UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

JULIANA MARTINS

O LIVRO QUE DIVULGOU O PAPIRO RHIND NO BRASIL

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira

Rio Claro - SP
2015

JULIANA MARTINS

O LIVRO QUE DIVULGOU O PAPIRO RHIND NO BRASIL

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira

Profª. Drª. Circe Mary Silva da Silva Dynnikov

Prof. Dr. Carlos Roberto de Moraes

Rio Claro, 16 de janeiro de 2015.

À Edilson, com apreço.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por ter me dado coragem e sabedoria quando fiz minhas escolhas. Por ter me abençoado colocando boas pessoas em meu caminho e por ter me proporcionado dois dos melhores anos da minha vida.

À Edilson Roberto Pacheco (in memorian), meu eterno orientador. Por ter acreditado em mim quando eu era apenas uma aluna do primeiro ano da graduação. Por ter me auxiliado e motivado desde o início de meus estudos e pesquisa em história da matemática. E, principalmente, por ter me dado o prazer de sua convivência durante seus últimos anos de vida.

Aos professores da banca, Marcos Vieira Teixeira, meu orientador, por ter me recebido em Rio Claro e confiado em mim e meu trabalho. À profª. Circe Mary da Silva Silva Dynnikov, pelas infinitas sugestões e por sempre acompanhar de perto o desenvolvimento dessa dissertação. Ao prof. Roger Miarka, pelas valiosas contribuições no momento de minha qualificação. E ao prof. Carlos Alberto Moraes por ter aceitado participar da banca de defesa e por ter colaborado para a versão final deste trabalho.

À minha família, especialmente à minha mãe, Cleusa, pela compreensão de minha ausência em casa e pelo incentivo e apoio incondicionais.

À minha segunda família, Bruna e Williane, minhas companheiras de moradia em Rio Claro. Pela paciência, carinho, amizade e experiências compartilhadas nesses quase dois anos de convivência.

Ao Lucas, por ter me ensinado tantas coisas, dentre elas o que é o amor.

Aos grandes amigos, Viviane, por ter tornado o início de minha estadia em Rio Claro muito mais leve e prazerosa. Zaqueu, por ter sido em diversos momentos meu quase co-orientador. Amanda, por ser minha confidente e conselheira. Marília, por ser minha parceira em todos os momentos.

Aos colegas do grupo pesquisa em história da matemática.

Ao PPGEM.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo financiamento da pesquisa.

Agradeço também a todos que de algum modo contribuíram para a definição e execução deste trabalho.

RESUMO

Esta dissertação de mestrado configura-se como uma pesquisa em história da matemática cujo principal objetivo é apresentar uma análise do livro *O mais antigo documento mathematico conhecido (papyro Rhind)*, escrito por Eugênio de Barros Raja Gabaglia e publicado no Rio de Janeiro no ano de 1899. A maior parte do texto consiste do estudo do livro de Gabaglia, no qual, além de considerar seu próprio conteúdo o situamos no contexto histórico em que foi escrito. O procedimento do estudo desvelou-se na medida em que a leitura do livro foi feita. A análise foi composta a partir de dois tipos principais de literatura: àquela que versa sobre o papiro Rhind e a matemática egípcia antiga, e, por outro lado, dos textos de teoria da história de Fernand Braudel e de Michel de Certeau. O discurso do qual se constitui a análise é apresentado por meio de comentários que, por sua vez, possuem natureza explicativa, complementativa e por vezes comparativa. Os resultados desse trabalho implicam em dois tipos de considerações finais: em primeiro lugar o livro de Gabaglia reflete um amplo e atualizado conhecimento do autor acerca do assunto proposto, o que sem dúvida merece destaque pela época e local da publicação. Além disso, a execução do trabalho nos proporcionou uma relevante aproximação com a matemática egípcia antiga, ou seja, foi possível conhecer e compreender métodos e procedimentos de cálculos empregados na antiga civilização da qual, assim como Gabaglia, possuímos grande admiração.

Palavras-chave: Eugênio de Barros Raja Gabaglia; História da matemática no Brasil; História da matemática no Antigo Egito, Papiro Rhind.

ABSTRACT

This dissertation is the result of a research study in the history of mathematics with the main objective of presenting an analysis of the book *O mais antigo documento matemático conhecido (papyro Rhind)*, written by Eugênio de Barros Raja Gabaglia and published in Rio de Janeiro in the year 1899. Most of the text consists of the study of the book of Gabaglia, in which, in addition to considering the content itself we situate the analysis in the historical context in which the text was written. The procedures for the study evolved as the text was read. The analysis was based on two main types of literature: that which deals with the Rhind papyrus and ancient Egyptian mathematics, and, on the other hand, the historical theories of Fernand Braudel's and Michel de Certeau. The analysis is presented by means of comments the nature of which at times is explanatory, complementary, or comparative. The results of this work imply two kinds of final considerations: firstly Gabaglia's book reflects a broad and up-to-date knowledge of the author on the subject proposed, which undoubtedly deserves the prominence it has, given the time and place of publication. In addition, the development of the study provided a relevant approach to ancient Egyptian mathematics, in particular it was possible to come to know and understand the calculus methods and procedures employed in ancient Egyptian civilization which, like Gabaglia, we have come to admire greatly.

Key-words: Eugênio de Barros Raja Gabaglia; History of mathematics in Brazil; History of mathematics in Ancient Egypt; Rhind papyrus.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Retrato de Eugênio de Barros Raja Gabaglia 19

Figura 2 – Pedra de Roseta.. 24

Figura 3 – Pedra de Roseta no Museu Britânico 24

Figura 4 – Reconstituição da estela em seu formato original 24

Figura 5 – Dom Pedro II e sua comitiva em visita ao Egito 26

Figura 6 – Charge de Dom Pedro II: sátira política.. 27

Figura 7 – Início do papiro Rhind (título em vermelho).. 38

Figura 8 – Fragmentos do papiro Rhind (Broklyn Museum n. 37.1784E)................. 42

Figura 9 – Representação dos números inteiros em diferentes papiros.................. 48

Figura 10 – Símbolos que representam o “total” no PMR 49

Figura 11 – Sinais equivalentes a (+) e (–)... 50

Figura 12 – Representação das dez primeiras frações em ambos os sistemas de numeração: hieroglífico e hierático... 54

Figura 13 – Partes do Olho de Hórus e os símbolos (em hieróglifos e hierático) para as frações da sequência $\overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{32}, \overline{64}$ 55

Figura 14 – Problema n. 61 e n. 61B do papiro Rhind... 57

Figura 15 – Problema n. 6 do papiro Rhind 62

Figura 16 – Problema n. 13 do papiro Rhind 65

Figura 17 – Problema n. 21 do papiro Rhind 68

Figura 18 – Problema n. 23 do papiro Rhind 72

Figura 19 – Problema n. 39 do papiro Rhind 74

Figura 20 – Problema n. 40 do papiro Rhind 76

Figura 21 – Problema n. 63 do papiro Rhind 77

Figura 22 – Problema n. 65 do papiro Rhind 78

Figura 23 – Problema n. 64 do papiro Rhind 81

Figura 24 – Problema n. 79 do papiro Rhind **83**
Figura 25 – Problema n. 62 do papiro Rhind **86**
Figura 26 – Problema n. 72 do papiro Rhind **89**
Figura 27 – Problema n. 66 do papiro Rhind **90**
Figura 28 – Problema n. 24 do papiro Rhind **93**
Figura 29 – Problema n. 26 do papiro Rhind **94**
Figura 30 – Problema n. 34 do papiro Rhind **95**
Figura 31 – Problema n. 28 do papiro Rhind **96**
Figura 32 – Problema n. 29 do papiro Rhind **97**
Figura 33 – Problema n. 35 do papiro Rhind **98**
Figura 34 – Problema n. 36 do papiro Rhind **100**
Figura 35 – Problema n. 37 do papiro Rhind **100**
Figura 36 – Problema n. 44 do papiro Rhind **122**
Figura 37 – Problema n. 41 do papiro Rhind **123**
Figura 38 – Problema n. 48 do papiro Rhind **125**
Figura 39 – Problema n. 50 do papiro Rhind **125**
Figura 40 – Problema n. 42 do papiro Rhind **126**
Figura 41 – Problema n. 49 do papiro Rhind **129**
Figura 42 – Problema n. 51 do papiro Rhind **131**
Figura 43 – Problema n. 52 do papiro Rhind **132**
Figura 44 – Problema n. 53 do papiro Rhind **134**
Figura 45 – Problema n. 56 do papiro Rhind **135**

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 11
1.1 Justificativa 12
1.2 Percurso e procedimentos teórico e metodológicos 14

2 NOTAS BIOGRÁFICAS SOBRE EUGENIO DE BARROS RAJA GABAGLIA 19

3 CONTEXTUALIZAÇÃO: REFLEXOS DA EGIPTOLOGIA NO BRASIL 23
3.1 O papiro matemático Rhind 28

4 O MAIS ANTIGO DOCUMENTO MATHEMATICO CONHECIDO (PAPYRO RHIND) 30
4.1 § 1.º – Historico 33
4.2 § 2.º – O conteúdo do papyro 41
4.3 § 3.º – Arithmetica do papyro Rhind 47
4.4 § 4.º – Algebra do papyro Rhind 91
4.5 § 5.º – Geometria do papyro Rhind 119

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 136

REFERÊNCIAS 142

ANEXO 146

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho configura-se como uma pesquisa em história da matemática cujo principal objetivo é apresentar uma análise do livro *O mais antigo documento mathematico conhecido (papyro Rhind)*, do ponto de vista de seu conteúdo e situando-o no contexto histórico-social e geográfico em que foi escrito. Essa obra, escrita por Eugênio de Barros Raja Gabaglia e publicada no Rio de Janeiro no ano de 1899, é considerada a primeira, no Brasil, inteiramente dedicada a um tema de história da matemática (SILVA, C., 2001).

Nosso texto constitui-se de cinco capítulos, sendo a maior parte do trabalho concentrada no capítulo quarto.

No primeiro capítulo, tecemos considerações gerais sobre o trabalho, justificando sua execução, apresentando o percurso e procedimentos teórico e metodológicos empregados para seu desenvolvimento e como se dará a forma de análise do livro.

O segundo capítulo consiste de uma breve biografia de Raja Gabaglia, composta principalmente a partir de material coletado no Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, e por material concedido por uma de suas netas, Dona Elisabeth Pessoa Raja Gabaglia.

Tendo em vista que a principal temática do livro aqui abordado é o *papiro Rhind*, no terceiro capítulo trazemos informações prévias sobre o tema, pois as consideramos relevantes para uma melhor compreensão do texto de Gabaglia e dos nossos comentários. Discorremos previamente sobre o status do tema na época de sua recente divulgação e tradução, no intuito de situar cronologicamente e geograficamente a obra do professor brasileiro. Ainda neste capítulo tecemos breves considerações sobre o movimento intitulado *Egiptologia* e conjecturamos como este pode relacionar-se com a publicação do livro de Gabaglia.

O quarto capítulo é divido em cinco seções correspondentes aos cinco parágrafos do livro de Gabaglia e é formado por uma cópia transcrita do livro e pela análise de seu texto. A transcrição foi digitada no verso das páginas que contém nossos comentários com o objetivo de facilitar a leitura de ambos os textos, pois, com esse modo de exposição diferenciado recomendamos que a leitura da transcrição seja feita primeiramente e intercalando-se, seção a seção, com nosso texto. Dessa maneira será possível estabelecer uma leitura quase concomitante dos textos, que apesar de se complementaram, podem ser lidos separadamente.

O fecho do trabalho é escrito nas considerações finais, seguido pelas referências.

O leitor irá perceber que não iremos narrar uma história ou descrever o papiro Rhind neste trabalho, no entanto, acreditamos que a partir da leitura do livro de Gabaglia juntamente com nossas considerações, um amplo conhecimento, tanto da história quanto do conteúdo do papiro Rhind, poderá ser adquirido.

Ademais, esperamos que este trabalho contribua para o reconhecimento e divulgação do livro que é o primeiro, no Brasil, a abordar um tema de história da matemática e, de algum modo, valorizar também a importância de seu autor, Raja Gabaglia, no campo da história da matemática no Brasil.

1.1 Justificativa

A base e o desenvolvimento deste trabalho estão intimamente relacionados à minha trajetória enquanto pesquisadora na área e, especificamente, no tema proposto. Por isso, descrevo a seguir alguns passos relevantes para a definição de minha pesquisa de mestrado.

Ainda como aluna do curso de graduação em Licenciatura em Matemática, na Universidade Estadual do Centro-Oeste (UNICENTRO) – Guarapuava/PR, desenvolvi, sob orientação do professor Edilson Roberto Pacheco, um projeto de iniciação científica intitulado *O papiro Rhind na historiografia da matemática*. Com esse trabalho inicialmente buscamos verificar como o papiro Rhind é mencionado em livros de história geral da matemática, a exemplo, Ball (1960), Boyer (2001), Bunt (1988), Cajori (2007), Eves (2004), Katz (1998), Struik (1997), para, a partir das menções encontradas, compor um perfil bibliográfico do papiro.

A revisão da literatura apontou para a necessidade de uma leitura mais aprofundada sobre o tema, por isso iniciamos o trabalho de tradução do livro *The Rhind Mathematical Papyrus: an ancient Egyptian text*, dos autores Gay Robins e Charles Shute (1987)[1]. Esse livro serviu como base para o planejamento inicial deste

[1] A tradução do livro não foi concluída. Excetuando-se a tradução do capítulo “Diversions (Problems 28–9, 79)”, publicado nos anais do VII Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática, não houve publicações de outros trechos traduzidos do livro.

trabalho de mestrado, cujo objetivo era apresentar um estudo detalhado do conteúdo do papiro Rhind por meio dos seus diversos problemas matemáticos.

Em meio a elaboração e definição do projeto de pesquisa, este foi submetido à apreciação de avaliadores externos ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática de Rio Claro. A princípio o parecer recebido foi um tanto desanimador, contudo, uma das sugestões mudou o rumo do nosso trabalho e acabou definindo-o permanentemente. O comentário foi o seguinte: “Sugere-se a pesquisa das obras específicas sobre o Papiro Rhind: GABAGLIA, Eugenio de Barro Raja. O mais Antigo Documento Matemático Conhecido, o Papiro Rhind. Imprensa americana, 1899. (Disponível da Biblioteca do IME – USP – Seção de Livros Raros) [...]”.

O passo seguinte a essa “descoberta”, já que o livro era desconhecido por nós até o momento, foi buscar informações e localizá-lo em bibliotecas ou acervos do país no intuito de verificar o seu conteúdo.

Ao mesmo tempo buscávamos informações em textos sobre a pesquisa em história da matemática no Brasil. Desse modo, encontramos em C. Silva (2001), as seguintes informações sobre o livro de Gabaglia (1899),

> Trata-se de uma obra sobre a Matemática egípcia, que analisa principalmente o texto do Papiro Rhind. O autor estudou as obras de historiadores europeus sobre o Papiro Rhind, principalmente o livro de Eisenloch intitulado *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter*, que foi publicado em Leipzig em 1877. [...] Os assuntos do livro incluíam o histórico do Papyro Rhind, bem como o conteúdo do Papyro Rhind, a aritmética do Papyro, a álgebra do Papyro, a geometria do Papyro e a etimologia do vocábulo pirâmide. (SILVA, C., 2001, p. 139)

A mesma autora comenta que este livro é o primeiro dedicado à história da matemática publicado no Brasil, e que anteriormente a 1899, Raja Gabaglia já havia escrito artigos sobre o papiro Rhind sendo estes divulgados no Jornal da Escola Politécnica, no Rio de Janeiro, em 1897[2]. Contudo, é preciso mencionar que tais artigos, assim como o livro, não obtiveram repercussão na época e dificilmente figuram na literatura relevante sobre o tema. Unindo essas informações com o histórico aqui já apresentado, conclue-se que o estudo de Gabaglia (1897) precedeu

---

[2] Uma cópia desses artigos está contida no trabalho de M. Silva (1998), neste mesmo trabalho encontramos a informação de que um artigo também foi publicado na Revista do Club de Engenharia, 1897, cujo conteúdo está disponível no site da Biblioteca Nacional: http://objdigital.bn.br/acervo_digital/div_periodicos/per8036/1897/per8036_1897_01/per8036_1897_01_item1/P63.html.

até mesmo a publicação oficial do fac-símile do papiro Rhind, feita pelo Museu Britânico em 1898.

Conforme indicado no parecer já mencionado, o resultado da busca em sites das principais bibliotecas do país apontou apenas a existência de dois exemplares do livro na *Seção de Livros Raros* da biblioteca do Instituto de Matemática e Estatística (IME) – USP, São Paulo. Após um agendamento prévio e uma visita assistida fomos autorizados a fotografar as 136 páginas que compõe o livro, já que, devido às suas condições físicas não foi possível escaneá-lo ou xerocá-lo.

Uma observação inicial e uma leitura superficial do texto instigaram o meu desejo, enquanto pesquisadora, de verificar sua procedência, seu conteúdo e, de certo modo, sua originalidade. Foi a partir desse momento, que o projeto de pesquisa transformou-se, definindo um novo objetivo, isto é, apresentar uma análise desse livro.

Desse modo, destacamos que este trabalho alia o interesse da autora pelo antigo papiro matemático Rhind com a intenção de exposição do livro que, apesar de sua importância, é praticamente desconhecido em nossa própria área de pesquisa.

1.2 Percurso e procedimentos teórico e metodológicos

Nesta seção buscamos apresentar o percurso, os procedimentos, e o aporte teórico utilizado no desenvolvimento desta pesquisa.

Em primeiro lugar e, levando em consideração o exposto por Baroni, Nobre e Teixeira (1999; 2011), podemos situar nosso estudo em uma das vertentes da *pesquisa em história da matemática*, pois, segundo esses autores, dentre as diversas modalidades de pesquisa que se caracterizam como pesquisa em história da matemática está a que trata de obras (textos históricos de matemática, livros didáticos, coletâneas etc.), ou ainda, a análise histórica e crítica de fontes literárias.

Sendo assim, e, tendo em vista que o principal objetivo deste trabalho é compreender o livro de Gabaglia do ponto de vista de seu próprio conteúdo e situar-lhe no contexto histórico-social e geográfico em que foi escrito, podemos definir nossa questão de investigação do seguinte modo: *como o professor Raja Gabaglia apresentou sua interpretação do papiro Rhind no livro O mais antigo documento mathematico conhecido (papyro Rhind)*?

Para alcançar nosso objetivo e tentar responder a questão proposta, além do estudo do livro de Gabaglia, nos valemos de referenciais teóricos que dão suporte à pesquisa histórica, assim como da literatura que aborda o papiro Rhind de modo específico.

Adotar uma concepção de *história* foi questão fundamental para o desenvolvimento do trabalho, dessa forma, utilizou-se principalmente o texto *Apologia da História* de Marc Bloch (2001), também referenciado para justificar ações e discorrer sobre o nosso ofício enquanto historiadores, e o livro *Escritos sobre a História* de Fernand Braudel (2009). Quanto ao discurso produzido, ou seja, a escrita e o produto final da pesquisa, nos valemos do texto *A escrita da história* de Michel Certeau (2010).

Observamos que tanto para Bloch (2001), quanto para Braudel (2009), a história é feita por homens e que a produção humana não é realizada ou construída de forma isolada. Vejamos,

> [...] o objeto da história é, por natureza o homem[3]. Digamos melhor: os homens. Mais que o singular, favorável à abstração, o plural, que é o modo gramatical da relatividade, convém a uma ciência da diversidade. (BLOCH, 2001, p. 54, nota do autor)

Em seguida, o mesmo autor complementa sua afirmação mencionando,

> "Ciência dos homens" dissemos. É ainda vago demais. É preciso acrescentar: "dos homens no tempo". O historiador não apenas pensa "humano". A atmosfera em que seu pensamento respira naturalmente é a categoria da duração. Decerto, dificilmente imagina-se que uma ciência, qualquer que seja, possa abstrair do tempo. (BLOCH, 2001, p. 55, grifos do autor)

Ou seja, para Bloch (2001), a história é a ciência dos homens no tempo, de modo que não é possível estudar plenamente um fenômeno histórico fora de seu

---

[3] "Sem trair Marc Bloch, creio que podemos situar aqui a nota de rodapé por ele prevista: Fustel de Coulanges, aula inaugural de 1862, na *Revue de Synthèse Historique*, t.II, 1901, p. 243; *Michelet*, aula da École Normale, 1829, citado por G. Monod, t.I, p. 127: 'Ocupamo-nos ao mesmo tempo do estudo do homem individual, e isso será a filosofia, e do estudo do homem social, e isso será a história.' Convém acrescentar que Fustel, mais tarde, disse isso numa fórmula mais sintética e carregada, cujo desenvolvimento que acabamos de ler não é senão, em suma, um comentário: 'A história não é a acumulação dos acontecimentos, de qualquer natureza, que se tenham produzido no passado. Ela é a ciência das sociedades humanas.' Mas isso talvez seja, veremos adiante, reduzir em excesso, na história, a parte do indivíduo; o homem em sociedade e as sociedades não são duas noções, exatamente equivalentes."

momento, de seu “lugar cronológico” (p. 55). Sendo assim, é possível olhar para o passado, entretanto, tal olhar está vinculado às ferramentas do presente.

Muito semelhante a definição de história dada por Bloch (2001), é a concepção de Braudel (2009). Para o autor, a história jamais deixou de depender de condições sociais, e mais ainda, “A história é filha de seu tempo” (p. 17). Braudel também abordou a questão da escrita da história problematizando a importância do papel do historiador em seu trabalho,

> Sua inquietude *[da história]* é pois a própria inquietude que pesa sobre nossos corações e nossos espíritos. E se seus métodos, seus programas, suas respostas mais precisas e mais seguras ontem, se seus conceitos estalam todos de uma só vez, é sob o peso de nossas reflexões, de nosso trabalho e, mais ainda, de nossas experiências vividas. (BRAUDEL, 2009, p. 17, grifo nosso)

Nota-se que para ambos os autores a ideia de história está estritamente ligada à *produção humana*, ao *tempo* em que foi produzida e por *quem* está sendo problematizada. Para compreender mais sobre esse último aspecto: sobre *quem* está problematizando, fazendo a história, ou seja, quem está produzindo o discurso, utilizamos os conceitos de “espaço” e “lugar de produção” conforme entendidos por Certeau (2010),

> Toda pesquisa historiográfica se articula com um *lugar* de produção sócioeconômico, político e cultural. Implica um meio de elaboração que circunscrito por determinações próprias: uma profissão liberal, um posto de observação ou de ensino, uma categoria de letrados, etc. Ela está, pois, submetida a imposições, ligada a privilégios, enraizada em uma particularidade. É em função deste lugar que se instauram os métodos, que se delineia uma topografia de interesses, que os documentos e as questões, que lhes serão propostas, se organizam. (CERTEAU, 2010, p. 65-66)

Em outras palavras, para Certeau (2010), uma operação histórica se refere à combinação de um *lugar* social, de *práticas* científicas e da produção de uma *escrita.* O lugar de produção pode ser um recrutamento, um meio, uma profissão; “Um lugar é portanto uma configuração instantânea de posições” (CERTEAU, 1998, p. 201). Já o “espaço” é um lugar praticado (1998, p. 202), é onde o movimento acontece.

Nesse sentido, é interessante destacar que o discurso aqui apresentado é escrito dos *nossos* pontos de vista enquanto pesquisadores em história da matemática, escrito em um “espaço” construído a partir de minha experiência com a matemática de hoje e da leitura da historiografia que se conhece atualmente, do meu “lugar social”. Ou seja, os discursos da pesquisadora Juliana e do professor Raja Gabaglia pertencem a “espaços” e “lugares” distintos.

Vale ressaltar que o discurso de Gabaglia foi elaborado em época recente à primeira divulgação do papiro Rhind[4], ambas no final do século XIX, com base na literatura disponível naquele momento, com o saber da história da matemática conhecido até então. Atualmente, dado os avanços na pesquisa sobre o tema, podemos dizer que o discurso de Gabaglia pode ser preenchido com detalhes e informações que não lhe eram disponível naquele momento da história.

Grande parte deste trabalho consiste do discurso produzido a partir da análise do livro de Gabaglia. Tal análise teve como base principalmente as leituras e re-leituras da literatura relevante sobre o tema, esta compreende basicamente as seguintes obras:

1. *Ein mathematisches handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des British Museum* - uma versão do texto hierático, tradução e comentários escritos pelo egiptólogo alemão Adolf Eisenlohr, publicada em 1877.
2. *The Rhind Mathematical Papyrus BM 10057 and 10058: Introduction, Transcription, Translation and Commentary* – consiste de uma transcrição, tradução e comentário feitos pelo professor Thomas Eric Peet, publicada em 1923.
3. *The Rhind mathematical papyrus: British Museum 10057 and 10058* – edição em dois volumes, composta por fotografias, uma reprodução do texto hierático com a transcrição em hieróglifos (traduzidos literalmente e livremente) e uma bibliografia muito completa que foi empreendida por Arnold Buffum Chace juntamente com colegas de trabalho em 1927-1929.
4. *Mathematics in the Time of the Pharaohs*, no qual alguns aspectos do papiro Rhind são tratados com ênfase. Foi escrito pelo professor Richard J. Gillings e publicado pela primeira vez em 1972, sendo reeditado em 1982.

[4] Em 1877 é publicado o livro *Ein mathematisches handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des British Museum*, escrito pelo egiptólogo alemão August Eisenlohr. Pela data, trata-se da primeira obra a divulgar uma reprodução e tradução completa do papiro Rhind.

5. The Rhind Mathematical Papyrus: an ancient Egyptian text – texto que faz compreender aspectos matemáticos do papiro Rhind do ponto de vista moderno, escrito por Gay Robins e Charles Shute em 1987.
6. *Ancient Egyptian: a Source Book – Volume Three: Ancient Egyptian Mathematics* – acredita-se que é uma das obras mais autais a abordar o papiro Rhind de modo específico. Escrita por Marshall Clagett e publicada em 1999.

No acervo da biblioteca de livros raros da USP, também encontramos o estudo de iniciação científica de Maria Regina Fernandes da Silva (1998), intitulado “Raja Gabaglia”. Esse trabalho consiste de uma excelente compilação de textos do autor, incluindo a fotocópia dos artigos mencionados por C. Silva (2001), e outras publicações referentes à história da matemática feitas pelo autor, além de apresentar informações biográficas como data e local de nascimento, sobre a formação e a vida profissional de Eugênio de Barros Raja Gabaglia.

Os passos da composição dos comentários consistiram de uma primeira leitura crítica do livro de Gabaglia, na qual foi possível identificar diversos pontos de discussão. Após selecionados os pontos o passo seguinte foi observar em outros autores da literatura relevante sua posição com relação a questão destacada. Seguida da comparação das leituras, realizou-se a escrita de comentários.

Algumas vezes optamos pelo confrontamento entre os diversos autores observados e, como resultado, para a grande maioria do texto foi possível inferir comentários de natureza explicativa, complementária, ou mesmo, diversa da obra analisada. Sobretudo buscou-se entender o discurso de Gabaglia do ponto de vista (histórico e matemático) de sua época para, a partir disso, apresentar nossa interpretação do texto.

Para conhecer o impacto produzido pelo livro de Gabaglia, trazemos informações obtidas de textos publicados em jornais da época disponíveis no site da Biblioteca Nacional. Para compreender o contexto histórico-social, observamos livros de história do Brasil, a exemplo *História do Brasil* de Boris Fausto (1995), focando a leitura sobre o fim do século XIX e início do século XX.

Para compor a biografia do autor, utilizamos material coletado no Colégio Pedro II - Rio de Janeiro, instituição na qual Raja Gabaglia trabalhou por mais de trinta anos, e documentação concedida por sua neta Dona Elizabeth Pessoa Raja Gabaglia.

2 NOTAS BIOGRÁFICAS SOBRE EUGENIO DE BARROS RAJA GABAGLIA

Filho de Giácomo Raja Gabaglia e Maria Natividade de Albuquerque Barros, Eugênio de Barros Raja Gabaglia nasceu em Niterói, Rio de Janeiro, no dia 14 de setembro de 1862. Após a morte de seu pai em 1872, mudou-se com a família para Sobral (Ceará), onde viveu até os 17 anos de idade. Em 1880, matriculou-se na Escola Politécnica do Rio de Janeiro formando-se engenheiro geográfico, civil e de minas (1883). No ano seguinte obtém também o título de bacharel em ciências físicas e matemáticas.

Ainda em 1884, presta concurso para a vaga de substituto de matemática no Imperial Colégio D. Pedro II, Rio de Janeiro. Sobre o ponto sorteado: *Series; Desenvolvimento das funcções em serie com os recursos da analyse directa*, Gabaglia escreve uma tese que o coloca em primeiro lugar no concurso e lhe dá a requerida vaga no colégio. Inicia-se assim uma carreira de mais de trinta anos de serviços prestados ao Colégio Pedro II.

Figura 1 – Retrato de Eugênio de Barros Raja Gabaglia

Fonte: Arquivo pessoal Dona "Bebeth" (Elizabeth Pessoa Raja Gabaglia, neta de Eugênio).

Gabaglia foi docente em diversos estabelecimentos de ensino do Rio de Janeiro, dentre eles destacamos o Lyceo de Artes e Officios, a Escola Naval de Guerra da Marinha, a Escola Polytechnica (onde ingressou com a tese de concurso *O homem como capital*), e a Escola Normal. Em 1893 prestou o concurso para docência na Escola Militar com a tese *Funcções de Nutrição na Serie Animal*, no entanto, segundo consta em M. Silva (1998), não concluiu o concurso por motivos políticos, refugiando-se em Minas Gerais.

Foi membro do Clube de Engenharia, do Instituto Politécnico Brasileiro, da Sociedade de Geografia e do Conselho Superior de Ensino do Rio de Janeiro. Foi fundador e presidente da Associação de Auxílios Mútuos dos Empregados do Colégio Pedro II, sócio fundador da Sociedade Brasileira de Ciências e, na época da Proclamação da República (1889), foi Diretor das Obras Civis e Hidráulicas da Marinha.

Em 1894 participou da comissão chefiada por Aarão Leal de Carvalho Reis, para o Projeto da Construção da Cidade de Belo Horizonte, sendo designado a cuidar dos serviços geodésicos e encarregado de estudar a cidade de Juiz de Fora.

Ao todo Gabaglia teve cinco filhos Fernando, Edgar, Mário, Carmem, Antônio e João Capistrano. Faleceu em 1919, antes de completar 57 anos de idade deixando viúva sua esposa Anitta Raja Gabaglia.

Gabaglia foi um homem culto e erudito em sua época, dominava bem o latim, francês, inglês, italiano, espanhol e também o alemão. Se o latim lhe era uma via de mão dupla, para a cultura clássica e como a ferramenta ordenadora de hábitos mentais de reflexão e lógica, com as outras línguas tinha o acesso direto ao pensamento contemporâneo internacional e às mais modernas correntes científicas de então (BARBOSA; MALVEIRA; VIEIRA, 2009).

Em sua produção na área de matemática destacamos as seguintes produções:

- A tese “Series; Desenvolvimento das funcções em serie com os recursos da analyse directa” (1885).
- Os artigos “Calculo Verbal”, “Calculo Graphico”, “Calculo Pratico”, (1897).
- O artigo “Distincção entre os logarithmos neperianos e naturaes”, (1899).
- O livro “O mais antigo documento mathematico conhecido (papyro Rhind)” (1899).

- O artigo “A evolução do conceito do infinitesimo em mathematica – parte primeira – Dos Gregos a Cavalieri” (1919).

A tese que classificou Gabaglia em primeiro lugar no concurso do Colégio Pedro II foi uma das mais aclamadas de suas produções, sendo elogiada por seus posteriores, dentre eles o professor Euclides Roxo. Sua obra em matemática é caracterizada por elementos de história da matemática e, seu interesse nessa área do conhecimento pode ser observado em seus próprios textos e também em críticas que escreveu sobre textos que possuíam notas históricas. Um deles é o livro didático de Aarão Reis intitulado *Curso elementar de Matemática: teórico, prático e aplicado*, sobre o qual Gabaglia escreve um artigo, publicado no Jornal do Comércio em maio de 1893, demonstrando seus conhecimentos sobre história da matemática e, particularmente, sobre a matemática egípcia.

Sabe-se que Gabaglia foi autor da tradução da coleção francesa de livros didáticos *F.I.C* (Elementos de Aritmética, Elementos de Álgebra, Elementos de Trigonometria, Elementos de Geometria, Elementos de Geometria Descritiva, Elementos de Cosmografia, Elementos de Mecânica), e único membro sul americano a participar do V Congresso Internacional de Matemática onde participaram também membros da Comissão Internacional do Ensino de Matemática, responsável por discutir questões relacionadas ao ensino e a intuição matemática. Valente (2004) comenta a participação do brasileiro no congresso e levanta um questionamento que futuramente merece ser abordado com maior atenção. Vejamos,

> O resultado final é que, pelas mãos de Gabaglia, único brasileiro a ter tido oportunidade de presenciar as discussões internacionais sobre a modernização do ensino da matemática nada parece ter sido trazido para o Brasil. Os antigos livros dos F.I.C., traduzidos por Gabaglia, continuaram a referenciar o ensino da matemática e seus programas. Como explicar a falta de interesse de Raja Gabaglia em trazer para o Brasil as discussões sobre a modernização do ensino da matemática? (VALENTE, 2004, p. 56-57)

Outro aspecto que nos chamou atenção em alguns textos relativos à biografia de Gabaglia é sobre a sua relação com a filosofia positiva. Por enquanto vamos observar um trecho de Barbosa, Malveira e Vieira (2009), contudo, penso que este ponto, posteriormente, poderá ser investigado com maior ênfase,

> Se para alguns, Raja Gabaglia teria sido o iniciador da reação à influência de Augusto Comte no ensino de Matemática, Azevedo do Amaral, assinala, entretanto, que o nosso professor compartilhava com aquele filósofo na questão da legitimidade do uso das séries divergentes. E importa ressaltar que Raja Gabaglia recusava “in limine” todas as construções religiosas do autor da **Política Positiva** e nem mesmo aceitava todas as suas opiniões e conceitos do domínio puramente científico (BARBOSA; MALVEIRA; VIEIRA, 2009, p. XXII, grifo dos autores)

A partir da composição desta biografia podemos inferir, dentre outros, os seguintes questionamentos:

É possível afirmar que Gabaglia é o primeiro historiador da matemática brasileiro?

Será possível identificar as causas da não implantação dos ideais de reforma como observado por Valente (2004)? Isso de fato realmente aconteceu?

Quais foram os motivos políticos que levaram Raja Gabaglia a desistir do concurso da Escola Militar e refugiar-se em Minas Gerais?

Gabaglia assumiu claramente algum tipo de posicionamento com relação ao positivismo no Brasil no final do séc. XIX e início do séc. XX?

Dado que o principal objetivo deste trabalho é apresentar o estudo do livro, damos destaque ao autor por seu interesse em história da matemática e sua produção nessa área do conhecimento, por este motivo um estudo detalhado da biografia de Raja Gabaglia não foi feito. Contudo, em trabalho futuro esperamos investigar os questionamentos aqui levantados e buscar mais elementos acerca do professor brasileiro.

3 CONTEXTUALIZAÇÃO: REFLEXOS DA EGIPTOLOGIA NO BRASIL

Até meados da primeira metade do século XIX, os conhecimentos relativos à matemática egípcia antiga eram limitados. Isso é em grande parte devido ao fato de que por mais de 3.000 anos a escrita e o sistema de numeração dos antigos egípcios permaneceu indecifrável (GILLINGS, 1982).

O crescimento das pesquisas e estudos sobre o Antigo Egito teve um forte impulso após a *Campanha do Egito*[5], isto é, a expedição militar que sob a liderança de Napoleão Bonaparte invadiu o território egípcio entre os anos de 1798 a 1801. Os militares franceses foram acompanhados por um grupo de estudiosos que tinham o objetivo de cumprir uma missão científica naquele país, desse modo a *Campanha Científica*, assim como ficou conhecida, foi guiada pela *Commission des Sciences et des Arts*[6]. Pouco tempo depois, e principalmente após o retorno de Napoleão à França, os membros de ambas as campanhas passaram a sofrer forte pressão do exército britânico para retiraram suas tropas do Egito.

Segundo Masson (1997),

> Apesar de muitas tribulações, os acadêmicos, agrupados em Alexandria, obtiveram permissão para deixar o Egito em 13 de maio de 1801, mas os ingleses não os deixariam passar, a menos que abandonassem todo o material coletado durante a exploração e suas notas e esboços. As negociações, às vezes trágico-cômicas, duraram vários meses e foi somente em setembro que os primeiros membros da comissão puderam abandonar permanentemente o solo egípcio, não sem ter deixado nas mãos dos ingleses os objetos mais pesados que encontraram, incluindo a famosa Pedra de Roseta[7][8]. (MASSON, 1997, s.p, tradução e nota nossa)

A disputa pelo domínio do material recolhido durante a expedição científica no Egito é brevemente comentada por Masson (1987; 1997), conforme a autora menciona, em meio a propostas e acordos entre França e Inglaterra, por fim os cientistas franceses continuaram de posse das notas e estudos que haviam iniciado.

---

[5] A Campanha do Egito fez parte do movimento denominado Revolução Francesa (1789-1799).

[6] Do estudo científico da “Comissão das Artes e das Ciências”, resultou um extenso compêndio intitulado *Description de l'Égypte* ou “Descrição do Egito”, publicado entre os anos de 1809-1826, cujo conteúdo está, em partes, disponível no site http://description-egypte.org/.

[7] Atualmente a Pedra de Roseta faz parte do acervo do Museu Britânico em Londres onde, segundo o artigo “Rosetta Stone” no site Wikipedia, é o objeto mais visitado do museu.

[8] Em anexo apresentamos o esboço da Pedra de Roseta feito pela Comissão das Artes e das Ciências e anexado na *Descrição do Egito*.

Enquanto que os objetos, principalmente os de grande porte, como a Pedra de Roseta, foram tomados pelos ingleses.

Esta Pedra encontrada em 1799 na cidade egípcia Rasheed (Roseta), próxima às margens do Rio Nilo, é um fragmento de estela[9] composta por uma rocha semelhante ao granito, o granodiorite. Tem 112,3 centímetros de altura (em seu ponto mais alto), 75,7 cm de largura, 28,4 cm de espessura e pesa aproximadamente 760 quilos. Acredita-se que a altura da estela em seu formato original seria de 159,0 centímetros.

Figura 2 – Pedra de Roseta

Figura 3 – Pedra de Roseta no Museu Britânico

Figura 4 – Reconstituição da estela em seu formato original

Fonte das figuras (2), (3) e (4): Site do Museu Britânico (2014)

[9] Uma estela é um monumento comemorativo que se levanta sobre o solo à semelhança de um pedestal ou de uma lápide. Em uma estela, alguns povos da antiguidade costumavam escrever símbolos, sinais, figuras ou textos que explicavam a razão da construção. É hábito as estelas serem monolíticas e feitas de materiais pétreos (à base de pedra). Fonte: http://conceito.de/estela.

Observando as imagens é possível visualizar traços horizontais que separam o conteúdo da pedra em três partes, nelas um mesmo texto aparece escrito, primeiramente em hieróglifos, depois em demótico e por último em grego. Segundo Masson (1997), no momento em que a encontraram, os cientistas franceses souberam que a Pedra de Roseta seria a chave para a decifração da escrita hieroglífica, “secreta” até então. Atualmente o monumento pertence ao acervo do Museu Britânico em Londres.

Sabe-se que a tradução do texto contido na pedra é creditada a dois estudiosos, Thomas Young (1773-1829) e Jean François Champollion (1790-1832). Conhecendo o grego e sabendo que o texto era o mesmo em ambas as partes da pedra, foi possível traduzir o hieroglífico e posteriormente o demótico, consequentemente o hierático (intermediário entre esses dois) também foi traduzido. Ambos os tradutores apresentaram suas versões do texto, em 1814 e em 1822, respectivamente.

Temos dado destaque a Pedra de Roseta, pois ela desperta particular interesse em nosso estudo, sendo que, sua descoberta, tradução e publicação, trouxe luz às pesquisas sobre a antiga civilização egípcia, além de contribuir para o fortalecimento da egiptologia moderna. Esse movimento de interesse sobre a história do Antigo Egito, que vinha se espalhando rapidamente, tornou-se ainda mais presente nas grandes academias e meios intelectuais mundiais após a abertura do Canal de Suez em 1869.

É possível afirmar que reflexos da egiptologia também chegaram ao Brasil. Segundo Bakos (2004), a origem desse movimento em nosso país, apesar de antiga, não é difícil de ser resgatada,

> No Brasil, a egiptologia chegou no início do século XIX, pelas mãos da família real portuguesa. Deve-se à iniciativa do imperador D. Pedro I, e a seguir a seu filho, D. Pedro II, a formação de uma grande coleção de peças egípcias em nosso país[10], considerada pelo renomado egiptólogo inglês Keneth Kitchens como a maior e a mais importante de toda a América Latina. (BAKOS, 2004, p. 17, nota nossa)

Segundo a mesma autora, Dom Pedro II, foi um profundo estudiodo de história universal e possivelmente teve condições de discutir sobre os mistérios da antiga civilização com competentes egiptólogos de sua época.

[10] Atualmente essa coleção está em exposição no Museu Nacional no Rio de Janeiro. Mais informações podem ser obtidas no site: http://www.museunacional.ufrj.br/visitacao/visao-geral.

O Imperador brasileiro realizou duas viagens ao Egito, a primeira em 1871 e a segunda em 1876, dessa última escreveu um diário composto por notas, impressões e desenhos feitos à mão pelo próprio Imperador. Na coleção "D. Thereza Christina Maria – álbuns fotográficos", disponível no site da Biblioteca Nacional[11], há, dentre os diversos álbuns, uma coletânea de fotos intitulada *Basse Egypte* registrando a segunda visita de Dom Pedro II ao Egito.

Figura 5 – Dom Pedro II e sua comitiva em visita ao Egito

Fonte: Coleção D. Thereza Christina Maria – álbuns fotográficos

Ainda versando sobre a egiptologia no Brasil, Bakos (1998) comenta que esse movimento pode ser observado em três momentos de significância,

> O primeiro momento veio em 1824, com a formação de uma coleção de antiguidades egípcias por Dom Pedro I, Imperador do Brasil, que gostava muito da história e cultura egípcia. Em seguida, é possível apontar para um segundo momento para Egiptologia no Brasil o início do século XX: a partir da "Arte Nouveau" período artístico com a "Art Deco". [...] Um terceiro momento pode ser visto com o início dos cursos de pós-graduação em História Antiga em algumas universidades brasileiras, no final dos anos

[11] O álbum da segunda viagem de Dom Pedro II ao Egito está disponível em: http://objdigital.bn.br/acervo_digital/div_iconografia/th_christina/icon326231/galery/index.htm

> setenta, como na Universidade Federal Fluminense, no estado do Rio de Janeiro. (BAKOS, 1998, p.87, tradução nossa)

Podemos situar as viagens de Dom Pedro II ao Egito no “segundo momento da egiptologia” conforme mencionado por Bakos (1998).

Há indícios de que as viagens e a constante ausência do Imperador no país atraíam-lhe muitas críticas. Na figura abaixo podemos observar uma sátira política publicada na *Revista Illustrada* (1871), nela o rosto do imperador brasileiro toma o lugar da cabeça da esfinge com corpo de leão e logo abaixo do momumento, pela situação política da época, nos parece que o povo protesta e clama a presença de Dom Pedro II no país.

Figura 6 – Charge de Dom Pedro II: sátira política

Fonte: Bakos (2004)

Além dos interesses de Dom Pedro II[12], não se sabe ao certo até que ponto o movimento da egiptologia influenciou nosso país e a produção científica da segunda metade do século XIX até o início do século XX, mas, foi durante o período de expansão mundial da egiptologia que ocorre a publicação, no Brasil, de um estudo sobre um extenso rolo de papiro egípcio. O livro tem o título *O mais antigo*

[12] Na Revista Fapesp, edição 215 – janeiro de 2014, o artigo *O último ato da favorita do imperador* de Marcos Pivetta retrata a admiração e fascínio do Imperador Dom Pedro II pelo Antigo Egito. http://revistapesquisa.fapesp.br/2014/01/13/o-ultimo-ato-da-favorita-imperador/

documento mathematico conhecido (papyro Rhind) e foi escrito pelo professor Eugênio de Barros Raja Gabaglia em 1899.

Antes de apresentarmos nossas considerações sobre essa obra de Gabaglia, iremos tecer algumas considerações iniciais sobre o papiro Rhind e também destacar a importância desse documento para a história da matemática no Antigo Egito.

Não é possível afirmar se o livro de Gabaglia é um reflexo da Egiptologia no Brasil, parece ser mais provável que o livro tenha resultado de interesses particulares do próprio professor Raja Gabaglia.

3.1 O papiro matemático Rhind

Nesta seção não temos o objetivo de narrar uma história do papiro Rhind, apenas destacamos alguns elementos que consideramos relevantes para que a leitura do livro de Gabaglia e dos nossos comentários possa ser iniciada.

O papiro matemático Rhind é considerado uma das principais fontes para o estudo da matemática egípcia antiga. Essa afirmação é verificável não somente em livros de história geral da matemática, mas também na historiografia relativa à antiga matemática egípcia. Este consenso estabeleceu-se na medida em que foi possível conhecer, por meio dos diversos problemas que o papiro apresenta, a variabilidade dos procedimentos e métodos matemáticos utilizados pelos antigos egípcios.

Em seu estado original o papiro teria aproximadamente 5,5 metros de comprimento por 33 centímetros de largura. Está escrito em hierático, da direita para a esquerda, em tintas preta e vermelha e foi copiado por um escriba chamado Ahmes. É também conhecido por *papiro de Ahmes* (BOYER, 2001), cuja denominação pode ser encarada como uma homenagem ao escriba copista.

Sabe-se que este rolo de papiro foi descoberto em meados do século XIX, nas ruínas de uma pequena construção próxima ao templo mortuário de Ramsés II, na antiga cidade de Tebas, atualmente Luxor (Egito). Entre os anos de 1855 e 1857, foi comprado juntamente com outras antiguidades egípcias, pelo egiptólogo e antiquário escocês Alexander Henry Rhind, ficando a partir de então conhecido como *papiro Rhind* (ROBINS; SHUTE., 1987).

Dois anos após a morte de seu proprietário em 1863, o papiro foi vendido ao Museu Britânico (Londres). Sua divulgação oficial ocorreu somente em 1898, quando da publicação de um *fac-símile* completo do então conhecido papiro Rhind. No entanto, outros estudos já haviam sido feitos e inclusive sido expostos no meio intelectual da época, dentre eles, destaca-se a obra *Ein mathematisches handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des British Museum)*, do egiptólogo alemão Adolf Eisenlohr, cuja publicação deu-se em 1877. Da mesma época, existem algumas referências, artigos e pequenos estudos sobre o tema, como veremos a diante.

Para destacar os estudos que versam sobre o papiro Rhind podemos nos furtar do breve histórico de publicações exposto em Robins e Shute (1987),

> Uma versão do texto hierático, pirateado das imagens em fac-símile do Museu Britânico, juntamente com a tradução e comentários, foi liberado pelo egiptólogo alemão Adolf Eisenlohr em 1877. Ele também divulgou o número de problemas geralmente usado hoje. A cópia oficial do Museu Britânico teve que aguardar a publicação até 1898. O Professor Thomas Eric Peet, arqueólogo e ocupante da cadeira de Egiptologia na Universidade de Liverpool publicou uma admirável transcrição, tradução e comentário completo em 1923. Esta foi seguida por uma edição em dois volumes empreendida por Arnold Buffum Chace, Chanceler da Universidade Brow, juntamente com colegas de trabalho, a qual foi destinada mais para matemáticos e leigos, do que para Egiptologistas. Foi publicada em 1927-9 e reimpressa de forma abreviada em 1979 e, composta por fotografias, uma reprodução do texto hierático com a transcrição em hieróglifos, ambos em preto e vermelho, com tradução literal e livre e uma bibliografia muito completa. Certos aspectos do PMR e outros textos têm sido tratados com ênfase pelo Professor Richard J.Gillings em seu *Matemática no Tempo dos Faraós*, publicado pela primeira vez em 1972 e reeditado em 1982. (ROBINS; SHUTE., 1987, p. 9, grifo do autor, tradução nossa)

Tivemos acesso a todas as obras mencionadas por Robins e Shute (1987). Além dessas destacamos outras duas obras, são elas o livro *Ancient Egyptian: a Source Book* de Clagett (1999), frequentemente usado em nossos comentários e também o livro de Raja Gabaglia (1899), o qual, por esse breve histórico, seria cronologicamente localizado como a segunda obra a tratar do papiro matemático Rhind.

Um estudo detalhado desse livro será apresentado no próximo capítulo.

O MAIS ANTIGO DOCUMENTO MATHEMATICO CONHECIDO

(PAPYRO RHIND)

DO

Dr. Eugenio de Barros Raja Gabaglia

LENTE DO GYMNASIO NACIONAL
(Antigo Collegio D. Pedro II)

IMPRENSA AMERICANA
Fabio Reis & C.
75 – Rua da Assemblea – 75
Rio de Janeiro

1899

4. O MAIS ANTIGO DOCUMENTO MATHEMATICO CONHECIDO (PAPYRO RHIND)

Este capítulo constitui-se essencialmente da análise do livro *O mais antigo documento mathematico conhecido (papyro Rhind)*.

A análise se mostra sob a forma de comentários elaborados na medida em que uma leitura crítica do livro foi sendo feita, eles trazem, entre outras informações, elementos complementares e/ou conflitantes ao texto escrito por Raja Gabaglia. Tais detalhes, observações ou comparações, são baseados no estudo de outras obras que tratam do tema, dentre elas destacamos o livro “The Rhind Mathematical Papyrus: an ancient egyptian text” de Robins e Shute (1987), cuja tradução completa para o português já foi feita em trabalho anterior.

Por vezes, os comentários tendem a explicar ou destacar[13] trechos do texto analisado, os quais a nosso ver precisam ser abordados de maneira específica ou complementados.

No verso das páginas em que a análise é apresentada foi digitada uma transcrição do livro de Gabaglia, esta aparece em formatação diferenciada e tem o objetivo de facilitar eventuais buscas no texto “original”. Na medida do possível essa transcrição aparece próxima aos comentários cujo conteúdo lhe faz alguma referência. No entanto, em alguns casos o número de páginas dos comentários excede o número de páginas da transcrição do texto, quando isso ocorrer, a transcrição será retomada com o início de um novo capítulo como será observado posteriormente.

A transcrição do texto é fiel ao original, ou seja, do português do final do século XIX. Com exceção do índice[14] e a “Nota sobre o bloco extractivo”, que no texto original aparece ao fim do livro, nenhuma outra alteração foi feita na ordem do texto. O número de páginas não é o mesmo porque houve uma redução quando feita a transcrição, por este motivo não as numeramos.

Esperamos que nossos comentários contribuam para um amplo conhecimento do papiro matemático Rhind, evidenciando características e até mesmo mudanças em alguns aspectos relativos à história e conteúdo desse importante documento matemático.

[13] As frases ou expressões de Gabaglia que citamos de modo direto, serão destacadas entre aspas.
[14] Na transcrição do índice optamos em deixar a numeração das páginas como no original.

INDICE

§ 1.º – Historico .... **1 a 9**

1. O papyro Rhind.. 1
2. Publicação e tradução do papyro.. 2
3. Autor e data.. 3
4. Que especie de trabalho é o papyro Rhind... 5

§ 2.º – O conteúdo do papyro .... **10 a 14**

5. O conteúdo do papyro.. 10

§ 3.º – Arithmetica do papyro Rhind .... **15 a 66**

6. Notação dos numeros inteiros.. 15
7. Quatro operações... 16
8. Fracções; notação.. 22
9. Algumas propriedades das fracções.. 25
10. Tabellas para obter $\frac{2}{2n+1}$... 28
11. Como foram formadas essas tabellas?... 31
12. Divisão em partes iguaes... 43
13. Regra do *sequem*.. 45
14. Discussão sobre o *sequem*.. 50
15. Divisão em partes desiguaes.. 55
16. Progressões arithmetica e geometrica... 61
17. Ligeiras considerações sobre alguns problemas...................................... 65

§ 4.º – Algebra do papyro Rhind .... **67 a 109**

18. Considerações geraes sobre os problemas do *hau*................................... 67
19. A 1a serie dos problemas do *hau*... 69
20. A 2ª serie dos problemas do *hau*.. 73
21. Modo notavel de sommar fracções.. 76
22. Opinião de Rodet sobre os problemas do *hau*.. 79
23. Critica dos professores E. e V. Revillout ao trabalho de Rodet.............. 82
24. Origem da algebra.. 83
25. Breve comparação entre Ahmes e Diophantos....................................... 85
26. A algebra de alguns escriptores gregos.. 88
27. Signaes algebricos... 109

A seguir apresentamos algumas informações gerais sobre o livro aqui abordado.

Em seu formato completo o texto possui:

- 136 páginas.
- 5 parágrafos, que podem ser tomados como capítulos, cada um destes contêm seções enumeradas conforme a ordem em que aparecem no texto.
- 34 seções.
- O índice aparece no final do livro (p. 135), e é antecipado por uma nota explicativa e seguido por uma breve errata da p. 22.
- A nota possui 2 páginas e é intitulada "Nota sobre o bloco extractivo".

Foi publicado pela primeira vez como texto completo no Rio de Janeiro em 1899 e pelos dados de sua capa foi lançado pela editora "Imprensa Americana". Sabe-se que anteriormente a esta publicação, alguns capítulos do livro já haviam sido publicados em revistas, também do Rio de Janeiro, no ano de 1897.

A primeira publicação de parte do livro que se tem notícia ocorreu na "Secção Livre" da Revista do Club de Engenharia, páginas 61-69, em janeiro de 1897. Com o mesmo título: "O mais antigo documento mathematico conhecido – papyro Rhind", o texto consistiu do primeiro parágrafo do livro, o "Historico".

Outras quatro publicações ocorreram no mesmo ano, todas na Revista da Escola Polytechnica volumes II e III. A primeira, das páginas 269-308 (vol. II), consistiu dos 1º e 2º parágrafos e parte do 3º (até a seção 10), a segunda, das páginas 356-369 (vol. II), se trata da reprodução da seção 11 até a seção 14, ambas do 3º parágrafo. A terceira, das páginas 47-58 (vol. III), consistiu da seção 15 até a seção 17, ainda do 3º parágrafo. Já a última publicação, páginas 217-237 (vol. III), se trata da primeira parte do 4º parágrafo, seções 18 a 25.

Não temos registros de publicações em forma de artigo do restante do 4º e do 5º parágrafo do livro. A única evidência que possuímos é o fato de que ao fim de cada texto Raja Gabaglia escrevia "(Continúa.)", com exceção da quarta e última publicação na qual figura somente a assinatura do autor na derradeira linha do texto.

De um modo geral podemos dizer que o primeiro e segundo parágrafos intitulados *Historico* e *O Conteúdo do papyro* consistem de um texto introdutório no

§ 5.º – Geometria do papyro Rhind .... 110 a 130

28. Origem da geometria.. 110
29. A stereometria do Papyro.. 114
30. Area do circulo; modo notavel de obtel-a... 117
31. O esquadro egypcio.. 119
32. Area de figuras rectilineas.. 121
33. Problemas sobre pyramides; origem da trigonometria.............................. 127
34. Etymologia do vocabulo «pyramide»... 130
Nota sobre o bloco extractivo.. 131

ERRATA

Pag. 22, linha 11ª, em vez de *arte de calcular* lêa-se *regra de calculo*.

qual são apresentadas informações gerais, contudo bastante atualizadas para a época de sua redação, dando um panorama geral (uma espécie de estado da arte), do tema. Nessas primeiras páginas o autor também busca explicar o que é o antigo documento abordado, respondendo a questão "*Que especie de trabalho é o papyro Rhind?"*, que é seguida por uma síntese do conteúdo do papiro.

Estes parágrafos nos levam a crer que o autor não limitou seu estudo à obra de Eisenlohr (1877), que segundo o próprio Gabaglia, estava a seu dispor. Ele vai além, apresentando críticas e diferentes opiniões de estudiosos do papiro Rhind, aponta questões e mostra-se entendido do assunto que está discorrendo. Também fica evidente seu esforço em apresentar informações sobre o antigo documento matemático e pontuar discussões sobre aspectos desse rolo de papiro.

Os outros três parágrafos, *Arithmetica do papyro Rhind*, *Algebra do papyro Rhind* e *Geometria do papyro Rhind*, têm uma função diferenciada dos dois primeiros, neles podemos observar a preocupação do autor em explicar e fazer entender, do ponto de vista matemático, características de alguns problemas do papiro. Seu ofício de professor de matemática pode ter colaborado em sua forma didática de expor e tratar seu texto.

Gabaglia menciona diversos nomes de pesquisadores e estudiosos do papiro Rhind em meio ao texto e também em algumas das diversas notas de rodapé, no entanto, e como de costume à sua época, não apresenta em conjunto as referências bibliográficas como fazemos atualmente.

Para facilitar o entendimento do leitor e para que os comentários façam sentido, recomenda-se que a cada seção seja lido em primeiro lugar o texto de Gabaglia e em seguida a nossa análise do texto.

O MAIS ANTIGO DOCUMENTO MATHEMATICO CONHECIDO

(PAPYRO RHIND)

----

§ 1.º – HISTORICO

SUMMARIO : – 1. O papyro Rhind. – 2. Publicação e traducção do papyro. – 3. Autor e data. – 4. Que especie de trabalho é o papyro Rhind?

1. – Rhind, celebre autor da obra «*Thebes, its tombs and their tenants*», durante a sua estadia no Egypto obteve ou por compra ou por achado em escavações que pessoalmente fez, alguns papyros importantes, que passaram após seu fallecimento ao British Museum.

Entre esses papyros ha, provavelmente adquirido por compra, um que hoje constitue documento capital para a historia da mathematica e que é cópia de um trabalho anterior, o que expressamente n'elle se acha declarado e o que facilmente se concluiria pela existencia de erros manuscriptos, de omissões e de ligações de cousas differentes somente explicaveis por descuido de copista inhabil.

Infructiferas tem sido as pesquizas para encontrar-se o original d'esse papyro Rhind; e sem base é a hypothese, sympathica aliás a alguns eruditos, v. g. ao egyptologo Eisenlohr, de ser elle copia de um escripto mathematico existente em um rolo de couro de propriedade do British Museum. Segundo affirma o Dr. Birch, esse rolo não poude ainda ser desenrolado e apenas sabe-se ser mais antigo que o papyro Rhind pois o emprego do couro precedeu no antigo Egyto ao do papyro, que só no reinado de Eumenes I de Pergamo (263 – 241 A. C.) foi substituido por pelles preparadas de um certo modo, formando o que se denomina pergaminho.

2. – Esse papyro mathematico foi pela primeira vez estudado perfunctoriamente pelo Dr. Birch, que a respeito escreveu uma nota no *Zeitschrift fûr âgyptische Sprache und Alterthumskunde*, de 1868.

Em 1872 o Dr. Eisenlohr, notavel professor de egyptologia em Heidelberg, estando na Inglaterra, recebeu do Dr. Birch um exemplar da copia lithographica do papyro e principiou a estuda-lo com attenção, principalmente porque já se occupava na edicção dos textos geometricos que photographara no Templo de Edfú.

Em 1874, no *Agyptische Zeitschrift* o professor Dr. Brugsch escreveu um artigo, onde deu as fórmulas usadas no papyro para as quatro especies, a explicação das linhas e figuras e uma tabella de signaes numericos, porém incompleta e erronea a qual foi

4.1 § 1.º – Historico

De acordo com o Oxford Dictionary of National Biography (2004), Alexander Henry Rhind foi além de advogado um egiptólogo escocês. Em suas viagens ao Egito coletou material suficiente para escrever o livro "*Tebas, suas tumbas e seus inquilinos"* (1862, tradução nossa). Entre os itens adquiridos encontra-se, um papiro "que hoje constitue documento capital para a historia mathematica", trata-se do papiro Rhind e de sua importância na história da matemática.

Logo em seguida o autor cita que o documento é "cópia de um trabalho anterior, o que expressamente n'elle se acha declarado", pressupondo assim a existência de alguma outra fonte anterior à sua escrita, fato que é evidenciado pelo próprio escriba quando da escrita do papiro. No entanto, assim como no final do séc. XIX, até o momento não fomos noticiados com a descoberta de tal (ou tais) trabalhos, ficando em aberto a hipótese de sua existência.

É interessante observar que a denominação à Ahmes como "copista" usada tanto por Gabaglia como por Robins e Shute (1987), dificilmente aparece na historiografia geral da matemática, aliás, o próprio fato do papiro Rhind ser uma cópia de trabalho anterior parece ser negligenciado pelos historiadores da matemática. É relevante destacar tal fato, pois ele evidencia que a matemática egípcia é tão antiga quanto a data da escrita do papiro.

Sobre os erros nos procedimentos de cálculo, por enquanto nos limitamos a dizer que de fato eles existem, e que serão comentados quando forem abordados por Gabaglia.

No último parágrafo desta primeira seção Gabaglia refere-se à crença "sem base" de alguns eruditos da sua época, inclusive Eisenlohr, de que o papiro Rhind é cópia de "um rolo de couro de propriedade do British Museum". Como o rolo de couro ainda não havia sido desenrolado até 1899, a única declaração feita pelo autor é que este documento seria mais antigo que o papiro Rhind, já que o couro precedeu o uso do papiro no antigo Egito.

Em Robins e Shute (1987), encontra-se uma menção a um rolo de couro comprado juntamente com o papiro Rhind. Segundo os mesmo autores tal documento está catalogado no Museu Britânico como BM 10250.

Gillings (1982), também comenta o assunto, no entanto ele o denomina como *The Egyptian Mathematical Leather Roll* (EMRL), foi rectificada no mesmo periodico, no 1º fasciculo de 1875 por Eisenlohr, que tambem no fasciculo seguinte tratou das medidas de que falla o papyro, assumpto que desenvolvera anteriormente, no Congresso Internacional dos Orientalistas, reunido em Londres.

A esplendida monographia que sobre agrimensores romanos publicou Cantor em 1876, salienta a importancia d'essas memorias.

Em 1877, Eisenlohr publicou não só o texto egypcio, como a sua traducção em allemão, eruditamente annotada. E' a edicção que possuimos; em muitos pontos a seguiremos *ipsis verbis*. Para a comprehensão objectiva do papyro, Eisenlohr teve o auxilio de dous distinctos mathematicos, professores na Universidade: seu irmão o Dr. F. Eisenlohr, e o Dr. Cantor.

Em 1891, foi editada pela segunda vez essa notavel traducção. Ambas as edicções são de Leipzig.

Entre os scientes que escreveram sobre o papyro, discutindo pontos duvidosos ou fazendo resumos, notam-se:

Na Allemanha, Cantor;

Em França, L. Rodet, E. Revillout;

Na Russia, V. Bobynin;

Em Inglaterra, James Gow;

Na Itália, Favaro e Loria.

3. – Separado por longo intervallo de tudo que é tradicional na historia da mathematica, o papyro Rhind é o documento mathematico mais antigo que se conhece; e contudo elle não pertence ao primeiro periodo d'essa sciencia que lhe deve ser anterior de muito e muito tempo: como evidenciarão os paragraphos seguintes.

Ao titulo do papyro acompanha immediatamente uma noticia referente ao autor e a época da sua composição; aih se diz: «foi composta esta escripta no anno 33 no 4º mez da época de aguas mezori sob o reinado do rei Ra-ã-us, dando a vida, pelo modelo dos escriptos antigos nos tempos do rei ãt, pelo escrevente Aãhmesu composto». Conforme esta phrase, o papyro é imitação de escriptos anteriores, os quaes pertencem a época de um rei cujo nome termina em ãt. O principio do nome do rei não existe, havendo uma lacuna n'esta parte do papyro. Eisenlohr reconstitue engenhosamente a falha o identifica o nome do rei com o de Amenemãt 3º da 12ª dynastia, cujo reinado Leipsius avalia nos annos 2221 A. C.; que, aceita a hypothese, seria a data approximada do trabalho original.

O papyro Rhind pela citação acima foi então escripto por um certo Aãhmesu, litteralmente –nascido de lua–, no 33º anno de um rei Ra-ã-us, cujo nome, porém, não se acha nas listas reaes conhecidas. Pode-se concluir do nome de Aãhmesu, e de accordo com

> O EMRL tem aproximadamente 25 por 43 centímetros; devido à sua condição muito frágil, permaneceu enrolado por mais de 60 anos. O Dr. Alexander Scott e H. R. Hall finalmente foram bem sucedidos em desenrolá-lo em 1927, e foi descoberto que ele contém uma coleção, duplicada, de 26 somas de frações unitárias. (GILLINGS, 1982, p.89, tradução nossa)

Tendo em vista que o EMRL só tenha sido desenrolado, traduzido e estudado no fim da década de vinte do século passado, suponho que o “rolo de couro” mencionado por Gabaglia, trata-se do EMRL citado por Gillings (1982). Até os primeiros estudos de Raja Gabaglia, pensamos ser normal essa curiosidade a respeito do rolo de couro que havia sido comprado junto com o papiro Rhind. E de fato isso fica evidente no trecho de Gillings (1982), citando outros estudiosos e suas conjecturas a respeito do documento,

> O seu real interesse matemático reside na descoberta do que poderia ter sido o uso de tal tabela por uma pessoa que a dispusesse, e mais ainda, qual foi a relação, se alguma, do papiro Rhind com o que foi descoberto? Tal investigação deve seguir uma discussão mais detalhada do texto por si mesmo. (GLANVILLE *apud* GILLINGS, 1982, p. 89, tradução nossa)

No entanto, após o estudo do EMLR, Gillings (1982) destaca ter sido “a decepção de Glanville” (GILLINGS, 1982, p. 90) bastante compreensível, apesar de acreditar que o conteúdo do EMLR tenha contribuído de certa maneira para o entendimento de alguns aspectos presentes no papiro Rhind e em outros papiros matemáticos,

> [...] a tabela do EMLR lança grande luz sobre a aritmética mecânica do PMR, do MMP[15], [...], bem como oferece justificativa para presumir a existência de tabelas de fração padronizadas, a regra G, e a tábua de dois terços. (GILLINGS, 1982, p. 91, tradução nossa, nota nossa)

A expectativa de Eisenlohr com relação ao conteúdo do EMLR não foi comentada somente por Gabaglia. Clagett (1999), também faz referência ao assunto como podemos observar na citação abaixo,

> Glanville continua a dizer que a esperança expressada por alguns (e particularmente Eisenlohr) de que o trabalho era muito importante e talvez até mesmo "o original do [trabalho no] rolo de papiro" não foi concretizada pelo seu próprio conteúdo. "No lugar do esperado tratado sobre matemática egípcia que seria a explicação de todas as dificuldades do Papiro Rhind,

[15] Papiro Matemático de Moscou.

os principios da egyptologia[1], que o papyro pertence ao começo da 17ª dynastia, cerca de 1700 annos A. C. Entretanto, é preciso não esquecer que o nome de Aãhmesu, que traduziremos em portuguez por Ahmes, já apparece antes da 16ª dynastia no tempo do rei Entef; e tambem existe no período Saitico como nome do rei Amasis.

Eisenlohr estudou paleographicamente o papyro, e concluiu ser a letra hieratico antigo, pertencendo ao limite entre o hieratico antigo e a lettra regular elegante da 19ª e 20ª dynastia[2]. A's avessas, achou que a lettra approximava-se a do papyro Ebers que parece ser menos antigo: o modo de escrever os numeros e as subdivisões das medidas no papyro Rhind tem semelhança com os signaes identicos do papyro Ebers, de sorte que Eisenlohr attribue ambos os documentos a um mesmo periodo.

4. – Que especie de trabalho é o papyro Rhind?

Duas opiniões tem sido enunciadas, uma que é quasi universalmente aceita, que é a de Eisenlohr e a de Cantor, considera-o um manual mathematico essencialmente pratico; outra proposta por Eugenio Revillout, illustre egyptologo, affirma ser o papyro um caderno de alumno contendo exercicios dados na escola.

Deve-se antes de tudo chamar a attenção para o arranjo systematico e distribuição da materia constituitiva do papyro. Do mais facil passa-se ao mais difficil; o assumpto apresenta-se dividido em tres grupos, entre si separados: arithmetica, volumetria (stereometria) e geometria. Dentro d'esses grupos, os exemplos pertencentes a questões da mesma especie seguem-se, uns aos outros.

Tambem é facto digno de observação não existir no papyro definições e theoremas; só ha problemas praticos, d'onde aliás pode-se obter a theoria em que elles se bazeiam, a qual, porém, com uma unica excepção, não é indicada[3].

Por esses motivos, Eisenlohr pensa que o papyro Rhind é antes um manual, um auxiliar pratico do que um verdadeiro tratado de mathematica, posto que esta ultima supposição esteja mais de accordo com o titulo pomposo do papyro que é o seguinte: *«Regra para chegar ao conhecimento de todas as cousas obscuras, de todos os segredos contidos nos objectos»*.

Eisenlohr suppõe ainda mais. Para elle, o manual era destinado a um lavrador que difficilmente poderia comprehender theorias mathematicas, e para isso firma-se: 1º na maioria dos exemplos que tratam de pão, fructos e cousas semelhantes; 2º na conclusão, *no motto* do papyro que é assim: « Apanha os bichos e os ratos, acaba as differentes hervas damninhas, pede ao Deus Ra calor, vento e agua elevada » - o que de facto parece dever ser

[1] Os egypcios tinham o uso de escolherem os nomes proprios pelos soberanos contemporaneos ou por aquelles que de pouco o precederam.
[2] A essa lettra elegante pertencem os conhecidos papiros Sallier e Anastasius, e o papiro Orbiney.
[3] No que tem certa semelhança com as obras do alexandrino Herão (100 A. C.) que explana a materia por meio de exemplos, sem regra geral.

> temos uma cópia duplicada de 26 adições de frações!" (CLAGETT, 1999, p. 256, tradução nossa)

Ou seja, Eisenlohr parece ter tido uma vã esperança de que o EMRL fosse senão o original do papiro Rhind, um documento que explicasse suas dificuldades.

Iniciando a segunda seção Gabaglia comenta que o papiro Rhind foi estudado pela primeira vez, de modo superficial, pelo Dr. Birch[16]. Sobre a nota escrita no *Zeitschrift fûr âgyptische Sprache und Alterthumskunde* (Jornal da língua egípcia e antiguidades) é dito ter sido publicada no ano de 1868. De fato em janeiro de 1868, em um trecho desse jornal o Dr. Birch escreve um artigo intitulado "Varia", no qual ele apresenta um estudo sobre a variação de certos símbolos hieráticos em papiros egípcios. A menção encontrada é a seguinte: "Este papiro foi comprado depois que o senhor Rhind faleceu e não foi publicado". (BIRCH, 1868, p. 11).

Um fato interessante comentado pelo historiador da matemática Florian Cajori (1930), sobre a relação de Birch, Eisenlohr e o papiro Rhind, merece destaque neste ponto do nosso trabalho,

> Os curadores do Museu Britânico, em 1869, autorizaram a preparação de uma edição em facsimile e um texto descritivo do papiro. Samuel Birch, Keeper das Antiguidades Egípcias do Museu, preparou placas, mas o progresso do trabalho foi atrasado. Na primavera de 1872, o arqueólogo August Eisenlohr de Heidelberg visitou a Inglaterra e garantiu as provas de Birch provenientes dessas placas. Após cinco anos de estudo, em que ele assessorado por Moritz Cantor, historiador da matemática, Eisenlohr trouxe sua edição do papiro Rhind em 1877. Ele fez isso, no entanto, sem obter o consentimento dos curadores do Museu Britânico para usar as placas de Birch. Além da reprodução do próprio papiro, Eisenlohr comentou, bem como traduziu o papiro em alemão e transcreveu a escrita hierática em que o papiro está escrito na escrita hieroglífica mais pitoresca. Durante a metade do século seguinte, a publicação muito meritória de Eisenlohr foi a única fonte a partir da qual os matemáticos poderiam obter um conhecimento do conteúdo do papiro Rhind. Enquanto isso, em 1898, o Museu Britânico emitiu um belo "fac-símile" litográfico do papiro. (CAJORI, 1930, p.190)

Conforme esta citação de Cajori, Gabaglia estava certo em afirmar que Eisenlohr recebeu informações sobre o papiro Rhind, estas dadas por Birch em 1872. O que autor não menciona é que a publicação de 1877 tenha ocorrido sem o consentimento dos curadores do Museu Britânico. Consequentemente, em falta de outra obra e já que a cópia oficial do Museu só ocorreu em 1898, a obra de Eisenlohr foi durante muito tempo a melhor fonte sobre o papiro Rhind.

---

[16] Samuel Birch foi egiptólogo e antiquário britânico, trabalhou durante anos no departamento de antiguidades do Museu Britânico.

dirigido a um cultivador.

E. Revillout[4] pensa que o papyro Rhind foi primitivamente um caderno de alumno, contendo exercicios dados em uma d'essas *casas de ensino* (*a-sbo*) de que fallam frequentemente os papyros e onde se mostravam os methodos ou processos das diversas operações que mais tarde os alumnos teriam de executar, quando fossem cultivadores, constructores, agrimensores, etc. Ahi, diz Revillout, não se tratava de habituar os mancebos a sonhar sobre algarismos e sobre problemas theoricos mais ou menos arduos; porém sim de habilital-os a calcular as receitas e despezas, quer em numeros simples, quer em divisões das differentes medidas; a avaliar as superficies dos campos... etc.

A melhor prova do que é o papyro, é que n'elle encontram-se, accrescenta Revillout, muitos calculos inexactos evidentemente executados por um alumno pouco intelligente, os quaes seguem de ordinario a calculos exactos dados pelo professor para modelos de cada operação. Alguns d'esses calculos errados tem sido, na propria margem do papyro, assignalados como falsos, sem serem emendados; assim o professor dera um problema onde apparecia a fracção $\frac{1}{14}$; mas, parece, que a escriptura hieratica do tempo permittia confundir o signal para 9 com o sinal para 14[5]; o alumno fez então todo o calculo sobre 9, limitando-se o professor a escrever na margem 14! como indicando que deve-se calcular sobre 14 e não sobre 9; e o calculo erroneo não é corrigido.

A's vezes, continua a dizer Revillout, os erros do alumno produzem numerosos exercicios, um verdadeiro *pensum* imposto pelo professor e comprehendendo calculos invertidos onde um dos algarismos dados primeiramente torna-se o algarismo procurado em seguida e reciprocamente – tudo isso cousas innuteis em manual[6]. O mesmo podendo ser dito para certas soluções fornecidas pelo professor, e referindo-se a outras partes da mathematica. Eu nunca mais terminaria, exclama Revillout, si quizesse enumerar todas as provas reunidas por mim e que podem constituir objecto de um estudo especial muito instructivo: é então certamente com um caderno de alumno que nos encontramos na redacção primitiva deste documento.

Depois d'essas razões elevadas, e cuja importancia não é licito negar, o Dr. E. Revillout, arrastado pela tendencia a hypotheses arrojadas que constitue um dos caracteres da erudicção, affirma que esse caderno não tinha nome de autor porque não formava uma composição original, porém, uma serie de lições recebidas, e que tambem não era datado, não sendo destinado à posteridade. Porém, muitos seculos depois, um scriba que ignorava

---

[4] Pag. 304 da *Revue Egyptologique* de 1881.
[5] De facto os dous signaes assemelham-se muito, como mostra E. Revillout no artigo que extractamos.
[6] Temos traduzido todas essas razões quasi litteralmente do artigo de Revillout.

Referindo-se à ela o próprio Raja Gabaglia diz: “E’ a edicção que possuimos; em muitos pontos a seguiremos *ipsis verbis*”.

Outro erudito alemão que se propôs a estudar o papiro Rhind foi o egiptólogo Heinrich Karl Brugsch, apesar de não ter obtido muito sucesso em seu artigo de 1874, e Gabaglia considerando uma parte de seu texto ser “incompleta e errônea”, gostaria de destacá-lo por sua contribuição na decifração da escrita demótica. Brugsch estudou o conteúdo da Pedra de Roseta e apresentou uma tradução para o latim baseada no texto em demótico e hieroglífico da pedra na década de 1850.

Da contribuição de Cantor[17] ao trabalho de Eisenlohr pouco se tem notícia, o que podemos afirmar é que ambos estudaram e tornaram-se professores na Universidade de Heidelberg (Alemanha). Como estudioso da história da matemática, não é de se admirar que Cantor tomado conhecimento e se aproximado dos trabalhos de Eisenlohr, ou vice-versa. A famosa interpretação que Cantor deu ao problema n. 79 do papiro Rhind foi comentada por Eves (1983), esta será abordada a diante.

O último parágrafo dessa segunda seção nos mostra que os estudos sobre esse antigo papiro matemático, em vinte anos após a sua publicação, foram bastante frequentes, atingindo vários países da Europa e também o Brasil.

No primeiro parágrafo da terceira seção Gabaglia anuncia “o papyro Rhind é o documento mathematico mais antigo que se conhece”, afirmação esta que faz parte do próprio nome de seu livro. Devemos considerar que na época da composição do livro (final do século XIX e início do século XX), pouco se sabia sobre documentos matemáticos antigos e provavelmente o papiro Rhind tenha sido o documento mais antigo do qual Gabaglia teve conhecimento, por isso sua afirmação é compreensível.

Como já dizia Braudel (2009, p.17): “a história é filha de seu tempo”, ou seja, é natural estarmos impregnados das informações do nosso presente, mas, a história é dinâmica e a descoberta de novos fatos ou documentos pode acontecer a qualquer momento. Atualmente sabemos que o papiro de Moscou[18], comprado em 1893 (apenas quatro anos antes da primeira publicação do texto de Gabaglia),

---

[17] Moritz Cantor (1829-1920), historiador da matemática. No texto de Florian Cajori: “MORITZ CANTOR, THE HISTORIAN OF MATHEMATICS”. (Lido antes da San Francisco Section of the American Mathematical Society June 17, 1920), é possível obter mais informações sobre Cantor.

[18] Em 1969 o professor Hélio Fontes interessado em assuntos da matemática antiga escreveu o livro *No passado da matemática*. Além desta obra o autor escreveu, em 1973, *O papiro de Moscou*, um texto brilhante sobre os problemas contidos em tal papiro.

completamente a mathematica – algum litterato sem duvida[7] – o descobrio no meio de outros documentos do mesmo tempo e proveniencia. Entre esses documentos achava-se talvez o papyro Ebers ou algum outro manuscripto da mesma época, offerecendo com o nosso papyro semelhanças na escripta. O scriba o attribuio então a essa época. Depois teve occasião de vender uma cópia a um bom *gentleman farmer*[8], a quem indicou a importancia d'esse pretendido tratado para o calculo de medidas, para a divisão dos terrenos, etc. Feito o negocio, o scriba principiou a cópia, precedendo-a com o titulo e a noticia sobre o autor e a data que acima já demos. Em seguida copiou o caderno com todos os erros do alumno, as correcções do professor etc., accrescentando mesmo novos erros, como no calculo n. 64 onde substituio um *semi-besa* a um *besa* que existia no original, como se pòde verificar pelo conjunto das operações[9].

Pondo de parte as affirmações meramente hypotheticas do Dr. E. Revillout, deve-se, comtudo, notar que ha um grande argumento de analogia a favor de sua supposição, na descoberta recente de um novo papyro mathematico, traduzido, annotado e publicado por J. Baillet. Esse papyro, de que nos occuparemos mais tarde, cuja data está comprehendida entre o 6º e o 9º seculo P.C., e que lembra em alguns pontos o nosso papyro Rhind, parece ser aos competentes que o estudaram um exercicio de ensino, um caderno de alumno cuidadoso. E as razões que conduzem a tal resultado existem em parte no papyro Rhind.

Em todo o caso, e julgamos ser a unica conclusão definitiva a que se pòde chegar, o papyro Rhind, seja um manual pratico elementar, seja um caderno de alumno, não dá o estado da sciencia mathematica de sua época; n'elle ha dados que se referem a uma sciencia muito mais adiantada. N'isso Eisenlohr e Revillout estão concordes.

---

(7) E' textual.

(8) E' textual.

(9) Para exemplo do que são hypotheses, mesmo quando formuladas por espiritos superiores, damos a traducção *verbum ad verbum* das ultimas palavras de uma nota que escreveu Revillout ao artigo d'onde temos feitos esses extractos:

« Os exemplos de falta do copista, juntando-se as do alumno, são assim mais numerosas. Mas, si o livro tivesse sido mostrado aos homens competentes da época, aos sabios – que compunham então o que se poderá hoje denominar faculdade de sciencias, áquelles cujos livros hermeticos do alto ensino tinham fornecido ao professor os dados de que acima fallamos, teriam rido do bom camponio que comprava um trabalho semelhante e talvez Ahmes tivesse sido denunciado como um homem abusando da ingenuidade dos outros para adquirir dinheiro – e isso apezar do piedoso motto que termina a cópia e dos votos que ahi faz sobre o successo da cultura do seu generoso comprador ».

traduzido por completo e divulgado em 1930, é mais antigo que o papiro Rhind (CLAGETT, 1999).

Em seguida Gabaglia refere-se ao “titulo do papyro”, não mencionando que título é esse nesse momento do texto. Outro detalhe não citado, e que é notado com facilidade quando se observa imagens ou fotografias do papiro Rhind é o uso frequente de tinta preta, com exceção de alguns trechos nos quais a escrita aparece em tinta vermelha. O título e uma explicação da mudança na coloração da tinta são apresentados Robins e Shute (1987),

> Quase todos os problemas do PMR[19] tem a abertura com palavras escolhidas e em tinta vermelha, que ajuda a demarcar um problema do outro. Às vezes o vermelho é usado para separar alguns números a partir do cálculo principal, como no caso dos múltiplos comuns necessários para a adição de frações. Na página do título é ele próprio que aparece em vermelho. Ele pode ser traduzido como: Métodos corretos de raciocínio, para apreender o significado das coisas e saber tudo o que é, obscuridades... e todos os segredos”. (ROBINS; SHUTE., 1987, p.11, tradução nossa, nota nossa)

Diferentemente do que Gabaglia escreve “o papyro pertence ao começo da 17ª dynastia, cerca de 1700 annos A.C.”, Robins e Shute (1987), comentam sobre a data da escrita do papiro Rhind, situando-a em meados dos anos 1500 a.C. Já a data do trabalho original, do qual supostamente Ahmes tenha copiado o conteúdo, seria entre os anos 1850 a 1900 a.C, enquanto a que a hipótese aceita por Gabaglia é 2221 a.C,

> O copista dá seu nome como Ahmes e menciona que está escrevendo no quarto mês da temporada de inundação do 33º Ano do reinado do rei Ausere (Apophis). O último rei da 15ª Dinastia durante os Hicsos ou Segundo Período Intermediário, o qual floresceu em meados do século XVI a.C. Ahmes também registra que está copiando trabalhos anteriores escritos no reinado do Rei Ny-maat-re (Nymare). Este era o nome do reinado de Ammenemes III, que foi o sexto rei da 12ª Dinastia e reinou durante a segunda metade do século XIX a.C. (ROBINS; SHUTE., 1987, p. 11, tradução nossa)

Após o estudo cuidadoso do papiro Rhind concluiu-se ser a sua escrita o hierático antigo. Esta escrita sucedeu o uso da escrita hieroglífica[20] no Antigo Egito.

[19] RMP é a abreviação de Rhind Mathematical Papyrus usada no livro de Robins e Shute (1987). Em nossa tradução a abreviação usada é PMR (papiro matemático Rhind).

[20] Hieroglífica vem do grego “hieróglifo”, que significa sinal sagrado, e era primitivamente pictográfica, isto é, cada símbolo representava um objeto. Essa escrita era constituída de mais de seiscentos caracteres.

A escrita hierática era uma variação mais cursiva dos hieroglíficos, além dela também foi empregada a escrita demótica, que por sua vez era uma forma mais simples e mais popular da escrita hierática.

Figura 7 – Início do papiro Rhind (título em vermelho)

Fonte: Robins e Shute (1987).

No final do primeiro parágrafo (capítulo 1), Gabaglia apresenta um debate sobre a questão da finalidade do antigo documento egípcio elencando duas hipóteses, a primeira delas defendida por Eisenlohr e Cantor “considera-o um manual mathematico essencialmente pratico”. Enquanto que a segunda suposição, tomada por Revillout[21], “affirma ser o papyro um caderno de alumno contendo exercicios dados na escola”.

Como esse aspecto do papiro Rhind tomou (e penso que ainda tem tomado), a atenção de diversos historiadores da matemática, inclusive ocorrendo divergências

[21] Eugene Rèvillout (1843-1913), egiptólogo francês.

de opiniões, apresento a seguir o que uma breve revisão na historiografia geral da matemática nos mostra.

Ball (1960, p.3): “Parece ser um resumo de regras e questões familiares aos sacerdotes”. Boyer (2001, p. 15): “Os papiros de Ahmes e de Moscou, nossas principais fontes de informação podem ter sido apenas manuais destinados a estudantes, mas indicam a direção e as tendências do ensino de matemática no Egito”. Bunt (1976, p. 6): “We get the impression that the author posed himself problems and solved them for the fun of it”. Cajori (2007, p. 34): “Um papiro hierático, incluso na coleção Rhind do Museu Britânico, foi decifrado por Eisenlohr em 1877, e tido como um manual de matemática, contendo problemas de aritmética e de geometria”. Eves (2004, p. 69): “[...] papiro Rhind (ou Ahmes), um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo”.

De certo modo, chega a ser incisivo o seguinte trecho de Fontes (1969, p. 72): “Da análise do papiro Rhind conclui-se que, embora sem caráter didático, não é, como foi dito, um manual de cálculo, mas sim o mais importante repositório do saber, da chamada ciência positiva, na antiga civilização do Nilo. Nada mais”.

Apesar de não aparecer de modo explícito, a opinião de Robins e Shute (1987), pode ser deduzida a partir de alguns elementos que se assemelham com o seguinte trecho: “[...] deve ser salientado que os feitos egípcios podem ter sido mais do que suas páginas revelam; não se pode esperar a gama toda de conhecimento estar evidente num texto para aprendizes”, (p. 58).

Contudo, mesmo sendo um texto para aprendizes (no caso, aprendiz à escriba), um outro aspecto da matemática egípcia pode ser concluído do papiro Rhind,

> Embora a aritmética egípcia claramente tivesse uma forte inclinação prática e deve ter tido sua origem nas necessidades da sociedade, essas muitas necessidades requeriam uma agilidade na manipulação de números que pode ter gerado um interesse nas propriedades dos números para seu próprio benefício. Em nenhum lugar foi maior a habilidade e versatilidade demonstradas na implantação de frações unitárias. (ROBINS; SHUTE., 1987, p. 58, tradução nossa)

Além da manipulação das frações unitárias, penso que um outro exemplo de tal fato são os três problemas (n. 28, n. 29 e 79) “diversão”, (ROBINS; SHUTE., 1987, p. 54), que não parecem caracterizar-se como sendo de matemática prática.

Para finalizar o assunto, Gabaglia não assume nenhuma posição com relação às hipóteses apresentadas. Conclui que o papiro Rhind "seja um manual pratico elementar, seja um caderno de alumno, não dá o estado da sciencia mathematica de sua época; n'elle ha dados que se referem a uma sciencia muito mais adiantada". Do mesmo modo, deixo que o leitor ao observar o embate e a discussão de alguns problemas do papiro no decorrer deste trabalho, tirem suas próprias conclusões.

Quanto ao "novo papyro mathematico, traduzido, annotado e publicado por J. Baillet" citado por Gabaglia, trata-se do papiro matemático D' Akhmim[22], estudado pelo egiptólogo francês Jules Baillet, e publicado em 1892. Segundo Gillings (1982), este papiro contém uma tabela (diferentemente do papiro Rhind, o autor diz como ela foi formada), que dá os $\frac{2}{3}$ dos números $2, 3, \ldots, 10; 20, 30, \ldots, 100; 200, 300, \ldots, 1000;$ e $2000, 3000, \ldots, 10000$. A tabela similar presente no papiro Rhind, será abordada por Gabaglia no capítulo três de seu livro.

[22] Jules Baillet, "Le Papyrus mathématique d'Akhmim." Mémoires publiés par les membres de La Mission Archéologique Française au Caire, Vol. 9, (1892). Citado por Clagett (1999).

§ 2.º – O CONTEÚDO DO PAPYRO

5. – Vamos a largos traços resumir a materia contida no papyro acompanhando a sua ordem de distribuição. Nos paragraphos que seguem, será feita a analyse dos principaes problemas, estudados em grupos de accordo com a actual subdivisão didactica da mathematica elementar: arithmetica, algebra e geometria. Em ANNEXO encontrar-se-ha a traducção portugueza baseada sobre a allemã de Eisenlohr, modificada pelas restituições por elle feitas e pelas observações de Revillout.

Examinando-se o *fac-simile*, publicado por Eisenlohr, vê-se que logo após o titulo do livro, e a noticia da sua época e composição e do nome do seu author, segue-se a primeira parte do papyro.

Essa parte principia por oito columnas contendo a divisão do numero 2 pelos numeros impares de 3 a 99. O seu objectivo é reduzir á fracções – simples –[10], (isto é, a fracções que tem para numerador a unidade) as frações de fórma $\frac{2}{2n+1}$, desde que $n < 50$.

Immediatamente depois d'essas columnas, seguem-se seis calculos, infelizmente mutilados, de divisões parciaes, nas quaes effectua-se a partilha 1, 3, 6, 7, 8 e 9 pães por 10 pessoas; n'esses calculos, convem desde já notar, o numerador é variavel e o denominador constante. Elles acham-se em Eisenlohr numerados de 1 a 6.

Em seguida vêm desesete (ns. 7 a 23) exemplos do calculo que Ahmes chama *seqem* que podemos traduzir por *calculo complementar* de fracção. O seqem póde ser definido como a operação que ensina a accrescer por addicção ou por multiplicação, fracções até attingir a um numero inteiro ou a outra fracção. Esses exemplos se dividem em duas classes differentes, a primeira vai do n. 7 a 20; e a segunda de 21 a 23. Mais tarde ver-se-ha o que as separa.

Ao *seqem* segue-se uma nova operação, a do *hau* (ns. 24 a 38) pela qual se deduz o valor de um numero inteiro, conhecida a somma d'esse inteiro e de suas partes; isto é, o hau ensina a resolver questões que actualmente constituem equações do 1º grau a uma incognita das seguintes fórmas:

$$x+\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\ldots\ldots=c;$$

$$mx+\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\ldots=1.$$

Ao *hau* ligam-se exemplos de divisões de uma medida para cereaes –o *bescha* ou *auit*–, vindo expresso o quociente em seus sub-multiplos.

Depois dos exemplos do *hau* vem dous calculos interessantissimos que se denominam

(10) As fracções da fórma $\frac{1}{n}$ são as que chamamos simples. Diophantos denominou-as *homonymas*. Muitos mathematicos contemporaneos as designam pela denominação de *fundamentaes*.

4.2 § 2.º – O conteúdo do papyro

Iniciando o parágrafo 2, Gabaglia afirma neste momento de seu texto "resumir a materia contida no papyro acompanhando a sua ordem de distribuição". Menciona que nos próximos parágrafos (ou capítulos), no caso o 3º, 4º e o 5º, fará uma análise dos *principais* problemas do papiro Rhind seguindo a "actual subdivisão didactica da mathematica elementar: arithmetica, algebra e geometria".

A "materia contida no papyro" inicia-se com a escrita de "oito columnas contendo a divisão do numero 2 pelos numeros impares de 3 a 99". Em outras palavras Gabaglia afirma que essa parte inicial do papiro tem o objetivo de reduzir as frações da forma (1), a frações unitárias (aquelas com numerador igual a 1):

$$(1) \qquad \frac{2}{2n+1}\,;$$

Para que seja sustentado o limite superior do intervalo de 3 a 99, é necessário que o valor de n seja menor do que 50. Consequentemente a última fração (2), com $n = 49$, a ser transformada em sua fração unitária equivalente (3) seria:

$$(2) \qquad \frac{2}{99}\,;$$

$$(3) \qquad \frac{1}{66} + \frac{1}{198}\,;$$

Esta afirmação juntamente com a seguinte "Immeditamente depois d'essas columnas, seguem-se seis calculos, infelizmente mutilados, de divisões parciaes", tornam Gabaglia refém do tempo em que viveu. Recordemos que nos anos finais do século XIX, o papiro Rhind constituía-se apenas pelas duas grandes partes em que foi comprado (British Museum n. 10057 e n. 10058). Os fragmentos (Brooklyn Museum, n. 37.1784E), que faltavam para completar o papiro Rhind ainda não haviam sido "encontrados", ou melhor, não haviam sido identificados como a parte que faltava para completar o papiro Rhind, tal reconhecimento só aconteceu em 1922. Nesses fragmentos figura a transformação de mais uma fração (4) e parte dos cálculos "infelizmente mutilados" de que havia se queixado Gabaglia.

do *tunnu* (que traduziremos segundo ensina Eisenlohr pelo vocabulo –*differença*). O calculo do tunnu é divisão de um todo, feita de modo que as porções sejam desiguaes.

Com o tunnu termina a primeira parte do papyro – a parte arithmetica que é a maior.

A segunda parte (ns. 41–48 do *fac-simile*), a *stereometrica*, contém calculos para determinação do volume de uns celleiros para fructos e da sua capacidade expressa na medida usada para o trigo.

Infelizmente, Eisenlohr não pôde deduzir dos calculos do papyro a fórma d'esses celleiros, ficando tudo reduzido a hypotheses, e pouco plausiveis. Os exemplos de ns. 41 a 43 consideram os taes celleiros com base circular e os de ns. 44 a 46 com base quadrangular. O n. 47 contém a divisão decimal de uma medida egypcia – *100 beschas* –, expressa nos sub-multiplos, divisiveis por 2, do *bescha*. O n. 48 dá o desenho, acompanhado de calculo, explicando o modo notavel pelo qual Ahmes obteve a superficie circular.

A terceira parte do papyro, a parte *geometrica* principia sob o n. 49 do *fac-simile* e é toda contida numa tabella. Essa parte geometrica acha-se pelo assumpto dividida em duas secções. A primeira (ns. 49 a 55) ensina a avaliar certas superficies (rectangulo, circulo, triangulo rectangulo[11], trapezio regular[12]) provenientes de divisão dos terrenos e termina em dous exemplos (os de ns. 54 e 54), relativas a partilha de um certo numero de unidades agrarias em um determinado numero de partes. A segunda secção que poderiamos chamar trigonometrica, occupa-se (ns. 56 a 60) em calcular certos elementos das pyramides.

Depois da terceira parte, vem sob o n. 61 intercallado um calculo de fracções arithmeticas e pela vez primeira e unica no papyro uma regra geral: a de multiplicar fracções por $\frac{2}{3}$.

Com o n. 62 principia uma serie de problemas diversos, que consideraremos como uma nova parte, a quarta do papyro. A maioria d'esses problemas pertence á arithmetica pratica e são tirados de factos diarios. Foi, diz Eisenlohr, o mais difficil para traduzir.

No n. 62 deve-se deduzir do pezo de um objecto e da quantidade relativa de metaes diversos que o compõem, o pezo de cada metal. Os problemas (de ns. 63 a 65) referem-se a partilhas proporcionaes a certos numeros dados, onde os diversos quinhões tem entre si uma razão determinada. No n. 66 avalia-se o rendimento de um dia, pelo annual; ahi o anno é considerado como 365 dias. Nos ns. 67 e 68, deduzem-se salarios. Os exemplos de ns. 69 a 78 referem-se a transformação em pães, ou em cerveja, de um volume dado de farinha, ou de grãos, e a outras questões semelhantes. O n. 79 apresenta real importancia: é um calculo da somma dos termos de uma progressão geometrica; os termos são as potencias

---

(11) Ha n'esse ponto duvidas. Eisenlohr pensa ser triangulo isosceles. Revillout objecta e parece com razão ser o triangulo rectangulo. Vide discussão adiante.

(12) Ha tambem duvidas; veja-se adiante.

(4) $\frac{2}{101}$;

Figura 8 – Fragmentos do papiro Rhind (Broklyn Museum n. 37.1784E)

Fonte: Robins e Shute (1987).

O quadro abaixo esboça de um modo conciso o que Gabaglia afirma ser o conteúdo do papiro Rhind. Como observado no texto original, nenhum arranjo deste tipo foi apresentado, no entanto, penso ser visualmente mais compreensível observar a classificação dos problemas desse modo e, inclusive compará-lo com a opinião dada por outros estudiosos do papiro.

successivas de 7. Nos ns. 80 e 81 ha uma tabella comparativa muito notavel entre os sub-multiplos da medida *bescha* para solidos e da medida *hin* para liquidos. Os exemplos ns. 82 a 84 referem-se a alimentação de animaes. No n. 85 ha o *motto* da escripta[13] e dous fragmentos que parecem pertencer a outro trabalho. No n. 86 existe o calculo da alimentação de um estabulo e no n. 87 fragmentos com data. E assim termina o importante documento. N'essa ultima parte nota-se alguma desordem, principalmente na collocação dos exemplos 79–81 que cortão a serie de problemas relativos a alimentação, principiada no n. 69 e recomeçada no n. 82.

---

[13] De que já fallamos.

Quadro 1 – Classificação dos problemas (por Raja Gabaglia, 1899)

GRANDE ÁREA	PROBLEMA	ASSUNTO
ARITHMETICA	Problemas 1-6	Divisões parciaes. Partilha de 1, 3, 6, 7, 8 e 9 pães por 10 pessoas.
	Problemas 7-20 e 21-23	Calculo do *seqem* (*calculo complementar)* de fracção.
	Problemas 24-38	Calculo do hau (equações do 1º grau a uma incógnita).
	Problemas 39-40 (?)	Calculo do *tunnu* (divisão em porções desiguaes).
STEREOMETRIA	Problemas 41-48	Determinação do volume de uns celleiros.
GEOMETRIA	Problemas 49-55 (áreas)	Avaliar certas superficies
	Problemas 56-60 (trigonometria)	Cálculo de certos elementos das pyramides
	Problema 61	Regra geral: a de multiplicar fracções por 2/3.
DIVERSOS (arithmetica pratica)	Problema 62	Pezo de um objecto e da quantidade relativa de metaes diversos que o compõem, o pezo de cada metal.
	Problemas 63-65	Partilhas proporcionaes a certos numeros dados.
	Problema 66	Rendimento de um dia, pelo annual.
	Problemas 67-68	Deduzem-se salarios.
	Problemas 69-78	Transformação em pães, ou em cerveja, de um volume dado de farinha, ou de grãos, e a outras questões semelhantes.

	Problema 79	Somma de termos de uma progressão geometrica.
	Problemas 80-81	Tabella comparativa entre os sub-multiplos da medida *bescha* para solidos e da medida *hin* para liquidos
	Problemas 82-84	Alimentação de animaes.
	Problema 85	*Motto* da escripta
	Problema 86	Calculo da alimentação de um estabulo
	Problema 87	Fragmentos com data

Fonte: Elaborado pela autora desta dissertação.

Gabaglia define o conteúdo dos problemas do papiro Rhind separando-os em quatro grandes áreas da matemática. Na primeira coluna da tabela observamos quais são elas: aritmética, stereometria (também chamada de volumetria) e geometria.

A parte aritmética é a maior, segundo o autor alguns problemas podem ser separados, por exemplo, um primeiro grupo que vai do n. 7 ao n. 20, e o outro do n. 21 ao n. 23, sobre essa separação, na mesma classe de problemas, Gabaglia limita-se a dizer "Mais tarde ver-se-ha o que as separa". Contudo, todos esses problemas tratam do *sequem*, que "póde ser definido como a operação que ensina a accrescer por addicção ou por multiplicação, fracções até attingir a um numero inteiro ou a outra fração". Ainda na parte aritmética duas outras operações são definidas, a do *hau* (ou *aha* que é similar a quantidade desconhecida), "pela qual se deduz o valor de um numero inteiro, conhecida a somma d'esse inteiro e de suas partes"; e a do *tunnu* (diferença), "divisão de um todo, feita de modo que as porções sejam desiguaes".

A segunda parte *Stereometria* pode ser considerada como *Volumetria*, assim como Eisenlohr a define (EISENLOHR, 1877, p. 93), trata do cálculo do volume de celeiros, em especial Gabaglia menciona que o problema "n. 47 contém a divisão decimal de uma medida egypcia – 100 *beschas* –". Na obra de Robins e Shute (1987), o problema n. 47 também é abordado, vejamos: "O problema nº. 47 fornece uma classe de um décimo de 100 quádruplos *hekat* expressos em frações do Olho de Horus de um quádruplo *hekat* e quádruplo *ro* que era aplicado para graõs em um celeiro circular ou retangular”. (ROBINS; SHUTE., 1987, p. 40, tradução nossa)

Ainda para os mesmo autores, “a unidade comum de volume, usada para medir quantidades de grão ou farinha, era o *hekat*, aproximadamente igual a 4,8 litros” (ROBINS; SHUTE., 1987, p. 14, tradução nossa). O que nos leva a concluir que a medida *bescha,* no texto de Gabaglia (1899) é equivalente à medida *hekat* em Robins e Shute (1987).

Na terceira parte, a geométrica, que se inicia com o problema n. 49, também é possível separar o conteúdo em duas seções. Segundo Gabaglia, os problemas do n. 49 ao n. 55, ensinam a “*avaliar certas superfícies*”, enquanto que do problema n. 56 ao n. 60, a questão posta é “calcular certos elementos das pyramides”, denominando esta seção como *trigonométrica*. Ainda nesta parte do papiro destaca-se o problema n. 61, pois é nele que “pela vez primeira e unica no papyro uma regra geral: a de multiplicar fracções por $\frac{2}{3}$”.

Por fim, têm-se “uma nova parte, a quarta do papyro”, que se inicia com o problema n. 62 e é composta por uma série de problemas diversos que dizem respeito à vida cotidiana do antigo Egito, tais problemas foram, segundo Eisenlohr, a parte mais difícil de ser traduzida.

Assim como Gabaglia o fez em seu livro, será nos próximos parágrafos que ampliaremos os comentários de diversos problemas do papiro Rhind, no momento, nossa intenção foi tecer considerações gerais sobre o conteúdo do importante documento matemático tomando como base o texto de Gabaglia.

Abaixo apresentamos, novamente em forma de quadro, uma síntese dos problemas do papiro Rhind classificados por assunto conforme aparecem na obra de Robins e Shute (1987). Com uma breve observação do quadro, é possível notar que os autores não seguem a ordem crescente dos problemas para então fixar um assunto, na verdade ele não precisa necessariamente encerrar-se junto com uma série de problemas. É o que acontece, por exemplo, com o tema “Solução de equações e tabelas relacionadas”, os cálculos aí atribuídos variam da segunda até a oitava dezena.

Quadro 2 – Classificação dos problemas por Robins e Shute (1987).

PROBLEMA	ASSUNTO
Problemas 1-6	Divisão de números por 10
Problemas 7-23	Adição de frações e soma para 1
Problemas 24-38, 47, 80-81	Solução de equações e tabelas relacionadas
Problemas 39-40, 61, 63-65, 67-68	Distribuição desigual de bens e outros problemas
Problemas 41-43, 48, 50	Quadrando o círculo
Problemas 44-46, 49, 51-60	Retângulos, triângulos e pirâmides
Problemas 62, 66, 69-78, 82-84	Valor, troca justa e alimentação
Problemas 28-29, 79	Diversão

Fonte: Elaborado pela autora desta dissertação.

§ 3.º ARITHMETICA DO PAPYRO RHIND

SUMMARIO: – 6. Notação dos numeros inteiros. – 7. Quatro operações. – 8. Fracções; notação. – 9. Algumas propriedades das fracções. – 10. Tabellas para obter $\frac{2}{2n+1}$. – 11. Como foram formadas essas tabellas? – 12. Divisão em partes iguaes. – 13. Regra do *sequem*. – 14. Discussão sobre o *sequem*. – 15. Divisão em partes desiguaes. – 16. Progressões arithmetica e geometrica. – 17. Ligeiras considerações sobre alguns problemas.

6.– A escala dos numeros inteiros no nosso documento mathematico é a decimal; e a sua notação póde ser referida ao systema additivo[14], muito alterado e irregular, principalmente pela dupla tendencia, primeiro de empregar a numeração multiplicativa e depois de abusar de algarismos além dos necessarios.

Cousas dignas de attenção se obtem do estudo no papyro quer da representação graphica dos numeros, quer da sua nomenclatura; porém sob o ponto de vista de methodo mathematico nada temos a dizer.

São representados por algarismos especiaes e entre si independentes, os numeros: 1, 10, 100, 1000, 10000; e bem assim 5, 6, 7 e 9.

Os numeros 1, 2 e 3, são representados por um, dous e tres traços verticaes. O numero 4 é graphado por um traço horisontal; a elle se referem os signaes para 8 (dous traços horisontaes parallelos, isto é,), para 40 (um traço horisontal com um ponto acima), para 80 () etc.

7. – Vejamos o que nota-se sobre as quatro operações.

a) Addição e subtracção. – No papyro Rhind existem numerosas addicções e subtracções. O modo de dispor as parcellas é simples e consiste em escrevel-as umas após outras, ou umas sobre outras, fazendo preceder a somma de um signal que é geralmente a representação graphica (ou alguma das variantes) do vocabulo *t'emet* que póde-se traduzir por *total* e *totalizar*, sendo frequentemente empregado quando se quer dizer – addiccionar – ; no mesmo sentido o papyro emprega tambem os verbetes *tu* e *uah*[15], este ultimo significando antes *ajuntar* e o outro *collocar*. A addicção é indicada pela palavra *sem* (ou *sotem*).

Em alguns problemas do papyro, a addicção e a subtracção são expressas de modo interessante por um signal, representando duas pernas; quando voltadas para a direcção da escripta significam somma e tem o seo equivalente no nosso signal +; na direcção opposta são symbolos de subtracção, correspondendo a – [16].

---

[14] Vide *Revista da Escola Polytechnica*, ns. 11 – 12, pag. 337.

[15] Revillout, pag. 299.

[16] Esses signaes entram na graphia dos verbos *vir para* e do seu opposto *ir-se*; litteralmente o signal de addicção é *vindo para* e o outro *indo-se*.

4.3 § 3.º – Arithmetica do papyro Rhind

Na primeira seção do parágrafo 3, Raja Gabaglia faz uma breve explicação da notação numérica usada no papiro Rhind. Para uma melhor compreensão do leitor, neste ponto de nosso trabalho optamos por trazer mais informações sobre o assunto, já que o autor pouco o enfatiza em seu texto.

Provavelmente o sistema de escrita[23] mais remoto presente no Egito antigo foi o hieroglífico. Com o tempo os hieróglifos foram evoluindo para uma variante mais cursiva e mais simples, que é a hierática, geralmente esse tipo de escrita foi usada em papiros e placas de barro. Nos últimos períodos do Egito antigo a escrita evolui para um sistema conhecido como demótico, sua principal característica foi abranger toda a população, diferentemente das duas primeiras escritas nas quais somente os sacerdotes e escribas podiam dominá-la.

Assim como a escrita o sistema de numeração dos antigos egípcios também passou por aperfeiçoamentos. Segundo Gillings (1982), o método utilizado para representar números deve ter sido, pelo menos, mais fácil do que escrever as suas palavras foneticamente equivalentes[24] e, ambas as formas de escrita (hieroglífica, hierática e demótica), seguiam a direção da direita para a esquerda.

Conforme já mencionamos em seção anterior, o papiro Rhind está escrito em hierático sendo seu sistema de numeração decimal não posicional. Gabaglia afirma que a notação pode “ser referida ao systema additivo”, apesar de que diferentemente dos hieróglifos os números em hierático não precisavam ser representados pela repetição de algarismos já que existia diversos sinais para representá-los.

A figura abaixo mostra a representação das unidades 1 a 9, das dezenas 10 a 90, das centenas 100 a 900 e as quatro primeiras unidades de milhar, em hieroglíficos (primeira coluna), e a variação da numeração hierática em diferentes papiros matemáticos (terceira a oitava coluna).

[23] Em “The Writing of a Skillful Scribe: An introduction to hieratic Middle Egyptian through the text of The Shipwrecked Sailor” de William Clay Poe (2010), é feita uma profunda discussão sobre os diversos tipos de escrita do antigo, médio e moderno Egito.
[24] É possível encontrar no livro citado na nota anterior comentários sobre a transliteração dos hieróglifos e sua forma fonética (POE, 2010, p. 6).

Além desse signal, a subtracção é ainda indicada no papyro por tres outros signaes que graphicamente representam a palavra *cheb* (subtrahir).

O subtrahir uma quantidade de outra é muitas vezes indicado no papyro por uma das preposições egypcias *en* e *chent*, collocadas entre os dous termos, vindo o subtrahendo antes do minuendo; assim, como exemplo, no problema n. 43 se lê litteralmente:

Separa tu 1 de 9 resta 8

que quer dizer: si de 9 subtrahires 1, o resto é 8.

Em alguns problemas (n. 50, v.g.), vindo o minuendo antes do subtrahendo, não se emprega signal para a subtracção.

O resto da subtracção tem no papyro dous nomes: *t'et* e *ut'a*.

Nada consta do papyro sobre o processo intimo ou sobre os instrumentos empregados pelos egypcios para effectuar a addicção e a subtracção.

b) Multiplicação. – No papyro não ha uma expressão para significar *multiplicar por*.

Muitas vezes antes de uma indicação de multiplicação ou de divisão emprega-se o verbo *uah tep* que pôde-se, segundo Revillout, traduzir por «applica-te». Outras vezes, além de *uah tep*, vem tambem *ar*, que quer dizer «faz» ou então só esse ultimo verbo. As palavras *uah tep* não passam de simples *memento*, servem para chamar a attenção para o calculo que deve ser effectuado. O verbo empregado verdadeiramente para a operação é o verbo *ar* (fazer).

No papyro emprega-se a palavra *sep* (com as variantes *sep'*, *er sep'*) entre o multiplicador e o multiplicando; essa palavra traduz-se por *vezes*. Eis uma phrase do n. 41, vertida por E. Revillout:

«Applica-te a 8 vezes 8, isso faz então 64»
uah tep *sep*

E' muito notavel o modo empregado para effectuar a multiplicação; esse modo, como veremos, permaneceu por longo intervallo de tempo. Consiste em uma verdadeira duplicação; assim, por exemplo, para multiplicar um certo numero *p* por 15, Ahmes fazia:

O numero............	p
Seu duplo............	2 p
Seu quadruplo.....	4 p
Seu octuplo..........	8 p

Figura 9 – Representação dos números inteiros em diferentes papiros

Fonte: Adaptado de Gillings (1982)

A primeira linha da figura acima contém a abreviação dos nomes dos papiros que possuem a representação dos números em hierático. Por Reisner, entenda-se papiro Reisner, MMP – papiro matemático de Moscou, KP – papiro de Kahun, EMLR que, sommados, dão 15 p.

Ahmes sabia multiplicar um numero por 10, 100, etc., porque, com os signaes numericos que empregava, basta simplesmente mudar a especie do signal; assim, por exemplo, seja decuplicar o numero 132. Esse numero é representado pelo algarismo de centena seguido de tres outros de dezena e de dous de unidade; para obter o seu decuplo, substitue-se o signal de centena pelo de milhar, os de dezena pelos de centena e os de unidade pelos de dezena.

c) Divisão. – Indicando que deve effectuar-se uma divisão, encontra-se no papyro, além do verbo *uah tep* e *ar*, o verbo *nas* que significa commummente *recitar*, *proclamar*, podendo, porém, no papyro, ser traduzido por dividir. Tambem em alguns casos de divisão, nota-se o verbo *cheb*, já usado na subtracção, combinado com as palavras *chent* e *cheft*, tendo esse grupo de palavras o sentido de «dividir».

As divisões no papyro se fazem de dous modos que Eisenlohr denomina o directo e o indirecto. O primeiro consiste, em dados o dividendo e o divisor, dizer logo o quociente por meio de tabellas já previamente compostas; no papyro existem não só tabellas que dão o quociente de 2 pelos numeros impares até *99*, como tambem soluções de problemas que dão o quociente dos primeiros 9 numeros por 10.

O segundo modo de divisão consiste em multiplicar o divisor até obter-se o dividendo; é o modo geralmente empregado no papyro sendo numerosos os exemplos; semelhante processo conservou-se por longos seculos.

A explicação do segundo modo é muito facil; com effeito, imagine-se que se peça o quociente q de D por d. Ahmes em vez de fazer o que hoje fariamos, isto é a divisão de D por d, experimentava a divisão de d por diversos numeros, até obter D; o numero que multiplicado por d, alcançasse D, é o quociente; na verdade tem-se

$$dq = D$$

Por esse processo, Ahmes fazia qualquer divisão, fosse o dividendo ou o divisor o quociente, inteiro ou fraccionario, ou mesmo dous d'estes. No papyro ha exemplos equivalentes as seguintes divisões: Por esse processo, Ahmes fazia qualquer divisão, fosse o dividendo ou o divisor o quociente, inteiro ou fraccionario, ou mesmo dous d’estes. No papyro ha exemplos equivalentes as seguintes divisões:

$$(66\frac{2}{3}) \div \frac{1}{10}$$

$$10 \div (\frac{2}{3} + \frac{1}{10})$$

$$100 \div 30$$

– Rolo de Couro matemático egípcio, RMP – papiro matemático Rhind e Berlin – papiro de Berlim (GILLINGS, 1982).

A sétima coluna diz respeito à numeração registrada no papiro Rhind, note que os números um, dois, três, quatro e seis, possuem mais dois tipos de respresentação cada.

Se observarmos a menção de Gabaglia “O numero 4 é graphado por um traço horisontal” e a confrontarmos com a imagem acima, verificamos que a representação deste número é feita de dois modos distintos no papiro Rhind, tanto por um traço horizontal como por quatro pequenos traços verticais. Gabaglia finaliza a seção aqui comentada apresentado os sinais para os números 8, 40 e 80, feito isso, nada mais foi dito.

Como o próprio título da próxima seção afirma, neste trecho de seu texto o autor faz considerações sobre as quatro operações fundamentais da matemática: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Sobre as duas primeiras operações, Gabaglia nos informa existir no papiro uma grande quantidade destas. Após a exposição das parcelas geralmente figura uma “representação graphica” das variantes do vocábulo *total*. A existência desta representação para o total é notada também em Gillings (1982, p. 15), que apresenta os dois símbolos da figura abaixo quando comenta sobre o assunto.

Figura 10 – Símbolos que representam o “total” no PMR

Fonte: Adaptado de Gillings (1982)

Segundo Gabaglia, além dos símbolos que exprimem a palavra total, no papiro Rhind também existem sinais equivalentes aos nossos + (mais), para a adição e – (menos), para a subtração. Os símbolos consistem de duas pernas, quando voltadas para a direção da escrita hierática (direita para a esquerda), da primeira operação e, da segunda quando as duas pernas estão voltadas para a direção oposta, conforme a seguinte imagem:

cujos quocientes respectivos Ahmes dá rigorosamente certos.

Appliquemos, como exemplo, empregando a nossa actual linguagem mathematica, a determinação do quociente de 70 por $93\ ^1/_3$, ou como á egypcia dever-se-hia dizer, a determinação do numero que multiplicado por $93\ ^1/_3$ dá 70:

$$\text{O divisor } 93\,\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{2}\text{ do divisor } 46\,\frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{4}\text{ do divisor } 23\,\frac{1}{3}$$
$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\text{ do divisor } 70$$

portanto

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\times 93\frac{1}{3}=70$$

e

$$\frac{70}{93\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\text{, que é o quociente.}$$

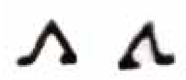
Ahmes sabia tambem dividir immediatamente certos numeros inteiros por 10; eram os que no nosso systema de numeração terminam em zero ou cinco. Com effeito, na primeira hypothese basta mudar a especie do signal; assim, tendo de dividir 120 por 10, Ahmes devia substituir o signal de centena pelo de dezena, e os dous signaes de dezena por outros tantos de unidade; e a divisão achava-se feita, obtendo-se o quociente 12. Na segunda hypothese, quando o algarismo da unidade é 5, provavelmente observou-se que 5 unidades correspondiam a meia dezena e que a decima parte é meia unidade, de sorte que, tendo-se de dividir um numero inteiro terminado em 5, substituiram-se as diversas especies de signaes numericos representativos das dezenas, centenas, etc., e substituiram-se os signaes para 5 (ou meia dezena) pelo signal para $\frac{1}{2}$ (ou meia unidade). Ahmes para dividir 15 por 10, limitava-se a substituir o signal de uma dezena pelo de uma unidade e os cinco signaes de unidades pelo da fracção $\frac{1}{2}$, obtendo assim o quociente $1\,\frac{1}{2}$.

Alguns escriptores, Rodet entre outros(17), affirmam que Ahmes não sabia fazer nem a multiplicação nem a divisão. Os exemplos e as considerações feitas demonstram evidentemente o contrario.

O que Ahmes não sabia, era effectuar a multiplicação e a divisão pelo modo

(17) Rodet, pag. 6 do «Les prétendus problèmes d'algébre».

Figura 11 – Sinais equivalentes a (+) e (–)



Fonte: Gillings (1982)

Infelizmente Gabaglia parece ter cometido o mesmo erro a que se refere Gillings (1982), quando menciona e critica um trabalho publicado em 1965. Vejamos,

> A falta de atenção cuidadosa para isso pode tornar-se confusa, e mesmo completamente errada, como por exemplo, em uma publicação recente da Life history of mathematics[25]. Lá, os dois hieróglifos[26], são demonstrados no sentido de *subtrair* e *adicionar*, respectivamente, e o leitor é remetido para a figura que o acompanha onde ocorrem esses sinais. Atualmente, a verdade é exatamente o contrário, e o sentido do problema matemático[27], se examinado a partir da ilustração reproduzida do original, é completamente diferente. (GILLINGS, 1982, p. 6, nota nossa (26), notas e grifos do autor)

Ou seja, o primeiro sinal da figura 11 é equivalente à + (mais) e o segundo à – (menos).

Dado o exposto podemos concluir que os sinais da figura 8 podem ter indicado as operações que deveriam ter sido feitas, no entanto, isso não significa que os egípcios criaram e adotaram tais sinais para indicar todas as adições e subtrações realizadas. Isso é verificado nos diversos problemas do papiro Rhind em que esses cálculos foram executados sem a presença de tais símbolos. Dessa maneira, concordamos com Robins e Shute (1987), quando afirmam que não existem sinais para as operações aqui mencionadas: "Os egípcios não usavam sinais de operadores para indicar a adição, subtração, multiplicação e divisão, mas deixaram isso claro tanto verbalmente ou por meio do método de estabelecer a forma que o cálculo aritmético se destinava" (ROBINS; SHUTE., 1987, p. 7, tradução nossa).

Ainda sobre o tema adição e subtração Gillings (1982), afirma que os historiadores da matemática não se comprometem em estabelecer um método que supostamente foi utilizado por Ahmes, justamente porque não existem registros no papiro que exemplificam como essas operações foram feitas. Isso é exatamente o

---

[25] David Bergamini and the Editors of Life, Life *Science Library: Mathematics*, p. 64. © 1965 by Time Inc. Time-Life International, Netherlands N. V.
[26] Ver figura 11.
[27] Problem 28 of The Rhind Mathematical Papyrus. See A. B. Chace; L. Bull; H. P. Manning; and R. C. Archibald, *The Rhind Mathematical Papyrus*, Vol. II, Pl. 51.

moderno; os processos que empregava, permaneceram e atravessaram todo o periodo scientifico grego; a elles é que provavelmente refere-se o scholio, attribuido a Anatolius sobre a *Charmida* de Platão, onde classifica entre os objectos da *Logistica* os methodos «chamados hellenicos e *egypcios* para as multiplicações e divisões, etc» [18].

d) E' digno de nota a verificação que Ahmes faz no fim da solução de um problema: é uma verdadeira prova para que tem termo technico especial. Ahmes tambem emprega outras expressões notaveis, por exemplo, *art ma cheper* que significa *arte de calcular; smot*, *demonstração*, etc.

8.– Ahmes emprega muito as fracções que, de accordo com o uso tradiccional egypcio[19] tinham sempre a unidade para numerador, excepção feita de $^{2}/_{3}$ que para elles era a primeira fracção e a maior[20].

Uma fracção aos olhos dos egypcios, ou melhor, dos antigos, era sempre uma sub-divisão de unidade que se continha n'esta um certo numero de vezes indicado pela sua propria denominação; assim um quinto designava uma quantidade contida cinco vezes na unidade. Portanto, a noção predominante no systema fraccionario egypcio é o numero *homonymo*, isto é, do mesmo nome, como dizião; ou o numero denominador, como diriamos. E' claro, consequentemente, que para enunciar as fracções bastava um só nome de numero, e esse correlato ao do denominador.

Os egypcios querendo enunciar uma fracção de numerador diverso da unidade, $^{3}/_{4}$ v.g., eram forçados por qualquer razão phonetica ou grammatical que desconhecemos, a decompol-a em uma somma de fracções simples; $^{1}/_{2} + {}^{1}/_{4}$, no exemplo considerado; e concordante a esse modo de fallar, possuiam a respectiva notação. Representavam graphicamente a fração pelo denominador, affectado de um signal especial, significando a palavra *re* (porção ou parte); em Ahmes esse signal é um ponto acima do algarismo ou grupo de algarismos, representativo do denominador[21]. Assim, o algarismo para 8 é proximamente igual ao nosso signal $=$, e a fracção $^{1}/_{8}$ é escripta: $\dot{=}$. Ahmes da notação geral das fracções exceptuava as seguintes

$$\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \text{ e } \frac{1}{4}$$

que têm seus signaes particulares[22].

---

[18] Os methodos hellenicos de multiplicação consistem em multiplicar algarismo por algarismo, como actualmente fazemos; porem os gregos principiavam ao inverso de hoje pelo algarismo de ordem mais elevada. O seu systema de numeração alphabetica não se oppunha a semelhante habito.

[19] Esse uso perpetuou-se entre os gregos e os arabes.

[20] No proprio egypcio em epocas posteriores houve mais alguns excepções.

[21] No demotico esse signal era uma pequena virgula ou apostropho (ás vezes duplicado): o que passou ao grego.

[22] Em demotico tambem existiam signaes especiaes para a escala dos decimos e para $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{6}$.

que Gabaglia afirma “Nada consta do papyro sobre o processo intimo ou sobre os instrumentos empregados pelos egypcios para effectuar a addicção e a subtracção”.

Contudo, Gillings (1982), faz um interessante comentário supondo que os cálculos eram feitos e verificados em outros lugares (nossos atuais rascunhos?) e posteriormente registrados pelo escriba no papiro “oficial”. Os procedimentos de cálculo poderiam inclusive constituir-se por tabelas de soma e subtração, no entanto nenhum registro deste tipo foi encontrado em papiros egípcios. Vejamos as próprias palavras do autor,

> Parece que essas operações foram realizadas e verificadas em outros lugares pelos escribas, e as respostas inscritas em papiros posteriores. Um erro de escriba nesta parte de sua aritmética é uma raridade que pode ser dispensada para chegar à conclusão de que eles tinham tabelas para adições (e, consequentemente, para subtrações), a partir das quais eles simplesmente liam as respostas. Se tais tabelas existiram, contudo, nenhuma cópia chegou até nós, de modo que a ideia permanece puramente uma conjectura, na medida em que números inteiros são tomados. (GILLINGS, 1982, p. 11, tradução nossa)

Gabaglia segue seu texto mencionando que no papiro Rhind não existe uma expressão que signifique “multiplicar por”, embora o verbo egípcio *ar* tenha sido empregado no sentido de palavra *fazer*, isto é, faça tal operação. Além de *ar* a palavra *sep*, e suas variantes, se empregada entre os números que devem ser multiplicados, traduz-se por *vezes*.

O método de multiplicação usado pelos antigos egípcios é considerado por Gabaglia como “muito notavel” e “consiste em uma verdadeira duplicação”. O autor dá um exemplo genérico deste método apesar do papiro não conter nenhum exemplo deste tipo. A seguir apresentamos a multiplicação 8×7, adotando o procedimento egípcio[28].

$$\begin{array}{rr} \backslash 1 & 8 \\ \backslash 2 & 16 \\ \backslash 4 & 32 \\ \hline 7 & 56 \end{array}$$

[28] Tomamos este exemplo de Gillings (1982, p. 18).

Para os egypcios, as fracções de numerador diverso da unidade, isto é, do typo $\frac{m}{n}$, não eram de facto fracções, e sim eram divisões a effectuarem-se. Para elles, uma fracção tal como $\frac{3}{4}$ não era um resultado; ao contrario significava uma operação não terminada, uma phase de calculo para obter uma operação final que tinha de ser feita. E' por isso que Ahmes emprega o verbo *nas* cujo verdadeiro sentido é «*lêr em voz alta; proclamar*», n'um significado mathematico que póde ser traduzido por «dividir», pois marca a substituição de uma fracção de numerador diverso da unidade por fracções simples. Os egypcios sabiam theoricamente que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ faziam $\frac{3}{4}$; mas não podiam *proclamar* $\frac{3}{4}$[23]. O exemplo seguinte extrahido do problema n. 63 do *fac-simile*, torna evidente o que acabamos de dizer:

Proclama 1 em 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$. Isso faz $\frac{1}{2}\frac{1}{14}$.

E' o mesmo que dizer:

Divide 1 por 1 $\frac{3}{4}$. Isso faz $\frac{8}{14}$.

Ahmes tambem applica á medida «*bescha*» um systema particular de notação: as unidades até 5 são marcadas por pontos ou pequenos traços, as dezenas por longos traços, etc. As sub-divisões, na razão sub-dupla, que são as fracções:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{1}{32}, \quad \frac{1}{64}$$

da unidade principal, tem signaes especiaes muito simples.

9.– Perante os calculos que Ahmes sabia effectuar sobre fracções, é incomprehensivel o desenvolvimento da arithmetica pratica no espaço de tempo multisecular que separa o escriptor egypcio dos primeiros *logisticos* hellenos. E' realmente espantoso o conhecimento mathematico do autor do papyro Rhind, si attendermos a longinqua época da sua composição e si o compararmos com a sciencia dos mais antigos entre os gregos. Reflectindo-se que de Ahmes a Thales ha no minimo um intervallo de dez seculos; considerando-se de um lado o relativamente muito que aquelle sabia, e do outro as descobertas elementares a este attribuidas pelo orgulho e vaidade nacionaes, fica-se sob um sentimento de admiração tão intenso, quanto o que apodera-se de todos os viajantes que vão até as grandes pyramides – os ultimos limites dos tempos historicos –, e até a grande Sphinge cujos olhares de profundo pensamento se alongam indefinidamente sobre a planicie illimitada, parecendo procurar nos arcanos do mais longinquo futuro as soluções dos problemas que vem tentando resolver desde as priscas eras do mais remoto passado.

[23] E' o que os arabes denominavam *uma expressão inarticulavel*, e o autor judeu Aben-Ezra *uma fracção que o homem não poderia pronunciar*.

Sendo o número 8 multiplicando e o 7 multiplicador, para calcular seu produto é necessário duplicar 8 até que a soma dos multiplicadores intermediários selecionados[29] (geralmente elementos da sequência $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$), resultem o valor do multiplicador 7.

Sobre a divisão Gabaglia afirma que entre outros derivados do verbo *ar,* ele também pode ter sido usado como equivalente a *fazer*. Seguindo sua principal referência (Eisenlohr), cita dois modos para calcular divisões, "o directo e o indirecto". O modo direto seria usado para os casos em que a divisão já tinha sido efetuada e registrada em alguma das tabelas que figuram no papiro. Pelo modo indireto "Ahmes fazia qualquer divisão, fosse o dividendo ou o divisor o quociente, inteiro ou fraccionario, ou mesmo dous d'estes", este método consiste em transformar a divisão em uma multiplicação. Gabaglia explica o procedimento em notação moderna, em outras palavras podemos dizer que para calcular o quociente q de D por d basta fazer a multiplicação $d \times q = D$.

A seção é finalizada com um elogio aos métodos empregados pelo escriba Ahmes nas operações de multiplicação e divisão, e que ao contrário do que Rodet afirma, o escriba sabia efetuar os cálculos que propunha resolver. A opinião de Gabaglia é compartilhada com Gillings (1982, p. 16, tradução nossa): "Se a multiplicação egípcia era tão desajeitada e difícil, como é que se explica o uso dessas mesmas técnicas entre os Gregos, no tempo Coptic, e mesmo no período Bizantino, mil ou mais anos mais tarde?"

O próximo tema abordado é a "Notação das fracções". Uma característica que facilmente pode ser observada e que evidentemente é comentada por Gabaglia, trata-se do uso de frações unitárias[30] na matemática egípcia antiga. Segundo o autor, os egípcios "eram forçados por qualquer razão phonetica ou grammatical que desconhecemos, a decompol-a em uma somma de fracções simples", ou seja, qualquer fração não unitária deveria ser reescrita como a soma das frações unitárias que fossem necessárias.

A fração $\frac{3}{4}$ por exemplo, é escrita no papiro como equivalente a $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$[31].

[29] Para destacar os multiplicadores intermediários que seriam somados ao seu lado era feita uma barra ou um ponto.

[30] Segundo Imhausen (2006), foi em estudos modernos que as frações egípcias passaram a ser geralmente descritas como frações unitárias (que possuem o numerador igual a 1). Gabaglia as chamava de "fracções simples".

[31] No problema n. 63.

Maspero diante desde colosso prodigioso, que é a estatua mais antiga até hoje achada, reconheceu ser a arte que a concebeu e talhou uma arte completa, senhora de si, segura de seus effeitos; e perguntou: quantos seculos não lhe tinham sido necessarios para chegar a tal gráo de madureza e perfeição? Identica pergunta irrompe dos labios de quem estudar os processos mathematicos do papyro Rhind: para escrever um trabalho semelhante, quantos seculos não foram preciso á sciencia!?

As paginas seguintes justificarão as linhas supra. Por emquanto, trataremos immediatamente do n. 61 do *fac-simile*, importante por conter a unica regra geral enunciada no papyro; e cuja razão de ser é a excepção da fração $^2/_3$ no systema egypcio.

Eis a tradução do trecho que consiste o n. 61.

«N.61	$^2/_3$	de	$^2/_3$	:	$^1/_3$	$^1/_9$	
	$^1/_3$	»	$^2/_3$	:	$^1/_6$	$^1/_{18}$	
	$^2/_3$	»	$^1/_3$	:	$^1/_6$	$^1/_{18}$	
	$^2/_3$	»	$^1/_6$	:	$^1/_{12}$	$^1/_{36}$	
	$^2/_3$	»	$^1/_2$	:	$^1/_3$		
	$^1/_3$	»	$^1/_2$	:	$^1/_6$		
	$^1/_6$	»	$^1/_2$	:	$^1/_{12}$		
	$^1/_{12}$	seu	$^1/_2$	:	$^1/_{24}$		
	$^1/_{12}$	vezes	$^2/_3$	:	$^1/_{18}$	$^1/_{54}$	$^1/_9$ seu $^2/_3$: $^1/_{18}$ $(^1/_{54})$
	$(^1/_5)$	seu quarto		:	$^1/_{20}$		
	$^1/_7$	$^2/_3$		:	$^1/_{14}$	$^1/_{42}$	
	$^1/_7$	sua metade			$^1/_{14}$		
	$^1/_{11}$	$^2/_3$			$^1/_{22}$	$^1/_{66}$,	seu $^1/_3$ $^1/_{33}$
	$^1/_{11}$	sua metade				$^1/_{22}$,	» $^1/_4$: $^1/_{44}$

Fazer os $^2/_3$ de uma fracção – si te dizem que é os $^2/_3$ de $^1/_5$, faz seu duas vezes, seu seis vezes.

Seu dos terços é isso(24). Fazer o mesmo para qualquer outra fracção que se apresente. »

A tabella acima mostra praticamente que para ter-se a metade de uma fracção simples, dobra-se o denominador: v.g. $^1/_{11}$, sua metade $^1/_{22}$; $^1/_7$, sua metade $^1/_{14}$; etc.; para o terço, triplica-se o denominador ($^1/_{11}$, seu terço $^1/_{33}$; $^1/_3$ de $^1/_2$ é $^1/_6$); para o quarto, quadruplica-se o denominador ($^1/_{11}$, seu quarto $^1/_{41}$ etc.).

D'esses exemplos se concluiria facilmente que para ter-se a fracção $^1/_n$ de uma outra fracção, ou o que é o mesmo para dividir uma fracção por um numero *n*, basta apenas

---

(24) Isto é: obtem-se $\frac{1}{2.5}$ e depois $\frac{1}{6.5}$; a somma $\frac{1}{2.5}+\frac{1}{6.5}$ é o resultado da multiplicação de $^2/_3$ por $^1/_5$. Na regra, «faz seu duas vezes» quer dizer duplica-se o denominador; «faz seu seis vezes» é sextuplica-se o denominador.

Gabaglia menciona que frações não unitárias “não eram de fato fracções, e sim divisões a effectuarem-se”, ou ainda, “significavam uma operação não terminada” e por este motivo a decomposição em frações unitárias era necessária. Além disso, tais frações caracterizavam “uma expressão inarticulável [...] uma fracção que o homem não poderia pronunciar”. A única fração não unitária admitida e frequentemente usada pelos antigos egípcios foi $\frac{2}{3}$, sobre ela, o autor afirma ser “a primeira fracção e a maior”.

Iremos um pouco além da exposição de Gabaglia quando se refere a representação das frações unitárias do papiro Rhind, complementamos seu texto com uma apresentação visual (figura 9) dessas frações[32], primeiramente no sistema numérico hieroglífico e a seguir em hierático.

A citação abaixo extraída de Robins e Shute (1987), elucida como era feita a representação das frações usando hieróglifos. Vejamos,

> Frações em hieróglifos eram, em geral, indicadas pelo emprego, acima do número, do sinal 𓂋, que representa pictograficamente uma boca e foneticamente a letra r. Supõe-se que r, neste contexto, significava “parte”, como na expressão moderna “n-ésima parte” para a fração $\frac{1}{n}$. (ROBINS; SHUTE., p. 12, 1987, tradução nossa)

Por outro lado, segundo Gabaglia, na escrita hierática do papiro o escriba Ahmes representava a mesma palavra “porção ou parte” por “um ponto acima do algarismo ou grupo de algarismos”. De fato quando observamos a imagem abaixo nota-se que os símbolos para as frações são compostos pela representação de seu denominador abaixo de um “ponto”, que é semelhante a um apóstrofo. Notamos ainda que algumas frações unitárias tinham seus próprios sinais, são elas $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, destacadas pelo quadro na figura 9.

O fato da existência de sinais especiais para as frações $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, não é comentado por Gabaglia, contudo, encontramos em Neugebauer (1969), interessantes apontamentos sobre o tema. Para este último autor, as frações unitárias egípcias constituem duas classes, a primeira das frações “naturais” e a

[32] Em alguns pontos deste trabalho, assim como Gillings (1982) e Robins e Shute (1987), usaremos uma notação alternativa para as frações unitárias, ou seja, usaremos uma barra sobre o denominador para representá-las. Por exemplo, a fração $\frac{1}{7}$ pode ser representada por $\overline{7}$, e a fração $\frac{2}{3}$ por $\overline{\overline{3}}$. Segundo Imhausen (2006), foi Neugebauer (1969), quem primeiramente adotou tal notação.

multiplicar o denominador por *n*. Esse preceito apresentava no systema fraccionario dos egypcios uma difficuldade séria, quando se tratava de $^2/_3$ que era a unica fracção *não simples* que elles então podiam enunciar; assim, por ex.; seja a terça parte de $^2/_3$, isto é, $^2/_9$, fracção complexa que não era acceita, e tinha de ser transformada em uma somma de fracções simples: $^1/_6 + ^1/_{18}$. E' por esse motivo que vem a regra, ensinando a multiplicar uma fracção por $^2/_3$, a qual se baseia na decomposição d'esta ultima fracção em $^1/_2 + ^1/_6$. Na verdade, temos:

$$\frac{1}{n} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n}.$$

Na tabella do original ha duas faltas, que se acham correctas, empregando-se o signal ( ), para indicar a restituição feita. Sobre a segunda falta nada ha a dizer; sobre a primeira, porém, Revillout faz algumas considerações, apresentando mais um argumento a favor da opinião que sustenta relativamente ao papyro Rhind, que lhe parece ser, como já dissemos, um caderno de alumno.

Segundo Revillout, a regra vem depois de muitos exemplos ($^2/_3$ de um terço, de um sexto, etc.) porque o alumno em um dos exemplos mostrara que não tinha comprehendido. O mestre depois de lhe ter dictado «$^1/_9$ (tomado) $^2/_3$ de vezes (faz):

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{54}»,$$

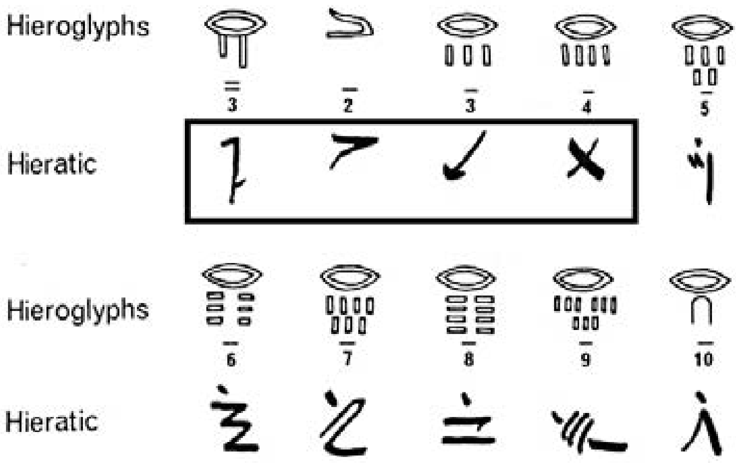
deu-lhe a mesma questão sob outra fórma «$^1/_9$, seu $^2/_3$? E o alumno não comprehendendo que devia ser a mesma cousa, escreveu sómente $\frac{1}{18}$.

E' uma simples conjectura a explicação de Revillout que apenas merece ser citada por ser mais um elemento favoravel a hypothese por elle formulada sobre o fim a que era destinado o trabalho de Ahmes. Não fôra isso, e nenhuma duvida haveria de se ter dado ahi um erro de cópia.

Na tabella, entre outras cousas que chamam a attenção, ha duas que não podemos deixar de passar sem uma nota especial. A primeira é que Ahmes sabia, o que aliás vê-se em muitos outros logares, que o valor de uma fracção não se altera, quanto se divide ambos os termos por um mesmo numero: assim, ao tomar a metade de $^2/_3$ que é $^2/_6$, escreve logo $^1/_3$ assim, elle exprime os dous terços de dous terços $\left(\text{isto é, } \frac{4}{9} = \frac{3}{9} + \frac{1}{9}\right)$ por $\frac{1}{3} \times \frac{1}{9}$. A segunda é que Ahmes conhecia o principio da ordem dos factores não alterar o producto, como se segunda das frações “algorítmicas”. Vejamos a explicação dada à primeira classe,

> Eu considero como frações “naturais” o pequeno grupo de partes fracionárias, que é representado por sinais especiais ou por expressões especiais desde a primeira, como $\bar{\bar{3}}, \bar{3}, \bar{2}$ e $\bar{4}$. Estas partes são unidades individuais que são consideradas conceitos básicos em um nível de igualdade com os números inteiros. Eles ocorrem em todos os lugares da vida diária, na contagem e medição. (NEUGEBAUER, 1969, p.75, tradução nossa, grifo do autor)

Figura 12 – Representação das dez primeiras frações em ambos os sistemas de numeração: hieroglífico e hierático.



Fonte: Robins e Shute (1987)

A outra classe, a das frações algorítmicas é resultante dos inevitáveis cálculos numéricos e menos relacionada a princípios conceitos fundamentais dos números. No entanto, há frações “algorítmicas” que se apresentam com facilidade, ou seja, originam-se diretamente da redução pela metade (método muito utilizado nos cálculos egípcios). Desse modo,

> podemos obter duas séries de frações, ambas diretamente derivadas das frações “naturais” pela consecutiva redução pela metade. Uma sequência é $\bar{\bar{3}}, \bar{3}, \bar{6}, \overline{12}$, etc., a outra $\bar{2}, \bar{4}, \bar{8}, \overline{16}$ etc. A importância dessas duas sequências é evidente em toda aritmética egípcia. (NEUGEBAUER, 1969, p. 75-76, tradução nossa, grifo do autor)

Particularmente a segunda sequência nos chama atenção pois as frações $\bar{2}, \bar{4}, \bar{8}, \overline{16}, \overline{32}, \overline{64}$ que são mencionadas por Gabaglia como subdivisões da póde ver dos resultados, de ${}^{1}/_{3}$ de ${}^{2}/_{3}$ e de ${}^{2}/_{3}$ de ${}^{1}/_{3}$ dados sob a mesma fórma ${}^{1}/_{6}\ {}^{1}/_{18}$.

10.– A primeira parte do trabalho de Ahmes principia com oito columnas, formando oito tabellas na edição de Eisenlohr, e dando a reducção a fracções simples de fracções da forma ${}^{2}/_{2n+1}$, sendo n < 50.

A necessidade de semelhantes tabellas é evidente, desde que se lembre o uso egypcio de somente calcular sobre fracções simples.

Não eram necessarias tabellas de reducção para fracções da fórma ${}^{2}/_{2n}$, porque immediatamente e de accordo com o conhecimento que já possuiam, os egypcios podiam reduzil-as a ${}^{1}/_{n}$; assim tambem sabiam que fracções de fórma ${}^{m}/_{2n+1}$ se reduzem á somma de fracções da fórma${}^{1}/_{2n+1}$ e ${}^{2}/_{2n+1}$. De sorte que em ultima analyse a transformação de uma fracção complexa em fracções simples ficava limitada ás de fórma ${}^{2}/_{2n+1}$.

O exemplo seguinte mostra com nossos algarismos a disposição dada por Ahmes a semelhante reducção: refere-se á fracção ${}^{2}/_{13}$.

$$(13)\quad \frac{1}{8}\qquad \frac{1}{52}\qquad \frac{1}{104}$$

$$1\ {}^{1}/_{2}\ \ {}^{1}/_{8}\ \ {}^{1}/_{4}\ \ {}^{1}/_{8}$$

	${}^{1}/_{2}$	$6\ {}^{1}/_{2}$	
	${}^{1}/_{4}$	$3\ {}^{1}/_{4}$	
·	${}^{1}/_{8}$	$1\ {}^{1}/_{2}$	${}^{1}/_{8}$
·	4	${}^{1}/_{52}$	${}^{1}/_{4}$
·	8	${}^{1}/_{101}$	${}^{1}/_{8}$

A primeira linha contém o denominador da fracção a reduzir e as fracções simples obtidas; a segunda dá os resultados da multiplicação de cada fracção simples pelo denominador da fracção a reduzir.

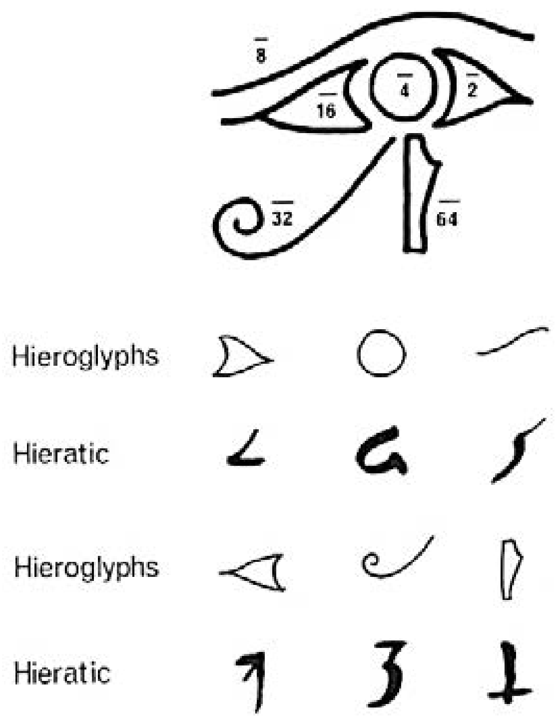
A interpretação das outras linhas têm sido objecto de discussão. Para uns, traduzem calculos necessarios ao proprio processo de reducção; para outros, e talvez com razão, verificam os resultados obtidos, e exprimem em detalhe o processo da multiplicação.

Com effeito as ultimas linhas parecem nada mais exprimir do que a multiplicação do denominador da fracção a reduzir pelas fracções simples em que ella se decompoz.

Devemos notar que para obter ${}^{1}/_{8}$ de 13, Ahmes faz primeiro ${}^{1}/_{2}$ e depois ${}^{1}/_{4}$ de 13. Igualmente, sabendo que 4 vezes 13 é 52, conclue que $13 \times {}^{1}/_{52}$ é ${}^{1}/_{4}$; e sabendo que 8 vezes 13 é 104, conclue que $13 \times {}^{1}/_{104}$ é ${}^{1}/_{8}$.

A comparação do trabalho de Ahmes com papyro grego de Akhmim mostra que esse unidade de medida egípcia "«bescha»" (*hekat)*[33], "são conhecidas como frações do Olho de Hórus, porque elas foram escritas com sinais distintos que se assemelham as partes do olho, conhecido como *wedjat*, do deus com cabeça de falcão, Horus."(ROBINS; SHUTE., 1987, p. 14, tradução nossa, grifo do autor). A figura abaixo ilustra a semelhança entre as partes do Olho de Hórus com os símbolos hieroglíficos das frações da sequência aqui destacada.

Figura 13 – Partes do Olho de Hórus e os símbolos (em hieróglifos e hierático) para as frações da sequência $\overline{2}, \overline{4}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{32}, \overline{64}$.



Fonte: Robins e Shute (1987)

Segundo a lenda da mitologia egípcia o Olho do deus Hórus foi ferido e arrancado pelo terrível deus Seth durante uma batalha. Posteriormente o olho perdido teria sido restaurado por Thoth (o deus com cabeça de íbis), excetuando uma única parte que permaneceu para sempre perdida.

Robins e Shute (1987) apresentam uma conjectura sobre a relação dessa lenda com uma finalidade matemática para a sequência $\overline{2}$, $\overline{4}$, $\overline{8}$, $\overline{16}$, $\overline{32}$ e $\overline{64}$. Vejamos,

[33] "Bescha" é equivalente à hekat, conforme exposto na página 45 deste trabalho.

ultimo tambem principia com tabellas fraccionarias.

Em vez de ser, como no egypcio o quociente de 2 pelos numeros impares de 3 a 99, o grego apresenta tabellas de multiplicação, onde dá os productos successivos pela mesma fracção de uma serie completa de numeros inteiros (dede 1 até 1000, ou desde 1 até o numero *homonymo*), antes de passar aos productos por uma outra fracção.

Os valores que se encontram nos dous documentos são muitas vezes differentes, sendo quasi sempre mais elegantes os resultados do papyro grego. Assim, as fracções $^{2}/_{13}$ e $^{2}/_{19}$ são representadas por Ahmes respectivamente sob as fórmas:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104} \quad \text{e} \quad \frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114};$$

emquanto que no papyro de Akhmim são expressas por

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{91} \quad \text{e} \quad \frac{1}{10}+\frac{1}{190}$$

Igualmente deve-se notar que o grego não faz ao contrario egypcio, da prova de seus calculos.

A tabella seguinte dá os resultados das reducções que constituem a primeira parte do papyro Rhind.

> As frações $\overline{2}$, $\overline{4}$, $\overline{8}$, $\overline{16}$, $\overline{32}$ e $\overline{64}$ do Olho de Hórus em terminologia moderna formam uma progressão geométrica convergente de seis termos com o primeiro termo igual à razão comum. [...] Hoje em dia é fundamental para mostrar que a soma de uma série geométrica de *n* termos é $S = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$, na qual *a* é o primeiro termo e *r* é a razão comum. Neste caso, uma vez que o primeiro termo e a razão comuns são iguais a $\frac{1}{2}$, a soma dos seis termos é dada por $S_6 = \frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]}{\left(1-\frac{1}{2}\right)} = 1 - \frac{1}{64}$ e a soma ao infinito é dada por $S = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)} = 1$, mostrando que a série converge para 1. (ROBINS; SHUTE., 1987, p. 14-15, tradução nossa)

Afirmando que os antigos egípcios eram familiarizados com séries geométricas[34] (ROBINS; SHUTE., 1987, p.14), os autores mencionam que se a lenda do Olho de Hórus realmente tinha uma conotação matemática, é possível que a falta no olho fosse curada pela restauração dos $\overline{64}$ desaparecidos, já que $S = \overline{2} + \overline{4} + \overline{8} + \overline{16} + \overline{32} + \overline{64} + (\overline{64}) = 1$.

O longo parágrafo que inicia a próxima seção do texto de Gabaglia "9. Algumas propriedades das fracções", constitui um generoso elogio ao escriba Ahmes. Segundo o autor "E' realmente espantoso o conhecimento mathematico do autor do papyro Rhind, si attendermos a longinqua época da sua composição e si o comparamos com a sciencia dos mais antigos entre os gregos". Para Gabaglia é inevitável que estudantes dos procedimentos matemáticos presentes no papiro Rhind reflitam sobre a seguinte questão: "para escrever um trabalho semelhante, quantos seculos foram precisos a sciencia!?". Seu entusiasmo é claramente exposto no trecho "fica-se sob um sentimento de admiração tão intenso, quanto o que apodera-se de todos os viajantes que vão até as grandes pyramides".

Feito o grandioso louvor ao papiro e seu copista, Gabaglia afirma "As paginas seguintes justificarão as linhas supra", é o que verificaremos ao percorrer as próximas linhas de seu texto.

Ainda na mesma seção um único problema (n. 61) é detalhadamente estudado e comentado já que é "importante por conter a unica regra geral enunciada no papyro; e cuja razão de ser é a excepção da fracção ${}^{2}/_{3}$ no systema egypcio". Sobre esse problema Gabaglia apresenta uma tradução e uma explicação do procedimento de Ahmes, assim como o resultado do cálculo.

Gillings (1982), ao contrário de Gabaglia, separa o problema em duas partes

---

[34] Para os autores a resolução do problema n. 79 evidencia esse conhecimento.

2|3 = 2|3
2|5 = 1|3   1|15
2|7 = 1|4   1|28
2|9 = 1|6   1|18
2|11 = 1|6   1|66
2|13 = 1|8   1|52   1|104
2|15 = 1|10   1|30
2|17 = 1|12   1|51   1|68
2|19 = 1|12   1|76   1|114
2|21 = 1|14   1|42
2|23 = 1|12   1|276
2|25 = 1|15   1|75
2|27 = 1|18   1|54
2|29 = 1|24   1|58   1|174   1|232
2|31 = 1|20   1|124   1|155
2|33 = 1|22   1|66
2|35 = 1|30   1|42
2|37 = 1|24   1|111   1|296
2|39 = 1|26   1|78
2|41 = 1|24   1|246   1|328
2|43 = 1|42   1|86   1|129   1|301
2|45 = 1|30   1|90
2|47 = 1|30   1|141   1|470
2|49 = 1|28   1|196
2|51 = 1|34   1|102
2|53 = 1|30   1|318   1|795
2|55 = 1|30   1|330
2|57 = 1|38   1|114
2|59 = 1|36   1|236   1|531
2|61 = 1|40   1|244   1|488   1|610
2|63 = 1|42   1|126
2|65 = 1|39   1|195
2|67 = 1|40   1|335   1|536
2|69 = 1|46   1|138
2|71 = 1|40   1|568   1|710
2|73 = 1|60   1|219   1|292   1|365
2|75 = 1|50   1|150
2|77 = 1|44   1|308
2|79 = 1|60   1|237   1|316   1|790
2|81 = 1|54   1|162
2|83 = 1|60   1|332   1|415   1|498
2|85 = 1|51   1|255
2|87 = 1|58   1|174
2|89 = 1|60   1|356   1|534   1|890
2|91 = 1|70   1|130
2|93 = 1|62   1|186
2|95 = 1|60   1|380   1|570
2|97 = 1|56   1|679   1|776
2|99 = 1|66   1|198

11.– Não existe no papyro a minima informação sobre o modo de obter a decomposição acima; nem sobre o seu autor ou autores. Somente o que de certo hoje se pode affirmar é o emprego tradiccional de tabellas semelhantes que provavelmente ião sendo desenvolvidas e modificadas pouco a pouco.

De diversas maneiras pode-se transformar uma fracção dada em uma somma de fracções simples; de sorte que notaveis eruditos[25] tem tentado restituir o processo de que servio-se Ahmes para alcançar os resultados que dá. Em geral, elles acharam apenas processos particulares que se applicão aquellas fracções considerando-se distribuidas em diversos grupos; porém Bobynin descobriu um processo que se applica a todos os resultados de Ahmes e que pode ser considerado como o que foi empregado, principalmente si

[25] Entre outros: Eisenlohr e Cantor na edição do papyro; Favaro nos *Atti* da Academia de Sciencias de Modena em 1879; Bobynin em uma monographia russa publicada em Moscow em 1882 e em um artigo da Bibliotheca Mathematica em 1890; Loria em artigos na mesma revista nos annos de 1892 e 1893.

(n. 61 e n. 61 B), considerando a primeira como uma tabela de multiplicação das frações $\bar{\bar{3}}, \bar{3}, \bar{2}$ por algumas frações unitárias. Essa tabela é seguida por um cálculo contido na segunda parte, ou seja, n. 61B. A figura abaixo é um recorte do papiro Rhind, nela podemos observar à direita a primeira parte do problema (n.61), e no canto superior esquerdo a segunda parte (n.61B).

Figura 14 – Problema n. 61 e n. 61B do papiro Rhind

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

Seguindo o texto de Gabaglia observamos que após a apresentação da primeira parte do problema, figura o seguinte trecho “Fazer os $2/3$ de uma fracção – si te dizem que é os $2/3$ de $1/5$, faz seu duas vezes, seu seis vezes. Seu dos terços é isso. Fazer o mesmo para qualquer outra fracção que se apresente”, essa afirmação nada mais é do que a segunda parte (61B) do problema, além disso, é aqui que podemos encontrar a “unica regra geral”[35] enunciada no papiro.

Em outras palavras Gabaglia menciona que pelos exemplos dados na tabela é possível concluir que para obter-se a fração $1/m$ de uma outra fração unitária qualquer $1/n$, basta calcular o produto entre elas, ou seja, $\frac{1}{n} \times \frac{1}{m} = \frac{1}{nm}$. Já a regra

[35] Adiante veremos outro caso em que é enunciada uma regra geral.

attendermos ser elle explicado por Leonardo de Piza no *Liber Abbaci* sob o titulo *regula universalis in disgregatione partium numerorum* e si attendermos a persistencia durante muitos seculos de certos processos e regras de calculo, do que ha exemplos nesse mesmo autor.

A generalidade é o caracter distinctivo desse processo que se applica com identico sucesso a todas as fracções. Para attingir o fim, Leonardo serve-se de numerosas transformações com auxilio de multiplicadores que são numeros multiplos e contem o maior numero possivel de divisores; os termos da fracção a reduzir são multiplicados por um desses numeros multiplos, escolhido com a condição de ficar comprehendido entre o duplo do denominador da fracção e a sua metade. Em seguida o producto do numerador por esse multiplicador é dividido pelo denominador primitivo e o quociente obtido, composto de um inteiro e de uma fracção, é dividido pelo mesmo multiplicador. A fracção será assim expressa ou em fracções simples, ou em fracções cujos numeradores podem ser decompostos em partes que se reduzem com os factores do denominador, de modo que finalmente se terá uma somma de fracções simples.

A formula que segue exprime o processo em questão:

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{am}{b} : m = \left(q + \frac{r}{b}\right) : m = \frac{q}{m} + \frac{r}{bm},$$

onde

$$\frac{b}{2} < m < 2b$$

e q é a parte inteira do quociente em am por b, contida entre $\frac{a}{2}$ e $2a$, e r o resto.

E' claro que quanto maior for o numero de divisores do multiplicador, tanto mais facil e mais rapido é achar as fracções simples correspondentes.

Applicado esse processo ao caso particular das fracções de forma $\frac{2}{2n+1}$, $n < 50$, nota-se que m estando entre os limites $\frac{b}{2}$ e b, q será sempre igual a 1, isto é, a primeira das fracções simples será $\frac{1}{m}$.

Examinando-se os resultados dados na tabella de Ahmes, vê-se que os denominadores de todas as primeiras fracções simples estão dentro das condições indicadas, isto é, representam numeros compostos contidos entre o denominador da fracção a reduzir e sua metade. Consequentemente, empregando esses numeros para transformar em fracções simples as fracções correspondentes, ter-se-hão todos os resultados de Ahmes. Assim, por exemplo:

geral pode ser entendida do seguinte modo, para calcular os ${}^{2}/_{3}$ de uma fração unitária qualquer ${}^{1}/_{n}$, calcula-se o produto entre elas, no entanto, ${}^{2}/_{3}$ deve ser decomposto[36] em $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)$. Portanto,

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n}$$

Essa decomposição facilitava os cálculos egípcios pois evitava que frações não unitárias fossem produzidas. Tomemos o próprio cálculo proposto no problema n. 61 que propõe encontrar os ${}^{2}/_{3}$ de ${}^{1}/_{5}$. Em um procedimento direto faríamos $\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$, porém, o resultado obtido não foi uma fração unitária e por isso não era considerado correto. Por outro lado se fizermos $\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$, como dita a regra o resultado obtido era admitido.

Para Gillings (1982), a *tabela dois terços* seria, de um modo geral, suficiente para todas as necessidades dos antigos escribas, sua função consistia em servir de referência para problemas posteriores. Infelizmente o dano no tecido do papiro ocasionou a perda de algumas linhas da tabela (ver figura 14), deixando abertura para diversas hipóteses sobre sua verdadeira finalidade.

Ainda discorrendo sobre frações unitárias, Gabaglia inicia a seção "10. Tabellas para se obter ${}^{2}/_{2n+1}$", mencionando que a primeira parte do papiro Rhind é composta por "oito columnas, formando oito tabellas na edição de Eisenlohr". Essas tabelas apresentam a redução de frações da forma ${}^{2}/_{2n+1}$ (fração ímpar), com $n<50$. O autor destaca que "A necessidade de semelhantes tabellas é evidente, desde que se lembre o uso egypcio de somente calcular sobre fracções simples", contudo deixa para a próxima seção uma longa discussão sobre a formação dessas tabelas.

Por enquanto destacamos que Gabaglia apresenta as oito tabelas do papiro reunidas em duas colunas da página 31 de seu livro. Notamos que em sua tabela a menor fração a ser reduzida é ${}^{2}/_{99}$, porém, ocorre que após a descoberta dos fragmentos do Museu do Brooklyn foi possível concluir que Ahmes ainda fez uma

[36] É esse procedimento que deve ser entendido por "faz seu duas vezes, seu seis vezes".

$$\frac{2}{5} = \frac{2\cdot 3}{5} : 3 = \left(1 + \frac{1}{5}\right) : 3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

$$\frac{2}{35} = \frac{2\cdot 30}{35} : 30 = \left(1 + \frac{5}{7}\right) : 30 = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$$

$$\frac{2}{61} = \frac{2\cdot 40}{61} : 40 = \frac{1}{40} + \frac{19}{61\cdot 40} = \frac{1}{40} + \frac{10+5+4}{61\cdot 40} = \frac{1}{40} + \frac{1}{244} + \frac{1}{488} + \frac{1}{610}$$

$$\frac{2}{95} = \frac{2\cdot 60}{95} : 60 = \frac{1}{60} + \frac{25}{95\cdot 60} = \frac{1}{60} + \frac{5}{19\cdot 60} = \frac{1}{60} + \frac{2}{19\cdot 60} + \frac{3}{19\cdot 60} = \frac{1}{60} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570}$$

Damos nas proprias palavras a explicação da regra por Leonardo de Piza:

«Est enim in similibus quedam alia universalis regula, scilicet ut invenias numerum, qui habeat in se multas regulas, ut 12, vel 24, vel 36, vel 48, vel 50, vel quemlibet alium numerum, qui sit maior meditate numeri existenti sub virgula, vel minor duplo ipsius: ut pro prescriptis $^{17}/_{29}$ accipiamus 24, que sunt plus meditate de 29; et multiplica igitur 17, que sunt super virgulam per 24, erunt 408; que divide per 29 et per 24, exibun $\frac{2}{29}\frac{14}{24}$: deinde vide de 14, que partes sunt de 24: sunt enim $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{12}\frac{1}{2}$, quas serva pro partibas de 17|29; et vide iterum de 2 que sunt super 29, que partes sint de 24: sunt enim $^{1}/_{12}$ ipsorum, pro quo habebis $\frac{1}{12}\frac{0}{29}$ in eisdem partibus de $^{17}/_{19}$; quia $^{2}/_{29}$ de $^{1}/_{24}$ equantur $^{2}/_{24}$ de $^{1}/_{29}$ que sunt $\frac{1}{12}\frac{0}{29}$, scilicet $^{1}/_{348}$: ergo pro $^{17}/_{29}$ habebis $\frac{1}{348}\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{348}\frac{1}{12}\frac{1}{2}$ ut superius invenimus»[26].

Loria, que parece não conhecer essa descoberta de Bobynin, apresentou em um artigo publicado na Bibliotheca de Mathematica de 1892 uma interessante explicação do modo porque elle acha que a tabella póde ter sido construida; vamos resumil-a.

Loria achando extremamente provavel que a tabella não tenha sido construida por uma só pessoa, nem em uma só época, mas ao contrario tenha passado por numerosas phases de desenvolvimento antes de alcançar a fórma conservada por Ahmes, pensa que a sua composição foi feita por processos e criterios diversos; e attribue os resultados escolhidos ou a acaso ou a motivos praticos, pois Ahmes sabia que uma fracção de fórma $^{2}/_{2n+1}$ póde decompôr-se de diversas maneiras em fracções simples, como se demonstra com o problema 33 onde elle emprega para $^{2}/_{77}$ uma decomposição differente da que se acha na tabella.

Sob esse ponto de vista, Loria examina accuradamente a tabella, procurando algum caracter commum ás decomposições propostas que descubra a razão da escolha dos resultados n'ella inscriptos, em lugar dos outros a que se póde chegar. Do exame feito,

[26] Scritti di Leonardo Pisano publicati da B. Boncompagni. Vol. 1. Roma – 1857.

última redução, tomando a fração $^{2}/_{101}$.

Fazemos um último comentário sobre essa seção evidenciando a comparação entre o papiro Rhind e o papiro grego de Akhmim, segundo Gabaglia ambos os papiros iniciam com tabelas fracionárias e igualmente os dois documentos apresentam uma prova de seus cálculos, no entanto, “Os valores que se encontram nos dous documentos são muitas vezes differentes, sendo quasi sempre mais elegantes os resultados do papyro grego”.

A seguir se inicia a mais longa seção do § 3 do livro de Gabaglia, como “Não existe no papyro a minima informação sobre o modo de obter a decomposição acima” (que é a tabela da p. 31 de seu livro), o autor discorre sobre duas hipóteses de sua composição. A primeira das conjecturas é de autoria do russo Victor Victorovich Bobynin (1882; 1890), e a segunda do italiano Gino Loria (1892; 1893).

Destacamos a própria citação de Gabaglia para elucidar a hipótese de Bobynin, autor da descoberta de um tipo de fórmula geral para a decomposição de qualquer fração ímpar em frações unitárias,

> “Bobynin descobriu um processo que se applica a todos os resultados de Ahmes e que pode ser considerado como o que foi empregado, principalmente si attendermos ser elle explicado por Leonardo de Piza no *Liber Abbaci* sob o titulo *regula universalis in disgregatione partium numerorum* e si attendermos a persistencia durante muitos seculos de certos processos e regras de calculo, do que ha exemplos nesse mesmo autor” (GABAGLIA, 1899, p. 32)

O matemático italiano Leonardo de Piza também conhecido por Fibonacci (filho de Bonaccio), viveu em Piza na Itália entre os séculos XII e XIII. Pela época em que viveu podemos concluir que não estudou os procedimentos matemáticos do papiro Rhind pelo contato direto com o documento, sendo sua descoberta somente na segunda metade do século XIX, mas acreditamos ser possível que rudimentos do uso das frações unitárias, principalmente pelos gregos, tenham perdurado ao longo dos séculos, chegando assim ao seu conhecimento.

Gabaglia apresenta em seu texto (1899, p. 33-34) a própria citação, em latim, que contém a explicação da regra geral elaborado por Fibonacci, além disso, a resume na seguinte expressão,

$$“\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{am}{b} : m = \left(q + \frac{r}{b}\right) : m = \frac{q}{m} + \frac{r}{bm}”,$$

conclue que as decomposições podem ser referidas a poucos principios que explica á moderna, com os nossos symbolos e a actual technica algebrica, e os quaes, elle insinua, talvez tenhão sido os empregados na confecção da tabella.

Examinando os resultados apresentados por Ahmes, e separando apenas as fracções $^2/_{35}$ e $^2/_{91}$ de que mais tarde se occupou, Loria reconheceu imediatamente:

1.º Cada fracção do typo $^2/_{2n+1}$ apresenta-se decomposta em fracções simples que todas, menos uma, tem a forma $^2/_{2(n+1)x}$, sendo x um numero inteiro positivo.

2.º A fracção simples que não assume a ultima fórma, multiplicada por $2n+1$, dá um producto comprehendido entre 1 e 2.

Em seguida, e baseado nas observações que acabão de ser feitas, Loria considerou separadamente as *decomposições binomias*, as *trinomias* e as *quadrinomias* e obteve as seguintes conclusões:

a) Suppondo que se queira exprimir $^2/_{2n+1}$ em duas fracções simples, uma das quaes tenha para denominador $(2n+1)x$, x sendo um numero inteiro a determinar, recorre-se á identidade:

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)x} + \frac{2x-1}{(2n+1)x}$$

que resolve o problema, comtanto que se determine x de modo a ser simples a ultima fracção. Note-se desde já que esta fracção multiplicada por $2n+1$ dá para produto $2 - {}^1/_x$, isto é um numero comprehendido entre 1 e 2, comfórme a 2ª observação.

Se $2n+1$ é um numero primo, para que

$$\frac{2x-1}{(2n+1)x}$$

seja uma fracção simples, deve $2n+1$ ser um multiplo de $2x-1$. Fazendo a hypothese mais simples, isto é:

$$2x-1 = 2n+1$$

obtem-se

$$x = n+1$$

e d'ahi a decomposição:

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)(n+1)} + \frac{1}{n+1};$$

onde

$$“\frac{b}{2} < m < 2b”,$$

e “q é a parte inteira do quociente de *am* por *b*, contida entre $\frac{a}{2}$ e $2a$, e *r* o resto”. Após esta exposição Gabaglia dá o exemplo da decomposição das frações $\frac{2}{5}, \frac{2}{35}, \frac{2}{61}$ e $\frac{2}{95}$ usando a fórmula acima.

Por outro lado Loria, autor da segunda hipótese, “parece não conhecer essa descoberta de Bobynin” e apresenta “uma interessante explicação do modo porque elle acha que a tabella póde ter sido construída”. Segundo Gabaglia, Loria concluía ser “provavel que a tabella não tenha sido construida por uma só pessoa, nem em uma só época” e por isso “pensa que sua composição foi feita por processos e criterios diversos”.

Loria, acreditando que a composição da tabela foi feita por processos distintos e critérios diversos, inicialmente separa as frações $\frac{2}{35}$ e $\frac{2}{91}$ do restante da tabela e chega às seguintes conclusões imediatas:

1.º Na decomposição de uma fração do tipo $\frac{2}{2n+1}$ em frações unitárias, pelo menos uma destas tem a forma $\frac{2}{(2n+1)x}$, sendo x um número inteiro positivo[37].

2.º Se multiplicadas por $2n + 1$, as frações simples que não possuem essa forma, resultam em um produto entre 1 e 2.

Segundo Gabaglia, após chegar a estas duas conclusões Loria procede seu estudo considerando as decomposições em três classes distintas, as binomiais, as trinomiais e as quadrinomiais. Mais uma vez o que autor chega a interessantes conclusões, são elas:

a) Para decompor uma fração $\frac{2}{(2n+1)}$ em duas frações unitárias, basta usar a identidade $\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)x} + \frac{2x-1}{(2n+1)x}$, x sendo um número inteiro a determinar. Neste caso, a fração pode ser decomposta em frações unitárias diferentes mas que determinam o mesmo valor. Se $(2n + 1)$ for um número primo basta usar a identidade $\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)(n+1)} + \frac{1}{n+1}$.

---

[37] Na página n. 36 do livro de Gabaglia (1899), o denominador da expressão $\frac{2}{(2n+1)x}$ aparece erroneamente escrito $2(n + 1)x$.

fazendo successivamente $n = 2, 3, 5, 11$ obtem-se respectivamente as decomposições que se vêm em Ahmes. As outras fracções correspondentes a um valor primo de $(2n + 1)$ são decompostas em mais de duas fracções simples.

Se $2n + 1$ não é um numero primo, igualando-se $2x - 1$ a um qualquer dos factores de $2n + 1$, obtem-se em correspondencia outras tantas fórmas de decomposição; tendo por tanto o problema mais de uma solução. Assim por exemplo, seja a fracção $^2/_{55}$, onde $n = 27$, e onde $2n + 1$, i. é 55, tem dous factores primos, differentes de 1, a saber 5 e 11. Por consequencia, duas soluções: a primeira fazendo $2x - 1 = 5$, ou $x = 3$; e a segunda fazendo $2x - 1 = 11$, ou $x = 6$. Então tem-se indifferentemente:

$$\frac{2}{55} = \frac{1}{55 \cdot 3} + \frac{6 - 1}{55 \cdot 3} = \frac{1}{165} + \frac{1}{33}$$
$$\frac{2}{55} = \frac{1}{55 \cdot 6} + \frac{12 - 1}{55 \cdot 6} = \frac{1}{330} + \frac{1}{30}$$

A segunda é que está no papyro; qual o motivo da preferencia? E' o que Loria não quiz ou não poude responder.

As decomposições trinomias, usadas por Ahmes, em que $2n + 1$ não é primo, tomam uma das formas a que se chega por esse modo.

b) Passando a estudar as decomposições trinomias, Loria observa que

$$\frac{2}{2n + 1} - \frac{1}{(2n + 1)x} - \frac{1}{(2n + 1)y} = \frac{2xy - (x + y)}{(2n + 1)xy},$$

ou

$$\frac{2}{2n + 1} = \frac{1}{(2n + 1)x} + \frac{1}{(2n + 1)y} + \frac{1}{(2n + 1) \cdot \frac{xy}{2xy - (x + y)}};$$

de sorte que, para resolver o problema, basta escolher para x e y dous valores differentes na serie $2, 3, 4 \dots$ taes que $2n + 1$ seja um multiplo do denominador da fracção $\frac{xy}{2xy - (x+y)}$, supposta reduzida a expressão mais simples. Note-se que o ultimo termo da ultima igualdade multiplicado por $2n + 1$ dá

$$2 - \frac{x + y}{xy}$$

numero comprehendido entre 1 e 2, como quer a 2.ª observação.

b) As decomposições de $\frac{2}{2n+1}$ em três frações unitárias podem ser feitas seguindo a identidade $\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)x} + \frac{1}{(2n+1)y} + \frac{1}{(2n+1)\cdot\frac{xy}{2xy-(x+y)}}$, desde que $x \neq y$ e pertencentes à série $2, 3, 4, \ldots$, tais que $2n + 1$ seja múltiplo de $2xy - (x + y)$. Do mesmo modo a decomposição pode resultar em diferentes frações unitárias que determinam o mesmo valor.

c) Para estabelecer uma decomposição quadrinomia, ou seja, em quatro frações unitárias, emprega-se o uso da identidade $\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)x} + \frac{1}{(2n+1)y} + \frac{1}{(2n+1)z} + \frac{1}{(2n+1)+\frac{xyz}{2xyz-(yz+zx+xy)}}$, sendo $x \neq y \neq z$ e pertencentes à série $2, 3, 4, \ldots$. Esse processo de decomposição também conduz a diversas soluções.

d) Quanto as duas frações, $\frac{2}{35}$ e $\frac{2}{91}$, inicialmente excluídas, "Loria pensa que ellas se apresentam tão expontaneamente que foram aceitas de preferencia a quaesquer outras obtidas por processos geraes".

Assim Gabaglia finaliza a exposição da hipótese de Loria. Sem muitos comentários o autor dá uma sucinta opinião sobre o assunto: "A comparação das hypotheses de Bobynin e de Loria mostra a vantagem da do primeiro que parece ter resolvido a questão", a qual concordamos principalmente pela generalidade da regra de Fibonacci explicada por Bobynin, fazendo a decomposição de todas as frações da tabela sem a necessidade de agrupá-las em classes diferenciadas.

Antes de finalizar este assunto consideramos válido destacar alguns pontos relevantes sobre as frações egípcias. Em primeiro lugar, nos parece que Ahmes sabia efetuar a simplificação de frações, pois sabia o resultado das divisões equivalentes. Não são poucos os casos em que há troca de $\frac{2}{6}$ por $\frac{1}{3}$, por exemplo, dispensando uma eventual decomposição ou novos cálculos desnecessários.

As duas tabelas que aqui comentamos foram um meio de simplificar os cálculos dos antigos egípcios, além de servirem de apoio e referência para diversos problemas do papiro Rhind. Destacamos que outros antigos documentos matemáticos também possuíam suas tabelas de frações, o Rolo de Couro e papiro grego Akhmim podem ser tomados como exemplo.

Embora exista uma ampla controvérsia sobre as vantagens e desvantagens dessa técnica de cálculo não restam dúvidas sobre a grande capacidade dos antigos

Diversas soluções se obtem pela applicação desse processo á decomposição de fracções da fórma ${}^{2}/_{2n+1}$ em fracções simples; e essa applicação se torna facil e evita qualquer ensaio, formando-se, como fez Loria, uma tabella dos valores da funcção:

$$f(x,y) = \frac{xy}{2xy - (x+y)}$$

Assim, querendo-se a decomposição trinomia de ${}^{2}/_{13}$, busca-se na tabella a que se acaba de referir, os valores de $\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})$ tendo para denominador 13; acham-se por exemplo os dous seguintes:

$$f(5,2) = {}^{10}/_{13} \text{ e } f(8,4) = {}^{8}/_{13}$$

então tem-se as duas seguintes soluções, a segunda das quaes foi a que empregou Ahmes:

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{13 \cdot 5} + \frac{1}{13 \cdot 2} + \frac{1}{13 \cdot {}^{10}/_{13}} = \frac{1}{65} + \frac{1}{26} + \frac{1}{10}$$

e

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{13 \cdot 8} + \frac{1}{13 \cdot 4} + \frac{1}{13 \cdot {}^{8}/_{13}} = \frac{1}{104} + \frac{1}{52} + \frac{1}{8}$$

Todas as decomposições trinomias dadas no papyro podem directamente serem obtidas desse modo.

c) Para estabelecer a decomposição quadrinomia, Loria emprega a identidade:

$$\frac{2}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)x} + \frac{1}{(2n+1)y} + \frac{1}{(2n+1)z} + \frac{1}{(2n+1) + \frac{xyz}{2xyz - (yz + zx + xy)}}$$

onde deve-se empregar para x, y, z valores entre si differentes, da serie $2, 3, 4$ ..., e taes que a fracção

$$F(x,y,z) = \frac{xyz}{2xyz - (yx + zx + xy)}$$

reduzida á expressão mais simples, tenha para denominador $2n+1$ ou um seu submultiplo. Para o que é util servir-se de uma tabella previamente construida que dê os valores de $F(x,y,z)$.

egípcios em resolver problemas matemáticos utilizando frações unitárias. No momento não iremos discutir detalhadamente o assunto, já que o retomaremos nas considerações finais, por enquanto nos limitamos a deixar que o leitor reflita sobre a citação de Robins e Shute (1987),

> Em nenhum lugar foi maior a habilidade e a versatilidade demonstradas na implantação de frações unitárias. Esta foi uma vez a glória e o espartilho da metodologia egípcia; alguns dos usos persistiram nos tempos Gregos e Romanos. (ROBINS; SHUTE., 1987, p. 58-59, tradução nossa)

Finalmente é na seção “12. Divisão em partes iguaes” que Gabaglia inicia o estudo específico dos problemas do papiro Rhind. Neste trecho o autor se propõe a comentar os seis primeiros “cujo objetivo é repartir em partes iguais um certo numero de pães por 10 pessoas”, em outras palavras, estes problemas tratam da divisão dos números $1, 3, 6, 8$ e 9 por 10. Nota-se que os números 2, 4 e 5 não foram divididos, Gabaglia afirma que Ahmes os excluiu provavelmente porque sabia das seguintes equivalências $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ e $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, sendo que a equivalente (em frações unitárias) desta em frações pode ser obtida diretamente da tabela que compõe o início do papiro.

Esses seis problemas eram “de vantagem na pratica por ser decimal a numeração egypcia” e localizam-se na folha mais deteriorada do papiro, situados entre as partes onde houve a separação das duas grandes peças BM 10057 e BM 10058 e nos fragmentos do Museu do Brooklyn (ver figura 5), de modo que “só o ultimo (divisão de 9 pães por 10 pessoas) acha-se integramente conservado no papyro; a sua comparação com os restos mutilados dos outros permitte, porém, a restauração completa de todos elles”.

Figura 15 – Problema n. 6 do papiro Rhind

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

Esse processo de decomposição conduz a diversas soluções; assim por exemplo, querendo-se decompor $^2/_{29}$ em quatro fracções simples, deve-se procurar os valores de $F(x,y,z)$ que tem para denominador 29 na tabella para tal fim feita. Acham-se os seguintes:

$$F(2,3,5) = \frac{30}{29}; F(2,6,8) = \frac{24}{29}; F(4,5,10) = \frac{20}{29}$$

d'onde:

$$\frac{2}{29} = \frac{1}{58} + \frac{1}{87} + \frac{1}{95} + \frac{1}{30}$$

$$\frac{2}{29} = \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232} + \frac{1}{24}$$

$$\frac{2}{29} = \frac{1}{116} + \frac{1}{145} + \frac{1}{290} + \frac{1}{20}$$

a segunda fórma é a que Ahmes empregou.

Todas as decomposições quadrinomias do papyro podem ser obtidas por esse modo.

d) Quanto as duas decomposições binomias excluidas, Loria pensa que ellas se apresentam tão expontaneamente que foram aceitas de preferencia a quaesquer outras obtidas por processos geraes. Assim:

$$\frac{2}{35} = \frac{5+7}{5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 6} = \frac{1}{42} + \frac{1}{30}$$

$$\frac{2}{91} = \frac{7+13}{7 \cdot 10 \cdot 13} = \frac{1}{10 \cdot 13} + \frac{1}{7 \cdot 10} = \frac{1}{130} + \frac{1}{70}$$

que são os resultados do papyro.

Mais tarde em artigo publicado na «Bibliotheca Mathematica» de 1893 sobre o papyro Akhmim, Loria obtem as duas formulas que Ahmes dá para $^2/_{35}$ e $^2/_{91}$, empregando um modo de composição que existe naquelle papyro para reduzir em duas fracções simples uma do tipo $^a/_{bc}$, sendo $b+c$ um multiplo de a; a formula que indica esse modo é a seguinte:

$$\frac{a}{bc} = \frac{1}{b \times \frac{b+c}{a}} + \frac{1}{c \times \frac{b+c}{a}}$$

Talvez pela maior clareza da tradução Gabaglia escolhe o problema n. 6 para expor seus comentários. Segundo o autor o procedimento de Ahmes consistia em apresentar o enunciado do problema [Dividindo x pães] (em vermelho) entre 10 homens, seguido da resposta. Por fim o escriba "effectua a prova que consiste na multiplicação d'esse quociente por 10". Apesar de o "modo porque foram obtidos ignora-se em absoluto, não se podendo a tal respeito deduzir do papyro a minima informação", Gabaglia propõe uma "mera hyphotese" sobre a obtenção do resultado, consistindo essencialmente da divisão de 9 por 10 seguindo o processo citado anteriormente, a regra de Fibonacci.

A seção seguinte "13. – Regra do *sequem*" engloba os problemas n. 7 ao n. 23, nesses exemplos Ahmes trabalha com uma operação denominada *seqem* que "significa: acabar, perfazer". Gabaglia seguindo os estudos de Eisenlohr afirma: "Mathematicamente, *seqem* tem o sentido de «complemento»" cuja função essencial é reduzir as frações dadas a um mesmo denominador.

Relembrando o quadro 1 apresentado na página 43 deste trabalho, notamos que a segunda parte do tema aritmética é separada em duas classes de problemas, "a primeira vai dos de ns. 7 a 20, e a segunda dos de 21 a 23". É desse modo que Gabaglia dá procedimento em seu texto, nos relatando que à esse grupo de problemas Ahmes dá o título "Capitulo do *seqem*", contudo o único texto explicativo dado pelo antigo escriba acompanha os problemas n. 21, n. 22 e n. 23.

Os problemas da primeira classe ensinam como um número deve multiplicar outro para se obter um valor previamente escolhido. Gabaglia primeiramente escolhe o problema n. 13 para apresentar uma explicação (àquela dada por Ahmes), em seguida expõe outro modo de resolver o cálculo (sua interpretação).

Para um melhor entendimento do leitor reescrevemos tanto a explicação do procedimento empregado por Ahmes quanto a do próprio Gabaglia. Nessa ordem vejamos,

Problema n. 13: Multiplicar as frações $\frac{1}{16}+\frac{1}{112}$ de modo a obter a fração $\frac{1}{8}$.

Resolução: Ahmes "baseado em conhecimentos cuja extensão totalmente hoje ignoramos", escolhe o número 28 como denominador comum às frações $\frac{1}{16}$ e $\frac{1}{112}$. Em seguida, as multiplica (separadamente) por 28, A supposição de $a = 2$; $b = 5$; $c = 7$ conduz á:

$$\frac{2}{35} = \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{7 \times 6} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$$

A supposição de $a = 2$; $b = 13$; $c = 7$ conduz á:

$$\frac{2}{91} = \frac{1}{13 \cdot 10} + \frac{1}{7 \cdot 10} = \frac{1}{130} + \frac{1}{70}.$$

A comparação das hypotheses de Bobynin e de Loria mostra a vantagem da do primeiro que parece ter resolvido a questão.

Antes de terminar essa parte, convem dizer que Ahmes tambem substituia as vezes uma fracção simples pela somma de outras tambem simples; assim encontram-se entre outras as seguintes transformações:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{192}; \frac{1}{9} = \frac{1}{12} + \frac{1}{36}; \frac{1}{81} = \frac{1}{108} + \frac{1}{324}$$

12.– Ahmes, depois das tabellas para divisão de 2 por $2n + 1$, dá os quocientes dos primeiros numeros inteiros por 10, o que era de vantagem na pratica por ser decimal a numeração egypcia.

De accordo com o caracter geral do trabalho, Ahmes em vez de considerar esses quocientes como resultados de operações abstractas, os considera soluções de problemas concretos, cujo objectivo é repartir em partes iguaes um certo numero de pães por 10 pessoas.

São seis esses problemas e se referem a divisão por 10 de 1, 3, 6, 8 e 9, não tendo o escriptor egypcio dado os correspondentes aos numeros 2, 4 e 5, provavelmente por julgar evidente que:

$$^{2}/_{10} = {}^{1}/_{5} \text{ e } {}^{5}/_{10} = {}^{1}/_{2}$$

e que ${}^{4}/_{10} = {}^{2}/_{5}$, sendo esta ultima fracção uma das transformadas nas tabellas anteriores.

O primeiro problema, repartir um pão por 10 pessoas, cuja solução, ${}^{1}/_{10}$, á vista dos conhecimentos do auctor do papyro, devia ser escripta sem o menor exforço, talvez tenha sido conservada para do modo mais simples mostrar como problemas semelhantes devião ser tractados.

$$\frac{1}{16} \times 28 = \frac{28}{16} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{112} \times 28 = \frac{1}{4}$$

Tanto o resultado de cada uma deve ser dividido por 2, quanto as frações primitivas,

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \div 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$
$$\frac{1}{4} \div 2 = \frac{1}{8}$$
$$\frac{1}{16} \div 2 = \frac{1}{32}$$
$$\frac{1}{112} \div 2 = \frac{1}{224}$$

Ambos os quocientes novamente devem ser divididos por 2,

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \div 2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$
$$\frac{1}{32} \div 2 = \frac{1}{64}$$
$$\frac{1}{224} \div 2 = \frac{1}{448}$$

Por fim, Ahmes conclui que $\frac{1}{8}$ é a soma das frações iniciais com sua metade e sua quarta parte,

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{112} + \frac{1}{32} + \frac{1}{244} + \frac{1}{64} + \frac{1}{448} = \frac{1}{8}$$

Logo, "completa-se por multiplicação ${}^{1}/_{16} + {}^{1}/_{112}$ á ${}^{1}/_{8}$, multiplicando-se esta somma de fracções por $1 + {}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{4}$".

$$\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{112}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$$

Dos seis problemas só o ultimo (divisão de 9 pães por 10 pessoas) acha-se integramente conservado no papyro; a sua comparação com os restos mutilados dos outros permitte, porém, a restauração completa de todos elles.

Ahmes apresenta logo a solução de cada problema, isto é, o quociente correspondente, e em seguida effectua a prova que consiste na multiplicação d'esse quociente por 10. Assim, se,

$$^9/_{10} = {}^2/_3 + {}^1/_5 + {}^1/_{30}$$

conclue-se:

$$\left({}^2/_3 + {}^1/_5 + {}^1/_{30}\right)10 = 9$$

Eis a traducção do problema n. 6:

«Repartir 9 pães por 10 pessoas. Faz como isto é: multiplica o numero $^2/_3\,{}^1/_5\,{}^1/_{30}$ vezes 10.

$$\begin{array}{rl} 1 & ^2/_3\,{}^1/_5\,{}^1/_{30} \\ \cdot 2 & 1\ {}^2/_3\,{}^1/_{10}\,{}^1/_{30} \\ 4 & 3\ {}^1/_2\,{}^1/_{10} \\ \cdot 8 & 7\ \ {}^1/_5 \end{array}$$

Em somma 9 pães, o que isto é.»

A analyse do problema patenteia que Ahmes multiplica o quociente $^2/_3 + {}^1/_5 + {}^1/_{30}$ (que aliás não diz como obtem) por 10, e alcançando para producto 9, conclue estar certo o mesmo quociente.

A multiplicação é feita, como em todo o papyro, por duplicação successivas; os productos parciaes empregados para a obtenção do total marcamos por um asterisco, á semelhança do que fez Eisenlohr. Com effeito:

$$2.\left({}^2/_3 + {}^1/_5 + {}^1/_{30}\right) = 1 + {}^2/_3 + {}^1/_{10} + {}^1/_{30}$$
$$8.\left({}^2/_3 + {}^1/_5 + {}^1/_{30}\right) = 7 + {}^1/_5$$

e, portanto

A explicação concluída por Gabaglia muito se assemelha ao que faríamos atualmente. Para multiplicar um número $\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$ por uma incógnita x de modo a obter um número $\frac{1}{p}$, faríamos em primeiro lugar a redução de m e n a um denominador comum, chamemos de d esse denominador e obteríamos a seguinte expressão,

$$\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\times x=\frac{1}{p} \leftrightarrow \left(\frac{{}^{d}/_{m}+{}^{d}/_{n}}{d}\right)\times x=\frac{1}{p}$$

Para descobrir o valor da incógnita x dividiríamos ambos os membros da igualdade por $\left(\frac{{}^{d}/_{m}+{}^{d}/_{n}}{d}\right)$, fazendo,

$$x=\frac{\frac{1}{p}}{\left(\frac{{}^{d}/_{m}+{}^{d}/_{n}}{d}\right)} \leftrightarrow x=\frac{1}{p}\times\left(\frac{d}{{}^{d}/_{m}+{}^{d}/_{n}}\right)$$

Assumindo os valores dados no problema n. 13, teríamos,

$$x=\frac{1}{8}\times\left(\frac{112}{{}^{112}/_{16}+{}^{112}/_{112}}\right) \leftrightarrow x=\frac{14}{8} \leftrightarrow x=\frac{7}{4}$$

Logo, o valor da incógnita x é $\frac{7}{4}$, que por sua vez, pode ser decomposta em $1+{}^{1}/_{2}+{}^{1}/_{4}$, isto é, exatamente a fração dada por Ahmes como o valor procurado.

Figura 16 – Problema n. 13 do papiro Rhind

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

$$(2+8)\left({}^{2}/_{3}+{}^{1}/_{5}+{}^{1}/_{30}\right)=8+{}^{2}/_{3}+{}^{1}/_{10}+{}^{1}/_{30}+{}^{1}/_{5}$$

ou

$$10.\left({}^{2}/_{3}+{}^{1}/_{5}+{}^{1}/_{30}\right)=9.$$

Os resultados dos outros problemas são os seguintes:

$$ {}^{1}/_{10}={}^{1}/_{10}\,;\,{}^{3}/_{10}={}^{1}/_{5}+{}^{1}/_{10}\,;\,{}^{6}/_{10}={}^{1}/_{2}+{}^{1}/_{10}$$
$$ {}^{7}/_{10}={}^{1}/_{2}+{}^{1}/_{5}\,;\,{}^{8}/_{10}={}^{2}/_{3}+{}^{1}/_{10}+{}^{1}/_{30}$$

O modo porque foram obtidos ignora-se em absoluto, não se podendo a tal respeito deduzir do papyro a minima informação. Proponho como mera hypothese extender a esses problemas o processo de Leonardo de Pisa que explanamos no numero antecedente. Na verdade, elle conduz aos resultados supra; seja v.g. ${}^{9}/_{10}$. Virá:

$$\frac{9}{10}=\frac{9\cdot 3}{10\cdot 3}=\frac{27}{10}:3=\left(2+\frac{7}{10}\right):3=\frac{2}{3}+\frac{6+1}{30}=\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{30}.$$

13.– Dos ns. 7 a 23, Ahmes se occupa de exemplos de operações que domina *seqem*. Esse vocabulo é a fórma causativa de *qem* e significa: acabar, perfazer. Mathematicamente, *seqem* tem o sentido de «complemento» e designa uma operação especial de calculo arithmetico cujo fim é fazer que um numero, composto de fracções ou de inteiros e fracções, alcance pela multiplicação ou pela addicção um valor determinado; o caracter essencial d'essa operação é a reducção das fracções dadas a um denominador commum. O termo *qem* (= estar completo) parece a Eisenlohr ser applicado quando fracções de denominadores differentes são reduzidas a mesma denominação e addicionadas.

Os problemas de *Seqem* dados por Ahmes se dividem em duas classes: a primeira vai dos de ns. 7 a 20, e a segunda dos de 21 a 23. Os problemas da primeira classe estão inscriptos, uns em seguida aos outros, em uma columna a partir do segundo compartimento sem nenhuma explicação verbal que os acompanhe e com titulo geral «Capitulo do *seqem*»; emquanto que os tres problemas da segunda classe, occupando os dous primeiros compartimentos da columna seguinte, de que o resto acha-se vasio, são acompanhados de um texto explicativo[27].

Na primeira classe, os problemas ensinam por que numero se deve multiplicar outro para obter-se um valor previamente escolhido; na segunda ensinam quanto se deve sommar

[27] Cada columna do papyro é divida em compartimentos por linhas rectas horisontaes.

Ainda na seção 13 um segundo problema (n. 21) é comentado por Gabaglia, do mesmo modo como procedeu para o problema n. 13 o autor explica o cálculo como apresentado originalmente por Ahmes e depois apresenta uma explicação “á moderna”. Este problema pertence à segunda classe e pode ser reescrito seguindo os passos abaixo:

Problema n. 21: Adicionar as frações $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{15}\right)$ de modo a obter 1.

Resolução: Ahmes assume 15 como denominador comum para multiplicar pelas frações iniciais, o resultado produzido sugere que ainda faltam 4 partes para se obter 1. Sendo assim 15 é multiplicado de modo a obter 4, produzindo o valor restante[38]. O escriba conclui o cálculo provando que a soma das frações multiplicadas por 15 resulta o valor requerido 1.

$$15 \times \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{15}\right) = (10+1) = 11$$

$$15 - 11 = 4$$

$$15 \times \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{15}\right) = (3+1) = 4$$

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{15}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{15}\right) = 1$$

Portanto, nesse caso, o complemento de $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{15}\right)$ é $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)$.

A explicação “á moderna” feita por Gabaglia pode ser entendida do seguinte modo:

Para completar por adição uma soma de frações $\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\right)$ a um certo número m, sendo x o complemento e d o denominador comum a l e n, teríamos:

$$\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{n}\right)+x = m \leftrightarrow \left(\frac{d/_l + d/_n}{d}\right)+x = m$$

$$x = m - \left(\frac{d/_l + d/_n}{d}\right)$$

[38] Este cálculo é exposto na página 48 do livro original de Gabaglia (1899).

a um certo numero para alcançar-se outro dado.

Expliquemos um dos problemas da primeira classe; seja o n. 13, a saber:

«	1	$^1/_{16}$	$^1/_{112}$
		1 $^1/_2$ $^1/_4$	$^1/_4$
	$^1/_2$	$^1/_{32}$	$^1/_{224}$
		$^1/_2$ $^1/_4$ $^1/_8$	$^1/_8$
	$^1/_4$	$^1/_{64}$	$^1/_{448}$
		$^1/_4$ $^1/_8$ $^1/_{16}$	$^1/_{16}$
Em somma		$^1/_8$.	»

N'elle trata-se de completar por multiplicação ($^1/_{16}+{}^1/_{112}$) á $^1/_8$, isto é, pede-se o numero que multiplicado por ($^1/_{16}+{}^1/_{112}$) tenha para produto $^1/_8$. Para isso, Ahmes baseado em conhecimentos cuja extensão totalmente hoje ignoramos, e provavelmente attendendo ser $112 = 7 \times 16$, escolhe 28 como denominador commum para duas fracções que devem substituir $^1/_{16}$ e $^1/_{112}$; e tem então:

$$\frac{1}{16} = \frac{1+{}^1/_2+{}^1/_4}{28} \text{ e}$$

$$\frac{1}{112} = \frac{^1/_4}{28}.$$

Ahmes no exemplo escreve apenas na segunda linha horisontal os numeradores, sem se referir ao denominador commum. Em seguida, toma a metade, e depois a quarta parte quer das fracções dadas, quer das reduzidas a mesma denominação. E conclue que $^1/_8$ é a somma das fracções primitivas com a sua metade e a sua quarta parte, isto é:

$$\frac{1}{8} = (1+{}^1/_2+{}^1/_4)\left(\frac{1+{}^1/_2+{}^1/_4}{28}+\frac{^1/_4}{28}\right)$$

logo, completa-se por multiplicação $^1/_{16}+{}^1/_{112}$ á $^1/_8$, multiplicando-se esta somma de fracções por $1+{}^1/_2+{}^1/_4$.

Querendo explicar actualmente o processo empregado por Ahmes, fariamos assim: Seja o numero ($^1/_m+{}^1/_n$) que temos de multiplicar por uma incognita para alcançar $^1/_p$;

Chamando a diferença $m - \left(\frac{d/_l + d/_n}{d}\right)$ de $\frac{r}{d}$, a expressão acima se tornaria,

$$x = \frac{r}{d} \leftrightarrow r = d \times x$$

Ou seja, para obter o complemento “Ahmes calculava o numero cujo produto por d fosse r”. Substituindo os valores dados no problema n. 21 teríamos,

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{15}\right) + x = 1 \leftrightarrow \left(\frac{30/_3 + 15/_{15}}{15}\right) + x = 1$$

ou ainda,

$$x = 1 - \left(\frac{11}{15}\right) \leftrightarrow x = \frac{4}{15} \leftrightarrow 15 \times x = 4$$

Isso prova porque Ahmes multiplicava o número 15 de modo a obter os 4 restantes.

Um último comentário sobre esse problema deve ser feito, Gabaglia influenciado ou não por Eisenlohr, indica que “o valor do complemento ou accrescimo que aliás está evidentemente errado no papyro, provavelmente devido a cópia, vindo escripto $1/_5$ $1/_{10}$ em vez de $1/_5$ $1/_{15}$”. O fato das frações $1/_5$ $1/_{10}$ figurarem no papiro juntamente com o problema n. 21 foi motivo de diversas interpretações, no entanto Chace (1927) parece ter solucionado questão sugerindo apenas que $1/_5$ $1/_{10}$ é a solução para o problema seguinte, o n. 22.

> No papiro no final desta solução são expressas as palavras "Outro, $1/_5$ $1/_{10}$ ser adicionado". Isso não tem nenhuma ligação com o problema 21, mas o número $1/_5$ $1/_{10}$ é a resposta para o problema que se segue imediatamente. (CHACE, 1927, p. 66, tradução nossa)

reduzindo-se $^1/_m + ^1/_n$ a um mesmo denominador, d. v. g., tem-se $^1/_m + ^1/_n = ^a/_d + ^b/_d$, e, portanto, a incognita procurada será obtida pela divisão de $^1/_p$ por $(^a/_d + ^b/_d)$; essa divisão se fazia á egypcia, como vimos no n. 7, multiplicando-se o divisor até obter-se o dividendo. Applicando ao exemplo acima considerado, temos:

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{112} = \frac{1 + ^1/_2 + ^1/_4}{28} + \frac{^1/_4}{28} = \frac{2}{28}$$

que devemos multiplicar por uma incognita até attingir o valor de $^1/_8$; ora, uma vez $^2/_{28}$ é $^2/_{28}$; um meio de $^2/_{28}$ é $^1/_{28}$; um quarto de $^2/_{28}$ é $^{^1/_2}/_{28}$ e

$$\frac{2}{28} + \frac{1}{28} + \frac{^1/_2}{28} = \frac{3 + ^1/_2}{28} = \frac{1}{8};$$

logo, a incognita procurada é: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

Passamos agora a explicar um dos problemas da segunda classe, seja o de n. 21, cuja traducção é:

« Dizem-te: completa:

$^2/_3$ $^1/_5$ à 1

10 1, em somma 11. Resta: 4

Multiplica o numero: 15 para achar: 4

1 15 · $^1/_{15}$ 1

$^1/_{10}$ 1 $^1/_2$ Em somma 4

· $^1/_5$ 3 então $^1/_5$ $^1/_{15}$ para accrescimo.

Capítulo da prova e *qem* De outro modo $^1/_5$ $^1/_{10}$ para accrescimo.

$^2/_3$ $^1/_5$ $^1/_{15}$ $^1/_{15}$ faz 1 »

Analysando-se esse exemplo, vê-se que Ahmes trata de completar por addicção $(^2/_3 + ^1/_{15})$ á 1, isto é, trata de achar um numero que sommado com $^2/_3 + ^1/_{15}$ dê 1. Elle reduz as fracções dadas a um mesmo denominador commum que é 15, posto que nada diga a tal respeito, contentando-se em substituir aquellas fracções pelos numeros 10 e 1, numeradores das fracções redusidas $^{10}/_{15}$ e $^1/_{15}$. A somma d'essas fracções é $^{11}/_{15}$, faltando portanto $^4/_{15}$ para se ter 1: é o que diz a terceira linha, escrevendo-se apenas os

Figura 17 – Problema n. 21 do papiro Rhind

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

Quando finaliza seus comentários sobre os problemas n. 13 e n. 21, Gabaglia versa sobre o conflito ocasionado pela oposição à explicação dada ao *seqem*[39], foi o engenheiro francês Léon Rodet, "em longo e erudito artigo publicado no "Journal Asiatique""[40] quem discordou do entendimento atribuído ao *sequem*, no entanto, em sua interpretação "notam-se a par de algumas ideias felizes, enganos inegaveis e hypotheses falsas". Um resumo e crítica sobre a teoria de Rodet é o conteúdo da seção "14.– Discussão sobre o *sequem*", sobre a qual obviamente guiados pelo exposto por Gabaglia iremos tratar nos próximos parágrafos.

Dois "erros capitaes", um linguistico relacionado à tradução do termo *seqem* e outro histórico, pertinente à finalidade do uso do *seqem* nos procedimentos matemáticos empregados pela escriba Ahmes, são as falhas descritas por Rodet em seu estudo.

Em comentário ao primeiro "erro", Gabaglia defende Eisenlohr mencionando que este professor e egiptólogo é reconhecido universalmente por sua profunda competência no assunto, ou seja, evidentemente a sugestão de Rodet em traduzir o termo egípcio para *seghom* ao invés de *seqem*, é sem fundamento. Para reforçar seu apelo e ampliar sua crítica ao trabalho do engenheiro, Gabaglia usa os comentários do "competente professor Revillout" conforme observamos na citação abaixo[41],

> Todas as correcções feitas pelo Sr. Rodet no texto egypcio já tinham sido feitas pelo Sr. Eisenlohr, suas reproducções de *fac-simile* tomadas ao *fac-simile* do Sr. Eisenlohr e para pontos já explicados igualmente pelo erudito allemão. Quanto ás novas deducções philologicas do Sr. Rodet e ás suas novas explicações ellas provam a mais profunda ignorancia da lingua e da philologia egypcia. O Sr. Rodet é, ninguem o duvida, um bom mathematico;

---

[39] Conforme Gabaglia menciona "explicação aliás dada ou aceita por sabios da ordem dos dous irmãos Eisenlohrs, de Cantor, de Revillout". (GABAGLIA, 1899, p. 50)
[40] Disponível em: https://archive.org/stream/lesprtendusprob00rodegoog#page/n7/mode/2up
[41] O texto original de Revillout, publicado na Revue Ègyptologique em 1881, está disponível em https://archive.org/details/revuegyptologi02pari

numeradores 11 e 4. Para ter a fracção $^4/_{15}$ de accordo com o systema egypcio, Ahmes effectua a divisão de 4 por 15, ou então procura o numero que multiplicado por 15 dá 4; acha que $^1/_5$ de 15 é 3, e que $^1/_5$ de 15 é 1, e que a somma d'esses productos parciaes, no exemplo indicados por ·, é 4. Então conclue ser $^1/_5 + ^1/_{15}$ o que deve ser accrescido ás fracções dadas para se completar 1. Debaixo do titulo "Capitulo da prova e *qem*", Ahmes mostra que com effeito as fracções $^2/_3 + ^1/_{15}$ sommadas com $^1/_5 + ^1/_{15}$ dão 1, tendo o cuidado de escrever as fracções em ordem decrescentes dos seos valores; bem assim, chama a attenção para o valor do complemento ou accrescimo que aliás está evidentemente errado no papyro, provavelmente devido a cópia, vindo escripto $^1/_5\, ^1/_{10}$ em vez de $^1/_5\, ^1/_{15}$.

Explicando á moderna o processo seguido por Ahmes para *completar por addicção* uma somma de fracções, v.g. $^1/_1 + ^1/_n$ *a um certo numero dado*, *m*, tinha-se de reduzir as fracções a um mesmo denominador commum: $^a/_d + ^b/_d$, e em seguida sommal-as: $^{a+b}/_d$ e de procurar a differença entre essa somma e o numero *m*, seja $^r/_d$. Para obter de accordo com o systema egypcio o valor de $^r/_d$, Ahmes calculava o numero cujo producto por *d* fosse *r*, por ex: $^1/_s + ^1/_t$. Então, concluia ser $^1/_s + ^1/_t$ o accrescimo ou o complemento que addiccionado á somma $^1/_1 + ^1/_n$ dava *m*.

O modo egypcio de considerar as fracções em geral só permittia representar-as, e acceital-as como solucções definitivas, quando tinham o numerador igual a unidade. E' por isso que Ahmes apoz a reducção á mesma denominação apenas considera os numeradores, supprimindo o denominador commum, e effectua os calculos como se tratasse de numeros inteiros.

14.– O engenheiro Léon Rodet em longo e erudito artigo publicado no "Journal Asiatique" de que fez tiragem á parte de 1882 discordou da explicação que acaba de ser feita sobre o *seqem*, explicação aliás dada ou aceita por sabios da ordem dos dous irmãos Eisenlohrs, de Cantor, de Revillout; e apresenta uma theoria cujo rezumo faremos e onde notam-se a par de algumas ideias felizes, enganos inegaveis e hypotheses falsas. A discordancia principia com titulo que elle lê *seghom* em vez de *seqem* e continua com a interpretação d'essa operação, encontrando elle na acima explanada dous erros capitaes: um linguistico, o significado attribuido ao termo *qem* ou *seqem*; outro historico, o facto de indicar como fim, ou mesmo como *meio*, dos calculos ahi effectuados, a reducção das fracções a um denominador commum.

Em relação a parte philologica, deve-se observar: 1º que a competencia egyptologica do professor Eisenlohr é universalmente reconhecida; 2º que na critica ao artigo de Rodet feita pelo competente professor Revillout, na "Revue Egyptologique", este escreveu: «Todas as correcções feitas pelo Sr. Rodet no texto egypcio já tinham sido feitas pelo Sr. Eisenlohr,

> mas isso não basta para ser linguista e sobretudo para dar solucções magistraes sobre uma lingua que elle nunca estudou. (REVILLOUT, 1881, apud GABAGLIA, 1899, p. 50-51)

A segunda crítica do engenheiro Rodet diz respeito ao verdadeiro emprego do *seqem*, eventualmente guiado por uma ideia diretriz que é a “persistencia dos processos mathematicos”, o estudioso francês busca elucidar os pontos obscuros do papiro Rhind em escritores árabes, hebreus, persas, hindus, em Fibonacci; e acaba encontrando operação semelhante à redução ao denominador comum em “Mahmud do Herat e Aben Ezra”. O procedimento consistia da escolha de um “numero bastante grande para que d’elle se possa tirar as fracções como numeros inteiros, ou quasi inteiros”, esse número era chamado por Rodet de “bloco extractivo” ou *more* em hebraico e *mokraj* em árabe.

Por uma questão de organização do texto Gabaglia prefere expor em uma nota explicativa no final de seu livro um esclarecimento, por meio de exemplos, sobre o “*bloco extractivo*”. Segundo o autor “não o fazemos agora para não cortar a exposição do assumpto que estamos desenvolvendo”.

Ao contrário de Gabaglia, neste ponto de nosso texto fazemos uma pausa nos comentários sobre a crítica à Rodet para elucidar o conteúdo de tal nota. Na transcrição do livro, também optamos em interromper a seção 14 para exibir a “Nota sobre o bloco extractivo”.

Nessa nota, Gabaglia tem a intenção de explicar o que os autores Aben Ezra e Mahmud do Herat definem por bloco extrativo usando citações dos próprios autores seguidas por alguns exemplos. Em uma soma de frações com denominadores diferentes, o primeiro autor chama de *more* um número previamente escolhido, contanto que seja esse “numero bastante grande para que suas fracções sejam unidades inteiras”, para operar com as frações.

Tomando a soma de $^2/_5$ e $^5/_7$, o “bloco extractivo” de Rodet, o *more* de Aben Ezra ou o nosso denominador comum, seria 35. Em seguida a fração $^2/_5$ dava lugar ao número inteiro 14 e a fração $^5/_7$ ao número 25. Por fim esses inteiros eram adicionados e como partes do bloco extrativo finalmente foram divididos por 35 para se obter o resultado final da operação, isto é, em um procedimento moderno, matematicamente equivalente a:

suas reproducções de *fac-simile* tomadas ao *fac-simile* do Sr. Eisenlohr e para pontos já explicados igualmente pelo erudito allemão. Quanto ás novas deducções philologicas do Sr. Rodet e ás suas novas explicações ellas provam a mais profunda ignorancia da lingua e da philologia egypcia. O Sr. Rodet é, ninguem o duvida, um bom mathemathico; mas isso não basta para ser linguista e sobretudo para dar solucções magistraes sobre uma lingua que elle nunca estudou»[28] E n'esse tom continúa, tendo anteriormente demonstrado a sem razão de quasi todas as considerações philologicas de Rodet.

Em relação á parte historica, a ideia directriz que guia Rodet n'essas pesquizas é a persistencia dos processos mathematicos. Elle encontra vestigios do modo de calcular de Ahmes em escriptores arabes, hindús, persas, hebreus e em Leonardo de Piza, e nos trabalhos d'elles procura meios para elucidar os pontos obscuros do papyro egypcio.

Emquanto que os sabios traductor e commentadores do papyro Rhind vêm nos problemas do *seqem* a transformação que denominamos hoje reducção ao mesmo denominador, Rodet pensa que a operação que Ahmes executou sobre as fracções, sendo em essencia equivalente a essa transformação, era feita sob outra ordem de ideias. Segundo Rodet, Ahmes, como centenas de annos depois fizeram Mahmud do Herat e Aben Ezra, escolhe um numero bastante grande para que d'elle possa tirar as fracções como numeros inteiros, ou quasi inteiros; a esse numero (*more* em hebraico, *mokraj* em arabico) elle denomina *bloco extractivo*. Achado esse numero, substituiam-se ás fracções numeros inteiros e em seguida sommavam-se estes ultimos. A somma assim obtida era dividida pelo bloco extractivo e dava o resultado verdadeiro.

Em nota, que será dada depois da analyse de todo o papyro, explicaremos por meio de exemplos em que consiste o processo do *bloco extractivo*; não o fasemos agora pra não cortar a exposição do assumpto que estamos desenvolvendo.

NOTA SOBRE O BLOCO EXTRACTIVO [80]

(V. pg. 52)

Vejamos em Aben Ezra e em Mahmud do Herat a definição que dão, o primeiro do *more*, e o segundo do *mokray*, termos que Rodet traduz por «bloco extractivo».

---

[28] Pg. 302-303 do n. 2-3 do 2º anno da "Revue Egyptologique"

[80] Os trechos citados são traduzidos de accordo com a versão franceza dos mesmos feita por L. Rodet. V. *Les pretendus probl. d'algébre*, pg. 23 *et. se.*

$$\frac{2}{5}+\frac{5}{7}=\frac{\left({}^{35}/_{5}\right)\times 2+\left({}^{35}/_{7}\right)\times 5}{35}=\frac{14+25}{35}=\frac{39}{35}$$

Outro exemplo citado por Gabaglia é a divisão de $3\,{}^{2}/_{5}$ por $2\,{}^{4}/_{7}$, nesse caso Ezra "toma um bloco 35" e opera de modo a substituir $3\,{}^{2}/_{5}$ por 118[42] e $2\,{}^{4}/_{7}$ por 90, e depois "são esses dous inteiros que divide um pelo outro". O cálculo pode ser escrito como abaixo,

$$\left(3\,\frac{2}{5}\right)\div\left(2\,\frac{4}{7}\right)=\frac{17}{5}\div\frac{18}{7}=\frac{17}{5}\times\frac{7}{18}=\frac{119}{90}$$

O segundo autor sobre o qual Rodet se apoia, Mahmud do Herat, compreende o *mokray* das frações como o "menor numero, tal que as fracções tiradas delle sahem inteiras". Sua definição de *mokray*, assim como em Aben Ezra, corresponde ao nosso denominador comum ou ao bloco extrativo de Rodet.

Para justificar o procedimento empregado por Herat, Gabaglia cita a soma ${}^{2}/_{3}+{}^{3}/_{4}+{}^{4}/_{5}$, cujo *mokray* é 60 e os inteiros que substituem as frações (parcelas) são 40, 45 e 48, respectivamente. A soma desses inteiros dividida pelo bloco extrativo é o resultado da operação. Ou seja,

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}=\frac{40+45+48}{60}=\frac{133}{60}$$

Sem mais algum comentário, é com esse exemplo que Gabaglia finaliza sua "Nota sobre o bloco extractivo". Voltamos agora à sua crítica aos estudos de Rodet[43].

Gabaglia considera incorreto o argumento de que, com exceção de Diophantos, "Nunca veio á idéa de qualquer mathematico antigo" fazer uso de numeradores fracionários em cálculos que envolviam frações, isso porque era de seu conhecimento que o matemático grego Herão de Alexandria usou frações desse tipo. Segundo o autor, é possível observar nos trabalhos de Herão uma "ligação com

[42] Note que Gabaglia menciona 118 como o número inteiro que substitui a fração $3\,{}^{2}/_{5}$. No entanto o resultado da operação aponta que 119 é o inteiro que deve ser substituído.
[43] A transcrição do livro continua a partir do parágrafo em que foi interrompida.

Trecho de Aben Ezra:

« Os arithmeticos tomam todas as suas fracccções de um numero bastante grande para que suas fracções sejam unidades inteiras. Assim, elles tiram *um meio de dous*, *um terço de tres*, e assim em seguida até o fim da primeira seriE de numeros. Elles denominam esse numero, donde tomam suas fracções, *o more*..... E quando elles tem necessidade de duas fracções que não são da mesma especie, que não se assemelham, elles buscam cada uma das fracções em um numero, donde se possa tirar cada uma dellas, depois elles a multiplicam, uma pela outra, e o resultado numerico é o *more*. E havendo tres especies, elles multiplicam o numero donde tiraram as primeiras fracções pelo segundo numero donde tiraram as segundas fracções, e o resultado, elles multiplicam pelo numero de que tiraram as terceiras fracções. Fazem o mesmo no caso de quatro especies ou cinco, ou mais, porque buscam um *more* unico para todos. Dá-se-lhe esse nome (o de *more* = o que guia) porque guia no caminho direito ».

Trecho de Mahmud do Herat:

«O *mokhray* das fracções é o menor numero, tal que as fracções tiradas delle sahem inteiras. Assim, $^1/_2$ *por ex* sahe inteiro de 2, porque a metade de 2 é 1, que é inteiro, Ella sahe igualmente de 4, e tambem de qualquer outro numero par, mas elles não estendem d'uma maneira geral esse nome a outros numeros além de 2, porque o menor dos numeros donde uma metade sahe inteira é 2. Então o primeiro dos *mokrays* será 2 ... e o segundo dos *mokrays* será 3, e a razão de 1 a 3 é um terço.....

O *mokray* das fracções isoladas é seu analogo entre as unidades; por exemplo, o analogo de um *terço* entre as unidades é *tres*, então tres será o *mokray* de $^1/_3$; o analogo de *um quarto* entre as unidades é 4, então 4 será o *mokray* de $^1/_4$....

Agora, o *mokray* de uma fracção composta se póde conhecer deduzindo-o dos *mokrays* de suas isoladas, a saber: examina-se si os *mokrays* de suas isoladas são multiplos uns dos outros, e o maior *mokray* é o *mokray* do conjuncto. Assim $^1/_3$ e $^1/_9$ por exemplo: o *mokray* de $^1/_3$ é 3; o de $^1/_9$ é 9; 3 e 9 sendo um multiplo do outro e 9 o maior, então 9 será o *mokray* de $^1/_3$ e de $^1/_9$ ... Si os *mokrays* de suas simples são primos entre si, multiplica-se o primeiro *mokray* pelo segundo, depois o producto pelo terceiro, e de novo o producto pelo quarto e assim em seguida até o ultimo. O que dahi resulta é o *mokray* da fracção composta».

Estabelecida a significação dos termos, analysemos as operações acima indicadas. Aben Ezra para ajuntar $^2/_5$ e $^5/_7$, toma para «bloco extractivo» 35; substitue a $^2/_5$ o

Ahmes”, no que diz respeito ao “estylo, a nomenclatura, a disposição, o enunciado das questões, os processos recordam, sem se poder admittir a minima duvida, o velho papyro egipcio”.

Outro ponto destacado por Gabaglia é a discordância de Rodet a respeito dos estudos dos irmãos Eisenlohr e de Cantor “sobre a natureza dos problemas de *seqem*”, para evidenciar o assunto ele considera o n. 23 (pertencente à segunda classe), tendo em vista que este problema foi “especialmente estudado por Cantor em sua magnifica historia da mathematica”. Em outras palavras podemos entender o problema do seguinte modo,

Problema n. 23: Obter um número que adicionado à soma $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{45}$ resulte $\frac{2}{3}$.

Resolução: Ahmes primeiramente soma as frações unitárias, depois subtrai o resultado de $\frac{2}{3}$ e por último decompõe o resto em duas frações unitárias, a saber, $\frac{1}{9}+\frac{1}{40}$, ou seja,

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{45}\right)+x=\frac{2}{3}$$
$$x=\frac{2}{3}-\frac{1719}{3240}=\frac{49}{360}$$
$$x=\frac{6\,{}^{1}\!/_{8}}{45}$$

Ou ainda,

$$x=\frac{49}{360}\leftrightarrow x=\left(\frac{40}{360}+\frac{9}{360}\right)\leftrightarrow x=\left(\frac{1}{9}+\frac{{}^{9}\!/_{40}}{9}\right)\leftrightarrow x=\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{40}\right)$$

Segundo Gabaglia, o exposto acima “é o que da observação do problema deduziu Cantor”. No entanto, para Rodet o escriba procedeu de outro modo; primeiro escolheu o bloco extrativo 45, substituiu as frações por números inteiros “ou quasi inteiros”, realizou sua soma e para obter o resto $6+{}^{1}\!/_{8}$, “faz crescer o bloco extractivo até alcançar o número pedido”, produzindo o resultado ${}^{1}\!/_{9}+{}^{1}\!/_{40}$.

inteiro 14, a $^5/_7$ o inteiro 25. São esses inteiros que elle ajunta e cuja somma faz 39. Porém, esses 39 não são unidades ordinarias, são partes do *bloco* 35 que considera-se valendo uma unidade; logo tem-se de dividir 39 por 35.

Para dividir $3\,^2/_5$ por $2\,^4/_7$, Aben Ezra toma um bloco de 35. Trabalhando sobre esse bloco, substitue $3\,^2/_5$ por um inteiro 118 e $2\,^4/_7$ pelo inteiro 90; são esses dous inteiros que divide um pelo outro.

Mahmud faz o mesmo. Para sommar $^2/_3 + ^3/_4 + ^4/_5$ toma um bloco extractivo: 60. Operando sobre esse bloco substitue a $^2/_3$ o inteiro 40, a $^3/_4$ o inteiro 45 e a $^4/_5$ o inteiro 48, e obtem para somma desses inteiros 133, que divide pelo bloco.

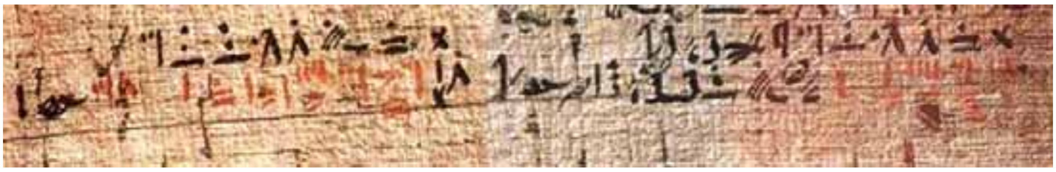
Emfim, Rodet considera argumento capital, e por esse motivo, como expressamente declara, reservou-o para invocal-o á parte o seguinte: «á cada instante, o numero equivalente á fracção e que Ahmes lhe substitue, é um *numero fraccionario*. Nunca veio á idéa de qualquer mathematico antigo, fazendo uso de verdadeiras fracções (é necessario exceptuar Diophantos que, finalmente, faz excepção ainda sobre muitos outros pontos), de lhes dar um numerador fraccionario»[(29)]. Em apoio a sua affirmativa, Rodet cita Feizi, o traductor persa de Bhaskara que ao numerador appellida «o numero inteiro»; e lembra que ainda hoje em manual de ensino elementar, ninguem empregaria fracções taes como $\frac{35\,^1/_3}{1060}$.

A affirmativa, porém, de Rodet, não é exacta; basta lembrar Herão de Alexandria que usou de fracções com numeradores fraccionarios, (v. pag. 41 da obra de Letrone, intitulada «*Recherches sur les fragments d'Héron d'Alexandrie.*») E é preciso salientar que Diophantos e Herão d'Alexandria, apezar de escreverem em grego, apresentam-se singulares e extranhos no meio da civilisação grega, com aspecto de estrangeiros, e a analyse de seus methodos patenteia á critica do modo mais evidente a origem egypcia de seus conhecimentos. Em Herão, a ligação com Ahmes é segura: o estylo, a nomenclatura, a disposição, o enunciado das questões, os processos recordam, sem se poder admittir a minima duvida, o velho papyro egypcio e isso muito mais claramente do que os autores arabes, persas, hebreus que Rodet cita. Proclus considera Herão filiado a uma escola especial que appelida com o nome d'este; provavelmente os que seguiam os methodos egypcios constituiam um grupo separado do grupo dos que empregavam os methodos de origem grega.

---

(29) Pag. 32 da tiragem á parte do artigo de Rodet.

Figura 18 – Problema n. 23 do papiro Rhind



Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

Os problemas da primeira classe do *seqem* são para Cantor e Eisenlohr, problemas de "*completar* por multiplicação", já Rodet os submetia ao seguinte lema "quando se effectua uma mesma operação em diversas quantidades, os resultados obtidos variam na mesma razão que as quantidades d'onde se parte". Neste ponto Gabaglia chama atenção para o fato de Revillout não ter percebido ser um erro relacionar os problemas com esse lema, pois somente "em casos excepcionaes é que $\frac{a}{b} = \frac{f(a)}{f(b)}$".

Para Gabaglia um fator decisivo à aversão a teoria de Rodet está em sua linguagem arcaica, "emquanto que Cantor e Eisenlohr servem-se geralmente de expressões modernas, de notações modernas", Rodet tenta interpretar os procedimentos dos antigos egípcios usando "termos arabicos e hebraicos do 12º seculo P. C", além de fazer questão do emprego de "*bloco extractivo*" ao invés de *denominador*. Contudo, "não póde haver a grande analogia que quer Rodet entre a mathematica do antigo Egypto e os processos do fim da Idade Média".

Na citação abaixo Gabaglia explica de forma sucinta e clara sua justificativa em comentar as hipóteses e as críticas do trabalho de Rodet,

> Si nos estendemos sobre Rodet, é porque algumas de suas conclusões tem sido levianamente aceitas nas escolas francezas, talvez devido a tentarem rebater opiniões de professores allemães. Identica divergencia apparece, como veremos, nos conhecimentos de algebra, possuidos por Ahmes. (GABAGLIA, 1899, p. 55)

Em nossa opinião, não desmerecendo o próprio conteúdo do embate entre as teorias dos professores alemães (Cantor e Eisenlohr), do francês Éugene Revillout com o também francês Léon Rodet, o que se destaca é o conhecimento e a propriedade com a qual Gabaglia se refere à essas teorias. Conforme já mencionamos anteriormente fica evidente o contato direto do professor brasileiro

Igualmente, Rodet diverge dos Eisenlohrs e de Cantor sobre a natureza dos problemas de *seqem*. Em relação aos da segundo classe, e consideremos o de n. 23 do papyro que foi o especialmente estudado por Cantor em sua magnifica historia da mathematica, Ahmes para obter um numero que addiccionado á $1/_4 + 1/_8 + 1/_{10} + 1/_{30} + 1/_{45}$ desse $2|3$, sommou as fracções dadas, tirou sua somma do numero indicado 2|3, e decompoz o resto $(\frac{6+1/_8}{45})$ em duas fracções $1/_9 + 1/_{40}$: é o que da observação do problema deduzio Cantor.

Para Rodet, porém, Ahmes escolheu um *bloco extractivo* (45), substituio ás fracções numeros inteiros ou quasi inteiros, tomou sua somma e para obter o resto $(6 + 1/_8)$, que Rodet denomina «*le manquant*», faz crescer o bloco extractivo até alcançar o numero pedido, o que lhe deo igualmente para resultado $1/_9 + 1/_{40}$. Em relação aos problemas da primeira classe, emquanto que, para Cantor e Eisenlohr, Ahmes ensinava a *completar* por multiplicação; para Rodet, elle demonstrava empiricamente um lemma que podia ser enunciado assim: «quando se effectua uma mesma operação em diversas quantidades, os resultados obtidos variam na mesma razão que as quantidades d'onde se parte.»

Ha, e chamamos a attenção para o facto, n'esse enunciado um erro de mathematica, que não sabemos como escapou á critica justa e severa de Revillout, pois só em casos excepcionaes é que

$$\frac{a}{b} = \frac{f(a)}{f(b)}$$

A hypothese de Rodet como demonstra Revillout[30], está em desaccordo com o titulo geral do capitulo; e não se póde comprehender que o seu conteúdo só principiasse apoz 14 ou 15 problemas sem nenhuma relação com aquelle titulo.

Ha em tudo isso antes uma questiuncula de palavras, do que uma questão de factos. Emquanto que Cantor e Eisenlohr sevem-se geralmente de expressões modernas, de notações modernas, de signaes modernos para fazer melhor comprehender ao leitor a natureza das operações que se traduzem aliás de modo completamente diverso, segundo o habito grego ou o egypcio, Rodet propõe antes interpretar os calculos effectuados no 18º seculo A.C., com expressões imitadas de termos arabicos e hebraicos do 12º seculo P. C. E, especialmente, Rodet faz, como observa Revillout, muita questão em ser empregada a expressão *bloco extractivo* em vez de *denominador*.

Não póde haver a grande analogia que quer Rodet entre a mathematica do antigo Egypto e os processos do fim da Idade Média. O espaço de tres mil annos, a successão de linguas fundamentalmente diversas, a especial educação espiritual dada nas escolas da Idade Média, tornaram a separação entre a antiguidade egypcia e a classica mais profunda talvez

[30] Vide pag. 291 da revista citada.

com as recentes publicações sobre o tema na Europa daquela época, de certa forma isso contribui para a riqueza e originalidade de seu livro.

Na seção “15. – Divisões em partes desiguaes” Gabaglia aborda os problemas n. 39, n. 40, n. 63[44] e 65. Nos dois primeiros uma nova operação matemática é utilizada por Ahmes, chamada de “*tunnu*”, essa operação indica “exactamente tudo o que se eleva acima de um certo nivel: altura, saliencia, preeminencia, exageração, etc”. Segundo o autor, o *tunnu*, matematicamente significa a diferença entre os quocientes das divisões em partes desiguais, ou ainda “a razão em uma progressão arithmetica”[45].

O problema n. 39 contempla uma divisão de 100 pães por 10 pessoas, de modo que, 50 pães sejam repartidos igualmente entre 6 pessoas e, os outros 50 pães sejam igualmente divididos entre as 4 pessoas restantes. Além disso, “pede-se a differença (o *tunnu*)” entre o quociente de uma das primeiras partes e o de uma das últimas.

A resolução, conforme expressa por Ahmes e descrita por Gabaglia, segue os passos que descrevemos a seguir.

Em primeiro lugar 50 é dividido por 4 e depois por 6 (pelo procedimento egípcio), em seguida e “certamente como prova” todos os quocientes são escritos em sequência, contudo, sem ser expresso a sua soma. O escriba termina a resolução do problema apresentando a “differença média” entre os quocientes. Gabaglia finaliza seu comentário sobre o problema mencionando “E’ mais ou menos a mesma marcha que segue-se ainda hoje em questão semelhante”.

Matematicamente podemos escrever o procedimento de Ahmes por,

$$\frac{50}{4} = \frac{48}{4} + \frac{2}{4} = 12 + \frac{1}{2}$$

Ou seja, quatro pessoas recebem $12 + \frac{1}{2}$ pães. As outras seis recebem,

$$\frac{50}{6} = \frac{48}{6} + \frac{2}{6} = 8 + \frac{1}{3}$$

[44] Apesar de estar indicado por n. 64, um dos problemas estudado nesta seção é o de n. 63, como fica evidente na página 59 do livro de Gabaglia.
[45] Na seção seguinte teremos um exemplo de *tunnu* no problema n. 64.

do que actualmente existe entre a nossa civilisação e a dos velhos habitantes das margens do Nilo.

Sob o ponto de vista particular que nos occupa, devemos notar que os autores citados pelo escriptor Rodet empregam como nós fracções tendo numeradores diversos da unidade; o que como já anteriormente mostramos não é o caso dos egypcios.

Si nos estendemos sobre Rodet, é porque algumas de suas conclusões tem sido levianamente aceitas nas escolas francezas, talvez devido a tentarem rebater opiniões de professores allemães. Identica divergencia apparece, como veremos, nos conhecimentos de algebra, possuidos por Ahmes.

15.– Em alguns problemas Ahmes effectua divisões em partes desiguaes; são os que tem na edicção de Eisenlohr os ns. 39, 40, 64 e 65. Elles vêm todos depois de uma série de problemas, denominados do *hau*, o qual constitue a parte que n'este estudo denominamos de "algebra do papyro Rhind" e que é o objeto do cap. 4.º

Nos problemas sob ns. 39 e 40 apparece uma operação mathematica especial que Ahmes denomina *tunnu*, vocabulo correspondente grego υ'περγη (em latim, *surgere*, *elevare*), no sentido de excedente e indicando exactamente tudo o que se eleva acima de um acerto nivel: altura, saliencia, preeminencia, exageração etc. Mathematicamente, *tunnu* n'esses problemas concretos significa a differença entre os diversos quinhões, provenientes de uma divisão em partes desiguaes; talvez mesmo a ideia mathematica justa que queira exprimir seja a da razão em uma progressão arithmetica(31). A translação de sentido é clara, e da-se tambem em nossa lingua, pois o que uma cousa excede de outra é a differença entre ellas.

No n. 39 trata-se de dividir por 10 pessoas 100 pães, de modo a 50 serem repartidos igualmente por 6, e outros 50 da mesma forma pelas 4 restantes pessoas; e pede-se a differença (o *tunnu*) entre o quinhão de uma das primeiras e o de uma das ultimas.

Eis a traducção litteral d'esse problema:

« Capitulo para fazer a differença media.

100 pães por 10 pessoas; 50 por 6, 50 por 4; qual é a differença?

1	4	1	6	$12\,^1/_2$	$8\,^1/_3$
· 10	40	2	12	$12\,^1/_2$	$8\,^1/_3$
· 2	8	4	24	$12\,^1/_2$	$8\,^1/_3$
· $^1/_2$	2	· 8	48	$12\,^1/_2$	$8\,^1/_3$
		· $^1/_3$	2		$8\,^1/_3$
					$8\,^1/_3$

(31) Parece ser a opinião de Revillout, art. citado, pg. 297.

O cálculo para obtenção do *tunnu* ou diferença entre esses quocientes não é expresso no papiro, contudo, o valor $4\,{}^{1}/_{6}$ figura na última linha, finalizando o problema. Esse valor é obtido pela subtração,

$$\left(12+\frac{1}{2}\right)-\left(8+\frac{1}{3}\right)=\frac{25}{2}-\frac{25}{3}=\frac{25}{6}=\frac{24}{6}+\frac{1}{6}=4+\frac{1}{6}$$

Figura 19 – Problema n. 39 do papiro Rhind

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

O próximo problema destacado por Gabaglia na seção 15 é o de n. 40. Nele outra divisão é feita, “100 pães por 5 pessoas, sendo a somma dos quinhões[46] de tres d’essas pessoas igual a 7 vezes a somma dos quinhões das outras duas”. Gabaglia afirma que apesar de não figurar explicitamente no enunciado do problema, conclui-se do cálculo que as cinco porções obtidas formam uma progressão aritmética. Além dos quocientes (porções ou partes) pede-se o *tunnu* entre eles, ou seja, a razão da progressão.

Semelhante à explicação dada por Gabaglia, podemos pensar no problema da seguinte maneira.

Se a distribuição é uma progressão aritmética, podemos denominar a o primeiro termo (e também a menor porção de pães), e d a diferença entre os termos (ou ainda, a razão r da P.A), construindo a seguinte sequência,

$$(a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d)$$

Antes de prosseguir com a resolução é preciso destacar que embora Ahmes não tenha mencionado “como a obteve, nem d’onde a tirou”, a diferença $5\,{}^{1}/_{2}$ é utilizada desde o princípio da resolução do problema. Segundo Gabaglia,

[46] Por quinhões entenda-se quociente.

A differença média $4\,^1/_6$ »

A analyse do problema mostra que Ahmes dividio á egypcia 50, primeiro por 4 e depois por 6, obtendo os respectivos quocientes: $12\,^1/_2$ e $8\,^1/_3$; em seguida, certamente como prova, escreveo os quatro quinhões iguaes a $12\,^1/_2$ e os seis iguaes a $8\,^1/_3$; e finalmente, terminou dando a *differença média* $4\,^1/_6$, isto é, $12\,^1/_2 - 8\,^1/_3$. E' mais ou menos a marcha que segue-se ainda hoje em questão semelhante.

No n. 40 deve-se dividir 100 pães por 5 pessoas, sendo a somma dos quinhões de tres d'essas pessoas igual a 7 vezes a somma dos quinhões das outras duas, e ainda mais, o que sem vir explicito no enunciado conclue-se do calculo, formando os cinco quinhões uma progressão arithmetica; e pede-se a differença (o *tunnu*) entre esses quinhões, isto é, pede-se a rasão da progressão.

Eis a traducção d'esse problema:

« 100 pães por 5 pessoas: $^1/_7$ das tres primeiras é (igual a) das duas ultimas pessoas, qual é a differença?

Faz como isto é, a differença $5\,^1/_2$.

	·1	23
	·1	$17\,^1/_2$
	·1	12
	·1	$6\,^1/_2$
	·1	1
em somma		60
	·$^2/_3$	40
multiplica o numero: $1\,^1/_2$ vezes 23, dá agora		$38\,^1/_3$
	$17\,^1/_2$	$29\,^1/_6$
	12	20
	$6\,^1/_2$	$10\,^2/_3\,^1/_6$
	1	$1\,^2/_3$
	em somma 60	em somma 100.»

Analysando-se esse problema, nota-se desde logo que Ahmes toma uma differença, igual a $5\,^1/_2$, sem dizer como a obteve, nem d'onde a tirou. Provavelmente, essa differença foi obtida por considerações e razões theoricas, cuja explanação era dada em trabalhos de ordem mais elevada que o papyro Rhind e que se perderam. O que, porém, é fóra de duvida é Ahmes mandar entrar no calculo com semelhante valor, empregando a fórmula technica: faça como isto é, significando que elle tinha certeza do que fazia executar. Com effeito, o

> Provavelmente, essa differença foi obtida por considerações e razões theoricas, cuja explanação era dada em trabalhos de ordem mais elevada que o papyro Rhind e que se perderam. O que, porém, é fóra de duvida é Ahmes mandar entrar no calculo com semelhante valor, empregando a fórmula technica: faça como isto é, significando que elle tinha certeza do que fazia executar. (GABAGLIA, 1899, p. 58)

Após essas considerações iniciais o autor explica que o valor $5\,{}^{1}/_{2}$ não pode ser considerado como "arbitrariamente fornecido pelo acaso", mostrando que tem sentido e aparece logicamente na resolução. Para reforçar essa conclusão Gabaglia procede, como indicado no enunciado do problema, admitindo,

$$7\big(a+(a+d)\big)=(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)$$

Ou ainda,

$$(1)\ 2d=11a\ \leftrightarrow d=\tfrac{11}{2}a\ \leftrightarrow d=5\tfrac{1}{2}a$$

Por outro lado, se somarmos todas as porções ou termos da P.A, devemos obter o valor 100 como resultado, isto é,

$$a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)=100$$
$$(2)\ 5a+10d=100$$

Isolando a em (2) e o substituindo em (1), facilmente é obtido o valor de d, ou seja, da diferença entre as porções ou o chamado *tunnu.*

$$a=20-2d$$
$$d=\frac{11}{2}a\ \leftrightarrow d=\frac{11}{2}(20-2d)\ \leftrightarrow d=11(10-d)\leftrightarrow d=110-11d$$
$$12d=110\ \leftrightarrow d=\frac{110}{12}\ \leftrightarrow d=9\frac{1}{6}$$

Deve-se mencionar ainda que "Por motivos que ignoram-se o *tunnu* pedido que é $9\frac{1}{6}$ não é dado".

valor de $5\,{}^{1}/_{2}$ não póde ser considerado como arbitrariamente fornecido pelo acaso; ao contrario, elle apparece logicamente na solução; pois, querendo-se actualmente resolver a questão acima, tem-se, chamando a o menor quinhão e d a differença constante entre os quinhões:

$$7(a + a + d) = a + 2d + a + 3d + a + 4d$$

ou

$$2d = 11a$$

e

$$d = {}^{11}/_{2}\, a = 5\,{}^{1}/_{2}\, a$$

Uma outra equação obtem-se facilmente, notando-se ser 100 a somma de todos os quinhões, isto é:

$$5a + 10d = 100.$$

Eliminando-se a tem-se o valor de d.

Ahmes não seguia, porém, essa marcha, e sim a seguinte que explicamos com os nossos actuaes symbolos algebricos:

Sabendo que, sendo a o menor quinhão, os outros são

$$a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d;$$

e que a differença constante entre os quinhões é $5\,{}^{1}/_{2}$ de a, concluia que os diversos quinhões se podiam exprimir em relação ao menor; assim:

$$23a, 17\,{}^{1}/_{2}\, a, 12a, 6\,{}^{1}/_{2}\, a \text{ e } 1a.$$

A somma d'esses diversos coefficientes dá 60; logo o total contém 60 vezes o quinhão menor; e como Ahmes sabia que ${}^{2}/_{3}$ de 60 é 40, o que é expresso no calculo, concluia que 100 pães, o total a dividir, é igual a $60 + {}^{2}/_{3}\, 60$ e portanto que o quinhão menor, a, é $1 + {}^{2}/_{3}$. Para ter os outros quinhões, faz as multiplicações de a por $1, 6\,{}^{1}/_{2}, 12, 17\,{}^{1}/_{2}$ e 23, obtendo resultados parciaes que somma para verificar, encontrando o dividendo 100.

Por motivos que ignoram-se, o *tunnu* pedido que é $9\,{}^{1}/_{6}$ não é dado.

Divisões, como já ficou dicto, em partes desiguaes não são só encontradas em ns. 39 e 40.

As partes que cada pessoa irá receber podem ser encontradas pela substituição do valor de d em (2), assim determinado o primeiro termo da progressão. Conhecendo a e d, os demais termos ou as porções que cada pessoa irá receber, podem facilmente ser obtidos.

Figura 20 – Problema n. 40 do papiro Rhind

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

No problema n. 63, "Ahmes divide 700 pães por 4 pessoas, de modo que os quinhões correspondentes sejam proporcionaes a ${}^{2}/_{3}, {}^{1}/_{2}, {}^{1}/_{3}$ e ${}^{1}/_{4}$". Para Gabaglia a solução do problema é "verdadeiramente admirável e melhor não se faz actualmente". Vejamos qual foi o procedimento empregado pelo escriba. O primeiro passo é efetuar a soma das frações ${}^{2}/_{3}, {}^{1}/_{2}, {}^{1}/_{3}$ e ${}^{1}/_{4}$,

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}.$$

Em seguida, divide 1 por essa soma. O resultado obtido é ${}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{14}$,

$$\frac{1}{(1+{}^{1}/_{2}+{}^{1}/_{4})}=\frac{1}{{}^{7}/_{4}}=\frac{4}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$$

o próximo passo é multiplicar $\frac{1}{2}+\frac{1}{14}$ por 700,

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{14}\right)\times 700=\frac{4}{7}\times 700=400.$$

Finalmente o escriba toma, sucessivamente, ${}^{2}/_{3}, {}^{1}/_{2}, {}^{1}/_{3}$ e ${}^{1}/_{4}$ de 400. Para verificar o resultado as diversas partes produzidas são somadas.

No problema n. 63, Ahmes divide 700 pães por 4 pessoas, de modo que os quinhões correspondentes sejam proporcionaes a $^2/_3, ^1/_2, ^1/_3$ e $^1/_4$. A solução do problema é verdadeiramente admiravel e melhor não se faz actualmente. Ahmes effectua a somma $1 + ^1/_2 + ^1/_4$ das fracções acima; em seguida divide 1 por essa somma e multiplica o quociente (= $^1/_2 + ^1/_{14}$) por 700; obtem para resultado 400. Depois, toma sucessivamente $^2/_3, ^1/_2, ^1/_3$ e finalmente $^1/_4$ de 400, sommando os diversos resultados para verificar se dá 700. E' o que se faz hoje; na verdade, seja dividir *A* em partes proporcionaes á *a*, *b*, *c*, *d*; essas partes sejam *x*, *y*, *z*, *t*; vem:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{t}{d} = \frac{1}{a+b+c+d} \cdot A,$$

d'onde

$$x = \frac{1}{a+b+c+d} \cdot Aa; \qquad y = \frac{1}{a+b+c+d} \cdot Ab$$

$$z = \frac{1}{a+b+c+d} \cdot Ac; \qquad t = \frac{1}{a+b+c+d} \cdot Ad$$

A forma da resolução do problema demonstra que Ahmes conhecia profundamente a theoria das proporções.

No problema n. 65, Ahmes resolve o seguinte:

Dividir 100 pães por 10 pessoas, de sorte que os quinhões iguaes de sete d'estas sejam, cada um, a metade dos quinhões, tambem iguaes, das outras tres pessoas.

Para isso, Ahmes addicciona todos os quinhões depois de igualados e encontra para total o numero 13; isto é, considera os sete quinhões menores sommados aos tres maiores e obtem 13 quinhões, porque os ultimos equivalem a seis dos primeiros. Em seguida, procura o numero que multiplicado por 13 dá 100; acha ser $7 + ^2/_3 + ^1/_{39}$ que é em pães a porção a que tem direito cada uma das 7 primeiras pessoas consideradas; a porção das outras, obtem-se facilmente pela duplicação de $7 + ^2/_3 + ^1/_{39}$. Ahmes termina verificando a exactidão do calculo, escrevendo para isso as dez parcellas e mostrando que dão em somma 100.

16.– Ahmes no problema de n. 64, occupa-se com a divisão em porções desiguaes de 10 *besas*(32) de trigo por 10 pessoas, sendo a differença entre a porção de cada pessoa e a da seguinte de $^1/_8$ de *besa*: o que corresponde a obter os termos de uma progressão arithmetica, dados a rasão = $^1/_8$, o numero dos termos = 10, e a sua somma = 10.

(32) O *besa* é uma medida egypcia.

Seja p o número de pães e supondo que um homem possui $\frac{2}{3}p$, $\frac{1}{2}p$, $\frac{1}{3}p$ e $\frac{1}{4}p$ fazendo um total de 700 pães, temos,

$$\frac{2}{3}p+\frac{1}{2}p+\frac{1}{3}p+\frac{1}{4}p=700 \leftrightarrow p\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=700$$

ou seja,

$$p=\frac{700}{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)} \leftrightarrow p=\frac{1}{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}\times 700 \leftrightarrow p=400.$$

A penúltima igualdade consiste no mesmo procedimento feito por Ahmes para resolver o problema.

Sendo $p=400$, a etapa seguinte é calcular o valor de cada uma das partes,

$$\frac{2}{3}\times 400=266+\frac{2}{3}$$
$$\frac{1}{2}\times 400=200$$
$$\frac{1}{3}\times 400=133+\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{4}\times 400=100$$

Total 700.

Figura 21 – Problema n. 63 do papiro Rhind

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

Ahmes resolve este problema com uma mestria que pode-se justamente denominar maravilhosa, como é facil de pela traducção litteral: «Eu acho a media: 1 besa[33]; deduz 1 de 10, resta: 9; faz a metade da differença: $^1/_{16}$ do besa; toma-o 9 vezes, isto vos dá: $^1/_2 + ^1/_{16}$; ajunta-o á media; deduz $^1/_8$ de besa para cada pessoa até que chegue ao fim. Faça como isso é

$$1 + ^1/_2 + ^1/_{16}\,;1 + ^3/_8 + ^1/_{16}\,;1 + ^1/_4 + ^1/_{16}\,;1 + ^1/_8 + ^1/_{16}\,;$$
$$1 + ^1/_{16}\,;^7/_8 + ^1/_{16}\,;^3/_4 + ^1/_{16}\,;^5/_8 + ^1/_{16}\,;^1/_2 + ^1/_{10}\,;^3/_8 + ^1/_{16}\,;$$

em somma; 10».

Antes de passar adiante e para evitar qualquer duvida, convém chamar a attenção para as fracções aih escriptas e algumas das quaes têm numeradores differentes de 1; significam sub-divisões do besa que como anteriormente vimos tem uma notação muito simples; assim no papyro, o que acima representamos á moderna por $^3/_8$, acha-se indicado pelo algarismo tres dominando o symbolo para $^1/_8$ de besa.

Chamando em uma progressão arithmetica d a razão, a e l respectivamente o primeiro e o ultimo termo, s e n tambem a somma e o numero de termos, vem as seguintes igualdades que correspondem aos preceitos dados por Ahmes:

$$^s/_n = 1; n - 1 = 9; ^d/_2 = ^1/_{16}\,; (n-1).\,^d/_2 = ^1/_2 + ^1/_{16}\,;$$
$$(n-1).\,^d/_2 + ^s/_n = 1 + ^1/_2 + ^1/_{16} = l.$$

Para ter os outros termos que Ahmes escreve todos, subtrahe-se sucessivamente $^1/_8$. A somma de todos elles deve dar 10; é verificação que Ahmes faz.

As igualdades supra, rigorosamente equivalentes ás proposições de Ahmes, implicam o conhecimento de uma fórmula que dê o ultimo termo, l, de uma progressão por differença em funcção de s, n e d. Presentemente, em nossas escolas, chega-se a essa fórmula, partindo-se de outras duas, obtidas pelo raciocinio, a saber:

$$s = (a + l).\ \ n|2 \qquad \text{e} \qquad l = a + n - d.$$

Da primeira tira-se

$$a = 2s|n - l$$

que, substituida na segunda, conduz á

[33] Aih, no papyro ha um erro a que já nos referimos; em vez de 1 besa lê-se ½ besa. O resto do calculo evidencia o erro.

Questão semelhante é tratada no problema n. 65, nele “Ahmes divide 100 pães por 10 pessoas, de sorte que os quinhões iguaes de sete d’estas sejam, cada um, a metade dos quinhões, tambem iguaes, das outras três pessoas”. Segundo Gabaglia, para resolver o problema o escriba soma todas as partes que cada pessoa irá receber obtendo 13, em seguida procura o número que multiplicado por 13 resulta em 100.O procedimento da resolução pode ser escrito da seguinte maneira,

$$2p + 2p + 2p + 7p = 100$$

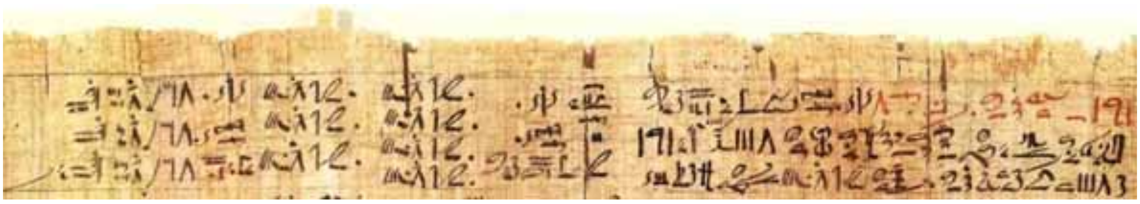
$$13p = 100 \ \leftrightarrow p = \frac{100}{13}$$

$$p = 7 + \frac{2}{3} + \frac{1}{39},$$

sendo p o número de pães.

Ou seja, sete homens irão receber $7 + \frac{2}{3} + \frac{1}{39}$ pães enquanto que os outros três receberão o dobro $15 + \frac{1}{3}$ pães. Para verificar a exatidão do cálculo, Ahmes escreve todas as dez parcelas seguidas do sinal que representa o 100 (total de pães).

Figura 22 – Problema n. 65 do papiro Rhind



Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

Dois problemas são abordados por Gabaglia na seção “16. Progressões arithmetica e geometrica”, são eles os de n. 64 e n.79, cujos conteúdos podem ser relacionados à progressão aritmética e geométrica respectivamente. O problema n. 64 “occupa-se com a divisão em porções desiguaes de 10 *besas* de trigo por 10 pessoas, sendo a differença entre a porção de cada pessoa e a da seguinte de $^1/_8$ de *besa*”. Para o autor a resolução deste problema, conforme exposta no papiro, é de “uma mestria que pode-se justamente denominar maravilhosa” e por isso merece

$$l = (n-1).\,d|2 + s|n,$$

identica a empregada no papyro. O modo como foi em epoca tão longinqua deduzida, nos escapa completamente. Parece-nos certo, como dá-se em outros problemas, que a demonstração ou explicação da fórmula empregada exista em trabalhos theoricos de caracter diverso do de Ahmes que só considerava questões praticas. Alem de muitas outras provas, a fórma da phrase assim parece indicar; com effeito, Ahmes depois de dizer «eu acho a media» emprega o imperativo segunda pessôa: deduz, faz, toma, etc.

Igualmente notavel é o exercicio de calculo numerico que na edicção do papyro está sob n. 79, pois delle se deduz o conhecimento que já naquella epoca havia sobre progressão geometrica, cuja somma obtinha-se pelo mesmo processo que ensinamos em nossos cursos.

Eis a copia do exercicio:

« Uma escala (?)

	1	2801	escripto	7
	2	5602	gato	49
	4	11204	camondongo	343
			cevada	2401
total		19607	besa	16807
			total	19607 ».

O exercicio principia por uma palavra *suteck* até então desconhecida e que Eisenlohr em duvida traduz por escala. O seu objecto é sommar as cinco primeiras potencias de 7, para o que ha indicados dous processos. Um consistindo em escrever as cinco potencias, consideral-as parcellas e sommal-as: é o processo directo, espontaneo; o outro, porém, é um producto da reflexão, exige o conhecimento profundo da theoria das progressões, consistindo na multiplicação por 7 do numero 2801.

Como Ahmes obteve o numero 2801? E' a pergunta que não pode ser respondida pelo que ha no papyro.

Actualmente, tendo de sommar as n primeiras potencias de um certo numero a, escreve-se:

$$s = a + a^2 \ldots + a^n = a(1 + a \ldots + a^{n-1}) = a.\frac{a^n - 1}{a - 1}$$

Fasendo-se $a = 7$, vem

ser notada.

Juntamente com uma “traducção litteral”, Gabaglia relaciona a resolução do problema com procedimentos que dizem respeito ao cálculo de progressões aritméticas de sua época (p. 61-62). Será notado adiante que a descrição do cálculo conforme feita por Ahmes leva a conclusão de que o antigo escriba conhecia uma fórmula para calcular o último termo de uma progressão aritmética.

Para um melhor entendimento do leitor reescrevemos a interpretação de Gabaglia utilizando notação moderna e supomos a medida egípcia *besa* como equivalente ao nosso *quilo* (kg).

Problema n. 64: Dividir 10 quilos de trigo entre 10 pessoas, de modo que a diferença comum entre o que cada um recebe seja $^1/_8$ kg de trigo.

Resolução: Levando em consideração que o problema pode ser interpretado como uma progressão aritmética de razão $r = {}^1/_8$, com $n = 10$ termos e soma dos termos $Sn = 10$ e, sabendo que

(1) $a_n = a_1 + (n-1).r$ (Fórmula do termo geral)[47]

e,

(2) $S_n = n.\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)$ (Soma dos termos de uma P.A finita),

podemos isolar a_1 em (2), obtendo

$$(3)\ a_1 = \frac{2Sn}{n} - a_n$$

Substituindo (3) em (1), vem

$$a_n = \left(\frac{2Sn}{n} - a_n\right) + (n-1).r \leftrightarrow 2a_n = \frac{2Sn}{n} - a_n + (n-1).r$$

[47] Em Gabaglia (1899, p. 62), a fórmula do termo geral aparece erroneamente escrita $l = a + n - d$, sendo o correto $l = a + (n-1) \times d$.

$$s = 7.\frac{16807 - 1}{7 - 1} = 7.2801.$$

E' o que Ahmes fez.

Correspondente a cada uma das potencias de 7, ha certas palavras: escripto, gato etc que á principio pareceram os nomes das potencias, assim como *quadrado* significa a 2ª potencia, *cubo* a 3ª; Rodet, porem, apresentou uma hypothese que é geralmente aceita, pois não se podia explicar a ligação entre os objectos indicados pelas palavras egypcias e as potencias successivas de um numero. Em logar das palavras escriptas em frente ás potencias se referirem a estas, ellas se referem a um certo problema, mais ou menos identico ao seguinte: 7 escriptores possuem cada um 7 gatos; cada gato agarrou 7 camondongos; cada camondongo comera 7 espigas de um cereal qualquer, cada espiga poderia, sendo plantada, produzir 7 besa de grãos; pede- se o numero de besas.

17.– Interessantes observações arithmeticas podem ser feitas em muitos outros problemas; porém, conduziriam a um estudo que escaparia aos limites simples e despretensiosos d'essas linhas. Tocaremos apenas em alguns pontos que nos parecem dignos de attenção.

A questão n. 62, que é uma divisão em partes desiguaes, historicamente póde ser considerada o mais antigo problema de liga conhecido. Dado o peso de um objecto feito de uma liga de tres metais (ouro, prata e estanho), e indicada a proporção segundo a qual os metaes entram na liga, pede-se o peso de cada elemento componente. O peso do objecto é 84 e a proporção dos metaes é a seguinte: em 21 partes, ha 12 de ouro, 6 de prata e 3 de estanho. Ahmes calcula assim: somma as proporções de ouro, prata e estanho, o que dá 21; procura a relação entre 84 e 21 que é 4; em seguida multiplica 4 por 12 para ter o peso do ouro, por 6 para ter o da prata e por 3 para ter o do estanho; e finalmente tira a prova da operação, sommando os tres productos cujo total é 84.

No problema n. 72 trata-se de distribuir em um sacrificio religioso uma certa quantidade de pães segundo a razão $10 : 100$. Consiste em determinar o valor de x na proporção:

$$10 : 100 :: 45 : x$$

Ahmes emprega a seguinte extranha marcha: subtrae 10 de 45 (= 35); divide 35 por 10 (= 3 1|2); multiplica 3 1|2 por 100 (= 35), e ao ultimo resultado somma 100, obtendo 450 que é valor procurado.

A marcha adoptada por Ahmes equivale com os nossos symbolos á seguinte: seja $a : b :: c : x$, faça-se ou seja,

$$(4)\ a_n = \frac{Sn}{n} + \frac{r}{2}(n-1)$$

Segundo Gabaglia, seria esta última fórmula (4) conhecida por Ahmes. Apesar do “modo como foi em epoca tão longinqua deduzida, nos escapa complemente”. Além disso, o autor faz a seguinte afirmação,

> Parece-nos certo, como dá-se em outros problemas, que a demonstração ou explicação da fórmula empregada exista em trabalhos theoricos de caracter diverso do de Ahmes que só considerava questões praticas. (GABAGLIA, 1899, p. 63)

Dando continuidade a resolução do problema, se substituirmos as informações dadas no enunciado em (4), temos,

$$a_1 = \frac{10}{10} + \left(\frac{1/8}{2} \times 9\right) = 1 + \frac{9}{16}$$

ou ainda,

$$a_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$$

Logo, o primeiro termo desta P.A é $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$. Os próximos termos podem ser obtidos pela subtração de $1/8$ a cada termo anterior. Matematicamente, $a_n = a_{n-1} - \frac{1}{8}$.

Ou seja, a primeira pessoa receberia $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16}$ kg de trigo, a segunda $1 + \frac{3}{8} + \frac{1}{16}$ kg, a terceira $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$ kg, a quarta $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ kg, a quinta $1 + \frac{1}{16} + \frac{7}{8}$ kg, a sexta $\frac{7}{8} + \frac{1}{16}$ kg, a sétima $\frac{3}{4} + \frac{1}{16}$ kg, a oitava $\frac{5}{8} + \frac{1}{16}$ kg, a nona $\frac{1}{2} + \frac{1}{16}$ kg e a décima e última pessoa receberia $\frac{3}{8} + \frac{1}{16}$ kg de trigo.

$$\frac{c-a}{a} \times b + b$$

e tem-se o valor de x. Effectivamente,

$$\frac{c-a}{a} \times b + b = \frac{cb - ab + ab}{a} = \frac{cb}{a}$$

No problema n. 66, Ahmes dá a producção annual, a saber 10 *beschas*, de uma certa substancia, e pede a parte correspondente a um dia. A solução é a seguinte: reduz 10 *beschas* a um de seus submultiplos, o *ro*, e encontra 3200; reduz o anno em dias, o que dá 365; divide o primeiro numero pelo segundo e obtem o resultado que é $8 + 2|3 + 1|10 + 1|2190$ *ros*. E' o que em identicas condições far-se-hia ainda hoje.

As paginas seguintes conterão ainda observações sobre os processos arithmeticos de Ahmes.

Por fim Gabaglia chama atenção para um ponto importante “antes de passar adiante e para evitar qualquer dúvida”, sobre o uso de frações diferentes das unitárias neste problema. Segundo o autor o uso foi permitido somente quando as frações se tratavam de subdivisões de algumas unidades de medida, nesse caso o *besa*.

Figura 23 – Problema n. 64 do papiro Rhind

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

O segundo problema destacado nesta seção é o “igualmente notavel” n. 79, “delle se deduz o conhecimento que já naquella epoca havia sobre progressão geometrica”. Para Gabaglia o objetivo do problema é “sommar as cinco primeiras potências de 7”, sendo apresentados, por Ahmes, dois procedimentos de cálculo. O primeiro “é o processo directo, espontaneo; o outro, porém, é um producto da reflexão, exige o conhecimento profundo da theoria das progressões”.

Problema 79: Dada a progressão geométrica (7, 49, 343, 2301, 16807), calcule sua soma.

Resolução: Pelo primeiro procedimento, para encontrar a soma dos termos basta somá-los como fazemos atualmente.

$$
\begin{array}{rr}
 & 7 \\
 & 49 \\
 & 343 \\
+ & 2301\ [2401] \\
 & 16807 \\
\hline
 & 19607
\end{array}
$$

Apesar de Gabaglia não ter percebido o erro que figura no quarto termo da progressão, observamos que ao invés do número 2401 Ahmes escreveu 2301. Isso parece ter sido um simples erro de cópia, já que a soma é calculada como se 2401 fosse o quarto termo da sequência.

O segundo procedimento consiste da multiplicação de 7 por 2801. Sobre os meios que levaram Ahmes a deduzir o número 2801, Gabaglia afirma: “É pergunta que não pode ser respondida pelo que ha no papyro”.

Apresentamos a seguir uma hipótese sobre como o escriba pode ter chegado a multiplicação de 7 por 2801. Se considerarmos a sequência $P = (7, 49, 343, 2401, 16807)$ como uma progressão geométrica de cinco termos, para descobrir a soma S_5 de P, podemos de forma intuitiva somar termo a termo a progressão:

$S_1 = a_1 = r$, neste caso o primeiro termo é igual a sua razão.

$S_2 = a_1 \times r + S_1$, como $S_1 = r$, podemos substituir na segunda soma, obtendo:

$S_2 = (a_1 \times r) + r$

$S_3 = (a_2 \times r) + S_2$, como $S_2 = (a_1 \times r) + r$, temos a terceira soma:

$S_3 = (a_2 \times r) + [(a_1 \times r) + r]$

$S_4 = (a_3 \times r) + S_3$, como $S_3 = (a_2 \times r) + [(a_1 \times r) + r]$, substituindo teremos:

$S_4 = (a_3 \times r) + \{(a_2 \times r) + [(a_1 \times r) + r]\}$

$S_5 = (a_4 \times r) + S_4$, como $S_4 = (a_3 \times r) + \{(a_2 \times r) + [(a_1 \times r) + r]\}$, temos a soma:

$S_5 = (a_4 \times r) + \big\{(a_3 \times r) + \{(a_2 \times r) + [(a_1 \times r) + r]\}\big\}$, ou ainda

$S_5 = a_4 \times r + a_3 \times r + a_2 \times r + a_1 \times r + r$, colocando r em evidência, temos:

$S_5 = r(1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$, com r igual a razão da progressão e os a_{ni} os termos de P.

Generalizando temos $S_n = r(1 + a_1 + \cdots + a_{n-1})$.

Usando os dados do problema e pelo exposto acima, temos a seguinte soma para o problema n. 79:

$$S_5 = 7(1 + 7 + 49 + 343 + 2401),$$

portanto, para somar os 5 termos desta progressão, basta fazer:

$$S_5 = 7 \times 2801 = 19607.$$

Considerando-se o que se sabe atualmente sobre uma progressão geométrica, esta é uma explicação moderna para a multiplicação feita por Ahmes. No entanto, com base no que Gabaglia expressa sobre o problema não é possível concluir que escriba conhecia uma das fórmulas para somar termos de uma progressão geométrica finita, desde que o primeiro termo seja igual a razão.

Figura 24 – Problema n. 79 do papiro Rhind

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

Antes de finalizar os comentários da seção 16, uma última observação sobre o problema n. 79 deve ser feita. Segundo Gabaglia, o francês Léon Rodet sugeriu uma explicação para a ligação entre os objetos indicados pelas palavras egípcias com as suas respectivas potências, ou seja,

> 7 escriptores possuem cada um 7 gatos; cada gato agarrou 7 camondongos; cada camondongo comera 7 espigas de um cereal qualquer, cada espiga poderia, sendo plantada, produzir 7 besa de grãos; pede-se o numero de besas. (RODET, *apud* GABAGLIA, 1899, p. 64)

O historiador Moritz Cantor também fez uma interpretação ao problema n. 79. em 1907 (EVES, 1983, p. 162-164), ele ainda viu neste problema um precursor de um problema que era popular na Idade Média e que foi escrito por Fibonacci em seu Liber Abbaci (1202),

> Há sete velhas mulheres na estrada para Roma. Cada mulher tem sete mulas; cada mula carrega sete sacos; cada saco contém sete pães; com cada pão há sete facas; e cada faca está em sete bainhas. Mulheres, mulas, sacos, pães, facas e bainhas, quantos estão na estrada Roma? (FIBONACCI, 1202 *apud* EVES, 1983, p. 163, tradução nossa)

Rodet ou Cantor, quem primeiramente pode ter observado a semelhança entre o problema do Liber Abbaci com o problema do papiro Rhind? Pelo estudo feito até o momento, podemos concluir que àquele que mais se aproximou com a obra de Fibonacci foi o francês Léon Rodet, o que evidentemente fica claro na seção 11 do livro de Gabaglia.

Na seção 17 Gabaglia anuncia que irá fazer “ligeiras considerações sobre alguns problemas”, são eles os de número 62, 66 e 72. Para o primeiro destes o autor dá uma explicação descritiva do procedimento matemático sobre o qual o cálculo foi feito e faz sua exposição segundo o método originalmente empregado pelo escriba Ahmes. Explorando as informações dadas por Gabaglia uma maneira de reescrever o problema seria:

Problema n. 62: (Divisão em partes desiguais). Um objeto feito de três metais – ouro, prata e estanho – pesa o valor absoluto 84. Sabe-se ainda que as proporções relativas aos metais presentes no objeto são: 12 para o ouro, 6 para a prata e 3 para o estanho. Com base nessas informações calcule o peso de cada metal que compõe o objeto.

Resolução:

1º. Soma-se as proporções de cada metal presente no objeto,

$$12 + 6 + 3 = 21$$

2º. Efetua-se a divisão do peso do objeto pela soma das proporções,

$$84 \div 21 = 4$$

3º. Multiplica-se o valor de cada proporção pelo resultado da divisão acima para obter o peso de cada metal presente no objeto,

Peso do ouro: $12 \times 4 = 48$

Peso da prata: $6 \times 4 = 24$

Peso do estanho: $3 \times 4 = 12$

4º. Soma-se o peso de cada metal para verificar o resultado,

$$48 + 24 + 12 = 84$$

Antes de comentarmos a respeito da interpretação que Gabaglia deu ao problema n. 62, vejamos o que Peet (1923) menciona sobre o assunto, e em seguida analisemos a interpretação dada por Chace (1927),

> Existe um pouco de dificuldade em dar o sentido matemático correto desse problema. Eisenlohr o fez em 1877. Mas pode-se duvidar ainda em 1923 se é possível dar uma tradução final e absoluta. O problema é que um saco, ou objeto semelhante, contém pesos iguais (penso que isso nunca afirmou-se em tantas palavras) de ouro, prata e chumbo. O valor total do saco é 84 anéis, e também é dado o preço em *deben* de cada metal. O problema é encontrar o peso de cada metal no saco. [...] A pista para corrigir a tradução reside em perceber, como Gardiner foi o primeiro a fazer[48], que é, na frase "Adicione o que é dado para cada anel de metal", a palavra anel é um erro para deben. (PEET, 1923, p. 105, nota e grifo do autor, tradução nossa)
>
> *Problema n. 62*
>
> *Exemplo de cálculo do conteúdo de um saco com vários metais preciosos. Suponha que é dito a você: Um saco contendo pesos iguais de ouro, prata e chumbo, foi comprado por 84 sha'ty[49]. Qual é o total de cada metal precioso, que é dado por um deben[50] de ouro ser 12 sha'ty, por um deben de prata 6 sha'ty, e por um deben de chumbo 3 sha'ty?*
>
> Adicionar aquilo que é dado em *deben* de cada metal precioso. O resultado é 21 *sha'ty*. Multiplique 21 então até obter 84, 84 *sha'ty* para que esse saco seja comprado. O resultado é 4, que é o número de *deben* de cada metal precioso.
>
> *Faça assim*:
>
> Multiplique 12 por 4 obtendo 48 *sha'ty* de ouro no saco, Multiplique 6 por 4 obtendo 24 *sha'ty* de prata, Multiplique 3 por 4 obtendo 12 *sha'ty* de chumbo, Multiplique 21 por 4 obtendo 84 *sha'ty* ao todo.
>
> [...] O papiro não diz que o saco contém pesos iguais de ouro, prata e chumbo, mas na solução o autor procede como se essa condição fosse entendida. (CHACE, 1927, p. 101, grifos do autor, nota e tradução nossa)

De acordo com de Peet (1923), podemos supor que o problema possui certa complexidade e que devido a dificuldades com a tradução, interpretações equivocadas foram feitas. Dessa maneira alguns pontos precisam ser esclarecidos, em primeiro lugar, apesar de não ser explícito no problema, os três metais contidos na mala possuem o mesmo peso, em segundo lugar, a finalidade do problema é descobrir o *peso* de cada metal e não o *valor* de cada metal. Essa dúvida pode ter ocorrido porque em uma frase da resolução do problema a palavra *ring* (idem a sha'ty) é escrita erroneamente no lugar de deben.

---

[48] "Ä.,Z, 43, 41-46", (PEET, 1923, p. 105).

[49] Segundo Chace (1927, p. 101, tradução nossa): "O *sha'ty* foi uma marca, e a palavra aqui representa uma unidade de valor (ver Weill, 1925)".

[50] Segundo Chace (1927, p.101, tradução nossa): "O *deben* foi uma unidade de peso, igual a aproximadamente 91 gramas".

Se compararmos as interpretações de Gabaglia e Chace (1927), notamos grande semelhança nos cálculos efetuados, no entanto, parece que ambos entenderam o problema de modos distintos.

Como vimos anteriormente, Gabaglia inicia sua menção ao problema afirmando que 84 é o peso do objeto de metal, por consequência, acredita que a proporção refere-se aos pesos de cada componente da “liga” e assim estabelece a relação entre o peso do objeto e a soma dos pesos proporcionais, chegando a um resultado igual a 4. Por fim, para descobrir os pesos de cada metal presente no objeto é preciso apenas multiplicar o seu peso proporcional por 4. Conclui o problema com a adição do valor encontrado para os três pesos e cuja soma é 84.

Contudo, para Chace (1927), o número 84 representa o valor “pago” (em sha‘ty), pela bolsa que contém os metais, enquanto que a proporção representa o valor de cada metal por 1 deben. Para resolver o problema Ahmes teria somado os valores proporcionais dos metais chegando a 21 sha‘ty por 1 deben. Depois disso, teria multiplicado 21 até obter 84, obtendo como resultado o valor 4[51], ou seja, o peso de cada metal contido na mala é 4. Ao fim do problema estão as multiplicações dos valores proporcionais dos metais por 4, resultando em seus respectivos valores (em sha‘ty), na última linha a multiplicação representada é $21 \times 4 = 84$, caracterizando-se como uma espécie de “prova real”.

Figura 25 – Problema n. 62 do papiro Rhind

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

Sobre o sha‘ty e o deben Robins e Shute (1987), afirmam que é somente no problema n. 62 do papiro Rhind que pesos são mencionados, e que as práticas de

---

[51] Ahmes não menciona o procedimento pelo qual teria feito a multiplicação de 21 para se obter 84. Supomos que foi empregado o método da falsa posição. No próximo capítulo abordamos mais sobre o assunto.

pesagem e de cálculo do valor de metais preciosos para fins de troca eram comuns no Antigo Egito: “Em uma economia que funcionava sem moeda, o shaty talvez funcionou como um dispositivo para indicar o valor contábil para fins de troca” (ROBINS; SHUTE., 1987, p. 50, tradução nossa, grifo do autor).

O próximo problema, o n. 72, é tido como um cálculo de proporção cuja abordagem, segundo Gabaglia, segue uma “extranha marcha”. Supostamente o autor pode ter considerado o desenvolvimento estranho já que para os problemas seguintes (n. 73 e n. 74) a resolução foi feita de uma maneira mais simples, calculando-se apenas uma multiplicação de dois produtos.

Abaixo apresentamos um outro modo de escrever o problema,

Enunciado: 100 pães de *pesu* 10 foram trocados por pães de *pesu* 45. Quantos pães restaram ao fim da troca?

Resolução:

1º. Subtrai-se 10 de 45,

$$45 - 10 = 35$$

2º. Divide-se 35 por 10,

$$35 \div 10 = 3\ 1|2$$

3º. Multiplica-se 3 1|2 por 100,

$$3\ 1|2 \times 100 = 350$$[52]

4º. Ao resultado soma-se 100,

$$350 + 100 = 450$$

Gabaglia não menciona nenhuma unidade de medida relacionada a esse problema, porém autores como Peet (1923), Chace (1927), Clagett (1999) e Gillings

[52] Note que no livro de Gabaglia o resultado desta conta aparece erroneamente como 35.

(1982), o classificam como um *problema de pesu*[53], ou seja, em problemas desse tipo devem ser calculadas trocas de pães, cerveja e às vezes bolo, para as quais o *pesu* mede a [falta de] qualidade desses produtos.

Com relação ao mesmo problema Gillings (1982), apresenta os seguintes questionamentos: “Qual foi o raciocínio por detrás dessa solução redundante? Foi talvez uma técnica mais avançada? Ele estava tentando introduzir algum novo conceito em métodos matemáticos?” (GILLINGS, 1982, p. 133, tradução nossa). Para tentar respondê-los ele faz a seguinte sistematização algébrica para o problema,

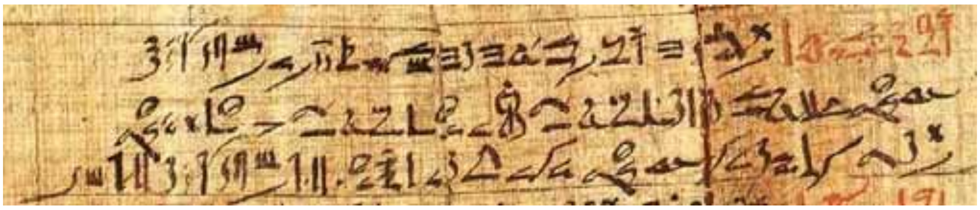
> 1. Se x pães de peso p são trocados por y pães de peso q, encontre y se x, p, e q são conhecidos.
> 2. Encontre o excesso de q sobre p. Isto é $(q - p)$. Divida isso $(q - p)$ por p. Você obtém $\left(\frac{q-p}{p}\right)$.
> 3. Multiplique isso $\left(\frac{q-p}{p}\right)$ por x. Resulta $\left(\frac{q-p}{p}\right)x$. Adicione x a isso. Você obtém $\left(\frac{q-p}{p}\right)x + x$.
> 4. Diga então que é a troca é x pães de peso p.
> 5. Para $\left(\frac{q-p}{p}\right)x + x$ pães de peso q. Então,
>
> $$\begin{aligned} y &= \left(\frac{q-p}{p}\right)x + x \\ &= \left(\frac{q}{p} - 1\right)x + x \\ &= x\frac{q}{p} - x + x \\ &= x \times \frac{q}{p} \end{aligned}$$
>
> Que é a fórmula do escriba ou método para os problemas n. 73 e n. 75 do PMR. (GILLINGS, 1982, p. 134, tradução nossa)

A citação acima, especialmente a última linha, nos leva a pensar se realmente o antigo escriba egípcio chegou a conjecturar uma generalização para o cálculo, deduzindo uma fórmula ou método, para resolver problemas dessa natureza. Para Gillings (1982), tal resolução é admirável, totalmente lógica e elegante, e que nós estamos olhando para um dos mais antigos exemplos de álgebra retórica da história da matemática.

---

[53] Sobre o *pesu* verificar a seção “unidades de medida do papiro Rhind”.

Figura 26 – Problema n. 72 do papiro Rhind



Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

Finalizando a seção 17 Gabaglia comenta brevemente sobre o problema n. 66, sua interpretação não difere de Chace (1927) e Clagett (1999), por exemplo. Contudo, poderíamos reescrever o problema de uma forma mais detalhada e usando outras informações já mencionadas neste trabalho.

Enunciado: A produção anual de certo produto é 10 *hekats*. Calcule a produção diária desse mesmo produto.

Resolução:

1º. Transforma-se 10 *hekats* em um de seus submúltiplos, (o *ro*). Usando a relação $\overline{64}\, hekat = 5\, ro$.

$$\begin{array}{lr} \overline{64}\, hekat & 5\, ro \\ 10\, hekat & x \end{array}$$

$$\frac{x}{64} = 50$$

$$x = 3200$$

Ou seja, $10\, hekats = 3200\, ros$

2º. Transforma-se o ano em dias, (o ano egípcio, assim como o nosso, possui 365 dias).

3º. Calcula-se a divisão:

$$3200 \div 365 = 8,7671 \ldots$$

No entanto, a resposta do problema é dada em frações unitárias.

$$8 + \overline{\overline{3}} + \overline{10} + \overline{2190}\, ro$$

Segundo Chace (1927), Ahmes também apresenta outro resultado equivalente à fração acima, $\overline{64}\,hekat + 3 + \overline{\overline{3}} + \overline{10} + \overline{2190}\,ro$, diz que o produto a que se está referindo é “fat” (gordura) e que sua resolução pode ser generalizada para qualquer problema semelhante a esse, “Faça a mesma coisa em qualquer exemplo como este [...]” (CHACE, 1927, p. 103, tradução nossa).

Figura 27 – Problema n. 66 do papiro Rhind

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

§ 4.º ALGEBRA DO PAPYRO RHIND

SUMMARIO: – 18. Considerações geraes sobre os problemas do *hau*.– 19. A 1ª serie dos problemas do *hau*.– 20. A 2ª serie dos problemas do *hau*.– 21. Modo notavel de sommar fracções. – 22.Opinião de Rodet sobre os problemas do *hau*. – 23. Critica dos professores E. e V. Revillout ao trabalho de Rodet. – 24. Origem da algebra. – 25. Breve comparação entre Ahmes e Diophantos. – 26. A algebra de alguns escriptores gregos. – 27. Signaes algebricos.

18. No presente paragrapho serão considerados problemas do mais alto interesse, pois já nelles encontrão-se conhecimento algebricos relativamente importantes, e sufficientes para arrancar a Diophantos a gloria que geralmente lhe era attribuida de «inventor da algebra»[34]. Igualmente, esses problemas apresentam alguns signaes mathematicos, não sendo hoje, portanto, mais aceitavel attribuir-se a Diophantos a prioridade no emprego dos symbolos algebricos[35].

Esses problemas que no papyro são denominados «calculo do *hau*» correspondem a equação do 1º grão a 1 incognita. *Hau* (ou *hā*) que propriamente significa *montão*, *acervo*, *cumulo*, é a denominação technica da incognita[36] no papyro Rhind.

Os problemas do *hau* acham-se divididos em duas series; uma (ns. 24 a 34) refere-se unicamente a numeros abstractos; a outra (ns. 35 a 38) refere-se a uma medida egypcia, o *bescha*. Os problemas da ultima serie são resolvidos de duas maneiras: em numeros e em subdivisões do bescha.

Em seguida á solução vem a prova, que verifica a exactidão da operação.
Ahmes para resolver esses problemas segue a marcha muito methodica, que póde ser explicada nas seguintes palavras: em primeiro logar, reduz a um só todos os termos que contem a incognita, os quaes pelo ennunciado já se acham separados da quantidade conhecida; a reducção effectua-se de dous modos ou escrevendo simplesmente um em seguida aos outros os termos primitivos, o que equivale a pôr em evidencia a incognita, ou reduzindo os termos fraccionarios a mesma denominação e depois sommando-os. No 1º caso, em que a equação toma a fórma $\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{q}\right)x=C$, Ahmes divide immediatamente á egypcia o termo conhecido pelo coefficiente da incognita e assim resolve a questão; no 2º caso, em que a equação é $\frac{m}{n}x=C$, Ahmes effectua á egypcia a divisão de C por m, e o

---

(34) « C'est le fameuse Diophante d'Alexandrie, l'inventeur de l'Algebre ou du moins le premier écrivain de l'antiquité dans les écrits du quel on trouve des traces de cette ingenieuse invention.» Montucla, H. des math. Part. I, Liv. V, n.VI.
(35) Como faz Lafitte, pag. 319 do vol. 2º, dos «Grands types de l'humanité», onde aliás engana-se quando diz não ter Diophantos signal para igualdade. V. Diophantos of Alexandria, by Heath, pag. 77.
(36) A incognita é no sanscripto *yâvat tâvat* «o quantum»; no arabe *shay* «a cousa» que nas versões para o latim foi *res*, para o italiano *la cosa*, para o allemão *die Coss*, tendo no francez a algebra sido denominada «*règle de la chose*» como se póde ver em Estienne de la Roche (Lyon, 1520).

4.4 § 4.º – Algebra do Papyro Rhind

“Considerações geraes sobre os problemas do *hau*” é a primeira seção do § 4 do livro de Gabaglia. O autor propõe-se agora a considerar problemas “do mais alto interesse”, ou seja, problemas que têm alguma relação com procedimentos algébricos, daí advém o título “Algebra do Papyro Rhind”.

Tendo conhecimento e opondo-se à citação retirada da primeira obra de história geral da matemática, o livro *Historia de las matemáticas* (1758), de Jean Étienne Montucla (1725-1799), Gabaglia conclui que o matemático grego Diofante de Alexandria não foi o primeiro a usar “symbolos algebricos” conforme aí mencionado. Para o autor, o estudo dos problemas do *hau* é suficiente para “arrancar a Diophantos a gloria que geralmente lhe era attribuida de «inventor da algebra»”.

Gabaglia considera *hau* “a denominação technica da incognita no papyro Rhind”, cujo significado é o mesmo de “*montão, acervo, cumulo*”. É com base nessa denominação que pode ter concluído a existência de uma simbologia algébrica no papiro. Outros estudiosos do papiro, a exemplo, Robins e Shute (1987), também consideram esses problemas uma espécie de aproximação à álgebra, contudo, pensam que não existia uma simbologia definida no papiro e sim uma designação verbal que indicava o valor desconhecido, a incógnita. Vejamos: “Embora símbolos algébricos não fossem utilizados, a quantidade desconhecida era designada verbalmente”. (ROBINS; SHUTE., 1987, p. 37, tradução nossa).

Os problemas do *hau* correspondem a cálculos de equações do primeiro grau com uma incógnita e aparecem separados em duas classes, a primeira, “refere-se unicamente a numeros abstractos”, vai do problema n. 24 ao problema n. 34. Os problemas da segunda classe, do n. 35 ao n. 38, referem-se à medida egípcia *bescha*[54] e são resolvidos por duas maneiras: “numeros” e “subdivisões do bescha”.
Segundo Gabaglia, para resolver os problemas de ambas as classes Ahmes seguia uma “marcha muito methodica”, apesar de apresentarem formas diferentes. Os problemas da primeira classe têm a forma $\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{q}\right)x=C$, enquanto que a segunda pode ser generalizada por $\frac{m}{n}\times x=C$.

[54] Ou, em termos modernos, *hekat*.

quociente respectivo multiplica depois por n; parecendo, porém, tambem seguir outro processo que consiste em dividir 1 por $\frac{m}{n}$ e o quociente obtido multiplicar por C.

E' o que demonstrará a analyse que vamos fazer dos problemas do *hau*.

19.– A primeira serie dos problemas do *hau* comprehende questões que pódem ser referidas a typos differentes, como passamos a mostrar:

a) Os quatro primeiros problemas (ns. 24 a 27) correspondem á fórmula: $\frac{1}{m}x + x = a$.

Vejamos a traducção litteral do problema n. 24:

« *Hau*, seo setimo, elle mesmo faz: 19.

$\cdot 1$	7	1	8	$\cdot 1$	$2 + 1/4 + 1/8$
$\cdot 1/7$	1	$\cdot 2$	16	$\cdot 2$	$4 + 1/2 + 1/4$
		$1/2$	4	$\cdot 4$	$9 + 1/2$
		$\cdot 1/4$	2		
		$\cdot 1/8$	1		

Faz como isto é, o *hau*: $16 + 1/2 + 1/8$

$1/7 : 2 + 1/4 + 1/8$, em somma: 19 ».

O enunciado claramente indica que o fim do problema é resolver a equação $1/7\,x + x = 19$; para isso Ahmes reduz o inteiro a mesma denominação do quebrado e pela somma obtem o numerador 8; em seguida, divide á egypcia 19 por 8, isto é, multiplica 8 até alcançar 19, encontrando: $2 + 1/4 + 1/8$. Esse resultado elle multiplica por 7, e assim consegue o *hau* – a procurada incognita –, que è $16 + 1/2 + 1/8$. Finalmente, termina mostrando que *hau* mais o seo setimo dá: 19.

Poder-se-hia actualmente expôr o processo de Ahmes pelas seguintes igualdades: $x/7 + x = 19$; $8x/7 = 19$; $19/8 = 2 + 1/4 + 1/8$; $19/8 . 7 = (2 + 1/4 + 1/8). 7 = x$.

Os problemas sob ns. 25, 26 e 27 correspondem respectivamente ás equações:

$$1/2\,x + x = 16;\ 1/4\,x + x = 15;\ 1/5\,x + x = 21$$

e se resolvem como a equação acima.

O problema n. 26 é o de enunciado mais explicito, permittindo acompanhar todo o processo, conforme se vê pela traducção seguinte:

« *Hau*, seo quarto, elle mesmo dá: 15; multiplica o numero: 4 faz tu seo quarto, isto é: 1, em somma 5.

Em termos modernos podemos entender o procedimento de Ahmes pelos seguintes passos,

1º. Reunir todos os termos algébricos em um dos membros da igualdade.
2º. Colocar a incógnita em evidência.
3º. Dividir o valor conhecido pelo coeficiente da incógnita.

Isto é,

Exemplo: Seja a equação $7x + \frac{1}{2}x = 3x + 5$, qual o valor de x ?

$7x + \frac{1}{2}x - 3x = 5 \leftrightarrow \ 4x + \frac{1}{2}x = 5$ (1º.)

$\left(4 + \frac{1}{2}\right)x = 5 \ \leftrightarrow \ \left(\frac{9}{2}\right)x = 5$ (2º.)

$x = \frac{5}{\frac{9}{2}} \leftrightarrow x = 5 \times \frac{2}{9}$ (3º.)

$x = \frac{10}{9} \leftrightarrow x = 1 + \frac{1}{9}$

A partir da seção 19 “primeira serie dos problemas do *hau*”, Gabaglia passa a apresentar exemplos dos problemas algébricos do papiro Rhind. A primeira série, ou, primeira classe como chamamos anteriormente, pode ser separada em três tipos de problemas.

O primeiro tipo reúne os problemas n. 24 a n. 27, estes “correspondentes à fórmula: $\frac{1}{m}x + x = a$”. Como exemplo Gabaglia seleciona os problemas n. 24 e n. 26 para apresentar sua tradução e interpretação. Nossa análise do texto conduz ao seguinte,

Problema n. 24:

Resolver a equação $x + \frac{1}{7}x = 19$.

Resolução:

Trabalhando com as frações da equação Ahmes realiza a operação:

$$\left(1 + \frac{1}{7}\right) \times x = \frac{8}{7}x,$$

em seguida toma o valor 8 e pelo método da duplicação faz:

$$19 \div 8 = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

Multiplica o numero: 5 até achar 15.

· 1	5	isto dá agora 3; multiplica: 3 vezes 4				
· 2	10	1	3	1	12	
		2	6	$1/4$	3,	em somma 15
		· 4	12			
	o *hau*:	12				» .

b) Os quatro ultimos problemas desta serie (ns. 31 a 34) correspondem, os de ns. 32 e 34 á fórmula:

$$1/_m x + 1/_n x + x = a$$

e os de ns. 31 á 33 á:

$$2/_3 x + 1/_m x + 1/_n x + x = a$$

Consideremos o problema n. 34, cuja traducção é:

« Hau, seo meio, seo quarto, elle mesmo, isto dá: 10.

· 1	$1 + 1/2 + 1/4$	$1/4 + 1/28\ 1/2$	
2	$3 + 1/2$	$\cdot\ 1/2 + 1/14$	1
· 4	7		
· $1/7\ 1/4$		em somma, *hau*: $5 + 1/2 + 1/7 + 1/14$.»	

Segue-se o «capitulo da prova» de que nos occuparemos adiante.

Analysando-se, ve-se que a equação do problema é:

$$1/_2 x + 1/_4 x + x = 10 \quad \text{ou}$$

$$(1/_2 + 1/_4 + 1)x = 10,$$

d’onde actualmente ter-se-hia: $x = \frac{10}{1/_2+1/_4+1}$; o que de facto fazia tambem Ahmes que procurava o numero pelo qual devia multiplicar $(1/_2 + 1/_4 + 1)$ para obter 10, e que achava ser $5 + 1/_2 + 1/_7 + 1/_{14}$ – o procurado *hau*.

As equações correspondente aos problemas ns. 31, 32 e 33 são respectivamente: $2/_3 x + 1/_2 x + 1/_7 x + x = 33$; $1/_3 x + 1/_5 x + x = 1$; $2/_3 x + 1/_2 x + 1/_7 x + x = 37$.

c) Os problemas ns. 28 e 29, mais complicados do que os que consideramos, assumem tambem outro typo.

O próximo cálculo, novamente por duplicação, opera:

$$\left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) \times 7 = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

Isto é, o *hau* equivale a $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$.

O cálculo é finalizado com a adição do *hau* mais seu um sétimo, cuja soma é 19.

Figura 28 – Problema n. 24 do papiro Rhind

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

Gabaglia também apresenta breve comentário e tradução do problema n. 26. Esse problema tem “o enunciado mais explicito” e consiste da operação $x + \frac{1}{4}x = 15$. Passo a passo o problema segue a mesma ideia do problema considerado anteriormente,

Problema n. 26:

Resolver a equação $x + \frac{1}{4}x = 15$.

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right)x = \frac{5}{4}x = 15$$

$$15 \div 5 = 3$$

$$3 \times 4 = 12,$$

ou seja, a incógnita x ou *hau* equivale a 12. O cálculo é finalizado com a adição do *hau* ao seu um quarto, com soma igual a 12.

O problema n. 28 é o seguinte:

« $^2/_3$ sommado, $^1/_3$ diminuido resta 10.

Faz $^1/_{10}$ deste 10, que dá 1, resta 9.

Seu $^2/_3$ é 6; sommado a elle mesmo igual á 15; seu $^1/_3$: 5.

Si sahir 5, restam 10. Faz como isto é. »

O problema que seria incomprehensivel si unicamente se attendesse ao enunciado laconico da primeira linha, é esclarecido pelo desenvolvimento de calculo das ultimas. Ahmes trata de obter um numero que sommado com seus $^2/_3$ e desta somma, subtrahindo-se a terça parte, dê 10.

Actualmente, ter-se-hia:

$$x + {}^2/_3\, x - {}^1/_3\,(x + {}^2/_3\, x) = 10$$

A solução, verdadeiramente notavel, é dada na segunda linha; infelizmente é de tal laconismo que não se póde saber com certeza o processo empregado. Cantor, em sua Historia da Mathematica, conjectura que Ahmes reduza a equação á forma: $^{10}/_9\, x = 10$. Em seguida, divida 1 por $^{10}/_9$, que dá $^9/_{10} = 1 - {}^1/_{10}$, cujo producto por 10 é o valor da incognita. Parece-me, porém, e talvez com bons fundamentos podesse justificar essa opinião, que Ahmes effectuava operações que hoje representariamos pelas seguintes igualdades:

$$^{10}/_9\, x = 10;\ x = 10. \quad ^9/_{10} = 10. \quad \frac{10-1}{10} = {}^{10}/_{10}\,(10-1) = 10 - {}^{10}/_{10}.$$

As duas ultimas linha do problema contem a prova da operação; com effeito, $({}^2/_3 . 9 + 9) - {}^1/_3\,({}^2/_3 . 9 + 9) = 10$.

Ao problema n. 29 que não se acha separado do anterior por nenhum signal externo, faltam o enunciado e a primeira metade do calculo; porém, póde ser restaurado pela prova conservada nas ultimas linhas.

Eis o problema:

« 1	10	$^2/_3$ 9,	*em somma*: $22\,^1/_2$;	$^2/_3$	20
	$^1/_4$	$2\,^1/_2\,^1/_3$ $7\,^1/_2$,	*em somma*: 30	$^1/_3$	10
	$^1/_{10}$	1			
em somma:		$13\,^1/_2$			»

Figura 29 – Problema n. 26 do papiro Rhind

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

Atualmente esse método de resolução é conhecido por *método da falsa posição* (ROBINS; SHUTE., 1987). Por exemplo, no problema n. 24 o valor 7 seria assumido como um "número experimental", sendo este ditado pela parte fracionária da equação, ou seja,

$$\left(1 + \frac{1}{7}\right) \times 7 = 8.$$

Observa-se que a operação produz o número que deverá ser o divisor do número conhecido. Por isso 19 é dividido por 8.

Do mesmo modo ocorre no problema n. 26 quando o número experimental escolhido seria 4,

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right) \times 4 = 5.$$

Produzindo o valor que dividirá 15.

O segundo tipo de problemas da primeira classe reúne o n. 31 ao n. 34, esses correspondem a duas diferentes equações. Os problemas n. 31 e n. 33 à,

$$^{2}/_{3}\, x + {}^{1}/_{m}\, x + {}^{1}/_{n}\, x + x = a$$

e os problemas n. 32 e n. 34 à,

$$^{1}/_{m}\, x + {}^{1}/_{n}\, x + x =$$

Esse problema provavelmente teria de accordo com o anterior um enunciado parecido com o seguinte:

« $^2/_3$ sommado, $^1/_3$ sommado, $^2/_3$ diminuido, resta 10 » e correspondente á equação

$$\left(x + {}^2/_3\, x\right) + {}^1/_3 \left(x + {}^2/_2\, x\right) - {}^2/_3 \left[\left(x + {}^2/_3\right) + {}^1/_3 \left(x + {}^2/_3\, x\right)\right] = 10.$$

Parece pelo que resta do problema que Ahmes multiplica 10 por $1 + {}^1/_4 + {}^1/_{10}$ e obtem a incognita, o *hau*: $13\, {}^1/_2$. Em seguida, verifica a exactidão do resultado, para o que toma os $^2/_3$ do *hau* $(= 9)$ que sommado com elle dá: $22\, {}^1/_2$, cujo terço é $7\, {}^1/_2$, donde $22\, {}^1/_2 + 7\, {}^1/_2 = 30$, de que os $^2/_3$ são 20, ficando, portanto, 10.

O modo de obter o valor da incognita talvez seja o seguinte: reduzir todas as fracções a mesma denominação e sommal-as, o que dá $^{20}/_{27}\, x = 10$; depois dividir 1 por $^{20}/_{27}$, isto é, $^{27}/_{20} = 1 + {}^1/_4 + {}^1/_{10}$, que multiplica-se por 10 para achar o valor de x, porque da equação se deduz $x = 10.\ {}^{27}/_{20}$.

20.– Vejamos agora os problemas que constituem a segunda serie do calculo do *hau*. São problemas concretos.

Eis a traducção do n. 35:

« Eu entro 3 vezes no *auit*, meu terço, meu todo, eu venho, eu encho. Assim dito isso.

Faz como isto é

$*\,1$	1
$*\,2$	2
$*\,3$	$^1/_3$

em somma: $3 + {}^1/_3$

Divida 1 por $3 + {}^1/_3$

1	$3\, {}^1/_3$
$*\ {}^1/_{10}$	$^1/_3$
$*\ {}^1/_5$	$^2/_3$

em somma: 1

Capitulo da prova

$\cdot\, 1$	$^1/_5 + \cdot\, {}^1/_{10}$
$\cdot\, 2$	$^1/_2 + \cdot\, {}^1/_{10}$
$\cdot\ {}^1/_3$	$^1/_{10}$

em somma: 1

1	320
$^1/_{10}$	32
$^1/_5$	64
som.	96

Capitulo da prova

1	96
2	192
$^1/_3$	32

em somma: 320

Transforma em *medida de cereaes*

1	$^1/_4 + {}^1/_{32} + {}^1/_{64}$	$1\ ro$
2	$^1/_2 + {}^1/_{16} + {}^1/_{32}$	$2\ ro$
$^1/_3$	$^1/_{16} + {}^1/_{32}$	$2\ ro$

em somma: 1 *bescha* »

Gabaglia escolheu o problema n. 34 para ilustrar a classe agora considerada. Vejamos como o autor entendeu o problema.

Problema n. 34:

Resolver a equação $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 10$.

Resolução:

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)x = 10$$

$$x = 10 \div \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right),$$

novamente o processo de duplicação de Ahmes é empregado, ou seja, $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$ é duplicado de modo a obter 10. A resposta ou o *hau* obtido é $5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14}$.

Após encontrado o *hau*, o "capitulo da prova" é operado, ou seja, a prova real $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \times 5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} = 10$, é calculada, no entanto, Gabaglia menciona que irá abordar o assunto a diante.

Figura 30 – Problema n. 34 do papiro Rhind

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

Os últimos problemas abordados por Gabaglia na seção 19 são o n. 28 e n. 29, esses do terceiro tipo da primeira classe de problemas algébricos. São considerados "os mais complicados", possuem o "enunciado laconico", e não é

Ahmes quer determinar uma quantidade cujo triplo sommado á terça parte iguale a medida egypcia *bescha* ou *auit*. Hoje seria a simples equação:

$$3x + {}^{1}/_{3}\,x = 1$$

Pela solução acima dada vê-se que o nosso author effectuava a somma dos numeros que actualmente chamamos coefficientes, obtendo $3 + {}^{1}/_{3}$, e em seguida dividia á egypcia 1 por esse ultimo numero cujo resultado ${}^{1}/_{10} + {}^{1}/_{5}$ é o valor da incognita, como prova multiplicando-o por $3 + {}^{1}/_{3}$.
Dada a solução abstracta, Ahmes passa a formular a concreta. O *bescha* tem 320 *ros*; logo ${}^{1}/_{10} + {}^{1}/_{5}$ do *bescha* equivale a 96 *ros*, resultado que Ahmes escreve, e cuja exactidão evidencia, effectuando a sua multiplicação por $3 + {}^{1}/_{3}$ e chegando ao valor 320 *ros* = 1 *bescha*. Essa multiplicação é feita de dous modos: um consistindo em multiplicar 96 por $3 + 1|3$, o que conduz a 320; e outro empregando em vez dos signaes numericos abstractos para representar 96, seu duplo e seu terço, os signaes especiaes que tinha para indicar os submultiplos de ordem $1|2^n$ do bescha; assim em vez de 96 usa os signaes correspondentes a $1|2, 1|32, 1|64$ do *bescha* e 1 *ro*. Essa ultima fórma da multiplicação está sob o titulo *transforma em medida de cereaes*.

Ha sem duvida em tudo isto um excesso de prova; mas ainda hoje quer nos exercicios de aula, quer nos manuaes praticos, semelhantes excessos são usuaes.

No problema n. 37, o enunciado é « Eu entro tres vezes no *auit*, meu terço para mim, o terço de meu terço para mim, meu nono para mim, eu venho, eu encho »; que póde hoje ser traduzido pela equação

$$3x + 1|3x + 1|3.1|3x + 1|9x = 1$$

Ahmes somma os coefficientes, obtendo $3 + 1|2 + 1|18$; divide 1 por esse ultimo numero, encontrando o quociente: $1|4 + 1|32$, cuja exactidão verifica, multiplicando-o pelo divisor e alcançando o dividendo: 1. Para effectuar essa multiplicação, Ahmes faz uma interessante somma de fracções a que nos referiremos adiante. Em seguida, sob o titulo « Capitulo da prova », Ahmes multiplica 90 por $3 + 1|3 + 1|3.1|3 + 1|9$ e chega ao produto 320: ê a applicação ao bescha da solução theorica do problema. Com effeito, $1|4 + 1|32$ do bescha é 90 *ros*, cujo producto por $3 + 1|3 + 1|3.1|3 + 1|9$ dá 320 *ros* ou 1 bescha. Finalmente, Ahmes termina o problema com uma nova verificação por meio da mesma multiplicação, effectuada porém com os signaes graphicos das subdivisões do bescha.

possível entender parte de sua resolução dado esse laconismo. Por isso, o autor apoia-se na conjectura dada por Cantor em sua *Historia da Mathematica* (1894). O problema n. 28 pode ser entendido da seguinte maneira:

Problema n. 28:

Resolver a equação $x + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right) = 10$.

Resolução:

O procedimento de Ahmes foi entendido por Gabaglia do seguinte modo,

$$x + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}x = 10$$

$$\left(1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right)x = 10$$

$$\frac{10}{9}x = 10$$

$$x = 10 \times \frac{9}{10} \leftrightarrow x = 10 \times \frac{10-1}{10}$$

$$x = \frac{10}{10}(10-1) \leftrightarrow x = 10 - \frac{10}{10}$$

$$x = 9$$

Figura 31 – Problema n. 28 do papiro Rhind

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

Finalizado o cálculo nas duas últimas linhas do problema “a prova da operação” é dada.

O problema n. 29 não é separado do anterior por nenhum tipo de sinal, “faltam o enunciado e a primeira parte do calculo”, porém o procedimento pode ser restaurado pela parte conservada do cálculo. Podemos escrever o problema em notação moderna, com base no que Gabaglia compreendeu, do seguinte modo:

Nos problemas ns. 36 e 38 só ha a solução theorica, posto que ambos possuam enunciado concreto.

O de n. 36 é « Eu entro vezes $3 + 1|3 + 1|5$ para mim, eu venho, eu encho » Ahmes indica a somma dos coefficientes: $3 + 1|3 + 1|5$; depois procura o numero que multiplicado por 106 dá 30 e acha ser $1|4 + 1|53 + 1|106 + 1|212$ que é o *hau* procurado; e termina pela prova que consiste em multiplicar o *hau* obtido por $3 + 1|3 + 1|5$. Analysando-se a marcha que acaba de ser indicada, vé-se que Ahmes somma $3 + 1|3 + 1|5$, reduzindo ao mesmo denominador 106, sem se poder comprehender o motivo da escolha d'esse numero, em vez de 53 que era o naturalmente obtido; em seguida effectua a divisão á egypcia de 1 por $106|30$, isto é, de 30 por 160, que dá o valor do *hau*, pois com os nossos symbolos o problema é: $(3 + 1|3 + 1|5)x = 1$; ou $106|30x = 1$ ou $x = 1$: $106|30 = 30|106$.

O problema n. 38: «Eu entro 3 vezes no *auit*, $1/7$ para mim, eu venho, eu encho» é resolvido, indicando-se a somma $3 + 1/7$, effectuando-se a divisão de 1 por $3 + 1/7$ cujo quociente, o *hau* procurado é $1/6 + 1/11 + 1/22 + 1/66$, e finalmente tirando-se aprova pela sua multiplicação por $3 + 1/7$ que dá o resultado: 1.

21.– Antes de passar adiante convem salientar o modo notavel de sommar muitas parcellas fraccionarias empregado por Ahmes; primeiramente addicionava á parte os inteiros e as fracções grandes, e depois separadamente as fracções pequenas que reduzia a mesma denominação. Assim no problema n. 34, na prova, para verificar que $5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14}$ satisfazia a equação:

$$x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 10.$$

Ahmes escrevia:

« $\cdot 1$ $\quad 5 + 1/2 + 1/7 + 1/14$

$\cdot 1/2$ $\quad 2 + 1/2 + 1/4 + 1/14 + 1/28$

$1/4$ $\quad 1 + 1/4 + 1/8 + 1/28 + 1/56$

em somma: $9 + 1/2 + 1/8$

resta: $1/4 + 1/8$

$$\begin{array}{cccccc} 1/7 + & 1/14 + & 1/14 + & 1/28 + & 1/28 + & 1/56 \\ 8 & 4 & 4 & 2 & 2 & 1 \end{array}$$

$1/4$: 14

$1/8$: 7 em somma 21.»

Problema n. 29:

Resolver a equação $\frac{1}{3}\left[x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{3}x\right)\right]=10.$

Resolução:

$$\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x+\frac{1}{9}x+\frac{2}{27}x=10$$

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{27}\right)x=10\ \leftrightarrow\ \frac{20}{27}x=10$$

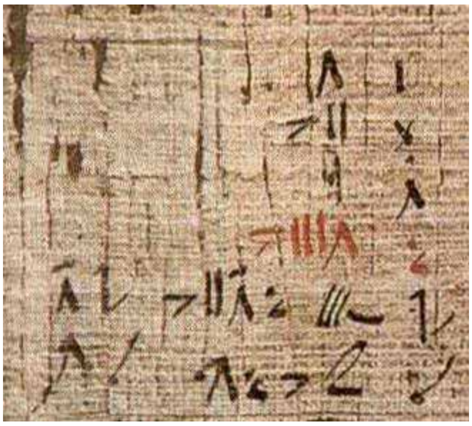
$$x=10\times\frac{27}{20}$$

como $\frac{27}{20}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}$, tem-se

$$x=10\times\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}\right)$$

$$x=13+\frac{1}{2}$$

Figura 32 – Problema n. 29 do papiro Rhind



Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

Os problemas n. 28 e n. 29 são considerados “problemas diversão” por Robins e Shute (1987, p. 54, tradução nossa), problemas “pense em um número” por Gillings (1982, p. 181, tradução nossa), e problemas *Aha* ou problemas das “quantidades desconhecidas” por Chace (1927, p. 67, tradução nossa).

Na vigésima seção Gabaglia analisa problemas que fazem parte da segunda série “do calculo do *hau*”. Esses envolvem subdivisões do *bescha*. Vejamos do que trata o problema n. 35: “Ahmes quer determinar uma quantidade cujo triplo sommado á terça parte iguale a medida egypcia *bescha*”. Atualmente podemos escrever o problema por:

O que quer dizer que Ahmes obtinha successivamente os productos de $5 + 1/2 + 1/7 + 1/14$ por $1, 1/2$ e $1/4$ e em seguida sommava-os. Primeiro faz a somma dos inteiros e das fracções grandes, obtendo $9 + 1/2 + 1/8$, faltando para 10 que é a somma exacta dos tres productos: $1/4 + 1/8$. Depois somma as fracções não aproveitadas ao principio, reduzindo-as ao denominador commum 56; obtem $21/56 = 1/4 + 1/8$. Os numeros 8, 4....1 respectivamente escriptos sob as fracções $1/7\ 1/14 \ldots 1|56$ indicam os numeradores das fracções depois de reduzidas ao denominador 56.

No problema n. 36 Ahmes effectuando a multiplicação do *hau* = $1|4 + 1|53 + 1|106 + 1|212$ por $3 + 1|3 + 1|5$, é conduzido a sommar as fracções:

$$1|4 + 1|53 + 1|106 + 1|212$$
$$1|2 + 1|30 + 1|318 + 1|795 + 1|53 + 1|106$$
$$1|12 + 1|159 + 1|318 + 1|636$$
$$1|20 + 1|265 + 1|530 + 1|1060$$

Ahmes separa as fracções $1|2$ e $1|4$, e somma as outras do modo seguinte. Reduz todas ao mesmo denominador 1060; somma as tres ultimas fracções da primeira linha

$$\text{« } 1|53 + 1|106 + 1|212 \qquad 35$$
$$20 \qquad 10 \qquad 5 \qquad\qquad \text{»}$$

Com effeito, reduzindo estas tres fracções ao mesmo denominador 1060, obtem-se os numeradores respectivos: 20,10 e 5, e o numerador da somma é 35,

Em seguida somma as cinco ultimas fracções da 2ª linha, e todas as da 3ª e as da 4ª linha, obtendo respectivamente os numeradores: 70, 100 e 60. O total d'essas diversas addições parciaes é $\frac{35+70+100+60}{1060} = \frac{265}{1060} = \frac{1}{4}$.

Esse $1|4$ reunido ás fracções anteriormente separadas: $1|2$ e $1|4$ dá o resultado: 1, a que devia chegar. Para effectuar a somma $1|2 + 1|4 + 1|4$, Ahmes, que aliás podia fazel-a immediatamente como se vê em outros problemas reduz as fracções ao mesmo denominador 1060, e somma os numeradores correspondentes, alcançando 1060 para numerador total. E' mais uma prova da facilidade que Ahmes tinha em calcular as fracções.

No problema n. 37, Ahmes para effectuar a somma das fracções

$$1|2 + 1|4 + 1|8 + 1|72 + 1|16 + 1|32 + 1|64 + 1|576$$

Problema n. 35:

Resolver a equação $3x + \frac{1}{3}x = 1$

Resolução:

$$\left(3 + \frac{1}{3}\right)x = 1$$

$$x = 1 \div \left(3 + \frac{1}{3}\right)$$

$$x = \frac{3}{10} \leftrightarrow x = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$$

Segundo Gabaglia, após determinado o *hau* a prova é feita multiplicando-se $3 + \frac{1}{3}$ por $\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$.

A segunda parte do problema determina divisões do *bescha* em submúltiplos de ordem $\frac{1}{2^n}$ e as transforma na medida *ro*. O autor afirma que “o *bescha* tem 320 *ros*”, assim a primeira conta da segunda parte do problema é descobrir quanto equivale $\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ de *bescha* em *ro.* A resposta obtida é apresentada por meio da divisão de 320 por $\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$, cujo resultado é 96. Em seguida a prova é dada por dois modos distintos, primeiro é efetuada a multiplicação $96 \times \left(3 + \frac{1}{3}\right)$.

O segundo modo, chamado de “transformação em medida de cereaes”, admite que 96 *ro* = (80 + 10 + 5) + 1 *ro*, assim, sabendo que 1 *ro* = $\frac{1}{320}$ *hekat,* teríamos 96 *ro* = $\frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ *hekat* + 1 *ro.* Por consequência o dobro, isto é, 192 *ro* = $\frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ *hekat* + 2 *ro,* e a terça parte 32 *ro* = $\frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ *hekat* + 2 *ro.*

Figura 33 – Problema n. 35 do papiro Rhind

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

separa as tres primeiras, e somma as ultimas, reduzindo-as antes ao denominador 576, e assim tem

$$\frac{8+36+18+9+1}{576}=\frac{72}{576}=\frac{1}{8},$$

que junto a $1|2 + 1|4 + 1|8$ dá o resultado procurado: 1.

22.– Rodet no artigo publicado no *Journal Asiatique* sob o titulo *Les prétendus problémes d'algebre du manuel du calculateur égyptien* a que já tantas vezes nos referimos, vê nos problemas do *hau* ao contrario de todos os que cuidadosamente estudarão o papyro Rhind, não processos algebricos, e sim a applicação do processo arithmetico da *falsa positio*, ideia aliás não absolutamente nova pois Peacock já observara que os famosos epigrammas de Metrodoro na Anthologia Grega podiam ser resolvidos por essa regra. Desses epigrammas nos occuparemos em n. 26.

Para Rodet, Ahmes substituia á incognita um numero arbitrario qualquer que aliás sabia habilmente escolher; sujeitava este resultado falso a todas as operações, exigidas pelo enunciado da questão; chegava a um numero que não dando o valor procurado, permittia comtudo obtel-o por haver entre o numero arbitrario e o resultado chegado a mesma relação que entre o falso resultado e o verdadeiro[37]. Era por consequencia o principio da proporcionalidade o invocado; e isso só foi considerado algebra quando a proporção foi escripta sob a fórma moderna: $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$.

Em longo arrazoado, com perto de meia centena de paginas, de grande erudição, posto que deslocada, Rodet procura, ardilosamente demonstrar que os problemas semelhantes aos do *hau* eram, antes da época presente, resolvidos não pela algebra, e sim pela «falsa positio»; e com muitos exemplos tomados em diversos autores explica esse processo arithmetico, e termina, tentando provar que marcha igual segue Ahmes, que não tinha a mais ligeira noção dos methodos, justamente denominados algebricos, empregados por Diophantos pelos arabes e pelos *cossistas* da Italia e da Allemanha.

Afim de demonstrar a primeira proposição, Rodet procura argumentos em escriptores do 12º seculo P.C. e posteriores que usaram a «falsa positio». Assim, elle dá um trecho de *commentario* de Al-Qalçadi (ou Alkalsadi) do 15º seculo ao *Talkhyus* de Ibn al-Bannã; dá outro trecho de Abem Ezra (ou Ibn Esra); bem assim cita pedaços de Bâskara e de Leonardo de Piza. De Al-Hakâk al-Marevazi, escriptor pouco conhecido, natural de Merv no Khoraçân (1216), Rodet extrahe o seguinte:

[37] Rodet aceita que Ahmes demonstrara empiricamente o lemma de que tratamos em o n. 14.

Do mesmo assunto pertencem os problemas n. 36, n. 37 e n. 38, há breve mudança nos coeficientes das novas equações, porém, o procedimento de cálculo é o mesmo.

Gabaglia, na seção intitulada “Modo notavel de sommar fracções”, dá ênfase ao procedimento empregado por Ahmes ao somar diversas frações. Segundo o autor, o escriba primeiramente somava os números inteiros e as frações maiores, em seguida reduzia as frações menores ao mesmo denominador e finalizava o cálculo.

Três exemplos foram escolhidos para demonstrar o processo de adição de Ahmes, esses foram retirados dos problemas n. 34, n. 36 e n. 37. Vejamos como Gabaglia compreendeu cada um deles.

Procedimento do problema n. 34,

$$5+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow\left(5+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}\right)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow\left(9+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{21}{56}\right)\leftrightarrow\left(9+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=10$$

Segue-se o procedimento do problema n. 36,

$$\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{53}+\frac{1}{106}+\frac{1}{212}=\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{35}{1060}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{30}+\frac{1}{318}+\frac{1}{795}+\frac{1}{53}+\frac{1}{106}=\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{70}{1060}$$
$$\frac{1}{12}+\frac{1}{159}+\frac{1}{318}+\frac{1}{636}=\frac{100}{1060}$$
$$\frac{1}{20}+\frac{1}{265}+\frac{1}{530}+\frac{1}{1060}=\frac{60}{1060}$$
$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)+\frac{265}{1060}=\frac{265+530+265}{1060}=\frac{1060}{1060}=1$$

«Probl. 1. Qual é o numero cujas fracções dadas, si tu as addicionas, darão um numero determinado? – Como quando se diz: Qual é o numero de que a metade e o terço, ou o quarto, ou o quinto e o quarto, ou o oitavo e o decimo, ou o nono, o setimo e o quinto, ou outros analogos, si tu os addicionas, fazem 10 ou 20, ou tudo o que se quizer dar?

Resposta: Buscaremos o menor numero, tal que se possa tirar delle as fracções do enunciado, de modo a fazer dessas fracções numeros conhecidos; nós os ajuntamos e tomamos a razão dessa somma ao numero donde as fracções foram tiradas: então fazemos a razão desses dous numeros igual á razão do numero conhecido ao incognito.»

Apos ás citações, Rodet analysa no ponto de vista em que se collocou os problemas da primeira serie do *hau*. Assim, no problema n. 26 do papyro que demos *in extenso* em *a)* n. 19 do presente capitulo e onde procura-se um numero que junto a seu quarto dê 15, Ahmes teria operado sobre 4 e ensaiado o n. $5 = 1 + 4$ que é «o menor numero de que se póde tirar as fracções do enunciado». Em seguida, para satisfazer esse enunciado, multiplica o numero: 5 até achar 15; obtendo o resultado 3. Aqui, diz Rodet[38], intervem o lemma demonstrado na primeira parte do capitulo do *seghon*[39]: «quando se sujeitam differentes numeros a uma mesma operação, os resultados obtidos estão entre elles como os numeros sobre que se tem operado». Então, é necessario tomar para valor da quantidade sobre que se opera em vez de $4, 4 \times 3$ que é o *hau* procurado.

Esse processo não póde porém ser applicado a todos os problemas; Rodet suppõe então que Ahmes tinha outra maneira de proceder que denomina ligeiramente differente da precedente: o numero ensaiado, o falso valor não é mais o *bloco extractivo* (o denominador commum) das fracções; é a unidade; a correcção que obtem-se do calculo tendo de multiplicar-se pela unidade, constitue ella propria o resultado, é o caso entre outros dos problemas ns. 33 e 34. São sobretudo esses processos que dão aos problemas do *hau*, diz Rodet, a apparencia de soluções algebricas.

Não podendo pela theoria formulada explicar os problemas ns. 28 e 29, Rodet julga sem razão que justifique que elles não pertencem ao mesmo capitulo que os outros problemas analysados, e continua a pensar que ainda n'elles Ahmes não emprega a algebra.

23.– Os professores E. e V. Revillout na critica feita ao trabalho de Rodet na *Revue Egyptologique* contrariam elevadamente a opinião d'este sobre o *hau*.

Antes de tudo, ha entre elles uma differença fundamental de principios. Emquanto Rodet pensa que a «falsa positio», como processo arithmetico, é mais natural e está mais de accordo com o intellecto dos povos menos civilisados, e por consequencia inclina-se a suppol-a anterior á algebra; os professores Revillouts, ao contrario, consideram a «falsa positio» uma fórma de decadencia, desenvolvida na idade media, originando-se de processos

(38) Pag. 84, da tiragem *á parte* do artigo de Rodet.
(39) Como dissemos, Rodet em vez de *seqem* lê *seghom*. Esse lemma como mostramos é errado.

Figura 34 – Problema n. 36 do papiro Rhind

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

Gabaglia comenta que Ahmes, ao invés de fazer a adição direta entre as frações da última linha, prefere reduzi-las ao mesmo denominador 1060 e aí sim finaliza o cálculo. Isso “E’ mais uma prova da facilidade que Ahmes tinha em calcular as fracções”. A seguir vejamos o procedimento de adição do problema n. 37.

Procedimento do problema n. 37:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{72}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{576}\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{72}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{576}\right)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{72}{576}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{8}=1$$

Figura 35 – Problema n. 37 do papiro Rhind

Fonte: Adaptado de Robins e Shute (1987)

Gabaglia dedica a seção 22 do § 4 para apresentar a “Opinião de Rodet sobre os problemas do *hau*”, com base no artigo "Les prétendus problémes d'algebre du manuel du calculateur égyptien", extraído do Journal Asiatique (1882).

algebricos que sempre a precederam, de sorte que se em Ahmes houvesse a «falsa positio», dever-se-hia suppor uma algebra anterior.

Na questão de facto, só difficilmente se póde ver nas palavras e nos calculos de Ahmes a regra de «falsa positio». Sem duvida póde encontrar-se em alguns problemas uma certa semelhança que, porém, é superficial, e a qual existe tambem em Diophantos.

Esta semelhança os professores Revillouts não consideram fortuita, pois justamente dos processos do mathematico alexandrino é que a «falsa positio» se teria desenvolvido. Ao contrario, a analyse dos problemas do *hau* mostra naturalmente uma marcha algebrica. E' fóra de toda a discussão, que admira, ou antes assombra, encontrar processos tão adiantados em epocas tão remotas, os quaes deixam entrever nos centros scientificos do antiquissimo Egypto profundos conhecimentos mathematicos, de muito superiores aos que geralmente se lhes attribuiam e que diminuem de outro tanto as glorias dos gregos e dos hindús. Realmente, que extenso horisonte scientifico não se avista dos calculos de Ahmes?

Rodet é sempre guiado por uma idéa falsa – a da analogia profunda dos processos egypcios e dos medievos – apezar de uma separação trimilleniar, atravez civilisações de caracteres os mais differentes e atravez cataclysmas sociaes os mais intensos e externos que a historia conserva de memoria. Porque não recorrer a Diophantos, a Herão de Alexandria para nelles estudar o caracter dos processos de Ahmes, elles que se apresentam tão pouco hellenos, e são tão accentuadamente egypcios? Porque, procurar hebreus, arabes, persas para explicar difficilmente processos mathematicos dos egypcios, tres mil annos mais velhos do que elles?

24.– Para ver com que argumentos valiosos os professores Revillouts derruem a theoria de Rodet, estudemos qual a origem que se póde attribuir á algebra pelo que conhecemos da sciencia grega.

A algebra origina-se em um conceito ao mesmo tempo philosophico e geometrico que do numero faziam os egypcios e os gregos. Hoje, em chimica qualquer substancia considera-se composta, em ultima analyse, de particulas semelhantes – os atomos –; assim tambem a antiguidade concebia os corpos divisiveis em partes iguaes, uma dessas partes era a unidade e partindo dessa noção obtinha as do numero e da medida. Neste sentido, considere-se um solido tendo uma certa forma, a cubica, v.g.

Os antigos imaginaram-no constituido de elementos iguaes, podendo-se representar a altura por uma columna e a superficie da base por uma camada d'esses elementos, o volume total sendo o accumulo de camadas semelhantes superpostas[40]. D'esse modo, as abstracções arithmeticas e as abstracções geometricas se desenvolverão parallelamente,

[40] Como exemplo do que acima está dito consideremos as diversas denominações que os gregos davam aos numeros solidos (*stereoi*) resultantes do producto de tres factores. Si todos os tres factores iguaes, o numero era *cubo*; si todos desiguaes, era *cunha*; si dous iguaes e o terceiro maior, era *viga*; e si dous iguaes e o terceiro menor, era *tijolo*.

Para Gabaglia, o matemático Rodet não considerava os problemas do *hau* com semelhança à álgebra, para esse autor os cálculos refletem à aplicação de processos aritméticos por meio da ideia de "*falsa positio*". Como podemos observar: "Rodet procura, ardilosamente demonstrar que os problemas semelhantes aos do *hau* eram, antes da época presente, resolvidos não pela álgebra, e sim pela «falsa positio»", (GABAGLIA, 1899, p. 79). Por meio de diversos exemplos Rodet tenta demonstrar que o processo de Ahmes não é o mesmo empregado por outros algebristas da antiguidade como, por exemplo, Diofanto de Alexandria.

A incógnita era substituída por um número arbitrário qualquer, com esse "número falso" todas as operações da equação eram calculadas. O resultado obtido e o "número falso" possuíam a mesma relação do "resultado falso" e o valor a que se deveria chegar. Ou seja, a relação de proporcionalidade $a : b = c : x$ pode ser escrita.

Para exemplificar melhor essa afirmação, tomemos novamente o problema n. 24: Resolver a equação $x + \frac{1}{7}x = 19$, ou em outras palavras, tomar um valor que somado com seu sétimo resulte 19. Quando o valor 7 é assumido como o "número falso", a operação resulta em $8 = 19$. Assumindo a relação de proporcionalidade de Rodet teríamos:

$$8 : 7 = 19 : x$$

cujo resultado é $x = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$.

Segundo Gabaglia, Rodet buscou argumentos em diversos autores que usaram a *falsa posição,* dentre eles destacam-se Bhaskara e Leonardo de Pisa (Fibonacci) e Al-Hakâk al-Marevazi, do qual retira um exemplo para justificar sua proposição sobre a proporcionalidade aritmética nos procedimentos de Ahmes. Apesar de apresentar tal exemplo em forma de citação, Gabaglia não explora a aplicação que Rodet traz na sequência do exemplo. Vejamos,

> Qual é o número tal que somado um quarto de si mesmo resulta 20? O menor número que possui um quarto é 4: vamos adicionar 1, obtém-se 5, e vamos tomar a proporção entre 5 e 4. Em seguida a proporção entre 20 e o número procurado. Suponha a seguinte figura:

unindo-se umas ás outras e afastando-se o menos possivel da realidade das cousas. Dahi, vieram em arithmetica muitas expressões, umas ainda hoje em pleno uso (cubo, quadrado, etc.) e outras cahidas em desuso (lado de quadrado, etc.); d'ahi, tambem a faculdade de representar os numeros por figuras geometricas (uma progressão arithmetica pelo perimetro de um polygono regular, o producto de uma multiplicação por uma superficie regular etc.); d'ahi, sobretudo para os theoremas arithmeticos mais complicados, a sua evidencia por demonstrações geometricas; emfim d'ahi, a algebra, o resultado directo da applicação de modos de ver geometricos á sciencia dos numeros.

Como effeito o numero comparado a unidade geometrica seja de comprimento, de superficie ou de volume, era individualisado, tomava corpo, pode-se dizer, como aquella unidade, qualquer que fosse aliás a quantidade de seus elementos constitutivos, ou, segundo a expressão technica de Diophantos, dos *monadas* que o compunham. As razões de um numero com outro da mesma especie podiam ser traduzidas á semelhança das rasões de um comprimento com outro comprimento, de uma superficie com outra superficie, de um volume com outro volume. Podia-se ou medir o menor numero em relação ao maior de que seria, por ex., a metade ou o terço etc; ou então medir o maior em relação ao menor de que seria o duplo ou o triplo etc. Podia-se igualmente comparar ambos a uma mesma medida – a unidade escolhida, o monada. – E' por essa serie de operações que os egypcios e Diophantos resolviam as equações e determinavam as incognitas.

25.– Rodet, observam os professores Revillouts[41], não ousou dizer que Diophantos e os gregos do seu tempo nada conheciam de algebra, porque a tradição universal dos mathematicos modernos é considerar Diophantos um grande algebrista. Mas quando encontra em Ahmes os mesmos processos, Rodet se recusa a reconhecel-os como parte integrante daquella sciencia.

Vejamos como procedia Diophantos e comparemos a sua marcha com a de Ahmes. Escolha-se um problema onde nunca ninguem vio a regra da «falsa positio» e por todos é reconhecido como algebrico. Seja o problema n. 2 do 1º Livro, que traduziremos da esplendida edicção das obras de Diophantos de Tannery[42].

« Trata-se de dividir um numero dado em dous numeros segundo uma razão dada.

Seja agora proposto dividir 60 em dous numeros (*arithmos*), cuja razão seja 3.

Faça-se o menor x (*arithmos*); o maior será então $3x$; assim o maior será o triplo do menor. A somma dos dous igual a 60 *monadas*, mas os dous reunidos dão $4x$.

Então, $4x$ igual a 60 *monadas* e x a 15 *monadas*. Logo, o menor será 15 *monadas* e o maior 45 *monadas*. »

---

[41] Art. citado, pag. 290.
[42] Diophanti Alexandrini opera omnia, Lipsiae in aedibus Teubneri. 1893, 1º vol. pag. 16-19.

5	4
20	x

> Multiplique 4 por 20, é 80: divida por 5, resulta 16. Então, se tomarmos um quarto de 16 e adicioná-lo a ele, teremos 20. Este é o número procurado. (RODET, 1882, p. 73, tradução nossa)

Nada é comentado por Gabaglia sobre o exemplo ou "Probl. 1", retirado do artigo de Rodet. Na sequência observa-se que o conceito de proporcionalidade é também aplicado ao problema n. 26.

Gabaglia segue afirmando que a proposição de Rodet não pode ser aplicada a todos os problemas do *hau*. Para esses problemas um outro procedimento, que não o da proporcionalidade, era aplicado. Segundo Rodet, o "número falso" não é mais o "bloco extractivo" ou denominador, como antes era determinado, e sim a unidade (1), como é o caso dos problemas n. 33 e n. 34.

Já os problemas n. 28 e n. 29 não podem ser explicados e por isso não são comtemplados pela teoria de Rodet, vejamos o que Gabaglia diz a respeito,

> Não podendo pela theoria formulada explicar os problemas ns. 28 e 29, Rodet julga sem razão que justifique que elles não pertencem ao mesmo capitulo que os outros problemas analysados, e continua a pensar que ainda n'elles Ahmes não emprega a algebra. (GABAGLIA, 1899, p. 81-82)

Ao que parece, a teoria de Rodet sobre os problemas do *hau* não foi muito bem aceita pelos estudiosos do papiro Rhind naquela época. Vejamos a citação de Peet (1923), quando comenta o assunto,

> Após o aparecimento do comentário de Eisenlohr em 1877, Rodet escreveu no *Jornal Asiatique*, 1881, p. 184-232 e p. 390-459, um artigo, *Les prétendus problèmes d'algèbre du manuel du calculateur égyptien*, em que acusou Eisenlohr de ter erroneamente atribuído um conhecimento de álgebra para os egípcios. Cantor[55] apresentou uma resposta e foi seguido pelo próprio[56] Eisenlohr e por Revillout[57]. (PEET, 1923, p. 60, tradução nossa, grifo e nota dos autores)

É sobre essa questão o assunto da seção 23, "Critica dos professores E. e V. Revillout ao trabalho de Rodet".

[55] *Zeitschrift für Math. und Physik*, 27, 117.
[56] *Journal Asiatique*, 1882, 515-8.
[57] *Revue Égyptologique*, II, 287-303.

No exemplo considerado, Diophantos toma o menor dos numeros a determinar para medida commum e busca quantas vezes esse numero incognito, isto é, o arithmos entra na somma dos dous, avaliada em *monadas*.

E', não ha duvida, um modo essencialmente geometrico de considerar os numeros como grandezas mensuraveis, mas o mesmo dar-se-hia si exprimissemos á moderna:

$$y = 3x; x + y = 60; \quad \text{d'onde } 4x = 60; x = 15, y = 45.$$

Poderia, baseado nos mesmos principios, ter procedido de outro modo; teria podido tomar para medida o maior dos numeros, e, representando o menor por uma fracção d'aquelle, dizer, «um *arithmos* mais um terço do *arithmos* igualam 60 *monadas*»; em seguida para determinar esse arithmos figurando o numero maior, ter-se-hia apenas de dividir 60 monadas pelo numero fraccionario 1 1|3. Dar-se-hia o mesmo, considerando-se mais quantidades: como por exemplo se estudarmos o problema n. 32 do papyro, onde tem-se a incognita, sommada com seu terço e seu quarto. A solução obtinha-se, dividindo o numero dado por 1 + 1|3 + 1|4, ou, para fallar mais exactamente, buscando-se quantas vezes esse numero fraccionario entra no numero conhecido *ou das unidades*. A' esse typo tambem podemos referir os problemas do papyro de ns. 31, 33 e 34.

Consequentemente, para achar um numero que junto a ser terço iguale um certo numero de unidades, póde-se indifferentemente escolher para medida principal o numero maior ou seu terço. No primeiro caso, tem-se de effectuar uma divisão por um numero fraccionario; e no segundo por um numero inteiro. Essa ultima divisão sendo no exemplo dado e em analogos mais simples que a primeira, é naturalmente preferido: foi empregada em ns 24–27 do papyro, assim como em Diophantos.

No problema n. 24, Ahmes procura um numero que com seu setimo faça 19 unidades. Toma 1|7 para medida; acha 8 no total (equivalente a reduzir ao mesmo denominador 1 1|7 = 8|7); procura as vezes em que 8 entra em 19; tem então o numero dos setimos, que escripto á egypcia é: 2 + 1|4 + 1|8: toma-se esse ultimo numero 7 vezes e obtem-se assim o numero principal (16 + 1|2 + 1|8), sete vezes maior que o setimo tomado para medida e que sendo sommado a este setimo faz: 19. E' a mesma serie de operações que se encontra em Diophantos.

Marcha semelhante é a dos problemas ns. 25, 26 e 27, onde só a razão é que muda, pois para obter um certo numero de unidades deve-se ao numero principal ajuntar ou a metade (n. 25), ou o quarto (n. 26) ou o quinto (n. 27). E' uma marcha tão directa quanto em Diophantos, e em nada se afasta dos dados do problema. Ahi, como em Diophantos, não ha a menor supposição falsa, não ha o menor traço de «falsa positio».

Para Gabaglia há uma diferença fundamental “de principios” entre o que os irmãos Revillout e Rodet pensam sobre “a falsa positio”. Rodet compreende a falsa posição como um procedimento aritmético desenvolvido anteriormente à álgebra. Os Revillout, pelo contrário, consideram a falsa posição um método de decadência da álgebra, originado a partir de processos algébricos anteriores, ou seja, se Ahmes usou a ideia de falsa posição, supõe que já existia uma álgebra ainda mais antiga.

Gabaglia questiona por que Rodet insistiu em encontrar procedimentos semelhantes aos de Ahmes em matemáticos hebreus, árabes e persas da Idade Média sendo Diofante e Herão de Alexandria, por seus métodos matemáticos, muito mais egípcios do que helenicos.

A semelhança entre a regra da falsa posição de Ahmes com os procedimentos de Diofante é considerada pelos professores Revillouts não “fortuita”. Eles consideram a falsa posição um processo que teria sido desenvolvido primeiramente pelo matemático alexandrino e não pelo antigo escriba Ahmes.

Neste ponto Gabaglia parece discordar de ambos os autores, para ele a análise dos problemas do *hau* deixa claro a “marcha agebrica” empregada por Ahmes. O parágrafo que extraímos em citação abaixo demonstra sua admiração e também assombro ao deparar-se com a profundidade de conhecimentos matemáticos contidos no papiro Rhind.

> E’ fóra de toda a discussão, que admira, ou antes assombra, encontrar processos tão adiantados em epocas tão remotas, os quaes deixam entrever nos centros scientificos do antiquissimo Egypto profundos conhecimentos mathematicos, de muito superiores aos que geralmente se lhes attribuiam e que diminuem de outro tanto as glorias dos gregos e dos hindús. Realmente, que extenso horisonte scientifico não se avista dos calculos de Ahmes? (GABAGLIA, 1889, p. 82-83)

Na seção seguinte, a de número 24 “Origem da algebra”, Gabaglia se propõe a verificar nas origens da antiga “sciencia grega” os argumentos pelos quais os professores Revillouts rejeitam a teoria de Rodet, e por que atribuem à Diofante a invenção da álgebra.

É do conceito de número e suas influências filosóficas e geométricas que surge a álgebra. Na antiguidade uma das partes de um corpo divisível em partes iguais era a unidade, da qual as noções de número e medida foram derivadas. Em seguida, por meio da manipulação de objetos ou de sólidos geométricos, a abstração foi sendo considerada. Gabaglia afirma que é a partir daí que surgiram

A nossa conclusão, continuam os professores Revillouts, é então diametralmente contraria a de Rodet, quando sustenta que o author egypcio «não tem aqui pelo menos dado a minima prova de possuir a mais ligeira noção dos methodos, justamente chamados algebricos, empregados por Diophantos etc.»

Effectivamente o que foi dito mostra a identidade do methodo de Ahmes com o de Diophantos.

26.– Sem fallar em Diophantos, poucos escriptos gregos conhecem-se com problemas semelhantes ao que hoje resolvemos por processos algebricos; e em alguns delles sente-se de modo a não admittir-se a menor duvida a influencia egypcia e o emprego dos methodos usados por Ahmes, taes são as obras do famoso Herão de Alexandria e o papyro Akhmim. Dellas vamos rapidamente tratar; bem assim trataremos perfunctoriamente do problema «*De bovino*» de Archimedes, do «Epanthema» de Tymaridas e dos problemas da Anthologia grega, para que se possa fazer idéa do pouco que caminhou a civilisação helenica nessa materia.

a) Da vida de Herão e de sua epoca pouco sabe-se. Foi pupilo de Ctesibio de Alexandria que, barbeiro ao principio, adquirio mais tarde grande renome por diversas descobertas mechanicas. Ctesibio viveu no reinado de Ptolomeo Evergetes II, isto é, entre 170 e 117 A.C. Portanto, póde-se attribuir á florescencia de Herão uma data entre 120 e 100 A.C.

Conhece-se um numero consideravel de obras mais ou menos completa, de extractos, trechos e citações sobre assumptos diversos, cuja paternidade é dada a um Herão. Porém, de um lado a historia conserva o nome de muitos Herões; e de outro lado, esses escriptos estão em geral mutilados e em grande estado de confusão. Só na segunda metade do actual seculo é que procurou-se esclarecer esse ponto historico.

Th. H. Martin em uma primorosa monographia[43], investigou os factos concernentes a vida e trabalhos do famoso Herão de Alexandria. Achou na litteratura grega 18 escriptores com o nome de Herão, sendo tres delles mathematicos: Herão de Alexandria, Herão[44] mestre de Proclo e Herão de Constantinopolis[45]. Em seguida mostrou que conhecem-se 9 obras que indubitavelmente são do primeiro e 4 que provavelmente tambem o são.

Em 1864, o Dr. F. Hultsch, eminente autoridade sobre a mathematica antiga, colleccionou e editou dessas diversas obras o que apresentava importancia sob o ponto de vista mathematico.

---

[43] *Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie* 1854; no vol. IV das «Mémoires présentées a l'Academie d'Inscriptions».
[44] Provavelmente identifica-se com um tal Heronas que fez um commentario sobre a arithmetica de Nicomacho. Deve-se notar que Cantor não acredita que este mestre de Proclo tenha sido mathematico.
[45] Autoridades da ordem de Vicent de Cantor não aceitam a existência d'esse Herão.

muitas expressões usadas ainda em sua época, por exemplo, “cubo, quadrado e outras cahidas em desuso (lado de quadrado)”.

Da representação de números por figuras geométricas, das demonstrações geométricas de teoremas algébricos, do “resultado directo da applicação de modos de ver geometricos á sciencia dos numeros” é que surge a álgebra. A medida em que o número era comparado à unidade geométrica “era individualisado, tomava corpo” e podia ser entendido como uma junção de elementos constitutivos ou “*monadas*” como afirmava Diofante. Dessa forma, razões entre números da mesma espécie podiam ser traduzidas por razões entre comprimentos, razões entre superfícies, razões entre volumes. Por fim, Gabaglia conclui: “E’ por essa serie de operações que os egypcios e Diophantos resolviam as equações e determinavam as incognitas”.

O primeiro parágrafo da seção 25 “Breve comparação entre Ahmes e Diophantos”, Gabaglia volta a comentar sobre a crítica dos professores Revillouts à Rodet. Este último autor “não ousou dizer que Diophantos e os gregos do seu tempo nada conheciam de algebra”, pressionado, talvez, pela tradição da época que determinava Diofante um grande algebrista. No entanto, apesar de reconhecer em Ahmes processos semelhantes aos de Diofante, Rodet “se recusa a reconhecel-os como parte integrante daquella sciencia”.

Na sequência Gabaglia escolhe um problema “reconhecido como algebrico”, da obra *Aritmética* de Diofante, para comparar com a “marcha de Ahmes”. O problema é o seguinte:

Problema nº 2 – Livro I:

Dividir um número dado em duas partes, com razão 3 e cuja soma resulte em 60.

Resolução de Diofante:

Seja x a menor parte e $3x$ a maior, então:

$$x + 3x = 60$$
$$4x = 60$$
$$x = 15,$$

portanto, a menor parte equivale a 15 e a maior a 45.

De todos os trabalhos de Herão resalta a sua tendencia fortemente accentuada para applicação; é um homem pratico que emprega regras praticas para attingir rapidamente o seu fim, sem se importar muito com as restricções classicas e sem se demorar na demonstração das proposições que emprega. E' antes um engenheiro do que um mathematico. Geometra, elle não é da escola de Euclides e pouco podia ter accrescentado a geometria conhecida de seu tempo; attende antes a topographia[46], a stereometria, etc. Mechanico, elle não é da escola de Archimedes; entrega-se antes a descoberta de machinas e apparelhos engenhosos.

Herão é o primeiro escriptor grego conhecido que para fins algebricos usou a nomenclatura geometrica e o symbolismo sem limitações geometricas, e que sommou linhas e areas e multiplicou quadrados por quadrados[47]. Para comprehender a importancia dessas considerações, basta lembrar que dos grandes mathematicos gregos da epoca aurea só Archimedes atreveo-se a introduzir numeros em discussão geometrica e a dividir uma linha por outra.

Todas essas razões, que existem tambem em Diophantos, fizeram vêr nelles não discipulos da cultura grega, e sim egypcia. O proprio nome de Herão, usado aliás no ultimo periodo da civilisação hellenica por muitos gregos, nascidos no Oriente e no Egypto, não é grego, e, segundo Vincent, é egypcio e tem uma significação correspondente a de engenheiro.

A decifração do papyro Rhind veio corroborar definitivamente a opinião dos que viam em Herão de Alexandria um egypcio: o seu estylo é um echo do de Ahmes. Deixando de parte as analogias geometricas[48] encontra-se em ambos, tabellas de medidas; em vez de regras geraes, larga copia de exemplos semelhantes; e a mesma fórma de fracções. A solução das questões Herão precede das palavras «ποιει οντωζ» «faz como segue»; o que é equivalente ao *art ma xeper* de Ahmes, que traduzimos, com Revillout, «faz como isto é», e que technicamente póde ser vertido como «regra, processo de calculo».

Vejamos um problema de Herão[49], para exemplo; é a mesma escola de Ahmes. «Dado um segmento circular de base igual a 40 pés e altura igual a 10; achar sua circumferencia. Faz como segue. Somma a base com a altura. O total é 50 pés. Toma agora

---

[46] No tratado intitulado «*peri dioptrass*» traduzido e editado por Vincent nas «Notices et Extrats des Mss. de la Bibl. Imp. Vol XIX, Pariz, 1858, existe a descripção de um instrumenta topographico correspondente ao theodolito.

[47] N'uma proposição actualmente incluida na Geometria, Herão não tem escrupulos em sommar area e circumferencia. Essa proposição póde ser enunciada do modo seguinte:

Se S é a somma da area (A), da circumferencia (C) e do diametro (D) de um circulo, achar o diametro.

A solução é

$$D = \frac{\sqrt{154S + 841} - 29}{11},$$

que elle dá sem demonstrar.

[48] V. Cantor, H. da Math. 1º edição, pag. 331 do 1º vol.

[49] Herão, ed. Hultsch, pag. 199 e 200; Cantor, H. de math. 1º vol. pag. 332.

Gabaglia menciona que Diofante segue o raciocínio geométrico para resolver o problema. Considerando os números como grandezas mensuráveis, o procedimento seguido seria tomar a menor parte e descobrir quantas vezes ela cabe dentro da maior parte. Em termos modernos, Gabaglia descreve o cálculo pelo seguinte,

“$y = 3x$; $x + y = 60$;   d’onde $4x = 60$; $x = 15$, $y = 45$”.

Agora vejamos como Gabaglia acreditou ser o procedimento empregado por Ahmes para resolver o mesmo problema.

Resolução de Ahmes:

Seja x a maior parte a ser determinada, logo a menor parte é $\frac{1}{3}x$. Se a soma de ambas as partes é 60, então teríamos,

$$x + \frac{1}{3}x = 60$$
$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)x = 60$$
$$x = 60 \div \left(1 + \frac{1}{3}\right)$$
$$x = 45,$$

ou seja, a maior parte é 45 e a menor é 15.

Daí conclui-se que a mesma comparação poderia ser feita entre os problemas n. 31, n. 33 e n. 34 do papiro Rhind e o procedimento de Diofante.

Para ilustrar a semelhança entre Ahmes e Diofante, mais um exemplo é considerado por Gabaglia, consiste do problema n. 24 do papiro Rhind, cujo enunciado e resolução já apresentamos nas páginas n. 92 e n. 93 deste trabalho. Do mesmo modo os problemas n. 25, n. 26 e n. 27 do papiro apresentam semelhanças com os procedimentos de Diofante.

Por fim Gabaglia volta a concluir: “Effectivamente o que foi dito mostra a identidade do methodo de Ahmes com o de Diophantos”, afirmando que a posição dos professores Revillouts é contrária a de Rodet, já que este último autor não deu a quarto. E’ 12 1|2. Fica 37 1|2. Somma um quarto. Isto é: $9 + 1|4 + 1|8$. O total é: $46 + 1|2 + 1|4 + 1|8$. E’ a medida da circumferencia. Somme-se 1|4 e subtraia-se 1|4, porque a altura é 1|4 da base.»

b) No papyro Akhmim que tantos pontos de semelhança e filiação tem com o de Rhind ha dous problemas, os de ns. 13 e 17, identicos aos de n. 28 de Ahmes.

«N. 13[(50)]. De um thesouro alguem tirou 1|13; do que restava outro tirou 1|17, e ficou no thesouro 150 unidades; queremos saber quanto havia no thesouro».

Do mesmo modo[(51)]: $13 \times 17 = 221$;

$$1|13.221 = 17;\ 221 - 17 = 204; 1|17.204 = 12; 204 - 22 = 192$$

Do mesmo modo: $221.150 = 33150$, e 1|192.33150.

Resultado: $172 + 1|2 + 1|8 + 1|48 + 1|96$ »

« N. 17. Sobre um thesouro alguem tomou 1|17, um outro tomou 1|19 do resto, e ficou no thesouro 200 unidades. Queremos saber quanto havia anteriormente no thesouro.

Do mesmo modo: $17 \times 19 = 323$.

$$1|17.323 = 19; 323 - 19 = 304; 1|19.304 = 16; 304 - 16 = 288$$

Do mesmo modo: $323.200 = 64600$; e de 64600 tomai 1|288.

Resultado: $224 + 1|4 + 1|18$ ».

Esses problemas são do typo:

$$\left(x - \frac{x}{a}\right) - \frac{1}{b}\left(x - \frac{x}{a}\right) = S.$$

Para obter a solução, o autor do papyro reduz todas as fracções a mesma denominação, obtendo o denominador commum *ab*. Em seguida effectua os calculos seguintes, que explicamos com o nosso actual symbolismo:

$$[(ab - ab|a) - 1|6(ab - b)]x = ab.S,$$

calculando separadamente o coefficiente de x e o termo conhecido; e, finalmente, divide este por aquelle.

Custa comprehender, a não ser por falso patriotismo francez, como Baillet[(52)] explica a solução desses problemas.

Acha-se a solução, diz elle, multiplicando a somma dada por uma razão, a da unidade ao que resta depois da subtracção das fracções:

(50) Baillet. Le papyrus mathematique de Akhmim.
(51) *Homoios* é o termo grego que emprega.
(52) Pgs. 58 e 59.

mínima prova de que o escriba egípcio possuía semelhantes métodos, chamados algébricos, empregados por Diofante.

Ainda nos comentários sobre a álgebra do papiro Rhind, Gabaglia escreve a seção 26 “A algebra de alguns escriptores gregos”. Nela o autor se propõe a versar sobre alguns poucos textos gregos que podem ter alguma relação com problemas algébricos e, ao mesmo tempo, são semelhantes aos cálculos de Ahmes. Antes de apresentar sua análise Gabaglia afirma que o estudo desses textos faz perceber o “pouco que caminhou a civilisação hellenica nessa materia”.

O primeiro autor e obra comentada é do grego Herão de Alexandria. Gabaglia menciona que há inúmeros “extractos, trechos e citações sobre assuntos diversos”, cuja autoria é dada a Herão, o problema é que “a história conversa o nome de muitos Herões”. Além dessa confusão, existe a dificuldade em reunir os escritos e muitas vezes reconstituí-los de modo que foi somente na “segunda metade do actual seculo”, o século XIX, que buscou-se esclarecer essa questão histórica.

A monografia de Martin (1854)[58], citada como “primorosa” por Gabaglia, reúne informações sobre a vida e obra de Herão de Alexandria. Alguns anos depois Hultsch (1864)[59], “eminente autoridade sobre mathematica antiga”, analisou a parte matemática da obra de Herão, acredito que é a partir do estudo de Hultsch que Gabaglia faz seus comentários.

Os textos de Herão refletem sua inclinação à aplicação de regras práticas “sem se importar muito com as restricções classicas e sem se demorar na demonstração das proposições que emprega”, por isso é considerado antes um engenheiro do que matemático. Escreveu uma trabalho “*peri dioptras*” no qual apresenta uma descrição de um instrumento topográfico, o teodolito, e foi o primeiro autor grego que usou a nomenclatura geométrica para fins algébricos.

Em nota de rodapé Gabaglia apresenta a seguinte proposição de Herão,

Proposição:

Dado um círculo de área A, circunferência C e diâmetro D de um círculo, com soma[60] $S = A + C + D$, o diâmetro é dado por:

---

[58] Recherches sur la vie et les ouvrages d’Héron d’Alexandrie 1854; no vol. IV das «Mémoires présentées a l’Academie d’Inscriptions.

[59] Gabaglia não dá a referência desta obra.

[60] Gabaglia não menciona, mas, segundo Boyer (2001, p. 118), Herão escolheu o caso específico em que a soma S é igual 212.

$$x = S \times \frac{1}{1 - \frac{1}{a} - \frac{1 - \frac{1}{a}}{b} - \cdots}$$

« Por ser espinhoso calcular esse resto em fracções e por ser de difficil manejo a expressão da razão, principia-se a substituir á unidade e a esse resto dous numeros inteiros que estejam na mesma razão. Para isso se toma em logar da unidade o producto dos denominadores das fracções dadas; d'elle se subtrahe o producto d'esse mesmo numero pela primeira fracção dada (sempre um numero inteiro), depois o producto do resto e da segunda fracção e assim por diante. O ultimo resto dividindo o primeiro producto exprime a razão procurada.

Seja: $1/_{13}$ e $1/_{17}$ do resto, as fracções tiradas successivamente, 150 a somma restante (prob. 13), se operará assim:

1.º Substituição: $13.17 = 221$

$$1|13.221 = 17; 221 - 17 = 204;\ 1/_{17}.204 = 12; 204 - 12 = 192.$$

2.º Razão: $221 : 19$.

3.º Multiplicação por essa razão: $150 + 221 = 33150; 33150: 192 = 172 + 1/_{12} + 1/_8 + 1/_{32}$ ».

Ha, accrescenta Baillet, alguma analogia entre esses diversos processos de *substituição* e o methodo moderno da *falsa positio*. E finalisa recordando a discussão de Rodet sobre os problemas do *hau*.

Da mais simples comparação conclue-se que Baillet não podia tirar esse processo de que está escripto: é uma verdadeira phantasia, devida provavelmente já ao trabalho de Rodet que combatia theorias de allemães, já a querer abranger em um mesmo processo problemas de natureza esencialmente diversa; com effeito, no papyro de Akhmim existem problemas de partilha e de juros que são resolvidos pela theoria das proporções, e por isso Baillet quer que os problemas acima dados, apezar de rigorosamente algebricos, tenham sido resolvidos do mesmo modo. E' notavel a tendencia de muitos espiritos illustrados em tornar difficeis cousas faceis! Parece haver n'isso um verdadeiro divertimento intellectual. Si ha, Baillet muito divertiu-se.

Ha tambem um outro projecto, o de n. 28, que é classificado por Baillet entre os de partilha, e que deve ser considerado como algebrico.

O texto d'esse problema acha-se mutilado; foi em parte restituido conjecturalmente por Baillet. Consiste em dividir o numero dado 100 em duas partes proporcionaes a 1 e a $1/_4 + 1/_{28}$.

$$D = \frac{\sqrt{154\,S + 841} - 29}{11}$$

Gabaglia menciona que Herão resolve o problema sem fazer nenhuma demonstração, apenas dá uma sequência de passos e “não tem escrupulos em sommar area e circunferencia”.

Sobre esta proposição o historiador Boyer (2001, p. 117-118) comenta: “O axioma de Eudoxo excluiria tal problema de consideração teórica, pois as três grandezas não são de mesma dimensão, mas de um ponto de vista número não crítico o problema faz sentido”. Herão teria se inspirado em métodos pré-helênicos, tomado o valor que Arquimedes determinou para o número π e usado o método babilônico de completar o quadrado para resolver uma equação quadrática, para chegar a resolução do problema.

> Heron simplesmente dá as instruções lacônicas, “Multiplique 212 por 154, some 841, extraia a raiz quadrada e subtraia 29, e divida por 11”. Esse não é o melhor método para ensinar matemática, mas os livros de Heron se destinavam a servir como manuais para o praticante. (BOYER, 2001, p. 118, grifo do autor)

Antes de finalizar a seção 26, Gabaglia apresenta mais um problema de Herão, com tradução ao pé da letra da obra de Hultsh (1864) e Cantor (1894), é um tanto confuso entender o problema, por isso, o (re) escrevemos pelo seguinte:

Problema:

Dado um segmento circular de base igual a 40 pés e altura igual a 10, calcule sua circunferência.

Resolução:

Somar a base com a altura,

$$40 + 10 = 50$$

O total é 50 pés. Agora tomar agora um quarto de 50,

$$50 \times \frac{1}{4} = 12 + \frac{1}{2}$$

Subtrair a quarta parte de 50 dele mesmo, «100 unidades, é em cima de 1, $^1/_4 + ^1/_{28}$. Qual é o principal? qual é o excesso?

Em que calculo $^1/_4 + ^1/_{28}$? E' $^1/_7$ de $2; 2 + 7 = 9.7 + 100 = 700$; divide por 9, vem $77 + ^2/_3 + ^1/_9$, o principal; e $22 + ^1/_6 + ^1/_{18}$ é o excesso, a differença para 100. »

Acceitando-se a restituição litteraria feita por um competente da ordem de Baillet, consideremos como mathematicamente é tratada a questão.

Em primeiro logar, effectua-se a somma $^1/_4 + ^1/_{28}$; o que o author obtem, reduzida a expressão mais simples: $^2/_7$ que em virtude do uso egypcio indica assim: $^1/_7$ de 2. Em seguida, somma a esta fracção a unidade e tem para numerador 9 (com effeito, $^2/_7 + 1 = ^9/_7$), não escrevendo o denominador, o que como já vimos faziam os egypcios em casos semelhantes; depois, multiplicava o numero dado: 100 por 7 e dividia o resultado por 9, alcançando assim uma das partes e sendo obtida a outra por differença.

Hoje fazemos o mesmo; na verdade, seja dividir 100 em duas partes proporcionaes a 1 e $^1/_4 + ^1/_{28}$; vem:

$$[x + (^1/_4 + ^1/_{28})x] = 100; \text{ d'onde } (x + ^2/_7\, x) = 100;$$

$^9/_7\, x = 100; 9x = 700; x = 700 : 9 =$ uma das partes; a outra é $100 - x$.

Existem no papyro de Akhmim formas que lembram Ahmes e Herão de Alexandria: o que prova a continuidade dos methodos no ensino egypcio. Assim, para darmos apenas um exemplo, o escriptor do papyro Akhmim principia os calculos com a palavra «*homoios*» (do mesmo modo; igualmente), o que parece referir-se a um modelo que segue, e a que nunca se refere; só em tres problemas (ns. 47, 48 e 50) emprega a expressão «Oyto poice», «operai assim»; o que explica Baillet como um descuido de alumno, pois considera o papyro um caderno de exercicios escolares. Sem duvida, diz Baillet,[53] o mestre começava por expor e explicar os processos de calculo ou o methodo para resolver os problemas. Depois tomava um exemplo e resolvia um problema para fazer comprehender ao alumno a theoria. «Operai assim» dizia a cada operação; e tres vezes por distracção, sem duvida, o alumno reproduzio a formula do professor. Nos outros casos, o alumno contenta-se em seguir as instrucções do mestre e emprega a formula «*homoios*», o que equivale a dizer: operando como ensina o professor, ou conforme a regra.

E' preciso tambem accrescentar que no papyro Akhmin, á semelhança de Ahmes e de Heerão, na marcha da solução, as operações se succedem, os algarismos se alinham, sem nunca dar a razão porque se opera desse modo, nem dizer o que se quer obter com a disposição de taes numeros.

---

[53] Op. cit. pag. 34.

$$50 - \left(12 + \frac{1}{2}\right) = 37 + \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Tomar a quarta parte disto,

$$\left(37 + \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{37}{4} + \frac{1}{8} = \frac{75}{8} = 9 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \qquad (2)$$

Somar (1) e (2),

$$37 + \frac{1}{2} + 9 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 46 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

Que é a medida procurada.

Em Cantor (1894, p. 367), a fórmula abaixo é expressa para resumir o processo que Herão segue. Note que Gabaglia não menciona a referida fórmula.

$$B = \left[(s + h) - \frac{h}{s}(s + h)\right] + \frac{h}{s}\left[(s + h) - \frac{h}{s}(s + h)\right]$$

Com B = comprimento do arco; s = base e h = altura.

Gabaglia, provavelmente seguindo outros autores, afirma que o estilo de Herão é “um echo do de Ahmes”, o que fica evidente pelo problema acima. As tabelas de medidas e modo de se operar com e representar frações; a solução dos problemas que é precedida das palavras “ποιει οντωζ”, ou seja, faz como segue, equivalente ao que Revillout traduziu do hierático “faz como é”, são provas de que Herão e Ahmes possuem técnicas muito semelhantes.

Em segundo lugar, em sua análise de textos gregos, Gabaglia apresenta dois problemas extraídos do papiro Akhmim[61]. São eles o número 13 e 17, cujo conteúdo é semelhante ao problema n. 28 de Ahmes.

Problema n. 13:

De um tesouro alguém tira uma parte equivalente a $\frac{1}{13}$ moedas, do que restou alguém retirou mais $\frac{1}{17}$, restando no tesouro 150 moedas. Qual era o valor total do tesouro?

[61] Com base na tradução de Baillet: Le payrus mathematique de Akhmim.

c) Passemos agora a considerar os problemas de algebra nos escriptores gregos que não se filiam apparentemente á escola pratica egypcia. Principiemos por um interessante problema, objecto de um epigramma grego descoberto em 1773 por Lessing na Bibliotheca de Brunswich e publicado no tomo I, pag. 421 do seu trabalho intitulado: Beitrage zur Geschichete und Litteratur. Esse problema é conhecido com o nome de problemas dos bois, ou «de bovino»(54) e segundo a nota que lhe está annexa, foi descoberto por Archimedes e enviado como epigramma em carta á Eratosthenes. Uma referencia a esse problema «*chamado por Archimedes o problema dos bois*» existe nos *Scholia á Charmides* de Platão.

A questão se Archimedes realmente descobrio o problema ou si seu nome foi apenas ligado a elle para marcar-lhe a extraordinaria difficuldade, foi e é muito discutida. O conjuncto de argumentos pró e contra foi collecionado em 1880 por Krumbiegel em esplendido artigo da *Zeitschrift fur Mathematik*, etc.; elle chegou aos dous seguintes resultados geraes:

1º é difficil admittir que Archimedes escrevesse o problema *com a fórma actual*; 2º é possivel, e mesmo provavel, que em substancia a origem do problema seja em Archimedes. Hultsch suggere uma engenhosa hypothese. Sabe-se que Apollonio calculou o valor de π com maior approximação que Archimedes e portanto teve de effectuar multiplicações mais complicadas do que as da «medida do circulo». Sabe-se tambem que o tratado de Apollonio sobre a multiplicação dos grandes numeros, parcialmente conservado em Pappo, foi inspirado pelo «arenario» de Archimedes, de que de facto constitue uma critica. Portanto, aceitar que Archimedes formulasse um problema conduzindo a numeros enormes e maiores que os considerados por Apollonio, é logico, principalmente se attender-mos ao tom satyrico que nota-se em algumas partes do epigramma; assim, nas primeiras palavras lê-se: calcula o numero de bois de Helios, applicando a isso tua intelligencia, si tens uma porção de sabedoria; assim, na passagem da primeira parte do problema á segunda, onde diz que, resolvendo a primeira parte, não se tem a temer passar por inhabil ou ignorante em arithmetica, não sendo porém o bastante para ser considerado entre os sabios; e o final, onde se escreve: quando nos tiveres dado os valores de todos esses numeros, então manchae triumphante e glorioso: poderás te gabar de seres um sabio famoso.»

Hultsch conclue que em qualquer caso o problema não é muito distanto do tempo de Archimedes e data ao mais tardar do principio do 2º seculo A.C.

---

(54) Quem quizer estudar esses interessantes problemas deve, entre outras, consultar as seguintes obras:
Bulletin de Bibliographie de Terquema, tomes I e II (1855 – 56).
Nesselmann, Die Algebra der Grichen, Berlin, 1842.
Heiberg, Archimedis opera omnia. Leipzig, 1880 – 81.
Hultsch, artigo, Archimedes na Real-Encyclopedie de Pasely-Wissowa, ed. de 1895; II, 1, pag. 507 a 539.
Heath: The works of Archimedes, Cambridge, 1897.
E principalmente um artigo da «Zeitschrift fur Mathematik und Physik» XXV (1880) pag. 121 *et seq.* assignado por Krumbiegel, a que Amshor (pag. 153 *et seq.*) accrescentou a discussão completa do problema.

Resolução:

Seja x o número de moedas, então,

$$\left(x-\frac{1}{13}x\right)-\frac{1}{17}\left(x-\frac{1}{13}x\right)=150$$
$$\left(\frac{12}{13}x\right)-\frac{1}{17}\left(\frac{12}{13}x\right)=150$$
$$\frac{12}{13}x-\frac{12}{221}x=150$$
$$\left(\frac{192}{221}\right)x=150$$
$$x=\frac{33150}{192}=172+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{48}+\frac{1}{96}$$

Ou seja, o tesouro em seu estado completo possuía $172+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{48}+\frac{1}{96}$ moedas.

Problema n. 17:

De um tesouro alguém tira uma parte equivalente a $\frac{1}{17}$ moedas, do que restou alguém retirou mais $\frac{1}{19}$, restando no tesouro 200 moedas. Qual era o valor total do tesouro?

Resolução:

Seja x o número de moedas, então,

$$\left(x-\frac{1}{17}x\right)-\frac{1}{19}\left(x-\frac{1}{17}x\right)=200$$
$$\left(\frac{16}{17}x\right)-\frac{1}{19}\left(\frac{16}{17}x\right)=200$$
$$\frac{16}{17}x-\frac{16}{323}x=200$$
$$\left(\frac{288}{323}\right)x=200$$
$$x=\frac{64600}{323}=224+\frac{1}{4}+\frac{1}{18}$$

Ou seja, em seu estado completo o tesouro possuía $224+\frac{1}{4}+\frac{1}{18}$.

Esses problemas são do typo: $\left(x-\frac{x}{a}\right)-\frac{1}{b}\left(x-\frac{x}{a}\right)=S$. Segundo Gabaglia, para obter a solução o escriba pode ser reduzido todas as frações em um mesmo

O objecto do problema é determinar o numero de vaccas e touros de quatro cores differentes; ha por consequencia 8 incognitas.

A primeira parte liga as incognitas por sete equações do 1º grão; a segunda impõe duas condicções a que devem estar sujeitas as incognitas.

Sejam V e v; X e x; Y e y; Z e z respectivamente os numeros de touros e vaccas das cores: branca, preta, vermelha e malhada.

Pela primeira parte do problema obtem-se as equações:

$\mathrm{V} = (1/2 + 1/3)\, X + Y$......... *(a)*

$\mathrm{X} = (1/4 + 1/5)\, Z + Y$......... *(b)*

$\mathrm{Z} = (1/6 + 1/7)\, V + Y$......... *(c)*

$v = (1/3 + 1/4)(X + x)$....... *(d)*

$x = (1/4 + 1/5)(Z + z)$....... *(e)*

$z = (1/5 + 1/6)(Y + y)$....... *(f)*

$y = (1/6 + 1/7)(V + v)$....... *(g)*

Pela segunda parte do problema obtem-se as condições:

$V + X =$ um quadrado............... *(h)*

$Y + Z =$ um numero triangular.. *(i)*

Ha no original grego uma ambiguidade na linguagem quando exprime a condicção *(h)*. A traducção litteral é «Quando os touros brancos juntaram-se em numero aos pretos, elles permaneceram firmes com comprimento e largura de igual medida: e as planicies da Thrinakia (Sicilia) foram cobertas pela sua multidão». Considerando-se que, si os touros accumularam-se de modo a formar um *figura quadrada* (comprimento e largura de igual medida), o numero delles não é necessariamente um *numero quadrado* pois que um touro é mais comprido do que largo; é claro ser interpretação possivel suppor a condicção *(h)* referir-se ao quadrado, como figura geometrica, bastando portanto que $V + X$ seja um numero rectangulo, isto é, um producto de dous factores inteiros.

O problema póde consequentemente ser estabelecido de dous modos:

1º o mais simples em que a condicção *(h)* equivale á seguinte:

$$V + X = \text{producto de dous numeros inteiros.}$$

denominador e depois realizado os cálculos. Tal processo se resume na fórmula geral,

$$\left[\left(ab - \frac{ab}{a}\right) - \frac{1}{b}(ab - b)\right] x = ab \times S$$

Para Baillet o processo empreendido nos problemas discutidos acima pode ser representado pela seguinte expressão,

$$x = S \times \frac{1}{1 - \frac{1}{a} - \frac{1 - \frac{1}{a}}{b} - \cdots}$$

Gabaglia menciona que “Custa comprehender, a não ser por falso patriotismo francez, como Baillet explica a solução desses problemas”, e que a expressão acima é uma “verdadeira phantasia”, pois, não é possível aplicar procedimentos da teoria de proporções a todos os problemas do papiro de Akhmim, especialmente aos algébricos. E conclui, “E’ notavel a tendencia de muitos espiritos illustrados em tornar difficies cousas faceis! Parece haver n’isso um verdadeiro divertimento intellectual. Si ha, Baillet muito divertiu-se”.

O problema n. 28 do papiro de Akhmim é classificado “de partilha” e segundo Gabaglia deve ser considerado também como algébrico. O trecho do papiro que contém esse problema “acha-se mutilado”, mas Rodett o reconstitui conjecturalmente do seguinte modo:

Problema n. 28:

Dividir o número 100 em duas partes proporcionais a 1 e $\frac{1}{4} + \frac{1}{28}$.

Resolução:

Suponha que uma dessas partes seja x, logo,

$$\left[x + (\frac{1}{4} + \frac{1}{28})x\right] = 100$$

$$\left[1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{28}\right)\right] x = 100$$

$$\left[1 + \left(\frac{2}{7}\right)\right] x = 100$$

2º o mais complicado em que $V + X$ é um numero quadrado.

No primeiro modo, foi solvido por J.F. Wurm, que achou para mais simples solução os seguintes valores:

$V = 1$	217	263	415	886
$X =$	876	035	935	422
$Y =$	487	233	469	701
$Z =$	864	005	479	380
$v =$	846	192	410	280

O segundo modo conduz a numeros excessivamente grandes, tendo de resolver-se a seguinte equação de Pell:

$$t^2 = 4729494u^2 = 1,$$

aproveitando a menor das soluções d'essa equação, das em que u é divisivel pelo producto de 2 por 4657.

Necessita-se de muito espaço e tempo para obter a solução da equação supra, bastando dizer que Amthor discutindo completamente o problema no *Zeitsch. Fur Mathem.* de 1880 desenvolve $\sqrt{4729494}$ em forma de fracção continúa até o periodo, que occorre depois de 91 convergentes. Após insano labor, Amthor conclue que o menor valor para V é 1598 $(\underline{206541})$, onde $(\underline{206541})$, representa que a 1598 seguem-se mais 206541 algarismos! Para materialisar a grandesa d'esse numero, faz a seguinte comparação. Certas taboas communs de logarithmos á 7 algarismos contém em cada pagina 50 linhas com 50 algarismos cada uma, o que dá um total de 2500 algarismos; portanto o menor valor de V, ou de qualquer das outras incognitas, occupa 82 $^1/_2$ de taes paginas; e para escrever todos os oito numeros seria preciso um volume de 660 paginas!

Os numeros enormes a que se chega as grandes difficuldades que existem para obtel-os, faz duvidar que Archimedes tivesse resolvido o problema do segundo modo. Seja como fôr, o certo é que esse problema representa na historia da mathematica grega uma excepção notavel sendo profundamente de deplorar nada saber-se acerca dos methodos então usados para resolvel-o.

d) Questão importante para o historico da algebra é uma regra, conservada por Jamblico e attribuida a um certo Thymaridas. Essa regra é chamada *épanthema* e é mais uma prova de que os gregos se occupavam da *analyse indeterminada* antes de Diophantos.

Durante muito tempo, foi essa regra a mais antiga proposição algebrica conhecida; hoje ella acha-se espantosamente mais moderna que o papyro de Ahmes, não se podendo,

$$\frac{9}{7}x = 100$$

$$x = \frac{100 \times 7}{9}$$

$$x = \frac{700}{9} = 77 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9}$$

Seja y a segunda parte proporcional, ela é obtida pela diferença abaixo,

$$y = 100 - x$$

$$y = 100 - \frac{700}{9}$$

$$y = \frac{200}{9} = 22 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$$

Gabaglia não apresenta os resultados dos cálculos, mas, de fato a soma das partes proporcionais x e y resulta 100.

Também no papiro de Akhmim figuram semelhanças entre os métodos de Ahmes e Herão. Um exemplo é o fato dos cálculos do papiro grego iniciaram com a palavra "*homoios"*, segundo Gabaglia essa palavra refere-se a "conforme a regra". Nos problemas n. 47, n. 48 e n. 50, a expressão empregada é "oyto poice", ou seja, "operai assim". Baillet, considerando que o papiro de Akhmim é um caderno de aluno, pensa que o emprego da expressão "operai assim" foi "um descuido alumno", tendo este se distraído e copiado a fórmula do professor.

Dando continuidade ao estudo dos textos gregos, Gabaglia propõe-se agora a considerar os problemas que "não se filiam apparentemente á escola pratica egypcia". O primeiro desses problemas é conhecido por *problema dos bois*[62], essa denominação teria sido dada pelo matemático grego Arquimedes e enviada na forma de epigrama ao também matemático grego Eratóstenes. Gabaglia comenta que, em sua época, houve uma intensa discussão sobre esse assunto e, por isso, apresenta elementos de tal contenda, contudo, nenhuma conclusão sobre a origem do problema e dada.

O problema pode ser entendido pelo seguinte enunciado,

[62] Gabaglia dá uma lista de artigos e textos para "quem quizer estudar esse interessante problema".

porém, attribuir-lhe uma data certa. Seu autor Thymaridas é desconhecida, parecendo não poder ser identificado com o de Tarento que foi pupilo de Pythagoras; provavelmente viveu no 2º ou no 3º seculo da era christã.

A regra[54] que é curiosamente explanada é assim: quando quaesquer quantidades definidas ou indefinidas montam a uma dada somma e a somma de uma dellas *mais* cada uma das outras (em pares) é dada, a somma desses pares *menos* a primeira somma dada é (si são 3 as quantidades) igual a quantidade que foi addicionada a todo o resto (nos pares); ou (si são 4 as quantidades) a metade disso; (si 5) ao terço; (si 6) ao quarto, etc.

Actualmente, explicamos essa regra do modo seguinte:

Sejam as *n* equações entre as *n* incognitas $x, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$:

$$x + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} = a$$
$$x + y_1 = b$$
$$x + y_2 = b_2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x + y_{n-1} = b_{n-1}$$

onde $a, b_1, b_2 \dots b_{n-1}$ são quantidades conhecidas.

Obtem-se:

$$x = \frac{b_1 + b_2 + \cdots b_{n-1} - a}{n-2}.$$

Jamblico applica essa regra a questão seguinte de anlyse indeterminada, onde empregaremos os nossos symbolos:

$$x_1 + x_2 = 2(x_3 + x_4)$$
$$x_1 + x_3 = 3(x_2 + x_4)$$
$$x_1 + x_4 = 4(x_2 + x_3)$$

a resolver em numeros inteiros.

Se deduz da ultima equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5(x_2 + x_3).$$

Faça-se

[54] Sobre o *epanthema* veja-se: *Nesselmann*, Alg. der Gr. pags. 232-236; e vol. I do Bolletin de Bibliographie de Terquem.

Problema dos bois[63]:

Determinar o número de bois e vacas de cada uma das seguintes espécies: brancos, pretos, vermelhos e malhados, de modo que os bois e vacas brancos sejam representados pelas incógnitas V e v, os pretos por X e x, os vermelhos por Y e y e os malhados por Z e z, segundo as equações abaixo:

$$\mathrm{V} = \left(1/_2 + 1/_3\right) X + Y \text{.........} \qquad \text{(a)}$$

$$\mathrm{X} = \left(1/_4 + 1/_5\right) Z + Y \text{.........} \qquad \text{(b)}$$

$$\mathrm{Z} = \left(1/_6 + 1/_7\right) V + Y \text{.........} \qquad \text{(c)}$$

$$v = \left(1/_3 + 1/_4\right)(X + x) \text{.......} \qquad \text{(d)}$$

$$x = \left(1/_4 + 1/_5\right)(Z + z) \text{.......} \qquad \text{(e)}$$

$$z = \left(1/_5 + 1/_6\right)(Y + y) \text{.......} \qquad \text{(f)}$$

$$y = \left(1/_6 + 1/_7\right)(V + v) \text{.......} \qquad \text{(g)}$$

Além disso, as condições abaixo devem ser satisfeitas,

$$V + X = \text{um quadrado..............} \qquad \text{(h)}$$

$$Y + Z = \text{um numero triangular..} \qquad \text{(i)}$$

Segundo Gabaglia, uma resolução e discussão completa do *problema dos bois* foram dadas por Amthor em 1880, quando valeu-se da atualmente chamada *equação de Pell* $(x^2 = 1 + py^2)$, para obter o valor das incógnitas. Chegando a seguinte sentença,

$$t^2 - 4729494u^2 = 1$$

Amthor dedicou-se com “insano labor” e concluiu que “para escrever todos os oito numeros seria preciso um volume de 660 paginas!”. Boyer (2001), também comenta o problema dos bois,

[63] No livro *The World of Mathematics* (1956, p. 197-199), há uma discussão mais detalhada sobre o problema dos bois.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2.3.4.5 = 120.$$

A primeira equação dá

$$3(x_1 + x_2) = 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 240$$

e

$$x_1 + x_2 = 80$$

$$4(x_1 + x_3) = 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 360$$
$$x_1 + x_3 = 90$$

e igualmente

$$x_1 + x_4 = 96$$

Temos então:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 120$$
$$x_1 + x_2 = 80$$
$$x_1 + x_3 = 90$$
$$x_1 + x_4 = 96;$$

applicando o *epanthema*:

$$x_1 = \frac{80 + 90 + 96 - 120}{2} = 73,$$
d'onde: $x_2 = 7;\ x_3 = 17;\ x_4 = 23.$

São, diz Jamblico, os numeros mais simples; multiplicando-os ou dividindo-os por outro qualquer, os resultados obtidos satisfazem tambem ao problema[55].

Entre as cousas notaveis que se póde ver n'essa regra, uma das mais importantes é o uso technico do vocabulo *(doristos)* para significar a quantidade indefinida (ou incognita): era uma novidade entre os gregos, e entretanto vinte seculos antes pelo menos os egypcios já possuiam para o mesmo fim o vocabulo *hau*.

---

[55] Na *estrophe* 29 da Alagebra de Aryabhata aparece uma proposição semelhantes ao *epanthema*. (V. Rodet. Lições de calculo de Aryabatha. Pariz. 1879). Cantor pensa que é um plagio do grego.

> O *problema do gado* é um desafio aos matemáticos para resolver um sistema de equações indeterminadas em oito incógnitas – o número de touros e vacas de cada uma quatro cores diferentes. Há alguma ambigüidade na formulação do problema, mas segundo uma interpretação seria necessário um volume de mais de 600 páginas para dar os valores das oito incógnitas contidas numa das possíveis soluções. (BOYER, 2001, p. 92, grifo do autor)

Outra contribuição grega para “o historico da algebra” é a regra conservada por Jâmblico e atribuída a Thymarides, a *Èpanthema*. Essa regra corrobora com a ideia de que os gregos “se occupavam da *analyse indeterminada* antes de Diophantos”.

Depois de anunciar a regra por

$$x = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} - a}{n - 2}$$

Gabaglia cita um exemplo para demonstrar a aplicação da regra.

Apesar de considerar relevante reconhecer a álgebra grega, Gabaglia, comentando a *Èpanthema*, continua defendendo sua hipótese de que os egípcios possuíam conhecimentos algébricos antes do desenvolvimento da matemática grega, vejamos,

> Entre as cousas notaveis que se póde ver n’essa regra, uma das mais importantes é o uso technico do vocabulo (doristos) para significar a quantidade indefinida (ou incognita): era uma novidade entre os gregos, e entretanto vinte seculos antes pelo menos os egypcios já possuiam para o mesmo fim o vocabulo hau. (GABAGLIA, 1899, p. 104).

A última obra grega comentada por Gabaglia nessa seção é a “Anthologia Grega”, cujo conteúdo é dado por diversas composições poéticas chamadas de epigramas.

Na Anthologia Grega, figuram cerca de cinquenta epigramas matemáticos, estes serviram à Metrodoro, autor da maioria, “para apresentar problemas algébricos”. Infelizmente esses problemas não possuem solução e “nada existe acerca dos methodos em sua epoca empregados”, apesar de afirmar que podem resolvidos por equações do primeiro grau, Gabaglia não dá uma resolução aos problemas.

O autor apresenta seis exemplos que estão “entre os usados ainda em nossas escolas”. São eles o de n. 1 cujo autor é Sócrates, o n. 3 com autor anônimo, *e)* Em uma obra interessante da litteratura hellenica intitulada «Anthologia Grega», notam-se cerca de meia centena de epigrammas mathematicos, alguns muito elegantes e outros notaveis por diversas razões.

A anthologia grega, ou, como geralmente é conhecido, a anthologia (*anthos*, flor, e *légein*, colher) é uma collectanea de curtas e ligeiras poesias gregas, onde com graça e precisão raras tratam-se dos assumptos os mais diversos.

A anthologia principia em Homero, e, acompanhando o desenvolvimento da litteratura grega, pára em Maximo Planudes que litterariamente é considerado o ultimo grego.

As poesias que constituem a *anthologia* denominão-se *epigrammas*, termo que tinha então um sentido mais lato que o actual. Si, na verdade, ao principio entre os gregos o *epigramma* era simples inscripção para perpetuar um facto ou uma individualidade, mais tarde elle decorou as imagens dos heróes, patenteou a grandeza dos tumulos ou a dos tropheus onde se o gravava, acompanhou os dons da amizade e os presentes do amor, ou ao contrario feriu o ridiculo com o espirito justamente denominado attico. Si o epigramma serviu a Alceu para ensinar o amor á liberdade e o odio aos tyrannos, a Simonida para celebrar a libertação da Grecia, a Metrodoro para apresentar problemas algebricos; tambem serviu a Anacreonte, a Asclepiadeu, a Callimaco para cantar ou o vinho ou o amor; e nem foi julgado indigno da eloquencia por Platão e por S. Gregorio e nem da sciencia por Erastosthenes e por Ptolomeu.

Meleagro(56), cem annos antes de Christo; Felippe de Thessalonia no 2º seculo da era christã; Agathias no 6º reuniram um certo numero de epigrammas alheios e proprios. Baseado n'esses trabalhos, Cephalas no 10º seculo coordenou uma anthologia que 4 seculos depois foi refeita pelo monge Maximo Planudes.

Esta ultima anthologia foi salva na tomada de Constantinopolis por João Lascaris que a fez imprimir em Florença, 1494(57). Deixando de lado numerosas edicções e traducções totaes ou parciaes, bem assim commentarios importantes que foram desde então publicados, não é licito esquecer o nome de Saumaise que descobriu na Bibliotheca Palatina de Heidelberg o manuscripto da anthologia de Cephalas de que Brunck fez (1772) memoravel edicção em 3 volumes; e o de Frederico Jacobs que, em 1794, publicou nova edição

(56) Meleagro, natural de Gadara, em Syria, foi o edictor da primeira anthologia conhecida que formou de 46 authores antigos e recentes, classificados em ordem alphabetica; a esta collecta deu o titulo elegante de *Stephanos*, coroa ou grinalda, comparando em um pequeno poema que lhe serve de introducção cada poeta á uma flor ou a um fructo. Saint-Beuve fez no tomo III do seu «Portraits diverses» um excellente estudo sobre elle. Infelizmente quasi toda a anthologia de Meleagro, bem assim a de Felipe de Thessalonia e de Agathias (denominada *cyclos*) perderam-se; e se d'ellas resta alguma cousa é devido a Constantino Cephalas que redigiu uma quarta anthologia, fazendo uma escolha nas tres primeiras e accrescentando alguns poetas posteriores a Agathias.

(57) Ha exemplares desta edicção que não tem data, porque foram retiradas as ultimas folhas, que continham um epigramma de João Lascaris e uma epistola em latim dirigida a Pedra de Medicis. A razão é que em Agosto de 1494 ao publicar-se a anthologia estavam no poder os Medicis, sendo porem mais tarde expulsos de Florença, pois em Setembro desse mesmo anno Carlos VIII de França invadio a Italia. O edictor tirou então a dedicatoria que tinha o nome de um proscripto. Parece um acto de nossos dias...

o n. 49 também de autor anônimo, os de n. 126 e n. 135 de Metrodoro e o de n. 26 de autoria de Euclides. Vejamos a seguir do que trata alguns desses problemas e suas respectivas resoluções,

Problema n. 1:
Qual o número de alunos de uma escola na qual um sétimo estuda matemática, um quarto estuda física, um sétimo se dedica à psicologia e 3 estudam assuntos diversos?
Resolução:
Seja x o número de alunos da escola, o problema pode ser expresso pela seguinte equação,

$$x = \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3$$
$$x = \frac{25x}{28} + 3$$
$$x - \frac{25x}{28} = 3$$
$$\frac{28x - 25x}{28} = 3$$
$$\frac{3x}{28} = 3$$
$$x = \frac{84}{3}$$
$$x = 28$$

Ou seja, 28 alunos dedicam-se a exercícios de filosofia.

Problema n. 3:
De um depósito de laranjas foram retiradas seus um quinto, um doze avos, um oitavo, um vigésimo, um quarto e um sétimo de laranjas. Além dessas foram retiradas mais 500 laranjas. Quantas laranjas haviam no depósito antes das retiradas?
Resolução:

$$x = x\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{20} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7}\right) + 500$$

enriquecida de uteis taboas e acompanhada de um magnifico commentario em 8 volumes, obra prima de exegese. O celebre Grotius verteu para o latim a anthologia de Planudes; é um trabalho admiravel, em que a traducção latina conserva a elegancia do original grego.

Seguimos a traducção franceza publicada em 1863 pela livraria Hachette de Pariz. E' feita sob o texto de Jacobs tendo tambem o appendice por este formado de diversos epigrammos conservados em autores antigos ou sobre marmores e não existentes nas anthologias de Cephalos e Planudes; e é acompanhada de notas sobre os poetas da anthologia e de util indice alphabetico.

Dos epigrammas mathematicos, tres vêm no appendice e são attribuidos respectivamente a Diophantos, a Eratosthenes, e a Euclides (ns. 19, 25 e 26); e os outros vêm na parte que a traducção franceza denominou «Problèmes, enigmes, oracles,» vol. II, pag. 41 et seq(58). Destes 32 são attribuidos a Metrodoro (os de ns. 116 a 134), sendo o ultimo, n. 147, igual ao que existe na disputa de Homero do pseudo Hesiodo; 12 (os de ns. 2 a 7, 11 a 13, 48 a 51) são anonymos; e o de n. 1 é attribuido a um Socrates, que provavelmente não é o grande philosopho, e sim um certo Socrates épigrammátôn poiêtên a que se refere Diogenes Laercio, II, 5, 27, o qual hoje só é conhecido por essa citação. Os epigrammas algebricos de Metrodoro têm na anthologia o qualificativo de problemas, o que realmente são.

Quem foi o Metrodoro author d'esses problemas, é questão controversa: ou foi em de Scepsis, na Mysia que viveu no tempo de Mithridates; ou foi um de Bysancio, grammatico que foi contemporaneo de Constantino, o Grande (306 – 337 P. C.) e que tambem escreveu sobre astronomia e sobre geometria. O manuscripto palatino e muitos commentadores aceitam a ultima hypothese.

Os problemas da anthologia podem ser solvidos por equações do 1º grão e são todos numericos. Infelizmente, não é dada a solução, nem nada existe acerca dos methodos em sua epoca empregados.

Vamos dar como exemplos alguns que traduziremos ao pé da letra; escolheremos entre os usados ainda em nossas escolas.

«N.1. (Socrates). Polycratos, tyranno de Samos pergunta á Pythagoras o numero de seus discipulos. Feliz Pythagoras, rebento heliconiano das Musas, diz-me quantos athletas em tua escola preparas para os gloriosos exercicios da philosophia? Vou dizer-te, Polycratos; a metade estuda as bellas sciencias mathematicas, a eterna natureza é o assunpto dos trabalhos de um quarto; um setimo se exercita ao silencio e a meditação; ha ainda tres mulheres das quaes Theano é a que mais se distingue. Eis o numero de meus discipulos que são tambem os das Musas.»

N.3. (Anonymo). Cypris disse ao Amor que estava tristonho: «Qual, meu filho, o motivo de teu aborrecimento?»

$$x = x\left(\frac{715}{840}\right) + 500$$

$$x - \frac{715x}{840} = 500$$

$$\frac{840x - 715x}{840} = 500$$

$$125x = 500 \times 840$$

$$x = \frac{420000}{125} = 3360$$

Logo, o depósito continha 3360 laranjas.

Problema n. 49:

Na fabricação de uma coroa foram usados quatro tipos de metais: ouro, cobre, estanho e ferro, com peso total de 60 minas (unidade de medida). O ouro e o cobre juntos pesam $\frac{2}{3}$ do total da coroa, o ouro e o estanho somam $\frac{3}{4}$ do total e, o ouro e o ferro pesam $\frac{3}{5}$ do total. Quanto de cada metal, ouro, cobre, estanho e ferro, foram usados na fabricação dessa coroa?

Resolução:

Seja x o peso do ouro, y o peso do cobre, z o peso do estanho e w o peso do ferro. Pelo enunciado do problema,

$$x + y + z + w = 60$$

e,

$$x + y = 40$$

$$x + z = 45$$

$$x + w = 36$$

somando essas três equações obtemos,

$$x + y + x + z + x + w = 40 + 45 + 36$$

$$2x + (x + y + z + w) = 121$$

– «As Musas á vontade arrebataram-me as laranjas que colhi sobre o Helicão. Chio tomou-me o quinto: Euterpe o duodecimo; a divina Thalia, o oitavo; Melpomene, o vigesimo; Terpsichore, o quarto; Erato, o setimo; Polymnia roubou-me 30; Urania 120; Calliope carregou-se de 300; e eu dirijo-me para ti, as mãos quasi vasias, trazendo apenas o que me deixarão as deusas: 50 laranjas.»

«N. 49 (Anonymo) Faz-me uma coroa de ouro, de cobre, de estanho tambem e de ferro, do peso de 60 minas. Que o ouro e o cobre entrem por 2⁄3, o ouro e os estanho por 3⁄4, ao mesmo tempo que o ouro e o ferro por 3⁄5. Quanto, diz-me, deves empregar de ouro? quanto de cobre? Diz-me tambem quanto de estanho, emfim quanto de ferro, para fabricar essa corôa de 60 minas.»[59]

N. 126 (Metrodoro). PROBLEMA: Este tumulo contém Diophantos. O' maravilha! Elle diz mathematicamente quanto este viveu. Deus concedeu-lhe o sexto da vida para sua infancia; accrescentou-lhe um duodecimo para que suas faces se cobrissem com a penugem dos adolescentes; além disso, durante sete annos, fez queimar para elle o archote do hymeneu, e depois de cinco annos de casamento deo-lhe um filho, oh! unico e infeliz filho, a quem a Parca só permittio ver a metade da vida de seu pai. Durante quatro annos ainda consolou sua dor com o estudo da quantidade; emfim attingio ao termo da sua vida.

N. 135 (Metrodoro). PROBLEMA: Estamos aqui tres Amores que derramamos neste tanque a agua dos banhos. A' direita eu, com a agua que se escapa de minhas azas encho-o na sexta parte do dia. O Amor da esquerda com a urna que tem, o enche em 4 horas. O do meio, com o arco donde espirra agua, emprega a metade do dia. Busca em quantas horas poderiamos encher o tanque com a agua das nossas azas, do arco e da urna.

N. 26 do Appendice (Euclides). Uma mula e uma jumenta ião de companhia, carregadas de trigo. A jumenta gemia sob o peso da carga. A mula ouvindo-a gemer, disse-lhe; Mai, porque te lamentas assim, como se fosses uma creança? Si me desses um dos teus saccos, minha carga seria dupla da tua; e si tu me tomasses um em troca, teriamos o mesmo peso». Diz-me o numero dos saccos, oh! tu que és forte mestre em mathematicas?

27.– No papyro Rhind encontram-se alguns signaes symbolos de operações algebricas e que n'um trabalho mais profundo e cuidadoso do que o actual podiam conduzir a elevadas considerações philosophicas e a importantes pesquizas historicas.

No calculo do *hau* apparece como symbolo da addição e de subtração duas pernas que dirigidas em um sentido indicam uma d'essas operações, e no sentido opposto outra.

Igualmente, ha signal que significa «iguaes».

[59] A esse problema póde-se applicar o epanthema de Thymaridas.

da primeira equação sabemos que $x + y + z + w = 60$, então:

$$2x + 60 = 121$$
$$2x = 61$$
$$x = 30,5$$

se $x = 30,5$, substituindo esse valor em qualquer uma das três equações formadas a partir do enunciado, temos que,

$$y = 9,5$$
$$z = 14,5$$
$$w = 5,5$$

Logo, foram usados $30,5$ minas de ouro, $9,5$ minas de cobre, $14,5$ minas de estanho e $5,5$ minas de ferro na fabricação da coroa.

Problema n. 126:

Como enunciado desse problema, usaremos a tradução de Katz (1998), pois consideramos que Gabaglia pode ter cometido um erro de tradução no enunciado que apresenta[64].

> Este túmulo detém Diofanto... [e] diz cientificamente a medida de sua vida. Deus lhe concedeu ser um menino pela sexta parte de sua vida, e adicionando uma décima segunda parte a isso, ele vestiu suas bochechas com barba. Ele concedeu-lhe a luz do casamento após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento, ele concedeu-lhe um filho. Ai de mim! Recém-nascido filho miserável; depois de atingir a medida da meia vida de seu pai, o frio destino o tomou. Depois de consolar sua tristeza por esta ciência dos números há quatro anos, ele terminou sua vida. (KATZ, 1998, p. 168, tradução nossa)

Resolução:

Seja x o número de anos que viveu Diofanto, logo:

$$x = \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4$$

[64] O erro consiste em afirmar que Diofanto “durante sete annos, fez queimar para elle o archote do hymeneu”, sendo na realidade um sétimo da vida dedicado a esse fato.

E’ necessario accrescentar que os signaes de que acabamos de fallar se apresentam com o caracter abstracto de verdadeiros symbolos algebricos; e não como hieroglyfos, representando certos vocabulos.

$$x = x\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2}\right) + 9$$

$$x = \frac{75}{84}x + 9$$

$$x - \frac{75}{84}x = 9$$

$$\frac{84x - 75x}{84} = 9$$

$$\frac{9x}{84} = 9 \leftrightarrow 9x = 756$$

$$x = 84$$

Portanto, conclui-se que Diofanto viveu 84 anos.

Problema n. 135:

Três torneiras enchem um balde de água. A primeira torneira, sozinha, enche o balde em $\frac{1}{6}$ do dia, a segunda torneira, sozinha, em 4 horas e, a terceira torneira, sozinha, enche o balde em 12 horas. Se fossem abertas juntas, quanto tempo as três torneiras levariam para encher o balde?

Resolução:

Pelo enunciado do problema podemos concluir que em 12 horas sete tanques são cheios por água. Para descobrir em quanto tempo um tanque seria cheio, basta aplicar a regra de três:

$$12\ horas \rightarrow 7\ tanques$$

$$x\ horas \rightarrow 1\ tanque$$

Isto é,

$$7x = 12$$

$$x = 1{,}71\ horas$$

Portanto, se as três torneiras fossem abertas juntas, bastaria $1{,}71\ horas$ para que um balde fosse preenchido.

Problema n. 26:

Uma mula e uma jumenta carregam sacos de trigo. A mula vendo a jumenta lamentar-se diz: Porque se lamentas como uma criança? Se me desses um dos teus sacos, minha carga seria o dobro da sua e se me tomasses um saco, teríamos o mesmo peso. Qual é então o número de sacos de jumenta? E a da mula?

Resolução:

$$\begin{cases} x+1 = 2(y-1) \leftrightarrow x+1 = 2y-2 \leftrightarrow x = 2y-3 \\ x-1 = y+1 \leftrightarrow x = y+2 \end{cases}$$

isto é,

$$2y-3 = y+2$$

$$y = 5$$

logo,

$$x = 7$$

Portanto, a jumenta carrega 5 sacos de trigo enquanto que a mula carrega 7 sacos de trigo.

Na última seção do parágrafo § 4, denominada “Signaes algébricos”, novamente Gabaglia afirma a existência de sinais “symbolos de operações algebricas” no papiro Rhind[65]. O autor acredita que estes símbolos não têm a função de representar vocábulos, como ocorreu com os hieróglifos, e sim representar verdadeiros símbolos algébricos. No entanto, o próprio Gabaglia comenta que seria preciso um trabalho mais “profundo e cuidadoso do que o actual”, para chegar a importantes conclusões filosóficas e relevantes pesquisas históricas.

[65] Ver discussão apresentada nas páginas n. 49 e n. 50 deste trabalho.

§ 5.° – GEOMETRIA DO PAPYRO RHIND

SUMMARIO: – 28. Origem da geometria. – 29. A stereometria do Papyro. 30. Area do circulo; modo notável de obtel-a. – 31. O esquadro egypcio. – 32. Area de figuras rectilineas. – 33. Problemas sobre pyramides; origem da trigonometria. – 34. Etymologia do vocabulo «pyramide».

28. – Segundo a tradição geral são os egypcios que, primeiros, inventaram a Geometria, diz Proclo, e ella nasceu da medida de terrenos, a qual era necessario continuamente renovar por causa das cheias do Nilo que faz desapparecer os limites das propriedades. Não é de admirar, continua o mesmo escriptor, que uma necessidade pratica occasionasse a invenção dessa sciencia ou de outras, pois que tudo o que é submettido á geração procede do imperfeito para o perfeito, ha então progresso natural da sensação ao raciocinio e deste à intelligencia pura.

Essa origem pratica é tambem dada como uma legenda, e muitos seculos antes de Proclo, por Herodoto (II, 109) que diz ter havido no tempo de Sesostris (Ramses II, cerca de 1.400 A.C.) uma divisão da terra do Egypto em lotes rectangulares iguaes por motivos fiscaes e que annualmente pela enchente do rio havendo alterações nas suas dimensões, nomeavam-se empregados encarregados de procederem a novas medidas necessarias em taes casos para a reducção da taxa de impostos; d'ahi nascera a geometria, que passou mais tarde para a Grecia. Si ha verdade nesta legenda, não ha relativamente a epoca a que se refere, pois Ahmes é de muito anterior; e, como veremos, os seus conhecimentos geometricos eram bastante elevados e para serem obtidos deviam ter exigido muitos seculos.

Aristoteles tem opinião differente acerca da causa determinante da origem da geometria, ou melhor da mathematica; attribue (Metaph. I, 1) aos lazeres dos sacerdotes egypcios[60].

Em qualquer hypothese, o certo é que o berço da geometria foi nas margens do Nilo: ahi a foram beber os gregos. Deodoro relata que os sacerdotos egypcios consideravam Solon, Pythagoras, Platão, Democrito, Oenopido de Chios e Eudoxo seus discipulos. Strabão (XVII, 1; ed. Meineke, pg. 1124) entrou em detalhes sobre a ida de Platão e Eudoxo ao Egypto, onde estudaram durante 13 annos, e diz que as casas em que residiram eram ainda mostradas em Heliopolis. Em Clemente de Alexandria[61] ha um importante fragmento de Democrito (460–370, A C.) que prova o alto renome dos agrimensores egypcios, até entre os gregos naturalmente conduzidos por orgulho e vaidade a salientar a superioridade de sua

---

[60] No *Phaedrus* de Platão, lê-se que Socrates attribue a invenção da arithmetica, da geometria e da astronomia ao deus egypcio Thot.
[61] *Strom.* I; ed. Potter, pg. 357.

4.5 § 5.º – Geometria do Papyro Rhind

O último capítulo do livro de Gabaglia versa sobre os problemas geométricos do papiro Rhind. Assim, na primeira seção (28ª) "Origem da geometria" o autor cita o filósofo grego Proclo para afirmar que foram os egípcios quem inventaram essa "ciência" e que este fato é decorrente da medição de terras[66] no Antigo Egito. Para Proclo não era estranho que "uma necessidade pratica occasionasse a invenção dessa sciencia ou de outras".

Segundo Gabaglia a origem prática da geometria também foi descrita pelo grego Heródoto[67] em uma antiga lenda sobre a repartição de terras no Egito. O historiador Boyer (2001), na abertura do segundo capítulo (Egito) de seu livro *História da Matemática*, narra parte dessa lenda. Vejamos,

> Sesóstris... repartiu o solo do Egito entre seus habitantes... Se o rio levava qualquer parte do lote de um homem... o rei mandava pessoas para examinar, e determinar por medida a extensão exata da perda... Por esse costume, eu creio, que a geometria veio a ser conhecida no Egito, de onde passou para a Grécia. (HERÓDOTO *apud* BOYER, 2001, p. 6)

A partir dessa repartição "nascera a geometria, que passou mais tarde para a Grecia". De qualquer modo, o período em que Heródoto viveu é muito posterior à época de Ahmes, portanto, os conhecimentos geométricos contidos no papiro Rhind revelam uma origem bastante antiga da geometria se levarmos em consideração que tais conhecimentos "para serem obtidos deviam ter exigido muitos seculos".

Ao contrário de Proclo e Heródoto, o filósofo Aristóteles tem outra hipótese para a origem da geometria. Gabaglia afirma que para esse filósofo a geometria advém dos "lazeres dos sacerdotes egípcios", ou ainda, da construção de templos e outros "edifícios públicos". Segundo Boyer (2001), Aristóteles achava que a existência de uma classe sacerdotal no Egito, com determinados lazeres é que teria conduzido ao estudo da geometria.

Concordando com Proclo, Heródoto e Aristóteles, Gabaglia parece também atribuir as origens da geometria aos egípcios. De fato o próprio autor menciona: "Em qualquer hypothese, o certo é que o berço da geometria foi nas margens do Nilo: ahi a foram beber os gregos". O autor comenta que mesmo entre os gregos houve certo

[66] As cheias do Rio Nilo faziam desaparecer as marcações na terra, por isso a prática de medição tornou-se coisa comum entre os antigos egípcios.
[67] Heródoto é conhecido como o "pai" da história por ter sido o primeiro a empregar a palavra *história* no sentido de investigação/pesquisa. (BORGES, 1993, p. 19).

raça sobre as demais. Por esse fragmento, vê-se que «para a composição das linhas[62] com demonstração, não achou superior, mesmo entre os *harpedonaptas* egypcios, como se os chamam». Desta citação, conclue-se logo que os chamados *harpedonaptas* eram famosos geometras, querendo muitos ver nesse vocabulo um nome proprio; porém, Cantor[63] notou que é francamente grego, derivado de *harpedone (corda) e aptein (tocar)*; e deve significar «extendedor de corda» ou cousa semelhante. Seu officio póde ser explicado do modo seguinte: Os egypcios por motivos religiosos orientavam cuidadosamente os templos e outros edificios publicos; ora, das inscripções parece poder-se concluir que só a linha N–S era traçada por observações astronomicas, sendo a de E–W tirada em angulo recto com aquella. Igualmente sabe-se pela pratica de Herão de Alexandria e dos agrimensores da antiga India, e provavelmente da China, que o methodo habitual de locar no terreno uma recta perpendicular a outra, sendo ambas longas, era esticar em torno de tres estacas uma corda medida em tres porções, sujeitas a relação 3 : 4 : 5. O triangulo formado com esses elementos é evidentemente rectangulo.

A operação de retezar ou esticar a corda, sem maior explicação, é mencionada no Egypto em uma epoca extremamente longiqua: no reinado de Amenemha 1°.

Si é certo o modo de ver de Cantor como tudo leva a crer, então os egypcios em epoca nunca inferior a 2000 annos A.C. conheciam, ao menos em um caso particular, o theorema do quadrado da hypothenusa[64].

Para muitos pensadores e eruditos, a geometria egypcia se reduzia a regras praticas e a preceitos applicaveis as artes de construccção e de agrimensura, sem processos de demonstração scientifica e conduzindo a resultados approximados, a erros grosseiros. Semelhante opinião, porém, não é baseada em factos positivos; ao contrario, ha muitos e valiosos argumentos contra. Com effeito, a fama que para toda a antiguidade tinham as escolas sacerdotaes egypcias; o facto de lá terem ido estudar muito dos gregos eminentes que de volta vieram fundar em sua patria escolas de philosophia e de sciencia[65]; e o de terem vivido, ensinado ou estado no Egypto: Euclides, Archimedes, Eratosthenes e Apollonio que são os quatro maiores nomes do periodo aureo da geometria grega; Herão e Ptolomeu que com Hipparco[66] são os tres maiores do periodo argenteo; Pappo, Theon, Hypathia e Proclo que são os mais notaveis da decadencia, provam fortemente em favor do conhecimento dos

---

(62) Isto é: na construcção de figuras planas.
(63) Hist. de math.; pgs. 55-57; 324-5; 540-2; 580-1 da 1ª ed.; V. tambem para comparação Hankel, op. cit. pg. 83.
(64) Esse theorema é attribuido a Pythagoras entre outros por Vitruvio, Diogenes Laercio, Proclo e Plutharco. O ultimo, comtudo, attribue aos egypcios o conhecimento do theorema para o caso particular de serem os lados 3, 4 e 5 (de Is. Et Osir. 56).
(65) Entre outros: Thales, Anaximandro, Pythagoras, Democrito e Platão.
(66) Ha duvida sobre a estadia de Hipparco no Egypto.

reconhecimento dos agrimensores egípcios, por vezes também chamados de *harpedonaptas*[68], ou, mais comumente conhecidos por estiradores de corda.

Boyer (2001) acredita que a prática de medir com cordas, pode estar relacionada a ambas as hipóteses de Heródoto e Aristóteles, não podendo definir de fato qual seria a origem da geometria.

> O fato de os geômetras egípcios serem às vezes chamados “estiradores de corda” (ou agrimensores) pode ser tomado como apoio de qualquer das duas teorias, pois cordas eram indubitavelmente usadas tanto para traçar as bases de templos como para realinhar demarcações apagadas de terras. (BOYER, 2001, p. 4-5)

Gabaglia, influenciado pelo historiador Cantor (1894), afirma que assim como outros povos da antiguidade, os agrimensores egípcios sabiam o método de “locar no terreno uma recta perpendicular a outra”, e o faziam esticando em torno de três estacas uma corda dividida na relação: $3:4:5$, o que evidentemente constitui um triângulo retângulo. Com isso o autor conclui que os egípcios conheciam um caso particular do “theorema do quadrado da hypothenusa”, conhecido também por teorema de Pitágoras.

Segundo o historiador da matemática Eves (2004): “Há registros de que os agrimensores egípcios antigos, do tempo dos faraós, construíam triângulos 3,4,5 com uma corda dividida em 12 partes iguais por 11 nós para demarcar ângulos retos”. (EVES, 2004, p. 86). No entanto, reconhecer que os egípcios sabiam operar com triângulos retângulos não significa que eles dominavam alguma regra específica para esses casos.

Boyer (2001), também não considera que os egípcios tinham alguma noção do teorema de Pitágoras. Vejamos: “Diz-se frequentemente que os egípcios antigos conheciam o teorema de Pitágoras, mas não há traço disto nos papiros que chegaram até nós”. (BOYER, 2001, p. 12). Para o autor, o que é expresso em alguns papiros egípcios da antiguidade é a existência de cálculos envolvendo triângulos retângulos e não uma regra aplicada a esses casos particulares.

Ainda na primeira seção do capítulo sobre a origem da geometria Gabaglia parece discordar de que a geometria egípcia teria sido usada apenas para fins práticos. O autor acredita que o fato das escolas egípcias terem sido frequentemente

---

[68] Segundo Gabaglia, Cantor (1894) considera a palavra *harpedonaptas* de origem grega derivada de *harpedone* (corda) e *eptein* (tocar), isso “deve significar “extendedor de corda” ou coisa semelhante”.

egypcios em geometria. Além disso, a citação já feita de Democrito mostra que os *harpedonaptas* sabiam demonstrar as construcções que faziam sobre figuras planas. O estudo de edificios em cuja architectura entram tres dos cinco solidos regulares dos quaes a descoberta era dada a Pythagoras, e a decifração do papyro Rhind trazem argumentos irrespondiveis.

Provavelmente, o que se dava no Egypto era o monopolio da sciencia e das artes liberaes pela classe sacerdotal. Os padres, escravos da tradição, conservavam certas regras que com o correr dos tempos consideravam sagradas e as unicas a empregar: era um ritual de que não se podiam separar sob pena de passarem por hereges, feiticeiros, revolucionarios, etc.

E' o que talvez explique a geometria do templo de Horus em Edfú nas inscripções onde se descrevem as terras doadas pelo rei Ptolomeu XI ao collegio sacerdotal annexo ao mesmo.

Na descripção geometrica feita 200 annos depois de Euclides usam-se formulas incorrectas para as areas do triangulo isosceles e de uma especie de trapezio.

Provavelmente no interior dos santuarios a sciencia desenvolvia-se; porém, só a alguns discipulos desvendavam-se as novas descobertas. Para o vulgo, a tradição impunha-se, o antigo dominava; a sciencia parecia e ficava immobilisada e mummificada. Em medicina, Deodoro (I, 82) conta que empregava-se em seus dias o receituario contido nos antiquissimos livros sagrados, com o temor de cahir no desprezo publico. Na Grecia, ao contrario, o livre pensamento e a livre discussão multiplicavam as escolas divergentes que pela luta desenvolviam o intellecto e formavam o progresso e a civilisação; todos procuravam aprender e tambem espalhar o que sabiam, quer fosse original, quer tivesse vindo do velho Egypto.

29. – Vejamos no paypro Rhind se ha ou não o que admirar sob o ponto de vista geometrico; ahi, de accordo com o que seculos depois faziam os pythagoricos e Platão, distinguiam-se, aliás sem nenhuma declaração formal, a *stereometria* (ou volumetria) e a *geometria*[67]: aquella occupa a segunda parte do papyro (ns. 41-48 do *fac-simile*); e esta a terceira (ns. 49-60). Conforme ensina Platão, a geometria[68] é a theoria do plano; e a stereometria é a sciencia «da extensão do cubo e do que tem profundidade».

Infelizmente, como foi dito em n.5, a fórma dos celeiros cuja capacidade Ahmes pede nos problemas stereometricos não é dada; de sorte que nada de seguro póde-se deduzir das

[67] Herão denominou *metrica* a obra que escreveu sobre geometria pratica, considerando nella duas partes principaes: a geometria e a stereometria. V. La géométrie grecque par Tannery 1ª partie, pg. 54.
[68] Platão já condemnava o termo *geometria* para indicar a sciencia abstracta assim chamada. No *Epimenidas* diz: ser geometria uma denominação que desata o riso.

procuradas por estudiosos gregos é um forte argumento a favor do conhecimento (não) prático dos antigos egípcios. Além disso, Gabaglia considera que é possível que muitas "novas descobertas" tenham ficado restritas apenas à classe sacerdotal e aos templos religiosos, tornando a ciência egípcia "immobilisada e mummificada".

> Para muitos pensadores e eruditos, a geometria egypcia se reduzia a regras praticas e a preceitos applicaveis as artes de construcção e agrimensura, sem processos de demonstração scientifica e conduzindo a resultados approximados, a erros grosseiros. Semelhante opinião, porém, não é baseada em factos positivos; ao contrario ha muitos e valiosos argumentos contra. (GABAGLIA, 1899, p. 113).

O autor conclui a seção afirmando que a decifração do papiro Rhind traz argumentos irrespondíveis a essa questão e, em seguida aponta que o grande desenvolvimento da ciência grega de "livre pensamento" e "livre discussão", ao contrário da egípcia, pode ser consequência da característica grega de "aprender e tambem espalhar o que sabiam".

Na seção 29 "A stereometria[69] do papyro" Gabaglia aborda os problemas geométricos e volumétricos do papiro Rhind, são eles os de n. 41 a 60. O autor afirma que Ahmes não explicita a forma dos celeiros cuja capacidade volumétrica é solicitada, no entanto, é possível concluir que os celeiros dos problemas n. 41 a n. 43 têm base circular e os celeiros dos problemas n. 44 a n. 46, base quadrangular.

Esses problemas exigem transformação de medidas, o que segundo Gabaglia "complica absolutamente qualquer hypothese que não póde deixar de ser vã em casos semelhantes, porque se ignoram as relações entre essas diversas medidas".

Para realizar o cálculo da capacidade dos celeiros Ahmes multiplica a área da base por metade da altura, o resultado obtido é o valor do corpo. Para obter a capacidade em medida de cereais é preciso tomar a vigésima parte do resultado anterior. Dessa forma o primeiro problema considerado é o de n. 44, vejamos:

Problema n. 44:
Calcular o volume de um celeiro de comprimento, largura e altura iguais a 10 unidades de medida.
Resolução:

[69] Stereometria é o mesmo que volumetria ou cálculo de volume.

soluções conservadas. Só é licito concluir que os celleiros dos ns. 41 a 43 tem base circular, e os de ns. 44 a 46 quadrangular.

Nesses problemas, quer-se a capacidade dos celleiros expressa em uma certa medida de cereaes, e não na unidade commum do volume. Ha, portanto, no calculo uma transformação de medida: o que complica absolutamente qualquer hyphotese que não póde deixar de ser vã em casos semelhantes, porque se ignoram as relações entre essas diversas medidas. E. Revillout com plausiveis argumentos considera o *bescha* igual a $^1/_5$ do covado cubico e pensa que a unidade de volume nesses problemas stereometricos é o covado cubico[69].

Ahmes obtem a capacidade dos celleiros, multiplicando a area da base por uma vez e meia a altura: é o *valor do corpo*, isto é, o valor expresso em unidades de volume. Para ter a capacidade em medida de cereaes, toma-se a vigessima parte.

Assim, no problema 44 trata-se de um celleiro, ou antes de um silo, de comprimento, largura e altura iguaes a 10. Para ter a capacidade, Ahmes multiplica 10 por 10 (é a base), e o resultado (100) pela altura, que dá 1000; em seguida, somma a esse numero sua metade: 500, que faz: 1500, que é, na opinião de E. Revillout, a capacidade avaliada em covados cubicos; depois, Ahmes faz nova avaliação em medida 20 vezes maior, para o que divide 1500 por 20, obtendo 75.

Assim, no problema n. 41, onde o celleiro de base circular é de diametro igual a 9; e de altura igual a 10, Ahmes avalia do modo notavel que adiante expomos a area da base acha ser 64 e esse numero multiplica por 10; em seguida, toma a metade do producto e effectua a somma desta metade com o producto, chegando a 960, cujo vigessimo 48 é a solução em unidades de cereaes.

A' vista do que acabamos de mostrar, não se póde affirmar se era valor exacto, ou approximado, o obtido por Ahmes. O professor E. Revillout occupando-se com a habitual elevação e erudicção desses problemas em um artigo de comparação entre as medidas egypcias e as hebraicas, na *Revue Egyptologique* de 1881, lembra que Herão de Alexandria para calcular a capacidade de certos vasos ou receptaculos de paredes obliquas, fazia o producto da base pela altura de que tomava $^1/_3$, e em seguida sommava esse terço com o producto, obtendo assim o volume em covados cubicos. E' provavelmente cousa semelhante que effectuava Ahmes.

Ha, e é uma coincidencia a notar, no papyro de Akhmim tres problemas (ns. 1, 2 e 5) stereometricos, semelhantes aos de Ahmes, e que apresentam as mesmas duvidas e incertezas.

---

[69] *Revue Egyp.* 1881, pg. 192.

Ahmes "obtem a capacidade dos celleiros multilplicando a area da base por uma vez e meia a altura". Se chamarmos a capacidade de V (volume) e a altura de h, obtemos,

$$V = \acute{A}rea\ da\ base\ \times \left(h + \frac{h}{2}\right)$$

Pelas medidas notamos que a base do celeiro é um quadrado, logo,

$$V = 10^2 \times 10 + 10^2 \times 5$$
$$V = 1000 + 500$$
$$V = 1500$$

Gabaglia, seguindo a opinião de Revillout, menciona que a capacidade do celeiro desse problema é avaliada em *côvados cúbicos*. No entanto, para Clagett (1999) e Chace (1927), a unidade de medida do problema é *khar*[70]. Depois de calculada a capacidade, Ahmes toma $\frac{1}{20}$ do resultado, ou seja, agora busca a medida da capacidade do celeiro em *hekat*.

$$\frac{1}{20} \times 1500 = \frac{1500}{20} = 75$$

Portanto o celeiro comporta 1500 *khar* ou 75 *hekat* de grãos.

Figura 36 – Problema n. 44 do papiro Rhind

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

[70] Segundo Gillings (1982, p. 210), $\frac{1}{20}$ *khar* equivale a 1 *hekat.*

A parte stereometrica do papyro tem sob n. 47 uma lista de sub-multiplos de medidas; e sob n. 48 a avaliação das areas de um circulo e do quadrado circumscripto, de que vamos tratar.

30. – No n. 48 ha uma figura que deve representar um circulo inscripto num quadrado; o copista fez o desenho muito mal, parecendo o circulo antes um octogono irregular, de que quatro lados estão na direcção dos lados do quadrado. Não ha, porém, a menor duvida de que seja um circulo. No centro do circulo está escripto 9, indicando ser esse o valor do diametro; e em baixo acham-se dous calculos, dispostos parallelamente, que podemos transcrever assim:

«	1	8	* 1	9	
	2	16	2	18	
	4	32	4	36	
	8	64	8	72	
			em somma	81	»

Reflectindo-se um pouco, vê-se ahi a determinação das duas areas, a do circulo e a do quadrado; a segunda é evidente, pois consiste em elevar ao quadrado 9, que é o valor do lado. A primeira difficilmente poder-se-hia aceitar, si em outros problemas não houvesse a explicação do calculo, applicado ao mesmo numero e a numero differente. Effectivamente, o problema n. 50 diz:

« *Capitulo para calcular uma superficie redonda para 9 medidas.* Qual é sua avaliação em superficie? Subtrahe-se o $^1/_9$, isto dá 1; resta: 8; multiplica o numero: 8 vezes oito; isto dá agora: 64. Sua avaliação é em superficie 64.

Faz como isto é:

	1 9	1	8
seu $^1/_9$	1	2	16
subtrahe, resta	8	4	32
		8	64

Sua avaliação é em superficie 64 ».

No n. 41, achamos o mesmo diametro e a mesma superficie: « Subtrahe $^1/_9$ de 9; isto dá: 1; resta: 8; multiplica o numero: 8 vezes oito; isto dá agora: 64 ».

No n.42, o diametro da base é 10. Ahmes faz o nono de 10, isto é: $1\,^1/_9$, que subtrahe de 10; fica: $8 + {}^2/_3 + {}^1/_6 + {}^1/_{18}$, que eleva ao quadrado, obtendo: $79 + {}^1/_{108} + {}^1/_{324}$.

No problema n. 41, o celeiro tem base circular com diâmetro igual a nove e altura igual a dez. Ahmes efetua o cálculo multiplicando a área da base pela altura, em seguida toma a metade do produto e a soma ele mesmo. Por fim, novamente realiza uma transformação de medidas tomando um vigésimo do resultado. Sendo o celeiro de base circular supõe-se que o escriba sabia calcular a área de um círculo, Gabaglia menciona que “a diante” irá abordar “o modo notavel” desse procedimento, apresentando assim somente o resultado e não o cálculo da medida da área.

Por enquanto vejamos como, de maneira atual, podemos interpretar o problema n. 41 e a resolução de Ahmes.

Problema n. 41:

Calcular o volume de um celeiro de base circular com diâmetro igual a nove e altura igual a 10.

Resolução:

$$V = Área\ da\ base\ \times h + \left(\frac{Área\ da\ base\ \times h}{2}\right)$$

$$V = 64 \times 10 + \frac{64 \times 10}{2}$$

$$V = 640 + 320 = 960$$

Em seguida Ahmes apresenta o seguinte cálculo:

$$\frac{1}{20} \times 960 = 48$$

Ou seja, o volume do celeiro é 960 *khar*, ou, 48 *hekat* de grãos.

Figura 37 – Problema n. 41 do papiro Rhind.

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

O processo da medida do circulo, usado por Ahmes, consistia portanto em elevar ao quadrado os $^8/_9$ do diametro; era de pratica excessivamente facil. Sua approximação era sufficiente para as applicações do papyro: avaliação de medidas de cereaes e de superficies de terrenos; actualmente usam-se menores approximações, e são ensinadas em trabalhos especiaes, para a cubação de madeiras, de toneis e vasilhames nas alfandegas e portos fiscaes etc. O processo equivale a fazer

$$\pi = {}^{256}/_{81} = 3{,}1604 \ldots$$

Como Ahmes obteve tão importante regra, ignora-se em absoluto. Tem-se conjecturado que ella podia ter sido obtida pelo exame e observação dos desenhos existentes nas paredes de certos edificios egypcios(70): é, porém, simples conjectura, balda de prova de qualquer especie que seja.

A regra de Ahmes torna-se ainda mais digna de attenção si compararmos com a de alguns dos antigos mathematicos. Entre os babylonios(71) o valor de π é 3; e o mesmo parece ter sido entre os hebreus(72). Euclides sabia que era maior do que 3 e menor que 4. Archimedes dá o celebre valor $^{22}/_7$. Herão nas *mensurae* usa 3 e na *geometria* $^{22}/_7$. Os agrimensores romanos usam, para as grosseiras approximações, 3 ou 4; e, para as pequenas, $3\,^1/_8$. Entre os hindús Baudhayana emprega $^{49}/_{16} = 3{,}0625$; Brahmagupta $\sqrt{10} = 3{,}1622 \ldots$..

31. – A comprehensão dos processos geometricos de Ahmes necessita do estudo do esquadro egypcio, instrumento indispensavel para os seus calculos de geometria pratica e para seus trabalhos de architectura. O esquadro (*hapt*) é conhecido desde epoca immemorial e a miudo citado em documentos egypcios. As vezes os soberanos são representados, tendo-o na mão. Do Egypto passou a Grecia com o nome de *gnomom*, palavra que tem diversos significados entre outros no sentido abstracto o de norma ou criterio de proceder.

O esquadro egypcio era de proporção. Compunha-se de duas rectas em angulo recto: uma indiviza, servindo para a maior dimensão; e a outra, dividida, para marcar proporcionalmente a menor. A recta indivisa tinha para comprimento uma certa unidade escolhida á vontade: o covado geralmente; a outra era dividida em fracções dessa unidade.

---

(70) Demme, *Bemerkungen zu den Regeln des Ahmes* etc. (Zeitse, für Math. u. Phys. XXXI, 1886, pg. 132) O eminente professor Loria considera genial e verosimel essa hyphotese.
(71) Oppert, Journ. Asiat. 1872 e 1874.
(72) Reis, III, VII, 23; Paralipomenos, II, IV, 2; segundo a Vulgata latina.

Gabaglia comenta que “não se póde affirmar se era valor exacto, ou approximado, o obtido por Ahmes”. De fato, nota-se que atualmente o cálculo para obter o volume de sólidos geométricos com base retangular ou circular basta efetuar o produto da área da base pela altura do sólido. Isto é, a adição que figura tanto no problema n. 44 como no n. 41 parece ser equivocada. Citando novamente o professor Revillout, Gabaglia relembra os problemas volumétricos de Herão de Alexandria notando que adição semelhante também era calculada pelo produto da área da base pela altura.

Como diz o próprio título, a seção 30 “Area do circulo; modo notavel de obtel-a” basicamente irá abordar os problemas em que Ahmes apresenta cálculos para obtenção da área de um círculo ou coisa semelhante. Sendo assim o primeiro problema comentado por Gabaglia é o n. 48, o autor comenta que apesar de não existir a menor dúvida de que o problema trata de um círculo “o copista fez o desenho muito mal, parecendo o circulo antes um octogno irregular”. Na figura n. 38 verifica-se que o problema não possui enunciado, contando apenas com um diagrama.

Gabaglia transcreve o problema apresentando duas operações que consistem da determinação e comparação entre as áreas do círculo e do quadrado em que ele está inscrito. Vejamos como são desenvolvidas tais operações.

Problema n. 48:

Compare a área de um círculo e de um quadrado aí circunscrito sabendo que a medida do diâmetro do círculo é nove.

Resolução:

O primeiro cálculo[71] consiste da multiplicação, no modo egípcio, de nove por nove, para obter a área do quadrado.

$$Área\ do\ quadrado = 9 \times 9 = 81$$

Sobre a segunda operação 8×8, Gabaglia menciona: “difficilmente poder-se-hia aceitar, si em outros problemas não houvesse a explicação do calculo”. Este cálculo consiste da obtenção da área do círculo.

---

[71] Na figura, o primeiro cálculo é o que está ao lado esquerdo do desenho.

Sobre a recta dividida corria ou circulava um ponto movel ou *indice*, que parando em um traço de divisão indicava um numero, expresso em fracções do covado. Esse ponto movel chamava-se *seket* ou, segundo a graphia de Eisenlohr, *seqt*, bem assim o numero por elle indicado. Examinemos a maneira de applicar o esquadro ás pyramides quadradas regulares, que eram as usadas no Egypto.

Tomando a regoa indevisa, considerada vertical, para figurar a altura da pyramide e uma fracção da outra regoa para figurar o semi-lado da base; tem-se a medida da obliquidade das faces da pyramide, e, por isso mesmo, em cada pedra do seu revestimento a obliquidade da face externa. Para construir uma pyramide perfeitamente regular de uma altura dada, bastava então que o constructor indicasse aos mestres e operarios o comprimento do lado da base e o *seket* que ahi era a razão da metade desse lado e a altura, e correspondia ao que hoje chamariamos a tangente trigonometrica do angulo da inclinação da face.

A obliquidade constante das faces em relação as fiadas permittia attingir sem difficuldade a altura desejada. O esquadro servia a medir e conservar essa obliquidade, determinando a direccção da recta que passava pelo extremo da regoa ascendente e pelo ponto indicado sobre a recta horisontal. Assim, só com o esquadro e indicado o *seket*, os operarios podiam sem guia elevar uma pyramide porque pelo angulo recto o esquadro tambem lhes servia para determinar a direcção das faces horisontaes e verticaes de cada pedra.

Nem sempre os egypcios souberam construir pyramides de faces planas com inclinação continua. As mais antigas são de degráus, isto é, se compõem de parallelipipedos superpostos de dimensões decrescentes: taes são as proximas de Sakkarah, cuja idade remonta a 54 ou 55 seculos[73].

Nos triangulos rectangulos, o menor catheto que no esquadro era medido pelo *seket*, considerava-se a base e tinha o nome de *tepro*, litteralmente *bocca*, porque para os egypcios elle era a embocadura e a medida do menor angulo. O maior catheto que chamariamos hoje altura, desde que considerassemos o outro base, denominava-se *merit*, palavra cuja raiz prende-se a idéa de distancia, e que tambem geometricamente significa o ponto mais afastado da figura na escala da proporção do esquadro, isto é, o ponto commum ao maior catheto e a hypothenusa[74].

32. – Dada essa explicação preliminar sobre o esquadro egypcio e alguns termos technicos de que não podiamos prescindir, póde-se entrar na parte propriamente

---

[73] V. Houseau et Lancaster, Bibliog. de l'Astronomie, I, pg. 101.

[74] O significado desses termos technicos e a sua graphia, e as informações sobre o esquadro são tiradas do artigo dos professores Revillouts de titulo « Note sur l'equerre egyptienne » Rev. Egyp. ns. II e III – 1881. Revillout. pg. 307 da revista citada.

Figura 38 – Problema n. 48 do papiro Rhind

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

Na sequência do texto três problemas são considerados para tentar explicar a motivação do segundo cálculo do problema n. 48, são eles o n. 50, o n. 41e o n. 42. Vejamos,

Problema n. 50:

Calcular a área de um círculo com diâmetro igual a nove unidades de medida.

Resolução:

Em primeiro lugar Ahmes toma a nona parte do diâmetro,

$$\frac{1}{9} \times 9 = 1$$

A seguir subtrai da medida do diâmetro o valor obtido,

$$9 - 1 = 8$$

O próximo passo consiste da multiplicação do último resultado por obtido por ele mesmo, ou seja,

$$8 \times 8 = 64$$

Logo a área do círculo é 64 unidades de medida.

Figura 39 – Problema n. 50 do papiro Rhind

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

geometrica que principia em n. 49 do papyro, e pelo assumpto divide-se em duas secções; a primeira das quaes' que estende-se até o n. 55, vamos explanar. Nesta o objectivo é determinar a area de certas superficies planas; e, como Ahmes, quer tenha sido o seu trabalho um caderno de alumno, quer um manual pratico, estuda sempre questões de vida diaria e de applicação quasi quotidiana em sua epoca e paiz, as superficies consideradas são as que naturalmente se apresentavam nos trabalhos praticos e habituaes da agrimensura egypcia.

Segundo Herodoto, o Egypto foi dividido em lotes rectangulares, que mais tarde nas partilhas por herança, vendas parciaes, etc., foram subdivididas, como provam os actos conservados, do modo mais natural em novos rectangulos ou em triangulos rectangulos e trapezios, obtidos por parallelas ás bases desses triangulos. Por consequencia, essas superficies eram as que habitualmente tinham de ser avaliadas; bem como as circulares por causa das bacias e reservatorios dessa fórma. Effectivamente, são as consideradas por Ahmes.

No n.49 avalia se a area de um rectangulo de 10 medidas por 2; para o que, faz-se o producto das duas dimensões de uma maneira especial com o fim de exprimir a superficie em unidade usual. Referindo-se essa conversão á metrologia do papyro, objecto sujeito a longas discussões e interpretações, abandonaremos esse numero mostrando com exemplo de outro problema que Ahmes sabia resolver a questão.

Tal é o caso do n. 51, onde tendo um rectangulo com os mesmos elementos, diz: «multiplica o numero 10 duas vezes; é sua extensão».

Em n. 48, como já vimos, Ahmes determina a area de um quadrado de lado 9, addicionando 9 a 8 vezes 9, isto é, elevando 9 á 2ª potencia. E' o que acontece no n. 44, onde o lado do quadrado é 10, e a area obtida 100.

O n. 50 refere-se como já foi dito á area circular; e o n.51 trata de um triangulo e é acompanhado de uma figura mal traçada, cujo exame e medida sobre o proprio *fac-simile* mostra que em realidade não é nem um triangulo rectangulo nem um triangulo isosceles. O calculo, porém, indica ser o triangulo rectangulo.

Eis o texto:

« *Capitulo para calcular um triangulo de campo.* Si te dizem: um triangulo de 10 medidas em seu *merit*, 4 medidas em seu *tepro*. Qual é a sua extensão?

Faz como isso é. Faz a metade de 4, isto é, 2 afim de fazer seu quadrilatero. Multiplica o numero: 10 duas vezes. Sua extensão é isso ».

Ha tambem o mesmo calculo feito em medidas agrarias de que não nos occupamos.

O problema consiste em achar a area de um triangulo rectangulo cuja altura é 10 e base 4. Ahmes toma a metade da base e o resultado multiplica pela altura: é exactamente o que se faz hoje. Do modo de dizer, conclue-se que Ahmes sabia que o triangulo rectangulo é

Relembremos que na explicação do problema n. 41 Gabaglia havia prometido explicar como Ahmes obteve a área da base circular do celeiro cujo volume buscava determinar. O resultado do problema n. 50 é a explicação para tal cálculo, ou seja, em simbologia atual, o antigo escriba fez,

$$\left[9-\left(9\times\frac{1}{9}\right)\right]^2=8^2=64$$

Do mesmo modo segue o cálculo do problema n. 42, cujo objetivo é determinar o volume de um celeiro cuja base circular possui o diâmetro igual a dez. Isto é,

Problema n. 42:

Calcular o volume de um celeiro com diâmetro da base igual a 10 e altura igual a 10.

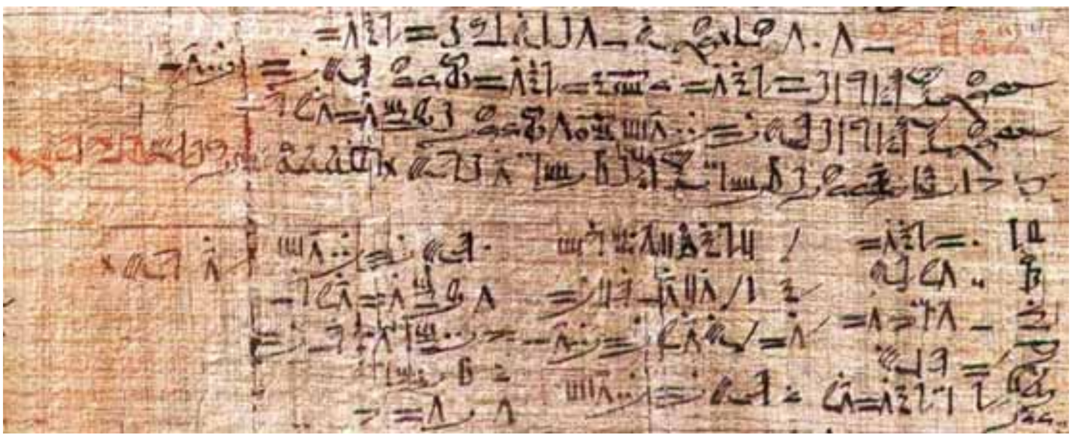
Resolução:

Primeiro determina-se a área da base utilizando o mesmo procedimento do problema n. 41, isso resulta em:

$$\left[10-\left(10\times\tfrac{1}{9}\right)\right]^2=\left[10-\left(\tfrac{10}{9}\right)\right]^2=\left[10-\left(1+\tfrac{1}{9}\right)\right]^2=\left(10-1-\tfrac{1}{9}\right)^2$$
$$\left(\frac{90-9-1}{9}\right)^2=\left(\frac{80}{9}\right)^2=\left(8+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}\right)^2=79+\frac{1}{81}$$

Ou, conforme expresso por Ahmes, o resultado é $79+\frac{1}{108}+\frac{1}{324}$.

Figura 40 – Problema n. 42 do papiro Rhind



Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

a metade de um quadrilatero, cuja superficie obtinha-se pela multiplicação de duas dimensões contiguas.

Eisenlohr baseado na irregularidade dessa figura e das seguintes, e desviado pelas inscripções de Edfú, abandona o caminho indicado pelo calculo e considera isosceles o triangulo. A marcha da solução e essa estariam erradas.

Na verdade, a formula da area de um triangulo isosceles em funcção dos lados iguaes *(a)* e da base *(b)* é:

$$\frac{1}{2}b\sqrt{a^2-\frac{1}{4}b^2}$$

e a que teria empregado Ahmes $\frac{1}{2}ab$. O erro no exemplo considerado seria pequeno, e podia aceitar-se como uma approximação pratica possivel; porquanto daria 20 unidades quadradas em vez de 19,6.

Deixando de lado o que está escripto, ha a favor da opinião contraria argumentos poderosos: 1°, nas obras dos antigos mathematicos, inclusive Herão de Alexandria, o capitulo dos triangulos principiava pelos triangulos rectangulos; 2° no problema trata-se da medida de um terreno, e o triangulo rectangulo resulta mais naturalmente da divisão de um campo rectangular do que um triangulo isosceles; 3° ser pouco possivel poder-se com tanta approximação como já foi visto, avaliar-se a area de um circulo e não poder-se a de triangulo, mais facilmente alcançavel pela experiencia. Sem fallar que admittir-se erro semelhante em Edfú, cujas inscripções eram contemporaneas e posteriores aos grandes geometras gregos de Alexandria, é negar tudo o que a tal respeito conservou a historia; pois é impossivel admittir que agrimensores incapazes de avaliar a area de um triangulo, tivessem uma reputação tão immensa que Augusto fez buscal-os para medir o Imperio Romano.

A mesma duvida pelo mesmo motivo continua no problema n. 52 onde para os professores Revillouts[75] trata-se de um trapezio rectangulo, e para Eisenlohr de um trapezio isosceles.

No trapezio rectangulo considerado, como no caso da agrimensura egypcia, obtido de um triangulo rectangulo cortado por uma recta parallela a um dos cathetos, além da base maior que continuava a denominar-se *tepro* e da altura que por analogia continuava tambem a ser o *merit*, tinha-se de entrar em conta com a base menor que chamavam *kak-t*, vocabulo que podemos traduzir por *Seccionante*, e que se applica tambem ao calculo de avaliar a area do trapezio por essa formula.

Eis o problema:

---

[75] E' tambem a opinião de Loria. V. a sua monographia sobre « Le science esatte nell antica Grecia. » Lb. I, pg. 158.

Da análise dos problemas n. 41 e n. 42 podemos generalizar o procedimento de Ahmes para obtenção da área do círculo pela seguinte expressão:

$$Área\ do\ círculo = \left[d - \left(d \times \frac{1}{9}\right)\right]^2 = \left[d - \left(\frac{d}{9}\right)\right]^2 = \left(\frac{8d}{9}\right)^2$$

Gabaglia menciona que não se sabe ao certo como Ahmes chegou a tal regra, mas, ela merece ser digna de atenção se considerarmos que por meio de sua exploração podemos obter um valor aproximado para o número $\pi = \frac{256}{81} = 3{,}1604$. O autor não menciona como foi possível fazer tal afirmação, mas, pode ter pensado do seguinte modo: Seja A a área do círculo dada por $\pi \times r^2$, isto é,

$$A = \pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \times \frac{d^2}{4}$$

Ou ainda,

$$\pi = \frac{A}{\frac{d^2}{4}} = A \times \frac{4}{d^2}$$

Desse modo, o valor do número π pode ser obtido pela multiplicação da área do círculo pela quarta parte do quadrado da medida de seu diâmetro. Substituindo os dados dos problemas n. 41 e n. 42, o número π resulta na constante $\frac{256}{81}$, ou seja, $\pi = 3{,}1604 \ldots$ o que é uma excelente aproximação se compararmos esse resultado com outros povos da antiguidade.

A próxima seção "O esquadro egypcio" versa sobre o "instrumento indispensavel" nos cálculos de geometria prática e nas construções arquitetônicas do Antigo Egito. Gabaglia comenta que apesar de ser usado desde épocas muito antigas o esquadro egípcio (*hapt*) foi pouco citado em documentos da antiguidade e, do Egito passou à Grécia com o nome de *gnomon*, palavra que possui entre outros significados o sentido de "norma ou criterio de proceder".

Segundo Gabaglia o esquadro egípcio era formado por duas retas proporcionais dispostas de modo a formarem um ângulo reto. Uma dessas retas era

« *Capitulo para fazer uma secção (kakt) de campo*. Se te dizem: uma secção de campo de 20 medidas em seu *merit*, de 6 medidas em seu *tepro*, de 4 medidas em seu *kakt*. Qual a sua extensão? Addiciona-se o *tepro* a seu *kakt*; isso dá agora 10. Faz a metade de 10; isto é, 5, afim de fazer seu quadrilatero. Multiplica o numero 20 por 5; isto dá agora: 100. Sua extensão é isso ». E continua com uma transformação em medidas de superficie.

Analysando-se, vemos que Ahmes faz a semi-somma das bases e depois multiplica pela altura que é o lado do trapezio perpendicular as bases; e o que hoje fazemos em hypothese identica.

Pela expressão «afim de fazer seu quadrilatero» depois de obtida a semi-somma das bases, parece que Ahmes sabia ser o trapezio rectangulo equivalente ao rectangulo da mesma altura e de base igual a semi-somma das bases daquelle. Considerando-se, porém, a figura a que se refere esse problema, trapezio isosceles, ha um erro na marcha e no valor da solução.

Na verdade, sendo *a* o valor dos lados iguaes, *b* e *B* os dos lados parallelos, a formula da area de um trapezio isosceles é:

$$\frac{B+b}{2} \times \sqrt{a^2 - \left(\frac{B-b}{2}\right)^2}$$

e não a empregada que é $\frac{B+b}{2}a$. A solução em vez de 100 medidas quadradas, devia ser 99,875.

Contra os que vêm nesse ponto o trapezio isosceles, ha uma forte objecção; elles julgam a regra inexacta do trapezio isosceles uma consequencia logica da formula tambem inexacta da area de um triangulo isosceles. Essa dependencia póde ser demonstrada do modo seguinte[76]: Seja MNnm o trapezio isosceles de bases *B* e *b*, e de lados iguaes *a*. Prolongue-se Mm e Nn até seu ponto de encontro (V). Faça-se *VM=C*, e *Vm=c*. Para ser $\frac{C}{c} = \frac{B}{b}$ e pela regra inexacta para a area de um triangulo isoscelles, vem: Trapezio MNnm = triangulo VMN – triangulo Vmn $= {}^1\!/_2\, \mathrm{C.B} - {}^1\!/_2\, c.b = {}^1\!/_2 \left[(a+c)B - {}^1\!/_2 (C-a)b\right] = {}^1\!/_2\, a(B+b) + {}^1\!/_2 (c.B - C.b) = \frac{B+b}{2}a.$

Esse raciocinio é immensamente complexo para ser attribuido a Ahmes, principalmente pelos que o julgam incapaz de calcular com rigor superficies de triangulo.

O problema n. 53 é inintelligivel, parecendo estar incompleto e errado. Tanto quanto se póde deduzir da figura, Ahmes devia avaliar ao mesmo tempo a secção superior triangular, e as secções-trapezios média e inferior de um triangulo rectangulo, cortado por duas seccionantes parallelas. Tinha se então de applicar em detalhe a esses diversos casos as

[76] V. Loria, op. cit. pg. 157.

dividida proporcionalmente em frações da unidade de medida “o covado geralmente”, representada pela outra reta. Sobre a reta dividida movia-se um ponto, chamado de *seket*.

O uso do esquadro egípcio na construção de pirâmides de base quadrangulares dava-se essencialmente para determinar a obliquidade entre as faces da pirâmide. Tomava-se a reta não dividida para representar a altura da pirâmide e uma fração da reta dividida para representar o semi-lado da base, esse processo determinava a medida da obliquidade entre as faces da pirâmide.

> Para construir uma pyramide perfeitamente regular de uma altura dada, bastava então que o constructor indicasse aos mestres e operarios o comprimento do lado da base e o *seket* que ahi era a razão da metade desse lado e a altura, e correspondia ao que hoje chamariamos a tangente trigonometrica do angulo da inclinação da face. (GABAGLIA, 1899, p. 120)

Dessa forma “só com o esquadro e indicado o *seket*, os operarios podiam sem guia elevar uma pyramide”. Contudo, Gabaglia menciona que os egípcios nem sempre souberam construir pirâmides de faces planas com inclinação contínua, por exemplo, àquelas próximas a cidade de Sakkarah (atualmente Saqqara) onde os degraus eram superpostos por paralelepípedos de dimensões decrescentes.

Na sequência da seção sobre o esquadro egípcio, segue “A area de figuras rectilineas”, e aí sim “póde-se entrar na parte propriamente geometrica em que principia em n. 49 do papyro”. Da natureza dos problemas Gabaglia conclui que esta parte pode ser dividida em duas seções, a primeira compreende o problema n. 49 até o problema n. 55, e a segunda, do problema n. 56 até o problema n. 60.

A primeira seção consiste em determinar a área de certas figuras planas. O primeiro problema comentado por Gabaglia é o n. 49.

Problema n. 49:

Calcular a área de retângulo de base igual a 10 unidades de medida e altura igual a 2.

Resolução:

Do procedimento empregado por Ahmes fica claro que a operação é a mesma feita atualmente.

$$Área\ do\ retângulo = b \times h$$

marchas estudadas nos exemplos precedentes, (ns. 51 e 52). Parece que só soube determinar a area do triangulo, cuja altura sendo de 7 medidas e a base de $2\,^1/_2$ tem a superficie de $7\,^1/_2 + ^1/_4 + ^1/_8$ com justeza obtida.

Os ns. 54 e 55 tem por objecto repartir respectivamente 7 e 3 unidades agrarias em 10 e 5 partes; e escapam a esse nosso breve estudo.

33.– A segunda secção da parte geometrica do papyro comprehende os ns. 56 e 60 e trata de alguns problemas sobre pyramides; póde ser considerada como o primeiro calculo trigonometrico conhecido, e esse ramo de mathematica teria desse modo sua origem no estudo das pyramides do Egypto.

Nos ns. 56 a 59, trata-se das pyramides communs do Egypto (*smer*); e no n. 60 de um monumento chamado *an* que sem duvida é uma pyramide monolithica. Na opinião dos Drs. E. e V. Revillouts, fortemente justificada[77], a altura da pyramide denominava-se technicamente no Egypto *pir-em-us* (= sahindo da largura ou na largura); e o lado da base *ucha-tebt* (= pesquiza do pé). No *an*, a altura é *kai-en-hira* (= altura do vertice) e o lado da base *senti* (= base). O *seket* é a razão entre o semi-lado da base e a altura; é portanto a *tangente* do angulo do vertice.

O n. 56 diz:

« *Capitulo para calcular*[78] *uma pyramide.*

360 de *uchatebt,* 250 de *piremus* para ella. Faz-me conhecer seu *seket*. Faz a metade de 360; isso dá agora: 180. Faz multiplicar o numero 250 até achar 180. Isto dá agora: $^1/_2 + ^1/_5 + ^1/_{50}$ do covado. O covado é de 7 palmos. Multiplica o numero: 7

1	7
$^1/_2$	$3\,^1/_2$
$^1/_5$	$1\,^1/_3 + ^1/_{15}$
$^1/_{50}$	$^1/_{10} + ^1/_{25}$

seu *seket*, $5\,^1/_{25}$ palmos »,

Analysando-se, vemos que tem-se o numero do *piremus* como representando a medida de um covado; procura-se então que fracção do covado faria o numero representando a metade do *uchatebt* (base); depois avalia-se essa fracção do covado em palmos ou em fracções de palmo porque a regoa inferior do esquadro é dividida em palmos e em suas fracções. E' uma applicação da regra de tres,

---

(77) Pg. 309 da revista citada.

(78) O termo que traduzimos apud Eisenlohr, por calcular é litteralmente exprimir, proclamar (*nas*) que convém perfeitamente no calculo da obliquidade de uma pyramide cuja *expressão* é dada sobre o esquadro pelo *seket.*

Sendo b a sabe e h a altura.

Gabaglia comenta que a resolução do problema consiste do "producto das duas dimensões", porém, não apresenta o cálculo traduzido como fez em outros casos.

Observando Gillings (1982), encontramos o seguinte comentário: "O escriba cometeu um descuidado erro de cópia, escrevendo 2 *khet* ao invés de 1 *khet*, e o repetiu em sua figura. Contudo não há erros em seus cálculos com 1 *khet*". (GILLINGS, 1982, p. 137, tradução nossa). De fato, notar-se-á na figura abaixo a exposição do número dois, representado por duas barras verticais, ao lado do retângulo desenhado, enquanto que o cálculo é efetuado com o valor de 1 *khet* de altura.

Figura 41 – Problema n. 49 do papiro Rhind

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

Segundo Gabaglia o problema n. 44, no que se refere ao cálculo da área da base quadrangular, é resolvido de maneira semelhante ao problema n. 48. O problema n. 51 possui as mesmas condições do problema n. 49, ou seja, calcular a área de uma figura com base igual a 10 *khet* e altura 2 *khet*.

Para Chace (1927), o problema consiste do seguinte:

Problema n. 51:

Calcular a área de um triângulo com a medida do lado[72] igual a 10 *khet* e de base 4 *khet*.

Resolução:

O escriba afirma que é necessário tomar metade de 4 e multiplica o resultado por 10, assim obtém a área do triângulo, isto é 20 *khet*. Contudo, no cálculo ele considera a base como 400 cúbitos e o lado 1.000 cúbitos. Dividindo 400 por 2 ele fica com as dimensões 200 e 1.000. Para obter a área expressa em cúbitos ele

[72] Gillings (1982, p. 138), afirma que a palavra acompanhada da medida 4, significa lado ou altura.

Hoje, resolveriamos assim:

$$Seket = tg.a = \frac{1/2\, uchatebt}{piremus} = \frac{180}{250} = 1/2 + 1/5 + 1/50 = 86/50 = 0{,}72.$$

A unidade sendo o covado de 7 palmos; o *seket* seria 0,72 de 7 palmos = 5,04 do palmo = $5\,{}^{1}/_{25}$ do palmo.

E' a mesma marcha.

No n. 57 dá-se o *uchatebt* (140) e o *seket* ($5\,{}^{1}/_{4}$ palmos); e pede-se o *piremus* que acha ser $93\,{}^{1}/_{3}$.

O n. 58 é o inverso do precedente; conhecido o *piremus* ($93\,{}^{1}/_{3}$) e o *uchatebt* (140) pede-se o *seket*. E' analoga ao n.56.

O problema n.59 consta de duas partes; na primeira, dados o *piremus* e o *uchatebt*, ped-se o *seket*; e na segudda, obtido o *seket* e com o mesmo *uchatebt* deve obter-se o *piremus*. Na primeira parte, houve um engano, facil de emendar-se: o *piremus* devia ser 8 e o *uchatebt* 12, pois o calculo é feito ao contrario, sendo o *uchatebt* 8 e o *piremus* 12.

No problema n. 60 dão-se o lado da base do *an* 15 e a altura 30; pede-se o *seket*.

Nos exemplos anteriores, os numeros da base eram maiores que os da altura: era o caso das pyramides propriamente dictas. Porém, o mesmo não se dava com esse monolitho pyramidal. O *senti* era menor que o *kai-en-haru*; porém, o *seket* devia medir-se do mesmo modo na regoa do esquadro; porém, o autor do papyro enganou-se de sorte que em vez de ${}^{1}/_{4}$ de covado, a que devia chegar, obtem 4, que elle exprime abstractamente e que não refere a palmos, como costuma nos outros exemplos. Provavelmente, reconheceu o erro e não quiz salientaI-o.

Eisenlohr e Cantor consideram o *seket* como a relação entre a aresta da pyramide (que seria então o *piremus*) e a metade da diagonal da base (que seria o *uchatebt*); de sorte que em vez de tangente seria o seno. Sua opinião, porém, é batida por tres grandes argumentos: 1°, não apresentar utilidade pratica para a applicação do esquadro á construcção das pyramides; 2°. Ser indubitavel que no n. 60, considera-se a altura e o lado da base; 3°, razões philologicas que explicam os significados dos termos technicos.

34.– O trabalho de Ahmes permittio achar a origem da pyramide, em grego *pyramis*, que muitos[79] buscavam em *pyr*, porque a chamma termina naturalmente em ponta; e outros em *pyramis*, bolo conico de trigo que se offerece aos mortos.

A raiz da palavra nesta ultima accepção é a mesma que a de *pyros*, trigo.

---

[79] V. Littré. Dict. fr.

multiplica 1.000, não por 200, mas por 2. Finalmente, ele retorna à unidade de medida inicial e registra a área por 20 *khet*.

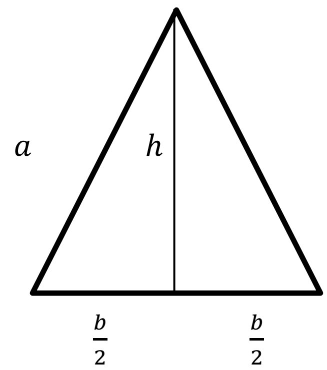
Se a medida da altura do triângulo for 10, o resultado do problema é aceitável, no entanto, se 10 é a medida do lado do triângulo, então provavelmente o escriba cometeu um erro de aproximação, pois não é possível considerar a medida da altura de um triângulo o mesmo que a medida do lado do triângulo.

Atualmente calculamos a área de um triângulo qualquer segundo a seguinte fórmula,

$$\acute{A}rea\ do\ tri\hat{a}ngulo = \frac{b \times h}{2}$$

Suponhamos que no problema n. 51 o triângulo seja isósceles, logo, um meio de calcular sua área seria:

1. Dividir o triângulo isósceles de base *b* e altura *h* em dois triângulos retângulos.



2. Para obter a altura *h*, basta aplicar o teorema do quadrado da hipotenusa $a^2 = b^2 + c^2$. Então:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{b^2}{4}$$

O termo geometrico pyramide, como já observara Brugsch, veio de *piremus*, a altura da pyramide.

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

3. Portanto a área de um triângulo isósceles pode ser calculada por:

$$A = \frac{b \times \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}}{2}$$

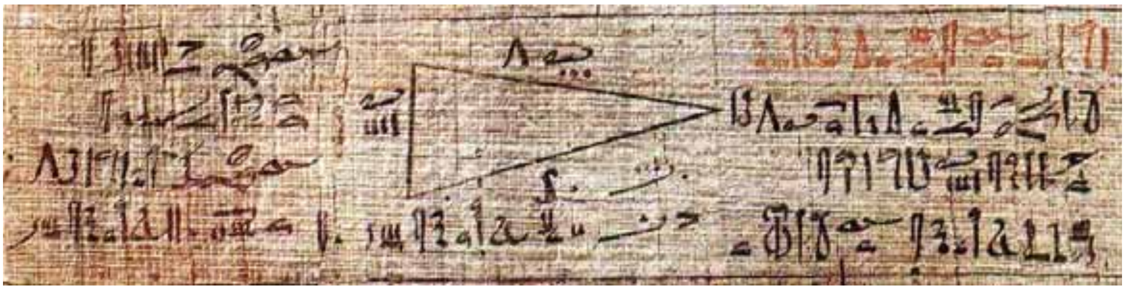
4. Considerando os dados do problema n. 51 do papiro, a área do triângulo dado é,

$$A = \frac{4 \times \sqrt{10^2 - \frac{4^2}{4}}}{2} = \frac{4 \times \sqrt{96}}{2}$$

$$A = 19{,}59$$

Esta conclusão é semelhante a de Eisenlohr, comentada por Gabaglia na página 123 de seu livro.

Figura 42 – Problema n. 51 do papiro Rhind



Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

Gabaglia segue o texto comentando o problema n. 52. Segundo o autor a questão pode ser interpretada pelo exposto abaixo.

Problema n. 52:

Calcular a área de um trapézio retângulo com base menor $b = 4$ unidades de medida, base maior $B = 6$ e altura $h = 20$ unidades de medida.

Resolução:

O processo empregado para resolver esse problema consiste da semi-soma das medidas bases multiplicada pela medida da altura. Isto é, em simbologia moderna, equivalente a usar a seguinte a fórmula para o cálculo da área de um trapézio retângulo:

$$\acute{A}rea\ de\ um\ trap\acute{e}zio\ ret\hat{a}ngulo = \left(\frac{B+b}{2}\right) \times h$$

Ou seja, no problema n. 52,

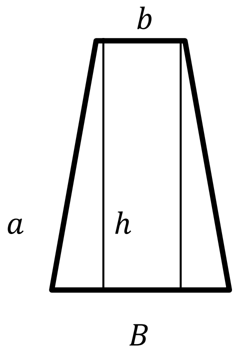
$$A = \left(\frac{6+4}{2}\right) \times 20$$
$$A = 100$$

Porém, se pela observação da figura abaixo, assumirmos que o desenho se trata de um trapézio isósceles e não retângulo, o cálculo efetuado encontra-se com um pequeno erro de aproximação.

Figura 43 – Problema n. 52 do papiro Rhind

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

Se considerarmos um trapézio isósceles qualquer de base menor b, base maior B, lado a e altura h, então a fórmula para o cálculo de sua área será:



$$A = \left(\frac{B+b}{2}\right) \times h$$

A altura h pode ser obtida pelo teorema do quadrado da hipotenusa, isto é,

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{B-b}{2}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{B-b}{2}\right)^2$$

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{B-b}{2}\right)^2}$$

Logo, a área do triângulo isósceles é,

$$A = \left(\frac{B+b}{2}\right) \times \sqrt{a^2 - \left(\frac{B-b}{2}\right)^2}$$

Substituindo os dados do problema n. 52, obtemos para área do trapézio um valor de aproximadamente $99{,}875$ unidades de medida.

Ainda na seção 32 Gabaglia comenta mais um problema, a saber, o de n. 53. Segundo o autor o problema “é inintelligível parecendo estar incompleto e errado”, de fato Robins e Shute (1987), mencionam coisa semelhante à tradução desse problema: “O problema n. 53 também trata de triângulos, mas infelizmente, mediante o defeito na cópia, é agora incompreensível”. (ROBINS; SHUTE., 1987, p. 47, tradução nossa).

Parecem razoáveis e verificáveis as conclusões a que chega Gabaglia pela simples observação do desenho expresso no problema. Ele acredita que Ahmes queria calcular ao mesmo tempo “a secção superior triangular, e as secções-trapezios média e inferior de um triângulo retângulo cortado por duas seccionantes parallelas”.

Figura 44 – Problema n. 53 do papiro Rhind

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

A seção 33 “Problemas sobre pyramides; origem da trigonometria” aborda os problemas da segunda parte geométrica do papiro Rhind, são considerados os problemas do n. 56 ao n. 60. Segundo Gabaglia esses cálculos podem ser considerados os primeiros a tratarem de questões trigonométricas e, desse modo, “esse ramo de mathematica” teria tido “sua origem no estudo das pyramides do Egypto”.

Segundo Robins e Shute (1987, p.47), os problemas do n. 56 ao n. 60 tratam de estruturas arquitetônicas e a inclinação de seus lados. A unidade de inclinação é o *seked* (medido em palmos e em cúbitos) e é considerado, no papiro Rhind, como a metade da largura da base dividida pela altura, e depois multiplicado por 7. O *seked* é medido em palmos, e a relação $7\, palmos = 1\, cúbito\ real$ também foi estabelecida. Sendo assim, vejamos como o problema n. 56 pode ser escrito:

Problema n. 56:

Calcular a medida do *seked* de uma pirâmide com base medindo 360 *cúbitos* e altura igual a 250 *cúbitos*.

Resolução:

Segundo a regra para obtenção do *seked* a primeira operação consiste da divisão da largura em duas partes, a seguir o resultado deve ser dividido pela altura e por fim multiplicado por 7.

$$seked = \frac{360}{2} = 180$$

$$seked = \frac{180}{250} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50} = 0{,}72\ cúbitos$$

$$seked = 0{,}72 \times 7 = 5{,}04\ palmos$$

Figura 45 – Problema n. 56 do papiro Rhind

Fonte: Recorte de Robins e Shute (1987)

Os problemas n. 57 e n. 58 são resolvidos de modo análogo ao problema n. 56, variando apenas as medidas da base e da altura das pirâmides. O problema n. 59 é dividido em duas partes, na primeira é solicitado encontrar o *seked* da pirâmide e a segunda, dado o valor do *seked* busca-se o valor da altura.

O último problema a envolver cálculos sobre pirâmides, e também o último problema a figurar na BM 10057, é o de n. 60. Gabaglia comenta que este problema, diferente dos anteriores, possui a medida da altura maior do que a base. Isso pode ter feito com que o escriba tenha se enganado e suprimido a última operação da regra para o obter o *seked*, a multiplicação por sete.

A última seção “Etymologia do vocabulo “pyramide”” do quinto e último parágrafo do livro de Gabaglia consiste de uma breve explicação sobre a origem da palavra pirâmide. O autor, seguindo o egiptólogo Brugsch, conclui que como termo geométrico, a palavra é proveniente de *pyremus*, que por sua vez, está relacionado com a altura da pirâmide.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados desse trabalho implicam principalmente em dois tipos de considerações finais. Em primeiro lugar observamos que o livro de Gabaglia reflete um amplo e atualizado conhecimento do autor acerca do assunto proposto, o que sem dúvida merece destaque pela data e local da publicação. Além disso, o estudo do texto também nos proporcionou uma relevante aproximação com a antiga matemática egípcia, sobre a qual versaremos a seguir.

As pesquisas sobre civilizações antigas estão condicionadas a dois fatos importantes: à descoberta das fontes e à sua decifração. No caso do Antigo Egito, a tradução das escritas hieroglífica, hierática e demótica foi concluída na primeira metade do século XIX e a descoberta de novas fontes é um processo dinâmico do qual não necessariamente se chega ao fim.

O principal meio de registro utilizado na civilização egípcia foi o papiro. Sabe-se que este tipo rudimentar de papel depende muito de suas condições de preservação para permanecer disponível à posteridade. Por isso e devido à escassez de fontes primárias, a matemática egípcia antiga é classificada como pobre, principalmente se comparada à infinidade de tabletes cuneiformes dos quais dispõe a civilização Mesopotâmica.

Dois papiros são considerados as principais fontes para o estudo da matemática egípcia antiga, são eles o papiro de Moscou e o papiro Rhind. O primeiro foi comprado entre 1862-1864 e traduzido completamente em 1930, já o segundo foi comprado em 1858 (c.a) e traduzido primeiramente em 1877. (CLAGETT, 1999)

Grande parte dos historiadores da matemática atribui à matemática egípcia a denominação de prática. De fato, quase sempre os cálculos sugerem uma aplicação a problemas da vida cotidiana, contudo, pode-se supor, por exemplo, que sua agilidade na manipulação de números pode ter gerado um interesse nas propriedades dos números, mesmo que para seu próprio benefício. Desse modo, a existência de elementos teóricos no papiro teria o objetivo de facilitar a prática e não a compreensão do processo em si mesmo.

Mesmo que as fórmulas empíricas, regras gerais de procedimento, proposições de resultados tenham sido obtidas por meio da repetição e da observação dos cálculos, não caracterizando assim um sistema do tipo lógico com axiomas e postulados, a matemática egípcia possui indícios de natureza abstrata.

Os “problemas diversão” (n. 28, 29 e 79), conforme anunciados por Robins e Shute (1987), parecem não possuir finalidade prática e sim o contrário, esses problemas podem ser interpretados como enigmáticos e recreativos, uma característica bastante inusitada no papiro Rhind.

Um argumento a favor da natureza abstrata do pensamento matemático egípcio é o apêndice 1 *The Nature of Proof* (A natureza da prova) do livro de Gillings (1982, p. 232-234). Nesse breve texto figuram exemplos de que os egípcios podem ter possuído seus próprios métodos de generalização de um algorítmo com exemplos específicos. Por exemplo, a sentença “É assim que se faz” explícita no final da resolução dos problemas n. 28 e n. 23 sugere que existe uma regra de cálculo específica para lidar com tais problemas. Observa-se também que em alguns problemas figuram dois cálculos, geralmente o segundo tem a função de verificar o resultado, esse procedimento é semelhante à nossa “prova real”.

A principal operação matemática usada no papiro é a adição, ou seja, a reunião de objetos por uma contagem direta. O conceito de subtração é o processor empregado para achar a parcela que falta para completar uma soma dada. a multiplicação e a divisão são reduzidas à soma sucessivas duplicações ou divisões ao meio de determinadas parcelas. Na multiplicação, diferente da nossa, não havia a ideia implícita de somar parcelas iguais, mas, encontrar para o multiplicando o que o multiplicador é para a unidade, por meio da aplicação sucessiva da duplicação do multiplicando até que a soma se igualasse ao multiplicador. A soma das duplicações é o produto. A divisão era efetuada pelo mesmo processo, no entanto, ao contrário da duplicação, nesta operação o objeto era tomar a metade do dividendo e assim sucessivamente.

Os egípcios possuíam grande habiblidade no uso das frações unitárias, provavelmente para facilitar seus cálculos desenvolveram tábuas de cálculo e redução de frações (algumas expressas no início do papiro). Eles sabiam que uma fração pode ser decomposta, de modos distintos, em uma soma de frações unitárias e ainda assim permaneciam equivalentes.

Constata-se também que a grandeza mais precisa expressa no papiro é a aproximação de $\frac{256}{81}$ para o valor do número π. Tal fato foi evidenciado por Gabaglia em seu § 5º. Seção 30: “Area do circulo; modo notavel de obtel-a”.

Pelo conteúdo do papiro conclue-se ainda a impossibilidade de afirmar que os antigos egípcios conheciam o teorema do quadrado da hipotenusa, ou, teorema de Pitágoras. Era de seu conhecimento efetuar cálculos sobre triângulos retângulos assim como em qualquer triângulo, como a área, por exemplo.

Outro ponto de incasável discussão é questão: A que se destina o papiro Rhind? Sem tomar partido sobre este ponto Gabaglia apresenta duas opiniões e discorre sobre elas. De acordo com o título solene: “Regras para se perscrutar a natureza e se conhecer tudo quanto existe, cada mistério e cada segredo”, o texto pode ter sido usado como um manual de professor para ensinar o aluno. Por outro lado, a repetição de exercícios e os pequenos erros em alguns problemas sugerem que o papiro tenha sido um caderno de estudante.

Nosso desejo não é que a matemática egípcia seja exaltada como demasiada notável e grandiosa, e sim que o preconceito observado em *Mathematics: a cultural approach* de Morris Kline (1962), não seja reproduzido novamente. Para este autor a matemática dos antigos egípcios é um rabisco de criança quando está aprendendo a escrever em comparação com a grande literatura dos gregos. Em outras palavras, ele afirma que a contribuição da matemática egípcia é quase que insignificante no desenvolvimento dessa ciência.

Apesar da tendência em comparar realizações matemáticas, do ponto de vista da etnomatemática a matemática egípcia deveria ser vista a partir da própria matemática egípcia. Isto é, seria razoável compreender porque os egípcios produziram esse tipo particular de matemática. A que extensão isso fornece um indício da cultura e como isso poderia se relacionar com suas insituições sociais e políticas, sua opinião religiosa, suas práticas econômicas, seus hábitos da vida diária, é nestes termos que sua matemática poderia ser considerada honestamente. (NEWMAN, 1956, p. 178)

De qualquer modo compreende-se que os feitos egípcios podem ter ido além do que as páginas do papiro Rhind revelam. Infelizmente nesta dissertação não nos aprofundamos sobre os métodos da matemática egípcia antiga, os elementos que aqui foram apresentados destacaram-se em meio à leitura e compreensão do texto de Gabaglia, objeto central de nossa pesquisa sobre o qual discorreremos a seguir.

O livro *O mais antigo documento mathematico conhecido (papyro Rhind)*, é fruto de um estudo original. Fica evidente pelas diversas menções e notas de rodapé que, seu autor, teve acesso à diversos meios de divulgação das pesquisas científicas da época.

Em 1899 o papiro Rhind ainda era considerado uma novidade entre os egiptólogos de todo o mundo, sendo sua primeira tradução e publicação foi feita por August Eisenlohr, em 1877. Gabaglia provavelmente iniciou seus estudos no início da década de 1890, pouco tempo depois da divulgação e decifração do papiro Rhind.

Na época da publicação do livro, poucas pessoas no mundo haviam realizado estudo tão aprofundado quanto ao que Raja Gabaglia fez sobre o papiro Rhind e a matemática egípcia. Ele havia lido o difícil texto de Eisenlohr, em alemão, e lido também diversos artigos de egitólogos especializados sobre o tema, dentre eles destacamos Birch, Brugsh, Rodet, Revillout, Bobynin, James Gow, Favaro, Loria e Baillet, esses por sua vez, publicavam em revistas de renome da época. Gabaglia demonstrou também ter tido acesso aos primeiros livros de História geral da matemática como os de Jean Étienne Montucla (1758), Moritz Cantor (1880, 1882, 1894-1896).

A publicação de seu livro é um marco na história da matemática no Brasil e o torna o primeiro brasileiro a publicar um livro específico de histórica da matemática e, em termos mundias, um pioneiro a escrever sobre o papiro Rhind.

Como Raja Gabaglia pode ter se interessado pelo tema é questão que não conseguimos responder ao finalizar este trabalho. Lembrando que o principal responsável pela vinda da Egiptologia ao Brasil foi o Imperador Dom Pedro II, uma hipótese remota é que Gabaglia, erudito como foi, tenha feito parte do círculo intelectual do Imperador, possivelmente tendo acesso à sua biblioteca e aos seus contatos científicos e dessa forma tenha tomado conhecimento do antigo papiro matemático e se aprofundado sobre. Além disso, sabe-se que Dom Pedro II manteve correspondência com egíptologos de renome na época, sendo um deles Brugsh, este citado por Gabaglia em seu livro.

Não sabemos se a hipótese acima é verificável e nem se é verdadeira. Em trabalho futuro maiores elementos sobre a vida e as pesquisas de Gabaglia serão buscados, e é possível que tal questão seja respondida.

É interessante observar que apesar de quase completamente desconhecido, o texto de Gabaglia é citado na primorosa edição, publicada em dois volumes (1927-1929), de Arnold Buffum Chace sobre o papiro Rhind. Na seção intitulada "Bibliografia da matemática egípcia com especial referência ao papiro matemático Rhind e fontes de interesse em seu estudo" (CHACE, 1927, p. 121, tradução nossa), escrita por Raymond Clare Archibald, um dos colaboradores de Chace, encontramos:

> "Barros Raja Gabaglia, E. de, O Mais Antigo Documento Matematico Conhecido (Papyro Rhind), Rio de Janeiro, 1899, 136 pp., octavo. Refers to Birch (1868), Brugsh (1874), Cantor (1875), Eisenlohr (1877), Favaro (1879), Rodet (1881), the Revillouts (1881), Gow (1884), Bailet (1892), Bobynin (1894), Loria (1894), Ahmes (1898)". (CHACE, 1927, p. 163)

Ou seja, o livro de Gabaglia figura entre as obras de referência sobre o tema papiro Rhind em uma das obras mais renomadas no assunto. A bibliografia citada é bastante extensa e segue uma ordem cronológica, de modo que, observamos mais detalhadamente as fontes datadas a partir de 1858 (data aproximada da compra do papiro Rhind). A bibliografia explicita também quais obras foram citadas pelos autores mencionados, como podemos observar na citação acima.

Para compor seu livro Gabaglia estudou a fundo muitos autores que escreveram sobre a matemática no papiro Rhind expondo os diversos pontos de vista sobre alguma questão específica. Isso pode o ter tornou hábil a argumentar sobre suas próprias interpretações, por exemplo, diferentemente de outros autores, o autor defendeu em todo o livro a existência de uma álgebra egípcia, evidenciada no § 4º Algebra do payro Rhind. Sua própria classificação dos problemas é diferente dos demais e provavelmente tenha sido infuenciada pelo positivismo de August Comte, conforme seu próprio comentário :"Nos paragraphos que seguem, será feita a analyse dos principaes problemas, estudados em grupos de accordo com a actual subdivisão didactica da mathematica elementar: arithmetica, algebra e geometria".

O livro está dividido em cinco parágrafos (ou, capítulos, como atualmente chamamos), os dois primeiros: *Historico* e *O conteúdo do papyro* nos levam a crer que o autor não limitou seu estudo à obra de Eisenlohr (1877), ele vai além apresenta críticas e diferentes opiniões de estudiosos do papiro Rhind como já mencionamos anteriormente.

Os outros três parágrafos, *Arithmetica do papyro Rhind*, *Algebra do papyro Rhind* e *Geometria do papyro Rhind*, têm uma função diferenciada dos dois primeiros, neles podemos observar a preocupação do autor em explicar e fazer entender, do ponto de vista matemático, características de alguns problemas do papiro. Seu ofício de professor de matemática pode ter colaborado em sua forma didática de expor e tratar seu texto.

Devemos destacar o empenho de Gabaglia em entender e mencionar as diversas unidades de medida usadas pelos antigos egípcios. O § 5º, o da geometria é repleto de traduções de conceitos geométricos mencionados pelos egiptólogos europeus. Gabaglia dedica uma seção ao esquadro de proporção egípcio e seu uso na construção das pirâmides para depois entrar nos problemas sobre pirâmides e a origem da trigonometria, de onde decorre a última seção do livro "Etymologia do vocabulo «pyramide»".

Além disso, em vários momentos do texto é possível identificar a grande admiração e, por vezes, espanto do autor pelo escriba Ahmes e pela matemática da antiga civilização egípcia.

Por fim gostaríamos de destacar a precisiosidade do conhecimento de Gabaglia acerca do papiro Rhind e da matemática egípcia, sua clareza e originalidade do livro.

Ademais, espera-se que esta pesquisa tenha contribuído para o reconhecimento do livro que é o primeiro, no Brasil, a abordar um tema de história da matemática e, de certo modo, valorizar também a importância de seu autor, Raja Gabaglia, no campo da história da matemática no Brasil.

REFERÊNCIAS

Arquivo pessoal Dona Elizabeth Pessoa Raja Gabaglia, Rio de Janeiro: 2014.

BAKOS, M. **Como o Egito chegou ao Brasil**. In: ______. Egiptomania: o Egito no Brasil. São Paulo: Paris Editorial, 2004. p. 15 – 27.

BAKOS, M. **Three moments of egyptology in Brazil**. Proceedings of Seventh International Congress of Egyptologist. Cambridge, 3-9 September. Leuven Uitgeverij Peeters, 1998. p. 87-91.

BARBOSA, A. J. do R.; MALVEIRA, A. N.; VIEIRA, G. P. **Um perfil.** In: Anuário do Colégio Pedro II: primeiro ano 1914 / Eugênio de Barros Raja Gabaglia. Rio de Janeiro: Unigraf, 2009. p. XVII – XXIII.

BARONI, R. S., NOBRE, S. A pesquisa em história da matemática e suas relações com a educação matemática. In: BICUDO, M. (Org.). **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas***.* São Paulo: Ed. UNESP, 1999. 313p. (Seminários & Debates)

BARONI, R. S., NOBRE, S., TEIXEIRA, M. V. História da matemática em contextos da educação matemática: contribuições do GPHM. In: **Bolema**, volume 25, n. 41, p. 153-171, Rio Claro: dez. 2011.

BALL, W. W. R. **A short account of the history of mathematics**. New York: Dover Publications, 1960.

BIRCH, S. **Varia.** In: *Zeitschrift fûr âgyptische Sprache und Alterthumskunde*. pp. 9 – 12, Leipzig: jan. 1868.

BLOCH, M. **Apologia da história ou o ofício do historiador**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2001.

BORGES, V. P. **O que é história.** 2ª edição revisada. São Paulo: Brasiliense: 1993.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 3ª reimpressão. São Paulo: Edgard Blücher, 2001.

BRAUDEL, F. **Escritos sobre a história**. Tradução de J. Guinburg e Tereza Cristina Silveira da Mota. São Paulo: Perspectiva, 2009.

BUNT, L. N. H.; JONES, P. S.; BEDIENT, J. D. **The historical roots of elementary mathematics**. New York: Dover Publications, 1988.

CAJORI, F. **Uma história da matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

CAJORI, F. **Moritz Cantor, the historian of mathematics**. Texto lido antes da San Francisco Section of the American Mathematical Society, 17 de Junho, 1920.

CAJORI, F. **The Rhind mathematical papyrus by A. B. Chace; H. P. Manning; R. C. Archibald; L. Bull** (Review). The American Mathematical Monthly, vol. 37, n. 4, 1930, p. 189-191.

CANTOR, M. **Vorlesungen über geschichte der mathematik**. Vol. 4. Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1894.

CERTEAU, M. de. **A escrita da história**. Rio de Janeiro: Forense Universitária. 1982.

CERTEAU, M. de. **A invenção do cotidiano**. Petrópolis: Editora Vozes, 1998.

CHACE, A.B.; BULL, L., MANNING, H.P.; ARCHIBALD, R.C**. The Rhind mathematical papyrus: British Museum 10057 and 10058.** Ohio: Mathematical. Association of America, vol. 1 - 1927, vol. 2 - 1929.

CLAGETT, M. **Ancient egyptian: a source book**. American Philosophical Society, vol. 3. Editora Philadelphia, 1999.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

EVES, H. **Great moments in mathematics before 1650**. EUA: The Mathematical Association of America, 1983.

EINSELOHR, A. **Ein mathematisches handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des British Museum)**. Leipzig: J. C. Hinrichs' Buchhandlung, 1877. Disponível em: <http://www.archive.org/details/einmathematische00eise>. Acesso 26 jul 2013.

FAUSTO, B. **História do Brasil**. 9ª edição, São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.

FONTES, H. C. d' O. **No passado da matemática**. Rio de Janeiro: Fundação Getúlio Vargas, 1969.

FONTES, H. C. d' O. **Papiro matemático de Moscou.** Rio de Janeiro: Editora do Colégio Pedro II, 1973.

GABAGLIA, E. de B.R. **O mais antigo documento mathematico conhecido (papyro Rhind)**. Rio de Janeiro: Imprensa Americana, 1899.

GILLINGS, R.J. **Mathematics in the time of the pharaohs**. New York: Dover, 1972, reprinted 1982.

IMHAUSEN, A. Ancient egyptian mathematics: new perspectives on old sources. **The Mathematical Intelligencer**, Berlim, Volume 28, Number 1, pp 19-27, 2006.

KATZ, V. J. **A history of mathematics: an introduction**. 2. ed., USA: Addison-Wesley Educational Publishers, 1998.

MASSON, F. **L'expedition d'egypte et la "description”**. Bulletins de la Societe des Amis de la Bibliotheque de L’Ecole Polytechnique – SABIX: Bulletin n°1 (juin 1987). Disponível em: < http://sabix.org/bulletin/b1/1.html>. Acesso em 03 mai 2014.

MASSON, F. **L'Expédition d'Egypte**. Paru dans ABC Mines, décembre, 1997, (numero 12). Voir aussi SABIX, nº. 1. Disponível em: <http://www.annales.org/archives/x/ABC.html>. Acesso em 03 maio 2014.

NEUGEBAUER, O. **The exact sciences in antiquity**, Harper Torchbooks, Harper, New York: 1962. First published 1951.

NEWMAN, J. R. **The world of mathematics**. Volume I. Londres: Novello & Co. Ltd., 1956.

Oxford Dictionary of National Biography. David Cannadine (Editor geral), Oxford: Oxford University Press, 2004.

PEET, T. E. **The Rhind mathematical papyrus British Museum 10057 and 10058: introduction, transcription, translation and commentary.** London: The University Press of Liverpool Limited Hodder & Stoughton Limited, 1923.

PIVETTA M. (2014). O último ato da favorita do imperador. **Revista Fapesp**, São Paulo, edição 215 – janeiro de 2014, p. 16 – 23. Disponível em: <http://revistapesquisa.fapesp.br/2014/01/13/o-ultimo-ato-da-favorita-imperador/>. Acesso em 18 nov 2014.

POE, W. C. **The writing of a skillful scribe: an introduction to hieratic middle egyptian through the text of The Shipwrecked Sailor**. Santa Rosa (CA): [s.n], 2010.

POWELL, A. B.; TEMPLE, O. L. Construindo pontes entre passado e presente: etnomatemática, o papiro matemático de Ahmes e estudantes urbanos. In: RIBEIRO, J. P. M.; DOMITE, M. D. C. S.; FERREIRA, R. (Eds.). **Etnomatemática: papel, valor e** significado. São Paulo: Zouk, 2004. pp. 267 – 284.

ROBINS, G.; SHUTE, C. **The Rhind mathematical papyrus: an ancient egyptian text**. London: British Museum Publications, 1987.

RODET, L. Les prétendus problémes d'algebre du manuel du calculateur égyptien (papyrus Rhind). In: **Journal Asiatique**. Paris: Imprimerie Nationale, 1882.

SILVA, C. M. S. A história da matemática e os cursos de formação de professores. In: CURY, H. N. **Formação de professores de matemática: uma visão multifacetada**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001. p. 129 - 165.

SILVA, M. R. F. da.; HARIKI, S. **Raja Gabaglia**. Trabalho de Iniciação Científica. São Paulo: IME-USP, 1998.

STRUIK, D. J. **História concisa das matemáticas.** Lisboa: Gradiva, 1997.

VALENTE, W. R. Euclides Roxo e o movimento internacional de modernização da matemática escolar. In: ______. **Euclides Roxo e a modernização do ensino de matemática no Brasil.** Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2004. p. 45 – 83.

ANEXO

Imagens da Pedra de Roseta. Extraídas da "Descrição do Egito" - Comissão das Artes e das Ciências. Disponíveis em http://description-egypte.org/. Acesso em 04 mai 2014.