

UNESP
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá

MEDIDAS DE CARACT. DINÂMICAS
DE JUNTAS PARAFUSADAS

Guaratinguetá
1994



*"Medidas de Características
Dinâmicas de Juntas
Parafusadas"*

JOÃO ALBERTO DE OLIVEIRA

34



1110000251



"MEDIDAS DE CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS DE JUNTAS PARAFUSADAS"

JOÃO ALBERTO DE OLIVEIRA


ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA"

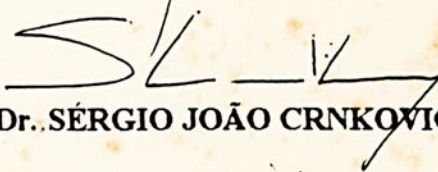
ESPECIALIDADE: ENGENHARIA MECÂNICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: PROJETOS E MATERIAIS

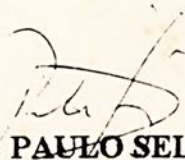
APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Prof. Dr. ARAILDO LIMA DA SILVA
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. ARAILDO LIMA DA SILVA
Orientador


Prof. Dr. SÉRGIO JOÃO CRNKOVIC


Prof. Dr. PAULO SELEGHIN

251

T531.1

048m

000251

Outubro de 1994

FACULDADE DE ENGENHARIA
DE GUARATINGUETA
BIBLIOTECA

AGRADECIMENTOS

Ao Práctico Aníbal Lima de Souza pela orientação recebida.

Aos professores João Zaccagnini Filho, João Elias Tomazini e Tarciso Furta pelos apoios e respostas recebidas.

Ao técnico Sebastião Saviolli Silva pela assistência e reparação dos equipamentos.

À funcionária Patrícia A. Garcia Sanches dos Santos pelo trabalho de digitação.

À todos que direta ou indiretamente colaboraram para a execução deste trabalho.

Aos meus pais, esposa e filhos.

CONTEÚDO

1 INTRODUÇÃO

AGRADECIMENTOS

2 SIGNIFICADO E TIPOS DE AMORTECIMENTO

2.1 Introdução

2.2 Conceito de Dissipação de Energia

2.3 Tipos de Amortecimentos

2.3.1 Amortecimento viscoso

2.3.2 Amortecimento de Coulomb

2.3.3 Amortecimento estrutural

3 VIBRAÇÃO TRANSVERSAL LIVRE DE BARRAS

3.1 Introdução

Ao Prof. Dr. Araildo Lima da Silva pela orientação recebida.

Aos professores João Zangrandi Filho, José Elias Tomazini e Tamotsu Hirata pelo apoio e sugestões recebidas.

Ao técnico Sebastião Sávio da Silva pela confecção e operação dos equipamentos.

À funcionária Fátima A. Garcia Sansevero dos Santos, pelo trabalho de digitação.

A todos que direta ou indiretamente colaboraram para a execução deste trabalho.

3.2 Vibração Transversal Livre de Vigas com Amortecimento

3.2.1 Materiais viscolásticos

3.2.2 Modelo de Kelvin-Voigt

3.2.3 Vibração transversal livre com amortecimento

3.2.4 Amortecimento crítico

3.2.5 Movimento oscilatório

3.2.6 Pico e deslocamentos máximos

3.2.7 Decremento logarítmico (δ)

4 PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS

4.1 Introdução

4.2 Local de Exercício

4.3 Corpos de Prova

4.3.1 Desenhos esquemáticos dos corpos de prova

4.3.1.1 Viga contínua

4.3.1.2 Viga com junta articulada

4.4 Módulo de Elasticidade Experimental (E) da Viga Contínua

4.5 Baseada Experimental



CONTEÚDO

1. INTRODUÇÃO.....	1
2. SIGNIFICADO E TIPOS DE AMORTECIMENTO	4
2.1 Introdução	4
2.2 Conceito de Dissipação de Energia	4
2.3 Tipos de Amortecimentos	6
2.3.1 Amortecimento negativo.....	6
2.3.2 Amortecimento do material.....	6
2.3.3 Amortecimento estrutural	8
3. VIBRAÇÃO TRANSVERSAL LIVRE DE BARRAS	9
3.1 Introdução	9
3.2 Vibração Transversal Livre sem Amortecimento	9
3.2.1 Teoria elementar de barra	9
3.2.2 Equação diferencial parcial	11
3.2.3 Solução da equação diferencial do movimento transversal de barra	13
3.2.4 Condições de contorno da barra com extremidades livres.....	15
3.2.4.1 Frequências naturais de vibrações:	16
3.2.4.2 Modos naturais de vibrações.....	16
3.3 Vibração Transversal Livre de Vigas com Amortecimento	17
3.3.1 Materiais viscoelásticos	17
3.3.2 Modelo de Kelvin-Voigt.....	17
3.3.3 Vibração transversal livre com amortecimento	17
3.3.4 Amortecimento crítico c_{ic}	21
3.3.5 Movimento oscilatório.....	22
3.3.6 Picos ou deslocamentos máximos	23
3.3.7 Decremento logaritmico (δ).....	23
4. PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS	25
4.1 Introdução	25
4.2 Local de Execução.....	25
4.3 Corpos de Provas.....	25
4.3.1 Desenhos esquemáticos dos corpos de prova	27
4.3.1.1 Viga contínua	27
4.3.1.2 Viga com junta parafusada.....	27
4.4 Módulo de Elasticidade Experimental (ϵ) da Viga Contínua	29
4.5 Bancada Experimental.....	31



4.5.1 Bancada pneumática	33
4.5.2 Bancada de instrumentação.....	37
4.6 Célula de Carga	39
4.6.1 Bancada experimental.....	40
4.6.2 Curva de calibração	42
4.7 Torque de Aperto no Parafuso	43
5. ANÁLISE DE DADOS E RESULTADOS	44
5.1 Introdução	44
5.2. Análise de Dados Experimentais.	44
5.2.1 Forças de excitações aplicadas nas vigas (pulsos).....	44
5.2.1.1. Força de excitação aplicada na viga contínua (pulso)-VCON	45
5.2.1.2. Forças de excitações aplicadas na viga com junta parafusada e superfície fresada-VJF.	45
5.2.1.3. Forças de excitações aplicadas na viga com junta parafusada e superfície retificada-VJR.....	46
5.2.2 Amplitudes dos deslocamentos transversais $q(t)$ e Frequências naturais de vibrações obtidas nos ensaios das vigas.....	46
5.2.2.1. Ensaio da viga contínua-VCON.....	46
5.2.2.2. Ensaio da viga com junta parafusada e superfície fresada-VJF	47
5.2.2.2.1 Torque aplicado de 9,8 N.m: VJFT ₁	47
5.2.2.2.2 Torque aplicado de 19,6 N.m: VJFT ₂	48
5.2.2.2.3 Torque aplicado de 29,4 N.m: VJFT ₃	48
5.2.2.2.4 Torque aplicado de 39,2 N.m: VJFT ₄	49
5.2.2.2.5 Torque aplicado de 49,0 N.m: VJFT ₅	49
5.2.2.2.6 Torque aplicado de 58,8 N.m: VJFT ₆	50
5.2.2.3 Ensaio da viga com junta parafusadas e superfície retificada-VJR	50
5.2.2.3.1 Torque aplicado de 9,8 N.m: VJRT ₁	50
5.2.2.3.2 Torque aplicado de 19,6 N.m: VJRT ₂	51
5.2.2.3.3 Torque aplicado de 29,4 N.m: VJRT ₃	51
5.2.2.3.4 Torque aplicado de 39,2 N.m: VJRT ₄	52
5.2.2.3.5 Torque aplicado de 49,0 N.m: VJRT ₅	52
5.2.2.3.6 Torque aplicado de 58,8 N.m: VJRT ₆	53
5.2.3. Filtragens das spectrums de frequências das vigas ensaiadas.....	53
5.2.3.1 Viga contínua no 1 ^o modo: VCON-IM.....	54
5.2.3.2 Viga com junta parafusada e superfície fresada no 1 ^o modo: VJF-IM.....	54
5.2.3.2.1 Torque aplicado de 9,8 N.m: VJFT ₁ -1M.....	55
5.2.3.2.2 Torque aplicado de 19,6 N.m: VJFT ₂ -1M.....	55



5.2.3.2.3 Torque aplicado de 29,4 N.m: VJFT ₃ -1M.....	56
5.2.3.2.4 Torque aplicado de 39,2 N.m: VJFT ₄ -1M.....	56
5.2.3.2.5 Torque aplicado de 49,0 N.m: VJFT ₅ -1M.....	57
5.2.3.2.6 Torque aplicado de 58,8 N.m: VJFT ₆ -1M.....	57
5.2.3.3 Viga com junta parafusada e superfície retificada no 1 ^o modo :	
VJR - IM.....	57
5.2.3.3.1 Torque aplicado de 9,8 N.m: VJRT ₁ -1M.	58
5.2.3.3.2 Torque aplicado de 19,6 N.m: VJRT ₂ -1M.	58
5.2.3.3.3 Torque aplicado de 29,4 N.m: VJRT ₃ -1M.	59
5.2.3.3.4 Torque aplicado de 39,2 N.m: VJRT ₄ -1M.	59
5.2.3.3.5 Torque aplicado de 49,0 N.m: VJRT ₅ -1M.	60
5.2.3.3.6 Torque aplicado de 58,8 N.m: VJRT ₆ -1M.	60
5.2.4 Amplitudes dos deslocamentos transversais $q(t)$ das vigas no 1 ^o modo -	
valores picos	60
5.2.4.1 Viga contínua no 1 ^o modo : VCON-IM.....	60
5.2.4.2 Viga com junta parafusada e superfície fresada no	
1 ^o modo : VJF-IM	62
5.2.4.2.1 Torque aplicado de 9,8 N.m: VJFT ₁ -1M.....	62
5.2.4.2.2 Torque aplicado de 19,6 N.m: VJFT ₂ -1M.....	62
5.2.4.2.3 Torque aplicado de 29,4 N.m: VJFT ₃ -1M.....	63
5.2.4.2.4 Torque aplicado de 39,2 N.m: VJFT ₄ -1M.....	63
5.2.4.2.5 Torque aplicado de 49,0 N.m: VJFT ₅ -1M.....	64
5.2.4.2.6 Torque aplicado de 58,8 N.m: VJFT ₆ -1M.....	64
5.2.4.3 Viga com junta parafusada e superfície retificada no	
1 ^o modo : VJR-IM.....	65
5.2.4.3.1 Torque aplicado de 9,8 N.m: VJRT ₁ -1M.	65
5.2.4.3.2 Torque aplicado de 19,6 N.m: VJRT ₂ -1M.	65
5.2.4.3.3 Torque aplicado de 29,4 N.m: VJRT ₃ -1M.	66
5.2.4.3.4 Torque aplicado de 39,2 N.m: VJRT ₄ -1M.	66
5.2.4.3.5 Torque aplicado de 49,0 N.m: VJRT ₅ -1M.	67
5.2.4.3.6 Torque aplicado de 58,8 N.m: VJRT ₆ -1M.	67
5.3 Resultados Experimentais	
5.3.1 Frequências naturais de vibrações das vigas	68
5.3.1.1 Viga contínua : VCON	68
5.3.1.2 Viga com junta parafusada e superfície fresada : VJF	68
5.3.1.3 Viga com junta parafusada e superfície retificada : VJR	68
5.3.2 Decremento logarítmicos (δ) e razões de amortecimento (ξ) das vigas	69
5.3.2.1 Viga contínua : VCON-IM	69
5.3.2.2 Viga com junta parafusada e superfície fresada no	
1 ^o modo : VJF-IM	69



5.3.2.3 Viga com junta parafusada e superfície retificada no 1º modo : VJR-IM.....	70
5.4 Análise dos Resultados Experimentais.....	70
5.4.1 Frequências naturais de vibrações das vigas em função do torque.....	70
5.4.2 Razões de amortecimento das vigas em função do torque.....	73
5.5 Dados Teóricos - Experimentais.....	74
5.5.1 Amplitudes dos deslocamentos transversais $q(t)$	74
5.5.1.1 Simulação referente a viga contínua: VCON-IM.....	75
5.5.1.2 Simulação referente a viga com junta parafusada e superfície fresada : VJF-IM.....	75
5.5.1.3 Simulação referente a viga com junta parafusada e superfície retificada : VJR-IM.....	76
5.5.1.4 Amplitudes dos deslocamentos teóricos - experimentais $q(t)$ obtidas.....	76
5.5.2 Amplitudes dos deslocamentos transversais $\varnothing(x)$ - Simulações de $\varnothing(x)$	74
5.5.2.1 Simulação referente a viga contínua: VCON-IM.....	77
5.5.2.2 Simulação referente a viga com junta parafusada e superfície fresada : VJF-IM.....	78
5.5.2.3 Simulação referente a viga com junta parafusada e superfície retificada : VJR-IM.....	78
5.5.2.4 Amplitudes dos deslocamentos teóricos - experimentais $\varnothing(x)$ obtidas.....	78
5.6 Resultados Teóricos - Experimentais	
5.6.1 Decrementos logarítmicos (δ) e amortecimentos (ξ) teóricos - experimentais.....	79
5.6.2 Frequências naturais de vibrações da VCON.....	79
5.7 Comparações	
5.7.1 Dados experimentais versus dados teóricos - experimentais	
5.7.1.1 Amplitudes dos deslocamentos transversais $q(t)$	80
5.7.2 Resultados experimentais versus resultados teóricos - experimentais	
5.7.2.1 Amortecimentos.....	81
5.7.2.2 Frequências naturais de vibrações da VCON.....	82
6. COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES.....	83
7. APÊNDICES.....	86
7.1 Apêndice A.....	86
7.2 Apêndice B.....	88
7.3 Apêndice C.....	89
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	107
9. SIMBOLOS.....	108



LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 Modelo de amortecimento viscoso unidimensional.....	04
Figura 2.2 Energia dissipada pelo amortecimento viscoso	05
Figura 2.3 Malha de histerese	07
Figura 3.1 Teoria elementar de barra	10
Figura 3.2 Momentos de flexão e forças de cisalhamentos	11
Figura 3.3 Modos de vibrações de uma viga com extremidades livres	16
Figura 3.4 Modelo de Kelvin-Voigt - Modelo de um sólido viscoelástico.....	17
Figura 3.5 Definição de ângulo de fase ϕ	20
Figura 3.6 Oscilação amortecida $\xi < 1,0$	22
Figura 3.7 Taxa de decréscimo da oscilação medida pelo decremento logarítmico.....	23
Figura 3.8 Decremento logarítmico em função de ξ	24
Figura 4.1 Laboratório de Dinâmica de Máquinas e Vibrações DME-FEG.....	25
Figura 4.2 Corpos de prova ensaiados - vigas ou barras de aço.....	26
Figura 4.3 Viga contínua	27
Figura 4.4 Viga com junta parafusada.....	27
Figura 4.5 Junta parafusada	28
Figura 4.6 Dimensões da viga e da junta.....	28
Figura 4.7 Máquina Universal de Ensaio de Tração e Flexão	29
Figura 4.8 Posição da viga contínua na máquina de ensaio de flexão	30
Figura 4.9 Ilustração da montagem da bancada experimental	31
Figura 4.10 Bancada experimental (croqui).....	32
Figura 4.11 Bancada pneumática-Sistema de aplicação da força de excitação.....	33
Figura 4.12 Circuito pneumático - Esquema de montagem.....	34
Figura 4.13 Detalhe do sistema de aplicação da força de excitação	34
Figura 4.14 Sistema de aplicação da força de excitação (croqui).....	35
Figura 4.15 Local de fixação da célula de carga na viga contínua.....	35
Figura 4.16 Posições de fixações da célula de carga e do acelerômetro	36
Figura 4.17 Bancada de instrumentação.....	37
Figura 4.18 Bancada de instrumentação (croqui)	38
Figura 4.19 Esquema de montagem da instrumentação	38
Figura 4.20 Célula de carga.....	39
Figura 4.21 Bancada experimental de calibração da célula de carga	40
Figura 4.22 Bancada de calibração da célula de carga (croqui).....	41



Figura 4.23 Transdutor e dispositivo de fixação da célula de carga	41
Figura 4.24 Curva de calibração da célula de carga.....	42
Figura 4.25 Bancada para o torque de aperto no parafuso	43
Figura 5.1 Força de excitação aplicada na viga contínua (pulso) - registro gráfico.....	45
Figura 5.2 Ensaio da viga contínua - VCON (t=10s).....	46
Figura 5.3 Ensaio da VJFT ₁ (T ₁ = 9,8 N.m e t = 10s).....	47
Figura 5.4 Ensaio da VJFT ₂ (T ₂ = 19,6 N.m e t = 10s).....	48
Figura 5.5 Ensaio da VJFT ₃ (T ₃ = 29,4 N.m e t = 10s).....	48
Figura 5.6 Ensaio da VJFT ₄ (T ₄ = 39,2 N.m e t = 10s).....	49
Figura 5.7 Ensaio da VJFT ₅ (T ₅ = 49,0 N.m e t = 10s).....	49
Figura 5.8 Ensaio da VJFT ₆ (T ₆ = 58,8 N.m e t = 10s).....	50
Figura 5.9 Ensaio da VJRT ₁ (T ₁ = 9,8 N.m e t = 10s).....	50
Figura 5.10 Ensaio da VJRT ₂ (T ₂ = 19,6 N.m e t = 10s).....	51
Figura 5.11 Ensaio da VJRT ₃ (T ₃ = 29,4 N.m e t = 10s).....	51
Figura 5.12 Ensaio da VJRT ₄ (T ₄ = 39,2 N.m e t = 10s).....	52
Figura 5.13 Ensaio da VJRT ₅ (T ₅ = 49,0 N.m e t = 10s).....	52
Figura 5.14 Ensaio da VJRT ₆ (T ₆ = 58,8 N.m e t = 10s).....	53
Figura 5.15 Filtragem da VCON-IM.....	54
Figura 5.16 Filtragem da VJFT ₁ -1M.....	55
Figura 5.17 Filtragem da VJFT ₂ -1M.....	55
Figura 5.18 Filtragem da VJFT ₃ -1M.....	56
Figura 5.19 Filtragem da VJFT ₄ -1M.....	56
Figura 5.20 Filtragem da VJFT ₅ -1M.....	57
Figura 5.21 Filtragem da VJFT ₆ -1M.....	57
Figura 5.22 Filtragem da VJRT ₁ -1M.....	58
Figura 5.23 Filtragem da VJRT ₂ -1M.....	58
Figura 5.24 Filtragem da VJRT ₃ -1M.....	59
Figura 5.25 Filtragem da VJRT ₄ -1M.....	59
Figura 5.26 Filtragem da VJRT ₅ -1M.....	60
Figura 5.27 Filtragem da VJRT ₆ -1M.....	60
Figura 5.28 Deslocamentos transversais da VCON-1M.....	61
Figura 5.29 Gráfico: Frequência natural x torque para a VJF.....	71
Figura 5.30 Gráfico: Frequência natural x torque para a VJR.....	72
Figura 5.31 Gráfico: Razões de amortecimento x torque para a VJF e VJR.....	73
Figura 5.32 Simulação da VCON-IM: deslocamento x tempo.....	75
Figura 5.33 Simulação da VCON-IM: Configuração modal.....	77
Figura C.1 Simulação da VJFT ₁ -1M: deslocamentos x tempo.....	95



Figura C.2 Simulação da VJFT₂-IM: deslocamentos x tempo 95

Figura C.3 Simulação da VJFT₃ -IM: deslocamentos x tempo 96

Figura C.4 Simulação da VJFT₄-IM: deslocamentos x tempo 96

Figura C.5 Simulação da VJFT₅ -IM: deslocamentos x tempo 97

Figura C.6 Simulação da VJFT₆-IM: deslocamentos x tempo 97

Figura C.7 Simulação da VJRT₁ -IM: deslocamentos x tempo 98

Figura C.8 Simulação da VJRT₂-IM: deslocamentos x tempo 98

Figura C.9 Simulação da VJRT₃ -IM: deslocamentos x tempo 99

Figura C.10 Simulação da VJRT₄-IM: deslocamentos x tempo 99

Figura C.11 Simulação da VJRT₅ -IM: deslocamentos x tempo 100

Figura C.12 Simulação da VJRT₆-IM: deslocamentos x tempo 100

Figura C.13 Simulação da VJFT₁ -IM: Configuração modal 101

Figura C.14 Simulação da VJFT₂-IM: Configuração modal 101

Figura C.15 Simulação da VJFT₃ -IM: Configuração modal 102

Figura C.16 Simulação da VJFT₄-IM: Configuração modal 102

Figura C.17 Simulação da VJFT₅ -IM: Configuração modal 103

Figura C.18 Simulação da VJFT₆-IM: Configuração modal 103

Figura C.19 Simulação da VJRT₁ -IM: Configuração modal 104

Figura C.20 Simulação da VJRT₂-IM: Configuração modal 104

Figura C.21 Simulação da VJRT₃ -IM: Configuração modal 105

Figura C.22 Simulação da VJRT₄-IM: Configuração modal 105

Figura C.23 Simulação da VJRT₅ -IM: Configuração modal 106

Figura C.24 Simulação da VJRT₆-IM: Configuração modal 106

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 Amortecimento material de uma viga em balanço	08
Tabela 4.1 Corpos de prova ensaiados - dados	26
Tabela 4.2 Juntas - informações.....	29
Tabela 4.3 Deflexões da viga continua no ensaio de flexão	30
Tabela 5.1 Força de excitação aplicada na viga continua - VCON.....	45
Tabela 5.2 Forças de excitações aplicadas na viga com junta parafusada e superfície fresada - VJF.....	45
Tabela 5.3 Forças de excitações aplicadas na viga com junta parafusada e superfície fresada - VJF.....	46
Tabela 5.4 Valores picos dos deslocamentos transversais $q(t)$ da VCON-IM	61
Tabela 5.5 Valores picos dos deslocamentos transversais $q(t)$ da VJFT ₁ - IM	62
Tabela 5.6 Valores picos dos deslocamentos transversais $q(t)$ da VJFT ₂ - IM	62
Tabela 5.7 Valores picos dos deslocamentos transversais $q(t)$ da VJFT ₃ - IM	63
Tabela 5.8 Valores picos dos deslocamentos transversais $q(t)$ da VJFT ₄ - IM	63
Tabela 5.9 Valores picos dos deslocamentos transversais $q(t)$ da VJFT ₅ - IM	64
Tabela 5.10 Valores picos dos deslocamentos transversais $q(t)$ da VJFT ₆ - IM	64
Tabela 5.11 Valores picos dos deslocamentos transversais $q(t)$ da VJRT ₁ - IM.....	65
Tabela 5.12 Valores picos dos deslocamentos transversais $q(t)$ da VJRT ₂ - IM.....	65
Tabela 5.13 Valores picos dos deslocamentos transversais $q(t)$ da VJRT ₃ - IM.....	66
Tabela 5.14 Valores picos dos deslocamentos transversais $q(t)$ da VJRT ₄ - IM.....	66
Tabela 5.15 Valores picos dos deslocamentos transversais $q(t)$ da VJRT ₅ - IM.....	67
Tabela 5.16 Valores picos dos deslocamentos transversais $q(t)$ da VJRT ₆ - IM.....	67
Tabela 5.17 Frequências naturais de vibrações da viga continua VCON-IM.....	68
Tabela 5.18 Frequências naturais de vibrações da VJF em função do torque de aperto.....	68
Tabela 5.19 Frequências naturais de vibrações da VJR em função do torque de aperto	68
Tabela 5.20 Resultados experimentais de δ e ξ para a VCON-IM	69
Tabela 5.21 Resultados experimentais de δ e ξ para a VJF-IM em função do torque de aperto.....	69
Tabela 5.22 Resultados experimentais de δ e ξ para a VJR-IM em função do torque de aperto.....	70
Tabela 5.23 Amplitudes dos deslocamentos teóricos-experimentais $q(t)$ obtidas para as vigas (valores picos).....	76



Tabela 5.24 Amplitudes dos deslocamentos teóricos-experimentais $\varnothing(x)$ obtidas para as vigas	78
Tabela 5.25 Resultados teóricos-experimentais: decrementos (δ) e amortecimentos (ξ).....	79
Tabela 5.26 Frequências naturais de vibrações da viga contínua (frequências teóricas).....	79
Tabela 5.27 Amplitudes experimentais $q(t)$ versus Amplitudes teóricas-experimentais $q(t)$ ($t \cong 1,400s$)	80
Tabela 5.28 Amortecimentos experimentais versus Amortecimentos teóricos-experimentais	81
Tabela 5.29 Frequências experimentais versus frequências teóricas da viga contínua.....	82

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo, estudar o comportamento dinâmico de juntas parafusadas. A razão de amortecimento e frequência natural de vibração são estudadas em função da variação dos parâmetros físicos da junta, torque de aperto do parafuso e o acabamento superficial.

Inicialmente é feito uma abordagem teórica sobre o significado e os tipos de amortecimentos existentes em sistemas oscilatórios.

Em seguida, as equações diferenciais que governam o deslocamento transversal são desenvolvidas, utilizando-se da teoria sobre vibração transversal livre de barra e de um modelo teórico que descreve o comportamento de materiais viscoelásticos. Através de simulações realizadas e pertinentes as equações obtidas para os deslocamentos $\varnothing(x)$ e $q(t)$, consegue-se descrever de modo satisfatório, o comportamento apresentado pelos modelos reais.

Posteriormente é apresentado uma descrição detalhada dos procedimentos experimentais envolvidos nos ensaios das vigas.

Com o auxílio de softwares especializados, são obtidas as frequências naturais de vibrações ω_n , e as amplitudes de deslocamentos $q(t)$, as quais são utilizadas nos cálculos das razões de amortecimento, provenientes do método do decremento logarítmico.

Os resultados experimentais são analisados e comparados entre si com relação a razão de amortecimento e frequência natural de vibração no primeiro modo.

Finalmente são apresentados comentários e conclusões do trabalho

ABSTRACT

This work is devoted to investigation of dynamic behaviour of bolted joints.

Both damping ratio and natural frequency of vibration are studied in function of the variation the physical parameters of the joint, bolt tightening torque and the surface finish.

At first one theoretical explanation about the significance of damping and the types existents in oscillatory systems is considered.

Afterwards the governing differential equations for transverse displacement are developed using the theory of free transverse vibration and one model of viscoelastic material. These equations give a satisfactory description of displacements $\varnothing(x)$ e $q(t)$ behaviour observed in experiments.

The detailed description of experimental procedure is presented.

The values of natural frequencies ω_n and displacements amplitudes $q(t)$ for beams studied are calculated using specialized softwares and applied for calculations of damping ratio by method of the logarithmic decrement.

The experimental results are analyzed and compared with relation of damping ratio and natural frequency of vibration in the first mode.

Finally comments and conclusions are presented.



CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Devido ao grande avanço científico e tecnológico ocorrido nestas últimas décadas, com destaque na área de engenharia mecânica, aplicada aos setores aeroespaciais e de pontas como os setores automobilístico, mecânica de precisão e a área espacial, de onde provêm normalmente os novos sofisticados e produtos de alta tecnologia, os quais, com certeza apresentaram algum desenvolvimento de juntas, tornando-se por isso, por parte daqueles que projetam e fabricam tais produtos, um dos seus aspectos a serem considerados.

Existem atualmente inúmeros pesquisadores, estudando o comportamento físico das juntas, tanto o estático quanto o dinâmico, tornando-se de enorme importância para aplicações futuras.

Quando ao comportamento dinâmico de juntas, o mesmo pode ser analisado e expresso em termos de algumas características fundamentais, tais como: rigidez dinâmica, razão de amortecimento, resposta de frequência e capacidade de isolamento de vibração.

Destas características citadas anteriormente, o comportamento de juntas é de fundamental importância em especial, por exemplo, no desenvolvimento de uma máquina-ferramenta.

Das pesquisas para desenvolvimento e melhoria do comportamento dinâmico de juntas, os pesquisadores têm verificado que juntas parafusadas apresentam uma alta capacidade de amortecimento, e que a rigidez dinâmica é muito alta, sendo tal como condição de fixação entre as superfícies das juntas (tanto o encaixe quanto o deslizamento) entre superfícies das juntas e a pré-carga de uma junta parafusada.

A seguir serão citados alguns trabalhos de pesquisas de particular interesse sobre o comportamento dinâmico de juntas.

M. Yoshinura [1], em 1977, desenvolveu um método objetivo para identificar os valores quantitativos de rigidez dinâmica e amortecimento em juntas, com o objetivo de analisar e definir características dinâmicas de componentes estruturais, especialmente tipos de juntas de furação de máquina-ferramenta, com o auxílio de computador. Verificou a consistência do seu método, comparando a simulação teórica com os resultados experimentais de frequências de ressonância e razão de amortecimento no domínio de vibração. Para as medidas de dados de amortecimento experimentais, foi utilizado o método de largura de banda, e o tipo de taxa parafusada analisada foi a de topo.

Posteriormente, Anand Shankar [2] e colaboradores, em 1980, investigaram e analisaram o comportamento dinâmico de juntas parafusadas de topo e sobrepostas, sob condições de topo e sobrecarga, quanto a razão de amortecimento e em função da variação de alguns parâmetros de construção de esparras de alguns parafusos de topo e sobrepostos e o coeficiente de atrito entre as superfícies da junta, no primeiro modo de vibração. Para as medidas dos dados de amortecimento experimentais, foi utilizado o método de largura de banda. Verificou-se que a frequência natural de vibração no modo de topo e sobreposto não apresenta uma correlação com o torque de aperto e nem a área entre as superfícies da junta, porém a razão de amortecimento verificada ser dependente apenas dos fatores.

Dez e Chow [3], em 1984, identificaram um método, conhecido como método de ajuste dinâmico quadrático, para as propriedades das juntas parafusadas (rigidez e amortecimento) de juntas, de maneira de funções resposta de frequência, obtidas de estruturas e estruturas de juntas. Neste método podem ser usadas funções resposta de frequência em diferentes

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Devido ao grande avanço científico e tecnológico ocorrido nestas últimas décadas, com destaque na área de engenharia mecânica, aplicada em setores estratégicos e de ponta como os setores automobilístico, mecânica de precisão e o aero-espacial, de onde provém normalmente projetos sofisticados e produtos de alta tecnologia, os quais, com certeza apresentam algum envolvimento de juntas, tornando-se por isso, por parte daqueles que projetam e fabricam tais produtos, um dos itens importantes a serem considerados.

Existem atualmente inúmeros pesquisadores, estudando o comportamento físico de juntas, tanto o estático quanto o dinâmico, tornando-se de enorme importância para aplicações futuras.

Quanto ao comportamento dinâmico de juntas, o mesmo pode ser analisado e expresso em termos de algumas características fundamentais, tais como : rigidez dinâmica, razão de amortecimento, resposta de frequência e capacidade de isolamento de vibração.

Dessas características citadas, a capacidade de amortecimento de juntas, é de fundamental importância em esclarecer, por exemplo, o comportamento dinâmico de uma máquina-ferramenta.

Das pesquisas ora desenvolvidas e relativas ao comportamento dinâmico de juntas, os pesquisadores tem verificado que juntas parafusadas apresentam normalmente uma alta capacidade de amortecimento, e que dependem de vários fatores, tais como: coeficiente de fricção entre as superfícies das juntas (atrito), o microdeslizamento entre superfícies das juntas e a pré-carga de aperto em juntas parafusadas.

A seguir serão citados alguns trabalhos de pesquisas de particular interesse sobre comportamento dinâmico de juntas.

M. Yoshimura [11] em 1977, desenvolveu um método iterativo para identificar os valores quantitativos de rigidez dinâmica e amortecimento em juntas, com o objetivo de analisar e definir características dinâmicas de componentes estruturais, especialmente vários tipos de juntas de estruturas de máquinas-ferramentas, com o auxílio do computador. Verificou a consistência do seu método, comparando a simulação teórica com os resultados experimentais de frequências de ressonância e razões de amortecimento no primeiro e segundo modo de vibração. Para as medidas de razões de amortecimentos experimentais, foi utilizado o método de largura de banda, e o tipo de junta parafusada analisada foi a de tampo.

Posteriormente, Anand Shanker [7] e colaboradores, em 1980 investigaram e analisaram o comportamento dinâmico de juntas parafusadas de topo e sobrepostas, nas condições a seco e lubrificadas, quanto a razão de amortecimento e em função da variação de alguns parâmetros da junta, como a pré-carga e o coeficiente de atrito entre as superfícies da junta, no primeiro modo de vibração. Para as medidas das razões de amortecimentos experimentais, foi utilizado o método de largura de banda. Verificou-se que a frequência natural de vibração do modelo contendo a junta não varia apreciavelmente com o torque de aperto e nem o atrito entre as superfícies da junta, porém a razão de amortecimento verificou ser dependente destes dois fatores.

Tsai e Chou [10], em 1988 identificaram um método, conhecido como método do ajuste dos mínimos quadrados, onde as propriedades das juntas parafusadas (rigidez e amortecimento) são extraídas diretamente de funções respostas de frequências, obtidas de subestruturas e estrutura total contendo juntas. Neste método podem ser usados funções respostas de frequências em diferentes



séries de frequências para extrair as correspondentes propriedades das juntas. Eles concluíram que as propriedades identificadas da junta em diferentes séries de frequências podem ter valores diferentes, porque cada valor identificado representa as melhores propriedades dinâmicas da junta na série de frequência na qual ela é extraída, todavia na sequência para obter bons resultados para estas propriedades identificadas, é aconselhável usá-las na série de frequência onde elas podem ser aplicadas. Os parâmetros identificados das juntas são limitados a poucos graus de liberdades e os processos requerem muito esforço computacional.

Wang e Sas [12], em 1990 desenvolveram um método para determinar experimentalmente as características físicas de juntas em sistemas mecânicos. Neste método um sistema de muitos graus de liberdade é transformado em vários sistemas simples usando autovetores selecionados. Este método tem como finalidade a identificação e a modelagem dinâmica de partes mecânicas especiais tais como juntas ou conexões, através de um processo iterativo, o qual converge muito rápido se o modo de vibração aplicado é selecionado apropriadamente.

Com relação ao fator de "microdeslizamento" ou "microdeslocamento" em juntas, tem sido reconhecido desde o começo de 1950, que a ocorrência do mesmo é possível na superfície de contato entre dois corpos elásticos e provenientes de deformações entre estes pontos de contato na interface de atrito.

Posteriormente, Menq [3], em 1989 estudou o comportamento de juntas com o objetivo de determinar a distribuição da força de atrito que ocorre na superfície de contato, em função do deslocamento relativo resultante entre as extremidades da junta, onde cargas axiais são aplicadas obtendo-se para este caso específico de carregamento, uma curva força-deslocamento, a qual é de interesse na análise de problemas de vibração.

Este trabalho tem como finalidade estudar a influência e o efeito da variação de alguns parâmetros físicos de juntas parafusadas, tais como o torque de aperto (pré-carga) e o acabamento superficial sobre a capacidade de amortecimento e a frequência natural no primeiro modo de vibração livre.

Para as medidas experimentais das razões de amortecimentos, foi utilizado o método do "decremento logaritmico", o qual foi possível, com o auxílio de softwares especializados de aquisições e tratamentos de dados.

A experimentação foi realizada, ensaiando-se tres vigas ou barras de aço, suspensas no ar, por intermédio de dois fios de aço localizados nas extremidades das mesmas, isto é, vigas duplamente livre. Dessas tres vigas, uma é contínua sem junta, e duas constituídas por juntas parafusadas. A junta parafusada de cada barra, se localiza no centro da mesma, e são do mesmo tipo, isto é, sobrepostas e de contatos secos, de dimensões iguais, com um único parafuso de aperto mas com acabamento superficiais diferentes (fresado e retificado).

Os resultados experimentais dos modelos, foram analisados e comparados em termos de frequências naturais e de amortecimentos no primeiro modo de vibração livre.

Esta dissertação fundamenta-se de uma maneira geral nos trabalhos citados anteriormente e em outros que serão referenciados no decorrer dos próximos capítulos.

Este trabalho compõem-se, além deste capítulo introdutório, de mais cinco capítulos, os quais são descritos a seguir.

No capítulo 2, é descrito o significado e os tipos de amortecimentos existentes em sistemas oscilatórios.

No capítulo 3, com o auxílio da teoria sobre a vibração transversal livre de barra, e de um modelo matemático, conhecido como de Kelvin-Voigt, são desenvolvidas e obtidas as expressões matemáticas para os deslocamentos transversais de barras denotadas por $\phi(x)$ e $q(t)$, as quais são funções da posição x e do tempo t . Após a dedução da expressão $q(t)$ (amplitudes de deslocamentos



transversais) a mesma é utilizada para definir o decremento logaritmico δ , e consequentemente definir também o fator de amortecimento ζ , dado em função de δ .

No capítulo 4, são descritos os procedimentos experimentais utilizados nos ensaios das vigas.

O capítulo 5, é dedicado a análises de dados experimentais obtidos nos ensaios das vigas (amplitudes de deslocamentos referentes ao primeiro modo de vibração) e na obtenção de resultados experimentais relativos a razões de amortecimento e frequências naturais de vibrações em função da variação do torque de aperto.

No capítulo 6, são feitos os comentários e conclusões a respeito do trabalho.

Após o capítulo 6, são apresentados os respectivos apêndices, e as referências bibliográficas.

CAPÍTULO 2

SIGNIFICADO E TIPOS DE AMORTECIMENTOS



CAPÍTULO 2 - SIGNIFICADO E TIPOS DE AMORTECIMENTOS

2.1 Introdução - O amortecimento está presente em todos os sistemas mecânicos, e o seu efeito é dissipar energia do sistema através de várias formas como atrito interno de ondas sonoras ou as forças de calor. A consequência direta para de energia do sistema, é a queda da amplitude da vibração, daí surgem importantes fenômenos de amortecimento em vibrações mecânicas.

O amortecimento existente num sistema oscilatório é proveniente dos seguintes tipos de forças dissipativas: resistência de fluido, atrito interno, atrito externo. Elas são conhecidas respectivamente como amortecimento fluido (resistência de fluido), amortecimento material (atrito molecular interno) e amortecimento estrutural (atrito externo gerado por superfícies em contato). Portanto, o amortecimento total de um sistema mecânico é a soma dos componentes dos respectivos amortecimentos fluido, material e estrutural.

A descrição matemática dessas forças dissipativas geralmente é complicada sendo aplicadas aproximadamente na análise de vibrações o modelo de amortecimento viscoso unidimensional, cuja equação de movimento é dada por:

CAPÍTULO 2

SIGNIFICADO E TIPOS DE AMORTECIMENTOS

Quando um corpo oscila em um meio viscoso, a resistência oferecida pelo fluido é proporcional à velocidade. Este tipo de amortecimento é chamado de amortecimento viscoso unidimensional, tal situação é chamada de amortecimento negativo.

2.2 Conceito de dissipação de energia: Consideremos o modelo de amortecimento viscoso unidimensional na Figura 2.1, realizado em um sistema unidimensional de um grau de liberdade. Neste modelo a força de amortecimento é proporcional à velocidade, conforme equação 2.1:

$$F_d = -c \dot{x} = -c \frac{dx}{dt} \quad (2.1)$$

onde c é uma constante de proporcionalidade, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

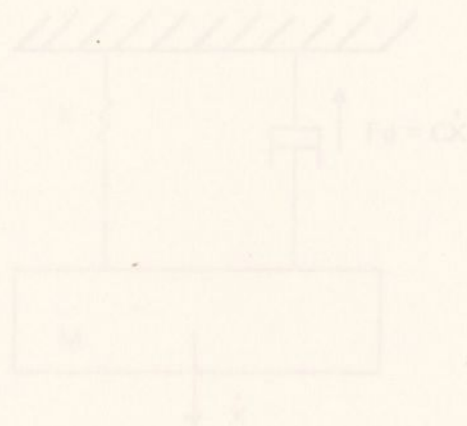


Figura 2.1 Modelo de amortecimento viscoso unidimensional.

CAPÍTULO 2 - SIGNIFICADO E TIPOS DE AMORTECIMENTOS

2.1 Introdução:- O amortecimento está presente em todos os sistemas oscilatórios, e o seu efeito é retirar energia do sistema, através de várias formas como irradiação de ondas sonoras ou na forma de calor. A consequência desta perda de energia do sistema, é a queda da amplitude de vibração, daí a grande importância do amortecimento em vibrações mecânicas.

O amortecimento existente num sistema oscilatório é proveniente dos seguintes tipos de forças dissipativas resistência de fluido, atrito molecular interno e atrito externo. Eles são conhecidos respectivamente como amortecimento fluídico (resistência de fluido), amortecimento material (atrito molecular interno) e amortecimento estrutural (atrito externo gerado por superfícies em contato). Portanto, o amortecimento total de um sistema oscilatório, é a soma dos componentes dos respectivos amortecimentos fluídico, material e estrutural.

A descrição matemática dessas forças dissipativas geralmente é complicada e não aplica-se satisfatoriamente na análise de vibração. Assim o desenvolvimento de modelos matemáticos simplificados de amortecimento é necessário com a finalidade de descrever e avaliar de maneira eficaz a resposta do sistema.

Quando estas forças dissipativas, presentes em um sistema oscilatório, estão consumindo energia, isto é, inibindo movimento, então tal condição é chamada de amortecimento positivo ou amortecimento no sentido geral. Entretanto se ao invés de consumir energia, introduzir energia dentro do sistema oscilatório, tal situação é chamada de amortecimento negativo.

2.2 Conceito de dissipação de energia: Consideremos o modelo de amortecimento viscoso ilustrado na Figura 2.1, referente a um sistema amortecido de um grau de liberdade.. Neste modelo a força de amortecimento F_d , é proporcional à velocidade, conforme equação 2.1:

$$F_d = c \frac{\partial x}{\partial t} = c \dot{x} \quad (2.1)$$

onde c é uma constante de proporcionalidade, e $\frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x}$

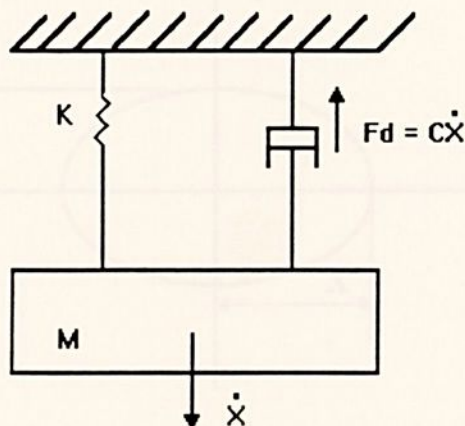


Figura 2.1 Modelo de amortecimento viscoso unidimensional

A dissipação de energia é usualmente determinada sob condições de oscilações cíclicas. A representação gráfica da relação força-deslocamento pode diferir muito, conforme o tipo de amortecimento presente. Em todos os casos, a curva força-deslocamento incluirá uma área, denominada como laçada de histerese, que é proporcional à energia perdida por ciclo. A energia dissipada em um ciclo de vibração para um amortecimento viscoso ideal, conforme Figura 2.2, é dada por:

$$\epsilon_d = \oint F_d dx = \int_0^T F_d \cdot \dot{x} dt \quad (2.2)$$

onde T é o período da vibração, e F_d a força de amortecimento

Para uma vibração senoidal com amplitude constante, tem-se:

$$x(t) = X \sin(\omega t - \phi) \quad (2.3)$$

Sendo X a amplitude do deslocamento e x o deslocamento.

Então a energia dissipada por ciclo, será:

$$\epsilon_d = \oint c \dot{x} dx = \oint c \dot{x}^2 dt = \int_0^{2\pi/\omega} c \omega^2 X^2 \cos^2(\omega t - \phi) dt$$

Portanto:

$$\epsilon_d = \pi c \omega X^2 \quad (2.4)$$

Escrevendo a velocidade sob a forma:

$$\dot{x} = \omega x \cos(\omega t - \phi) = \pm \omega \sqrt{X^2 - x^2}$$

temos para a força de amortecimento:

$$F_d = c \dot{x} = \pm c \omega \sqrt{X^2 - x^2} \quad (2.5)$$

a qual pode ser escrita como:

$$\left(\frac{F_d}{c \omega X} \right)^2 + \left(\frac{x}{X} \right)^2 = 1 \quad (2.6)$$

que representa a equação de uma elipse. A área abrangida pela elipse representa a energia dissipada por ciclo.

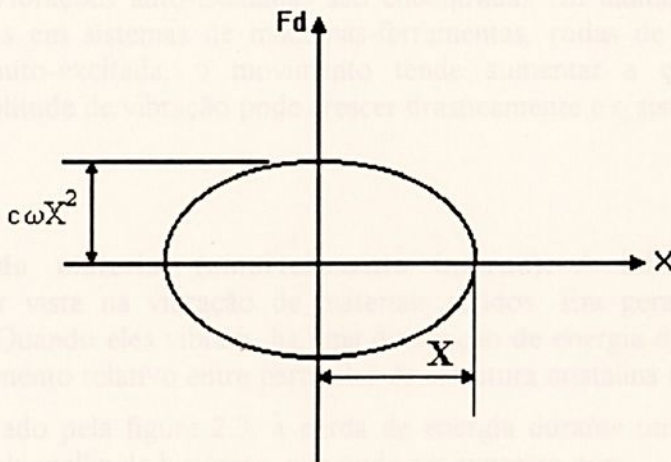


Figura 2.2 Energia dissipada pelo amortecimento viscoso.

A energia total do sistema oscilatório (ϵ_T), é definida como a soma da energia cinética (T) e energia de deformação(U), isto é:

$$\epsilon_T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 \quad (2.7)$$

Para uma vibração senoidal de amplitude constante, a energia total do sistema em uma posição arbitrária x, é reduzida a:

$$\epsilon_T = \frac{1}{2} kx^2 = \text{constante} \quad (2.8)$$

A taxa de energia gasta por ciclo E_d , devido ao amortecimento viscoso com relação a energia total do sistema E_T é dada por:

$$\frac{E_d}{E_T} = 4\pi\zeta \frac{\omega_n}{\omega} \quad (2.9)$$

$$\text{Onde } \xi \text{ é definido como : } \xi = \frac{c}{C_c} \quad (2.10)$$

Se o sistema vibra em sua frequência natural ($\omega = \omega_n$), a equação 2.9, torna-se:

$$\frac{E_d}{E_T} = 4\pi\zeta \quad (2.11)$$

Isto é, para sistemas vibratórios, vibrando em sua frequência natural, o fator de amortecimento ζ , é proporcional à razão da taxa de energia gasta por amortecimento viscoso por ciclo pela energia total do sistema.

2.3. Tipos de Amortecimentos:-

2.3.1 Amortecimento Negativo:- Este tipo de amortecimento ocorre em um sistema oscilatório onde a força que produz o movimento é dependente da velocidade ou deslocamento, isto é, a força dissipativa é criada pelo próprio movimento. Quando o movimento oscilatório do sistema para, a força deixa de existir. Vibrações auto-excitadas são encontradas em muitas aplicações tais como vibrações de ferramentas em sistemas de máquinas-ferramentas, rodas de automóveis e asas de aviões. Em vibração auto-excitada, o movimento tende a aumentar a energia do sistema, e conseqüentemente a amplitude de vibração pode crescer drasticamente e o sistema tornar-se instável.

2.3.2 Amortecimento do material (amortecimento interno):- A influência deste tipo de amortecimento pode ser vista na vibração de materiais sólidos. Em geral, os sólidos não são perfeitamente elásticos. Quando eles vibram, há uma dissipação de energia devido a fricção interna, como resultado do movimento relativo entre partículas da estrutura cristalina durante a deformação.

Conforme ilustrado pela figura 2.3, a perda de energia durante um ciclo pode ser obtida pela área contida dentro da malha de histerese, que pode ser expressa por:

$$A_h = \int F dx \quad (2.12)$$

onde A_h é a área contida dentro da malha de histerese, F a força aplicada e x o deslocamento.

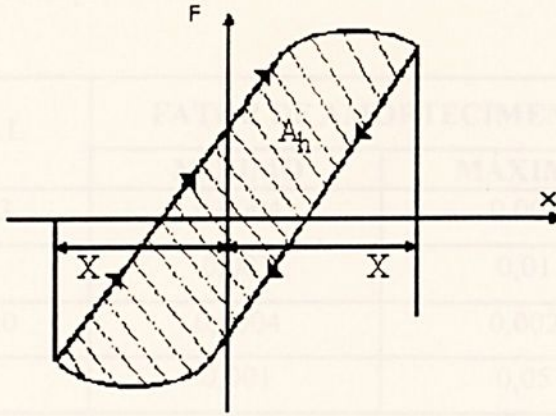


Figura 2.3 Malha de histerese

O fator de amortecimento do material é proporcional a:

$$\xi \approx \frac{\text{Área de histerese}}{\text{Máxima energia armazenada}} \quad (2.13)$$

Para muitos materiais, a área da malha de histerese, pode ser aproximada por:

$$A_h = J\tau^n \quad (2.14)$$

onde J e n são funções do material, temperatura, nível de deformação e τ é a máxima tensão aplicada durante um ciclo.

Conforme Blevins [1] para materiais de estrutura metálica mais comuns, n está entre 2 e 3 se o material é mantido abaixo da condição de escoamento. A área da malha de histerese é muito pequena para materiais de estrutura metálica comum, quando o material não atinge a condição de escoamento. Se o material escoar, n pode crescer para 10 ou mais. O escoamento plástico de um material requer uma grande energia de entrada, que corresponde a um alto amortecimento.

Certos materiais apresentam um alto amortecimento interno, como a borracha e a terra e alguns materiais visco-elásticos. Por exemplo o alto amortecimento da terra é gerado pelo escoamento plástico, que ocorre sob cargas relativamente pequenas.

O amortecimento do material de uma estrutura pode apresentar-se como uma função.

$$\xi = f(J, n, \text{seção transversal, forma modal}) \quad (2.15)$$

Através das equações 2.9 e 2.13, é possível calcular por exemplo, o amortecimento do material de uma estrutura.

Na tabela 2.1 é apresentado o amortecimento do material de uma viga em balanço com uma seção transversal circular, para vários materiais que não foram submetidos a cargas que produzem o escoamento, conforme Blevins [1].

MATERIAL	FATOR DE AMORTECIMENTO	
	MÍNIMO	MÁXIMO
Alumínio 6063	0,0004	0,004
Ferro Puro	0,001	0,01
Aço SAE 1020	0,0004	0,002
Titânio Puro	0,001	0,05

Tabela 2.1 Amortecimento do material de uma viga em balanço.[1]

2.3.3 Amortecimento estrutural:- Este tipo de amortecimento ocorre em estruturas que apresentam por exemplo juntas, e são provenientes de forças amortecedoras geradas na superfície de contato destas juntas (amortecimento de Coulomb). Geralmente não é precisa a previsão deste tipo de amortecimento, pois é extremamente difícil estimar a energia gasta em escorregamentos (atritos) em juntas de estruturas complexas, porque há incertezas sobre detalhes destas juntas.

Todas as técnicas para a medida do fator de amortecimento são baseadas numa mesma idéia, isto é:- "a resposta da estrutura, é uma função da excitação e do amortecimento". Se uma excitação conhecida é aplicada a uma estrutura com amortecimento desconhecido, então a resposta pode ser prevista como uma função do amortecimento. O amortecimento incógnito poderá ser encontrado igualando-se a resposta à previsão.

O amortecimento determinado experimentalmente, ordinariamente inclui componentes de fluido, do material e estrutural.

As técnicas mais comumente usadas para a medida de amortecimento viscoso equivalente, são: decremento logarítmico, largura de banda, fator de amplificação e método da resposta. Estas técnicas de medidas de amortecimentos, são apresentadas por R. Plunkett [4] e Blevins [1].



CAPÍTULO 3 - VIBRAÇÃO TRANSVERSAL LIVRE DE BARRAS

INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como objetivo apresentar as soluções matemáticas relativas apenas à vibração transversal livre de barras ou "caso unidimensional" da teoria sobre vibração transversal livre de barras. As soluções relativas a deslocamentos longitudinais não foram consideradas porque as equações de movimento aplicadas são muito mais complicadas para o caso de vibração transversal livre de barras.

Pela aplicação da lei de Euler-Bernoulli, a barra obedecerá a equação diferencial que rege a vibração transversal livre sem amortecimento, cuja solução matemática para o deslocamento é dada por duas funções trigonométricas $C(x)$ e $g(t)$, dependentes respectivamente da posição x e do tempo t . Com condições de contorno de deslocamento em $x=0$ e $x=L$ e condições iniciais de deslocamento e velocidade em $t=0$, obtém-se as equações das frequências naturais de vibração e os modos próprios de vibração através da expressão deduzida para $C(x)$, conforme Shabana [6].

Paralelamente, com a utilização da equação (3.1) que descreve o comportamento de barras viscoelásticas, como foi feito por Goldsmith [2], e ainda com a aplicação da equação (3.1) para a obtenção das expressões matemáticas para $C(x)$ e $g(t)$, obtém-se as equações das frequências naturais e modos próprios de vibração para o amortecimento transversal sem amortecimento, incluindo-se que $C(x)$ contém os materiais r e $g(t)$ deriva da expressão anterior, através da substituição de uma constante de amortecimento do material C , conforme Shabana [6] e Thomson [9].

Em seguida, são definidos o decaimento logarítmico δ , em termos das amplitudes de deslocamento máxima $q(t)$, em t , através dos seus picos, e o fator de razão de amortecimento ζ , de como função de δ .

VIBRAÇÃO TRANSVERSAL LIVRE SEM AMORTECIMENTO

3.1 Teoria elemental de barra

Na teoria elemental de barra, todas as tensões são supostas, iguais a zero, exceto a tensão normal T que é considerada variar linearmente sobre a secção transversal com a coordenada y da barra, como mostrado na figura 3.1.

CAPÍTULO 3 - VIBRAÇÃO TRANSVERSAL LIVRE DE BARRAS

3.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como objetivo encontrar as soluções matemáticas relativas apenas a deslocamentos transversais de barras ou vigas, utilizando-se da teoria sobre vibração transversal livre de barras. As soluções relativas a deslocamentos longitudinais não foram consideradas, porque as forças de excitações aplicadas nas vigas durante os ensaios, foram nos sentidos transversais das mesmas.

Pela aplicação da lei de Euler-Bernoulli, a barras, obtém-se a equação diferencial que governa a vibração transversal livre sem amortecimento, cuja solução matemática para o deslocamento é dada por duas expressões matemáticas $\varnothing(x)$ e $q(t)$, dependentes respectivamente da posição x e do tempo t . Com as condições de contorno aplicada para o caso específico das vigas ensaiadas, isto é, com extremidades livres, obtém-se as equações das frequências naturais de vibrações teóricas e os modos naturais de vibrações através da expressão deduzida para $\varnothing(x)$, conforme Shabana [6].

Posteriormente, com a utilização de um modelo que descreve o comportamento de materiais viscoelásticos, conhecido como modelo de Kelvin-Voigt, conforme Goldsmith [2], e ainda com a aplicação da equação de Euler-Bernoulli, são deduzidas novamente duas expressões matemáticas para o deslocamento transversal, isto é, $\varnothing(x)$ e $q(t)$, as quais são analisadas e comparadas com as expressões deduzidas para o deslocamento transversal sem amortecimento. Concluindo-se que $\varnothing(x)$ mantém-se inalterada, e $q(t)$ difere da expressão anterior, através da inclusão de uma constante de amortecimento do material C_j , conforme Shabana [6] e Thomson [9].

Em seguida, são definidos o decremento logaritmico δ , em termos das amplitudes de deslocamentos máximos $q(t)$, isto é, através dos seus picos, e o fator ou razão de amortecimento ξ , dado como função de δ .

3.2 VIBRAÇÃO TRANSVERSAL LIVRE SEM AMORTECIMENTO

3.2.1 Teoria elementar de barra

Na teoria elementar de barra, todas as tensões são supostas, iguais a zero, exceto a tensão normal σ , que é considerada variar linearmente sobre a secção transversal com a coordenada y da barra, como mostrado na figura 3.1

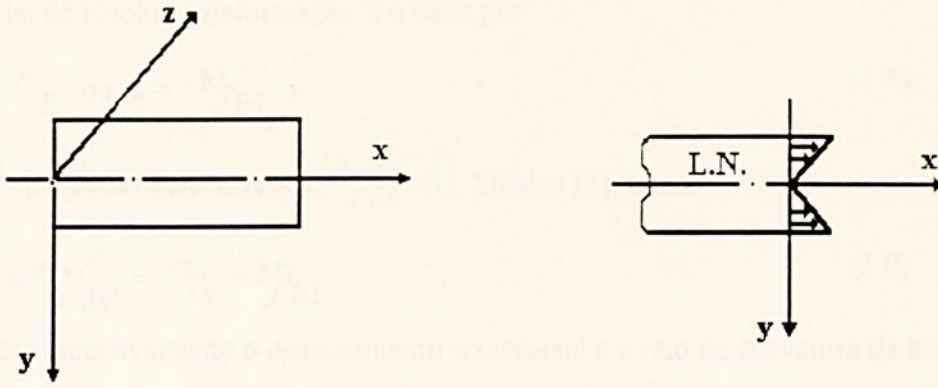


Figura 3.1 Teoria elementar de barra

A tensão normal σ pode ser escrita como:

$$\sigma = ky \quad (3.1)$$

onde k é uma constante e y a distância da linha neutra (L.N.). Ao longo da linha neutra, a tensão normal é zero, isto é, para $y = 0$.

A hipótese de que todas as outras tensões sejam iguais a zero requer que a resultante das forças internas seja zero, e que os momentos das forças internas em relação ao eixo neutro seja igual ao momento de flexão M . Isto é:

$$\int_A \sigma \, dA = 0 \quad \int_A y \sigma \, dA = -M \quad (3.2)$$

onde A é a área da secção transversal da barra.

Substituindo a equação 3.1 na equação 3.2, obtemos

$$k \int_A y \, dA = 0 \quad (3.3)$$

$$k \int_A y^2 \, dA = -M \quad (3.4)$$

A equação 3.4, pode ser usada para definir k , como:

$$k = -M / I_z \quad (3.5)$$

onde I_z é o momento de inércia da secção transversal em torno do eixo z , isto é:

$$I_z = \int_A y^2 \, dA \quad (3.6)$$

Substituindo a equação 3.5 na equação 3.1, obtemos:

$$\sigma = -M / I_z \, y \quad (3.7)$$

Na lei de Hooke, a deformação ε é dada por:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{ou} \quad \varepsilon = -\frac{M}{EI_z} y \quad (3.8)$$

Para pequenas deformações ($\frac{dv}{dx} \ll 1$), Shigley [8], temos

$$\frac{1}{r} \approx \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{\varepsilon}{y} = \frac{M}{EI_z} \quad (3.9)$$

onde v e r são respectivamente o deslocamento transversal e o raio de curvatura da barra

Da equação 3.9, para $\frac{dv}{dx} = v'$ e $\frac{d^2v}{dx^2} = v''$, temos

$$M = EI_z v'' \quad (3.10)$$

A equação 3.10 é conhecida como a lei de "Euler-Bernoulli" da teoria elementar de barras quando; $\frac{dv}{dx} \ll 1$.

3.2.2 Equação Diferencial Parcial

Na determinação da equação diferencial para a vibração transversal de barras consideramos um volume infinitesimal, a uma distância x da extremidade da barra como mostrado na figura 3.2; onde δx é o comprimento deste volume infinitesimal, V e M respectivamente a força de cisalhamento e momento de flexão, e $F(x, t)$ o carregamento por unidade de comprimento da barra.

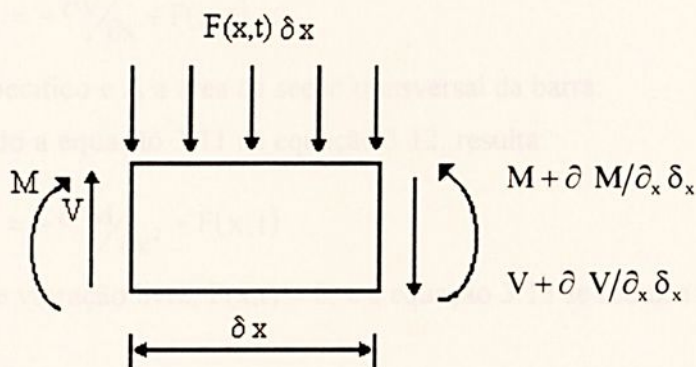


Figura 3.2 Momentos de flexão e forças de cisalhamentos

Negligenciando a inércia de rotação, a soma dos momentos de flexão em relação a extremidade esquerda da seção, é:

$$(M + \frac{\partial M}{\partial x} \delta x) - M - (V + \frac{\partial V}{\partial x} \delta x) \delta x - F(x, t) \delta x \frac{\delta x}{2} = 0$$

ou

$$\left(\frac{\partial M}{\partial x} - V\right) - \left(\frac{\partial V}{\partial x} + F(x, t)\right)\delta x = 0$$

Fazendo o limite de δx , aproximar-se de zero, a equação precedente conduz a:

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (3.11)$$

Obs.: Quando aplicamos $\lim_{\delta x \rightarrow 0}$, $\frac{\partial M}{\partial x}$ e $\frac{\partial V}{\partial x}$ não se anulam, porque são funções independentes de δx , isto é:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = L_1 = f(x, t) \text{ e}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = L_2 = g(x, t)$$

onde L_1 L_2 , são dois números quaisquer.

A condição de equilíbrio dinâmico para a vibração transversal da barra é obtida aplicando a 2ª lei de Newton.

$$\rho A \delta x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\left(V + \frac{\partial V}{\partial x} \delta x\right) + V + F(x, t)\delta x$$

ou

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{\partial V}{\partial x} + F(x, t) \quad (3.12)$$

onde ρ é o peso específico e A a área da seção transversal da barra.

Substituindo a equação 3.11 na equação 3.12, resulta:

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + F(x, t) \quad (3.13)$$

No caso de vibração livre, $F(x, t) = 0$, e a equação 3.13 se reduz a:

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \quad (3.14)$$

Substituindo a equação 3.10 na equação 3.14, resulta:

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}$$

ou

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{EI_z}{\rho A} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = -c^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \quad (3.15)$$

onde c é uma constante definida como:

$$c = \sqrt{\frac{EI_z}{\rho A}} \quad (3.16)$$

A equação 3.15 é uma equação diferencial parcial de 4ª ordem que governa o movimento para vibrações transversais livres de barras.

3.2.3 Solução da equação diferencial do movimento transversal de barra

A solução da equação 3.15 pode ser obtida usando a técnica de separação de variáveis. Neste caso, assumimos uma solução na forma.

$$v = \varnothing(x) \cdot q(t) \quad (3.17)$$

onde $\varnothing(x)$ e $q(t)$ são funções dependentes respectivamente da posição e do tempo. Para este caso, obtém-se soluções para $\varnothing(x)$ e $q(t)$, as quais são expressas em termos de seno e cosseno.

Obs.: Se assumirmos uma solução na forma: $v = \varnothing(x) + q(t)$, não obtemos soluções, pois neste caso, as funções $\varnothing(x)$ e $q(t)$, são expressas em termos de polinômios de 4ª e 2ª ordem respectivamente nas variáveis x e t , isto é:

$$q(t) = -\omega^2 t^2 + D_1 t + D_2, \text{ onde } \omega, D_1 \text{ e } D_2 \text{ são constantes}$$

$$\varnothing(x) = \eta^2 \frac{x^4}{24} + G_1 \frac{x^3}{6} + G_2 \frac{x^2}{2} + G_3 x + G_4$$

onde η, G_1, G_2, G_3 e G_4 são constantes

Da equação 3.17 obtemos:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \varnothing(x) \ddot{q}(t)$$

e

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \varnothing^{IV}(x) \cdot q(t)$$

Substituindo estas equações na equação 3.15, obtemos:

$$\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = -c^2 \frac{\varnothing^{IV}(x)}{\varnothing(x)} = -\omega^2 \quad (3.18)$$

onde ω é uma constante a ser determinada.

A equação 3.18 conduz às duas equações seguintes:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \quad (3.19)$$



$$\varnothing^{IV} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varnothing = 0 \quad (3.20)$$

A solução da equação 3.19, segundo Shabana [6] é dada por:

$$q(t) = B_1 \operatorname{sen} \omega t + B_2 \operatorname{cos} \omega t \quad (3.21)$$

onde: B_1 e B_2 são constantes.

Admitindo-se uma solução da equação 3.20, da forma: $\varnothing = A e^{\lambda x}$

Substituindo esta solução na equação 3.20, obtemos:

$$\left[\lambda^4 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \right] A e^{\lambda x} = 0$$

ou

$$\lambda^4 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0$$

que pode ser escrita como:

$$\lambda^4 - \eta^4 = 0 \quad (3.22)$$

$$\text{onde } \eta = \sqrt{\frac{\omega}{c}}, \text{ é uma constante} \quad (3.23)$$

As raízes da equação 3.22, são:

$$\lambda_1 = \eta; \lambda_2 = -\eta; \lambda_3 = i\eta; \lambda_4 = -i\eta;$$

Portanto, a solução geral da equação 3.20, pode ser escrita como:

$$\varnothing(x) = A_1 e^{nx} + A_2 e^{-nx} + A_3 e^{inx} + A_4 e^{-inx} \quad (3.24)$$

que pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \varnothing(x) = & A_5 \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{2} + A_6 \frac{e^{nx} + e^{-nx}}{2} \\ & + A_7 (-i) \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} + A_8 \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\text{onde: } A_1 = \frac{A_5 + A_6}{2}; A_2 = \frac{A_6 - A_5}{2}; A_3 = \frac{A_8 - iA_7}{2}; A_4 = \frac{A_8 + iA_7}{2};$$

Usando a fórmula de Euler de variáveis complexas, a equação 3.25 pode ser reescrita como:

$$\varnothing(x) = A_5 \operatorname{senh} \eta x + A_6 \operatorname{cosh} \eta x + A_7 \operatorname{sen} \eta x + A_8 \operatorname{cos} \eta x \quad (3.26)$$

onde: A_5 ; A_6 ; A_7 ; A_8 ; são constantes determinadas em função das condições de contorno da barra.

Portanto, substituindo as equações 3.21 e 3.26, na equação 3.17, obtemos:

$$v(x, t) = (A_5 \sinh \eta x + A_6 \cosh \eta x + A_7 \sin \eta x + A_8 \cos \eta x) \cdot (B_1 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t) \quad (3.27)$$

3.2.4 Condições de contorno da barra ou viga com extremidades livres: O momento de flexão M e a força de cisalhamento V são iguais a zero, nas extremidades da viga. Portanto, as condições de contorno neste caso, são dadas por

$$M(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad V(0, t) = 0 \quad \text{ou} \quad \phi''(0) = 0 \quad \text{e} \quad \phi'''(0) = 0$$

$$M(\ell, t) = 0 \quad \text{e} \quad V(\ell, t) = 0 \quad \text{ou} \quad \phi''(\ell) = 0 \quad \text{e} \quad \phi'''(\ell) = 0$$

Substituindo $\phi''(0)$ e $\phi'''(0)$ na equação 3.26, obtemos

$$\phi''(0) = \eta^2 A_6 - \eta^2 A_8 = 0 \Rightarrow A_6 = A_8$$

$$\phi'''(0) = \eta^3 A_5 - \eta^3 A_7 = 0 \Rightarrow A_5 = A_7$$

Portanto a equação 3.26 pode ser reescrita como:

$$\phi(x) = A_5(\sinh \eta x + \sin \eta x) + A_6(\cosh \eta x + \cos \eta x) \quad (3.28)$$

Substituindo $\phi'(\ell)$ e $\phi''(\ell)$ na equação 3.28, obtemos:

$$A_5(\sinh \eta \ell - \sin \eta \ell) + A_6(\cosh \eta \ell - \cos \eta \ell) = 0$$

$$A_5(\cosh \eta \ell - \cos \eta \ell) + A_6(\sinh \eta \ell - \sin \eta \ell) = 0$$

Isto é:

$$\begin{bmatrix} \sinh \eta \ell - \sin \eta \ell & \cosh \eta \ell - \cos \eta \ell \\ \cosh \eta \ell - \cos \eta \ell & \sinh \eta \ell - \sin \eta \ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_5 \\ A_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este é um sistema de equações algébricas homogêneas nos coeficientes desconhecidos A_5 e A_6 .

Este sistema de equações algébricas tem uma solução não trivial se e somente se, o determinante da matriz coeficiente é igual a zero.

Isto conduz a seguinte equação de frequência.

$$(\sinh^2 \eta \ell - \sin^2 \eta \ell) - (\cosh \eta \ell - \cos \eta \ell)^2 = 0$$

Desde que:

$$\cos h^2 \eta \ell - \operatorname{sen} h^2 \eta \ell = 1 \quad \text{e} \quad \cos^2 \eta \ell + \operatorname{sen}^2 \eta \ell = 1$$

3.2.4.1 Freqüências naturais de vibração:

A equação de freqüência pode ser simplificada para:

$$\cos \eta \ell \cos h \eta \ell = 1 \quad (3.29)$$

Esta equação é satisfeita se $\eta \ell = 0$

Portanto, as três primeiras freqüências naturais para vigas duplamente livres, são definidas pelas equações:

$$\omega_1 = \eta_1^2 c = \eta_1^2 \ell^2 \frac{c}{\ell^2} = (\eta_1 \ell)^2 \frac{c}{\ell^2} = (4,730)^2 \frac{c}{\ell^2} \quad (3.30)$$

$$\omega_2 = \eta_2^2 c = \eta_2^2 \ell^2 \frac{c}{\ell^2} = (\eta_2 \ell)^2 \frac{c}{\ell^2} = (7,853)^2 \frac{c}{\ell^2} \quad (3.31)$$

$$\omega_3 = \eta_3^2 c = \eta_3^2 \ell^2 \frac{c}{\ell^2} = (\eta_3 \ell)^2 \frac{c}{\ell^2} = (10,996)^2 \frac{c}{\ell^2} \quad (3.32)$$

3.2.4.2 Modos naturais de vibrações: A função $\phi(x)$, equação 3.28 obtida para este caso, é expressa em termos das constantes A5 e A6, e a relação entre estas duas constantes é dada por:

$$\frac{A6}{A5} = -\frac{\operatorname{sen} h \eta \ell - \operatorname{sen} \eta \ell}{\cos h \eta \ell - \cos \eta \ell} = -\frac{\cos h \eta \ell - \cos \eta \ell}{\operatorname{sen} h \eta \ell + \operatorname{sen} \eta \ell} \quad (3.33)$$

A figura 3.3, representa as configurações modais que se obtém para a viga com extremidades livres, com relação aos tres primeiros modos de vibrações, em função de $\phi(x)$.

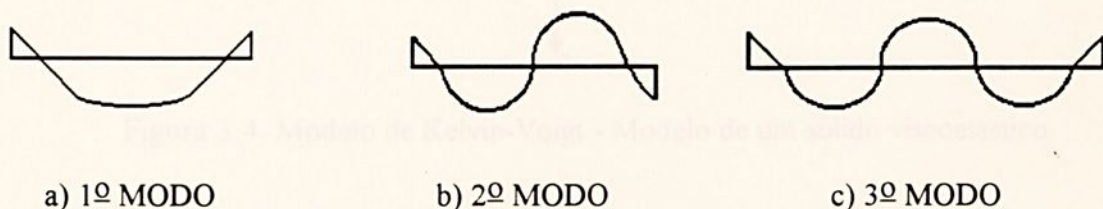


Figura 3.3. Modos de vibrações de uma viga com extremidades livres.

3.3 Vibração Transversal Livre de Vigas com Amortecimento

3.3.1 Materiais viscoelásticos: Amortecimento interno, está presente na maioria dos materiais como resultado da fricção entre as partículas. Tem sido observado que a amplitude de vibração livre de uma amostra sólida diminui com o tempo mesmo nos casos em que a amostra está isolada de alguma influência de amortecimento externo. Tais materiais são chamados viscoelásticos. Existem vários modelos para descrever o comportamento de materiais viscoelásticos.

O modelo viscoelástico descreve o comportamento de muitos materiais sintéticos, tais como polímeros e são caracterizados por uma relação entre tensões e deformações dependentes do tempo. Os modelos para estes materiais podem ser constituídos por uma combinação de molas e amortecedores convenientemente organizados.

3.3.2 Modelo de Kelvin-Voigt:- Este modelo é constituído por dois parâmetros (mola e amortecedor) e a tensão atuante sobre o corpo é suposta ser proporcional a deformação e a velocidade de deformação, isto é,

$$\sigma = E(\varepsilon + c_i \dot{\varepsilon}) \quad (3.34)$$

onde σ e ε são respectivamente a tensão e a deformação e E e c_i , são as constantes módulo de elasticidade e amortecimento, que dependem das propriedades do material, conforme Goldsmith [2].

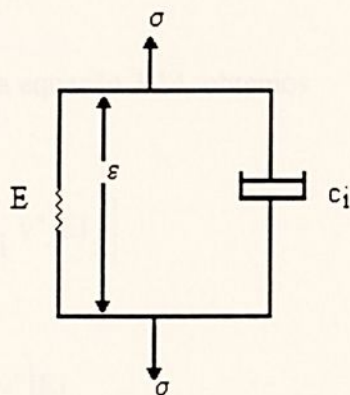


Figura 3.4 Modelo de Kelvin-Voigt - Modelo de um sólido viscoelástico.

3.3.3 Vibração Transversal Livre: com amortecimento

Da equação 3.9, sabemos que:

$$d^2 v / dx^2 = - \varepsilon / y = v'$$

Admitindo que o deslocamento transversal da viga ou barra, seja da forma dada pela equação 3.17.

$$v(x, t) = \phi(x) \cdot q(t)$$

Então, concluímos que:

$$d^2 v / dx^2 = v'' = \phi''(x) \cdot q(t) \quad (3.35)$$

$$d^2 v / dx^2 \left(\frac{dv}{dt} \right) = \dot{v}'' = \phi''(x) \dot{q}(t) \quad (3.36)$$

Substituindo as equações 3.34; 3.9 e 3.36 na equação 3.2, obtemos:

$$\begin{aligned} -M(x, t) &= \int_A y \sigma dA = \int_A y E (\epsilon + c_i \dot{\epsilon}) dA = \\ &= \int_A y (-v'' y + c_i \dot{v}'' y) E dA \\ -M(x, t) &= \int_A -(v'' + c_i \dot{v}'') y^2 E dA = -(v'' + c_i \dot{v}'') E \int_A y^2 dA \end{aligned}$$

$$\therefore -M(x, t) = -(v'' + c_i \dot{v}'') EI_Z$$

ou

$$M(x, t) = (v'' + c_i \dot{v}'') EI_Z \quad (3.37)$$

BS.: Se $c_i = 0$, a equação 3.37 se reduz a equação 3.10, conhecida como a lei de Euler-Bernoulli,

$$M(x, t) = EI_Z v''$$

Substituindo a equação 3.37 na equação 3.14, obtemos:

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[(v'' + c_i \dot{v}'') EI_Z \right]$$

ou

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v'' + c_i \dot{v}'') EI_Z \quad (3.38)$$

Substituindo as equações 3.35 e 3.36 na equação 3.38, obtemos

$$\rho A \phi(x) \ddot{q}(t) = - \left(\phi^{IV}(x) \cdot q(t) + c_i \phi^{IV}(x) \cdot \dot{q}(t) \right) EI_Z$$

mplicando que:

$$\frac{\ddot{q}(t)}{q(t) + c_1 \dot{q}(t)} = -\frac{EI_z}{\rho A} \frac{\phi^{IV}(x)}{\phi(x)} = -\omega^2 \quad (3.39)$$

$$\text{ou} \quad \frac{\ddot{q}(t)}{q(t) + c_1 \dot{q}(t)} = -c^2 \frac{\phi^{IV}(x)}{\phi(x)} = -\omega^2$$

OBS.: Se $c_1=0$, a equação 3.39 se reduz a equação 3.18, referente a vibração transversal livre sem amortecimento.

A equação 3.39, conduz às seguintes equações:

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 c_1 \dot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \quad (3.40)$$

$$\phi^{IV}(x) - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \phi(x) = 0 \quad (3.41)$$

A equação 3.41, é idêntica a equação 3.20, portanto, tem a mesma solução dada pela equação 3.28, isto é:

$$\phi(x) = A_5(\sinh \eta x + \sin \eta x) + A_6(\cosh \eta x + \cos \eta x)$$

Para a equação 3.40, supomos uma solução da forma:

$$q(t) = B e^{pt} \quad (3.42)$$

$$\text{Portanto: } \dot{q}(t) = Bp e^{pt} \text{ e } \ddot{q}(t) = Bp^2 e^{pt}$$

Substituindo as derivadas de $q(t)$ na equação 3.40, obtemos:

$$(p^2 + \omega^2 c_1 p + \omega^2) B e^{pt} = 0 \quad (3.43)$$

A solução da equação característica

$$(p^2 + \omega^2 c_1 p + \omega^2) = 0 \quad (3.44)$$

é dada pelas raízes:

$$p_1 = \alpha + i\beta \quad (3.45)$$

$$p_2 = \alpha - i\beta \quad (3.46)$$

$$\text{onde } \alpha = -\omega^2 c_1 / 2 \quad (3.47)$$

$$\text{e } \beta = \frac{1}{2} \sqrt{(\omega^2 c_1)^2 - 4\omega^2} \quad (3.48)$$

Desde que $p_1 \neq p_2$, a solução completa é dada por:

$$q(t) = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t} \quad (3.49)$$

onde B_1 e B_2 são constantes.

$$\text{Portanto: } q(t) = e^{\alpha t} (B_1 e^{i\beta t} + B_2 e^{-i\beta t}) \quad (3.50)$$

Usando a fórmula de Euler, dada por:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta$$

na equação 3.50, obtemos:

$$q(t) = e^{\alpha t} [(B_1 + B_2) \cos\beta t + i(B_1 - B_2) \operatorname{sen}\beta t] \quad (3.51)$$

Desde que o deslocamento $q(t)$ deve ser real os coeficientes das funções seno e cosseno na equação acima devem ser reais. Isto será o caso, se e somente se:

$$B_1 + B_2 = C_1$$

$$i(B_1 - B_2) = C_2$$

onde C_1 e C_2 são constantes.

A solução completa da equação 3.51 pode então ser escrita como:

$$q(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos\beta t + C_2 \operatorname{sen}\beta t) \quad (3.52)$$

OBS.: Podemos verificar que a solução de $q(t)$, dada pela equação 3.52, é o produto da função exponencial $e^{\alpha t}$ pela função harmônica $\cos \beta t$ e $\operatorname{sen} \beta t$. Portanto, a solução neste caso é de natureza oscilatória.

A solução $q(t)$, pode também ser expressa por:

$$q(t) = X e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t + \phi) \quad (3.53)$$

Esta forma de solução é mais usual na análise de vibração livre de sistemas mecânicos.

As constantes X e ϕ são respectivamente a amplitude de deslocamento e o ângulo de fase, conforme ilustra a Figura 5.

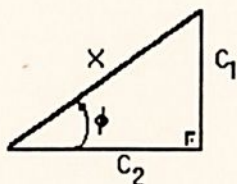


Figura 3.5 - Definição de ângulo de fase ϕ

OBS: Condições iniciais para $t = 0$ a equação 3.53 se reduz a

$$q(0) = X \operatorname{sen} \varnothing$$

$$\text{e } \dot{q}(0) = X(\alpha \operatorname{sen} \varnothing + \beta \operatorname{cos} \varnothing)$$

Portanto a amplitude é dada por:

$$X = \left[q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0 - \alpha q_0}{\beta} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.54)$$

e o angulo de fase

$$\varnothing = \tan^{-1} \frac{\beta q_0}{(\dot{q}_0 - \alpha q_0)} \quad (3.55)$$

A solução completa para o deslocamento transversal de barras ou vigas duplamente livre com amortecimento é dada por:

$$v(x, t) = \varnothing(x) q(t)$$

Substituindo as equações 3.28 e 3.53, na equação acima obtemos:

$$v(x, t) = A_5 (\operatorname{sen} \eta x + \operatorname{sen} \eta x) + A_6 (\operatorname{cosh} \eta x + \operatorname{cos} \eta x) \cdot X e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t + \varnothing) \quad (3.56)$$

3.3.4 Amortecimento crítico c_{ic}

Para o amortecimento crítico, o radical da equação 3.48, é nulo, isto é:

$$\left(\omega^2 c_{ic} \right)^2 - 4\omega^2 = 0 \quad (3.57)$$

$$\text{daí, } c_{ic} = \frac{2}{\omega}$$

onde c_{ic} é o coeficiente de amortecimento crítico

Definindo a razão de amortecimento ξ como:

$$\xi = \frac{c_i}{c_{ic}} \quad (3.58)$$

$$\text{Obtemos: } c_i = c_{ic} \xi = \frac{2\xi}{\omega} \quad (3.58)$$

Portanto os coeficientes de α e β , em função de ξ são dados por:

$$\alpha = -\omega^2 \frac{c_i}{2} \quad \text{ou} \quad \alpha = -\omega \xi \quad (3.59)$$

(3.60)

$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_{ci}^2)^2 - 4\omega^2} \quad \text{ou} \quad \beta = \omega \sqrt{\xi^2 - 1}$$

3.3.5 Movimento oscilatório

Substituindo os coeficientes de α e β , na equação 3.53, obtemos:

$$q(t) = X e^{-\xi\omega t} \text{sen}(\omega \sqrt{\xi^2 - 1} t + \varnothing) \quad (3.61)$$

Para o caso de subamortecimento, isto é, $\xi < 1$, a equação acima é dada por:

$$q(t) = X e^{-\xi\omega t} \text{sen}(\omega \sqrt{1 - \xi^2} t + \varnothing) \quad (3.62)$$

Definindo a frequência natural amortecida ω_d , como:

$$\omega_d = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.63)$$

$$q(t) = X e^{-\xi\omega t} \text{sen}(\omega_d t + \varnothing) \quad (3.64)$$

A figura 3.6 mostra a natureza geral do movimento oscilatório.

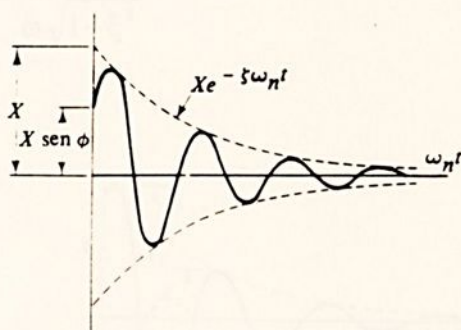


Figura 3.6 Oscilação amortecida $\xi < 1,0$.

3.3.6 Picos ou deslocamentos máximos

Os picos da curva deslocamento $q(t)$, podem ser obtidos fazendo-se:

$$\dot{q}(t_i) = 0 \quad (3.65)$$

onde t_i é o tempo no qual o pico q_i ocorre.

Da equação 3.65, obtemos:

$$\text{sen}(\omega_d t_i + \varnothing) = \sqrt{1 - \xi^2} \quad (3.66)$$

Portanto para $t=t_i$, os deslocamentos máximos ou picos (q_i), são dados por:

$$q_i = X e^{-\xi \omega t_i} \text{sen}(\omega_d t_i + \varnothing) \quad (3.67)$$

$$\text{ou } q_i = X e^{-\xi \omega t_i} \sqrt{1 - \xi^2}$$

3.3.7 Decremento Logarítmico (δ)

É o logaritmo natural do quociente de duas quaisquer amplitudes consecutivas,

Isto é:

$$\delta = \ln \frac{q_i}{q_{i+1}} = \ln \frac{\sqrt{1 - \xi^2} X e^{-\xi \omega t_i}}{\sqrt{1 - \xi^2} X e^{-\xi \omega (t_i + \tau_d)}} \quad (3.68)$$

onde τ_d é o período de amortecimento definido por:

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (3.69)$$

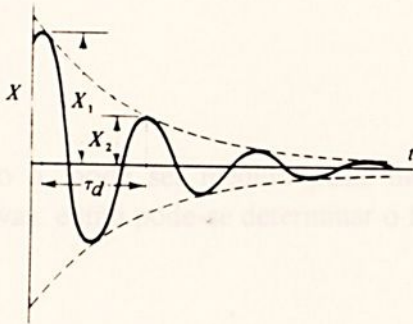


Figura 3.7 Taxa de decréscimo da oscilação medida pelo decremento logarítmico

Portanto:

$$\delta = \ln \frac{q_i}{q_{i+1}} = \xi \omega \tau_d \quad (3.70)$$

$$\text{ou } \delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

que é uma equação exata.

Quando ξ é pequeno, $\sqrt{1-\xi^2} \cong 1$, obtém-se uma equação aproximada.

$$\delta \cong 2\pi\xi \quad (3.71)$$

A figura 3.8 mostra um gráfico dos valores exatos e aproximados de δ , como função de ξ .

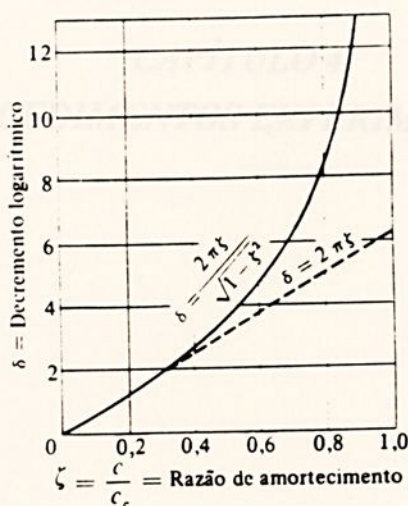


Figura 3.8 Decremento logarítmico em função de ξ .

OBS.: Para a n ésima amplitude ou ciclo, onde n é um inteiro, o decremento logarítmico é dado por:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{q_i}{q_{i+n}} \quad (3.72)$$

Se o decremento δ , pode ser medido pelas medidas experimentais de duas amplitudes sucessivas ou não-sucessivas, então pode-se determinar o fator de amortecimento ξ .

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \quad (3.73)$$

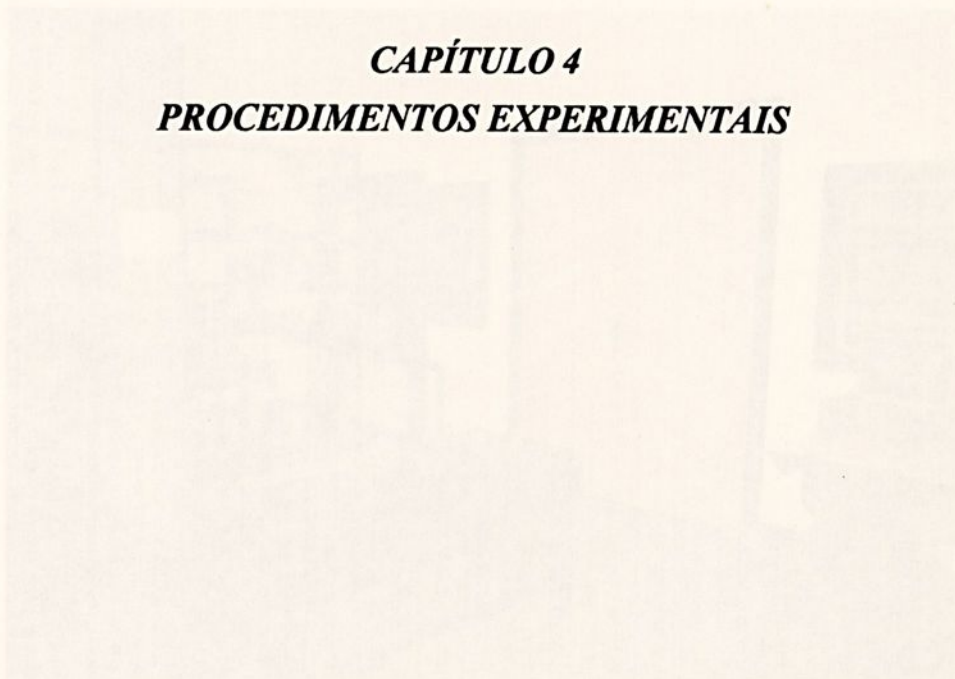
4.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como objetivo descrever e ilustrar os procedimentos experimentais utilizados no desenvolvimento e execução da experimentação.

Os equipamentos e instrumentos utilizados na experimentação, são descritos e mencionados no apêndice A.

4.2 LOCAL DE EXECUÇÃO

Este trabalho de pesquisa foi desenvolvido e executado no "Laboratório de Dinâmica de Máquinas e Vibrações" do Departamento de Mecânica da FEG - Campus de Guaratinguá, conforme ilustra a Figura 4.1.



CAPÍTULO 4 ***PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS***

Figura 4.1 Laboratório de Dinâmica de Máquinas e Vibrações (DME - FEG - Campus de Guaratinguá)

4.3 CORPOS DE PROVA

Os corpos de prova são vigas ou barras de aço, sendo uma (01) viga contínua e sem juntas e duas (02) constituídas por juntas parafusadas. As juntas dessas barras se localizam nos centros das mesmas, e são do mesmo tipo, isto é, sobrepostas, de mesmas seções, dimensões iguais, áreas de contatos iguais, com um único parafuso de aperto mas com acabamentos superficiais diferentes (fresado e retificado).

CAPÍTULO 4 - PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS

4.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como objetivo descrever e ilustrar os procedimentos experimentais utilizados no desenvolvimento e execução da experiência.

Os equipamentos e instrumentos utilizados na experimentação, são descritos e mencionados no apêndice A.

4.2 LOCAL DE EXECUÇÃO

Este trabalho de pesquisa foi desenvolvido e executado no "Laboratório de Dinâmica de Máquinas e Vibrações" do Departamento de Mecânica da FEG - Campus de Guaratinguetá, conforme ilustra a figura 4.1.



Figura 4.1 Laboratório de Dinâmica de Máquinas e Vibrações - (DME - FEG - Campus de Guaratinguetá)

4.3 CORPOS DE PROVA

Os corpos de prova são vigas ou barras de aço, sendo uma (01) viga contínua e sem junta, e duas (02) constituídas por juntas parafusadas. As juntas destas barras se localizam nos centros das mesmas, e são do mesmo tipo, isto é, sobrepostas, de contatos secos, dimensões iguais, áreas de contatos iguais, com um único parafuso de aperto mas com acabamentos superficiais diferentes (fresado e retificado).

4.3.3 DESENHOS ESQUEMÁTICOS DOS CORPOS DE PROVA

4.3.3.1 VIGA CONTÍNUA



Figura 4.3 Viga contínua

Figura 4.2 Corpos de prova ensaiados - Vigas ou barras de aço.

A Figura 4.4, mostra a viga com junta parafusada.

A tabela 4.1, apresenta informações referentes aos corpos de prova ensaiados (vigas).

VIGA	POSIÇÃO	MATERIAL	Dimensões	
			comprimento(mm)	secção (mm)
contínua	duplamente livre	Aço 1020	1000	16 x 38
com junta fresada	duplamente livre	Aço 1020	1000	16 x 38
com junta retificada	duplamente livre	Aço 1020	1000	16 x 38

Tabela 4.1 Corpos de prova ensaiados - dados.

Figura 4.4 Viga com junta parafusada. 1- barra de aço, 2- barra de aço, 3- junta parafusada

De acordo com a figura 4.4, a viga com junta parafusada, é composta por duas (2) barras iguais de aço de 0,32 m de comprimento cada uma.

4.3.1 DESENHOS ESQUEMÁTICOS DOS CORPOS DE PROVA

4.3.1.1 VIGA CONTÍNUA

A figura 4.3, ilustra a viga contínua.

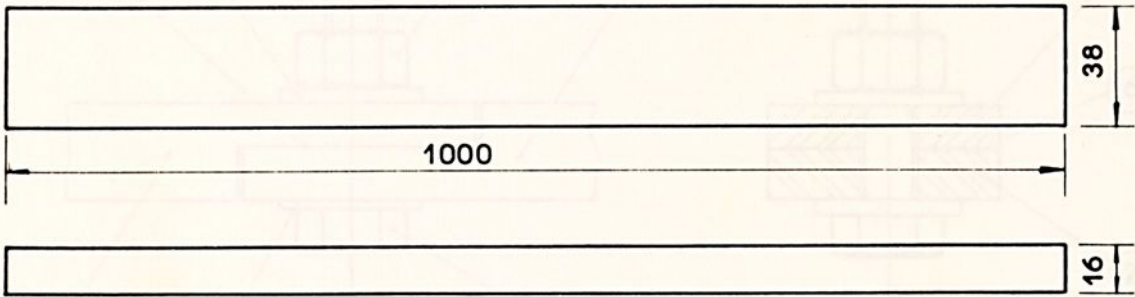


Figura 4.3 Viga contínua

4.3.1.2 VIGA COM JUNTA PARAFUSADA

A Figura 4.4, ilustra a viga com junta parafusada.

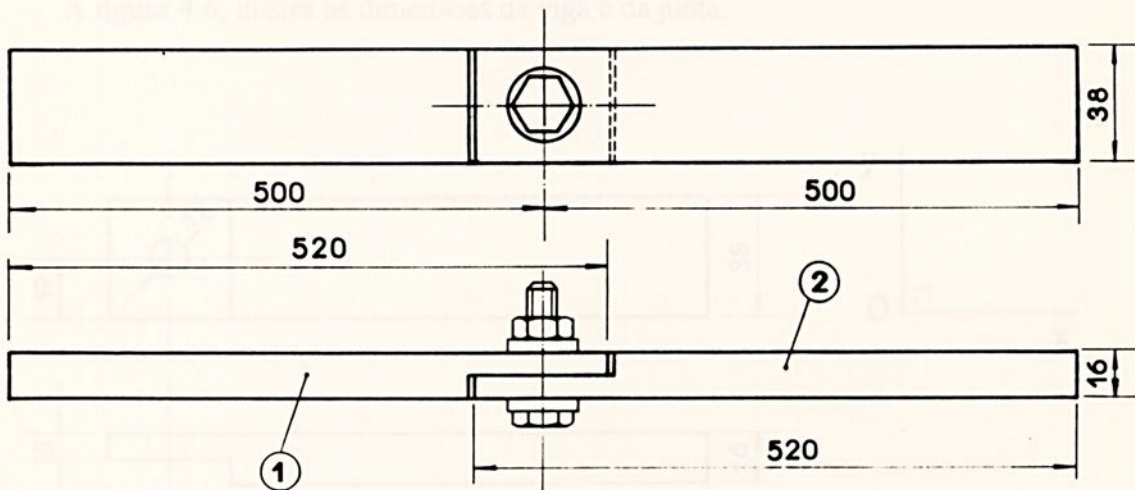


Figura 4.4 Viga com junta parafusada. 1- barra de aço; 2- barra de aço; 3- junta parafusada

De acordo com a figura 4.4, a viga com junta parafusada, é constituída portanto, por duas (02) barras iguais de aço de 0,52 m de comprimento cada uma.

A figura 4.5, ilustra os elementos que constituem a junta parafusada do corpo de prova (viga com junta).

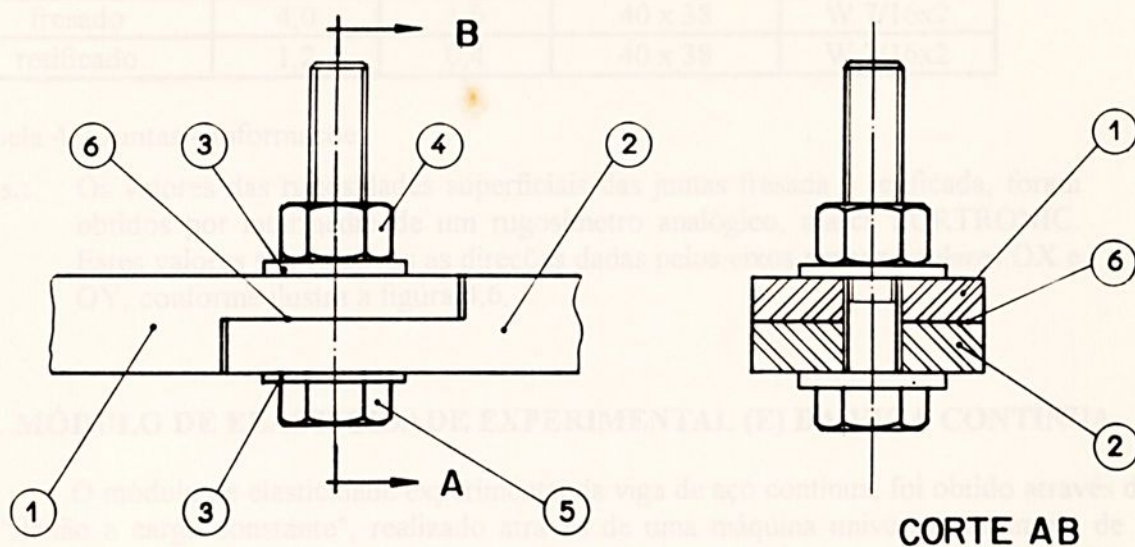


Figura 4.5 Junta parafusada. 1 - barra de aço; 2 - barra de aço; 3 - arruela lisa; 4 - porca sextavada; 5- parafuso com cabeça sextavada; 6 - superfície de contato das barras 1 e 2 (junta)

A figura 4.6, ilustra as dimensões da viga e da junta.

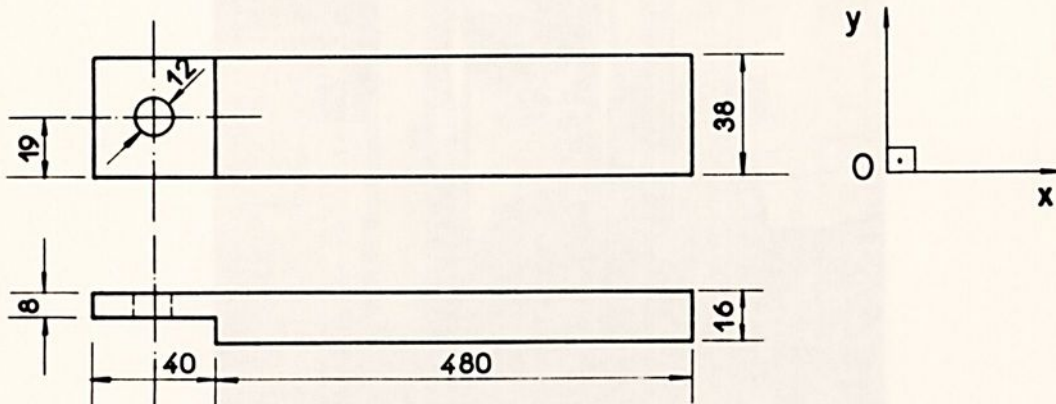


Figura 4.6 Dimensões da viga e da junta.

As informações referentes às juntas, encontram-se na tabela 4.2.

ACABAMENTO SUPERFICIAL	RUGOSIDADE - μm		DIMENSÕES mm	PARAFUSO Pol
	direção			
	X	Y		
fresado	4,0	1,0	40 x 38	W 7/16x2
retificado	1,2	0,4	40 x 38	W 7/16x2

Tabela 4.2 Juntas - Informações

Obs.: Os valores das rugosidades superficiais das juntas fresada e retificada, foram obtidos por intermédio de um rugosímetro analógico, marca SURTRONIC. Estes valores são relativos às direções dadas pelos eixos perpendiculares OX e OY, conforme ilustra a figura 4.6.

4.4. MÓDULO DE ELASTICIDADE EXPERIMENTAL (E) DA VIGA CONTÍNUA

O módulo de elasticidade experimental da viga de aço contínua, foi obtido através do ensaio de "flexão a carga constante", realizado através de uma máquina universal de ensaio de tração e flexão, conforme ilustra a figura 4.7. A obtenção deste parâmetro, tem como finalidade obter posteriormente as respectivas frequências naturais de vibrações teóricas, ω_n , da viga contínua.

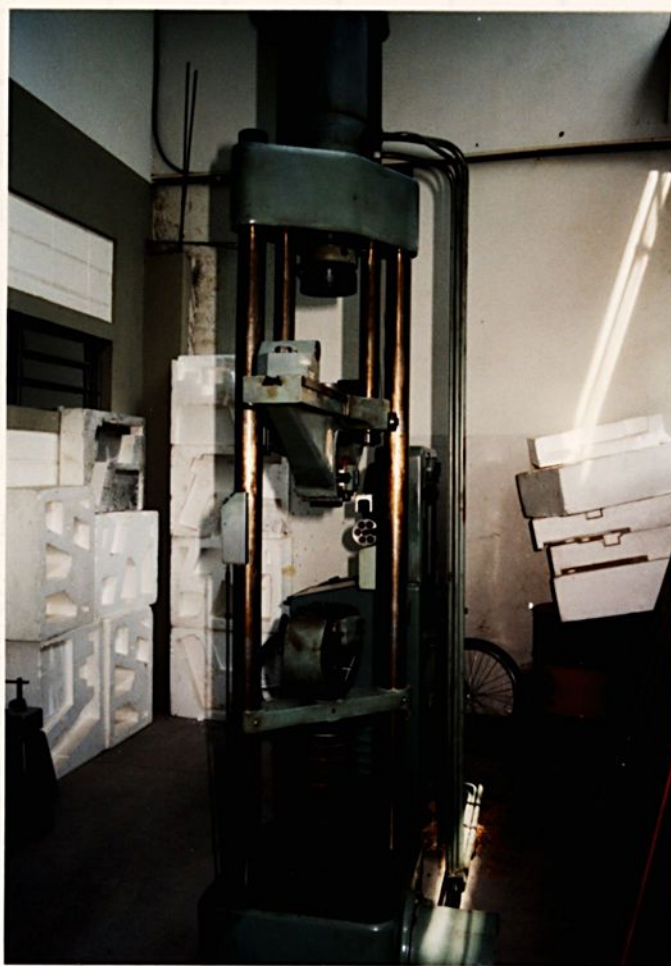


Figura 4.7 Máquina Universal de Ensaio de Tração e Flexão

A posição da viga contínua, neste tipo de ensaio, na máquina universal, e da carga Q de flexão aplicada na viga, é dada pela figura 4.8.

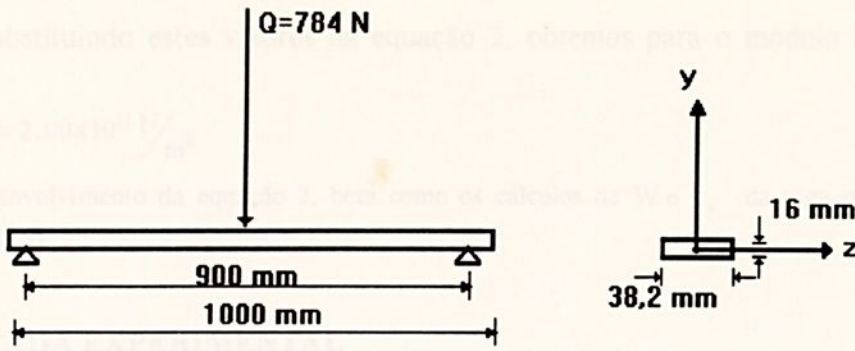


Figura 4.8 Posição da viga contínua na máquina de ensaio de flexão

As deflexões obtidas neste ensaio de flexão, com carga constante $Q = 784 \text{ N}$, são indicadas na tabela 4.3, as quais foram lidas através de um relógio comparador marca STARRET.

LEITURA	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª
DEFLEXÃO 10^{-3} m	4,73	4,74	4,68	4,79	4,68	4,82	4,83	4,77

Tabela 4.3 Deflexões da viga contínua no ensaio de flexão.

O valor médio da deflexão da viga (\bar{y}), é dado por:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n Y_i / n \quad (4.1)$$

De acordo com os dados da tabela 4.3, obtemos:

$$\bar{y} = 4,76 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Por intermédio da equação da linha elástica Shigley [8], dada por:

$$\bar{y} = \frac{1}{EI} \left[5 \frac{W\ell^4}{384} + \frac{Q\ell^3}{48} \right] \quad (4.2)$$

obtemos o módulo de elasticidade experimental (E), onde:

\bar{y} - deflexão média da viga

Q - carga aplicada

ℓ - vão entre os apoios da viga

W - carga uniformemente distribuída da viga

I_z - momento de inércia da viga em relação ao eixo z



Para o ensaio realizado temos os seguintes valores:

$$\bar{y} = 4,76 \times 10^{-3} \text{ m}; \quad Q = 784 \text{ N}; \quad \ell = 0,9 \text{ m.}$$

$$W = 46,76 \text{ N/mm}; \quad I_y = 1,30 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

Substituindo estes valores na equação 2, obtemos para o módulo de elasticidade (E) da viga:

$$E = 2,00 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

OBS.: O desenvolvimento da equação 2, bem como os cálculos de W e I_y da viga contínua são indicados no apêndice B.

4.5. BANCADA EXPERIMENTAL

A bancada experimental utilizada na experimentação, conforme ilustra a figura 4.9, é composta de duas (02) partes:

- pneumática
- instrumentação

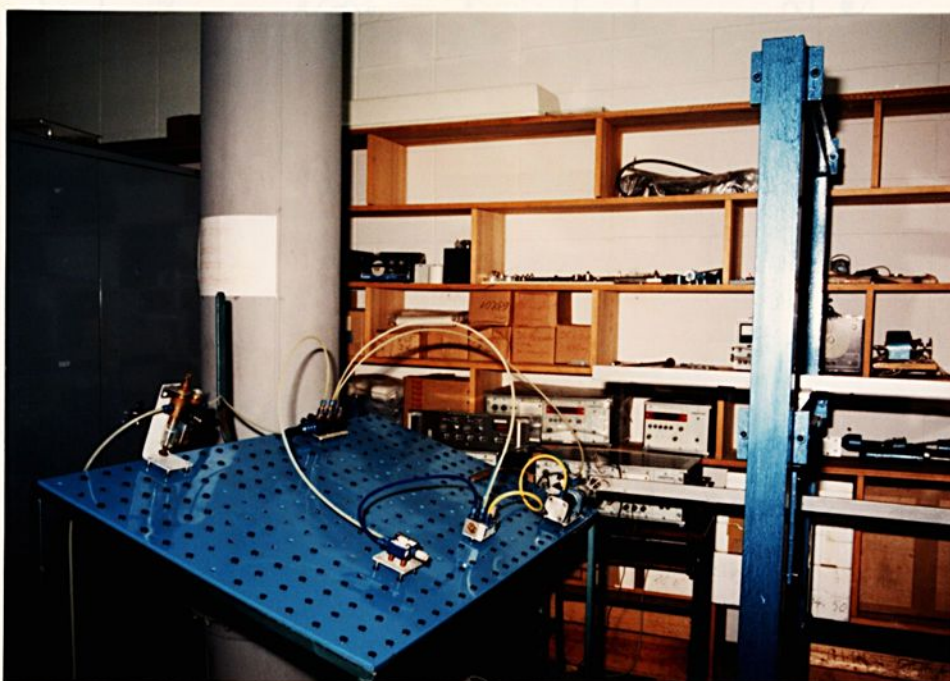


Figura 4.9 Ilustração da montagem da bancada experimental

A figura 4.10, através de um croqui, ilustra a bancada experimental utilizada na experimentação.

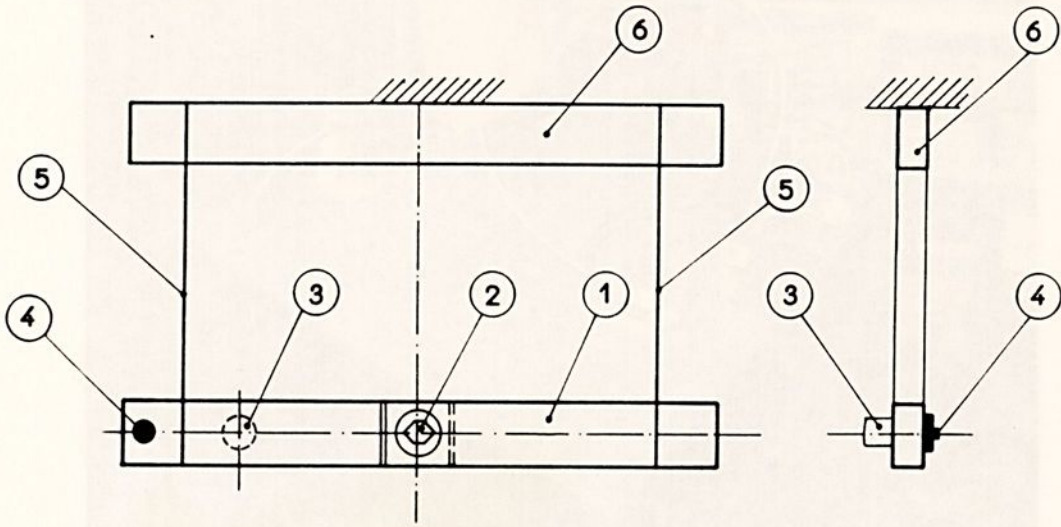


Figura 4.10 Bancada experimental (croqui) 1 - corpo de prova(viga); 2 - junta parafusada; 3 - acelerômetro piezoelétrico; 4 - célula de carga; 5 - corda de aço; 6 - suporte rígido.

4.5.1 BANCADA PNEUMÁTICA:

O esquema de montagem desta bancada é ilustrado pela figura 4.11

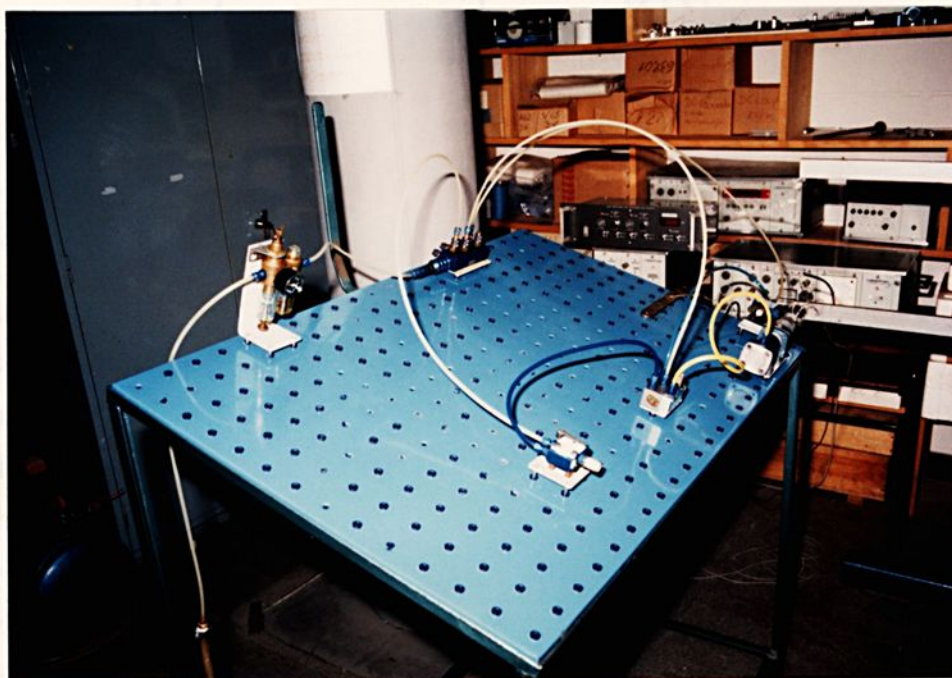


Figura 4.11 Bancada pneumática - Sistema de aplicação da força de excitação.

Esta bancada tem como finalidade acionar o cilindro pneumático de ação simples, através de um circuito pneumático com 4,0 bar de pressão, conforme ilustra a figura 4.11. De acordo com o circuito pneumático, figura 4.12, o controle do avanço da haste do pistão se faz manualmente, através de uma válvula gatilho, e o controle do retorno se faz automaticamente, através de um sinal pneumático dado pela válvula fim de curso, quando do contato da extremidade da haste do pistão com a viga (letra a). Na experimentação, a força de excitação aplicada na viga é proveniente do contato da extremidade da haste com a viga, através de um único pulso (avanço e retorno instantâneo da haste). Como o cilindro, por conveniência, está posicionado perpendicularmente a viga, conforme ilustram as figuras 4.13 e 4.14, a direção da força de excitação, é portanto, perpendicular ou transversal a barra, originando com isto, apenas deslocamentos transversais nas mesmas. De acordo com o exposto, conclui-se que na experimentação, o tipo de vibração que ocorre no sistema mecânico constituído por barra duplamente livre, é a vibração transversal livre.

O esquema do circuito pneumático utilizado para acionar o cilindro de ação simples é dado pela figura 4.12.

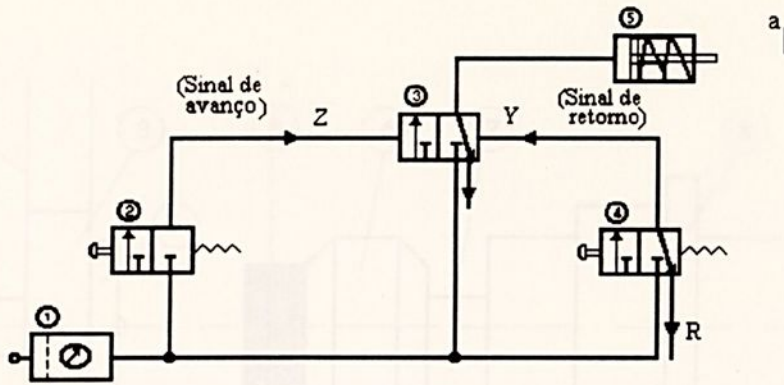


Figura 4.12 Circuito pneumático - Esquema de montagem

Para a montagem deste circuito pneumático, foram utilizados os seguintes elementos.

- compressor de ar
- unidade de manutenção
- distribuidor de ar
- válvula 3/2 vias duplo piloto
- válvula 3/2 vias, fim de curso
- válvula 3/2 vias, gatilho
- cilindro pneumático de ação simples

①
③
④
②
⑤

A figura 4.13, ilustra o sistema de aplicação da força de excitação, utilizado na experimentação.

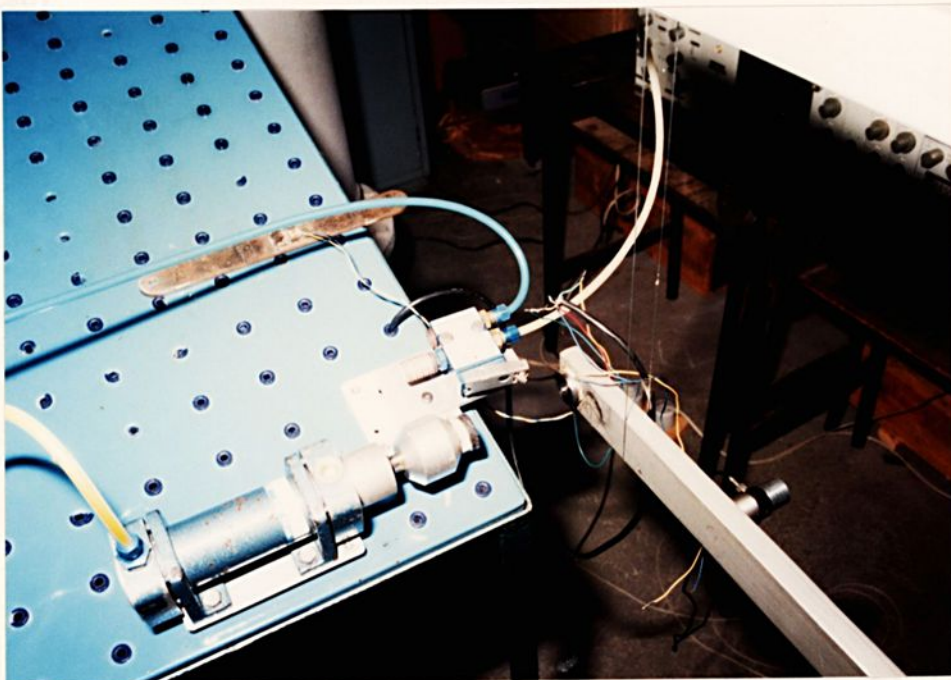


Figura 4.13 Detalhe do sistema de aplicação da força de excitação.

Através de um desenho esquemático (croqui), a figura 4.14, ilustra o sistema de aplicação da força de excitação, utilizada na experimentação.

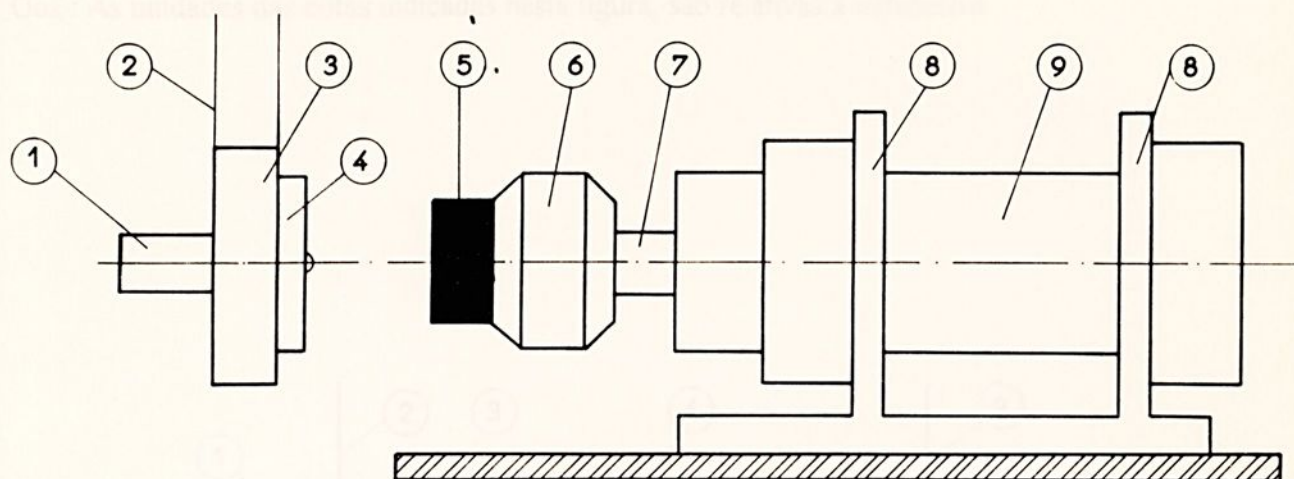


Figura 4.14 Sistema de aplicação da força de excitação (croqui) 1- acelerômetro piezoelétrico; 2- fio de aço; 3- viga; 4- célula de carga; 5- protetor de borracha; 6- extremidade do pistão; 7- haste do pistão; 8- suporte; 9- cilindro pneumático.

Conforme figura 4.14, a força de excitação que é aplicada na viga, é proveniente do contato instantâneo (avanço e retorno) do protetor de borracha, fixado na extremidade da haste, com a célula de carga previamente fixada na extremidade da viga. A intensidade da força de excitação é obtida através do sinal proveniente da célula de carga (volts), e as amplitudes de deslocamentos transversais da barra, por intermédio do acelerômetro piezoelétrico, previamente fixado na barra.

A figura 4.15, ilustra o local de fixação da célula de carga na viga contínua (experimentação).

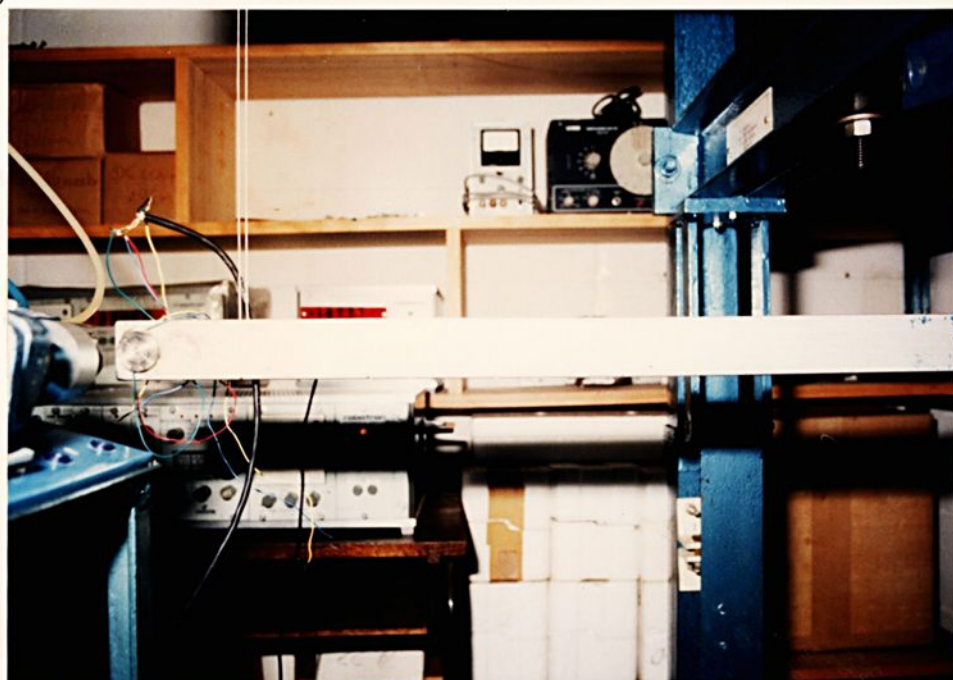


Figura 4.15 Local de fixação da célula de carga na viga contínua

A figura 4.16 ilustra as posições de fixações utilizadas na experimentação para a célula de carga, e o acelerômetro piezoelétrico com relação à extremidade esquerda da viga.

Obs.: As unidades das cotas indicadas nesta figura, são relativas a milímetros.

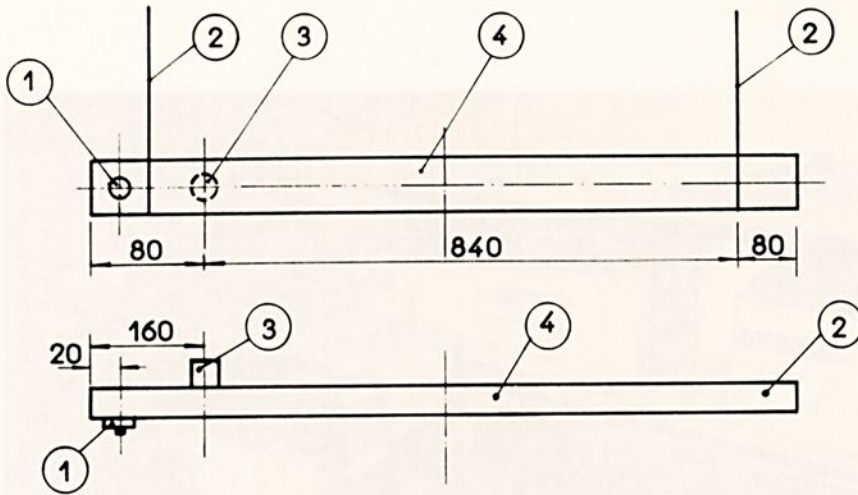


Figura 4.16 Posições de fixações da célula de carga e do acelerômetro. 1- célula de carga; 2- fio de aço; 3- acelerômetro piezoelétrico; 4- viga.

4.5.2 BANCADA DE INSTRUMENTAÇÃO

A montagem desta bancada teve como finalidade fazer as aquisições dos sinais provenientes da célula de carga (força de excitação) e do acelerômetro piezoelétrico (deslocamento transversal), ambos previamente fixados na extremidade do corpo de prova (viga), conforme ilustram as figuras 4.15 e 4.16.

A figura 4.17 ilustra os equipamentos utilizados na aquisição dos sinais provenientes da célula de carga (filtro e ponte amplificadora) e do acelerômetro piezoelétrico (analisador de vibrações).



Fig 4.17 Bancada de Instrumentação: filtro, ponte amplificadora e analisador de vibrações.

A figura 4.18, através de um croqui, ilustra a bancada de instrumentação, utilizada na experimentação.

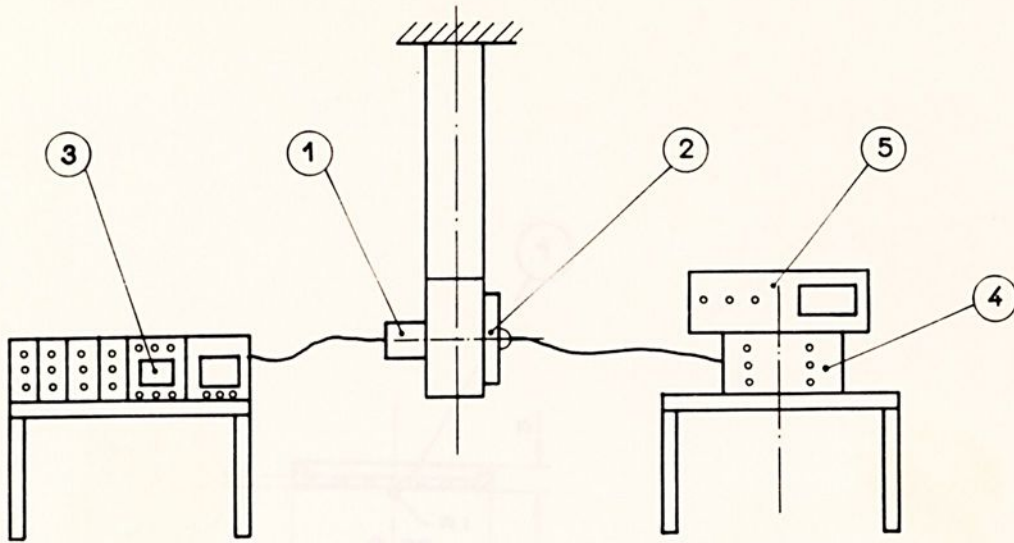


Figura 4.18 Bancada de instrumentação(croqui): 1 - acelerômetro piezoelétrico; 2 - célula de carga; 3 - analisador de vibrações; 4 - filtro; 5 - ponte amplificadora.

Os sinais de saídas do analisador de vibrações (deslocamento) e da ponte amplificadora (força de excitação) são conectados a uma placa conversora analógico-digital, modelo CAD 12/36 da Linx Eletrônica instalada num computador compatível com o PC-XT, possibilitando desta forma a gravação e análise dos sinais digitalizados.

A figura 4.19, apresenta um esquema de montagem da instrumentação utilizada na análise dos sinais obtidos através do acelerômetro piezoelétrico e da célula de carga, previamente conectados na viga conforme ilustra a figura 4.16.

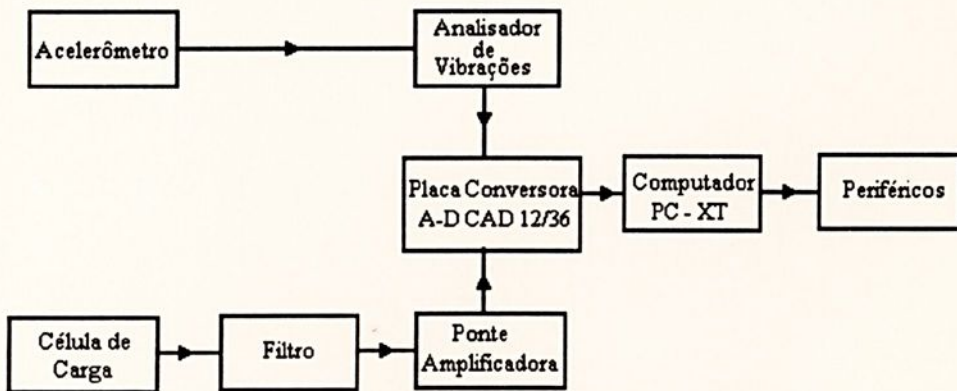


Figura 4.19 Esquema de montagem da instrumentação

4.6 CÉLULA DE CARGA

Figura 4.21 mostra a montagem de bancada experimental utilizada para calibrar a célula de carga.

A figura 4.20, ilustra a célula de carga utilizada na experimentação. Para esta célula de carga foi utilizado um extensômetro elétrico marca KYOWA, em um circuito meia-ponte.

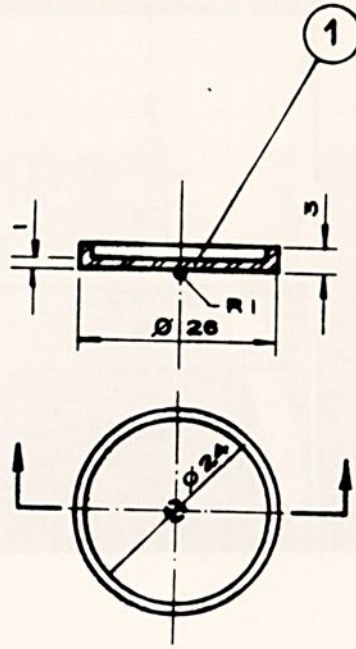


Figura 4.21 Bancada experimental de calibração da célula de carga.

Figura 4.20 Célula de carga. 1 - extensômetro elétrico

- Suporte
- Dispositivo de fixação da célula de carga
- Transdutor com capacidade de 50 kg
- Indicador digital para transdutores
- Ponte amplificadora para extensometria

4.6.1 BANCADA EXPERIMENTAL:

A figura 4.21 ilustra a montagem da bancada experimental utilizada para calibrar a célula de carga.

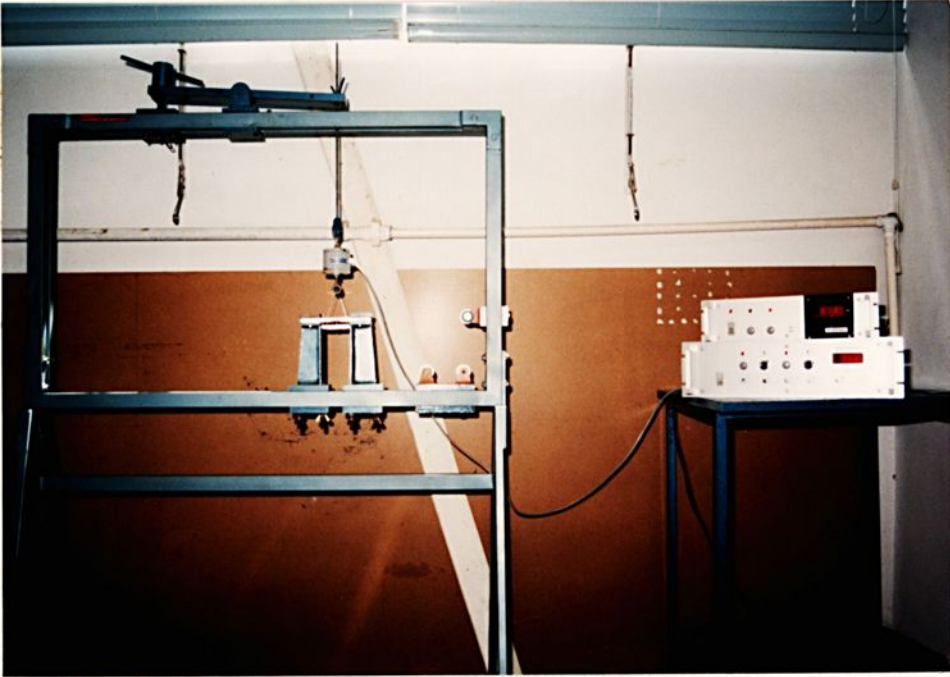


Figura 4.21 Bancada experimental de calibração da célula de carga

Conforme ilustra a figura 4.21, esta bancada é composta de:

- Suporte.
- Dispositivo de fixação da célula de carga.
- Transdutor com capacidade de 50 Kg.
- Indicador digital para transdutores
- Ponte amplificadora para extensometria.

A figura 4.22, através de um croqui, ilustra a bancada experimental utilizada para calibrar a célula de carga.

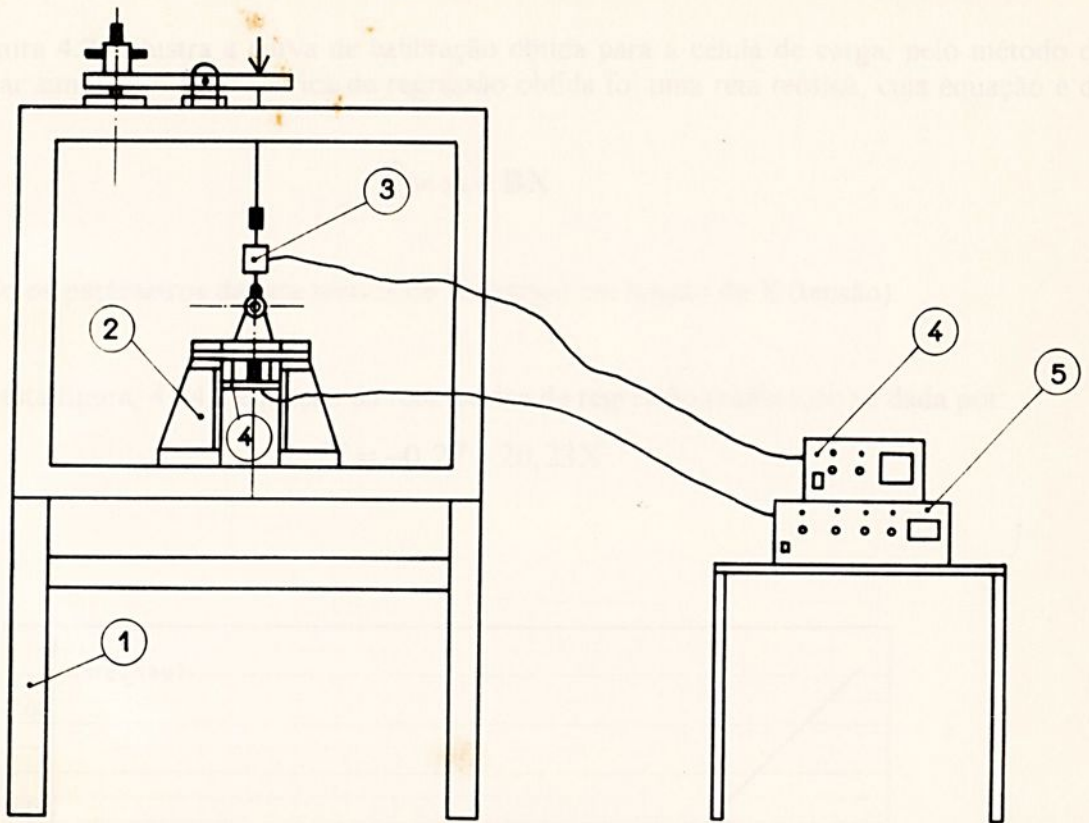


Figura 4.22 Bancada de calibração da célula de carga(croqui). 1- suporte; 2- dispositivo de fixação da célula de carga; 3- transdutor; 4- indicador digital para transdutores; 5- ponte amplificadora.

A figura 4.23, ilustra o dispositivo de fixação da célula de carga e o transdutor utilizado.

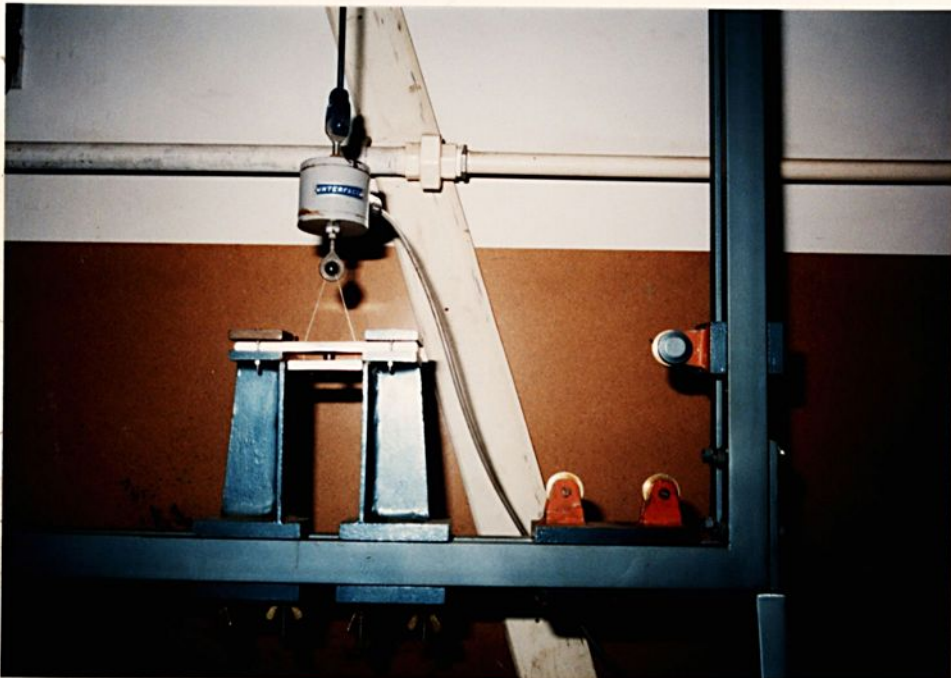


Figura 4.23 Transdutor e dispositivo de fixação da célula de carga.

4.6.2 CURVA DE CALIBRAÇÃO

A figura 4.24, ilustra a curva de calibração obtida para a célula de carga, pelo método da regressão linear simples. A linha teórica de regressão obtida foi uma reta teórica, cuja equação é da forma:

$$\hat{Y} = A + BX$$

onde A e B são os parâmetros da reta teórica de \hat{Y} (carga) em função de X (tensão).

Para esta figura, 4.24 a equação da reta teórica de regressão (calibração) é dada por:

$$\hat{Y} = -0,27 + 20,23X$$

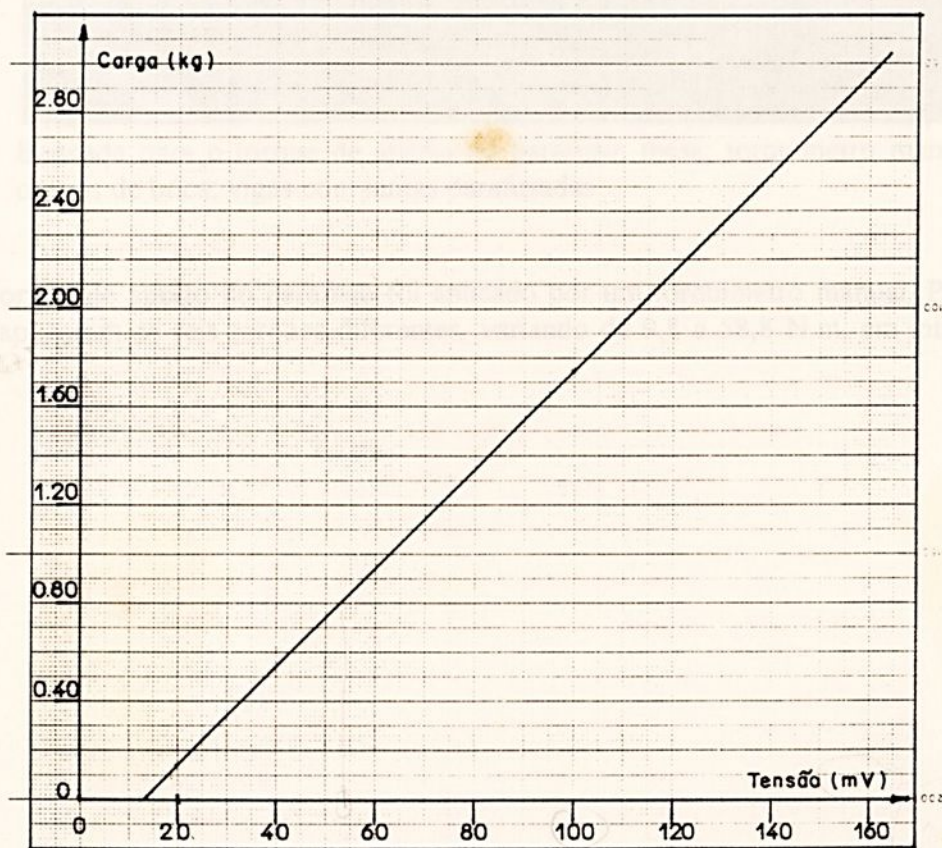


Figura 4.24 Curva de calibração da célula de carga.

4.7 TORQUE DE APERTO NO PARAFUSO

A Figura 4.25, ilustra a bancada experimental utilizada para dar o torque de aperto no parafuso.

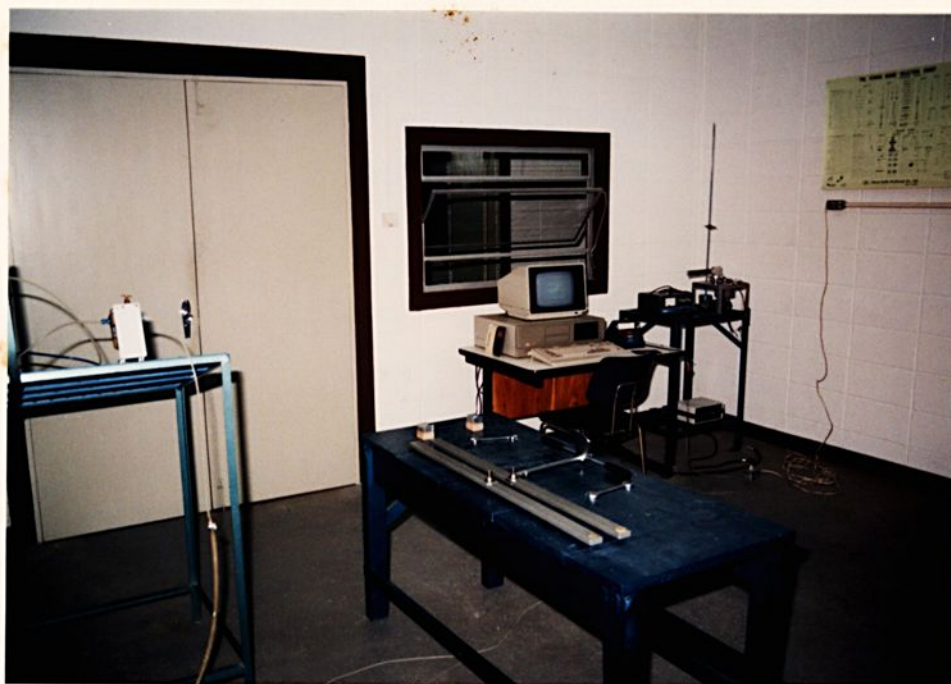


Fig 4.25 Bancada para o torque de aperto no parafuso: mesa; torquímetro manual; chaves de boca; vigas com juntas parafusadas.

O torque de aperto no parafuso foi aplicado por um torquímetro manual. Para cada junta parafusada, aplicaram-se seis torques diferentes, variando de 9,8 a 58,8 N.m, em intervalos de 9,8 N.m.

INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como finalidade apresentar inicialmente os dados experimentais obtidos das vigas, os quais são as forças de excitações aplicadas nas vigas (pulsos), e as amplitudes de deslocamento transversais $Q(t)$, relativas a um determinado intervalo de tempo t , e as amplitudes de deslocamento $Q(x)$. Posteriormente são apresentados e analisados os resultados experimentais referentes às funções naturais de vibração e razões de amortecimento, ambas em função da variação do tempo de aplicação no parafuso.

Em seguida, utilizando-se de um software de computação numérica de alta performance, são feitos por simulação os dados teóricos experimentais, referentes às amplitudes dos deslocamentos transversais $Q(t)$ e $Q(x)$. Estes dados são provenientes de programas específicos, escritos em linguagem TRAN, e derivados a partir das expressões deduzidas anteriormente para $q(t)$, equação 3.33, e Q equação 3.24.

CAPÍTULO 5
ANÁLISE DE DADOS E RESULTADOS

As amplitudes dos deslocamentos transversais $Q(t)$ e $Q(x)$ são utilizadas posteriormente para os cálculos dos amortecimentos ζ .

As simulações referentes a $Q(x)$, equação 3.24, foram implementadas com o intuito de verificar a validade da expressão deduzida para $Q(x)$. As simulações obtidas para $Q(x)$, (configurações modais), em função da variação da mesma, conforme mostram as figuras C.13 e C.24, estão no apêndice C.

Posteriormente os dados experimentais obtidos para $q(t)$ são comparados com os respectivos teóricos experimentais de $q(t)$, com o intuito de verificar o comportamento apresentado pelo modelo teórico de Kelvin-Voigt para materiais viscoelásticos.

Finalmente as razões de amortecimento ζ experimentais são comparadas com as respectivas teóricas - experimentais.

ANÁLISE DE DADOS EXPERIMENTAIS

1. Forças de Excitações Aplicadas nas Vigas (Pulsos)

As intensidades das forças de excitações aplicadas nas vigas são obtidas através do sistema de célula de carga (volts). Por intermédio de placa analógica-digital CAD de 16 bits, o valor de aquisição de dados "ADADOS", esses dados são coletados e registrados automaticamente no curso do tempo (segundos). Através do software de análise e manipulação de dados "MS-DOS", estes dados são manipulados posteriormente no domínio de frequências (Hz).

CAPÍTULO 5 - ANÁLISE DE DADOS E RESULTADOS

5.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como finalidade apresentar inicialmente os dados experimentais obtidos nos ensaios das vigas, os quais são: as forças de excitações aplicadas nas vigas (pulsos), e as amplitudes dos deslocamentos transversais $q(t)$, relativas a um determinado intervalo de tempo t , e no primeiro modo de vibração. Posteriormente são apresentados e analisados os resultados experimentais referentes as frequências naturais de vibrações e razões de amortecimento, ambos em função da variação do torque de aperto aplicado no parafuso.

Em seguida, utilizando-se de um software de computação numérica de alta performance, são obtidos por simulações os dados teóricos experimentais, referentes as amplitudes dos deslocamentos transversais $q(t)$ e $\varnothing(x)$. Estes dados são provenientes de programas específicos, escritos em linguagem FORTRAN, e desenvolvido a partir das expressões deduzidas anteriormente para $q(t)$, equação 3.53, e $\varnothing(x)$, equação 3.28.

As amplitudes teóricas experimentais $q(t)$, obtidas por simulações, são utilizadas posteriormente nos cálculos dos respectivos decrementos logarítmicos (δ) e razões de amortecimento (ξ).

As simulações referentes a $\varnothing(x)$, equação 3.28, foram implementadas com o intuito de verificar a veracidade da expressão deduzida para $\varnothing(x)$. As simulações obtidas para $\varnothing(x)$, (configurações modais), confirmam a veracidade da mesma, conforme mostram as figuras C.13 a C.24, contidas no apêndice C.

Posteriormente os dados experimentais obtidos para $q(t)$, são comparados com os respectivos dados teóricos experimentais de $q(t)$, com o intuito de verificar o comportamento apresentado pelo modelo teórico de Kelvin-Voigt, para materiais viscoelásticos.

Finalmente as razões de amortecimento (ξ) experimentais são comparadas com as respectivas razões de amortecimento teóricas - experimentais.

5.2. ANÁLISE DE DADOS EXPERIMENTAIS

5.2.1 Forças de Excitações Aplicadas nas Vigas (Pulsos)

As intensidades das forças de excitações aplicadas nas vigas, são obtidas através dos sinais proveniente da célula de carga (volts). Por intermédio da placa analógica-digital CAD 12/36, e do software de aquisição de dados "AQDADOS", estes sinais são coletados e registrados graficamente no domínio do tempo (segundos). Através do software de análise e manipulação de dados "SISDIN", estes sinais são manipulados posteriormente no domínio da frequência (Hertz).

5.2.1.1 Força de Excitação Aplicada na Viga Contínua (Pulso) - VCON

A Figura 5.1, ilustra os dois gráficos obtidos no ensaio da viga contínua. O gráfico tensão (volts) x tempo (segundo), dá a intensidade do pulso aplicado na viga (volts). O gráfico tensão (volts) x frequência (Hertz), fornece o respectivo spectrum de frequência.

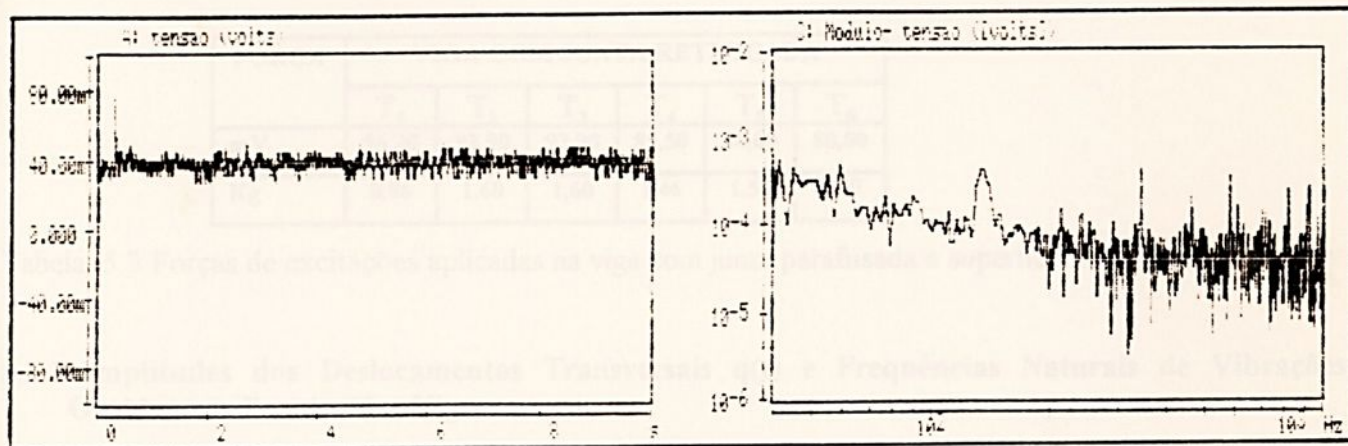


Figura 5.1 Força de excitação aplicada na viga contínua (pulso) - registro gráfico.

O valor da intensidade da força de excitação em Kg, é obtido diretamente da curva de calibração dada pela Figura 4.24.

FORÇA	VIGA CONTÍNUA
mV	83,09
Kg	1,40

Tabela 5.1 - Força de excitação aplicada na viga contínua - VCON.

5.2.1.2 Forças de excitações aplicadas na viga com junta parafusada e superfície fresada - VJF

Os registros gráficos das forças de excitações aplicadas na viga com junta parafusada e superfície fresada em função do torque de aperto $T(N.m)$ são obtidos de modo semelhante ao da viga contínua.

A tabela 5.2, ilustra as forças de excitações aplicadas no ensaio da VJF.

FORÇA	VIGA COM JUNTA FRESADA					
	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄	T ₅	T ₆
mV	83,10	66,00	90,4	70,90	119,70	80,60
Kg	1,40	1,06	1,54	1,16	2,14	1,34

Tabela 5.2 Forças de excitações aplicadas na viga com junta parafusada e superfície fresada - VJF.

5.2.1.3 Forças de excitações aplicadas na viga com junta parafusada e superfície retificada - VJR

Os registros gráficos das forças de excitações aplicadas na viga com junta parafusada e superfície retificada, em função do torque de aperto T (N.m), são obtidos de modo semelhante ao da viga contínua.

A tabela 5.3, ilustra as forças de excitações aplicadas no ensaio da VJR.

FORÇA	VIGA COM JUNTA RETIFICADA					
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
mV	56,20	92,90	92,90	85,50	88,00	88,00
Kg	0,86	1,60	1,60	1,46	1,50	1,50

Tabela 5.3 Forças de excitações aplicadas na viga com junta parafusada e superfície retificada - VJR

5.2.2 Amplitudes dos Deslocamentos Transversais $q(t)$ e Frequências Naturais de Vibrações Obtidas nos Ensaio das Vigas

As amplitudes dos deslocamentos transversais $q(t)$ das vigas, são obtidas através dos sinais provenientes do acelerômetro piezoelétrico (milímetros). Por intermédio da placa analógica digital CAD 12/36, e do software de aquisição de dados "AQDADOS", estes sinais são coletados e registrados graficamente no domínio do tempo (segundos). Através do software de análise e manipulação de dados "SISDIN", estes sinais são manipulados posteriormente no domínio da frequência (Hertz).

O tempo de duração de cada ensaio, foi de dez (10) segundos.

5.2.2.1 Ensaio da viga contínua - VCON

A figura 5.2, ilustra os dois gráficos obtidos no ensaio da viga contínua. O gráfico deslocamento x tempo, fornece as correspondentes amplitudes dos deslocamentos $q(t)$, obtidas no ensaio da viga contínua. O gráfico deslocamento x frequência, fornece o respectivo spectrum de frequências.

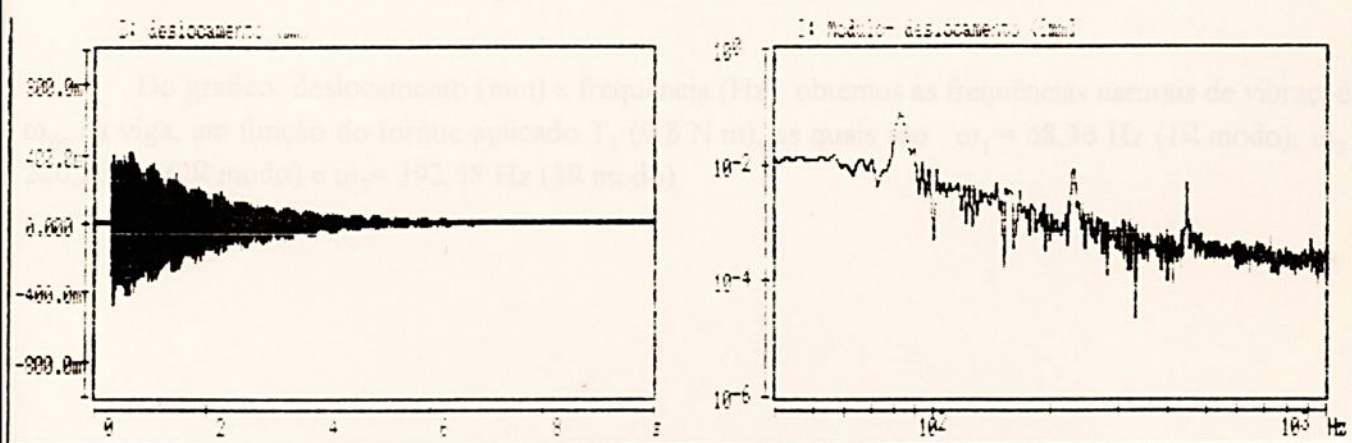


Figura 5.2 Ensaio da viga contínua - VCON ($t = 10s$)

Da figura 5.2, podemos verificar o seguinte:

- Do gráfico deslocamento (mm) x tempo (s), as amplitudes $q(t)$, diminuem em função do tempo t , devido a ocorrência de dissipação de energia no sistema (amortecimento).
- Do gráfico deslocamento (mm) x frequência (Hz), obtemos as frequências naturais de vibrações ω_n , da viga, as quais são: $\omega_1 = 83,98$ Hz (1º modo); $\omega_2 = 226,56$ Hz (2º modo) e $\omega_3 = 443,36$ Hz (3º modo).

5.2.2.2 Ensaio da viga com junta parafusada e superfície fresada - VJF

Os registros gráficos obtidos no ensaio da viga com junta parafusada e superfície fresada, em função do torque de aperto T (N.m), são obtidos de modo semelhante ao da viga contínua.

5.2.2.2.1 Torque aplicado de 9,8 N.m - VJFT₁

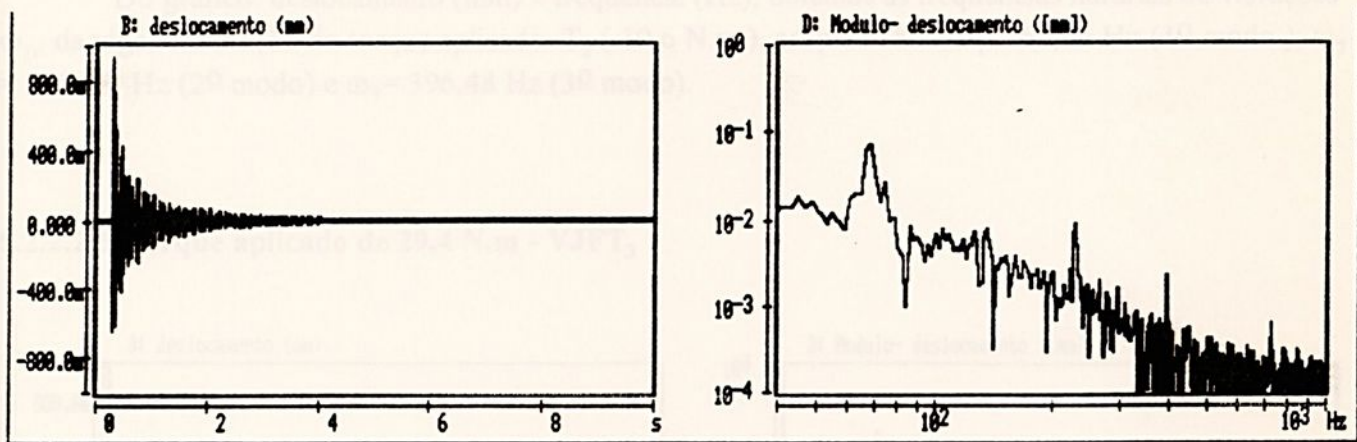


Figura 5.3 Ensaio da VJFT₁ ($T_1 = 9,8$ N.m e $t = 10$ s)

Do gráfico: deslocamento (mm) x frequência (Hz), obtemos as frequências naturais de vibrações ω_n , da viga, em função do torque aplicado T_1 (9,8 N.m), as quais são : $\omega_1 = 68,36$ Hz (1º modo); $\omega_2 = 226,56$ Hz (2º modo) e $\omega_3 = 392,58$ Hz (3º modo).

5.2.2.2.2 Torque aplicado de 19,6 N.m - VJFT₂

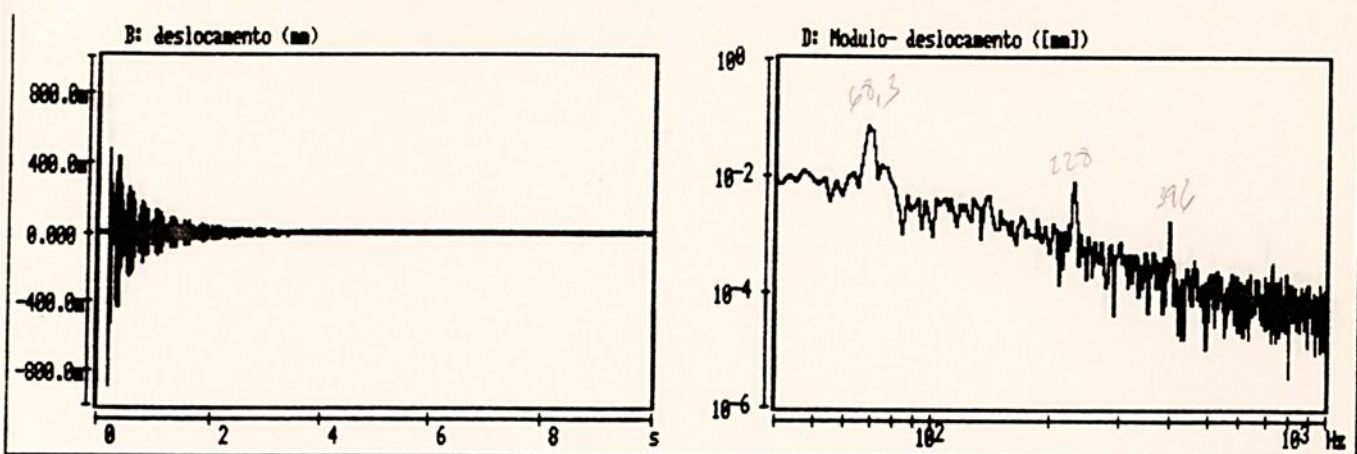


Figura 5.4 Ensaio da VJFT₂ ($T_2 = 19,6$ N.m e $t = 10$ s)

Do gráfico: deslocamento (mm) x frequência (Hz), obtemos as frequências naturais de vibrações ω_n , da viga, em função do torque aplicado T_2 (19,6 N.m), as quais são : $\omega_1 = 68,36$ Hz (1^o modo) ; $\omega_2 = 228,52$ Hz (2^o modo) e $\omega_3 = 396,48$ Hz (3^o modo).

5.2.2.2.3 Torque aplicado de 29,4 N.m - VJFT₃

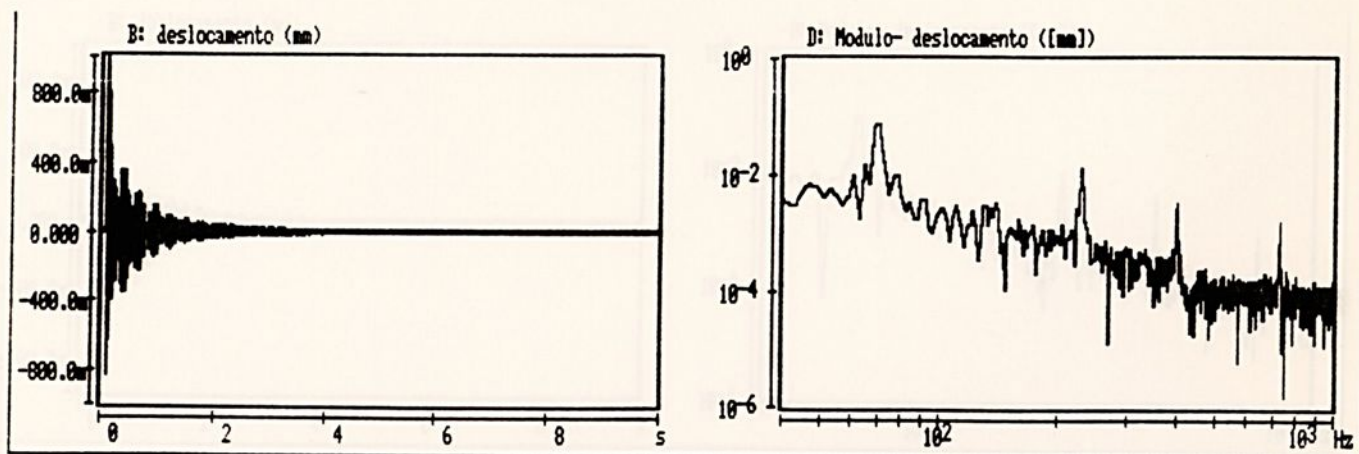


Figura 5.5 Ensaio da VJFT₃ ($T_3 = 29,4$ N.m e $t = 10$ s)

Do gráfico: deslocamento (mm) x frequência (Hz), obtemos as frequências naturais de vibrações ω_n , da viga, em função do torque aplicado T_3 (29,4 N.m), as quais são : $\omega_1 = 68,36$ Hz (1^o modo) ; $\omega_2 = 228,52$ Hz (2^o modo) e $\omega_3 = 398,48$ Hz (3^o modo).

5.2.2.2.4 Torque aplicado de 39,2 N.m - VJFT₄

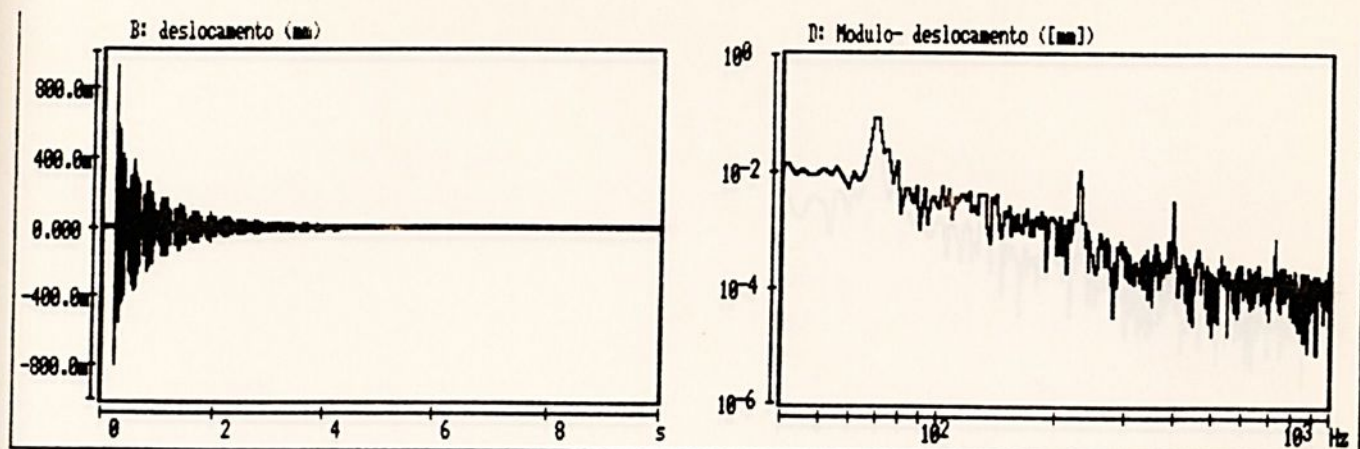


Figura 5.6 Ensaio da VJFT₄ ($T_4 = 39,2$ N.m e $t = 10$ s)

Do gráfico: deslocamento (mm) x frequência (Hz), obtemos as frequências naturais de vibrações ω_n , da viga, em função do torque aplicado T_4 (39,2 N.m), as quais são : $\omega_1 = 70,31$ Hz (1^o modo) ; $\omega_2 = 228,52$ Hz (2^o modo) e $\omega_3 = 396,48$ Hz (3^o modo).

5.2.2.2.5 Torque aplicado de 49,0 N.m - VJFT₅

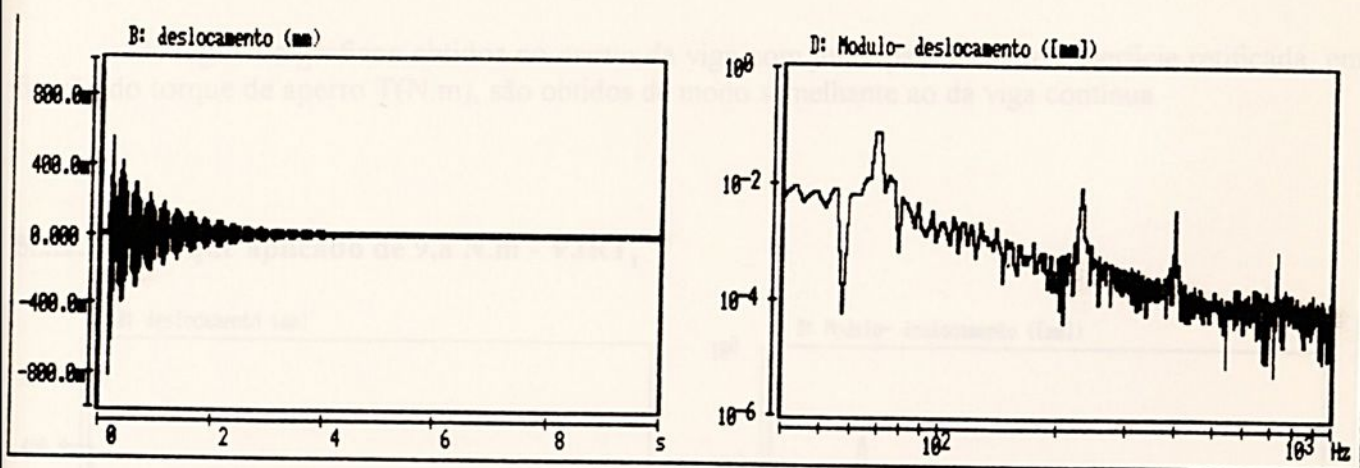


Figura 5.7 Ensaio da VJFT₅ ($T_5 = 49,0$ N.m e $t = 10$ s)

Do gráfico: deslocamento (mm) x frequência (Hz), obtemos as frequências naturais de vibrações ω_n , da viga, em função do torque aplicado T_5 (49,0 N.m), as quais são : $\omega_1 = 70,31$ Hz (1^o modo) ; $\omega_2 = 228,52$ Hz (2^o modo) e $\omega_3 = 396,48$ Hz (3^o modo).

5.2.2.2.6 Torque aplicado de 58,8 N.m - VJFT₆

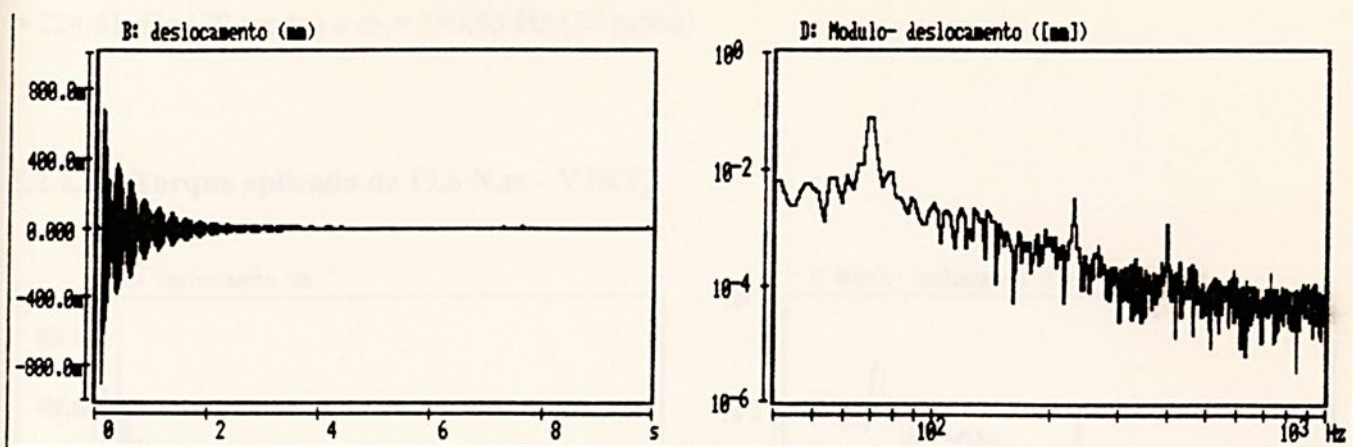


Figura 5.8 Ensaio da VJFT₆ ($T_6 = 58,8$ N.m e $t = 10$ s)

Do gráfico: deslocamento (mm) x frequência (Hz), obtemos as frequências naturais de vibrações ω_n , da viga, em função do torque aplicado T_6 (58,8 N.m), as quais são : $\omega_1 = 68,36$ Hz (1^o modo); $\omega_2 = 228,52$ Hz (2^o modo) e $\omega_3 = 396,48$ Hz (3^o modo).

5.2.2.3 Ensaio da viga com junta parafusada e superfície retificada - VJR

Os registros gráficos obtidos no ensaio da viga com junta parafusada e superfície retificada, em função do torque de aperto T (N.m), são obtidos de modo semelhante ao da viga contínua.

5.2.2.3.1 Torque aplicado de 9,8 N.m - VJRT₁

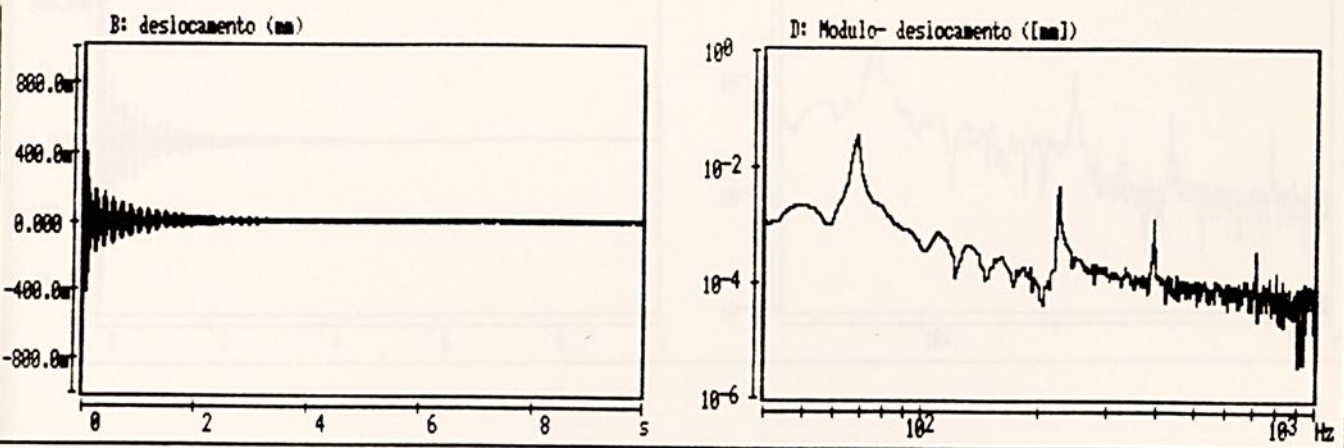


Figura 5.9 Ensaio da VJRT₁ ($T_1 = 9,8$ N.m e $t = 10$ s)

Do gráfico: deslocamento (mm) x frequência (Hz), obtemos as frequências naturais de vibrações ω_n , da viga, em função do torque aplicado T_1 (9,8 N.m), as quais são : $\omega_1 = 68,36$ Hz (1º modo); $\omega_2 = 224,61$ Hz (2º modo) e $\omega_3 = 390,63$ Hz (3º modo).

5.2.2.3.2 Torque aplicado de 19,6 N.m - VJRT₂

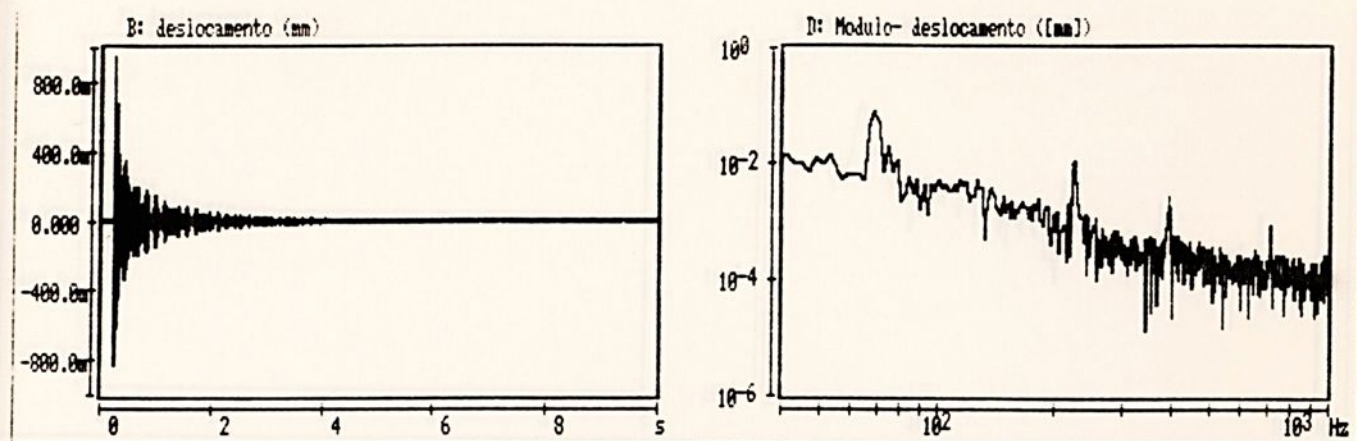


Figura 5.10 Ensaio da VJRT₂ ($T_2 = 19,6$ N.m e $t = 10$ s)

Do gráfico: deslocamento (mm) x frequência (Hz), obtemos as frequências naturais de vibrações ω_n , da viga, em função do torque aplicado T_2 (19,6 N.m), as quais são : $\omega_1 = 68,36$ Hz (1º modo); $\omega_2 = 222,66$ Hz (2º modo) e $\omega_3 = 390,63$ Hz (3º modo).

5.2.2.3.3 Torque aplicado de 29,4 N.m - VJRT₃

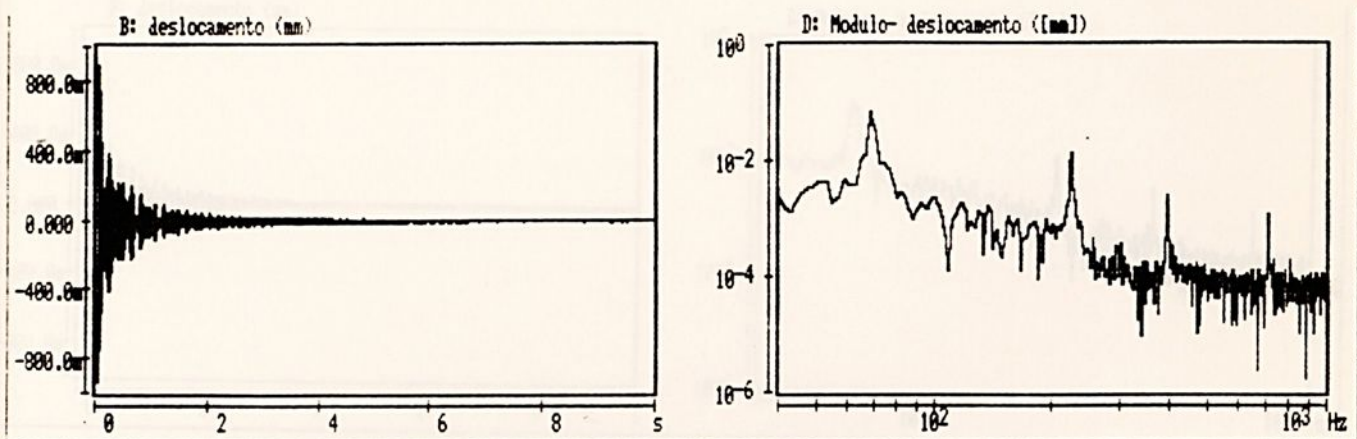


Figura 5.11 Ensaio da VJRT₃ ($T_3 = 29,4$ N.m e $t = 10$ s)

Do gráfico: deslocamento (mm) x frequência (Hz), obtemos as frequências naturais de vibrações ω_n , da viga, em função do torque aplicado T_3 (29,4 N.m), as quais são : $\omega_1 = 68,36$ Hz (1^o modo); $\omega_2 = 224,61$ Hz (2^o modo) e $\omega_3 = 390,63$ Hz (3^o modo).

5.2.2.3.4 Torque aplicado de 39,2 N.m - VJRT₄

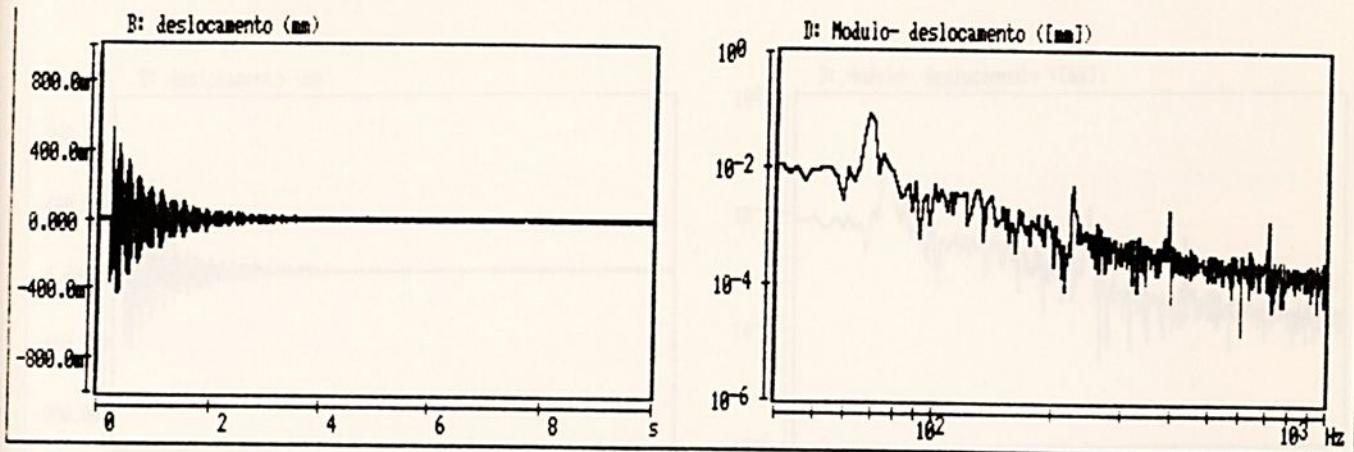


Figura 5.12 Ensaio da VJRT₄ ($T_4 = 39,2$ N.m e $t = 10$ s)

Do gráfico: deslocamento (mm) x frequência (Hz), obtemos as frequências naturais de vibrações ω_n , da viga, em função do torque aplicado T_4 (39,2 N.m), as quais são : $\omega_1 = 68,36$ Hz (1^o modo); $\omega_2 = 224,61$ Hz (2^o modo) e $\omega_3 = 392,58$ Hz (3^o modo).

5.2.2.3.5 Torque aplicado de 49,0 N.m - VJRT₅

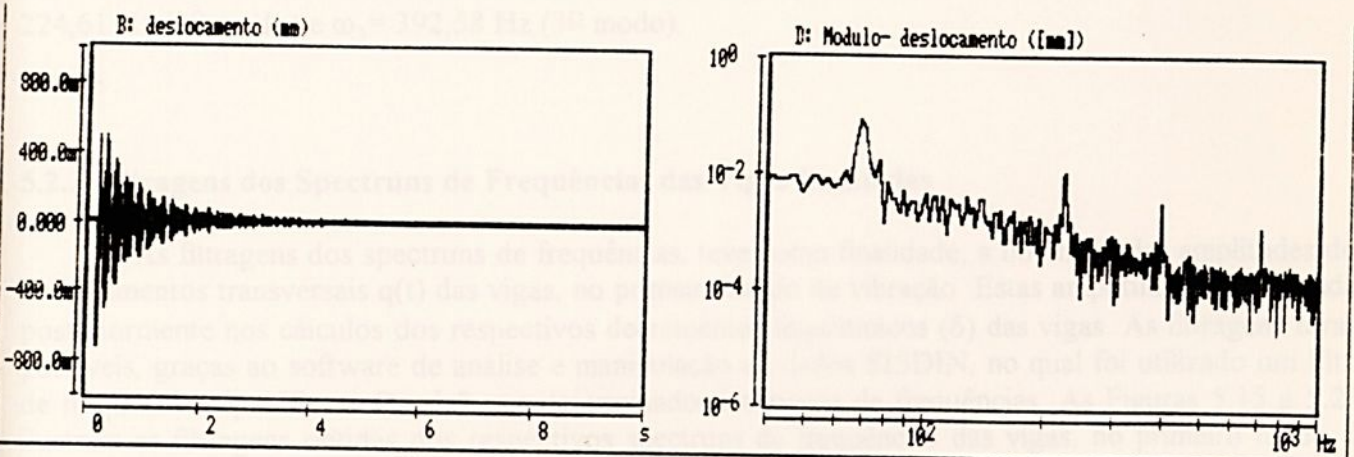


Figura 5.13 Ensaio da VJRT₅ ($T_5 = 49,0$ N.m e $t = 10$ s)

Do gráfico: deslocamento (mm) x frequência (Hz), obtemos as frequências naturais de vibrações ω_n , da viga, em função do torque aplicado T_5 (49,0 N.m), as quais são : $\omega_1 = 68,36$ Hz (1^o modo); $\omega_2 = 222,66$ Hz (2^o modo) e $\omega_3 = 392,58$ Hz (3^o modo).

5.2.2.3.6 Torque aplicado de 58,8N.m - VJRT₆

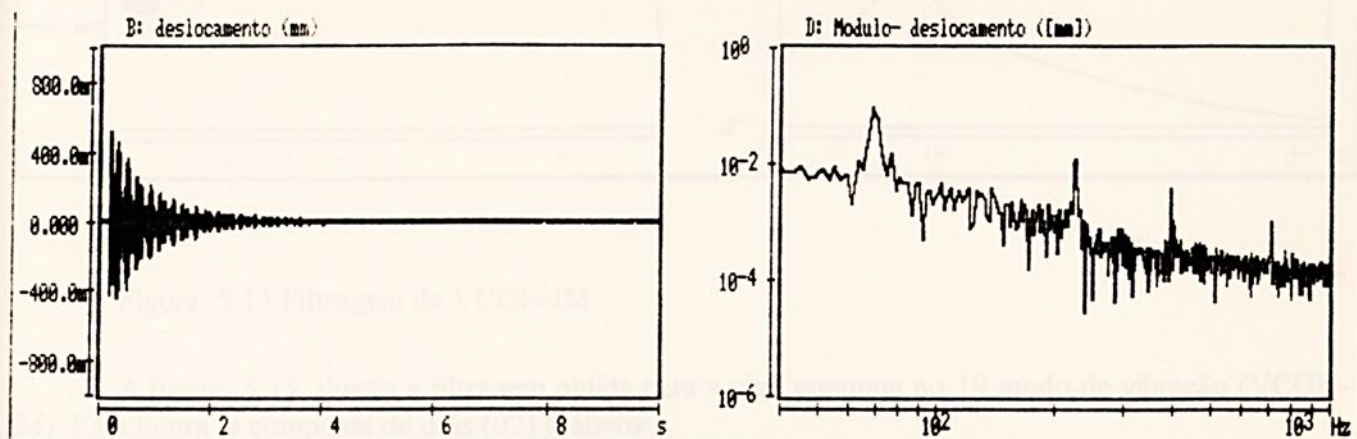


Figura 5.14 Ensaio da VJRT₆ ($T_6 = 58,8$ N.m e $t = 10$ s)

Do gráfico: deslocamento (mm) x frequência (Hz), obtemos as frequências naturais de vibrações ω_n , da viga, em função do torque aplicado T_6 (58,8 N.m), as quais são : $\omega_1 = 68,36$ Hz (1^o modo); $\omega_2 = 224,61$ Hz (2^o modo) e $\omega_3 = 392,58$ Hz (3^o modo).

5.2.3 Filtragens dos Spectrums de Frequências das Vigas Ensaeadas

As filtragens dos spectrums de frequências, teve como finalidade, a obtenção das amplitudes dos deslocamentos transversais $q(t)$ das vigas, no primeiro modo de vibração. Estas amplitudes são utilizadas posteriormente nos cálculos dos respectivos decrementos logarítmicos (δ) das vigas. As filtragens foram possíveis, graças ao software de análise e manipulação de dados SISDIN, no qual foi utilizado um filtro de frequência, tipo "Passa Banda", em determinados intervalos de frequências. As Figuras 5.15 a 5.27, ilustram as filtragens obtidas dos respectivos spectrums de frequências das vigas, no primeiro modo de vibração.

5.2.3.1 Viga contínua no 1º modo : VCON-IM.

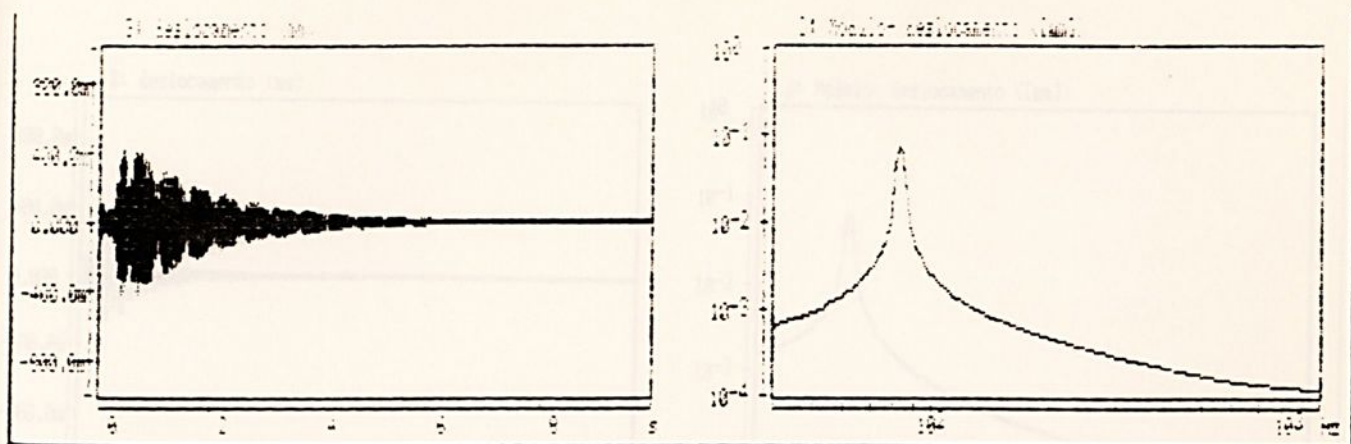


Figura 5.15 Filtragem da VCON-IM

A figura 5.15, ilustra a filtragem obtida para a viga contínua no 1º modo de vibração (VCON-IM). Esta figura é composta de dois (02) gráficos:

a) Gráfico 1: Deslocamento (mm) x tempo (s). Este gráfico é resultante da figura 5.2 (gráfico: deslocamento x tempo). Ele fornece as amplitudes dos deslocamentos transversais $q(t)$ da viga.

b) Gráfico 2: Deslocamento (mm) x frequência (Hz). Este gráfico é resultante da figura 5.2 (gráfico: deslocamento x frequência).

5.2.3.2 Viga com junta parafusada e superfície fresada no 1º modo : VJF -IM

As figuras 5.16 a 5.21, ilustram as filtragens obtidas para a VJF-IM, em função da variação do torque de aperto $T(N.m)$. Estas figuras são resultantes das figuras 5.3 a 5.8. As filtragens obtidas para a VJF-IM, foram realizadas de modo analogo ao da viga contínua.

Figura 5.17 Filtragem da VJF₁-IM (63 s.a., 270, s.a., 68, 38-110)

5.2.3.2.1 Torque aplicado de 9,8 N.m - VJFT₁-IM

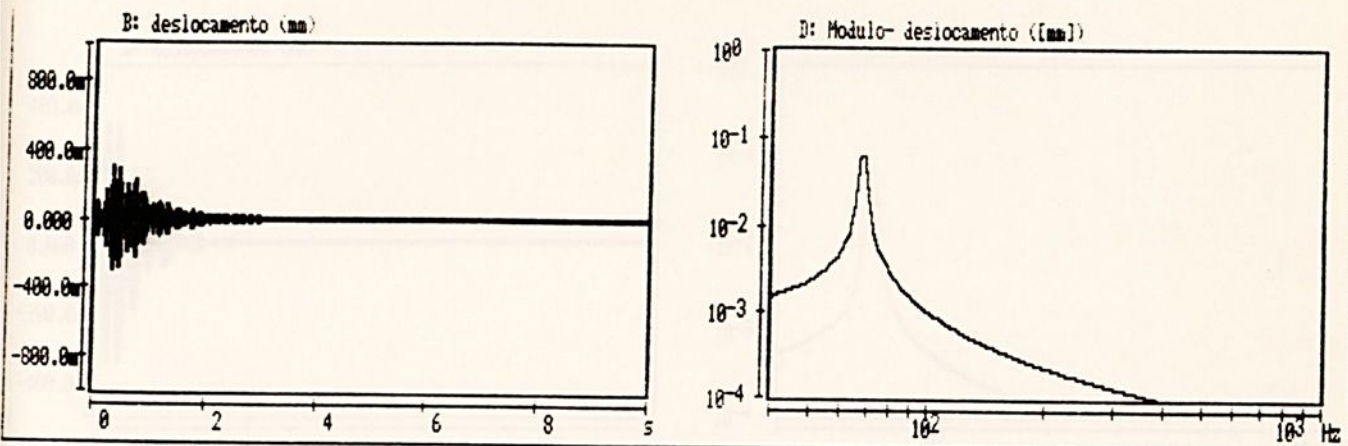


Figura 5.16 Filtragem da VJFT₁-IM ($65 \leq \omega_1 \leq 70$; $\omega_1 = 68,36$ Hz)

5.2.3.2.2 Torque aplicado de 19,6 N.m - VJFT₂-IM

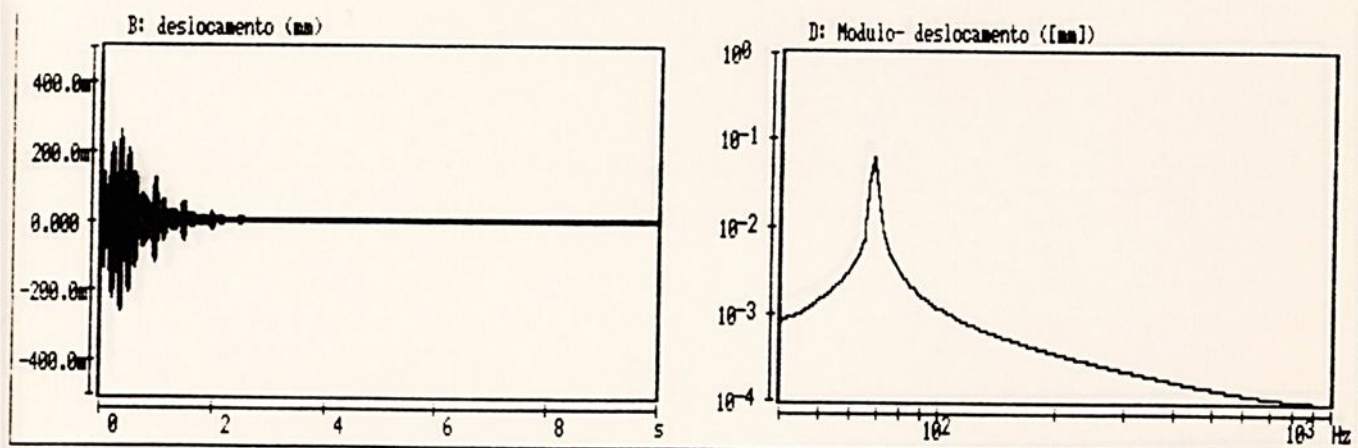


Figura 5.17 Filtragem da VJFT₂-IM ($65 \leq \omega_1 \leq 70$; $\omega_1 = 68,36$ Hz)

5.2.3.2.3. Torque aplicado de 29,4 N.m - VJFT₃-IM

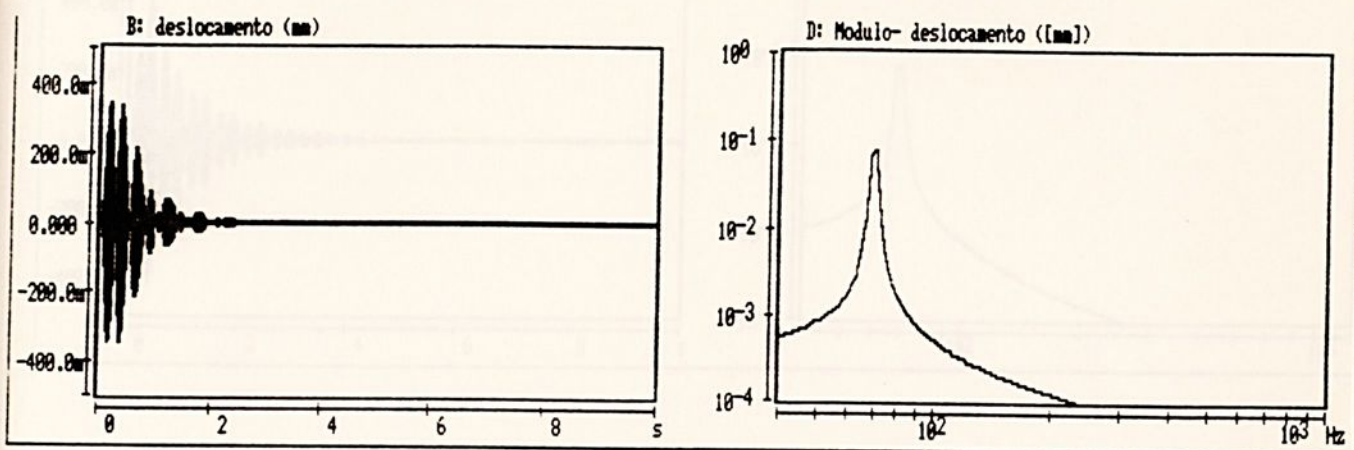


Figura 5.18 Filtragem da VJFT₃-IM ($65 \leq \omega_1 \leq 72$; $\omega_1 = 68,36$ Hz)

5.2.3.2.4 Torque aplicado de 39,2 N.m - VJFT₄-IM.

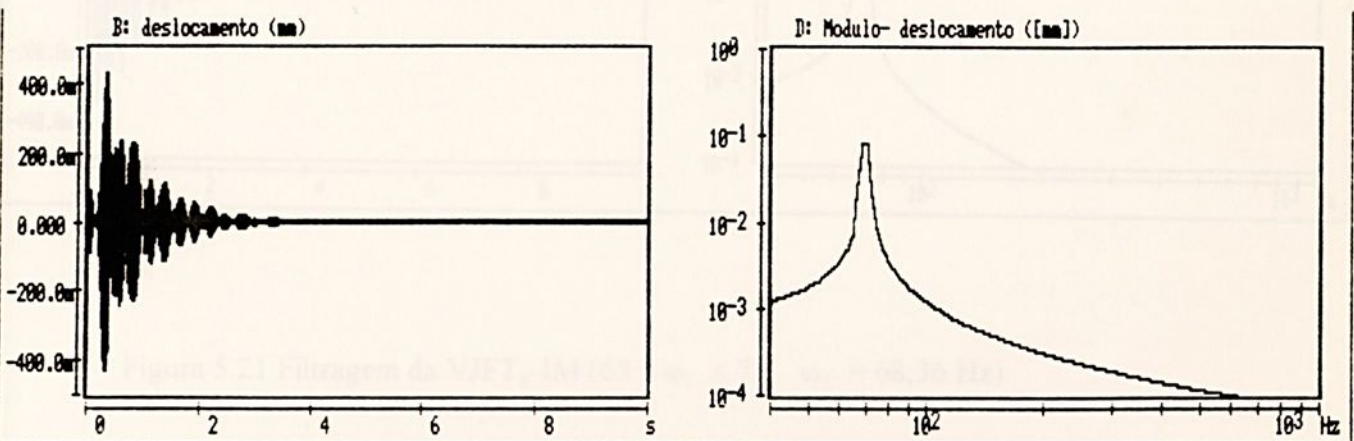


Figura 5.19 Filtragem da VJFT₄-IM ($65 \leq \omega_1 \leq 72$; $\omega_1 = 70,31$ Hz)

5.2.3.2.5 Torque aplicado de 49,0 N.m (VJFT₅-IM)

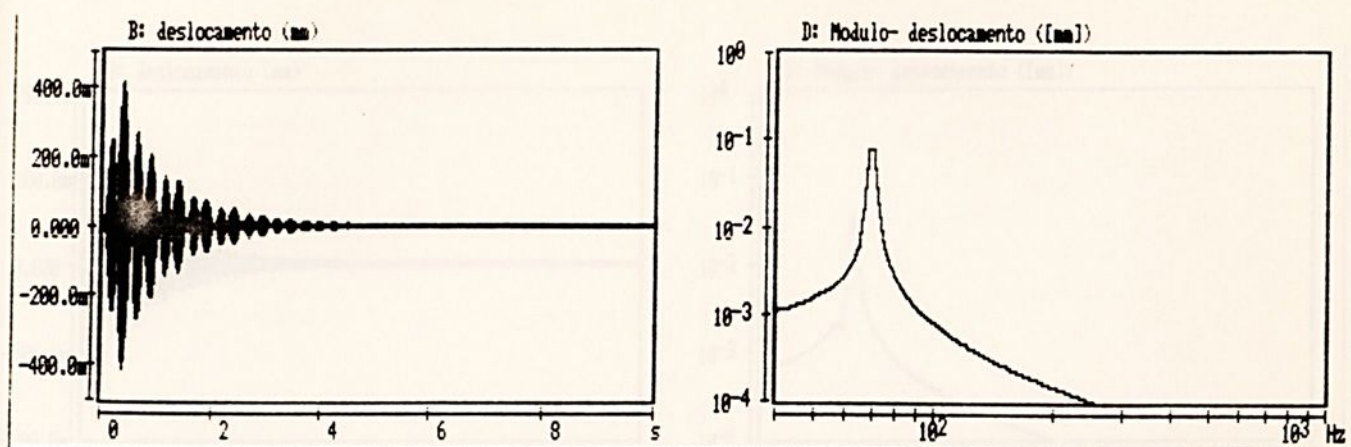


Figura 5.20 Filtragem da VJFT₅-IM ($65 \leq \omega_1 \leq 72$; $\omega_1 = 70,31$ Hz)

5.2.3.2.6 Torque aplicado de 58,8 N.m (VJFT₆-IM)

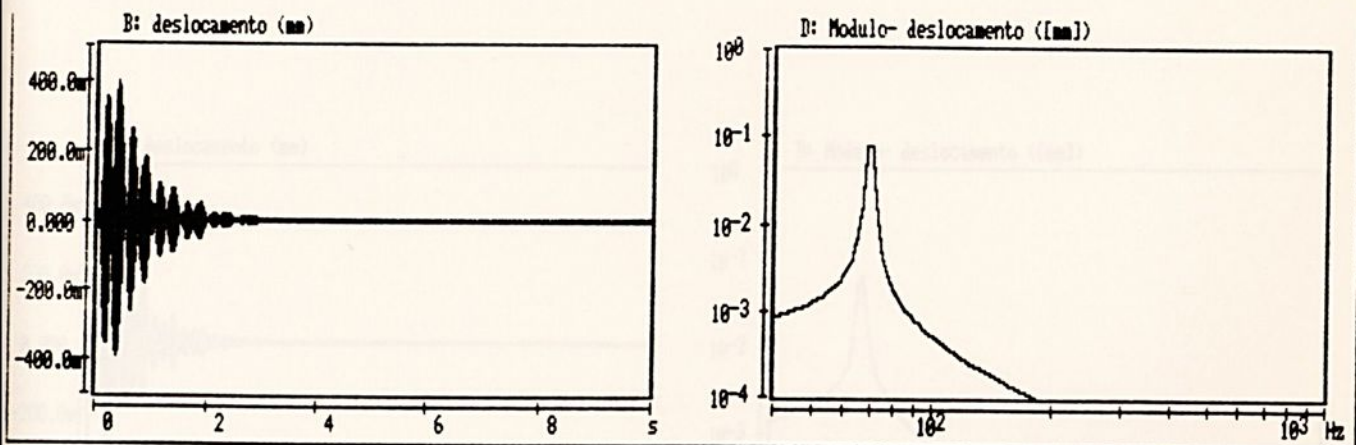


Figura 5.21 Filtragem da VJFT₆-IM ($65 \leq \omega_1 \leq 72$; $\omega_1 = 68,36$ Hz)

5.2.3.3 Viga com junta parafusada e superfície retificada no 1º modo VJR -IM

As figuras 5.22 a 5.27, ilustram as filtragens obtidas para a VJF-IM, em função da variação do torque de aperto T (N.m). Estas figuras são resultantes das figuras 5.9 a 5.14.

As filtragens obtidas, para a VJR-IM, foram realizadas de modo analogo ao da viga contínua.

5.2.3.3.1 Torque aplicado de 9,8 N.m:- VJRT₁-IM

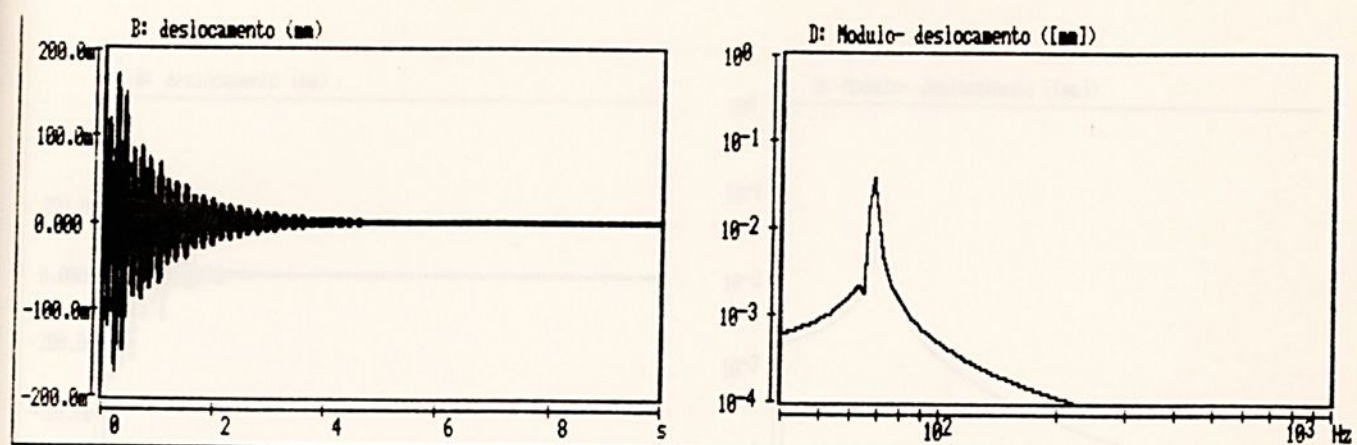


Figura 5.22 Filtragem da VJRT₁-IM ($65 \leq \omega_1 \leq 70$; $\omega_1 = 68,36$ Hz)

5.2.3.3.2 Torque aplicado de 19,6 N.m: VJRT₂-IM

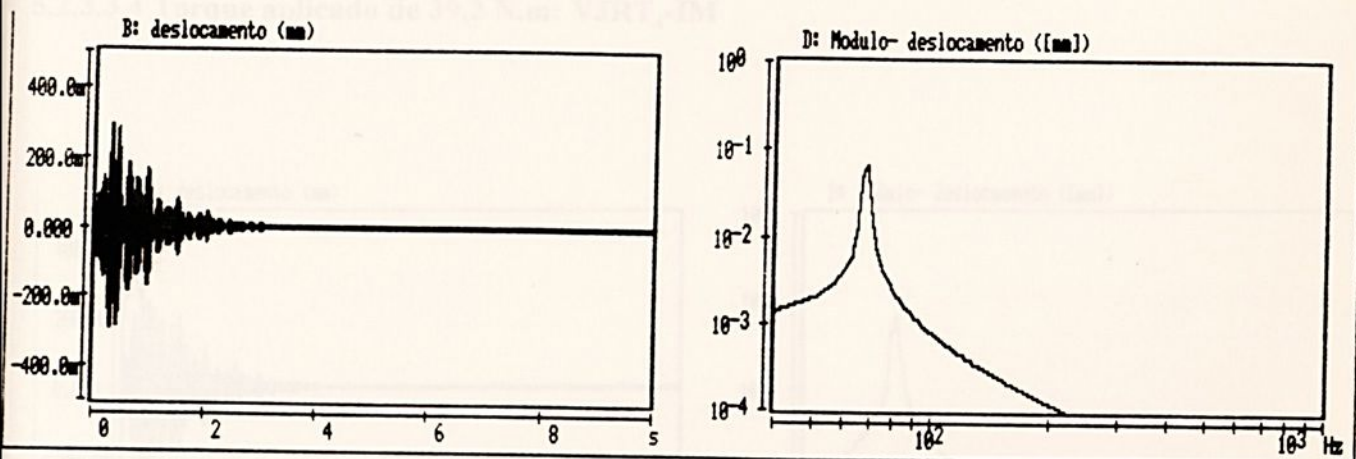


Figura 5.23 Filtragem da VJRT₂-IM ($65 \leq \omega_1 \leq 70$; $\omega_1 = 68,36$ Hz)

5.2.3.3.3 Torque aplicado de 29,4 N.m: VJRT₃-IM

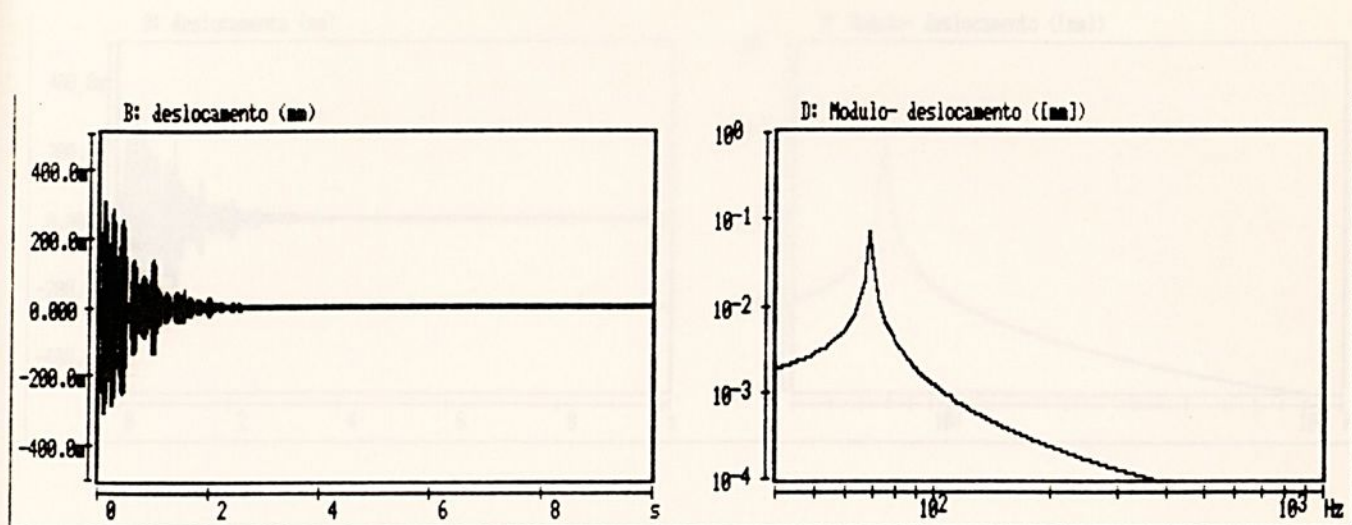


Figura 5.24 Filtragem da VJRT₃-IM ($65 \leq \omega_1 \leq 70$; $\omega_1 = 68,36$ Hz)

5.2.3.3.4 Torque aplicado de 39,2 N.m: VJRT₄-IM

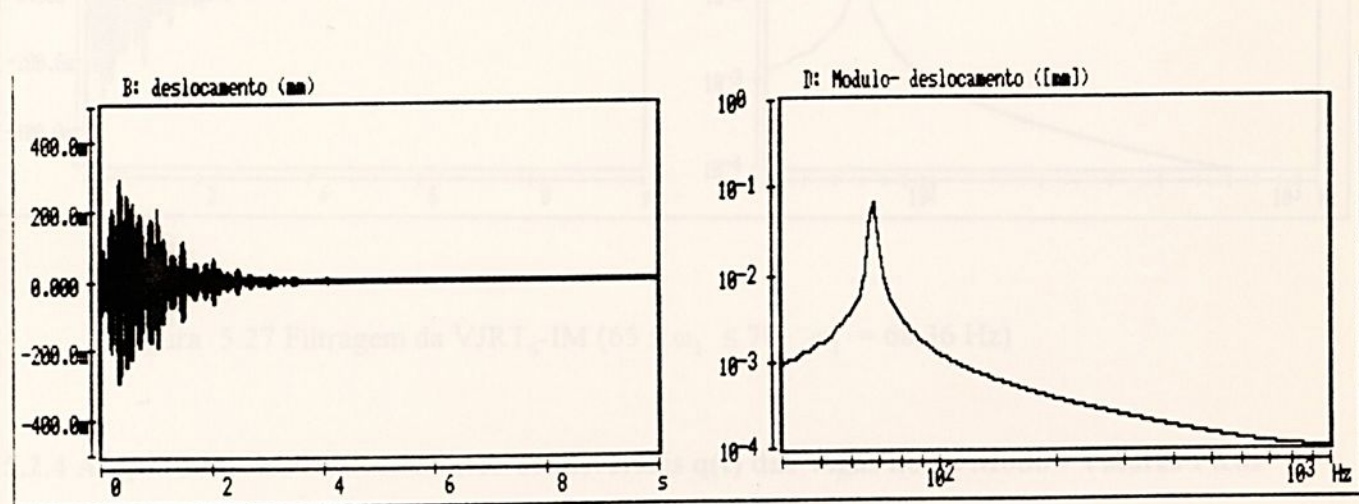


Figura 5.25 Filtragem da VJRT₄-IM ($65 \leq \omega_1 \leq 70$; $\omega_1 = 68,36$ Hz)

5.2.3.3.5 Torque aplicado de 49,0: VJRT₅-IM

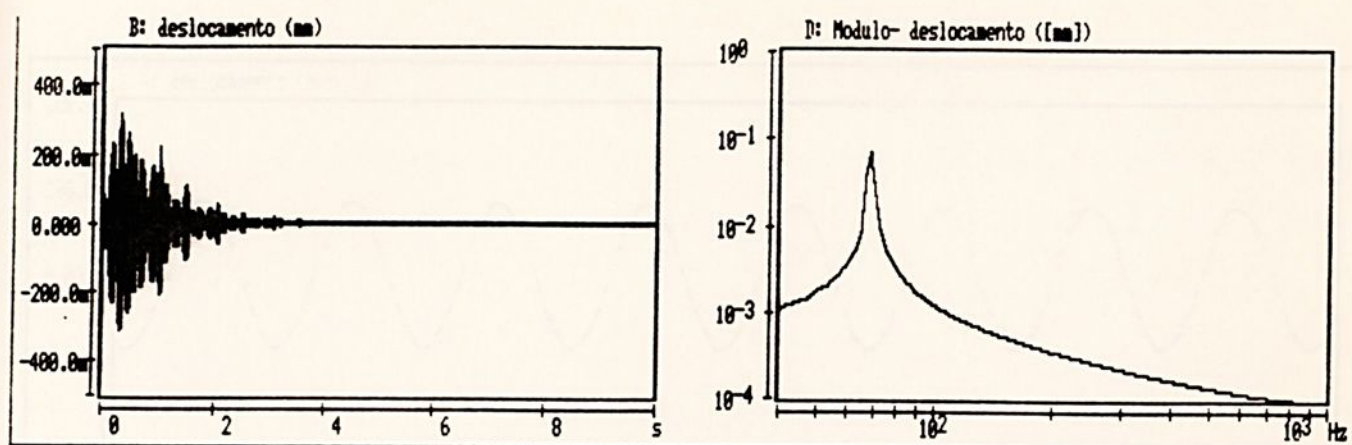


Figura 5.26 Filtragem da VJRT₅-IM ($65 \leq \omega_1 \leq 70$; $\omega_1 = 68,36$ Hz)

5.2.3.3.6. Torque aplicado de 58,8 N.m: VJRT₆-IM

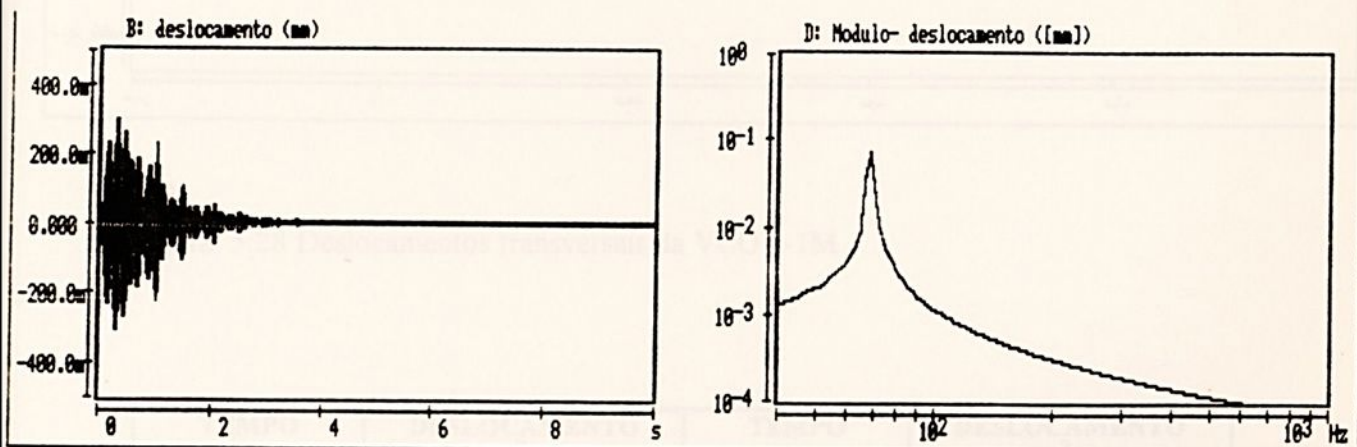


Figura 5.27 Filtragem da VJRT₆-IM ($65 \leq \omega_1 \leq 70$; $\omega_1 = 68,36$ Hz)

5.2.4 Amplitudes dos Deslocamentos Transversais $q(t)$ das Vigas no 1º Modo - Valores Picos

5.2.4.1 Viga contínua no 1º modo: VCON-IM

A figura 5.28, ilustra as amplitudes dos deslocamentos transversais $q(t)$, obtidas para a viga contínua, no 1º modo de vibração nos seguintes intervalos de tempo analisados: de 0,400s a 0,500s e de 1,400s a 1,500s, respectivamente.

A tabela 5.4, apresenta os valores correspondentes das coordenadas dos picos que ocorreram nestes, respectivos intervalos de tempos.

As coordenadas indicadas com asterisco (*), foram utilizadas no cálculo do decremento logarítmico (δ) da viga contínua.

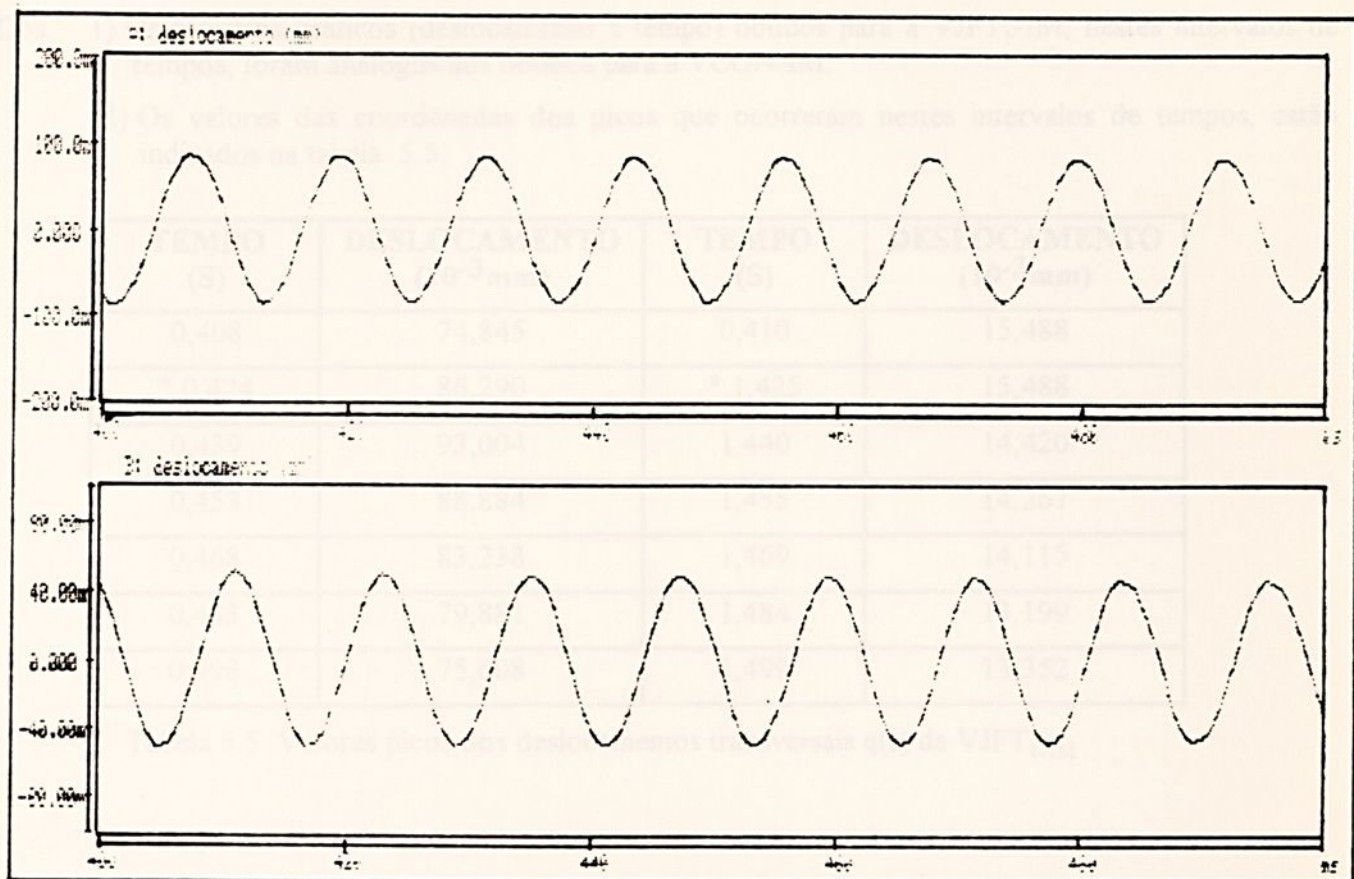


Figura 5.28 Deslocamentos transversais da VCON-1M

TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10^{-3} mm)	TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10^{-3} mm)
* 0,407	89,036	* 1,411	51,194
0,419	86,595	1,423	50,126
0,432	84,916	1,435	49,210
0,444	84,764	1,447	49,363
0,456	85,527	1,460	49,363
0,468	85,222	1,472	48,753
0,480	83,696	1,484	47,532
0,492	82,780	1,496	47,532

Tabela 5.4 Valores picos dos deslocamentos transversais $q(t)$ da VCON-1M.

5.2.4.2 Viga com junta parafusada e superfície fresada no 1º modo: VJF-IM

5.2.4.2.1 Torque aplicado de 9,8 N.m: VJFT₁-IM

Obs.: 1) Os registros gráficos (deslocamento x tempo) obtidos para a VJFT₁-IM, nestes intervalos de tempos, foram analogos aos obtidos para a VCON-IM.

2) Os valores das coordenadas dos picos que ocorreram nestes intervalos de tempos, estão indicados na tabela 5.5.

TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10 ⁻³ mm)	TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10 ⁻³ mm)
0,408	74,845	0,410	15,488
* 0,424	86,290	* 1,425	15,488
0,439	93,004	1,440	14,420
0,453	88,884	1,455	14,267
0,468	83,238	1,469	14,115
0,483	79,881	1,484	13,199
0,498	75,608	1,499	13,352

Tabela 5.5 Valores picos dos deslocamentos transversais q(t) da VJFT₁-IM

5.2.4.2.2 Torque aplicado de 19,6 N.m: VJFT₂-IM

Obs.: 1) Os registros gráficos (deslocamento x tempo) obtidos para a VJFT₂-IM, nestes intervalos de tempos, foram analogos aos obtidos para a VCON-IM.

2) Os valores das coordenadas dos picos que ocorreram nestes intervalos de tempos, estão indicados na tabela 5.6.

TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10 ⁻³ mm)	TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10 ⁻³ mm)
* 0,407	83,848	1,401	15,488
0,421	79,728	* 1,416	15,640
0,436	76,371	1,430	15,488
0,450	72,862	1,444	14,725
0,464	69,047	1,459	14,572
0,479	66,606	1,473	14,572
0,493	64,469	1,487	13,962

Tabela 5.6 Valores picos dos deslocamentos transversais q(t) da VJFT₂-IM



5.2.4.2.3 Torque aplicado de 29,4 N.m: VJFT₃-IM

Obs.: 1) Os registros gráficos (deslocamento x tempo) obtidos para a VJFT₃-IM, nestes intervalos de tempos, foram analogos aos obtidos para a VCON-IM.

2) Os valores das coordenadas dos picos que ocorreram nestes intervalos de tempos, estão indicados na tabela 5.7.

TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10 ⁻³ mm)	TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10 ⁻³ mm)
* 0,411	73,320	1,403	10,758
0,426	70,268	* 1,417	10,910
0,441	68,182	1,431	10,452
0,455	67,674	1,446	9,6895
0,469	63,300	1,461	9,5372
0,484	64,012	1,475	9,3842
0,498	63,096	1,489	8,774

Tabela 5.7 Valores picos dos deslocamentos transversais q(t) da VJFT_{3-1M}

Tabela 5.7 Valores picos dos deslocamentos transversais q(t) da VJFT_{3-1M}

5.2.4.2.4 Torque aplicado de 39,2 N.m: VJFT₄-IM

Obs.: 1) Os registros gráficos (deslocamento x tempo) obtidos para a VJFT₄-IM, nestes intervalos de tempos, foram analogos aos obtidos para a VCON-IM.

2) Os valores das coordenadas dos picos que ocorreram nestes intervalos de tempos, estão indicados na tabela 5.8.

TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10 ⁻³ mm)	TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10 ⁻³ mm)
0,408	101,701	1,400	21,744
* 0,422	98,497	1,414	21,897
0,436	95,903	1,428	21,592
0,451	92,851	1,443	22,049
0,465	89,494	1,457	21,592
0,480	87,663	1,471	21,134
0,494	84,916	1,486	20,981

Tabela 5.8 Valores picos dos deslocamentos transversais q(t) da VJFT_{4-1M}

Tabela 5.8 Valores picos dos deslocamentos transversais q(t) da VJFT_{4-1M}

5.2.4.2.5 Torque aplicado de 49,0 N.m: VJFT₅-IM

- Obs.: 1) Os registros gráficos (deslocamento x tempo) obtidos para a VJFT₅-IM, nestes intervalos de tempos, foram analogos aos obtidos para a VCON-IM.
- 2) Os valores das coordenadas dos picos que ocorreram nestes intervalos de tempos, estão indicados na tabela 5.9.

TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10 ⁻³ mm)	TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10 ⁻³ mm)
* 0,413	80,949	1,407	26,932
0,427	78,660	* 1,421	26,322
0,441	76,524	1,436	25,864
0,456	75,151	1,450	25,406
0,470	73,625	1,464	24,643
0,485	71,336	1,479	24,186
0,499	69,810	1,493	24,039

Tabela 5.9 Valores picos dos deslocamentos transversais q(t) da VJFT₅-IM

5.2.4.2.6 Torque aplicado de 58,8 N.m: VJFT₆-IM

- Obs.: 1) Os registros gráficos (deslocamento x tempo) obtidos para a VJFT₆-IM, nestes intervalos de tempos, foram analogos aos obtidos para a VCON-IM.
- 2) Os valores das coordenadas dos picos que ocorreram nestes intervalos de tempos, estão indicados na tabela 5.10.

TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10 ⁻³ mm)	TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10 ⁻³ mm)
* 0,405	81,102	1,400	17,166
0,420	79,423	* 1,414	17,014
0,434	77,745	1,429	16,861
0,449	76,219	1,443	16,556
0,463	74,845	1,458	15,946
0,477	73,777	1,472	15,640
0,492	73,014	1,486	15,335

Tabela 5.10 Valores picos dos deslocamentos transversais q(t) da VJFT₆-IM

5.2.4.3 Viga com junta parafusada e superfície retificada no 1º modo: VJR - IM

5.2.4.3.1. Torque aplicado de 9,8 N.m: VJRT₁-IM

Obs.: 1) Os registros gráficos (deslocamento x tempo) obtidos para a VJRT₁-IM, nestes intervalos de tempos, foram analogos aos obtidos para a VCON-IM.

2) Os valores das coordenadas dos picos que ocorreram nestes intervalos de tempos, estão indicados na tabela 5.11.

TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10 ⁻³ mm)	TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10 ⁻³ mm)
* 0,406	29,068	0,403	9,232
0,421	28,458	* 1,418	8,774
0,436	27,848	1,432	8,621
0,450	27,695	1,447	8,621
0,465	27,085	1,461	8,460
0,479	26,474	1,476	8,316
0,494	26,322	1,491	8,621

Tabela 5.11 Valores picos dos deslocamentos transversais q(t) da VJRT_{1-IM}

5.2.4.3.2. Torque aplicado de 19,6 N.m: VJRT₂-IM

Obs.: 1) Os registros gráficos (deslocamento x tempo) obtidos para a VJRT₂-IM, nestes intervalos de tempos, foram analogos aos obtidos para a VCON-IM.

2) Os valores das coordenadas dos picos que ocorreram nestes intervalos de tempos, estão indicados na tabela 5.12.

TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10 ⁻³ mm)	TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10 ⁻³ mm)
* 0,410	82,170	1,401	13,352
0,425	78,050	* 1,415	13,199
0,439	73,930	1,430	12,741
0,454	70,878	1,445	12,741
0,469	68,132	1,459	12,894
0,483	65,080	1,473	12,436
0,498	62,181	1,488	11,978

Tabela 5.12 Valores picos dos deslocamentos transversais q(t) da VJRT_{2-IM}

5.2.4.3.3 Torque aplicado de 29,4 N.m: VJRT₃-IM

- Obs.: 1) Os registros gráficos (deslocamento x tempo) obtidos para a VJRT₃ -IM, nestes intervalos de tempos, foram analogos aos obtidos para a VCON-IM.
- 2) Os valores das coordenadas dos picos que ocorreram nestes intervalos de tempos, estão indicados na tabela 5.13.

TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10 ⁻³ mm)	TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10 ⁻³ mm)
* 0,410	56,687	* 1,412	9,537
0,425	54,551	1,427	9,689
0,439	53,635	1,441	9,537
0,454	53,178	1,456	8,927
0,468	51652	1,471	8,621
0,483	49,821	1,485	8,927
0,498	49,058	1,499	8,927

Tabela 5.13 Valores picos dos deslocamentos transversais q(t) da VJRT_{3-1M}

5.2.4.3.4 Torque aplicado de 39,2 N.m: VJRT₄-IM

- Obs.: 1) Os registros gráficos (deslocamento x tempo) obtidos para a VJRT₄ -IM, nestes intervalos de tempos, foram analogos aos obtidos para a VCON-IM.
- 2) Os valores das coordenadas dos picos que ocorreram nestes intervalos de tempos, estão indicados na tabela 5.14.

TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10 ⁻³ mm)	TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10 ⁻³ mm)
* 0,407	88,579	1,410	22,354
0,422	85,374	1,424	22,507
0,437	82,933	1,439	22,049
0,451	80,644	1,453	21,592
0,466	77,897	1,468	21,439
0,480	75,608	1,482	21,134
0,495	73,625	1,497	20,523

Tabela 5.14 Valores picos dos deslocamentos transversais q(t) da VJRT_{4-1M}

5.2.4.3.5 Torque aplicado de 49,0 N.m: VJRT₅-IM

Obs.: 1) Os registros gráficos (deslocamento x tempo) obtidos para a VJRT₅-IM, nestes intervalos de tempos, foram analogos aos obtidos para a VCON-IM.

2) Os valores das coordenadas dos picos que ocorreram nestes intervalos de tempos, estão indicados na tabela 5.15.

TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10 ⁻³ mm)	TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10 ⁻³ mm)
* 0,408	85,832	1,409	22,354
0,423	83,848	1,424	21,897
0,437	80,797	1,438	20,981
0,452	77,592	1,453	20,829
0,466	75,761	1,468	20,676
0,480	74,083	1,482	20,066
0,495	72,099	1,496	18,845

Tabela 5.15 Valores picos dos deslocamentos transversais q(t) da VJRT_{5-IM}

5.2.4.3.6 Torque aplicado de 58,8 N.m: VJRT₆-IM

Obs.: 1) Os registros gráficos (deslocamento x tempo) obtidos para a VJRT₆-IM, nestes intervalos de tempos, foram analogos aos obtidos para a VCON-IM.

2) Os valores das coordenadas dos picos que ocorreram nestes intervalos de tempos, estão indicados na tabela 5.16.

TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10 ⁻³ mm)	TEMPO (S)	DESLOCAMENTO (10 ⁻³ mm)
* 0,409	86,137	* 1,409	21,744
0,423	83,676	1,424	21,134
0,438	80,644	1,438	20,371
0,452	78,355	1,453	20,218
0,467	76,829	1,467	20,066
0,481	75,303	1,482	19,303
0,496	72,709	1,496	19,540

Tabela 5.16 Valores picos dos deslocamentos transversais q(t) da VJRT_{6-IM}

5.3 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

5.3.1 Frequências Naturais de Vibrações das Vigas

5.3.1.1 Viga contínua - VCON

A tabela 5.17, ilustra as tres (03) primeiras frequências naturais de vibrações ω_n , obtidas para a viga contínua. Estes valores são provenientes do registro gráfico, deslocamento (mm) x frequência (Hz), indicado na figura 5.2.

MODOS DE VIBRAÇÕES	FREQUÊNCIA (Hz)
1º M	83,98
2º M	226,56
3º M	443,36

Tabela 5.17 Frequências naturais de vibrações da viga contínua - VCON

5.3.1.2 Viga com junta parafusada e superfície fresada - VJF

A tabela 5.18, ilustra as tres (03) primeiras frequências naturais de vibrações ω_n , obtidas para a VJF, em função do torque de aperto. Estes valores são provenientes dos registros gráficos, deslocamentos (mm) x frequências (Hz), indicados respectivamente nas figuras 5.3 a 5.8.

MODOS DE VIBRAÇÕES	TORQUE DE APERTO (N.m)					
	9,8	19,6	29,4	39,2	49,0	58,8
1º M	68,36	68,36	68,36	70,31	70,31	68,36
2º M	226,56	228,52	228,52	228,52	228,52	228,52
3º M	392,58	396,48	398,48	396,48	396,48	396,48

Tabela 5.18 Frequências naturais de vibrações da VJF em função do torque de aperto

5.3.1.3 Viga com junta parafusada e superfície retificada - VJR

A tabela 5.19, ilustra as tres (03) primeiras frequências naturais de vibrações ω_n , obtidas para a VJR, em função do torque de aperto. Estes valores são provenientes dos registros gráficos: deslocamentos (mm) x frequências (Hz), indicados respectivamente nas figuras 5.9 a 5.14.

MODOS DE VIBRAÇÕES	TORQUE DE APERTO (N.m)					
	9,8	19,6	29,4	39,2	49,0	58,8
1º M	68,36	68,36	68,36	68,36	68,36	68,36
2º M	224,61	222,66	224,61	224,61	222,66	224,61
3º M	390,63	390,63	390,63	392,58	392,58	392,58

Tabela 5.19 Frequências naturais de vibrações da VJR em função do torque de aperto.



5.3.2 Decrementos Logarítmicos (δ) e Razões de Amortecimento (ζ) das Vigas:

Os decrementos logarítmicos (δ) foram calculados através da equação 3.72, dada por:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{q_i}{q_{i+n}}$$

e as razões de amortecimentos (ζ), através da equação 3.73, dada por:

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}$$

5.3.2.1 Viga contínua no 1º modo: VCON-IM

Os valores de δ e ζ , indicados na tabela 5.20, foram calculados através dos valores retirados da tabela 5.4 (valores picos).

TEMPO (s)		DESLOC. (10 ⁻³ mm)		Nº DE CICLOS (n)	DECREM. (δ)	AMORTEC. (ζ)
t _i	t _{i+n}	q _i	q _{i+n}			
0,407	1,411	89,036	51,194	83	.006668	.001060

Tabela 5.20 Resultados experimentais de δ e ζ para a VCON-IM

O amortecimento obtido para a viga contínua é devido exclusivamente ao amortecimento do material, e este encontra-se dentro do intervalo de amortecimento do aço SAE 1020, (tabela 2.1).

5.3.2.2 Viga com junta parafusada e superfície fresada no 1º modo: VJF-IM

Os valores de δ e ζ indicados na tabela 5.21, foram calculados através dos valores retirados das tabelas 5.5 a 5.10 (valores picos).

TORQUE (N.m)	TEMPO (s)		DESLOC. (10 ⁻³ mm)		Nº DE CICLOS (n)	DECREM. (δ)	AMORTEC. (ζ)
	t _i	t _{i+n}	q _i	q _{i+n}			
9,8	0,424	1,425	86,290	15,488	67	.025637	.004080
19,6	0,407	1,416	83,848	15,640	67	.025062	.003989
29,4	0,411	1,417	73,320	10,910	67	.028435	.004526
39,2	0,422	1,428	98,497	21,592	67	.022652	.003605
49,0	0,413	1,421	80,949	26,322	67	.016767	.002669
58,8	0,405	1,400	81,102	17,014	67	.023320	.003712

Tabela 5.21 Resultados experimentais de δ e ζ para a VJF - 1M em função do torque de aperto.

5.3.2.3 Viga com junta parafusada e superfície retificada no 1º modo: VJR-IM

Os valores de δ e ζ indicados na tabela 5.22, foram calculados através dos valores retirados das tabelas 5.11 a 5.16 (valores picos).

TORQUE (N.m)	TEMPO (s)		DESLOC. (10^{-3} mm)		Nº DE CICLOS (n)	DECREM. (δ)	AMORTEC. (ζ)
	t_i	t_{i+n}	q_i	q_{i+n}			
9,8	0,406	1,418	29,068	8,774	67	.017878	.002845
19,6	0,410	1,415	82,170	13,199	67	.027293	.004344
29,4	0,410	1,412	56,687	9,537	67	.026602	.004234
39,2	0,407	1,410	88,579	22,354	67	.020551	.003271
49,0	0,408	1,409	85,832	22,354	67	.020080	.003196
58,8	0,409	1,409	86,137	21,744	67	.020546	.003270

Tabela 5.22 Resultados experimentais de δ e ζ para a VJR - 1M em função do torque de aperto.

- Obs.: 1) Os amortecimentos obtidos para as vigas com juntas parafusadas são devidos aos amortecimentos do material (AÇO 1020) e estrutural (efeito da junta).
- 2) O gráfico dado pela figura 5.31, ilustra e compara as razões de amortecimentos ζ , obtidos para as vigas com juntas, em função da variação do torque de aperto.
- 3) Os valores obtidos para as razões de amortecimentos estão dentro de um intervalo previsível, pois Wang [12], através de um modelo experimental semelhante, mas com condições de ensaio e metodologia de cálculo diferente, obteve para a VJF uma razão de amortecimento igual a 0,004658 e para a VJR uma razão igual a 0,002065. Para a VJF foi aplicada uma pré-carga de 10.000 N e para a VJR uma pré-carga de 3.000 N. A área de contato das duas juntas foi de 40 x 40 mm, e os valores das rugosidades superficiais das juntas não foram mencionados.

5.4 ANÁLISE DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS

5.4.1 Frequências Naturais de Vibrações das Vigas em Função do Torque

As figuras 5.29 e 5.30 ilustram graficamente os valores experimentais das frequências naturais obtidas para a VJF (tabela 5.18) e VJR (tabela 5.19) em função do torque de aperto

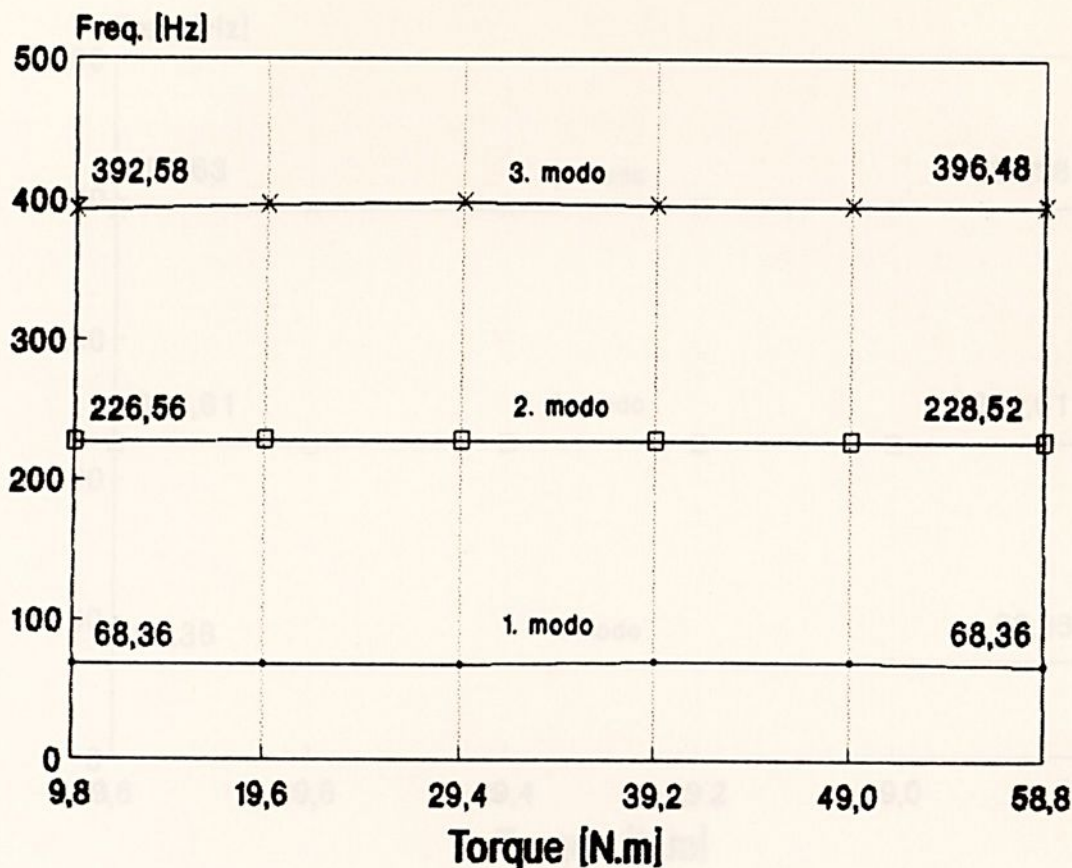


Figura 5.29 Gráfico: Frequência natural x torque para a VJF

Das figuras 5.29 e 5.30, verificamos que

1) O efeito da variação de torque de aperto sobre as frequências naturais de vibrações das vigas com juntas, foi praticamente insignificante sendo em vista que estas frequências permaneceram praticamente constantes, com a variação do torque aplicado.

2) Como as frequências naturais de vibrações das vigas com juntas foram menores que as da viga contínua, no 1º modo ($\omega_1 = 53,95$ Hz) e 3º modo ($\omega_3 = 443,35$ Hz), e aproximadamente iguais no 2º modo ($\omega_2 = 226,56$ Hz), verificamos portanto, que o efeito da junta parafusada sobre as frequências naturais de vibrações, foi bastante significativo para as frequências obtidas do 1º e 3º modo, e desprezível para as do 2º modo, quando comparadas com as correspondentes frequências da viga contínua. Este efeito está relacionado com o aumento da capacidade de amortecimento que ocorre na junção da junta no 1º e 3º modo de vibrações, devido à presença do momento de flexão, provocando o deslocamento transversal dado pelo centro da viga (configuração modal). Este efeito ocorre, não ocorre no 2º modo devido à ausência deste momento na interface da junta, pois neste modo não ocorre deslocamento transversal no centro da viga (configuração modal). Portanto, no 2º modo, a capacidade de amortecimento da viga com junta, foi inalterada, isto é, o amortecimento resultante é devido exclusivamente ao amortecimento material.

3) Comparando-se as frequências naturais de vibrações obtidas para a VJF com as respectivas frequências da VIR, verificamos que o efeito do acabamento superficial dado nas superfícies das juntas

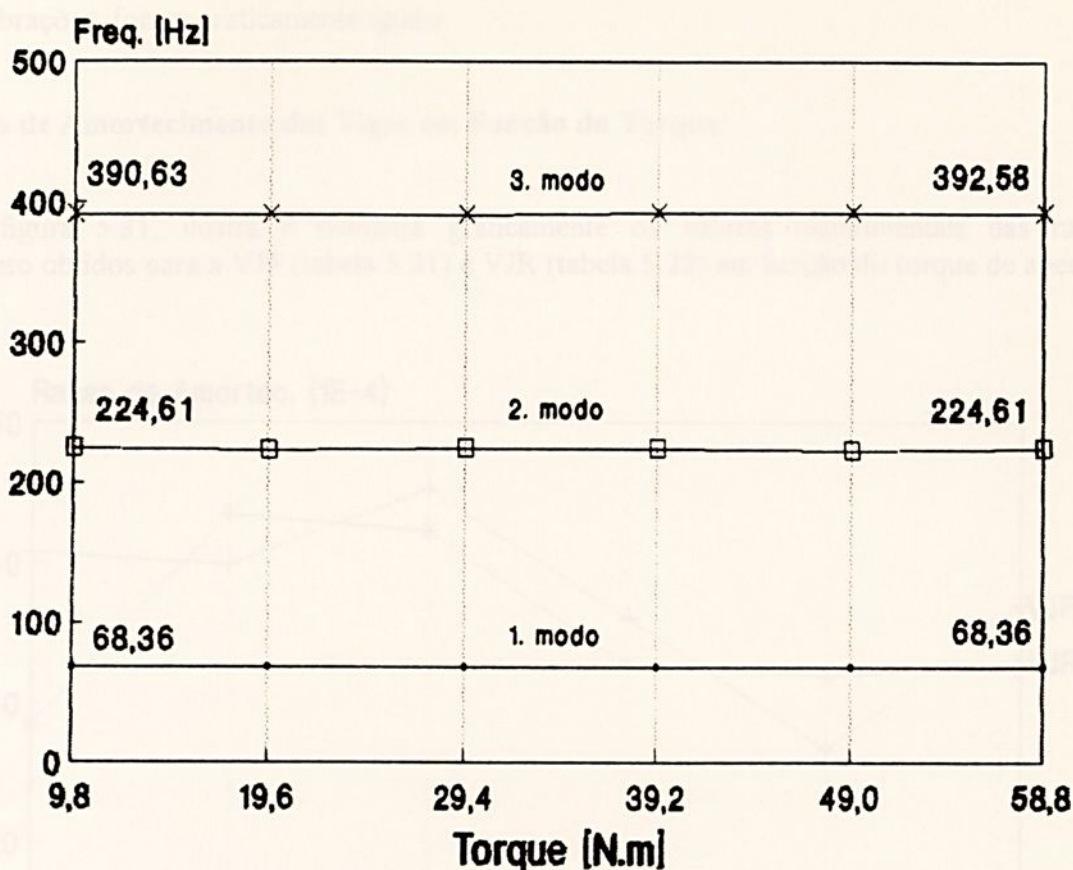


Figura 5.30 Gráfico: Frequência natural x torque para a VJR

Das figuras 5.29 e 5.30, verificamos que:

1) O efeito da variação do torque de aperto sobre as frequências naturais de vibrações das vigas com juntas, foi praticamente insignificante, tendo em vista que estas frequências mantiveram-se praticamente constantes, com a variação do torque aplicado.

2) Como as frequências naturais de vibrações das vigas com juntas, foram menores que as da viga contínua, no 1º modo ($\omega_1 < 83,98$ Hz) e 3º modo ($\omega_3 < 443,36$ Hz), e aproximadamente iguais no 2º modo ($\omega_2 \approx 226,56$ Hz), verificamos portanto, que o efeito da junta parafusada sobre as frequências naturais de vibrações, foi bastante significativo para as frequências obtidas do 1º e 3º modo, e desprezível para as do 2º modo, quando comparadas com as correspondentes frequências da viga contínua. Este efeito está relacionado com o aumento da capacidade de amortecimento que ocorre na interface da junta no 1º e 3º modo de vibrações, devido à presença do momento de flexão, proveniente do deslocamento transversal dado pelo centro da viga (configuração modal). Este efeito, porém, não ocorre no 2º modo devido à ausência deste momento na interface da junta, pois neste modo não ocorre deslocamento transversal no centro da viga (configuração modal). Portanto, no 2º modo, a capacidade de amortecimento da viga com junta, fica inalterada, isto é, o amortecimento resultante é devido exclusivamente ao amortecimento material.

3) Comparando-se as frequências naturais de vibrações obtidas para a VJF com as respectivas frequências da VJR, verificamos que o efeito do acabamento superficial dado nas superfícies das juntas

(fresado e retificado) não foi muito significativo, pois as frequências obtidas para as vigas nos tres (03) modos de vibrações, foram praticamente iguais.

5.4.2 Razões de Amortecimento das Vigas em Função do Torque

A figura 5.31, ilustra e compara graficamente os valores experimentais das razões de amortecimento obtidos para a VJF (tabela 5.21) e VJR (tabela 5.22) em função do torque de aperto.

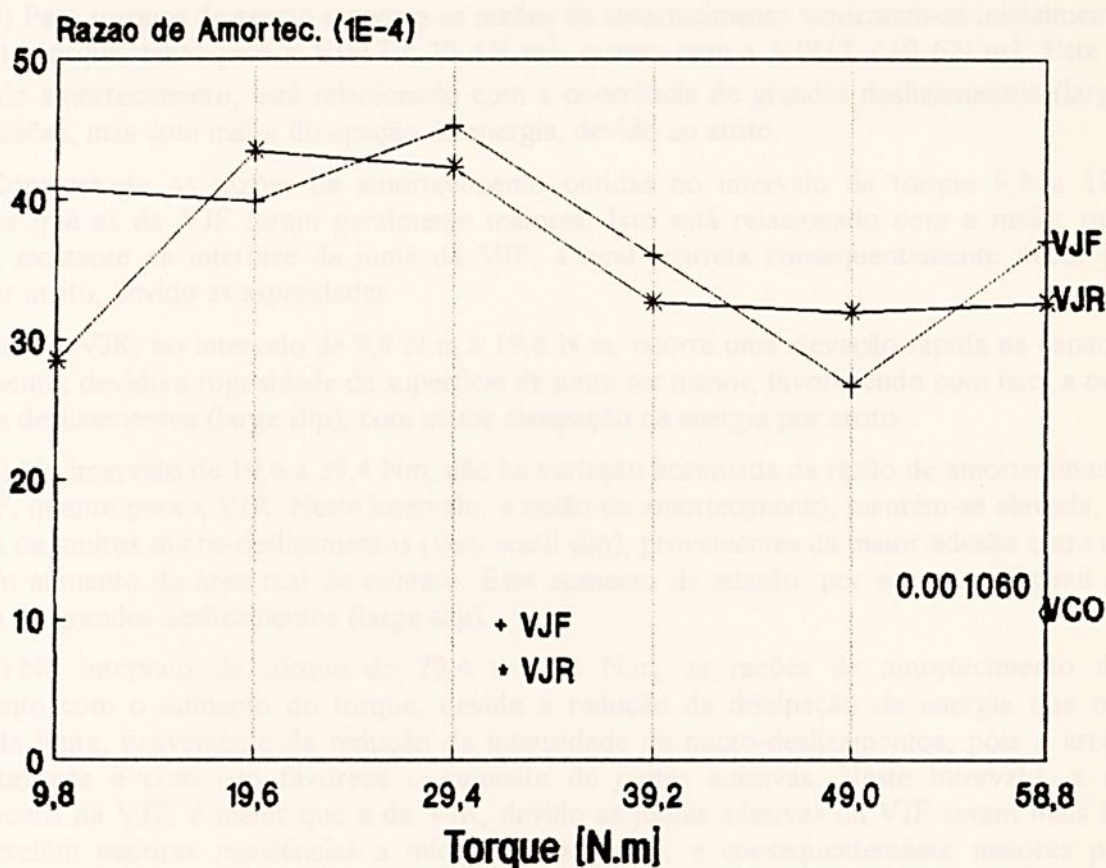


Figura 5.31 Gráfico: Razões de amortecimento x torque para VJF e VJR.

Da figura 5.31, podemos fazer as seguintes análises:

1) O efeito da variação do torque de aperto sobre as razões de amortecimento obtidas para as vigas com juntas parafusadas no 1º modo, foi bastante significativo, pois as razões de amortecimento mostraram-se dependentes do torque de aperto aplicado.

2) O efeito da junta parafusada sobre as razões de amortecimento obtidas para as vigas com juntas, foi bastante considerável, pois comparando-se estas razões de amortecimento com a da viga contínua, verificamos um aumento, aproximadamente da ordem de três a quatro vezes.

3) Em geral, à medida que se vai aumentando o torque de aperto, a capacidade de amortecimento das juntas parafusadas vai diminuindo-se, até atingir um determinado valor, e depois esta capacidade torna-se mais ou menos independente do torque aplicado. Por exemplo para a VJR, a

capacidade de amortecimento diminui gradativamente no intervalo de torque de 19,6 a 39,2 N.m, e depois, para torques maiores, torna-se mais ou menos independente do torque aplicado. Para a VJF, isto porém não ficou muito bem caracterizado, pois a razão de amortecimento obtida e correspondente ao torque de 49,0 N.m, não se manteve constante com relação às razões de amortecimento correspondentes aos torques de 39,2 N.m e 58,8 N.m, podendo portanto, não ser um valor confiável.

Esta tendência de queda na capacidade de amortecimento está relacionada com a diminuição da perda de energia que ocorre na interface da junta, provenientes das reduções de intensidades de micro-deslizamentos, devido ao aumento da área real de contato e portanto um aumento da adesão, a qual acarreta um aumento da resistência a micro-deslizamentos e conseqüentemente uma diminuição ou redução da energia perdida na junta.

4) Para torques de aperto menores as razões de amortecimento aumentam-se inicialmente com o aumento do torque, tanto para a VJF ($T \leq 29,4 \text{ N.m}$), quanto para a VJR ($T \leq 19,6 \text{ N.m}$). Este aumento da razão de amortecimento, está relacionado com a ocorrência de grandes deslizamentos (large slip) a baixas pressões, mas com maior dissipação de energia, devido ao atrito.

Comparando as razões de amortecimento obtidas no intervalo de torque 9,8 a 19,6 N.m, verificamos que as da VJF foram geralmente maiores. Isto está relacionado com a maior rugosidade superficial existente na interface da junta da VJF, a qual acarreta conseqüentemente maior perda de energia por atrito, devido as asperidades.

Para a VJR, no intervalo de 9,8 N.m a 19,6 N.m, ocorre uma elevação rápida na capacidade de amortecimento, devido a rugosidade da superfície da junta ser menor, favorecendo com isto, a ocorrência de maiores deslizamentos (large slip), com maior dissipação de energia por atrito.

5) No intervalo de 19,6 a 29,4 Nm, não há variação acentuada da razão de amortecimento, tanto para a VJF, quanto para a VJR. Neste intervalo, a razão de amortecimento, mantém-se elevada, devido a ocorrência de muitos micro-deslizamentos (very small slip), provenientes da maior adesão entre as juntas, pois há um aumento da área real de contato. Este aumento de adesão, por sua vez, diminui e inibe a ocorrência de grandes deslizamentos (large slip).

6) No intervalo de torque de 29,4 a 39,2 N.m, as razões de amortecimento diminuem abruptamente com o aumento do torque, devido a redução da dissipação de energia que ocorre na interface da junta, proveniente da redução da intensidade de micro-deslizamentos, pois a área real de contato aumenta e com isto favorece o aumento de juntas adesivas. Neste intervalo, a razão de amortecimento da VJF, é maior que a da VJR, devido as juntas adesivas da VJF serem mais fortes, as quais acarretam maiores resistências a micro-deslizamentos, e conseqüentemente maiores perdas de energia.

7) A partir do torque de 39,2 N.m, as razões de amortecimento, mantém-se aproximadamente constantes e com valores baixos, devido a menor dissipação de energia que ocorre na interface da junta, proveniente da ocorrência ainda de muitos pequenos deslizamentos (very small slip), porém menos intensos.

5.5 DADOS TEÓRICOS - EXPERIMENTAIS

5.5.1 Amplitudes dos Deslocamentos Transversais $q(t)$

As simulações das amplitudes teórico-experimentais $q(t)$, foram possíveis graças a um programa específico, escrito em linguagem FORTRAN (Apendice C), e desenvolvido a partir da equação 3.64, dada por:

$$q(t) = X e^{-\xi \omega t} \text{sen}(\omega_d t + \varnothing)$$

onde ξ , ω , ω_d e \emptyset são valores conhecidos (obtidos experimentalmente)

Este programa foi implementado por um software de computação numérica de alta performance, "MATLAB", pertencente a "The Math Works Inc."

As simulações referentes às vigas, tiveram como finalidade, verificar a consistência do método utilizado, isto é, o decremento logarítmico, onde as amplitudes experimentais obtidas para os modelos reais, foram comparadas com as respectivas amplitudes teóricas-experimentais $q(t)$, dadas pelo modelo teórico de Kelvin-Voigt, para um determinado instante de tempo t .

5.5.1.1 Simulação referente a viga contínua: VCON-IM

A figura 5.32 através do registro gráfico deslocamento (mm) x tempo (s), ilustra a simulação de $q(t)$ referente a viga contínua. Vide apêndice C (programa específico e dados de entrada).

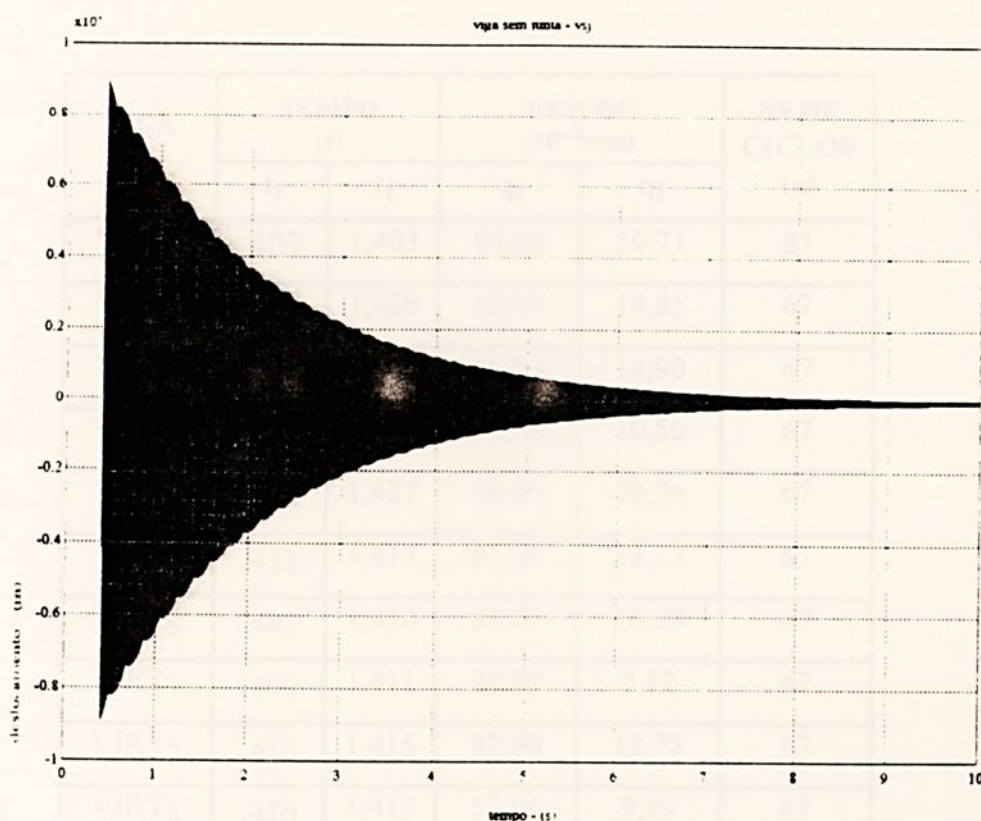


Figura 5.32 Simulação da VCON-IM: deslocamento x tempo

5.5.1.2 Simulação referente a viga com junta parafusada e superfície fresada: VJF-IM

As simulações referentes a VJF-IM, com o torque aplicado, variando de 9,8 N.m a 58,8 N.m, estão indicadas no Apêndice C (registros gráficos, programa específico e dados de entrada).

5.5.1.3 Simulação referente a viga com junta parafusada e superfície retificada: VJR-IM

As simulações referentes a VJR-IM, com o torque aplicado, variando de 9,8 N.m a 58,8 N.m, estão indicadas no Apêndice C (registros gráficos, programa específico e dados de entrada).

5.5.1.4 Amplitudes dos deslocamentos teóricos-experimentais $q(t)$ obtidas:

Os valores teórico-experimentais das amplitudes, no 1^o modo, são indicados na tabela 5.23, e foram obtidos através de manipulação do software MATLAB, sobre o referido programa desenvolvido para a expressão de $q(t)$. Estes valores correspondem aos picos inicial (q_i) e final (q_f) no intervalo de tempo analisado. (0,400 a 1,400 s aprox.).

VIGA	TEMPO (s)		DESLOC (10 ⁻³ mm)		Nº DE CICLOS (n)
	t_i	t_f	q_i	q_f	
VCON	.407	1,403	89,00	50,71	83
VJFT ₁	.423	1,428	86,00	14,85	67
VJFT ₂	.406	1,411	84,00	14,90	67
VJFT ₃	.411	1,416	73,00	10,50	67
VJFT ₄	.422	1,427	98,00	20,76	67
VJFT ₅	.412	1,417	81,00	25,75	67
VJFT ₆	.405	1,410	81,00	16,39	67
VJRT ₁	.406	1,411	29,00	8,52	67
VJRT ₂	.410	1,415	82,00	12,75	67
VJRT ₃	.410	1,415	57,00	9,29	67
VJRT ₄	.407	1,412	89,00	21,77	67
VJRT ₅	.408	1,413	86,00	21,72	67
VJRT ₆	.409	1,414	86,00	21,15	67

Tabela 5.23 Amplitudes dos deslocamentos teóricos-experimentais $q(t)$ obtidas para as vigas (valores picos)

5.5.2 Amplitudes dos Deslocamentos Transversais $\varnothing(x)$ - Simulações de $\varnothing(x)$

As simulações referentes a $\varnothing(x)$, (configurações modais), foram possíveis graças a um programa desenvolvido a partir da equação 3.28, dada por:

$$\varnothing(x) = A_5(\text{sen } h\eta x + \text{sen } \eta x) + A_6(\text{cos } h\eta x + \text{cos } \eta x)$$

e pela relação 3.33, dada por:

$$\frac{A_6}{A_5} = -\frac{\text{sen } h\eta\ell - \text{sen } \eta\ell}{\text{cos } h\eta\ell - \text{cos } \eta\ell}$$

As simulações referentes a $\varnothing(x)$ para o 1^o modo, tiveram como finalidade verificar a exatidão da equação 3.28, deduzida para $\varnothing(x)$.

5.5.2.1 Simulação referente a viga contínua: VCON-IM

A figura 5.33, ilustra a configuração modal obtida para a viga contínua no 1^o modo.

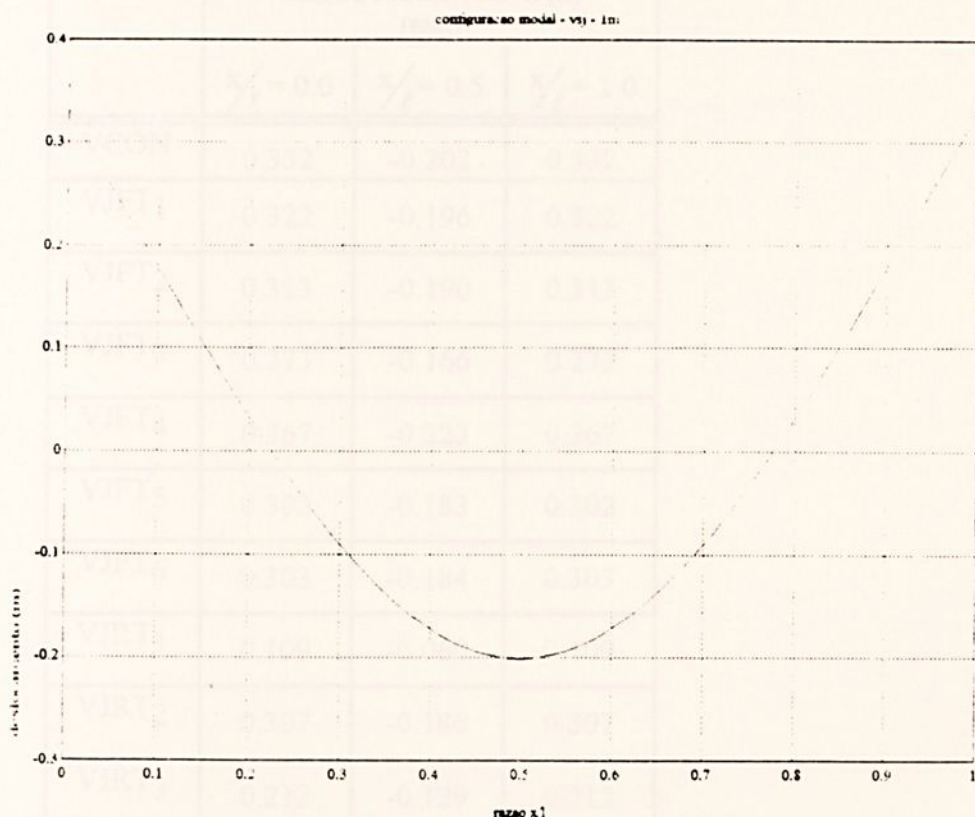


Figura 5.33 Simulação da VCON-IM: Configuração modal.

A figura 5.33, através do registro gráfico deslocamento (mm) x razão x/ℓ , ilustra a configuração modal obtida para a viga contínua no 1^o modo.

A razão x/ℓ , é um número puro (sem unidades), onde x, representa o deslocamento ou posição (mm) e ℓ , o comprimento da viga (mm).

5.5.2.2 Simulação referente a viga com junta parafusada e superfície fresada no 1º modo: VJF-IM

Os programas e dados necessários para as simulações (configurações modais), encontram-se no Apêndice C.

5.5.2.3 Simulação referente a viga com junta parafusada e superfície retificada no 1º modo: VJF-IM

Os programas e dados necessários para as simulações (configurações modais), encontram-se no Apêndice C.

5.5.2.4 Amplitudes dos deslocamentos teóricos-experimentais $\varnothing(x)$ obtidas

Os valores teóricos-experimentais das amplitudes $\varnothing(x)$, são indicados na tabela 5.24.

VIGA	DESLOCAMENTO $\varnothing(x)$ (mm)		
	$x/l = 0.0$	$x/l = 0.5$	$x/l = 1.0$
VCON	0.332	-0.202	0.332
VJFT ₁	0.322	-0.196	0.322
VJFT ₂	0.313	-0.190	0.313
VJFT ₃	0.273	-0.166	0.273
VJFT ₄	0.367	-0.223	0.367
VJFT ₅	0.302	-0.183	0.302
VJFT ₆	0.303	-0.184	0.303
VJRT ₁	0.109	-0.060	0.109
VJRT ₂	0.307	-0.186	0.307
VJRT ₃	0.212	-0.129	0.212
VJRT ₄	0.331	-0.201	0.331
VJRT ₅	0.320	-0.195	0.320
VJRT ₆	0.321	-0.195	0.321

Tabela 5.24 Amplitudes dos deslocamentos teóricos-experimentais $\varnothing(x)$ obtidas para as vigas.

5.6 RESULTADOS TEÓRICOS-EXPERIMENTAIS

5.6.1 Decrementos Logarítmicos (δ) e Amortecimentos (ξ) Teóricos-Experimentais

Utilizando-se os dados teóricos-experimentais da tabela 5.23 (q_i , q_f e n) obtemos para δ e ξ das vigas simuladas os seguintes valores indicados na tabela 5.25.

VIGA	DECREMENTO (δ)	AMORTECIMENTO (ξ)
VCON	.006783	.001079
VJFT ₁	.026264	.004180
VJFT ₂	.025786	.004104
VJFT ₃	.029007	.004617
VJFT ₄	.023239	.003699
VJFT ₅	.017095	.002720
VJFT ₆	.023866	.003798
VJRT ₁	.018318	.002915
VJRT ₂	.027810	.004426
VJRT ₃	.026995	.004296
VJRT ₄	.020946	.003334
VJRT ₅	.020421	.003250
VJRT ₆	.020960	.003336

Tabela 5.25 Resultados teóricos-experimentais: decrementos (δ) e amortecimentos (ξ)

5.6.2 Frequências Naturais de Vibrações da VCON

As frequências teóricas ω_n da viga contínua foram obtidas através das equações 3.30, 3.31, 3.32, deduzida anteriormente, e dadas por:

$$\omega_n = (\eta_n \ell)^2 \left(\frac{EI}{m\ell^4} \right)^{1/2}$$

onde $\eta_n \ell$, constante que depende das condições de contorno da viga e do modo natural de vibração.

Para as condições do ensaio (viga duplamente livre), obteve-se os seguintes valores para ω_n , indicados na tabela 5.26.

MODOS DE VIBRAÇÕES	VIGA CONTÍNUA	
	$(\eta_n \ell)^2$	ω_n (Hz)
1º M	22,37	82,64
2º M	61,67	227,83
3º M	120,90	446,64

Tabela 5.26 Frequências naturais de vibrações da viga contínua (frequências teóricas)

Para as condições da viga ensaiada o valor encontrado para a constante $\left(\frac{EI}{m\ell^4}\right)^{1/2}$ foi de 23,20 rad/s (vide apêndice B).

5.7 COMPARAÇÕES

5.7.1 Dados Experimentais versus Dados Teóricos-Experimentais

5.7.1.1 Amplitudes dos deslocamentos transversais $q(t)$

As amplitudes experimentais e teóricas-experimentais obtidas para as vigas no 1º modo, e correspondentes ao tempo $t \cong 1,400$ s, são indicadas e comparadas na tabela 5.27.

VIGA	DESLOCAMENTO (10^{-3} mm)		DESVIO (%)
	EXPERIMENTAL	TEÓRICO	
VCON	51,19	50,71	0,94
VJFT ₁	15,49	14,85	4,31
VJFT ₂	15,64	14,90	4,97
VJFT ₃	10,91	10,50	3,90
VJFT ₄	21,59	20,76	4,50
VJFT ₅	26,32	25,75	2,21
VJFT ₆	17,01	16,39	3,78
VJRT ₁	8,77	8,52	2,93
VJRT ₂	13,20	12,75	3,53
VJRT ₃	9,54	9,29	2,69
VJRT ₄	22,35	21,77	2,66
VJRT ₅	22,35	21,72	2,90
VJRT ₆	21,74	21,15	2,90

Tabela 5.27 Amplitudes experimentais $q(t)$ versus Amplitudes teóricas-experimentais $q(t)$ ($t \cong 1,400$ s)

Obs.: 1) Os valores teóricos-experimentais das amplitudes foram retirados das tabelas 5.16, 5.17 e 5.18.

Os valores experimentais dos deslocamentos q_f das vigas foram retirados das seguintes tabelas: tabela 5.16 (VCON); tabela 5.17 (VJF) e tabela 5.18 (VJR).

2) Os valores teóricos-experimentais dos deslocamentos q_f das vigas foram retirados da tabela 5.23.



5.7.2 Resultados Experimentais Versus Resultados Teóricos-Experimentais

5.7.2.1 Amortecimentos

Os amortecimentos experimentais e teóricos-experimentais obtidos para as vigas, no 1º modo, e correspondente ao intervalo de tempo de 0,400 a 1,400 s aproximadamente, são indicados e comparados na tabela 5.28.

VIGA	AMORTECIMENTO (ζ)		DESVIO (%)
	EXPERIMENTAL	TEÓRICO	
VCON	.001060	.001079	1,76
VJFT ₁	.004080	.004180	2,39
VJFT ₂	.003989	.004103	2,78
VJFT ₃	.004526	.004617	1,97
VJFT ₄	.003605	.003699	2,54
VJFT ₅	.002669	.002721	1,91
VJFT ₆	.003712	.003798	2,26
VJRT ₁	.002845	.002915	2,40
VJRT ₂	.004344	.004426	1,85
VJRT ₃	.004234	.004296	1,44
VJRT ₄	.003271	.003334	1,89
VJRT ₅	.003196	.003250	1,66
VJRT ₆	.003270	.003336	1,98

Tabela 5.28 Amortecimentos experimentais versus Amortecimentos teóricos-experimentais

Obs.: 1) Os valores dos amortecimentos experimentais foram retirados das seguintes tabelas: tabela 5.16 (VCON); tabela 5.17 (VJF) e tabela 5.18 (VJR).

2) Os valores dos amortecimentos teóricos-experimentais foram retirados da tabela 5.25.

5.7.2.2 Frequências naturais de vibrações da VCON

A tabela 5.29, ilustra e compara as frequências naturais de vibrações obtidas para a viga contínua.

MODOS DE VIBRAÇÕES	FREQUÊNCIAS (Hz)		DESVIO %
	EXPERIMENTAIS	TEÓRICAS	
1º M	83,98	82,64	1,60
2º M	226,56	227,83	0,56
3º M	443,36	446,64	0,74

Tabela 5.29 Frequências experimentais versus frequências teóricas da viga contínua

- Obs.: 1) Os valores das frequências experimentais foram retirados da tabela 5.4 e os teóricos da tabela 5.26.
- 2) Como os desvios obtidos foram pequenos, podemos concluir então, de uma maneira geral, que o desenvolvimento da equação de frequência (equação 3.29) correspondente à viga contínua foi correto, e que os valores experimentais obtidos para as constantes E, I e m da viga contínua foram satisfatórios.

CAPÍTULO 6 - COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Inicialmente no capítulo 1, referências e citações, são apresentadas e descritas sucintamente os trabalhos específicos e pertinentes ao tema da pesquisa - "comportamento dinâmico de juntas parafusadas", provenientes da pesquisa bibliográfica realizada, que por sinal foi importante no contexto geral deste trabalho, pois serviu de orientação e guia na realização do mesmo.

No capítulo 2, o significado e os tipos de amortecimentos existentes em sistemas oscilatórios, são descritos com a finalidade precisa de se entender e discernir posteriormente os tipos de amortecimentos envolvidos nos ensaios das vigas, que foi para a viga colada, "amortecimento material" e para as vigas com juntas "amortecimento material e estrutural".

No capítulo 3, através da teoria sobre vibração transversal livre de barras, inicialmente são deduzidas as expressões matemáticas para os deslocamentos transversais $Q(x)$ e $q(t)$, referentes a materiais elásticos. Posteriormente são deduzidas para materiais viscoelásticos as expressões referentes aos deslocamentos transversais $Q(x)$ e $q(t)$, obtidas também através da teoria de vibração transversal livre de barras e de um modelo que descreve o comportamento de materiais viscoelásticos conhecido como modelo de Kelvin-Voigt, o qual é constituído por dois parâmetros, uma mola e massa, e um amortecedor em série com o mesmo, representando a deformação E , e a viscosidade de deformação δ .

CAPÍTULO 6
COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Com relação a estas conclusões, pode-se dizer que:

- As funções $Q(x)$ e $q(t)$, são dadas por:

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\beta_n x) \quad (1)$$

- O deslocamento transversal total da barra, a todo instante t , é dado por:

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\beta_n x) e^{-\delta t} \sin(\omega_n t) \quad (2)$$

- As expressões deduzidas para $Q(x)$, para materiais elásticos, tanto para materiais elásticos quanto viscoelásticos, conforme equação 1.26, são as mesmas da mesma equação diferencial homogênea de 4ª ordem, equação 3.53.

- As expressões deduzidas para $q(t)$, para materiais elásticos, conforme equação 1.27, por si mesmas, são resultantes de equações diferenciais homogêneas de 2ª ordem diferentes, equações 3.54 e 3.55 respectivamente.

- A equação de frequência de viga colada é obtida através da função $Q(x)$, dada pela equação 1.26, e de condições específicas de contorno da viga.

- A expressão deduzida para $q(t)$, para materiais viscoelásticos, dada pela equação 1.53, é de natureza oscilatória, pois apresenta o produto de uma função exponencial $e^{-\delta t}$, por uma função harmônica $\sin(\beta t + \phi)$.

- No caso de amortecimento crítico, os coeficientes de α e β , em função do razão de amortecimento δ são dados por: $\alpha = \delta$ e $\beta = 0$.

- Assim como a figura 1.3, verifica-se, na figura 3.10, que o deslocamento $Q(x, t)$ é dado por: $Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\delta t} \sin(\omega_n t)$.

No capítulo 4, a finalidade de se utilizar fotografias, foi para a obtenção de melhores fluxos de procedimentos experimentais utilizados nos ensaios das vigas. Como resultado as vigas com juntas parafusadas ensaiadas, conforme ilustrado pela figura 4.4, as mesmas vigas submetidas às vigas ensaiadas por Wang e Lee (1971), foram com condições de fixação e carregamento superficiais diferentes.



CAPÍTULO 6 - COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Inicialmente no capítulo 1, referente a introdução, são apresentados e descritos sucintamente os trabalhos específicos e pertinentes ao tema da pesquisa - "comportamento dinâmico de juntas parafusadas", provenientes da pesquisa bibliográfica realizada, que por sinal foi importante no contexto geral deste trabalho, pois serviu de orientação e diretriz na realização do mesmo.

No capítulo 2, o significado e os tipos de amortecimentos existentes em sistemas oscilatórios, são descritos com a finalidade precípua de se entender e discernir posteriormente os tipos de amortecimentos envolvidos nos ensaios das vigas, que foi para a viga contínua, "amortecimento material", e para as vigas com juntas, "amortecimento material e estrutural".

No capítulo 3, através da teoria sobre vibração transversal livre de barras, inicialmente são deduzidas as expressões matemáticas para os deslocamentos transversais $\varnothing(x)$ e $q(t)$, referentes a materiais elásticos. Posteriormente são deduzidas para materiais viscoelásticos, as expressões referentes aos deslocamentos transversais $\varnothing(x)$ e $q(t)$, obtidas também através da teoria de vibração transversal livre de barras e de um modelo que descreve o comportamento de materiais viscoelásticos, conhecido como modelo de Kelvin-Voigt, o qual é constituído por dois parâmetros, mola e massa, e com a tensão atuante sobre o corpo, proporcional a deformação ϵ , e a velocidade de deformação $\dot{\epsilon}$.

Com relação a estas expressões podemos verificar:

- As funções $\varnothing(x)$ e $q(t)$ são funções dependentes da posição x e do tempo t .
- O deslocamento transversal total da barra, é dado por $v = \varnothing(x) \cdot q(t)$.
- As expressões deduzidas para $\varnothing(x)$, foram idênticas, tanto para materiais elásticos quanto viscoelásticos, conforme equação 3.26, pois são resultantes da mesma equação diferencial homogênea de 4ª ordem, equação 3.53.
- As expressões deduzidas para $q(t)$, foram diferentes, conforme equação 3.21, pois as mesmas, são resultantes de equações diferenciais homogêneas de 2ª ordem diferentes, equações 3.19 e 3.40 respectivamente.
- A equação de frequência da viga contínua é obtida através da função $\varnothing(x)$, dada pela equação 3.26, e de condições específicas de contorno da viga.
- A expressão deduzida para $q(t)$, para materiais viscoelásticos, dada pela equação 3.53, é de natureza oscilatória, pois apresenta o produto de uma função exponencial $e^{\alpha t}$, por uma função harmônica $\text{sen}(\beta t + \varnothing)$.
- No caso de amortecimento crítico, os coeficientes de α e β , em função da razão de amortecimento ξ são dados por $-\omega\xi$ e $\omega(\xi^2 - 1)^{1/2}$.

Analisando a figura 3.8, verificamos que a função decremento δ é crescente no intervalo $0 \leq \xi < 1$ e $\lim_{\xi \rightarrow 1} \delta = \infty$.

No capítulo 4, a finalidade de se utilizar fotografias, foi com o intuito de melhor ilustrar os procedimentos experimentais utilizados nos ensaios das vigas. Com relação às vigas com juntas parafusadas ensaiadas, conforme ilustrada pela figura 4.4, as mesmas foram semelhantes às vigas utilizadas por Wang e Sas [12], porém com condições de pré-carga e rugosidades superficiais diferentes.

Conforme ilustra a figura 4.10, as vigas foram suspensas no ar, através de dois fios de aço, localizados nas extremidades das vigas, com a finalidade de eliminar a influência do suporte sobre as vigas ensaiadas. A junta parafusada, se localiza no ponto médio da viga duplamente livre figura 4. O ensaio de flexão utilizado para determinar o módulo de elasticidade experimental da viga, referente ao aço 1020, foi satisfatório, em face do valor obtido para o mesmo ser aceitável, isto é, $E = 2,00 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$.

No capítulo 5, podemos verificar inicialmente que o elemento junta parafusada, funciona como um grande dissipador de energia, pois comparando-se os registros gráficos obtidos para as vigas com junta, conforme ilustram as figuras 5.3 a 5.14, com o registro da viga contínua, figura 5.2, verificamos que as quedas de amplitudes dos deslocamentos em função do tempo, são mais acentuadas para as vigas com juntas e que ocorrem num intervalo de tempo menor. O tempo de duração dos ensaios das vigas foi correspondente a 10s.

As amplitudes dos deslocamentos experimentais das vigas, são relativas aos deslocamentos dados pelo ponto de fixação do acelerômetro na viga ($x/\ell = 0,16$), figura 4.16, no intervalo de tempo de 0,400s a 1,500s aproximadamente. As amplitudes obtidas no 1º modo, tabelas 5.4 a 5.16, são provenientes das filtragens realizadas nos respectivos spectrums de frequências das vigas, através de um filtro, tipo passa-banda, conforme ilustram as figuras 5.15 a 5.27. Este intervalo de tempo foi escolhido pelos seguintes motivos:

- O tempo inicial $t_0 \cong 0,400\text{s}$, foi adotado, porque o início do ensaio se dava para $t_0 > 0\text{s}$.

- O tempo final $t_f \cong 1,500\text{s}$, foi adotado, porque após este tempo, as amplitudes obtidas para as vigas com juntas, foram muito pequenas e com isso factíveis de interferência de ruídos provenientes da rede elétrica.

- Neste intervalo de tempo, de aproximadamente um (1) segundo, se obteve um número razoável de ciclos n , para as vigas ensaiadas, conforme ilustram as tabelas 5.20 (VCON); 5.21 (VJF) e 5.22 (VJR).

Com relação às forças de excitações aplicadas nas vigas, podemos verificar através das tabelas 5.1 (VCON); 5.2 (VJF) e 5.3 (VJR), que as mesmas apesar de variarem num intervalo de 1,00 Kg a 1,50 Kg aproximadamente, não ocasionaram alterações significativas nas amplitudes iniciais q das vigas, conforme constata as tabelas 5.20, 5.21 e 5.22. A intenção em se trabalhar com forças de intensidades conhecidas e constantes foi no sentido de se evitar possíveis alterações no comportamento dinâmico das juntas ensaiadas.

Com relação às simulações realizadas referentes às expressões deduzidas para $q(t)$, dada pela equação 3.53, e $\varnothing(x)$, dada pela equação 3.26, expressões estas, provenientes do modelo adotado de Kelvin-Voigt, figura 3.4, podemos concluir:

- Que o modelo adotado comportou-se de maneira satisfatória, conforme atestam as amplitudes teóricas $q(t)$, obtidas no intervalo de 0,400s a 1,500s. Por exemplo, para o tempo $t \cong 1,400\text{s}$, as amplitudes teóricas obtidas foram próximas das experimentais, com desvios da ordem de 1% a 5%, conforme observado na tabela 5.27.

No apêndice C, são mostrados os programas, dados de entradas e simulações (registros gráficos) referentes as amplitudes teóricas $q(t)$ das vigas.

- A expressão deduzida para $\varnothing(x)$ é correta, conforme atestam os valores obtidos para $\varnothing(x)$, na tabela 5.24. Por exemplo a figura 5.33, ilustra a configuração modal obtida para a viga contínua, a qual está de acordo com a configuração modal prevista para a viga livre-livre, figura 3.3.

No apêndice C, são mostrados os programas, dados de entradas e simulações (registros gráficos), referentes às amplitudes teóricas $\varnothing(x)$ das vigas.



Com relação às razões de amortecimentos experimentais, as mesmas foram obtidas no 1º modo, através do método do decremento logarítmico, conforme ilustram as tabelas 5.20 a 5.22. De acordo com estas tabelas e figura 5.31, podemos concluir:

- O efeito das juntas parafusadas sobre as razões de amortecimentos foi bastante considerável.

- A razão de amortecimento provou ser dependente do torque de aperto dado na junta.

- A razão de amortecimento provou ser dependente do acabamento superficial dado na superfície da junta.

- No intervalo de torque 9,8 a 19,6 N.m as razões de amortecimento aumentam consideravelmente, devido a presença de grandes deslizamentos (large slip) a baixas pressões.

- No intervalo de torque 19,6 a 29,4 N.m, não há variação acentuada das razões de amortecimentos. Neste intervalo, as razões de amortecimentos mantêm-se elevadas, devido a presença de muitos micro-deslizamentos (very small slip).

- No intervalo de torque 29,4 a 39,2 N.m as razões de amortecimentos diminuem consideravelmente, devido a redução da intensidade de micro-deslizamentos.

- No intervalo de torque 39,2 a 58,8 N.m, as razões de amortecimentos variaram muito pouco.

De acordo com as figuras 5.29 e 5.30, podemos concluir, com relação às frequências naturais experimentais obtidas para as vigas:

- O efeito do torque de aperto na junta sobre estas frequências, é insignificante.

- O efeito da junta parafusada sobre estas frequências, é bastante significativo para frequências do 1º e 3º modo, e desprezível para as do 2º modo.

- O efeito do acabamento superficial dado na superfície da junta sobre estas frequências, não é significativo.

Com relação ao método utilizado para calcular as razões de amortecimentos ξ das vigas, isto é, o decremento logarítmico δ , o mesmo foi possível, graças ao emprego dos softwares especializados de aquisição de dados AQDADOS, e de manipulação de dados, SISDIN, da Linx Tecnologia Eletrônica.

O método provou ser simples, porém trabalhoso, e a sua precisão se relaciona com a precisão do acelerômetro, e a velocidade de aquisições de sinais. No ensaio realizado, a precisão do acelerômetro utilizado foi de 0,0005 mm, e a velocidade de coleta de sinais de 2,0 Mhz.

Os valores obtidos para as razões de amortecimentos das vigas ensaiadas no 1º modo, foram satisfatórios. As razões de amortecimentos no 2º e 3º modo, não foram obtidas, por problemas técnicos de filtragens de frequências mais elevadas, devido a problemas de modulações de sinais.

DESCRIÇÃO DOS EQUIPAMENTOS UTILIZADOS NA PARTE EXPERIMENTAL

Na montagem das superfícies das juntas:

- Fresadora Universal, marca NATAI, modelo N6 65.
- Retífica, marca MELLO, modelo AM7-4.
- Brochadeira de coordenadas, marca FICKERT WNFV, modelo 3806 400 x 630.
- Rugosímetro analógico, marca SURTRONIC, com faixa de leitura até 25,0 μ m.

Na calibração da célula de carga:

- Indicador digital para transdutores, marca INTERFACE, modelo IM-2.
- Ponte amplificadora para extensometria, marca INTERFACE, modelo AB-120/50.
- Transdutor, marca INTERFACE, modelo 10.050, capacidade de carga até 50 Kg.

Na ensaio de deflexão das vigas:

- Máquina Universal de ensaio de tração e compressão, marca MOHR-FEDERHAFF-LOSENHAUSEN.
- Relógio comparador, marca STARRETT, com faixa de medição de 0,01 a 25 mm, e com precisão de 0,01 mm.
- Base magnética, marca METAL TOYO.

APENDICE A

Equipamentos utilizados na bancada de instrumentação:

- Acelerômetro piezoeletrico, KD-35, marca ROBOTRON, com faixa de utilização de 0,0032 m/s² até 5,1 mm e com precisão de 0,0005 mm.
- Analisador de Vibração, marca ROBOTRON, contendo: amplificador de sinais, filtro, frequencímetro, com faixa de utilização de 1 Hz a 10 KHz.
- Ponte amplificadora para extensometria, marca INTERFACE, modelo AB-120/50.
- Placa conversora analógico digital, modelo CAD1230, da Lixa Tecnologia Eletrônica.
- Microcomputador, marca ITALTEC, tipo PC-XT.

Softwares utilizados:

- AODAGOS, Software de aquisição de dados analógicos da Lixa.



DESCRIÇÃO DOS EQUIPAMENTOS UTILIZADOS NA PARTE EXPERIMENTAL

Na usinagem das superfícies das juntas:

- Fresadora Universal, marca NATAL, modelo NS 65.
- Retífica, marca MELLO, modelo AMY-4.
- Broqueadeira de coordenadas, marca HECKERT WMW, modelo BKOE 400 x 630.
- Rugosímetro analógico, marca SURTRONIC, com faixa de leitura até 30,0 um.

Na calibração da célula de carga:

- Indicador digital para transdutores, marca INTERFACE, modelo IM-2.
- Ponte amplificadora para extensometria, marca INTERFACE, modelo AB-120/350.
- Transdutor, marca INTERFACE, modelo ULC50, capacidade de carga até 50 Kg.

No ensaio de deflexão das vigas:

- Máquina Universal de ensaio de tração e flexão, marca MOHR-FEDERHAFF-LOSENHAUSEN.
- Relógio comparador, marca STARRET, com faixa de utilização de 0,01 a 25 mm, e com precisão de 0,01 mm.
- Base magnética, marca MITUTOYO.

Equipamentos utilizados na bancada de instrumentação:

- Acelerômetro piezoelétrico, KD-35, marca ROBOTRON, com faixa de utilização de 0,0032 mm até 0,1 mm e com precisão de 0,0005 mm.
- Analisador de Vibrações, marca ROBOTRON, contendo: amplificador de sinais; filtro; frequencímetro, com faixa de utilização de 1 Hz a 10 Khz.
- Ponte amplificadora para extensometria, marca INTERFACE, modelo AB-120/350.
- Placa conversora analógica digital, modelo CAD12/36, da Linx Tecnologia Eletrônica.
- Microcomputador, marca ITAUTEC, tipo PC-XT.

Softwares utilizados:

- AQDADOS: Software de aquisição de dados analógicos da Linx.



- SISIDN: Software de análise e manipulação de sinais da Linx.
- MATLAB: Software de computação numérica de alta performance da The Mathworks, Inc.

Equipamentos utilizados na bancada pneumática:

- Compressor de ar
- Unidade de manutenção, marca FESTO, com faixa de utilização de pressão até 16 bar.
- Distribuidor de ar, marca FESTO, idem de 2,8 a 8,0 bar.
- Válvula 3/2 vias, duplo piloto, marca FESTO, idem de 2,8 a 8,0 bar.
- Válvula 3/2 vias, fim de curso, marca FESTO, idem de 2,8 a 8,0 bar.
- Válvula 3/2 vias, gatilho, marca FESTO, idem de 2,8 a 8,0 bar.
- Cilindro de ação simples, marca FESTO, com faixa de utilização de pressão de até 12,0 bar.

Equipamentos utilizados no torque do parafuso:

- Torquímetro manual, marca BELZER, com capacidade de até 6 Kgfm.
- Chaves de boca.

APENDICE B



EQUAÇÃO DA LÍNEA ELÁSTICA - SNEYDY [8]

Para a viga simplesmente apoiada (Fig. 4.9), temos:

Reações na extremidades da viga:

$$R_1 = R_2 = \frac{Wl}{2} = \frac{Q}{2}$$

O momento entre $x = 0$ e $x = \frac{l}{2}$ é:

$$M = \left(\frac{Wl}{2} - \frac{Q}{2} \right) x = \frac{Wx^2}{2}$$

A energia de deformação para a viga inserida é o dobro da energia para a metade da viga, desprezando-se o deslocamento direto, isto é,

$$U = 2 \int_0^{l/2} \left(\frac{M^2}{2EI} \right) dx$$

A deflexão no centro da viga é dada por:

$$y_{\text{max}} = \frac{2^3}{60} \quad (\text{Teorema de Castiglione})$$

Portanto:

$$y_{\text{max}} = \frac{2}{3} \int_0^{l/2} \left(\frac{2M^2}{2EI} \right) dx = \frac{2}{EI} \int_0^{l/2} M^2 dx$$

APENDICE B

Resolvendo esta integral, obtemos:

$$y_{\text{max}} = \frac{2}{EI} \int_0^{l/2} \left(\frac{3Wx^4}{32} + \frac{Qx^4}{48} \right) dx$$

Obtém-se:

$$W = \gamma_{\text{al}} A = \gamma_{\text{al}} b h$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

2) Dados da viga construída:

$$\gamma_{\text{al}} = 28.500 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2} \quad (\text{Para o alumínio})$$

$$m = 4,81 \text{ kg}$$

$$b = 28,2 \text{ mm (largura)}$$

$$h = 16 \text{ mm (altura total)}$$

$$\gamma_{\text{al}} \times g = 280 \text{ N/cm}^3 \Rightarrow M = 784 \text{ N}$$

EQUAÇÃO DA LINHA ELÁSTICA - Shigley [8]

Para a viga simplesmente apoiada (Fig. 4.9), temos:

Reações na extremidades da viga:

$$R_1 = R_2 = \frac{W\ell}{2} + \frac{Q}{2}$$

O momento entre $x = 0$ e $x = \ell/2$, é:

$$M = \left(\frac{W\ell}{2} + \frac{Q}{2} \right) X - \frac{Wx^2}{2}$$

A energia de deformação para a viga inteira é o dobro da energia para a metade da viga, desprezando-se o cisalhamento direto, isto é,

$$U = 2 \int_0^{\ell/2} \left(\frac{M^2}{2EI} \right) dx$$

A deflexão no centro da viga é dada por:

$$y_{\max} = \frac{\partial U}{\partial Q} \quad (\text{Teorema de Castigliano}).$$

Portanto:

$$y_{\max} = 2 \int_0^{\ell/2} \left(\frac{2M}{2EI} \frac{\partial M}{\partial Q} \right) dx = \frac{2}{EI} \int_0^{\ell/2} \left(M \frac{\partial M}{\partial Q} \right) dx$$

Resolvendo esta integral, obtemos:

$$y_{\max} = \frac{1}{EI} \left(\frac{5W\ell^4}{384} + \frac{Q\ell^3}{48} \right)$$

Obs.: 1) Fórmulas

$$W = \gamma_{\text{aço}} A = \gamma_{\text{aço}} bh$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12}$$

2) Dados da viga contínua

$$\gamma_{\text{aço}} = 76.500 \frac{\text{N}}{10^9 \text{ mm}^3} \quad (\text{Peso Específico})$$

$$m = 4,81 \text{ kg.}$$

$$b = 38,2 \text{ mm (largura)}$$

$$h = 16 \text{ mm (espessura)}$$

$$Q = 80 \text{ Kgf} = 80 \times 9,8 \text{ N} = 784 \text{ N}$$

PROGRAMA: PEROSTAS EM AMPLITUDES DE DESLOCAMENTOS PARA VCON-IM

```

c/velocidade m
var ca=2+sqrt(5)/10
x=0:0.01:1
coef=ca*cos(1);
g=ca*(sin(2*coef)+sin(coef))-1.0178*(cos(2*coef)+cos(coef));
plot(x,g);
pause;
w0=omega*sqrt(1-ca^2);
qwd0=q0*cos(w0*t);
w=qwd0/exp(qwd0);
p=exp(-t/tau);
k1=sin(a);
k2=cos(a);
k=sqrt(1-q1^2)/p;
kx=(k-C2-k1)/(k2+k1);
p=atan(kx);
t=0:dT:1;
w0=w0+omega;
q1=q1+omega;
q0=exp(qwd0)+sin(w0);
plot(t,q);
end

```

APENDICE C

EPITURA DOS DADOS DE ENTRADA PARA A VCON-IM

```

l=1;
xi=1;
m=4.8;
w=200;
a=4.75;
a2=1.63;
q0=0.010501;
tau=0.407;
H=1.403;
qmax=0.0059;
d0=0.01;
tau2=0.407;
end

```

PROGRAMA: RESPOSTAS EM AMPLITUDES DE DESLOCAMENTOS PARA VCON-IM

```

c:\matlab\joao.m
wn= eta^2*sqrt(ei/m)/1^2
x1= 0:0.01:1;
coef= eta*x1;
fi= a5*((sinh(coef) + sin(coef)) -1.0178*(cosh(coef)+cos(coef)));
plot(x1,fi);
pause;
wd=wn*sqrt(1-psi^2);
qwt0=-psi*wn*t0max;
x=qmax/(exp(qwt0))
a=wd*t0max;
k1=sin(a);
k2=cos(a);
k=sqrt(1-psi^2)/psi;
kk=(k*k2-k1)/(k2+k*k1);
psi=atan(kk);
t=t0:dt:tf;
wtp=wd*t+psi;
qwt=-psi*wn*t;
q=x*exp(qwt).*sin(wtp);
plot(t,q);
end;

```

LEITURA DOS DADOS DE ENTRADA PARA A VCON-IM

```

l=1;
x1=1;
m=4.8;
ei=2600;
eta=4.730;
a5=-.1631;
psi=.0010601;
t0=0.407;
tf=1.403;
qmax=.000089;
dt=.0010;
tomax=0.407;
end;

```

**PROGRAMA: RESPOSTAS EM AMPLITUDES DE DESLOCAMENTOS PARA VJF-IM E
VJR-IM**

```

c:\matlab\vrff.m
x1= 0:0.01:1;
coef= eta*x1;
fi= a5*((sinh(coef) + sin(coef))-1.0178*(cosh(coef)+cos(coef)));
plot(x1,fi);
pause;
wd=wn*sqrt(1-qsq^2);
qwt0=-qsq*wn*t0max;
x=qmax/(exp(qwt0))
a=wd*t0max;
k1=sin(a);
k2=cos(a);
k=sqrt(1-qsq^2)/qsq;
kk=(k*k2-k1)/(k2+k*k1);
psi=atan(kk);
t=t0:dt:tf;
wtp=wd*t+psi;
qwt=-qsq*wn*t;
q=x*exp(qwt).*sin(wtp);
plot(t,q);
end;

```

LEITURA DOS DADOS DE ENTRADA PARA A VJF-IM

```

c:\matlab\df1.m
wn=429.5122;
l=1.0;
x1=1.0;
eta=4.730;
a5=-0.1582;
qsq=.004080148;
t0=.423;
tf=1.428;
qmax=0.000086;
dt=0.0010;
t0max=0.423;
end;

```



```
c:\matlab\df2.m
wn=429.5122;
l=1.0;
x1=1.0;
eta=4.730;
a5=-0.1536;
qsi=.003988757;
t0=.406;
tf=1.411;
qmax=0.000083;
dt=0.0010;
t0max=0.406;
end;
```

```
c:\matlab\df3.m
wn=429.5122;
l=1;
x1=1.0;
eta=4.730;
a5=-0.1343;
qsi=.004525545;
t0=.411;
tf=1.416;
qmax=0.000073;
dt=0.0010;
t0max=0.411;
end;
```

```
c:\matlab\df4.m
wn=429.5122;
l=1.0;
x1=1.0;
eta=4.730;
a5=-0.1805;
qsi=.003605200;
t0=.422;
tf=1.427;
qmax=0.000098;
dt=0.0010;
t0max=0.422;
end;
```

LEITURA DOS DADOS DE ENTRADA PARA A VIB-IM



```
c:\matlab\df5.m
wn=429.5122;
l=1.0;
x1=1.0;
eta=4.730;
a5=-0.1482;
qsi=.002668601;
t0=.412;
tf=1.417;
qmax=0.000081;
dt=0.0010;
t0max=0.412;
end;
```

```
c:\matlab\df6.m
wn=429.5122;
l=1.0;
x1=1.0;
eta=4.730;
a5=-0.1486;
qsi=.003711538;
t0=.405;
tf=1.410;
qmax=0.000081;
dt=0.0010;
t0max=0.405;
end;
```

LEITURA DOS DADOS DE ENTRADA PARA A VJR-IM

```
c:\matlab\dr1.m
wn=429.5122;
l=1.0;
x1=1.0;
eta=4.730;
a5=-0.0533;
qsi=.002845406;
t0=.406;
tf=1.411
qmax=0.000029;
dt=0.0010;
t0max=0.406;
end;
```



```
c:\matlab\dr2.m
wn=429.5122;
l=1.0;
x1=1.0;
eta=4.730;
a5=-0.1506;
qsi=.004343818;
t0=.410;
tf=1.415;
qmax=0.000082;
dt=0.0010;
t0max=0.410;
end;
```

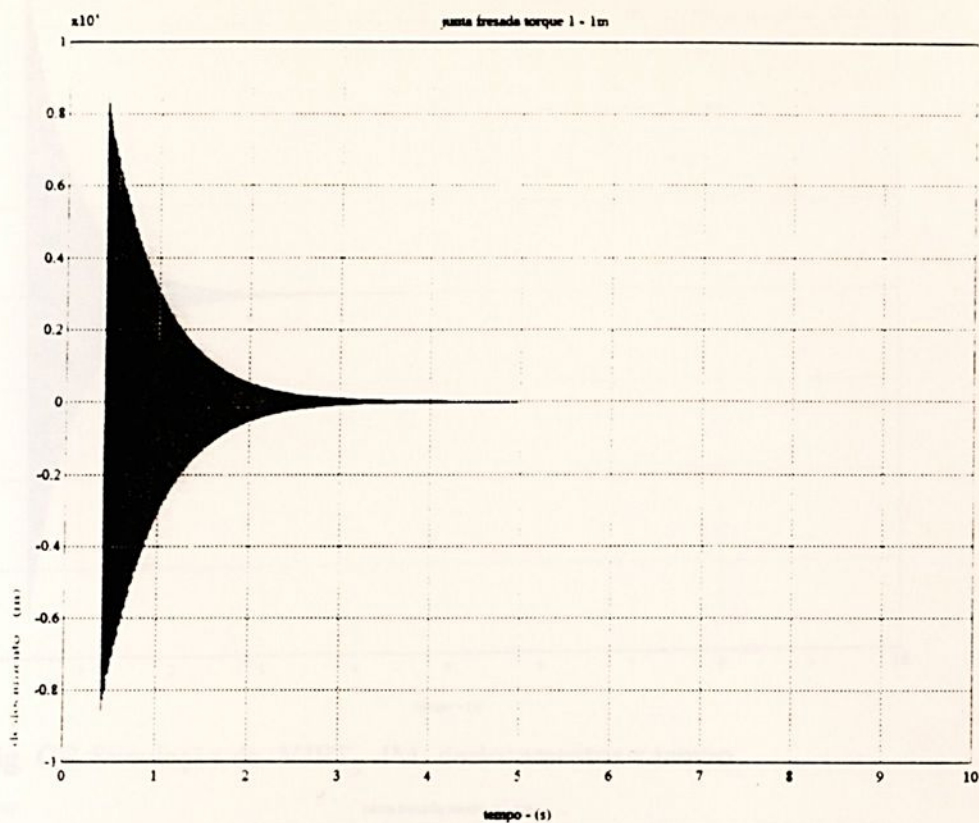
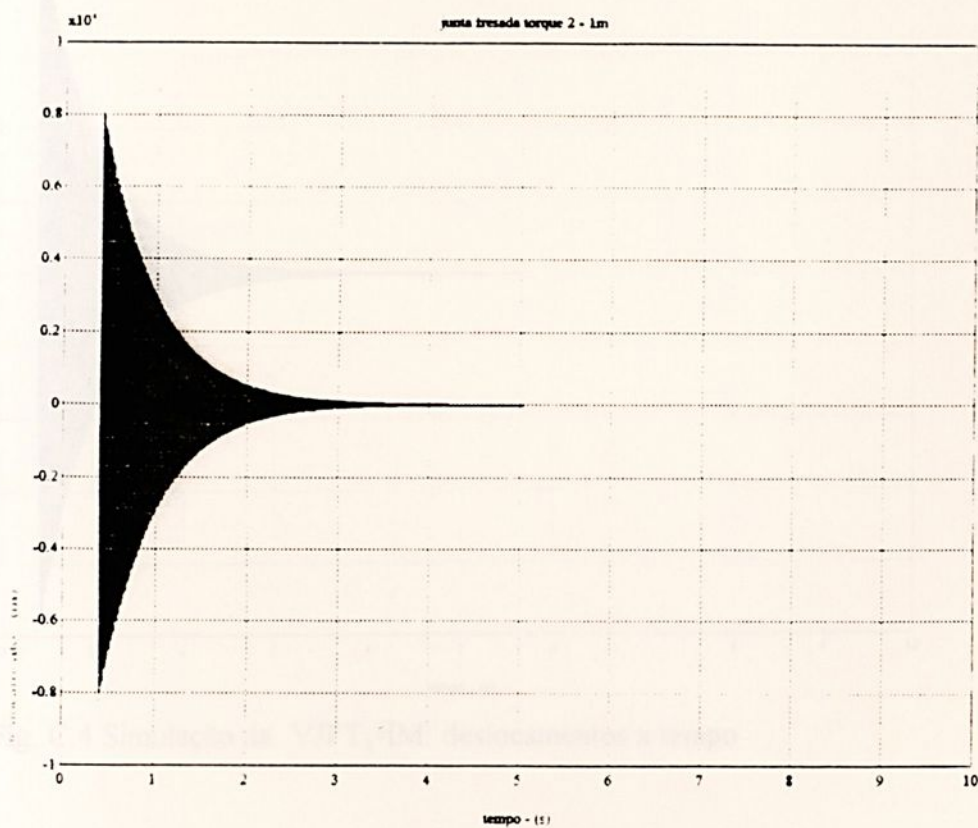
```
c:\matlab\dr3.m
wn=429.5122;
l=1.0;
x1=1.0;
eta=4.730;
a5=-0.1039;
qsi=.004233878;
t0=.410;
tf=1.415;
qmax=0.000057;
dt=0.0010;
t0max=0.410;
end;
```

```
c:\matlab\dr4.m
wn=429.5122;
l=1.0;
x1=1.0;
eta=4.730;
a5=-0.1624;
qsi=.003270710;
t0=.407;
tf=1.412;
qmax=0.000089;
dt=0.0010;
t0max=0.407;
end;
```

```
c:\matlab\dr5.m
wn=429.5122;
l=1;
x1=1;
eta=4.730;
a5=-.1572;
qsi=.003195878;
t0=.408;
tf=1.413;
qmax=.000086;
dt=.0010;
t0max=0.408;
end;
```

```
c:\matlab\dr6.m
wn=429.5122;
l=1;
x1=1;
eta=4.730;
a5=-.1578;
qsi=.003270025;
t0=0.409;
tf=1.414;
qmax=0.000086;
dt=0.0010;
t0max=.400;
end;
```



SIMULAÇÕES REFERENTES ÀS AMPLITUDES TEÓRICAS $q(t)$:Fig. C.1 Simulação da VJFT₁-IM: deslocamentos x tempoFig. C.2 Simulação da VJFT₂-IM: deslocamentos x tempo

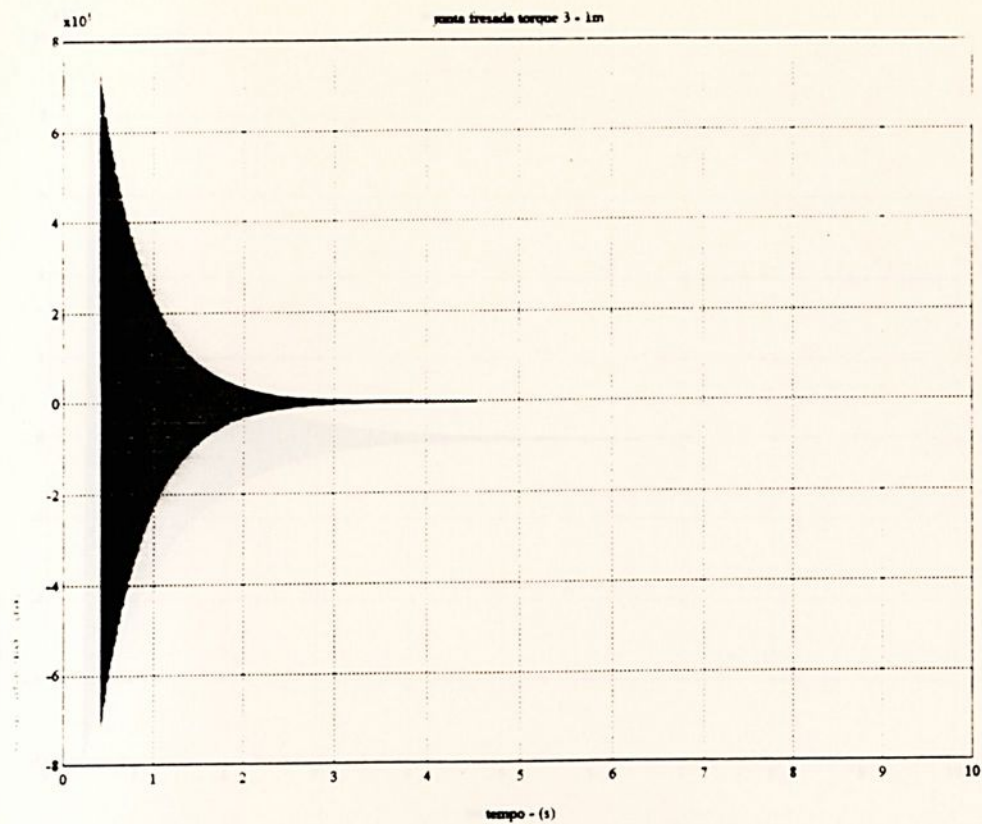


Fig. C.3 Simulação da VJFT₃-IM: deslocamentos x tempo

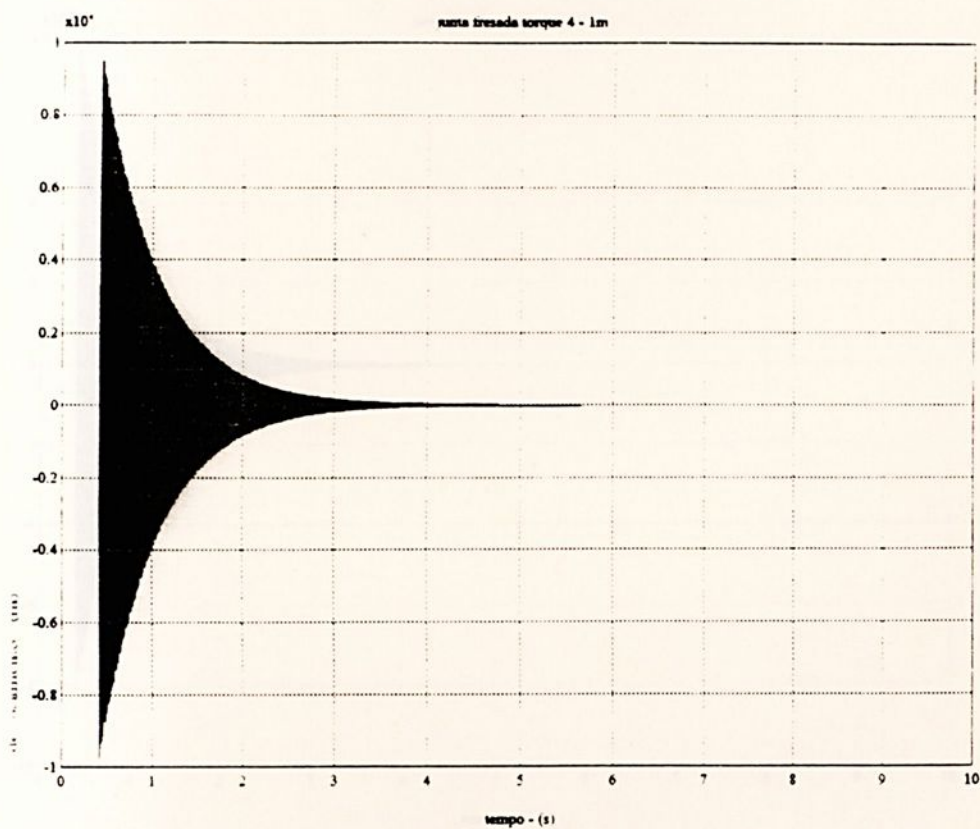


Fig. C.4 Simulação da VJFT₄-IM: deslocamentos x tempo

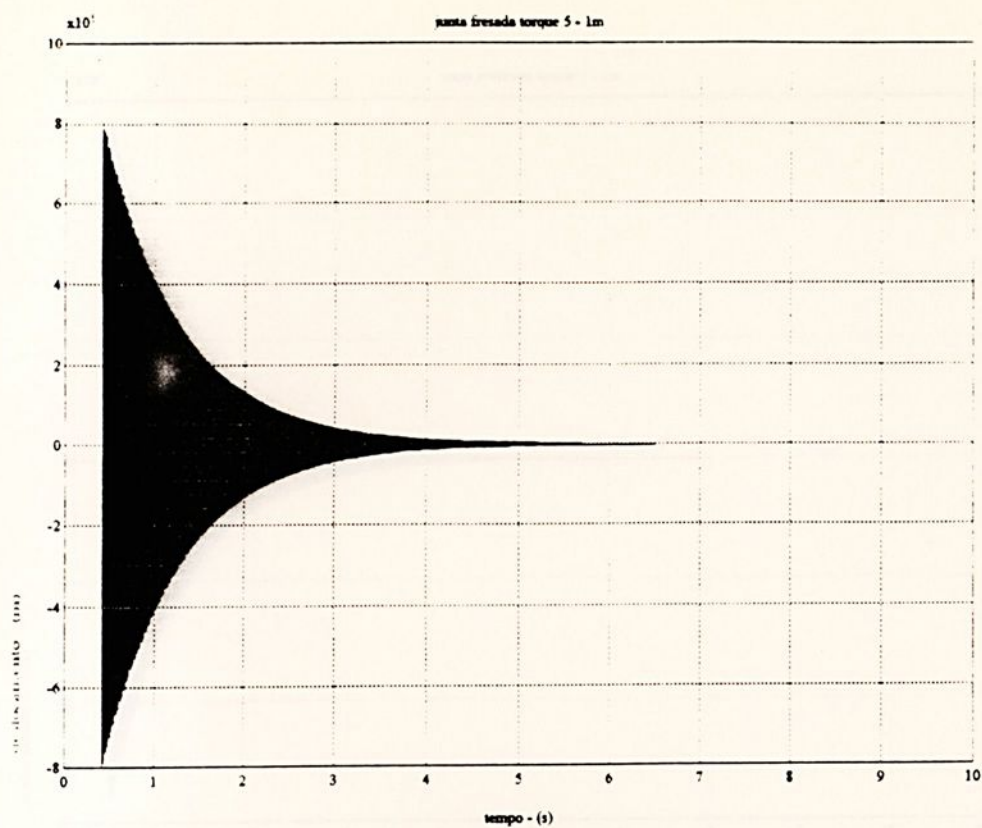


Fig. C.5 Simulação da VJFT₅-IM: deslocamentos x tempo

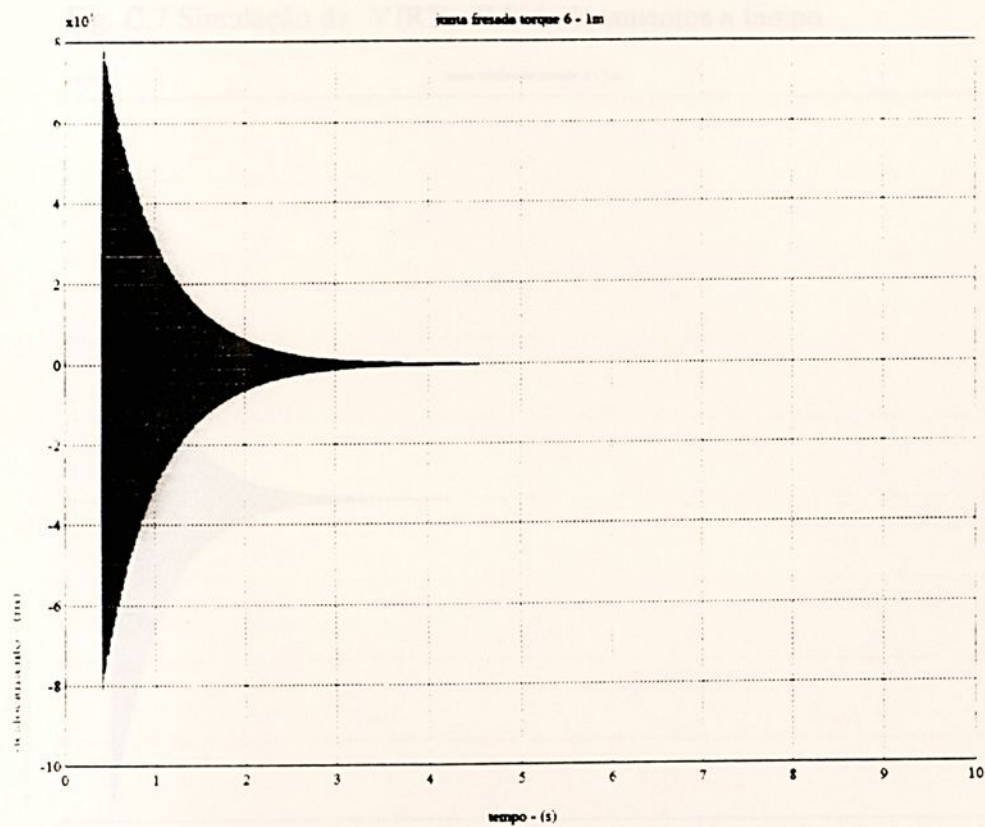


Fig. C.6 Simulação da VJFT₆-IM: deslocamentos x tempo

Fig. C.8 Simulação da VJFT₇-IM: deslocamentos x tempo

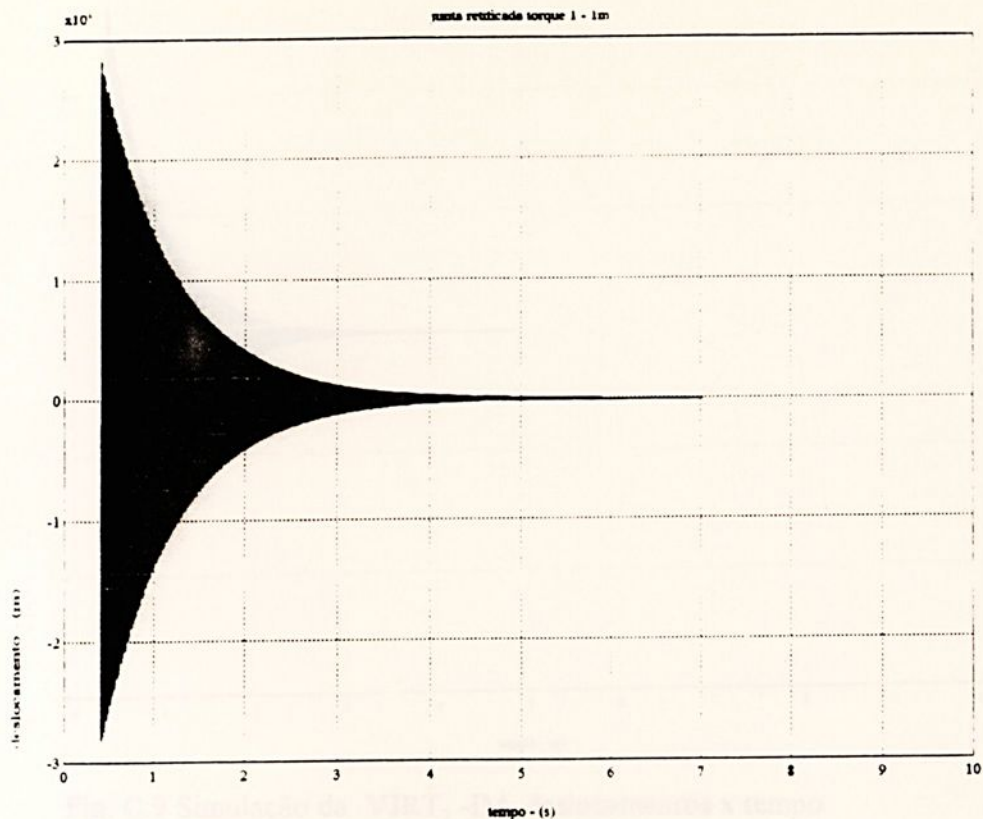


Fig. C.7 Simulação da VJRT₁-IM: deslocamentos x tempo

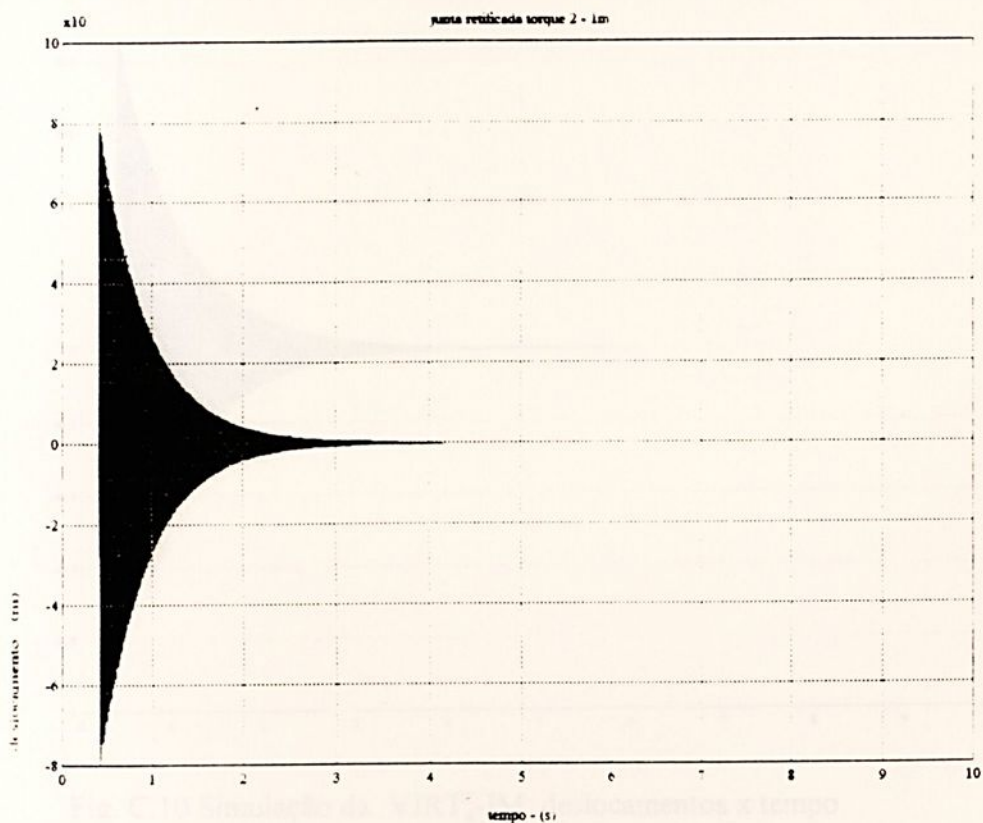


Fig. C.8 Simulação da VJRT₂-IM: deslocamentos x tempo

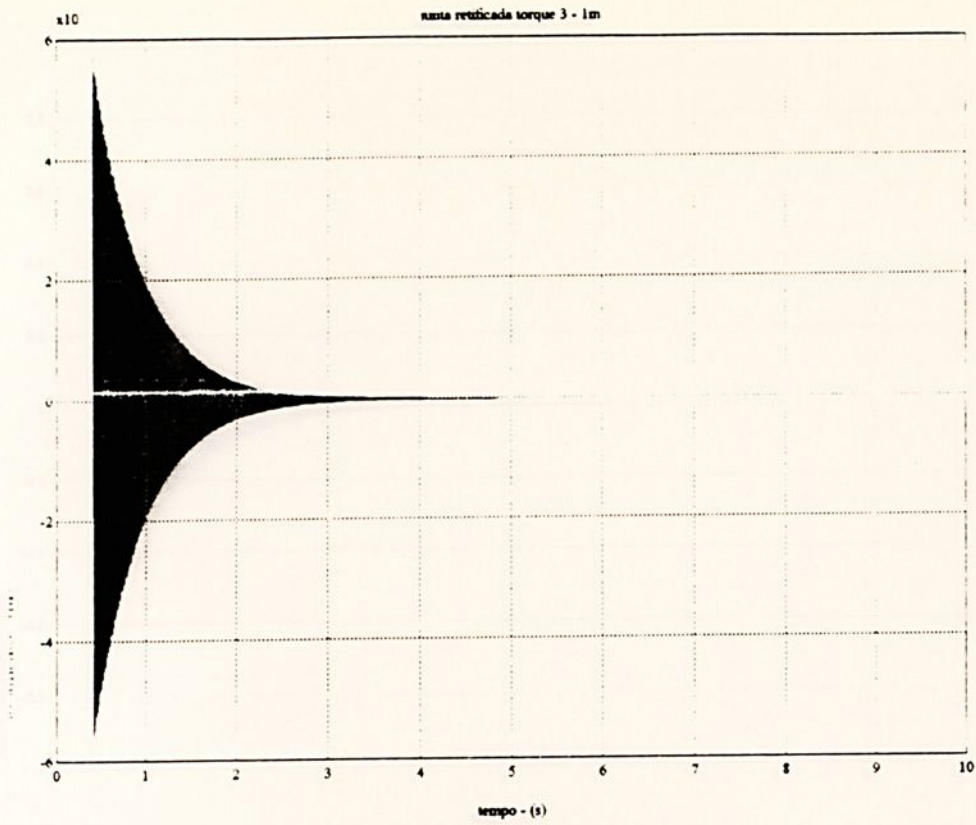


Fig. C.9 Simulação da VJRT₃-IM: deslocamentos x tempo

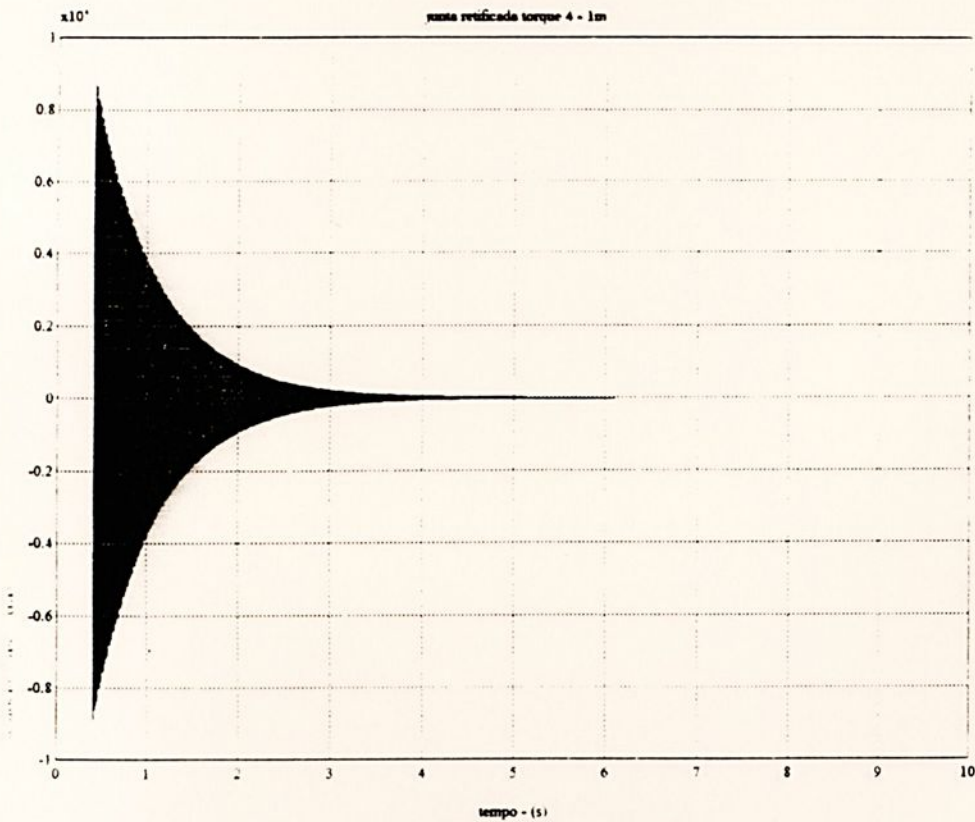


Fig. C.10 Simulação da VJRT₄-IM: deslocamentos x tempo

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
 INSTITUTO DE FÍSICA
 BIBLIOTECA

000251

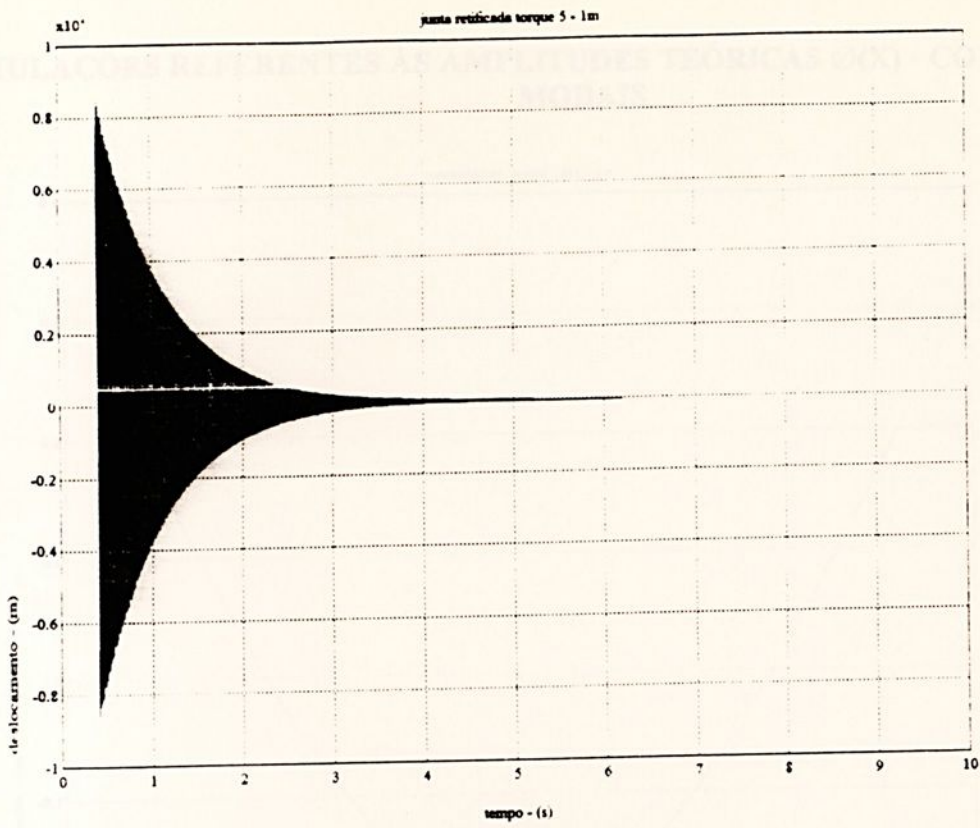


Fig. C.11 Simulação da $VJRT_5$ -IM: deslocamentos x tempo.

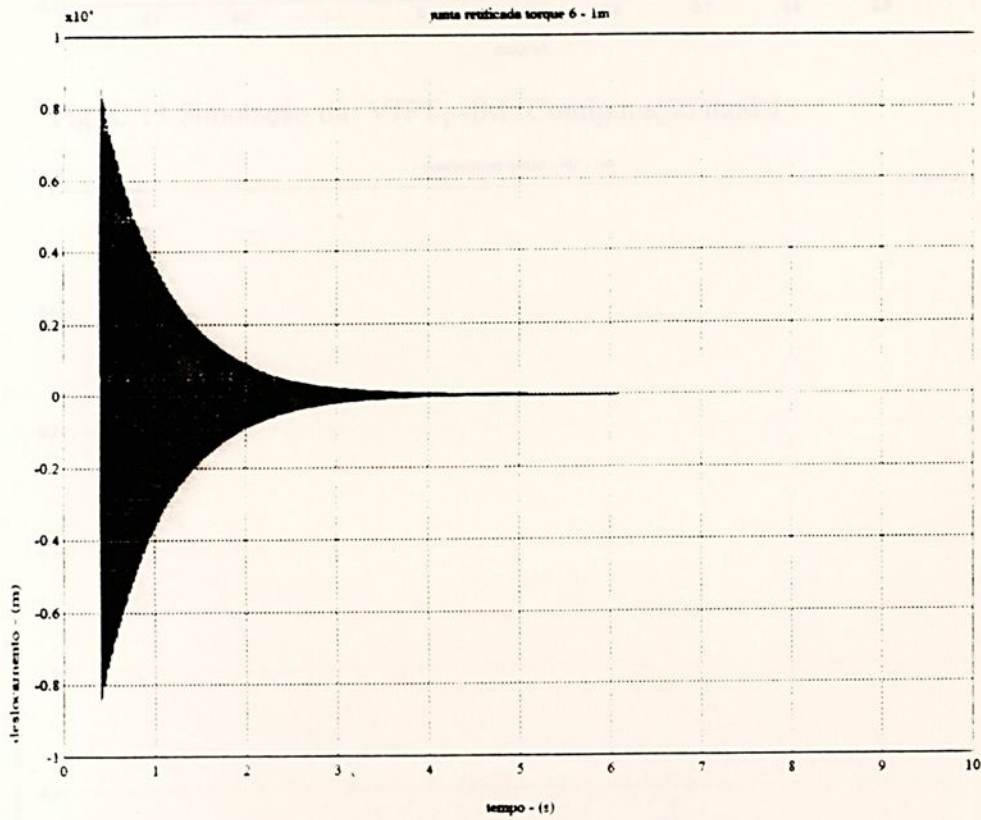


Fig. C.12 Simulação da $VJRT_6$ -IM: deslocamentos x tempo.

FACULDADE DE ENGENHARIA
DE GUARATINGUETA
BIBLIOTECA

000251

SIMULAÇÕES REFERENTES ÀS AMPLITUDES TEÓRICAS $\phi(x)$ - CONFIGURAÇÕES MODAIS

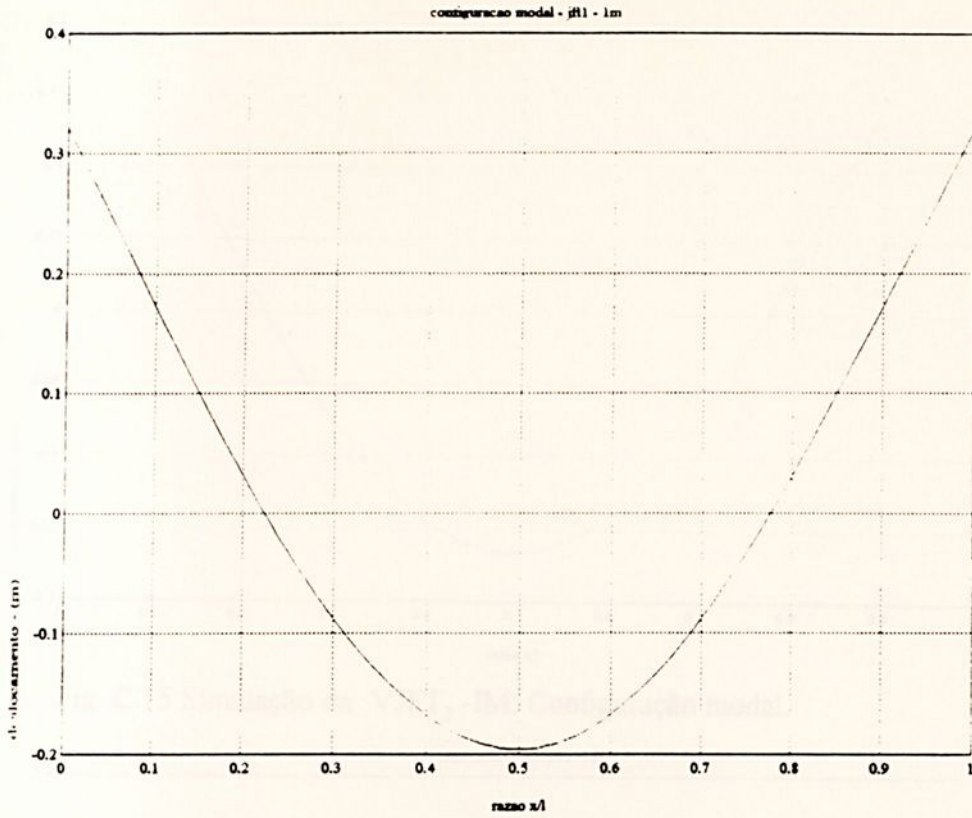


Fig. C.13 Simulação da VJFT₁-IM: Configuração modal

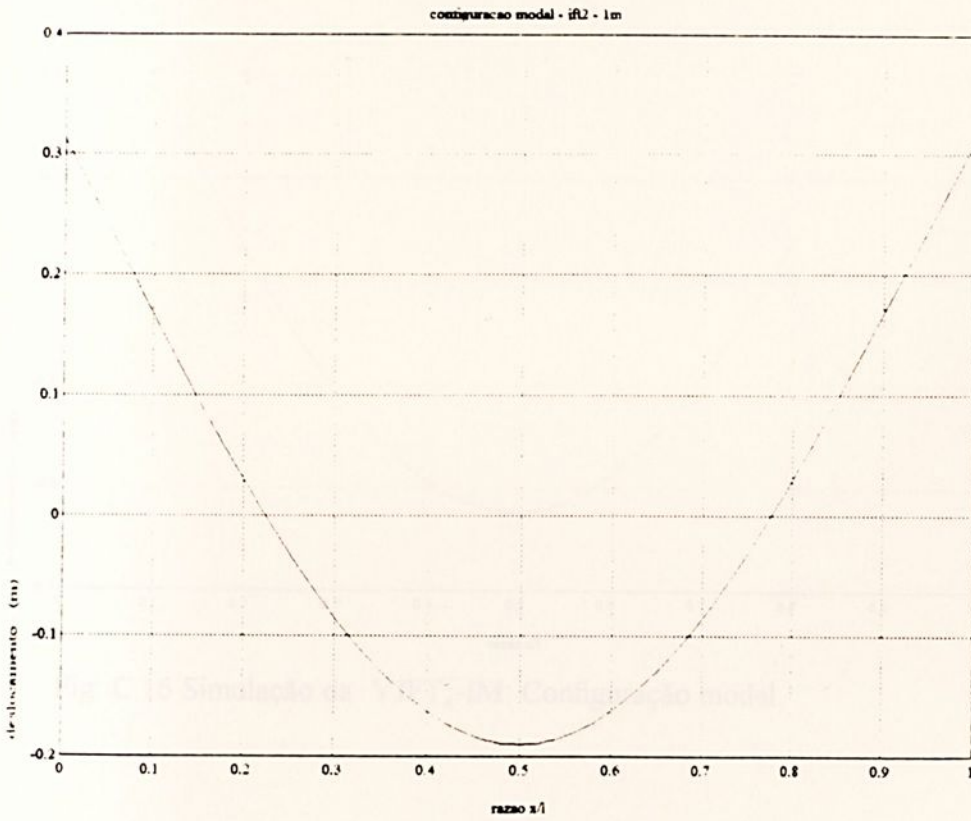


Fig. C.14 Simulação da VJFT₂-IM: Configuração modal

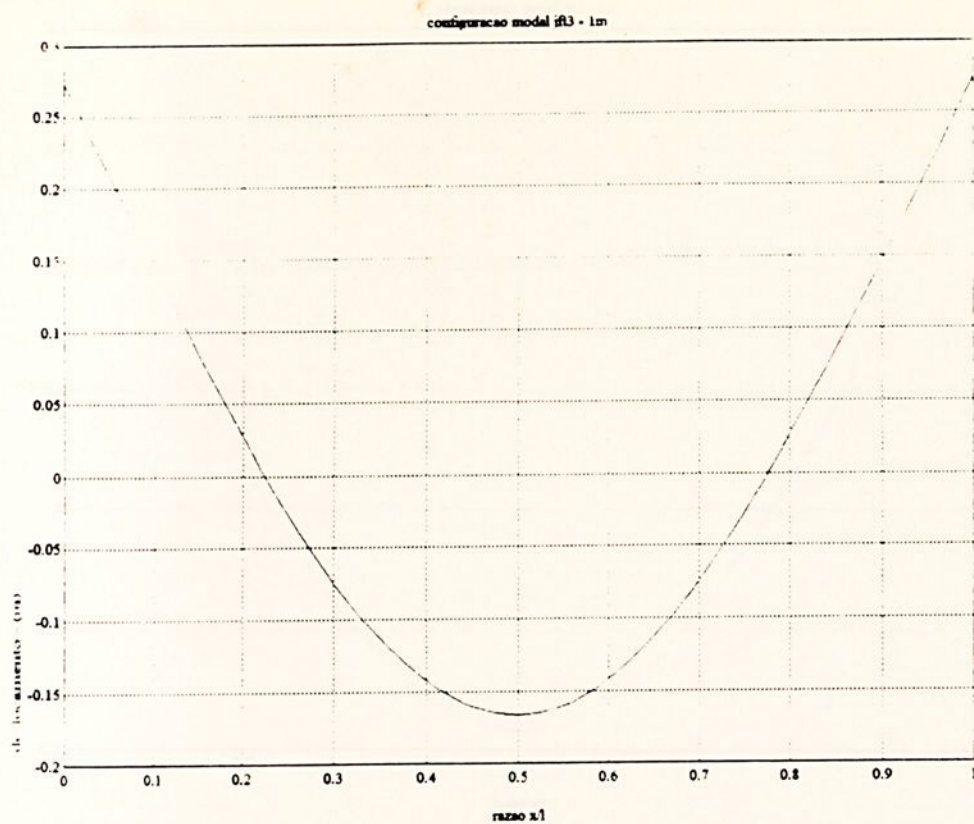


Fig. C.15 Simulação da VJFT₃-IM: Configuração modal.

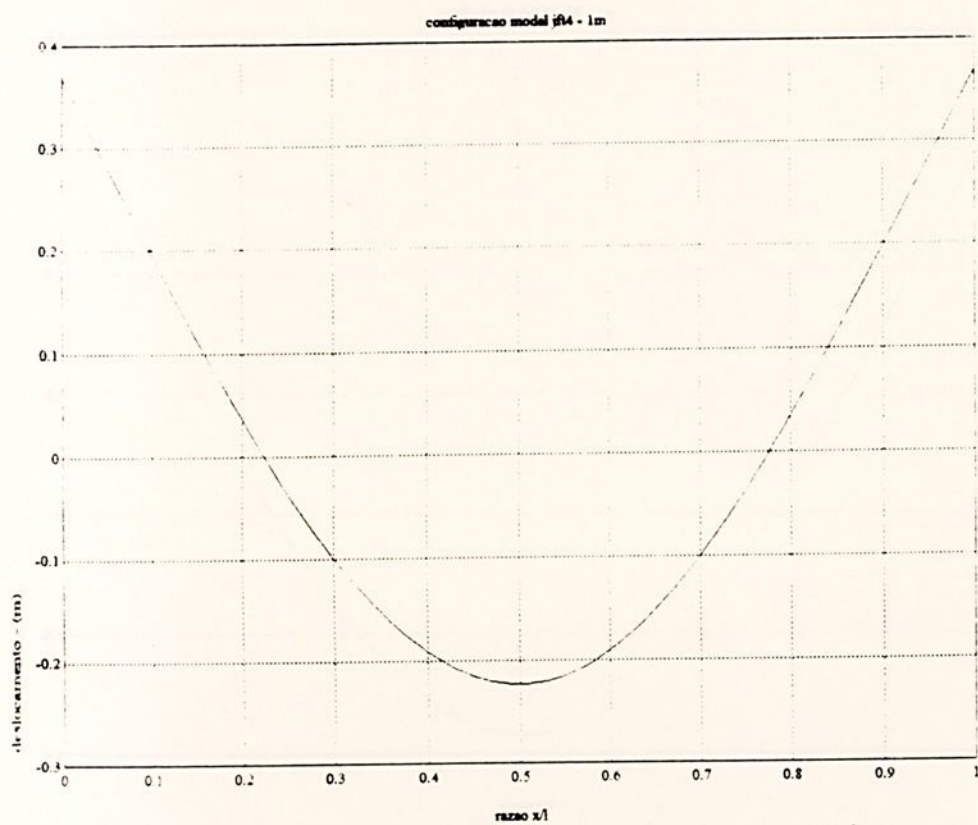


Fig. C.16 Simulação da VJFT₄-IM: Configuração modal.

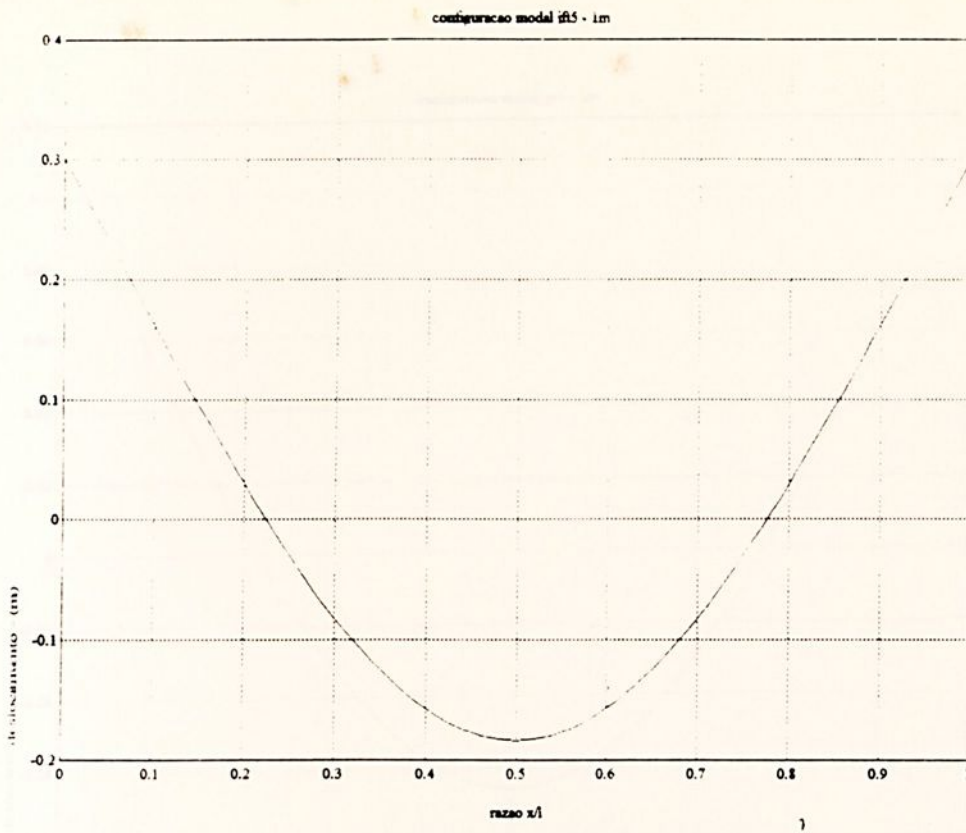


Fig. C.17 Simulação da VJFT₅-IM: Configuração modal.

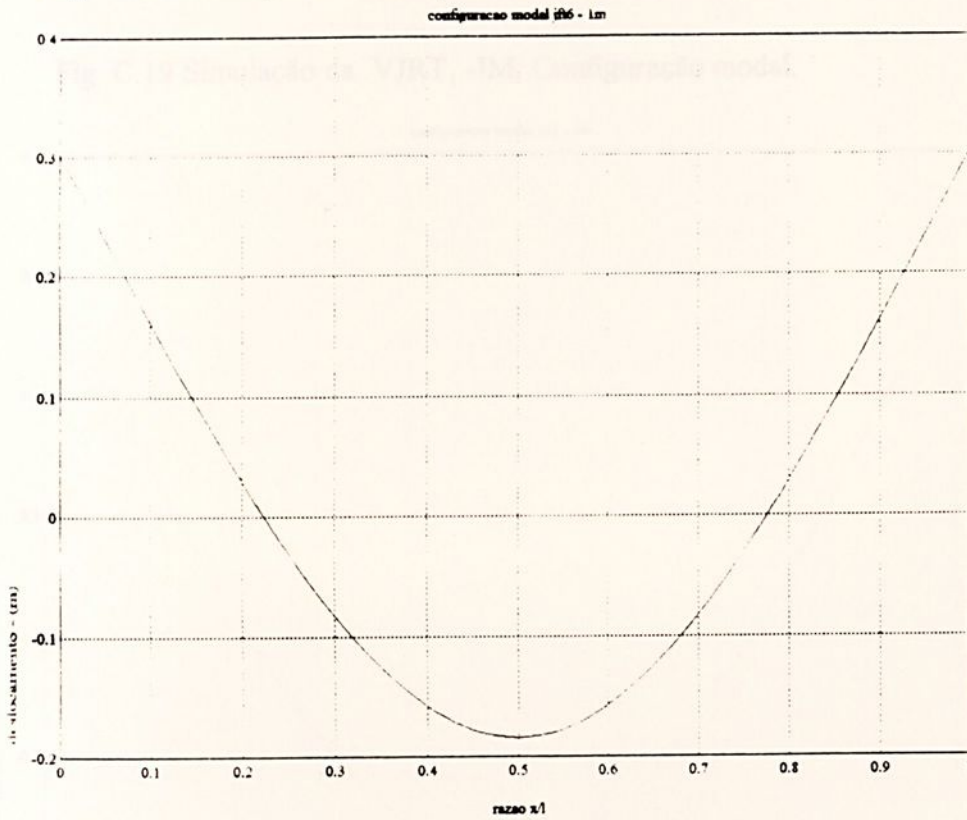


Fig. C.18 Simulação da VJFT₆-IM: Configuração modal.

Fig. C.19 Simulação da VJFT₇-IM: Configuração modal.

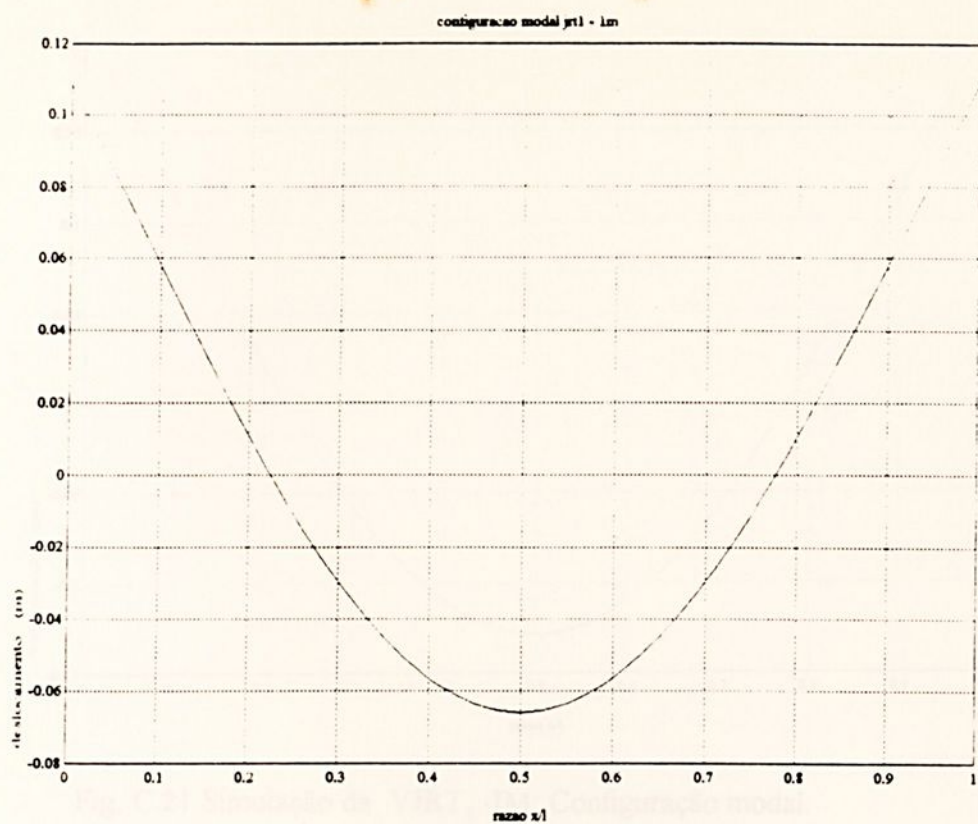


Fig. C.19 Simulação da VJRT₁-IM: Configuração modal.

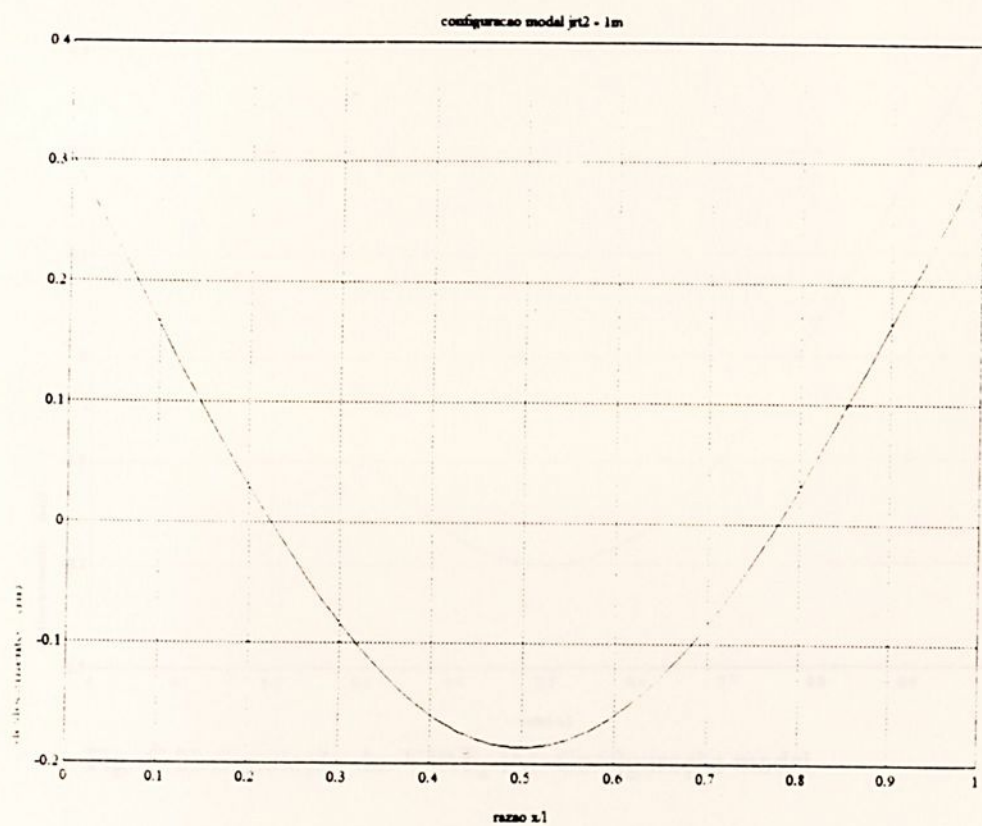
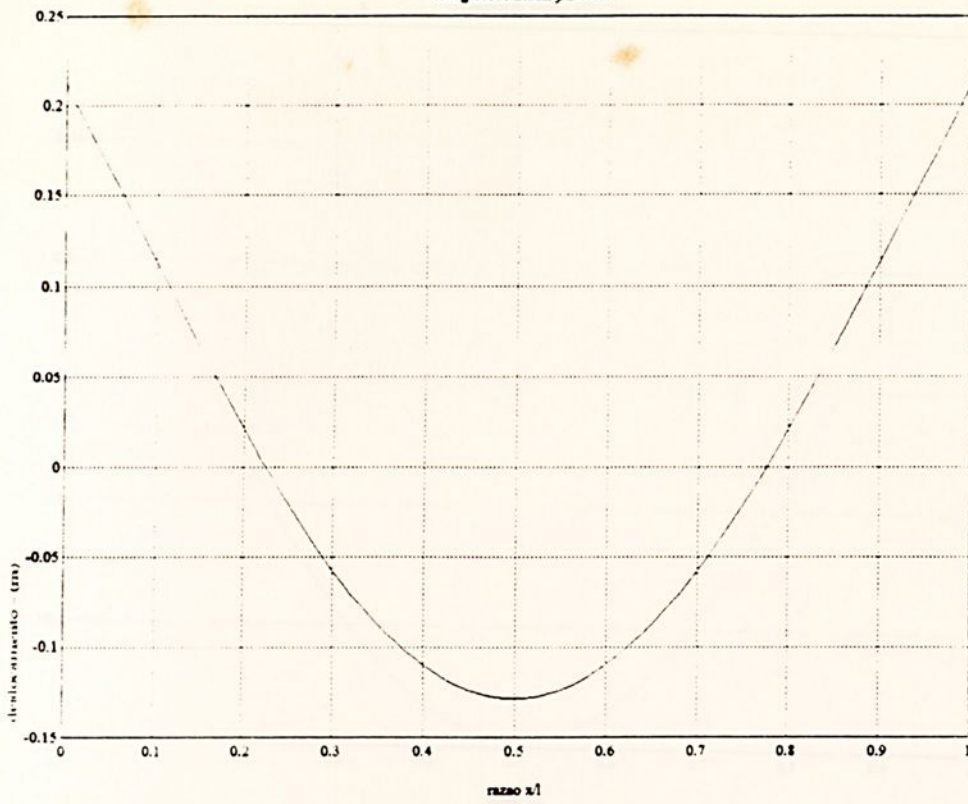
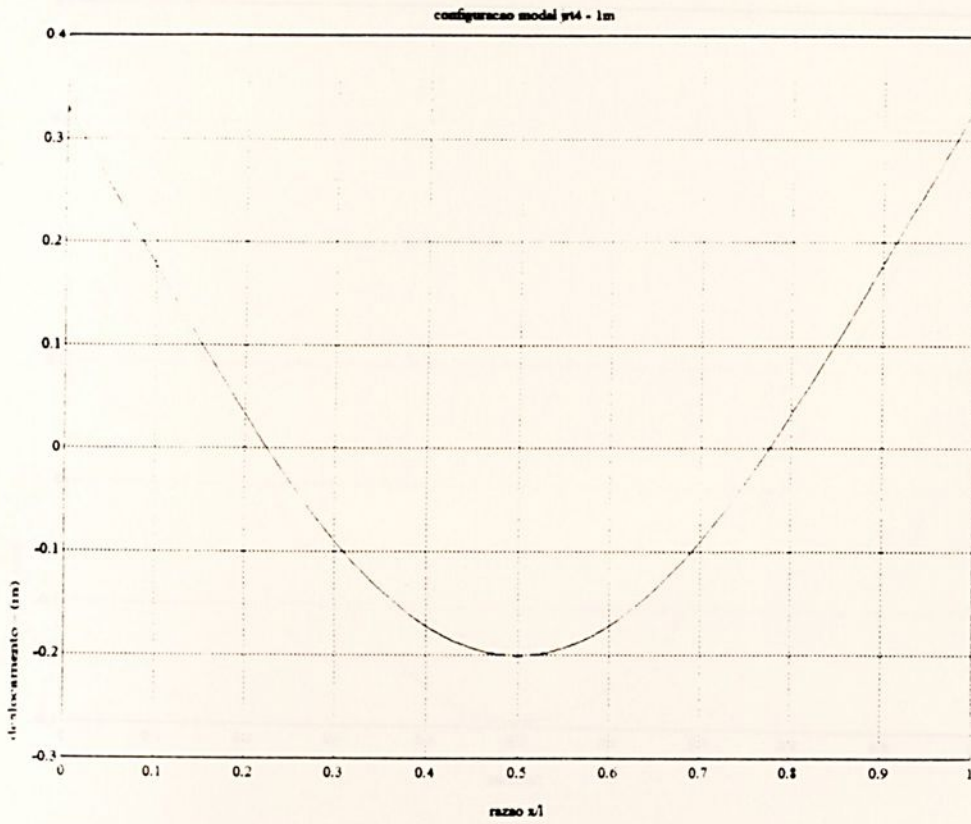


Fig. C.20 Simulação da VJRT₂-IM: Configuração modal.

Fig. C.21 Simulação da VJRT₃-IM: Configuração modal.Fig. C.22 Simulação da VJRT₄-IM: Configuração modal.

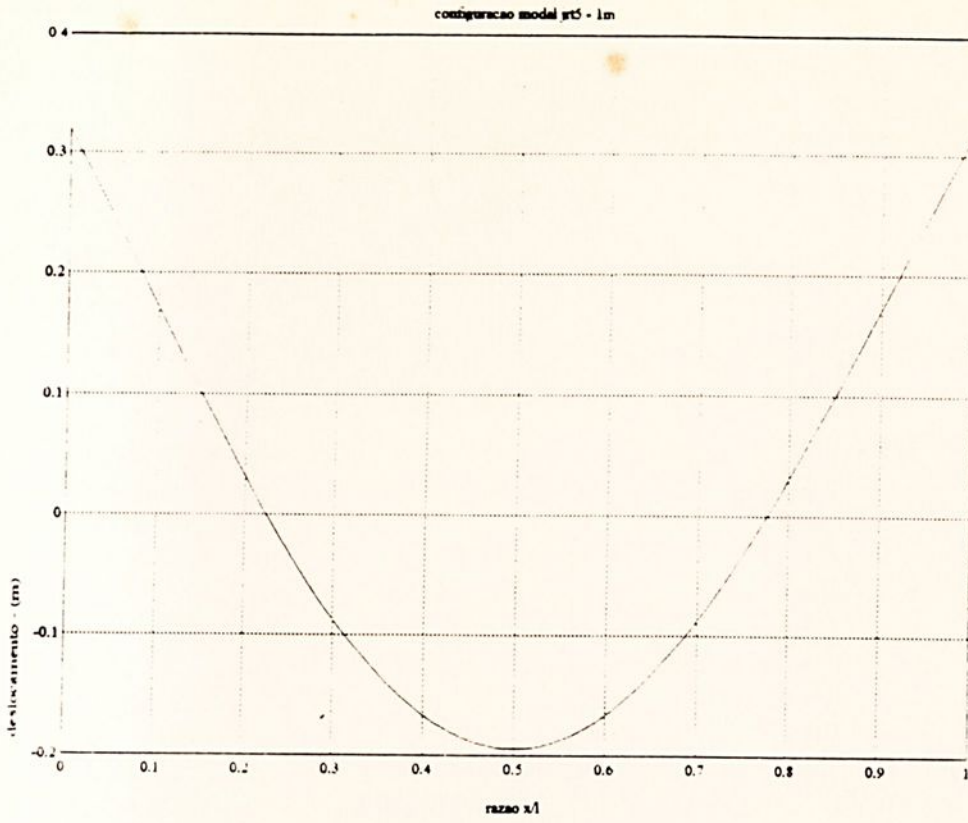


Fig. C.23 Simulação da VJRT₅-IM: Configuração modal.

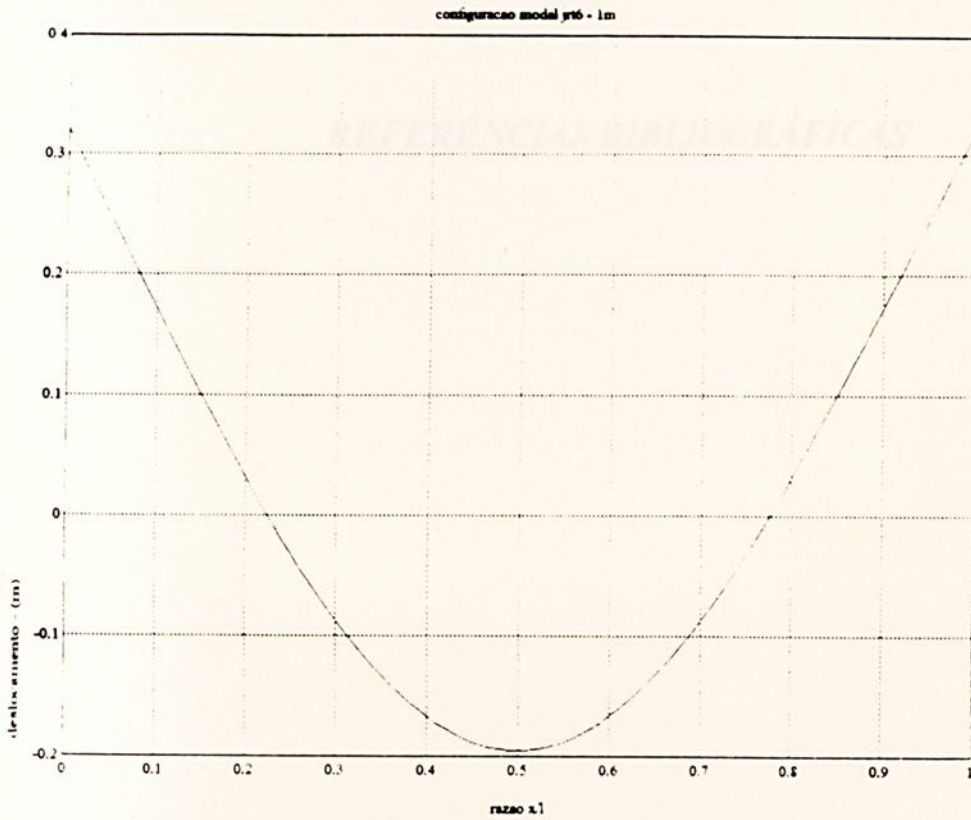


Fig. C.24 Simulação da VJRT₆-IM: Configuração modal.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BLEVINS, R.D. Damping of structures. In BLEVINS, R.D. *Flow-Induced Vibration*. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1977, cap. 9, p. 211-230.
2. GOLDSMITH, W. *Vibrational Analysis of Impact*. In GOLDSMITH, W. *The Theory and physical behaviour of colliding solids*. London: Edward Arnold Ltds, In, 1960, cap. 2, p. 20-25.
3. MENO, C.H. Modeling and Vibration Analysis of Friction Joints. *Journal of Structural Analysis, Stress and Reliability in Design*, v.3, p. 71-75, January 1989.
4. PLUNKETT, R. Measurement of Damping. *International Colloquium Structural Damping*, p. 111-121, 1969.
5. SHABANA, A.A. Free Vibration of Single Degree of Freedom Systems. In SHABANA, A.A. *Theory of Vibration*. New York: Springer-Verlag, 1981, v.1, cap.3, p. 36-111.
6. SHABANA, A.A. Vibration of Continuous Systems. In SHABANA, A.A. *Theory of Vibration*. New York: Springer-Verlag, 1981, v.2, cap.4, p. 175-245.
7. SHANKAR, ANAND KUMAR, NARENDRA KUMAR. Damping behaviour of bolted joints. *Mechanics*, p. 42-50.
8. SHIGLEY, E.J. *Engineering de Máquinas*, 3. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 1988, v.1, 347 p.
9. THOMPSON, W.T. *Teoria de Vibração e suas Aplicações*. Rio de Janeiro: Editora Interciência Ltda, 1978, 467 p.
10. TSAI, J.S.; CHOW, Y.F. The identification of dynamic characteristics of a single bolt joint. *Journal of Sound and Vibration*, v.125, p. 487-502, 1988.
11. YOSHIZAKA, M. Measurement of Dynamic Rigidity and Damping Property for Simplified Joint Models and Simulation by Computer. *Annal of the CIRP*, v.25, p. 193-198, 1977.
12. WANG, J. SAE, P. A method for identifying parameters of mechanical joints. *Journal of Applied Mechanics*, v.37, p. 377-382, June 1980.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BLEVINS, R.D. Damping of structures. In: BLEVINS, R.D. Flow-induced vibration. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1977. cap.8, p. 213-253.
2. GOLDSMITH, W. Vibrational Aspects of Impact. In: GOLDSMITH, W. The theory and physical behaviour of colliding solids. London: Edward Arnold Ltda, In, 1960. cap.3, p. 22-25.
3. MENQ, C.H. Modeling and Vibration Analysis of Friction Joints. Journal of Vibration Acoustics, Stress and Reliability in Design. v.3, p. 71-76, January 1989.
4. PLUNKETT, R. Measurement of Damping. International Colloquium Structural Damping. p. 117-131, 1959.
5. SHABANA, A.A. Free Vibration of Single Degree of Freedom Systems. In: SHABANA, A.A. Theory of Vibration. New York: Springer-Verlag, 1991, v.1, cap.3, p. 56-111.
6. SHABANA, A.A. Vibration of Continuous Systems. In: SHABANA, A.A. Theory of Vibration New York: Springer- Verlag, 1991, v.2, cap.4, p. 175-245.
7. SHANKER, ANAND, MITAL, NARENDRA KUMAR. Damping behaviour of bolted joints. Microtecnic. p. 42-45, April. 1980.
8. SHIGLEY, E.J. Elementos de Máquinas. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora Livros Tecnicos e Científicos Editora S.A. 1988, v.1, 347 p.
9. THONSON, W.T. Teoria da Vibração com Aplicações. Rio de Janeiro: Editora Interciência Ltda, 1978, 462 p.
10. TSAI, J.S.; CHOU, Y.F. The identification of dynamic characteristics of a single bolt joint. Journal of Sound and Vibration. v.125, p. 487-502, 1988.
11. YOSHIMURA, M. Measurement of Dynamic Rigidity and Damping Property for Simplified Joint Models and Simulation by Computer. Annal of the CIRP. v.25, p. 193-198, 1977.
12. WANG, J.; SAS, P. A method for identifying parameters of mechanical joints. Journal of Applied Mechanics. v.57, p. 337-342, June, 1990.



SÍMBOLOS

A	área de seção transversal da barra
A_h	área da malha de histerese
A_1, \dots, A_8	constantes a determinar em função de condições iniciais de posição
B_1, B_2	constantes a determinar
C_1, C_2	constantes a determinar
c	constante de proporcionalidade
c_c	constante de amortecimento crítico
c_i	constante de amortecimento
$\cos(*)$	cosseno de *
$\cos h(*)$	cosseno hiperbólico de *
D_1, D_2	constantes a determinar
ϵ_d	energia dissipada
ϵ_T	energia total
E	módulo de elasticidade transversal
EI	rigidez à flexão
F	força de excitação externa
F_d	força de amortecimento
G_1, \dots, G_4	constantes a determinar
I_z	momento de inércia de área em relação ao eixo z
K	constante de mola
ℓ	comprimento
ℓn	logaritmo natural
M	momento de flexão
m	massa
n	número de ciclos
P_1, P_2	constantes
Q	carga de flexão
$q(t)$	função dependente do tempo

q	componente modal dependente do tempo - amplitude do deslocamento transversal
q_i	amplitude do deslocamento transversal máxima (pico)
\dot{q}	derivada em relação ao tempo de q
r	raio de curvatura da barra
$\text{sen}(*)$	seno de $*$
$\text{sen h} (*)$	seno hiperbólico de $*$
t	tempo
t_i	tempo correspondente a amplitudes de deslocamento transversal máxima
T	energia cinética, torque, período de vibração
U	energia de deformação
V	força de cisalhamento
v	deslocamento transversal
\dot{v}	derivada em relação ao tempo v
v'	derivada em relação a posição v
X	amplitude de deslocamento
x	deslocamento
\dot{x}	derivada em relação ao tempo de x
y	afastamento em relação a linha neutra
\bar{y}	deflexão média
W	carga uniformemente distribuída
α	coeficiente a determinar
β	coeficiente a determinar
δ	decremento logarítmico
δ_x	comprimento infinitesimal
ε	deformação
$\dot{\varepsilon}$	derivada em relação ao tempo de ε

η	constante
λ	constante
ξ	razão de amortecimento
ρ	densidade de massa (peso específico)
σ	tensão normal
τ	tensão de cisalhamento
τ_d	período de amortecimento
$\varnothing(x)$	função dependente de posição
\varnothing	componente modal dependente de posição - amplitude de deslocamento transversal
\varnothing'	derivada em relação a posição de \varnothing
\varnothing	ângulo de fase
ω	frequência
ω_d	frequência natural amortecida
ω_n	frequência natural
W	carga uniformemente distribuída da viga

