A geometria da Esponja de Menger

Andréa Cristina Prokopczyk Arita *
Flávia Souza Machado da Silva †
Laura Rezzieri Gambera ‡

11 de dezembro de 2013

Resumo

Neste trabalho estudaremos algumas propriedades geométricas do fractal "Esponja de Menger", que é um objeto matemático construído através de um processo recursivo infinito que o torna auto-semelhante. Além disso, a dimensão de um fractal não é necessariamente um número inteiro, diferentemente do que ocorre com os objetos da Geometria Euclidiana. Mais ainda, a Esponja possui área infinita e volume nulo, fatos que demonstraremos ao longo deste texto.

Palavras Chave: Esponja de Menger, fractal, dimensão fracionária, área, volume.

Introdução

Na constituição do nosso mundo, muitas formas da natureza, como por exemplo, a costa de alguns países, algumas plantas, rios, montanhas e cordilheiras, possuem em sua forma componentes irregulares. Simplificá-las para figuras da geometria euclidiana, como pontos, segmentos, triângulos, cubos etc., seria muito inadequado. Contudo, muitas dessas formas podem ser recriadas por meio de regras simples de construção geométrica, gerando estruturas de complexidade admirável que recebem o nome de fractais.

Em particular, neste trabalho, estudaremos o fractal "Esponja de Menger", que foi apresentado pela primeira vez pelo matemático austríaco Karl Menger (1902-1985), no ano de 1926, enquanto ele explorava o conceito de dimensão topológica. Este objeto matemático é um exemplo clássico de um fractal construído a partir de uma figura em três dimensões e, na verdade, nada mais é do que uma extensão tridimensional do Conjunto de Cantor e do Carpete de Sierpinski.

Por se tratar de um fractal, a auto-semelhança e a complexidade infinita são duas características principais da Esponja de Menger. A auto-semelhança significa que o objeto pode ser dividido em várias partes, cada uma das quais semelhante ao objeto original. A complexidade infinita refere-se ao fato de que o processo de sua

*Email: andreacp@ibilce.unesp.br. Departamento de Matemática, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - São José do Rio Preto - SP

†Email: flavia@ibilce.unesp.br. Departamento de Matemática, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - São José do Rio Preto - SP

‡Email: rinoscronauta@gmail.com. Curso de Licenciatura em Matemática, bolsista PET/MEC, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - São José do Rio Preto - SP

construção é recursivo e dispõe de um número infinito de procedimentos a serem executados.

Além disso, a Esponja possui dimensão fracionária, entre 2 e 3, dando a ideia de um objeto geométrico que não é plano, nem tridimensional. Outro fato interessante é que este fractal possui o seguinte paradoxo: ser um objeto geométrico com área infinita e volume nulo.

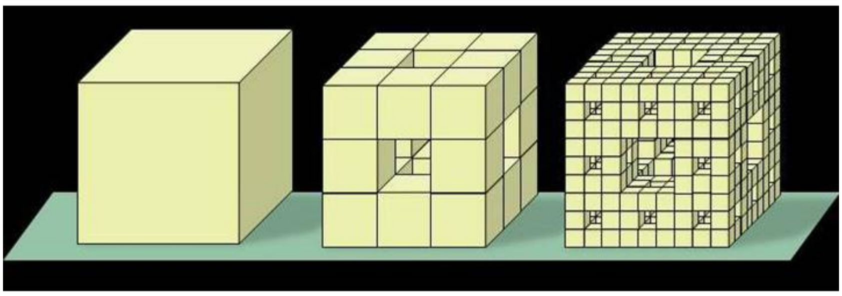
Com relação a literatura referente a este assunto, o paradoxo acima é bem conhecido, bem como o cálculo da dimensão e do volume da Esponja, veja, por exemplo, [1, 4]. Todavia, do que é de nosso conhecimento, um estudo detalhado sobre o cálculo de sua área não é apresentado. Na verdade, em [4] é apresentado um cálculo para esta área porém, esse cálculo não leva em consideração as perdas de área que ocorrem em cada estágio. Este fato foi a principal motivação para o desenvolvimento deste trabalho, que está dividido em 4 seções. Na primeira, apresentamos a construção da Esponja de Menger, destacando algumas propriedades que serão usadas posteriormente. Na seção 2, deduzimos, a partir da geometria euclidiana, o conceito de dimensão e então, calculamos a dimensão da Esponja. Já nas seções 3 e 4 apresentamos, respectivamente, os cálculos de sua área e volume.

1 Construção

A Esponja de Menger é construída a partir de um cubo através do seguinte processo recursivo:

1. Tome um cubo qualquer (Figura 1(a)).
2. Divida cada face do cubo em 9 quadrados. Desse modo o cubo inicial fica subdividido em 27 cubos menores.
3. Remova o cubo localizado no meio de cada face e o cubo central, deixando apenas 20 cubos restantes (Figura 1(b)). Este é o primeiro nível da Esponja de Menger.
4. Repita os passos 2 e 3 para cada um dos 20 pequenos cubos restantes do nível anterior. Assim, obtemos o segundo nível da Esponja (Figura 1(c)).

   Note que, neste nível, estamos dividindo cada um dos 20 cubos do nível anterior em outros 20 cubos menores, obtendo no final 20^2 cubos.
5. A Esponja de Menger é o limite deste processo depois de um número infinito de iterações.



(a) **(b)** **(c)**

Figura 1: Esponja de Menger nível 0 ao nível 2.

Observe que se n é o número de iterações realizadas no cubo inicial, o número de cubos aumenta 20^n. Assim, podemos contar, em cada nível, quantos são os cubos removidos e restantes, como mostra a Tabela 1 a seguir.

Nível	0	1	2	3	$\cdots$	n
Cubos removidos	0	7	7×20	7×20^2	$\cdots$	$7 \times 20^{n-1}$
Cubos restantes	$1 = 20^0$	20^1	20^2	20^3	$\cdots$	20^n

Tabela 1: Contagem por nível dos cubos da Esponja de Menger.

2 Dimensão fractal

O conceito de dimensão foi utilizado na primeira definição de fractal, dada por Mandelbrot. Para ele, um fractal é um conjunto para o qual a dimensão de Hausdorff-Besicovitch excede estritamente sua dimensão topológica. Porém, essa definição não agradou muitos matemáticos, inclusive o próprio Mandelbrot, por ser muito restritiva. Assim, passou-se a definir um fractal em termos de outras propriedades.

Contudo, a dimensão de um fractal, que representa o grau de ocupação de sua estrutura no espaço que a contém, ainda é algo intrigante, pois não se trata necessariamente de um número inteiro, como ocorre com os objetos da geometria euclidiana. Mas como calcular a dimensão de um fractal?

Para entendermos este cálculo, vamos, primeiramente, estudar a dimensão de figuras já conhecidas. Por exemplo, sabemos que a dimensão de uma reta é 1, a dimensão de um quadrado é 2 e a dimensão de um cubo, 3. Além disso, essas três figuras da geometria euclidiana possuem a propriedade de auto-semelhança, isto é, cada uma pode ser dividida em figuras menores, porém, similares à inicial, como exemplificado na Figura 2.

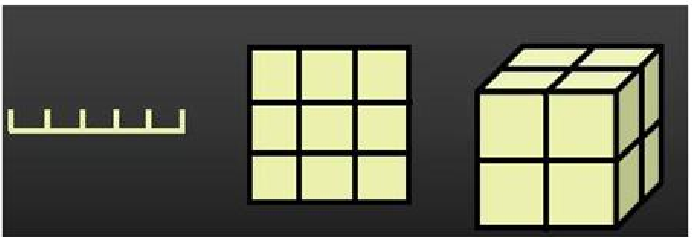


Figura 2: Segmento de reta, quadrado e cubo divididos em figuras menores, similares a inicial.

Observe que o segmento de reta foi dividido em 5 partes iguais, o quadrado em 9 e o cubo em 8, sendo cada uma dessas partes similar à figura inicial. Mais ainda, ao multiplicarmos cada parte do segmento por 5, obtemos o segmento inicial. Assim, dizemos que o fator de aumento para o segmento é 5. O mesmo acontece com o quadrado, onde o fator de aumento é 3, e com o cubo, com fator de aumento 2.

Dessa forma, obtemos a seguinte relação:

(i) No segmento, o número de partes é 5, que podemos escrever como $5 = 5^1$, onde 5 é o fator de aumento e 1 é a dimensão do segmento.

(ii) No quadrado, o número de partes é 9, que escrevemos na forma $9 = 3^2$, onde 3 é o fator de aumento e 2 é a dimensão do quadrado.

(iii) No cubo, o número de partes é 8, que é descrito por $8 = 2^3$, onde 2 é o fator de aumento e 3 é a dimensão do quadrado.

Em geral, o número n de partes de uma figura que possui a propriedade de auto-semelhança é dado por

$$n = m^D,$$

onde m é o fator de aumento e D é a dimensão da figura inicial. Logo, para obtermos a dimensão de uma figura qualquer, basta encontrarmos o valor de D que aparece na expressão acima. Para isso, precisamos aplicar a função logaritmo em ambos os lados da igualdade. Portanto, segue que

$$D = \frac{\log n}{\log m},$$

onde n é o número de partes em que foi dividida a figura e m é o fator de aumento.

Esta definição pode ser facilmente aplicada a fractais que são obtidos por meio de um processo iterativo, como no caso da Esponja de Menger. Neste caso, usando a Tabela 1, nota-se que, no primeiro nível, a figura inicial foi dividida em 20 partes, sendo que cada uma delas deve ser multiplicada por 3 para se tornar igual ao cubo inicial. Então, a dimensão da Esponja é

$$D = \frac{\log 20}{\log 3} = \frac{1,30103}{0,47712} \approx 2,73.$$

Logo, podemos entender este objeto matemático como estando entre um elemento do plano, cuja dimensão é 2, e um objeto do espaço, cuja dimensão é 3.

Observamos ainda que se fizermos o cálculo da dimensão da Esponja usando os dados de qualquer outro nível de sua construção, o valor obtido será o mesmo.

3 Calculando a área

Nesta seção vamos calcular a área da Esponja de Menger. Note que, por ser um fractal obtido por um processo infinito, sua área será o limite, quando n tender ao infinito, da área obtida em sua n-ésima etapa de construção. Assim, para obtermos a área da Esponja, precisamos calcular a área na n-ésima etapa de sua construção e então tomarmos o limite com n tendendo ao infinito.

Pela maneira como a Esponja de Menger é construída podemos observar que a área em cada nível de seu processo de construção depende da área do nível anterior, o que nos fornece um processo recursivo. Além disso, a figura obtida em cada nível é composta por vários quadrados de mesma área, sendo que a área de cada quadrado é $\frac{1}{9}$ da área do quadrado obtido no nível anterior. Dessa forma, para calcularmos a área no nível n, precisamos encontrar a quantidade de quadrados que são obtidos neste nível, o que faremos com o auxílio da Tabela 1 da Seção 1.

Denotemos por A_n e q_n a área e o número de quadrados obtidos na n-ésima etapa de construção da Esponja, respectivamente.

Na etapa inicial, quando $n = 0$, temos um cubo formado por 6 quadrados, que são suas faces. Logo, $q_0 = 6$, como ilustrado na Figura 3.

Supondo que a área de cada um desses quadrados seja igual a A, segue que a área no nível 0 é dada por

$$A_0 = q_0 A = 6A.$$

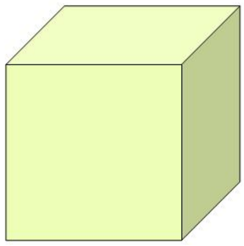


Figura 3: Esponja de Menger nível 0.

Na primeira etapa da construção da Esponja, com $n = 1$, são retirados os cubos localizados no meio de cada face e o cubo central, como podemos ver na Figura 4. Assim, para cada um dos quadrados que formam as faces do cubo inicial temos 8 novos quadrados.

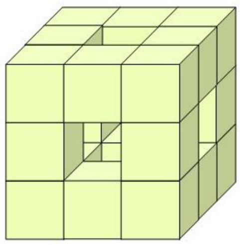


Figura 4: Esponja de Menger nível 1.

Além disso, observe que ao serem retirados os cubos centrais de cada face obtemos 6 "túneis", o que gera um aumento no número de quadrados. Na Figura 5 apresentamos um corte no nível 1 da construção da Esponja de Menger para auxiliar a visualização dos "túneis" e dos quadrados ganhos, sendo que estamos considerando para nosso cálculo somente os quadrados coloridos de amarelo.

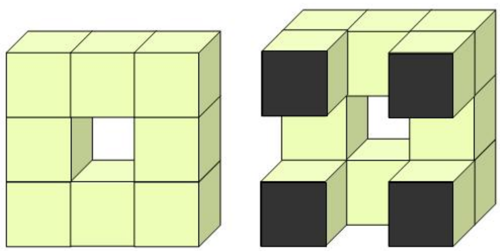


Figura 5: Corte do nível 1 da Esponja de Menger.

Dessa forma, segue que cada "túnel" é formado por 4 quadrados, que determinam suas laterais, "piso" e "teto", gerando um acréscimo total de $6 \cdot 4 = 24$ quadrados. Logo, o número de quadrados obtidos no nível 1 é dado por

$$q_1 \;=\; q_0 \cdot 8 + 1 \cdot 24 \;=\; 6 \cdot 8 + 20^0 \cdot 24.$$

Note ainda que, pela forma como são realizados os passos 2 e 3 da construção da Esponja, cada um dos quadrados formados no nível 1 têm área igual a $\frac{1}{9}A$. Portanto, na primeira etapa de construção da Esponja de Menger a área é dada por

$$A_1 \;=\; q_1 \frac{1}{9} A \;=\; 6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^1 A + \frac{24}{9} \left(\frac{20}{9}\right)^0 A.$$

Vejamos agora qual é a área na segunda etapa. Neste caso, para cada quadrado obtido no nível anterior temos 8 novos quadrados e para cada um dos 20 cubos restantes no nível 1 aparecem mais 24 quadrados, referentes aos "túneis" formados nesta etapa, como ilustrado nas Figuras 6 e 7.

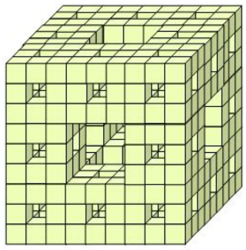


Figura 6: Esponja de Menger nível 2.

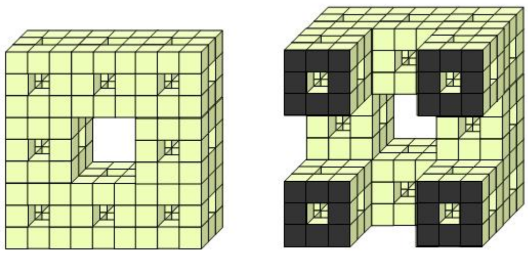


Figura 7: Corte do nível 2 da Esponja de Menger.

Logo, o número de quadrados obtidos no nível 2 é dado por

$$q_2 \;=\; q_1 \cdot 8 + 20 \cdot 24 \;=\; 6 \cdot 8^2 + 20^0 \cdot 24 \cdot 8 + 20^1 \cdot 24.$$

Observe ainda que cada quadrado obtido no nível 2 tem área igual $\frac{1}{9^2}A$. Portanto, a área no nível 2 é dada por

$$A_2 \;=\; q_2 \frac{1}{9^2} A \;=\; 6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 A + \frac{20^0 \cdot 24}{9} \left(\frac{8}{9}\right)^1 A + \frac{24}{9} \left(\frac{20}{9}\right)^1 A.$$

Raciocinando de modo análogo às etapas anteriores, analisemos a área obtida no terceiro nível da construção da Esponja. Neste caso, cada quadrado obtido tem área igual $\frac{1}{9^3}A$ e o número de quadrados é

$$q_3 \;=\; q_2 \cdot 8 + 20^2 \cdot 24 \;=\; 6 \cdot 8^3 + 20^0 \cdot 24 \cdot 8^2 + 20^1 \cdot 24 \cdot 8 + 20^2 \cdot 24.$$

Portanto, a área no nível 3 é dada por

$$A_3 \;=\; q_3 \frac{1}{9^3} A \;=\; 6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^3 A + \frac{20^0 \cdot 24}{9} \left(\frac{8}{9}\right)^2 A + \frac{20^1 \cdot 24}{9^2} \left(\frac{8}{9}\right)^1 A + \frac{24}{9} \left(\frac{20}{9}\right)^2 A.$$

Procedendo de maneira recursiva, obtemos que o número de quadrados obtidos no nível n é dado por

$$\begin{aligned} q_n &= q_{n-1} \cdot 8 + 20^{n-1} \cdot 24 \\ &= 6 \cdot 8^n + 20^0 \cdot 24 \cdot 8^{n-1} + 20^1 \cdot 24 \cdot 8^{n-2} + \ldots + 20^{n-2} \cdot 24 \cdot 8 + 20^{n-1} \cdot 24 \end{aligned}$$

e a área no nível n é dada por

$$\begin{aligned}
A_n &= q_n \frac{1}{9^n} A \\
&= 6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n A + \frac{20^0 \cdot 24}{9} \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} A + \frac{20^1 \cdot 24}{9^2} \left(\frac{8}{9}\right)^{n-2} A + \ldots + \\
&\quad + \frac{20^{n-2} \cdot 24}{9^{n-1}} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^1 + \frac{24}{9} \left(\frac{20}{9}\right)^{n-1} A.
\end{aligned}$$

Por fim, para calcularmos a área da Esponja, note que

$$\frac{24}{9} \left(\frac{20}{9}\right)^{n-1} A < A_n$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{24}{9} \left(\frac{20}{9}\right)^{n-1} A = \frac{24}{9} A \lim_{n\to\infty} \left(\frac{20}{9}\right)^{n-1} = \infty,$$

pois $\frac{20}{9} > 1$.

Portanto, a área da Esponja de Menger é igual a

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \infty,$$

ou seja, a área da Esponja é infinita.

4 Calculando o volume

Nesta seção iremos calcular o volume da Esponja de Menger. Neste caso, assim como no cálculo da área, o volume será o limite, quando n tender ao infinito, do volume da figura obtida na n-ésima etapa de sua construção.

Denotemos por V e V_n o volume do cubo inicial e o volume no n-ésimo nível de construção, respectivamente.

No nível 1, dividimos nosso cubo inicial em 27 cubos menores, com volume igual a $\frac{1}{27}V$ cada, e perdemos 7 desses cubos. Desse modo, o volume obtido é

$$V_1 = V - 7 \cdot \frac{1}{27} V = \frac{20}{27} V.$$

No nível 2, são removidos 7×20 cubos, sendo que cada um deles tem volume igual a $\frac{1}{27}\left(\frac{1}{27}V\right)$. Então, o volume total é

$$V_2 = V_1 - 7 \cdot 20 \left(\frac{1}{27}\right)^2 V = \frac{20}{27} V - 7 \cdot 20 \left(\frac{1}{27}\right)^2 V = \left(\frac{20}{27}\right)^2 V.$$

Repetindo este raciocínio, no nível n, retiramos $7 \times 20^{n-1}$ cubos, cada um deles tendo volume igual a $\left(\frac{1}{27}\right)^n V$. Logo, o volume total no nível n é

$$V_n = \left(\frac{20}{27}\right)^{n-1} V - 7 \cdot 20^{n-1} \left(\frac{1}{27}\right)^n V = \left(\frac{20}{27}\right)^n V.$$

Portanto, o volume da Esponja de Menger é igual a

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{20}{27}\right)^n V\right] = V \lim_{n\to\infty} \left(\frac{20}{27}\right)^n = 0,$$

pois $\frac{20}{27} < 1$. Isto é, a Esponja tem volume nulo.

Referências

[1] BARBOSA, R. M. *Descobrindo a Geometria Fractal*, Belo Horizonte: Autêntica, (2005).

[2] BARNSLEY, M. F. *Fractals everywhere*, Academic Press Professional, (1993).

[3] JANOS, M. *Geometria fractal*, Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, (2008).

[4] ASSIS, T. A.; MIRANDA, J. G. V.; MOTA, F. B.; ANDRADE, R. F. S.; CASTILHO, C. M. C. *Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais*, Rev. Bras. Ens. Fis., 30, no. 2, 2304, (2008).