



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Campus de Rio Claro

# Visualização das funções complexas e do Teorema Fundamental da Álgebra

**Thaís Alves Pianoschi**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador  
**Prof. Dr. Wladimir Seixas**

**2013**

517.8      Pianoschi, Thaisa Alves  
P581v      Visualização das funções complexas e do Teorema Fundamental  
da Álgebra/ Thaisa Alves Pianoschi- Rio Claro: [s.n.], 2013.  
91 f.:fig.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.  
Orientador: Wladimir Seixas

1. Números Complexos. 2. Geometria dos números complexos.  
3. Métodos Matemáticos. I. Título

# TERMO DE APROVAÇÃO

Thaís Alves Pianoschi

## VISUALIZAÇÃO DAS FUNÇÕES COMPLEXAS E DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Wladimir Seixas  
Orientador

Prof. Dr. Sergio Henrique Monari Soares  
Departamento de Matemática - ICMC - USP/São Carlos - SP

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti  
Departamento de Matemática - IGCE - UNESP/Rio Claro - SP

**Rio Claro, 10 de maio de 2013**

*Aos meus amados pais, Luiz Cláudio e Rosa Maria,  
pelo amor incondicional.  
À minha irmã Thatiane e ao meu noivo Marcelo  
por permanecerem sempre ao meu lado.*

# Agradecimentos

A Deus pelo dom da vida.

Aos meus pais, Luiz Cláudio e Rosa Maria, por me apoiarem de forma incondicional e por permitirem minha dedicação exclusiva aos estudos e muito pela compreensão e pelo carinho.

À minha irmã Thatiane e ao meu cunhado Mirko, agradeço pelos conselhos, que, com certeza, me ajudaram a concluir este trabalho.

Ao meu noivo Marcelo, que sempre esteve ao meu lado apoiando minhas decisões e me fortalecendo nos momentos em que precisava. Obrigada pela paciência, amor, carinho e compreensão.

Ao Prof. Dr. Wladimir Seixas, agradeço pela orientação, amizade e paciência, sem o qual esse trabalho não teria se concretizado.

A todos os professores deste programa, que me encorajaram e me ajudaram a concluir o mestrado.

A todos os professores e funcionários do UNIFEB (Centro Universitário da Fundação Educacional de Barretos), pelo incentivo e pela confiança.

A todos os meus amigos, em particular: Fernanda, Cleverson (Índio), Nayara, Leonardo, Alan, Jerônimo (Jero), Eduardo (Dú), Evelin e João, agradeço pela força e pela paciência, já que em muitos momentos não foi possível estar presente com vocês e compreenderam minhas ausências. Obrigada aos meus eternos amigos!!! Renata e Michelli, queridas amigas da graduação no IBILCE(UNESP- São José do Rio Preto/SP), obrigada pela força. Estaremos sempre juntas não importa a distância.

Aos “amigos de viagem”: Wellington, Franciéli, Erica, Daniele, Edmar, João Paulo, Denis, Mariana, Aline, Amarilis, Felipe, Renato, Edilson e a todos os outros que aqui não mencionei! Obrigada pelo carinho e pelo apoio quando algo não ocorria como o

planejado. Somente vocês sabem as dúvidas e as dificuldades das viagens semanais e hoje, a certeza de que tudo valeu a pena! Foi muito importante compartilhar com vocês esses momentos de incertezas.

Aos meus avós queridos, Antenor e Adelina, obrigada pelo carinho, pela preocupação e por acreditarem em mim!

Enfim, agradeço a todos os que participaram direta ou indiretamente de mais esta conquista na minha vida. Obrigada!

*"Tudo o que pedires em oração,  
crede que recebestes, e será vosso."*

Marcos 11:24

# Resumo

As funções de uma variável complexa podem ser estudadas como transformações no plano complexo. Esta abordagem, pouco explorada nas disciplinas de Variável Complexa dos cursos de graduação, mostra-se interessante pois permite a visualização e conecta este assunto às demais áreas da Matemática, por exemplo, vetores, cônicas, matrizes, entre outras. Nesta dissertação, as transformações no plano complexo são tratadas de duas formas diferentes. Na primeira, são estudadas as transformações de determinadas curvas no plano complexo enquanto que na segunda, considera-se as transformações de pontos do plano complexo os quais estão associados a uma cor definida segundo uma paleta de cores. Como aplicação deste último tratamento pode-se visualizar o Teorema Fundamental da Álgebra. A implementação computacional é feita utilizando os recursos gráficos do programa de geometria dinâmica GEOGEBRA © ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)) e do pacote gráfico ASYMPTOTE © ([asymptote.sourceforge.net](http://asymptote.sourceforge.net)) ambos gratuitos (GNU Lesser General Public License).

**Palavras-chave:** Números Complexos, Geometria dos números complexos, Métodos Matemáticos.



# Abstract

The functions of a complex variable can be studied as transformations in the complex plane. This approach has been little explored in the disciplines of Variable Complex of undergraduate courses and it is interesting because it allows visualization and connects this subject to other areas of mathematics, e.g., vectors, conics, matrix, among others. In this dissertation, the transformations in the complex plane are treated in two different ways. In the first, they are studied as transformations of certain curves in the complex plane while in the second approach, it is considered the transformations of points of the complex plane which are associated with a color defined by a color palette. As an application of the latter approach one can visualize the Fundamental Theorem of Algebra. The computational implementation is made using the graphics capabilities of dynamic geometry program GEOGEBRA © ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)) and a vector graphic package ASYMPTOTE © ([asymptote.sourceforge.net](http://asymptote.sourceforge.net)) both free (GNU Lesser General Public License).

**Keywords:** Complex Numbers, Geometry of complex numbers, Mathematical Methods.

# Lista de Figuras

3.1	Plano Complexo . . . . .	35
3.2	O número complexo $z$ como vetor no plano complexo . . . . .	36
3.3	Plano complexo e sistemas de coordenadas . . . . .	38
3.4	Adição e subtração entre números complexos . . . . .	48
3.5	Multiplicação de números complexos . . . . .	49
3.6	Divisão de números complexos . . . . .	50
4.1	Função afim $f(z) = z + n$ . . . . .	52
4.2	Função linear $f(z) = mz$ com $ m  > 1$ . . . . .	53
4.3	Função linear $f(z) = mz$ com $0 <  m  < 1$ . . . . .	53
4.4	Função $f(z) = z^2$ . . . . .	55
4.5	Função $f(z) = az^2$ com $ a  > 1$ . . . . .	56
4.6	Função $f(z) = \sqrt{z}$ . . . . .	59
4.7	Ramos da função $f(z) = \sqrt{z}$ . . . . .	61
4.8	Função $f(z) = e^z$ . . . . .	65
4.9	Função $f(z) = \text{Ln } z$ . . . . .	68
5.1	Faixa visível do espectro eletromagnético. Fonte: Wikipedia [14] . . . . .	70
5.2	Cores primárias e complementares . . . . .	71
5.3	Subespaço de cores do padrão RGB . . . . .	72
5.4	Projeção isométrica do Cubo de cores RGB . . . . .	73
5.5	Cores primárias e complementares no padrão HSV . . . . .	74
5.6	Subespaço de cores do sistema HSV . . . . .	75
6.1	Esfera padrão HSV e o meridiano para a matiz 0 . . . . .	76
6.2	Projeção estereográfica . . . . .	77
6.3	Corte perpendicular ao plano complexo segundo um meridiano . . . . .	77
6.4	Plano complexo colorido segundo a projeção estereográfica da esfera HSV . . . . .	78
6.5	Algoritmo para associação de cores para uma dada função complexa . . . . .	79
6.6	Função afim . . . . .	80
6.7	Função quadrática . . . . .	81
6.8	Funções $z^3$ e $z^5$ . . . . .	81
6.9	Função $1/z$ . . . . .	82

6.10	Função raiz quadrada . . . . .	82
6.11	Função exponencial . . . . .	83
6.12	Função seno . . . . .	83
6.13	Função cosseno . . . . .	83
6.14	Funções seno e cosseno hiperbólico . . . . .	84
6.15	Função logaritmo vista em três ramos . . . . .	85
6.16	$f(z) = \operatorname{sen}(1/z)$ . . . . .	85
6.17	Visualização do Teorema Fundamental da Álgebra . . . . .	86
6.18	Visualização do Teorema Fundamental da Álgebra (continuação) . . . .	87

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Origens históricas</b>	<b>14</b>
<b>3</b>	<b>Números complexos</b>	<b>20</b>
3.1	Representação algébrica . . . . .	20
3.1.1	Propriedades da adição e subtração . . . . .	21
3.1.2	Propriedades da multiplicação e divisão . . . . .	22
3.1.3	Módulo e complexo conjugado . . . . .	24
3.2	O corpo dos números complexos . . . . .	28
3.2.1	O conjunto $\mathbb{C}$ como extensão de $\mathbb{R}$ . . . . .	28
3.2.2	O corpo $\mathbb{C}$ não é ordenado . . . . .	29
3.3	Representação por par ordenado . . . . .	30
3.3.1	Propriedades da adição e subtração . . . . .	31
3.3.2	Propriedades da multiplicação e divisão . . . . .	32
3.3.3	O plano complexo . . . . .	34
3.3.3.1	Forma polar dos números complexos . . . . .	36
3.4	Representação matricial . . . . .	39
3.4.1	Propriedades da adição e subtração . . . . .	40
3.4.2	Propriedades da multiplicação e divisão . . . . .	41
3.4.3	Módulo e complexo conjugado . . . . .	43
3.5	Isomorfismo entre as representações . . . . .	44
3.6	Interpretação geométrica das operações aritméticas de números complexos	48
<b>4</b>	<b>Funções complexas e transformações no plano</b>	<b>51</b>
4.1	Definições gerais . . . . .	51
4.2	Função afim . . . . .	52
4.3	Função quadrática . . . . .	54
4.4	Função raiz quadrada . . . . .	57
4.5	Função exponencial . . . . .	61
4.6	Função logarítmica . . . . .	66

<b>5</b>	<b>Padrões de cores</b>	<b>70</b>
5.1	Conceito de cor . . . . .	70
5.2	O padrão RGB . . . . .	72
5.3	Projeção isométrica do cubo RGB . . . . .	73
5.4	O padrão HSV . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Visualização das funções complexas por padrão de cores</b>	<b>76</b>
6.1	A esfera HSV . . . . .	76
6.2	Projeção estereográfica da esfera HSV no plano complexo . . . . .	77
6.3	Visualização de funções complexas por padrões de cores . . . . .	78
6.4	Visualização do Teorema Fundamental da Álgebra . . . . .	86
<b>7</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>88</b>
7.1	Trabalhos Futuros . . . . .	89
7.2	Participação em eventos . . . . .	89
	<b>Referências</b>	<b>90</b>

# 1 Introdução

Os números complexos e as funções de variáveis complexas é uma das áreas da matemática de grande interesse. Seu início se deu no século XVI quando os matemáticos foram confrontados por equações que só poderiam ser resolvidas considerando-se as raízes quadradas de números negativos. Isso parecia estranho para os matemáticos da época pois eles não compreendiam como tais números poderiam ter uma aplicação no mundo real. Assim, o termo imaginário nasceu e por ser algo estranho se tornou conhecido como complexo.

As operações aritméticas definidas no conjunto dos números complexos e as funções complexas podem ser tratadas geometricamente como transformações no plano. Estas transformações são descritas facilmente por um método discreto que consiste em analisar o comportamento de uma malha retangular que é transformada por uma dada função complexa. No entanto, por este tratamento ser discreto não visualiza-se como pontos próximos são transformados. Neste sentido, uma discretização maior do plano complexo pode ser feita fazendo uso de cores para a visualização das transformações complexas. Este método consiste em associar a cada ponto do plano complexo uma cor e levá-la, via a função complexa, a um novo ponto do plano com a respectiva cor. O conjunto de pontos e cores no conjunto imagem irá mostrar, com uma resolução maior, como os pontos e cores iniciais foram transformados.

Este trabalho tem por objetivo organizar, discutir e redigir de maneira precisa e rigorosa a aritmética do conjunto dos números complexos e as funções complexas descritas geometricamente como transformações do plano. No Capítulo 2 é relatado sob o ponto de vista histórico o surgimento dos números complexos na Matemática. O Capítulo 3 discute os números complexos sobre suas diversas representações: algébrica, par ordenado e matricial. Estas representações, aparentemente diferentes, são na realidade isomorfas entre si. Mostra-se também que o conjunto dos números complexos é um conjunto que possui a estrutura de corpo não ordenado. Ao final do capítulo é apresentada uma interpretação geométrica para as operações algébricas. No Capítulo 4, as diferentes funções complexas  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  são definidas e tratadas como transformações no plano complexo de uma família de curvas (reticulado). No Capítulo 5, os conceitos básicos sobre os padrões de cores RGB e HSV necessários para a visualização das transformações por meio de um critério de cores são apresentados. No

Capítulo 6 desenvolve-se um método que irá associar a cada ponto do plano complexo uma cor definida em uma paleta de cores. Define-se assim uma aplicação contínua e bijetora entre o plano complexo e a paleta de cores permitindo a visualização das funções complexas como transformações no plano vistas agora de forma pontual. Uma aplicação interessante deste tratamento é a visualização do Teorema Fundamental da Álgebra. A implementação computacional é feita utilizando o programa de geometria dinâmica GEOGEBRA © ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)) e do pacote gráfico ASYMPTOTE © ([asymptote.sourceforge.net](http://asymptote.sourceforge.net)) ambos de distribuição gratuita (GNU Lesser General Public License). Por fim, no Capítulo 7 são feitas as considerações finais e discussão das possíveis extensões deste trabalho.

## 2 Origens históricas

A história envolvendo os números complexos retrata bem como um conceito matemático pode levar muito tempo até ser compreendido e aceito. É uma história de longa resistência envolvendo, inclusive importantes matemáticos.

No século XVI aconteceu algo semelhante ao que ocorreu no tempo dos gregos antigos, quando se verificou a insuficiência dos números racionais com a construção do número  $\sqrt{2}$ : o conceito de número precisava ser estendido. Isto se deu ao fato de que não havia como negar que os números reais eram insuficientes para se tratar de todas as equações algébricas. Os números irracionais já eram aceitos naquele século pois, são aproximáveis por números racionais, apesar de não serem ainda um conceito bem definido. Enquanto que os números negativos causavam dificuldades maiores por não serem aproximáveis por números positivos, podiam ser mais facilmente aceitos quando visto geometricamente como a posição de um ponto sobre uma reta orientável [1, p. 197]. Naquela época, as raízes da equação quadrática  $ax^2 + bx + c = 0$  com coeficientes reais já eram determinadas pela fórmula de Bhaskara, isto é,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Não é surpresa que na fórmula de Bhaskara o valor  $\Delta = b^2 - 4ac$  pode ser negativo. Entretanto, para os matemáticos daquela época isto significava simplesmente que o problema não tinha solução, uma vez que não havia necessidade de considerar raízes quadradas de números negativos. Geometricamente significava que a equação de segundo grau, representada por uma parábola, não tinha interseção com o eixo  $Ox$  das abscissas. Porém, algebristas italianos começaram a discutir melhor as equações de grau maior ou igual a 3 e a situação mudou radicalmente com os primeiros problemas nos quais fazia sentido considerar as raízes quadradas de números negativos. Sendo assim, a origem dos números complexos está relacionada com a resolução de equações algébricas, sobretudo às equações cúbicas, e não às quadráticas, como muitos acreditam.

Por volta de 1510, Scipione Del Ferro (1465-1526), professor de matemática em Bologna, encontrou uma forma geral para resolver equações do tipo  $x^3 + px = q$  onde  $p$  e  $q$  são números reais positivos. Del Ferro não publicou sua descoberta, mas antes de



falecer revelou a solução para seu discípulo Antonio Maria Fior e Annibale della Nave, seu futuro genro e sucessor na Universidade de Bologna.

No século XVI era comum os desafios entre sábios. Fior imaginou que participando de um desafio ganharia notoriedade entre os matemáticos. Por isso, desafiou Nicoló Fontana (1500-1557), um estudioso que começava a se destacar nos meios culturais. Fontana, mais conhecido como Tartaglia<sup>1</sup>, aceitou o desafio que ocorreu da seguinte maneira: cada um dos concorrentes propunha trinta questões para que o outro resolvesse em um determinado tempo. Contudo, o resultado não foi o que Fior esperava já que ao final do prazo estipulado, Tartaglia tinha resolvido todas as questões enunciadas por Fior, enquanto ele mesmo não tinha resolvido todas as propostas por seu oponente [1, p. 194].

A explicação para o triunfo de Tartaglia é que Fior sabia apenas resolver as equações do tipo  $x^3 + px = q$  com  $p$  e  $q$  reais positivos. Tartaglia, de maneira independente ou baseado em sugestões, tinha conhecimento de como determinar a solução, não somente para aquele tipo de equação cúbica, como também para uma das suas variantes:  $x^3 = px + q$ , com  $p$  e  $q$  reais positivos.

A notícia da vitória de Tartaglia se espalhou e chegou até Girolamo Cardano (1501-1576), que além de médico bem sucedido, escrevia sobre temas da Álgebra, Aritmética e Geometria. Rapidamente, Cardano, que possuía uma boa posição em Milão, convidou o vencedor à sua casa com a desculpa de apresentá-lo a um possível patrono. Na verdade, o convite aconteceu somente porque Cardano queria que Tartaglia revelasse a solução das equações cúbicas, para que fosse publicada em seu próximo livro. Tartaglia não concordou, alegando que ele mesmo iria publicar. Entretanto, Cardano não desistiu e após muitas tentativas e um juramento de não divulgar o método, conseguiu persuadir Tartaglia a contar-lhe a solução da equação cúbica.

Cardano conhecendo o método encontrou uma demonstração que o justificasse e ainda em como resolver qualquer cúbica. Ao mesmo tempo, estimulou seu discípulo Ludovico Luigi Ferrari (1522-1565) a estudar as equações de quarto grau. Como já previa, Ferrari encontrou um método semelhante para as equações de quarto grau, bem como a sua demonstração. Em uma viagem à Bologna em 1544, mestre e discípulo tiveram acesso a um manuscrito de Del Ferro com a regra que Tartaglia havia lhe relatado. Cardano se sentiu no direito de publicá-la, alegando que tal resolução já existia há cerca de 30 anos e com isso não honrou nenhuma das suas promessas.

Em 1545, Cardano em seu livro *Ars Magna*<sup>2</sup> publica a resolução das equações de terceiro e quarto grau. É importante ressaltar que Cardano admitiu não ser o responsável pelas soluções. Ele fez as devidas atribuições tanto a Tartaglia quanto a Ferrari. Estes resultados, de tão notáveis que são, faz com que muitos matemáticos

---

<sup>1</sup>Seu apelido, Tartaglia, que significa gago, foi dado-lhe ainda quando criança depois de ficar com dificuldades na fala devido a graves ferimentos na cabeça e na face durante a tomada da cidade em que nasceu, Brescia, pelos franceses em 1512.

<sup>2</sup>*Artis Magnae, sive de regulis algebraicis.*

considerem o ano de 1545 como marco do início do período moderno da Matemática.

Em *Ars Magna*, as soluções das equações cúbicas foram apresentadas em duas partes. A primeira parte mostra como resolver as cúbicas básicas

$$x^3 = px + q \quad , \quad x^3 + px = q \quad \text{e} \quad x^3 + q = px.$$

Na segunda parte mostra-se que as equações cúbicas gerais, isto é,

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

com  $a, b, c \in \mathbb{R}$  após uma substituição do tipo  $x = t - \frac{a}{3}$  podem ser transformadas em uma equação sem o termo de segundo grau, reduzindo-as nos três casos básicos anteriores. Assim, a solução da equação cúbica pode ser encontrada usando o método desenvolvido por Del Ferro e Tartaglia. Cardano publica a solução deste problema da seguinte maneira: considere a equação

$$x^3 = px + q,$$

com  $p$  e  $q$  números reais positivos. A ideia inicial é supor que a solução procurada é do tipo  $x = u + v$ . Logo  $u + v$  satisfaz a equação dada, isto é,

$$(u + v)^3 = p(u + v) + q. \quad (2.1)$$

Por outro lado, a identidade algébrica  $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$ , pode ser reescrita da seguinte forma

$$(u + v)^3 = 3uv(u + v) + u^3 + v^3. \quad (2.2)$$

Comparando (2.1) com (2.2), segue que  $3uv = p$  e  $u^3 + v^3 = q$ . Considerando  $v = \frac{p}{3u}$  então  $u^3 + \left(\frac{p}{3u}\right)^3 = q$  e assim,

$$u^6 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = qu^3. \quad (2.3)$$

Denotando  $u^3 = t$ , a expressão (2.3) resulta na seguinte equação quadrática

$$t^2 - qt + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

Resolvendo esta última equação por Bhaskara, tem-se

$$t_1 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad \text{e} \quad t_2 = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Considerando a raiz  $t_1$  é imediato que  $u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ . Como  $v^3 = q - u^3$  tem-se  $v^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ . Logo,  $u$  e  $v$  são dados por<sup>3</sup>

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad \text{e} \quad v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

---

<sup>3</sup>Para  $t_2$  é fácil verificar que os resultados obtidos são análogos.

de modo que uma solução, que causou tanta polêmica, para a equação cúbica de coeficientes reais,  $x^3 = px + q$ , é dada por

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Tal solução é conhecida atualmente como *Fórmula de Tartaglia-Cardano* [2].

Cardano testou o método em vários exemplos numéricos, porém um em especial lhe chamou a atenção, a equação  $x^3 = 15x + 4$ . Ele sabia que esta equação tem como raiz real  $x = 4$ . Entretanto, o resultado encontrado foi  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ . Ele sabia também que não existia raiz quadrada de números negativos e por isso não conseguia entender como a regra faria sentido em tal situação. Assim, atribui-se a Cardano o crédito de algum progresso no estudo das raízes quadradas de números negativos na solução da equação cúbica, ainda que as considerasse “sofísticas”<sup>4</sup>.

Mas foi outro algebrista italiano, Rafael Bombelli (1526-1573), quem conseguiu transpor a dificuldade e chegar aos novos números, chamados inicialmente de “números sofísticos”. Bombelli, um discípulo de Cardano, percebeu que os dois radicandos das raízes cúbicas que resultam da *Fórmula de Tartaglia-Cardano* diferem apenas entre si por um sinal e então partiu para o que chamou de uma “ideia louca”: admitiu a existência de números cujos quadrados são reais negativos e operou com estes segundo as regras algébricas dos números reais [3, p.200].

Bombelli conseguiu explicar a solução da equação cúbica  $x^3 = 15x + 4$ , apresentada anteriormente supondo a ideia de que os números  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$  e  $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$  podem ser escritos na forma  $(a + \sqrt{-b})$  e  $(a - \sqrt{-b})$ , respectivamente. Então,

$$(a + \sqrt{-b}) + (a - \sqrt{-b}) = 4 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2.$$

substituindo  $a = 2$  resulta que

$$(2 + \sqrt{-b}) = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{121} \cdot (-1)} = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}},$$

Por outro lado,

$$(2 + \sqrt{-b})^3 = (8 - 6b) + (12 - b)\sqrt{-b} = 2 + 11\sqrt{-1},$$

que por comparação resulta em  $b = 1$ . Assim,  $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$ .

Bombelli em seu livro *Algebra*<sup>5</sup>, publicado em 1572, dedica várias páginas ao estudo da álgebra desses novos números.

Aproximadamente 65 anos depois, René Descartes (1596-1650) chama estas raízes de números imaginários em *La Geometrie*, em um dos três apêndices do seu tratado

<sup>4</sup> Aparentemente verdadeira mas com a intenção de induzir erro.

<sup>5</sup> *l'Algebra parte maggiore dell'Arithmetica*, na realidade foi escrito em meados de 1560 mas só foi publicado cerca de um ano antes de sua morte, e só em parte [1, p. 198].

*Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* <sup>6</sup> publicado em 1637, considerado a pedra fundamental da Geometria Analítica. Neste trabalho, Descartes aceita que uma equação tem tantas raízes quanto seu grau, se admitirmos as raízes imaginárias. Ele introduziu a denominação números imaginários com a seguinte frase: “nem as raízes verdadeiras (positivas) nem as falsas (negativas) são sempre reais; por vezes elas são imaginárias”. Por esse motivo, até hoje o número  $\sqrt{-1}$  é chamado de número imaginário.

Para alguns matemáticos da época não era verdade que novos números haviam sido descobertos, mas sim eram apenas um artifício algébrico útil para se resolver equações, pois só poderiam ser considerados números se apresentassem uma teoria geométrica, uma vez que a matemática da época era baseada na Geometria Euclidiana. O primeiro matemático que tentou mas não conseguiu uma explicação geométrica correta para estes números foi o inglês John Wallis (1616-1703) em 1673 quando publicou *De Algebra Tractatus, Historicus e Practicus*. Quem contribuiu para resolver a crise geométrica foi o contador suíço Jean Robert Argand (1768-1822) com uma monografia publicada em 1806 intitulada *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* [3, p. 232].

Ao mesmo tempo em que a teoria geométrica era explorada, outros importantes matemáticos continuavam a explorar a álgebra. Destaca-se o mais importante matemático suíço da época, Leonhard Euler (1707-1783) que teve seu nome ligado ao número irracional  $e$ , conhecido atualmente como *número de Euler*. Deve-se a Euler a maioria das notações usadas até hoje na Matemática. Dentre das muitas representações destaca-se o símbolo  $i$  usado para representar  $\sqrt{-1}$ . Vale ressaltar que a adoção desta representação ocorreu quase no final de sua vida, em 1777. Apesar de Euler estudar os novos números, para ele só eram úteis em problemas cuja a resposta não era conhecida, e por conta disso afirmava que

*Como todos os números concebíveis são ou maiores ou menores do zero ou iguais a zero, fica então claro que as raízes quadradas de números negativos não podem ser incluídas entre os números possíveis (números reais). E esta circunstância conduz ao conceito de tais números, os quais, por sua natureza, são impossíveis, e que são geralmente chamados de imaginários, pois existem somente na imaginação.*

Entretanto, segundo Ripoll, [3, p. 236], no ano de 1831, o matemático K. F. Gauss (1777-1855) escreve em seu livro *Teoria dos Resíduos Quadráticos* o seguinte:

*Fazia muito tempo que as quantidades imaginárias estavam baseadas na ficção, não sendo plenamente aceitas na Matemática e vistas como uma coisa a ser tolerada; elas estavam longe de ter o mesmo status que as quantidades reais. Agora não há mais justificativa para tal discriminação, uma vez que*

<sup>6</sup>Discurso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências.

---

*a metafísica dos números imaginários está plenamente esclarecida, e que se provou que eles tem um significado tão real quanto os números negativos.*

Com isso, a crise dos números sofísticos chega ao fim e aproximadamente em 1850, Gauss adotada o símbolo  $i$  introduzido por Euler. Assim, os números sofísticos agora escritos na forma  $a + b\sqrt{-1}$  passaram a ser denotados por  $a + bi$  com  $a$  e  $b$  números reais e  $i^2 = -1$ . Também foi alterada a denominação números sofísticos para números complexos utilizada até hoje.

É importante ressaltar que outros excelentes matemáticos deram suas contribuições ao desenvolvimento da teoria dos números complexos, dentre os quais o matemático francês Abraham de Moivre (1667-1754), que por volta de 1707 no artigo *Philosophical Transactions* escreveu implicitamente o que hoje é conhecido como Teorema de Moivre

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta).$$

Contribuíram também os irmãos Jacob Bernoulli (1654-1705) e Johann Bernoulli (1667-1748) e Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783).

## 3 Números complexos

Neste capítulo são apresentados os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Os números complexos serão definidos a partir de três representações que ao final se mostram relacionadas (isomorfas) entre si. Discute-se também que o conjunto dos números complexos possui a estrutura de corpo não ordenado.

### 3.1 Representação algébrica

Seja  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais munido das definições de igualdade e operações aritméticas usuais.  $\mathbb{R}$  possui estrutura de corpo.

**Definição 3.1.** *Número complexo é todo número escrito na forma  $x+iy$ , com  $x, y \in \mathbb{R}$ .*

Ressalta-se que, neste momento, os símbolos  $+$  e  $i$  são desprovidos de qualquer significado isoladamente.

Denota-se por  $\mathbb{C}$  o conjunto de todos os números complexos, ou seja,  $\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$ . Dado o número complexo  $z = x + iy$ , chama-se por  $i$  a unidade imaginária que obedece a propriedade  $i^2 = -1$ . Além disso, o número real  $x$  é chamado de *parte real* de  $z$  e o número real  $y$  de *parte imaginária* de  $z$  denotando-se por  $\Re(z)$  e  $\Im(z)$ , respectivamente. Tem-se a seguinte classificação para um número complexo  $z$ :

- Se  $\Im(z) = 0$  então  $z = x$  é um *número real*.
- Se  $\Re(z) = 0$  e  $\Im(z) \neq 0$  então  $z = iy$  é chamado de *número imaginário puro*.

Sejam  $z_1 = x_1 + iy_1$  e  $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$ . Define-se a igualdade entre elementos de  $\mathbb{C}$  por:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2,$$

ou seja, dois números complexos são iguais se, e somente se, suas respectivas partes reais e imaginárias forem iguais. Enfatiza-se que as igualdades das partes reais e imaginárias ocorrem no conjunto dos números reais.

No conjunto  $\mathbb{C}$  define-se as operações aritméticas de:

**Adição:**  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ ,

isto é, a soma de dois números complexos é definida pela soma, em  $\mathbb{R}$ , das respectivas partes reais e imaginárias.

**Multiplicação:**  $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ ,

isto é, o produto de dois números complexos é definido em termos da soma, subtração e multiplicação, em  $\mathbb{R}$ , das partes reais e imaginárias.

### 3.1.1 Propriedades da adição e subtração

Sejam  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  e  $z_3 = x_3 + iy_3$  números complexos quaisquer. A operação de adição de números complexos possui as seguintes propriedades:

(A1)  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$  (comutativa).

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = \\ &= (x_2 + x_1) + i(y_2 + y_1) = (x_2 + iy_2) + (x_1 + iy_1) = \\ &= z_2 + z_1. \end{aligned}$$

□

(A2)  $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$  (associativa).

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= [(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)] + (x_3 + iy_3) = \\ &= [(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)] + (x_3 + iy_3) = \\ &= [(x_1 + x_2) + x_3] + i[(y_1 + y_2) + y_3] = \\ &= [x_1 + (x_2 + x_3)] + i[y_1 + (y_2 + y_3)] = \\ &= (x_1 + iy_1) + [(x_2 + x_3) + i(y_2 + y_3)] = \\ &= z_1 + (z_2 + z_3). \end{aligned}$$

□

(A3)  $0 + i0$  é o elemento neutro aditivo.

*Demonstração.* Para todo  $z = x + iy$  complexo segue que

$$z + (0 + i0) = (x + iy) + (0 + i0) = (x + 0) + i(y + 0) = x + iy = z.$$

□

(A4) Para todo  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  existe  $(-z) = (-x) + i(-y)$ , o elemento oposto (ou simétrico aditivo).

*Demonstração.*

$$z + (-z) = (x + iy) + [(-x) + i(-y)] = [x + (-x)] + i[y + (-y)] = 0 + i0.$$

□

Observe que estas propriedades se deduzem a partir da definição de adição de números complexos e das propriedades comutativa, associativa, existência de elemento neutro e oposto dos números reais.

A propriedade da existência de elemento oposto da adição permite definir a operação de subtração entre dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$  indicada por  $z_1 - z_2$ , ou seja

**Subtração:**  $z_1 - z_2 = [x_1 + (-x_2)] + i[y_1 + (-y_2)]$ .

### 3.1.2 Propriedades da multiplicação e divisão

Sejam  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  e  $z_3 = x_3 + iy_3$  números complexos quaisquer. A operação de multiplicação de números complexos possui as seguintes propriedades:

(M1)  $z_1 z_2 = z_2 z_1$  (comutativa).

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) = \\ &= (x_2 x_1 - y_2 y_1) + i(x_2 y_1 + y_2 x_1) = (x_2 + iy_2)(x_1 + iy_1) = \\ &= z_2 z_1. \end{aligned}$$

□

(M2)  $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$  (associativa).

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} (z_1 z_2) z_3 &= [(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)](x_3 + iy_3) = \\ &= [(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)](x_3 + iy_3) = \\ &= [(x_1 x_2) x_3 - (y_1 y_2) x_3 - (x_1 y_2) y_3 - (y_1 x_2) y_3] + \\ &\quad + i[(x_1 x_2) y_3 - (y_1 y_2) y_3 + (x_1 y_2) x_3 + (y_1 x_2) x_3] = \\ &= [x_1(x_2 x_3) - y_1(y_2 x_3) - x_1(y_2 y_3) - y_1(x_2 y_3)] + \\ &\quad + i[x_1(x_2 y_3) - y_1(y_2 y_3) + x_1(y_2 x_3) + y_1(x_2 x_3)] = \\ &= (x_1 + iy_1)[(x_2 x_3 - y_2 y_3) + i(x_2 y_3 + y_2 x_3)] = \\ &= z_1(z_2 z_3). \end{aligned}$$

□



(M3)  $1 + i0$  é a identidade multiplicativa.

*Demonstração.* Para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$z(1 + i0) = (x + iy)(1 + i0) = (x.1 - y.0) + i(x.0 + y.1) = x + iy = z.$$

□

(M4) Para todo  $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$  tem-se :  $z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}$ , o inverso multiplicativo de  $z$ .

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} zz^{-1} &= (x + iy) \left( \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \\ &= \left( x\frac{x}{x^2 + y^2} - y\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) + i \left( x\frac{-y}{x^2 + y^2} + y\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \\ &= 1 + i0. \end{aligned}$$

□

(D)  $z_1(z_2 + z_3) = (z_1z_2) + (z_1z_3)$  (distributiva).

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= (x_1 + iy_1)[(x_2 + iy_2) + (x_3 + iy_3)] = \\ &= (x_1 + iy_1)[(x_2 + x_3) + i(y_2 + y_3)] = \\ &= [x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3)] + i[x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)] = \\ &= [x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3] + i[x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3] = \\ &= [(x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1x_3 - y_1y_3)] + \\ &\quad + i[(x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1y_3 + y_1x_3)] = \\ &= [(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)] + \\ &\quad + [(x_1x_3 - y_1y_3) + i(x_1y_3 + y_1x_3)] = \\ &= (z_1z_2) + (z_1z_3). \end{aligned}$$

□

Estas propriedades se deduzem a partir da definição de adição e multiplicação de números complexos e das propriedades comutativa, associativa, existência de elemento identidade e inverso dos números reais.

A propriedade da existência de elemento inverso da multiplicação permite definir a operação de divisão de dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$  com  $z_2 \neq 0$  como sendo o número representado por  $\frac{z_1}{z_2}$  dado por

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (3.1)$$

### 3.1.3 Módulo e complexo conjugado

**Definição 3.2.** O módulo ou valor absoluto de um número complexo  $z = x + iy$ , indicado por  $|z|$ , é definido como o número real não-negativo dado por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3.2)$$

Equivalentemente,  $|z|$  também pode ser representado por

$$|z| = \sqrt{(\Re(z))^2 + (\Im(z))^2}.$$

**Definição 3.3.** O complexo conjugado de um número complexo  $z = x + iy$ , indicado por  $\bar{z}$ , é definido por  $\bar{z} = x + i(-y) = x - iy$ .

Note que  $\Re(\bar{z}) = x = \Re(z)$  e  $\Im(\bar{z}) = -y = -\Im(z)$ .

A proposição a seguir relaciona os conceitos de complexo conjugado e módulo de número complexo.

**Proposição 3.1.** O produto do número complexo  $z$  com seu complexo conjugado  $\bar{z}$  é igual ao quadrado do módulo de  $z$ , isto é:

$$z\bar{z} = |z|^2.$$

*Demonstração.* De fato, se  $z = x + iy$  então  $\bar{z} = x - iy$ . Segue que

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x + iy)(x - iy) = \\ &= (x^2 + y^2) + i(yx - xy) = \\ &= x^2 + y^2 = \\ &= |z|^2. \end{aligned}$$

□

Pode-se também relacionar os conceitos de complexo conjugado e módulo de número complexo com a definição de divisão entre números complexos.

**Proposição 3.2.** A divisão dos números complexos  $z_1$  e  $z_2$  com  $z_2 \neq 0$  é dada por

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

*Demonstração.* Dados  $z_1 = x_1 + iy_1$  e  $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$  dois números complexos quaisquer. Sabe-se que  $z_1 \bar{z}_2 = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(-x_1 y_2 + y_1 x_2)$  e  $z_2 \bar{z}_2 = |z_2|^2 = (x_2^2 + y_2^2) + i0$ . Substituindo as expressões anteriores na equação (3.1) segue que

$$\begin{aligned} \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(-x_1 y_2 + y_1 x_2)}{(x_2^2 + y_2^2) + i0} = \\ &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)(x_2^2 + y_2^2) + (-x_1 y_2 + y_1 x_2)0}{(x_2^2 + y_2^2)^2 + 0^2} + \\ &\quad + i \frac{(-x_1 y_2 + y_1 x_2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2)0}{(x_2^2 + y_2^2)^2 + 0^2} = \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{z_1}{z_2}. \end{aligned}$$

□

Concluí-se então que para dividir números complexos, basta multiplicar o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador.

**Propriedade 3.1.** Sejam  $z_1, z_2$  dois números complexos quaisquer, então

$$(a) \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

$$(b) \quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}.$$

$$(c) \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}.$$

$$(d) \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \text{ com } z_2 \neq 0.$$

*Demonstração.* Considere  $z_1 = x_1 + iy_1$  e  $z_2 = x_2 + iy_2$ .

$$\begin{aligned} (a) \quad \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} = \\ &= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = x_1 + x_2 - iy_1 - iy_2 = \\ &= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2}. \end{aligned}$$

(b) A demonstração é análoga ao item (a) anterior.

$$\begin{aligned} (c) \quad \overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)} = \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + y_1 x_2) = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = \\ &= \overline{z_1} \overline{z_2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (d) \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\overline{x_1 + iy_1}}{\overline{x_2 + iy_2}} = \frac{\overline{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}}{\overline{(x_2^2 + y_2^2)}} = \\ &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) - i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{(x_1 x_2 + (-y_1)(-y_2)) + i(x_2(-y_1) - x_1(-y_2))}{x_2^2 + (-y_2)^2} = \\ &= \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}. \end{aligned}$$

□

**Propriedade 3.2.** Dado um número complexo  $z$  qualquer tem-se

$$(a) \quad \overline{\overline{z}} = z.$$

$$(b) \quad z + \overline{z} = 2 \Re(z).$$

$$(c) \quad z - \overline{z} = 2i \Im(z).$$

*Demonstração.* Seja  $z = x + iy$ . Segue que

- (a)  $\bar{\bar{z}} = \overline{(x - iy)} = x + iy = z.$
- (b)  $z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2 \Re(z).$
- (c)  $z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i \Im(z).$

□

**Proposição 3.3.** Um número complexo  $z$  é um número real se, e somente se,  $z = \bar{z}$ .

*Demonstração.* De fato, um número complexo  $z$  é um número real se, e somente se,  $\Im(z) = 0$ . Assim, pela propriedade 3.2.(c) decorre que  $z - \bar{z} = 0$ . □

**Proposição 3.4.** Seja  $z \in \mathbb{C}$  tem-se  $|z| = 0$  se, e somente se,  $z = 0$ .

*Demonstração.* Seja  $z = x + iy$ ,

$$|z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

□

**Propriedade 3.3.** Para todo  $z \in \mathbb{C}$  são válidas:

- (a)  $|z| = |\bar{z}|.$
- (b)  $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$  com  $z \neq 0$ .
- (c)  $\Re(z) \leq |\Re(z)| \leq |z|.$
- (d)  $\Im(z) \leq |\Im(z)| \leq |z|.$

*Demonstração.* Seja  $z = x + iy$  um número complexo qualquer.

- (a)  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |\bar{z}|.$
- (b)  $\left| \frac{1}{z} \right| = \left| \frac{1}{z\bar{z}} \right| = \left| \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \right| = \sqrt{\frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{|z|}.$
- (c)  $\Re(z) = x \leq |x| = |\Re(z)| = \sqrt{\Re(z)^2} \leq \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2} = |z|.$
- (d)  $\Im(z) = y \leq |y| = |\Im(z)| = \sqrt{\Im(z)^2} \leq \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2} = |z|.$

□

**Propriedade 3.4.** Dados dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$  quaisquer tem-se

- (a)  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|.$

(b)  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$  com  $z_2 \neq 0$ .

*Demonstração.*

(a) Pela proposição 3.1 segue que

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

Logo,  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ .

(b) Pelo item (a) segue que

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| z_1 \frac{1}{z_2} \right| = |z_1| \left| \frac{1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

□

**Propriedade 3.5.** Dados dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , seguem as seguintes desigualdades:

(a)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

(b)  $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

(c)  $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$ .

(d)  $|z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2|$ .

(e)  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$ .

*Demonstração.*

(a) Segue pelas propriedades anteriores que:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = \\ &= z_1 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} = \\ &= |z_1|^2 + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} + |z_2|^2 = \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1 z_2} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \Re(z_1 \overline{z_2}) \leq \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |z_1 \overline{z_2}| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |z_1| |\overline{z_2}| = \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |z_1| |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

Logo,  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

(b)  $|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|$ .

(c)  $|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$ . Então  $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$ .

(d)  $|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|$ .

(e) Pelo item (c) segue que  $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$ . Por outro lado, segue pelo item (d) que  $-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2|$ . Portanto,  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$ .

□

## 3.2 O corpo dos números complexos

### 3.2.1 O conjunto $\mathbb{C}$ como extensão de $\mathbb{R}$

Verifica-se que o conjunto dos números complexos  $\mathbb{C}$  pode ser visto como uma extensão do conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  da mesma maneira que este último é uma extensão do conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$ . Analogamente para  $\mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$  são extensões. Neste sentido, considere a aplicação  $\psi$  definida por

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{R} &\longrightarrow \psi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \psi(x) = x + i.0\end{aligned}$$

A aplicação  $\psi$  satisfaz as seguintes propriedades:

**Propriedade 3.6.**  $\psi$  é bijetora.

*Demonstração.* Inicialmente mostra-se que  $\psi$  é injetora. Para todo  $x, y \in \mathbb{R}$  se  $\psi(x) = \psi(y)$  então  $x + i.0 = y + i.0$ . Logo,  $\Re(x + i.0) = \Re(y + i.0) \Leftrightarrow x = y$ . É imediato que  $\psi$  é sobrejetora. De fato, para todo  $x + i.0 \in \psi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}$  basta considerar  $x \in \mathbb{R}$ . Portanto,  $\psi$  é bijetora.  $\square$

**Propriedade 3.7.** Para todo  $x, y \in \mathbb{R}$  tem-se

$$1. \psi(x + y) = \psi(x) + \psi(y).$$

*Demonstração.* De fato, para todo  $x, y \in \mathbb{R}$  tem-se

$$\psi(x + y) = (x + y) + i.0 = (x + i.0) + (y + i.0) = \psi(x) + \psi(y).$$

$\square$

$$2. \psi(xy) = \psi(x)\psi(y).$$

*Demonstração.* Para todo  $x, y \in \mathbb{R}$  tem-se

$$\psi(xy) = xy + i.0 = (x + i.0)(y + i.0) = \psi(x)\psi(y).$$

$\square$

Conclui-se que  $\psi$  é um isomorfismo entre os conjuntos  $\mathbb{R}$  e  $\psi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}$ . Neste sentido, diz-se que  $\mathbb{C}$  é uma extensão de  $\mathbb{R}$  e que  $\mathbb{R}$  está mergulhado em  $\mathbb{C}$ .

### 3.2.2 O corpo $\mathbb{C}$ não é ordenado

Verificou-se nas seções anteriores que o conjunto dos números complexos  $\mathbb{C}$  munido das duas operações binárias fechadas de adição e multiplicação cumpre, para cada uma delas, as propriedades comutativa, associativa, existência da identidade, existência do elemento oposto (ou inverso) e distributiva. O conjunto  $\mathbb{C}$  então possui estrutura de corpo. Passa-se agora a discutir o fato de que no conjunto  $\mathbb{C}$  não é possível definir uma relação de ordem entre seus elementos.

Considere um conjunto qualquer  $K$  munido das operações binárias de adição e multiplicação possuindo as propriedades que definem a estrutura algébrica de corpo. Suponha ainda que sobre  $K$  esteja definida uma relação  $\geq$  dada por

$$a \geq b \Leftrightarrow \text{existe } c \in K \text{ tal que } a = b + c,$$

para todo  $a, b \in K$  e que satisfaz as seguintes condições:

**O1:**  $a \geq a$ .

**O2:** Se  $a \geq b$  e  $b \geq a$  então  $a = b$ .

**O3:** Se  $a \geq b$  e  $b \geq c$  então  $a \geq c$ .

**O4:**  $a \geq b$  ou  $b \geq a$ .

para todo  $a, b, c \in K$ . Diz-se que  $\geq$  define uma relação de ordem sobre  $K$ . Além disso, a relação de ordem  $\geq$  é dita *compatível com a estrutura de corpo* definida sobre  $K$  se, e somente se, estão satisfeitas as seguintes condições para todo  $a, b \in K$ :

**OA:** Se  $a \geq b$  então  $a + c \geq b + c$  para todo  $c \in K$ .

**OM:** Se  $a \geq b$  então  $ac \geq bc$  se  $c \geq 0$ .

O conjunto  $K$  é dito corpo ordenado. Os conjuntos dos números racionais  $\mathbb{Q}$  e dos números reais  $\mathbb{R}$  são exemplos de corpos ordenados onde a relação de ordem  $\geq$  é conhecida como a relação *maior ou igual que*. Define-se  $a > b \Leftrightarrow a \geq b$  e  $a \neq b$ . No corpo ordenado  $K$  é satisfeita a seguinte propriedade:

**Propriedade 3.8.** O quadrado de um elemento não nulo é sempre positivo, isto é,

$$a^2 > 0, \forall a \in K, a \neq 0.$$

*Demonstração.* De fato, para todo  $a \in K$  com  $a \neq 0$  tem-se

(a) Se  $a > 0$  então  $aa > a0$  pela condição **OM**. Logo,  $a^2 > 0$ .

(b) Se  $0 > a$  então  $0 + (-a) > a + (-a)$  pela condição **OA**. Assim,  $-a > 0$ . Novamente,  $(-a)^2 > 0$ . Portanto,  $a^2 > 0$ .

□

Assim, se o conjunto dos números complexos fosse ordenado segundo a relação de ordem  $\geq$ , a propriedade 3.8 seria verdadeira para todo elemento de  $\mathbb{C}$ . Deste modo, o número  $0+i \in \mathbb{C}$  é tal que  $(0+i)^2 = -1+0.i$  seria positivo em  $\mathbb{C}$ . Por sua vez  $-1+0.i$  está identificado com o número  $-1$  no conjunto dos números reais conforme a seção 3.2.1. Logo,  $-1$  seria positivo em  $\mathbb{R}$ . Cabe ressaltar que o corpo dos números reais só pode ser ordenado de um único modo (ver [4] p. 262). A relação de ordem definida em  $\mathbb{C}$ , quando considerada sobre os elementos da forma  $x+0.i$ , será a relação de ordem (única) definida em  $\mathbb{R}$ . Estes fatos levam a uma contradição pois  $-1$  é negativo em  $\mathbb{R}$ . Portanto, não pode-se definir uma relação de ordem para  $\mathbb{C}$ . Observa-se que  $\mathbb{R}$  é um subcorpo ordenado de  $\mathbb{C}$ .

### 3.3 Representação por par ordenado

Nesta seção o conjunto dos números complexos é apresentado de maneira diferente àquela desenvolvida na seção anterior. As operações aritméticas e os principais conceitos discutidos são agora redefinidos utilizando o conceito de par ordenado.

**Definição 3.4.** *Um número complexo é definido como um par ordenado  $(x, y)$  de números reais  $x$  e  $y$ .*

Denota-se por  $\mathbb{C}$  o conjunto de todos os números complexos, ou seja,  $\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ . Dado o número complexo  $z = (x, y)$ , o número real  $x$  é chamado de *parte real* de  $z$  e o número real  $y$  de *parte imaginária* de  $z$  denotando-se por  $\Re(z)$  e  $\Im(z)$ , respectivamente.

Sejam  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ . Define-se a igualdade entre elementos de  $\mathbb{C}$  por:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2,$$

ou seja, dois números complexos são iguais se, e somente se, suas respectivas partes reais e imaginárias forem iguais. Enfatiza-se que a igualdade de pares ordenados é dada pela igualdade das respectivas componentes dos pares ordenados e estas ocorrem no conjunto dos números reais.

No conjunto  $\mathbb{C}$  define-se as operações aritméticas de:

**Adição:**  $z_1 \oplus z_2 = (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ .

**Multiplicação:**  $z_1 \odot z_2 = (x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$ .

As operações aritméticas acima estão bem definidas e são fechadas.



### 3.3.1 Propriedades da adição e subtração

Sejam  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$  e  $z_3 = (x_3, y_3)$  números complexos quaisquer. A operação de adição de números complexos cumpre as seguintes propriedades:

**(A1)**  $z_1 \oplus z_2 = z_2 \oplus z_1$  (comutativa).

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} z_1 \oplus z_2 &= (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \\ &= (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) \oplus (x_1, y_1) = \\ &= z_2 \oplus z_1. \end{aligned}$$

□

**(A2)**  $(z_1 \oplus z_2) \oplus z_3 = z_1 \oplus (z_2 \oplus z_3)$  (associativa).

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} (z_1 \oplus z_2) \oplus z_3 &= [(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2)] \oplus (x_3, y_3) = \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \oplus (x_3, y_3) = \\ &= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3) = \\ &= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3)) = \\ &= (x_1, y_1) \oplus (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = \\ &= (x_1, y_1) \oplus [(x_2, y_2) \oplus (x_3, y_3)] = \\ &= z_1 \oplus (z_2 \oplus z_3). \end{aligned}$$

□

**(A3)**  $(0, 0)$  é o elemento neutro aditivo.

*Demonstração.* Para todo  $z = (x, y)$  com  $x, y \in \mathbb{R}$ , tem-se:

$$z \oplus (0, 0) = (x, y) \oplus (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y) = z.$$

□

**(A4)** Para todo  $z = (x, y)$ , existe  $(-z) = (-x, -y)$ , o elemento oposto (ou simétrico aditivo).

*Demonstração.*

$$z \oplus (-z) = (x, y) \oplus (-x, -y) = (x + (-x), y + (-y)) = (0, 0).$$

□

Observe que estas propriedades se deduzem a partir da definição de adição de números complexos e das propriedades comutativa, associativa, existência de elemento neutro e oposto dos números reais.

A propriedade da existência de elemento oposto da adição permite definir a operação de subtração entre dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , indicada por  $z_1 \ominus z_2$ , dada por,

$$z_1 \ominus z_2 = (x_1 + (-x_2), y_1 + (-y_2)).$$

### 3.3.2 Propriedades da multiplicação e divisão

Sejam  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$  e  $z_3 = (x_3, y_3)$  números complexos quaisquer. A operação de multiplicação de números complexos cumpre as seguintes propriedades:

(M1)  $z_1 \odot z_2 = z_2 \odot z_1$  (comutativa).

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} z_1 \odot z_2 &= (x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) = \\ &= (x_2x_1 - y_2y_1, x_2y_1 + y_2x_1) = (x_2, y_2) \odot (x_1, y_1) = \\ &= z_2 \odot z_1. \end{aligned}$$

□

(M2)  $(z_1 \odot z_2) \odot z_3 = z_1 \odot (z_2 \odot z_3)$  (associativa).

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} z_1 \odot (z_2 \odot z_3) &= (x_1, y_1) \odot [(x_2, y_2) \odot (x_3, y_3)] = \\ &= (x_1, y_1) \odot (x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + y_2x_3) = \\ &= (x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(x_2y_3 + y_2x_3), x_1(x_2y_3 + y_2x_3) + \\ &\quad + y_1(x_2x_3 - y_2y_3)) = \\ &= (x_1(x_2x_3) - x_1(y_2y_3) - y_1(x_2y_3) - y_1(y_2x_3), x_1(x_2y_3) + x_1(y_2x_3) + \\ &\quad + y_1(x_2x_3) - y_1(y_2y_3)) = \\ &= ((x_1x_2)x_3 - (x_1y_2)y_3 - (y_1x_2)y_3 - (y_1y_2)x_3, (x_1x_2)y_3 + (x_1y_2)x_3 + \\ &\quad + (y_1x_2)x_3 - (y_1y_2)y_3) = \\ &= ((x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + y_1x_2)y_3, (x_1x_2 - y_1y_2)y_3 + \\ &\quad + (x_1y_2 + y_1x_2)x_3) = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \odot (x_3, y_3) = \\ &= [(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2)] \odot (x_3, y_3) = \\ &= (z_1 \odot z_2) \odot z_3. \end{aligned}$$

□

(M3)  $(1, 0)$  é o elemento identidade da multiplicação.

*Demonstração.* Para todo  $z = (x, y)$ , tem-se

$$z \odot (1, 0) = (x, y) \odot (1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y) = z.$$

□

(M4) Todo  $z \in \mathbb{C} - (0, 0)$  tem inverso multiplicativo dado por  $z^{-1} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$ .

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} z \odot z^{-1} &= (x, y) \odot \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \\ &= \left( x \frac{x}{x^2 + y^2} - y \frac{-y}{x^2 + y^2}, x \frac{-y}{x^2 + y^2} + y \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \\ &= \left( \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}, -\frac{xy}{x^2 + y^2} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \\ &= (1, 0). \end{aligned}$$

□

(D)  $z_1 \odot (z_2 \oplus z_3) = (z_1 \odot z_2) \oplus (z_1 \odot z_3)$  (distributiva).

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} z_1 \odot (z_2 \oplus z_3) &= (x_1, y_1) \odot [(x_2, y_2) \oplus (x_3, y_3)] = \\ &= (x_1, y_1) \odot (x_2 + x_3, y_2 + y_3) = \\ &= (x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3), x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)) = \\ &= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3, x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3) = \\ &= ((x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1x_3 - y_1y_3), (x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1y_3 + y_1x_3)) = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \oplus (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + y_1x_3) = \\ &= (x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) \oplus (x_1, y_1) \odot (x_3, y_3) = \\ &= (z_1 \odot z_2) \oplus (z_1 \odot z_3). \end{aligned}$$

□

Estas propriedades se deduzem a partir da definição de adição e multiplicação de números complexos e das propriedades comutativa, associativa, existência de elemento identidade e inverso dos números reais.

A propriedade da existência de elemento inverso da multiplicação permite definir a operação de divisão de números complexos. A operação divisão de  $z_1$  por  $z_2 \neq 0$  denotada por  $\frac{z_1}{z_2}$  é definida por

$$\frac{z_1}{z_2} = \left( \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right). \quad (3.3)$$

Lembre-se que, o conjunto  $\mathbb{C}$  definido a partir do conceito de par ordenado, munido das operações de adição e multiplicação acima satisfaz os axiomas que definem a estrutura algébrica de corpo.

### 3.3.3 O plano complexo

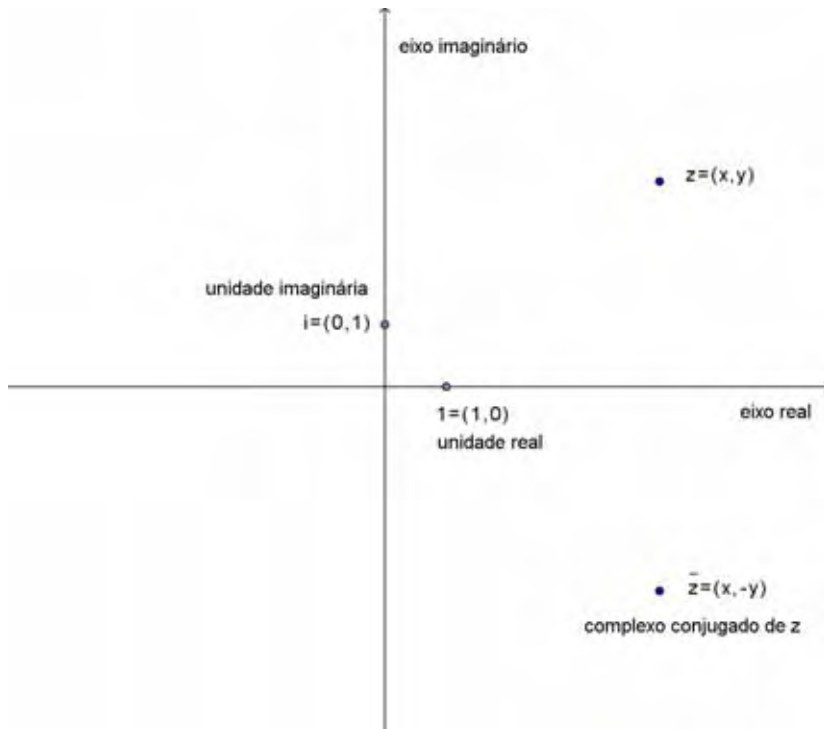
O conjunto dos números complexos definido como pares ordenados de números reais admite uma representação geométrica a partir da identificação de pares ordenados com pontos do plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ . Em outras palavras, existe um isomorfismo entre o conjunto dos números complexos  $\mathbb{C}$  e o plano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ . Neste caso, denomina-se **plano complexo** ou **plano de Argand** ao invés de plano cartesiano.

É imediato que  $\Re(z) = x$  e  $\Im(z) = y$  são as coordenadas do número  $z$  no plano complexo. Assim, o conjunto dos números reais é imerso em  $\mathbb{C}$  a partir da identificação  $(x, 0)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Desta forma, o eixo das abscissas será denominado **eixo real**, enquanto que o eixo das ordenadas,  $(0, y)$  para todo  $y \in \mathbb{R}$  passa a ser chamado de **eixo imaginário**. O ponto  $(0, 1)$  será identificado a unidade imaginária e denotado por  $i$ . É fácil verificar que:

$$i^2 = i \odot i = (0, 1) \odot (0, 1) = (-1, 0),$$

sendo  $(-1, 0)$  identificado com o número real -1.

Dado um número complexo  $z = (x, y)$  define-se complexo conjugado de  $z$ , indicado por  $\bar{z}$ , como sendo a reflexão de  $z$  pelo eixo real. Em outras palavras, o eixo real é o eixo de simetria entre os pontos  $z$  e  $\bar{z}$ . Assim, para todo  $z = (x, y)$  tem-se que  $\bar{z} = (x, -y)$ .

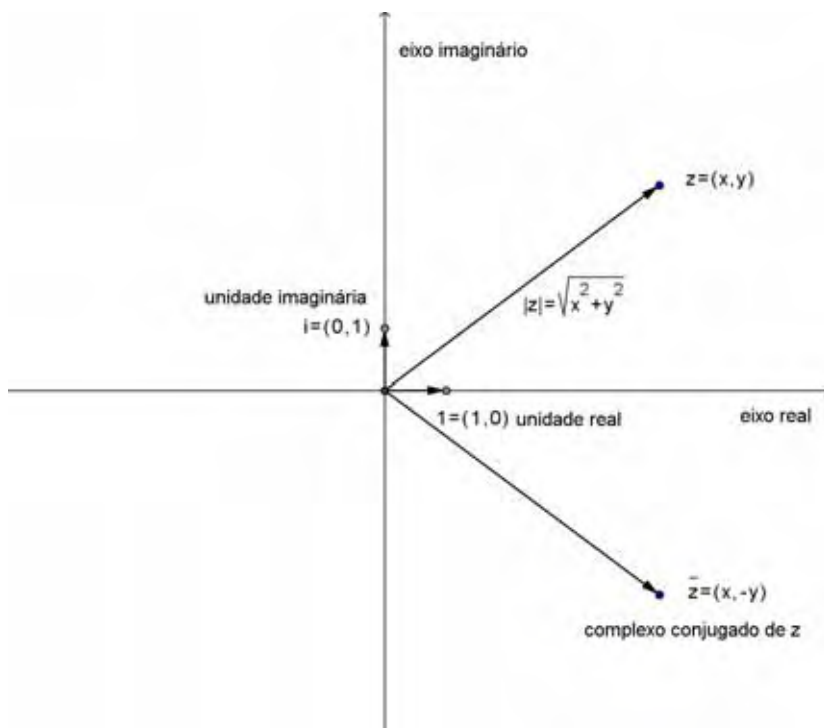
**Figura 3.1:** Plano Complexo

Todo número complexo  $z = (x, y)$  pode também ser interpretado como o vetor de origem em  $(0, 0)$  e extremidade no ponto  $P(x, y)$  do plano complexo. Passa-se desta maneira da concepção pontual para a concepção vetorial do par ordenado  $(x, y)$ . Neste sentido, o módulo de um vetor é definido com sendo o comprimento do vetor, ou seja, a distância da origem até a extremidade do vetor. O módulo de um número complexo  $z = (x, y)$  será definido como o módulo do vetor a este associado, ou seja, como sendo o número real não-negativo dado por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

É fácil verificar que:

$$|z|^2 = z \odot \bar{z}.$$



**Figura 3.2:** O número complexo  $z$  como vetor no plano complexo

Observe que as propriedades vistas na seção 3.1.3 são facilmente verificadas geometricamente. Por exemplo, dados dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , a propriedade 3.5 (a) diz que

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Este resultado é conhecido geometricamente como **desigualdade triangular**: *a soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo é maior ou igual ao comprimento do terceiro lado.*

### 3.3.3.1 Forma polar dos números complexos

O número complexo representado por pares ordenados de números reais é identificado por um ponto  $P(x, y)$  no plano complexo onde adota-se um sistema de coordenadas cartesianas, ou seja, escolhe-se um ponto fixado chamado de origem do sistema de coordenadas e duas retas perpendiculares entre si neste ponto denominadas de eixos coordenados (abscissas – ordenadas). Além disso, adota-se um comprimento unitário e coloca-se cada ponto dos eixos coordenados em correspondência biunívoca com o conjunto de números reais. No caso do plano complexo, a origem é identificada com o número  $(0, 0)$  e eixos das abscissas e ordenadas com os eixos real e imaginário respectivamente. Assim, todo ponto  $P$  do plano complexo será representado através das coordenadas cartesianas  $(x, y)$ . O mesmo ponto geométrico  $P$  pode ser representado em diferentes sistemas de coordenadas. Enfatiza-se que o par ordenado que irá representá-lo será diferente em cada sistema de coordenadas, mas o ponto geométrico

(número complexo) será sempre o mesmo. Neste sentido, pode-se adotar um diferente sistema de coordenadas. Para isto, considere um ponto fixado  $O$  chamado de origem e uma semirreta de origem  $O$  coincidentes com a origem e o semieixo positivo das abscissas do sistema de coordenadas cartesiano respectivamente. Todo ponto  $P$  distinto da origem  $O$  é agora identificado pelo par ordenado  $(r, \theta)$ , onde  $r$  é a distância do ponto  $P$  à origem  $O$  e  $\theta$  é o ângulo formado pelo segmento de reta  $OP$  e a semirreta medido em radianos. Este sistema de coordenadas é denominado de sistema de coordenadas polares. Ele irá mapear todo o plano complexo a menos da origem  $O$ . O ponto  $P$  não pode coincidir com a origem  $O$  pois neste caso  $r = 0$  e  $\theta$  seria qualquer, o que não define uma aplicação entre os dois sistemas de coordenadas. As coordenadas cartesianas e polares se relacionam através das seguintes transformações:

- (a) do sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$  para o sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y)$ :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (3.4)$$

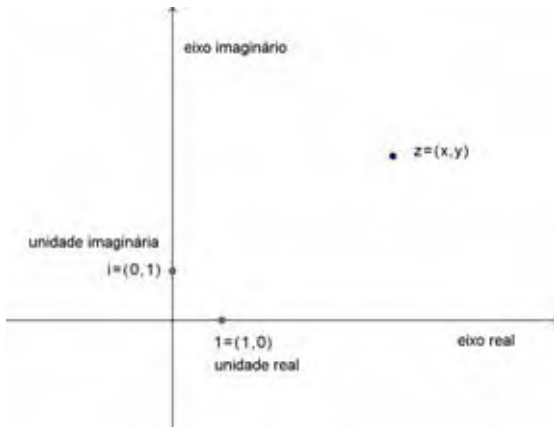
onde  $r > 0$  e  $\theta \in [0, 2\pi[$ .

- (b) do sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y)$  para o sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$  basta determinar a transformação inversa do item (a) acima, isto é, isolar as coordenadas  $r$  e  $\theta$  em termos das coordenadas  $x$  e  $y$ . Neste sentido, observe que  $\tan \theta = y/x$  para  $x \neq 0$  e  $y$  qualquer. A função tangente somente será injetora, e assim inversível, para os valores cujo arcos estão compreendidos entre  $-\pi/2$  e  $\pi/2$ . Tendo em vista esta observação determina-se a seguinte transformação entre os sistemas de coordenadas cartesianas e polares:

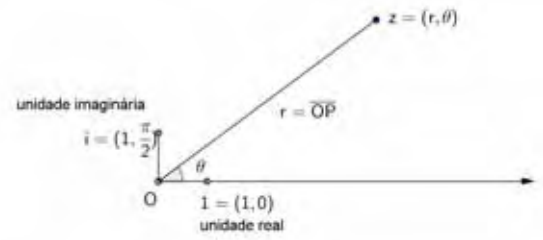
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \begin{cases} \arctg\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x > 0 \text{ e } y \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{se } x < 0 \text{ e } y \in \mathbb{R} \\ \frac{3\pi}{2} & \text{se } x = 0 \text{ e } y < 0 \\ \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{se } x > 0 \text{ e } y < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (3.5)$$

para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .

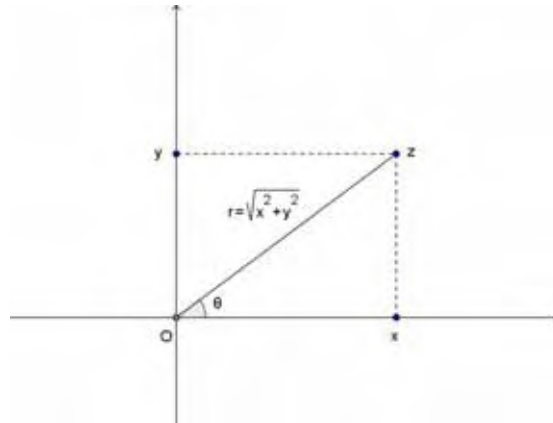
Os diferentes sistemas de coordenadas para o plano complexo são mostrados na Figura 3.3.



(a) Coordenadas cartesianas



(b) Coordenadas polares



(c) Relações entre as coordenadas cartesianas e polares

**Figura 3.3:** Plano complexo e sistemas de coordenadas

O uso do sistema de coordenadas polares permite os seguintes resultados:

1. Para todo número complexo  $z \neq 0$ , o módulo de  $z$  dado por  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  representa a distância entre a origem e o ponto  $P(x, y)$ . Então,  $|z| = r$ .
2. Dado um número complexo  $z \neq 0$ , chama-se *argumento principal de  $z$* , indicado por  $\text{Arg}(z)$ , à amplitude medida em radianos do ângulo  $\theta$  determinado pelo segmento de reta que une a origem  $O$  ao ponto  $P(x, y)$  e o eixo positivo das abscissas no sentido anti-horário. Então,  $\text{Arg}(z) = \theta$ , ou seja,  $\text{Arg}(z) \in [0, 2\pi[$ . Fez-se assim um corte do plano complexo ao longo dos valores positivos do eixo das abscissas. Alguns autores consideram o argumento principal como  $\text{Arg}(z) = \theta - \pi$ . Neste caso,  $\text{Arg}(z) \in [-\pi, \pi[$  e assim tem-se um corte do plano complexo ao longo dos valores negativos do eixo das abscissas.
3. Ao identificar um número complexo não nulo na sua representação por par ordenado,  $z = (x, y)$ , com a sua representação algébrica,  $z = x + iy$  pode-se relacionar



ambas através da igualdade:

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta). \quad (3.6)$$

Esta representação é chamada forma polar de um número complexo.

Uma consequência imediata da relação (3.6) é igualdade entre números complexos representados na forma polar. Com efeito, os números complexos  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$  e  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$  são iguais se, e somente se, seus módulos e seus argumentos principais forem iguais.

### 3.4 Representação matricial

Seja  $\mathbb{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem 2 de componentes reais munido das definições de igualdade e operações aritméticas de soma e multiplicação usuais entre matrizes.

**Definição 3.5.** *Um número complexo é uma matriz quadrada de ordem 2 de componentes reais  $(a_{ij})_{2 \times 2}$  com  $a_{11} = a_{22}$  e  $a_{12} = -a_{21}$ .*

Denota-se por  $\mathbb{C}$  o conjunto de todos os números complexos, ou seja,

$$\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sejam  $z_1 = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}$  e  $z_2 = \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$ . Define-se igualdade entre elementos de  $\mathbb{C}$  por

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2,$$

ou seja, dois números complexos são iguais se, e somente se, as matrizes forem iguais. Desta forma, a igualdade entre números complexos decorre da igualdade entre matrizes, ou seja, a igualdade entre os respectivos elementos das matrizes.

No conjunto  $\mathbb{C}$  define-se as operações aritméticas de:

**Adição:**  $z_1 \boxplus z_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & -(y_1 + y_2) \\ y_1 + y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$

**Multiplicação:**  $z_1 \boxtimes z_2 = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 & -(x_1 y_2 + y_1 x_2) \\ x_1 y_2 + y_1 x_2 & x_1 x_2 - y_1 y_2 \end{pmatrix}.$

Verifica-se que as definições das operações aritméticas de adição e multiplicação para o conjunto dos números complexos são dadas, neste contexto, em termos das operações aritméticas usuais de adição e multiplicação de matrizes.

### 3.4.1 Propriedades da adição e subtração

Sejam  $z_1 = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}$ ,  $z_2 = \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}$  e  $z_3 = \begin{pmatrix} x_3 & -y_3 \\ y_3 & x_3 \end{pmatrix}$  números complexos quaisquer. A operação de adição de números complexos possui as seguintes propriedades:

(A1)  $z_1 \boxplus z_2 = z_2 \boxplus z_1$  (comutativa).

*Demonstração.*

$$z_1 \boxplus z_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & -(y_1 + y_2) \\ y_1 + y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_1 & -(y_2 + y_1) \\ y_2 + y_1 & x_2 + x_1 \end{pmatrix} = z_2 \boxplus z_1.$$

□

(A2)  $[z_1 \boxplus z_2] \boxplus z_3 = z_1 \boxplus [z_2 \boxplus z_3]$  (associativa).

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} [z_1 \boxplus z_2] \boxplus z_3 &= \left[ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & -(y_1 + y_2) \\ y_1 + y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix} \right] \boxplus z_3 = \\ &= \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + x_3 & -[(y_1 + y_2) + y_3] \\ (y_1 + y_2) + y_3 & (x_1 + x_2) + x_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + (x_2 + x_3) & -[y_1 + (y_2 + y_3)] \\ y_1 + (y_2 + y_3) & x_1 + (x_2 + x_3) \end{pmatrix} = \\ &= z_1 \boxplus \left[ \begin{pmatrix} x_2 + x_3 & -(y_2 + y_3) \\ y_2 + y_3 & x_2 + x_3 \end{pmatrix} \right] = \\ &= z_1 \boxplus [z_2 \boxplus z_3]. \end{aligned}$$

□

(A3)  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  é o elemento neutro aditivo.

*Demonstração.* Para todo  $z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$  complexo tem-se

$$z \boxplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 0 & -(y + 0) \\ y + 0 & x + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = z.$$

Analogamente,  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boxplus z = z$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

□

(A4) Para todo  $z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$  complexo, tem-se que  $(-z) = \begin{pmatrix} -x & y \\ -y & -x \end{pmatrix}$  é o seu elemento oposto (ou simétrico aditivo).

*Demonstração.*

$$z \boxplus (-z) = \begin{pmatrix} x + (-x) & -y + (y) \\ y + (-y) & x + (-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

□

Observe que estas propriedades decorrem das propriedades comutativa, associativa, existência de elemento neutro e oposto da operação de adição usual entre matrizes.

A propriedade da existência de elemento oposto da adição permite definir a operação de subtração entre dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , indicada por  $z_1 \boxminus z_2$ , isto é,

$$z_1 \boxminus z_2 = \begin{pmatrix} x_1 + (-x_2) & -(y_1 + (-y_2)) \\ y_1 + (-y_2) & x_1 + (-x_2) \end{pmatrix}.$$

### 3.4.2 Propriedades da multiplicação e divisão

Sejam  $z_1 = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}$ ,  $z_2 = \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}$  e  $z_3 = \begin{pmatrix} x_3 & -y_3 \\ y_3 & x_3 \end{pmatrix}$  números complexos quaisquer. A operação de multiplicação de números complexos possui as seguintes propriedades:

(M1)  $z_1 \boxtimes z_2 = z_2 \boxtimes z_1$  (comutativa).

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} z_1 \boxtimes z_2 &= \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & -(x_1y_2 + y_1x_2) \\ x_1y_2 + y_1x_2 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_2x_1 - y_2y_1 & -(x_2y_1 + y_2x_1) \\ x_2y_1 + y_2x_1 & x_2x_1 - y_2y_1 \end{pmatrix} = z_2 \boxtimes z_1. \end{aligned}$$

□

(M2)  $[z_1 \boxtimes z_2] \boxtimes z_3 = z_1 \boxtimes [z_2 \boxtimes z_3]$  (associativa).

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
 [z_1 \boxdot z_2] \boxdot z_3 &= \left[ \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & -(x_1y_2 + y_1x_2) \\ x_1y_2 + y_1x_2 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix} \right] \boxdot z_3 = \\
 &= \begin{pmatrix} (x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + y_1x_2)y_3 & -[(x_1x_2 - y_1y_2)y_3 + (x_1y_2 + y_1x_2)x_3] \\ (x_1x_2 - y_1y_2)y_3 + (x_1y_2 + y_1x_2)x_3 & (x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + y_1x_2)y_3 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(y_2x_3 + x_2y_3) & -[x_1(x_2y_3 + y_2x_3) + y_1(x_2x_3 - y_2y_3)] \\ x_1(x_2y_3 + y_2x_3) + y_1(x_2x_3 - y_2y_3) & x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(y_2x_3 + x_2y_3) \end{pmatrix} = \\
 &= z_1 \boxdot \left[ \begin{pmatrix} x_2x_3 - y_2y_3 & -(x_2y_3 + y_2x_3) \\ x_2y_3 + y_2x_3 & x_2x_3 - y_2y_3 \end{pmatrix} \right] = z_1 \boxdot (z_2 \boxdot z_3).
 \end{aligned}$$

□

(M3)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  é a identidade multiplicativa.

*Demonstração.* Para todo  $z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$ , tem-se

$$z \boxdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot 1 - y \cdot 0 & -(x \cdot 0 + y \cdot 1) \\ x \cdot 0 + y \cdot 1 & x \cdot 1 - y \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = z.$$

Analogamente,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \boxdot z = z$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

□

(M4) Para todo  $z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathbb{C}, z \neq 0$  existe  $z^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} & \frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$ ,

o inverso multiplicativo de  $z$ .

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
 z \boxdot z^{-1} &= \begin{pmatrix} x \frac{x}{x^2 + y^2} - y \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) & - \left( x \frac{y}{x^2 + y^2} + (-y) \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \\ x \frac{y}{x^2 + y^2} + (-y) \frac{x}{x^2 + y^2} & x \frac{x}{x^2 + y^2} - y \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

(D)  $z_1 \boxdot (z_2 \boxplus z_3) = (z_1 \boxdot z_2) \boxplus (z_1 \boxdot z_3)$  (distributiva).

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
z_1 \boxdot (z_2 \boxplus z_3) &= z_1 \boxdot \begin{pmatrix} x_2 + x_3 & -(y_2 + y_3) \\ y_2 + y_3 & x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3) & -[x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)] \\ x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3) & x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1x_3 - y_1y_3) & -[(x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1y_3 + y_1x_3)] \\ (x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1y_3 + y_1x_3) & (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1x_3 - y_1y_3) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & -(x_1y_2 + y_1x_2) \\ (x_1y_2 + y_1x_2) & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} x_1x_3 - y_1y_3 & -(x_1y_3 + y_1x_3) \\ x_1y_3 + y_1x_3 & x_1x_3 - y_1y_3 \end{pmatrix} = \\
&= (z_1 \boxdot z_2) \boxplus (z_1 \boxdot z_3).
\end{aligned}$$

□

As propriedades acima decorrem das respectivas propriedades comutativa, associativa e existência de elemento identidade para matrizes. Observe que a existência do elemento inverso está garantida para todo número complexo não nulo. De fato,

$$z^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} & \frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} \text{ está definido para todo } x, y \in \mathbb{R} \text{ tal que } x^2 + y^2 \neq 0.$$

Note que,  $x^2 + y^2 = 0$  se, e somente se,  $x = y = 0$ , o que implica  $z = 0$ .

A propriedade da existência de elemento inverso da multiplicação permite definir, neste contexto, a operação de divisão de números complexos. A operação de divisão de  $z_1$  por  $z_2$  com  $z_2 \neq 0$  denotada por  $\frac{z_1}{z_2}$  é definida por

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \boxdot z_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} & -\left(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) \\ \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} & \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{pmatrix}.$$

### 3.4.3 Módulo e complexo conjugado

Dado o número complexo  $z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ . Define-se *parte real* de  $z$  o valor real  $x$  e *parte imaginária* de  $z$  o valor real  $y$ , denotando-se por  $\Re(z) = x$  e  $\Im(z) = y$ , respectivamente. A matriz  $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  será identificada como a unidade imaginária.

É imediato que:

$$i^2 = i \boxtimes i = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que é identificada com o número real  $-1$ .

Além disso, define-se o complexo conjugado de  $z$ , indicado por  $\bar{z}$ , como sendo a matriz dada por:

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

O módulo de um número complexo  $z$  será o número real não-negativo dado por

$$|z| = \sqrt{\det \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

É fácil verificar que  $|z|^2 = z \boxtimes \bar{z}$ .

### 3.5 Isomorfismo entre as representações

Nesta seção será demonstrado que para qualquer duas representações do conjunto dos números complexos é possível definir uma função bijetora que preserva as operações de adição e multiplicação entre as representações, ou seja,  $f : (X, +, \cdot) \rightarrow (Y, \oplus, \odot)$  bijetora satisfazendo

$$f(a + b) = f(a) \oplus f(b),$$

$$f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b).$$

Esta função é denominada de isomorfismo entre as representações.

Nas seções anteriores o conjunto dos números complexos foi representado de três maneiras:

**Representação algébrica:**  $\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$  com as operações de adição  $+$  e multiplicação  $\cdot$  definidas na seção 3.1;

**Representação por par ordenado:**  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$  com as operações de adição  $\oplus$  e multiplicação  $\odot$  definidas na seção 3.3;

**Representação matricial:**  $\mathbb{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$  com as operações de adição  $\boxplus$  e multiplicação  $\boxtimes$  definidas na seção 3.4.

Inicialmente considere

$$\begin{aligned} \varphi_1 : (\mathbb{C}, +, \cdot) &\longrightarrow (\mathbb{R}^2, \oplus, \odot) \\ x + iy &\longmapsto (x, y). \end{aligned}$$

Esta aplicação possui as seguintes propriedades:

**Propriedade 3.9.**  $\varphi_1$  é bijetora.

*Demonstração.* De fato,  $\varphi_1$  é injetora, pois, para  $z_1 = x_1 + iy_1$  e  $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$  tais que

$$\varphi_1(x_1 + iy_1) = \varphi_1(x_2 + iy_2) \text{ tem-se } (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2.$$

Logo,  $z_1 = x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 = z_2$ . Prova-se agora que  $\varphi_1$  é sobrejetora. Para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  basta considerar  $z = x + iy$ . Assim,  $\varphi_1(x + iy) = (x, y)$  por definição. Portanto,  $\varphi_1$  é bijetora.  $\square$

**Propriedade 3.10.**  $\varphi_1(z_1 + z_2) = \varphi_1(z_1) \oplus \varphi_1(z_2)$  para todo  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

*Demonstração.* De fato, sejam  $z_1 = x_1 + iy_1$  e  $z_2 = x_2 + iy_2$  dois números complexos tem-se

$$\begin{aligned} \varphi_1(z_1 + z_2) &= \varphi_1((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = \\ &= (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = \varphi_1(z_1) \oplus \varphi_1(z_2). \end{aligned}$$

$\square$

**Propriedade 3.11.**  $\varphi_1(z_1 z_2) = \varphi_1(z_1) \odot \varphi_1(z_2)$  para todo  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

*Demonstração.* De fato,

$$\begin{aligned} \varphi_1(z_1 z_2) &= \varphi_1((x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2) = \\ &= (x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = \varphi_1(z_1) \odot \varphi_1(z_2). \end{aligned}$$

$\square$

Conclui-se assim que a função  $\varphi_1$  é bijetora e preserva as operações de adição e multiplicação entre os corpos  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  e  $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ . Portanto, são isomorfos.

Da mesma maneira, prova-se que os corpos  $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$  e  $(\mathbb{M}, \boxplus, \boxdot)$  são isomorfos. Neste sentido, considere

$$\begin{aligned} \varphi_2 : (\mathbb{R}^2, \oplus, \odot) &\longrightarrow (\mathbb{M}, \boxplus, \boxdot) \\ (x, y) &\longmapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esta aplicação possui as seguintes propriedades:

**Propriedade 3.12.**  $\varphi_2$  é bijetora.

*Demonstração.*  $\varphi_2$  é injetora. De fato, para todo  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$  tem-se que

$$\varphi_2((x_1, y_1)) = \varphi_2((x_2, y_2)) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2.$$

Logo,  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ . Prova-se agora que  $\varphi_2$  é sobrejetora. Para todo elemento  $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$  em  $\mathbb{M}$  basta considerar o número complexo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  pois,  $\varphi_2((x, y)) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ . Conclui-se então que  $\varphi_2$  é bijetora.  $\square$

**Propriedade 3.13.**  $\varphi_2(z_1 \oplus z_2) = \varphi_2(z_1) \boxplus \varphi_2(z_2)$  para todo  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$ .

*Demonstração.* De fato,

$$\begin{aligned} \varphi_2(z_1 \oplus z_2) &= \varphi_2((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & -(y_1 + y_2) \\ y_1 + y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \boxplus \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \varphi_2(z_1) \boxplus \varphi_2(z_2). \end{aligned}$$

$\square$

**Propriedade 3.14.**  $\varphi_2(z_1 \odot z_2) = \varphi_2(z_1) \boxdot \varphi_2(z_2)$  para todo  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^2$ .

*Demonstração.* De fato,

$$\begin{aligned} \varphi_2(z_1 \odot z_2) &= \varphi_2((x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)) = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & -(x_1y_2 + y_1x_2) \\ x_1y_2 + y_1x_2 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \boxdot \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \varphi_2(z_1) \boxdot \varphi_2(z_2). \end{aligned}$$

$\square$

Desta maneira, a função  $\varphi_2$  é bijetora e preserva as operações de adição e multiplicação entre os corpos  $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$  e  $(\mathbb{M}, \boxplus, \boxdot)$ , concluindo assim que ambos são isomorfos.

Finalmente, para mostrar que os corpos  $(\mathbb{M}, \boxplus, \boxdot)$  e  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  são isomorfos, considere a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_3 : (\mathbb{M}, \boxplus, \boxdot) &\longrightarrow (\mathbb{C}, +, \cdot) \\ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} &\longmapsto x + iy. \end{aligned}$$

$\varphi_3$  satisfaz as seguintes propriedades:

**Propriedade 3.15.**  $\varphi_3$  é bijetora.

*Demonstração.* De fato, para todo  $z_1 = \begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}$  e  $z_2 = \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}$  tem-se

$$\varphi_3\left(\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix}\right) = \varphi_3\left(\begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}\right) \Leftrightarrow x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2.$$



Logo,  $\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}$ .  $\varphi_3$  é injetora. Prova-se agora que  $\varphi_3$  é sobrejetora. Seja  $x + iy$  um número complexo qualquer em  $\mathbb{C}$ . Desta forma, basta considerar em  $\mathbb{M}$  o número complexo  $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$  pois  $\varphi_3 \left( \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \right) = x + iy$ . Conclui-se então que  $\varphi_3$  é uma aplicação bijetora.  $\square$

**Propriedade 3.16.**  $\varphi_3(z_1 \boxplus z_2) = \varphi_3(z_1) + \varphi_3(z_2)$  para todo  $z_1, z_2 \in \mathbb{M}$ .

*Demonstração.* De fato,

$$\begin{aligned} \varphi_3(z_1 \boxplus z_2) &= \varphi_3 \left( \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & -(y_1 + y_2) \\ y_1 + y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix} \right) = \\ &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = \varphi_3(z_1) + \varphi_3(z_2). \end{aligned}$$

$\square$

**Propriedade 3.17.**  $\varphi_3(z_1 \boxtimes z_2) = \varphi_3(z_1)\varphi_3(z_2)$  para todo  $z_1, z_2 \in \mathbb{M}$ .

*Demonstração.* De fato,

$$\begin{aligned} \varphi_3(z_1 \boxtimes z_2) &= \varphi_3 \left( \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & -(x_1y_2 + y_1x_2) \\ x_1y_2 + y_1x_2 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix} \right) = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = \varphi_3(z_1)\varphi_3(z_2). \end{aligned}$$

$\square$

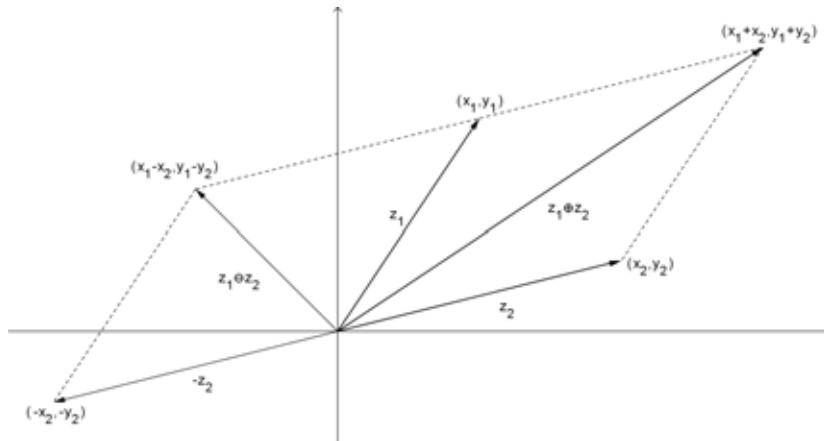
A função  $\varphi_3$  é bijetora e preserva as operações de adição e multiplicação entre os corpos  $(\mathbb{M}, \boxplus, \boxtimes)$  e  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  definindo, desta maneira, um isomorfismo entre estes conjuntos.

Os isomorfismos estabelecidos acima entre as representações algébrica, por par ordenado e matricial, permitem transitar entre os diferentes formalismos aproveitando-se das facilidades de entendimento inerentes em cada um deles. Enquanto a representação algébrica facilita o cálculo numérico, a representação por par ordenado propicia a visualização geométrica uma vez que ocorre no plano cartesiano. A representação matricial fornece o entendimento como transformações e movimentos no plano. Além disso, a partir dos isomorfismos utiliza-se apenas uma notação para as operações de adição e multiplicação estabelecidas nas representações do conjunto dos números complexos. Nos próximos capítulos, com o objetivo de estudar as funções complexas, estas diferentes representações serão utilizadas buscando um melhor entendimento das definições e de suas propriedades.

### 3.6 Interpretação geométrica das operações aritméticas de números complexos

Com o objetivo de interpretar as operações aritméticas do ponto de vista geométrico é natural fazer uso da representação dos números complexos por par ordenado. Assim, como visto na seção 3.3, dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$  serão representados na forma  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$ . Viu-se então que, por definição, a soma é dada por  $z_1 \oplus z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ . A partir do isomorfismo entre o conjunto de pares ordenados de  $\mathbb{R}^2$  e o espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$ , a adição dos números complexos é representada pela soma vetorial dos vetores  $z_1$  e  $z_2$  (os pares ordenados vistos como vetores), ou seja, é o vetor associado à diagonal do paralelogramo formado pelos vetores  $z_1$  e  $z_2$  como mostra a Figura (3.4).

Analogamente, a subtração  $z_1 \ominus z_2$  é o vetor associado à diagonal do paralelogramo formado pelos vetores  $z_1$  e  $-z_2$  (aqui simbolizando o oposto de  $z_2$ ) como mostra a Figura (3.4).



**Figura 3.4:** Adição e subtração entre números complexos

A multiplicação e divisão de dois números complexos serão analisadas por meio das suas formas polares, uma vez que propicia uma melhor visualização geométrica. Inicialmente considere  $z_1$  e  $z_2$  dois números complexos quaisquer dados nas suas respectivas formas polares  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$  e  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$ . A multiplicação entre  $z_1$  e  $z_2$ , vista agora na sua representação algébrica, é dada por

$$\begin{aligned}
 z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) = \\
 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) = \\
 &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2)] = \\
 &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)].
 \end{aligned}$$

Por outro lado, pode-se identificar o produto  $z_1 z_2$  com a sua forma polar, ou seja,  $z_1 z_2 = R(\cos \Theta + i \operatorname{sen} \Theta)$ . É imediato que,  $R = r_1 r_2$  e  $\Theta = \theta_1 + \theta_2$ . Neste caso, o

argumento principal do produto  $z_1 z_2$  pode não estar definido uma vez que a soma dos argumentos principais de  $z_1$  e  $z_2$  pode exceder o valor de  $2\pi$ . Verifica-se que o ângulo  $\Theta$  está relacionado com o argumento principal de  $z_1 z_2$  da seguinte maneira:

$$\Theta - \text{Arg}(z_1 z_2) = 2k\pi \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}.$$

Define-se para um número complexo  $z \neq 0$  o conjunto

$$\arg z = \{\text{Arg}(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\},$$

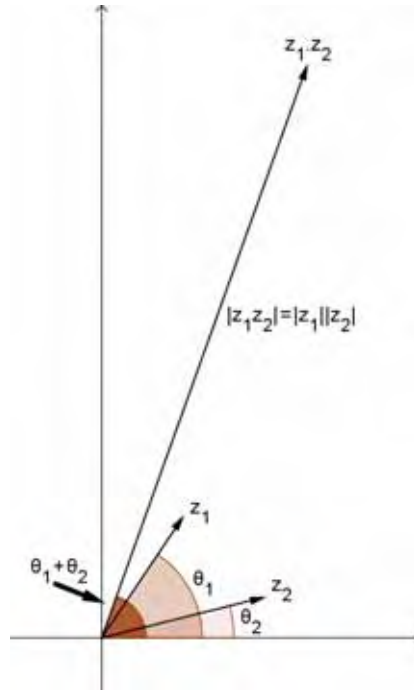
$\arg(z)$  é denominado de *argumento do número complexo*  $z$  e escreve-se

$$\text{Arg}(z) \equiv \arg(z) \bmod 2\pi.$$

Assim, tem-se que o produto de  $z_1$  e  $z_2$  na forma polar é dado por

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos((\theta_1 + \theta_2) \bmod 2\pi) + i \sin((\theta_1 + \theta_2) \bmod 2\pi)], \quad (3.7)$$

ou seja, em coordenadas polares,  $z_1 z_2 = (r_1 r_2, (\theta_1 + \theta_2) \bmod 2\pi)$ . Logo, o vetor associado ao número complexo  $z_1 z_2$  possui comprimento igual ao produto do comprimento dos vetores  $z_1$  e  $z_2$  e amplitude do ângulo igual a  $(\theta_1 + \theta_2) \bmod 2\pi$ . Portanto, multiplicar dois números complexos, equivale multiplicar seus módulos e somar seus ângulos (congruência módulo  $2\pi$ ), como mostra a Figura 3.5.



**Figura 3.5:** Multiplicação de números complexos

Generalizando tem-se que a multiplicação de  $n$  números complexos,  $z_1, z_2, \dots, z_n$  é dada por:

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n (\cos((\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) \bmod 2\pi) + i \sin((\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) \bmod 2\pi)).$$

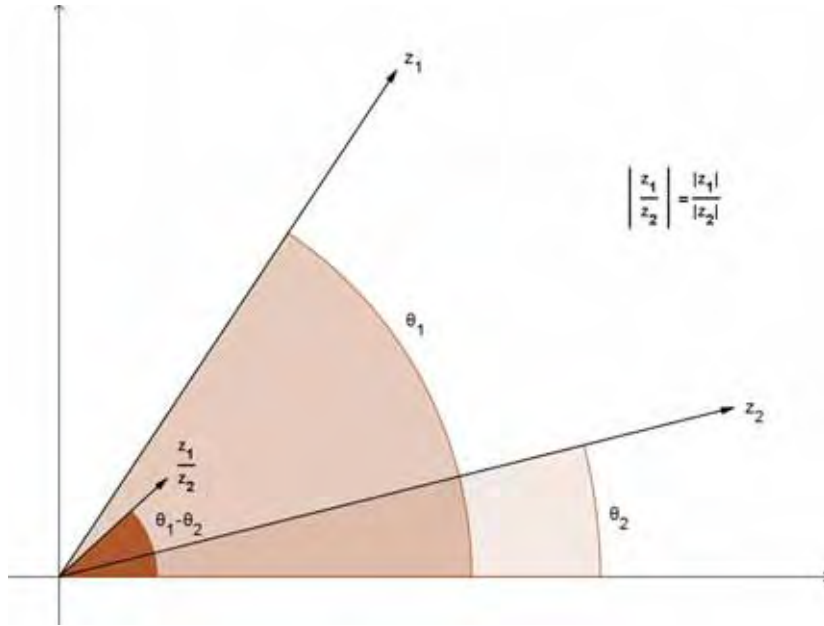
Analogamente, a divisão dos números complexos  $z_1$  e  $z_2$  com  $z_2 \neq 0$  tratados na sua forma polar é dada por:

$$\begin{aligned}
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)} = \\
 &= \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)}{r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)} = \\
 &= \frac{r_1(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)}{r_2(\cos^2 \theta_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2)} = \\
 &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i(\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2))).
 \end{aligned}$$

Assim, a divisão de  $z_1$  por  $z_2$  é definida na forma polar por

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos((\theta_1 - \theta_2) \bmod 2\pi) + i \operatorname{sen}((\theta_1 - \theta_2) \bmod 2\pi)), \quad (3.8)$$

isto é, o número complexo  $\frac{z_1}{z_2}$  tem módulo igual ao quociente dos módulos de  $z_1$  e  $z_2$  e a amplitude do ângulo igual a  $(\theta_1 - \theta_2) \bmod 2\pi$  na sua forma polar. Portanto, dividir um número complexo por outro número complexo, equivale a dividir o módulo do primeiro pelo módulo do segundo e subtrair o ângulo do primeiro pelo ângulo do segundo (congruência módulo  $2\pi$ ), como mostra a Figura 3.6.



**Figura 3.6:** Divisão de números complexos

## 4 Funções complexas e transformações no plano

### 4.1 Definições gerais

As funções complexas são funções com valores complexos e definidas num conjunto de números complexos. Segue então a definição 4.1.

**Definição 4.1.** *Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos de  $\mathbb{C}$ . Uma função complexa  $f$  definida em  $A$  com valores em  $B$  é uma lei (ou regra) que associa cada número complexo  $z$  de  $A$  um único número complexo  $w$  de  $B$  indicado por  $w = f(z)$ .*

Denomina-se  $A$  domínio e  $B$  contradomínio da função  $f$ . Além disso,  $z$  é chamado de variável complexa ou independente da função  $f$ , enquanto que  $w$  é denominado variável dependente. Usualmente representa-se a função  $f$  por  $f : A \subseteq \mathbb{C} \rightarrow B \subseteq \mathbb{C}$  com  $w = f(z) \in B$  para todo  $z \in A$ . O conjunto  $\text{Im}(z) = \{f(z), \text{ para todo } z \in A\}$  é chamado conjunto imagem da função complexa  $f$ .

Sabe-se que para a função de uma variável real,  $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  define-se como gráfico de  $f$  o conjunto de todos os pares ordenados  $(x, f(x))$ , no qual  $x$  pertence ao domínio  $D_f$  de  $f$ , isto é,

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) \text{ para todo } x \in D_f\}.$$

Não é possível visualizar o gráfico de uma função complexa  $f$ , pois trata-se de uma superfície bidimensional representada em um espaço ambiente quadridimensional. Isto é devido ao fato de que as variáveis, independente e dependente, são complexas e portanto representadas, cada uma delas, em um ambiente bidimensional denominado plano- $z$  e plano- $w$ , respectivamente. Desta maneira, para cada ponto  $z = (x, y)$  do plano- $z$  pertencente ao domínio da função  $f$ , está associado um único ponto  $w = (u, v)$  do plano- $w$  onde  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Denomina-se *transformação de pontos do plano- $z$  em pontos do plano- $w$*  a relação estabelecida pela função  $f$  entre os respectivos valores do domínio e da imagem da função  $f$ . O estudo do comportamento da função complexa  $f$  será feito a partir de uma região (ou lugares geométricos) definidos no domínio de  $f$  e de como estes objetos são transformados pela função  $f$  em novas regiões (ou lugares geométricos) representados no plano- $w$ .

## 4.2 Função afim

**Definição 4.2.** Denomina-se função afim de uma variável complexa a toda função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(z) = mz + n$  com  $m, n$  constantes complexas e  $m \neq 0$ .

Considere os seguintes casos particulares para valores de  $m$  e  $n$ :

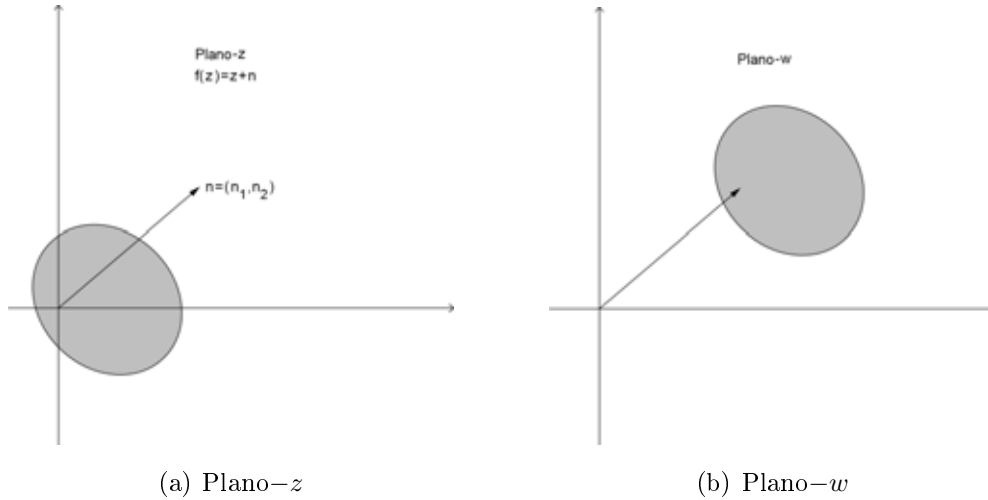
**$m = 1$  e  $n \neq 0$ :** Sejam  $z = x + iy$  e  $n = n_1 + in_2$  com  $n_1, n_2$  constantes não nulas. A função  $f(z) = z + n$  tem como imagem o valor:

$$w = f(x + iy) = (x + n_1) + i(y + n_2),$$

isto é, cada ponto  $(x, y)$  do plano- $z$  é transformado no ponto  $(x + n_1, y + n_2)$  do plano- $w$ . Desta maneira, a transformação

$$w = z + n$$

será a translação de cada ponto do plano- $z$  pelo vetor correspondente ao número complexo  $n$  no plano- $w$ . Conclui-se então que, dada qualquer região do plano- $z$  esta corresponderá a uma região do plano- $w$ , transladada do vetor  $n$  e sua imagem terá mesma forma, tamanho e não rotacionada. Ver Figura 4.1.



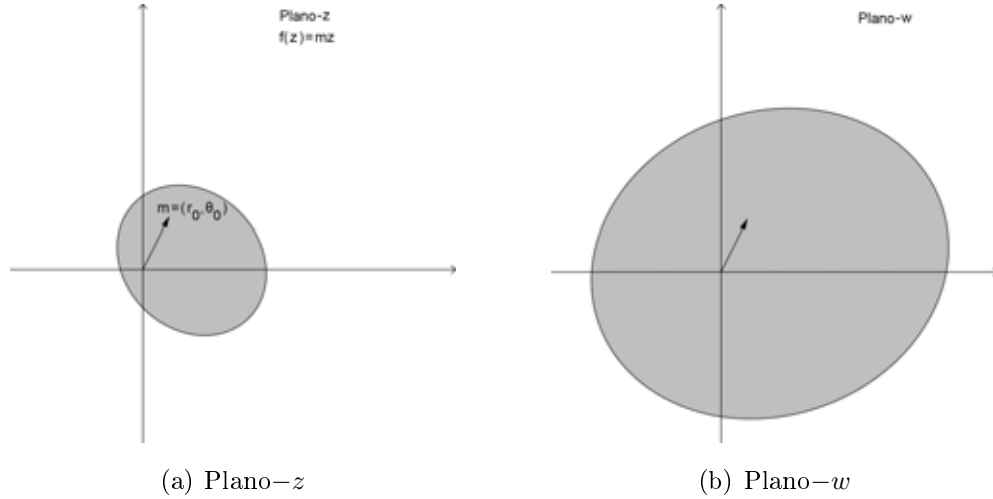
**Figura 4.1:** Função afim  $f(z) = z + n$

**$n = 0$  e  $|m| > 1$ :** Sejam  $z = r(\cos \theta + i \sen \theta)$  variável complexa e  $m = r_0(\cos \theta_0 + i \sen \theta_0)$  constante complexa com  $r_0 > 1$ . A função  $f(z) = mz$  tem imagem dada pela multiplicação dos valores complexos  $z$  e  $m$ . Assim, como visto anteriormente, a imagem da função será dada por:

$$w = rr_0(\cos(\theta + \theta_0 \bmod 2\pi) + i \sen(\theta + \theta_0 \bmod 2\pi)),$$

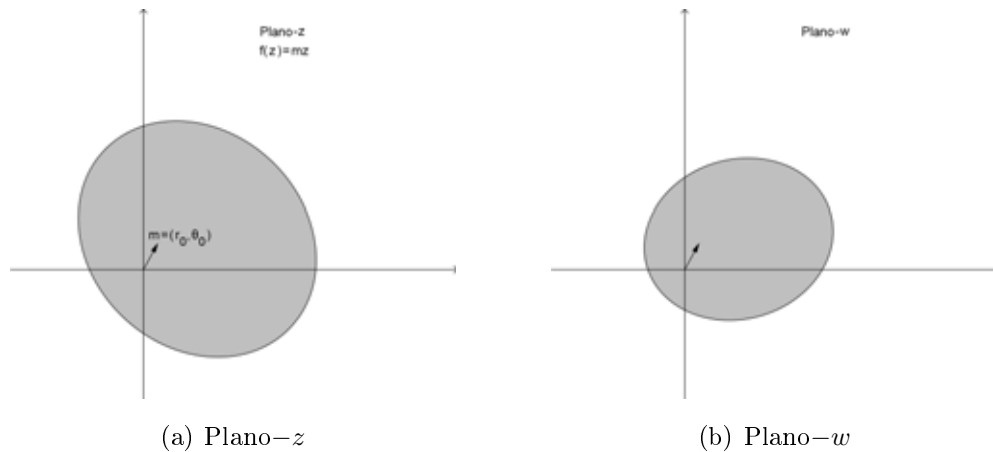
isto é, cada ponto  $(r, \theta)$  do plano- $z$  é levado no ponto  $(rr_0, \theta + \theta_0 \bmod 2\pi)$  do plano- $w$ . Desta maneira, um vetor qualquer do plano- $z$  irá ter seu módulo

multiplicado por  $r_0 > 1$ . Logo, o vetor sofrerá uma dilatação. Por outro lado, o seu argumento será acrescido de um ângulo  $\theta_0$ , ou seja, o vetor sofrerá uma rotação no sentido anti-horário. Conclui-se assim que, a transformação  $w = mz$  para  $|m| > 1$  para uma região complexa qualquer no plano- $z$  irá rotacioná-la em torno da origem de um ângulo  $\text{Arg}(m)$  no sentido anti-horário e dilatá-la de um fator  $|m|$ . Ver Figura 4.2.



**Figura 4.2:** Função linear  $f(z) = mz$  com  $|m| > 1$

**$n = 0$  e  $0 < |m| < 1$ :** Este caso é análogo ao anterior. Seja  $f(z) = mz$  com  $m = r_0(\cos \theta_0 + i \sen \theta_0)$  e  $0 < r_0 < 1$ . Assim, uma região complexa no plano- $z$  irá sofrer uma rotação em torno da origem de um ângulo  $\text{Arg}(m) = \theta_0$  no sentido anti-horário e, ao contrário do caso anterior, irá sofrer uma contração de um fator  $|m|$  uma vez que  $0 < |m| < 1$ . Ver Figura 4.3



**Figura 4.3:** Função linear  $f(z) = mz$  com  $0 < |m| < 1$

Resumindo, a transformação pela função afim  $w = mz + n$  consiste na rotação pelo

ângulo  $\text{Arg}(m)$  e expansão (ou contração) pelo fator  $|m|$ , seguida da translação pelo vetor correspondente ao número complexo  $n$ . Observe ainda que os movimentos rígidos no plano euclidiano (isometrias) podem ser descritos, na formulação complexa, pelas funções complexas do tipo  $f(z) = mz + n$  com  $|m| = 1$ , ou seja,

$$f(z) = \begin{pmatrix} \cos(\text{Arg}(m)) & -\sin(\text{Arg}(m)) \\ \sin(\text{Arg}(m)) & \cos(\text{Arg}(m)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_1 & -n_2 \\ n_2 & n_1 \end{pmatrix}$$

na sua representação matricial.

### 4.3 Função quadrática

**Definição 4.3.** *Seja  $z = x + iy$  uma variável complexa. Denomina-se função quadrática toda função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(z) = az^2 + bz + c$  com  $a, b$  e  $c$  constantes complexas e  $a \neq 0$ .*

Considere os seguintes casos particulares para valores de  $a, b$  e  $c$ :

**Caso 1:  $a = 1$  e  $b = c = 0$ .** Sejam  $z = x + iy$  e  $w = u + iv$  pontos nos respectivos planos complexos. A função quadrática  $w = f(z) = z^2$  é definida, em coordenadas cartesianas, pelas relações:  $u = x^2 - y^2$  e  $v = 2xy$ . Assim, verifica-se que esta função transforma as retas  $x = x_0$  e  $y = y_0$ , onde  $x_0$  e  $y_0$  são constantes não ambas nulas, no plano- $z$  (retas paralelas aos eixos coordenados  $Oy$  e  $Ox$  respectivamente) em parábolas no plano- $w$ . De fato, considere os pontos  $(x, y)$  sob a reta  $x = x_0$ . Então

$$u = x_0^2 - y^2 \quad \text{e} \quad v = 2x_0y.$$

Substituindo  $y = \frac{v}{2x_0}$  na expressão de  $u$  obtém-se

$$u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2}. \quad (4.1)$$

A equação (4.1) representa o lugar geométrico dos pontos do plano- $w$  que estão sobre uma parábola de foco  $F(0, 0)$  e reta diretriz  $u = 2x_0^2$ . Ao variar o valor de  $x_0$  é obtida uma família de parábolas todas de mesmo foco. Observe que o foco independe da escolha do valor de  $x_0$  e que todas as retas diretrizes estão localizadas no semiplano  $u > 0$ .

Agora, ao invés de  $x$ , considere  $y = y_0 \neq 0$  constante, isto é, o lugar geométrico dos pontos pertencentes a reta  $y = y_0 \neq 0$ . Assim,  $u = x^2 - y_0^2$  e  $v = 2xy_0$ . Substituindo  $x = \frac{v}{2y_0}$  na expressão de  $u$  tem-se

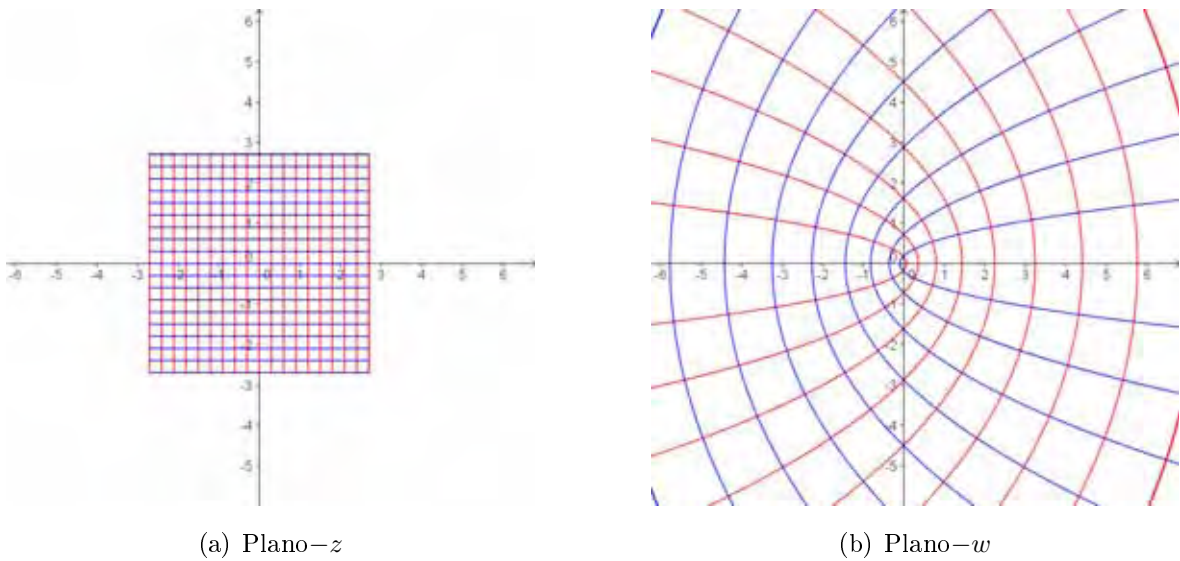
$$u = \frac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2. \quad (4.2)$$



Novamente, os pontos  $(u, v)$  estão sobre uma parábola no plano- $w$ . Neste caso, todas as parábolas descritas pela equação (4.2) possuem foco dado por  $F(0, 0)$  e retas diretrizes  $u = -2y_0^2$ , todas localizadas no semiplano  $u < 0$ .

Para o caso em que  $x = 0$  e  $y \neq 0$  qualquer tem-se  $u = -y^2$  e  $v = 0$ , ou seja, obtém-se o semieixo  $Ou$  negativo do plano- $w$ . Da mesma forma, quando  $y = 0$  e  $x \neq 0$  qualquer,  $u = x^2$  e  $v = 0$ , tem-se o semieixo  $Ou$  positivo. Além disso, se  $x = y = 0$  então  $u = v = 0$ .

Finalmente, se  $x = y \neq 0$  segue que  $u = 0$  e  $v = 2xy > 0$ . Desta maneira, obtém-se o semieixo  $Ov$  positivo. Analogamente, se  $x = -y \neq 0$  segue que  $u = 0$  e  $v = 2xy < 0$ , resultando no semieixo  $Ov$  negativo. Isto conclui todas as possibilidades para pontos considerados no plano- $z$ . O resumo da análise feita encontra-se na Figura 4.4.



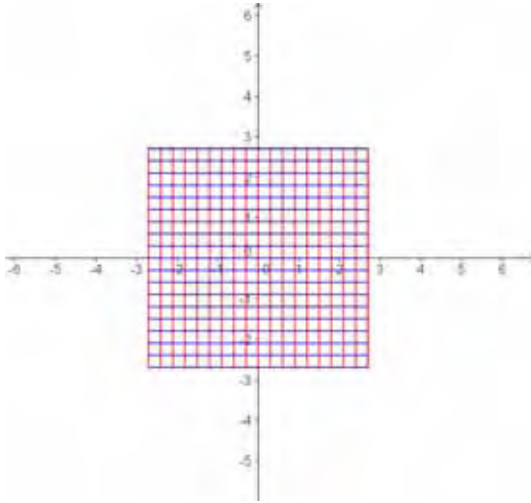
**Figura 4.4:** Função  $f(z) = z^2$

**Observação 4.1.** A transformação  $z^2$  pode ser interpretada como o produto de  $z$  por  $z$ . Assim, no caso da representação por coordenadas polares, se  $z = (r, \theta)$  o vetor associado ao número complexo  $z^2$  possui comprimento igual a  $r^2$  e amplitude do ângulo igual a  $2\theta \bmod 2\pi$ . Assim, pontos do plano- $z$  são levados em pontos do plano- $w$  cujas distâncias em relação à origem são alteradas segundo a função  $r^2$  e seus ângulos em relação à semirreta  $Ox$  duplicados.

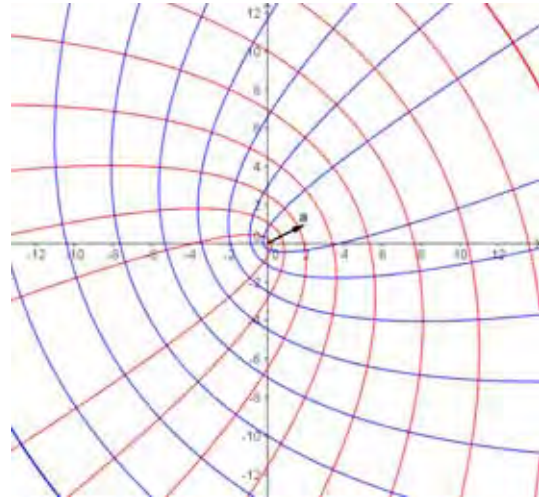
Os números complexos  $z$  de mesmo módulo  $r_0$ , ou seja, números complexos da forma  $z = (r_0, \theta)$  com  $0 \leq \theta < 2\pi$  estão sobre a circunferência de raio  $r_0$  e centro  $(0, 0)$ . Estes pontos são transformados pela função  $z^2$  em pontos da circunferência de raio  $r_0^2$  e centro  $(0, 0)$  no plano- $w$ . Mais ainda, a medida que o ponto no plano- $z$  se move sobre a circunferência com velocidade angular  $\theta$ , no sentido horário ou anti-horário, sua imagem no plano- $w$  move-se no mesmo sentido mas com o dobro da velocidade angular. O ponto  $z$  dá uma volta na circunferência de raio  $r_0$  e centro  $(0, 0)$

enquanto sua imagem dá duas voltas na circunferência de raio  $r_0^2$  e centro  $(0,0)$ .

**Caso 2:  $a \neq 1$ ,  $b = c = 0$ .** A função a ser considerada é da forma  $w = f(z) = az^2$ . Esta função pode ser vista como a composição das funções  $g(z) = z^2$  e  $h(z) = az$ . De fato,  $f(z) = h(g(z)) = h \circ g(z)$ . Desta maneira, a transformação  $az^2$  leva uma malha retangular (coordenadas cartesianas) em um conjunto de parábolas (transformação  $z^2$ ) que sofrerão uma rotação e contração/dilatação (transformação  $az$ ). Ver Figura 4.5.



(a) Plano- $z$



(b) Plano- $w$

**Figura 4.5:** Função  $f(z) = az^2$  com  $|a| > 1$

**Caso 3:  $a = 1$ ,  $b = 0$  e  $c \neq 0$ .** Neste caso, a função  $w = f(z) = z^2 + c$  será a composição das funções  $g(z) = z^2$  e  $h(z) = z + c$ . De fato,  $f(z) = h(g(z)) = h \circ g(z)$ . A transformação  $z^2 + c$  levará uma malha retangular em um conjunto de parábolas (transformação  $z^2$ ) e então transladadas pelo vetor correspondente ao número complexo  $c$  (transformação  $z + c$ ).

**Caso 4:  $a \neq 1$ ,  $b = 0$  e  $c \neq 0$ .** A função a ser considerada é definida por  $f(z) = az^2 + c$ . Esta função é a composição das funções  $g(z) = z^2$  e  $h(z) = az + c$ . De fato,  $f(z) = h(g(z)) = h \circ g(z)$ . Logo, a transformação  $az^2 + c$  levará uma malha retangular em um conjunto de parábolas (transformação  $z^2$ ) que serão rotacionadas por um ângulo  $\text{Arg}(a)$ , dilatadas/contraídas pelo fator  $|a|$  e transladadas pelo vetor correspondente ao número complexo  $c$ .

**Caso geral:**  $f(z) = az^2 + bz + c$  com  $a \neq 0$ . Verifica-se que sempre pode-se completar quadrados, ou seja,

$$\begin{aligned} f(z) &= az^2 + bz + c = \\ &= a \left( z^2 + \frac{b}{a}z \right) + c = \\ &= a \left( z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} \right) + \left( c - \frac{b^2}{4a} \right) = \\ &= a \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left( c - \frac{b^2}{4a} \right). \end{aligned}$$

Conclui-se assim que a função  $f(z) = az^2 + bz + c$  com  $a \neq 0$  será a composição das funções  $h(z) = az^2 + C$  (Caso 4) e  $g(z) = z + D$  (função afim) onde  $C = c - b^2/(4a)$  e  $D = b/(2a)$ . De fato,

$$h \circ g(z) = h(g(z)) = h \left( z + \frac{b}{2a} \right) = a \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left( c - \frac{b^2}{4a} \right) = f(z).$$

Desta forma, a transformação pela função quadrática  $w = az^2 + bz + c$  com  $a \neq 0$  consiste na composição das seguintes transformações no plano complexo. Inicialmente translada-se a origem da malha retangular segundo o vetor correspondente ao número complexo  $b/2a$  (transformação afim  $z + b/(2a)$ ). Em seguida transforma-se esta malha em um conjunto de parábolas de mesmo foco correspondente ao ponto  $b/2a$  que serão rotacionadas pelo  $\text{Arg}(a)$  e contraídas/dilatadas pelo fator  $|a|$  sendo então transladadas segundo o vetor correspondente ao número complexo  $c - b^2/(4a)$  (transformação  $az^2 + (c - b^2/(4a))$ ).

## 4.4 Função raiz quadrada

Para o estudo da função raiz quadrada se faz necessário definir o conceito de função inversa de uma função complexa.

**Definição 4.4.** *Seja  $f : \text{Dom}(f) \subset \mathbb{C} \rightarrow \text{Im}(f) \subset \mathbb{C}$ . A função  $f^{-1} : \text{Im}(f) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  que satisfaz  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{Id}$ , sendo  $\text{Id}$  a função identidade, é denominada função inversa de  $f$ , quando existir.*

Se a função  $f$  for bijetora, isto é, injetora e sobrejetora, então a função  $f$  irá admitir função inversa. Em termos de transformações no plano complexo, a função inversa será a transformação inversa para uma dada transformação.

Seja a função quadrática  $f(z) = z^2$ . Deseja-se determinar a função  $f^{-1}$  tal que  $f \circ f^{-1}(z) = f^{-1} \circ f(z) = z$ . Isto equivale a escrever

$$f \circ f^{-1}(z) = f(f^{-1}(z)) = (f^{-1}(z))^2 = z.$$

Logo,  $f^{-1}$  é uma função tal que o quadrado de  $f^{-1}(z)$  é igual a  $z$ .

Primeiramente observa-se que se  $w = f^{-1}(z)$  tal que  $w^2 = z$  então  $-w$  também satisfaz a condição  $(-w)^2 = z$ . Tendo isso em mente, seja  $w = f^{-1}(z) = u + iv$ . Se  $z = x + iy$  então

$$(u + iv)^2 = x + iy.$$

Igualando as partes real e imaginária tem-se

$$\begin{aligned} u^2 - v^2 &= x \\ 2uv &= y. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Supondo que  $y \neq 0$  segue de (4.3) que  $u \neq 0$ . Assim,

$$v = \frac{y}{2u}. \tag{4.4}$$

Substituindo na primeira igualdade de (4.3),

$$u^2 - \frac{y^2}{4u^2} = x.$$

Logo,

$$4u^4 - 4xu^2 - y^2 = 0$$

é uma equação do segundo grau em  $u^2$ . Determinando suas raízes obtém-se

$$u^2 = \frac{4x \pm \sqrt{16x^2 + 16y^2}}{8} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{2}.$$

Considerando apenas a solução positiva segue que

$$u^2 = \frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}.$$

e

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Retornando em (4.4)

$$\begin{aligned} v &= \frac{y}{2\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + y^2}}{2}}} = \\ &= \frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}}{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}} = \\ &= \frac{y}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}}{\sqrt{(x^2 + y^2) - x^2}} = \\ &= \frac{y}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}}{|y|}. \end{aligned}$$

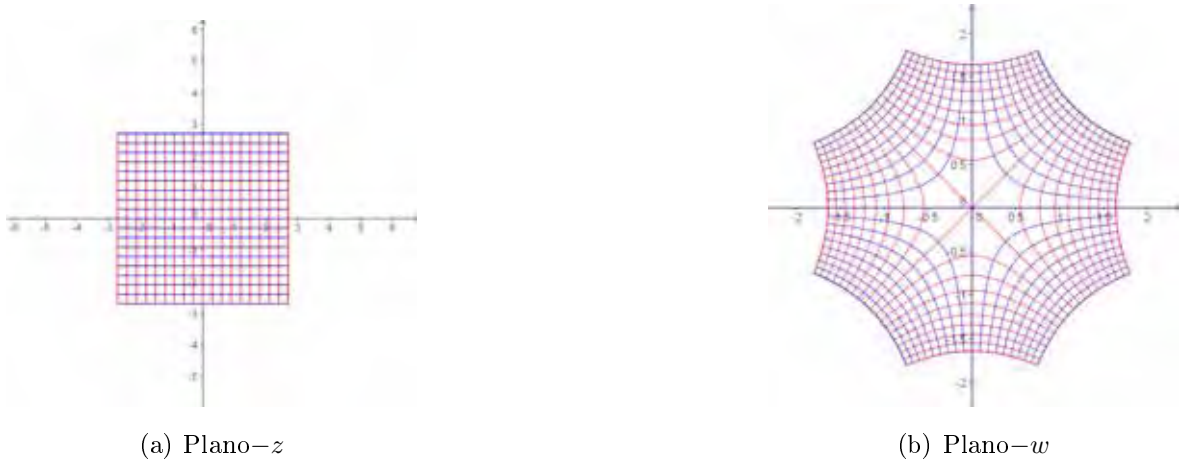
Escreve-se

$$v = \frac{\text{sinal}(y)}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x},$$

onde

$$\text{sinal}(y) = \frac{y}{|y|} = \begin{cases} +1 & \text{se } y > 0 \\ -1 & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

Desta maneira, a função raiz quadrada terá associado a cada número complexo  $z = (x, y)$  os valores  $w = (u, v)$  e  $-w = (-u, -v)$ . A transformação  $\sqrt{z}$  é esboçada na Figura 4.6.



**Figura 4.6:** Função  $f(z) = \sqrt{z}$

Como viu-se anteriormente para cada valor complexo  $z$  têm-se dois valores da raiz quadrada de  $z$ . Diz-se então, que a função raiz quadrada é uma função multivalente. Define-se funções multivalentes como funções complexas que, para um valor da variável complexa  $z$ , associa-se dois ou mais números  $w = f(z)$  distintos entre si. Como Ávila [5] observa, o termo função multivalente é, a rigor, impróprio. No entanto, o uso do termo função multivalente, para o caso das funções complexas, não irá acarretar dúvidas sendo apropriado neste caso. Estas funções podem ser consideradas como formadas por **ramos**, cada um nos quais a função se torna unívoca para os valores de  $z$  considerados no ramo. Para entender melhor este conceito, considere a representação polar da função raiz quadrada. Seja  $z = x + iy$  sabe-se que

$$x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta,$$

sendo  $r > 0$  e  $\theta \in [0, 2\pi[$ . Desta maneira,

$$u = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{r \cos \theta + \sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{r \cos \theta + r}}{\sqrt{2}}.$$

Assim,

$$u = \sqrt{r} \sqrt{\frac{\cos \theta + 1}{2}}. \tag{4.5}$$

Considerando as relações trigonométricas

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos \theta \quad \text{e} \quad \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1$$

decorre que

$$\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\cos \theta + 1}{2}; \quad (4.6)$$

$$\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos \theta}{2}. \quad (4.7)$$

Substituindo (4.6) na expressão (4.5) obtém-se

$$u = \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}.$$

De maneira análoga, tem-se:

$$\begin{aligned} v &= \frac{\text{sinal}(y) \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}}{\sqrt{2}} = \frac{\text{sinal}(r \sin \theta) \sqrt{\sqrt{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} - r \cos \theta}}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{\text{sinal}(r \sin \theta) \sqrt{r - r \cos \theta}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$v = \text{sinal}(r \sin \theta) \sqrt{r} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}. \quad (4.8)$$

Substituindo a relação (4.7) na expressão (4.8) obtém-se

$$v = \text{sinal}(r \sin \theta) \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2},$$

sendo

$$\text{sinal}(r \sin \theta) = \frac{r \sin \theta}{|r \sin \theta|} = \frac{\sin \theta}{|\sin \theta|} = \text{sinal}(\sin \theta) = \begin{cases} +1 & \text{se } \theta \in ]0, \pi[, \\ -1 & \text{se } \theta \in ]\pi, 2\pi[. \end{cases}$$

Logo,  $w = \sqrt{z}$  tem como soluções  $w = (u, v)$  e  $-w = (-u, -v)$  que correspondem a

$$\begin{cases} u = \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \\ v = \text{sinal}(\sin \theta) \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \end{cases}$$

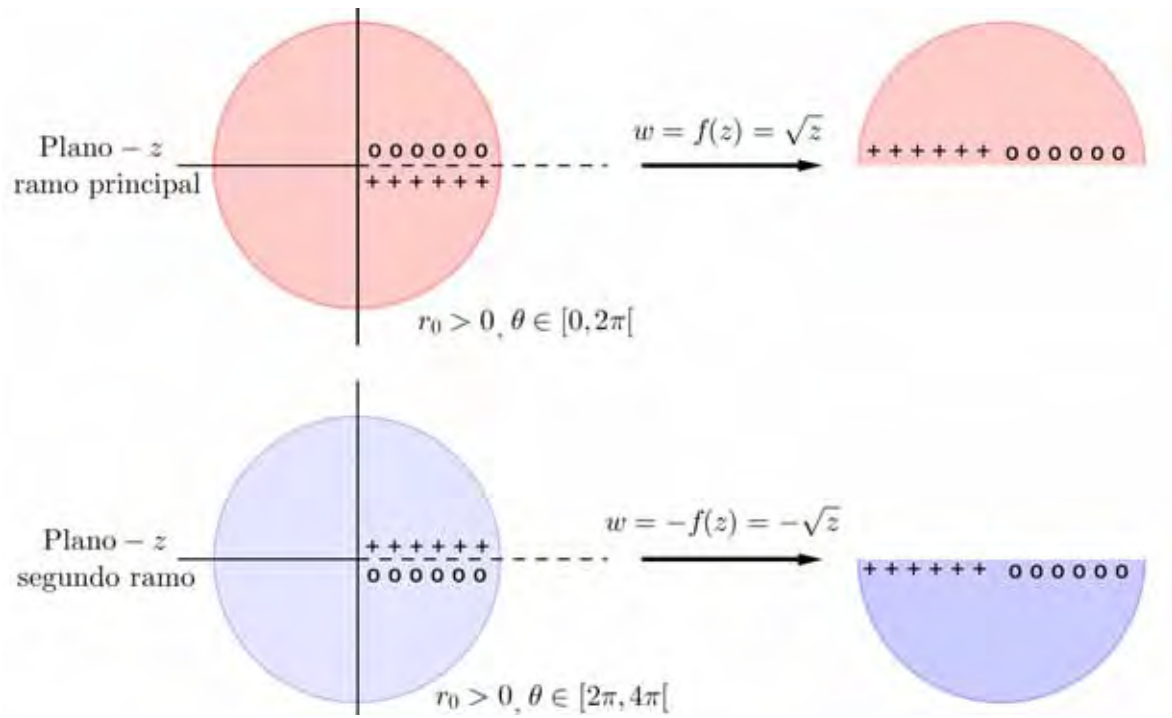
e

$$\begin{cases} u = -\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{r} \cos \left( \frac{\theta + 2\pi}{2} \right) \\ v = -\text{sinal}(\sin \theta) \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} = \text{sinal}(\sin \theta) \sqrt{r} \sin \left( \frac{\theta + 2\pi}{2} \right) \end{cases}$$

respectivamente.

Assim, no caso da representação por coordenadas polares, a transformação  $\sqrt{z}$  leva os números complexos  $z$  de mesmo módulo  $r_0$ , ou seja, números complexos da forma

$z = (r_0, \theta)$  com  $0 \leq \theta < 2\pi$  (ramo principal) que estão sobre a circunferência de raio  $r_0$  e centro  $(0, 0)$  em pontos da semicircunferência de raio  $\sqrt{r_0}$  e centro  $(0, 0)$  no plano- $w$ . A medida que o ponto no plano- $z$  se move sobre a circunferência com velocidade angular  $\theta$ , no sentido horário, sua imagem no plano- $w$  move-se no mesmo sentido e com a metade da velocidade angular partindo do ponto  $(r_0, 0)$  chegando ao ponto  $(-r_0, 0)$ . Desta forma, para completar uma volta fechada, isto é, para atingir novamente o ponto  $(r_0, 0)$  é necessário fazer  $\theta$  variar de  $2\pi$  a  $4\pi$  (segundo ramo). No domínio, isto corresponderá a mais uma volta na circunferência de raio  $r_0$  e centro  $(0, 0)$ . Percorre-se assim duas vezes o plano- $z$ . Este processo pode ser concebido imaginando o plano complexo constituído por diversas *folhas* sobrepostas (ramos). Na primeira volta ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ) percorre-se uma circunferência numa folha (ramo principal). Na volta seguinte ( $2\pi \leq \theta < 4\pi$ ), uma nova circunferência é percorrida na folha seguinte. Ao aproximar do final ( $\theta$  próximo de  $4\pi$ ) a folha superior *se liga* a folha inferior (ramo principal). Estas folhas definem matematicamente a chamada superfície de Riemann<sup>1</sup> para a função  $\sqrt{z}$ . Ver Figura 4.7.



**Figura 4.7:** Ramos da função  $f(z) = \sqrt{z}$

## 4.5 Função exponencial

A função exponencial na variável real motivará a definição da função exponencial para o caso complexo pois deseja-se recuperar o caso real quando da formulação complexa. Sabe-se do Cálculo Diferencial que a função  $e^x$  é definida em termos da série de

<sup>1</sup>George Friedrich Bernhard Riemann, 1826–1866.

potências ou série de McLaurin por:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Note que quando  $x = 1$  determina-se o número irracional  $e = 2.71828182845905\dots$  chamado de *constante de Euler*.

Por um momento suponha que esta série seja ainda válida quando da substituição do número real  $x$  pelo número complexo  $iy$ . Observe que a princípio isto não é correto pois admite-se que a expansão em série da função exponencial é estendida para valores complexos, o que não foi provado ser válido. Seguindo neste raciocínio, a série para  $e^{iy}$  será escrita como

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 + (iy) + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \frac{(iy)^7}{7!} + \dots \quad (4.9)$$

Na seção ?? demonstrou-se na observação ?? que

$$\begin{aligned} i^{4m} &= 1; \\ i^{4m+1} &= i; \\ i^{4m+2} &= -1; \\ i^{4m+3} &= -i, \end{aligned}$$

e substituindo estas relações na equação (4.9) obtém-se

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(-y^2)}{2!} + \frac{(-iy^3)}{3!} + \frac{(+y^4)}{4!} + \frac{(+iy^5)}{5!} + \frac{(-y^6)}{6!} + \frac{(-iy^7)}{7!} + \dots$$

Admitindo que seja possível agrupar os infinitos termos reais e imaginários separadamente segue que

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} \dots\right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} \dots\right). \quad (4.10)$$

Por outro lado, as funções reais  $\cos y$  e  $\sin y$  são dadas, respectivamente, em termos das séries de McLaurin por

$$\begin{aligned} \cos y &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots \\ \sin y &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Portanto, a equação (4.10) pode ser reescrita como

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Observa-se que a maneira correta e formal de definir a função exponencial para valores complexos é feita demonstrando-se que a expressão  $e^z$ , obtida anteriormente, é a única



extensão possível derivável em todos os pontos, no sentido da derivação complexa, que preserva a soma em produto, isto é,  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ . Este tratamento não será abordado neste trabalho.

Com base nessas considerações, a definição da exponencial para uma variável complexa  $z = x + iy$  será feita de modo a preservar a propriedade aditiva da adição da exponencial real, isto é,  $e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$ . Neste sentido, tem-se que  $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ . Isto leva a seguinte definição.

**Definição 4.5.** *Seja  $z = x + iy$  uma variável complexa. Chama-se função exponencial complexa  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por*

$$f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

Valem as seguintes propriedades para a função exponencial.

**Propriedade 4.1.** Para todo número complexo  $z = x + iy$  tem-se que  $|e^z| = e^x$ .

*Demonstração.* De fato,

$$\begin{aligned} |e^z| &= |e^{x+iy}| = |e^x \cos y + ie^x \sin y| = \\ &= \sqrt{(e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2} = \\ &= \sqrt{(e^x)^2 (\cos^2 y + \sin^2 y)} = \\ &= e^x. \end{aligned}$$

Além disso, como  $e^x > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  resulta que  $|e^z| > 0$ , para todo  $z \in \mathbb{C}$ . Desta forma,  $e^z \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . □

**Propriedade 4.2.**  $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ .

*Demonstração.* Sejam  $z_1 = x_1 + iy_1$  e  $z_2 = x_2 + iy_2$  números complexos quaisquer então

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= [e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1)] \cdot [e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2)] = \\ &= e^{x_1}e^{x_2}(\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2) = \\ &= e^{x_1}e^{x_2}[(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)] = \\ &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)) = \\ &= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

□

**Propriedade 4.3.**  $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$ .

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= \frac{e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)}{e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2)} = \\
 &= \frac{e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)(\cos y_2 - i \operatorname{sen} y_2)}{e^{x_2}} = \\
 &= \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} [(\cos y_1 \cos y_2 + \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2) + i(\operatorname{sen} y_1 \cos y_2 - \cos y_1 \operatorname{sen} y_2)] = \\
 &= e^{x_1-x_2} (\cos(y_1 - y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 - y_2)) = \\
 &= e^{(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)} = e^{(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)} = e^{z_1-z_2}.
 \end{aligned}$$

□

**Propriedade 4.4.**  $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$ .

*Demonstração.* De fato,

$$e^{-z} = e^{0-z} = \frac{e^0}{e^z} = \frac{1}{e^z}.$$

□

Considere a representação polar do plano complexo. Seja um número complexo  $z$  dado por  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ . Segue que:

**Propriedade 4.5.**  $z = re^{i\theta}$ .

*Demonstração.* De fato, basta substituir  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ .

□

A seguir a função exponencial será tratada na sua representação polar. Neste sentido, considere  $e^z = (R, \Theta)$ . Viu-se anteriormente que

$$\begin{aligned}
 R &= |e^z| = e^x, \\
 \operatorname{tg} \Theta &= \operatorname{tg} y \Leftrightarrow \Theta \equiv y \pmod{2\pi}.
 \end{aligned}$$

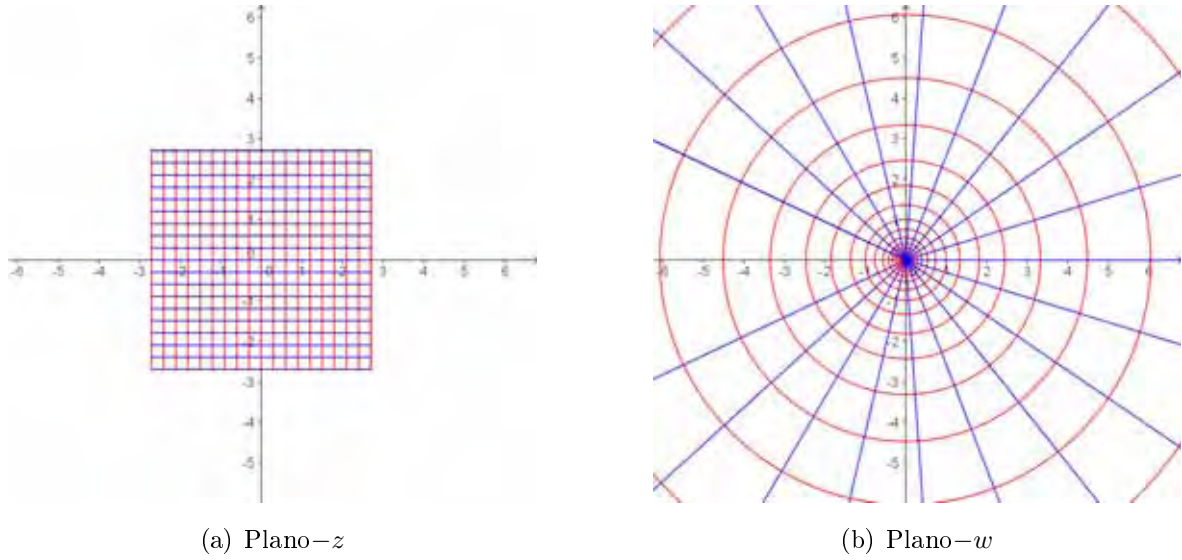
Sejam  $z = x + iy$  e  $w = u + iv$  pontos nos respectivos planos complexos. A função exponencial  $w = f(z) = e^z$  é então definida, em coordenadas cartesianas, pelas relações:  $u = e^x \cos y$  e  $v = e^x \operatorname{sen} y$ . Geometricamente, para pontos sobre as retas  $x = x_0$  constante tem-se

$$u^2 + v^2 = (e^{x_0})^2. \quad (4.11)$$

A equação (4.11) representa o lugar geométrico dos pontos do plano  $w$  que estão sobre uma circunferência de centro na origem e raio  $e^{x_0}$ . A medida que os valores de  $x$  são fixados obtém-se circunferências concêntricas de centro na origem do plano  $w$ . Observe que nenhum dos pontos do plano  $z$  é levado na origem do plano  $w$ . Isto já foi observado quando verificou-se que a função exponencial é não nula.

Considere agora os pontos  $(x, y)$  sobre a reta  $y = y_0$  constante não nula e  $x$  qualquer. Desta maneira,  $\Theta = y_0 \pmod{2\pi}$  permanecerá constante e  $R = e^x$  irá variar entre valores maiores que zero até infinito determinando desta forma uma semirreta de origem  $(0, 0)$

e ângulo  $\Theta$  radianos com o semieixo  $Ou$  positivo do plano- $w$ . Quando  $y = 0$  recupera-se a função exponencial para o caso real e terá como imagem o próprio semieixo  $Ou$  positivo do plano- $w$ . Assim, a função exponencial complexa transforma uma malha retangular em circunferências concêntricas e semirretas radiais no plano- $w$ . Ver Figura 4.8



**Figura 4.8:** Função  $f(z) = e^z$

Uma das diferenças fundamentais entre as funções exponencial complexa e exponencial real é que a complexa,  $e^z$ , é periódica em  $\mathbb{C}$ , isto é,

**Definição 4.6.** Uma função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é dita periódica se existe uma constante  $z_0 \in \mathbb{C}$  não nula tal que  $f(z + z_0) = f(z)$  para todo  $z$  complexo. A constante  $z_0$  é chamada de período da função  $f$ .

**Teorema 4.1.** A função exponencial  $e^z$  é periódica em  $\mathbb{C}$  com período  $2\pi i$ . Além disso, qualquer período para a função  $e^z$  será um número complexo da forma  $z_0 = 2k\pi i$  com  $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ .

*Demonstração.* A primeira parte é facilmente provada, uma vez que

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1.$$

Pela propriedade 4.2,

$$f(z + 2\pi i) = e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z = f(z).$$

Para segunda parte, considere  $z_0 = x_0 + iy_0$  um período qualquer para a função  $e^z$ . Assim,

$$f(z + z_0) = f(z) \Leftrightarrow e^{z+z_0} = e^z e^{z_0} = e^z \Leftrightarrow e^{z_0} = 1.$$

Logo,

$$\begin{cases} e^{x_0} \cos y_0 = 1, \\ e^{x_0} \sin y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{tg} y_0 = 0 \Leftrightarrow y_0 = 2k\pi \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Observe que para  $k = 0$  tem-se como solução  $z_0 = 0$ . No entanto, por definição, a constante periódica deve ser não nula. Portanto,  $z_0 = 2k\pi i$  com  $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ .  $\square$

## 4.6 Função logarítmica

O logaritmo de um número complexo será definido como uma extensão do logaritmo de um número real. Desta maneira, tem-se a seguinte definição.

**Definição 4.7.** *Seja  $z = re^{i\theta}$  um número complexo não nulo com  $r > 0$  e  $\arg(z) = \theta$  (medido em radianos). O logaritmo natural ou neperiano<sup>2</sup> de um número complexo  $z$  é definido por*

$$\ln z = \ln r + i\theta,$$

sendo  $\ln r$  o logaritmo natural ou neperiano do valor real  $r > 0$ .

Da definição 4.7 segue imediatamente que para  $\theta = 0$ , o logaritmo de  $z = re^{i0} = r$  se reduz ao logaritmo no caso real, isto é,  $\ln z = \ln r + i0 = \ln r$ . Por sua vez, logaritmo no caso complexo difere do caso real já que os números reais negativos tem logaritmos complexos, o que não ocorre para o caso do logaritmo real.

Além disso, o argumento de  $z \neq 0$  pode assumir qualquer valor da forma  $\theta + 2k\pi$  com  $k \in \mathbb{Z}$ , isto é, o argumento de  $z$  assume infinitos valores que diferem entre si de múltiplos inteiros de  $2\pi$ . Desta maneira, o logaritmo para um número complexo  $z \neq 0$  assumirá vários valores distintos, dependendo do argumento considerado. Este fato impede definir a função logaritmo complexa, uma vez que para um número complexo  $z$  o logaritmo de  $z$  assume infinitos valores. Isto vai contra a definição de função vista na seção 4.1. A função logarítmica complexa é uma função multivalente. Em vista disso, para definir a função logarítmica complexa será necessário limitar o seu domínio em  $\mathbb{C}$  de maneira que, para os argumentos de valores complexos tomados neste domínio seus valores serão determinados univocamente. Analogamente ao caso da função raiz quadrada os diversos domínios onde a função logarítmica se torna univalente serão denominados de *ramos*. Neste sentido, deve-se restringir o argumento de  $z$  a um intervalo de comprimento  $2\pi$ . Cada intervalo considerado permite definir uma função univalente, chamada ramo do logaritmo, dada por:

$$\begin{aligned} \ln : \mathcal{R}_{\theta_0} \subset \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z = (r, \theta) &\mapsto \ln z = \ln r + i\theta, \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>John Napier (1550-1617)

sendo  $\mathcal{R}_{\theta_0} = ]0, \infty[ \times [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[ \subset \mathbb{R}^2$  e  $\theta_0$  um ângulo fixado em radianos. Chama-se **ramo principal do logaritmo** de  $z$  denotado por  $\text{Ln } z$  a função

$$\text{Ln } z = \ln r + i\theta$$

onde  $\theta_0 = 0$ , ou seja, a função ramo principal do logaritmo considera valores tomados em  $\mathcal{R}_0 = ]0, \infty[ \times [0, 2\pi[$ .

Valem as seguintes propriedades para o ramo principal do logaritmo:

**Propriedade 4.6.** Sejam  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  e  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$  dois números complexos

(a)  $\text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2 \bmod 2\pi.$

*Demonstração.* De fato,

$$\text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln}(r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}) = \ln(r_1 r_2) + i(\theta_1 + \theta_2).$$

Sabe-se que  $\text{Arg}(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1 z_2) \bmod 2\pi$ , conclui-se que

$$\begin{aligned} \text{Ln}(z_1 z_2) &= \ln r_1 + \ln r_2 + i(\theta_1 + \theta_2) \bmod 2\pi = \\ &= (\ln r_1 + i\theta_1) + (\ln r_2 + i\theta_2) \bmod 2\pi = \\ &= \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2 \bmod 2\pi. \end{aligned}$$

□

(b)  $\text{Ln} \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \text{Ln } z_1 - \text{Ln } z_2 \bmod 2\pi.$

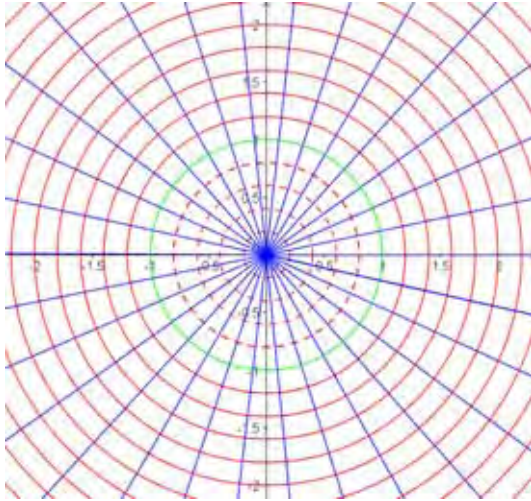
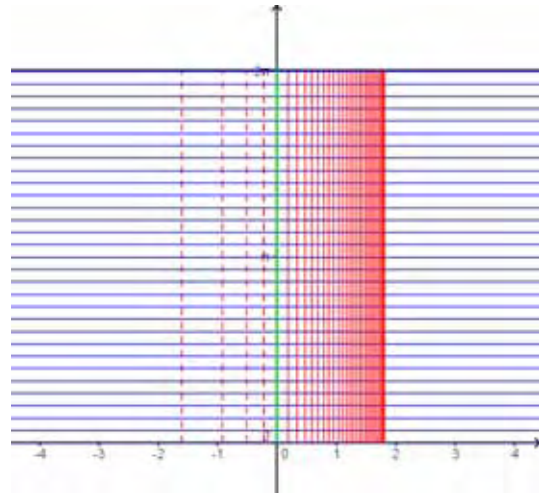
*Demonstração.* De maneira análoga ao item anterior tem-se

$$\begin{aligned} \text{Ln} \left( \frac{z_1}{z_2} \right) &= \text{Ln} \left( \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \right) = \\ &= \ln \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2) = \\ &= \ln r_1 - \ln r_2 + i(\theta_1 - \theta_2) \bmod 2\pi = \\ &= (\ln r_1 + i\theta_1) - (\ln r_2 + i\theta_2) \bmod 2\pi = \\ &= \text{Ln } z_1 - \text{Ln } z_2 \bmod 2\pi. \end{aligned}$$

□

A seguir a função logarítmica complexa será vista como transformação no plano complexo. Diferentemente ao que foi feito nas funções complexas anteriores, considere uma malha descrita por pontos definidos na sua forma polar, ou seja,  $z = r e^{i\theta}$ . Vê-se facilmente que para  $r = r_0 > 0$  constante, tem-se circunferências concêntricas de raio  $r_0$  e centro  $(0, 0)$ . Por outro lado, para valores  $\theta = \theta_0$  constante obtêm-se semirretas de origem  $(0, 0)$  e que fazem ângulo  $\theta_0$  com o semieixo positivo das abscissas. Considere

o ramo principal  $\mathcal{R}_0 = ]0, \infty[ \times [0, 2\pi[$ . A função logarítmica  $w = u + iv = f(z) = \text{Ln } z$  é definida neste ramo pelas relações:  $u = \ln r$  e  $v = \theta$ . Inicialmente verifica-se que os raios  $\theta = \text{constante}$  são transformados pela função logarítmica nas retas horizontais  $v = \text{constante}$ , isto é, as semirretas de origem  $(0, 0)$  que formam um ângulo  $\theta$  radianos com o semieixo  $Ox$  positivo do plano- $z$  são levadas em  $v = \theta$  que representa retas paralelas ao eixo  $Ou$  do plano- $w$ . As circunferências  $r = r_0$  com  $0 < r_0 < 1$  no plano- $z$  são transformadas pela função logarítmica em  $u = \ln r_0 < 0$  que representa retas paralelas situadas à esquerda do eixo  $Ov$  do plano- $w$ . Se  $r = 1$  então  $u = 0$ , isto é, a circunferência de raio unitário no plano- $z$  é transformada pela função logarítmica no eixo  $Ov$ . Por fim, as circunferências  $r = r_0 > 1$  são transformadas em  $u = \ln r_0 > 0$ . Logo, estas circunferências terão como imagem as retas paralelas situadas à direita do eixo  $Ov$ . Desta maneira, o ramo principal leva o plano complexo  $z \neq 0$  na faixa  $0 \leq v < 2\pi$  do plano- $w$ . Assim, qualquer ramo da função logarítmica é uma função univalente, definida em todo plano complexo  $z \neq 0$ , e tem como imagem uma faixa horizontal do plano- $w$ . Ver Figura 4.9.

(a) Plano- $z$ (b) Plano- $w$ **Figura 4.9:** Função  $f(z) = \text{Ln } z$ 

Desta maneira, é fácil ver que, assim como no caso de uma variável real, a função logarítmica complexa terá como função inversa a função exponencial complexa. Entretanto será necessário cautela para invertê-la já que a função exponencial complexa é periódica.

**Teorema 4.2.** *Qualquer ramo da função logarítmica complexa e a função exponencial complexa são funções inversas uma da outra.*

*Demonstração.* Para isso, o domínio da exponencial será uma faixa horizontal de comprimento  $2\pi$  que é a imagem do logaritmo, isto é, considere o ramo  $w = \log z = \ln r + i\theta$

---

com  $r > 0$  e  $\theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi$ . Sendo  $z = re^{i\theta}$  tem-se

$$e^{\log z} = e^{\ln r + i\theta} = e^{\ln r} e^{i\theta} = re^{i\theta} = z.$$

E

$$\log(e^w) = \log(e^{\ln r + i\theta}) = \log(e^{(\ln r + i\theta)}) = \log(re^{i\theta}) = \log z = w.$$

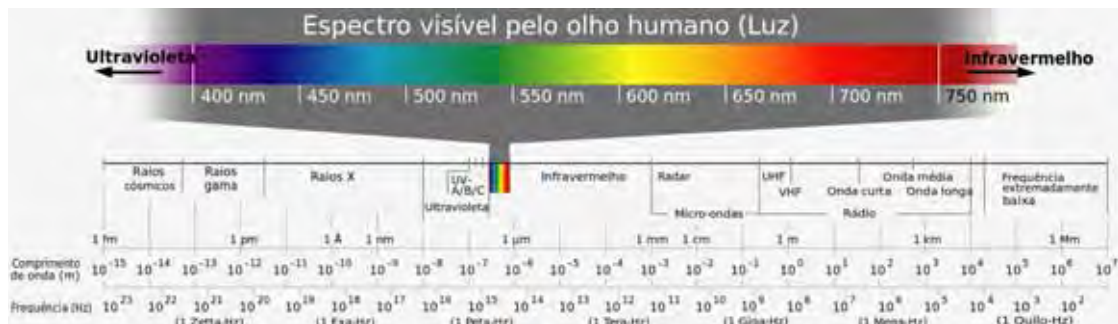
□

## 5 Padrões de cores

Neste capítulo as transformações complexas vistas no capítulo 4 são novamente abordadas. Após um breve resumo teórico dos conceitos de cores, as funções complexas serão visualizadas computacionalmente atribuindo uma determinada cor a cada elemento de um conjunto discreto de pontos do plano complexo. Dado o grande número de pontos considerados, o estudo das transformações quase que se dará de maneira contínua.

### 5.1 Conceito de cor

A utilização de cores no processamento de imagens é motivada por simplificar a identificação do objeto em estudo. Basicamente, as cores percebidas pelos seres humanos em um objeto são determinadas pelos diferentes comprimentos de onda, cujas energias se combinam para produzir as cores. A caracterização da luz é fundamental para o estudo das cores. Se a luz for acromática, ou seja, sem cores, seu único atributo será sua intensidade. Neste tipo de luz usa-se uma medida escalar de intensidade que varia do preto, passando pelos tons de cinzas, até o branco. Se a luz for cromática, ou seja, com cores, esta engloba às radiações eletromagnéticas na faixa compreendida entre 400 a 700  $nm$  do comprimento de onda.<sup>1</sup> Esta faixa é denominada espectro visível e nela estão localizadas as chamadas sete cores visíveis. A Figura 5.1 ilustra a faixa do visível dentro do espectro eletromagnético. [6, p. 260].



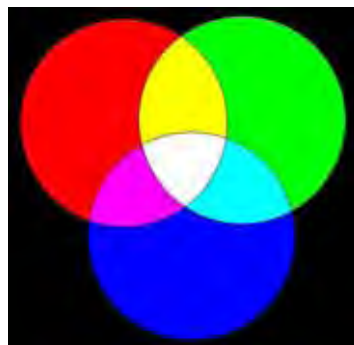
**Figura 5.1:** Faixa visível do espectro eletromagnético. Fonte: Wikipedia [14]

<sup>1</sup>1nm (nanômetro) =  $1 \times 10^{-9}m$  (metros)



O conjunto de técnicas que permite definir e comparar cores é chamado de colorimetria. A colorimetria baseia-se na premissa de que qualquer cor pode ser definida por três parâmetros: matiz, saturação e brilho. A matiz caracteriza o comprimento de onda dominante da cor, ou seja, representa a cor dominante percebida pelo observador. A saturação se refere à quantidade de luz branca misturada a uma matiz, ou seja, mede a pureza da cor. E o último parâmetro, o brilho mede a intensidade da luminância da superfície examinada. Pode-se dizer que o brilho incorpora a noção acromática da intensidade. [7, p.181 ].

A retina do olho humano contém dois tipos de células chamadas cones e bastonetes que detectam a luz. Os bastonetes tem a função de dar uma imagem geral do campo de visão. Além disso, não estão envolvidos na visualização de cores e são sensíveis a baixos níveis de iluminação. Os cones são os sensores responsáveis pela visão das cores. A maioria destes sensores fazem uma amostragem do espectro em três pontos distintos do espectro visível: a primeira é sensível à luz vermelha, a segunda à luz verde e a terceira à luz azul. Desta maneira, as cores são vistas pelo olho humano como uma combinação das chamadas cores primárias: vermelho, verde e azul. Ressalta-se que cores primárias são cores básicas que podem ser usadas para produzir outras cores e por isto não há um conjunto finito de cores primárias. Estas cores primárias podem ser adicionadas umas as outras para produzirem as chamadas cores secundárias ou complementares: ciano (verde mais azul em quantidades iguais), magenta (vermelho mais azul em quantidades iguais) e amarelo (vermelho mais verde em quantidades iguais). Misturar as três cores primárias em intensidade máxima produz a cor branca. Enquanto a cor preta é formada pela ausência das três cores primárias. A Figura 5.2 ilustra as cores primárias e complementares.



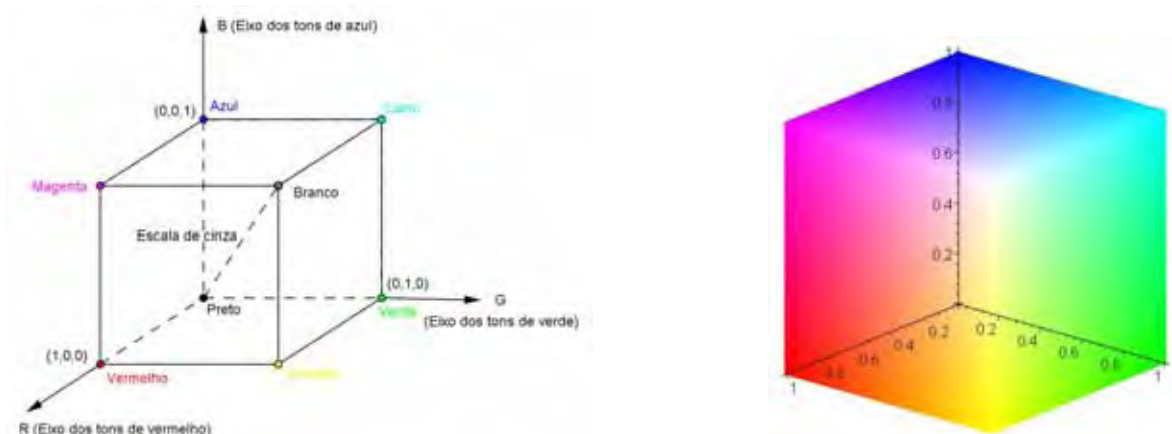
**Figura 5.2:** Cores primárias e complementares

Devido à grande importância das cores no processamento de imagens, é necessário o estabelecimento de padrões de cores. Um modelo de cores, também chamado de sistema, explica as propriedades ou o comportamento das cores para um determinado contexto. Basicamente, um modelo de cores é uma especificação de um sistema de coordenadas e um subespaço dentro deste sistema no qual cada cor é representada por

um único ponto. Não existe um modelo que explique todos os aspectos relacionados à cor. Desta maneira, vários modelos foram desenvolvidos através da CIE (*Commission Internationale de l'Eclairage* - Comissão Internacional de Iluminação). Neste trabalho será apresentado apenas dois padrões.

## 5.2 O padrão RGB

O padrão RGB é um modelo de cores aditivas formado das cores primárias vermelho (*Red*, em inglês), verde (*Green*, em inglês) e azul (*Blue*, em inglês). O sistema de cores aditivas é usado nos objetos que emitem ou refletem a luz como, por exemplo, os monitores de computador, televisão em cores, o scanner, entre outros. Este modelo baseia-se em um sistema de coordenadas cartesianas tridimensional onde cada eixo coordenado representa cada uma das três cores primárias. Assim, o eixo  $Ox$  irá representar a cor vermelha, o eixo  $Oy$  a cor verde e o eixo  $Oz$  a cor azul. Em cada eixo coordenado, os valores variam no intervalo real fechado  $[0, 1]$  onde o valor 0 significa ausência total da componente de cor e o valor 1 a intensidade máxima relacionada à componente. Desta maneira, o subespaço de cores de interesse é um cubo sólido unitário no qual os valores RGB primários estão em três vértices, enquanto as cores complementares magenta (*Magenta*, em inglês), ciano (*Cian*, em inglês) e amarelo (*Yellow*, em inglês) em outros três vértices, a cor preta (*Black*, em inglês) está na origem do sistema e a cor branca (*White*, em inglês) no vértice mais distante da origem. A diagonal principal do cubo, que vai do preto ao branco, representa a escala de cinza (quantidades iguais de cores primárias). A Figura 5.3 ilustra o subespaço de interesse do padrão RGB.



**Figura 5.3:** Subespaço de cores do padrão RGB

As diferentes cores produzidas neste modelo são todos os pontos nas faces do cubo ou dentro dele e são definidas por vetores que se estendem a partir da origem. Por essa representação, cada cor  $C$  é então modelada como uma combinação de intensidades

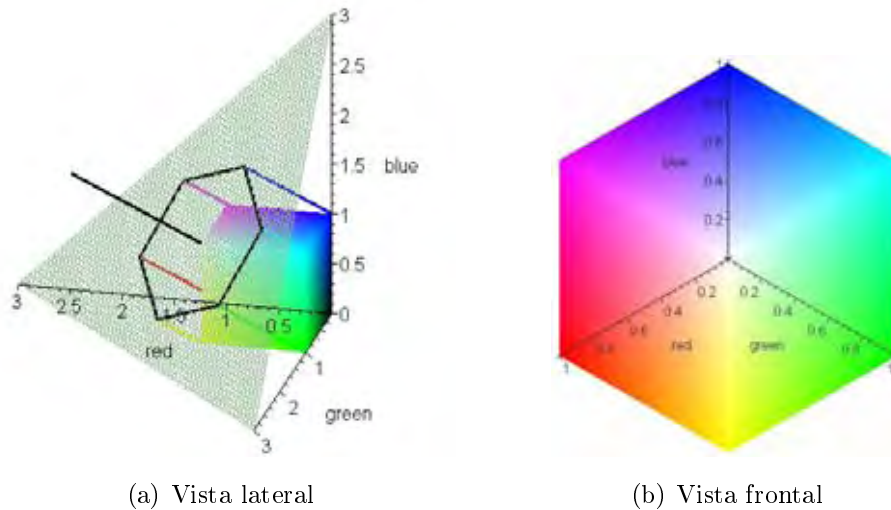
das componentes R,G e B, da seguinte maneira:

$$C = r \cdot R + g \cdot G + b \cdot B = (r, g, b)$$

onde  $r, g$  e  $b$  variam no intervalo fechado de 0 a 1 das componentes primárias R,G e B, respectivamente.

### 5.3 Projeção isométrica do cubo RGB

De acordo com a seção 5.2, o padrão RGB possui um sistema de coordenadas cartesianas  $(r, g, b)$  cujo subespaço de interesse é o cubo sólido unitário. A projeção isométrica deste cubo permite que não somente as três cores primárias sejam representadas, como também as suas complementares (ciano, magenta e amarelo). Para isto, considere a projeção ortogonal dos vértices e das faces do cubo em um plano perpendicular a diagonal do cubo passando pelo ponto  $(1,1,1)$ . Desta maneira, obtém-se um hexágono com centro neste ponto [8, p.110 ]. As cores primárias estão representadas em três vértices deste hexágono e são separadas por  $120^\circ$ . As cores complementares estão representadas nos outros três vértices e estão à  $60^\circ$  das cores primárias, ou seja, o ângulo entre as complementares também é de  $120^\circ$  [6, p. 270]. A Figura 5.4 mostra esta representação no plano isométrico.

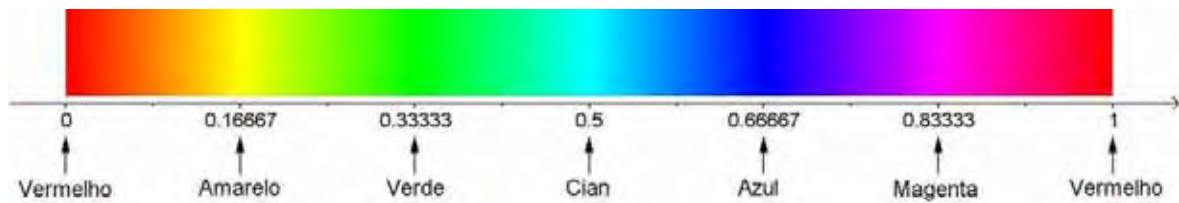


**Figura 5.4:** Projeção isométrica do Cubo de cores RGB

### 5.4 O padrão HSV

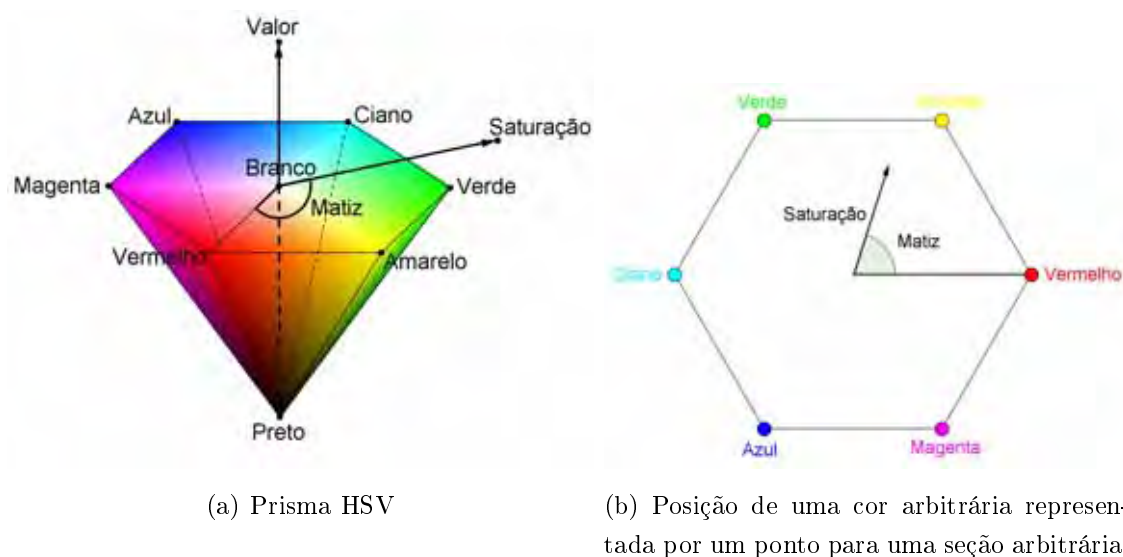
Na seção 5.1, viu-se que qualquer cor pode ser definida por três parâmetros: Matiz, Saturação e Brilho (ou Valor) (*Hue*, *Saturation* e *Value*, em inglês respectivamente). O modelo HSV separa o parâmetro Valor dos outros dois parâmetros em uma imagem

colorida e seu espaço é parecido com o espaço do modelo RGB [6, p.269]. Matematicamente, este sistema pode ser construído a partir de uma transformação não linear do sistema de cores RGB. Como visto na seção 5.2, o sistema RGB é representado por um cubo sólido unitário cuja diagonal principal varia do ponto  $(0,0,0)$  ao ponto  $(1,1,1)$ , isto é, da cor preta à cor branca, representando a escala de cinza. Desta forma, a diagonal do cubo é dada pela equação  $(x, y, z) = \lambda(1, 1, 1)$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . Para cada número real  $\lambda \in [0, 1]$ , pode-se traçar um plano perpendicular a diagonal principal do cubo passando pelo ponto  $\lambda(1, 1, 1)$ , obtendo como interseção uma região hexagonal que possui Valor constante e igual a  $\lambda$ , ou seja, determina-se a projeção isométrica da interseção. Desta maneira, ao variar o valor de  $\lambda$  obtém-se uma família de hexágonos. Assim, a união de todos os hexágonos determina uma pirâmide reta de base hexagonal com vértice na origem. A base desta pirâmide é formada pelo hexágono que corresponde à projeção isométrica do cubo sólido unitário no qual o Valor das cores é constante e igual a 1. A altura da pirâmide chamada de eixo de intensidade vertical é, formada pelos centros dos hexágonos, que corresponde à diagonal do cubo RGB, e portanto ao eixo acromático do mesmo (preto, escala de tons de cinza e branco). Observa-se que cada seção transversal hexagonal, paralela à base da pirâmide, representa um conjunto de cores do cubo unitário com as seguintes características. A Matiz é considerada como sendo um valor numérico entre 0 e 1, adotando Matiz nula para a cor vermelha. Percorre-se assim todas as cores de forma cíclica retornando novamente à cor vermelha (que corresponde à Matiz igual a 1). A relação entre os valores numéricos para a Matiz e a cor correspondente encontra-se na Figura 5.5.



**Figura 5.5:** Cores primárias e complementares no padrão HSV

Considerando a base da pirâmide, a Matiz irá corresponder ao ângulo formado, no sentido anti-horário, por uma determinada cor e a cor vermelha dividido por  $360^\circ$ . A Saturação da cor é determinada na direção radial assumindo valor 0 no centro do hexágono da base da pirâmide e valor 1 na fronteira (obtendo assim as chamadas cores puras). O Valor (brilho) das cores em cada hexágono é constante e varia proporcionalmente com a distância do plano do hexágono ao vértice da pirâmide [6, p.270]. A Figura 5.6 ilustra a pirâmide HSV.



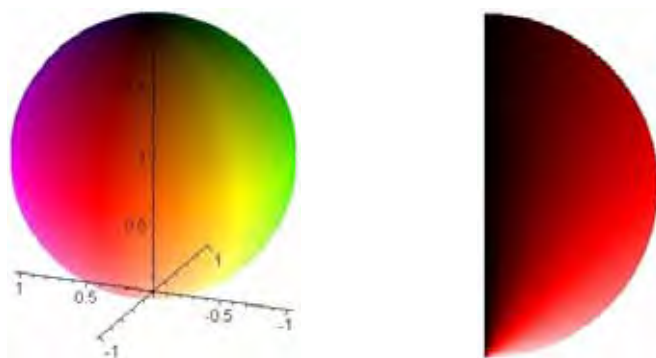
**Figura 5.6:** Subespaço de cores do sistema HSV

## 6 Visualização das funções complexas por padrão de cores

Neste capítulo será definido um critério para colorir o plano complexo. Em seguida, todas as transformações vistas no capítulo 4 serão esboçadas utilizando o padrão de cores definido. A visualização do Teorema Fundamental da Álgebra será feita no final deste capítulo.

### 6.1 A esfera HSV

Inicialmente define-se uma superfície esférica de cores segundo o padrão HSV. Os valores para a Matiz, Saturação e Valor irão variar entre 0 e 1, como visto na seção 5.4. Neste sentido, define-se a distribuição de cores na esfera da seguinte maneira: a Matiz fixa o meridiano da esfera. A Saturação indica a quantidade dominante da matiz, enquanto o Valor indica a variação do “claro” ao “escuro”. Considerado um meridiano, fixa-se o Valor em 1 e varia-se crescentemente a Saturação de 0 (no polo sul) até 1 (no equador) na esfera. A partir do equador, fixa-se a Saturação em 1 e varia-se agora a quantidade Valor de maneira decrescente de 1 até 0 (no pólo norte). Em resumo, cada meridiano da esfera terá uma determinada cor que irá variar do branco (polo sul), passando pela cor pura ou total (no equador) e então escurecendo até o ponto preto (no polo norte). A Figura 6.1 mostra a esfera colorida no padrão HSV e o meridiano 0 (matiz vermelho) exemplifica o que foi descrito acima.



**Figura 6.1:** Esfera padrão HSV e o meridiano para a matiz 0

## 6.2 Projeção estereográfica da esfera HSV no plano complexo

Considere a esfera  $E$  de raio unitário e tangente ao plano complexo no ponto  $z = (0, 0)$ . Denota-se por  $C = (0, 0, 1)$  o centro da esfera,  $N = (0, 0, 2)$  seu polo norte e  $S = (0, 0, 0)$  o polo sul identificado com a origem do plano complexo. Dado um ponto qualquer  $P$  da esfera, diferente de  $N$ , determina-se a semirreta  $NP$  que intercepta o plano complexo no ponto  $z$ . Observe que cada ponto no plano é determinado de maneira única, isto é, a cada ponto do plano corresponde um único ponto da esfera  $E$  e vice-versa. Desta maneira, pode-se definir a aplicação  $F : \mathbb{C} \rightarrow E - \{N\}$  que associa cada número complexo  $z$  o ponto  $P \neq N$  da esfera, sendo  $P$  a interseção do segmento de reta  $Nz$  com a esfera  $E - \{N\}$ . Esta aplicação denomina-se projeção estereográfica da esfera  $E - \{N\}$  sobre o plano complexo  $\mathbb{C}$  e é ilustrada na Figura 6.2.

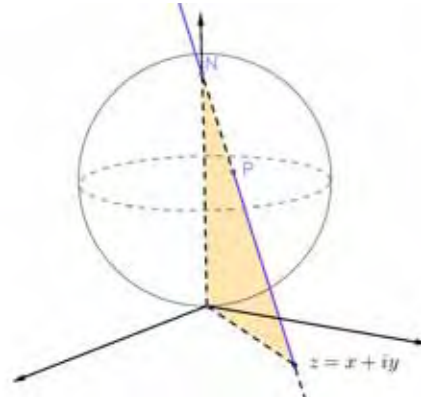


Figura 6.2: Projeção estereográfica

Com base nestas considerações, o plano complexo tem associado de maneira biunívoca as cores da esfera HSV via projeção estereográfica. Vê-se assim que a origem do plano está associada a cor branca. Pontos tendendo ao infinito terão tonalidade escura indo ao preto (infinito). Facilmente se deduz as relações matemáticas que associam ao ponto  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  e as funções Matiz, Saturação e Valor, definidas pela projeção estereográfica. Considere a Figura 6.3.

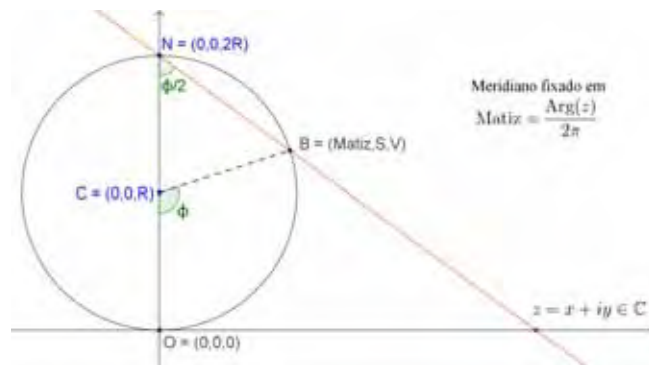


Figura 6.3: Corte perpendicular ao plano complexo segundo um meridiano

Facilmente deduz-se que:

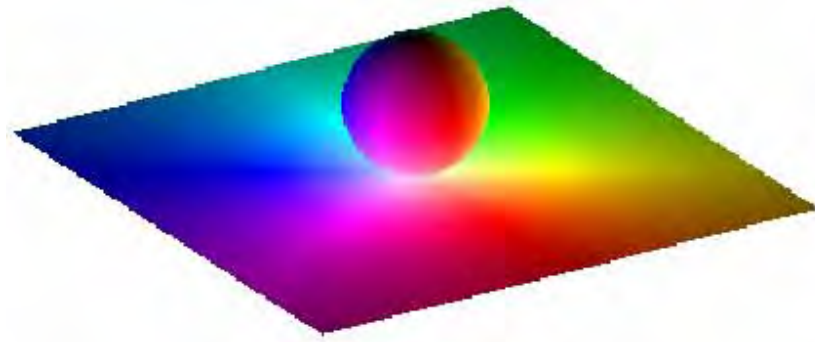
$$\text{Matiz} = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y = 0 \\ \frac{1}{2\pi} \arctg\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x > 0 \text{ e } y > 0 \\ \frac{1}{4} & \text{se } x = 0 \text{ e } y > 0 \\ \frac{1}{2\pi} \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{se } x < 0 \text{ e } y \neq 0 \\ \frac{3}{4} & \text{se } x = 0 \text{ e } y < 0 \\ \frac{1}{2\pi} \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & \text{se } x > 0 \text{ e } y < 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\text{Saturação} = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \arctg\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}\right) & \text{se } x^2 + y^2 \leq 4 \\ 1 & \text{se } x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases} \quad (6.2)$$

$$\text{Valor} = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2 + y^2 \leq 4 \\ 2 - \frac{4}{\pi} \arctg\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}\right) & \text{se } x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases} \quad (6.3)$$

para todo  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  e lembrando que a função arco tangente tem como conjunto imagem o intervalo aberto  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

A Figura 6.4 refere-se à um esboço da projeção estereográfica definida pelas funções Matiz, Saturação e Valor definidas.



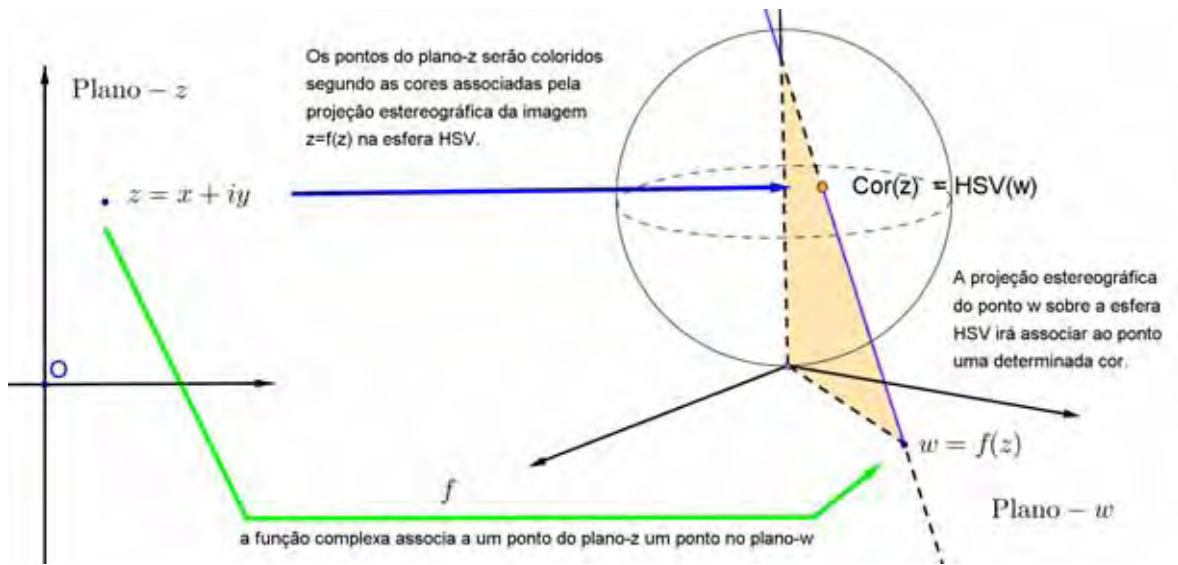
**Figura 6.4:** Plano complexo colorido segundo a projeção estereográfica da esfera HSV

## 6.3 Visualização de funções complexas por padrões de cores

Para a visualização das funções complexas definidas no capítulo 4 será utilizado o programa gráfico ASYMPTOTE © ([asymptote.sourceforge.net](http://asymptote.sourceforge.net)). ASYMPTOTE © é

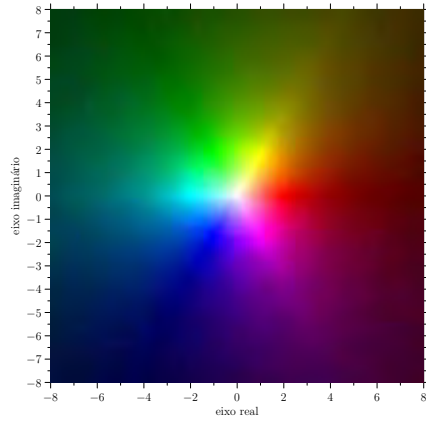


uma linguagem de programação descritiva vetorial gráfica que fornece um referencial baseado em coordenadas para desenhos técnicos. A maior vantagem do ASYMPTOTE © sobre os demais pacotes gráficos é sua linguagem de programação de alto nível [15]. Nos exemplos, a seguir, a implementação computacional discretiza uma região do plano complexo em  $1000 \times 1000$  pontos =  $10^6$  pontos (resolução). Sejam  $z_{ij}$ ,  $i, j = 1 \dots 1000$  estes pontos. A função complexa  $f$  é calculada em cada um destes pontos determinando assim os valores  $w_{ij} = f(z_{ij})$ . Determina-se a cor associada ao ponto  $z_{ij}$  através da projeção estereográfica do ponto  $w_{ij}$  sobre a esfera HSV segundo as funções 6.1, 6.2 e 6.3 (Matiz, Saturação e Valor respectivamente) definidas na seção 6.2. Este algoritmo está representado na Figura 6.5.

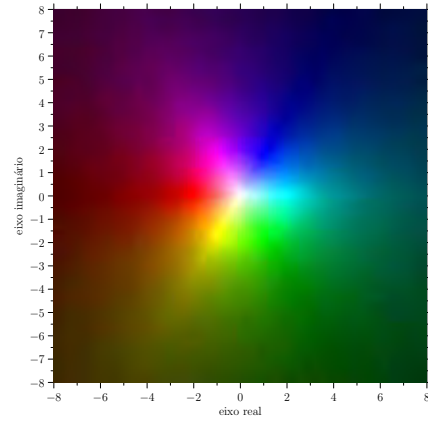


**Figura 6.5:** Algoritmo para associação de cores para uma dada função complexa

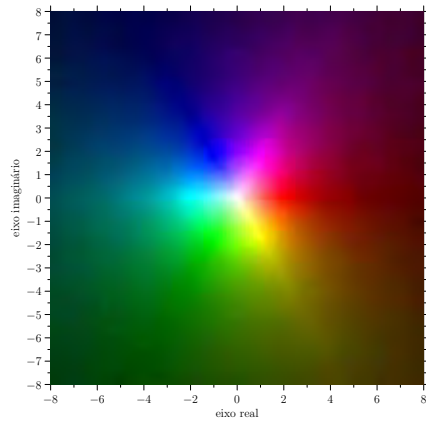
Desta maneira, o algoritmo que irá colorir o plano complexo associado a uma dada função permite uma visualização quase contínua do comportamento da função. Os zeros da função, suas multiplicidades e outras propriedades básicas como simetria e periodicidade podem ser facilmente esboçadas. Por exemplo, a cor branca irá se referir ao zero da função. Os valores da função próximos de zero terão cores claras enquanto valores que estão tendendo ao infinito terão cores mais escuras. A periodicidade das funções será vista pela repetição de padrões e de cores. A seguir, as diversas funções complexas já estudadas no capítulo 4 serão esboçadas.



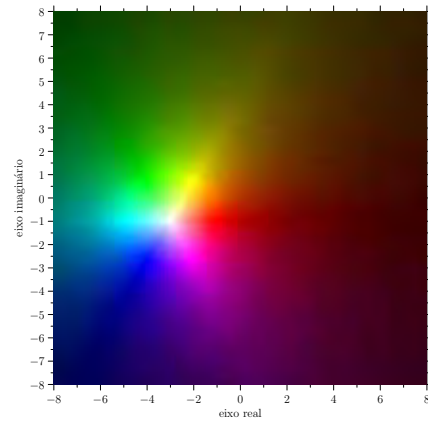
(a)  $f(z) = z$ . Função identidade mostra o plano- $z$  colorido segundo a projeção estereográfica da esfera HSV.



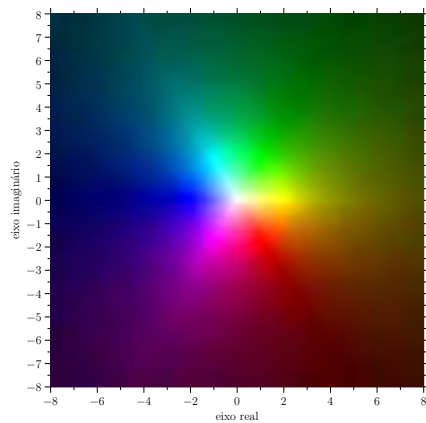
(b)  $f(z) = -z$ . Reflexão em torno da origem do plano complexo.



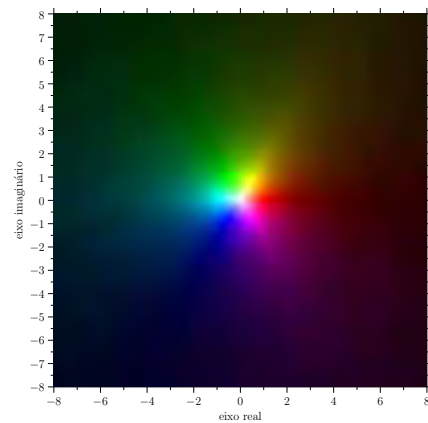
(c)  $f(z) = \bar{z}$ . Reflexão em torno do eixo real do plano complexo.



(d)  $f(z) = z + (3 + i)$ . Translação da origem do plano complexo para o ponto  $(-3, -1)$ .

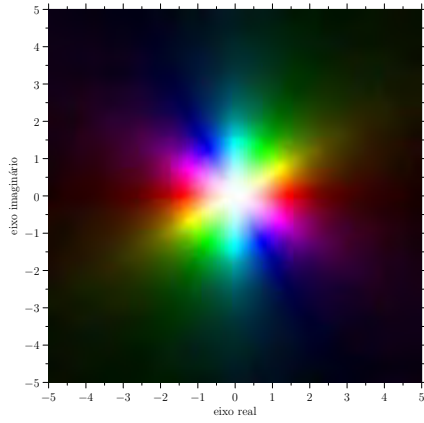


(e)  $f(z) = (1/2 + \sqrt{3}i/2)z$ . Rotação do plano em  $60^\circ$ .

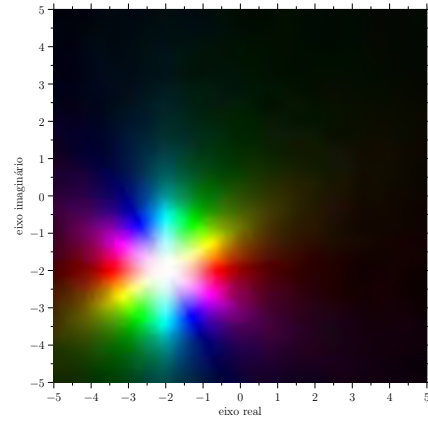


(f)  $f(z) = 2z$ . Dilatação de fator 2.

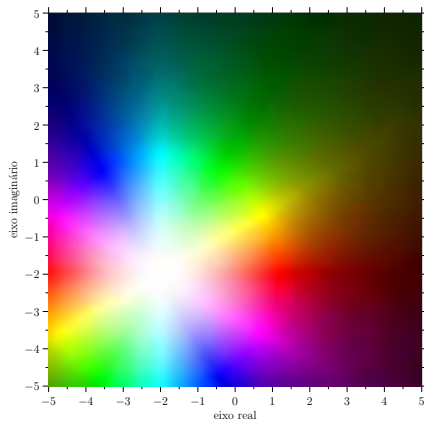
**Figura 6.6:** Função afim



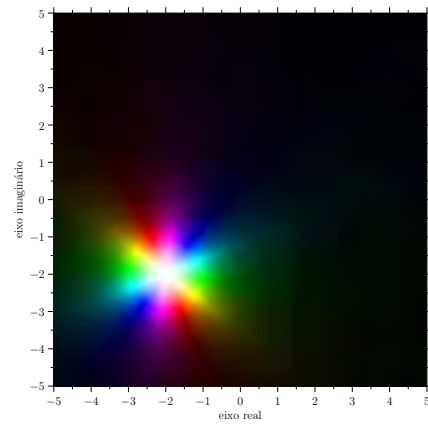
(a)  $f(z) = z^2$ . Observe a repetição de cores.



(b)  $g(z) = (z + (2 + 2i))^2$ . Translação de  $f$  para o ponto  $-2 - 2i$ .

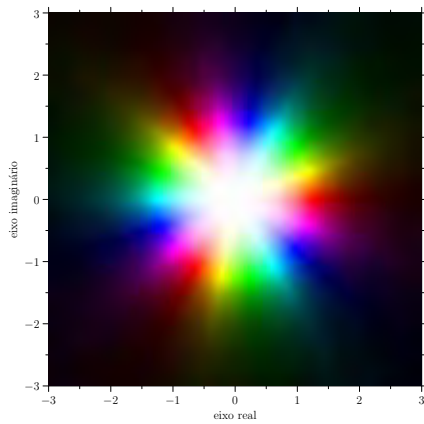


(c)  $g(z) = ((1 + \sqrt{3}i)/5)(z + (2 + 2i))^2$ . Translação de  $f$  para o ponto  $-2 - 2i$  seguida de uma contração de fator  $1/5$ .

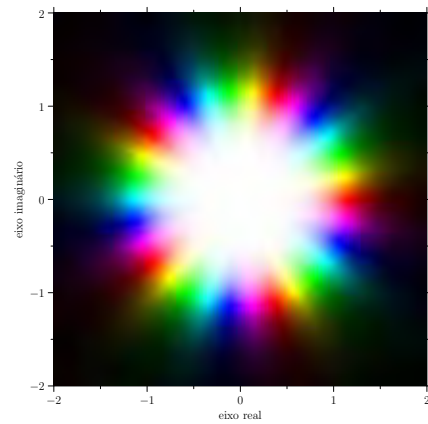


(d)  $g(z) = \sqrt{2}(-1 + i)(z + (2 + 2i))^2$ . Translação de  $f$  para o ponto  $-2 - 2i$  seguida de uma rotação de  $135^\circ$  e dilatação de fator  $2$ .

**Figura 6.7:** Função quadrática

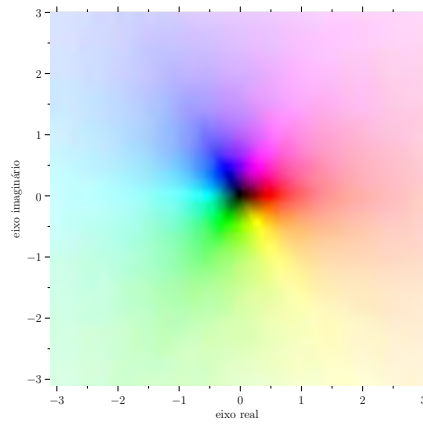


(a)  $f(z) = z^3$ .

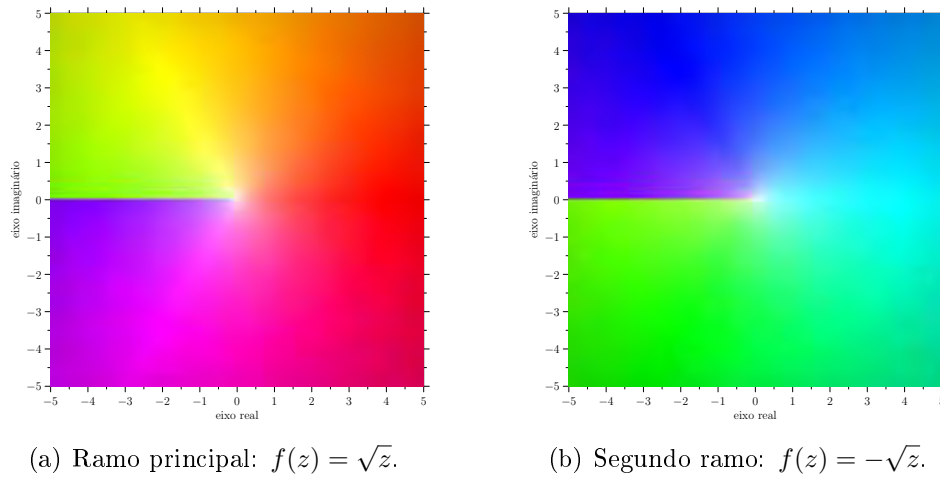


(b)  $f(z) = z^5$ .

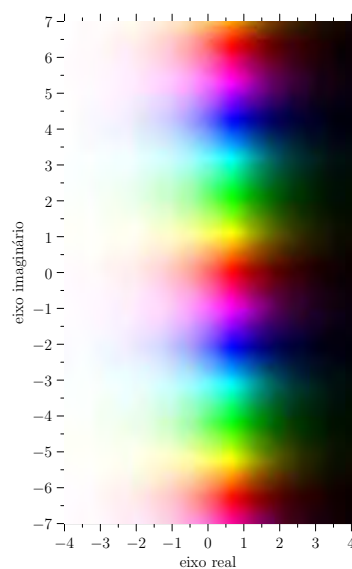
**Figura 6.8:** Funções  $z^3$  e  $z^5$ . Observe a repetição de cores e a dilatação de forma não linear

**Figura 6.9:** Função  $1/z$ 

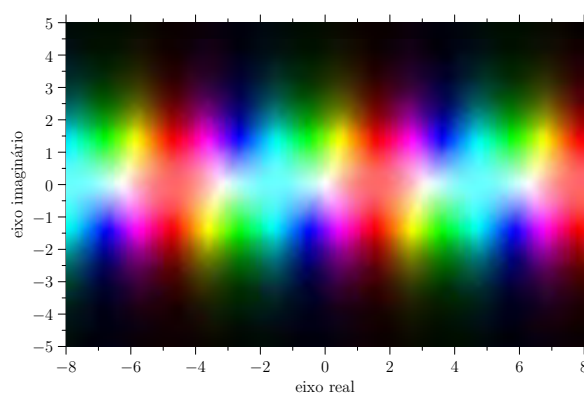
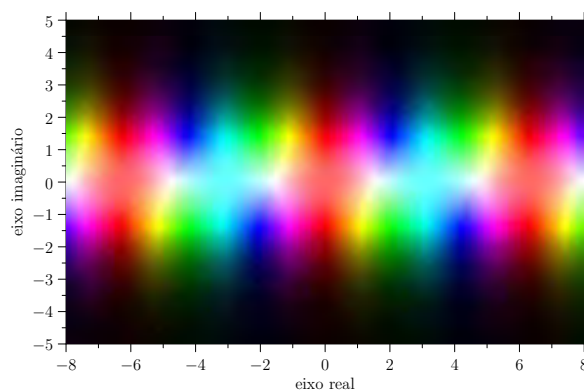
Na Figura 6.9 nota-se, pelo padrão de cores, que pela função  $1/z$  pontos próximos à origem tendem ao infinito enquanto que os pontos distantes da origem tendem a zero.

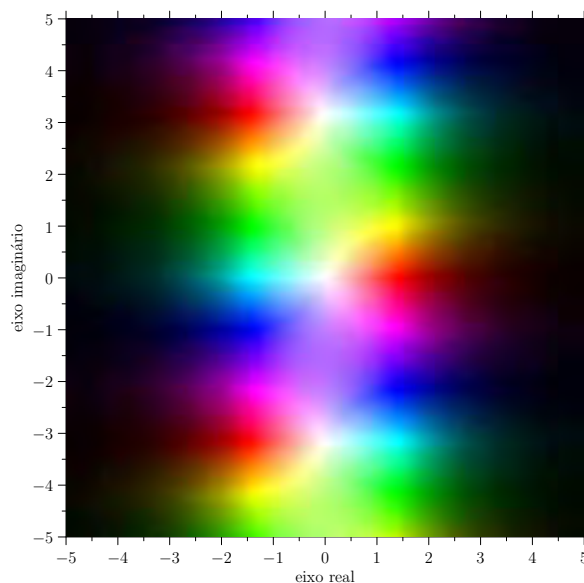
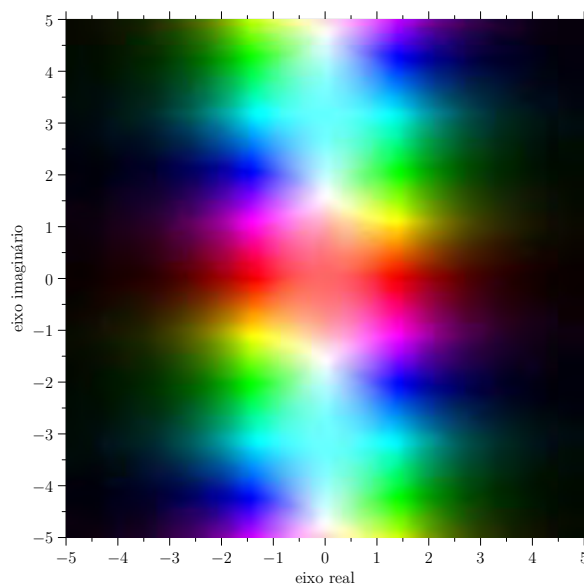
**Figura 6.10:** Função raiz quadrada

Pelo padrão de cores é possível observar na Figura 6.10 que a cor verde presente ao longo do semieixo  $x$  negativo no ramo principal faz a ligação deste com o segundo ramo enquanto que a cor violeta faz ligação da Figura 6.10(b) com Figura 6.10(a). Desta forma, visualiza-se uma interpretação da superfície de Riemann vista na seção 4.4.

**Figura 6.11:** Função exponencial

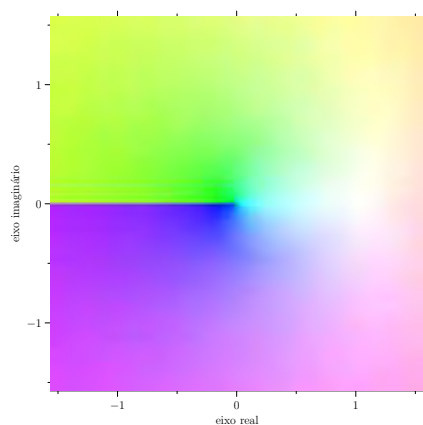
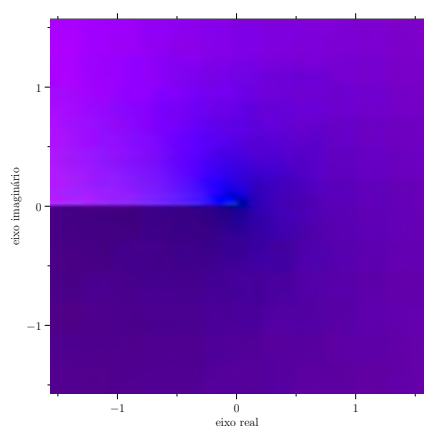
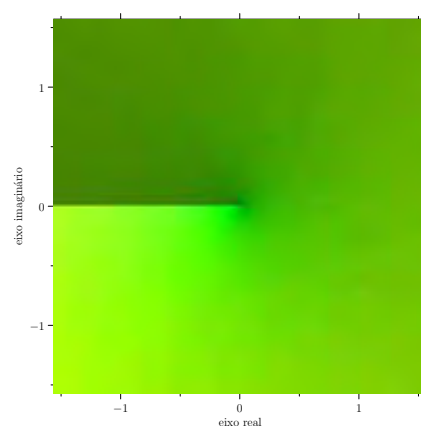
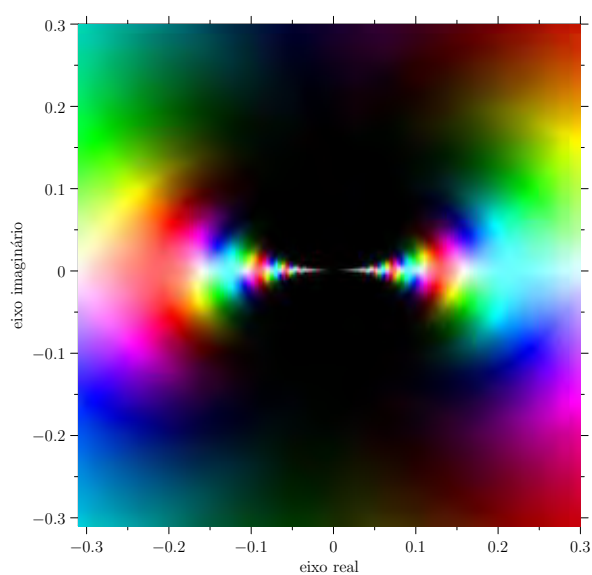
Pela repetição de cores visualizada na Figura 6.11 é possível observar a periodicidade da função exponencial complexa.

**Figura 6.12:** Função seno**Figura 6.13:** Função cosseno

(a)  $f(z) = \sinh z$ .(b)  $f(z) = \cosh z$ .**Figura 6.14:** Funções seno e cosseno hiperbólico

A periodicidade das funções seno e cosseno trigonométricas e das funções hiperbólicas também pode ser observada nas Figuras 6.12, 6.13 e 6.14, respectivamente, devido a repetição das cores. Além disso, pode-se observar a simetria entre as funções trigonométricas seno e cosseno. É possível, também visualizar as relações entre as funções trigonométricas e funções hiperbólicas.

Por fim, pode-se visualizar três ramos da função logarítmica na Figura 6.15.

(a)  $f(z) = \frac{1}{2}(\ln z)$ (b)  $f(z) = \frac{1}{2}(\ln z - 2\pi i)$ (c)  $f(z) = \frac{1}{2}(\ln z + 2\pi i)$ **Figura 6.15:** Função logaritmo vista em três ramos**Figura 6.16:**  $f(z) = \text{sen}(1/z)$

## 6.4 Visualização do Teorema Fundamental da Álgebra

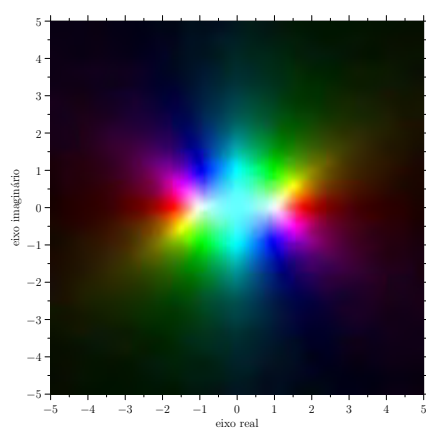
**Definição 6.1.** *Sejam  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  constantes complexas e  $n$  um número inteiro não negativo. A função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por*

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$$

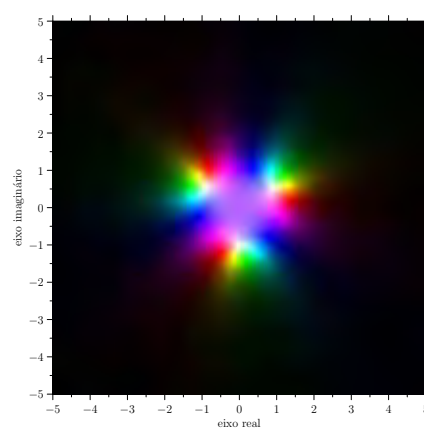
*com  $a_n \neq 0$ , denomina-se função polinomial de grau  $n$ . As constantes  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  são chamadas de coeficientes da função polinomial  $f$ .*

**Teorema 6.1.** *(Teorema Fundamental da Álgebra) Todo polinômio complexo de grau  $n \geq 1$  tem exatamente  $n$  raízes, isto é, toda função polinomial de grau  $n$  possui  $n$  zeros.*

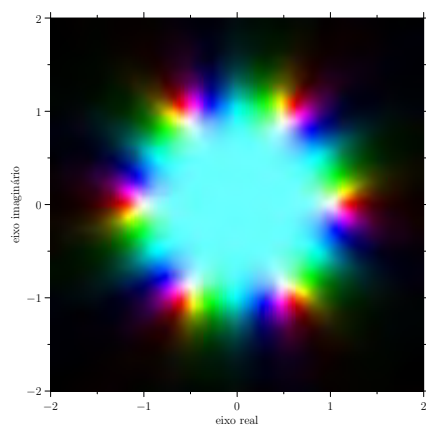
Passa-se agora a esboçar vários exemplos de funções polinomiais. Como observado anteriormente, os zeros da função polinomial estarão em cor branca.



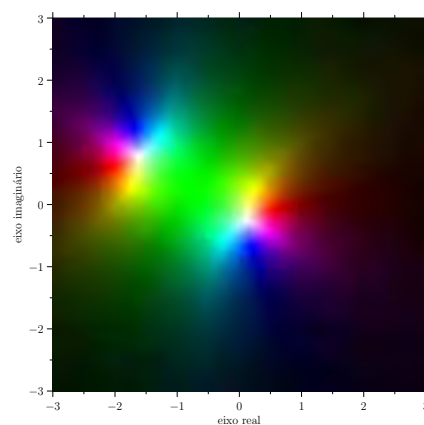
(a)  $f(z) = z^2 - 1$ .



(b)  $f(z) = z^3 - i$ .



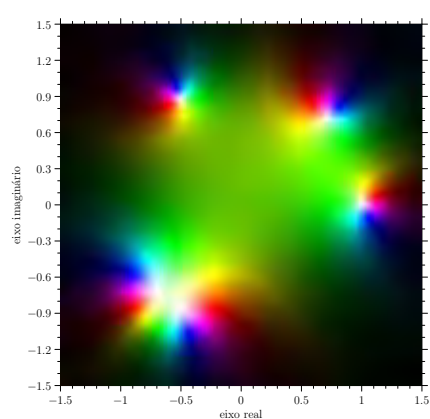
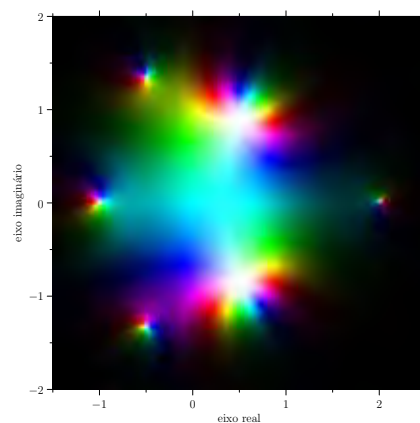
(c)  $f(z) = z^6 - 1$ .



(d)  $f(z) = 2z^2 + (3 - i)z + i$ .

**Figura 6.17:** Visualização do Teorema Fundamental da Álgebra



(a)  $f(z) = (z^3 - 1)(3(z^2 - i))$ .(b)  $f(z) = z^8/2 - z^7 + z^6 - 2z^5 + z^4 - z^3 - 5z^2/2 + 2z - 2$ .**Figura 6.18:** Visualização do Teorema Fundamental da Álgebra (continuação)

## 7 Considerações finais

Esta dissertação de mestrado permitiu uma abordagem sobre a história dos números complexos. Viu-se que foram os algebristas italianos do século XVI os pioneiros no estudo dos números complexos cuja a origem está ligada diretamente com a resolução das equações algébricas, especialmente as cúbicas.

Os números complexos permitem três representações isomorfas entre si: algébrica, par ordenado e matricial. Deste resultado, vê-se que os números complexos possuem apenas nomes e representações diferentes, o mesmo ocorrendo com as operações definidas para eles, e podem ser considerados idênticos como corpos. Desta forma, um problema a respeito de números complexos no qual os números estejam representados algebricamente pode ser resolvido, se assim for conveniente, convertendo tais números para a representação por par ordenado (ou matricial). A partir desta representação pode-se identificar os números complexos como vetores no plano (ou matrizes), e ainda representá-los na forma polar.

Diversas funções complexas foram tratadas como transformações no plano. Estas transformações foram abordadas de duas maneiras distintas. A primeira mostrou como uma família de curvas (reticulado) é transformada por uma determinada função. Para este método foi utilizado o programa de geometria dinâmica GEOGEBRA © que proporcionou uma visualização das rotações, expansões, contrações e translações geradas pelas transformações. Além disso, também foi possível mostrar com as famílias de curvas iniciais são levadas em outras famílias de curvas por uma transformação específica, como por exemplo, a função exponencial complexa transforma uma malha retangular em circunferências concêntricas e semirretas radiais no plano  $-w$ .

A segunda abordagem, mostrou através de um critério de cores, como pontos e cores a eles associadas estudam o comportamento de uma função no conjunto imagem. A implementação computacional para este método foi feita utilizando o pacote gráfico ASYMPTOTE © que proporcionou uma melhor visualização da periodicidade de certas funções. Além disso, permitiu uma aplicação do Teorema Fundamental da Álgebra que garante que todo polinômio complexo de grau  $n \geq 1$  tem exatamente  $n$  raízes. Esta aplicação é possível uma vez que a cor atribuída ao número  $0 + i0$  é branca, e as raízes de polinômio de grau  $n$  aparecem na imagem com  $n$  pontos brancos.

Por fim, vale ressaltar o aspecto pedagógico deste trabalho que valorizou o trata-

mento geométrico das transformações complexas proporcionando assim uma melhor compreensão de tais conceitos que são poucos explorados nas disciplinas de Variável Complexa dos cursos de graduação.

## 7.1 Trabalhos Futuros

Nesta dissertação abordou-se somente duas funções inversas. Foram elas, a função raiz quadrada e a função logarítmica. Desta forma, uma sugestão para uma continuidade do trabalho é o tratamento das demais funções inversas como transformações no plano complexo. As transformações de Möebius se apresenta como um importante tópico para os estudos futuros. Outro tema a ser explorado é o conceito de continuidade para as funções complexas. Do conceito de continuidade pode-se estender o estudo para a visualização das condições de Cauchy-Riemann. Na área da geometria dos números complexos, o estudo da geometria analítica vista por funções complexas também é um tópico sugerido para estudo posteriores.

## 7.2 Participação em eventos

- Apresentação de minicurso na VI Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática realizada em dezembro de 2012 na Universidade Estadual de Campinas.

# Referências

- [1] BOYER, C. B. *História da Matemática*. 3. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 2010.
- [2] CERRI, C.; MONTEIRO, M. S. *História dos números complexos*. IME - USP, Setembro 2001.
- [3] RIPOLL, J. B. *Números racionais, reais e complexos*. 1. ed. Porto Alegre: Editora UFRGS, 2006.
- [4] MONTEIRO, L. H. J. *Elementos de Álgebra*. 2. ed. Rio de Janeiro: [s.n.], 1978.
- [5] ÁVILA, G. *Variáveis Complexas e Aplicações*. 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2000.
- [6] GONZALEZ, R. *Processamento digital de imagens*. 3. ed. São Paulo: [s.n.], 2010.
- [7] CONCI, A. *Teoria da Computação Gráfica*. [S.l.: s.n.], 2003.
- [8] VELHO, J. G. L. *Computação Gráfica*. Rio de Janeiro: [s.n.], 1998.
- [9] ADLER, M. D. *An Introduction to Complex Analysis for Engineers*. Junho 1997. Notas de aulas: University of Western Australia.
- [10] READE, J. B. *Calculus with complex numbers*. New York: Taylor and Francis, 2003.
- [11] CHURCHILL, R. V. *Variáveis Complexas e suas Aplicações*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil e Editora da Universidade de São Paulo, 1975.
- [12] ABREU, A. H. S. de. *Funções de Variável Complexa: Teoria e Aplicações*. 1. ed. Lisboa: IST Press, 2009. (Coleção Ensino da Ciência e da Tecnologia, 25).
- [13] SOARES, M. G. *Cálculo em uma variável complexa*. 2. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2001. (Coleção Matemática Universitária).
- [14] WICKIPEDIA. *Ficheiro:Espectro\_eletromagnético*. 2013. Acesso em: 22 de Fevereiro de 2013. Disponível em: <[http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Espectro\\_eletromagnetico-pt.svg](http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Espectro_eletromagnetico-pt.svg)>.

- 
- [15] HAMMERLINDL, A.; BOWMAN, J.; PRINCE, T. *Asymptote: the Vector Graphics Language (Version 2.21)*. 2004. Disponível em: <<http://asymptote.sourceforge.net>>.
- [16] GEOGEBRA - Dynamic Mathematics for Everyone. Disponível em: <<http://www.geogebra.org>>.
- [17] RABINOWITZ, S. How to find the square root of a complex number. *Mathematics and Informatics Quarterly*, n. 3, p. 54–56, 1993.
- [18] GAMELIN, T. W. *Complex Analysis*. New York: Springer-Verlag, 2001. (Undergraduate texts in mathematics).
- [19] HUBIČKA, J.; KOVÁCS, Z.; NYÍREGYHÁZA, Z. K. Visualizations on the complex plane. *ZDM*, v. 36, 2004.
- [20] VELLEMAN, D. J. *The Fundamental Theorem of Algebra: A Visual Approach*. [S.l.], 2008.