

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

HEITOR SILVA TEIXEIRA

**ESTUDO E APLICAÇÕES DE CONTROLADORES CHAVEADOS PARA SISTEMAS
NÃO LINEARES COM INCERTEZAS UTILIZANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV NÃO
QUADRÁTICAS**

Ilha Solteira -SP

2023

HEITOR SILVA TEIXEIRA

**ESTUDO E APLICAÇÕES DE CONTROLADORES CHAVEADOS PARA SISTEMAS
NÃO LINEARES COM INCERTEZAS UTILIZANDO FUNÇÕES DE LYAPUNOV NÃO
QUADRÁTICAS**

Trabalho de Graduação apresentado à Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" Campus de Ilha Solteira/SP como requisito para obtenção do título de Engenheiro Eletricista.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira.

Ilha Solteira -SP
2023

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

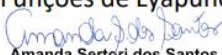
T266e Teixeira, Heitor Silva.
Estudo e aplicações de controladores chaveados para sistemas não lineares com incertezas utilizando funções de Lyapunov não quadráticas / Heitor Silva Teixeira . -- Ilha Solteira: [s.n.], 2023
50 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Elétrica) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2023

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Inclui bibliografia

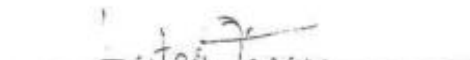
1. Controle robusto. 2. Controle chaveado. 3. Helicóptero 3-DOF. 4. Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno. 5. Funções de Lyapunov não quadráticas.


Amanda Sertori dos Santos
Bibliotecária - CRB/8-9061
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao
Usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação

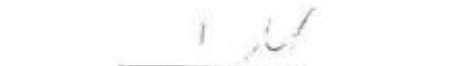
ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE GRADUAÇÃO

Aos vinte dias do mês de dezembro do ano de dois mil e vinte e três, o discente *Heitor Silva Teixeira* matriculado sob o nº 181051486, tendo como banca examinadora o seu orientador, o Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, o Mestrando Hugo Fernando Yamanaka e o Mestrando Anthony Fluker Cueva, apresentou o Trabalho de Graduação intitulado "Estudo E Aplicações De Controladores Chaveados Para Sistemas Não Lineares Com Incertezas Utilizando Funções De Lyapunov Não Quadráticas", obtendo a nota 10,0 (dez pontos) e conceito Aprovado.


Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
- orientador -


Heitor Silva Teixeira
- discente -


Mestrando Hugo Fernando Yamanaka
- Membro da Banca -


Mestrando Anthony Fluker Cueva
- Membro da Banca -

Dedico este trabalho a todas as pessoas que me deram forças para chegar até este momento.

AGRADECIMENTOS

Dedico este trabalho aos meus pais, Paulo e Orlene, que desde sempre me incentivaram a estudar. Por estarem sempre me apoiando e que, com muito amor e paciência, deram as condições perfeitas para que eu pudesse dedicar meu tempo exclusivamente aos estudos.

Agradeço a minha namorada, Júlia, que há 7 anos me acompanha nos momentos mais desafiadores da minha vida, participando do meu caminho desde o segundo ano do Ensino Médio. Por ter visto eu sonhar em ser um engenheiro, e hoje estar ao meu lado enquanto alcanço esse sonho.

Aos melhores amigos que fiz durante a graduação, Tarcísio, Pedro e Laura, por todos os momentos difíceis e felizes que passamos juntos. Sem vocês, tenho certeza que meus dias na universidade teriam menos cor.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, pela paciência e dedicação, e por ter me proporcionado a experiência enriquecedora de desenvolver e apresentar um projeto de pesquisa científica, algo que vou carregar sempre com muito orgulho na minha memória.

Ao Prof. Dr. Adalberto Lazarini, cuja ajuda foi essencial para o desenvolvimento deste trabalho, pois sempre se mostrou muito paciente e disponível para compartilhar seus conhecimentos e auxiliar com as dificuldades.

Ao meu colega Guilherme Colla, que no início deste trabalho me ajudou com sua experiência a respeito do sistema aqui estudado.

Por fim, agradeço ao CNPq, pelo financiamento do projeto através da bolsa PIBIC no ciclo de 2023.

“Que os nossos esforços desafiem as impossibilidades. Lembrai-vos de que as grandes proezas da história foram conquistadas daquilo que parecia impossível”.

Charles Chaplin

RESUMO

O presente trabalho faz uma comparação entre a região de factibilidade de um controle robusto de ganho único e de um controle com ganhos chaveados, sendo baseado na teoria das Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs, do inglês Linear Matrix Inequalities), usando funções de Lyapunov não quadráticas, tendo como objetivo a comparação entre a factibilidade de ambos os projetos aplicados ao módulo 3-DOF Helicopter, desenvolvido pela Quanser Inc. Este equipamento se encontra presente no LPC (Laboratório de Pesquisa em Controle) do Departamento de Engenharia Elétrica da FEIS-UNESP. O sistema possui três graus de liberdade, sendo estes os movimentos de elevação, arfagem e deslocamento. Sua representação em espaço de estados conta com oito variáveis de estado e, neste caso, este trabalho considerou incertezas paramétricas na massa total do sistema e uma falha de 50% nos motores do helicóptero. Após a análise da factibilidade, simulou-se o sistema em um dos pontos em que apenas o controle chaveado garante a estabilidade.

Palavras-chave: Controle robusto; Controle chaveado; Helicóptero 3-DOF; Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno; Funções de Lyapunov Não Quadráticas; Factibilidade.

ABSTRACT

This study compares the feasibility region of a single-gain control with that obtained with a switched-gain control, employing a design based on LMIs (Linear Matrix Inequalities) and non-quadratic Lyapunov functions. The research focuses on the 3-DOF (Three Degrees of Freedom) Helicopter module, developed by Quanser Inc., located in the LPC (Laboratório de Pesquisa em Controle) of the Electrical Engineering Department at FEIS-UNESP. The system has three degrees of freedom, corresponding to elevation, pitch, and travel angles. Its state-space representation involves eight state variables, and, in this study, it is considered an uncertainty in the total mass of the system and a 50% rate of failure in the helicopter's motors. Following the feasibility analysis, a simulation of the system is performed at a specific point where only the switched-gain control ensures stability.

Keywords: Robust control; Switched control; 3-DOF Helicopter; Takagi-Sugeno Fuzzy Models; Non-Quadratic Lyapunov Functions; Feasibility.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Níveis de superfícies de uma função de Lyapunov.	21
Figura 2 – Representação gráfica da taxa de decaimento.....	24
Figura 3 – Factibilidade para 3 diferentes técnicas de controle.	31
Figura 4 – Fotografia do módulo 2-DOF ball balancer do LPC.....	32
Figura 5 – Resultados da simulação do sistema 2-DOF ball balancer.	33
Figura 6 – Sistema 3-DOF helicopter.....	34
Figura 7 – Diagrama de corpo livre do helicóptero.....	35
Figura 8 – Região de factibilidade para o Teorema 3 (○) e para o Teorema 4 (×).	41
Figura 9 – Ponto escolhido para a simulação do helicóptero 3-DOF.....	42
Figura 10 – Elevação e sinal de referência.	43
Figura 11 – Deslocamento e sinal de referência.....	44
Figura 12 – Resposta dos ângulos de elevação, arfagem e deslocamento do sistema.....	45
Figura 13 – Sinal de controle.....	46
Figura 14 – Índice de chaveamento Q.	47

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros físicos do sistema 3-DOF helicopter.....	36
--	----

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

LMI	Linear Matrix Inequalities
TS	Takagi-Sugeno
3-DOF	Three Degrees of Freedom
2-DOF	Two Degrees of Freedom
SeDuMi	Self-Dual Minimization Inequalities (Desigualdade de Minimização Auto-Dual)
Yalmip	Yet Another LMI Parser (Mais um analisador de LMI)
LPC	Laboratório de Pesquisa em Controle
UNESP	Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
FEIS	Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira
DC	Direct Current
MIMO	Multiple-input, multiple-output

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$ Conjunto dos números reais.

$\in$ Pertence

$\dot{x}(t)$ Derivada de $x(t)$

$<$ Menor que

$\sum_{i=1}^m$ Somatório com $i = 1, 2, \dots, m$

A^T Matriz A transposta

X^{-1} Matriz X inversa

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	15
1.1	Controle Robusto	15
1.2	Objetivos	16
1.3	Estrutura do Trabalho.....	17
2.	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	18
2.1	Espaço de Estados	18
2.2	Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs).....	19
2.3	Critério de Estabilidade de Lyapunov.....	20
2.4	LMIs para um sistema incerto, realimentado e com taxa de decaimento	23
2.6	Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno.....	25
3.	FUNÇÕES DE LYAPUNOV NÃO QUADRÁTICAS E CONTROLE CHAVEADO.....	27
3.1	Contexto	27
3.2	Desenvolvimento matemático	28
3.3	Resultados obtidos em (BUZETTI, 2021)	30
4.	O SISTEMA 3-DOF HELICOPTER	34
4.1	Sistema 3-DOF helicopter.....	34
4.2	Representação do sistema em espaço de estados	35
5.	RESULTADOS	39
5.1	Descrição dos vértices do sistema.....	39
5.2	Região de factibilidade.....	40
5.3	Simulação do sistema.....	42
6.	CONSIDERAÇÕES FINAIS	48
6.1	Perspectivas futuras.....	49
	REFERÊNCIAS	50

1. INTRODUÇÃO

1.1 Controle Robusto

O controle robusto é uma área fundamental dentro da engenharia de controle, que se dedica ao desenvolvimento de controladores para sistemas dinâmicos mesmo diante de incertezas, variações e perturbações externas (BISHOP, 2011). Esses controladores são projetados para proporcionar automaticamente maior confiabilidade mesmo diante de condições adversas, embora isso venha acompanhado de uma maior complexidade em comparação com os controladores clássicos.

Com a evolução da sociedade, os sistemas de controle experimentaram um desenvolvimento concomitante, particularmente notável no cenário da Revolução Industrial. Durante este marco histórico, a incorporação sistemática de maquinaria elétrica nas linhas de produção industrial assinalou uma transformação de magnitude considerável. Este fenômeno, por sua vez, trouxe a necessidade de abordagens de modelos matemáticos mais complexos. Tal exigência, então, se delineou como uma resposta à imperativa busca por aprimoramentos substanciais nas dimensões de segurança e eficiência inerentes aos referidos sistemas de controle (FISCHMAN, 1993).

Diferentemente da teoria clássica, em que a robustez era analisada após o projeto do controlador, com a teoria de controle robusto, os parâmetros incertos de um sistema, bem como possíveis falhas, começaram a ser levados em consideração durante o projeto. Dessa forma, determinam-se condições mínimas de desempenho para o sistema de controle, o que exige métodos matemáticos mais avançados, aliados a ferramentas computacionais altamente difundidas no meio (FISCHMAN, 1993).

Uma aplicação moderna da teoria de controle robusto, que exige alto nível de precisão e confiabilidade, como exemplo, tem-se o trabalho apresentado em Sanches (2013), em que foi projetado e implementado um sistema de estimulação elétrica neuromuscular, para geração de movimentos dos membros inferiores de pessoas com paraplegia. Nesse estudo, além da implementação de um controlador PID (Proporcional Integral e Derivativo), utilizaram-se também conceitos avançados de modelagem Fuzzy Takagi-Sugeno, processamento digital de sinais e biomedicina, mostrando o quanto essa área de pesquisa pode ser interdisciplinar e rica. Trabalhos hoje vão de aplicações em seres humanos a controle de veículos no geral, processos de produção, sistemas de segurança e etc.

Outro exemplo recente é o trabalho realizado em Da Silva (2007), em que se estuda a técnica conhecida como VSC (do Inglês, sliding mode control), também conhecida como

Controle à Estrutura Variável ou Controle por Modos Deslizantes. Uma das principais características desta técnica seria justamente a elevada robustez oferecida aos sistemas de malha fechada, idealmente possibilitando a um sistema desse tipo a característica de invariância, ou seja, não há dependência entre a resposta de malha fechada e os parâmetros da planta. Em Da Silva (2007), faz-se uso da técnica na área de pesquisa aeronáutica, com o objetivo de se projetar uma lei de controle de voo de aeronaves, considerando incertezas paramétricas.

Também no campo da aeronáutica, cita-se como exemplo o trabalho de Li *et al.* (2015), no qual foi desenvolvido um método de controle em tempo real sob os efeitos de atraso de tempo de rede e perturbação externa. Na pesquisa, projetou-se um controlador robusto H_∞ com um grau de decaimento de perturbação, de acordo com a descrição matemática do sistema.

Um grande desafio da área de controle, é o estudo de estabilidade para helicópteros que transportam cargas suspensas. Também conhecidos como helicópteros de carga, estes veículos são amplamente utilizados em diversas aplicações, como combate a incêndios e transporte de carga. No entanto, voar com uma carga suspensa pode ser uma tarefa desafiadora e, por vezes, perigosa, uma vez que a carga suspensa altera significativamente as características de voo do helicóptero. Se a carga suspensa precisa seguir uma trajetória específica para evitar obstáculos, ou se manobras de alta aceleração são necessárias, os desafios são ainda maiores (COUR-HARBO *et al.*, 2009).

No presente trabalho, buscou-se aproximar com o campo de sistemas de controle para aeronaves, através do estudo de controladores para um helicóptero de bancada. Um sistema que possui três graus de liberdade, oito variáveis de estado e, nesse caso, considerando massa total do sistema como incerta, fazendo-se uma analogia a um helicóptero de bombeiros, cuja massa varia durante uma operação de combate a incêndio.

1.2 Objetivos

Neste trabalho, aplica-se a teoria de controles chaveados, com projeto baseado em funções de Lyapunov não quadráticas, desenvolvida em Buzetti (2021), em um módulo didático 3-DOF Helicopter desenvolvido pela Quanser Inc., também conhecido como helicóptero de bancada. Através do desenvolvimendo inicial de um controle de ganho único, submete-se o sistema a uma análise comparativa de desempenho, verificando os resultados obtidos com controladores de ganho único e de ganhos chaveados. Em ambos os casos, considera-se a massa total do sistema como incerta, sendo expressa como função de valores máximos e mínimos. Como ferramenta computacional, todos os projetos e simulações apresentados neste trabalho

foram realizados no software Matlab/Simulink®. Os problemas com restrições LMIs foram implementados através do solver SeDuMi (STURM, 1999) em conjunto com a interface Yalmip (LOFBERG, 2004).

1.3 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

- Capítulo 1: Introdução a respeito da teoria de controle robusto.
- Capítulo 2: Fundamentos teóricos acerca das ferramentas matemáticas e computacionais utilizadas, incluindo espaço de estados, LMIs, conceito de estabilidade de Lyapunov e modelagem fuzzy-TS.
- Capítulo 3: Breve apresentação da teoria desenvolvida em Buzetti (2021), com foco nos tópicos aplicados neste trabalho.
- Capítulo 4: Descrição do sistema 3-DOF Helicopter.
- Capítulo 5: Apresentação dos resultados.
- Capítulo 6: Considerações finais e perspectivas futuras.

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo, apresentam-se os conceitos teóricos necessários para o desenvolvimento deste trabalho, elucidando a representação de sistemas através de espaço de estados, LMIs, estabilidade segundo Lyapunov e a aplicação do Matlab/Simulink®.

2.1 Espaço de Estados

Diferentemente da teoria de controle clássica, em que o desenvolvimento de um sistema de controle considera apenas uma entrada e uma saída, a teoria de controle moderno pode considerar sistemas que possuem múltiplas entradas e saídas (MIMO), o que trouxe a possibilidade de se projetar controladores mais complexos, com mais requisitos de projetos e índices de desempenho.

O estado de um sistema dinâmico é definido pelo conjunto de suas variáveis de estado, de tal forma que o conhecimento dessas variáveis inicialmente ($t = t_0$), junto com a entrada do sistema, conseguem descrever o comportamento do sistema em qualquer instante de tempo, ou seja, para determinar a condição atual do sistema em um determinado instante t , basta conhecer o estado inicial (em t_0) e a entrada para $t \geq t_0$ (OGATA, 2011).

Diferentemente da teoria de controle convencional, a teoria de controle moderno faz uso da descrição do sistema através de um conjunto de equações diferenciais, utilizando como representação matemática a notação vetor-matriz. Com essa técnica, o estudo dos sistemas dinâmicos se torna mais simples, uma vez que possibilita a programação computacional, sendo esta uma das grandes vantagens.

Um sistema linear invariante no tempo representado em espaço de estados segue a seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (2)$$

sendo $\dot{x}(t)$ (também interpretado como o “futuro do sistema”) a derivada do vetor de estados $x(t)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ as matrizes com as características dinâmicas do sistema, $u(t)$ o vetor de entrada do sistema, ou seja, são os sinais que serão inseridos na planta,

no caso do 3-DOF Helicopter, o vetor $u(t)$ é composto pelas tensões aplicadas nos seus dois motores. Por fim, $y(t)$ representa o vetor de saída do sistema.

A lei de controle com realimentação do vetor de estados é dada por:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (3)$$

sendo K o vetor com os valores dos ganhos do controlador projetado.

2.2 Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

Linear Matrix Inequalities – LMIs (Desigualdades Matriciais Lineares, traduzido do inglês), trata-se de uma ferramenta matemática para projeto de controladores, proposta por Alexandr Mikhailovich Lyapunov.

Em Boyd *et al.* (1994), apresenta-se um resumo a respeito dos grandes marcos históricos com relação às LMIs, sendo estes:

- Em 1890: Surgimento da primeira LMI, com uma solução analítica da LMI de Lyapunov através da equação de Lyapunov.
- Nos anos 40: Tem-se a primeira aplicação dos métodos de Lyapunov em problemas reais de engenharia de controle.
- Nos anos 60: Através do lema PR, surgiram novas técnicas de resolução de outras famílias de LMIs e, mais tarde no final da década, outros métodos foram descobertos.
- Nos anos 80: Introdução da resolução de LMIs através de problemas de programação convexos, mais tarde, com o desenvolvimento dos algoritmos de pontos interiores.

Nas últimas décadas, as LMIs surgiram como uma poderosa ferramenta no campo de análise e projeto de sistemas de controle. Através desta, é possível resolver problemas de realimentação de estados, estudo de robustez, controle H_2 e H_∞ , devido aos desenvolvimentos de algoritmos que proporcionam uma solução eficiente e numericamente confiável (DUAN *et al.*, 2013).

As LMIs representam um conjunto de restrições, com notação matricial, que são utilizadas para descrever a dinâmica do sistema. Com essa ferramenta, é possível considerar múltiplas variáveis matriciais ao mesmo tempo, dentro de restrições de projeto, escritas na forma de inequações. Dessa forma, o projeto de controladores de um sistema, pode ser descrito como problemas de otimização convexos, que contemplam todas as possíveis limitações que o

sistema possa apresentar, e as soluções desses problemas, quando existem, podem ser encontradas computacionalmente através de solvers matemáticos.

Pela definição dada em Boyd *et al.* (1994), uma desigualdade matricial linear possui a seguinte forma:

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad (4)$$

sendo x a variável pertencente a $\mathbb{R}^m$, $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$, são matrizes simétricas conhecidas, com os índices $i = 0, \dots, m$. É importante salientar que o sinal de maior ou igual na equação (2), mostra que $F(x)$ é positiva definida, sendo uma LMI equivalente a um conjunto de desigualdades lineares em x , com menores principais que devem ser sempre positivos também.

2.3 Critério de Estabilidade de Lyapunov

Historicamente, o análise da estabilidade de sistemas dinâmicos sempre chamou a atenção de várias áreas das ciências exatas, à medida que grandes pesquisadores matemáticos e físicos buscavam definir os conceitos de estabilidade.

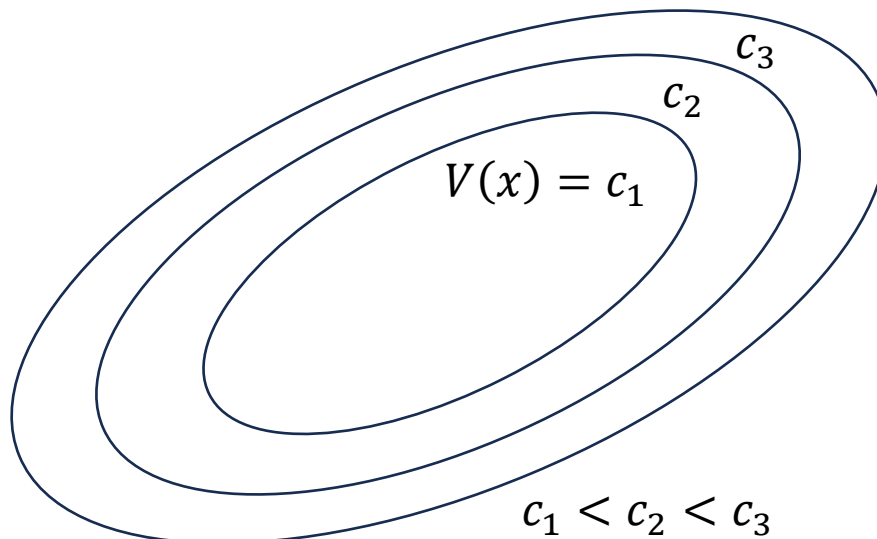
Torricelli, foi um dos primeiros cientistas a formalizar o princípio que chamou de "*menor energia total*", declarando que um sistema de corpos estaria em um ponto de equilíbrio estável caso este fosse um ponto em que a energia total é mínima (localmente) (SASTRY, 1999).

Laplace e Lagrange, no meio do século XVIII, levaram o princípio de Torricelli ainda mais adiante ao mostrar que, se o sistema for conservativo, ou seja, conserva a energia total (cinética mais potencial), então um estado com energia cinética zero e energia potencial mínima representa um ponto de equilíbrio estável (SASTRY, 1999). Entretanto, a caracterização de um critério de estabilidade surgiu apenas em 1892, feita pelo matemático e engenheiro russo Lyapunov, definindo um método também conhecido como "*método direto*" ou "*segundo método de Lyapunov*", que também faz uma análise considerando a energia total de um sistema, semelhante ao que foi iniciado por Torricelli.

Definição 1. (KHALIL, 2009) Seja $V(x(t))$ uma função candidata à função energia de um sistema, considerando que a energia inicial é positiva, ou seja, $V(x(t)) > 0$. Um sistema é considerado assintoticamente estável no conceito de Lyapunov se, para $x(t) \neq 0$, a energia do sistema variar negativamente até zero, ou seja, $\dot{V}(x(t)) < 0$, atingindo o ponto de equilíbrio.

Para ilustrar o critério de estabilidade de Lyapunov de uma forma mais visual, apresenta-se a Figura 1, introduzindo também os conceitos de superfícies de Lyapunov, domínio, origem e trajetória.

Figura 1 - Níveis de superfícies de uma função de Lyapunov.



Fonte: Adaptado de Khalil (2009).

A Figura 1 mostra as superfícies de Lyapunov para valores crescentes de c . Definindo-se $\dot{V}(x(t)) < 0$, quando uma trajetória cruza uma superfície de Lyapunov $V(x(t)) = c$, ela se move dentro do conjunto $\Omega_c = \{V(x(t)) \leq c\}$ e não pode sair mais. Então, quando $\dot{V}(x(t)) < 0$, a trajetória se move de uma superfície c de Lyapunov para outra superfície mais interna e, à medida que c diminui, $V(x(t)) = c$ se contrai cada vez mais, fazendo com que a trajetória se aproxime da origem ao longo do tempo.

Uma possível candidata à função de Lyapunov (quadrática), tem a seguinte forma:

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t), \quad (5)$$

em que P é uma matriz simétrica positiva e definida.

Inicialmente, é preciso garantir que a função $V(x(t))$ é positiva para $x(t)$ não nulo e, para isso, basta garantir a positividade da matriz P . Então, pelo critério de Sylvester, tem-se que:

$$P_{11} > 0, \det \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} > 0, \dots, \det \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} > 0 \quad (6)$$

Logo, se todos os menores principais da matriz P forem positivos, garante-se que a matriz P também é positiva.

Em sequência, é necessário garantir que a derivada da função energia $\dot{V}(x(t))$ é negativa para $x(t)$ não nulo. Para isso, parte-se da equação (5), aplicando a propriedade da derivada do produto, resultando no que segue:

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t), \quad (7)$$

sabendo que um sistema dinâmico pode ser representado por $\dot{x}(t) = Ax(t)$, fazendo a substituição na equação (7) e fazendo as simplificações, tem-se:

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)^T (A^T P + P A) x(t). \quad (8)$$

Nota-se a semelhança entre as equações (8) e (7), portanto, de maneira análoga, a negatividade da derivada da função energia do sistema é garantida se:

$$A^T P + P A < 0. \quad (9)$$

Portanto, a análise de estabilidade segundo o critério de Lyapunov se resume no seguinte teorema:

Teorema 1: (BOYD *et al.*, 1994) Considere o sistema em espaço de estados descrito da seguinte forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (10)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz constante e não singular. Para que o estado de equilíbrio $x_e = 0$ seja assintoticamente estável, uma condição necessária e suficiente é que exista uma matriz simétrica positiva e definida

$$P > 0, \quad (11)$$

tal que

$$A^T P + PA < 0.$$

2.4 LMIs para um sistema incerto, realimentado e com taxa de decaimento

Considerando o sistema representado na equação (1), e a lei de controle da equação (3), seja o sistema realimentado como apresentado em Boyd *et al.* (1994), é válido o seguinte teorema:

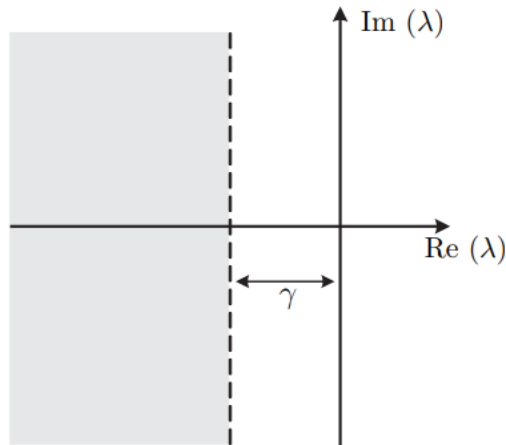
Teorema 2: (BOYD *et al.*, 1994) Considere o sistema descrito por (1). Caso exista uma matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e uma matriz simétrica positiva e definida $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que:

$$XA^T - M^T B^T + AX - BM < 0, \quad (12)$$

então a lei de controle dada em (3), sendo $K = MX^{-1}$, torna o sistema (1) estável.

Então, como mencionado anteriormente, para desenvolver a LMI (5), basta adicionar a taxa de decaimento à LMI (12). A taxa de decaimento é um índice de desempenho que está relacionado com a velocidade de resposta do sistema, ou seja, diz o quão rápida será a convergência das variáveis de estado do sistema. Graficamente, como apresentado na Figura 2, a taxa de decaimento faz uma alocação dos autovalores, quanto maior for seu valor, mais distante os autovalores estarão do eixo imaginário.

Figura 2 – Representação gráfica da taxa de decaimento.



Fonte: (SILVA *et al*, 2012)

Segundo Boyd *et al.* (1994), a taxa de decaimento é definida da forma como segue:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\gamma t} \|x(t)\| = 0, \quad (13)$$

sendo γ a maior constante positiva, válida para todas as trajetórias $x(t)$ com $t > 0$. Além disso, para se determinar o valor mínimo de γ , tem-se:

$$\dot{V}(x(t)) \leq -2\gamma V(x(t)). \quad (14)$$

Portanto, adicionando a taxa de decaimento na equação (12), tem-se a nova LMI:

$$XA^T - M^T B^T + AX - BM + 2\gamma X < 0. \quad (15)$$

Como citado anteriormente, este trabalho acrescenta uma incerteza politópica na planta do sistema, portanto, sabendo-se que o número de vértices de um politopo é dado por 2^s , sendo s o número de incertezas paramétricas, o sistema possui dois vértices, pois: $s = 1$, então $2^1 = 2$.

Logo, o sistema descrito por (1) terá duas matrizes A e duas matrizes B , fazendo-se necessária a adição de um subíndice i para diferenciar entre os modelos locais. Dessa forma, a LMI descrita em (15) se torna completa através da formalização do Teorema 3 desenvolvido em Boyd *et al.* (1994).

Teorema 3. (BOYD *et al.*, 1994) Caso exista um escalar $\gamma > 0$, uma matriz simétrica definida e positiva $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que:

$$XA_i^T - M^T B_i^T + A_i X - B_i M + 2\gamma X < 0, \quad (16)$$

para todo $i = 1, 2, \dots, r$, a lei de controle dada em (3), sendo $K = MX^{-1}$, torna o sistema (1) estável, considerando a taxa de decaimento maior ou igual a γ .

Desta forma, para projetar um controle robusto de ganho único para um sistema invariante no tempo, com incertezas e sujeito a falhas, considerando taxa de decaimento, deve-se encontrar uma solução factível para as LMIs do Teorema 3.

2.5 Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno

A maioria dos sistemas dinâmicos físicos na prática não pode ser modelada por equações diferenciais lineares, apresentando uma natureza intrinsecamente não linear. Ao mesmo tempo, métodos de controle linear baseiam-se na premissa crítica de uma pequena faixa de operação para o modelo linear, derivado da linearização do sistema não linear, para serem válidos. Nos casos em que a amplitude de operação necessária é extensa, a probabilidade de instabilidade aumenta para um controlador linear, uma vez que as não linearidades na planta não podem ser adequadamente tratadas (MEHRAN, 2008).

Uma outra suposição do controle linear é que o modelo do sistema é realmente linearizável e que o modelo linear é suficientemente preciso para construir o controlador. No entanto, a natureza altamente não linear e descontínua de muitos sistemas, como os mecânicos e elétricos, por exemplo, não permite uma aproximação linear confiável. Além disso, no processo de projetar controladores, é necessário que o modelo do sistema seja bem equacionado e que seus parâmetros sejam conhecidos. No entanto, para muitas plantas não lineares, como processos químicos, construir um modelo matemático é muito difícil (MEHRAN, 2008).

Nesse contexto, para lidar com a dificuldade de estudo de controle de sistemas não lineares, surge a modelagem fuzzy, com a metodologia de desenvolver um modelo não linear composto por vários submodelos que sejam simples, compreensíveis e responsáveis por subdomínios específicos.

A modelagem fuzzy Takagi-Sugeno (ou fuzzy TS) possibilitou a descrição de uma ampla classe de sistemas não lineares, através da representação dos mesmos como uma combinação convexa de sistemas lineares. Dessa forma, um problema com maior complexidade

de análise, devido a sua natureza não linear, torna-se mais simples (TAKAGI et al, 1985). Essa modelagem é da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = A(h(x(t)))x(t) + B(h(x(t)))u(t), \quad (17)$$

sendo:

$$A(h(t)) = h_1(x(t))A_1 + h_2(x(t))A_2 + \cdots + h_r(x(t))A_r, \quad (18)$$

$$B(h(t)) = h_1(x(t))B_1 + h_2(x(t))B_2 + \cdots + h_r(x(t))B_r, \quad (19)$$

em que (A_i, B_i) são matrizes constantes que representam os modelos locais i , $h_i(x(t))$ é o peso relacionado aos modelos locais i , $h_i(x(t)) \geq 0, i = 1, 2, \dots, r$. Além disso, tem-se que:

$$h_1(x(t)) + h_2(x(t)) + \cdots + h_r(x(t)) = 1. \quad (20)$$

Então, para esse tipo de modelagem de sistemas, a lei de controle mostrada na equação (3) é reescrita da seguinte forma:

$$u(t) = -K(h(t))x(t), \quad (21)$$

sendo que $K(h(t))$ é calculado através da combinação dos pesos $h_i(x(t))$ e os ganhos do controlador, como segue:

$$K(h(t)) = h_1(x(t))K_1 + h_2(x(t))K_2 + \cdots + h_r(x(t))K_r. \quad (22)$$

3. FUNÇÕES DE LYAPUNOV NÃO QUADRÁTICAS E CONTROLE CHAVEADO

Recentemente, em Buzetti (2021), foi proposta uma nova estrutura de controlador, inspirada em Márquez *et al.* (2016) mas com a introdução de chaveamento nos controladores, que permite o controle chaveado robusto de sistemas não lineares, com incertezas paramétricas, descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Foi verificado que esse método apresenta menor conservadorismo do que alguns controladores chaveados disponíveis, que costumam ser menos conservadores comparados a controladores com ganho único.

Neste capítulo, apresenta-se de maneira sucinta a teoria proposta em Buzetti (2021), com o objetivo de se introduzir as LMIs desenvolvidas com o uso das funções de Lyapunov não quadráticas.

3.1 Contexto

O trabalho realizado em Buzetti (2021) tem como objetivo a criação de um método de controle chaveado utilizando uma função de Lyapunov não quadrática, para um módulo didático 2-DOF ball balancer desenvolvido pela Quanser Inc. Busca-se controlar o sistema com incertezas paramétricas e com desempenho garantido por uma taxa de decaimento, e ao mesmo tempo, obtém-se uma redução do conservadorismo do projeto.

É vantajoso e muitas vezes necessário que o controlador seja robusto para controlar o sistema, mesmo que haja incertezas na planta do sistema, para garantir a segurança e a confiabilidade do sistema controlado (BUZETTI, 2021).

O trabalho feito em Buzetti (2021) encontra suas principais fontes de inspiração em Márquez *et al.* (2016), o qual ilustra a significativa redução do conservadorismo em métodos de controle mediante a aplicação de função de Lyapunov não quadrática, e em Souza *et al.* (2013), que propõe um método de controle chaveado capaz de controlar sistemas com parâmetros incertos na estrutura do sistema.

Em suma, busca-se aproveitar as vantagens de ambos os trabalhos de inspiração: a capacidade de controlar sistemas com incertezas paramétricas sem o acesso às funções de pertinência e a ampliação da região de factibilidade (BUZETTI, 2021).

3.2 Desenvolvimento matemático

Controladores para sistemas não lineares, descritos pela modelagem fuzzy Takagi-Sugeno, normalmente fazem uso de funções de Lyapunov (LYAPUNOV, 1992), sendo a função quadrática mostrada na equação (5) e destacada novamente da mesma forma:

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t),$$

Entretanto, uma outra classe de funções de Lyapunov, proposta em Márquez *et al.* (2016), não quadrática, apresenta um menor conservadorismo quando comparada com alguns métodos disponíveis na literatura, e não necessita do conhecimento dos limitantes das derivadas com respeito ao tempo dos pesos $h_i(x(t))$, diferentemente das funções de Lyapunov fuzzy (MOZELLI *et al.*, 2009).

As funções de Lyapunov não quadráticas apresentam a seguinte forma:

$$V(x(t)) = x(t)^T [v_1(t)P_1 + v_2(t)P_2 + \cdots + v_r(t)P_r]^{-1} x(t), \quad (23)$$

em que $P_i = P_i^T > 0$ são matrizes constantes, $v_i(t) = \frac{1}{\zeta} \int_{t-\zeta}^t h_i(x(t)) dt$, ζ é uma constante positiva e $h_i(x(t))$ é o peso relacionado ao modelo local i já definido anteriormente, $i = 1, 2, \dots, r$.

Em sequência, apresenta-se o desenvolvimento das Equações (24) – (31), que pode ser encontrado com todos os detalhes em Buzetti (2021).

Considerando um sistema descrito através da modelagem fuzzy-TS (17), cuja entrada é dada por:

$$u(t) = \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \bar{h}_k(t) v_l(t) M_{\sigma kl} \left(\sum_{l=1}^s v_l P_l \right)^{-1} x(t), \quad (24)$$

sendo $\bar{h}_k(t)$ e $v_l(t)$ definidos em (28), $M_{\sigma kl} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, já apresentado anteriormente, $P_l > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica positiva e definida, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrizes com incertezas paramétricas da seguinte forma:

$$A = \sum_{i=1}^s \alpha_i(t) A_i, \quad (25)$$

$$B = \sum_{i=1}^s \alpha_i(t) B_i. \quad (26)$$

Considerando que $\alpha_i(t) \geq 0$, $\sum_{i=1}^s \alpha_i(t) = 1$, $i \in \mathbb{K}_s$. $M_{\sigma kl}$ é o ganho chaveado com a lei de chaveamento:

$$\sigma = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_s} \{x(t)^T \mathbb{P}^{-1} \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s h_k^-(t) v_l(t) Q_{ikl} \mathbb{P}^{-1} x(t)\}. \quad (27)$$

Define-se $h_i, h_i^-, v_i \geq 0 \in \mathbb{K}_s$, $\sum_{i=1}^s h_i = \sum_{i=1}^s h_i^- = \sum_{i=1}^s v_i = 1$, $i \in \mathbb{K}_s$, $Q_{ikl} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, é uma matriz simétrica e $\mathbb{P}$ está definida em (29). Sendo que h_i segue a lei de chaveamento (27), h_i^- é o h_i atrasado em ζ segundos, sendo $\zeta > 0$ uma constante dada v_i é a integral de h_i , ou seja:

$$h_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = \sigma, \\ 0, & \text{se } i \neq \sigma, \end{cases}$$

$$h_i^-(t) = h_i(t - \zeta),$$

$$v_i(t) = \frac{1}{\zeta} \int_{t-\zeta}^t h_i(\tau) d\tau \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^s v_i(t) = \frac{1}{\zeta} \int_{t-\zeta}^t \sum_{i=1}^s h_i(\tau) d\tau = \frac{1}{\zeta} (t - (t - \zeta)) = 1. \quad (28)$$

Então, a matriz $\mathbb{P}$ e sua derivada $\dot{\mathbb{P}}$, considerando a definição de $v_i(t)$ em (28), podem ser descritas como segue:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &= \sum_{l=1}^s v_l(t) P_l, \\ \dot{\mathbb{P}} &= \sum_{l=1}^s \dot{v}_l(t) P_l = \frac{1}{\zeta} \left(\sum_{j=1}^s h_j(t) P_j - \sum_{k=1}^s h_k^-(t) P_k \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Portanto, considerando a função de Lypunov não quadrática da forma (23) e as equações desenvolvidas, formaliza-se o estudo da estabilidade no Teorema 4.

Teorema 4. (BUZETTI, 2021) O ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ do sistema controlado descrito por (1) e (24), com a lei de chaveamento dada em (27)-(29) e considerando os parâmetros incertos $\alpha_i(t)$, $i \in \mathbb{K}_s$ em (25) e (26), é globalmente assintoticamente estável, com taxa de decaimento definida por um escalar $\beta > 0$, se as seguintes LMIs forem satisfeitas:

$$A_i P_l + B_i M_{jkl} + P_l A_i^T + M_{jkl}^T B_i^T - \frac{1}{\zeta} (P_j - P_k) - Z_{ikl} - Q_{jkl} + 2\beta P_l < 0, \quad (30)$$

$$Z_{ikl} + Q_{ikl} \leq 0, \quad (31)$$

sendo $P_l \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes simétricas definidas e positivas, $Z_{ikl}, Q_{jkl} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes simétricas, $M_{jkl} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i, j, k, l \in \mathbb{K}_s$, em que s é o número de vértices do politopo apresentado em (25) e (26), que descreve o modelo matemático da planta.

Com as LMIs (30) e (31) apresentadas no Teorema 4, torna-se possível a realização da análise da região de factibilidade prevista neste trabalho.

3.3 Resultados obtidos em Buzetti (2021)

Neste tópico, apresenta-se de maneira objetiva alguns dos resultados obtidos em Buzetti (2021), relacionados à análise de factibilidade de técnicas de controle distintas.

Inicialmente, considera-se um sistema de natureza difícil de ser controlada, que é apresentado em Márquez *et al.* (2016). Justamente pela dificuldade aumentada, este se torna um bom exemplo inicial para verificar o conservadorismo do método (BUZETTI, 2021). A ideia principal é comparar três metodologias diferentes: o Teorema 4, que utiliza várias matrizes P_l , o controle chaveado utilizando P constante apresentado no Teorema 2 de Buzetti (2021), baseado em Souza *et al.* (2014) e por fim, o Teorema 1 de Márquez *et al.* (2016).

O sistema fictício dado em Márquez *et al.* (2016), representado em espaço de estados por (1), cuja entrada é caculada por (3), considerando a modelagem fuzzy TS (24)-(26), apresenta os seguintes vértices:

Exemplo 1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1,59 & -7,29 \\ 0,01 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0,02 & -4,64 \\ 0,35 & 0,21 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix},$$

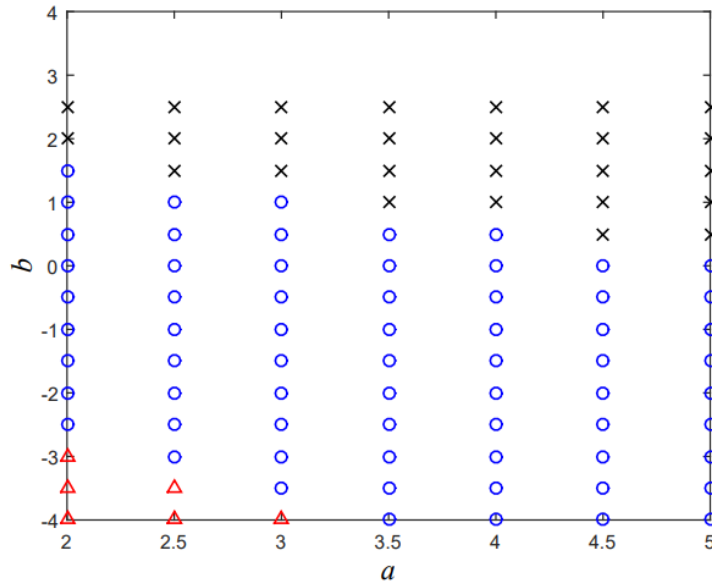
$$A_3 = \begin{bmatrix} -a & -4,33 \\ 0 & 0,05 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} -b + 6 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0,89 & -5,29 \\ 0,1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O teste realizado em (BUZETTI, 2021) considera $a = 2$ e $b = 1,5$, utilizando as LMIs do Teorema 4 para o projeto do controlador, com taxa de decaimento $\beta = 0$ e $\zeta = 0,1$ s.

Na Figura 3, apresentam-se os resultados para o sistema fictício de Márquez *et al.* (2016), sendo (Δ) para o controle chaveado de P constante baseado em Souza *et al.* (2014), ($\Delta, \circ$) para o Teorema 4 e ($\Delta, \circ, \times$) para o Teorema 1 Márquez *et al.* (2016).

Figura 3 – Factibilidade para 3 diferentes técnicas de controle.



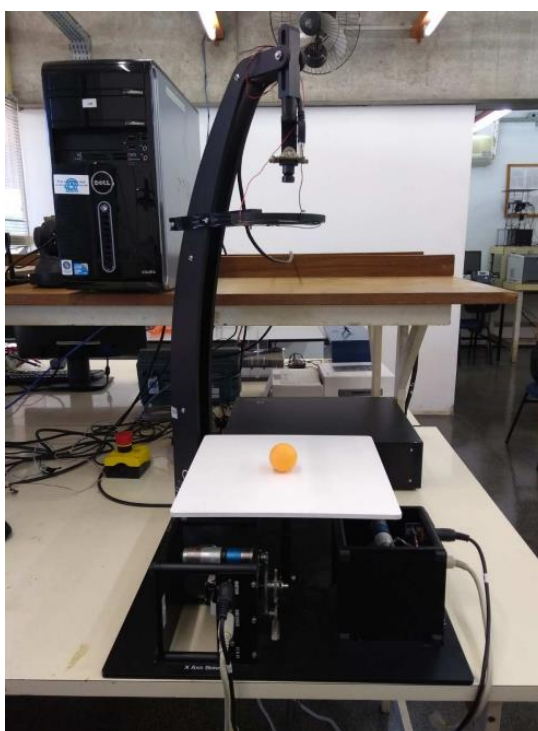
Fonte: (BUZETTI, 2021).

Analisando a Figura 3, observa-se uma considerável superioridade do controlador apresentado no Teorema 4, em relação ao controlador chaveado do Teorema 2 de Buzetti (2021) que utiliza P constante. Quando comparado o resultado do Teorema 4 com o que é apresentado em Márquez *et al.* (2016), nota-se que a factibilidade é menor, porém a grande vantagem do Teorema 4 é permitir o projeto da lei de controle que não necessita do conhecimento dos parâmetros $\alpha_i(t)$, $i \in \mathbb{K}_s$, que podem ser incertos e assim não disponíveis, enquanto que, o controle proposto por Márquez *et al.* (2016) necessita do conhecimento da condição do sistema a cada instante (BUZETTI, 2021).

Após o estudo da factibilidade, fez-se uma simulação do sistema fictício, cujos resultados podem ser encontrados em Buzetti (2021).

Em sequência, partiu-se para o projeto de um controlador para o sistema 2-DOF ball balancer, também presente no LPC e fabricado pela Quanser Inc. Este módulo didático consiste basicamente de uma placa com formato quadrado, sobre a qual uma esfera é colocada para se mover de maneira livre. Na Figura 4 é apresentada uma foto do sistema, obtida no LPC da FEIS.

Figura 4 – Fotografia do módulo 2-DOF ball balancer do LPC.

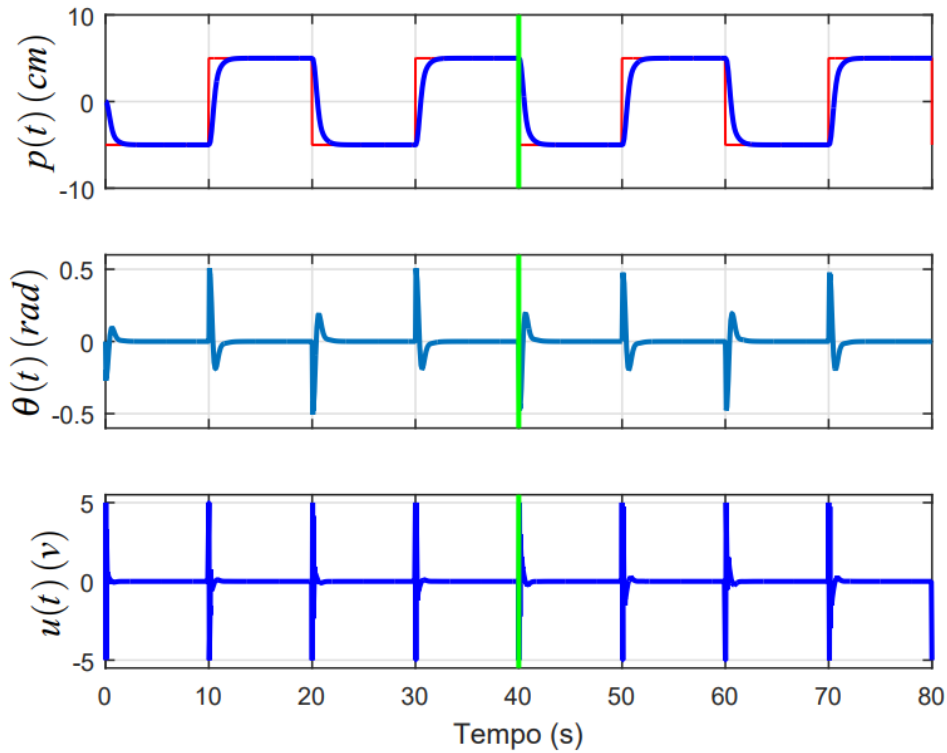


Fonte: (BUZETTI, 2021).

A modelagem deste sistema pode ser encontrada com detalhes em Buzetti (2021) ou em Quanser (2008). Nesta etapa da revisão bibliográfica, foca-se apenas no resultado final.

A simulação do sistema foi feita considerando as LMIs (30) e (31) e uma possível falha no atuador de 50%, inserida no tempo de 40 segundos. Estabeleceu-se também um limite na entrada $u(t)$ de ± 5 V. Na Figura 5, apresenta-se os gráficos gerados, sendo o primeiro o gráfico da posição horizontal da bolinha $p(t)$ e o sinal de referência, representando a trajetória descrita pela esfera sobre a placa, o segundo gráfico mostrando $\theta(t)$, sendo este o ângulo de carga e por fim, o gráfico da entrada de controle $u(t)$.

Figura 5 – Resultados da simulação do sistema 2-DOF ball balancer.



Fonte: (BUZETTI, 2021).

Nesta simulação, também foi possível notar a eficiência das LMIs do Teorema 4 para projeto de controladores, visto que, mesmo com a inserção de uma falha aos 40 segundos de simulação, o sistema permaneceu estável, entregando um desempenho computacionalmente satisfatório.

Além de simular, realizou-se uma implementação no sistema presente no LPC, porém como o objetivo do presente trabalho é permancer no campo da simulação, os resultados da implementação prática podem ser conferidos em Buzetti (2021).

Após estudo teórico do trabalho de Buzetti (2021), com foco nas LMIs (30) e (31), na lei de chaveamento (27) e entrada $u(t)$ dada em (24), analisando principalmente a facibilidade e a eficiência deste tipo de projeto de controladores, partiu-se para a aplicação desta metodologia no sistema 3-DOF helicopter, também buscando um estudo inicial de factibilidade e depois simulação.

4. O SISTEMA 3-DOF HELICOPTER

4.1 Sistema 3-DOF helicopter

O objeto estudado se trata de um helicóptero de bancada, desenvolvido pela Quanser Inc.. Sua estrutura é formada basicamente dos seguintes componentes: dois motores DC – motores de corrente contínua (do Inglês, direct current motors), conectados a duas hélices, posicionados simetricamente opostos; entre os dois motores, está presa uma haste metálica principal, que conecta os motores ao contrapeso, localizado na outra ponta; base de sustentação, localizada em um ponto intermediário da haste metálica; e como medida de proteção, ao redor das hélices há uma estrutura metálica que impede o contato direto durante o funcionamento do helicóptero. Na Figura 6, apresenta-se uma imagem do sistema completo.

Figura 6 – Sistema 3-DOF helicopter.



Fonte: (QUANSER, 2019).

O sistema possui 3 graus de liberdade, sendo estes:

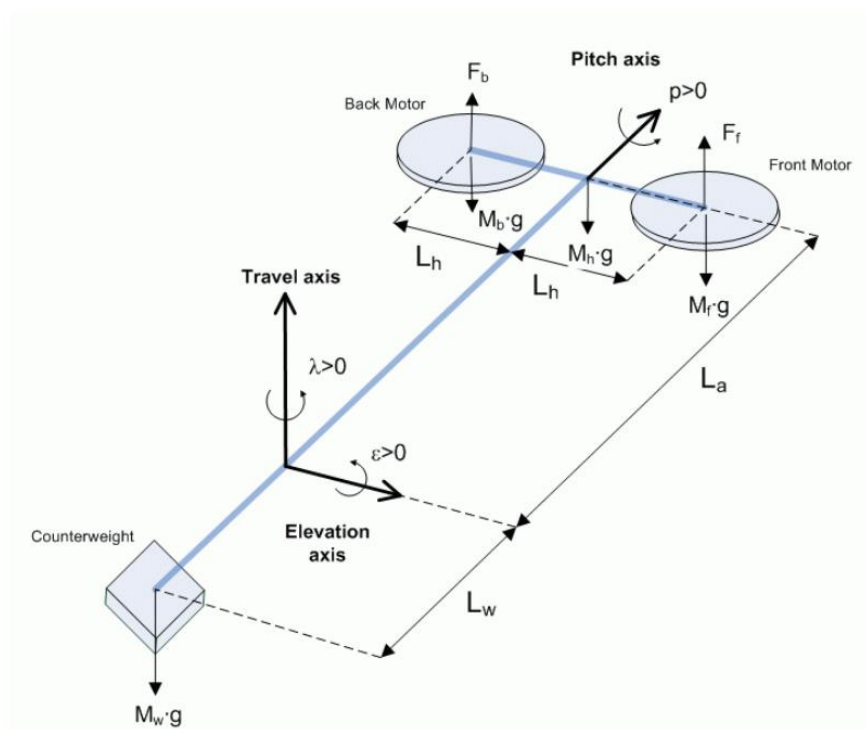
- Elevação: ângulo “ ϵ ” que varia de aproximadamente -30° (posição inicial, em repouso em cima da bancada) a 0° (posição durante a operação);
- Arfagem: ângulo “ τ ”, que se trata da inclinação em torno do próprio eixo, necessária para iniciar o deslocamento para frente ou para trás. Um pequeno valor acima ou abaixo de 0° já é o suficiente para iniciar a movimentação;
- Deslocamento: ângulo “ λ ”, que varia de 0° a 360° , tratando-se da rotação realizada em torno da base de sustentação.

4.2 Representação do sistema em espaço de estados

Para projetar o controlador do sistema, é necessário primeiro entender a representação do mesmo em espaço de estados, para assim poder visualizar as entradas, os parâmetros e como isso influencia no comportamento do sistema.

Então, para facilitar a visualização, apresenta-se na Figura 7 o diagrama de corpo livre do sistema estudado.

Figura 7 – Diagrama de corpo livre do helicóptero.



Fonte: (QUANSER, 2019).

Os valores dos parâmetros mostrados no diagrama são dados em Quanser (2019), sendo estes descritos então na Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros físicos do sistema 3-DOF helicopter.

Símbolo	Descrição	Valor e unidade
M_f	Massa do motor frontal	0,713 kg
M_b	Massa do motor traseiro	0,713 kg
M_h	Massa aproximada do helicóptero	1,15 kg
M_w	Massa do contrapeso	1,87 kg
K_f	Constante de força-empuxo das hélices	0,1188 N/V
L_h	Distância entre o eixo de rotação e cada motor	0,178 m
L_a	Distância do eixo de deslocamento até o helicóptero	0,660 m
L_w	Distância do eixo de deslocamento até o contrapeso	0,470 m
g	Aceleração da gravidade	9,81 m/s ²

Fonte: Adaptado de Quanser (2019).

Uma vez conhecendo os parâmetros físicos do sistema, apresenta-se então a descrição do mesmo em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon} \\ \dot{\tau} \\ \dot{\lambda} \\ \ddot{\epsilon} \\ \ddot{\tau} \\ \ddot{\lambda} \\ \dot{\xi} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \epsilon \\ \tau \\ \lambda \\ \dot{\epsilon} \\ \dot{\tau} \\ \dot{\lambda} \\ \xi \\ \gamma \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} V_f \\ V_b \end{bmatrix}, \quad (32)$$

Nota-se então, que este se trata de um sistema com oito variáveis de estado, sendo ξ e γ dois estados inseridos artificialmente, com o objetivo de melhorar a capacidade de rastreamento dos sinais de referência ϵ_{ref} e λ_{ref} , respectivamente. Estes estados são definidos matematicamente como:

$$\xi = \int_0^t (\varepsilon - \varepsilon_{ref}) dt, \quad (33)$$

$$\gamma = \int_0^t (\lambda - \lambda_{ref}) dt. \quad (34)$$

Além disso, as entradas são V_f e V_b são os sinais de controle, representados como as tensões aplicadas nos motores frontal e traseiro.

Definem-se então as matrizes A e B do sistema como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(L_w M_w - 2L_a M_f)g}{M_w L_w^2 + 2M_f L_h^2 + 2M_f L_a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{L_a K_f}{2M_f L_a^2 + M_w L_w^2} & \frac{L_a K_f}{2M_f L_a^2 + M_w L_w^2} \\ \frac{1}{2} \frac{K_f}{M_f L_h} & -\frac{1}{2} \frac{K_f}{M_f L_h} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Tem-se também a matriz C relacionada à equação (2) de saída do sistema:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Em Quanser (2019), define-se também a equação da tensão de operação do helicóptero, como resultado das forças de empuxo atuantes nos três graus de liberdade do sistema:

$$V_{op} = \frac{1}{2} \frac{g(L_w m_w - L_a m_f - L_a m_b)}{L_a K_f} \quad (38)$$

Salienta-se que, apesar do helicóptero estudado se tratar de um sistema não linear, o modelo utilizado acima foi linearizado, como apresentado em Quanser (2019).

5. RESULTADOS

Este tópico foi dividido em três partes, a primeira com foco na descrição dos vértices do sistema, a segunda parte apresenta a região de factibilidade obtida, analisando as diferenças entre as técnicas aplicadas e, a terceira parte, que mostra o resultado da simulação de um dos pontos em que apenas o controle chaveado garante a estabilidade.

5.1 Descrição dos vértices do sistema

Inicialmente, foi preciso determinar as matrizes A e B do sistema. No caso deste trabalho, os vértices estavam associados ao eventual cenário de falha e à incerteza colocada na massa do helicóptero M_h em que, nesse caso, fez-se a seguinte aproximação $M_h = 2M_f = 2M_b$. Visto que M_f é o parâmetro utilizado nas equações (35) e (36), tem-se então:

$$M_f = \frac{M_h}{2}. \quad (39)$$

Considerou-se que a massa total pode variar entre 0,80 kg e 1,30 kg, ou seja, em relação à massa original $M_h = 1,15$ kg apresentada na Tabela 1, a faixa estabelecida representa um cenário em que há possibilidade de diminuição da massa em aproximadamente 30% e também um aumento de aproximadamente 13%. Além disso, decidiu-se que seria considerado nos cálculos uma falha de 50% nos motores do helicóptero. Na prática, as matrizes B do sistema foram multiplicadas por 0,5.

Então, calcularam-se os vértices do sistema utilizando as equações (35) e (36), obtendo-se os seguintes resultados:

$$A\{1\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4,3745 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B\{1\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,1030 & 0,1030 \\ 0,8343 & -0,8343 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A\{2\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,2009 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B\{2\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0801 & 0,0801 \\ 0,5134 & -0,5134 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A\{3\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4,3745 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B\{3\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0515 & 0,0515 \\ 0,4171 & -0,4171 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$A\{4\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,2009 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B\{4\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0400 & 0,0400 \\ 0,2567 & -0,2567 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.2 Região de factibilidade

O objetivo de se analisar regiões de factibilidade, para diferentes técnicas de controle, é justamente entender até que ponto a estabilidade é garantida, possibilitando uma comparação direta quanto à eficiência de cada um dos métodos.

No software Matlab®, fez-se inicialmente a declaração de todos os parâmetros do sistema e foram calculados todos os vértices. Em seguida, fez-se a programação das LMIs do Teorema 3 necessárias para o projeto do controle de ganho único, considerando a taxa de decaimento $\gamma = 2$. Este valor foi determinado após sequência de testes, com o objetivo de tornar o sistema bastante restritivo.

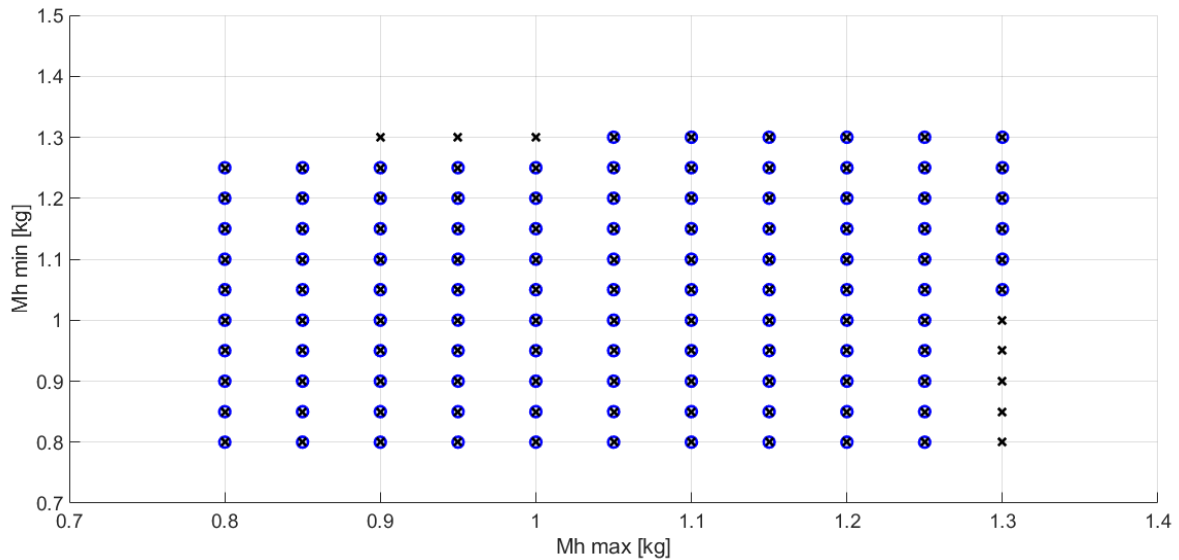
Na programação, variou-se a massa mínima $M_h min$, com faixa de 0,8 – 1,3 kg e passo de 0,05 kg, e a massa máxima $M_h max$, com faixa de 1,3 – 0,8 kg e passo de -0,05 kg. Dessa

forma, verificou-se as soluções factíveis para as LMIs considerando todas as combinações possíveis de valores de massa total do sistema.

Em sequência, foi seguido o mesmo procedimento, porém com a programação das LMIs do Teorema 4, necessárias para o projeto de controladores chaveados que utilizam funções de Lyapunov não quadráticas, também considerando taxa de decaimento $\beta = 2$. Durante a execução do programa, tomou-se o cuidado para “congelar” o gráfico gerado no primeiro caso, para que assim fosse possível plotar os pontos factíveis do controle chaveado no mesmo gráfico, facilitando a comparação entre os dois métodos.

O gráfico final da região de factibilidade pode ser encontrado na Figura 8.

Figura 8 – Região de factibilidade para o Teorema 3 (○) e para o Teorema 4 (×).



Fonte: Elaborado pelo autor.

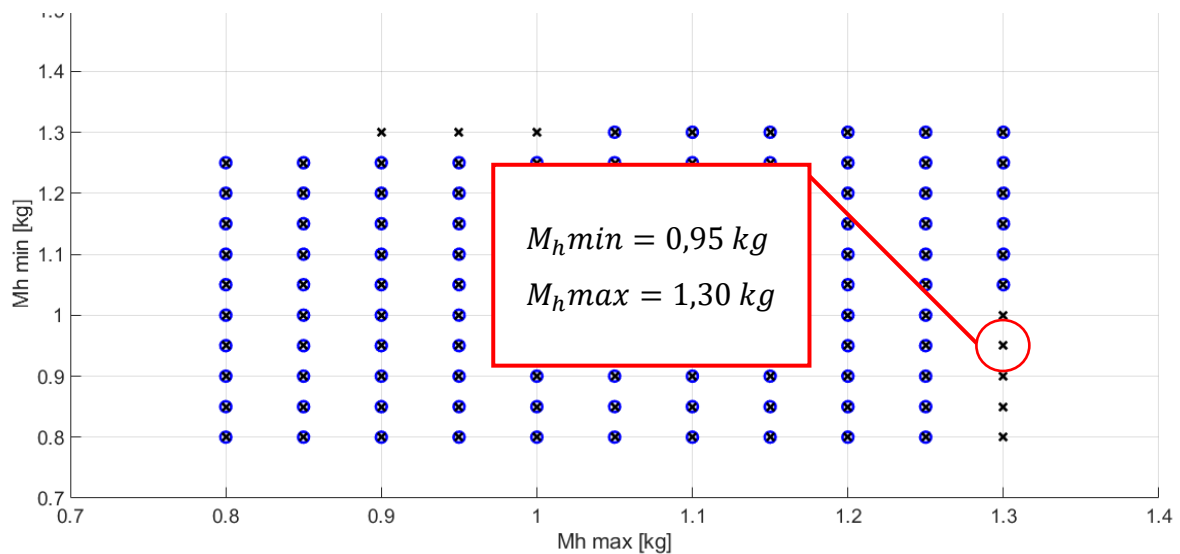
Na Figura 8, é possível observar que o controle de ganhos chaveados apresentou uma maior região de factibilidade, alcançando pontos que o controle de ganho único não conseguiria estabilizar. Mais especificamente, o controle chaveado garantiu a estabilidade em 8 pontos a mais que o de ganho único.

Esse aumento da região de factibilidade se deve pelo fato de que os ganhos sendo chaveados, é possível buscar o melhor ganho entre todos que foram pré calculados, de maneira tal que, minimiza-se a derivada temporal da função de Lyapunov, então, a lei de chaveamento dada em (27) retorna o valor do índice referente ao ganho do controlador que deve ser utilizado em um determinado instante.

5.3 Simulação do sistema

Após a análise da factibilidade, partiu-se para a simulação do controlador chaveado aplicado no helicóptero de bancada, através do software Simulink®. Nessa etapa, o objetivo foi simular justamente um dos pontos em que apenas o controle chaveado garantiria a estabilidade. O ponto escolhido foi $M_h min = 0,95 \text{ kg}$ e $M_h max = 1,30 \text{ kg}$, como é destacado na Figura 9.

Figura 9 – Ponto escolhido para a simulação do helicóptero 3-DOF.



Fonte: Elaborado pelo autor.

É importante ressaltar que, apesar da técnica desenvolvida em Buzetti (2021) trabalhar com modelagem fuzzy-TS de sistemas, por simplicidade, neste trabalho foi utilizada a modelagem linearizada do helicóptero, fornecida em Quanser (2019). Esta simplificação foi necessária, pois o modelo fuzzy-TS do helicóptero 3-DOF, apresentado em Souza *et al.* (2011), implicaria na utilização de 32 vértices, pois as 5 não linearidades do modelo são tratadas como incertezas paramétricas. Além disso, como neste trabalho foi considerada a incerteza na massa, o número de vértices poderia aumentar para 64, o que dificultaria muito a aplicação da metodologia estudada.

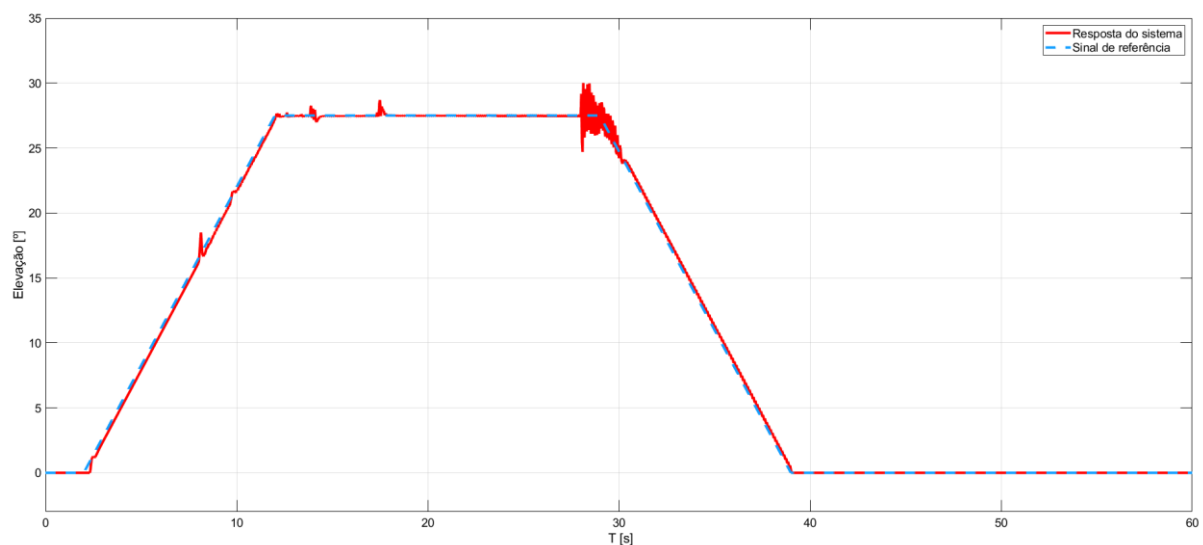
Com o controlador projetado, partiu-se para o teste em software. No Simulink®, o trajeto foi configurado para durar 60 segundos, que seria o tempo necessário para ligar os motores, levantar vôo, realizar o deslocamento de 360° ao redor da mesa, pousar e desligar os motores. Este trajeto também poderia ter sido planejado para ocorrer de forma mais rápida,

porém, por uma questão de melhor visualização gráfica, decidiu-se que uma vez levantado vôo, o helicóptero permaneceria por alguns segundos na mesma posição para depois iniciar o deslocamento. A mesma lógica foi pensada para o fim do trajeto, ou seja, quando terminasse a rotação, o helicóptero permaneceria por mais alguns segundos parado no ar antes de iniciar o pouso.

O objetivo principal deste teste via software era visualizar como o helicóptero se comportaria durante o trajeto, se seria capaz de finalizá-lo, se manteria a altitude programada de 27,5° ou não. Pois do ponto de vista prático, em uma situação de emergência, com falha em um dos motores de uma aeronave real, o sistema de controle deveria ser capaz de possibilitar o pouso do veículo em segurança e com a estabilidade.

Portanto, na Figura 10 é apresentado o gráfico com a resposta do ângulo de elevação do sistema e o sinal de referência.

Figura 10 – Elevação e sinal de referência.

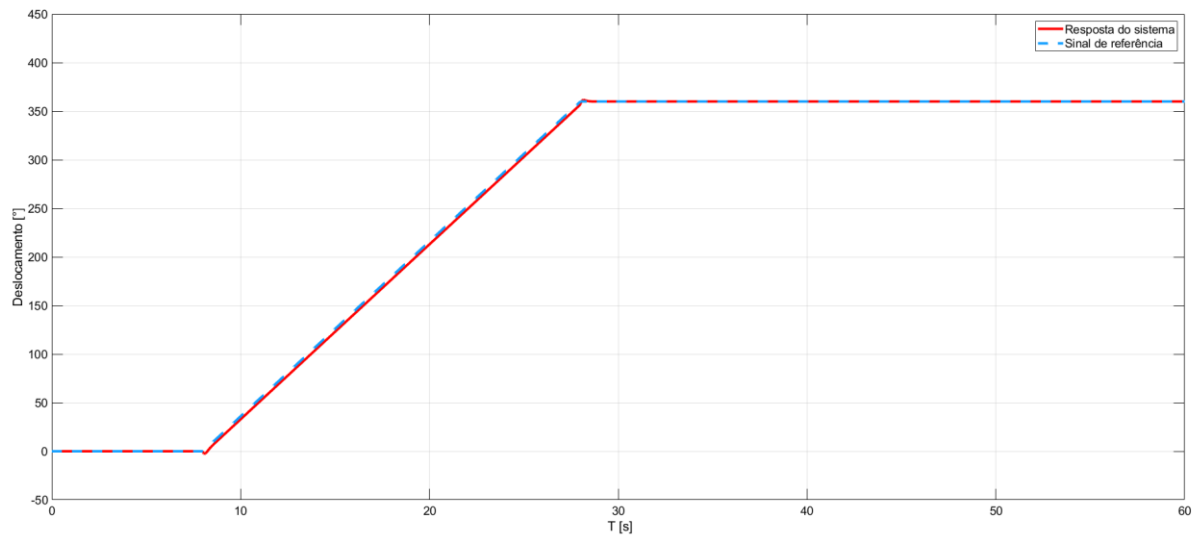


Fonte: Elaborado pelo autor.

É possível observar na Figura 10 que o controlador chaveado apresentou um bom desempenho, pois conseguiu seguir o sinal de referência durante todo o trajeto. Nota-se que durante a descida do helicóptero houve uma de oscilação maior em torno da referência, quando comparado ao início do trajeto, porém, não houveram quedas bruscas de altitude.

O próximo estado analisado foi o ângulo de deslocamento, apresentado na Figura 11. Novamente, plotou-se o gráfico da resposta do sistema juntamente com o sinal de referência.

Figura 11 – Deslocamento e sinal de referência.

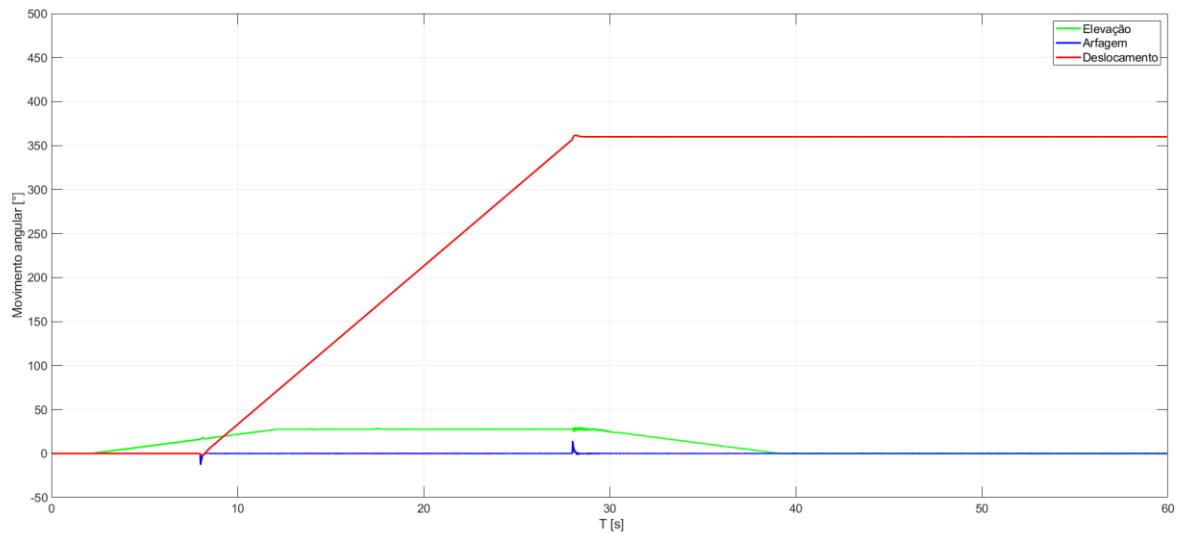


Fonte: Elaborado pelo autor.

Analisando o resultado apresentado na Figura 11, mais uma vez é possível observar a eficiência do controlador projetado, pois o sistema foi capaz de seguir a referência com uma oscilação praticamente inexistente. Dessa forma, em uma possível implementação prática, isto significaria que o helicóptero seria capaz de completar o trajeto de 360° ao redor da mesa sem dificuldade.

Em seguida, apresenta-se na Figura 12 o gráfico com as curvas dos três estados do sistema, pois dessa forma é possível analisar o comportamento do ângulo de arfagem juntamente com os outros estados. Salienta-se que para a arfagem não houve a inserção de um sinal de referência, pois esse ângulo se trata do ângulo de controle do sistema.

Figura 12 – Resposta dos ângulos de elevação, arfagem e deslocamento do sistema.



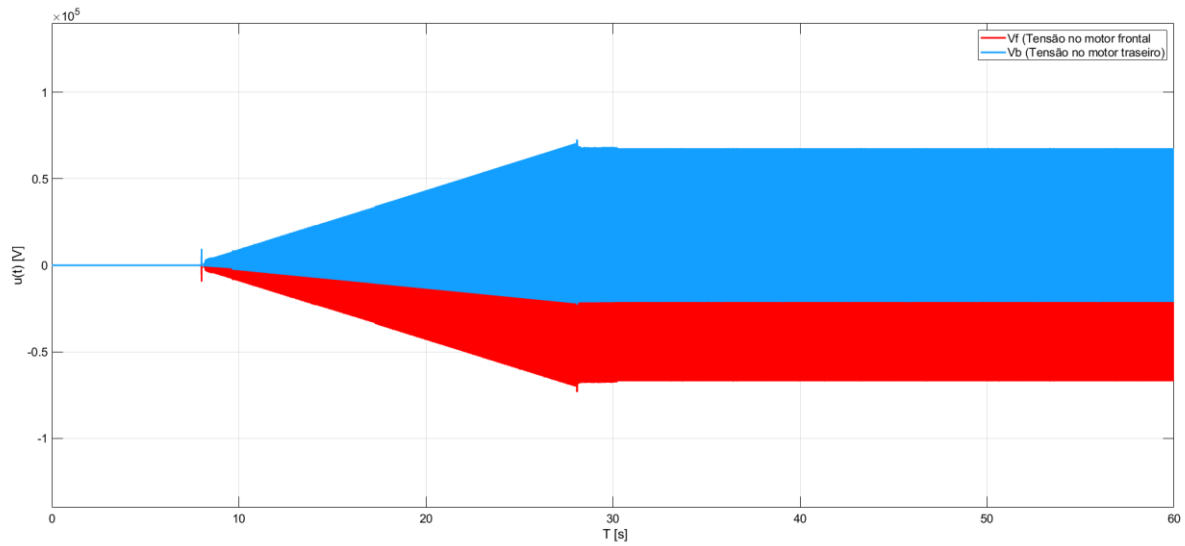
Fonte: Elaborado pelo autor.

Analizando o gráfico da Figura 12, observou-se que a resposta total do sistema foi bastante satisfatória, visto que em nenhum momento houve instabilidade, apenas oscilações muito pequenas que aconteceram em um momento próximo ao início do pouso do helicóptero. Além disso, nota-se que o sinal de arfagem apresentou dois picos, um necessário para o iniciar o deslocamento ao redor da mesa e outro para desacelerar o helicóptero, finalizando o deslocamento.

Como parte final deste trabalho, analisou-se o comportamento do sinal de controle do sistema.

Então, na Figura 13, apresenta-se o gráfico do sinal de controle do sistema, que se trata das tensões aplicadas nos motores frontal e traseiro do helicóptero (V_f e V_b).

Figura 13 – Sinal de controle.

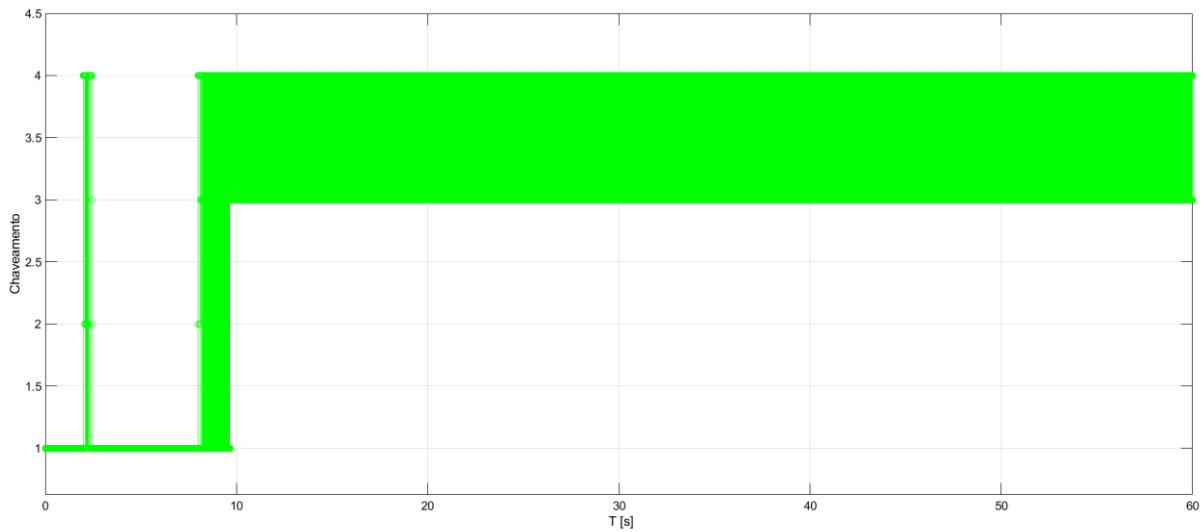


Fonte: Elaborado pelo autor.

Como é possível observar, o sinal de controle alcançou valores de tensão da ordem de 10^5 . Isso se deve pelo fato de não ter sido consideradas, durante o projeto do controlador baseado nas LMIs do Teorema 4, a restrição da norma do controlador e a saturação dos atuadores, fazendo com que a simulação gerasse um resultado que, na prática, configuraria o absurdo, sendo impossível aplicar tensões tão altas nos motores do helicóptero.

Outro detalhe perceptível na Figura 13, é a grande oscilação presente no sinal de controle. Para entender este comportamento, plotou-se o gráfico do sinal de chaveamento Q , pois apresentou o efeito conhecido como *chattering*, sendo este um ponto bastante discutido e desenvolvido em Buzetti (2021). Na Figura 14, apresenta-se o gráfico do sinal de chaveamento.

Figura 14 – Índice de chaveamento Q.



Fonte: Elaborado pelo autor.

No gráfico da Figura 14, observou-se que a simulação do helicóptero de bancada apresentou de fato o efeito de *chattering*.

O efeito de *chattering* se trata da comutação em alta frequência entre ganhos do controlador, sendo que, teoricamente, esta frequência pode ser infinita (BUZETTI, 2021). Na prática, este pode ser um grande problema pois sistemas físicos reais, tal como o helicóptero de bancada do LPC, não possuem a capacidade de realizar um chaveamento ideal devido às limitações mecânicas do sistema. Então, uma tentativa de implementação no módulo real poderia gerar danos ao equipamento, devido a impossibilidade de comutação em alta frequência dos ganhos projetados.

O presente trabalho não teve como foco a eliminação efeito de *chattering*, porém, nesse sentido, recomenda-se o estudo do Capítulo 3 de Buzetti (2021), em que foi projetado um controlador chaveado anti-chattering, para o sistema 2-DOF ball ballancer.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi possível observar a melhora de desempenho oferecida pelo controle chaveado, utilizando funções de Lyapunov não quadráticas, quando comparado a um controlador de ganho único, focando na análise de factibilidade e na capacidade de se rastrear o sinal de referência oferecido ao sistema. Em ambos os casos, foi considerado um sistema incerto e sujeito a falhas.

Como metodologia inicial, obteve-se através de software matemático o gráfico apresentado na Figura 4, em que é visível a maior região de factibilidade oferecida pelo controlador chaveado. O que vai ao encontro dos estudos realizado em Márquez *et al.* (2016) e em Buzetti (2021), em que a aplicação das funções de Lyapunov não quadráticas garantiram um aumento do número de soluções factíveis para o sistema de controle.

Vale ressaltar que o controle de ganho único ofereceu um desempenho também considerável, visto que sua factibilidade apresenta um bom número de pontos de estabilidade. Em adição a isso, enfatiza-se que a generalidade do problema também é um fator determinante quando se compara duas metodologias distintas pois, caso o sistema a ser controlado seja muito simples, existe a possibilidade de não se conseguir manifestar uma grande diferença de desempenho entre um controle mais robusto e complexo, como o de ganhos chaveados, e um controle mais simples que já é capaz de oferecer um bom resultado.

Nesse sentido, trabalhar com um sistema que possua mais restrições, mais índices de desempenho, incertezas paramétricas e falhas, tornando o problema mais criterioso, é melhor para poder visualizar ganhos reais de uma metodologia de controle mais robusta em relação a outras mais simplificadas.

Para essa análise, destaca-se também a dificuldade computacional do método que, por utilizar LMIs mais complexas, como apresentado no Teorema 4, demandou aproximadamente 1 hora de processamento para cada teste realizado com os limites da faixa de variação da massa total do sistema. Microprocessadores mais modernos provavelmente demandariam tempos menores e, no caso deste trabalho, foi utilizado um notebook com processador Intel i5 de sétima geração, com 8 Gb de memória RAM, fabricado no ano de 2018, que pode ser considerado como um sistema consideravelmente antigo e limitado nos dias atuais.

Quanto à simulação do helicóptero 3-DOF, observou-se um comportamento satisfatório do controlador em relação a sua capacidade de seguir os sinais de referência fornecidos, para os ângulos de elevação e de deslocamento. Sendo que, ao analisar a resposta completa do

sistema, com os três ângulos de movimento, foi possível observar um comportamento geral estável.

Os testes foram realizados em um ponto determinado anteriormente como factível apenas para o controlador chaveado.

Além disso, destaca-se que o sinal de controle sofreu com efeito de *chattering*, que foi observado na Figura 13, como consequência da trepidação que ocorreu no sinal de chaveamento da Figura 14. O que era esperado, pois é um dos problemas encontrados ao se trabalhar com controladores chaveados.

Neste trabalho, não houve o objetivo de simular o sistema com um sinal de controle que fornecesse valores de tensão próximos aos de uma aplicação real, visto que não houve implementação prática em laboratório.

Em resumo, destacou-se neste trabalho como vantagens do uso de controladores chaveados utilizando funções de Lyapunov não quadráticas, o aumento da factibilidade e a eficiência de rastreamento dos sinais de referência. Com as desvantagens da dificuldade computacional envolvida por trás do método e o *chattering* do sinal de controle, salientando que, para uma possível implementação prática, este efeito de comutação em alta frequência deve ser reduzido o máximo possível, para que o sistema real estudado não seja danificado.

6.1 Perspectivas futuras

Sugerem-se as seguintes ideias para futuros estudos que envolvem a técnica de controle e o sistema apresentados neste trabalho:

- Restrição da norma de ambos os controladores, de ganho único e de ganhos chaveados;
- Inclusão da saturação dos atuadores;
- Projeto de um controlador chaveado anti-*chattering*;
- Implementação no sistema real presente no LPC;
- Estudo e aplicação da norma H_{∞} .

REFERÊNCIAS

BISHOP, Richard C. Dorf Robert H. **Modern control systems**. 2011.

BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Vol. 15. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1994.

BUZETTI, A. S. **Controle chaveado de sistemas não lineares com incertezas utilizando funções de Lyapunov não quadráticas**. p. 132. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2021.

COUR-HARBO, A. la; BISGAARD, M. "State-Control Trajectory Generation for Helicopter Slung Load System using Optimal Control," AIAA 2009-6296. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. August 2009.

DA SILVA, André Luís. **Procedimento de Projeto de Leis de Controle de Vôo de Aeronaves Utilizando o Controle a Estrutura Variável**. 2007. 344f. Dissertação de Mestrado - Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

DUAN, G. R; YU H.H. **LMIs in Control Systems: Analysis, Design and Applications**. CRC Press, June 2013.

FISCHMAN, A. **Controle Robusto de Sistemas Lineares Incertos – Teoria e Aplicações -**. Tese (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis – SC, 1993.

KHALIL, H. K. **Control systems, robotics and automation - Lyapunov Stability** - Vol. XII. 2009.

LI, H.; ZHANG, L.; XIAO, T. and DONG, J. **Real-time control for CPS of digital airplane assembly with robust H-infinity theory**, in Tsinghua Science and Technology, vol. 20, no. 4, pp. 376-384, August 2015.

- LOFBERG, J. **YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB**. IEEE international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508). IEEE, p. 284-289, 2004.
- LYAPUNOV, A. M. **General problem of the stability of motion**. [S.l.]: CRC Press, 1992. 270 p.
- MÁRQUEZ, R.; GUERRA, T. M.; BERNAL, M.; KRUSZEWSKI, A. **A non-quadratic Lyapunov functional for H_∞ control of nonlinear systems via Takagi-Sugeno models**. Journal of the Franklin Institute, Amsterdam, v. 353, n. 4, p. 781–796, 2016.
- MEHRAN, Kamyar. **Takagi-sugeno fuzzy modeling for process control**. Industrial Automation, Robotics and Artificial Intelligence (EEE8005), v. 262, p. 1-31, 2008.
- MOZELLI, L. A., PALHARES, R. M., AVELLAR, G.S.C. **A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems**. Inf. Sci., vol. 179, no. 8, pp. 1149_1162, 2009.
- OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. Prentice-Hall, 2011.
- QUANSER INC. **3-DOF helicopter - Quanser**. [S.l.], 2019.
- QUANSER. **2D ball balancer control using QUARC: instructor manual**. Canada, 2008. 87 p.
- SANCHES, M. A. A. **Sistema eletrônico para geração e avaliação de movimentos em paraplégicos**. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2013.
- SASTRY, S. **Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control**. Springer, LLC, v 10. 1999.
- SILVA, E. R. P. da; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; BUZACHERO, L. F. S. **Less conservative control design for linear systems with polytopic uncertainties via state-derivative feedback**. Mathematical Problems in Engineering, New York, v. 2012, 21 p. 2012
- SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. **On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi-Sugeno fuzzy models**. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, p. 1720–1727, 2014.

SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ALVES, M. P. ASSUNÇÃO, E. **Controle de um helicóptero 3-DOF utilizando modelos Fuzzy Takagi-Sugeno**. SBAI – Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente. p. 1155–1160, 2011.

STURM, J. F. **Using sedumi 1.02, a matlab toolbox for optimization over symmetric cones**. Optimization Methods and Software, Taylor Francis, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. **Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control**. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics. New York, v. 15, n. 1, p. 116–132, 1985.