

Geraldo Nunes Silva

Problemas de controle com horizonte infinito



unesp



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DE COMPUTAÇÃO E ESTATÍSTICA

**PROBLEMAS DE CONTROLE
COM HORIZONTE INFINITO**

Geraldo Nunes Silva

Tese de Livre Docência
Departamento de Ciência de Computação e Estatística

T. 1569/07



1910001569



Problemas de Controle com Horizonte Infinito

Geraldo Nunes Silva

Tese de Livre Docência apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Livre Docente em Controle Ótimo.

São José do Rio Preto

10 de Junho de 2002

A minha esposa, Helena.

As minhas filhas Gabriela e Isabella.

Ao meu filho Tiago.

Dedico



Agradecimentos

Ao pessoal que no desenvolvimento deste trabalho contribuíram de diversas formas para sua realização, em especial aos professores Antonio Leitao, Fernando Lobo Pereira e Johann Baumcristof.

A todos professores e funcionários do DCCE que de alguma forma contribuíram para a elaboração deste trabalho. Em especial aos Professores do grupo de otimização: Dr. Roberto Andreani e Dra. Maria do Socorro.

A minha família que sempre me apoiou, principalmente nos momentos decisivos para a realização desta tese de Livre de Docência.

Ao CNPq pela bolsa de Produtividade em Pesquisa (Janeiro 8/2000 a 7/2002) durante a realização deste trabalho.

A minha esposa, Heloisa.

Às minhas filhas Gabriela e Isabella.

Ao meu filho Tiago.

Dedico

Resumo

Agradecimentos

Às pessoas que no desenvolvimento deste trabalho contribuíram de diferentes forma para sua realização, em especial aos professores Antonio Leitao, Fernando Lobo Pereira e Johann Baumeister.

A todos professores e funcionários do DCCE que de alguma forma contribuíram para a elaboração deste trabalho. Em especial aos Professores do grupo de otimização Dr. Roberto Andreani e Dra. Maria do Socorro.

À minha família que sempre me apoiou, principalmente nos momentos decisivos para a realização desta tese de Livre de Docência.

Ao CNPq pela bolsa de Produtividade em Pesquisa (biênio 8/2000 a 7/2002) durante a realização deste trabalho.

Palavras-chave: controle ótimo, controle impulsivo, existência, programação dinâmica, estabilidade segundo Lyapunov, invariância, monotonicidade.

Resumo

Neste trabalho discutimos o problema de controle com horizonte infinito regular e impulsivo. No caso regular, provamos um resultado de existência de soluções ótimas, e algumas propriedades da função valor. A equação de Hamilton-Jacobi-Belman (HJB) derivada do problema regular é também estudada. Obtemos um resultado de verificação e mostramos que a função valor é a única solução viscosa da equação de HJB.

No caso impulsivo, consideramos primeiramente a dinâmica. Estudamos o problema de inclusão diferencial quanto a estabilidade, invariância e monotonia. No capítulo seguinte, introduzimos o problema impulsivo relaxado. Verificamos que os problemas relaxado e impulsivo têm conjuntos de soluções viáveis “isomorfos” e portanto tem a mesma função valor nos pontos em que são finitas. Daí, verificamos que a função valor é a única solução viscosa da equação de HJB derivada do problema relaxado. Também, estudamos a equação de HJB explícita relacionada ao problema de otimização impulsivo. Neste caso, verificamos que a função valor é uma solução da equação de HJB explícita. A unicidade não pôde ser verificada com as ferramentas até então conhecidas.

Palavras-chave: controle ótimo, controle impulsivo, existência, programação dinâmica, estabilidade segundo Lyapounov, invariância, monotonia.

Abstract

In this work we discuss regular and impulsive control problems with infinite horizon. In the regular case, we prove an existence result regarding optimal solutions and provide some properties of the value function. The Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation derived from the regular problem is studied. It is shown that the value function is the unique viscosity solution of the HJB equation.

In the impulsive case, we initially consider the dynamics. We study the differential inclusion problem as regards Lyapounov stability, invariance and monotony. In the following chapter, we introduce the relaxed impulsive problem. We verify that the relaxed and the purely impulsive problems have “isomorphic” sets of solutions. Therefore, their value functions must agree in all minimum points. We also show that the value function is the unique viscosity solution of the HJB equation derived from the relaxed problem.

We also study the explicit HJB equation related to the impulsive optimal control problem. In this case, we verified that the value function is a viscosity solution of the explicit HJB equation. The uniqueness could not be verified with tools developed until now.

Keywords : optimal control, impulsive control, existence, dynamic programming
Lyapounov stability, invariance, monotony.



Conteúdo

0	Introdução	1
I	Problema de Controle Regular	5
1	O Problema de Controle Ótimo com Horizonte Infinito	6
1.1	Introdução	6
1.2	Existência	7
1.3	Função Valor	10
1.4	Lipschitz Continuidade da Função Valor	12
2	Programação Dinâmica	15
2.1	Preliminares e subdiferenciais Proximal e de Dini	15
2.2	Programação dinâmica	17
2.3	Soluções Viscosas da Equação de HJB	23
2.3.1	Demonstração do Teorema 2.3.1	24
II	Controle Impulsivo	26
3	Dinâmica Impulsiva: Estabilidade, Invariância e Monotonia	27
3.1	Introdução	27
3.2	Estabilidade segundo Lyapunov	31
3.3	Invariância e o conjunto dos estados atingíveis	35
3.4	Monotonia	41

3.5	Atingibilidade Local	44
4	Programação Dinâmica para Problemas Impulsivos	47
4.1	Introdução	47
4.2	O problema de controle impulsivo relaxado	50
4.3	A equação explícita de HJB: soluções viscosas	57

Introdução

Esta tese de Livre Docência se divide em duas partes distintas, porém complementares. A Parte I considera problemas regulares de controle ótimo e estabelece resultados sobre a existência de soluções ótimas e sobre programação dinâmica no que diz respeito à solução da Equação de HJB e a verificação quanto à otimalidade de processos viáveis. A Parte II, por sua vez, trata de problemas de controle impulsivo, sendo que inicialmente são discutidas algumas propriedades dos sistemas dinâmicos impulsivos, governados por inclusões diferenciáveis. Na sequência são discutidas algumas questões relativas à existência de soluções ótimas para a classe de problemas de controle ótimo impulsivo.

A seguir, discutiremos separadamente as contribuições de cada parte. Será necessário dividir por capítulos.

Parte I

Capítulo 1: O capítulo 1 versa sobre a existência de soluções ótimas para o problema de controle com horizonte infinito e algumas propriedades da função valor. Resultados de existência para problemas de controle ótimo são extremamente delicados. Mesmo no caso em que os intervalos de sobrevivência dos processos de controle são limitados, as hipóteses necessárias para se provar existência de soluções são muito fortes. Em geral, exige-se convexidade do campo estendido e compatibilidade do momento de controle com o estado (ver, por exemplo, [25]).

Capítulo 0

Introdução

Esta tese de Livre Docência se divide em duas partes distintas, porém complementares. A Parte I considera problemas regulares de controle ótimo e estabelece resultados sobre a existência de soluções ótimas e sobre programação dinâmica no que diz respeito a solução da Equação de HJB e a verificação quanto a otimalidade de processos viáveis. A Parte II, por sua vez, trata de problemas de controle impulsivos, sendo que inicialmente são discutida algumas propriedades dos sistemas dinâmicos impulsivos, governados por inclusões diferenciais. Na sequência são discutidas algumas questões relativas à programação dinâmica para a classe de problemas de controle ótimo impulsivos.

A seguir, discutimos separadamente as contribuições de cada parte. Será necessário dividir por capítulos.

Parte I

Capítulo 1. O capítulo 1 versa sobre a existência de soluções ótimas para o problema de controle com horizonte infinito e algumas propriedades da função valor. Resultados de existência para problemas de controle ótimo são extremamente delicados. Mesmo no caso em que os intervalos de sobrevivência dos processos de controle são limitados, as hipóteses necessárias para se provar existência de soluções são muito fortes. Em geral, exige-se convexidade do campo estendido e compacidade do conjunto de controles viáveis (ver, por exemplo, [28]).



Quando temos um problema de otimização em que se deseja minimizar uma função sujeito a um conjunto compacto e tem-se que a função é pelo menos semi-contínua inferior, o método de prova é baseado na extração de subsequências convergentes a pontos do conjunto que terão valor igual ou inferior a qualquer outro ponto do conjunto, verificando a otimalidade. Nos problemas de controle abstratos, a função objetivo depende do processo completo (controle e trajetória). Assim, você teria que ter uma sequência convergente de processos a um certo processo dentro do conjunto de processos viáveis. Entretanto, isto nem sempre é possível. O que se faz é construir uma trajetória ótima e depois, através do teorema da seleção mensurável de Filippov, constrói-se um controle viável que possui o mesmo estado como resposta. O problema de passar esta argumentação para intervalos infinitos, reside no fato de que o teorema da seleção mensurável vale para intervalos limitados. Nossa contribuição foi mostrar que mesmo usando o teorema de Filippov em intervalos finitos, podemos argumentar de forma a construir um controle viável no intervalo infinito que tem como resposta o estado desejado construído na fase anterior.

Resultado similar ao nosso de existência para problemas com horizonte infinito pode ser encontrado em [6]. Porém, as hipóteses que se fazem nesse trabalho são muito restritivas; não se aplicam no caso em as funções do problema não dependem do tempo.

Por fim, no capítulo 1, ainda verificamos algumas propriedades da função valor. Verificamos que sob as hipóteses do Capítulo 1, a função valor é localmente Lipschitz.

Capítulo 2. Este capítulo trata da programação dinâmica para problemas regulares. Pelo fato da função valor, na grande maioria dos casos ser apenas contínua, existe na literatura uma vasta teoria de verificação via solução não regular da equação HJB. De acordo com o nosso conhecimento, o método de verificação para funções Lipschitz é introduzido em [23]. Subbotin [38] introduz as derivadas de Dini e os conceitos de semi-solução no contexto de teoria de jogos diferenciais. Em [15], é desenvolvido o conceito de soluções viscosas para a classe de funções contínuas, onde se prova existência e unicidade de soluções. Este fato constitui o maior avanço no assunto. A partir daí,



soluções não diferenciáveis passam a ser utilizadas em conexão com o problema de controle por muitos pesquisadores e as teorias para soluções viscosas e de Dini (não diferenciável) são unificadas. Uma síntese bem feita do assunto pode ser encontrada em [13]. Citamos também [3] para uma excelente apresentação do assunto.

Da Lio em [27] faz um estudo da equação de HJB para problemas de controle ótimo com horizonte infinito. Ele prova que a função valor é a única solução contínua da equação de HJB. Entretanto, ele está mais interessado nas propriedades de estabilidade da função valor para pequenas perturbações do problema linear-quadrático em problemas gerais.

Nossa principal contribuição neste capítulo é estender, de forma simples, a teoria de programação dinâmica para problemas com horizonte infinito sob hipóteses razoáveis, utilizando a monotonia da função valor adicionada a uma parte do custo integral descontado ao longo de processos viáveis. Ainda, como no caso de horizonte finito, foi possível verificar a unicidade da função valor como solução viscosa da equação de HJB.

Parte II

Capítulo 3. Dinâmica impulsiva modela uma grande variedade de fenômenos em ciência e engenharia. As áreas de aplicação vão vibro-mecânica de impacto [11] a administração de recursos renováveis [12, 7, 22] e engenharia espacial [29], para citar apenas algumas.

Isto, é claro, motivou tanto o desenvolvimento de amplas teorias para esta classe de sistemas (ver, por exemplo, [1, 24, 9, 10, 16, 18, 21, 25, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 39, 40, 42]) quanto de esquemas computacionais para determinação de políticas de controle [17, 4, 5, 26].

Assim, há uma grande motivação para se estudar sistemas impulsivos e compreender suas propriedades. Neste capítulo abordamos os temas ligados às propriedades de sistemas dinâmicos impulsivos governados por inclusões diferenciais. É feito um estudo a respeito da estabilidade segundo Lyapounov, invariância fraca e forte e



monotonia. De acordo com o nosso conhecimento, estes temas não foram abordados na literatura, especificamente para problemas impulsivos.

Capítulo 4. Neste capítulo é estudado o problema de otimização de sistemas impulsivos. Primeiro introduzimos um problema de otimização “relaxado” através da convexificação das colunas do campo regular e singular. Verificamos que a relaxação é “boa”, no sentido que as funções valor dos problemas relaxado e impulsivo são as mesmas, quando finitas. A convexificação por nós proposta é nova. A forma e os resultados se parecem, em espírito, com as extensões propostas em [9] e desenvolvidas um pouco mais em [10] e [31] para equações diferenciais com medidas.

Nos obtemos resultados de programação dinâmica para o problema relaxado a partir dos resultados obtidos no Capítulo 2, para o problema regular, fazendo as devidas modificações. Obtemos um resultado de verificação e provamos que a função valor do problema relaxado é a única solução viscosa da equação de HJB vinda do problema relaxado.

Além disso, consideramos a equação de HJB explícita, contendo medidas, e verificamos que a função valor do problema impulsivo é uma solução viscosa desta. Porém, nada sabemos sobre a unicidade. É nossa conjectura que a função valor do problema impulsivo é única solução da equação de HJB impulsiva.



Capítulo 1

O Problema de Controle Ótimo com Horizonte Infinito

Parte I

1.1 Problema de Controle Regular

Considere o problema de controle ótimo com horizonte infinito, denotado por $P_{\infty}(x, z)$:

$$\begin{cases} \text{Minimizar } J(x, z) := \int_0^{\infty} e^{-\delta t} l(t, x(t), u(t)) dt \\ \text{sujeito a} \\ u \in U_{\text{ad}}[x, \infty) := \{u \in L^1_{\text{loc}}([0, \infty); \mathbb{R}^m) \mid u(t) \in U \text{ a.e. in } [0, \infty)\} \\ \dot{x}(t) = z + \int_0^t f(s, x(s), u(s)) ds, \quad t \in [0, \infty). \end{cases}$$

Aqui $l : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções dadas, $U \subset \mathbb{R}^m$ é o conjunto de controles viáveis, $\delta > 0$ denota a taxa de desconto. Uma estratégia de controle viável u é uma função L^1_{loc} satisfazendo a restrição $u(t) \in U$ quase sempre (q.s.) em $[0, \infty)$. L^1_{loc} é o conjunto de funções localmente integráveis $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$. As funções absolutamente contínuas $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, soluções do sistema de equações integrais em $P_{\infty}(x, z)$, são chamadas de trajetórias do sistema.

O par de funções $(x(\cdot), u(\cdot))$ consistindo de um controle viável u e de uma trajetória correspondente x é chamado de processo viável. Estudos relacionados mais

Capítulo 1

O Problema de Controle Ótimo com Horizonte Infinito

1.1 Introdução

Considere o problema de controle ótimo com horizonte infinito, denotado por $P_\infty(\tau, z)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimize } J(u; \tau, z) := \int_{\tau}^{\infty} e^{-\delta t} l(t, x(t), u(t)) dt \\ \text{sujeito a} \\ u \in U_{ad}[\tau, \infty) := \{w \in L^1_{loc}([\tau, \infty); \mathbb{R}^m) \mid w(t) \in \Omega \text{ a.e. in } [\tau, \infty)\} \\ x(t) = z + \int_{\tau}^t f(s, x(s), u(s)) ds, \quad t \in [\tau, \infty). \end{array} \right.$$

Aqui $l : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções dadas; $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ é o conjunto de controles viáveis; $\delta > 0$ denota a taxa de desconto. Uma estratégia de controle viável u é uma função L^1_{loc} satisfazendo a restrição $u(t) \in \Omega$ quase sempre (q.s.) em $[\tau, \infty)$. L^1_{loc} é o conjunto de funções localmente integráveis $w : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$. As funções absolutamente contínuas $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, soluções do sistema de equações integrais em $P_\infty(\tau, z)$, são chamadas de trajetórias do sistema.

O par de funções $(x(\cdot), u(\cdot))$ consistindo de um controle viável u e de uma trajetória correspondente x é chamado de processo viável. Estamos interessados mais

especificamente em processos viáveis com custo finito:

$$\mathcal{D}_{\tau, z; \infty} := \left\{ (x, u) \mid u \in U_{ad}[\tau, \infty); \right. \\ \left. x(t) = z + \int_{\tau}^t f(r, x(r), u(r)) dr; J(u; \tau, z) < \infty \right\}.$$

1.2 Existência

Agora passemos a discutir umas das questões centrais em teoria de controle ótimo: a existência de processos viáveis ótimos. Em geral, para se garantir que um problema de minimização, mesmo em dimensão finita, tenha solução, as condições exigidas são muito fortes. O mais comum é supor semi-continuidade da função objetivo e compacidade do conjunto de restrição.

Demo O resultado de existência que provaremos aqui exigirá compacidade do conjunto de controles viáveis e convexidade do chamado vetor velocidade estendido, que será introduzido na seqüência. Os argumentos da prova, embora não sejam inovadores, são uma extensão das provas feitas para problemas em intervalos limitados de tempo, os quais, não são automaticamente transferíveis para intervalos ilimitados. O artigo [6] trás resultados de existência para problemas de horizonte infinito, porém as condições exigidas são muito fortes. Lá, problemas que não dependem do tempo, não satisfazem as hipóteses de existência.

Para uma boa exposição sobre a delicadeza da questão da existência, podemos citar ([28], Capítulo IV). Lá encontramos exemplos de problemas simples que não possuem processos ótimos. Antes de enunciarmos o resultado de existência para o problema de controle ótimo, vamos introduzir o conjunto de hipóteses necessárias.

H1) $\exists K_1 > 0$, tal que para todo $t \in [0, \infty)$, $u \in \Omega$,

$$|l(t, x, u) - l(t, z, u)| + |f(t, x, u) - f(t, z, u)| \leq K_1 |x - z|,$$

vale para todo $x, z \in \mathbb{R}^n$;

H2) existe uma constante positiva K_2 tal que

$$|l(t, x, u)| + |f(t, x, u)| \leq K_2(1 + |x|), \quad (1.1)$$



para todo $t \in [0, \infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \Omega$;

H3) as funções $l(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ são contínuas;

H4) Ω é compacto.

H5) dado $(\tau, z) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, existe um conjunto (invariante) limitado $\mathcal{S}_{\tau, z} \subset \mathbb{R}^n$ tal que todo processo viável $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{D}_{\tau, z; \infty}$ satisfaz $x(t) \in \mathcal{S}_{\tau, z}$, for $t \geq \tau$.

Teorema 1.2.1 *Suponha que as hipóteses (H1)-(H5) estejam satisfeitas e que o conjunto*

$$\hat{f}(t, x, \Omega) := \{(e^{-\delta t} l(t, x, v), f(t, x, v))^T \mid v \in \Omega\}$$

*seja convexo em $\mathbb{R}^{n+1}$. Então existe processo ótimo.*¹

Demonstração: Seja $(x_k, u_k) \in \mathcal{D}_{\tau, z; \infty}$, $k \in \mathbb{N}$, uma seqüência minimizante para $P_\infty(\tau, z)$. Então existe um numero real c tal que

$$J(u_k; \tau, z) = \int_\tau^\infty e^{-\delta t} l(t, x_k(t), u_k(t)) dt := c_k \downarrow c,$$

quando k tende ao infinito. Note que c é finito devido às hipóteses acima. Para qualquer controle viável $v(\cdot)$, definimos a trajetória estendida correspondente em $\mathbb{R}^{n+1}$ por

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} x^0 \\ x \end{bmatrix}, \quad \text{where } \dot{x}^0 = e^{-\delta t} l(t, x, v), \quad x^0(\tau) = 0.$$

Neste caso, $x^0(t) = \int_\tau^t e^{-\delta s} l(s, x(s), v(s)) ds$ e $\int_\tau^\infty e^{-\delta s} l(s, x(s), v(s)) ds = J(v; \tau, z)$.

Nosso sistema estendido é dado por

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{f}(t, x, v) = \begin{bmatrix} e^{-\delta t} l(t, x, v) \\ f(t, x, v) \end{bmatrix}, \quad \hat{x}(\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix}.$$

Segue da hipótese (H2) e do Lema de Gronwall, que existe, para cada $j \in \mathbb{N}$, uma constante $M_j > 0$ com $|\hat{x}(t)| < M_j$, $t \in [\tau, \tau + j]$ para todo processo admissível $(x, u) \in \mathcal{D}_{\tau, z; \infty}$. Além disso, para todo k , temos a estimativa

$$\|\hat{x}_k(t)\| \leq K_2(1 + M_j), \quad t \in [\tau, \tau + j].$$

¹A função $\hat{f}$ é chamada de velocidade estendida do problema $P_\infty(\tau, z)$.



Desta forma, a seqüência $\hat{x}_k$ é equi-contínua em cada intervalo $[\tau, \tau + j]$. Usando o teorema de Arzelá-Ascoli (ver, por exemplo, [2, Teorema 1, Seção 0.3]) e o princípio da diagonal, podemos extrair uma subsequência (não re-indexamos) $\hat{x}_k(\cdot)$ convergindo para uma função contínua $\hat{x}(\cdot) : [\tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uniformemente em intervalos compactos. Note que pelas hipóteses (H2) e (H5), podemos concluir, para todo k , que

$$\|\dot{\hat{x}}_k^0(t)\| \leq K_2 e^{-\delta t} (1 + \text{diam}(\mathcal{S}_{\tau, z})), \quad t \in [\tau, \infty). \quad (1.2)$$

Já que o lado direito de (1.2) está em $L^1([\tau, \infty))$, segue de (1.2) e [2, Teorema 4, Seção 0.3] que podemos extrair uma subsequência (não re-indexamos) $\hat{x}_k(\cdot)$ tal que $\dot{\hat{x}}_k^0(\cdot)$ converge fracamente a $\dot{x}^0(\cdot)$ em $L^1([\tau, \infty))$.

Invocando as hipóteses (H3) e (H4) e usando argumentos básicos envolvendo separação de conjuntos convexos por hiperplanos podemos concluir que

$$\dot{\hat{x}}(t) \in \hat{f}(t, x(t), \Omega) \text{ a.e. in } [\tau, \infty).$$

Agora, escolha $T > \tau$. Pelo lema de Filippov (ver, e.g. [19]) existe uma função mensurável $v_T(\cdot) : [\tau, T] \rightarrow \Omega$ tal que $\hat{x}(t) = z + \int_{\tau}^t \hat{f}(t, x(t), v_T(t)) dt$ em $[\tau, T]$. A convergência fraca de $\dot{\hat{x}}_k^0(\cdot) \rightharpoonup \dot{x}^0(\cdot)$ em $L^1([\tau, \infty))$ implica em

$$\left| \int_{\tau}^T e^{-\delta t} l(t, x_k(t), u_k(t)) dt - \int_{\tau}^T e^{-\delta t} l(t, x(t), v_T(t)) dt \right| < \frac{\epsilon}{3}, \quad (1.3)$$

para todo k suficientemente grande.

Agora construiremos um controle viável $u(\cdot)$ definido em todo intervalo $[\tau, \infty)$ no qual $x(t) = z + \int_{\tau}^t f(s, x(s), u(s)) ds$.

Seja $I_j := [T + j, T + j + 1]$, para $j = 0, 1, 2, \dots$ e considere a inclusão diferencial $\dot{x}(t) \in f(t, x(t), \Omega)$ definida nos intervalos I_j . Novamente, segue pelo lema de Filippov que existe $v_j(\cdot) : I_j \rightarrow \Omega$ tal que $x(t) = x(T + j) + \int_{T+j}^t f(s, x(s), v_j(s)) ds$ para todo $t \in I_j$. Seja

$$u_T(t) := \begin{cases} v_T(t) & , t \in [\tau, T] \\ 0 & , t \geq T \end{cases} \quad \text{e} \quad u_j(t) := \begin{cases} v_j(t) & , t \in I_j \\ 0 & , t \notin I_j \end{cases}.$$

Definindo $u(t) := u_T(t) + \sum_{j=0}^{\infty} u_j(t)$, é fácil verificar que $u(\cdot)$ é um controle viável correspondente à trajetória de saída do sistema $x(\cdot)$. Afirmamos que o processo $(x(\cdot), u(\cdot))$

é ótimo para o problema $P_\infty(\tau, z)$. De fato, considere a estimativa

$$\begin{aligned} & \left| \int_\tau^\infty e^{-\delta t} l(t, x(t), u(t)) dt - \int_\tau^\infty e^{-\delta t} l(t, x_k(t), u_k(t)) dt \right| \\ & \leq \left| \int_T^\infty e^{-\delta t} l(t, x(t), u(t)) dt \right| \\ & + \left| \int_\tau^T e^{-\delta t} l(t, x(t), u(t)) dt - \int_\tau^T e^{-\delta t} l(t, x_k(t), u_k(t)) dt \right| \\ & + \left| \int_T^\infty e^{-\delta t} l(t, x_k(t), u_k(t)) dt \right|. \end{aligned}$$

O primeiro e o terceiro termos do lado direito da estimativa acima podem ser tomados tão pequeno quanto se queira com uma escolha apropriada de $T > \tau$. O segundo termo pode ser estimado pelo uso da Eq. (1.3) e escolhendo k grande o suficiente. ■

1.3 Função Valor

Nesta seção definimos a função valor e verificamos algumas de suas propriedades. Na próxima seção, mostramos que, sob hipóteses razoáveis ela é Lipschitz. O melhor seria que a função valor fosse de fato C^1 , pois como veremos no capítulo de programação dinâmica, proporcionaria uma ferramenta eficaz no diagnóstico e verificação se processos viáveis são ótimos. Porém, exemplos simples ilustram que a função valor não é diferenciável. Assim, é natural procurar condições sob as quais a função seja pelo menos diferenciável quase sempre. Esta resposta é apresentada na próxima seção. Agora passemos à definição de função valor.

A função

$$V : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \ni (\tau, z) \longmapsto \inf \{ J(u; \tau, z) \mid (x, u) \in \mathcal{D}_{\tau, z; \infty} \} \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

é chamada de *função valor* associada com a família de problemas $P_\infty(\tau, z)$.

Precisaremos da definição da função Hamiltoniana:

$$\begin{aligned} H : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, \lambda, u) & \longmapsto \langle \lambda, f(t, x, u) \rangle + e^{-\delta t} l(t, x, u). \end{aligned} \quad (1.5)$$



Nos vamos também precisar da Hamiltoniana minimizada em relação ao controle

$$\mathcal{H} : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (t, x, \lambda) \longmapsto \min_{u \in \Omega} \{H(t, x, \lambda, u)\} \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Além da hipóteses (H1), ..., (H5), consideraremos também

H6) A constante de Lipschitz K_1 em (H1) e taxa de desconto δ satisfazem $K_1 - \delta < 0$. Além disso, dado $(\tau, z) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, existe uma vizinhança $\mathcal{V}_{\tau, z}$ de (τ, z) e um conjunto (invariante) limitado $\mathcal{S}_{\tau, z} \subset \mathbb{R}^n$ tal que para toda condição inicial $(\tilde{\tau}, \tilde{z}) \in \mathcal{V}_{\tau, z}$, o processo viável $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{D}_{\tilde{\tau}, \tilde{z}; \infty}$ satisfaz $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{\tau, z}$.

Observação 1.3.1 As condições relacionando a constante de Lipschitz K_1 e a taxa de desconto δ é crucial nesta abordagem; ver também [3, 41, 14].

Sob esta hipótese extra é possível verificar que a função valor é de fato Lipschitz. Porém, vamos antes enunciar e provar um lema auxiliar técnico.

Lema 1.3.1 Suponha que as hipóteses (H1) e (H2) estejam satisfeitas. Sejam (τ, z) , $(\tau, z_1) \in [0, \infty) \times B_R(0)$ e $u \in U_{ad}[\tau, \infty)$. Let x, x_1 os estados associados. Então

$$|x(t) - x_1(t)| \leq e^{K_1(t-\tau)} |z - z_1|, \quad t \geq \tau. \quad (1.7)$$

Além disso, temos

$$|x(t) - z| \leq K_2(1 + R)e^{K_2(t-\tau)} |t - \tau|, \quad t \geq \tau. \quad (1.8)$$

Demonstração: Provemos primeiro o segundo item do lema. Note que para $t \geq \tau$

$$\begin{aligned} |x(t) - z| &\leq \int_{\tau}^t |f(q, x(q), u(q))| dq \leq \int_{\tau}^t K_2(1 + |x(q)|) dq \\ &\leq K_2|t - \tau| + \int_{\tau}^t K_2|x(q) - z| dq + \int_{\tau}^t K_2|z| dq \\ &\leq \int_{\tau}^t K_2(q)|x(q) - z| dq + K_2(1 + R)|t - \tau|. \end{aligned}$$

Do lema de Gronwall segue que

$$|x(t) - z| \leq K_2(1 + R)e^{K_2(t-\tau)} |t - \tau|, \quad t \geq \tau,$$

provando (1.8). Agora provemos a segunda asserção. Observe que

$$x(t) - x_1(t) = \int_{\tau}^t [f(s, x(s), u(s)) - f(s, x_1(s), u(s))] ds + (z - z_1), \quad t \geq \tau.$$

Assim, (1.7) segue da continuidade de Lipschitz de f e do lema de Gronwall. ■

1.4 Lipschitz Continuidade da Função Valor

Nesta seção mostraremos que a função valor, sob as hipóteses básicas suplementadas pela hipótese extra (H6), é Lipschitz contínua. Para tal, precisaremos combinar controles viáveis definidos em diferentes intervalos de tempo. Sejam $u_1 \in U_{ad}[s_1, \infty]$, $u_2 \in U_{ad}[s_2, \infty]$, onde $0 \leq s_1 \leq s_2 < \infty$. Definimos a *concatenação*

$$u_1 \overset{s_2}{\frown} u_2 := \begin{cases} u_1(t), & t \in [s_1, s_2] \\ u_2(t), & t \in [s_2, \infty) \end{cases}.$$

Lema 1.4.1 *Suponha que as hipóteses (H1), ..., (H5) e (H6) valem. Então temos*

- a) $V(\tau, z)$ está bem definida para todo $(\tau, z) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$;
- b) A função valor $V(\cdot, \cdot)$ é Localmente Lipschitz em $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Asserção a) segue de (H6) e Teorema 1.2.1. Para demonstrar b) é suficiente provar que dados $T > 0$, $R > 0$, existe uma constante C tal que para todos (s_1, z_1) e $(s_2, z_2) \in [0, T] \times \overline{B}_R(0)$ tem-se

$$|V(s_1, z_1) - V(s_2, z_2)| \leq C(|s_1 - s_2| + |z_1 - z_2|). \quad (1.9)$$

Já que $[0, T] \times \overline{B}_R(0)$ é compacto segue de (H6) que existe um conjunto invariante $\mathcal{S}_{T,R} \subset \mathbb{R}^n$ de forma que para toda condição inicial $(\tau, z) \in [0, T] \times \overline{B}_R(0)$, o processo viável $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathcal{D}_{\tau, z; \infty}$ satisfaz $x(\cdot) \in \mathcal{S}_{T,R}$, i.e.,

$$|x(t)| \leq M_{T,R}, \quad t \in [\tau, \infty). \quad (1.10)$$

Sejam $(s_1, z_1), (s_2, z_2) \in [0, \infty) \times B_R(0)$ dados, com $s_1 \leq s_2$. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $u_1 \in U_{ad}[s_1, \infty)$, $u_2 \in U_{ad}[s_2, \infty)$ tal que

$$V(s_i, z_i) \geq J(u_i; s_i, z_i) - \varepsilon, \quad i = 1, 2.$$

Defina $\tilde{u}_1 := u_1 \upharpoonright^{s_2} u_2$, $\tilde{u}_2 := u_1|_{[s_2, \infty)}$. Sejam $x_1, x_2, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ os estados correspondentes a $x_1(s_1) = \tilde{x}(s_1) = z_1$ e $x_2(s_2) = \tilde{x}_2(s_2) = z_2$. Assim obtemos

$$\begin{aligned} V(s_1, z_1) - V(s_2, z_2) &\leq V(s_1, z_1) - J(u_2; s_2, z_2) + \varepsilon \\ &\leq J(\tilde{u}_1; s_1, z_1) - J(u_2; s_2, z_2) + \varepsilon \end{aligned}$$

e por simetria

$$\begin{aligned} |V(s_1, z_1) - V(s_2, z_2)| &\leq \varepsilon + |J(\tilde{u}_1; s_1, z_1) - J(u_2; s_2, z_2)| \\ &\quad + |J(u_1; s_1, z_1) - J(\tilde{u}_2; s_2, y_2)|. \end{aligned}$$

Para obter (1.9) devemos estimar os termos

$$|J(\tilde{u}_1; s_1, z_1) - J(u_2; s_2, z_2)|, \quad |J(u_1; s_1, z_1) - J(\tilde{u}_2; s_2, y_2)|.$$

Segue da definição de J e das hipóteses (H2), (H3) que

$$\begin{aligned} |J(\tilde{u}_1; s_1, z_1) - J(u_2; s_2, z_2)| &\leq \left| \int_{s_1}^{s_2} e^{-\delta r} l(r, \tilde{x}_1(r), \tilde{u}_1(r)) dr \right| \\ &\quad + \left| \int_{s_2}^{\infty} e^{-\delta r} l(r, \tilde{x}_1(r), \tilde{u}_1(r)) - e^{-\delta r} l(r, x_2(r), u_2(r)) dr \right| \\ &\leq K_2 \int_{s_1}^{s_2} e^{-\delta r} (1 + |x_1(r)|) dr + K_1 \int_{s_2}^{\infty} e^{-\delta r} |\tilde{x}_1(r) - x_2(r)| dr. \end{aligned} \quad (1.11)$$

O primeiro termo do lado direito de (1.11), via lema de Gronwal, pode ser estimado por $\tilde{C}|s_1 - s_2|$, para alguma constante $\tilde{C}$, a qual depende de K_2, T e R .

Agora estimemos o último termo. Segue de (1.7) que

$$\begin{aligned} |\tilde{x}_1(r) - x_2(r)| &\leq e^{K_1(r-s_2)} |\tilde{x}_1(s_2) - z_2| \\ &\leq e^{K_1(r-s_2)} (|\tilde{x}_1(s_2) - z_1| + |z_1 - z_2|), \end{aligned}$$

para $r \geq s_2$. Além disso, segue de (1.8) que $|\tilde{x}_1(s_2) - z_1| \leq C|s_2 - s_1|$, with $C = K_2(1 + R)e^{K_2T}$. Assim,

$$|\tilde{x}_1(r) - x_2(r)| \leq Ce^{K_1(r-s_2)} (|s_1 - s_2| + |z_1 - z_2|), \quad r > s_2.$$



Substituindo em (1.11) e usando o fato de que $K_1 < \delta$, por hipótese, obtemos

$$|J(\tilde{u}_1; s_1, z_1) - J(u_2; s_2, z_2)| \leq C(|s_1 - s_2| + |z_1 - z_2|).$$

O termo $|J(u_1; s_1, z_1) - J(\tilde{u}_2; s_2, y_2)|$ pode ser estimado de forma análoga e segue de (1.11) que

$$|V(s_1, z_1) - V(s_2, z_2)| \leq \varepsilon + C(|s_1 - s_2| + |z_1 - z_2|),$$

onde a constante C depende de $z_1, z_2, s_1, s_2, \varepsilon$ e cresce exponencialmente com T .

A continuidade de Lipschitz de V segue da passagem ao limite quando $\varepsilon \downarrow 0$, ■

Neste capítulo apresentaremos resultados da programação dinâmica para problemas regulares com horizonte infinito, sob hipóteses bem flexíveis.

2.1 Preliminares e subdiferenciais Proximal e de Dini

Principalmente, recordemos que as funções Hamiltonianas

$$H : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

e

$$h : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

são as funções previamente definidas no Capítulo 1 em (1.5)-(1.6).

Antes de nos concentrarmos nos resultados principais deste capítulo, precisamos recordar alguns conceitos da análise não-linear.

Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que o vetor $\xi \in \mathbb{R}^n$ é o *gradiente proximal* de f at x se existir uma vizinhança U de x e um número $\sigma > 0$ tal que

$$f(y) \geq f(x) + \langle \xi, y - x \rangle - \sigma \|y - x\|^2, \quad \forall y \in U. \quad (2.1)$$

Denotamos por $\partial_p f(x)$ o conjunto de todos os subgradientes proximais ξ de f em x .

Capítulo 2

Programação Dinâmica

Neste capítulo apresentaremos resultados da programação dinâmica para problemas regulares com horizonte infinito, sob hipóteses bem flexíveis.

2.1 Preliminares e subdiferenciais Proximal e de Dini

Primeiramente, recordemos que as funções Hamiltonianas

$$H : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

e

$$\mathcal{H} : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}.$$

são as funções previamente definidas no Capítulo 1 em (1.5)-(1.6).

Antes de nos concentrarmos nos resultados principais deste capítulo, precisamos recordar alguns conceitos da análise não-suave.

Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que o vetor $\xi \in \mathbb{R}^n$ é o *gradiente proximal* de f at x se existir uma vizinhança U de x e um número $\sigma > 0$ tal que

$$f(y) \geq f(x) + \langle \xi, y - x \rangle - \sigma \|y - x\|^2, \quad \forall y \in U. \quad (2.1)$$

Denotamos por $\partial_P f(x)$ o conjunto de todos os subgradiantes proximais ξ de f em x .

Definimos também o conjunto de *supergradientes proximais* por $\partial^P f(x) := -\partial_P(-f)(x)$. É fácil ver que $\xi \in \partial^P f(x)$ se existir uma vizinhança U de x e um número $\sigma > 0$ tal que

$$f(y) \leq f(x) + \langle \xi, y - x \rangle + \sigma \|y - x\|^2, \quad \forall y \in U. \quad (2.2)$$

A *subderivada de Dini* de f em x , na direção v , definida por

$$Df(x; v) := \liminf_{\substack{w \rightarrow v \\ t \downarrow 0}} \frac{f(x + tw) - f(x)}{t} \quad (2.3)$$

e o *subgradiente de Dini* de f em x é o conjunto definido por

$$\partial_D f(x) := \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid Df(x; v) \geq \langle \xi, v \rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n\}. \quad (2.4)$$

O *supergradiente de Dini*, denotado por $\partial^D f(x)$, pode ser definido usando a *superderivada de Dini*, ou alternativamente, por $-\partial_D(-f)(x)$.

Embora $\partial_P f(x) \subset \partial_D f(x)$ (a inclusão poder ser estrita), é possível aproximar o subgradiente de Dini pelo subgradiente proximal. Este resultado será enunciado formalmente a seguir.

Lema 2.1.1 (ver, e.g., [13, Proposition 3.4.5]) *Seja $\xi \in \partial_D f(x)$. Então para todo $\varepsilon > 0$ existe $z \in x + B_\varepsilon(0)$ e $\zeta \in \partial_P f(x)$ tal que $|f(x) - f(z)| < \varepsilon$ e $\|\xi - \zeta\| < \varepsilon$.*

Antes de avançarmos com os resultados deste capítulo, vamos introduzir as hipóteses básicas sobre f e f_0 .

Hipóteses Básicas:

(B1) f e f_0 são funções contínuas ;

(B2) $\exists K_0$ e $\exists K_f$ tais que $f_0(t, x, u) \leq K_0(1 + \|x\|)$ e $f(t, x, u) \leq K_0(1 + \|x\|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall u \in \Omega$.

Estas hipóteses estarão satisfeitas ao longo deste capítulo.

2.2 Programação dinâmica

Seja $\phi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha que $f(\cdot, \cdot, u)$ é localmente Lipschitz em $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. Dizemos que o sistema (ϕ, f) é *fracamente decrescente* se para qualquer $z \in \mathbb{R}^n$, existe um processo viável $(x, u) \in \mathcal{D}_{0,z;\infty}$ que satisfaz $\phi(t, x(t)) \leq \phi(0, x(0)) \forall t \geq 0$. Dizemos que o sistema (ϕ, f) é *fortemente crescente* em $[0, \infty)$ se para qualquer intervalo $[a, b]$ contido em $[0, \infty)$, qualquer processo viável $(x, u) \in \mathcal{D}_{a,x(a),\infty}$ satisfaz $\phi(t, x(t)) \leq \phi(b, x(b)) \forall t \in [a, b]$. É fácil verificar que (ϕ, f) é fortemente crescente em $[0, \infty)$ se e somente a função $t \mapsto \phi(t, x(t))$ é não-decrescente, sempre que (x, u) é um processo viável de $P_\infty(0, x(0))$.

De acordo com a notação acima introduzida, enunciaremos uma proposição que relaciona sistemas fracamente decrescentes e fortemente crescentes (decrescentes) com a hamiltonianas.

Proposição 2.2.1 *Se $f(\cdot, \cdot, u)$ localmente Lipschitz e ϕ contínua então:*

(a) (ϕ, f) é fortemente crescente em $[0, \infty)$ se e somente se

$$\alpha + h(t, x, \zeta) \geq 0, \forall (\alpha, \zeta) \in \partial_P \phi(t, x), \forall (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n; \quad (2.6)$$

(b) (ϕ, f) é fortemente decrescente em $[0, \infty)$ se e somente se

$$\alpha + \hat{h}(t, x, \zeta) \leq 0, \forall (\alpha, \zeta) \in \partial_P \phi(t, x), \forall (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n;$$

(c) (ϕ, f) é fracamente decrescente em $[0, \infty)$ se e somente se

$$\alpha + h(t, x, \zeta) \leq 0, \forall (\alpha, \zeta) \in \partial_P \phi(t, x), \forall (t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n.$$

Aqui $h, \hat{h} : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ são as funções

$$h(t, x, \zeta) := \min\{\langle \zeta, f(t, x, u) \rangle : u \in \Omega\}$$

c

$$\hat{h}(t, x, \zeta) := \max\{\langle \zeta, f(t, x, u) \rangle : u \in \Omega\}.$$

Demonstração: Esta proposição é um apanhado de resultados que podem ser encontrados em [13]. ■

Precisaremos a seguir da definição de pontos de Lebesgue de uma função dada $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Dizemos que $t \in \mathbb{R}$ é um *ponto de Lebesgue* de g se $\lim_{h \downarrow 0} \int_t^{t+h} g(\sigma) d\sigma = g(t)$. Agora apresentamos os resultados da Proposição acima adaptados ao nosso problema.

Proposição 2.2.2 *Seja $\varphi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\mathcal{H}$ a função Hamiltoniana associada ao problema $(P_\infty(s, z))$. Então*

(a) *a função $t \in [s, \infty) \rightarrow \varphi(t, x(t)) - \int_t^\infty e^{-\delta\sigma} f_0(\sigma, x(\sigma), u(\sigma)) d\sigma \in \mathbb{R}$ é não-decrescente ao longo de qualquer processo $(x, u) \in \mathcal{D}_{s,z;\infty}$ se e somente se*

$$\min_{(\alpha, \xi) \in \partial_P \varphi(s, z)} \{ \alpha + \mathcal{H}(s, z, \xi) \} \geq 0 \quad (2.5)$$

para todo $(s, z) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$.

(b) *a função $t \in [s, \infty) \rightarrow \varphi(t, x(t)) - \int_t^\infty e^{-\delta\sigma} f_0(\sigma, x(\sigma), u(\sigma)) d\sigma \in \mathbb{R}$ é não-crescente ao longo de qualquer processo $(x, u) \in \mathcal{D}_{s,z;\infty}$ se e somente se*

$$\max_{(\alpha, \xi) \in \partial_P \varphi(s, z)} \{ \alpha + \hat{\mathcal{H}}(s, z, \xi) \} \leq 0 \quad (2.6)$$

para todo $(s, z) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$.

(c) *a função $t \in [s, \infty) \rightarrow \varphi(t, x(t)) - \int_t^\infty e^{-\delta\sigma} f_0(\sigma, x(\sigma), u(\sigma)) d\sigma \in \mathbb{R}$ é não-crescente ao longo de algum processo $(x, u) \in \mathcal{D}_{s,z;\infty}$ se e somente se*

$$\max_{(\alpha, \xi) \in \partial_P \varphi(s, z)} \{ \alpha + \mathcal{H}(s, z, \xi) \} \leq 0 \quad (2.7)$$

para todo $(s, z) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$.

A notação $\hat{\mathcal{H}}$ significa a troca da minimização pela maximização na definição de $\mathcal{H}$, i.e.,

$$\hat{\mathcal{H}}(s, z, \xi) := \max_{u \in \Omega} \{ \langle \xi, f(s, z, u) \rangle + e^{-\delta s} f_0(s, z, u) \}.$$

Demonstração: Demonstraremos asserção (a) da Proposição. As demonstrações das asserções (b) e (c) são similares à demonstração da asserção (a) e serão omitidas.

Seja $(x, u) \in \mathcal{D}_{s,z;\infty}$. Seja S o subconjunto de medida total de pontos $t \in [s, \infty)$ tal que existe a derivada de x em t e t é um ponto de Lebesgue de $\sigma \rightarrow e^{-\delta\sigma} f_0(\sigma, x(\sigma), u(\sigma))$.

Da desigualdade do gradiente proximal obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} & \varphi(t+r, x(t+r)) - \varphi(t, x(t)) + \int_t^{t+r} e^{-\delta\sigma} f_0(\sigma, x(\sigma), u(\sigma)) d\sigma \geq \\ & \alpha r + \langle \xi, x(t+r) - x(t) \rangle + \int_t^{t+r} e^{-\delta t} f_0(t, x(t), u(\sigma)) d\sigma - \\ & O(r^2 + \|x(t+r) - x(t)\|^2) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Utilizando o fato que $x(s+r) - x(s) = \dot{x}(s)r + O(r^2)$, dividindo a expressão (2.8) por r e tomando o limite inferior, quando $r \rightarrow 0+$ obtemos

$$\begin{aligned} & D \left[\varphi(t, x(t)) - \int_t^\infty e^{-\delta\sigma} f_0(\sigma, x(\sigma), u(\sigma)) d\sigma \right] \geq \\ & e^{-\delta t} f_0(t, x(t), u(t)) + \alpha + \langle \xi, f(s, x(s), u(\sigma)) \rangle \geq 0 \quad (\text{por (2.5)}). \end{aligned}$$

para todo $(\alpha, \xi) \in \partial_P \varphi(s, z)$. A monotonia de

$t \mapsto \varphi(t, x(t)) - \int_t^\infty e^{-\delta\sigma} f_0(\sigma, x(\sigma), u(\sigma)) d\sigma$ segue de [20].

Passemos agora a prova da recíproca. Seja $\phi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$\phi(t, x, y) := \varphi(t, x) - y.$$

Defina o campo estendido $\hat{f} := (-f_0, f)^t$, onde t significa transposto. A função ϕ , por hipótese, é crescente ao longo de qualquer processo viável de $\hat{f}$. Logo (Ver Exercício 4.6.4, [13]) o sistema $(\phi, \hat{f})$ é fortemente crescente e satisfaz as hipóteses da Proposição 2.2.1. Isto implica que

$$\alpha + \min_{u \in \Omega} \{ \langle \zeta, f(t, x, u) \rangle - \langle \zeta_0, e^{\delta t} f_0(t, x, u) \rangle \} \geq 0$$

para todo $(t, x, y) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, para qualquer $(\alpha, \zeta, \zeta_0) \in \partial \phi(t, x, y)$. Fazendo $\varphi_1(t, x, y) := \varphi(t, x)$ e $\varphi_2(t, x, y) = y$ obtém-se de ([13], Prop 2.2.11) que

$$(\alpha, \zeta, \zeta_0) - \varphi'_2(t, x, y) \in \partial_p \varphi_1(t, x, y).$$

Dai segue que

$$(\alpha, \zeta, \zeta_0) - (0, 0, -1) \in \partial_p \varphi_1(t, x, y).$$



Isto implica que $(\alpha, \zeta) \in \partial\varphi(t, x)$ e $\zeta_0 = -1$, obtendo o resultado desejado. ■

Agora, verifiquemos que função definida por

$$t \in [s, \infty) \rightarrow V(t, x(t)) - \int_t^\infty e^{-\delta\sigma} f_0(\sigma, x(\sigma), u(\sigma)) d\sigma \in \mathbb{R}$$

(veja que trocamos a função contínua φ da Proposição pela função valor V) é não-decrescente, ao longo de qualquer processo viável $(x, u) \in \mathcal{D}_{z,0;\infty}$. Seja $t \in [0, \infty)$ fixo e $r > 0$ qualquer. Então, para qualquer processo $(x, u) \in \mathcal{D}_{z,0;\infty}$, temos

$$\begin{aligned} & V(t+r, x(t+r)) - \int_{t+r}^\infty e^{\delta s} f_0(s, x(s), u(s)) ds \\ & - [V(t, x(t)) - \int_t^\infty e^{\delta s} f_0(s, x(s), u(s)) ds] \\ & = V(t+r, x(t+r)) - V(t, x(t)) + \int_t^{t+r} e^{\delta s} f_0(s, x(s), u(s)) ds \geq 0; \end{aligned}$$

(a desigualdade segue do princípio da otimalidade da programação dinâmica). Isto acarreta a monotonia da função em questão.

A consequência desta monotonia à luz da Proposição 2.2.2 é que a função valor, de fato, satisfaz a desigualdade (2.5).

Como corolário das Proposição 2.2.2 temos o seguinte resultado.

Corolário 2.2.1 *Dado um processo $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathcal{D}_{0,z;\infty}$, se existe uma função contínua φ de forma que desigualdade (2.5) é satisfeita ao longo de $(\bar{x}, \bar{u})$ e*

$$1. \varphi(0, z) = \int_0^\infty e^{\delta t} f_0(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt;$$

$$2. \lim_{s \uparrow \infty} \varphi(s, z') = 0 \quad \forall z' \text{ em conjuntos compactos do } \mathbb{R}^n,$$

então $(\bar{x}, \bar{u})$ é um processo ótimo de $(P_\infty(0, z))$.

Demonstração: Tome $(x, u) \in \mathcal{D}_{0,z;\infty}$ um processo admitível qualquer. Seja φ uma função satisfazendo as hipótese do corolário. Da Proposição 2.2.2 segue a função

$$t \rightarrow \varphi(t, x(t)) - \int_t^\infty e^{\delta s} f_0(s, x(s), u(s)) ds$$

é não decrescente. Então, para qualquer $t > 0$ temos

$$\begin{aligned} \varphi(t, x(t)) - \int_t^\infty e^{\delta s} f_0(s, x(s), u(s)) ds & \geq \\ \varphi(0, x(0)) - \int_0^\infty e^{\delta s} f_0(s, x(s), u(s)) ds. \end{aligned}$$

A simple algebraic calculation implies

$$\varphi(t, x(t)) + \int_0^t e^{\delta s} f_0(s, x(s), u(s)) ds \geq \varphi(0, x(0)).$$

Tomando o limite quando $t \uparrow \infty$ e usando as condições 1 e 2 sobre φ segue que

$$\int_0^\infty e^{\delta s} f_0(s, x(s), u(s)) ds \geq \varphi(0, x(0)) = \int_0^\infty e^{\delta s} f_0(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)) ds.$$

■

Uma função φ que satisfaz as condições do corolário é conhecida como *função de verificação* para o processo $(\bar{x}, \bar{u})$.

Agora é pertinente chamar a atenção para o fato da função valor V satisfazer a condição 2. do Corolário 2.2.1, ou seja a condição de decaimento a zero quando o tempo vai ao infinito, uniformemente em compactos do $\mathbb{R}^n$ ([8], Proposição 9). Neste trabalho, em diversas ocasiões, faremos referências a esta condição apenas como condição de decaimento. Por outro lado, é claro que V satisfaz a condição 1. do corolário se e somente se a o processo $(\bar{x}, \bar{u})$ for ótimo.

Assim, temos o seguinte resultado de verificação:

Proposição 2.2.3 *Um processo $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathcal{D}_{0,z,\infty}$, é ótimo se e somente se existe uma função de verificação para este processo. A função valor é uma tal função de verificação.*

O próximo resultado, um dos principais deste capítulo, fornece a equivalência entre as soluções proximais e de Dini das desigualdades de HJB.

Proposição 2.2.4 *Seja $\phi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Então*

- (a) $\max_{(\alpha, \xi) \in \partial_P \varphi(s, z)} \{ \alpha + \mathcal{H}(s, z, \xi) \} \leq 0 \iff \max_{(\alpha, \xi) \in \partial_D \varphi(s, z)} \{ \alpha + \mathcal{H}(s, z, \xi) \} \leq 0;$
- (b) $\min_{(\alpha, \xi) \in \partial_P \varphi(s, z)} \{ \alpha + \mathcal{H}(s, z, \xi) \} \geq 0 \iff \min_{(\alpha, \xi) \in \partial_D \varphi(s, z)} \{ \alpha + \mathcal{H}(s, z, \xi) \} \geq 0.$
- (c) *A função valor V satisfaz as desigualdades de HJB dos itens (a) e (b).*

Demonstração: Provemos (a). A condição suficiente segue do fato que $\partial_P \phi(t, x) \subset \partial_D \phi(t, x)$ for all (t, x) no domínio de ϕ . Provemos a condição necessária. Seja $(\alpha, \beta) \in \partial_D \phi(s, z)$ arbitrário. Segue do Lema 2.1.1 que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $(\alpha_n, \beta_n) \in (\alpha, \beta) + B_{\frac{1}{n}}(0)$ e $(s_n, z_n) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ tais que $|s_n - s| + |z_n - z| < 1/n$, $(\alpha_n, \beta_n) \in \partial_P \phi(s_n, z_n)$ e $\phi(s_n, z_n) - \phi(s, z) < 1/n$. Então

$$\alpha_n + \mathcal{H}(s_n, z_n, \beta_n) \leq 0 \quad \forall n.$$

Já que a função $\mathcal{H}$ é contínua, tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$, obtemos o desejado.

Agora provemos (b). A primeira desigualdade de (b) é satisfeita para todo $(\alpha, \xi) \in \partial_P \varphi(s, z)$ se, e somente se, a função $t \in [s, \infty) \rightarrow \varphi(t, x(t)) - \int_t^\infty e^{-\delta\sigma} f_0(\sigma, x(\sigma), u(\sigma)) d\sigma \in \mathbb{R}$ é não-decrescente ao longo de qualquer processo $(x, u) \in \mathcal{D}_{s,z;\infty}$. Isto equivale a $t \in [s, \infty) \rightarrow -\varphi(t, x(t)) + \int_t^\infty e^{-\delta\sigma} f_0(\sigma, x(\sigma), u(\sigma)) d\sigma \in \mathbb{R}$ ser não-crescente ao longo de qualquer processo $(x, u) \in \mathcal{D}_{s,z;\infty}$, que por sua vez é equivalente a

$$\max_{(\alpha, \xi) \in \partial_D(-\varphi)(s, z)} \{ \alpha + \hat{\mathcal{H}}(s, z, \xi) \} \leq 0 \quad (2.9)$$

para todo $(s, z) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. Agora podemos utilizar o Lema 2.1.1, análogo à demonstração da parte (a) para verificar que (2.9) é equivalente a

$$\max_{(\alpha, \xi) \in \partial_P(-\varphi)(s, z)} \{ \alpha + \hat{\mathcal{H}}(s, z, \xi) \} \leq 0 \quad (2.10)$$

para todo $(s, z) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. Como $\partial_D(-\varphi)(s, z) = -\partial^D \varphi(s, z)$ é fácil ver que (2.10) é equivalente a $\min_{(\alpha, \xi) \in \partial^D \varphi(s, z)} \{ \alpha + \mathcal{H}(s, z, \xi) \} \geq 0$, provando (b).

Finalmente, vamos provar o item (c). Já observamos que a função valor V satisfaz a primeira inequação do item (b). Assim, satisfaz também a segunda. Resta mostrar que V satisfaz alguma das desigualdades do item (a). Mostremos que V satisfaz a primeira delas. Seja $(s, z) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$. Sob as hipóteses básicas, o problema $(P_\infty(s, z))$ possui solução ótima. Tome (x, u) um processo ótimo. Assim, a função $t \rightarrow V(t, x(t)) - \int_t^\infty e^{-\delta\sigma} f_0(\sigma, x(\sigma), u(\sigma)) d\sigma \in \mathbb{R}$ é constante. Isto é equivalente ao sistema (ϕ, f_0, f) ser fracamente decrescente, que por sua vez é equivalente à desigualdade desejada. ■

2.3 Soluções Viscosas da Equação de HJB

Nesta seção vamos introduzir o conceito de solução viscosa para equações de derivadas parciais de HJB e mostrar que a função valor do problema de controle ótimo é a única solução viscosa com decaimento no infinito.

A função $v : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *solução viscosa* da equação de derivadas parciais

$$\partial_s v + \mathcal{H}(s, z, \partial_z v) = 0, \quad (s, z) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \quad (2.11)$$

quando

a) v é contínua e $v(s, z) \rightarrow 0$, quando $s \rightarrow \infty$, uniformemente em conjuntos compactos $K \subset \mathbb{R}^n$;

b) Para toda função diferenciável $\phi \in C((0, \infty) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, tal que $v - \phi$ tem um máximo local em $(s, z) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, temos

$$\{\partial_s \phi + \mathcal{H}(s, z, \partial_z \phi)\} \geq 0;$$

c) Para toda função diferenciável $\phi \in C((0, \infty) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, tal que $v - \phi$ possui um mínimo local em $(s, z) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, temos

$$\{\partial_s \phi + \mathcal{H}(s, z, \partial_z \phi)\} \leq 0.$$

Se a função v satisfaz somente a) e b), então ela é chamada *sub-solução viscosa*. Se V satisfaz somente a) and c), é então chamada de *super-solução viscosa*.

Passemos agora ao resultado principal desta seção:

Teorema 2.3.1 *A função V é a única solução viscosa da Eq. (2.11).*

A demonstração deste resultado será feita no final desta seção. Antes vamos apresentar alguns resultados que são necessários à demonstração. Entretanto, são enunciados separadamente por conterem informação premente à elucidação do assunto.

Proposição 2.3.1 (i) *Uma função v é sub-solução viscosa da Equação de HJB se e somente se*

(a) para todo $(s, z) \in [0, \infty)$,

$$\{\alpha + \mathcal{H}(s, z, \beta)\} \geq 0 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \partial^D v(s, z); \quad (2.12)$$

(b) $\lim_{s \uparrow \infty} v(s, z) = 0$ uniformemente para z em compactos do $\mathbb{R}^n$.

(ii) Uma função v é super-solução da Equação de HJB se e somente se satisfaz a asserção (b) do item (i) e, para todo $(s, z) \in [0, \infty)$, tem-se

$$\{\alpha + \mathcal{H}(s, z, \beta)\} \leq 0 \quad \forall (\alpha, \beta) \in \partial_D v(s, z). \quad (2.13)$$

Demonstração: (i) Tanto na demonstração da condição necessária quanto da suficiente, a condição de decaimento está satisfeita por hipótese. Portanto, concentraremos em demonstrar o restante.

Seja v uma função contínua satisfazendo a Eq. (2.12). Mostremos que v satisfaz a condição a) da definição de sub-solução.

Tome uma função ϕ diferenciável em (s, z) tal que $v - \phi$ tem máximo local em (s, z) . Assim $-(v - \phi)$ tem um mínimo local (s, z) , o que implica em $0 \in \partial_D(-v + \phi)(s, z)$. Logo $-\nabla\phi(s, z) \in \partial_D(-v)(s, z)$. Mas isto é equivalente a $\nabla\phi(s, z) \in \partial^D v(s, z)$. Portanto, já que v satisfaz a Eq. (2.12) e ϕ é arbitrária, a condição a) é satisfeita.

Agora provemos a recíproca. Seja v uma sub-solução viscosa da Eq. de HJB. Tome $(\alpha, \beta) \in \partial^D v$. Assim, $(-\alpha, -\beta) \in \partial_D(-v)$. Segue de ([13], Proposição 3.4.12) que existe uma função $-\phi$ tal que $\nabla(-\phi)(s, z) = (-\alpha, -\beta)$ e $-v + \phi$ tem um mínimo local em (s, z) . Isto é, $v - \phi$ tem um máximo local em (s, z) . Logo, já que v é sub-solução, a Eq. (2.12) segue da condição a).

A demonstração do item (ii) é similar e portanto será omitida. ■

2.3.1 Demonstração do Teorema 2.3.1

Sabemos que a função valor V é solução viscosa da Eq. de HJB. Resta mostrar a unicidade. Seja (s, z) pertencente ao domínio de V .

Suponha que φ seja outra solução viscosa. Provemos que $V = \varphi$. Dado $\epsilon > 0$, tome $(x, u) \in \mathcal{D}_{s, z; \infty}$ tal que $\int_s^\infty e^{-\delta\sigma} f_0(\sigma, x(\sigma), u(\sigma)) d\sigma \leq V(s, z) + \epsilon$



Assim, já que φ é sub-solução viscosa, segue das Proposições 2.2.2 e 2.2.4

$$\varphi(t, x(t)) - \int_t^\infty e^{-\delta\sigma} f_0(\sigma, x(\sigma), u(\sigma)) d\sigma \geq \varphi(s, z) - \int_s^\infty e^{-\delta\sigma} f_0(\sigma, x(\sigma), u(\sigma)) d\sigma$$

para todo $t \geq s$. Isto implica em

$$\varphi(t, x(t)) - \int_t^\infty e^{-\delta\sigma} f_0(\sigma, x(\sigma), u(\sigma)) d\sigma \geq \varphi(s, z) - V(s, z) - \epsilon.$$

Tomando o limite quando $t \rightarrow \infty$ no lado esquerda da equação acima e usando o fato que as trajetórias sub-ótimas são limitas e crescimento linear de f_0 , obtemos

$$\varphi(s, z) \leq V(s, z) + \epsilon.$$

Logo, como ϵ é arbitrário, segue que $\varphi(s, z) \leq V(s, z)$.

Agora mostremos a desigualdade contrária. Seja $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathcal{D}_{s,z;\infty}$ um processo sub-ótimo. Já que ϕ é super-solução viscosa, segue das Proposições 2.2.2 e 2.2.4

$$\varphi(t, x(t)) - \int_t^\infty e^{-\delta\sigma} f_0(\sigma, x(\sigma), u(\sigma)) d\sigma \leq \phi(s, z) - \int_s^\infty e^{-\delta\sigma} f_0(\sigma, x(\sigma), u(\sigma)) d\sigma$$

para todo $t \geq s$. Passando ao limite quando $t \rightarrow \infty$ e usando usando uma argumentação similar à primeira parte da demonstração conclui-se que $\varphi(s, z) \geq V(s, z)$.

■

Embora que os resultados apresentados neste capítulo referem-se a sistemas dinâmicos, cujos campos vetoriais são funções, estes podem ser obtidos no contexto de inclusões diferenciais, sem muita dificuldade técnica. A partir do próximo capítulo, passaremos a lidar com problemas envolvendo inclusões diferenciais.

Capítulo 3

Dinâmica Impulsiva: Estabilidade, Invariância e Monotonia

Parte II

3.1 Introdução Controle Impulsivo

Neste capítulo vamos estudar algumas propriedades fundamentais de sistemas dinâmicos impulsivos. Nosso estudo se concentrará nas propriedades de sistemas governados por inclusões diferenciais visto que nosso interesse é por sistemas de controle. Estudaremos propriedades de invariância, monotonicidade, estabilidade global segundo Lyapunov e estabilidade local (e estabilidade). Uma breve discussão introduzindo as noções básicas de sistemas dinâmicos impulsivos faz-se necessária, antes de passarmos ao estudo dessas propriedades.

Consideremos sistemas de inclusões diferenciais da forma

$$\begin{aligned} dx(t) &\in F(t, x(t))dt + G(t, x(t))\mu(dt) \quad t \in [0, \infty) \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $F : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$, e $G : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^n)$ são multi-funções dadas, e $\mu \in C^*[0, \infty); K)$ é o espaço dual das funções contínuas de $[0, \infty)$ a $\mathbb{R}^k$ tomando valores em K . O conjunto K é o cone positivo de $\mathbb{R}^k$.

Note que a inclusão diferencial é controlada por medidas. Dado um par (x_0, μ) , vamos definir conceito de trajetória como em [32], fazendo os ajustes necessários para

Capítulo 3

Dinâmica Impulsiva: Estabilidade, Invariância e Monotonia

3.1 Introdução

Neste capítulo vamos estudar algumas propriedades fundamentais de sistemas dinâmicos impulsivos. Nosso estudo se concentrará nas propriedades de sistemas governados por inclusões diferenciais, visto que nosso interesse é por sistemas de controle. Estudaremos propriedades de invariância, monotonia, estabilidade global segundo Lyapounov e estabilidade local (atingibilidade). Uma breve discussão introduzindo as noções básicas de sistemas dinâmicos impulsivos faz-se necessária, antes de passarmos ao estudo dessas propriedades.

Consideramos sistemas de inclusões diferenciais da forma

$$\begin{aligned} dx(t) &\in F(t, x(t))dt + G(t, x(t))\mu(dt) \quad t \in [0, \infty) \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $F : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, e $G : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^q)$ são multi-funções dadas e $\mu \in C^*([0, \infty); K)$ é o espaço dual das funções contínuas de $[0, \infty)$ a $\mathbb{R}^q$ tomando valores em K . O conjunto K é o cone positivo de $\mathbb{R}^q$.

Note que a inclusão diferencial é controlada por medida. Dado um par (x_0, μ) , vamos definir conceito de trajetória como em [32], fazendo os ajustes necessários para

englobar intervalos infinitos $[0, \infty)$, uma vez que lá são tratados problemas com trajetórias em intervalos limitados.

Para apresentar a noção de solução, vamos introduzir alguns conceitos e notações. No que segue $AC([0, \infty); \mathbb{R}^n)$ e $BV^+([0, \infty); \mathbb{R}^n)$ denotam o espaço de funções absolutamente contínuas com valores em $\mathbb{R}^n$, e o espaço das funções de variação limitada que são contínuas a direita em $(0, \infty)$, $|\mu|$ denota a variação total da medida μ , $|\mu|(dt) := \sum_{i=1}^q \mu_i(dt)$, $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$ é o produto σ -álgebra, onde $\mathcal{L}$ é a σ -álgebra dos conjuntos de Lebesgue de $[0, \infty)$ e $\mathcal{B}$ é a σ -álgebra dos conjuntos de Borel de $\mathbb{R}^q$. Diremos que uma certa propriedade vale quase sempre (q.s.) num conjunto quando o subconjunto dos pontos onde esta propriedade não se verifica tem medida zero.

Uma família de *completamentos gráficos* associados à medida vetorial μ é o conjunto de todos os pares $(\theta, \gamma_\mu) : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty) \times K$ onde $\theta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é a inversa de $\bar{\eta} : [0, \infty) \hookrightarrow \mathcal{P}([0, \infty))$ (i.e., $\theta(s) = t, \forall s \in \bar{\eta}(t)$) e $\gamma_\mu : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^q$ é definida $\forall s \in \bar{\eta}(t), \forall t \in [0, \infty)$, por

$$\gamma(s) := \begin{cases} M(\theta(s)) & \text{se } |\mu|(\{t\}) = 0 \\ M(t^-) + \int_{\eta(t^-)}^s \bar{v}(\sigma) d\sigma & \text{se } |\mu|(\{t\}) > 0, \end{cases}$$

onde

- $v(\cdot) \in V^t := \{v : \bar{\eta}(t) \rightarrow K \mid \dot{\theta}(s) + \sum_{i=1}^m v_i(s) = 1 \forall s \in \bar{\eta}(t), \int_{\bar{\eta}(t)} v(s) ds = \mu(\{t\})\} \forall t \in [0, \infty)$;
- $M(\cdot) := \text{col}(M_1(\cdot), \dots, M_m(\cdot))$, com $M_i(t) := \int_{[0, t]} \mu_i(ds), \forall t > 0$, e $M_i(0) := 0, i = 1, \dots, m$;
- $\eta(\cdot)$, definida por $\eta(t) := t + \sum_{i=1}^m M_i(t)$, é a reparametrização do tempo; e
- $\bar{\eta}(t) := \begin{cases} \{\eta(t)\} & \text{se } |\mu|(\{t\}) = 0, \\ [\eta(t^-), \eta(t)] & \text{se } |\mu|(\{t\}) > 0. \end{cases}$

Definição 3.1.1 Uma função $x \in BV^+([0, \infty); \mathbb{R}^n)$ é uma solução robusta de (3.1) se existir uma função Lebesgue integrável f , $f(t) \in F(t, x(t))$ $\mathcal{L}$ -a.e., e uma função $|\mu|$ -integrável g , $g(t) \in \tilde{G}(t, x(t^-); \mu(\{t\}))$ $|\mu|$ -a.e., tal que

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(\tau) d\tau + \int_{[0,t]} g(\tau) |\mu|(d\tau) \quad \forall t \in (0, \infty),$$

onde a multi-função $\tilde{G} : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times K \hookrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ é definida por

$$\tilde{G}(t, z; \alpha) := \begin{cases} \{G(t, z)w(t)\} & \text{se } |\alpha| = 0 \\ \left\{ \frac{|\xi(\eta(t)) - \xi(\eta(t^-))|}{|\alpha|} \right\} & \text{se } |\alpha| > 0 \end{cases},$$

para todo $(\xi(\cdot), \gamma_\mu)$ satisfazendo

$$\xi(\eta(t^-)) = z, \quad (3.2)$$

$$\dot{\xi}(s) = G(t, \xi(s)) \dot{\gamma}_\mu(s) \quad \bar{\eta}(t)\text{-a.e.}, \quad e \quad (3.3)$$

$$\alpha = \gamma_\mu(\eta(t)) - \gamma_\mu(\eta(t^-)), \quad (3.4)$$

para alguma função $G \in \mathbf{G}$ contínua em t e Lipschitz em x . Aqui, $|\alpha| = \sum_{i=1}^q \alpha_i$, $w(\cdot)$ é a derivada de Radon-Nicodym de μ w.r.t. $|\mu|$, (ξ, γ_μ) pertence a $AC([0, \infty); \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q)$, e o par (θ, γ_μ) é um completamento gráfico de μ .

Dizemos que (x, μ) é um processo viável para o sistema (3.1) se $\mu \in C^*([0, \infty); K)$ e x é uma solução robusta de (3.1).

Vamos precisar neste capítulo e no próximo de um resultado que diz respeito a mudança de variáveis em integrais. A demonstração deste resultado é similar ao caso de medida escalar [37] e será omitida.

Lema 3.1.1 Seja (θ, Γ) uma família de completamentos gráficos de $\mu \in C^*([0, \infty); K)$ e tome $\gamma(\cdot)$ uma seleção mensurável de $\Gamma(\cdot)$. Então

(i) θ e γ são funções Lipschitz, não-negativas e satisfazem

$$\dot{\theta}(s) + \sum_{i=1}^k \dot{\gamma}_i(s) = 1 \quad \mathcal{L} - q.s.; \quad (3.5)$$

- (ii) Para toda medida de Borel $\mu \in C^*([0, \infty), K)$, toda função integrável $G : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^{n \times k}$ e conjunto de Borel $T \subset [0, \infty)$, temos

$$\int_{\theta^{-1}(T)} G(\theta(s)) \dot{\gamma}(s) ds = \int_T G(\tau) \mu(d\tau).$$

- (iii) Para qualquer função Lebesgue mensurável $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n$ e conjunto de Borel $S \subset [0, \infty)$, tem-se que $\theta(S)$ é também um conjunto de Borel e

$$\int_S f(\theta(s)) \dot{\theta}(s) ds = \int_{\theta(S)} f(\tau) d\tau.$$

Associada à inclusão impulsiva (3.1) existe uma inclusão usual. Esta associação é de tal forma que, fixada a medida de controle e, em consequência o seu complemento gráfico, soluções da inclusão regular estão associadas às soluções de inclusão impulsiva de forma especial. O resultado a seguir enuncia isto formalmente. A demonstração será omitida, pois é quase análoga à demonstração do resultado similar (Teorema 4.1, [36]), em que a medida de controle é escalar.

Teorema 3.1.1 *Suponha que as multi-funções de (3.1) satisfazem:*

- F toma valores em conjuntos fechados e é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$ mensurável; e
- G toma valores em conjuntos fechados e é Borel mensurável.

Fixe uma medida $\mu \in C^*([0, \infty); K)$ e um valor inicial x_0 . Seja (θ, γ) o completamento gráfico de μ e η a função de reparametrização.

- (i) Suponha que $x(\cdot) \in BV^+([0, \infty); \mathbb{R}^n)$ é uma solução robusta de (3.1) (em relação a μ e x_0). Então existe uma solução $y(\cdot) \in AC([0, \infty); \mathbb{R}^n)$ de

$$\begin{cases} \dot{y}(s) & \in F_1(\theta(s), y(s)) \dot{\theta}(s) + F_2(\theta(s), y(s)) \dot{\gamma}(s) \\ y(0) & = x_0 \end{cases} \quad (3.5)$$

para a qual

$$x(t) = y(\eta(t)) \quad \text{for all } t \in (0, \infty). \quad (3.6)$$

Reciprocamente,

(ii) suponha que $y(\cdot) \in AC([0, \infty); \mathbb{R}^n)$ é solução de (3.5). Então existe uma solução $x(\cdot) \in BV^+([0, \infty); \mathbb{R}^n)$ de (3.1) para a qual (3.6) é satisfeito.

(iii) Tome uma solução x to (3.1). Let y be a solution to (3.5) tal que (3.6) é satisfeita. Então

$$\|x\|_{T.V.} \leq \|y\|_{T.V.}$$

Antes de começarmos a discussão dos resultados principais deste capítulo vamos apresentar as hipóteses básicas sobre as multi-funções F e G . Estas hipóteses permanecem válidas para o resto do capítulo.

Hipóteses Básicas:

(h1) Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $F(x)$ e $G(x)$ são conjuntos convexos, compactos e não vazios;

(h2) F e G são semi-contínuas superior;

(h3) existem constantes a e b tais que para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$v \in F(x) \implies \|v\| \leq a\|x\| + b; \quad (3.7)$$

$$v \in G(x) \implies \|v\| \leq a\|x\| + b. \quad (3.8)$$

Recordamos que a multi-função F é semi-contínua superior em x se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|y - x\| < \delta \implies F(y) \subset F(x) + \epsilon B,$$

onde B significa a bola unitária de $\mathbb{R}^n$. A hipótese (h3) é conhecida como condição de crescimento linear e é uma generalização natural do caso onde F é uma função (cada imagem é um único ponto).

3.2 Estabilidade segundo Lyapunov

Vamos agora supor que as multi-funções F e G , que definem a dinâmica, não dependem explicitamente da variável tempo. Vamos propor os resultados principais que dizem respeito à estabilidade dos sistemas de controle com parte singular.



Seja

$$\tilde{F}(\bar{x}) := \{F(\bar{x})v_0 + \mathbf{G}(\bar{x})v : v \in \bar{V}\}, \quad (3.9)$$

onde $\bar{V} := \{(v_0, v) : v_0 \geq 0, v \in K, \sum_{i=0}^q v_i = 1\}$.

Dizemos que duas funções Q e V constituem um par de Lyapounov para $\bar{x}$ se satisfazem:

- 1) $Q, V \geq 0$; $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = \bar{x}$;
- 2) $\{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) \leq r\}$ é compacto para todo $r \in \mathbb{R}$; e
- 3) $\min_{v \in \tilde{F}(t,x)} \langle \xi, v \rangle \leq -V(x), \quad \forall \xi \in \partial_P Q(x),$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

onde $\partial_P Q(x)$ denota o subgradiente proximal de Q em x .

Dado um ponto $\bar{x}$ tal que $0 \in \tilde{F}(\bar{x})$ (isto significa que $\bar{x}$ é ponto de equilíbrio de $(F, \mathbf{G})$), dizemos que o sistema $(F, \mathbf{G})$ é globalmente assintoticamente controlável (GAC) a $\bar{x}$ se para qualquer ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe um processo viável (x, μ) de (3.1), para o qual $x(0) = x_0$ e $x(t) \rightarrow \bar{x}$, quando t vai ao infinito. Quando isto ocorrer, diremos simplesmente que $(F, \mathbf{G}, \bar{x})$ é GAC.

Mostraremos que, sob hipóteses razoáveis, a existência de um par de funções de Lyapounov para o ponto de equilíbrio $\bar{x}$ implica que o sistema $(F, \mathbf{G}, \bar{x})$ é GAC.

Algumas vezes, neste capítulo, vamos precisar de uma condição de regularidade do ponto de equilíbrio em relação às colunas do campo singular:

$$(CR) \quad 0 \notin \{G(\bar{x})v : (0, v) \in \bar{V}\}.$$

Quando dissermos que a condição de regularidade (CR) vale sem explicitar o ponto de equilíbrio, estamos supondo que (CR) seja válida em todo ponto de equilíbrio do sistema $(F, \mathbf{G})$.

Teorema 3.2.1 *Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 \in \tilde{F}(\bar{x})$. Suponha que exista um par de funções de Lyapounov Q e V para $\bar{x}$ e que este satisfaça a condição de regularidade (CR). Suponha ainda que V seja Lipschitz e cresça linearmente. Então, $(F, \mathbf{G}, \bar{x})$ é GAC.*

Demonstração: Sejam $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e (Q, V) um par de Lyapounov para $\bar{x}$. Segue de ([13], Teorema 4.5.5) que para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existe uma trajetória $y(\cdot)$ de $\tilde{F}$ tendo $y(0) = x_0$ tal que $y(s) \rightarrow \bar{x}$ quando s converge ao infinito. Segue da construção da trajetória y através da seleção mínima em $\tilde{F}$ e da própria definição de $\tilde{F}$ que vale a inclusão:

$$\dot{y}(s) \in \{f(s)v_0 + g(s)v : v \in \bar{V}\},$$

onde $f(s) \in F(y(s))$ e $g(s) \in G(y(s))$ para quase todo $s \in [0, \infty)$.

Agora podemos aplicar o teorema da seleção mensurável. Assim existe uma função Lebesgue mensurável $(v_0, v_1, \dots, v_q)(s) \in \bar{V}$, quase sempre em $[0, \infty)$, tal que

$$\dot{y}(s) = f(s)v_0(s) + \sum_{i=1}^q g_i(s)v_i(s). \quad (3.10)$$

É necessário observar aqui que, embora o teorema da seleção mensurável seja válido para intervalos fechados, podemos considerar a aplicação dele seguidamente nos intervalos $[i, i+1]$ para $i = 0, 1, \dots$, obtendo, pelo princípio da indução matemática, o resultado acima no intervalo $[0, \infty) = \bigcup_{i=0}^{\infty} [i, i+1]$.

Note que a função $v_0 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ não se anula em intervalos infinitos. De fato, suponha que $v_0 \equiv 0$ no intervalo $[t_0, \infty)$ para algum $t_0 \geq 0$. Então, segue de (3.10) que

$$y(s) - x_0 = \int_{t_0}^s \sum_{i=1}^q g_i(s)v_i(s)ds.$$

Tomando o limite quando $t \rightarrow \infty$ na equação acima obtemos

$$\bar{x} - x_0 = \int_{t_0}^{\infty} \sum_{i=1}^q g_i(s)v_i(s)ds.$$

Isto implica que a integral no lado direita da equação é finita. Logo, podemos arranjar uma seqüência $s_n \rightarrow \infty$ tal que o integrando $\sum_{i=1}^q g_i(s_k)v_i(s_k)$ convirja a zero. Isto junto com a semi-continuidade da multifunção $x \mapsto \{G(x)v : (0, v) \in \bar{V}\}$, implica que $0 \in \{G(\bar{x})v : (0, v) \in \bar{V}\}$, contradizendo a hipótese de regularidade de $\bar{x}$. Isto prova a afirmação.

Agora vamos construir um processo (x, μ) tal que $x \in BV^+$ é uma solução da inclusão dinâmica impulsiva (3.1), correspondente a μ . Primeiro construiremos a

medida de controle μ . Defina

$$\theta(s) := \int_0^s v_0(\sigma) d\sigma, \quad \eta(t) := \sup\{s : \theta(s) \leq t\}; \text{ e} \quad (3.11)$$

$$\mu(A) := \int_{\theta^{-1}(A)} v(s) ds \quad \forall A \in \mathcal{B}([0, \infty)), \quad (3.12)$$

onde $v(s) := (v_1(s), \dots, v_q(s))$.

Como a função $v_0(s)$ é não negativa e não se anula em intervalos ilimitados, a função θ definida em (3.11) é não-decrescente e sua imagem é todo intervalo $[0, \infty)$. Isto implica que μ , definida em (3.12) é uma medida regular, com domínio nos borclianos do intervalo $[0, \infty)$. Segue facilmente da definição de η que esta é uma função crescente. Seja $\{t_i\}$ uma seqüência de pontos em $[0, \infty)$ onde os intervalos $\theta^{-1}(t_i)$ são não-degenerados, ou seja, cada t_i é um átomo da medida μ , por construção (ver (3.11) e (3.12)). Queremos mostrar que existem $\tilde{f}(s) \in F(x(s))$ q.s. e $\tilde{g}(s) \in \tilde{G}(x(s), \mu(\{s\}))$ $|\mu|$ -q.s. tal que

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \tilde{f}(\sigma) d\sigma + \int_{[0,t]} \tilde{g}(\sigma) |\mu| d\sigma$$

para todo $t \in [0, \infty)$. Defina

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &:= f(\eta(t)); \text{ e} \\ \tilde{g}(t) &:= \begin{cases} \mathbf{g}(\eta(t)) \cdot v(\eta(t)) & \forall t \in [0, \infty) \setminus \cup_{i=1}^{\infty} \{t_i\} \\ (\frac{1}{\eta(t) - \eta(t-)} \int_{\eta(t)} \mathbf{g}(s) \cdot v(s) ds & \forall t \in \cup_{i=1}^{\infty} \{t_i\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Note que $x(\theta(s)) = y(s)$ em $[0, \infty) \setminus \cup_i \{\theta^{-1}(t_i)\}$ e $\dot{\theta}(s) = 0$ em $\cup_i \{\theta^{-1}(t_i)\}$. Então temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{[0,\infty)} \chi_{F(y(s))} (\tilde{f}(\theta(s)) \dot{\theta}(s)) ds \\ &= \int_{[0,\infty)} \chi_{F(x(t))} (\tilde{f}(t)) dt. \end{aligned}$$

Isto implica que $\tilde{f}(t) \in F(x(t))$ quase sempre com relação a medida de Lebesgue.

Segue facilmente da definição de $\tilde{g}$ que

$$\tilde{g}(t) \in \tilde{G}(t, x(t); \mu(\{t\})) \quad \forall t \in \cup_i \{t_i\}. \quad (3.13)$$



Também temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{[0, \infty) \setminus \cup_i \{\theta^{-1}(t_i)\}} \chi_{G(x(\theta(s)))}(\mathbf{g}(\theta(s))) \cdot v(s) ds \\ &= \int_{[0, \infty) \setminus \cup_i \{(t_i)\}} \chi_{G(x(t))}(\mathbf{g}(\eta(t))) \mu(dt). \end{aligned}$$

De onde segue que $\mathbf{g}(\eta(t)) \in G(x(t))$ quase sempre em $[0, \infty)$ com relação a medida μ .

Como $\tilde{g}(t) := \mathbf{g}(\eta(t)) \cdot v(\eta(t)) \quad \forall t \in [0, \infty) \setminus \cup_i \{(t_i)\}$, segue da construção de μ que $\mu(dt) = v(\eta(t))|\mu|(dt)$, i.e., $w(t) = v(\eta(t))$ é a derivada de Radon-Nicodyn de μ com a relação a sua variação total $|\mu|$. Assim, temos

$$\tilde{g}(t) \in \tilde{G}(t, x(t); \mu(\{t\})) \quad |\mu| - q.s. \quad \text{em } [0, \infty) \setminus \cup_i \{(t_i)\}.$$

Isto junto com (3.13) implica em

$$\tilde{g}(t) \in \tilde{G}(t, x(t); \mu(\{t\})) \quad |\mu| - q.s. \quad \text{em } [0, \infty).$$

Tome $t > 0$. Então

$$\begin{aligned} x(t) - x_0 &= y(\eta(t)) - x_0 \\ &= \int_{[0, \eta(t)]} f(s) v_0(s) ds + \int_{[0, \eta(t)]} g(s) v(s) ds \\ &= \int_{[0, \eta(t)]} \tilde{f}(\theta(s)) v_0(s) ds + \int_{[0, \eta(t)] \setminus \cup_i \theta^{-1}(t_i)} g(s) v(s) ds \\ &\quad + \int_{[0, \eta(t)] \cap \cup_i \theta^{-1}(t_i)} g(s) v(s) ds \\ &= \int_{[0, t]} \tilde{f}(\tau) d\tau + \int_{[0, t]} \tilde{g}(\tau) |\mu|(ds) \quad (\text{por mudança de variáveis}). \end{aligned}$$

Isto confirma que (x, μ) é de fato um processo viável de (3.1).

Resta mostrar que $x(t) \uparrow \infty$ quando $t \uparrow \infty$. Observe que se t tende ao infinito então $\eta(t)$, definida em (3.11), também tende ao infinito. Já que $x(t) = y(\eta(t))$ e $y(s) \rightarrow \bar{x}$ quando $s \uparrow \infty$ segue que $x(t) \rightarrow \bar{x}$. ■

3.3 Invariância e o conjunto dos estados atingíveis

Nesta seção vamos discutir a propriedade de invariância para sistemas dinâmicos impulsivos em relação a um certo conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ e relações entre: 1) invariância e



o conjunto dos estados atingíveis e 2) invariância e tangentes ao conjunto invariante conjunto S .

A partir daqui usaremos, quando conveniente, a notação $x_t(\cdot)$ para designar trajetórias de (3.1), correspondentes a medidas, para enfatizar a natureza multi-valor destas. As imagens das trajetórias são consideradas curvas no espaço $\mathbb{R}^n$ para cada instante t de tempo. É claro que quando o instante t é um ponto de continuidade da medida de controle, a imagem da trajetória é um único ponto do $\mathbb{R}^n$. Entretanto, quando o instante t é um átomo da medida de controle, a imagem de $x_t(\cdot)$ é dada por um conjunto composto de curvas, a saber:

$$x_t(\cdot) := \{\xi : \bar{\eta}(t) \rightarrow \mathbb{R}^n : \xi \text{ satisfaz (3.2)-(3.4) com } z = x(t^-)\}.$$

Dado um processo viável (x, μ) e uma ordenação $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ dos átomos de μ , usaremos a notação $x_{t_i}(\cdot) \in S$ para dizer que

$$x(t) \in S \quad \forall t \in [0, \infty) \quad \text{and} \quad x_{t_i}(s) \in S \quad \forall s \in \bar{\eta}(t_i).$$

Dado um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que o sistema (F, G, S) é *fracamente invariante* se $\forall x_0 \in S$ existe um processo viável $(x(\cdot), \mu(\cdot))$ de (3.1) com $x(0) = x_0$ e $x(t) \in S$ para todo $t \geq 0$ e, $\forall i \in \mathbb{N}$, $\exists \alpha_i(\cdot) \in x_{t_i}(\cdot)$ tal que $\alpha_i(s) \in S$ para todo $s \in \bar{\eta}(t_i)$.

Se para todo processo viável $(x(\cdot), \mu(\cdot))$ de (3.1) tal que $x(0) \in S$, temos $x_t(\cdot) \in S$ para todo $t \geq 0$, dizemos então que o sistema (F, G, S) é *fortemente invariante*.

O conjunto dos *estados atingíveis* $\mathcal{A}(x_0; T)$ a partir de x_0 no tempo T é dado por:

$$\mathcal{A}(x_0; T) := \{x(T) : (x, \mu) \text{ é um processo de (3.1) com } x(0) = x_0\}.$$

O conjunto $\mathcal{A}$ tem certas propriedades que podem ser facilmente deduzidas a partir da versão absolutamente contínua dos processos (x, μ) .

Propriedades:

- $\mathcal{A}$ é compacto e não-vazio;

- $x \mapsto \mathcal{A}(x; T)$ satisfaz as hipóteses básicas, exceto a convexidade de $\mathcal{A}(x; T)$.

Antes de caracterizarmos invariância para sistemas dinâmicos impulsivos, precisamos das noções de cone tangente de Bouligand e de Clarke. Seja $x \in S$. O cone (de Bouligand) tangente a S em x , denotado por $T_S^B(x)$, é dado por:

$$T_S^B(x) := \left\{ \lim_i \frac{x_i - x}{\lambda_i} : x_i \xrightarrow{S} x, \lambda_i \downarrow 0 \right\},$$

onde $x_i \xrightarrow{S} x$ significa que $x_i \in S$ e $x_i \rightarrow x$.

Seja $d_S(\cdot)$ a função distância dada por

$$d_S(y) := \{ \|y - s\| : s \in S \}.$$

O cone (de Clarke) tangente a S em x , denotado por $T_S^C(x)$, é dado por:

$$T_S^C(x) := \{ v \in \mathbb{R}^n : d_S^0(x; v) \leq 0 \},$$

onde $d_S^0(x; v)$ denota a derivada direcional generalizada de $d_S(\cdot)$ em x , na direção v . Recordamos que derivada direcional generalizada de uma função f num ponto x , na direção v , é dada por:

$$\limsup_{y \rightarrow 0; t \rightarrow 0+} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t}.$$

Agora apresentaremos formas equivalentes à invariância fraca do sistema (F, G, S) , que são extensões naturais do caso regular para o impulsivo.

Teorema 3.3.1 *Suponha que a condição de regularidade (CR) esteja satisfeita. Então as seguintes asserções são equivalentes:*

- $\tilde{F}(x) \cap T_S^B(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in S;$
- $\tilde{F}(x) \cap coT_S^B(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in S;$
- Para cada $x \in S$ existem $(v_0, v) \in \bar{V}$, $f \in F(x)$ e $g \in G(x)$ tal que

$$\langle v_0 f + \sum_{i=1}^q v_i g_i, \zeta \rangle \leq 0 \quad \forall \zeta \in N_S^p; \quad (3.14)$$



(d) O sistema (F, G, S) é fracamente invariante;

(e) $\forall x_0 \in S, \forall \epsilon > 0, \exists \delta \in (0, \epsilon)$ tal que $\mathcal{A}(x_0; \delta) \neq \emptyset$.

Demonstração: As implicações $(a) \Rightarrow (b)$, $(b) \Rightarrow (c)$, $(d) \Rightarrow (c)$ e $(c) \Rightarrow (d)$ são imediatas.

Mostremos agora que $(c) \Rightarrow (d)$. Seja $x_0 \in S$. Considere o sistema $(\tilde{F}, S)$, onde $\tilde{F}$ é dado por (3.9). De (3.14) segue que

$$h(x, \zeta) \leq 0 \quad \forall \zeta \in N_S^p,$$

onde $h(x, p) := \min\{\langle w, p \rangle : w \in \tilde{F}(x)\}$. Agora podemos aplicar a ([13], Teorema 3.2.4) para achar uma trajetória $y(\cdot)$ de $\tilde{F}$ em $[0, \infty)$ tal que $y(0) = x_0$ e $y(s) \in S$ para todo $s \geq 0$.

A partir daí resta construir um processo (x, μ) de (3.1) com $x(t) = y(\eta(t))$ para uma função η apropriada tal que $x(0) = x_0$, $x(t) \in S$ para todo $t \geq 0$ e $\xi_{t_i}(s) \in S \forall s \in \bar{\eta}(t_i)$, para todo átomo t_i de μ e alguma função $\xi_i(\cdot) \in x_{t_i}(\cdot)$. Como (CR) é válida, isto é feito de forma completamente análoga à construção de (x, μ) na demonstração do Teorema 3.2.1.

Finalmente, mostremos que $(e) \Rightarrow (a)$. Primeiro observe que (d) é, na verdade equivalente a (e). Assim, podemos concluir que a asserção (e) vale também para o conjunto dos estados atingíveis para versão absolutamente contínua

$$\dot{y}(s) \in F(y(s))\dot{\theta}(s) + G(y(s))\dot{\gamma}(s).$$

Isto nos permite adaptar a demonstração da mesma asserção para o caso regular [13]. Suponha que (e) valha para a versão absolutamente contínua dos estados atingíveis, que passamos a denotar por $\mathcal{A}^y(x_0, t)$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\exists \delta_n \in (0, 1/n)$ com $\mathcal{A}^y(x_0, \delta_n) \cap S \neq \emptyset$. Isto implica que, para cada n ,

$$\begin{aligned} \dot{y}_n(s) &\in F(y_n(s))\dot{\theta}_n(s) + G(y_n(s))\dot{\gamma}_n(s) \\ &\subset \{F(y_n(s))v_0 + G(y_n(s))v : (v_0, v) \in \tilde{V}\} \\ &= \tilde{F}(y_n(s)). \end{aligned}$$

Aqui (θ_n, γ_n) são complementos gráficos de medidas $\mu_n \in C^*([0, \infty); K)$.

Como as funções y_n possuem a mesma constante de Lipschitz K segue que

$$\frac{\|y_n(s) - x_0\|}{\delta_n} \leq K \quad \forall n.$$

Logo, tomando subsequências (não re-indexamos), existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $v := \lim_n \frac{\|y_n(s) - x_0\|}{\delta_n}$.

Isto é, $v \in T_S^B(x_0)$. Mostremos que $v \in \tilde{F}(x_0)$ para completar a demonstração de (a).

Podemos escrever

$$y_n(\delta_n) - x_0 = \int_0^{\delta_n} \dot{y}_n(s) ds.$$

Dado $\epsilon \geq 0$, para n suficientemente grande, como $\tilde{F}$ é semi-contínua superior, segue que

$$y_n(\delta_n) - x_0 = \int_0^{\delta_n} \{\tilde{F}(x_0) + \epsilon B\} ds.$$

Dividindo por δ_n e passando ao limite quando $n \rightarrow \infty$ obtemos

$$v \in \tilde{F}(x_0) + \epsilon B.$$

Como ϵ é arbitrário, o resultado segue. ■

Agora vamos caracterizar invariância forte.

Proposição 3.3.1 *O sistema $(\tilde{F}, S)$ é fortemente invariante se e somente se o sistema (F, G, S) também é fortemente invariante.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Seja (x, μ) um processo viável de (3.1) tal que $x(0) \in S$. Então, segue do Teorema 3.1.1 que existe uma trajetória y de $\tilde{F}$ tal que $y(0) = x(0) \in S$, $y(s) = x(\theta(s))$ para todo $s \in [0, \infty) \setminus \cup_{i=1}^{\infty} \eta(t_i)$ e $y(s) \in x_{t_i}(s)$ for all $i \in \mathbb{N}$. Da hipótese que $(\tilde{F}, S)$ é fortemente invariante, segue $y(s) \in S$ para todo $s \geq 0$. Como para $y(s)$ pode ser qualquer curva em x_{t_i} , que terá as mesmas propriedades, segue que $x_{t_i}(\cdot) \in S$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo, segue de $x(t) = y(\eta(t))$ que $x_t(\cdot) \in S$ para todo $t \geq 0$. Portanto, (F, G, S) é fortemente invariante.

$(\Leftarrow)$. Dado uma trajetória arbitrária y de $\tilde{F}$ com $y(0) \in S$, mostraremos que dado $T > 0$, arbitrário, $y(T) \in S$. Podemos construir um processo (x, μ) viável de (F, G) em $[0, T]$, com $x(0) = y(0) \in S$ de forma completamente análoga à feita na

demonstração do Teorema 3.2.1. Aqui não é necessário a condição de regularidade, para se construir uma medida regular, dado que o intervalo onde vive os processos é finito. Seja $T^* := \eta(T)$. Como (F, G, S) é fortemente invariante, temos que $x_t(\cdot) \in S$ para todo $t \in [0, T]$. Por construção temos $y(s) = x(\theta(s))$ para todo $s \in [0, T^*] \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bar{\eta}_{t_i}$ e $y(s) \in x_{t_i}(s)$ para todo $s \in \bar{\eta}_{t_i}$. Logo $y(s) \in S$ para todo $s \in [0, T^*]$. Mas $T^* \geq T$, o que implica $y(T) \in S$. Como a solução y de (3.5) é arbitrária, segue que $(\tilde{F}, S)$ é fortemente invariante. ■

Vamos precisar da condição de Lipschitz para multi-funções. Dizemos que uma multi-função $\Gamma : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ é *localmente Lipschitz* se para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existir $\delta, K > 0$ tal que

$$\Gamma(x) \subset \Gamma(y) + K\|x - y\|B \quad \forall x, y \in x_0 + \delta B.$$

B é, como de costume, a bola unitária de $\mathbb{R}^n$.

O próximo teorema é uma generalização de um resultado similar para o caso regular, ver, por exemplo, (Teorema 4.3.8, [13]).

Teorema 3.3.2 *Suponha que F e $\tilde{G}$ são Localmente Lipschitz. Então as seguintes asserções são equivalentes:*

(a) $\tilde{F}(x) \subset T_S^C(x) \quad \forall x \in S;$

(b) $\tilde{F}(x) \subset T_S^B(x) \quad \forall x \in S;$

(c) $\tilde{F}(x) \subset coT_S^B(x) \quad \forall x \in S;$

(d) $\forall x \in S, \forall (v_0, v) \in \bar{V}$, temos

$$\max_{f \in F(x), g \in G(x)} \langle v_0 f + \sum_{i=1}^q v_i g_i, \zeta \rangle \leq 0 \quad \forall \zeta \in N_S^p; \quad (3.15)$$

(e) *O sistema (F, G, S) é fortemente invariante;*

(f) $\forall x_0 \in S, \exists \epsilon > 0$, tal que $\mathcal{A}(x_0; t) \subset S \quad \forall t \in [0, \epsilon]$.

Demonstração: Primeiro observe que $\tilde{F}$ é também localmente Lipschitz e satisfaz as hipóteses básicas.

Decorre desse resultado que (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a) e que (d) é equivalente a $(\tilde{F}, S)$ ser fortemente invariante. Por outro lado, a invariância forte de $(\tilde{F}, S)$, pela Proposição 3.3.1, é equivalente ao item (e). Assim, para concluir a demonstração basta verificar que (e) é equivalente a (f). Mas isto é imediato, concluindo a demonstração. ■

3.4 Monotonia

Passemos agora a estudar propriedades de monotonia de sistemas dinâmicos impulsivos. A aplicação das propriedades de monotonia será feita no próximo capítulo quando será estudado a equação de HJB para problemas impulsivos.

Seja $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função semi-contínua inferior. Dizemos que o sistema (F, G, ψ) é *fracamente decrescente* se para todo $x_0 \in \text{dom } \psi$ existe um processo viável de (3.1) com $x(0) = x_0$ e

$$\psi(x(t)) \leq \psi(x(0)) = \psi(x_0) \quad \forall t \geq 0, \quad (3.16)$$

$$\psi(\xi_i(s)) \leq \psi(x(t_i-)) \quad \forall s \in \bar{\eta}(t_i), \text{ para algum } \xi_i \in x_{t_i}, \quad (3.17)$$

para todo $i = 1, 2, \dots$. Recordamos que $\{t_i\}_i$ é uma enumeração dos átomos de μ e, $\bar{\eta}$ e x_t são multi-funções definidas anteriormente neste capítulo.

Dizemos que o sistema (F, G, ψ) é *fortemente decrescente* se dado $x_0 \in \text{dom } \psi$ e um intervalo $[a, b]$, todo processo viável de (3.1) definido no intervalo $[a, b]$ com $x(0) = x_0$ satisfaz

$$\psi(x(t)) \leq \psi(x(a)) = \psi(x_0) \quad \forall t \in [a, b] \quad (3.18)$$

$$\psi(\xi_i(s)) \leq \psi(x(t_i-)) \quad \forall s \in \bar{\eta}(t_i), \forall \xi_i \in x_{t_i}, \quad (3.19)$$

para todo $i = 1, 2, \dots$. A condição (3.19) pode ser re-escrita da seguinte forma, mais compacta:

$$\phi(x_t(s)) \leq \psi(x(t-)) \quad \text{para todo } s \in \bar{\eta}(t),$$

sempre que t é um átomo de μ .

Proposição 3.4.1 *Seja $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função semi-contínua inferior dada. Então*

- (a) *Se $(F, \mathbf{G}, \psi)$ é fracamente decrescente então $(\tilde{F}, \psi)$ é fracamente decrescente. Reciprocamente, se a condição de regularidade (CR) é válida e $(\tilde{F}, \psi)$ é fracamente decrescente então $(F, \mathbf{G}, \psi)$ é fracamente decrescente.*
- (b) *O sistema $(F, \mathbf{G}, \psi)$ é fortemente decrescente se, e somente se, $(\tilde{F}, \phi)$ é fortemente decrescente.*

Demonstração: (a) Seja $(F, \mathbf{G}, \psi)$ um sistema fracamente decrescente e considere o sistema $(F, \mathbf{G}, \psi)$. Dado $x_0 \in \text{dom} \psi$ existe um processo factível de (3.1) satisfazendo (3.16) e (3.17).

Segue do Teorema 3.1.1 que podemos encontrar uma solução y do sistema (3.5) tal que $y(s) = x(\theta(s))$ para todo $s \in [0, \infty) \setminus \bigcup_i \text{int } \bar{\eta}(t_i)$ e $y(s) = \xi_{t_i}(s)$ para todo $s \in \bar{\eta}(t_i)$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Recordamos que as funções η , $\bar{\eta}$ e θ são as funções definidas no início deste capítulo. Assim, por construção, temos

$$\psi(y(s)) \leq \psi(y(0)) = \psi(x_0) \quad \forall s \geq 0, \quad (3.20)$$

de onde segue que $(F, \mathbf{G}, \psi)$ é fracamente decrescente.

A recíproca segue usando argumentos, já utilizados inúmeras vezes neste capítulo, de construção de um processo viável (x, μ) para (3.1), a partir da solução y de $\tilde{F}$ que satisfaz (3.20). Note que a condição de regularidade (CR) é essencial para garantir a construção da medida de controle. Que o processo, assim construído deve satisfazer (3.16) e (3.17), é imediato.

(b) Suponha que $(F, \mathbf{G}, \psi)$ seja fortemente decrescente. Sejam $x_0 \in \text{dom } \phi$, $[a, b] \subset [0, \infty)$ e y uma trajetória de $\tilde{F}$ dados tal que $y(a) = x_0$. Construa um processo viável (x, μ) no intervalo $[a', b'] \subset [0, \infty)$ seguindo o procedimento da demonstração do Teorema 3.2.1. Neste caso as funções definidas em (3.11) e (3.12) tem domínios e contradomínios limitados dados como segue:

$$\theta : [a, b] \rightarrow [a', b'], \quad \eta : [a', b'] \rightarrow [a, b] \quad \text{e} \quad \mu : \mathcal{B}([a', b']) \rightarrow \mathbb{R}.$$



Aqui $a' := \theta(a)$ e $b' := \theta(b)$. Como (F, G, ϕ) é fortemente decrescente, segue que (3.18) e (3.19) estão satisfeitas com a' e b' nos lugares de a e b , respectivamente. Logo, como $y(s) = x(\theta(s))$ e $y(a) = x(\theta(a))$ por construção, segue que $\psi(y(s)) \leq \psi(y(a)) = \psi(x_0)$. Portanto, $(\tilde{F}, \psi)$ é fortemente decrescente.

Agora, suponha que $(\tilde{F}, \psi)$ é fortemente decrescente. Sejam $x_0 \in \text{dom } \phi$, $[a, b] \subset [0, \infty)$ e (x, μ) um processo viável de (3.1) com $x(a) = x_0$. Pelo Teorema 3.1.1, existe uma trajetória y de $\tilde{F}$ em $[a', b']$ onde $\eta(a) = a'$ e $\eta(b) = b'$. Assim, $\psi(y(s)) \leq \psi(y(a')) = \psi(x(a))$ para $s \in [a', b']$. Como, por construção, $x(t) = y(\eta(t))$ para todo $t \in [a, b]$ segue que $\psi(x(t)) = \psi(y(\eta(t))) \leq \psi(x_0)$ para todo $t \in [a, b]$. Isto é, a equação (3.18) é satisfeita.

Além disso, segue, novamente da monotonia de $(\tilde{F}, \psi)$, que quando t é um átomo da medida μ , tem-se que $\phi(x_t(s)) \leq \psi(x(t-))$ para todo $s \in \bar{\eta}(t)$, de onde se conclui que (3.19) também vale. Portanto, o sistema (F, G, ψ) é fortemente decrescente.

■

O teorema a seguir segue imediatamente a partir da proposição anterior.

Teorema 3.4.1 *Seja $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função semi-contínua inferior dada. Então*

(a) (F, G, ψ) é fracamente decrescente se, e somente se,

$$\min_{w \in \tilde{F}(x)} \{ \langle w, \zeta \rangle \} \leq 0 \quad \forall \zeta \in \partial_p \psi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n; \quad (3.21)$$

(b) Se F e G são localmente Lipschitz então o sistema (F, G, ψ) é fortemente decrescente se, e somente se,

$$\max_{w \in \tilde{F}(x)} \{ \langle w, \zeta \rangle \} \leq 0 \quad \forall \zeta \in \partial_p \psi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.22)$$

Demonstração: A condição (a) ((b)) é consequência imediata da aplicação da Proposição 3.4.1.(a) ((b)), seguida da aplicação de (Teorema 4.5.7 (Teorema 4.6.3), [13]).

■

3.5 Atingibilidade Local

Até o presente momento, olhamos a questão da controlabilidade assintótica global a um ponto e a invariância de conjuntos. Nesta seção examinaremos uma mistura das duas coisas. Mais especificamente, dado um conjunto S , vamos fornecer condições suficientes para que pontos nas suas proximidades possam alcançá-lo e nele permanecer para sempre. Formalmente temos a seguinte definição.

Dizemos que o sistema (F, G, S) é *localmente atingível* (controlável) se existirem $\tau > 0$, $\delta > 0$ e um processo (x, μ) de (F, G) em $[0, \infty)$ tal que, para todo $x_0 \in S + \delta B$,

$$x(0) = x_0, \quad x(t)(\cdot) \in S \quad \forall t \geq \tau$$

e para todo átomo t de μ ,

$$\xi_t(s) \in S \quad \forall s \in \bar{\eta}(t), \text{ para algum } \xi_t(s) \in x_t(\cdot).$$

Temos a seguinte equivalência.

Proposição 3.5.1 *Se o sistema (F, G, S) é localmente atingível então $(\tilde{F}, S)$ é localmente atingível. Reciprocamente, se $(\tilde{F}, S)$ é localmente atingível e (F, G) satisfaz a condição de regularidade (CR) então (F, G, S) é localmente atingível.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Sejam $\tau > 0$, $\delta > 0$ e (x, μ) satisfazendo a atingibilidade local. Segue do Teorema 3.1.1 que existe uma função absolutamente contínua y tal que

$$\dot{y}(s) \in F(y(s))\dot{\theta}(s) + G(y(s))\dot{\gamma}(s) \quad s \in [0, \infty)$$

com $y(0) = x_0$. Seja $s^* = \sup \bar{\eta}(\tau)$. Observe que $s^* \geq \tau$ e $\theta(s^*) = \tau$. Assim $x(\tau) = x(\theta(s^*)) = y(s^*) \in S$. E como $x_t(\cdot) \in S$ para todo $t \geq \tau$ segue que $y(s) \in S$ para todo $s \geq s^*$.

Como $F(y(s))\dot{\theta}(s) + G(y(s))\dot{\gamma}(s) \subset \tilde{F}(y(s))$ quase sempre, segue $\tilde{F}$ é localmente atingível.

$(\Leftarrow)$ Agora passemos a recíproca. Existem $\delta > 0$ e $s^* > 0$ tal que para todo $x_0 \in S + \delta B$ existe uma trajetória de $\tilde{F}$ em $[0, \infty)$ com $x(0) = x_0$ e $y(s) \in S$ para todo



$s \geq s^*$. Vamos seguir os argumentos da demonstração da estabilidade de Lyapounov, Teorema 3.2.1. Assim, existem seleções mensuráveis $f(s) \in F(y(s))$, $g(s) \in G(y(s))$, $(v_0(s), v(s)) \in \bar{V}$ no intervalo $[0, \infty)$ tal que

$$\dot{y}(s) = f(s)v_0(s) + g(s)v(s) \quad \text{quase sempre em } [0, \infty).$$

Defina $\theta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\eta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ por

$$\theta(s) := \int_0^s v_0(\sigma) d\sigma, \quad \eta(t) := \sup\{s : \theta(s) \leq t\}; \text{ e}$$

$$\mu(A) := \int_{\theta^{-1}(A)} v(s) ds \quad \forall A \in \mathcal{B}([0, \infty)). \quad (3.23)$$

Defina $t^* := \int_0^{s^*} v_0(\sigma) d\sigma = \theta(s^*)$. Devido a condição de regularidade (CR) podemos concluir que μ é uma medida regular de Borel definido no intervalo $[0, \infty)$. Dai, é possível construir uma trajetória x de (3.1) associada à medida μ construída em (3.23). Logo, já que $x(t^*) = x(\theta(s^*)) = y(s^*)$, por construção, segue que $x(t^*) \in S$. Também, para todo $t \geq t^*$, como $x(t) = y(\eta(t))$, η é crescente e satisfaz $\eta(t^*) = s^*$, segue que $x(t) \in S$. Também, quando $t \geq t^*$ é um átomo de μ segue que $y(s) \in x_t(\cdot)$ para todo $s \in \bar{\eta}(t)$, completando a demonstração. ■

Agora podemos enunciar o resultado principal desta seção.

Teorema 3.5.1 *Sejam S compacto e F, G localmente Lipschitz. Suponha que F, G satisfazem a condição de regularidade (CR) em todo ponto de equilíbrio e que uma das condições abaixo é satisfeita.*

(a) *Para algum $\delta > 0$ temos*

$$\min_{w \in \tilde{F}(x)} \{\langle w, \zeta \rangle\} \leq -\delta \|\zeta\| \quad \forall \zeta \in \partial_p \psi(x), \quad \forall x \in S; \quad (3.24)$$

(b) $\tilde{F}(x) \cap \text{interior } T_S^C(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in S.$

Então (F, G, S) é localmente atingível.



Demonstração: Já que S é compacto e F, G são localmente Lipschitz segue do Teorema 4.6.6 (ou 4.6.8) de [13] que quando a condição (a) (ou (b)) está satisfeita, o sistema $(\tilde{F}, S)$ é localmente atingível. Como a condição de regularidade (CR) das colunas de (F, G) é válida em todos os pontos de equilíbrios, segue da Proposição 3.5.1 que (F, G) é localmente atingível. ■

Programação Dinâmica para Problemas Impulsivos

4.1 Introdução

Nesta seção vamos discutir algumas questões relacionadas à programação dinâmica para problemas de controles impulsivos cuja evolução das trajetórias é governada por equações diferenciais. Consideramos a seguinte família de problemas, denotada por $P_{\alpha}(t_0, x_0)$, para $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$:

$$P_{\alpha}(t_0, x_0) = \begin{cases} \text{Min } J_{\alpha}(t_0, x_0) := \int_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha t} f_0(t, x(t)) dt + \int_{t_0, \infty} e^{-\alpha t} g_0(t, x(t)) \mu(dt) \\ \text{s.t. } \dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \text{ a.e. } + G(t, x(t)) \mu(dt), \quad t \in [t_0, \infty), \\ x(t_0) = x_0, \quad \mu \in C^+([t_0, \infty); K). \end{cases}$$

Aqui $f_0 : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_0 : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ são funções dadas. A constante $\alpha > 0$ denota a taxa de desconto. Suponhamos que, como no Capítulo 2, $F : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^m)$, e $G : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow P(\mathbb{R}^k)$ são multi-funções dadas e $C^+([t_0, \infty); K)$ é o espaço dual das funções contínuas de $[t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$, tomando valores em K . O conjunto K é o cone positivo de $\mathbb{R}^k$.

Recordamos que um processo é um par (x, μ) constituído de uma medida de controle μ e a correspondente trajetória x , que é uma solução relaxada (uma função

de variação limitada) da inclusão diferencial nas restrições do problema $P_\infty(t_0, x_0)$. O problema de otimização $P_\infty(t_0, x_0)$ consiste em minimizar o custo funcional $I(\mu; x_0)$ sobre os processos (x, μ) , para os quais a trajetória x satisfaz $x(t_0) = x_0$.

Para motivar os resultados discutidos neste capítulo, vamos supor que $P(t, x) =$

Capítulo 4

Programação Dinâmica para Problemas Impulsivos

4.1 Introdução

Nesta seção vamos discutir algumas questões relacionadas à programação dinâmica para problemas de controles impulsivos cuja evolução das trajetórias é governado por inclusões diferenciais. Considere a seguinte família de problemas, denotada por $P_\infty(t_0, x_0)$, para $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$:

$$P_\infty(t_0, x_0) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } I(\mu; x_0) := \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta t} f_0(t, x(t)) dt + \int_{[t_0, \infty)} e^{-\delta t} g_0(t, x(t)) \mu(dt) \\ \text{s.a. } dx(t) \in F(t, x(t)) dt + G(t, x(t)) \mu(dt), \quad t \in [t_0, \infty), \\ x(t_0) = x_0; \quad \mu \in C^*([t_0, \infty); K). \end{array} \right.$$

Aqui $f_0 : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_0 : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ são funções dadas. A constante $\delta > 0$ denota a taxa de desconto. Recordamos que, como no Capítulo 3, $F : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, e $G : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathcal{P}(\mathbb{R}^q)$ são multi-funções dadas e $C^*([t_0, \infty); K)$ é o espaço dual das funções contínuas de $[t_0, \infty)$ a $\mathbb{R}^q$, tomando valores em K . O conjunto K é o cone positivo de $\mathbb{R}^q$.

Recordamos que um processo é um par (x, μ) consistindo de uma medida de controle μ e a correspondente trajetória x , que é uma solução robusta (uma função

de variação limitada) da inclusão diferencial nas restrições do problema $P_\infty(t_0, x_0)$. O problema de otimização $P_\infty(t_0, x_0)$ consiste em minimizar o custo funcional $I(\mu; x_0)$ sobre os processos (x, μ) , para os quais a trajetória x satisfaz $x(t_0) = x_0$.

Para motivar os resultados discutidos neste capítulo, vamos supor que $F(t, x) := f(t, x, u)$, $G(t, x) := g(t, x)$ e μ é uma medida escalar. Começemos com uma diferenciação formal. Considere a função valor ao longo de um processo ótimo (x^*, u^*, μ^*) de $P_\infty(s, z)$ no intervalo $[s, \infty)$. Seja y^* a trajetória absolutamente contínua associada ao processo ótimo (x^*, u^*, μ^*) . Seja (θ^*, γ^*) o completamento gráfico de μ^* . Então temos, para $t \in [s, \infty)$,

$$\begin{aligned} V(t, x^*(t)) &= \int_t^\infty e^{-\delta r} f_0(r, x^*(r)) dr \\ &\quad + \int_{[t, \infty)} e^{-\delta r} \tilde{g}_0(r, x^*(r-); \mu^*({\{r\}})) \mu^*(dr). \end{aligned}$$

Usando a mudança de variáveis $\tau = \eta^*(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} V(\theta^*(\tau), y^*(\tau)) &= \int_{\theta^*(\tau)}^\infty e^{-\delta r} f_0(r, x^*(r)) dr \\ &\quad + \int_{[\theta^*(\tau), \infty)} e^{-\delta r} \tilde{g}_0(r, x^*(r-); \mu^*({\{r\}})) \mu^*(dr), \end{aligned}$$

para $\tau \in [\eta^*(s^-), \infty)$. Portanto, devido ao lema de mudança de variáveis, Lema 3.1.1, temos

$$\begin{aligned} V(\theta^*(\tau), y^*(\tau)) &= \int_\tau^\infty e^{-\delta \theta^*(r)} f_0(\theta^*(r), y^*(r)) \dot{\theta}^*(r) dr \\ &\quad + \int_\tau^\infty e^{-\delta \theta^*(r)} g_0(\theta^*(r), y^*(r)) \dot{\gamma}^*(r) dr, \end{aligned}$$

para $\tau \in [\eta^*(s^-), \infty)$. Se V é diferenciável em $(t, x^*(t))$, uma diferenciação formal implica que

$$\begin{aligned} \partial_s V(\theta^*(\tau), y^*(\tau)) \dot{\theta}^*(\tau) &+ \left\langle \partial_z V(\theta^*(\tau), y^*(\tau)), f(\theta^*(\tau), y^*(\tau), u^*(\theta^*(\tau))) \right\rangle \dot{\theta}^*(\tau) \\ &+ \left\langle \partial_z V(\theta^*(\tau), y^*(\tau)), g(\theta^*(\tau), y^*(\tau)) \right\rangle \dot{\gamma}^*(\tau) \\ &= -e^{-\delta \theta^*(\tau)} [f_0(\theta^*(\tau), y^*(\tau)) \dot{\theta}^*(\tau) + g_0(\theta^*(\tau), y^*(\tau)) \dot{\gamma}^*(\tau)] \quad (4.1) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \partial_s V(\theta^*(\tau), y^*(\tau)) \dot{\theta}^*(\tau) + \left\{ \left\langle \partial_z V(\theta^*(\tau), y^*(\tau)), f(\theta^*(\tau), y^*(\tau), u^*(\theta^*(\tau))) \right\rangle \right. \\ \left. + e^{-\delta \theta^*(\tau)} f_0(\theta^*(\tau), y^*(\tau)) \right\} \dot{\theta}^*(\tau) + \left\{ \left\langle \partial_z V(\theta^*(\tau), y^*(\tau)), g(\theta^*(\tau), y^*(\tau)) \right\rangle \right. \\ \left. + e^{-\delta \theta^*(\tau)} g_0(\theta^*(\tau), y^*(\tau)) \right\} \dot{\gamma}^*(\tau) = 0, \quad (4.2) \end{aligned}$$

para $\tau = \eta^*(t)$. Em particular, se $t \in [s, \infty)$ é um átomo de μ^* então (4.2) deve valer para $\tau \in [\eta^*(t^-), \eta^*(t)]$. Usando o fato que $\dot{\theta}^*$ se anula nestes intervalos, obtemos

$$\left\{ \left\langle \partial_z V(\theta^*(\tau), y^*(\tau)), g(\theta^*(\tau), y^*(\tau)) \right\rangle + e^{-\delta \theta^*(\tau)} g_0(\theta^*(\tau), y^*(\tau)) \right\} \dot{\gamma}^*(\tau) = 0, \quad (4.3)$$

para $\tau \in [\eta^*(t^-), \eta^*(t)]$. Integrando (4.3), segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\eta(t^-)}^{\eta(t)} \left\{ \left\langle \partial_z V(\theta^*(\tau), y^*(\tau)), g(\theta^*(\tau), y^*(\tau)) \right\rangle + e^{-\delta \theta^*(\tau)} g_0(\theta^*(\tau), y^*(\tau)) \right\} \dot{\gamma}^*(\tau) d\tau \\ &= \int_{\{t\}} \left\{ \left\langle \partial_z V(t, x^*(t)), g(t, x^*(t)) \right\rangle + e^{-\delta t} g_0(t, x^*(t)) \right\} \mu^*(dt). \end{aligned}$$

Entretanto, para essa escolha de $t \in [s, \infty)$ tem-se $\mu^*(\{t\}) > 0$. Assim, devemos ter

$$\left\langle \partial_z V(t, x^*(t)), g(t, x^*(t)) \right\rangle + e^{-\delta t} g_0(t, x^*(t)) = 0, \quad \mu^*\text{-q.s. } [s, \infty). \quad (4.4)$$

Este é o ponto inicial para a formulação da equação de HJB no caso impulsivo. A expressão (4.4) corresponde à parte impulsiva (atômica) da equação de HJB. Uma idéia de como deva ser a equação geral de HJB é dada pela expressão

$$\begin{aligned} \partial_s V(t, x^*(t)) dt + \left\{ \left\langle \partial_z V(t, x^*(t)), f(t, x^*(t), u^*(t)) \right\rangle + e^{-\delta t} f_0(t, x^*(t), u^*(t)) \right\} dt \\ + \left\{ \left\langle \partial_z V(t, x^*(t)), g(t, x^*(t)) \right\rangle + e^{-\delta t} g_0(t, x^*(t)) \right\} \mu^*(dt) = 0, \quad (4.5) \end{aligned}$$

que é obtida a partir de (4.2), usando argumentos similares à demonstração do Teorema 4.1 de [36]. Esclarecemos que a igualdade em (4.5) é no sentido de igualdades de medidas: dada um conjunto de Borel $A \in \mathcal{B}([0, \infty))$ tem-se

$$\begin{aligned} \int_A \partial_s V(t, x^*(t)) dt + \left\{ \left\langle \partial_z V(t, x^*(t)), f(t, x^*(t), u^*(t)) \right\rangle + e^{-\delta t} f_0(t, x^*(t), u^*(t)) \right\} dt \\ + \int_A \left\{ \left\langle \partial_z V(t, x^*(t)), g(t, x^*(t)) \right\rangle + e^{-\delta t} g_0(t, x^*(t)) \right\} \mu^*(dt) = 0. \end{aligned}$$



Como (x^*, u^*, μ^*) é um processo, podemos olhar também, como que colocando uma lente de aumento, de que forma evolui instantaneamente a equação de HJB durante o salto da trajetória x^* . Isto pode ser obtido de (4.2), pois quando t é um átomo tem-se $\dot{\theta}(s) = 0$ quase sempre em $\bar{\eta}(t)$ e então, $\forall \xi_t(\cdot) \in x_t^*(\cdot)$, temos

$$\left\langle \partial_z V(t, \xi^*(s)), g(t, \xi^*(s)) \right\rangle + e^{-\delta t} g_0(t, \xi^*(s)) = 0, \text{ q.s. } \bar{\eta}(t). \quad (4.6)$$

As deduções acima, de certa forma informal, fornecem elementos para poder-mos formular conceitos rigorosos para igualdade e desigualdades ligados à equação equação de HJB, no contexto de problemas impulsivos. Denotemos as relações $\leq, =$, ou $\geq$ por $\sim$ e assim, a notação $(HJB, \sim)$, que deverá ser utilizada neste capítulo, ficará clara pelo contexto.

4.2 O problema de controle impulsivo relaxado

Para passarmos a estudar a equação de HJB ligada ao problema $P_\infty(t_0, x_0)$, vamos escrevê-lo numa formulação equivalente:

$$\tilde{P}_\infty(t_0, x_0) \begin{cases} \text{Min} & z(t_0) \\ & dz(t) := -e^{-\delta t} [f_0(t, x(t))dt + g_0(t, x(t))\mu(dt)], \\ \text{s.a.} & dx(t) \in F(t, x(t))dt + G(t, x(t))\mu(dt), \quad t \in [t_0, \infty), \\ & x(t_0) = x_0; \quad \mu \in C^*([t_0, \infty); K). \end{cases}$$

Esta formulação permite estudar o problema de otimização, utilizando o conceito de solução robusta, sem a necessidade de se escolher uma função do completamento gráfico que minimize a função objetivo, como realizado no trabalho [32]. Aqui, nesta formulação, a minimização de $z(t_0)$ faz a escolha do completamento gráfico adequado automaticamente.

Sejam

$$F_1(t, x) := \begin{pmatrix} -e^{\delta t} f_0(t, x) \\ F(t, x) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F_2(t, x) := \begin{pmatrix} -e^{\delta t} g_0(t, x) \\ G(t, x) \end{pmatrix}.$$

T 1569/07



Assim, podemos ainda reescrever o problema de forma mais compacta.

$$\tilde{P}_\infty(t_0, x_0) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad z(t_0) \\ \text{s.a.} \quad \begin{pmatrix} dz(t) \\ dx(t) \end{pmatrix} \in F_1(t, x)dt + G_1(t, x)\mu(dt), \quad t \in [t_0, \infty), \\ x(t_0) = x_0 \quad \mu \in C^*([t_0, \infty); K). \end{array} \right.$$

A noção de solução da equação de HJB, que será introduzida na próxima seção, exige uma ligação explícita entre a equação de HJB e o problema de controle impulsivo através de seus processos viáveis e pode ser de difícil verificação. Para uma noção alternativa de estudo dos problemas impulsivos, propomos uma forma de relaxamento do problema impulsivo, que fornece noções alternativas de solução para a equação de HJB e que servem tanto como ponte teórica para obtenção dos resultados explícitos, quanto para verificação direta de propriedades. O relaxamento é através da convexificação das colunas do campo vetorial. Temos o seguinte problema relaxado.

$$R_\infty(t_0, x_0) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min} \quad z(t_0) \\ \text{s.a.} \quad \begin{pmatrix} dx^0(t) \\ dz(t) \\ dx(t) \end{pmatrix} \in \tilde{F}_1(x^0, x)dt, \quad t \in [t_0, \infty), \\ x(t_0) = x_0, \quad x^0(t_0) = t_0, \end{array} \right.$$

onde $\tilde{F}_1(x^0, x) := \{\{v_0\} \times \{F_1(x^0, x)v_0 + G_1(x^0, x)v\} : (v_0, v) \in \bar{V}\}$. Recordamos que $\bar{V} := \{(v_0, v) \in \mathbb{R}^q : v_j \geq 0, \sum_{j=0}^q v_j = 1\}$. Denote por $\bar{y} = (x^0, z, x)^t$ e $V_R : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a trajetória e a função valor associadas ao problema relaxado $R_\infty(t_0, x_0)$.

Supomos que as hipóteses básicas do Capítulo 3 estão satisfeitas durante este capítulo. Só que aqui, as multi-funções dependem também do tempo e assim devemos considerar que satisfazem as hipóteses com $\bar{x} := (t, x)$ no lugar de x . Vamos, também, supor que as funções $f_0(\cdot, \cdot)$ e $g_0(\cdot, \cdot)$ satisfazem as condições h2 e h3 das hipóteses básicas do Capítulo 3. Assim, $f_0(\cdot, \cdot)$ e $g_0(\cdot, \cdot)$ são contínuas e crescem linearmente.

Quando precisarmos da condição de regularidade (CR) ou da condição de



Lipschitz para as multi-funções ou funções do problema, faremos menção explícita dos fatos nos enunciados dos resultados.

O teorema seguinte faz a ligação entre o problema impulsivo e o problema relaxado.

Teorema 4.2.1 *Suponha que as multi-funções (F, G) satisfazem:*

- F é $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$ mensurável; e
- G é Borel measurável.

Então

- (a) *a cada processo viável (x, μ) de $\tilde{P}_\infty(t_0, x_0)$ corresponde uma única família de trajetórias $\bar{y}_x(\cdot) = (x^0, z_x, y_x)$ de $R_\infty(t_0, x_0)$. Mais ainda, $x^0(s) = \theta(s)$ e $(z_x(s), y_x(s))^t = (z(\theta(s)), x(\theta(s)))$ no conjunto $\cup \theta^{-1}(t_i)$, onde θ é a função associada à função de reparametrização, η , da medida do controle μ , introduzida no Capítulo 3 e $\{t_i\}$ é uma ordenação dos átomos de μ .*
- (b) *Dada uma trajetória (não uma família) $\bar{y} = (x^0, \bar{z}, y)$ de $R_\infty(t_0, x_0)$ se (F, G) satisfaz a condição de regularidade (CR) (veja, Cap. 3) então existe um processo viável (x, μ) de $\tilde{P}_\infty(t_0, x_0)$ tal que $x(t) := y(\eta(t))$ e $z(t) = \bar{z}(\eta(t))$.*
- (c) $V(t_0, x_0) := V_R(t_0, x_0)$ para todo $(t_0, x_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$,

onde V é a função valor associada ao problema $\tilde{P}_\infty(t_0, x_0)$.

Demonstração: A demonstração deste teorema envolve no item (a) a construção da família de trajetórias y_x de $R_\infty(t_0, x_0)$ a partir de um processo viável (x, μ) de $\tilde{P}_\infty(t_0, x_0)$. Isto segue facilmente do Teorema 3.1.1. A demonstração do item (b) segue argumentos similares à demonstração do Teorema 3.2.1. O item (c) segue imediatamente dos itens (a) e (b). ■



Precisaremos das seguintes funções auxiliares, chamadas de Hamiltonianas associadas ao problema relaxado. Sejam

$$H_m(x^0, x, \zeta_0, \zeta) := \min\{\zeta_0 v_0 + \langle \zeta, f \rangle + e^{-\delta t} f_0(x^0, x) v_0 + \langle \langle \zeta, g \rangle, v \rangle + e^{-\delta x^0} g_0(x^0, x) v : (v_0, v) \in \bar{V}, (f, g) \in (F, G)(x^0, x)\}; \text{ e}$$

$$H_M(x^0, x, \zeta_0, \zeta) := \max\{\zeta_0 v_0 + \langle \zeta, f \rangle + e^{-\delta t} f_0(x^0, x) v_0 + \langle \langle \zeta, g \rangle, v \rangle + e^{-\delta x^0} g_0(x^0, x) v : (v_0, v) \in \bar{V}, (f, g) \in (F, G)(x^0, x)\}.$$

Teorema 4.2.2 *Seja $\phi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função semi-contínua inferior dada. Suponha que $(x^0(\cdot), x(\cdot), z(\cdot))$ é uma trajetória de $R_\infty(t_0, x_0)$ dada. Então*

(a) *$s \rightarrow \psi(x^0(s), x(s), z(s)) := \phi(x^0(s), x(s)) - z(s)$ é crescente se, e somente se,*

$$H_m(x^0, x, \zeta_0, \zeta) \geq 0,$$

para todo $(\zeta_0, \zeta) \in \partial_p \phi(x^0, x)$, $\forall (x^0, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$;

(b) *$s \rightarrow \psi(x(s), x(s), z(s)) := \phi(x^0(s), x(s)) - z(s)$ é decrescente se, e somente se,*

$$H_M(x^0, x, \zeta_0, \zeta) \leq 0,$$

para todo $(\zeta_0, \zeta) \in \partial_p \phi(x_0, x)$, $\forall (x^0, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$.

(c) *$s \rightarrow \psi(x(s), x(s), z(s)) := \phi(x^0(s), x(s)) - z(s)$ é não-crescente se, e somente se,*

$$H_m(x^0, x, \zeta_0, \zeta) \leq 0,$$

para todo $(\zeta_0, \zeta) \in \partial_p \phi(x_0, x)$, $\forall (x^0, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$.

Demonstração: A demonstração deste teorema é similar à demonstração da Proposição 2.2.2. ■

Teorema 4.2.3 *Seja $\phi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua dada. Então*

(a) *$H_m(x^0, x, \zeta_0, \zeta) \leq 0$, para todo $(\zeta_0, \zeta) \in \partial_p \phi(x^0, x)$, $\forall (x^0, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ se, e somente se, $H_m(x^0, x, \zeta_0, \zeta) \leq 0$, para todo $(\zeta_0, \zeta) \in \partial_D \phi(x^0, x)$, $\forall (x^0, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$;*

- (b) $H_m(x^0, x, \zeta_0, \zeta) \geq 0$, para todo $(\zeta_0, \zeta) \in \partial_p \phi(x^0, x)$, $\forall (x^0, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ se, e somente se, $H_m(x^0, x, \zeta_0, \zeta) \geq 0$, para todo $(\zeta_0, \zeta) \in \partial^D \phi(x^0, x)$, $\forall (x^0, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$.
- (c) A função valor satisfaz (HJB, $\sim$) nos itens (a) e (b).

Demonstração: A demonstração é análoga à demonstração da Proposição 2.2.4. ■

Agora introduziremos o conceito de soluções viscosas para problemas impulsivos relaxados. Note que, sendo um problema regular, a noção do Capítulo 2 vale. Será necessário, apenas, re-interpretar a noção de soluções viscosas no contexto do problema em estudo. Vejamos.

Uma função $\Phi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *solução viscosa* da equação de derivadas parciais

$$H_m(x^0, x, \Phi_t, \Phi_x) = 0 \quad (4.7)$$

quando

- a) Φ é contínua e $\Phi(x^0, x) \rightarrow 0$, quando $x^0 \rightarrow \infty$, uniformemente em conjuntos compactos $C \subset \mathbb{R}^n$;
- b) Para toda função diferenciável $\phi \in C((0, \infty) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, tal que $\Phi - \phi$ tem um máximo local em $(x^0, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, temos

$$H_m(x^0, x, \phi_t, \phi_x) \geq 0;$$

- c) Para toda função diferenciável $\phi \in C((0, \infty) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, tal que $\Phi - \phi$ possui um mínimo local em $(x^0, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, temos

$$H_m(x^0, x, \phi_t, \phi_x) \leq 0.$$

Se a função Φ satisfaz somente a) e b), então ela é chamada *sub-solução viscosa*. Se Φ satisfaz somente a) and c), é então chamada de *super-solução viscosa*.

A proposição seguinte é consequência imediata da Proposição 2.3.1.

Proposição 4.2.1 (i) Uma função Φ é sub-solução viscosa da equação (4.7) se e somente se

(a) para todo $(x^0, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$,

$$H_m(x^0, x, \zeta_0, \zeta) \geq 0 \quad \forall (\zeta_0, \zeta) \in \partial^D \Phi(x^0, x);$$

(b) $\lim_{x^0 \uparrow \infty} \Phi(x^0, x) = 0$ uniformemente para x em compactos do $\mathbb{R}^n$.

(ii) Uma função v é super-solução da equação (4.7) se e somente se satisfaz a asserção (b) do item (i) e para todo $(x^0, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$,

$$H_m(x^0, x, \zeta_0, \zeta) \leq 0 \quad \forall (\zeta_0, \zeta) \in \partial_D \Phi(x^0, x).$$

Note que, como corolário da Proposição 4.2.1 e Teorema 4.2.1 segue facilmente o seguinte resultado.

Corolário 4.2.1 Seja Φ uma função contínua. Então Φ é uma solução viscosa da equação de (4.7) se, e somente se,

$$H_m(x^0, x, \zeta_0, \zeta) = 0 \quad \forall (\zeta_0, \zeta) \in \partial_p \Phi(x^0, x).$$

Agora apresentamos o resultado de verificação para o problema relaxado. Para isto precisamos do seguinte conjunto. Dado um escalar α , defina

$$E_\alpha := \{x : (x^0, x, z) \text{ é viável}, x(t_0) = x_0, z(t_0) \leq \alpha\}.$$

Proposição 4.2.2 Suponha que, para algum α , E_α seja limitado. Seja $(\tilde{x}^0, \tilde{x}, \tilde{z})$ uma trajetória viável de $R_\infty(t_0, x_0)$ e suponha que exista uma função $\phi : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a equação de HJB (4.7) com $\phi(t_0, x_0) = \tilde{z}(t_0)$. Se a condição de regularidade (CR) é satisfeita então o processo é ótimo.

Demonstração: Seja (x^0, x, z) outro processo viável de $R_\infty(t_0, x_0)$, que esteja no conjunto E_α . Assim temos

$$\tilde{z}(t_0) - z(t_0) = \phi(t_0, x_0) - z(t_0) \leq \phi(x^0(s), x(s)) - z(s) \quad \forall s \in [t_0, \infty). \quad (4.8)$$



A desigualdade na equação acima segue do Teorema 4.2.2 (a). Agora observe que a condição regularidade implica que dx^0/ds não se anula em intervalos infinitos. Isto é equivalente a x^0 ser sobrejetiva, i.e., $x^0([t_0, \infty)) = [0, \infty)$. Logo, $x^0(s) \uparrow \infty$ quando $s \uparrow \infty$. Como ϕ é solução viscosa, então a condição de decaimento garante que $\phi(x^0(s), x(s))$ converge a zero quando $s \rightarrow \infty$. Resta mostrar que $z(s)$ também converge a zero quando $s \rightarrow \infty$. Existe uma função $v(s) \in \{v \in \mathbb{R}^q : (v_0, v) \in \bar{V}\}$, quase sempre em $[0, \infty)$, tal que $z(s) = -\int_s^\infty e^{-\delta x^0(s)} [f_0(x^0(s), x(s)) + g_0(x^0(s), x(s))v(s)] ds$. Segue do crescimento linear das funções f_0 e g_0 , do fato que $v(\cdot)$ é limitada, que para alguma constante positiva M , temos

$$z(s) \leq \int_s^\infty e^{-\delta x^0(s)} M(1 + \|x(s)\|) ds.$$

Já que a E_α é limitado, temos que $z(s) \rightarrow 0$, quando $s \rightarrow \infty$.

Portanto, podemos concluir de (4.8) que $\tilde{z}(t_0) - z(t_0) \leq 0$ e, como a trajetória (x^0, x, z) de $R_\infty(t_0, x_0)$ é arbitrária, o resultado segue. ■

Agora passemos ao resultado principal desta seção que diz respeito a existência e unicidade de solução viscosa para a equação de HJB no contexto relaxado.

Teorema 4.2.4 *A função valor V_R é a única solução viscosa da equação (4.7)*

Demonstração: Este resultado é consequência imediata do resultado similar no contexto regular, ver, Teorema 2.3.1. ■

A consequência deste resultado, combinado com o Teorema 4.2.1 é que a função valor do problema impulsivo é a única solução da equação (4.7). Isto quer dizer que o problema relaxado fornece informação suficiente para estudar o problema impulsivo. Uma vez conhecida uma trajetória relaxada e a função valor, calculada através da equação (4.7), podemos fazer o teste de otimalidade da trajetória em questão através da Proposição 4.2.2. Se se confirmar a sua otimalidade, podemos construir um processo impulsivo (x, μ) do problema original de forma explícita, como já foi ilustrado neste trabalho algumas vezes no Capítulo 3.

Entretanto, vamos introduzir uma formulação direta de solução da equação de HJB na próxima seção.

4.3 A equação explícita de HJB: soluções viscosas

Agora vamos olhar para a equação de HJB impulsiva, isto é contendo medidas. Entretanto, a formulação não pode ignorar o conceito de solução robusta, se quisermos que a equação de HJB diga alguma coisa a respeito dos processos ótimos do problema de otimização impulsivo associado. Para formalizar o conceito, precisamos então acertar alguma notação.

Quando dizemos que $(\zeta_0(t), \zeta(t)) \in \partial^D \phi(t, x(t))$ $\mathcal{L}$ e μ -q.s. é seleção mensurável, significa que a inclusão acima é satisfeita quase sempre em relação à medida de Lebesgue e em relação à medida μ . Além disso, em cada átomo τ da medida μ , a seleção $(\zeta_0(\tau), \zeta(\tau))$, assim como a trajetória, toma valores numa família de curvas, denotada por $(\zeta_{0\tau}(\cdot), \zeta_\tau(\cdot))$ e satisfaz

$$(\zeta_{0\tau}(s), \zeta_\tau(s)) \in \partial^D \phi(\tau, x_\tau(s)) \text{ q.s.}$$

Esta inclusão quer dizer que para toda curva no lado esquerdo da inclusão existe uma curva em $x_\tau(\cdot)$, em que a inclusão é satisfeita. Vale a mesma observação para a inclusão $(\zeta_0(t), \zeta(t)) \in \partial_D \phi(t, x(t))$ $\mathcal{L}$ e μ -q.s.

Agora podemos definir em que sentido a equação de HJB deve ser satisfeita. Vejamos:

Definição 4.3.1 Uma função $\Phi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita solução viscosa da equação de HJB se

- (a) Φ é contínua e $\Phi(s, x) \rightarrow 0$, quando $s \rightarrow \infty$, uniformemente em conjuntos compactos $C \subset \mathbb{R}^n$;
- (b) para todo processo (x, μ) viável e seleções mensuráveis $f(t) \in F(t, x(t))$ q.s. e $\tilde{g}(t) \in \tilde{G}(t, x(t), \mu(t))$ μ -q.s. tal que $x(t_0) = x_0$, tem-se

$$\begin{aligned} \int_A \left\{ \zeta_0(t) + \langle \zeta(t), f(t) \rangle + e^{-\delta t} f_0(t, x(t)) \right\} dt + \int_A \langle \xi(t), \tilde{g}(t) \rangle \bar{\mu}(dt) \\ + \int_A e^{-\delta t} g_0(t, x(t-), \mu(\{t\})) \mu(dt) \geq 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$\forall A \in \mathcal{B}([0, \infty))$, tal que $A \subset [0, \infty) \setminus \{t_i\}$, para qualquer seleção mensurável $(\zeta_0(t), \zeta(t)) \in \partial^D \phi(t, x(t))$ $\mathcal{L}$ e μ -q.s., onde $\{t_i\}$ é uma ordenação dos átomos da medida de controle μ . Além disso, para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\bar{\eta}(t_i)} \langle \bar{\xi}(s), \dot{y}(s) \rangle ds + \int_{\bar{\eta}(t_i)} e^{-\delta t_i} g_0(t_i, y(s)) v(s) ds \geq 0 \quad (4.10)$$

$$\forall \bar{\zeta}(\cdot) \in \zeta_{t_i}(\cdot), \forall y(\cdot) \in x_{t_i}(\cdot) \text{ e } \forall v(\cdot) \in V^{t_i}.$$

(c) existe processo viável (x, μ) tal que para qualquer seleção mensurável $(\zeta_0(t), \zeta(t)) \in \partial_D \phi(t, x(t))$ $\mathcal{L}$ e μ -q.s., existem seleções mensuráveis $f(t) \in F(t, x(t))$ q.s. e $\tilde{g}(t) \in \tilde{G}(t, x(t), \mu(t))$ μ -q.s. satisfazendo

$$\begin{aligned} \int_A \left\{ \zeta_0(t) + \langle \zeta(t), f(t) \rangle + e^{-\delta t} f_0(t, x(t)) \right\} dt + \int_A \langle \xi(t), \tilde{g}(t) \rangle \bar{\mu}(dt) \\ + \int_A e^{-\delta t} g_0(t, x(t-), \mu(\{t\})) \bar{\mu}(dt) \leq 0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$\forall A \in \mathcal{B}([0, \infty))$, com $A \subset [0, \infty) \setminus \{t_i\}$, onde $\{t_i\}$ é uma ordenação dos átomos da medida de controle μ . Além disso, para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\bar{\eta}(t_i)} \langle \bar{\xi}(s), \dot{y}(s) \rangle ds + \int_{\bar{\eta}(t_i)} e^{-\delta t_i} g_0(t_i, y(s)) v(s) ds \leq 0 \quad (4.12)$$

para algum $\bar{\zeta}(\cdot) \in \zeta_{t_i}(\cdot)$, para algum $y(\cdot) \in x_{t_i}(\cdot)$ e para algum $v(\cdot) \in V^{t_i}$.

Se a função Φ satisfaz somente a) e b), então ela é chamada sub-solução viscosa. Se V satisfaz somente a) and c), é então chamada de super-solução viscosa.

Temos o seguinte resultado.

Proposição 4.3.1 A função valor, V , é solução viscosa da equação de HJB no sentido da Definição 4.3.1

Demonstração: Provemos primeiramente que V é sub-solução viscosa da equação de HJB. Sejam (t_0, x_0) dados e (x, μ) um processo viável tal que $x(t_0) = x_0$ e seleções mensuráveis $f(t) \in F(t, x(t))$ q.s., $\tilde{g}(t) \in \tilde{G}(t, x(t), \mu(t))$ μ -q.s. c $(\zeta_0(t), \zeta(t)) \in \partial^D V(t, x(t))$ q.s.. A existência de seleções mensuráveis é garantida pelo teorema da seleção mensurável (e.g., [2]) adaptado ao intervalo ilimitado $[0, \infty)$.

Tomemos (θ, y, Γ) uma família de processos associados com a família de complementos gráficos da medida de controle μ . Assim, associado a cada elemento $\gamma \in \Gamma$ existe pelo menos uma trajetória y relaxada. Seja τ um átomo da medida μ . Escolha uma seleção mensurável arbitrária $(\zeta_0(\tau), \zeta_\tau(\tau)) \in \partial V(\tau, y(\tau))$. Como V é solução da HJB relaxada (ver, Teorema 4.2.4), (4.10) segue imediatamente.

Agora passemos a demonstrar (4.11). Sejam $\{t_i\}$ uma ordenação dos átomos da medida μ e $A \in \mathcal{B}([0, \infty))$, tal que $A \subset [0, \infty) \setminus \{t_i\}$. Considere

$$\lambda(A) := \int_A \left\{ \zeta_0(t) + \langle \zeta(t), f(t) \rangle + e^{-\delta t} f_0(t, x(t)) \right\} dt + \int_A \langle \xi(t), \tilde{g}(t) \rangle \bar{\mu}(dt) + \int_A e^{-\delta t} g_0(t, x(t)) \mu(dt).$$

Mostremos que $\lambda(A) \geq 0$. Primeiro observe que da definição de solução robusta para inclusões diferenciais (ver, Definição 3.2) segue que

$$\tilde{g}(t) = g(t)w(t) \quad \mu - \text{q.s.}$$

para algum $g(t) \in G(t, x(t))$ $\mu - \text{q.s.}$, onde $w(t)$ é a derivada de Radon-Nicodyn: $\mu(dt) = w(t)\bar{\mu}(dt)$. Isto implica que

$$\lambda(A) := \int_A \left\{ \zeta_0(t) + \langle \zeta(t), f(t) \rangle + e^{-\delta t} f_0(t, x(t)) \right\} dt + \int_A \langle \xi(t), g(t) \rangle \mu(dt) + \int_A e^{-\delta t} g_0(t, x(t)) \mu(dt).$$

Observe que $x(\theta(s)) = y(s)$ no conjunto $[0, \infty) \setminus \cup_i \bar{\eta}(t_i)$. Logo,

$$f(\theta(s)) \in F(\theta(s), y(s));$$

$$g(\theta(s)) \in G(\theta(s), y(s));$$

$$(\zeta_0(\theta(s)), \zeta(\theta(s))) \in \partial^D V(\theta(s), y(s));$$

para quase todo $s \in [0, \infty) \setminus \cup_i \bar{\eta}(t_i)$. Como o conjunto A não contém átomos da medida μ , segue do lema de mudança de variáveis (Lema 3.1.1) que

$$\lambda(A) := \int_{\theta^{-1}(A)} \left\{ \zeta_0(\theta(s)) + \langle \zeta(\theta(s)), f(\theta(s)) \rangle + e^{-\delta \theta(s)} f_0(\theta(s), x(\theta(s))) \right\} \dot{\theta}(s) ds + \int_{\theta^{-1}(A)} \left\{ \langle \xi(\theta(s)), g(\theta(s)) \rangle + e^{-\delta \theta(s)} g_0(\theta(s), x(\theta(s))) \right\} \dot{\gamma}(s) ds.$$

A não negatividade da equação acima segue da Proposição 4.2.1.

Agora vamos demonstrar que V é super-solução viscosa da equação de HJB. Seja (x^0, x) uma trajetória relaxada. Como a função valor é solução viscosa da equação de HJB (4.7) segue da Proposição 4.2.1 que

$$H_m(x^0, x, \zeta_0, \zeta) \leq 0 \quad \forall (\zeta_0, \zeta) \in \partial_D \Phi(x^0, x).$$

Sabemos das hipóteses que F e G tem imagens compactas e são mensuráveis. Sabemos também que $\bar{V}$, por definição é compacto. Assim, já que $s \rightarrow x^0(s), x(s)$ é contínua, a multi-função $s \rightarrow \tilde{F}_1(x^0(s), x(s))$ é mensurável e seus valores são compactos. Logo, para toda seleção mensurável $(\zeta_0(s), \zeta(s)) \in \partial_D \Phi(x^0(s), x(s))$, existem seleções mensuráveis $(v_0(s), v(s)) \in \bar{V}$ q.s., $f(s) \in F(x^0(s), x(s))$ q.s. e $g(s) \in G(x^0(s), x(s))$ q.s. tal que

$$\begin{aligned} \frac{dx^0(s)}{ds} &= v_0(s); \\ \{\zeta_0(s) + \langle \zeta(s), f(s) \rangle + e^{-\delta x(s)} f_0(x^0(s), x(s))\} v_0(s) &+ \{\zeta(s) \cdot g(s) \\ &+ e^{-\delta x(s)} g_0(x^0(s), x(s))\} v(s) \leq 0 \quad \text{q.s. em } [0, \infty). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Agora usando argumentos já repetidos inúmeras vezes neste trabalho, podemos construir uma medida μ associada com a função $(v_0(s), v(s))$ e uma trajetória x impulsiva de forma que (x, μ) seja um processo viável de $(\tilde{P}_\infty(t_0, x_0))$. Por construção $x^0(s) = \theta(s)$ q.s. em $[t_0, \infty)$. Sejam η a função de reparametrização associada com a função θ e $\{t_i\}_i^\infty$ uma enumeração dos átomos de μ . Defina as funções

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}_0(t) &:= \zeta_0(\eta(t)); \quad \hat{\zeta}(t) := \zeta(\eta(t)); \quad \hat{f}(t) := f(\eta(t)) \quad \text{em } [0, \infty); \text{ e} \\ \hat{g}(t) &:= g(\eta(t)) \quad \mu \text{ e } \mathcal{L}\text{-q.s. em } [0, \infty) \setminus \cup_{i=1}^\infty \{t_i\}. \end{aligned}$$

É fácil verificar que as funções acima estão bem definidas e satisfazem

$$\begin{aligned} (\hat{\zeta}_0(t), \hat{\zeta}(t)) &\in \partial^D V(t, \hat{x}(t)); \quad \hat{f}(t) \in F(t, \hat{x}(t)) \quad \text{q.s.}; \\ \hat{g}(t) &\in G(t, \hat{x}(t)) \quad \mu\text{-q.s. on } [0, \infty) \setminus \cup_{i=1}^\infty \{t_i\}. \end{aligned}$$

Seja $A \in \mathcal{B}([0, \infty))$ arbitrário, tal que $A \subset [0, \infty) \setminus \cup_{i=1}^\infty \{t_i\}$. Então $B := \theta^{-1}(A) \in$

$\mathcal{B}([0, \infty)) \subset B \subset [0, \infty) \setminus \cup_{i=1}^{\infty} \theta^{-1}(t_i)$. Usando o lema de mudança de variáveis, obtemos,

$$\int_A \left\{ \hat{\zeta}_0(t) + \langle \hat{\zeta}(t), f(t) \rangle + e^{-\delta t} f_0(t, x(t)) \right\} dt + \int_A \langle \hat{\xi}(t), \hat{g}(t) \rangle \mu(dt) + \int_A e^{-\delta t} g_0(t, x(t)) \mu(dt) \leq 0.$$

Como a escolha de $A \in \mathcal{B}([0, \infty))$ excetuando os átomos de μ é arbitrária, (4.9) segue.

Agora analisemos nos átomos de μ . Observe que $\dot{\theta}(s) = \frac{d}{ds} x^0(s) = v_0(s)$ é nula quase sempre em $\cup_i \theta^{-1}(t_i)$. Logo, segue de (4.13) que, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\bar{\eta}(t_i)} \langle \langle \xi(s), g(s) \rangle, v(s) \rangle ds + \int_{\bar{\eta}(t_i)} e^{-\delta t_i} g_0(t_i, x(s)) v(s) ds \leq 0. \quad (4.14)$$

Observe que $g(s) \in \mathbf{G}(t_i, x(s))$ q.s., $\bar{\zeta}(\cdot) \in \zeta_i(\cdot)$, $x(\cdot) \in \hat{x}_{t_i}(\cdot)$, e $v(\cdot) \in V^{t_i}$. Isto conclui que V é solução viscosa da equação de HJB impulsiva. ■

Observamos que, embora a função valor V seja uma solução, não sabemos se ela é a única solução da equação de HJB impulsiva. É de se esperar que seja. Com a unicidade, teríamos equivalência entre os conceitos de solução da equação de HJB relaxada e a impulsiva.

Bibliografia

- [1] A. Arutyunov, V. Jacimovic, and F. Lobo Pereira. Second order necessary conditions for optimal impulsive control problems. In *European Control Conference 2001*, 2001.
- [2] J. P. Aubin and A. Cellina. *Differential inclusions, set-valued maps and viability theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [3] M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. Birkhäuser, Boston, 1997.
- [4] V. Baturin and E. Goncharova. Improvement method based on approximate representation of reachable set. *Automatika i Telemekhanika*, 11:19–29, 1999.
- [5] V. Baturin and D. Ourbanovich. *Approximate optimal control methods based on extension principle*. Nauka (Science), Novosibirsk, 1997.
- [6] R. F. Baum. Existence theorems for lagrange control problems with unbounded domain. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 19:89–116, 1976.
- [7] J. Baumeister. On optimal control of a fishery. In *NOLCOS'01 - 5th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, 2001.
- [8] J. Baumeister, A. Leitao, and G. N. Silva. On the value function for problems with infinite horizon. Technical report, 2001.
- [9] A. Bressan and F. Rampazzo. Impulsive control systems with commutative vector fields. *J. of Optimization Theory and Applications*, 71(1):67–83, 1991.

- [10] A. Bressan and F. Rampazzo. Impulsive control systems without commutativity assumptions. *J. of Optimization Theory and Applications*, 81(3):435–457, 1994.
- [11] B. Brogliato. *Nonsmooth Impact Mechanics: Models, Dynamics and Control*. Lect. Notes in Control and Inform. Sci., 220. Springer-Verlag, 1996.
- [12] C. Clark, F. Clarke, and G. Munro. The optimal exploitation of renewable stocks. *Econometrica*, 47:25–47, 1979.
- [13] F.H. Clarke, Yu. Ledyaeu, R. Stern, and P. Wolenski. *Nonsmooth analysis and control theory*. Graduate Texts in Mathematics Vol. 178. Springer-Verlag, 1998.
- [14] F. Colonius. Asymptotic behavior of optimal control systems with low discount rates. *Mathematics of Operations research*, 14:309–316, 1989.
- [15] M. G. Crandall and P. L. Lions. On existence and uniqueness of solutions of hamilton-jacobi equations. *Nonlinear Analysis*, 10:353–370, 1986.
- [16] V. Dykhta. Impulse-trajectory extension of degenerate optimal control problems. *IMACS Ann. Comput. Appl. Math.*, 8:103–109, 1990.
- [17] V. Dykhta and N. Derenko. Numerical methods based on generalized stationary condition for impulsive control problems. In *Proc. Workshop on Computer Logics, Algebra and Intelligence Control*, volume 2, pages 59–70. Irkutsk, 1994.
- [18] V.A. Dykhta and O.N. Samsonyuk. *Optimal impulse control with applications*. Nauka, Moscow, 2000.
- [19] A. F. Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides*. Kluwer Academics, Dordrecht, 1988.
- [20] G. Giorgi and S. Komlosi. Dini derivatives in optimization - part i. *Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e sociali*, 15:3–30, 1993.
- [21] V.I. Gurman. On optimal processes with unbounded derivatives. *Autom. & Remote Control*, 17:14–21, 1972.



- [22] V.I. Gurman. *Models of natural resources control*. Nauka, Moscow, 1981.
- [23] D. Havelock. A generalization of the hamilton-jacobi equation.
- [24] A. Leitao J. Baumeister and G. N. Silva. Optimal control problems with infinite horizon whose control laws contain measures: Maximum principle, booktitle =.
- [25] G.A. Kolokolnikova. Discontinuous trajectories optimality in the nonlinear optimal control problems. *Procs of 13th World Congress of the IFAC*, v. D: Control Design II, Optimization:353–357, 1996.
- [26] V.F. Krotov and V.I. Gurman. *Methods of improvement in computational experiments*. Nauka, Novosibirsk, 1987.
- [27] F. Da Lio. On the bellman equation for infinite horizon problems with unbouded cost funcional. *Appl. Math. Optim.*, 41:171–197, 2000.
- [28] J. Macki and A. Strauss. Springer-Verlag, New York, Berlin, 1982.
- [29] J. P. Marec. *Optimal Space Trajectories*. Elsevier, 1979.
- [30] B.M. Miller. The generalized solutions of nonlinear optimization problems with impulse control. *SIAM J. Control and Optimization*, 34, 1996.
- [31] M. Motta and F. Rampazzo. Space-time trajectories of nonlinear systems driven by ordinary and impulse controls. *Differential and Integral Equations*, 1995.
- [32] F. Pereira and G. N. Silva. Necessary conditions of optimality for vector-valued impulsive control problems. *Systems & Control Letters*, 40:205–215, 2000.
- [33] R. Rishel. An extended pontryagin principle for control systems whose control laws contain measures. *SIAM J. Control*, 3:191–205, 1965.
- [34] R. Rockafellar. Dual problems for arcs of bounded variation. In *Calculus of Variations and Control Theory*, pages 155–192. D.L. Russell ed., Academic Press, New York, 1981.



- [35] R. Rockafellar. Optimality conditions for convex control problems with nonnegative states and the possibility of jumps. In *Game Theory and Mathematical Economics*, pages 339–349. O. Moeschlin, D. Pallaschke eds., North Holland, Amsterdam, 1981.
- [36] G. N. Silva and R. Vinter. Measure differential inclusions. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 202:727–746, 1996.
- [37] G. N. Silva and R. Vinter. Necessary conditions for optimal impulsive control problems. *SIAM J. Control and Optimization*, 35:1829–1846, 1997.
- [38] A. I. Subbotin. *Generalized solutions of the first-order PDEs*. Birkhäuser, Boston, 1995.
- [39] R.B. Vinter and F.M. Pereira. A maximum principle for optimal processes with discontinuous trajectories. *SIAM J. Control and Optimization*, 26, 1988.
- [40] J. Warga. Relaxed variational problems. *J. Math. Anal. and Applic.*, 4, 1962.
- [41] F. Wirth. Convergence of the value functions of discounted infinite horizon optimal control problems with low discount rates. *Mathematics of Operations research*, 18:1006–1019, 1993.
- [42] S. Zavalischin and A. Sesekin. *Impulsive processes: models and applications*. Nauka (Science), Moscow, 1991.



