partial_z\mathcal{C}^{(n)}\Big) + \partial_z\Big(\partial_\lambda\mathcal{B}^{(k)} - k\partial_{T_k}\mathcal{C}^{(n)}\Big) = 0$$

Como as derivadas parciais comutam, a identidade acima é verdadeira. No trabalho que faremos no próximo capítulo, focaremos apenas na condição (2.14).

Capítulo 3

Análise de modelos $KP_{l=1}$ com dois campos

3.1 Descrição geral do modelo KP

O Lax mais geral do modelo KP é o operador pseudo-diferencial dado por

$$L = u_{-2}D + u_{-1} + \sum_{i=0}^{\infty} u_i D^{-i-1} \tag{3.1}$$

sendo os campos u_i funções das variáveis $(x, t_2, t_3, ...)$. Lembre-se que devemos usar a regra de Leibniz quando operadores diferenciais atuam sobre funções , isto é,

$$D^n f = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{n(n-1)...(n-\alpha+1)}{\alpha!}(\partial^\alpha f)D^{n-\alpha}$$

Se fizermos $n \to -n$, encontramos uma relação similar para operadores pseudo-diferenciais, isto é,

$$D^{-n} f = \sum_{\alpha=0}^{\infty}(-1)^\alpha \frac{(n+\alpha-1)}{\alpha!(n-1)!}(\partial^\alpha f)D^{-n-\alpha}$$

De acordo com a referência [11], o modelo KP descrito acima é dividido em três classes de modelos que rotularemos como KP_l, l=1,2,3; tal que:

$l = 0$: $L = D + \sum_{i=0}^{\infty} u_i D^{-i-1}$ (modelo KP padrão)

$l = 1$: $L = D + u_{-1} + \sum_{i=0}^{\infty} u_i D^{-i-1}$ (primeiro modelo KP fora do padrão)

$l = 2$: $L = u_{-2}D + u_{-1} + \sum_{i=0}^{\infty} u_i D^{-i-1}$ (segundo modelo KP fora do padrão)

Neste capítulo, trabalharemos apenas com o modelo $KP_{l=1}$ com dois campos bosônicos e modelos equivalentes a este por transformações de gauge.

De acordo com a referência [11], podemos fazer uma associação entre a representação escalar e matricial do Lax no caso mais simples abaixo. Para isso usamos a algebra de Lie $sl(2,\Re)$ como base, tal que

$$L = D + A + BD^{-1}C \quad \sim \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}A \pm \varepsilon & -C \\ B & -[\frac{1}{2}A \pm \varepsilon] \end{pmatrix}$$

sendo o sinal $\pm$ de ε relacionado com o sinal do tempo das equações de movimento. Para os modelos que trabalharemos a seguir, a associação entre as representações dos Lax com dois campos bosônicos são dadas na tabela 3.1.

Tabela 3.1: Equivalência entre as representações dos Lax

$L_{AKNS} = D - qD^{-1}r$	$\mathcal{L}_{AKNS} = \begin{pmatrix} -\varepsilon & -q \\ -r & \varepsilon \end{pmatrix}$	modelo AKNS
$L_J = D - J + \bar{J}D^{-1}$	$\mathcal{L}_J = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(J - 2\varepsilon) & 1 \\ -\bar{J} & \frac{1}{2}(J - 2\varepsilon) \end{pmatrix}$	modelo de dois bósons
$L_j = D + j + \bar{j} + \bar{j}D^{-1}j$	$\mathcal{L}_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(j + \bar{j} - 2\varepsilon) & j \\ -\bar{j} & -\frac{1}{2}(j + \bar{j} - 2\varepsilon) \end{pmatrix}$	modelo de dois bósons quadráticos

Os três modelos acima se relacionam através de uma transformação de gauge e transformações nos campos. Este processo é sintetizado na tabela 3.2.

Tabela 3.2: Transformação de gauge entre os modelos

$G = r^{-1}$	$G^{-1}L_{AKNS}G = D - \frac{r_x}{r} - rqD^{-1} \sim L_J$	$J = \frac{r_x}{r}$ $\bar{J} = -rq$
$G = j^{-1}$	$G^{-1}L_jG = D + j + \bar{j} - \frac{j_x}{j} + j\bar{j}D^{-1} \sim L_J$	$J = -j - \bar{j} + \frac{j_x}{j}$ $\bar{J} = j\bar{j}$
$G = r^{-1}$	$G^{-1}L_{AKNS}G = D - \frac{r_x}{r} - rqD^{-1} \sim G^{-1}L_jG$	$q = -\bar{j}\exp(\phi + \bar{\phi})$ $r = j\exp -(\phi + \bar{\phi})$ $\phi_x = j, \quad \bar{\phi}_x = \bar{j}$

3.2 Análise da hierarquia AKNS

Neste capítulo, trabalharemos de forma detalhada os instrumentais matemáticos apresentados no capítulo 2 usando como base a hierarquia AKNS.

3.2.1 Relação de recorrência entre as Hamiltonianas

Para começar nossa análise, queremos encontrar a relação de Lenard da hierarquia AKNS, ou seja, uma relação de recorrência que relacione as derivadas funcionais das constantes de movimento do nosso modelo. Note que esta é uma ferramenta poderosa, pois dada uma hamiltoniana inicial, podemos encontrar todas as hamiltonianas do sistema.

Para isso, usaremos os parênteses de Poisson dados na refência [11], de modo que os parênteses de Poisson 1 são:

$$\{r(x), r(y)\}_1 = 0, \qquad \{q(x), q(y)\}_1 = 0, \qquad \{r(x), q(y)\}_1 = -\delta(x-y)$$

Os parênteses de Poisson 2 são:

$$\{r(x), r(y)\}_2 = -2r(x)r(y)\varepsilon(x-y), \qquad \{q(x), q(y)\}_2 = -2q(x)q(y)\varepsilon(x-y),$$

$$\{q(x), r(y)\}_2 = -\partial_x\delta(x-y) + 2q(x)r(y)\varepsilon(x-y)$$
$$\{r(x), q(y)\}_2 = -\partial_x\delta(x-y) + 2r(x)q(y)\varepsilon(x-y)$$

sendo
$$\partial_x\varepsilon(x-y) = -\partial_y\varepsilon(x-y) = \delta(x-y)$$

Com os parênteses de Poisson em mãos, buscaremos uma relação da forma

$$\lambda_n\{r(x), H_{AKNS,n}\}_1 = \{r(x), H_{AKNS,m}\}_2 \tag{3.2}$$

$$\sigma_n\{q(x), H_{AKNS,n}\}_1 = \{q(x), H_{AKNS,m}\}_2 \tag{3.3}$$

Sendo λ_n e σ_n simplesmente constantes globais. Faremos $m = n-1$ por construção , mas a consistencia disso será verificado posteriormente. A seguir usaremos a notação $\partial_x^{-1} = \int_{-\infty}^{x} dx'$ e a propriedade de integração por partes na forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} fg\,dx = f\partial_x^{-1}g\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}(\partial_x f)(\partial_x^{-1}g)\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty}(\partial_x f)(\partial_x^{-1}g)\,dx$$

sendo que usamos o fato dos campos se anularem no infinito.

Explicitaremos os cálculos apenas para a relação de recorrência (3.2), mas o procedimento é o mesmo para (3.3). Logo temos

$$\lambda_n\int_{-\infty}^{\infty}\left[\{r(x), r(y)\}_1\frac{\delta H_{AKNS,n}}{\delta r(y)} + \{r(x), q(y)\}_1\frac{\delta H_{AKNS,n}}{\delta q(y)}\right]dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\{r(x), r(y)\}_2\frac{\delta H_{AKNS,n}}{\delta r(y)} + \{r(x), q(y)\}_2\frac{\delta H_{AKNS,n}}{\delta q(y)}\right]dy$$

Substituindo os parênteses temos

$$-\lambda_n \tfrac{\delta H_{AKNS,n}}{\delta q(x)} = -2r(x)\int_{-\infty}^{\infty}\Big[r(y)\tfrac{\delta H_{AKNS,n-1}}{\delta r(y)}\varepsilon(x-y) + q(y)\tfrac{\delta H_{AKNS,n-1}}{\delta q(y)}\varepsilon(y-x)\Big]\,dy -$$

$$\partial_x \tfrac{\delta H_{AKNS,n-1}}{\delta q(x)}$$

Utilizando a propriedade mencionada acima, obtemos a seguinte relação e recorrência de Lenard para o campo $q(x)$:

$$-\lambda_n \frac{\delta H_{AKNS,n}}{\delta q(x)} = 2r(x)\partial_x^{-1}\Big[q(x)\frac{\delta H_{AKNS,n-1}}{\delta q(x)} - r(x)\frac{\delta H_{AKNS,n-1}}{\delta r(x)}\Big] - \partial_x \frac{\delta H_{AKNS,n-1}}{\delta q(x)} \tag{3.4}$$

Fazendo o mesmo procedimento para a relação de recorrência (3.3) e tomando o devido cuidado ao distinguir as variáveis x e y na hora de calcular o parênteses 2, temos a seguinte relação de recorrência de Lenard para o campo $r(x)$

$$\sigma_n \frac{\delta H_{AKNS,n}}{\delta r(x)} = 2q(x)\partial_x^{-1}\Big[r(x)\frac{\delta H_{AKNS,n-1}}{\delta r(x)} - q(x)\frac{\delta H_{AKNS,n-1}}{\delta q(x)}\Big] - \partial_x \frac{\delta H_{AKNS,n-1}}{\delta r(x)} \tag{3.5}$$

Deste modo, temos um procedimento para encontrar todas as constantes de movimento partindo de uma contante de movimento inicial. Imporemos a restrição de que $\lambda_n^{-1} = \sigma_n^{-1} = \xi_n$ e usaremos a notação

$$\alpha_i = \prod_{p=1}^{1} \xi_p \tag{3.6}$$

Assim, devemos começar com

$$H_{AKNS,0} = \int_{-\infty}^{\infty} r(x)q(x)\,dx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\delta H_{AKNS,0}}{\delta r(x)} = q(x), \qquad \frac{\delta H_{AKNS,0}}{\delta q(x)} = r(x)$$

para termos as derivadas funcionais da tabela 3.3

É importante notar que a escolha da hamiltoniana inicial não é arbitraria, pois queremos que o tempo t_1 seja proporcional a coordenada x, como será visto na seção seguinte. Como todos ξ_n são fatores globais, por simplicidade iremos escolher $\xi_n = 1$ para qualquer n pelo resto do capítulo. Assim, as hamiltonianas são dadas pela tabela 3.4

Tabela 3.3: Derivadas funcionais da hierarquia AKNS

$\frac{\delta H_{AKNS,1}}{\delta r(x)} = -\alpha_1 q_x$	$\frac{\delta H_{AKNS,1}}{\delta q(x)} = \alpha_1 r_x$
$\frac{\delta H_{AKNS,2}}{\delta r(x)} = -\alpha_2[2rq^2 - q_{xx}]$	$\frac{\delta H_{AKNS,2}}{\delta q(x)} = -\alpha_2[2qr^2 - r_{xx}]$
$\frac{\delta H_{AKNS,3}}{\delta r(x)} = \alpha_3[6qq_xr - q_{xxx}]$	$\frac{\delta H_{AKNS,3}}{\delta q(x)} = -\alpha_3[6rr_xq - r_{xxx}]$
$\frac{\delta H_{AKNS,4}}{\delta r(x)} = \alpha_4[6q^3r^2 - 8qq_{xx}r - 4qq_xr_x -$ $2q^2r_{xx} - 6q_x^2r + q_{xxxx}]$	$\frac{\delta H_{AKNS,4}}{\delta q(x)} = \alpha_4[6r^3q^2 - 8rr_{xx}q - 4rr_xq_x -$ $2r^2q_{xx} - 6r_x^2q + r_{xxxx}]$
$\frac{\delta H_5}{\delta r(x)} = \alpha_5[10(qq_{xxx}r + qq_{xx}r_x + qq_xr_{xx} +$ $2q_xq_{xx}r + q_x^2r_x - 3q^2q_xr^2) - q_{xxxxx}]$	$\frac{\delta H_5}{\delta q(x)} = -\alpha_5[10(rr_{xxx}q + rr_{xx}q_x + rr_xq_{xx} +$ $2r_xr_{xx}q + r_x^2q_x - 3r^2r_xq^2) - r_{xxxxx}]$

Tabela 3.4: Hamiltonianas da hierarquia AKNS

$$H_{AKNS,0} = \int_{-\infty}^{\infty} r(x)q(x)\,dx$$

$$H_{AKNS,1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(q(x)r_x(x) - q_x(x)r(x)\Big)\,dx$$

$$H_{AKNS,2} = -\int_{-\infty}^{\infty}\Big(r^2(x)q^2(x) + r_x(x)q_x(x)\Big)\,dx$$

$$H_{AKNS,3} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[3\Big(q(x)q_x(x)r^2(x) - r(x)r_x(x)q^2(x)\Big) + \Big(q(x)r_{xxx}(x) - r(x)q_{xxx}(x)\Big)\Big]\,dx$$

$$H_{AKNS,4} = \int_{-\infty}^{\infty}\Big[2r^3(x)q^3(x) + r_{xx}(x)q_{xx}(x) + 8r(x)r_x(x)q(x)q_x(x) + r^2(x)q_x^2(x) +$$
$$r_x^2(x)q^2(x)\Big]\,dx$$

Resta-nos verificar que a construção $m = n - 1$, feita para obter a relação de recorrência de Lenard, nos dará equações de movimento consistentes. Faremos isto a seguir juntamente com o cálculo das equações de movimento nos diferentes tempos de $r(x, t_n)$ e $q(x, t_n)$.

3.2.2 Equações de movimento da hierarquia AKNS

Primeiramente calcularemos as equações de movimento para diferentes tempos de $r(x, t_n)$ e $q(x, t_n)$ utilizando o primeiro parênteses de Poisson, em seguida, faremos o mesmo procedimento utilizando o segundo parênteses, tal que possamos comparar os resultados.

Com o primeiro parênteses de Poisson as equações de movimento para $r(x, t_n)$ são dadas por

$$r_{t_n}(x, t_n) = \{r(x, t_n), H_{AKNS,n}\}_1 = -\frac{\delta H_{AKNS,n}}{\delta q(x, t_n)} \tag{3.7}$$

Veja que a equação acima possui uma definição sutil, pois associamos a evolução temporal de uma determinada hamiltoniana com um determinado tempo, tal que o tempo t_1 seja proporcional a x. De modo similar, para $q(x, t_n)$, as equações de movimento são dadas por

$$q_{t_n}(x, t_n) = \{q(x, t_n), H_{AKNS,n}\}_1 = \frac{\delta H_{AKNS,n}}{\delta r(x, t_n)} \tag{3.8}$$

Explicitamente, as primeiras equações de movimento estão na tabela 3.5.

Utilizando o segundo parênteses de Poisson e comparando com o resultado que obtivemos acima podemos ver precisamente a relação entre m e n. Assim, para $r(x, t_n)$ temos

$$r_{t_n}(x, t_n) = \{r(x, t_n), H_{AKNS,m}\}_2 = 2r(x)\partial_x^{-1}\left[q(x)\frac{\delta H_{AKNS,m}}{\delta q(x)} - r(x)\frac{\delta H_{AKNS,m}}{\delta r(x)}\right] - \partial_x\frac{\delta H_{AKNS,m}}{\delta q(x)} \tag{3.9}$$

Tabela 3.5: Hierarquia AKNS

$r_{t_1}(x,t_1) = -r_x$	$q_{t_1}(x,t_1) = -q_x$
$r_{t_2}(x,t_2) = (2r^2q - r_{xx})$	$q_{t_2}(x,t_2) = -(2q^2r - q_{xx})$
$r_{t_3}(x,t_3) = (6rr_xq - r_{xxx})$	$q_{t_3}(x,t_3) = (6qq_xr - q_{xxx})$
$r_{t_4}(x,t_4) = -(6r^3q^2 - 8rr_{xx}q - 4rr_xq_x-$ $2r^2q_{xx} - 6r_x^2q + r_{xxxx})$	$q_{t_4}(x,t_4) = (6q^3r^2 - 8qq_{xx}r - 4qq_xr_x-$ $2q^2r_{xx} - 6q_x^2r + q_{xxxx})$
$r_{t_5}(x,t_5) = [10(rr_{xxx}q + rr_{xx}q_x + rr_xq_{xx}+$ $2r_xr_{xx}q + r_x^2q_x - 3r^2r_xq^2) - r_{xxxxx}]$	$q_{t_5}(x,t_5) = [10(qq_{xxx}r + qq_{xx}r_x + qq_xr_{xx}+$ $2q_xq_{xx}r + q_x^2r_x - 3q^2q_xr^2) - q_{xxxxx}]$

Logo

$$\{r(x,t_n), H_{AKNS,0}\}_2 = -r_x$$

$$\{r(x,t_n), H_{AKNS,1}\}_2 = (2r^2q - r_{xx})$$

$$\{r(x,t_n), H_{AKNS,2}\}_2 = (6rr_xq - r_{xxx})$$

$$\{r(x,t_n), H_{AKNS,3}\}_2 = -(6r^3q^2 - 8rr_{xx}q - 4rr_xq_x - 2r^2q_{xx} - 6r_x^2q + r_{xxxx})$$

$$\{r(x,t_n), H_{AKNS,4}\}_2 = [10(rr_{xxx}q+rr_{xx}q_x+rr_xq_{xx}+2r_xr_{xx}q+r_x^2q_x-3r^2r_xq^2)-r_{xxxxx}]$$

Para associar oa parênteses acima com $r_{t_n}(x,t_n)$ devemos ter $m = n-1$. Similarmente para $q(x,t_n)$ temos

$$q_{t_n}(x,t_n) = \{q(x,t_n), H_{AKNS,m}\}_2 = 2q(x)\partial_x^{-1}\Big[r(x)\frac{\delta H_{AKNS,m}}{\delta r(x)} - q(x)\frac{\delta H_{AKNS,m}}{\delta q(x)}\Big] - \partial_x\frac{\delta H_{AKNS,m}}{\delta r(x)} \tag{3.10}$$

Logo

$$\{q(x,t_n), H_{AKNS,0}\}_2 = -q_x$$

$$\{q(x,t_n), H_{AKNS,1}\}_2 = -(2q^2r - q_{xx})$$

$$\{q(x,t_n), H_{AKNS,2}\}_2 = (6qq_xr - q_{xxx})$$

$$\{q(x,t_n), H_{AKNS,3}\}_2 = (6q^3r^2 - 8qq_{xx}r - 4qq_xr_x - 2q^2r_{xx} - 6q_x^2r + q_{xxxx})$$

$$\{q(x,t_n), H_{AKNS,4}\}_2 = [10(qq_{xxx}r + qq_{xx}r_x + qq_xr_{xx} + 2q_xq_{xx}r + q_x^2r_x - 3q^2q_xr^2) - q_{xxxxx}]$$

Deste modo, para associar os parênteses acima com $q_{t_n}(x,t_n)$ devemos ter $m = n-1$. Assim, verificamos que nossa construção é consistente como era de se esperar, pois nossas hamiltonianas foram construidas já assumindo que $m = n-1$.

Podemos também escrever de uma forma mais elegante a relação de recorrência entre as equações da hierarquia AKNS utilizando (3.4), (3.5), (3.7) e (3.8) na seguinte forma

$$\begin{pmatrix} -\frac{\delta H_{AKNS,n}}{\delta q(x)} \\ \frac{\delta H_{AKNS,n}}{\delta r(x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2r\partial_x^{-1}q + \partial_x & -2r\partial_x^{-1}r \\ 2q\partial_x^{-1}q & 2q\partial_x^{-1}r - \partial_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\delta H_{AKNS,n-1}}{\delta q(x)} \\ \frac{\delta H_{AKNS,n-1}}{\delta r(x)} \end{pmatrix}$$

ou também,

$$\partial_{t_n} \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2r\partial_x^{-1}q + \partial_x & -2r\partial_x^{-1}r \\ 2q\partial_x^{-1}q & 2q\partial_x^{-1}r - \partial_x \end{pmatrix} \partial_{t_{n-1}} \begin{pmatrix} r \\ q \end{pmatrix}$$

É interessante examinar ligeiramente se as equações de movimento obtidas pelo formalismo lagrangiano são compativeis com o que obtivemos até agora. Para t_2, a lagrangiana é

$$\mathcal{L}_{t_2} = \frac{1}{2}q\partial_{t_2}r - \frac{1}{2}r\partial_{t_2}q - r^2q^2 - \partial_xq\partial_xr$$

Através da equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} = 0,$$

encontramos

$$q_{t_2} = -(2rq^2 - q_{xx}), \qquad r_{t_2} = (2qr^2 - r_{xx}),$$

como deveria ser.

3.2.3 Redução por auto-similaridade da hierarquia AKNS

Nesta seção , trabalharemos de forma bastante detalhada a redução por auto-similaridade, que no fundo consiste em um método de eliminarmos uma variável das nossas equações diferenciais. Veja que as equações de movimento dos campos são equações diferenciais parciais (EDP) de apenas 2 variáveis, t_n e x, portanto teremos uma equação diferencial ordinária (EDO) associada a cada tempo. Antes de darmos continuidade a construção é importante notar que **cada equação de movimento terá sua redução por auto-similaridade correspondente** e o conjunto dessas equações reduzidas formará uma hierarquia de EDOs.

Vamos começar a análise de uma forma mais geral do que a definição de redução por auto-similaridade que foi dado no capítulo de introdução e definir as transformações

$$z_n = x(\alpha_n t_n)^{\xi_n}$$

$$r(x,t_n) = R(z_n)(\beta_n t_n)^{\mu_n}, \qquad q(x,t_n) = Q(z_n)(\sigma_n t_n)^{\nu_n}$$

sendo o índice n referente a n-ésima equação da hierarquia e todos os parâmetros arbitrários a princípio. É interessante notar desde já algumas expressões que serão utilizadas a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial t_n}\begin{Bmatrix} r(x,t_n) \\ q(x,t_n) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_n(\beta_n t_n)^{\mu_n - 1}[\mu_n R(z_n) + z_n \xi_n R'(z_n)] \\ \sigma_n(\sigma_n t_n)^{\nu_n - 1}[\nu_n Q(z_n) + z_n \xi_n Q'(z_n)] \end{Bmatrix} \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\begin{Bmatrix} r(x,t_n) \\ q(x,t_n) \end{Bmatrix} = (\alpha_n t_n)^{k\xi_n}\frac{d^k}{dz_n^k}\begin{Bmatrix} (\beta_n t_n)^{\mu_n} R(z_n) \\ (\sigma_n t_n)^{\nu_n} Q(z_n) \end{Bmatrix} \tag{3.12}$$

Agora vamos aplicar as transformações acima nas equações de movimento e ver como os parâmetros podem ser determinados. Assim, fazendo as substituições acima em

$$r_{t_1}(x,t_1) = -r_x(x,t_1), \qquad q_{t_1}(x,t_1) = -q_x(x,t_1)$$

temos

$$\begin{cases} \mu_1 R(z_1) + z_1\xi_1 R'(z_1) = -(\alpha_1 t_1)^{\xi_1} t_1 R'(z_1) \\ \\ \nu_1 Q(z_1) + z_1\xi_1 Q'(z_1) = -(\alpha_1 t_1)^{\xi_1} t_1 Q'(z_1) \end{cases} \tag{3.13}$$

Portanto, para que a equação acima seja independente de t_1 devemos ter $\xi_1 = -1$. Similarmente para

$$r_{t_2}(x,t_2) = (2r^2q - r_{xx}), \qquad q_{t_2}(x,t_2) = -(2q^2r - q_{xx})$$

temos

$$\begin{cases} \mu_2 R(z_2) + z_2\xi_2 R'(z_2) = [2t_2(\beta_2 t_2)^{\mu_2}(\sigma_2 t_2)^{\nu_2} R(z_2)^2 Q(z_2) - (\alpha_2 t_2)^{2\xi_2} t_2 R''(z_2)] \\ \\ \nu_2 Q(z_2) + z_2\xi_2 Q'(z_2) = -[2t_2(\sigma_2 t_2)^{\nu_2}(\beta_2 t_2)^{\mu_2} Q(z_2)^2 R(z_2) - (\alpha_2 t_2)^{2\xi_2} t_2 Q''(z_2)] \end{cases} \tag{3.14}$$

As condições para que as equações reduzidas para t_2 sejam EDOs são

$$\mu_2 + \nu_2 = -1, \qquad \xi_2 = -\frac{1}{2}$$

Prosseguindo para

$$r_{t_3}(x,t_3) = (6rr_xq - r_{xxx}), \qquad q_{t_3}(x,t_3) = (6qq_xr - q_{xxx})$$

temos

$$\begin{cases} \mu_3 R(z_3) + z_3\xi_3 R'(z_3) = [6t_3(\alpha_3 t_3)^{\xi_3}(\beta_3 t_3)^{\mu_3}(\sigma_3 t_3)^{\nu_3} R(z_3)R'(z_3)Q(z_3) - (\alpha_3 t_3)^{3\xi_3} t_3 R'''(z_3)] \\ \\ \nu_3 Q(z_3) + z_3\xi_3 Q'(z_3) = [6t_3(\alpha_3 t_3)^{\xi_3}(\beta_3 t_3)^{\mu_3}(\sigma_3 t_3)^{\nu_3} Q(z_3)Q'(z_3)R(z_3) - (\alpha_3 t_3)^{3\xi_3} t_3 Q'''(z_3)] \end{cases} \tag{3.15}$$

E novamente as condições para termos uma EDO são

$$\mu_3 + \nu_3 = -\frac{2}{3}, \qquad \xi_3 = -\frac{1}{3}$$

Se continuarmos o processo para os demais tempos, vemos que as constantes das transformações sempre terão que satisfazer

$$\mu_n + \nu_n = -\frac{2}{n}, \qquad \xi_n = -\frac{1}{n}$$

Deste modo, podemos supor convenientemente que

$$\begin{cases} \mu_n = -\frac{(1-\gamma_n)}{n} \\ \\ \nu_n = -\frac{(1+\gamma_n)}{n} \end{cases}, \qquad \xi_n = -\frac{1}{n}, \qquad \alpha_n = \beta_n = \sigma_n = n \tag{3.16}$$

Assumindo as constantes acima, as equações reduzidas para os primeiros tempos são dadas na tabela 3.6.

Tabela 3.6: Equações Reduzidas para a hierarquia AKNS

$n=1$	$(1-\gamma_1)R + zR' = R'$	$(1+\gamma_1)Q + zQ' = Q'$
$n=2$	$(1-\gamma_2)R + zR' = -[2R^2Q - R'']$	$(1+\gamma_2)Q + zQ' = 2Q^2R - Q''$
$n=3$	$(1-\gamma_3)R + zR' = -[6RR'Q - R''']$	$(1+\gamma_3)Q + zQ' = -[6QQ'R - Q''']$
$n=4$	$(1-\gamma_4)R + zR' = 6R^3Q^2 - 8RR''Q-$ $4RR'Q' - 2R^2Q'' - 6R'^2Q + R^{(4)}$	$(1+\gamma_4)Q + zQ' = -[6Q^3R^2 - 8QQ''R-$ $4QQ'R' - 2Q^2R'' - 6Q'^2R + Q^{(4)}]$
$n=5$	$(1-\gamma_5)R + zR' = -10(RR'''Q + RR''Q'+$ $RR'Q'' + 2R'R''Q + R'^2Q' - 3R^2R'Q^2)-$ $R^{(5)}$	$(1+\gamma_5)Q + zQ' = -10(QQ'''R + QQ''R'+$ $QQ'R'' + 2Q'Q''R + Q'^2R' - 3Q^2Q'R^2)-$ $Q^{(5)}$

Estabelecida a transformação por auto-similaridade para as equações de movimento, podemos checar que a forma da relação de Lenard não se altera sob esta transformação , isto é, para os novos campos temos

$$-\frac{\delta \hat{H}_{AKNS,n}}{\delta Q} = 2R\partial_{z_n}^{-1}\Big[Q\frac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta Q} - R\frac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta R}\Big] - \partial_z \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta Q}$$

$$\frac{\delta \hat{H}_{AKNS,n}}{\delta R} = 2Q\partial_{z_n}^{-1}\Big[R\frac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta R} - Q\frac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta Q}\Big] - \partial_z \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta R}$$

sendo que usamos a notação $\hat{H}_{AKNS,i} = H_{AKNS,i}(R,Q)$. O mesmo acontece para a base de dois bósons e dois bósons quadráticos tratados nas próximas seções .

Note que se fizermos $R = Q = u$, por consistência, devemos ter $\gamma_n = 0$ para todo tempo ímpar. Em seguida se integrarmos as equações reduzidas para os primeiros tempos ímpares, isto é t_3 e t_5, teremos as primeiras equações da hierarquia Painlevé 2, isto é

$$u'' = 2u^3 + z_3 u + c_3$$

$$u'''' = 10uu'^2 + 10u^2u'' - 6u^5 + z_5 u + c_5$$

Como era de se esperar porque a hierarquia PII surge da redução por auto-similaridade do modelo mKdV (ver apêndice B).

É interessante notar que determinamos α_n, β_n e σ_n apenas para relacionarmos com as equações de Painlevé, pois estas constantes poderiam ser arbitrárias a princípio.

Lema 1. *Sob a redução por auto-similaridade*

$$z_n = (nt_n)^{-\frac{1}{n}}x, \quad r(x) = (nt_n)^{-\frac{(1-\gamma_n)}{n}}R(z_n), \quad q(x) = (nt_n)^{-\frac{(1+\gamma_n)}{n}}Q(z_n), \tag{3.17}$$

as derivadas funcionais das hamiltonianas do modelo AKNS se transformam como

$$\frac{\delta H_{AKNS,i}}{\delta r} = (nt_n)^{-\frac{(i+1+\gamma_n)}{n}}\frac{\delta \hat{H}_{AKNS,i}}{\delta R}, \qquad \frac{\delta H_{AKNS,i}}{\delta q} = (nt_n)^{-\frac{(i+1-\gamma_n)}{n}}\frac{\delta \hat{H}_{AKNS,i}}{\delta Q}$$

Demonstração. A prova segue por indução . É fácil ver que o lema vale para H_1 e H_2 utilizando (3.12), isto é

$$\begin{cases} \frac{\delta H_{AKNS,1}}{\delta r(x)} = q_x \\ \\ \frac{\delta H_{AKNS,1}}{\delta q(x)} = -r_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\delta H_{AKNS,1}}{\delta r(x)} = (nt_n)^{-\frac{(2+\gamma_n)}{n}} \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,1}}{\delta R(z_n)} \\ \\ \frac{\delta H_{AKNS,1}}{\delta q(x)} = (nt_n)^{-\frac{(2-\gamma_n)}{n}} \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,1}}{\delta Q(z_n)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\delta H_{AKNS,2}}{\delta r(x)} = -(2rq^2 - q_{xx}) \\ \\ \frac{\delta H_{AKNS,2}}{\delta q(x)} = -(2qr^2 - r_{xx}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\delta H_{AKNS,2}}{\delta r(x)} = (nt_n)^{-\frac{(3+\gamma_n)}{n}} \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,2}}{\delta R(z_n)} \\ \\ \frac{\delta H_{AKNS,2}}{\delta q(x)} = (nt_n)^{-\frac{(3-\gamma_n)}{n}} \frac{\delta \hat{H}_2}{\delta Q(z_n)} \end{cases}$$

Assumindo que para k vale, isto é

$$\frac{\delta H_{AKNS,k}}{\delta r} = (nt_n)^{-\frac{(k+1+\gamma_n)}{n}} \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,k}}{\delta R}, \qquad \frac{\delta H_{AKNS,k}}{\delta q} = (nt_n)^{-\frac{(k+1-\gamma_n)}{n}} \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,k}}{\delta Q}$$

vamos usar a equação de recorrência de Lenard deste modelo na sua forma convencional, (3.4) e (3.5), em seguida usaremos a mesma relação na forma reduzida para mostrar que o lema também vale para $k+1$, isto é

$$\begin{cases} \frac{\delta H_{AKNS,k+1}}{\delta r(x,\tau)} = (nt_n)^{-\frac{(k+2+\gamma_n)}{n}} \Big[2Q(z_n) \frac{d^{-1}}{dz_n^{-1}} \Big(R(z_n) \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,k}}{\delta R(z_n)} - Q(z_n) \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,k}}{\delta Q(z_n)} \Big) - \frac{d}{dz_n} \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,k}}{\delta R(z_n)} \Big] \\ \frac{\delta H_{AKNS,k+1}}{\delta q(x,\tau)} = (nt_n)^{-\frac{(k+2-\gamma_n)}{n}} \Big[-2R(z_n) \frac{d^{-1}}{dz_n^{-1}} \Big(Q(z_n) \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,k}}{\delta Q(z_n)} - R(z_n) \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,k}}{\delta R(z_n)} \Big) - \frac{d}{dz_n} \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,k}}{\delta Q(z_n)} \Big] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\delta H_{AKNS,k+1}}{\delta r(x,\tau)} = (nt_n)^{-\frac{(k+2+\gamma_n)}{n}} \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,k+1}}{\delta R(z_n)} \\ \\ \frac{\delta H_{AKNS,k+1}}{\delta q(x,\tau)} = (nt_n)^{-\frac{(k+2-\gamma_n)}{n}} \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,k+1}}{\delta Q(z_n)} \end{cases}$$

□

Terminando assim nossa demonstração .

Utilizando o lema acima, podemos escrever a expressão geral para a forma reduzida do AKNS como

$$\begin{cases} r_{t_n}(x,\tau) = -\frac{\delta H_{AKNS,n}}{\delta q(x,\tau)} \\ \\ q_{t_n}(x,\tau) = \frac{\delta H_{AKNS,n}}{\delta r(x,\tau)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-\gamma_n)R(z_n) + z_n R_{z_n}(z_n) - \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,n}}{\delta Q(z_n)} = 0 \\ \\ (1+\gamma_n)Q(z_n) + z_n Q_{z_n}(z_n) + \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,n}}{\delta R(z_n)} = 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

Em resumo, para cada equação da hierarquia AKNS fizemos uma transformação por auto-similaridade diferente afim de eliminarmos um dos tempos em cada equação da hierarquia, sendo que os demais tempos foram deixados inalterados em cada equação .

3.2.4 Invariância por escala para o AKNS

Vamos explorar agora como as equações de movimento se comportam sob a transformação de escala abaixo. Adiantamos que esta simetria das equações de movimento nos mostrará como podemos definir a transformação de auto-similaridade de maneira mais geral.

Assim, considere a transformação nas coordenadas e nos campos abaixo

$$r(x,t_n) = \lambda^{\sigma_n} r(\lambda x, \lambda^n t_n), \qquad q(x,t_n) = \lambda^{\sigma'_n} q(\lambda x, \lambda^n t_n)$$

Usaremos a notação $x' = \lambda x$ e $t'_n = \lambda^n t_n$ afim de encontrar a condição para σ_n e σ'_n tal que as equações de movimento de $r(x,t_n)$ sejam invariantes. Faremos detalhadamente apenas para $r(x,t_n)$, mas afirmamos que o procedimento será completamente análogo para $q(x,t_n)$.

Assim, para $n=2$ temos

$$r_{t_2}(x,t_2) = (2r^2(x,t_2)q(x,t_2) - r_{xx}(x,t_2)) \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^{\sigma_2+2} r_{t'_2}(x',t'_2) = 2\lambda^{2\sigma_2+\sigma'_2} r^2(x',t'_2)q(x',t'_2) - \lambda^{\sigma_2+2} r_{x'x'}(x',t'_2)$$

Logo, para a equação de movimento ser invariante devemos ter

$$\sigma_2 + \sigma'_2 = 2$$

Para $n=3$

$$r_{t_3}(x,t_3) = (6r(x,t_3)r_x(x,t_3)q(x,t_3) - r_{xxx}(x,t_3)) \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^{\sigma_3+3} r_{t'_3}(x',t'_3) = 6\lambda^{2\sigma_3+\sigma'_3+1} r(x',t'_3)r'_x(x',t'_3)q(x',t'_3) - \lambda^{\sigma_3+3} r_{x'x'x'}(x',t'_3)$$

Neste caso devemos ter

$$\sigma_3 + \sigma'_3 = 2$$

Examinando brevemente as demais equações de movimento podemos ver que para qualquer n, devemos ter

$$\sigma_n + \sigma'_n = 2$$

Contudo, como a transformação de escala é independente de uma equação para outra, podemos fazer um arranjo diferente entre σ_n e σ'_n para cada n, tal que

$$\sigma_n = 1 - \gamma_n, \qquad \sigma'_n = 1 + \gamma_n$$

Se fizermos $\lambda = 1 + \epsilon$, para ϵ pequeno, temos

$$r(x,t_n) = (1+(1-\gamma_n)\epsilon)r(x+\epsilon x, t_n+n\epsilon t_n), \qquad q(x,t_n) = (1+(1+\gamma_n)\epsilon)q(x+\epsilon x, t_n+n\epsilon t_n)$$

Expandindo em Taylor temos

$$r(x,t_n) = (1+(1-\gamma_n)\epsilon)[r(x,t_n) + x\epsilon r_x(x,t_n) + nt_n\epsilon r_{t_n}(x,t_n)]$$

$$q(x,t_n) = (1+(1+\gamma_n)\epsilon)[q(x,t_n) + x\epsilon r_x(x,t_n) + nt_n\epsilon q_{t_n}(x,t_n)]$$

Pegando a projeção na ordem $\mathcal{O}(1)$ em ϵ, temos

$$(1-\gamma_n)r(x,t_n)+xr_x(x,t_n)+nt_nr_{t_n}(x,t_n) = 0 \Rightarrow (1-\gamma_n)r(x,t_n)+xr_x(x,t_n)-nt_n\frac{\delta H_{AKNS,n}}{\delta q(x,t_n)} = 0$$

$$(1+\gamma_n)q(x,t_n)+xq_x(x,t_n)+nt_nq_{t_n}(x,t_n) = 0 \Rightarrow (1+\gamma_n)q(x,t_n)+xq_x(x,t_n)+nt_n\frac{\delta H_{AKNS,n}}{\delta r(x,t_n)} = 0$$

Para $n = 2$, temos

$$(1-\gamma_2)r(x,t_2) + xr_x(x,t_2) + 2t_2(2r^2(x,t_2)q(x,t_2) - r_{xx}(x,t_2)) = 0$$

$$(1+\gamma_2)q(x,t_2) + xq_x(x,t_2) - 2t_2(2q^2(x,t_2)r(x,t_2) - q_{xx}(x,t_2)) = 0$$

Para $n = 3$, temos

$$(1-\gamma_3)r(x,t_3) + xr_x(x,t_3) + 3t_3(6r(x,t_3)r_x(x,t_3)q(x,t_3) - r_{xxx}(x,t_3)) = 0$$

$$(1+\gamma_3)q(x,t_3) + xq_x(x,t_3) + 3t_3(6q(x,t_3)q_x(x,t_3)r(x,t_3) - q_{xxx}(x,t_3)) = 0$$

Se fizermos a redução por similaridade (3.17) para o caso geral, temos

$$(1-\gamma_n)R(z_n) + z_n R_{z_n}(z_n) - \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,n}}{\delta Q(z_n)} = 0 \tag{3.19}$$

$$(1+\gamma_n)Q(z_n) + z_n Q_{z_n}(z_n) + \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,n}}{\delta R(z_n)} = 0 \tag{3.20}$$

Portanto obtemos exatamente a mesma equação (3.18). Não é de se estranhar que tenhamos obtido a mesma equação , pois a redução por auto-similaridade é no fundo uma transformação por escala cuja potência do parâmetro de escala depende do índice do tempo. Esta abordagem nos permite intuir uma generalização , pois assim como transformamos a escala de t_n podemos transformar a escala para outros tempos também. Isto será analizado na seção seguinte.

3.2.5 Transformação por escala para vários tempos

Note que cada equação de movimento possui derivadas apenas em x e em um dos tempos t_n, embora os campos sejam funções de todos os tempo, isto é, $r(x,\tau)$ e $q(x,\tau)$ sendo $\tau = \{t_2, t_3, ...\}$. Assim, podemos fazer transformações de escala em vários tempos simultaneamente e as equações de movimento continuarão invariantes. De modo geral temos

$$r(x,\tau) = \lambda^{(1-\gamma)} r(\lambda x, \lambda^2 t_2, \lambda^3 t_3, ...)$$

$$q(x,\tau) = \lambda^{(1+\gamma)} q(\lambda x, \lambda^2 t_2, \lambda^3 t_3, ...)$$

Se fizermos novamente $\lambda = 1+\epsilon$ para ϵ pequeno e expandirmos em série de Taylor até a primeira ordem, considerando $t_1 = -x$, temos

$$r(x,\tau) = (1+(1-\gamma)\epsilon)[r(x,\tau) + \epsilon \sum_{j=1}^{\infty} j t_j r_{t_j}(x,\tau)]$$

$$q(x,\tau) = (1+(1+\gamma)\epsilon)[q(x,\tau) + \epsilon \sum_{j=1}^{\infty} j t_j q_{t_j}(x,\tau)]$$

Pegando a projeção na ordem $\mathcal{O}(1)$ em ϵ, temos

$$(1-\gamma)r(x,\tau) + \sum_{j=1}^{\infty} jt_j r_{t_j}(x,\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-\gamma)r(x,\tau) - \sum_{j=1}^{\infty} jt_j \frac{\delta H_{AKNS,j}}{\delta q(x,\tau)} = 0$$

$$(1+\gamma)q(x,\tau) + \sum_{j=1}^{\infty} jt_j q_{t_j}(x,\tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad (1+\gamma)q(x,\tau) + \sum_{j=1}^{\infty} jt_j \frac{\delta H_{AKNS,j}}{\delta r(x,\tau)} = 0$$

Apenas para complementar de forma mais elegante, podemos definir um operador que represente a simetria que obtivemos acima como

$$\frac{d}{ds} \equiv \gamma\sigma_3 + I + \sum_{j=1}^{\infty} jt_j \frac{\partial}{\partial t_j}$$

tal que

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} 0 & q(x,\tau) \\ r(x,\tau) & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Observe que quando fazemos uma transformação de escala para vários tempos, tais tempos aparecem explicitamente na equação de simetria que obtivemos. Podemos desaparecer com um dos tempos, digamos t_n, e redefinir os demais tempos fazendo uma redução por auto-similaridade generalizada que também transforme os tempos, isto é

$$z_n = x(nt_n)^{-\frac{1}{n}}, \qquad T_k = kt_k(nt_n)^{-\frac{k}{n}} \tag{3.21}$$

$$r(x,\tau) = R(z_n,\tau')(nt_n)^{-\frac{(1-\gamma)}{n}}, \qquad q(x,\tau) = Q(z_n,\tau')(nt_n)^{-\frac{(1+\gamma)}{n}} \tag{3.22}$$

sendo que o lema que demonstramos acima continua valido, isto é

$$\frac{\delta H_{AKNS,k}}{\delta r(x,\tau)} = (nt_n)^{-\frac{(k+1+\gamma)}{n}} \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,k}}{\delta R(z_n,\tau')}, \qquad \frac{\delta H_{AKNS,k}}{\delta q(x,\tau)} = (nt_n)^{-\frac{(k+1-\gamma)}{n}} \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,k}}{\delta Q(z_n,\tau')} \tag{3.23}$$

Note que acima definimos $\tau' = \{T_2, T_3, ...|T_1 = -z_n, T_n = 1\}$. Assim ficamos com

$$(1-\gamma)R(z_n,\tau') - \sum_{j=1}^{\infty} T_j \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,j}}{\delta Q(z_n,\tau')} = 0$$

$$(1+\gamma)Q(z_n,\tau') + \sum_{j=1}^{\infty} T_j \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,j}}{\delta R(z_n,\tau')} = 0$$

Se escolhermos fazer uma transformação de escala apenas para os tempos ímpares e somente até $2n+1$, eliminando o tempo t_{2n+1} através da redução por auto-similaridade, temos

$$(1-\gamma_n)R(z_n,\tau') + zR_{z_n}(z_n,\tau') - \sum_{j=1}^{n-1} T_{2j+1} \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,2j+1}}{\delta Q(z_n,\tau')} - \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,2n+1}}{\delta Q(z_n,\tau')} = 0 \quad (3.24)$$

$$(1+\gamma_n)Q(z_n,\tau') + z_nQ_{z_n}(z_n,\tau') + \sum_{j=1}^{n-1} T_{2j+1} \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,2j+1}}{\delta R(z_n,\tau')} + \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,2n+1}}{\delta R(z_n,\tau')} = 0 \quad (3.25)$$

Se fizermos $R(z_n,\tau') = Q(z_n,\tau') = u(z_n,\tau')$, as equações acima são compatíveis somente se $\gamma_n = 0$. Desta forma, obtemos uma hierarquia PII generalizada, isto é, com os tempos transformados entrando como parâmetros. Por exemplo, para $n=2$ temos

$$u + z_5u_{z_5} + T_3(6u^2u_{z_5} - u_{z_5z_5z_5}) + [10(u^2u_{z_5z_5z_5} + 4uu_{z_5}u_{z_5z_5} + u_{z_5}^2 - 3u^4u_{z_5}) -$$

$$-u_{z_5z_5z_5z_5z_5}] = 0$$

Integrando, temos a segunda equação da hierarquia PII generalizada

$$T_3(u_{z_5z_5} - 2u^3) + (u_{z_5z_5z_5z_5} - 10uu_{z_5}^2 - 10u^2u_{z_5z_5} + 6u^5) = z_5u + \alpha_2$$

sendo α_2 a constante de integração . A obtenção da hierarquia PII generalizada foi discutida na referência [4], embora os autores desta referência não tenham construido claramente os argumentos que nos levou a obter as expressões gerais para a hierarquia PII.

3.2.6 Representação matricial do par de Lax para a hierarquia AKNS

Na referência [3], foi desenvolvido um interessante algoritmo para obter a representação matricial de par de Lax do mKdV para qualquer tempo. Extenderemos agora o desenvolvimento para a hierarquia AKNS, sendo que a representação matricial do tempo t_n é dada por

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \mathcal{L}_{AKNS}\Psi = \begin{pmatrix} -\varepsilon & -q \\ -r & \varepsilon \end{pmatrix}\Psi \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t_n} = \mathcal{M}^{(n)}_{AKNS}\Psi = \sum_{j=0}^{n}\varepsilon^j \begin{pmatrix} A_j^{AKNS(n)}(r,q) & B_j^{AKNS(n)}(r,q) \\ C_j^{AKNS(n)}(r,q) & -A_j^{AKNS(n)}(r,q) \end{pmatrix}\Psi \tag{3.27}$$

Usaremos o método da curvatura nula, isto é,

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{AKNS}}{\partial t} - \frac{\partial\mathcal{M}^{(n)}_{AKNS}}{\partial x} + [\mathcal{L}_{AKNS}, \mathcal{M}^{(n)}_{AKNS}] = 0$$

temos para ordem $\mathcal{O}(0)$ em ξ

$$\begin{cases} \partial_x A_0^{AKNS(n)} = rB_0^{AKNS(n)} - qC_0^{AKNS(n)} & (3.28a) \\ q_{t_n} = \partial_x B_0^{AKNS(n)} - 2A_0^{AKNS(n)}q & (3.28b) \\ r_{t_n} = \partial_x C_0^{AKNS(n)} + 2A_0^{AKNS(n)}r & (3.28c) \end{cases}$$

Admitindo $B_n^{(n)} = C_n^{(n)} = 0$, para as demais ordens temos

$$\begin{cases} \partial_x A_j^{AKNS(n)} = rB_j^{AKNS(n)} - qC_j^{AKNS(n)} & (3.29a) \\ \partial_x B_j^{AKNS(n)} = 2A_j^{AKNS(n)}q - 2B_{j-1}^{AKNS(n)} & (3.29b) \\ \partial_x C_j^{AKNS(n)} = -2A_j^{AKNS(n)}r + 2C_{j-1}^{AKNS(n)} & (3.29c) \end{cases}$$

Para que as expressões acima sejam satisfeitas, assim com a relação de recorrência e as equações de movimento que obtemos anteriormente, os coeficientes $A_j^{AKNS(n)}$, $B_j^{AKNS(n)}$ e $C_j^{AKNS(n)}$ devem ser univocamente determinados. Vamos ver o que temos para os casos mais simples primeiro, para $n = 2$, devemos ter

$$A_0^{AKNS(2)} = \partial_x^{-1}[q\frac{\delta H_1}{\delta q} - r\frac{\delta H_1}{\delta r}], \qquad B_0^{AKNS(2)} = -\frac{\delta H_1}{\delta r}, \qquad C_0^{AKNS(2)} = -\frac{\delta H_1}{\delta q}$$

$$A_1^{AKNS(2)} = 2\partial_x^{-1}[q\frac{\delta H_0}{\delta q} - r\frac{\delta H_0}{\delta r}], \qquad B_1^{AKNS(2)} = -2\frac{\delta H_0}{\delta r}, \qquad C_1^{AKNS(2)} = -2\frac{\delta H_0}{\delta q}$$

$$A_2^{AKNS(2)} = -2, \qquad B_2^{AKNS(2)} = C_2^{AKNS(n)} = 0$$

Para $n = 3$ devemos ter

$$A_0^{(3)} = \partial_x^{-1}[q\frac{\delta H_2}{\delta q} - r\frac{\delta H_2}{\delta r}], \qquad B_0^{(3)} = -\frac{\delta H_2}{\delta r}, \qquad C_0^{AKNS(3)} = -\frac{\delta H_2}{\delta q}$$

$$A_1^{AKNS(3)} = 2\partial_x^{-1}[q\frac{\delta H_1}{\delta q} - r\frac{\delta H_1}{\delta r}], \qquad B_1^{AKNS(3)} = -2\frac{\delta H_1}{\delta r}, \qquad C_1^{AKNS(3)} = -2\frac{\delta H_1}{\delta q}$$

$$A_2^{AKNS(3)} = 4\partial_x^{-1}[q\frac{\delta H_0}{\delta q} - r\frac{\delta H_0}{\delta r}], \qquad B_2^{AKNS(3)} = -4\frac{\delta H_0}{\delta r}, \qquad C_2^{AKNS(3)} = -4\frac{\delta H_0}{\delta q}$$

$$A_3^{AKNS(3)} = -4, \qquad B_3^{AKNS(3)} = C_3^{AKNS(n)} = 0$$

Podemos estender, intuitivamente para o caso geral, isto é

$$A_j^{AKNS(n)} = 2^j\partial_x^{-1}[q\frac{\delta H_{n-1-j}}{\delta q} - r\frac{\delta H_{n-1-j}}{\delta r}], \; B_j^{AKNS(n)} = -2^j\frac{\delta H_{n-1-j}}{\delta r}, \; C_j^{AKNS(n)} = -2^j\frac{\delta H_{n-1-j}}{\delta q}$$

$$A_n^{AKNS(n)} = -2^{n-1}, \qquad B_n^{AKNS(n)} = C_n^{AKNS(n)} = 0$$

para $j = 0, 1, ..., n-1$

3.2.7 Problema linear de Jimbo-Miwa para a hierarquia AKNS

A partir do resultado que obtivemos na seção anterior e da transformação (2.10), podemos encontrar as matrizes do problema linear de Jimbo-Miwa fazendo a transformação por auto-similaridade para um tempo t_n qualquer. Note que

$$\mathcal{L}_{AKNS} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -q \\ -r & -\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \hat{\mathcal{L}}_{AKNS} = (nt_n)^{-\frac{1}{n}} \begin{pmatrix} \lambda & -(nt_n)^{-\frac{\gamma_n}{n}}Q \\ -(nt_n)^{\frac{\gamma_n}{n}}R & -\lambda \end{pmatrix}$$

Utilizando o lema que demonstramos acima, faremos a mesma redução por auto-similaridade aos coeficientes $A_j^{(m)}$, $B_j^{(m)}$ e $C_j^{(m)}$, mas trocando $n \rightarrow m$ para $2 \leq m \leq n$. Logo, temos

$$A_i^{AKNS(m)} \rightarrow (nt_n)^{\frac{(i-m)}{n}}\hat{A}_i^{AKNS(m)}, \quad \Rightarrow \varepsilon^i A_i^{AKNS(m)} \rightarrow (nt_n)^{-\frac{m}{n}}\lambda^i\hat{A}_i^{AKNS(m)}$$

similarmente

$$\varepsilon^i B_i^{AKNS(m)} \rightarrow (nt_n)^{-\frac{(m+\gamma_n)}{n}}\lambda^i\hat{B}_i^{AKNS(m)}, \qquad \varepsilon^i C_i^{AKNS(m)} \rightarrow (nt_n)^{-\frac{(m-\gamma_n)}{n}}\lambda^i\hat{C}_i^{AKNS(m)}$$

Sendo que usamos a notação $\hat{A}_i^{AKNS(m)} = A_i^{AKNS(m)}(z_n, R, Q)$, $\hat{B}_i^{AKNS(m)} = B_i^{(m)}(z_n, R, Q)$ e $\hat{C}_i^{AKNS(m)} = C_i^{AKNS(m)}(z_n, R, Q)$.

Deste modo teremos

$$\mathcal{M}_{AKNS}^{(m)} = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i \begin{pmatrix} A_i^{AKNS(m)} & B_i^{AKNS(m)} \\ C_i^{AKNS(m)} & -A_i^{AKNS(m)} \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\hat{\mathcal{M}}_{AKNS}^{(m)} = \sum_{i=0}^{m} (nt_n)^{-\frac{m}{n}} \lambda^i \begin{pmatrix} \hat{A}_i^{AKNS(m)} & (nt_n)^{-\frac{\gamma_n}{n}} \hat{B}_i^{AKNS(m)} \\ (nt_n)^{\frac{\gamma_n}{n}} \hat{C}_i^{AKNS(m)} & -\hat{A}_i^{AKNS(m)} \end{pmatrix}$$

Note que mesmo depois da redução por auto-similaridade o fator (nt_n) ainda está aparecendo no par Lax reduzido. Para elimina-lo, fixaremos a matrix U dependendo apenas de t_n dado por

$$U = \begin{pmatrix} (nt_n)^{\frac{\gamma_n}{2n}} & 0 \\ 0 & (nt_n)^{-\frac{\gamma_n}{2n}} \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

Deste modo, o problema linear de Jimbo-Miwa, isto é,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z_n} = \mathcal{A}_{AKNS}\Psi, \qquad m\frac{\partial \Psi}{\partial T_m} = \mathcal{B}_{AKNS}^{(m)}\Psi, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = \mathcal{C}_{AKNS}^{(n)}\Psi, \qquad m = 2, ...n-1$$

será dado por

$$\mathcal{A}_{AKNS} = \begin{pmatrix} -\lambda & -Q(z_n) \\ -R(z_n) & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B}_{AKNS}^{(m)} = \sum_{j=0}^{m} \lambda^j \begin{pmatrix} \hat{A}_j^{AKNS(m)} & \hat{B}_j^{AKNS(m)} \\ \hat{C}_j^{AKNS(m)} & -\hat{A}_j^{AKNS(m)} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C}_{AKNS}^{(n)} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} -z_n\lambda + \frac{\gamma_n}{2} & -z_nQ \\ -z_nR & z_n\lambda - \frac{\gamma_n}{2} \end{pmatrix} + \sum_{m=2}^{n} T_m \sum_{j=0}^{m} \lambda^{j-1} \begin{pmatrix} \hat{A}_j^{AKNS(m)} & \hat{B}_j^{AKNS(m)} \\ \hat{C}_j^{AKNS(m)} & -\hat{A}_j^{AKNS(m)} \end{pmatrix}$$

Por exemplo, para $n = 2$, nossa matriz $\mathcal{C}^{(2)}$ será

$$\mathcal{C}_{AKNS}^{(2)} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} \frac{\gamma_2}{2} - RQ & -z_2Q - Q_{z_2} \\ -z_2R + R_{z_2} & -\frac{\gamma_2}{2} + RQ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z_2 & 2Q \\ 2R & z_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Já mencionamos no capítulo de introdução que o problema linear de Jimbo-Miwa será o análogo da representação matricial do par de Lax para hierarquias de equações diferenciais ordinárias e agora veremos como essas hierarquia surgem. Usaremos a relação de compatibilidade do problema linear de Jimbo-Miwa, isto é,

$$\frac{\partial \mathcal{A}_{AKNS}}{\partial \lambda} - \frac{\partial \mathcal{C}^{(n)}_{AKNS}}{\partial z_n} + [\mathcal{A}_{AKNS}, \mathcal{C}^{(n)}_{AKNS}] = 0,$$

de modo que na projeção de ordem $\mathcal{O}(-1)$ em λ temos

$$\begin{cases} \sum_{m=2}^{n} T_m \partial_{z_n} \hat{A}_0^{AKNS(m)} = \sum_{m=2}^{n} T_m [R\hat{B}_0^{AKNS(m)} - Q\hat{C}_0^{AKNS(m)}] & (3.31a) \\ (1+\gamma_n)Q + z_n Q_{z_n} = \sum_{m=2}^{n} T_m [-\partial_{z_n} \hat{B}_0^{AKNS(m)} + 2Q\hat{A}_0^{AKNS(m)}] & (3.31b) \\ (1-\gamma_n)R + z_n R_{z_n} = \sum_{m=2}^{n} T_m [-\partial_{z_n} \hat{C}_0^{AKNS(m)} - 2R\hat{A}_0^{AKNS(m)}] & (3.31c) \end{cases}$$

Como a forma funcional dos $\hat{A}_i^{AKNS(m)}$, $\hat{B}_i^{AKNS(m)}$ e $\hat{C}_i^{AKNS(m)}$ é mantida para qualquer m, após pegarmos a projeção de ordem $\mathcal{O}(j-1)$ para $j = 1, ..., n$ em λ podemos pegar também a projeção em T_m. Desta forma, as relações abaixo devem ser satisfeitas para os índices pertencentes ao conjunto $\mathcal{F} = \{\{j \leq m \leq n\} \cap \{m \geq 2\} \cap \{1 \leq j \leq n\} | j, m \in \mathbb{N}\}$

$$\begin{cases} \partial_{z_n} \hat{A}_j^{AKNS(m)} = R\hat{B}_j^{AKNS(m)} - Q\hat{C}_j^{AKNS(m)} & (3.32a) \\ \partial_{z_n} \hat{B}_j^{AKNS(m)} = 2Q\hat{A}_j^{AKNS(m)} - 2\hat{B}_{j-1}^{AKNS(m)} & (3.32b) \\ \partial_{z_n} \hat{C}_j^{AKNS(m)} = -2R\hat{A}_j^{AKNS(m)} + 2\hat{C}_{j-1}^{AKNS(m)} & (3.32c) \end{cases}$$

Desta forma, substituindo $\hat{A}_i^{AKNS(m)}$, $\hat{B}_i^{AKNS(m)}$ e $\hat{C}_i^{AKNS(m)}$, as expressões (3.32) e (3.31a) são satisfeitas por causa da relação de Lenard reduzida por auto-similaridade, enquanto que das equações (3.31b) e (3.31c) obtemos

$$(1-\gamma_n)R + z_n R_{z_n} - \sum_{m=2}^{n} T_m \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,m}}{\delta Q} = 0$$

$$(1+\gamma_n)Q + z_n Q_{z_n} + \sum_{m=2}^{n} T_m \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,m}}{\delta R} = 0$$

Ou seja, obtemos exatamente as equações (3.19) e (3.20).

3.3 Modelo KP reduzido para dois bósons

Conforme a referência [11], podemos obter os parênteses de Poisson do modelo de dois bósons a partir de seu Lax, isto é,

$$L_J = D - J + \bar{J}D^{-1}$$

Deste modo, os parênteses de Poisson 1 são:

$$\{\bar{J}(x), J(y)\}_1 = \delta'(x-y)$$

$$\{J(x), J(y)\}_1 = \{\bar{J}(x), \bar{J}(y)\}_1 = 0$$

Note que, em alguns textos, adota-se um sinal negativo no parênteses $\{\bar{J}(x), J(y)\}_1$, mas esta é apenas uma escolha sem implicações mais profundas (abaixo veremos uma forma bastante simples de como esta diferença de sinais se relaciona).

Já os parênteses de Poison 2 são

$$\{\bar{J}(x), J(y)\}_2 = J(x)\delta'(x-y) - \delta''(x-y)$$

$$\{\bar{J}(x), \bar{J}(y)\}_2 = 2\bar{J}(x)\delta'(x-y) + \bar{J}'(x)\delta(x-y)$$
$$\{J(x), J(y)\}_2 = 2\delta'(x-y)$$

Seguindo o raciocínio usado no modelo AKNS, buscaremos uma relação de recorrência de Lenard entre as hamiltonianas fazendo

$$\lambda_n\{J(x), H_{J,n}\}_1 = \{J(x), H_{J,n-1}\}_2$$

$$\sigma_n\{\bar{J}(x), H_{J,n}\}_1 = \{\bar{J}(x), H_{J,n-1}\}_2$$

Abrindo os parênteses de Poisson temos

$$\lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} dy\{\bar{J}(x), J(y)\}_1 \frac{\delta H_{J,n}}{\delta J(y)} = \int_{-\infty}^{\infty} dy\Big[\{\bar{J}(x), J(y)\}_2 \frac{\delta H_{J,n-1}}{\delta J(y)} + \{\bar{J}(x), \bar{J}(y)\}_2 \frac{\delta H_{J,n-1}}{\delta \bar{J}(y)}\Big]$$

$$\sigma_n \int_{-\infty}^{\infty} dy\{J(x), \bar{J}(y)\}_1 \frac{\delta H_{J,n}}{\delta \bar{J}(y)} = \int_{-\infty}^{\infty} dy\Big[\{J(x), J(y)\}_2 \frac{\delta H_{J,n-1}}{\delta J(y)} + \{J(x), \bar{J}(y)\}_2 \frac{\delta H_{J,n-1}}{\delta \bar{J}(y)}\Big]$$

Substituindo os parênteses de Poisson nas expressões acima encontramos a relação de recorrência de Lenard para este modelo, que é dada por

$$\lambda_n \partial_x \frac{\delta H_{J,n}}{\delta \bar{J}(x)} = 2\partial_x \frac{\delta H_{J,n-1}}{\delta J(x)} + [J'(x) + J(x)\partial_x + \partial_x^2] \frac{\delta H_{J,n-1}}{\delta \bar{J}(x)} \tag{3.33}$$

$$\sigma_n \partial_x \frac{\delta H_{J,n}}{\delta J(x)} = [J(x)\partial_x - \partial_x^2] \frac{\delta H_{J,n-1}}{\delta J(x)} + [2\bar{J}(x)\partial_x + \bar{J}'(x)] \frac{\delta H_{J,n-1}}{\delta \bar{J}(x)} \tag{3.34}$$

Assim como no modelo AKNS, esta relação nos permite obter todas as hamiltonianas e equações de movimento do modelo a partir de uma hamiltoniana inicial. Portanto, começando com a hamiltoniana

$$H_{J,1} = \int \bar{J}(x) \quad \Rightarrow \frac{\delta H_{J,1}}{\delta J(x)} = 0, \quad \frac{\delta H_{J,1}}{\delta \bar{J}(x)} = 1$$

e fazendo $\lambda_n^{-1} = \sigma_n^{-1} = \xi_n$, de modo que usaremos a notação

$$\alpha_{J,i} = \prod_{p=2}^{i} \xi_p,$$

então teremos as primeiras derivadas funcionais são dadas na tabela 3.7.

Tabela 3.7: Derivadas funcionais do modelo de 2-bósons

$\frac{\delta H_{J,1}}{\delta J(x)} = 0$	$\frac{\delta H_{J,1}}{\delta \bar{J}(x)} = 1$
$\frac{\delta H_{J,2}}{\delta J(x)} = \alpha_{J2}\bar{J}(x)$	$\frac{\delta H_{J,2}}{\delta \bar{J}(x)} = \alpha_{J2}J(x)$
$\frac{\delta H_{J,3}}{\delta J(x)} = \alpha_{J3}[2J(x)\bar{J}(x) - \bar{J}'(x)]$	$\frac{\delta H_{J,3}}{\delta \bar{J}(x)} = \alpha_{J3}[2\bar{J}(x) + J^2(x) + J'(x)]$

Enquanto que as primeiras hamiltonianas são dadas na tabela 3.8.

Tabela 3.8: Hamiltonianas do modelo de 2-bósons

$H_{J,1} = \int dx \bar{J}$
$H_{J,2} = \alpha_{J2} \int dx - J\bar{J}$
$H_{J,3} = \alpha_{J,3} \int dx(\bar{J}J^2 + \bar{J}J' + \bar{J}^2)$

Note que a diferença de sinal, que comentamos acima, para o primeiro parênteses de Poisson pode ser resgatada simplesmente fazendo $\xi_n \to -\xi_n$. As equações de movimento dos campos são definidas como

$$\frac{\partial J}{\partial t_n} = \{J(x), H_{J,n+1}\}_1 = \xi_{n+1}\{J(x), H_{J,n}\}_2 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H_{J,n+1}}{\delta \bar{J}(x)}$$
$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial t_n} = \{\bar{J}(x), H_{J,n+1}\}_1 = \xi_{n+1}\{\bar{J}(x), H_{J,n}\}_2 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H_{J,n+1}}{\delta J(x)}$$

Note que esta definição dos índices dos tempo é importante porque queremos que o primeiro tempo seja proporcional a coordenada espacial, isto é $t_1 = \alpha_{J1}^{-1}x$. Vemos tambem que todas as constantes ξ_n são fatores globais e que sua única função é determinar o sinal dos tempos ímpares, como podemos verificar abaixo. Utilizando a definição acima as equações de movimento serão dadas na tabela 3.9.

Tabela 3.9: Equações de movimento do modelo de 2-bósons

$\frac{\partial J}{\partial t_1} = \alpha_{J2}\partial_x J$	$\frac{\partial \bar{J}}{\partial t_1} = \alpha_{J2}\partial_x \bar{J}$
$\frac{\partial J}{\partial t_2} = \alpha_{J3}\partial_x[2\bar{J} + J^2 + J']$	$\frac{\partial \bar{J}}{\partial t_2} = \alpha_{J3}\partial_x[2J\bar{J} - \bar{J}']$
$\frac{\partial J}{\partial t_3} = \alpha_{J4}\partial_x[6J\bar{J} + J^3 + 3JJ' + J'']$	$\frac{\partial \bar{J}}{\partial t_3} = \alpha_{J4}\partial_x[3J^2\bar{J} - 3J\bar{J}' + \bar{J}'' + 3\bar{J}^2]$

Podemos agora fazer uma redução por auto-similaridade que é dada por

$$z_n = (nt_n)^{-\frac{1}{n}}x, \quad J(x) = (nt_n)^{-\frac{1}{n}}k(z_n), \quad \bar{J}(x) = (nt_n)^{-\frac{2}{n}}\bar{k}(z_n),$$

Note que as potências dos fatores (ntn) são determinadas tal que as equações de movimento se transformem apropriadamente, como foi detalhado no caso AKNS, e também que neste modelo não temos uma constante arbitraria envolvida na transformação .

Explicitamente, as equações de movimento se reduzem a:

- para $n = 2$ temos

$$k + z_2 k_{z_2} = -\alpha_{J3}\partial_{z_2}[2\bar{k} + k^2 + k_{z_2}]$$

$$2\bar{k} + z_2\bar{k}_{z_2} = -\alpha_{J3}\partial_{z_2}[2k\bar{k} - \bar{k}_{z_2}]$$

- para $n = 3$ temos

$$k + z_3 k_{z_3} = -\alpha_{J4}\partial_{z_3}[6k\bar{k} + k^3 + 3kk_{z_3} + k_{z_3z_3}]$$

$$2\bar{k} + z_3\bar{k}_{z_3} = -\alpha_{J4}\partial_{z_3}[3k^2\bar{k} - 3k\bar{k}_{z_3} + \bar{k}_{z_3z_3} + 3\bar{k}^2]$$

Similarmente ao que fizemos no caso AKNS, temos o seguinte lema que nos permitirá obter as matrizes de Jimbo-Miwa e a hierarquia PIV.

Lema 2. *Sob a redução por auto-similaridade*

$$z_n = (nt_n)^{-\frac{1}{n}}x, \quad J(x) = (nt_n)^{-\frac{1}{n}}k(z_n), \quad \bar{J}(x) = (nt_n)^{-\frac{2}{n}}\bar{k}(z_n),$$

a derivada funcional das hamiltonianas do modelo de 2-bósons, isto é $H_J = H_J(J, \bar{J})$, *se transformam como*

$$\frac{\delta H_{J,i}}{\delta J} = (nt_n)^{-\frac{i}{n}}\frac{\delta \hat{H}_{J,i}}{\delta k}, \qquad \frac{\delta H_{J,i}}{\delta \bar{J}} = (nt_n)^{\frac{(1-i)}{n}}\frac{\delta \hat{H}_{J,i}}{\delta \bar{k}}$$

sendo que usamos a notação $\hat{H}_{J,i} = H_{J,i}(k, \bar{k})$.

Demonstração. A demonstração deste lema segue por indução . Podemos ver facilmente que a transformação por auto-similaridade de $H_{J,1}$ e $H_{J,2}$ é

$$\begin{cases} \frac{\delta H_{J,1}}{\delta J} = 0 \equiv \frac{\delta \hat{H}_{J,1}}{\delta k} \\ \\ \frac{\delta H_{J,1}}{\delta \bar{J}} = 1 \equiv \frac{\delta \hat{H}_{J,1}}{\delta \bar{k}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\delta H_{J,2}}{\delta J} = (nt_n)^{-\frac{2}{n}} \alpha_{J2} \bar{k} \equiv (nt_n)^{-\frac{2}{n}} \frac{\delta \hat{H}_{J,2}}{\delta k} \\ \\ \frac{\delta H_{J,2}}{\delta \bar{J}} = (nt_n)^{-\frac{1}{n}} \alpha_{J2} k \equiv (nt_n)^{-\frac{1}{n}} \frac{\delta \hat{H}_{J,2}}{\delta \bar{k}} \end{cases}$$

Agora assumindo que para m vale

$$\frac{\delta H_{J,m}}{\delta J} = (nt_n)^{-\frac{m}{n}} \frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k}, \qquad \frac{\delta H_{J,m}}{\delta \bar{J}} = (nt_n)^{\frac{(1-m)}{n}} \frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}}$$

queremos ver que para $m+1$ o lema também é valido. Para isso usamos a relação de recorrência (3.33) e (3.34) tal que

$$\frac{\delta H_{J,m+1}}{\delta J} = \partial_x^{-1}\Big[[J\partial_x - \partial_x^2]\frac{\delta H_{J,m}}{\delta J} + [2\bar{J}\partial_x + \bar{J}']\frac{\delta H_{J,m}}{\delta \bar{J}}\Big] = (nt_n)^{-\frac{(m+1)}{n}} \partial_{z_n}^{-1}\Big[[k\partial_{z_n} - \partial_{z_n}^2]\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k} +$$

$$+ [2\bar{k}\partial_{z_n} + \bar{k}']\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}}\Big] \equiv (nt_n)^{-\frac{(m+1)}{n}} \frac{\delta \hat{H}_{J,m+1}}{\delta k}$$

$$\frac{\delta H_{J,m+1}}{\delta \bar{J}} = \partial_x^{-1}\Big[2\partial_x \frac{\delta H_{J,m}}{\delta J} + [J' + J\partial_x + \partial_x^2]\frac{\delta H_{J,m}}{\delta \bar{J}}\Big] = (nt_n)^{-\frac{m}{n}} \partial_{z_n}^{-1}\Big[2\partial_{z_n}\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k} +$$

$$+ [k' + k\partial_{z_n} + \partial_{z_n}^2]\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}}\Big] \equiv (nt_n)^{-\frac{m}{n}} \frac{\delta \hat{H}_{J,m+1}}{\delta \bar{k}}$$

□

Usando o resultado do lema anterior podemos escrever as equações de movimento do modelo de dois bósons para um tempo genérico, t_n, como

$$k + z_n k' + \xi_{m+1}\partial_{z_n}\Big[(\partial_{z_n} + k)\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}} + 2\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k}\Big] = 0 \tag{3.35}$$

$$2\bar{k} + z_n \bar{k}' + \xi_{m+1}\Big[(k\partial_{z_n} - \partial_{z_n}^2)\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k} + (2\bar{k}\partial_{z_n} + \bar{k}')\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}}\Big] = 0 \tag{3.36}$$

3.3.1 Representação matricial do par de Lax para o modelo de dois bósons

Para o modelo de dois bósons, a representação matricial do par de Lax é

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \mathcal{L}_J \Psi, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial t_m} = \mathcal{M}_J^{(m)} \Psi$$

Sendo

$$\mathcal{L}_J = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(J - 2\varepsilon) & 1 \\ -\bar{J} & \frac{1}{2}(J - 2\varepsilon) \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{M}_J^{(m)} = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i \begin{pmatrix} A_i^{J(m)} & B_i^{J(m)} \\ C_i^{J(m)} & -A_i^{J(m)} \end{pmatrix}$$

Acima, assumimos uma forma conveniente para a matrix $\mathcal{M}_J^{(m)}$ como foi feito no modelo AKNS. Nosso objetivo agora será encontrar um algoritmo que nos dê uma solução geral para os valores que os coeficientes $A_i^{J(m)}$, $B_i^{J(m)}$ e $C_i^{J(m)}$ devem assumir.

Afim de detalhar o processo, note que temos

$$[\mathcal{M}_J^{J(m)}, \mathcal{L}_J] = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i \begin{pmatrix} -(\bar{J}B_i^{J(m)} + C_i^{J(m)}) & (2A_i^{J(m)} - (2\varepsilon - J)B_i^{J(m)}) \\ (2\bar{J}A_i^{J(m)} + (2\varepsilon - J)C_i^{J(m)}) & (\bar{J}B_i^{J(m)} + C_i^{J(m)}) \end{pmatrix}$$

A seguir usaremos o método de curvatura nula, isto é

$$\frac{\partial \mathcal{L}_J}{\partial t_m} - \frac{\partial \mathcal{M}_J^{(m)}}{\partial x} = [\mathcal{M}_J^{(m)}, \mathcal{L}_J] \tag{3.37}$$

Pegando a projeção na ordem $\mathcal{O}(0)$ em ε na equação acima, temos as seguintes relações

$$\begin{cases} \partial_{t_m} J = -2\partial_x A_0^{J(m)} + 2\bar{J}B_0^{J(m)} + 2C_0^{J(m)} & (3.38a) \\ \partial_{t_m} \bar{J} = -\partial_x C_0^{J(m)} - 2\bar{J}A_0^{J(m)} + JC_0^{J(m)} & (3.38b) \\ \partial_x B_0^{J(m)} = -2A_0^{J(m)} - JB_0^{J(m)} & (3.38c) \end{cases}$$

Pegando a projeção na ordem $\mathcal{O}(i)$ em ε para $i = 1, 2, ..., m$, temos as seguintes relações

$$\begin{cases} \partial_x A_i^{J(m)} = \bar{J}B_i^{J(m)} + C_i^{J(m)} & (3.39a) \\ \partial_x B_i^{J(m)} = -2A_i^{J(m)} - JB_i^{J(m)} + 2B_{i-1}^{J(m)} & (3.39b) \\ \partial_x C_i^{J(m)} = -2\bar{J}A_i^{J(m)} + JC_i^{J(m)} - 2C_{i-1}^{J(m)} & (3.39c) \end{cases}$$

Também podemos facilmente verificar que ao pegarmos a projeção $\mathcal{O}(m+1)$ temos $B_m^{J(m)} = C_m^{J(m)} = 0$. A partir disso e da equação (3.39a) já podemos ver que $A_m^{J(m)}$ será uma constante, mas para encontrarmos o valor preciso de todos os coeficientes, tal que as relações de recorrência de Lenard sejam satisfeitas, isto é (3.33) e (3.34), é necessário um pouco de intuição e clarividência.

Veja que as relações (3.38a), (3.38b) e (3.38c) são satisfeitas para

$$A_0^{J(m)} = -\frac{\xi_{m+1}}{2}(\partial_x + J)\frac{\delta H_{J,m}}{\delta \bar{J}}, \qquad B_0^{J(m)} = \xi_{m+1}\frac{\delta H_{J,m}}{\delta \bar{J}}, \qquad C_0^{J(m)} = \xi_{m+1}\Big[\partial_x \frac{\delta H_{J,m}}{\delta J} - \bar{J}\frac{\delta H_{J,m}}{\delta \bar{J}}\Big]$$

Usando as equações (3.33) e (3.34), tal que as expressões (3.39a), (3.39b) e 3.39c) sejam satisfeitas, encontramos

$$A_i^{J(m)} = 2^i\Big(\prod_{p=0}^{i}\xi_{m+1-p}\Big)\frac{\delta H_{J,m-i}}{\delta J}, \qquad B_i^{J(m)} = 2^i\Big(\prod_{p=0}^{i}\xi_{m+1-p}\Big)\frac{\delta H_{J,m-i}}{\delta \bar{J}},$$

$$C_i^{J(m)} = 2^i\Big(\prod_{p=0}^{i}\xi_{m+1-p}\Big)\Big[\partial_x\frac{\delta H_{J,m-i}}{\delta J} - \bar{J}\frac{\delta H_{J,m-i}}{\delta \bar{J}}\Big]$$

para $i = 1, 2, ..., m-1$ e também

$$A_m^{J(m)} = -2^{m-1}, \qquad B_m^{J(m)} = C_m^{J(m)} = 0$$

Afim de ilustrar o algoritmo, expomos explicitamente a forma de $\mathcal{M}^{(2)}$ e $\mathcal{M}^{(3)}$, isto é

$$\mathcal{M}_J^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\alpha_{J3}[J' + J^2] & \alpha_{J3}J \\ \alpha_{J3}[\bar{J}' - J\bar{J}] & \frac{1}{2}\alpha_{J3}[J' + J^2] \end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 2\alpha_{J3} \\ -2\alpha_{J3}\bar{J} & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon^2\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e também

$$\mathcal{M}_J^{(3)} = \alpha_{J4}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}[2\bar{J}' + 3JJ' + J'' + 2J\bar{J} + J^3] & [2\bar{J} + J^2 + J'] \\ [J'\bar{J} + J\bar{J}' - \bar{J}'' - 2\bar{J}^2 - J^2\bar{J}] & \frac{1}{2}[2\bar{J}' + 3JJ' + J'' + 2J\bar{J} + J^3] \end{pmatrix} +$$

$$+\varepsilon\alpha_{J4}\begin{pmatrix} 2\bar{J} & 2J \\ 2[\bar{J}' - J\bar{J}] & -2\bar{J} \end{pmatrix} + \varepsilon^2\alpha_{J4}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4\bar{J} & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon^3\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Na próxima seção veremos como uma nova hierarquia surgirá da relação de curvatura nula do problema linear de Jimbo-Miwa.

3.3.2 Problema linear de Jimbo-Miwa para o modelo de dois bósons

Usando a forma geral do par de Lax que obtivemos na seção anterior e a transformação (2.10), podemos encontrar as matrizes do problema linear de Jimbo-Miwa fazendo a transformação por auto-similaridade para um tempo t_n qualquer. Primeiramente, vamos analizar como os coeficientes da matriz $\mathcal{M}_J^{(n)}$ se transforma, para isso usamos o lema que demonstramos acima. Assim, temos

$$A_i^{J(m)} \to (nt_n)^{\frac{(i-m)}{n}} \hat{A}_i^{J(m)}, \quad \Rightarrow \varepsilon^i A_i^{J(m)} \to (nt_n)^{-\frac{m}{n}} \lambda^i \hat{A}_i^{J(m)}$$

similarmente

$$\varepsilon^i B_i^{J(m)} \to (nt_n)^{-\frac{(m+1)}{n}} \lambda^i \hat{B}_i^{J(m)}, \qquad \varepsilon^i C_i^{J(m)} \to (nt_n)^{-\frac{(m-1)}{n}} \lambda^i \hat{C}_i^{J(m)}$$

Logo

$$\mathcal{M}_J^{(m)} = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i \begin{pmatrix} A_i^{J(m)} & B_i^{J(m)} \\ C_i^{J(m)} & -A_i^{J(m)} \end{pmatrix} \to \hat{\mathcal{M}}_J^{(m)} = \sum_{i=0}^{m} (nt_n)^{-\frac{m}{n}} \lambda^i \begin{pmatrix} \hat{A}_i^{J(m)} & (nt_n)^{-\frac{1}{n}} \hat{B}_i^{J(m)} \\ (nt_n)^{\frac{1}{n}} \hat{C}_i^{J(m)} & -\hat{A}_i^{J(m)} \end{pmatrix}$$

Lembrando que $\hat{A}_i^{J(m)} = A_i^{J(m)}(z,k,\bar{k})$, $\hat{B}_i^{J(m)} = B_i^{J(m)}(z,k,\bar{k})$ e $\hat{C}_i^{J(m)} = C_i^{J(m)}(z,k,\bar{k})$. Além disso, também temos

$$\mathcal{L}_J = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(J-2\varepsilon) & 1 \\ -\bar{J} & \frac{1}{2}(J-2\varepsilon) \end{pmatrix} \to \hat{\mathcal{L}}_J = (nt_n)^{-\frac{1}{n}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(k-2\lambda) & (nt_n)^{\frac{1}{n}} \\ -(nt_n)^{-\frac{1}{n}} \bar{k} & \frac{1}{2}(k-2\lambda) \end{pmatrix}$$

Desta forma, para eliminarmos t_n em (2.11), (2.12) e (2.13), precisamos ter

$$U(t_n) = \begin{pmatrix} (nt_n)^{-\frac{1}{2n}} & 0 \\ 0 & (nt_n)^{\frac{1}{2n}} \end{pmatrix}$$

Como foi visto no capítulo 2, o problema linear de Jimbo-Miwa é dado por (2.11), (2.12) e (2.13), ou seja,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z_n} = \mathcal{A}_J \Psi, \qquad m\frac{\partial \Psi}{\partial T_m} = \mathcal{B}_J^{(m)} \Psi, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = \mathcal{C}_J^{(n)} \Psi, \qquad m = 2, \dots n-1$$

e será determinado para este caso pelas matrizes

$$\mathcal{A}_J = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(k-2\lambda) & 1 \\ -\bar{k} & \frac{1}{2}(k-2\lambda) \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B}_J^{(m)} = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i \begin{pmatrix} \hat{A}_i^{J(m)} & \hat{B}_i^{J(m)} \\ \hat{C}_i^{(m)} & -\hat{A}_i^{(m)} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C}_J^{(n)} = \frac{1}{\lambda}\Big[z \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(k-2\lambda) & 1 \\ -\bar{k} & \frac{1}{2}(k-2\lambda) \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \sum_{m=2}^{n} T_m \sum_{i=0}^{m} \lambda^i \begin{pmatrix} \hat{A}_i^{J(m)} & \hat{B}_i^{J(m)} \\ \hat{C}_i^{J(m)} & -\hat{A}_i^{J(m)} \end{pmatrix}\Big]$$

De forma explicita, para os primeiros n temos:
-para $n = 2$

$$\mathcal{C}_J^{(2)} = \tfrac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}[zk + 1 + \alpha_{J3}[k' + k^2]] & 1 + \alpha_{J3}k \\ -\bar{k} + \alpha_{J3}[\bar{k}' - k\bar{k}] & \frac{1}{2}[zk + 1 + \alpha_{J3}[k' + k^2]] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 2\alpha_{J3} \\ -2\alpha_{J3}\bar{k} & -z \end{pmatrix} +$$

$$+\lambda \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- para $n = 3$

$$\mathcal{C}_J^{(3)} = \tfrac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} \begin{array}{l} -\frac{1}{2}[zk + 1 + \alpha_{J4}[2\bar{k}' + 3kk' + k'' + \\ 2k\bar{k} + k^3]] + T_2\alpha_{J3}[k' + k^2] \end{array} & \begin{array}{l} 1 + \alpha_{J4}[2\bar{k} + k^2 + k'] + \\ T_2\alpha_{J3}k \end{array} \\ & \\ \begin{array}{l} -\bar{k} + \alpha_{J4}[k'\bar{k} + k\bar{k}' - \bar{k}'' - 2\bar{k}^2 - \\ k^2\bar{k}] + T_2\alpha_{J3}[\bar{k}' - k\bar{k}] \end{array} & \begin{array}{l} \frac{1}{2}[zk + 1 + \alpha_{J4}[2\bar{k}' + 3kk' + k'' + \\ 2k\bar{k} + k^3]] + T_2\alpha_{J3}[k' + k^2] \end{array} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} z + 2\alpha_{J4}\bar{k} & 2\alpha_{J4}k + T_2\alpha_{J3}k \\ 2\alpha_{J4}[\bar{k}' - k\bar{k}] - 2T_2\alpha_{J3}\bar{k} & -z - 2\alpha_{J4}\bar{k} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2T_2 & 4\alpha_{J4} \\ -4\alpha_{J4}\bar{k} & 2T_2 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Analogamente ao que foi feito para a hierarquia AKNS, usaremos a condição de compatibilidade

$$\frac{\partial \mathcal{A}_J}{\partial \lambda} - \frac{\partial \mathcal{C}_J^{(n)}}{\partial z_n} + [\mathcal{A}_J, \mathcal{C}_J^{(n)}] = 0,$$

Assim, na projeção de ordem $\mathcal{O}(-1)$ em λ temos

$$\begin{cases} k + zk' = \sum_{m=2}^{n} T_m[2\partial_z \hat{A}_0^{J(m)} - 2\bar{k}\hat{B}_0^{J(m)} - 2\hat{C}_0^{J(m)}] & (3.40a) \\ 2\bar{J} + z\bar{k} = \sum_{m=2}^{n} T_m[\partial_z \hat{C}_0^{J(m)} + 2\bar{k}\hat{A}_0^{J(m)} - k\hat{C}_0^{J(m)}] & (3.40b) \\ \partial_z \hat{B}_0^{J(m)} = \sum_{m=2}^{n} T_m[-2\hat{A}_0^{J(m)} - k\hat{B}_0^{J(m)}] & (3.40c) \end{cases}$$

Novamente, após pegarmos a projeção de ordem $\mathcal{O}(j-1)$ para $j = 1, ..., n$ em λ podemos pegar também a projeção em T_m. Desta forma, as relações abaixo devem ser satisfeitas para os índices pertencentes ao conjunto $\mathcal{F} = \{\{j \leq m \leq n\} \cap \{m \geq 2\} \cap \{1 \leq j \leq n\} | j, m \in \mathbb{N}\}$

$$\begin{cases} \partial_z \hat{A}_i^{J(m)} = \bar{k}\hat{B}_i^{J(m)} + \hat{C}_i^{J(m)} & (3.41a) \\ \partial_z \hat{B}_i^{J(m)} = -2\hat{A}_i^{J(m)} - k\hat{B}_i^{J(m)} + 2\hat{B}_{i-1}^{J(m)} & (3.41b) \\ \partial_z \hat{C}_i^{J(m)} = -2\bar{k}\hat{A}_i^{J(m)} + k\hat{C}_i^{J(m)} - 2\hat{C}_{i-1}^{J(m)} & (3.41c) \end{cases}$$

Substituindo a forma reduzida de $A_i^{J(n)}$, $B_i^{J(n)}$ e $C_i^{J(n)}$, obtemos

$$k + z_n k' + \sum_{m=2}^{n} T_m \xi_{m+1} \partial_{z_n} \Big[(\partial_{z_n} + k) \frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}} + 2 \frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k} \Big] = 0 \qquad (3.42)$$

$$2\bar{k} + z_n \bar{k}' + \sum_{m=2}^{n} T_m \xi_{m+1} \Big[(k\partial_{z_n} - \partial_{z_n}^2) \frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k} + (2\bar{k}\partial_{z_n} + \bar{k}') \frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}} \Big] = 0 \qquad (3.43)$$

Portanto, obtemos as equações (3.35) e (3.36) com todos os tempos transformados conforme o esperado.

3.4 Modelo KP de dois bósons quadráticos

Para esta base apenas os parênteses de Poisson 2 e 3 são locais. Assim, de acordo com a referência [11], os parênteses 2 são dados por

$$\{j(x), \bar{j}(y)\}_2 = \delta'(x - y)$$

$$\{j(x), j(y)\}_2 = \{\bar{j}(x), \bar{j}(y)\}_2 = 0$$

e os parênteses 3 são

$$\{j(x), \bar{j}(y)\}_3 = (\bar{j}(x) + j(x))\delta'(x-y) + j'(x)\delta(x-y) - \delta''(x-y)$$

$$\{j(x), j(y)\}_3 = 2j(x)\delta'(x-y) + j'(x)\delta(x-y)$$

$$\{\bar{j}(x), \bar{j}(y)\}_3 = 2\bar{j}(x)\delta'(x-y) + \bar{j}'\delta(x-y)$$

Agora, buscaremos uma relação de recorrência de Lenard entre as hamiltonianas fazendo

$$\lambda_n\{j(x), H_{j,n}\}_2 = \{j(x), H_{j,n-1}\}_3$$

$$\sigma_n\{\bar{j}(x), H_{j,n}\}_2 = \{\bar{j}(x), H_{j,n-1}\}_3$$

Abrindo as expressões acima temos

$$\lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} dy\{\bar{j}(x), j(y)\}_2 \frac{\delta H_{j,n}}{\delta j(y)} = \int_{-\infty}^{\infty} dy\Big[\{\bar{j}(x), j(y)\}_3 \frac{\delta H_{j,n-1}}{\delta j(y)} + \{\bar{j}(x), \bar{j}(y)\}_3 \frac{\delta H_{j,n-1}}{\delta \bar{j}(y)}\Big]$$

$$\sigma_n \int_{-\infty}^{\infty} dy\{j(x), \bar{j}(y)\}_2 \frac{\delta H_{j,n}}{\delta \bar{j}(y)} = \int_{-\infty}^{\infty} dy\Big[\{j(x), j(y)\}_3 \frac{\delta H_{j,n-1}}{\delta j(y)} + \{j(x), \bar{j}(y)\}_3 \frac{\delta H_{j,n-1}}{\delta \bar{j}(y)}\Big]$$

Substituindo os parênteses de Poisson, encontramos a relação de recorrência de Lenard para o modelo de 2-bósons quadráticos, isto é

$$\lambda_n \partial_x \frac{\delta H_{j,n}}{\delta \bar{j}} = [(\bar{j} + j)\partial_x + j' - \partial_x^2] \frac{\delta H_{j,n-1}}{\delta \bar{j}} + [2j\partial_x + j'] \frac{\delta H_{j,n-1}}{\delta j} \tag{3.44}$$

$$\sigma_n \partial_x \frac{\delta H_{j,n}}{\delta j} = [2\bar{j}\partial_x + \bar{j}'] \frac{\delta H_{j,n-1}}{\delta \bar{j}} + [(\bar{j} + j)\partial_x + \bar{j}' + \partial_x^2] \frac{\delta H_{j,n-1}}{\delta j} \tag{3.45}$$

Novamente, podemos encontrar as derivadas funcionais de todas as constantes de movimento partindo de uma hamiltoniana inicial, usando (3.44) e (3.45) e fazendo $\lambda_n^{-1} = \sigma_n^{-1} = \xi_n$.

Assim, partindo de

$$H_{j,0} = \frac{1}{2}\int (j + \bar{j}) \qquad \Rightarrow \frac{\delta H_{j,0}}{\delta j} = \frac{\delta H_{j,0}}{\delta \bar{j}} = \frac{1}{2}$$

e usando a notação

$$\alpha_{ji} = \prod_{p=1}^{i} \xi_p$$

teremos as primeiras derivadas funcionais dadas na tabela 3.10.

Tabela 3.10: Derivadas funcionais do modelo de 2-bósons quadráticos

$\frac{\delta H_{j,1}}{\delta j(x)} = \alpha_{j1}\bar{j}(x)$	$\frac{\delta H_{j,1}}{\delta \bar{j}(x)} = \alpha_{j1} j(x)$
$\frac{\delta H_{j,2}}{\delta j} = \alpha_{j2}[\bar{j}' + 2j\bar{j} + \bar{j}^2]$	$\frac{\delta H_{j,2}}{\delta \bar{j}} = \alpha_{j2}[-j' + j^2 + 2j\bar{j}]$
$\frac{\delta H_{j,3}}{\delta j} = \alpha_{j3}[\bar{j}'' + 3j\bar{j}' + 3\bar{j}\bar{j}' + 3j^2\bar{j} + 6j\bar{j}^2 + \bar{j}^3]$	$\frac{\delta H_{j,3}}{\delta \bar{j}} = \alpha_{j3}[j'' - 3jj' - 3j'\bar{j} + j^3 + 6j^2\bar{j} + 3j\bar{j}^2]$

As primeiras hamiltonianas so dadas na tabela 3.11.

Tabela 3.11: Hamiltonianas do modelo de 2-bósons quadráticos

$H_{j,0} = \frac{1}{2}\int dx(j + \bar{j})$
$H_{j,1} = \alpha_1 \int dx j\bar{j}$
$H_{j,2} = \alpha_2 \int dx(-j'\bar{j} + j^2\bar{j} + j\bar{j}^2)$
$H_{j,3} = \alpha_3 \int dx(j''\bar{j} - 3jj'\bar{j} - 2j'\bar{j}^2 - j\bar{j}\bar{j}' + j^3\bar{j} + 3j^2\bar{j}^2 + j\bar{j}^3)$

Definiremos os índices dos tempos tal que o tempo t_1 seja x, assim temos

$$\frac{\partial j}{\partial t_n} = \{j(x), H_{jn}\}_2 = \xi_n\{j(x), H_{jn-1}\}_3 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H_{j,n}}{\delta \bar{j}}$$

$$\frac{\partial \bar{j}}{\partial t_n} = \{\bar{j}(x), H_{jn}\}_2 = \xi_n\{\bar{j}(x), H_{jn-1}\}_3 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta H_{j,n}}{\delta j}$$

Explicitamente, as equações de movimento são dadas na tabel 3.12.

Tabela 3.12: Equações de movimento do modelo de 2-bósons quadráticos

$\frac{\partial j}{\partial t_1} = \alpha_1 \partial_x j$	$\frac{\partial \bar{j}}{\partial t_1} = \alpha_1 \partial_x \bar{j}$
$\frac{\partial j}{\partial t_2} = \alpha_2 \partial_x[-j' + j^2 + 2j\bar{j}]$	$\frac{\partial \bar{j}}{\partial t_2} = \alpha_2 \partial_x[\bar{j}' + 2j\bar{j} + \bar{j}^2]$
$\frac{\partial j}{\partial t_3} = \alpha_3 \partial_x[j'' - 3jj' - 3j'\bar{j} + j^3 +$ $6j^2\bar{j} + 3j\bar{j}^2]$	$\frac{\partial \bar{j}}{\partial t_3} = \alpha_3 \partial_x[\bar{j}'' + 3j\bar{j}' + 3\bar{j}\bar{j}' + 3j^2\bar{j} +$ $6j\bar{j}^2 + \bar{j}^3]$

Fazendo a redução por auto-similaridade

$$z_n = (nt_n)^{-\frac{1}{n}}x, \quad j(x) = (nt_n)^{-\frac{1}{n}}w(z_n), \quad \bar{j}(x) = (nt_n)^{-\frac{1}{n}}\bar{w}(z_n),$$

reduzimos as equações de movimento e temos

- para $n = 2$

$$w + z_2 w_{z_2} = -\alpha_2 \partial_x[-j' + j^2 + 2j\bar{j}]$$

$$\bar{w} + z_2 \bar{w}_{z_2} = -\alpha_2 \partial_x[\bar{j}' + 2j\bar{j} + \bar{j}^2]$$

- para $n = 3$

$$w + z_3 w_{z_3} = -\alpha_3 \partial_x[j'' - 3jj' - 3j'\bar{j} + j^3 + 6j^2\bar{j} + 3j\bar{j}^2]$$

$$\bar{w} + z_3 \bar{w}_{z_3} = -\alpha_3 \partial_x[\bar{j}'' + 3j\bar{j}' + 3\bar{j}\bar{j}' + 3j^2\bar{j} + 6j\bar{j}^2 + \bar{j}^3]$$

Para o modelo de dois bósons quadráticos temos um lema bastante similar ao dos modelos anteriores e nos permitirá construir uma expressão geral para a nova hierarquia.

Lema 3. *Sob a redução por auto-similaridade*

$$z_n = (nt_n)^{-\frac{1}{n}}x, \quad j(x) = (nt_n)^{-\frac{1}{n}}w(z_n), \quad \bar{j}(x) = (nt_n)^{-\frac{1}{n}}\bar{w}(z_n),$$

a derivada funcional das hamiltonianas do modelo de 2-bósons quadráticos se transformam como

$$\frac{\delta H_{j,i}}{\delta j} = (nt_n)^{-\frac{i}{n}}\frac{\delta \hat{H}_{j,i}}{\delta w}, \qquad \frac{\delta H_{j,i}}{\delta \bar{j}} = (nt_n)^{-\frac{i}{n}}\frac{\delta \hat{H}_{j,i}}{\delta \bar{w}}$$

sendo que usamos a notação $\hat{H}_{j,i} = H_{j,i}(w, \bar{w})$.

Demonstração. Como foi nos lemas anteriores, a demonstração deste lema também segue por indução . Podemos ver facilmente para a primeira e a segunda hamiltoniana que a transformação por auto-similaridade é

$$\begin{cases} \frac{\delta H_{j,0}}{\delta j} = \frac{1}{2} \equiv \frac{\delta \hat{H}_{j,0}}{\delta w} \\ \\ \frac{\delta H_{j,0}}{\delta \bar{j}} = \frac{1}{2} \equiv \frac{\delta \hat{H}_{j,0}}{\delta \bar{w}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\delta H_{j,1}}{\delta j} = (nt_n)^{-\frac{1}{n}}\alpha_{j1}\bar{w} \equiv (nt_n)^{-\frac{1}{n}}\frac{\delta \hat{H}_{j,1}}{\delta w} \\ \\ \frac{\delta H_{j,1}}{\delta \bar{j}} = (nt_n)^{-\frac{1}{n}}\alpha_{j1}w \equiv (nt_n)^{-\frac{1}{n}}\frac{\delta \hat{H}_{j,1}}{\delta \bar{w}} \end{cases}$$

Agora assumindo que para m vale

$$\frac{\delta H_{j,m}}{\delta j} = (nt_n)^{-\frac{m}{n}}\frac{\delta \hat{H}_{j,m}}{\delta w}, \qquad \frac{\delta H_{j,m}}{\delta \bar{j}} = (nt_n)^{-\frac{m}{n}}\frac{\delta \hat{H}_{j,m}}{\delta \bar{w}}$$

queremos ver que para $m + 1$ o lema também é valido. Para isso usamos a relação de recorrência (3.44) e (3.45) tal que

$$\frac{\delta H_{j,m+1}}{\delta j} = \partial_x^{-1}\left[[(\bar{j}+j)\partial_x + j' - \partial_x^2]\frac{\delta H_{j,n-1}}{\delta \bar{j}} + [2j\partial_x + j']\frac{\delta H_{j,n-1}}{\delta j}\right] =$$

$$(nt_n)^{-\frac{(m+1)}{n}}\partial_{z_n}^{-1}\left[[(\bar{w}+w)\partial_z + +w' - \partial_z^2]\frac{\delta \hat{H}_{j,n-1}}{\delta \bar{w}} + [2w\partial_z + w']\frac{\delta \hat{H}_{j,n-1}}{\delta w}\right] \equiv (nt_n)^{-\frac{(m+1)}{n}}\frac{\delta \hat{H}_{j,m+1}}{\delta w}$$

$$\frac{\delta H_{j,m+1}}{\delta \bar{j}} = \partial_x^{-1}\left[[2\bar{j}\partial_x + \bar{j}']\frac{\delta H_{j,n-1}}{\delta \bar{j}} + [(\bar{j}+j)\partial_x + \bar{j}' + \partial_x^2]\frac{\delta H_{j,n-1}}{\delta j}\right] =$$

$$(nt_n)^{-\frac{(m+1)}{n}}\partial_{z_n}^{-1}\left[[2\bar{w}\partial_z + \bar{w}']\frac{\delta \hat{H}_{j,n-1}}{\delta \bar{w}} + [(\bar{w}+w)\partial_z + \bar{w}' + \partial_z^2]\frac{\delta \hat{H}_{j,n-1}}{\delta w}\right] \equiv (nt_n)^{-\frac{(m+1)}{n}}\frac{\delta \hat{H}_{j,m+1}}{\delta \bar{w}}$$

$\square$

Utilizando o lema acima, encontramos uma expressão geral para a hierarquia de equações diferenciais ordinárias correspondentes ao modelo de dois bósons quadráticos, ou seja

$$w + z_n w_{z_n} + \partial_{z_n}\frac{\delta \hat{H}_{j,n}}{\delta \bar{w}} = 0 \tag{3.46}$$

$$\bar{w} + z_n \bar{w}_{z_n} + \partial_{z_n}\frac{\delta \hat{H}_{j,n}}{\delta w} = 0 \tag{3.47}$$

3.4.1 Representação matricial do par de Lax para o modelo de dois bósons quadráticos

Para esta base, a representação matricial do par Lax, ou seja,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \mathcal{L}_j \Psi, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial t_m} = \mathcal{M}_j^{(m)}\Psi$$

é dada por

$$\mathcal{L}_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(j+\bar{j}-2\varepsilon) & j \\ -\bar{j} & -\frac{1}{2}(j+\bar{j}-2\varepsilon) \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{M}_j^{(m)} = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i \begin{pmatrix} A_i^{j(m)} & B_i^{j(m)} \\ C_i^{j(m)} & -A_i^{j(m)} \end{pmatrix}$$

Sendo que novamente assumimos uma forma conveniente de $\mathcal{M}_j^{(m)}$. Agora só nos falta determinar os coeficientes $A_i^{j(m)}$, $B_i^{j(m)}$ e $C_i^{j(m)}$ nesta base.

Note que temos

$$[\mathcal{M}_j^{(m)}, \mathcal{L}_j] = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i \begin{pmatrix} -(\bar{j}B_i^{(m)} + jC_i^{(m)}) & (2jA_i^{j(m)} + (2\varepsilon - j - \bar{j})B_i^{j(m)}) \\ (2\bar{j}A_i^{j(m)} - (2\varepsilon - j - \bar{j})C_i^{j(m)}) & (\bar{j}B_i^{j(m)} + jC_i^{j(m)}) \end{pmatrix}$$

Assim, usaremos o método de curvatura nula, isto é

$$\frac{\partial \mathcal{L}_j}{\partial t_m} - \frac{\partial \mathcal{M}_j^{(m)}}{\partial x} = [\mathcal{M}_j^{(m)}, \mathcal{L}_j] \tag{3.48}$$

Pegando a projeção na ordem $\mathcal{O}(0)$ em ε, temos as seguintes relações

$$\begin{cases} \partial_{t_m} j + \partial_{t_m} \bar{j} = 2\partial_x A_0^{j(m)} - 2\bar{j}B_0^{j(m)} - 2jC_0^{j(m)} & (3.49a) \\ \partial_{t_m} j = \partial_x B_0^{j(m)} + 2jA_0^{j(m)} - (j + \bar{j})B_0^{j(m)} & (3.49b) \\ \partial_{t_m} \bar{j} = -\partial_x C_0^{j(m)} - 2\bar{j}A_0^{j(m)} - (j + \bar{j})C_0^{j(m)} & (3.49c) \end{cases}$$

Enquanto a projeção na ordem $\mathcal{O}(i)$ em ε para $i = 1, 2, ..., m$, nos dá as relações

$$\begin{cases} \partial_x A_i^{j(m)} = \bar{j}B_i^{j(m)} + jC_i^{j(m)} & (3.50a) \\ \partial_x B_i^{j(m)} = -2jA_i^{j(m)} + (j + \bar{j})B_i^{j(m)} - 2B_{i-1}^{j(m)} & (3.50b) \\ \partial_x C_i^{j(m)} = -2\bar{j}A_i^{j(m)} - (j + \bar{j})C_i^{j(m)} + 2C_{i-1}^{j(m)} & (3.50c) \end{cases}$$

Novamente podemos verificar que ao pegarmos a projeção $\mathcal{O}(m+1)$ temos $B_m^{j(m)} = C_m^{j(m)} = 0$, o que de imediato implica que $A_m^{(m)}$ será uma constante devido a equação (3.50a).

Veja que as relações (3.49a), (3.49b) e (3.49c) são satisfeitas para

$$A_0^{j(m)} = \frac{\xi_m}{2}\Big[(\partial_x + j + \bar{j})\frac{\delta H_{j,m-1}}{\delta j} - (\partial_x - j - \bar{j})\frac{\delta H_{j,m-1}}{\delta \bar{j}}\Big]$$

$$B_0^{j(m)} = \xi_m\Big[(j - \partial_x)\frac{\delta H_{j,m-1}}{\delta \bar{j}} + j\frac{\delta H_{j,m-1}}{\delta j}\Big], \qquad C_0^{j(m)} = -\xi_m\Big[(\partial_x + \bar{j})\frac{\delta H_{j,m-1}}{\delta j} + \bar{j}\frac{\delta H_{j,m-1}}{\delta \bar{j}}\Big],$$

Sempre tendo em mente a relação de Lenard, (3.44) e (3.45), e as relações (3.50a), (3.50b) e (3.50c) são satisfeitas para

$$A_i^{j(m)} = -2^i\Big(\prod_{p=0}^{i} \xi_{m-p}\Big)\partial_x^{-1}\Big[\bar{j}\partial_x \frac{\delta H_{j,m-i-1}}{\delta \bar{j}} + j\partial_x \frac{\delta H_{j,m-i-1}}{\delta j}\Big],$$

$$B_i^{j(m)} = 2^i \Big(\prod_{p=0}^{i} \xi_{m-p}\Big)\Big[(j-\partial_x)\frac{\delta H_{jm-i-1}}{\delta \bar{j}} + j\frac{\delta H_{jm-i-1}}{\delta j}\Big],$$

$$C_i^{j(m)} = -2^i \Big(\prod_{p=0}^{i} \xi_{m-p}\Big)\Big[(\bar{j}+\partial_x)\frac{\delta H_{j,m-i-1}}{\delta j} + \bar{j}\frac{\delta H_{j,m-i-1}}{\delta \bar{j}}\Big]$$

para $i = 1, 2, ..., m-1$ e também

$$A_m^{j(m)} = -2^{m-1}, \qquad B_m^{j(m)} = C_m^{j(m)} = 0$$

Afim de ilustrar o algoritmo, expomos explicitamente a forma de $\mathcal{M}^{(2)}$ e $\mathcal{M}^{(3)}$, isto é

$$\mathcal{M}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha_{j2}[\bar{j}' - j' + (j'+\bar{j})^2] & \alpha_{j2}[-j' + j(j+\bar{j})] \\ -\alpha_{j2}[\bar{j}' + \bar{j}(j+\bar{j})] & -\frac{1}{2}\alpha_{j2}[\bar{j}' - j' + (j'+\bar{j})^2] \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha_{j2}j \\ -2\alpha_{j2}\bar{j} & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\varepsilon^2 \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e também

$$\mathcal{M}^{(3)} = \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}\alpha_{j3}[\bar{j}'' + j'' + 2\bar{j}\bar{j}' - 2jj' + (\bar{j}' - j' + (j+\bar{j}^2 + 2j\bar{j})(j+\bar{j})] \\ -\alpha_{j3}[\bar{j}'' + 3\bar{j}\bar{j}' + \bar{j}^3 + 4j\bar{j}^2 + j^2\bar{j} + j'\bar{j} + 2j\bar{j}'] \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha_{j3}[j'' - 3jj' + j^3 + 4j^2\bar{j} + j\bar{j}^2 - 2j'\bar{j} - j\bar{j}'] \\ -\frac{1}{2}\alpha_{j3}[\bar{j}'' + j'' + 2\bar{j}\bar{j}' - 2jj' + (\bar{j}' - j' + (j+\bar{j}^2 + 2j\bar{j})(j+\bar{j})] \end{matrix}\right) +$$

$$+\varepsilon \begin{pmatrix} -2\alpha_{j3}j\bar{j} & 2\alpha_{j3}[-j' + j(j+\bar{j})] \\ -2\alpha_{j3}[\bar{j}' + \bar{j}(j+\bar{j})] & 2\alpha_{j3}j\bar{j} \end{pmatrix} +$$

$$+\varepsilon^2 \begin{pmatrix} 0 & 4\alpha_{j3}j \\ -4\alpha_{j3}\bar{j} & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon^3 \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Veremos na seção seguinte como a hierarquia PIV surge de forma natural pelo problema linear de Jimbo-Miwa para está base.

3.4.2 Problema linear de Jimbo-Miwa para o modelo de dois bósons quadráticos

Usando a forma geral do par Lax que obtivemos na seção anterior podemos encontrar as matrizes do problema linear de Jimbo-Miwa nesta base analogamente ao que fizemos para os campos anteriores. Usando o lema que demonstramos acima para o campo de dois bósons quadráticos, podemos encontrar os coeficientes da matrix $\mathcal{M}^{(n)}$ após uma redução por auto-similaridade, ou seja

$$A_i^{j(m)}(j,\bar{j}) \to (nt_n)^{\frac{(i-m)}{n}} \hat{A}_i^{j(m)}(w,\bar{w}), \quad \Rightarrow \varepsilon^i A_i^{j(m)}(j,\bar{j}) \to (nt_n)^{-\frac{m}{n}} \lambda^i \hat{A}_i^{j(m)}(w,\bar{w})$$

Diferentemente dos modelos anteriores, neste modelo também temos

$$\varepsilon^i B_i^{j(m)}(j,\bar{j}) \to (nt_n)^{-\frac{m}{n}} \lambda^i \hat{B}_i^{j(m)}(w,\bar{w}), \qquad \varepsilon^i C_i^{j(m)}(j,\bar{j}) \to (nt_n)^{-\frac{m}{n}} \lambda^i \hat{C}_i^{j(m)}(w,\bar{w})$$

Assim, ficamos com

$$\mathcal{L}_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(j+\bar{j}-2\varepsilon) & j \\ -\bar{j} & -\frac{1}{2}(j+\bar{j}-2\varepsilon) \end{pmatrix} \to \hat{\mathcal{L}}_j = (nt_n)^{\frac{1}{n}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(w+\bar{w}-2\lambda) & w \\ -\bar{w} & -\frac{1}{2}(w+\bar{w}-2\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_j^{(m)} = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i \begin{pmatrix} A_i^{j(m)} & B_i^{j(m)} \\ C_i^{(m)} & -A_i^{j(m)} \end{pmatrix} \to \hat{\mathcal{M}}_j^{(m)} = (nt_n)^{-\frac{m}{n}} \sum_{i=0}^{m} \lambda^i \begin{pmatrix} \hat{A}_i^{j(m)} & \hat{B}_i^{j(m)} \\ \hat{C}_i^{j(m)} & -\hat{A}_i^{j(m)} \end{pmatrix}$$

desta forma, podemos ver facilmente que

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como foi visto no capítulo 2, o problema linear de Jimbo-Miwa é dado por (2.11), (2.12) e (2.13), ou seja,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z_n} = \mathcal{A}_j \Psi, \qquad m\frac{\partial \Psi}{\partial T_m} = \mathcal{B}_j^{(m)} \Psi, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = \mathcal{C}_j^{(n)} \Psi, \qquad m = 2, ...n-1$$

e será determinado para este caso pelas matrizes

$$\mathcal{A}_j = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(w+\bar{w}-2\lambda) & -w \\ \bar{w} & \frac{1}{2}(w+\bar{w}-2\lambda) \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B}_j^{(m)} = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i \begin{pmatrix} \hat{A}_i^{j(m)} & \hat{B}_i^{j(m)} \\ \hat{C}_i^{j(m)} & -\hat{A}_i^{j(m)} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C}_j^{(n)} = \frac{1}{\lambda}\Big[z_n \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(w+\bar{w}-2\lambda) & w \\ -\bar{w} & -\frac{1}{2}(w+\bar{w}-2\lambda) \end{pmatrix} + \sum_{m=2}^{n} T_m \sum_{i=0}^{m} \lambda^i \begin{pmatrix} \hat{A}_i^{(m)} & \hat{B}_i^{(m)} \\ \hat{C}_i^{(m)} & -\hat{A}_i^{(m)} \end{pmatrix}\Big]$$

E sendo que as matrizes $\mathcal{C}_j^{(n)}$ para os primeiros n, são:

-para $n=2$

$$\mathcal{C}^{(2)} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[z_2(w+\bar{w}) + \alpha_{j2}[\bar{w}' - w' + (w'+\bar{w})^2]] & w + \alpha_{j2}[-w' + w(w+\bar{w})] \\ -\bar{w} - \alpha_{j2}[\bar{w}' + \bar{w}(w+\bar{w})] & -\frac{1}{2}[z_2(w+\bar{w}) + \alpha_{j2}[\bar{w}' - w' + (w'+\bar{w})^2]] \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} -z_2 & 2\alpha_{j2} w \\ -2\alpha_{j2}\bar{w} & z_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

-para $n=3$

$$\mathcal{C}^{(3)} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{2}[z_3(w\bar{w}) + \alpha_{j3}[\bar{w}'' + w'' + \\ 2\bar{w}\bar{w}' - 2ww' + (\bar{w}' - w' + \\ (w+\bar{w})^2 + 2w\bar{w})(w+\bar{w})] + \\ T_2\alpha_{j2}[\bar{w}' - w' + (w'+\bar{w})^2]] \end{matrix} & \begin{matrix} w + \alpha_{j3}[w'' - 3ww' + w^3 + \\ 4w^2\bar{w} + w\bar{w}^2 - 2w'\bar{w} - w\bar{w}'] + \\ T_2\alpha_{j2}[-w' + w(w+\bar{w})] \end{matrix} \\ \begin{matrix} -\bar{w} - \alpha_{j3}[\bar{w}'' + 3\bar{w}\bar{w}' + \bar{w}^3 + \\ 4w\bar{w}^2 + w^2\bar{w} + w'\bar{w} + 2w\bar{w}'] - \\ T_2\alpha_{j2}[\bar{w}' + \bar{w}(w+\bar{w})] \end{matrix} & \begin{matrix} -\frac{1}{2}[z_3(w+\bar{w})\alpha_{j3} + [\bar{w}'' + w'' + \\ 2\bar{w}\bar{w}' - 2ww' + (\bar{w}' - w' + \\ (w+\bar{w})^2 + 2w\bar{w})(w+\bar{w})] + \\ T_2\alpha_{j2}[\bar{w}' - w' + (w'+\bar{w})^2]] \end{matrix} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -z - 2\alpha_{j3} w\bar{w} & 2\alpha_{j3}[-w' + w(w+\bar{w})] + 2T_2\alpha_{j2} w \\ -2\alpha_{j3}[\bar{w}' + \bar{w}(w+\bar{w})] - 2T_2\alpha_{j2}\bar{w} & z + 2\alpha_{j3} w\bar{w} \end{pmatrix} +$$

$$+\lambda \begin{pmatrix} -2T_2 & 4\alpha_{j3} k \\ -4\alpha_{j3}\bar{k} & 2T_2 \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Analogamente ao que foi feito para a hierarquia AKNS e de dois bósons, usando a condição de compatibilidade

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \lambda} - \frac{\partial \mathcal{C}^{(n)}}{\partial z_n} + [\mathcal{A}, \mathcal{C}^{(n)}] = 0,$$

e pegando a projeção na ordem $\mathcal{O}(-1)$ em λ temos

$$\begin{cases} (zw)_z + (z\bar{w})_z = \sum_{m=2}^{n} T_m[-2\partial_z \hat{A}_0^{(m)} + 2\bar{w}\hat{B}_0^{(m)} + 2w\hat{C}_0^{(m)}] & (3.51a) \\ (zw)_z = \sum_{m=2}^{n} T_m[-\partial_z \hat{B}_0^{(m)} - 2w\hat{A}_0^{(m)} + (w+\bar{w})\hat{B}_0^{(m)}] & (3.51b) \\ (z\bar{j})_z = \sum_{m=2}^{n} T_m[\partial_z \hat{C}_0^{(m)} + 2\bar{w}\hat{A}_0^{(m)} + (w+\bar{w})\hat{C}_0^{(m)}] & (3.51c) \end{cases}$$

Após pegarmos a projeção de ordem $\mathcal{O}(j-1)$ para $j = 1, ..., n$ em λ pegaremos a projeção em T_m, tal que as relações abaixo devem ser satisfeitas para os índices pertencentes ao conjunto $\mathcal{F} = \{\{j \leq m \leq n\} \cap \{m \geq 2\} \cap \{1 \leq j \leq n\} | j, m \in \mathbb{N}\}$

$$\begin{cases} \partial_z \hat{A}_i^{(m)} = \bar{w}\hat{B}_i^{(m)} + w\hat{C}_i^{(m)} & (3.52a) \\ \partial_z \hat{B}_i^{(m)} = -2w\hat{A}_i^{(m)} + (w+\bar{w})\hat{B}_i^{(m)} - 2\hat{B}_{i-1}^{(m)} & (3.52b) \\ \partial_z \hat{C}_i^{(m)} = -2\bar{w}\hat{A}_i^{(m)} - (w+\bar{w})\hat{C}_i^{(m)} + 2\hat{C}_{i-1}^{(m)} & (3.52c) \end{cases}$$

Desta forma, substituindo $\hat{A}_i^{j(m)}$, $\hat{B}_i^{j(m)}$ e $\hat{C}_i^{j(m)}$, as equações (3.52) são satisfeitas e de (3.51) obtemos

$$w + zw_z + \sum_{m=2}^{n} T_m \partial_z \frac{\delta \hat{H}_{j,m}}{\delta \bar{w}} = 0$$

$$\bar{w} + z\bar{w}_z + \sum_{m=2}^{n} T_m \partial_z \frac{\delta \hat{H}_{j,m}}{\delta w} = 0$$

Ou seja, obtemos as equações (3.46) e (3.47) com todos os tempos transformados e verificamos assim o problema linear de Jimbo-Miwa para os três modelos trabalhados. No próximo capítulo, veremos como esta hierarquia pode ser transformadas na hierarquia compatível com a equação PIV.

Capítulo 4

Hierarquia PIV

No capítulo anterior, vimos como obter hierarquias de equações diferenciais ordinárias a partir de modelos integráveis; contudo, ainda não foi mostrado explicitamente como estas hierarquias se relacionam com as equações de Painlevé. Neste capítulo, veremos o motivo pelo qual os modelos tratados no capítulo anterior estão associados a equação PIV e construiremos a primeira hamiltoniana da hierarquia PIV através da lagrangiana do sistema.

Contrariando ao que poderiamos inferir da literatura, em particular [12], veremos na primeira seção que construir a hierarquia PIV a partir do modelo AKNS é algo muito difícil de se fazer. Por outro lado, utilizando o modelo de dois bósons quadráticos, obtemos a hierarquia PIV de forma muito mais natural do que a obtida pela primeira vez em [16].

4.1 Hierarquia de equações diferenciais ordinárias compatíveis com a equação PIV

Se olharmos para a forma da equação PIV na tabela 2.1 do capítulo 1, veremos que uma hierarquia correspondente a equação PIV deve possuir dois parâmetros. Em nossa tentativa de obter a hierarquia PIV a partir do modelo AKNS, teremos uma constante devido a simetria da redução por auto-similaridade e outra devido a integração . Já nos outros dois modelos obteremos ambas as constantes da integração .

Para esta capítulo, usaremos uma notação simplificada e denotaremos as variáveis das equações diferenciais ordinárias, z_n, simplesmente por z.

4.1.1 Equação PIV a partir do AKNS

Nesta subseção , baseando-se na referência [9], obteremos a equação PIV a partir da redução por auto-similaridade do modelo AKNS para o tempo t_2. Ou seja,

$$(1-\gamma_2)R + zR' = -[2R^2Q - R''], \qquad (1+\gamma_2)Q + zQ' = [2Q^2R - Q''] \tag{4.1}$$

Para isso, vamos definir as funções

$$Y = -\Big[\frac{Q_z}{Q} + z\Big], \quad W = \Big[\frac{R_z}{R} - z\Big], \quad \Gamma = RQ \tag{4.2}$$

Note que

$$Y^2 = \Big(\frac{Q_z}{Q}\Big)^2 - 2zY - z^2, \quad W^2 = \Big(\frac{R_z}{R}\Big)^2 - 2zW - z^2$$

$$Y_z = -\Big(\frac{Q_{zz}}{Q}\Big) + Y^2 + 2zY + z^2 - 1, \quad W_z = \Big(\frac{R_{zz}}{R}\Big) - W^2 - 2zW - z^2 - 1$$

$$\Gamma_z = RQ[W - Y] = \Gamma[W - Y] \tag{4.3}$$

Podemos reescrever (4.1) como

$$(1-\gamma_2) + z\Big(\frac{R_z}{R}\Big) + 2RQ - \Big(\frac{R_{zz}}{R}\Big) = 0$$

$$(1+\gamma_2) + z\Big(\frac{Q_z}{Q}\Big) - 2RQ + \Big(\frac{Q_{zz}}{Q}\Big) = 0$$

Transformando as equações acima para os campos W e Y, temos

$$W_z = 2\Gamma - W^2 - zW - \gamma_2 \tag{4.4}$$

$$Y_z = -2\Gamma + Y^2 + zY + \gamma_2 \tag{4.5}$$

Agora utilizando (4.1), vamos construir uma relação auxiliar que relacione Y e W. Para isso faremos

$$[(zQ+Q_z)(zR-R_z)]_z = (zQ+Q_z)_z(zR-R_z)+(zQ+Q_z)(zR-R_z)_z =$$

$$= (2q^2r-\gamma_2 Q)(zR-R_z)+(zQ+Q_z)(\gamma_2 R-2R^2Q) = [\gamma_2 RQ - R^2Q^2]_z$$

Integrando e pondo a constante de integração igual a ν, temos

$$RQ\Big(z+\frac{Q_z}{Q}\Big)\Big(z-\frac{R_z}{R}\Big) = RQ(\gamma_2 - RQ)+\nu \qquad \Rightarrow$$

$$\Gamma Y W = \gamma_2\Gamma - \Gamma^2 + \nu \tag{4.6}$$

Substituindo (4.6) em (4.3) podemos ter

$$\Gamma_z = \gamma_2\frac{\Gamma}{Y} - \frac{\Gamma^2}{Y} + \frac{\gamma_2}{Y} - \Gamma Y \tag{4.7}$$

ou

$$\Gamma_z = -\gamma_2\frac{\Gamma}{W} + \frac{\Gamma^2}{W} - \frac{\gamma_2}{W} + \Gamma W \tag{4.8}$$

Derivando novamente as equações (4.4) e (4.5), temos

$$W_{zz} = 2\Gamma_z - 2WW_z - W - zW_z \tag{4.9}$$

$$Y_{zz} = -2\Gamma_z + 2YY_z + Y + zY_z \tag{4.10}$$

Substituindo (4.8) em (4.9) e utilizando (4.4) para eliminar Γ, temos

$$W_{zz} = \frac{W_z^2}{2W} + \frac{3}{2}W^3 + 2zW^2 + (\frac{z^2}{2}+\gamma_2-1)W - \frac{(\gamma_2+2\nu)}{2W} \tag{4.11}$$

Substituindo (4.7) em (4.10) e utilizando (4.5) para eliminar Γ, temos

$$Y_{zz} = \frac{Y_z^2}{2Y} + \frac{3}{2}Y^3 + 2zY^2 + (\frac{z^2}{2}+\gamma_2+1)Y - \frac{(\gamma_2+2\nu)}{2Y} \tag{4.12}$$

Estas são equações PIV, mas podemos escrever a forma mais conhecida delas fazendo as tranformações

$$W \to \frac{W}{\sqrt{2}}, \quad Y \to \frac{Y}{\sqrt{2}}, \quad z \to \sqrt{2}z, \quad \alpha_\pm = -(\gamma_2 \pm 1), \quad \beta = -\frac{(\gamma_2+2\nu)}{4}$$

Assim ficamos com

$$W_{zz} = \frac{W_z^2}{2W} + \frac{3}{2}W^3 + 4zW^2 + 2(z^2 - \alpha_-)W + \frac{\beta}{W} \tag{4.13}$$

$$Y_{zz} = \frac{Y_z^2}{2Y} + \frac{3}{2}Y^3 + 4zY^2 + 2(z^2 - \alpha_+)Y + \frac{\beta}{Y} \tag{4.14}$$

4.1.2 Hierarquia PIV a partir do modelo AKNS

O fato de obtermos a equação PIV a partir do modelo AKNS sugere que podemos construir uma hierarquia de equações do tipo Painlevé a partir deste modelo. Contudo, tal construção pode ser muito difícil ou talvez impossível de ser feita porque não conseguimos obter o parâmetro de integração em equações de ordem superiores.

Embora não tenhamos obtido êxito com o modelo AKNS, mencionaremos duas tentativas para eventuais consultas futuras.

Tentativa 1: Campos Y e W independentes da equação

Nosso objetivo é usar a equação que obtemos através da transformação de auto-similaridade para o AKNS, isto é

$$(1 - \gamma_n)R(z) + zR_z(z) - \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,n}}{\delta Q(z)} = 0 \tag{4.15}$$

$$(1 + \gamma_n)Q(z) + zQ_z(z) + \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,n}}{\delta R(z)} = 0, \tag{4.16}$$

para gerar nossa hierarquia PIV. Vamos definir os seguintes campos,

$$Y = -\Big[\frac{Q_z}{Q} + z\Big], \qquad W = \Big[\frac{R_z}{R} - z\Big], \qquad \Gamma = RQ.$$

O campo Γ terá apenas uma função auxiliar nos cálculos e deverá ser eliminado no final.

Para t_3 temos

$$(1 - \gamma_3)R + zR_z + [6RR_zQ - R_{zzz}] = 0 \tag{4.17}$$

$$(1+\gamma_3)R + zR_z + [6QQ_zR - Q_{zzz}] = 0 \tag{4.18}$$

Note que

$$\Gamma_z = R_zQ + RQ_z = \Gamma(W-Y)$$

$$\Gamma_{zz} = R_{zz}Q + 2Q_zR_z + RQ_{zz} = \Gamma[(W-Y)^2 + (W-Y)_z]$$

$$\frac{R_{zzz}}{R} = \frac{d^2}{dz^2}\Big(\frac{R_z}{R}\Big) + 3\Big(\frac{R_z}{R}\Big)\frac{d}{dz}\Big(\frac{R_z}{R}\Big) + \Big(\frac{R_z}{R}\Big)^3 = W_{zz} + 3(W+z)(W_z+1) + (W+z)^3$$

$$\frac{Q_{zzz}}{Q} = \frac{d^2}{dz^2}\Big(\frac{Q_z}{Q}\Big) + 3\Big(\frac{Q_z}{Q}\Big)\frac{d}{dz}\Big(\frac{Q_z}{Q}\Big) + \Big(\frac{Q_z}{Q}\Big)^3 = -Y_{zz} + 3(Y+z)(Y_z+1) - (Y+z)^3$$

Dividindo (4.17) por R e (4.18) por Q, temos

$$(1-\gamma_3) + z\Big(\frac{R_z}{R}\Big) + 6\Big(\frac{R_z}{R}\Big)RQ - \Big(\frac{R_{zzz}}{R}\Big) = 0$$

$$(1+\gamma_3) + z\Big(\frac{Q_z}{Q}\Big) + 6\Big(\frac{Q_z}{Q}\Big)RQ - \Big(\frac{Q_{zzz}}{Q}\Big) = 0$$

Ou seja

$$(1-\gamma_3) + z(W+z) + 6\Gamma(W+z) + W_{zz} + 3(W+z)(W_z+1) + (W+z)^3 = 0 \tag{4.19}$$

$$(1+\gamma_3) - z(Y+z) - 6\Gamma(Y+z) - Y_{zz} + 3(Y+z)(Y_z+1) - (Y+z)^3 = 0 \tag{4.20}$$

Derivando as equações acima temos

$$(W+z) + z(W_z+1) + 6\Gamma_z(W+z) + 6\Gamma(W_z+1) + W_{zzz} + 3(W_z+1)^2 +$$

$$3(W+z)W_{zz} + 3(W+z)^2(W_z+1) = 0$$

$$(Y+z) + z(Y_z+1) + 6\Gamma_z(Y+z) + 6\Gamma(Y_z+1) + Y_{zzz} - 3(Y_z+1)^2 -$$

$$3(Y+z)Y_{zz} + 3(Y+z)^2(Y_z+1) = 0$$

O problema deste procedimento está na hora de encontrar uma relação que relacione W com Y, assim como foi feito para a equação PIV, pois há dificuldades na hora de integrar tal relação .

Tentativa 2: Campos Y e W dependentes da equação

Utilizando as relações de recorrência para o AKNS podemos escrever (4.15) e (4.16) como

$$\Big[zR - \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta Q}\Big]_z = \gamma_n R - 2R\partial_z^{-1}\Big[Q\frac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta Q} - R\frac{\delta AK\hat{N}S, H_{n-1}}{\delta R}\Big] \quad (4.21)$$

$$\Big[zQ - \frac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta R}\Big]_z = -\gamma_n Q - 2Q\partial_z^{-1}\Big[R\frac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta R} - Q\frac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta Q}\Big] \quad (4.22)$$

Assim, vamos definir Y e W como

$$W_n = -\Big[z - \frac{1}{R}\frac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta Q}\Big], \qquad Y_n = -\Big[z - \frac{1}{Q}\frac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta R}\Big], \qquad \Gamma = RQ$$

$$f_n = \partial_z^{-1}\Big[Q\frac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta Q} - R\frac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta R}\Big]$$

Utilizando (4.21) e (4.22), podemos construir uma expressão que relacione Y e W. Assim

$$\Big[\Big(zQ - \tfrac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta R}\Big)\Big(zR - \tfrac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta Q}\Big)\Big]_z = \Big(zQ - \tfrac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta R}\Big)_z\Big(zR - \tfrac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta Q}\Big) +$$

$$\Big(zQ - \tfrac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta R}\Big)\Big(zR - \tfrac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta Q}\Big)_z = \gamma_n\Big[Q\tfrac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta Q} - R\tfrac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta R}\Big] -$$

$$2\Big[Q\tfrac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta Q} - R\tfrac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta R}\Big]\partial_z^{-1}\Big[Q\tfrac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta Q} - R\tfrac{\delta \hat{H}_{AKNS,n-1}}{\delta R}\Big]$$

Integrando temos

$$\Gamma W_n Y_n = \gamma_n f_n - [f_n]^2 + \alpha_n \quad (4.23)$$

Note que podemos reescrever as expressões (4.21) e (4.22) como

$$W_{n,z} = -\gamma_n + 2f_n - \Big(\frac{R_z}{R}\Big)W_n \quad (4.24)$$

$$Y_{n,z} = \gamma_n - 2f_n - \Big(\frac{Q_z}{Q}\Big)Y_n \quad (4.25)$$

Note que

$$\partial_z f_n = \Gamma(W_n - Y_n)$$

Utilizando (4.23) e (4.24) ou (4.25) temos

$$\partial_z f_n = \Gamma W_n - \Big(\alpha_n + \frac{\gamma_n^2}{4}\Big)\frac{1}{W_n} + \frac{W_{n,z}^2}{4W_n} + \frac{1}{2}\Big(\frac{R_z}{R}\Big)W_{n,z} + \frac{1}{4}\Big(\frac{R_z}{R}\Big)^2 W_n \qquad (4.26)$$

ou

$$\partial_z f_n = -\Gamma Y_n + \Big(\alpha_n - \frac{\gamma_n^2}{4}\Big)\frac{1}{Y_n} - \frac{Y_{n,z}^2}{4Y_n} - \frac{1}{2}\Big(\frac{Q_z}{Q}\Big)Y_{n,z} - \frac{1}{4}\Big(\frac{Q_z}{Q}\Big)^2 Y_n \qquad (4.27)$$

Derivando novamente (4.24), (4.25) e substituindo as relações acima para $\partial_z f_n$ apropriadamente, temos

$$W_{n,zz} = \frac{W_{n,z}^2}{2W_n} - \Big(2\alpha_n + \frac{\gamma_n^2}{2}\Big)\frac{1}{W_n} + \Big[2\Gamma + \frac{1}{2}\Big(\frac{R_z}{R}\Big)^2 - \frac{d}{dz}\Big(\frac{R_z}{R}\Big)\Big]W_n$$

$$Y_{n,zz} = \frac{Y_{n,z}^2}{2Y_n} - \Big(2\alpha_n - \frac{\gamma_n^2}{2}\Big)\frac{1}{Y_n} + \Big[2\Gamma + \frac{1}{2}\Big(\frac{Q_z}{Q}\Big)^2 - \frac{d}{dz}\Big(\frac{Q_z}{Q}\Big)\Big]Y_n$$

Derivando novamente temos

$$W_{n,zzz} = \frac{W_{n,z}W_{n,zz}}{W_n} - \frac{1}{2}\frac{W_{n,z}^3}{W_n^2} + \Big(2\alpha_n + \frac{\gamma_n^2}{2}\Big)\frac{W_{n,z}}{W_n^2} + \frac{d}{dz}\Big\{\Big[2\Gamma + \frac{1}{2}\Big(\frac{R_z}{R}\Big)^2 - \frac{d}{dz}\Big(\frac{R_z}{R}\Big)\Big]W_n\Big\}$$

$$Y_{n,zzz} = \frac{Y_{n,z}Y_{n,zz}}{Y_n} - \frac{1}{2}\frac{Y_{n,z}^3}{Y_n^2} + \Big(2\alpha_n - \frac{\gamma_n^2}{2}\Big)\frac{Y_{n,z}}{Y_n^2} + \frac{d}{dz}\Big\{\Big[2\Gamma + \frac{1}{2}\Big(\frac{Q_z}{Q}\Big)^2 - \frac{d}{dz}\Big(\frac{Q_z}{Q}\Big)\Big]Y_n\Big\}$$

O problema deste método está nos termos envolvendo R e Q, pois (aparentemente) só conseguimos reescrever estes termos em função de W_n e Y_n para o caso $n = 2$.

Vejamos por exemplo o caso $n = 3$, em que temos

$$W_3 = -\Big[z + 2RQ - \frac{R_{zz}}{R}\Big], \qquad Y_3 = -\Big[z + 2RQ - \frac{Q_{zz}}{Q}\Big]$$

$$f_3 = QR_z - Q_z R$$

e também

$$W_{3,z} = -\gamma_3 + 2QR_z - 2Q_z R - \Big(\frac{R_z}{R}\Big)W_3$$

$$Y_{3,z} = \gamma_3 - 2QR_z + 2Q_z R - \Big(\frac{Q_z}{Q}\Big)Y_3$$

A relação da hierarquia AKNS com a hierarquia PIV é um problema que segue em aberto. Contudo, conseguimos construir a hierarquia PIV a partir do modelo de dois bósons e de dois bósons quadráticos como será detalhado a seguir.

4.1.3 Hierarquia PIV a partir do modelo KP reduzida para dois bósons

A hierarquia PIV foi obtida pela primeira vez na referência [16] utilizando a hierarquia não isospectral de ondas dispesivas na água, mas nesta referência não fica claro a relação entre os membros da hierarquia PIV e as hamiltonianas. Em nosso trabalho utilizando o modelo de dois bósons, chegamos na mesma expressão que foi obtida pela referência [16] a menos de uma redefinição dos campos, mas também conseguimos uma relação explicita com as hamiltonianas do modelo de dois bósons.

Cosidere as equações de movimento reduzidas (3.42) e (3.43), isto é,

$$k + zk' + \sum_{m=2}^{n} T_m \xi_{m+1} \partial_z \Big[(\partial_z + k) \frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}} + 2 \frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k} \Big] = 0 \tag{4.28}$$

$$2\bar{k} + z\bar{k}' + \sum_{m=2}^{n} T_m \xi_{m+1} \Big[(k\partial_z - \partial_z^2) \frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k} + (2\bar{k}\partial_z + \bar{k}') \frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}} \Big] = 0 \tag{4.29}$$

Integrando (4.28) temos

$$zk + \sum_{m=2}^{n} T_m \xi_{m+1} \Big[(\partial_z + k) \frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}} + 2 \frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k} \Big] = \gamma_n \tag{4.30}$$

Vamos também reescrever (4.29) como

$$\bar{k} + \sum_{m=2}^{n} T_m \xi_{m+1} \Big[k\partial_z \frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k} + \bar{k}\partial_z \frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}} \Big] + \partial_z \Big[z\bar{k} + \sum_{m=2}^{n} T_m \xi_{m+1} \Big(-\partial_z \frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k} + \bar{k} \frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}} \Big) \Big] = 0 \tag{4.31}$$

Multiplicando (4.31) pelo termo $f = \Big(z + \sum_{m=2}^{n} T_m \xi_{m+1} \frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}} \Big)$, podemos reescreve-la como

$$\Big(1 + \sum_{m=2}^{n} T_m \xi_{m+1} \frac{\delta \hat{H}_m}{\delta \bar{k}} \Big) \Big(z\bar{k} + \sum_{m=2}^{n} T_m \xi_{m+1} \bar{k} \frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}} \Big) + zk \sum_{m=2}^{n} T_m \xi_{m+1} \partial_z \frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k} +$$

$$\Big(\sum_{m=2}^{n} T_m \xi_{m+1} \frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}} \Big) \Big(\sum_{m=2}^{n} T_m \xi_{m+1} k \partial_z \frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k} \Big) + \Big(z + \sum_{m=2}^{n} T_m \xi_{m+1} \frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}} \Big) \partial_z \Big[z\bar{k} +$$

$$\sum_{m=2}^{n} T_m\xi_{m+1}\Big(-\partial_z\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k}+\bar{k}\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}}\Big)\Big]=0 \tag{4.32}$$

Somando e subtraindo apropriadamente o termo $h=\Big(1+\sum_{m=2}^{n} T_m\xi_{m+1}\partial_z\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}}\Big)\partial_z\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k}$ em (4.32) temos

$$\Big(1+\sum_{m=2}^{n} T_m\xi_{m+1}\partial_z\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}}\Big)\Big[z\bar{k}+\sum_{m=2}^{n} T_m\xi_{m+1}\Big(-\partial_z\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k}+\bar{k}\frac{\delta \hat{H}_{m}}{\delta \bar{k}}\Big)\Big]+$$

$$\Big(z+\sum_{m=2}^{n} T_m\xi_{m+1}\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}}\Big)\partial_z\Big[z\bar{k}+\sum_{m=2}^{n} T_m\xi_{m+1}\Big(-\partial_z\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k}+\bar{k}\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}}\Big)\Big]+$$

$$\Big[1+zk+\sum_{m=2}^{n} T_m\xi_{m+1}(\partial_z+k)\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}}\Big]\Big(\sum_{m=2}^{n} T_m\xi_{m+1}\partial_z\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k}\Big)=0$$

Reescrevendo os dois primeiros termos na forma de uma derivada total e usando a equação (4.30) para simplificar a equação acima, temos

$$\partial_z\Big\{\Big(z+\sum_{m=2}^{n} T_m\xi_{m+1}\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}}\Big)\Big[z\bar{k}+\sum_{m=2}^{n} T_m\xi_{m+1}\Big(-\partial_z\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k}+\bar{k}\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}}\Big)\Big]\Big\}+$$

$$\Big(1+\gamma_n-2\sum_{m=2}^{n} T_m\xi_{m+1}\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k}\Big)\partial_z\Big(\sum_{m=2}^{n} T_m\xi_{m+1}\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k}\Big)=0$$

Note que podemos obter mais um parâmetro integrando a equação acima, ou seja

$$\Big(z+\sum_{m=2}^{n} T_m\xi_{m+1}\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}}\Big)\Big[z\bar{k}+\sum_{m=2}^{n} T_m\xi_{m+1}\Big(-\partial_z\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k}+\bar{k}\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}}\Big)\Big]-$$

$$\frac{1}{4}\Big(1+\gamma_n-2\sum_{m=2}^{n} T_m\xi_{m+1}\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k}\Big)^2=\sigma_n \tag{4.33}$$

Assim, as equações (4.33) e (4.30) geram uma hierarquia de sistemas de equações acopladas com dois parâmetros que a seguir veremos que está associada a equação PIV. Em suma nossa hierarquia será dada por

$$zk+\sum_{m=2}^{n} T_m\xi_{m+1}\Big[(\partial_z+k)\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta \bar{k}}+2\frac{\delta \hat{H}_{J,m}}{\delta k}\Big]=\gamma_n$$

$$z\bar{k}+\sum_{m=2}^{n}T_m\xi_{m+1}\Big[\bar{k}\frac{\delta\hat{H}_{J,m}}{\delta\bar{k}}-\partial_z\frac{\delta\hat{H}_{J,m}}{\delta k}\Big]=\frac{\frac{1}{4}\Big[1+\gamma_n-2\sum_{m=2}^{n}T_m\xi_{m+1}\frac{\delta\hat{H}_{J,m}}{\delta k}\Big]^2+\sigma_n}{\Big(z+\sum_{m=2}^{n}T_m\xi_{m+1}\frac{\delta\hat{H}_{J,m}}{\delta\bar{k}}\Big)}$$

Sendo que acima reescrevemos a equação (4.33) de forma apropriada. Note que as derivadas mais altas das equações acima sairão dos termos $\partial_z\frac{\delta\hat{H}_{J,n}}{\delta k}$ e $\partial_z\frac{\delta\hat{H}_{J,n}}{\delta\bar{k}}$, tal que para um dado n teremos um sistema de equações diferenciais ordinárias de ordem $n-1$.

Como exemplos explícitos para um único tempo transformado, temos:

-para $n=2$

$$k'=\alpha_{J3}^{-1}[\gamma_2-zk]-k^2-2\bar{k} \tag{4.34}$$

$$\bar{k}'=-\frac{[\frac{1}{2}(1+\gamma_2)\alpha_{J3}^{-1}-\bar{k}]^2+\sigma_2\alpha_{J3}^{-2}}{[z\alpha_{J3}^{-1}+k]}+\alpha_{J3}^{-1}z\bar{k}+k\bar{k} \tag{4.35}$$

-para $n=3$

$$k''=\alpha_{J4}^{-1}[\gamma_3-zk]-[3kk'+6k\bar{k}]$$

$$\bar{k}''=\frac{[\frac{1}{2}(1+\gamma_3)\alpha_{J4}^{-1}-2k\bar{k}+\bar{k}']^2+\sigma_3\alpha_{J4}^{-2}}{[z\alpha_{J4}^{-1}+2\bar{k}+k^2+k']}-\alpha_{J4}^{-1}z\bar{k}+[k'\bar{k}+2k\bar{k}'-2\bar{k}^2-k^2\bar{k}]$$

Vamos mostrar agora que o sistema de equações (4.34) e (4.35) é compativel com a equação PIV. Utilizando (4.34) para eliminar o campo $\bar{k}$ do lado direito de (4.35) e multiplicando por 2, temos

$$2\bar{k}'=-\frac{[(\alpha_{J3}^{-1}+k')+(\alpha_{J3}^{-1}z+k)k]^2+4\sigma_2\alpha_{J3}^{-2}}{2(\alpha_{J3}^{-1}z+k)}-(\alpha_{J3}^{-1}z+k)^2k+(\alpha_{J3}^{-1}z+k)(\alpha_{J3}^{-1}\gamma_2-k') \tag{4.36}$$

Derivando (4.34) temos

$$k''=-(\alpha_{J3}^{-1}z+k)k'-(\alpha_{J3}^{-1}+k')k-2\bar{k}' \tag{4.37}$$

Substituindo (4.36) em (4.37) temos

$$k''=\frac{[(\alpha_{J3}^{-1}+k')+(\alpha_{J3}^{-1}z+k)k]^2+4\sigma_2\alpha_{J3}^{-2}}{2(\alpha_{J3}^{-1}z+k)}+(\alpha_{J3}^{-1}z+k)^2k-(\alpha_{J3}^{-1}z+k)\alpha_{J3}^{-1}\gamma_2-(\alpha_{J3}^{-1}+k')k$$

Fazendo a mudança de campos

$$y = \alpha_{J3}^{-1} z + k$$

temos

$$y'' = \frac{[y' + y(y - \alpha_{J3}^{-1} z)]^2 + 4\sigma_2 \alpha_{J3}^{-2}}{2y} + y^2(y - \alpha_{J3}^{-1} z) - y\alpha_{J3}^{-1}\gamma_2 - y'(y - \alpha_{J3}^{-1} z)$$

Através de algumas manipulações simples da expressão acima temos

$$y'' = \frac{(y')^2}{2y} + \frac{3}{2}y^3 - 2\alpha_{J3}^{-1} z y^2 + 2\Big(\frac{1}{4}\alpha_{J3}^{-2} z^2 - \frac{1}{2}\alpha_{J3}^{-1}\gamma_2\Big)y + \frac{2\sigma_2\alpha_{J3}^{-2}}{y}$$

Fazendo $\alpha_{J3}^{-1} = -2$ temos exatamente a equação PIV com os seguintes parâmetros

$$y'' = \frac{(y')^2}{2y} + \frac{3}{2}y^3 + 4zy^2 + 2(z^2 - \gamma_2)y + \frac{8\sigma_2}{y}$$

4.1.4 Hierarquia PIV a partir do modelo KP reduzido de dois bósons quadráticos

Diferentemente das bases de campos do AKNS e do modelo de 2-bósons, para os campos do modelo de dois bósons quadráticos é bastante simples obtermos uma hierarquia tipo Painlevé. Integrando (3.46) e (3.47) temos

$$zw + \frac{\delta H_{wn}}{\delta \bar{w}} = \gamma_n$$

$$z\bar{w} + \frac{\delta H_{wn}}{\delta w} = \sigma_n$$

ou para o caso ainda mais geral de transformarmos todos os tempos temos

$$zw + \sum_{m=2}^{n} T_m \frac{\delta \hat{H}_{j,m}}{\delta \bar{w}} = \gamma_n$$

$$z\bar{w} + \sum_{m=2}^{n} T_m \frac{\delta \hat{H}_{j,m}}{\delta w} = \sigma_n$$

Como exemplos explicitos para um único tempo transformado, temos:

- para $n = 2$

$$w' = \alpha_{j2}^{-1}(zw - \gamma_2) + w^2 + 2w\bar{w} \tag{4.38}$$

$$\bar{w}' = \alpha_{j2}^{-1}(\sigma_2 - z\bar{w}) - \bar{w}^2 - 2w\bar{w} \tag{4.39}$$

- para $n = 3$

$$w' = \alpha_{j3}^{-1}(\gamma_3 - zw) + 3ww' + 3w'\bar{w} - w^3 - 6w^2\bar{w} - 3w\bar{w}^2$$

$$\bar{w}' = \alpha_{j3}^{-1}(\sigma_3 - z\bar{w}) - 3w\bar{w}' - 3\bar{w}\bar{w}' - 3w^2\bar{w} - 6w\bar{w}^2 - \bar{w}^3$$

Verificaremos agora que a primeira equação de movimento desta hierarquia é compativel com PIV. Para isso derivamos (4.39) e temos

$$\bar{w}'' = -\alpha_{j2}^{-1}(\bar{w} + z\bar{w}') - 2\bar{w}\bar{w}' - 2w'\bar{w} - 2w\bar{w}$$

Substituindo (4.38) e (4.39) na equação acima temos

$$\bar{w}'' = \alpha_{j2}^{-2}(z^2\bar{w} - z\sigma_2) + \alpha_{j2}^{-1}(-\bar{w} + 3z\bar{w}^2 + 2zw\bar{w} - 2\sigma_2\bar{w} - 2\sigma_2 w + 2\gamma_2\bar{w}) + (2\bar{w}^3 + 2w\bar{w}^2 + 2w^2\bar{w}) \tag{4.40}$$

Note que de (4.39) temos

$$(\bar{w}')^2 = \alpha_{j2}^{-2}(\sigma_2^2 - 2\sigma_2 z\bar{w} + z^2\bar{w}^2) + \bar{w}^4 + 4w^2\bar{w}^2 + \alpha_{j2}^{-1}(-2\sigma_2\bar{w}^2 - 4\sigma_2 w\bar{w} + 2z\bar{w}^3 + 4zw\bar{w}^2) + 2w\bar{w}^3$$

$$\Rightarrow \quad 2w^2\bar{w} = \frac{(\bar{w}')^2}{2\bar{w}} + \alpha_{j2}^{-2}\Big(-\frac{\sigma_2^2}{2\bar{w}} + \sigma_2 z - \frac{z^2\bar{w}}{2}\Big) - \frac{\bar{w}^3}{2} + \alpha_{j2}^{-1}(\sigma_2\bar{w} + 2w\sigma_2 - z\bar{w}^2 - 2zw\bar{w}) - 2w\bar{w}^2$$

Substituindo esta última expressão em (4.40) temos

$$\bar{w}'' = \frac{(\bar{w}')^2}{2\bar{w}} + \frac{3}{2}\bar{w}^3 + 2\alpha_{j2}^{-1}z\bar{w}^2 + 2\Big[\Big(\frac{\alpha_{j2}^{-2}}{4}\Big)z^2 + \alpha_{j2}^{-1}\Big(\gamma_2 - \frac{\sigma_2}{2} - \frac{1}{2}\Big)\Big]\bar{w} - \frac{\alpha_{j2}^{-2}\sigma_2^2}{2\bar{w}}$$

Fazendo $\alpha_{j2}^{-1} = 2$, encontramos a equação PIV com os seguintes parâmetros

$$\bar{w}'' = \frac{(\bar{w}')^2}{2\bar{w}} + \frac{3}{2}\bar{w}^3 + 4z\bar{w}^2 + 2(z^2 + 2\gamma_2 - \sigma_2 - 1)\bar{w} - \frac{2\sigma_2^2}{\bar{w}}$$

E um processo similar para (4.38) nos dá

$$w'' = \frac{(w')^2}{2w} + \frac{3}{2}w^3 + 4zw^2 + 2(z^2 + 2\sigma_2 - \gamma_2 + 1)w - \frac{2\sigma_2^2}{w}$$

Note que há duas possibilidades de obter a equação PIV a partir do modelo de dois bósons quadráticos, assim como no modelo AKNS (seção 4.1.1), enquanto que no modelo de dois bósons apresentamos apenas uma relação com a equação PIV. Isto ocorre porque as equações de movimento do modelo de dois bósons são bastantes assimétricas e dificulta o processo. Em suma, obtivemos a hierarquia PIV de forma mais natural e simétrica a partir do modelo de dois bósons quadráticos do que o modelo utilizado em [16].

4.2 Primeiras Hamiltonianas das Hierarquias PII e PIV

Um algoritmo para obter todas as hamiltonianas da hierarquia PIV ainda é objeto de estudo, embora já haja trabalhos promissores neste sentido como [13]. Na literatura, as hamiltonianas das equações de Painlevé são usualmente encontradas diretamente a partir de um sistema de equações diferenciais, como por exemplo as referências [5] e [17]. Nesta seção apresentaremos uma abordagem que é mais familiar aos físicos, isto é, construiremos as hamiltonianas a partir das lagrangianas correspondente.

4.2.1 Hamiltoniana $H_{\alpha}^{(PII:1)}$

Como a abordagem utilizada nesta seção difere da utilizada na literatura especializada nas equações de Painlevé, obteremos as primeiras hamiltonianas de hierarquia PII antes de obter a hamiltoniana da equação PIV.

Lembre-se que a equação PII é

$$u_{zz} = zu + 2u^3 + \alpha$$

Podemos verificar que através da equação de Euler-Lagrange, ou seja

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{d}{dz}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'} = 0,$$

temos a seguinte lagrangiana correspondente a equação PII:

$$\mathcal{L}_{\alpha}^{(PII:1)} = \frac{u'^2}{2} + \frac{u^4}{2} + \frac{zu^2}{2} + \alpha u$$

Agora, afim de obtermos a hamiltoniana, definimos as seguintes coordenadas canônicas

$$Q = u, \qquad P = \frac{\partial \mathcal{L}_\alpha^{(PII:1)}}{\partial u'} = u'$$

Substituindo na transformação de Legendre,

$$H_\alpha^{(PII:1)}(Q,P,z) = u'P - \mathcal{L}_\alpha^{(PII:1)}(Q,P,z),$$

temos a primeira hamiltoniana da hierarquia PII

$$H_\alpha^{(PII:1)}(Q,P,z) = \frac{P^2}{2} - \frac{Q^4}{2} - \frac{zQ^2}{2} - \alpha Q \tag{4.41}$$

Note que este método requer um pouco de perspicácia na hora de construir a lagrangiana, mas ainda sim é um caminho alternativo e mais simples que o método utilizado em [5].

4.2.2 Relação com a hamiltoniana de Masatoshi Noumi

Vamos verificar agora que a hamiltoniana que obtivemos acima é equivalente a hamiltoniana obtida por M. Noumi em [5], ou seja,

$$H_N(q,p,t) = \frac{p^2}{2} - (q^2 + \frac{t}{2})p - bq \tag{4.42}$$

Fazendo uma transformação canônica com a seguinte função geratriz

$$F = F_3(p,Q,t) + qp$$

podemos relacionar as hamiltonianas (4.41) e (4.42). Para isso, vamos supor a seguinte forma para a função F_3:

$$F_3 = f(Q,t)p + g(Q,t)$$

Conforme detalhado no apêndice C.2, as variáveis novas e antigas se relacionam da seguinte forma

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p} = -f(Q,t)$$

$$P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q} = -\Big(\frac{\partial f}{\partial Q}\Big)p - \Big(\frac{\partial g}{\partial Q}\Big) \qquad \Rightarrow p = -\Big(\frac{\partial f}{\partial Q}\Big)^{-1}\Big[\Big(\frac{\partial g}{\partial Q}\Big) + P\Big]$$

Supondo a seguinte forma para $f(Q,t)$ e $g(Q,t)$:

$$f(Q,t) = -Q, \qquad g(Q,t) = \frac{Q^3}{3} + \frac{tQ}{2} + \frac{t^3}{24}$$

A função geratriz fica

$$F_3(p,Q,t) = -pQ + \frac{Q^3}{3} + \frac{tQ}{2} + \frac{t^3}{24}$$

Enquanto que a transformação entre as variáveis novas e antigas fica dada por

$$q = Q, \qquad p = \Big(Q^2 + \frac{t}{2} + P\Big)$$

Reescrevendo a hamiltoniana (4.42) em termos das novas variáveis temos

$$H(Q,P,t) = \frac{P^2}{2} - \frac{Q^4}{2} - \frac{tQ^2}{2} - bQ - \frac{t^2}{8}$$

Assim, a nova hamiltoniana será dada por

$$K(Q,P,t) = H(Q,P,t) + \frac{\partial F_3}{\partial t}$$

ou explicitamente,

$$K(Q,P,t) = \frac{P^2}{2} - \frac{Q^4}{2} - \frac{tQ^2}{2} - (b - \frac{1}{2})Q$$

Desta forma, vemos que basta ajustar o parâmetro da hamiltoniana acima para termos a hamiltoniana (4.41). De forma exata, temos a relação

$$K(Q,P,t) = H^{(PII:1)}_{(b-\frac{1}{2})}(Q,P,z)$$

4.2.3 Hamiltoniana $H^{(PII:2)}_{\alpha}$

Para complementar, vamos obter também a segunda hamiltoniana da hierarquia PII. Conforme o desenvolvimento feito no apêndice B, a segunda equação da hierarquia PII é

$$u^{(4)} = 10u(u')^2 + 10u^2u'' - 6u^5 + zu + \alpha$$

Note que esta é uma equação diferencial de quarta ordem, por isso precisamos trabalhar o formalismo lagrangiano e hamiltoniano em ordens superiores. Como nosso problema possui apenas uma variável, a equação de Euler-Lagrange generalizada será

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} - \frac{d}{dz}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u'} + \frac{d^2}{dz^2}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u''} + \sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{d^n}{dz^n}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u^{(n)}} = 0 \tag{4.43}$$

Observe que para obtermos a segunda equação da hierarquia PII através de (4.43) precisamos de uma lagrangiana com a derivada mais alta sendo de segunda ordem. Desta forma, todos os termos que escrevemos dentro da somatória na expressão acima se cancelará. Com um pouco de perspicácia, encontramos a seguinte lagrangiana correspondente a segunda equação da hierarquia PII:

$$\mathcal{L}_{\alpha}^{(PII:2)} = \frac{u''^2}{2} + 5u^2u'^2 + u^6 - \frac{zu^2}{2} - \alpha u$$

Lembre-se que as hamiltonianas são definidas sobre o espaço de fase e por isso não podem conter derivadas do parâmetro de evolução (neste caso z). Portanto, precisamos definir as variáveis canônicas adequadamente para construir hamiltonianas correspondentes a equações diferenciais de ordens superiores, conforme detalhamos no apêndice C.1. Para este caso, temos

$$Q_{(1)} = u, \qquad Q_{(2)} = u'$$

$$P^{(1)} \equiv \frac{\delta\mathcal{L}_{\alpha}^{(PII:2)}}{\delta u'} = \frac{\partial\mathcal{L}_{\alpha}^{(PII:2)}}{\partial u'} - \frac{d}{dz}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}_{\alpha}^{(PII:2)}}{\partial u''}\Big) = 10u^2u' - u'''$$

$$P^{(2)} \equiv \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u''} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u''} = u''$$

Usando estas coordenadas canônicas, podemos construir a hamiltoniana através da seguinte transformação de Legendre:

$$H_{\alpha}^{(PII:2)} = P^{(1)}Q_{(2)} + P^{(2)}V'' - \mathcal{L}_{\alpha}^{(PII:2)}(Q_{(1)}, Q_{(2)}, P^{(1)}, P^{(2)}, z)$$

Assim, para a segunda equação da hierarquia PII, obtemos a hamiltoniana

$$H_{\alpha}^{(PII:2)} = P^{(1)}Q_{(2)} + \frac{(P^{(2)})^2}{2} - 5Q_{(1)}^2Q_{(2)}^2 - Q_{(1)}^6 + \frac{zQ_{(1)}^2}{2} + \alpha Q_{(1)}$$

4.2.4 Hamiltoniana $H_{\alpha,\beta}^{(PIV:1)}$

A hamiltoniana da equação PIV foi inicialmente obtida por K. Okamoto em [17]. Nesta seção , daremos continuidade à abordagem utilizada nas seções anteriores e obteremos a hamiltoniana da equação PIV, ou seja,

$$u_{zz} = \frac{1}{2u}u_z^2 + \frac{3}{2}u^3 + 4zu^2 + 2(z^2-\alpha)u + \frac{\beta}{u}$$

Através da equação de Euler-Lagrange, vemos que a equação PIV corresponde a seguinte lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{(PIV:1)} = \frac{(u')^2}{u} + u^3 + 4zu^2 + 4(z^2-\alpha)u - \frac{2\beta}{y} \tag{4.44}$$

As coordenadas canônicas deste sistema será

$$Q = u, \qquad P = \frac{\partial \mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{(PIV:1)}}{\partial u'} = \frac{2u'}{u}$$

Assim, fazendo

$$H_{\alpha,\beta}^{(PIV:1)}(Q,P,z) = u'P - \mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{(PIV:1)}(Q,P,z),$$

obtemos a primeira hamiltoniana da hierarquia PIV, ou seja,

$$H_{\alpha,\beta}^{(PIV:1)}(Q,P,z) = \frac{QP^2}{4} - Q^3 - 4zQ^2 - 4(z^2-\alpha)Q + \frac{2\beta}{Q} \tag{4.45}$$

Um detalhe característico da hamiltoniana acima é a presença de dois parâmetros, como era de se esperar por corresponder a equação PIV. Contudo, as hamiltonianas presentes na literatura são escritas em termos de mais parâmetros afim de explicitar a simetria das equações de movimento. A seguir, veremos como tais hamiltonianas se relacionam com (4.45).

4.2.5 Relação com a hamiltoniana de Okamoto

Em [17], K. Okamoto obteve uma hamiltoniana da equação PIV que posteriormente foi generalizada em [14] através da introdução de um parâmetro ϵ. A hamiltoniana na referência [14] é

$$H_{Ok} = 2qp^2 - \epsilon[q^2 + 2xq + 2(v_j - v_i)]p + (v_k - v_i)q - 2v_i x, \qquad \epsilon = \pm 1 \tag{4.46}$$

Para relacionarmos com a hamiltoniana $H^{(PIV:1)}_{\alpha,\beta}$, faremos inicialmente uma transformação canônica com a seguinte função geratriz

$$F = F_3(p,Q,x) + qp$$

Como pode ser visto no apêndice C.2, as variáveis novas e antigas se relacionaram por

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}(p,Q,x), \qquad P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}(p,Q,x)$$

Desta forma, supondo a seguinte forma para a função geratriz

$$F_3(p,Q,x) = -pQ + \epsilon\Big[\frac{Q^2}{8} + \frac{xQ}{2} + \frac{(v_j - v_i)}{2}\ln Q\Big] + (v_i + v_j)\frac{x^2}{2}$$

Teremos a seguinte mudança de coordenadas

$$q = Q, \qquad p = P + \epsilon\Big[\frac{Q}{4} + \frac{x}{2} + \frac{(v_j - v_i)}{2Q}\Big]$$

A nova hamiltoniana é determinada como

$$K = H_{Ok}(Q,P,x) + \frac{\partial F_3}{\partial x}$$

Assim temos

$$K = 2QP^2 - \frac{Q^3}{8} - \frac{z^2}{2}Q - \frac{(v_j - v_i)^2}{2Q} - \frac{z}{2}Q^2 + \Big[v_k + \frac{1}{2}(\epsilon - v_i - v_j)\Big]Q$$

Para ajustar os coeficientes, basta fazer uma transformação de escala canônica, isto é

$$\tilde{K}(Q,P,z) = \frac{\mu\nu}{\sigma}K(\frac{Q}{\mu}, \frac{P}{\nu}, \frac{z}{\sigma})$$

Desta forma, para $\sigma = \mu = 1$ e $\nu = 8$, temos

$$\tilde{K} = \frac{QP^2}{4} - Q^3 - 4zQ^2 - 4[z^2 - (2v_k - v_i - v_j + \epsilon)]Q - \frac{4(v_j - v_i)^2}{Q}$$

Portanto, vemos que a menos de uma redefinição dos parâmetros, temos que (4.45) corresponde a (4.46). Isto é

$$\tilde{K} = H^{(PIV:1)}_{[2v_k - v_i - v_j + \epsilon],[-2(v_j - v_i)^2]}$$

Capítulo 5

Conclusão

Este texto tratou da construção de hierarquias de equações diferenciais ordinárias compatíveis com a equação PIV, de modo a dar continuidade ao trabalho em [16], que construiu pela primeira vez uma hierarquia compatível com PIV, e também aos trabalhos em [2], [3] e [4] realizados para a hierarquia PII.

Para isso, explicamos sucintamente o que são as equações de Painlevé e os modelos integráveis. Detalhamos também como obter o problema linear de Jimbo-Miwa, que é um análogo da representação matricial do par de Lax para uma dimensão. Como aplicação da base teórica exposta no capitulo 2, trabalhamos três modelos com dois campos bosônicos (isto é, o AKNS, de dois bósons e o de dois bósons quadráticos) também estudados detalhadamente em [11].

No capítulo 3, fizemos uma análise dos três modelos propostos e construimos a representação matricial do par de Lax, para um tempo qualquer. Exploramos também a redução por auto-similaridade de modo detalhado e vimos, de acordo com [4], que podemos generalizar esta redução transformando vários tempos. Por fim, usando a representação matricial do par de Lax, obtemos as matrizes do problema linear de Jimbo-Miwa.

No capítulo 4, tentamos construir uma hierarquia PIV a partir da hierarquia AKNS, mas esta abordagem mostrou-se muito difícil neste aspecto. Baseando-se na hierarquia de dois-bósons, construimos a mesma hierarquia PIV obtida por Pilar R. Gordoa, Nalini Joshi and Andrew Pickering em [16]; contudo, pudemos explicitar a dependência das equações da hierarquia PIV com as hamiltonianas do modelo integrável em questão. Finalmente, para o modelo de dois bósons quadráticos, que é uma transformação de Miura generalizada do modelo de dois bósons (como mostrado em [11] e [9]), obtemos uma nova hierarquia compatível com PIV, esta hierarquia surge de forma natural. Para concluir, trabalhamos o método de obter as hamiltonianas a partir das lagrangianas para as duas primeiras equações da hierarquia PII e, em seguida, obtivemos a primeira hamiltoniana da hierarquia PIV e relacionamos com a obtida em [17].

Conforme pudemos ver no apêndice B, a hierarquia PII surge da hierarquia mKdV, que por sua vez é uma transformação de Miura da hierarquia KdV. Assim, concluimos que campos do tipo Miura (isto é, são transformações de Miura de algum modelo), como o mKdV e o dois bósons quadráticos, possuem propriedades melhores para gerar hierarquias do tipo Painlevé.

Apêndice A

Vínculos

O foco deste trabalho foi em cima de propriedades de modelos com dois campos bosônicos, mas seria interessante mostrarmos como podemos introduzir vínculos ao sistema afim de obtermos, os bastantes conhecidos modelos de apenas um campo, KdV e mKdV.

A.1 Método de Dirac para sistemas hamiltonianos com vínculos

Vamos desenvolver nesta seção o formalismo que nos permite manejar os vínculos em variáveis discretas e em seguida generalizar para o caso contínuo. A convenção de soma para índices repetidos será aplicada ao longo do apêndice.

Para um dado sistema hamiltoniano, a ação é definida como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} [p_i \dot{q}_i - H(q,p)]dt$$

Sabemos que a trajetória sobre o espaço de fase é tal que extremiza a ação do sistema, ou seja,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \Big[\Big(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \Big) \delta q_i + \Big(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \Big) \delta p_i \Big] = 0 \tag{A.1}$$

Agora, vamos introduzir N vínculos ao sistema, tal que

$$\phi_a(q,p) = 0, \qquad\qquad a = 1, ..., N \tag{A.2}$$

A variação funcional do vínculo com relação a uma variação na trajetória é

$$\delta\phi_a = \frac{\partial\phi_a}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial\phi_a}{\partial p_i}\delta p_i \approx 0 \tag{A.3}$$

Vamos multiplicar (A.3) pelo multiplicados de Lagrange $-\lambda_a(q,p)$, integrar sobre a tragetória com extremos fixos em t_1 e t_2 e finalmente somar com (A.1), ou seja, ficamos com

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big[\Big(-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda_a\frac{\partial\phi_a}{\partial q_i}\Big)\delta q_i + \Big(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} - \lambda_a\frac{\partial\phi_a}{\partial p_i}\Big)\delta p_i\Big] \approx 0$$

Para que a expressão acima seja válida independentemente de δq e δp, devemos ter

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda_a\frac{\partial\phi_a}{\partial q_i} \tag{A.4}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda_a\frac{\partial\phi_a}{\partial p_i} \tag{A.5}$$

Note que a evolução temporal de uma dada quantidade dinâmica é

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i}\dot{p}_i + \frac{\partial A}{\partial t}$$

Usando (A.4) e (A.5), podemos reescrever a expressão acima como

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial q_i}\Big(\frac{\partial H}{\partial p_i} + \lambda_a\frac{\partial\phi_a}{\partial p_i}\Big) - \frac{\partial A}{\partial p_i}\Big(\frac{\partial H}{\partial q_i} + \lambda_a\frac{\partial\phi_a}{\partial q_i}\Big) + \frac{\partial A}{\partial t}$$

ou também

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \{A, \phi_a\}\lambda_a + \frac{\partial A}{\partial t} \tag{A.6}$$

Note que a evolução temporal dos vínculos é $\dot{\phi}_b = 0$, de acordo com a equação (A.2). Assim, de (A.6) temos

$$\dot{\phi}_b = \{\phi_b, H\} + \{\phi_b, \phi_a\}\lambda_a = 0$$

Definindo a matrix anti-simétrica

$$C_{ab} \equiv \{\phi_a, \phi_b\}$$

temos

$$\{\phi_b, H\} + C_{ba}\lambda_a = 0$$

Note que da expressão acima podemos escrever λ_a como

$$\lambda_a = -C_{ab}^{-1}\{\phi_b, H\} \tag{A.7}$$

Substituindo (A.7) em (A.6) temos

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} - \{A, \phi_a\}C_{ab}^{-1}\{\phi_b, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

A partir da expressão acima, podemos definir o parênteses de Dirac como

$$\{A, H\}^D \equiv \{A, H\} - \{A, \phi_a\}C_{ab}^{-1}\{\phi_b, H\} \tag{A.8}$$

Para campos bosônicos, os parênteses de Dirac podem ser generalizados como

$$\{A(x), B(y)\}^D = \{A(x), B(y)\} - \int\int dzdz'\Big[\{A(x), \phi_a(z)\}C_{ab}^{-1}(z, z')\{\phi_b(z'), B(y)\}\Big]_\phi, \tag{A.9}$$

sendo

$$C_{ab}^{-1}(z, z') = \{\phi_a(z), \phi_b(z')\}^{-1}$$

Este método nos fornece um importante resultado que nos permite aplicar os vínculos formalmente as evoluções temporais de grandezas dinâmicas, tal resultado é

$$\{A(x), \phi_c(y)\}^D = \{A(x), \phi_c(y)\} - \int\int dzdz'\Big[\{A(x), \phi_a(z)\}C_{ab}^{-1}(z, z')\{\phi_b(z'), \phi_c(y)\}\Big]_\phi =$$

$$\{A(x), \phi_c(y)\} - \int dz\{A(x), \phi_a(z)\}\delta_{ac}\delta(z - y) = \{A(x), \phi_c(y)\} - \{A(x), \phi_c(y)\} = 0$$

Vamos explicar um pouco melhor como deve ser calculado o parêntese de Dirac antes de aplicarmos o método. O fator $C_{ab}^{-1}(z, z')$ deve ser calculado tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz' C_{ab}^{-1}(x, z')\{\phi_b(z'), \phi_c(y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} dz'\{\phi_c(x), \phi_b(z')\}C_{ba}^{-1}(z', y) = \delta_{ac}\delta(x - y) \tag{A.10}$$

Em seguida, devemos substituir $C_{ab}^{-1}(z,z')$ em (A.9), e somente depois, eliminar os campos dependentes através dos vínculos. Nas seções a seguir, aplicaremos este método em casos especificos.

A.2 Redução do modelo AKNS ao modelo mKdV

Aplicaremos agora o método de Dirac para reduzir o modelo AKNS ao modelo mKdV utilizando o parênteses de Poisson 2. Lembrando que

$$\{r(x), r(y)\}_2 = -2r(x)r(y)\varepsilon(x-y), \qquad \{q(x), q(y)\}_2 = -2q(x)q(y)\varepsilon(x-y),$$

$$\{q(x), r(y)\}_2 = -\partial_x\delta(x-y) + 2q(x)r(y)\varepsilon(x-y)$$

$$\{r(x), q(y)\}_2 = -\partial_x\delta(x-y) + 2r(x)q(y)\varepsilon(x-y)$$

Neste caso o vínculo será

$$\phi(x) = r(x) - q(x)$$

Desta forma, temos

$$\{\phi(z), \phi(z')\}_2 = 2\delta'(x-y) - 2[r(z)+q(z)][r(z')+q(z')]\epsilon(x-y)$$

Note que encontrar o fator $C^{-1}(z,z')$ para este vínculo seria algo bastante complicado; contudo, podemos contornar o problema se observarmos que

$$\{\phi(z'), r(y)\}_2 = \delta'(x-y) - 2[r(z')+q(z')]r(y)\epsilon(z'-y)$$

$$\{\phi(z'), q(y)\}_2 = -\delta'(x-y) + 2[r(z')+q(z')]q(y)\epsilon(z'-y)$$

Portanto, quando usamos o vínculo para eliminar um dos campos dependêntes, ficamos com

$$\{\phi(z), \phi(z')\}_2|_\phi = \frac{1}{2}\{\phi(z), r(z')\}_2|_\phi = -\frac{1}{2}\{\phi(z), q(z')\}_2|_\phi$$

Vejamos um caso explicito:

$$\{r(x), q(y)\}_2^D = \{r(x), q(y)\} - \int\int dzdz' \Big[\{r(x), \phi(z)\}_2 [\{\phi(z), \phi(z')\}_2]^{-1} \{\phi(z'), q(y)\}_2\Big]_\phi =$$

$$= \{r(x), q(y)\} + \tfrac{1}{2}\int dz \Big[\{r(x), \phi(z)\}_2 \delta(z-y)\Big]_\phi = \tfrac{1}{2}\Big[\{r(x), r(y)\}_2 + \{r(x), q(y)\}_2\Big]_\phi =$$

$$-\tfrac{1}{2}\delta'(x-y)$$

Analogamente, os demais parênteses de Dirac ficam

$$\{r(x), r(y)\}_2^D = \{q(x), q(y)\}_2^D = -\frac{1}{2}\delta'(x-y)$$

Desta forma, as equações de movimento ficam

$$\frac{\partial r}{\partial t_n} = \{r(x), H_{AKNS,n-1}\}_2^D = -\frac{1}{2} D \Big[\frac{\delta H_{AKNS,n-1}}{\delta r(x)} + \frac{\delta H_{AKNS,n-1}}{\delta q(x)}\Big]_\phi$$

Explicitamente, as equações de movimento reduzidas são dadas na tabela A.1

Tabela A.1: Equações de movimento com vínculos

$n=1$	$\frac{\delta H_{AKNS,0}}{\delta r(x)}\Big\vert_\phi = \frac{\delta H_{AKNS,0}}{\delta q(x)}\Big\vert_\phi = r$	$r_{t_1} = -r_x$
$n=2$	$\frac{\delta H_{AKNS,1}}{\delta r(x)}\Big\vert_\phi = -\frac{\delta H_{AKNS,1}}{\delta q(x)}\Big\vert_\phi$	$r_{t_2} = 0$
$n=3$	$\frac{\delta H_{AKNS,2}}{\delta r(x)}\Big\vert_\phi = \frac{\delta H_{AKNS,2}}{\delta q(x)}\Big\vert_\phi = -\alpha_2[2r^3 - r_{xx}]$	$r_{t_3} = \alpha_2[6r^2 r_x - r_{xxx}]$

Note que as equações de movimento para os tempos pares serão nulas e a equação de movimento para t_3 é exatamente a equação mKdV.

A.3 Redução do modelo de dois bósons ao modelo KdV

Nesta seção , usaremos o segundo parênteses de Poisson do modelo de dois bósons para relacionarmos com o modelo KdV. Para isso usaremos o vínculo

$$\phi(x) = J(x) = 0$$

Lembrando que

$$\{\bar{J}(x), J(y)\}_2 = J(x)\delta'(x-y) - \delta''(x-y)$$

$$\{\bar{J}(x), \bar{J}(y)\}_2 = 2\bar{J}(x)\delta'(x-y) + \bar{J}'(x)\delta(x-y)$$

$$\{J(x), J(y)\}_2 = 2\delta'(x-y)$$

Podemos usar a expressão (A.10) para verificar que temos

$$C^{-1}(x,z') = \frac{1}{2}\epsilon(x-z'), \qquad \partial_x\epsilon(x-z') = -\partial_{z'}\epsilon(x-z') = \delta(x-z')$$

É interessante observar que não podemos calcular o parênteses de Dirac 1 porque $\{J(x), J(y)\}_1 = 0$, logo $C^{-1}(x,y)$ não estaria bem definido. Assim, usando o método da seção anterior temos os seguintes parênteses de Dirac 2 com vínculo:

$$\{\bar{J}(x), J(y)\}_2^D = 0, \qquad \{J(x), J(y)\}_2^D = 0$$

$$\{\bar{J}(x), \bar{J}(y)\}_2^D = 2\bar{J}(x)\delta'(x-y) + \bar{J}'(x)\delta(x-y) + \frac{1}{2}\delta'''(x-y)$$

Veja que, usando os parênteses acima, obtemos a hierarquia KdV de forma natural através da expressão

$$\frac{\partial\bar{J}}{\partial t_n} = \{\bar{J}(x), H_{J,n}\}_2^D = \left[2\bar{J}(x)D + \bar{J}'(x) + \frac{1}{2}D^3\right]\frac{\delta H_{J,n}}{\delta\bar{J}(x)}\Big|_{\phi=J}$$

Explicitamente, as primeiras equações de movimento com vínculo são são dadas na tabela A.2. Observe que a equação para $n = 1$ é exatamente a equação KdV da tabela B.1 se fizermos $\alpha_{J3} = -1$.

Novamente, as equações de movimento para tempos pares serão nulas.

Tabela A.2: Equações de movimento com vínculos

$n=1$	$\frac{\delta H_{J,1}}{\delta \bar{J}(x)}\Big\vert_{\phi=J} = 1$	$\bar{J}_{t_1} = \alpha_{J1}\bar{J}_x$
$n=2$	$\frac{\delta H_{J,2}}{\delta \bar{J}(x)}\Big\vert_{\phi=J} = 0$	$\bar{J}_{t_2} = 0$
$n=3$	$\frac{\delta H_{J,3}}{\delta \bar{J}(x)}\Big\vert_{\phi=J} = 2\alpha_{J3}\bar{J}$	$\bar{J}_{t_3} = \alpha_{J3}[6\bar{J}\bar{J}_x + \bar{J}_{xxx}]$

A.4 Redução do modelo de dois bósons quadráticos ao modelo mKdV

Para completar nossa análise da relação entre modelos de dois campos e modelos de apenas um campo, vamos impor sobre o modelo de dois bósons quadráticos o seguinte vínculo

$$\phi(x) = j(x) + \bar{j}(x) = 0$$

Lembrando que os parênteses de Poisson 2 para o modelo de dois bósons quadráticos são

$$\{j(x), \bar{j}(y)\}_2 = \delta'(x-y)$$

$$\{j(x), j(y)\}_2 = \{\bar{j}(x), \bar{j}(y)\}_2 = 0$$

Novamente podemos utilizar a expressão (A.10) para verificar que temos

$$C^{-1}(x,z') = \frac{1}{2}\epsilon(x-z'), \qquad \partial_x\epsilon(x-z') = -\partial_{z'}\epsilon(x-z') = \delta(x-z')$$

Desta forma, os parênteses de Dirac são calculados como

$$\{j(x), \bar{j}(y)\}_2^D = \frac{1}{2}\delta'(x-y)$$

$$\{j(x), j(y)\}_2^D = \{\bar{j}(x), \bar{j}(y)\}_2^D = -\frac{1}{2}\delta'(x-y)$$

A partir dos parênteses de Dirac acima, podemos obter a hierarquia mKdV tanto através do campo $j(x)$ quanto do campo $\bar{j}(x)$. Vamos mostrar apenas para o campo

$\bar{j}(x)$, pois o processo é exatamente o mesmo para $j(x)$. A equações de movimento com vínculos são calculadas como

$$\frac{\partial \bar{j}}{\partial t_n} = \{\bar{j}(x), H_{j,n}\}_2^D = \frac{1}{2} D\Big(\frac{\delta H_{j,n}}{\delta j(x)}\Big|_{\phi=j+\bar{j}} - \frac{\delta H_{j,n}}{\delta \bar{j}(x)}\Big|_{\phi=j+\bar{j}}\Big)$$

As primeiras equações de movimento do modelo de dois bósons quadráticos com vínculo estão na tabela A.3. Observe que a equação para $n = 1$ será exatamente a equação mKdV da tabela B.2 se fizermos $\alpha_{j3} = -1$.

Tabela A.3: Equações de movimento com vínculos

$n = 1$	$\frac{\delta H_{j,1}}{\delta \bar{j}(x)}\Big\|_{\phi=j+\bar{j}} = -\alpha_{j1}\bar{j}$ $\frac{\delta H_{j,1}}{\delta j(x)}\Big\|_{\phi=j+\bar{j}} = \alpha_{j1}\bar{j}$	$\bar{j}_{t_1} = \alpha_{j1}\bar{j}_x$
$n = 2$	$\frac{\delta H_{j,2}}{\delta j(x)}\Big\|_{\phi=j+\bar{j}} = \frac{\delta H_{j,2}}{\delta \bar{j}(x)}\Big\|_{\phi=j+\bar{j}}$	$\bar{j}_{t_2} = 0$
$n = 3$	$\frac{\delta H_{j,3}}{\delta \bar{j}(x)}\Big\|_{\phi=j+\bar{j}} = \alpha_{j3}[2\bar{j}^3 - \bar{j}'']$ $\frac{\delta H_{j,3}}{\delta j(x)}\Big\|_{\phi=j+\bar{j}} = -\alpha_{j3}[2\bar{j}^3 - \bar{j}'']$	$\bar{j}_{t_3} = \alpha_{j3}[\bar{j}_{xxx} - 6\bar{j}^2\bar{j}_x]$

Novamente, as equações de movimento para os tempos pares serão nulas.

Apêndice B

Hierarquia PII

Históricamente, M.J.Ablowits and H.Segur (em [15]) foram os primeiros a sugerir a construção da hierarquia PII. Neste apêndice, nos basearemos na referência [2] e veremos como a hierarquia PII pode ser obtida a partir do modelo mKdV através de uma redução por auto-similaridade.

B.1 Hierarquia KdV e mKdV

Uma hierarquia de apenas um campo bastante conhecida é a hierarquia KdV, cujas hamiltonianas estão relacionadas através da relação de recorrência de Lenard,

$$\Big[D^3 + 2(UD + DU)\Big]\frac{\delta H_{2n-1}}{\delta U} = D\frac{\delta H_{2n+1}}{\delta U}, \qquad \frac{\delta H_{-1}}{\delta U} = \frac{1}{2}$$

Usaremos índices ímpares para nossa notação ficar de acordo com o vínculo que faremos com modelos de dois campos. As equações de movimento são dadas por

$$\frac{\partial U}{\partial t_{2n+1}} + D\frac{\delta H_{2n+1}}{\delta U} = 0 \tag{B.1}$$

Ou explicitamente, as primeiras equações de movimento são dadas na tabela B.1.

A hierarquia mKdV surge da hierarquia KdV através de uma transformação de Miura, ou seja

$$U = V_x - V^2$$

Tabela B.1: Hierarquia KdV

n=0	$\frac{\delta H_1}{\delta U} = U$	$U_{t_1} + U_x = 0$
n=1	$\frac{\delta H_3}{\delta U} = U_{xx} + 3U^2$	$U_{t_3} + 6UU_x + U_{xxx} = 0$ (Equação KdV)
n=2	$\frac{\delta H_5}{\delta U} = U_{4x} + 10U^3 + 5U_x^2 + 10UU_{xx}$	$U_{t_5} + 10UU_{xxx} + 20U_xU_{xx} + 30U^2U_x + U_{5x} = 0$

Sob esta transformação , a relação de recorrência de Lenard se torna

$$(D-2V)\Big(D^2+2VD+2V_x\Big)\frac{\delta H_{2n-1}}{\delta U}(V_x-V^2) = D\frac{\delta H_{2n+1}}{\delta U}(V_x-V^2) \qquad \text{(B.2)}$$

Em nossa notação , o termo $\frac{\delta H_{2n+1}}{\delta U}(V_x-V^2)$ signifiva pegar a derivada funcional de uma das hamiltonianas da hierarquia KdV e em seguida fazer a transformação de Miura. A equação de movimento (B.1) com os campos transformados fica

$$(D-2V)\frac{\partial V}{\partial t_{2n+1}} + D\frac{\delta H_{2n+1}}{\delta U}(V_x-V^2) = 0$$

Usando (B.2), a equação acima pode ser reescrita como

$$(D-2V)\Big[\frac{\partial V}{\partial t_{2n+1}} + \Big(D^2+2VD+2V_x\Big)\frac{\delta H_{2n-1}}{\delta U}(V_x-V^2)\Big] = 0$$

Assim, as equações de movimento da hierarquia mKdV são dadas por

$$\frac{\partial V}{\partial t_{2n+1}} + D(D+2V)\frac{\delta H_{2n-1}}{\delta U}(V_x-V^2) = 0 \qquad \text{(B.3)}$$

Explicitamente, as primeiras equações de movimento da hierarquia mKdV são

B.2 Redução à hierarquia PII

Veremos agora que a hierarquia PII é obtida a partir da hierarquia mKdV através de uma transformação por auto-similaridade. A transformação por auto-similaridade

Tabela B.2: Hierarquia mKdV

n=0	$\frac{\delta H_{-1}}{\delta U}(V_x - V^2) = \frac{1}{2}$	$V_{t_1} + V_x = 0$
n=1	$\frac{\delta H_1}{\delta U}(V_x - V^2) = (V_x - V^2)$	$V_{t_3} - 6V^2 V_x + V_{xxx} = 0$ (Equação mKdV)
n=2	$\frac{\delta H_3}{\delta U}(V_x - V^2) = V_{xxx} - 2VV_{xx} +$ $V'^2 + 3V^4 - 6V^2 V_x$	$V_{t_5} + D(V_{4x} - 10VV'^2 - 10V^2V'' + 6V^5) = 0$

que deixa as equações de movimento do modelo mKdV invariantes seguem no lema abaixo

Lema 4. *Sob a redução por auto-similaridade*

$$z_n = \frac{x}{[(2n+1)t_{2n+1}]^{\frac{1}{(2n+1)}}}, \qquad V(x) = \frac{u(z_n)}{[(2n+1)t_{2n+1}]^{\frac{1}{(2n+1)}}} \tag{B.4}$$

as derivadas funcionais das hamiltonianas do modelo mKdV se transformam como

$$\frac{\delta H_{2i-1}}{\delta U}(V_x - V^2) = \frac{1}{[(2n+1)t_{2n+1}]^{\frac{(2i)}{(2n+1)}}} \frac{\delta H_{2i-1}}{\delta U}(u_{z_n} - u^2)$$

Demonstração. A prova segue por indução . É fácil ver que o lema vale para H_{-1} e H_1, isto é

$$\frac{\delta H_{-1}}{\delta U}(V_x - V^2) = \frac{1}{2} \equiv \frac{\delta H_{-1}}{\delta U}(u_{z_n} - u^2)$$

$$\frac{\delta H_1}{\delta U}(V_x - V^2) = V_x - V^2 \longrightarrow \frac{1}{[(2n+1)t_{2n+1}]^{\frac{2}{(2n+1)}}}(u_{z_n} - u^2) \equiv \frac{\delta H_1}{\delta U}(u_{z_n} - u^2)$$

Agora, supondo que o lema vale para $2m-1$, usaremos (B.2) para mostrar que vale também para $2m+1$, isto é

$$\frac{\delta H_{2m+1}}{\delta U}(V_x - V^2) = D^{-1}(D-2V)\Big(D^2 + 2VD + 2V_x\Big)\frac{\delta H_{2m-1}}{\delta U}(V_x - V^2) \longrightarrow$$

$$\frac{1}{[(2n+1)t_{2n+1}]^{\frac{(2m+2)}{(2n+1)}}}\partial_{z_n}^{-1}(\partial_{z_n} - 2u)\Big(\partial_{z_n}^2 + 2u\partial_{z_n} + 2u_{z_n}\Big)\frac{\delta H_{2m-1}}{\delta U}(u_{z_n} - u^2) \equiv$$

$$\frac{1}{[(2n+1)t_{2n+1}]^{\frac{(2m+2)}{(2n+1)}}}\frac{\delta H_{2m+1}}{\delta U}(u_{z_n} - u^2)$$

Encerrando assim nossa demonstração .

□

Usando o lema acima para fazer uma transformação por auto-similaridade nas equações de movimento do mKdV, isto é (B.3), obtemos

$$\partial_{z_n}(\partial_{z_n} + 2u)\frac{\delta H_{2n-1}}{\delta U}(u_{z_n} - u^2) = z_n u_{z_n} + u$$

Integrando a equação acima e omitindo os índices dos z_n, obtemos a hierarquia PII

$$(\partial_z + 2u)\frac{\delta H_{2n-1}}{\delta U}(u_z - u^2) = zu - \alpha_n \tag{B.5}$$

Note que a hierarquia PII possui apenas um parâmetro e as primeiras equações são dadas na tabela B.3.

Tabela B.3: Hierarquia PII

n=0	$u = zu - \alpha_0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\alpha_0}{z-1}$
n=1	$u'' = 2u^3 + zu - \alpha_1$
n=2	$u^{(4)} = 10uu'^2 + 10u^2u'' - 6u^5 + zu - \alpha_2$

Veja que para $n = 0$ obtemos uma equação algébrica e não uma equação diferencial, assim podemos exclui-la da hierarquia PII. Já para $n = 1$, obtemos de fato a equação PII que caracteriza a hierarquia.

Apêndice C

Tópicos do Formalismo Hamiltoniano

C.1 Hamiltonianas de ordens superiores

Pelo método da referencia [7], quando temos uma lagrangiana de ordem n e dimensão N, isto é

$$L = L(x^b, Dx^b, D^2x^b, ..., D^nx^b), \qquad b = 1, ..., N$$

definimos as coordenadas canônicas generalizadas

$$q^a_{(m)} = D^{m-1}x^a, \qquad p^{(m)}_a = \frac{\delta L}{\delta(D^m x^a)}, \qquad \begin{cases} m = 1, 2, ..., n \\ a = 1, 2, ..., N \end{cases}$$

Sendo $D = d/dt$ e

$$\frac{\delta L}{\delta(D^m x^a)} = \frac{\partial L}{\partial(D^m x^a)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial(D^{m+1}x^a)} + ... + (-1)^{n-m}\frac{d^{n-m}}{dt^{n-m}}\frac{\partial L}{\partial(D^n x^a)}$$

Note que $D^n x^a$ não é uma coordenada canônica porque não há um momento canonicamente conjugado a ela. Desta forma a hamiltoniana é definida como

$$H = \sum_{a=1}^{N}\sum_{m=1}^{n-1} p^{(m)}_a q^a_{(m+1)} + \sum_{a=1}^{N} p^{(n)}_a D^n x^a - L$$

Note também que $\dot{q}^a_{(m)} = q^a_{(m+1)}$. Assim as equações de movimento ficam

$$\dot{q}^a_{(m)} = \frac{\partial H}{\partial p^{(m)}_a}, \qquad \dot{p}^{(m)}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a_{(m)}}, \qquad \begin{cases} m = 1, 2, ..., n \\ a = 1, 2, ..., N \end{cases}$$

C.2 Transformações canônicas

Geralmente, há sistemas de coordenadas que exploram melhor as simetrias de um dado problema que outras. Por esse motivo, descreveremos como podemos fazer uma transformação de coordenadas numa dada hamiltoniana, tal que a forma das equações de Hamilton seja mantida. Isto é, buscamos uma transformação do tipo

$$Q_i = Q_i(q, p, t), \qquad P_i = P_i(q, p, t),$$

sendo q_i e p_i as antigas coordenadas canônicas, enquanto que Q_i e P_i são as novas coordenadas canônicas. Tal que, a nova hamiltoniana $K = K(Q, P, t)$ dê as equações de movimento

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}$$

Para que isto seja valido independentemente da forma da hamiltoniana nas coordenadas iniciais, ou seja $H = H(q, p, t)$, devemos ter uma variação nula da ação entre dois pontos fixos no espaço de fase em ambos sistemas de coordenadas. Isto é,

$$\delta I = \delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H(q, p, t))dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t))dt = 0$$

Vemos que a expressão acima é satisfeita se

$$\lambda(p_i \dot{q}_i - H) = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}, \tag{C.1}$$

sendo que a contante λ é responsável por uma transformação de escala; enquanto que a função geratriz, F, é responsavel pela forma funcional da transformação. Uma exposição detalhada pode ser encontrada na referência [1], enquanto que nos restringiremos aqui a um caso particular de tranformação canônica com $\lambda = 1$ seguido por uma transformação canônica de escala, ou seja $\lambda \neq 1$.

Considere a função geratriz

$$F = F_3(p, Q^{(1)}, t) + q_i p_i$$

Sustituindo em (C.1) com $\lambda = 1$, vemos que os dois sistemas de coordenadas se relacionam através de

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}(p, Q^{(1)}, t) \tag{C.2}$$

$$P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i^{(1)}}(p, Q^{(1)}, t) \tag{C.3}$$

A partir de (C.3) podemos encontrar $p_i = p_i(Q^{(1)}, P^{(1)}, t)$ e substituindo em (C.2) temos $q_i = q_i(Q^{(1)}, P^{(1)}, t)$, sendo que a nova hamiltoniana é dada por

$$K^{(1)}(Q^{(1)}, P^{(1)}, t) = H(q(Q^{(1)}, P^{(1)}, t), p(Q^{(1)}, P^{(1)}, t), t) + \frac{\partial F_3}{\partial t}(p(Q^{(1)}, P^{(1)}, t), Q^{(1)}, t)$$

Usando (C.2) e (C.3) num processo inverso, podemos encontrar também

$$Q_i^{(1)} = Q_i^{(1)}(q, p, t), \qquad P_i^{(1)} = P_i^{(1)}(q, p, t)$$

Faremos agora uma transformação de escala sobre as coordenadas canônicas $Q_i^{(1)}$, $P_i^{(1)}$ e sobre o tempo também, tal que

$$Q_i^{(2)} = \mu Q_i^{(1)}, \qquad P_i^{(2)} = \nu P_i^{(1)}, \qquad T = \sigma t$$

Para que a forma das equações de Hamilton seja mantida e consequentemente a transformação seja canônica, a hamiltoniana deve se transformar como

$$K^{(2)}(Q^{(2)}, P^{(2)}, T) = \frac{\mu\nu}{\sigma} K^{(1)}\left(\frac{Q^{(2)}}{\mu}, \frac{P^{(2)}}{\nu}, \frac{T}{\sigma}\right)$$

Note que estas tranformações canônicas não são abelianas, ou seja, se fizermos primeiro uma transformação de escala seguido por outro transformação canônica com a mesma função geratriz, não teremos o mesmo resultado.

Referências Bibliográficas

[1] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, “Classical Mechanics”, 3ª ed., Addison Wesley(2001)

[2] Nalini Joshi; The Second Painlevé Hierarchy and the Stationary KdV Hierarchy, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **40** (2004), 1039-1061.

[3] Peter A. Clarkson, Nalini Joshi, Marta Mazzocco; The Lax Pair for the MKdV Hierarchy, Séminaires $\mathcal{E}$ Congrès, **14** (2006), 53-64

[4] Marta Mazzocco and Man Yue Mo; The Hamiltonian Struture of the Second Painlevé Hierarchy, arXiv:nlin/0610066v1 [nlin.SI] 27 Oct 2006

[5] Masatoshi Noumi; “Painlevé Equation through Symmetry”, Translations of Mathematical Monographs, Volume 223, American Mathematical Society Providence, RI, 2004

[6] A. S. Fokas, A. R. Its, A. A. Kapaev, V. Y. Novokshenov; Painlevé Transcendents - The Riemann-Hilbert Approach; Mathematical Surveys and Monographs, vol 128

[7] T. Kimura; On the Hamiltonian Formalism for General Lagrangians with Higher-Order Derivatives, Lettere al Nuovo Cimento, vol. 5, n. 1

[8] L. Bonora, C. S. Xiong; An alternative approach to KP hierarchy in matrix models, Physics Letters B 285 (1992) 191-198

[9] H. Aratyn, L. A. Ferreira, A. H. Zimerman; On discrete symmetries of the multi-boson KP hierarchies, Physics Letters B 327 (1994) 266-273

[10] H. Aratyn, E. Nissimov, S. Pacheva, A. H. Zimerman; Reduction of Toda Lattice Hierarchy to Generalized KdV Hierarchies anda Two-Matrix Model, arXiv:hep-th/9407112v2 1 Sep 1994

[11] H. Aratyn, L. A. Ferreira, J. F. Gomes, A. H. Zimerman; On W_∞ Algebras, Gauge Equivalence of KP Hierarchies, Two-Boson Realizations and their KdV Reductions; Phys.Rev. D47 (1993) 4723-472, arXiv:hep-th/9304152

[12] H. Aratyn, J. F. Gomes, and A. H. Zimerman; Darboux-Backlund Derivation of Rational Solutions of the Painlevé IV Equation; AIP Conf. Proc. – March 8, 2010 – Volume 1212, pp. 146-153 NONLINEAR AND MODERN MATHEMATICAL PHYSICS: Proceedings of the First International Workshop; doi:10.1063/1.3367030

[13] H. Aratyn, J. F. Gomes and A. H. Zimerman; Integrable Origins of Higher Order Painlevé Equations; arXiv:1010.5725

[14] H. Aratyn, J. F. Gomes, and A. H. Zimerman; On the symmetric formulation of the Painlevé IV equation; arXiv:0909.3532v1 [math-ph]

[15] M.J.Ablowits and H.Segur, "Asymptotic solution of the Korteweg-de-Vries equation", Stud. Appl. Math., 57(1977), no.1, 13-44

[16] Second and fouth Painlevé hierarchies and Jimbo-Miwa linear problems; Pilar R. Gordoa, Nalini Joshi and Andrew Pickering, J. Math. Phys. 47, p.073504 (2006); doi:10.1063/1.2217647

[17] K. Okamoto, Math. Ann. 275 221255 (1986)

[18] Maciej Dunajski; "Solitons, Instantons, and Twistors“, OXFORD UNIVERSITY PRESS (2010)

[19] O. Babelon, D. Bernard, M. Talon; "Introduction to Classical Integrable Syistems“, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS (2006)

[20] Ashok Das; "Integrable Models”, World Scientific Lecture Notes in Physics, Vol. 30