

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

JOSÉ EDUARDO RODRIGUES BATISTA

Teoria de Representações Projetivas

Guaratinguetá

2023

José Eduardo Rodrigues Batista

Teoria de Representações Projetivas

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Física Bacharelado da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Física Bacharelado .

Orientador: Profº Dr. Julio Marny Hoff da Silva
Coorientador:

Guaratinguetá
2023

B333t	Batista, José Eduardo Rodrigues Teoria de representações projetivas / José Eduardo Rodrigues Batista – Guaratinguetá, 2023. 67 f : il. Bibliografia: f. 67 Trabalho de Graduação em Física (Bacharelado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2023. Orientador: Prof. Dr. Julio Marny Hoff da Silva 1. Partículas (Física, química, etc.). 2. Teoria quântica de campos. 3. Mecânica quântica. I. Título. CDU 530.145
-------	---

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

JOSÉ EDUARDO RODRIGUES BATISTA

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO
REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE "GRADUANDO EM FÍSICA
BACHARELADO "

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM
FÍSICA BACHARELADO

Profº Dr. MARCO AURÉLIO ALVARENGA MONTEIRO
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Profº Dr. Julio Marry Hoff da Silva
Orientador/UNESP-FEG


Profº Dr. Elias Leite Mendonça
UNESP-FEG


Profº Dr. Rogerio Teixeira Cavalcanti
Membro Externo

Fevereiro , 2023

DADOS CURRICULARES

JOSÉ EDUARDO RODRIGUES BATISTA

NASCIMENTO 05/10/2000 - Itatiaia / RJ

FILIAÇÃO José Maria Batista
Dulce Pereira Rodrigues

2018 / 2022 Curso de Graduação em Física - Bacharelado
Faculdade de Engenharia e Ciências de
Guaratinguetá - UNESP

Dedico este trabalho a todos que, de forma direta ou indireta, me motivaram a continuar.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar gostaria de agradecer ao meu orientador, professor Julio Marny Hoff da Silva, responsável por reacender uma empolgação e dedicação que coisas da vida haviam quase apagado. Obrigado pelas oportunidades, pelas conversas, pelos ensinamentos carregados de paixão e rigor com o que fazemos. Obrigado também por compartilhar ideias e me fazer sentir parte deste trabalho, não teria continuado na caminhada se não fosse a primeira aula de Física I em 2019 e não teria chegado até aqui se não fosse a oportunidade concedida no mesmo ano.

Agradeço agora a Dulce, minha mãe, desde o início de nossa jornada travamos batalhas lado a lado, a maior de todas nos trouxe até aqui e nos permitiu um desenvolvimento único. A relação que temos hoje só evidência o quanto a gente é capaz de se entender sem mesmo expressar uma palavra. Obrigado por ter aguentado tudo que aguentou, obrigado por ter derramado cada gota de suor ao longo de todos esses anos para que eu pudesse estudar onde estudei. E obrigado por me ouvir falar de Física durante todos esses anos, você sempre será minha primeira aluna. Agradeço a Gracinda, minha vó, obrigado por nos acolher tantas vezes na vida, obrigado por aparecer com as palavras necessárias nos momentos em que me sentia nada. E mais ainda, obrigado por me aguentar cantando desafinado enquanto me dedicava a este curso. A paz que a senhora nos permite viver nunca poderá ser mensurada.

Aos meus amigos de curso João Miguel, Maria Eduarda, Murilo e Nicolas que me acompanharam desde o começo e em um momento de caos me mostraram que mesmo não estando junto de vocês todos os dias, eu ainda fazia parte disso. Em plena pandemia vocês reascenderam minha motivação principal dentro do meio, ser capaz de auxiliar grandes amigos e grandes profissionais. Vibrei e vibrarei com cada sucesso de vocês ao longo desta vida.

Aos amigos que a iniciação científica me deu Arthur, Isabella, Maria e Matheus, vocês estiverem ao meu lado no momento de maior realização acadêmica e me mostraram que a maneira como eu enxergo as coisas não me faz um ser humano esquisito e sim alguém que pertence a um grupo diferente. Carregarei vocês em um lugar especial e continuarei propagando seus excelentíssimos trabalhos.

Agradeço aos meus irmãos William e Vitor, estes capazes de aturar o sumiço e estresse de um estudante de Física e mesmo assim sempre estarem lá para conversar e se distrair. Estes capazes de conversar de assuntos sérios e em meio a isso arrancar risadas inimagináveis. Vocês fizeram parte disso e sempre serei grato.

Ao meu psicólogo, Rafael, o progresso acadêmico andou alinhado ao nosso progresso nas sessões. Se não fosse todo este trabalho, as sessões, as ideias, eu não teria tomado as decisões que tomei e muito menos suportado tudo isso. Obrigado por hoje e por sempre, obrigado por se orgulhar de mim e me mostrar visões diferentes da vida.

Deixo meu agradecimento aos professores Elias e Rogerio, por terem aceitado compor a banca e por terem aceitado fazer parte deste momento de finalização de algo tão importante para mim.

Como última menção, deixo um registro a minha gata Sky que, enquanto não estava dormindo, assistiu horas e mais horas de estudo e muitas vezes como um aviso para pausas dormiu em cima de todas minhas folhas.

“...found my hope and pride again, rebirth of a man.”
(Rafael Bittencourt e Kiko Loureiro)

RESUMO

Este trabalho de graduação tem como enfoque investigar detalhadamente a Teoria de Representações Projetivas a partir dos passos dados por Valentine Bargmann em 1954. Este, influenciado por Eugene Wigner e seu trabalho acerca das representações do grupo de Poincarè, é responsável por influenciar físicos de sua época até os dias de hoje. Apesar de ser um trabalho com rigor matemático, possui suas raízes vinculadas à teoria quântica, uma vez que a motivação inicial do desenvolvimento da teoria vem de uma exigência de simetria em Mecânica Quântica. Navegando desde os conceitos básicos até as generalizações detalhadas dos resultados obtidos, o atual trabalho tem como objetivo ser um material para estudantes interessados na área.

PALAVRAS-CHAVE: Física de partículas; Teoria Quântica de Campos; Mecânica Quântica; Teoria de Grupos.

ABSTRACT

This work focuses on investigating in detail the Theory of Projective Representations from the initial steps taken by Valentine Bargmann in 1954. This, influenced by Eugene Wigner and his work on the representations of the Poincaré group, is responsible for influencing physicists from his time to the nowadays. Despite being a work with mathematical rigor, it has its roots linked to quantum theory, since the initial motivation for the development of the theory comes from a requirement of symmetry in Quantum Mechanics. Navigating from the basic concepts to the detailed generalizations of the results obtained, the current work aims to be a material for students interested in the field.

KEYWORDS: Particle physics; Quantum Field Theory; Quantum Mechanics; Group Theory.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	FUNDAMENTOS DA TEORIA	11
2.1	RAIOS VETORIAIS E OPERATORIAIS	11
2.1.1	Conceitos Introdutórios	11
2.1.2	Raios Vetoriais e a Correspondência Um a Um	11
2.1.3	Distâncias e Raios Operatoriais	13
2.1.4	Representações de Raio e Seleção de Representativos	14
2.2	FATORES E EXPOENTES LOCAIS	20
2.2.1	Fator Local	20
2.2.1.1	Fatores Locais Equivalentes	22
2.2.2	Expoentes Locais	23
2.2.2.1	Expoentes Locais Equivalentes	24
2.2.2.2	Classes de Equivalência de Expoentes Locais	26
2.2.2.3	Grupo Local	27
3	EXTENSÃO DE RESULTADOS	33
3.1	REPRESENTAÇÕES COMPATÍVEIS	34
3.2	REPRESENTAÇÕES DE GRUPOS SIMPLEMENTE CONEXOS	36
3.2.1	Extensão de uma seleção local de representativos	39
3.2.2	Extensão de Expoentes Locais	41
4	TEORIA SOB A ÓTICA DOS GRUPOS DE LIE	44
4.1	NOÇÕES PRELIMINARES	44
4.2	EXPOENTES LOCAIS	47
4.2.1	Expoentes locais diferenciáveis	47
4.2.2	Expoentes locais diferenciáveis equivalentes	49
4.2.3	Expoentes locais de um grupo de um parâmetro	50
4.2.4	Expoentes locais canônicos	51
4.2.5	Expoentes locais canônicos equivalentes	52
4.2.6	Grupo Local e Expoentes Infinitesimais	54
4.2.7	Correspondência entre expoentes locais e infinitesimais	58
4.3	EXTENSÃO DE EXPOENTES LOCAIS	60
5	CONCLUSÃO	66
	REFERÊNCIAS	67

1 INTRODUÇÃO

A descrição de estados físicos por vetores complexos se torna necessária a partir do experimento realizado por Otto Stern e Walther Gerlach (SAKURAI, 1994), em 1922, para dar cabo de todos estados possíveis. A partir deste momento o espaço vetorial que contém os objetos matemáticos da teoria quântica é um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, complexo e de dimensão definida pela natureza do fenômeno que está sendo estudado. Sejam ψ e ϕ dois vetores de estado, a probabilidade de transição do estado ψ para o estado ϕ é dada por:

$$P = |(\psi, \phi)|^2. \quad (1)$$

Entretanto percebemos que para um outro estado $\psi' = \alpha\psi$, onde α é um número complexo unimodular, vemos que este valor permanece inalterado. Isto é, estados quânticos são invariantes pela multiplicação por fases complexas. Logo, a correspondência entre estados e vetores não é um a um. Para dar cabo da correspondência é necessária a introdução do conceito de raios vetoriais, uma classe de equivalência de vetores de estado $\Psi = \{\alpha\psi_0\}$, sendo α uma fase complexa unimodular e ψ_0 um vetor unitário fixo em $\mathcal{H}$. A correspondência entre raios vetoriais e estados quânticos, por sua vez, é um a um.

Uma transformação de simetria, no grau que nos interessa ao trabalho (WEINBERG, 1995), é aquela cuja realização não interfere nos resultados dos experimentos, ou seja, não altera a probabilidade de transição. Sejam $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ dois observadores conectados por uma transformação de simetria, se o observador $\mathcal{O}$ realiza o experimento e observa o sistema em um estado dado por Ψ , o observador $\mathcal{O}'$ observa o mesmo sistema em um estado Ψ' , tal que

$$P(\Psi \rightarrow \psi_n) = P(\Psi' \rightarrow \psi'_n), \quad (2)$$

isto é, a probabilidade de um sistema inicialmente representado por um estado Ψ ser encontrado em um de seus n autoestados deve permanecer inalterada para ambos os referenciais. Em outras palavras, a física deve permanecer a mesma independentemente do referencial adotado. Em um de seus trabalhos, E. P. Wigner no ano de 1931¹ provou um teorema importantíssimo responsável por relacionar transformações de simetria a operadores U em um espaço de Hilbert², sendo estes unitários e lineares ou antiunitários e antilineares.

Seja T_1 uma transformação de simetria que leva o raio vetorial Ψ a Ψ' e T_2 outra que leva o raio Ψ' a Ψ'' , o resultado de se realizar ambas transformações é T_2T_1 . Entretanto, os operadores relacionados a essas transformações não atuam diretamente sobre raios e sim sobre vetores. A atuação de $U(T_1)$ (operador unitário relacionado a transformação de simetria T_1) em um vetor $\psi_n \in \Psi_n$ deve levar a um vetor $U(T_1)\psi_n \in \Psi'_n$ e, claramente, a atuação de $U(T_2)$ deve levar a um vetor $U(T_2)U(T_1)\psi_n \in \Psi''_n$. Como inicialmente mencionado, vetores que diferem entre si por uma fase complexa unimodular pertencem ao mesmo raio e note que além de T_2 a transformação T_2T_1 leva ao mesmo raio. Desta

¹ (WIGNER, 1931).

² A prova deste teorema pode ser encontrada em (WIGNER, 1931), (WEINBERG, 1995), (SILVA; ROCHA, 2021).

forma $U(T_2, T_1)\psi_n$ também pertence ao raio Ψ'' , portanto

$$U(T_2)U(T_1)\psi_n = \omega_n(T_2, T_1)U(T_2, T_1)\psi_n. \quad (3)$$

Estes vetores diferem entre si somente pela fase $\omega(T_2, T_1)$, a qual terá seu estudo detalhado desde sua definição a sua manipulação no presente trabalho. Além disso, a linearidade de U nos diz que a fase é independente dos estados ψ_n , sejam ψ_a e ψ_b estados linearmente independentes e apliquemos (3) em $\psi_{ab} = \psi_a + \psi_b$:

$$U(T_2)U(T_1)(\psi_a + \psi_b) = \omega_{ab}(T_2, T_1)U(T_2, T_1)(\psi_a + \psi_b),$$

ao realizar a distributiva no lado esquerdo, temos

$$U(T_2)U(T_1)\psi_a + U(T_2)U(T_1)\psi_b = \omega_{ab}(T_2, T_1)U(T_2, T_1)(\psi_a + \psi_b),$$

logo

$$\omega_a U(T_2, T_1)\psi_a + \omega_b U(T_2, T_1)\psi_b = \omega_{ab}(T_2, T_1)U(T_2, T_1)(\psi_a + \psi_b). \quad (4)$$

Todo operador unitário ou antiunitário possui inversa, ou seu adjunto, também unitário e antiunitário. Ao multiplicar (4) por $U^{-1}(T_1, T_2)$ a esquerda, obtém-se

$$\omega_{ab}(T_2, T_1)(\psi_a + \psi_b) = \omega_a(T_2, T_1)\psi_a + \omega_b(T_2, T_1)\psi_b.$$

Como ψ_a e ψ_b são linearmente independentes, a igualdade só é válida se

$$\omega_{ab}(T_2, T_1) = \omega_a(T_2, T_1) = \omega_b(T_2, T_1). \quad (5)$$

Então, a fase em (3) é independente do vetor de estado e, portanto, tal equação pode ser reescrita como uma relação de operadores:

$$U(T_2)U(T_1) = \omega(T_2, T_1)U(T_2, T_1). \quad (6)$$

Esta relação define o que chamamos de uma representação do grupo de transformações de simetria a menos de uma constante, ou representação projetiva. Para os casos em que esta fase é equivalente a 1 (será demonstrado no Capítulo 2), temos uma representação genuína.

O trabalho tem como motivação a relação 6. A partir da mesma temos o desenvolvimento da Teoria de Representações Projetivas, dando início a fundamentação da mesma com algumas considerações necessárias (Capítulo 1), passando pelas definições desta fase e de uma útil substituição com verificação para uma caso em que é equivalente a 1 (Capítulo 2), obtendo quando possível a extensão dos resultados locais (Capítulo 3) e finalizando com o estudo da teoria sob a ótica dos grupos de Lie, estes de extrema importância física, culminando em um teorema central de (BARGMANN, 1954) que concatena todo o estudo destes grupos (Capítulos 4).

2 FUNDAMENTOS DA TEORIA

2.1 RAIOS VETORIAIS E OPERATORIAIS

2.1.1 Conceitos Introdutórios

No ano de 1939, Wigner publica um importante trabalho (WIGNER, 1939), desta vez referente a representações do grupo de Poincarè. Neste trabalho, nas páginas iniciais, Wigner diz que alguns conceitos como operadores infinitesimais e um conjunto de funções ao qual esses operadores podem ser aplicados não serão assumidos como verdade, como foi feito por Majorana e Dirac em trabalhos anteriores. O trabalho de Wigner, por suas próprias palavras, possui mais rigor matemático.

O trabalho de (BARGMANN, 1954), subsequente a esta publicação, tem como objetivo fundamentar a teoria utilizada por Wigner em 1939 e carrega o ideal explicitado pelo mesmo, possuindo um certo rigor matemático acima do habitual para física. Este fato nos leva a um estudo envolvendo muito mais conceitos e abstrações do ponto de vista de teoria de Grupos Topológicos e álgebra abstrata.

Para dar início aos estudos, esta seção tem um objetivo introdutório aos conceitos matemáticos, em conjunto com o trabalho de (BARGMANN, 1954) uma vez que o mesmo foi a referência principal do trabalho.

Um estado físico em Mecânica Quântica é descrito por um vetor de estado em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. O produto interno neste espaço é linear na segunda entrada e antilinear na primeira, então para dois vetores $\psi, \phi \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}(\psi, \lambda\phi) &= \lambda(\psi, \phi), \\ (\lambda\psi, \phi) &= \lambda^*(\psi, \phi),\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

onde λ é um número complexo arbitrário e λ^* seu complexo conjugado. A norma de um vetor ψ é dada por $\|\psi\| = (\psi, \psi)^{\frac{1}{2}}$. Para dois vetores unitários $\|\psi\| = \|\phi\| = 1$ temos

$$\|\psi - \phi\|^2 = (\psi - \phi)^*(\psi - \phi) = \psi^*\psi - \psi^*\phi - \phi^*\psi + \phi^*\phi = |\psi|^2 - \psi^*\phi - \phi^*\psi + |\phi|^2,$$

ou ainda

$$\|\psi - \phi\|^2 = 2 - \psi^*\phi - \phi^*\psi = 2[1 - \text{Re}(\psi, \phi)],$$

que resulta em

$$\|\psi - \phi\|^2 = 2[1 - \text{Re}(\psi, \phi)] \leq 2|1 - (\psi, \phi)|,\tag{2.1.2}$$

onde Re representa a parte real do produto interno. Com essas noções, o próximo passo é dar início ao estudo dos raios vetoriais.

2.1.2 Raios Vetoriais e a Correspondência Um a Um

A fim de estabelecer a correspondência entre vetor de estado e estado físico, busca-se um objeto capaz de descrever um estado sem que a multiplicação por um escalar complexo unimodular o altere.

Sejam x, y e z elementos de um conjunto arbitrário A . Uma relação de equivalência denotada por $(\sim)$ em A é uma relação que cumpre:

1. Reflexão: $x \sim x$, um elemento é equivalente a ele mesmo;
2. Simetria: se, $x \sim y$ então $y \sim x$;
3. Transitividade: se $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x \sim z$.

Uma classe de equivalência de um elemento $r \in A$ é:

$$\bar{r} := \{r \in A | r \sim x\}, \quad (2.1.3)$$

em outras palavras, é o conjunto de todos os elementos que se relacionam a r por $\sim$.

Proposição 1. *Podemos construir uma relação de equivalência em $\mathcal{H}$, tal que $\psi, \psi' \in \mathcal{H}$ são ditos equivalentes se:*

$$\psi = \alpha\psi', \quad (2.1.4)$$

onde α é uma fase complexa unimodular.

Prova: Para conferir a propriedade de reflexão, temos que

$$\psi = \alpha\psi \in \mathcal{H}. \quad (2.1.5)$$

Para a propriedade de simetria, escrevendo $\psi' = \beta\psi$ com $\beta \equiv \frac{1}{\alpha}$ temos $\psi' \sim \psi$ e por (2.1.4) $\psi \sim \psi'$. Por fim, para a propriedade de transitividade, seja $\psi' = \gamma\psi''$ onde $\psi'' \in \mathcal{H}$, $\gamma \in \mathbb{C}$ e $|\gamma| = 1$, então

$$\psi = \alpha\psi' = \alpha\gamma\psi''. \quad (2.1.6)$$

Fazendo $\xi \equiv \alpha\gamma$ temos

$$\psi = \xi\psi'', \quad (2.1.7)$$

ou seja, se $\psi \sim \psi'$ e $\psi' \sim \psi''$, então $\psi \sim \psi''$ e a relação (2.1.4) é uma relação de equivalência em $\mathcal{H}$. $\square$

De acordo com (SCHAAF, 2017), o verdadeiro espaço de um estado quântico é formado pelas classes de equivalência do Espaço de Hilbert sem a origem sob a relação (2.1.4). Este espaço é chamado de Espaço Projetivo de Hilbert $\mathbf{P}(\mathcal{H}) := (\mathcal{H} \setminus \{0\}) / \sim$. A classe de equivalência $[\psi] \in \mathbf{P}(\mathcal{H})$ de vetores não nulos (a isto se deve a necessidade do espaço não conter $\{0\}$) $\psi \in \mathcal{H}$ é chamada de raio vetorial ψ . A notação utilizada para raios será Ψ em vez de $[\psi]$. Finalmente a correspondência um a um é estabelecida, cada raio vetorial corresponde a um único estado quântico.

2.1.3 Distâncias e Raios Operatoriais

Podemos agora dar início à fundamentação de conceitos acerca dos raios vetoriais. Sejam Ψ e Φ dois raios, o produto interno entre estes objetos é

$$\Psi \cdot \Phi = |(\psi, \phi)|, \quad (2.1.8)$$

onde ψ e ϕ são representativos (elementos da classe de equivalência) de Ψ e Φ , respectivamente. A equação (2.1.8) nos permite concluir que o produto interno é $\Psi \cdot \Phi = 1$ se, e somente se, $\psi = \phi$. Uma vez que, os vetores são normalizados.

A distância entre dois raios $d(\Psi, \Phi)$ é dada pela menor norma $\|\psi - \phi\|$. Então façamos $\psi = \alpha\psi_0$ e $\phi = \tau\phi_0$ em (2.1.2) com $|\alpha| = |\tau| = 1$:

$$\|\psi - \phi\|^2 = 2\{1 - \operatorname{Re}[\alpha^* \tau (\psi_0, \phi_0)]\}. \quad (2.1.9)$$

Podemos escrever $(\psi_0, \phi_0) = |\lambda| |(\psi_0, \phi_0)|$ onde $\lambda \in \mathbb{C}$ e $|\lambda| = 1$. Vejamos antes que

$$|(\psi_0, \phi_0)| = |\alpha| |\tau| |(\psi_0, \phi_0)|$$

e como $|\alpha| = |\alpha|^*$,

$$|(\psi_0, \phi_0)| = |\alpha^*| |\tau| |(\psi_0, \phi_0)| = |\alpha^* \tau (\psi_0, \phi_0)| = |(\alpha\psi_0, \tau\phi_0)| = \Psi \cdot \Phi. \quad (2.1.10)$$

Então

$$\|\psi - \phi\|^2 = 2\{1 - \operatorname{Re}(\alpha^* \tau \lambda) \Psi \cdot \Phi\}. \quad (2.1.11)$$

A norma atinge seu valor mínimo quando $\operatorname{Re}(\alpha^* \tau \lambda) = 1$, portanto

$$d(\Psi, \Phi) = [2(1 - \Psi \cdot \Phi)]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.1.12)$$

Nota-se que a distância entre dois raios só é nula se os mesmos coincidirem. A noção de distância nos é de extrema importância para o conceito de continuidade forte para representações de raio que veremos nas próximas seções.

Vejamos o seguinte lema:

Lema 1. *O produto escalar $\Psi \cdot \Phi$ é contínuo em ambos fatores com respeito a métrica $d(\Psi, \Phi)$, isto é, tal distância possui um limite superior.*

Prova: Sejam quatro raios Ψ_1, Ψ_2, Φ_1 e Φ_2 pertencentes a $\mathcal{H}$, então:

$$|\Psi_1 \cdot \Phi_1 - \Psi_2 \cdot \Phi_2| = |\Psi_1 \cdot \Phi_1 - \Psi_1 \cdot \Phi_2 + \Psi_1 \cdot \Phi_2 - \Psi_2 \cdot \Phi_2|, \quad (2.1.13)$$

ou ainda

$$|\Psi_1 \cdot \Phi_1 - \Psi_2 \cdot \Phi_2| \leq |(\psi_1, \phi_1) - (\psi_1, \phi_2)| + |(\psi_1, \phi_2) - (\psi_2, \phi_2)|.$$

Note-se que, via desigualdade triangular

$$|(\psi_1, \phi_1) - (\psi_1, \phi_2)| + |(\psi_1, \phi_2) - (\psi_2, \phi_2)| \leq |(\psi_1, \phi_1)| - |(\psi_2, \phi_2)| = \|\phi_1 - \phi_2\| + \|\psi_1 - \psi_2\|,$$

que nos leva a

$$|\Psi_1 \cdot \Phi_1 - \Psi_2 \cdot \Phi_2| \leq d(\Phi_1, \Phi_2) + d(\Psi_1, \Psi_2). \quad (2.1.14)$$

Ainda no âmbito dos raios, podemos construir raios operatoriais. Um raio operatorial $\mathbf{U}$ é o conjunto de todos os operadores τU_0 , onde τ é uma fase complexa unimodular e U_0 é um operador unitário fixo. Dessa maneira fica claro que o produto entre dois raios operatoriais $\mathbf{UV}$ é, assim como antes, o conjunto que consiste em todos os produtos UV onde U e V são representativos dos raios operatoriais $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$, respectivamente. Além disso o raio identidade é constituído do operador unitário $\mathbb{1}$. O raio inverso de $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}^{-1}$, é o conjunto de operadores U^{-1} , onde claramente $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U} = \mathbb{1}$. Uma última noção necessária é a de que um raio vetorial $\mathbf{U}\Psi$ é o conjunto de todos os vetores $U\psi$ compostos pelos operadores que compõem o raio operatorial $\mathbf{U}$ atuando nos vetores que compõem o raio vetorial Ψ .

2.1.4 Representações de Raio e Seleção de Representativos

Antes de prosseguirmos com o desenvolvimento da teoria são necessários alguns passos de recuo para introdução de conceitos (BARATA, 2023) que permeiam os avanços. Seja G um conjunto de elementos $\{r, s, t, \dots\}$ e $\diamond : G \times G \rightarrow G$ uma operação binária definida sobre G . O par $(G, \diamond)$ é dito um grupo se cumprir as seguintes condições:

1. *Associatividade*. Para quaisquer $r, s, t \in G$, $(r \diamond s) \diamond t = r \diamond (s \diamond t)$;
2. *Elemento neutro*. Existir um único elemento $e \in G$, chamado elemento neutro, tal que $e \diamond r = r \diamond e = r$, para qualquer $r \in G$;
3. *Elemento simétrico*. Para todo $r \in G$ existe um único elemento $r^{-1} \in G$, tal que, $r \diamond r^{-1} = r^{-1} \diamond r = e$. Este elemento é denominado simétrico de r ou inverso de r .

Com o conceito de grupo bem estabelecido, podemos avançar para as *representações de grupo* (BARATA, 2023). Uma representação de um grupo G em um espaço vetorial $\mathbb{V}$ é uma aplicação que a cada elemento de G associa um operador linear inversível $\Pi : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ que cumpra as seguintes propriedades:

1. $\Pi(r)\Pi(s) = \Pi(rs)$;
2. $\Pi(e) = \mathbb{1}$;
3. $\Pi(r^{-1}) = \Pi(r)^{-1}$,

para quaisquer $r, s \in G$.

Uma representação de grupo pode ainda ser entendida como um mapeamento $\varphi : G \rightarrow GL(\mathbb{V})$, tal que:

$$\varphi(r \diamond s) = \varphi(r) * \varphi(s), \quad (2.1.15)$$

ou seja, um homomorfismo entre G e o Grupo Linear Geral $GL(V)$ formado pelas matrizes inversíveis com a operação de matrizes usual $*$.

Agora será introduzido o conceito de representações de raio, sobre o qual nos dedicaremos ao estudo com denodo. Uma representação de raio de um grupo G (BARGMANN, 1954) com elementos $r, s, \dots$ e o elemento neutro e , é um mapeamento¹ $r \rightarrow U_r$ do grupo em raios operatoriais unitários, tal que

$$U_r U_s = U_{rs}, \quad (2.1.16)$$

com $r, s \in G$. Temos ainda que:

$$U_e = \mathbb{1} \quad (2.1.17)$$

e

$$U_r^{-1} = (U_r)^{-1}. \quad (2.1.18)$$

Usualmente a continuidade de uma função é definida a partir do conceito de limites, a partir deste momento, passamos a definir continuidade com a utilização do conceito de distância estabelecido e explorado na subseção 2.1.3, este mais elementar. A continuidade definida desta maneira é chamada de forte continuidade. Uma representação de raio do grupo G é dita contínua se a condição a seguir for satisfeita:

Para um elemento qualquer $r \in G$ um raio qualquer Ψ e um $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança² $\mathcal{V}$ de r em G tal que $d(U_s \Psi, U_r \Psi) < \epsilon$ se $s \in \mathcal{V}$.

Como já mencionado, Wigner em seu trabalho de 1939 deixa claro que possui o objetivo de demonstrar alguns conceitos que eram assumidos como verdade. Agora será provado um importantíssimo e belo teorema referente a possibilidade de selecionar conjuntos de operadores com continuidade forte para um grupo G . Este teorema foi provado por Wigner em (WIGNER, 1939). Esta prova seguirá os passos de (BARGMANN, 1954) e também de (SILVA; ROCHA, 2021).

Teorema 1. *Dada uma representação de raio contínua, para todo elemento r de uma vizinhança $\mathcal{V}_0$ do elemento e de G , escolhida de forma adequada, pode ser escolhido um conjunto contínuo de representativos $U_r \in U_r$.*

Ou seja, para qualquer vetor ψ , qualquer $r \in \mathcal{V}_0$ e qualquer $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de r tal que $\|U_s \psi - U_r \psi\| < \epsilon$ se $s \in \mathcal{V}$. Um conjunto de representativos que cumpre este teorema é chamado de conjunto de representativos admissíveis. A vizinhança $\mathcal{V}_0$ é uma vizinhança esférica com o objetivo de limitar o representativo g_r .

Prova: Sejam Ψ um raio fixo e pertencente a $\mathcal{H}$ e ψ um representativo de Ψ . Definimos $g_r = \Psi \cdot U_r \Psi$. Como mostrado no Lema 1 o produto escalar é contínuo e assim a função g_r também o é. Podemos escolher para um α fixo e positivo ($0 < \alpha < 1$) uma vizinhança $\mathcal{V}_0$ do elemento unitário e de G tal que $\alpha < g_r \leq 1$ para todo $r \in \mathcal{V}_0$. Uma estratégia para a prova é selecionar um representativo determinado $U_r \in U_r$, tal que

$$g_r = \Psi \cdot U_r \Psi = (\psi, U_r \psi). \quad (2.1.19)$$

¹ Seguindo as definições de (BARGMANN, 1954) lidaremos com grupos topológicos contínuos sem explicitar isso. Ainda, todo homomorfismo (ou isomorfismo) de um grupo em outro será assumido contínuo.

² Se $x \in X$, uma vizinhança $\mathcal{V}$ de x é um conjunto $\mathcal{V} \subset X$ que contém x e um conjunto aberto de x .

Vamos definir algumas quantidades úteis para o desenvolvimento da prova:

$$d_{r,s}(\psi) = d(\mathbf{U}_r \Psi, \mathbf{U}_s \Psi), \quad (2.1.20)$$

$$\sigma_{r,s}(\psi) = (U_r \psi, U_s \psi), \quad (2.1.21)$$

$$Z_{r,s}(\psi) = U_s \psi - \sigma_{r,s}(\psi) U_r \psi, \quad (2.1.22)$$

onde r, s são elementos de $\mathcal{V}_0$ e $\psi \in \Psi$.

Note que $Z_{r,s}(\psi)$ é ortogonal a $U_r \psi$:

$$(U_r \psi, Z_{r,s}(\psi)) = (U_r \psi, U_s \psi) - \sigma_{r,s}(\psi)(U_r \psi, U_r \psi), \quad (2.1.23)$$

o primeiro termo é $\sigma_{r,s}(\psi)$, a unitariedade de U_r e de ψ nos leva a

$$(U_r \psi, U_r \psi) = (\psi, \psi) = \|\psi\|^2 = 1, \quad (2.1.24)$$

então (2.1.23) se torna apenas

$$(U_r \psi, Z_{r,s}(\psi)) = \sigma_{r,s}(\psi) - \sigma_{r,s}(\psi) = 0. \quad (2.1.25)$$

A fim de obter outras relações envolvendo o produto interno, vejamos o que ocorre com $\|Z_{r,s}(\psi)\|^2$:

$$\|Z_{r,s}(\psi)\|^2 = (U_s \psi - \sigma_{r,s}(\psi) U_r \psi, U_s \psi - \sigma_{r,s}(\psi) U_r \psi), \quad (2.1.26)$$

$$\|Z_{r,s}(\psi)\|^2 = (U_s \psi, U_s \psi) - (U_s \psi, \sigma_{r,s}(\psi) U_r \psi) - (\sigma_{r,s}(\psi) U_r \psi, U_s \psi - \sigma_{r,s}(\psi) U_r \psi). \quad (2.1.27)$$

O produto $(U_s \psi, U_s \psi)$ se comporta como $(U_r \psi, U_r \psi)$ em (2.1.24), uma vez que U_s também é unitário. Reescrevendo o último termo do lado direito como $(\sigma_{r,s}(\psi) U_r \psi, Z_{r,s}(\psi))$, temos

$$\|Z_{r,s}(\psi)\|^2 = 1 - \sigma_{r,s}(\psi)(U_s \psi, U_r \psi) - (\sigma_{r,s}(\psi) U_r \psi, Z_{r,s}(\psi)), \quad (2.1.28)$$

porém $Z_{r,s}$ é ortogonal a U_r , então

$$\|Z_{r,s}(\psi)\|^2 = 1 - \sigma_{r,s}(U_s \psi, U_r \psi). \quad (2.1.29)$$

Veja da definição de $\sigma_{r,s} = (U_r \psi, U_s \psi)$ em (2.1.21) que é possível obter $\sigma_{r,s}^* = (U_s \psi, U_r \psi)$, assim

$$\|Z_{r,s}(\psi)\|^2 = 1 - |\sigma_{r,s}(\psi)|^2. \quad (2.1.30)$$

Da expressão (2.1.12) obtém-se uma importante relação entre o produto interno e a distância entre dois raios. Dando início ao processo, elevando ambos os lados ao quadrado e isolando o termo $\Psi \cdot \Phi$

$$\frac{d^2(\Psi, \Phi)}{2} + 1 = -\Psi \cdot \Phi, \quad (2.1.31)$$

multiplicando por (-1) e elevando novamente ao quadrado

$$1 - d^2(\Psi, \Phi) + \frac{d^4(\Psi, \Phi)}{4} = (\Psi \cdot \Phi)^2. \quad (2.1.32)$$

Rearranjando e multiplicando novamente por (-1) , tem-se por fim

$$1 - (\Psi \cdot \Phi)^2 = d^2 \left(1 - \frac{1}{4} d^2 \right) \leq d^2, \quad (2.1.33)$$

onde $d = d(\Psi, \Phi)$. De volta a (2.1.30) note que $|\sigma_{r,s}(\psi)|^2 = |(U_r \psi, U_s \psi)|^2 = (\mathbf{U}_r \Psi \cdot \mathbf{U}_s \Psi)^2$ por (2.1.8), ou seja

$$||Z_{r,s}(\psi)||^2 = 1 - |\sigma_{r,s}(\psi)|^2 \leq d(\mathbf{U}_r \Psi, \mathbf{U}_s \Psi). \quad (2.1.34)$$

Utilizando (2.1.20) conclui-se que

$$||Z_{r,s}(\psi)||^2 \leq d_{r,s}^2(\psi). \quad (2.1.35)$$

Com o intuito de encontrar relações envolvendo U_s será feita a mudança de ψ por ϕ e o cálculo de $(\phi, Z_{r,s}(\phi))$

$$(\phi, Z_{r,s}(\phi)) = (\phi, U_s \phi - \sigma_{r,s}(\phi) U_r \phi), \quad (2.1.36)$$

ou seja

$$(\phi, Z_{r,s}(\phi)) = (\phi, U_s \phi) - \sigma_{r,s}(\phi) (\phi, U_r \phi). \quad (2.1.37)$$

De acordo com (2.1.19) tem-se $g_s = (\phi, U_s \phi)$ e $g_r = (\phi, U_r \phi)$, portanto

$$(\phi, Z_{r,s}(\phi)) = g_s - \sigma_{r,s}(\phi) g_r, \quad (2.1.38)$$

de modo que

$$-\sigma_{r,s}(\phi) = \frac{1}{g_r} [-g_s + (\phi, Z_{r,s}(\phi))]. \quad (2.1.39)$$

Somando 1 a ambos os lados tem-se

$$1 - \sigma_{r,s}(\phi) = \frac{1}{g_r} [g_r - g_s + (\phi, Z_{r,s}(\phi))]. \quad (2.1.40)$$

De (2.1.9) tem-se ainda que

$$||\psi - \phi||^2 \leq 2|1 - (\psi, \phi)|. \quad (2.1.41)$$

Utilizando tal relação para o produto interno que vem sendo trabalhado temos que

$$||U_s \phi - U_r \phi||^2 \leq 2|1 - (U_r \phi, U_s \phi)| = 2|1 - \sigma_{r,s}(\phi)| \quad (2.1.42)$$

e desta forma (2.1.40) se torna

$$||U_s \phi - U_r \phi||^2 \leq 2 \left| \frac{1}{g_r} [g_r - g_s + (\phi, Z_{r,s}(\phi))] \right|. \quad (2.1.43)$$

Finalmente temos uma relação envolvendo a distância entre dois vetores. Para o progresso final em busca de um limite superior note que $g_r > \alpha$ e assim $\frac{1}{g_r} < \frac{1}{\alpha}$. Logo (2.1.43) é

$$\|U_s\phi - U_r\phi\|^2 \leq \frac{2}{\alpha} [|g_r - g_s| + |(\phi, Z_{r,s}(\phi))|]. \quad (2.1.44)$$

Vejamos o que ocorre com o módulo $|g_r - g_s| = |(\phi, U_r\phi) - (\phi, U_s\phi)|$. A desigualdade triangular fornece

$$|(\phi, U_r\phi) - (\phi, U_s\phi)| \leq \|(\phi, U_r\phi)\| - \|(\phi, U_s\phi)\|, \quad (2.1.45)$$

e a desigualdade de Schwarz, por sua vez, fornece

$$\|(\phi, U_r\phi)\| - \|(\phi, U_s\phi)\| \leq \|\phi\| \|U_r\phi\| - \|\phi\| \|U_s\phi\|. \quad (2.1.46)$$

Como ϕ é unitário

$$|g_r - g_s| \leq \|U_r\phi - U_s\phi\| \leq d_{r,s}(\phi). \quad (2.1.47)$$

Além disso, pela desigualdade de Schwarz $|(\phi, Z_{r,s}(\phi))| \leq \|\phi\| \|Z_{r,s}(\phi)\|$ e utilizando a unitariedade de ϕ e (2.1.35) temos $|(\phi, Z_{r,s}(\phi))| \leq d_{r,s}(\phi)$. Então

$$\|U_s\phi - U_r\phi\|^2 \leq \frac{2}{\alpha} [d_{r,s}(\phi) + d_{r,s}(\phi)], \quad (2.1.48)$$

$$\|U_s\phi - U_r\phi\|^2 \leq \frac{4}{\alpha} d_{r,s}(\phi). \quad (2.1.49)$$

A relação (2.1.49), por si só, já estabelece a continuidade de $U_r\phi$, pois para todo $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de r tal que $\frac{4}{\alpha} d_{r,s}(\phi) < \epsilon$ se $s \in \mathcal{V}$, ou seja, $d_{r,s}(\phi)$ tem um valor máximo limitado. Porém, este procedimento é suficiente para provar que apenas $U_r\phi$ e qualquer vetor colinear ao mesmo possui continuidade forte. Para abranger todo o espaço, Wigner deu o passo além ao provar a continuidade forte para um vetor ortogonal a este.

Seja $\chi = 2^{-\frac{1}{2}}(\phi + \varphi)$, onde ϕ e φ são ortogonais e χ é unitário. Veja então

$$(U_r\phi, Z_{r,s}(\chi)) = (U_r\phi, U_s\chi) - \sigma_{r,s}(\chi)(U_r\phi, U_r\chi). \quad (2.1.50)$$

Ao somar e subtrair $(U_s\phi, U_s\chi)$ em ambos os lados de (2.1.50) obtém-se

$$(U_r\phi, Z_{r,s}(\chi)) = (U_r\phi, U_s\chi) - \sigma_{r,s}(\chi)(U_r\phi, U_r\chi) - (U_s\phi, U_s\chi) + (U_s\phi, U_s\chi). \quad (2.1.51)$$

Os termos $(U_r\phi, U_s\chi)$ e $-(U_s\phi, U_s\chi)$ podem ser rearranjados de tal forma a

$$(U_r\phi, Z_{r,s}(\chi)) = (U_r\phi - U_s\phi, U_s\chi) + (U_s\phi, U_s\chi) - \sigma_{r,s}(\chi)(U_r\phi, U_r\chi). \quad (2.1.52)$$

Como U_s é unitário $(U_s\phi, U_s\chi) = (\phi, U_{s^{-1}}U_s\chi) = (\phi, \chi) = 2^{-\frac{1}{2}}$, e o mesmo ocorre para $(U_r\phi, U_r\chi)$, portanto

$$(U_r\phi, Z_{r,s}(\chi)) = (U_r\phi - U_s\phi, U_s\chi) + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_{r,s}(\chi). \quad (2.1.53)$$

Escrevendo $(U_r\phi - U_s\phi, U_s\chi)$ como $-(U_s\phi - U_r\phi, U_s\chi)$, (2.1.53) se torna

$$(U_r\phi, Z_{r,s}(\chi)) + (U_s\phi - U_r\phi, U_s\chi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \sigma_{r,s}\chi), \quad (2.1.54)$$

$$1 - \sigma_{r,s}(\chi) = \sqrt{2}[(U_r\phi, Z_{r,s}(\chi)) + (U_s\phi - U_r\phi, U_s\chi)]. \quad (2.1.55)$$

Assim como anteriormente, utilizando (2.1.41)

$$||U_s\chi - U_r\chi||^2 \leq 2|1 - \sigma_{r,s}(\chi)|. \quad (2.1.56)$$

Logo,

$$2|1 - \sigma_{r,s}(\chi)| = 2^{\frac{3}{2}}[|(U_r\phi, Z_{r,s}(\chi))| + |(U_s\phi - U_r\phi, U_s\chi)|], \quad (2.1.57)$$

pela desigualdade de Schwarz $|(U_r\phi, Z_{r,s}(\chi))| \leq d_{r,s}(\chi)$ e $|(U_s\phi - U_r\phi, U_s\chi)| \leq ||U_s\phi - U_r\phi||$. Por fim, a distância obedece a seguinte relação

$$||U_s\chi - U_r\chi||^2 \leq 2^{\frac{3}{2}}[d_{r,s}(\chi) + ||U_s\phi - U_r\phi||]. \quad (2.1.58)$$

A equação (2.1.58) mostra que a continuidade de $U_r\phi$, provada anteriormente, implica a continuidade de $U_r\chi$ e também a continuidade de $U_r\varphi$. Para finalizar, se ψ é uma combinação linear de ϕ e φ ($\psi = \lambda_1\varphi + \lambda_2\phi$) é claro que $U_r\psi$ é contínuo. $\square$

Perceba o quão importante este teorema é: operadores em Mecânica Quântica tem a exata função de replicar a ação humana de realizar uma medida em um experimento. Para que isso esteja de acordo com a realidade não podem haver descontinuidades na atuação de um objeto responsável por esta conexão. Este teorema nos garante que é possível encontrar operadores aos quais a atuação em vetores de estado é contínua, corroborando a utilização de tais objetos como retrato da ação de medir na natureza. Porém, note que este conjunto de operadores é definido em uma vizinhança da origem, ou seja, até o momento isto é válido localmente. Mais adiante será demonstrado que é possível selecionar tais representativos por todo um grupo em certas condições, o que elimina de vez a possibilidade de descontinuidade nas atuações dos operadores.

Além disso, para um dado conjunto de representativos U_r admissíveis (isto é, que satisfaz o Teorema 1) em uma vizinhança $\mathcal{V}_0$ do elemento unitário e de G , se $\phi(r)$ é uma fase complexa unimodular contínua do elemento r na vizinhança $\mathcal{V}_0$, então podemos escrever

$$U'_r = \phi(r)U_r. \quad (2.1.59)$$

Esta relação também define um conjunto de representativos admissíveis em $\mathcal{V}_0$. O inverso também é válido: uma equação da forma (2.1.59) deve conter uma vizinhança $\mathcal{V}_1$ contida na intersecção entre a vizinhança $\mathcal{V}_0$, onde o conjunto U_r é definido, e a vizinhança onde U'_r é definido $\mathcal{V}_1$.

2.2 FATORES E EXPOENTES LOCAIS

Como já mencionado, uma representação de raio é o mapeamento dos elementos do grupo em raios operatoriais do espaço de Hilbert tal que

$$U_r U_s = U_{rs}, \quad (2.2.1)$$

porém, como discutindo na introdução do trabalho, do ponto de vista dos representativos temos uma outra relação

$$U_r U_s = \omega(r, s) U_{rs}, \quad (2.2.2)$$

onde $\omega(r, s)$ é uma fase complexa unimodular responsável por estabelecer o pertencimento de $U_r U_s$ e U_{rs} ao mesmo raio. Esta fase é chamada de fator local e a mesma possui uma substituição muito útil que dá origem ao expoente local. Tais elementos serão amplamente estudados e trabalhados nesta seção com a finalidade de estabelecer todas as propriedades necessárias e ainda analisar um caso particular no qual tal fase é equivalente a 1.

2.2.1 Fator Local

O fator local $\omega(r, s)$ é uma função complexa unimodular com as seguintes propriedades:

1. Se $\mathcal{V}_0$ é uma vizinhança do elemento unitário de G e assumindo $U_e = 1$, temos:

$$\omega(e, e) = 1; \quad (2.2.3)$$

2. Para três elementos r, s e t pertencentes a vizinhança $\mathcal{V}_0$ adequadamente escolhida de modo que contenha os produtos rs, st e rst , a lei de associatividade $(U_r U_s) U_t = U_r (U_s U_t)$ implica:

$$\omega(r, s) \omega(rs, t) = \omega(s, t) \omega(r, st). \quad (2.2.4)$$

Demonstração: Fazendo $r \rightarrow e$ e $s \rightarrow e$ em (2.2.1), e lançando mão da propriedade $U_e = 1$, temos

$$U_e U_e = \omega(e, e) U_{ee}.$$

O produto do elemento neutro com ele mesmo continua sendo e , portanto

$$\omega(e, e) = 1$$

e (2.2.3) é obtida.

Para a segunda propriedade, vejamos a lei de associatividade dos operadores

$$(U_r U_s) U_t = U_r (U_s U_t),$$

recorrendo a (2.2.2)

$$\omega(r, s) U_{rs} U_t = \omega(s, t) U_r U_{st}.$$

Novamente utilizando a lei de associatividade

$$\omega(r, s)\omega(rs, t)U_{rst} = \omega(s, t)\omega(r, st)U_{rst},$$

a aplicação de U_{rst}^{-1} à direita leva, por fim, a

$$\omega(r, s)\omega(rs, t) = \omega(s, t)\omega(r, st).$$

Desta forma, ambas as propriedades estão demonstradas.

Devido ao Teorema 1 podemos afirmar que um conjunto de representativos admissíveis é um conjunto de operadores de continuidade forte. Vejamos a seguinte proposição (SILVA; ROCHA, 2021):

Proposição 2. *Para uma dada representação de raio, a continuidade forte de um conjunto de representativos admissíveis implica a continuidade dos fatores locais.*

Prova: Seja $\psi \in \mathcal{H}$, comecemos com

$$[\omega(r', s') - \omega(r, s)]U_{r's'}\psi = \omega(r', s')U_{r's'}\psi - \omega(r, s)U_{r's'}\psi. \quad (2.2.5)$$

A fim de obter outro arranjo para a equação (2.2.5), principalmente em seu lado direito, vamos somar e subtrair $U_{r'}U_s\psi$ e $U_rU_s\psi$ de ambos os lados, então

$$\begin{aligned} & [\omega(r', s') - \omega(r, s)]U_{r's'}\psi = \\ & = \omega(r', s')U_{r's'}\psi - \omega(r, s)U_{r's'}\psi + (U_{r'}U_s)\psi - (U_{r'}U_s)\psi + (U_rU_s)\psi - (U_rU_s)\psi. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Fazendo uso de (2.2.4)

$$\begin{aligned} & [\omega(r', s') - \omega(r, s)]U_{r's'}\psi = \\ & = U_{r'}U_s\psi - \omega(r, s)U_{r's'}\psi + \omega(r, s)U_{rs}\psi - U_rU_s\psi + U_{r'}U_s\psi - U_{r'}U_s\psi, \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

ou ainda

$$[\omega(r', s') - \omega(r, s)]U_{r's'}\psi = \omega(r, s)(U_{rs} - U_{r's'})\psi + U_{r'}(U_{s'} - U_s)\psi + (U_{r'} - U_r)U_s\psi. \quad (2.2.8)$$

O interesse está sobre a continuidade provada através da distância entre dois objetos, para isso olhemos para a norma de (2.2.8). A desigualdade triangular fornece

$$\begin{aligned} & ||[\omega(r', s') - \omega(r, s)]U_{r's'}\psi|| \leq \\ & \leq ||\omega(r, s)(U_{rs} - U_{r's'})\psi|| + ||U_{r'}(U_{s'} - U_s)\psi|| + ||U_s(U_{r'} - U_r)\psi||. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Para simplificar o lado esquerdo temos, para um λ complexo, $(\lambda Uf, \lambda Uf)^{\frac{1}{2}} = [\lambda\lambda^*(Uf, Uf)]^{\frac{1}{2}}$. Como $\lambda\lambda^* = |\lambda|^2$, $|\lambda|(Uf, Uf)^{\frac{1}{2}}$ e U é unitário, resta $|\lambda|(f, U^{-1}Uf) = |\lambda|$. Desta forma o lado esquerdo de (2.2.9) se torna

$$||[\omega(r', s') - \omega(r, s)]U_{r's'}\psi|| = |\omega(r', s') - \omega(r, s)|. \quad (2.2.10)$$

Como $\omega(r, s)$ é unimodular por definição e $U_{r'}$ é unitário, podemos simplificar o lado direito de (2.2.9) em dois passos (um para cada termo):

1. $||\omega(r, s)(U_{rs} - U_{r's'})\psi||$:

$$||\omega(r, s)(U_{rs} - U_{r's'})\psi|| = (\omega(r, s)U_{rs}\psi - \omega(r, s)U_{r's'}\psi, \omega(r, s)U_{rs}\psi - \omega(r, s)U_{r's'}\psi)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.11)$$

$$|\omega(r, s)|(U_{rs}\psi - U_{r's'}\psi, U_{rs}\psi - U_{r's'}\psi)^{\frac{1}{2}} = ||(U_{rs} - U_{r's'})\psi||. \quad (2.2.12)$$

2. $||U_{r'}(U_{s'} - U_s)\psi||$:

$$||U_{r'}(U_{s'} - U_s)\psi|| = (U_{r'}(U_{s'} - U_s)\psi, U_{r'}(U_{s'} - U_s)\psi)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.13)$$

$$(U_{r'}(U_{s'} - U_s)\psi, U_{r'}(U_{s'} - U_s)\psi)^{\frac{1}{2}} = ((U_{s'} - U_s)\psi, U_{r'^{-1}}U_{r'}(U_{s'} - U_s)\psi)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.14)$$

$$||U_{r'}(U_{s'} - U_s)\psi|| = ||(U_{s'} - U_s)\psi||. \quad (2.2.15)$$

Por fim, voltamos a expressão completa, agora simplificada

$$|\omega(r', s') - \omega(r, s)| \leq ||(U_{rs} - U_{r's'})\psi|| + ||(U_{s'} - U_s)\psi|| + ||(U_{r'} - U_r)\psi||. \quad (2.2.16)$$

Podemos concluir que para um par de elementos r, s de G e um $\epsilon > 0$, deve existir uma vizinhança $\mathcal{V}_1$ tal que a distância $|\omega(r', s') - \omega(r, s)| < \epsilon$, sempre que os elementos r, s , e seus inversos pertencerem a $\mathcal{V}_1$. $\square$

De maneira generalizada, pode-se dizer que qualquer função complexa $\omega(r, s)$ unimodular que seja definida para os elementos r e s de alguma vizinhança $\mathcal{V}$ do grupo G é dita um fator local de G definido em $\mathcal{V}$ se: (2.2.3) é válida e (2.2.4) é válida sempre que os produtos $rs, st \in \mathcal{V}$. Para o caso em que a vizinhança $\mathcal{V}$ coincide com o grupo G de tal maneira que (2.2.4) permaneça válida por todo o grupo, a função ω passa a ser chamada de fator de G .

2.2.1.1 Fatores Locais Equivalentes

Além das propriedades já mencionadas e exploradas, fatores locais definidos em vizinhanças diferentes podem ser equivalentes. A forma dos representativos selecionados durante a prova do Teorema 1 é compatível com o necessário para realizá-la, mas não carrega significação física. Podemos então, como já dito, utilizar representativos na forma (2.1.59). Vejamos como se dá (2.2.2) nestes novos termos:

$$U_r' U_s' = \omega'(r, s) U' rs, \quad (2.2.17)$$

$$\phi(r) U_r \phi(s) U_s = \omega'(r, s) \phi(rs) U_{rs}. \quad (2.2.18)$$

Fazendo uso de (2.2.4)

$$U_{rs} \omega(r, s) \phi(r) \phi(s) = \omega'(r, s) \phi(rs) U_{rs}, \quad (2.2.19)$$

de onde se tem

$$\omega'(r, s) = \frac{\omega(r, s)\phi(r)\phi(s)}{\phi(rs)}. \quad (2.2.20)$$

Dois fatores ω e ω' definidos em $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}'$, respectivamente, são ditos equivalentes sempre que (2.2.20) se mantém válida para uma vizinhança $\mathcal{V}_1$ contida na intersecção das vizinhanças em que os fatores são definidos, onde $\phi(r)$ é uma função complexa, contínua de r e definida em $\mathcal{V}_1$ ² (vizinhança composta por todos os produtos³ entre os elementos de $\mathcal{V}$). Além disso, seja $\mathcal{V}$ uma vizinhança onde a função complexa unimodular ω é um fator local e $\phi(r)$ é definida em $\mathcal{V}^2$; uma função complexa ω' obtida através da relação (2.2.20) é também um fator local definido em $\mathcal{V}$ desde que satisfaça as propriedades expostas em (2.2.3) e (2.2.4).

2.2.2 Expoentes Locais

Um fator local pode ser reescrito, por conveniência, como

$$\omega(r, s) = e^{i\delta(r, s)}, \quad (2.2.21)$$

a função $\delta(r, s)$ é o chamado expoente local, definido como (BARGMANN, 1954).

Definição 1. *Um expoente local de um grupo G definido em uma vizinhança $\mathcal{V}$ é uma função real contínua $\delta(r, s)$ que é definida para todos elementos r, s da vizinhança em questão e satisfaz as seguintes relações:*

$$\delta(e, e) = 0; \quad (2.2.22)$$

$$\delta(r, s) + \delta(rs, t) = \delta(s, t) + \delta(r, st), \quad rs, st \in \mathcal{V}, \quad (2.2.23)$$

se $\mathcal{V}$ coincide com G , δ é um expoente de G .

Além das relações que definem tal função, a mesma apresenta ainda outras propriedades:

$$\delta(r, e) = 0 = \delta(e, t), \quad (2.2.24)$$

$$\delta(r, r^{-1}) = \delta(r^{-1}, r). \quad (2.2.25)$$

Demonstração: Façamos $s \rightarrow t$ em (2.2.23), assim

$$\delta(r, t) + \delta(rt, t) = \delta(t, t) + \delta(r, tt), \quad (2.2.26)$$

agora $t \rightarrow e$,

$$\delta(r, e) + \delta(r, e) = 0 + \delta(r, e), \quad (2.2.27)$$

portanto $\delta(r, e) = 0$. Novamente em (2.2.23), façamos $r \rightarrow s$

$$\delta(s, s) + \delta(ss, t) = \delta(s, t) + \delta(s, st), \quad (2.2.28)$$

³ A vizinhança $\mathcal{V}_1$ ² é sempre maior ou igual à vizinhança $\mathcal{V}_1$, uma vez que contém todos os produtos com o elemento neutro ($\mathcal{V}_1$) e os produtos entre todos os outros elementos.

e $s \rightarrow e$,

$$0 + \delta(e, t) = \delta(e, t) + \delta(e, t), \quad (2.2.29)$$

por fim temos $\delta(e, t) = 0$.

Para (2.2.25), façamos $s \rightarrow r^{-1}$ em (2.2.23)

$$\delta(r, r^{-1}) + \delta(e, t) = \delta(r^{-1}, t) + \delta(r, r^{-1}t), \quad (2.2.30)$$

e $t \rightarrow r$ na relação resultante

$$\delta(r, r^{-1}) = \delta(r^{-1}, r) + \delta(r, e), \quad (2.2.31)$$

logo, $\delta(r, r^{-1}) = \delta(r^{-1}, r)$.

Uma vez que os expoentes locais são uma substituição dos fatores locais, ambos devem carregar propriedades ao menos semelhantes. Como já visto, é possível determinar fatores locais equivalentes entre si. O mesmo vale para expoentes locais e tal equivalência se mostra extremamente importante para a progressão da teoria.

2.2.2.1 Expoentes Locais Equivalentes

Sejam δ e δ' expoentes locais definidos, respectivamente, nas vizinhanças $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}'$. Tais expoentes são ditos equivalentes ($\delta' \equiv \delta$) se a relação a seguir vale em alguma vizinhança $\mathcal{V}_1$ contida na intersecção das vizinhanças que definem os mesmos ($\mathcal{V}_1 \subset (\mathcal{V} \cap \mathcal{V}')$):

$$\delta'(r, s) = \delta(r, s) + \Delta_{r,s}[x], \quad (2.2.32)$$

com

$$\Delta_{r,s}[x] = x(r) + x(s) - x(rs), \quad (2.2.33)$$

onde $x(r)$ é uma função real e contínua definida na vizinhança $\mathcal{V}_1^2$. Vejamos se tal relação cumpre os requisitos mencionados em 2.1.2:

1. Reflexão: $\delta \equiv \delta$;
2. Simetria: assumindo $\delta' \equiv \delta$, podemos escrever $\delta = \delta' + \Delta_{r,s}[-x]$ e, portanto, $\delta \equiv \delta'$;
3. Transitividade: seja $\delta' = \delta + \Delta[x]$ definido em uma vizinhança $\mathcal{V}$ e $\delta'' = \delta' + \Delta[x']$ definido em $\mathcal{V}'$. O elemento δ'' pode ser escrito em termos de δ , $\delta'' = \delta + \Delta[x + x']$ em uma vizinhança $\mathcal{V}'' \subset (\mathcal{V} \cap \mathcal{V}')$.

De fato ($\equiv$) é uma relação de equivalência.

As classes de equivalência dos expoentes locais serão exploradas ainda nesta seção. Através de (2.2.22) nota-se que $x(e) = 0$,

$$\delta'(e, e) = \delta(e, e) + x(e) + x(e) - x(e) \therefore x(e) = 0. \quad (2.2.34)$$

A relação que estabelece a equivalência entre dois expoentes locais nos permite a seguinte proposição:

Proposição 3. Se δ é um expoente local definido em uma dada vizinhança $\mathcal{V}$ e $x(r)$ uma função contínua de valor real definida em $\mathcal{V}^2$, anulando-se quando $r = e$, então a função δ' obtida em (2.2.32) é também um expoente local em $\mathcal{V}$.

Prova: Para uma função δ ser dita um expoente local em $\mathcal{V}$ as relações de definição (2.2.22) e (2.2.23) devem ser satisfeitas. Para (2.2.32) temos,

$$\delta'(e, e) = \delta(e, e) + x(e) + x(e) - x(e), \quad (2.2.35)$$

$$\delta'(e, e) = \delta(e, e) = 0. \quad (2.2.36)$$

A primeira das relações de definição é satisfeita.

Vejam os (2.2.23), dando início pela obtenção do lado esquerdo

$$\delta'(r, s) + \delta'(rs, t) = \delta(r, s) + x(r) + x(s) - x(rs) + \delta(rs, t) + x(rs) + x(t) - x(rst). \quad (2.2.37)$$

Para o lado direito tem-se

$$\delta'(s, t) + \delta'(r, st) = \delta(s, t) + x(s) + x(t) - x(st) + \delta(r, st) + x(r) + x(st) - x(rst). \quad (2.2.38)$$

Igualando (2.2.37) e (2.2.38) vemos que alguns termos estão presentes em ambos os lados, portanto nos resta

$$\delta(r, s) + \delta(rs, t) = \delta(s, t) + \delta(r, st) \quad (2.2.39)$$

e a segunda das duas relações de definição é obtida. Assim checamos que δ' de (2.2.32) é também um expoente local em $\mathcal{V}$. $\square$

Para cada expoente local tem-se um fator local $\omega = e^{i\delta}$ unicamente definido. Claramente, dois expoentes locais equivalentes definem dois fatores locais equivalentes. Fazendo $\phi(r) = e^{ix(r)}$ podemos ver que, de fato,

$$\omega'(r, s) = \frac{\phi(r)\phi(s)\omega(r, s)}{\phi(rs)}, \quad (2.2.40)$$

leva a

$$e^{i\delta'(r, s)} = \frac{e^{i\delta(r, s)}e^{ix(r)}e^{ix(s)}}{e^{ix(rs)}}, \quad (2.2.41)$$

fornecendo

$$\delta'(r, s) = \delta(r, s) + x(r) + x(s) - x(rs) \quad (2.2.42)$$

e obtemos a relação de equivalência (2.2.32). Perceba que uma conexão entre os expoentes equivalentes vem sendo construída. Tal conexão será amplamente utilizada para obtenção de resultados válidos por todo o grupo. O teorema a seguir é o primeiro resultado da teoria apresentada até o momento:

Teorema 2. Para uma representação de raio contínua de dimensão finita U_r de um grupo G todo fator local é equivalente a 1.

Prova: O passo inicial será realizar a substituição (2.2.21) em (2.2.2), obtendo $U_r U_s = e^{i\delta(r, s)} U_{rs}$. A dimensão do espaço da representação será denotada por n e o determinante de U_r será denotado por

$D(r)$. A continuidade forte de U_r implica a continuidade de $D(r)$ e $|D(r)| = 1 = D(e)$. Tomando o determinante de $U_r U_s = e^{i\delta(r,s)} U_{rs}$ temos

$$D(r)D(s) = e^{in\delta(r,s)} D(rs). \quad (2.2.43)$$

Em uma vizinhança adequadamente escolhida é possível escrever $D(r) \equiv e^{i\gamma(r)}$ com funções reais e contínuas de tal modo que $\gamma(e) = 0$. Assim (2.2.43) se torna

$$e^{i\gamma(r)} e^{i\gamma(s)} = e^{in\delta(r,s)} e^{i\gamma(rs)}, \quad (2.2.44)$$

de onde se tem

$$\delta(r, s) = \frac{\gamma(r)}{n} + \frac{\gamma(s)}{n} - \frac{\gamma(rs)}{n}. \quad (2.2.45)$$

Façamos então $x(r) = -\frac{\gamma(r)}{n}$ e teremos a seguinte relação para δ' :

$$\delta'(r, s) = \delta(r, s) + x(r) + x(s) - x(rs), \quad (2.2.46)$$

ou

$$\delta'(r, s) = \frac{\gamma(r)}{n} + \frac{\gamma(s)}{n} - \frac{\gamma(rs)}{n} - \frac{\gamma(r)}{n} - \frac{\gamma(s)}{n} + \frac{\gamma(rs)}{n}. \quad (2.2.47)$$

Desta forma, (2.2.47) nos mostra que $\delta' \equiv 0$, o que implica $\omega(r, s) \equiv 1$. $\square$

2.2.2.2 Classes de Equivalência de Expoentes Locais

A substituição de (2.2.21) é vantajosa, pois as relações que definem um expoente local são lineares. Desta maneira, para dois expoentes locais δ_1 definido em uma vizinhança $\mathcal{V}_1$, e δ_2 definido em uma vizinhança $\mathcal{V}_2$, qualquer combinação linear $\delta = \delta_1 \alpha_1 + \delta_2 \alpha_2$ com coeficientes reais e constantes é também um expoente local em uma vizinhança $\mathcal{V}'$ contida na intersecção das vizinhanças que definem os mesmos. Unindo a relação de equivalência de (2.2.32) e a Proposição 3, podemos concluir que uma representação de raio de G determina uma única classe de equivalência de fatores (ou expoentes) locais e o elemento particular dessa classe de equivalência depende diretamente da seleção de representativos feita para representação em questão, uma vez que tal seleção é responsável pela determinação da continuidade forte.

É possível checar que a classe de equivalência de uma combinação linear de expoentes locais depende apenas da classe de equivalência dos expoentes locais. Seja a combinação linear:

$$\alpha_1 \delta_1 + \alpha_2 \delta_2, \quad (2.2.48)$$

se o elemento δ' é dado por $\delta'_i = \delta_i + \Delta[x_i]$ em uma vizinhança $\mathcal{V}_i$ com $i = 1, 2$ escrevemos a equivalência como

$$\alpha_1 \delta'_1 + \alpha_2 \delta'_2 = \alpha_1 \delta_1 + \alpha_2 \delta_2 + \Delta[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2]. \quad (2.2.49)$$

Vemos que de fato a equivalência da combinação linear depende apenas dos expoentes locais.

Por fim conclui-se que as classes de equivalência de expoentes locais de um grupo G formam um

espaço linear $\mathcal{V}$ sob o corpo das constantes reais α . Os expoentes locais em uma combinação linear funcionam como as bases de um espaço vetorial em G .

2.2.2.3 Grupo Local

Veremos agora um grupo particular relacionado aos expoentes locais que será amplamente utilizado para extensão dos resultados locais tanto para as funções já mencionadas quanto para grupos de Lie futuramente. Para uma dada representação de raio contínua, os operadores contidos nos raios operatoriais formam um conjunto sob multiplicação. Podemos explorar essa ideia da seguinte maneira: U_r é um conjunto de representativos admissíveis definidos em uma vizinhança $\mathcal{V}_0$ e $\mathcal{V}^2$ é uma vizinhança de produtos contida em $\mathcal{V}_0$. Vamos então expressar os operadores contidos em U_r na forma

$$e^{i\theta}U_r, \quad (2.2.50)$$

onde θ é real. Se r e $s \in \mathcal{V}$, temos que

$$(e^{i\theta_1}U_r)(e^{i\theta_2}U_s) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}\omega(r,s)U_{rs}, \quad (2.2.51)$$

ou ainda em termos de expoentes locais,

$$(e^{i\theta_1}U_r)(e^{i\theta_2}U_s) = e^{i(\theta_1+\theta_2+\delta(r,s))}U_{rs}. \quad (2.2.52)$$

Este novo formato para os operadores nos leva a seguinte definição para um grupo local H (PONTYAGIN; LEHMER, 1946):

Definição 2. *Seja δ um expoente local de um grupo G definido em uma vizinhança $\mathcal{V}$. O grupo local H consiste no conjunto dos pares $\{\theta, r\}$ onde θ é um número real e r um elemento de $\mathcal{V}^2$.*

Definimos então a multiplicação ($\circ$) de dois elementos $\{\theta_1, r\}$ e $\{\theta_2, s\}$ de H , se r e s pertencem a $\mathcal{V}$, como

$$\{\theta_1, r\} \circ \{\theta_2, s\} = \{\theta_1 + \theta_2 + \delta(r, s), rs\}. \quad (2.2.53)$$

Vejamos se H obedece aos axiomas de grupo.

Proposição 4. *H é um grupo sob $\circ$.*

Prova: Fazemos uso dos axiomas de grupo mostrados em 2.1.4,

1. Associatividade: para três elementos $\{\theta_1, r\}$, $\{\theta_2, s\}$ e $\{\theta_3, t\}$, temos

$$\{\theta_1, r\} \circ (\{\theta_2, s\} \circ \{\theta_3, t\}) = \{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \delta(s, t) + \delta(r, st), rst\}, \quad (2.2.54)$$

e também,

$$(\{\theta_1, r\} \circ \{\theta_2, s\}) \circ \{\theta_3, t\} = \{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \delta(r, s) + \delta(rs, t), rst\}. \quad (2.2.55)$$

Note que (2.2.54) e (2.2.55) são diferentes apenas pelos termos $\delta(r, s) + \delta(rs, t)$ e $\delta(s, t) + \delta(r, st)$. Fazendo uso de (2.2.23) temos, por fim,

$$\{\theta_1, r\} \circ (\{\theta_2, s\} \circ \{\theta_3, t\}) = (\{\theta_1, r\} \circ \{\theta_2, s\}) \circ \{\theta_3, t\}, \quad (2.2.56)$$

portanto $\circ$ é associativo.

2. Elemento neutro: para este conjunto de elementos, o elemento neutro é $\{0, e\}$, vejamos

$$\{0, e\} \circ \{\theta, r\} = \{0 + \theta + \delta(e, r), er\}, \quad (2.2.57)$$

$$\{\theta, r\} \circ \{0, e\} = \{\theta + 0 + \delta(r, e), re\}, \quad (2.2.58)$$

por (2.2.24), tem-se

$$\{0, e\} \circ \{\theta, r\} = \{\theta, r\} \circ \{0, e\} = \{\theta, r\}. \quad (2.2.59)$$

3. Elemento simétrico (ou inverso): vamos definir o inverso de $\{\theta, r\}$ como $\{\theta, r\}^{-1} \equiv \{-(\theta + \delta(r, r^{-1})), r^{-1}\}$ de modo que:

$$\{\theta, r\} \circ \{\theta, r\}^{-1} = \{\theta, r\} \circ \{-(\theta + \delta(r, r^{-1})), r^{-1}\}, \quad (2.2.60)$$

$$\{\theta, r\} \circ \{\theta, r\}^{-1} = \{\theta - \theta - \delta(r, r^{-1}) + \delta(r, r^{-1}), rr^{-1}\}. \quad (2.2.61)$$

Desta vez recorremos a (2.2.25), então

$$\{\theta, r\} \circ \{\theta, r\}^{-1} = \{0, e\} \quad (2.2.62)$$

O mesmo deve acontecer para $\{\theta, r\}^{-1} \circ \{\theta, r\}$. Vejamos:

$$\{\theta, r\}^{-1} \circ \{\theta, r\} = \{-(\theta + \delta(r, r^{-1})), r^{-1}\} \circ \{\theta, r\}, \quad (2.2.63)$$

$$\{\theta, r\}^{-1} \circ \{\theta, r\} = \{-\theta - \delta(r, r^{-1}) + \theta + \delta(r, r^{-1}), rr^{-1}\}, \quad (2.2.64)$$

novamente por (2.2.25),

$$\{\theta, r\}^{-1} \circ \{\theta, r\} = \{0, e\}. \quad (2.2.65)$$

Portanto,

$$\{\theta, r\} \circ \{\theta, r\}^{-1} = \{\theta, r\}^{-1} \circ \{\theta, r\} = \{0, e\}, \quad (2.2.66)$$

cumprindo o último dos três axiomas de grupo, logo H é um grupo sob a multiplicação $\circ$. $\square$

Podemos dizer que o grupo local H é construído pelo expoente local δ , uma vez que seus elementos são dados em função do mesmo. Além disso, tomemos um subgrupo a um parâmetro T pertencente ao centro de H . Os elementos deste subgrupo são da forma:

$$t(\theta) = \{\theta, e\}. \quad (2.2.67)$$

Note que qualquer elemento de H pode ser escrito como

$$\{\theta, r\} = \{0, r\} \circ \{\theta, e\} = \{\theta, e\} \circ \{0, r\}, \quad (2.2.68)$$

pois uma vez que T é um subgrupo de H sua operação é induzida pela operação definida em H . Então

$$\{0, r\} \circ \{\theta, e\} = \{0 + \theta + \delta(r, e), re\} \quad (2.2.69)$$

e com (2.2.25) temos

$$\{0 + \theta + \delta(r, e), re\} = \{\theta, r\} = \{0, r\} \circ \{\theta, e\}. \quad (2.2.70)$$

Os elementos do subgrupo local T comutam com todos os elementos do grupo local H . Um subgrupo com tal propriedade é dito ser o centro do grupo que o contém (T é o centro de G (PONTRYAGIN; LEHMER, 1946)). Vejamos o seguinte lema:

Lema 2. *O grupo quociente H/T é localmente isomorfo ao grupo G .*

Prova: Começamos abordando a definição de um grupo quociente: para um subgrupo T de um grupo H , o grupo quociente H/T é formado pelo conjunto de elementos da forma $\{\mu T\}$, $\mu \in H$, isto é, pelas classes laterais de H . Agora vejamos o que é um isomorfismo. Uma função $\varphi : H/T \rightarrow G$ é um isomorfismo de grupo se:

- i) φ é um homomorfismo de grupos;
- ii) φ é uma aplicação bijetiva.

Para o item i) é necessário encontrarmos o elemento identidade de H/T . Um elemento de H/T será escrito como k

$$k = \{\mu T\} = \{\theta_1, r\} \circ \{\theta_2, e\} \quad (2.2.71)$$

e usando (2.2.68) temos

$$k = \{\theta_1, r\} \circ \{\theta_2, e\} = \{0, r\} \circ \{\theta_1, e\} \circ \{\theta_2, e\}. \quad (2.2.72)$$

Ou seja, um elemento $k \in L/T$ pode ser escrito como $\{\mu T\} = \{g.t.T\} = \{gT\}$, onde g denota um elemento de G e t um elemento de T . Como φ é uma função $H/T \rightarrow G$ a atuação em um elemento de H/T nos retorna apenas a parte do elemento pertencente a G . Perceba que φ é uma espécie de projeção de um elemento de H/T em G e sendo o elemento neutro de H/T dado por $e_k = \{0, e\}$, temos

$$\varphi(e_k) = \varphi(\{0, e\}) = e_G, \quad (2.2.73)$$

onde e_G denota o elemento neutro do grupo G . Um homomorfismo é uma função que se comporta como

$$\varphi(k_1 k_2) = \varphi(k_1) \varphi(k_2). \quad (2.2.74)$$

Sejam $k_1 = \{\theta_1, r_1\}$ e $k_2 = \{\theta_2, r_2\}$, então

$$\varphi(k_1) = \varphi(\{\theta_1, r_1\}) = \varphi(\{0, r_1\} \circ \{\theta_1, e\}) = r_1; \quad (2.2.75)$$

$$\varphi(k_2) = \varphi(\{\theta_2, r_2\}) = \varphi(\{0, r_2\} \circ \{\theta_2, e\}) = r_2. \quad (2.2.76)$$

Deste modo, o lado direito de (2.2.74) está determinado por $r_1 r_2$. Vejamos agora o lado esquerdo,

$$\varphi(k_1 k_2) = \varphi(\{\theta_1, r_1\} \circ \{\theta_2, r_2\}) = \varphi(\{\theta_1 + \theta_2 + \delta(r_1, r_2), r_1 r_2\}). \quad (2.2.77)$$

Façamos $\theta_1 + \theta_2 = \theta$, então

$$\varphi(k_1 k_2) = \varphi(\{\theta + \delta(r_1, r_2), r_1 r_2\}) \quad (2.2.78)$$

e, como mencionado, φ seleciona apenas a parte pertencente a G do elemento, portanto

$$\varphi(k_1 k_2) = r_1 r_2. \quad (2.2.79)$$

Isto nos leva a $\varphi(k_1 k_2) = \varphi(k_1) \varphi(k_2)$ e a função φ definida anteriormente cumpre o primeiro dos requisitos.

Por fim, vejamos a propriedade do item *ii*). Um homomorfismo bijetivo é aquele que é injetivo e sobrejetivo. Para a injetividade temos que o kernel (ou núcleo) de φ tem de ser composto apenas pelo elemento neutro de G , relacionando assim os elementos identidade de H/T e G , e também as inversas $\varphi(k^{-1})$ e $\varphi(k)^{-1}$. Já para a sobrejetividade é necessário que a imagem de φ seja composta por todos os elementos de G .

Para os elementos neutros,

$$\varphi(e_k) = \varphi(\{0, e\}) = e = e_G. \quad (2.2.80)$$

Para a conexão entre as inversas, começemos por (2.2.74),

$$\varphi(k k^{-1}) = \varphi(k) \varphi(k^{-1}), \quad (2.2.81)$$

$\varphi(k k^{-1}) = \varphi(e_k)$ que, por (2.2.80), retorna e_G . Deste modo

$$\varphi(k) \varphi(k^{-1}) = e_G. \quad (2.2.82)$$

Ao multiplicar ambos os lados por $\varphi(k)^{-1}$ tem-se

$$\varphi(k)^{-1} \varphi(k) \varphi(k^{-1}) = e_G \varphi(k)^{-1}, \quad (2.2.83)$$

levando a

$$\varphi(k^{-1}) = \varphi(k)^{-1}, \quad (2.2.84)$$

o que prova a injetividade de φ . Além disso, pela construção dos elementos de H/T , há sempre um elemento de G embutido nos mesmos, de tal forma que todos os elementos da imagem advém de H/T ,

isto prova a sobrejetividade. Assim *ii)* está provado e o lema também. O grupo H/T é localmente isomorfo a G , isto é, φ é uma função para a qual os elementos do grupo H/T se assemelham aos elementos de G , quando próximos ao elemento neutro de G . $\square$

Uma vez que um grupo local é gerado por um expoente local, deve haver uma relação entre grupos locais gerados por expoentes equivalentes. Tal relação é estabelecida no seguinte lema:

Lema 3. *Os grupos locais H e H' gerados pelos expoentes locais equivalentes δ e δ' , ou seja $\delta' = \delta + \Delta[x]$ em uma vizinhança $\mathcal{V}_1$, são localmente isomorfos.*

Prova: Os elementos $\bar{r} = \{\theta, r\}$ pertencem ao grupo H e os elementos $\bar{r}' = \{\theta', r'\}$ a H' . Seja $\varrho : H \rightarrow H'$, tal que $\varrho(\{\theta, r\}) = \{\theta - x(r), r\} = \{\theta', r'\}$. O processo para verificação de que ϱ é um isomorfismo de grupos é o mesmo realizado para φ no lema anterior. Note que

$$\varrho(\bar{r}_1) = \varrho(\{\theta_1, r_1\}) = \{\theta_1 - x(r_1), r_1\}; \quad (2.2.85)$$

$$\varrho(\bar{r}_2) = \varrho(\{\theta_2, r_2\}) = \{\theta_2 - x(r_2), r_2\}, \quad (2.2.86)$$

logo,

$$\varrho(\bar{r}_1) \circ \varrho(\bar{r}_2) = \{\theta_1 + \theta_2 - x(r_1) - x(r_2) + \delta'(r_1, r_2), r_1 r_2\}. \quad (2.2.87)$$

Agora, calculando $\varrho(\bar{r}_1 \circ \bar{r}_2)$, temos

$$\varrho(\bar{r}_1 \circ \bar{r}_2) = \varrho(\{\theta_1 + \theta_2 + \delta(r_1, r_2), r_1 r_2\}) = \{\theta_1 + \theta_2 + \delta(r_1, r_2) - x(r_1 r_2), r_1 r_2\}. \quad (2.2.88)$$

Como visto na definição do expoente local $\Delta_{r,s}[x] = x(r) + x(s) - x(rs)$, fazendo uso de $\delta' = \delta + \Delta[x]$, tem-se

$$\delta'(r, s) = \delta(r, s) + x(r) + x(s) - x(rs), \quad (2.2.89)$$

ou ainda

$$\delta'(r, s) - x(r) - x(s) = \delta(r, s) - x(rs). \quad (2.2.90)$$

Fazendo $r \rightarrow r_1$ e $s \rightarrow r_2$,

$$\delta'(r_1, r_2) - x(r_1) - x(r_2) = \delta(r_1, r_2) - x(r_1 r_2) \quad (2.2.91)$$

e utilizando esta relação em (2.2.88)

$$\varrho(\bar{r}_1) \circ \varrho(\bar{r}_2) = \{\theta_1 + \theta_2 + \delta(r_1, r_2) - x(r_1 r_2), r_1 r_2\}. \quad (2.2.92)$$

Comparando com (2.2.87)

$$\varrho(\bar{r}_1) \circ \varrho(\bar{r}_2) = \varrho(\bar{r}_1 \circ \bar{r}_2), \quad (2.2.93)$$

portanto, ϱ é um homomorfismo de grupos.

Realizando o mesmo processo do lema anterior, é necessário que as inversas estejam conectadas e que a atuação de ϱ no elemento neutro de H leve ao elemento neutro de H' para que ϱ seja uma função injetiva, a sobrejetividade advém do mesmo argumento anteriormente apresentado. O elemento neutro

de H é dado por $e_H = \{0, e\}$ e o de H' dado por $e_{H'} = \{0, e\}$. Então

$$\varrho(e_L) = \varrho(\{0, e\}) = \{0 - x(e), e\}. \quad (2.2.94)$$

O fato de H e H' serem grupos construídos pelos expoentes locais δ e δ' , e ambos serem equivalentes, permite-nos recorrer ao fato de que $x(r)$ desaparece quando $r \rightarrow e$, deste modo

$$\varrho(e_L) = \{0 - x(e), e\} = \{0, e\} = e_{L'}. \quad (2.2.95)$$

Vejamos se as inversas estão conectadas, começando por

$$\varrho(\bar{r}\bar{r}^{-1}) = \varrho(\bar{r}) \circ \varrho(\bar{r}^{-1}). \quad (2.2.96)$$

De (2.2.95)

$$\varrho(e_L) = \varrho(\bar{r}) \circ \varrho(\bar{r}^{-1}), \quad (2.2.97)$$

$$e_{L'} = \varrho(\bar{r}) \circ \varrho(\bar{r}^{-1}). \quad (2.2.98)$$

Multiplicando ambos os lados pela inversa $\varrho(\bar{r})^{-1}$,

$$\varrho(\bar{r})^{-1} = \varrho(\bar{r}^{-1}). \quad (2.2.99)$$

Assim provamos que as inversas estão conectadas e que ϱ , além de um homomorfismo, é bijetivo. Logo, a função é um isomorfismo de grupos. Para uma dada função ϱ os grupos locais H e H' são isomorfos localmente, uma vez que os expoentes são definidos e equivalentes em vizinhanças da origem. $\square$

Esta seção e este lema finalizam o trabalho realizado no âmbito local. O trabalho teve seu início com a fundamentação dos raios vetoriais e operatoriais, além da prova de um brilhantíssimo teorema responsável por demonstrar a existência de operadores de continuidade forte. O fator local e o expoente local foram introduzidos e amplamente discutidos, levando ainda a um teorema referente a representações de grupos de dimensão finita. A união do teorema de Wigner para seleção de representativos (Teorema 1) e do último teorema citado (Teorema 2) dá cabo, localmente, da maneira como se estuda e se opera em Mecânica Quântica dentro dos cursos de graduação. Mesmo que a teoria de representações projetivas esteja, até certo ponto, bem destrinchada, estes resultados são todos locais.

A partir da seção seguinte serão utilizados muitos dos resultados e relações já demonstradas com a adição de conceitos ainda não mencionados em busca da verificação de uma condição para extensão de tais resultados para todo o grupo.

3 EXTENSÃO DE RESULTADOS

Antes de progredir, serão necessárias algumas definições referentes a teoria de grupos topológicos que serão estudados a partir deste momento. Seguindo (RACZKA; BARUT, 1986) e (BARATA, 2023), elas serão reunidas nesta introdução e frequentemente citadas. Começemos com um espaço topológico:

Definição 3. O par (G, τ) , onde G é um conjunto e τ uma coleção de subconjuntos $\tau_i \in G$, é dito um espaço topológico se τ cumprir:

- $\emptyset \in \tau, G \in \tau$.
- Se o subconjunto $U_1 \in \tau$ e $U_2 \in \tau$, então $U_1 \cap U_2 \in \tau$.
- Seja Λ um conjunto de índices arbitrários, se $U_\lambda \in \tau$ para cada $\lambda \in \Lambda$, então $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \tau$.

Um grupo topológico, por sua vez, é:

Definição 4. O conjunto G é dito um grupo topológico se cumprir:

- G é um grupo.
- G é um espaço topológico.
- As funções $\rho(r) = r^{-1}$ e $\bar{\rho}(r, s) = r \circ s$ são aplicações contínuas de $G \rightarrow G$ e $G \times G \rightarrow G$.

O grupo que será trabalhado na subseção a seguir é um grupo compacto, cuja definição é:

Definição 5. Um espaço métrico G é dito compacto se para toda sequência de pontos $r_1, r_2 \dots \in G$ for possível selecionar uma subsequência que converge a um ponto $r \in G$, ou seja, existe uma sequência de índices

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots,$$

e um ponto $r \in G$, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{\lambda_k} = r.$$

Um espaço métrico é um espaço topológico onde a topologia é dada por uma função de distância, a métrica. Um grupo topológico compacto segue a Definição 4 onde G é um espaço métrico compacto. Tal grupo topológico pode ser interpretado como um grupo onde seus parâmetros variam em um intervalo fechado. Vejamos agora o que é um espaço conexo:

Definição 6. Um espaço topológico G é dito conexo se não for a união de dois subconjuntos disjuntos não vazios A e B .

Assim como anteriormente, um grupo topológico conexo vai de acordo com a Definição 4. Se neste grupo um caminho que conecta dois elementos puder ser contraído continuamente até se tornar um ponto, o mesmo é dito simplesmente conexo. A ideia é de que o espaço em questão não possui "buracos".

3.1 REPRESENTAÇÕES COMPATÍVEIS

Para prova do teorema a seguir será utilizado o conceito de integração de grupos, pois queremos partir de um elemento para o grupo todo, em busca da garantia de que as integrais serão definidas no domínio (grupo G) é necessária a introdução de uma medida invariante (RACZKA; BARUT, 1986). Esta é validada pelo Teorema de Haar, que garante a possibilidade de uma medida invariante (medida de Haar) uma vez que, o grupo seja localmente compacto. (NACHBIN, 1976) e (BARATA, 2023). Portanto, o grupo G será assumido localmente compacto.

Seja G um grupo com uma representação de raio contínua tal que um conjunto de representativos admissíveis possa ser escolhido por todo o grupo. Como a continuidade forte dos representativos implica a continuidade forte dos fatores locais, então temos ω definido por todo o grupo G . A inversa (dado um fator ω definido por todo o grupo, podemos construir um conjunto de operadores U_r fortemente contínuos que satisfaça (2.2.2), ou seja, uma representação de raio contínua compatível) será demonstrada no seguinte teorema:

Teorema 3. *Para todo fator ω de um grupo localmente compacto G existe uma representação de raio contínua de G compatível com ω .*

Prova: Seja então dt uma medida de integração invariante à esquerda em G , e seja $\mathbb{H}$ o conjunto de todas as funções de quadrado integrável $f(t)$ em G . Temos

$$(f, g) = \int_G f(t)^* g(t) dt. \quad (3.1.1)$$

É válido ressaltar que a escolha de funções de quadrado integrável é uma condição física ($f(t)^*$ representa o conjugado complexo de $f(t)$).

Vamos definir, para um dado $\omega(r, s)$

$$g = U_r f, \quad (3.1.2)$$

via

$$g(t) = \omega(r, r^{-1}t) f(r^{-1}t), \quad (3.1.3)$$

ou, através de um reescalonamento,

$$g(rt) = \omega(r, t) f(t). \quad (3.1.4)$$

Para os operadores U_r , temos:

1. Unitariedade:

Vamos, primeiramente, buscar a inversa de U_r , pois por (3.1.2) percebe-se que determinar $f(t)$ é determinar a inversa de U_r . Começemos multiplicando (3.1.4) por $\overline{\omega(r, t)}$

$$\overline{\omega(r, t)} g(rt) = \overline{\omega(r, t)} \omega(r, t) f(t). \quad (3.1.5)$$

Como $\omega(r, t)$ é uma função complexa e unimodular $\overline{\omega(r, t)}\omega(r, t) = |\omega(r, t)|^2 = 1$. Então

$$f(t) = \overline{\omega(r, t)}g(rt). \quad (3.1.6)$$

Utilizando (3.1.1), podemos encontrar o valor do módulo de $|g(t)|$:

$$(g, g) = \int_G \overline{g(t)}g(t)dt = \int_G \left[\overline{\omega(r, r^{-1}t)f(r^{-1}t)} \right] \left[\omega(r, r^{-1}t)f(r^{-1}t) \right] dt, \quad (3.1.7)$$

mas $|\omega| = 1$, logo

$$(g, g) = \int_G |g(t)|^2 dt = \int_G |f(r^{-1}t)|^2 dt. \quad (3.1.8)$$

Fazendo $k = r^{-1}t$ temos

$$\int_G |f(r^{-1}t)|^2 dt = \int_G |f(k)|^2 dk \quad (3.1.9)$$

por invariância da medida. Assim

$$(g, g) = (U_r f, U_r f) = (f, f).$$

Logo U_r é unitário.

2. $U_e = 1$:

$\omega(e, t)$ pode ser escrito via (2.2.21)

$$\omega(e, t) = e^{i\delta(e, t)}, \quad (3.1.10)$$

porém, $\delta(e, t) = 0$ de (2.2.4), portanto $\omega(e, t) = 1$. Logo:

$$U_e U_t = U_{et} = U_t, \quad (3.1.11)$$

assim, $U_e = 1$.

3. A relação $U_r U_s = \omega(r, s)U_{rs}$ deve ser válida.

Vamos introduzir, de acordo com (BARGMANN, 1954):

$$h = U_r g \quad (3.1.12)$$

e

$$g = U_s f. \quad (3.1.13)$$

Através de (3.1.4), tem-se

$$g(st) = \omega(s, t)f(t). \quad (3.1.14)$$

Desta forma

$$h = U_r g = U_r U_s f = U_r g(st) = h(r(st)), \quad (3.1.15)$$

novamente por (3.1.4)

$$h(r(st)) = \omega(r, st)g(st) = \omega(r, st)\omega(s, t)f(t) \quad (3.1.16)$$

e fazendo uso da lei de associatividade exposta em (2.2.4), temos

$$h(r(st)) = \omega(r, st)\omega(s, t)f(t) = \omega(r, s)\omega(r, st)f(t). \quad (3.1.17)$$

Façamos $k = \omega(rs, t)f(t)$, então

$$h = U_r g = \omega(r, s)k. \quad (3.1.18)$$

Por (3.1.15) e a relação entre (3.1.2) e (3.1.3), temos

$$U_r U_s f = \omega(r, s)U_{rs} f, \quad (3.1.19)$$

ou seja,

$$U_r U_s = \omega(r, s)U_{rs}. \quad (3.1.20)$$

4. Os operadores U_r são fortemente contínuos em r .

Realizando uma alteração na equação (3.1.4) para

$$g(t) = \omega(r, r^{-1}t)f_1(t), \quad (3.1.21)$$

com $f_1(t) = V_r f(t)$, sendo os operadores V_r os que definem a representação regular do grupo que por definição são fortemente contínuos. Como anteriormente, ω herda a forte continuidade dos representativos admissíveis (Proposição 2), de modo a não afetar a forte continuidade de V_r e implicar, neste momento, a forte continuidade dos operadores U_r .

Assim, o conjunto de operadores U_r cumpre os requisitos necessários para que seja uma representação de raio contínua. A partir de um dado ω foi construída uma representação de raio contínua. Logo, dizemos que a representação U_r é compatível com ω . $\square$

3.2 REPRESENTAÇÕES DE GRUPOS SIMPLESMENTE CONEXOS

A partir deste momento iremos assumir o grupo G como localmente conexo, sem mencionar esta condição, tal condição é satisfeita para todo grupo de Lie. Por um instante, deixaremos as representações de raio de lado e iremos trabalhar com representações ordinárias, representações de um grupo finito sob o corpo dos números complexos.

Todo elemento r de um grupo conexo G pode ser expresso como o produto finito (PONTRYAGIN; LEHMER, 1946)¹

$$r = r_1 r_2 \cdots r_n \quad (r_i \in \mathcal{M}), \quad (3.2.1)$$

¹ Ver Teorema 15 de (PONTRYAGIN; LEHMER, 1946).

dos elementos r_i de uma vizinhança $\mathcal{M}$ do grupo, escolhida arbitrariamente, fixa. Ou seja, um elemento r pode ser obtido através de sucessivas transformações r_i . Se o grupo em questão não fosse conexo, não seria possível construir este caminho de transformações.

Definição 7. *Uma representação local unitária de um grupo G definida em uma vizinhança $\mathcal{V}$ é um mapeamento de $\mathcal{V}^2$ em operadores unitários V_r ($r \in \mathcal{V}^2$) tal que $V_r V_s = V_{rs}$ se r e s pertencem a $\mathcal{V}$ (BARGMANN, 1954).*

Caso o grupo G seja simplesmente conexo, além de conexo, uma representação local sempre pode ser estendida para uma representação por todo o grupo. Tal afirmação é validada por um teorema de (PONTRYAGIN; LEHMER, 1946) que será exposto².

Teorema 4. *Sejam G e G' dois grupos conexos, com G localmente conexo e simplesmente conexo. Seja f um homomorfismo local $f : G \rightarrow G'$ definido em uma vizinhança $\mathcal{V}$ do elemento unitário de G , é possível estender unicamente o homomorfismo local f para um homomorfismo φ de todo o grupo G em todo o grupo G' se f e φ coincidem em uma vizinhança $\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}$. Se f é um isomorfismo local, então φ é um homomorfismo aberto.*

Uma maneira de ilustrar tal abstração seria imaginar o grupo como uma folha de papel, a vizinhança em que o homomorfismo local é definido é apenas um pequeno pedaço de tal folha. Uma vez que o homomorfismo local e o definido por todo o grupo coincidam nesta pequena fração da folha, como o grupo é conexo não há buracos na folha e a vizinhança pode ser estendida pouco a pouco até cobrir a folha por completo. Sendo assim, o homomorfismo, antes local, passa a ser definido por todo o grupo.

Por definição as representações são homomorfismos, então temos que para toda representação local V_r de um grupo simplesmente conexo G existe uma vizinhança $\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}$ tal que:

$$V_{r_1} V_{r_2} \cdots V_{r_n} = V_{r'_1} V_{r'_2} \cdots V_{r'_m} \quad (r_i \in \mathcal{V}^*, r'_i \in \mathcal{V}^*) \quad (3.2.2)$$

se $r_1 r_2 \cdots r_n = r'_1 r'_2 \cdots r'_m$. Isso nos leva ao lema a seguir:

Lema 4. *Para uma representação local e unitária V_r de um grupo conexo e simplesmente conexo G definida em $\mathcal{V}$ existe uma representação unitária unicamente determinada W_r de todo o grupo G que coincide com a representação local em alguma vizinhança $\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}$. Essa representação é fortemente contínua desde que a representação local o seja.*

Prova: Seja W_r uma representação de G que coincide com V_r em alguma vizinhança $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$. Como G é conexo podemos expressar r via (3.2.1), então $W_r = W_{r_1} W_{r_2} \cdots W_{r_n}$. O fato das representações coincidirem em $\mathcal{M}$, representado por $W_{r_i} = V_{r_i}$, permite-nos escrever:

$$W_r = V_{r_1} V_{r_2} \cdots V_{r_n} \quad (r_i \in \mathcal{M}). \quad (3.2.3)$$

Vamos os elementos necessários para que W_r seja uma representação unicamente determinada:

² A prova deste teorema está nas páginas 228 - 231 de (PONTRYAGIN; LEHMER, 1946).

1. Unicidade de W_r :

Seja W'_r uma segunda representação que coincide com V_r numa vizinhança $\mathcal{M}' \subset \mathcal{V}$. Por (3.2.3) W'_r é dada por:

$$W'_r = V_{r_1} V_{r_2} \cdots V_{r_n}, \quad (3.2.4)$$

podemos escolher uma vizinhança $\mathcal{M}_1 \subset (\mathcal{M} \cap \mathcal{M}')$. Como W'_r coincide com V_r em $\mathcal{M}'$ e W_r coincide com V_r em $\mathcal{M}$, a aplicação de (3.2.3) em $\mathcal{M}_1$ nos leva a:

$$W'_r = V_{r_1} V_{r_2} \cdots V_{r_n} = W_r. \quad (3.2.5)$$

2. Existência de W_r :

A relação (3.2.3) pode ser usada para definir W_r , com $\mathcal{V}^* = \mathcal{M}$, já que pela equação (3.2.1) o produto depende somente de r e não da sua decomposição, pois o grupo é conexo. Em particular se $r \in \mathcal{V}^*$, $W_r = V_r$. Além disso, sejam $r = r_1 \cdots r_n$ e $s = s_1 \cdots s_m$, então $rs = r_1 \cdots r_n s_1 \cdots s_m$, logo

$$W_{rs} = V_{r_1} \cdots V_{r_n} V_{s_1} \cdots V_{s_m}. \quad (3.2.6)$$

A propriedade da representação $W_{rs} = W_r W_s$ é uma consequência imediata.

3. A continuidade forte de W_r :

Assumindo V_r fortemente contínua e os elementos r e s próximos o suficiente tal que $r^{-1}s \in \mathcal{V}^*$ temos, para qualquer vetor f :

$$\|(W_s - W_r)f\| = \|(W_r(W_{r^{-1}s} - 1)f)\|. \quad (3.2.7)$$

Como W_r é unitária e coincide com V_r ,

$$\|(W_{r^{-1}s} - 1)f\| = \|(V_{r^{-1}s} - 1)f\|. \quad (3.2.8)$$

A condição de forte continuidade de W_r pode ser expressa em função da representação local V_r , que por sua vez é fortemente contínua. Logo, W_r tem sua continuidade implicada pela forte continuidade de V_r . $\square$

Seja U_r uma representação ordinária de G . Qualquer representação unitária fortemente contínua de G dá origem a uma representação de raio contínua unicamente determinada de G , tal representação é dita ser uma representação de raio induzida por U_r . Como a representação é ordinária, para os representativos U_r o fator ω é igual a 1 (representações de raio de grupos de dimensão finita possuem fator local equivalente a 1, de acordo com o Teorema 2), e consequentemente, qualquer fator local da representação de raio induzida é também equivalente a 1.

Como consequência do Lema 4, temos o seguinte teorema:

Teorema 5. *Qualquer representação de raio contínua U_r de um grupo conexo e simplesmente conexo G com fator local equivalente a 1 é induzida por uma representação unitária e fortemente contínua U_r de G .*

Prova: Começemos com a hipótese de que exista um conjunto de representativos admissíveis $U_r \in \mathbf{U}_r$ ($r \in \mathcal{V}^2$) tal que $U_r U_s = U_{rs}$ com $(r, s \in \mathcal{V})$, sendo assim U_r uma representação local de G .
Seja U'_r ($r \in G$) a representação de G construída de acordo com (3.2.3), temos:

$$U'_r = U_{r_1} U_{r_2} \cdots U_{r_n}. \quad (3.2.9)$$

Note-se que

$$U'_r = 1.U_{r_1} U_{r_2} \cdots U_{r_n} = e^{i(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n - \alpha_1 - \cdots - \alpha_n)} U_{r_1} U_{r_2} \cdots U_{r_n}$$

ou ainda

$$U'_r = e^{i\alpha_1} U_{r_1} \cdots e^{i\alpha_n} U_{r_n}$$

e então

$$U'_r \in \mathbf{U}_{r_1} \cdots \mathbf{U}_{r_n} = \mathbf{U}_r, \quad (3.2.10)$$

portanto, U'_r é induzida por $\mathbf{U}_r$.

Corolário 1. *Qualquer representação de raio de dimensão finita de um grupo conexo e simplesmente conexo G é induzida por uma representação contínua unitária de G .*

Prova: Novamente, de acordo com o Teorema 2, para representações de grupos de dimensão finita ω é equivalente a 1, recaindo na situação do Teorema 5.

3.2.1 Extensão de uma seleção local de representativos

Foi construída uma extensão para representações locais e unitárias de G . Porém, para uma representação de raio contínua nem sempre é possível estender continuamente um conjunto de representativos admissíveis definidos em uma vizinhança $\mathcal{V}$ para um conjunto definido em todo o grupo G . Para grupos conexos e simplesmente conexos, temos o seguinte teorema:

Teorema 6. *Seja G um grupo conexo e simplesmente conexo, ω um fator em todo o grupo e $\mathbf{U}_r$ uma representação de raio contínua tal que o fator local definido por um conjunto de representativos admissíveis, escolhido de forma adequada, U_r coincida com ω em alguma vizinhança $\mathcal{V}$. Então existe um conjunto de representativos admissíveis, determinado unicamente, U'_r definido por todo o grupo, tal que $U'_r U'_s = \omega(r, s) U'_{rs}$ para todo r, s e $U'_r = U_r$ em alguma vizinhança $\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}$.*

Prova: Para esta prova serão utilizadas as ferramentas obtidas referentes ao grupo local H . Seja δ um expoente local de G definido em $\mathcal{V}$. Como G é conexo e simplesmente conexo, a equação

$$\omega(r, s) = e^{i\delta(r, s)} \quad (3.2.11)$$

possui uma única solução contínua $\delta(r, s)$ para todo $r, s \in G$ que cumpre as relações que definem um expoente de G . Como H é construído a partir dos expoentes locais de G , o mesmo é também conexo e simplesmente conexo.

Vejamos o que ocorre ao aplicar o Lema 4 ao grupo local H . Para $\bar{r} = \{\theta, r\}$ tem-se $V_{\bar{r}} =$

$V(\theta, r) = e^{i\theta} U_r$ ($r \in \mathcal{V}^2$). Através de (2.2.53) e utilizando a forma $e^{i\theta} U_r$ em (2.2.2),

$$(e^{i\theta} U_r)(e^{i\theta'} U_s) = e^{\theta+\theta'} \omega(r, s) U_{rs} = e^{i(\theta+\theta'+\delta(r,s))} U_{rs}, \quad (3.2.12)$$

conclui-se que V_r é uma representação local unitária de H definida em uma vizinhança $\mathcal{M}$ ($-\infty < \theta < \infty, r \in \mathcal{V}$). Pela utilização de (3.2.3) obtém-se uma representação $W_r = W(\theta, r)$ unitária de continuidade forte em H que coincide com V_r em alguma vizinhança $\mathcal{M}^*$, onde $\mathcal{M}^* \subset \mathcal{M}$. Como $\mathcal{M}^*$ está contida em $\mathcal{M}$ que garante a finitude de θ , certamente uma vizinhança $\mathcal{M}'$ da forma $(-c < \theta < c, r \in \mathcal{V}^*)$ está contida em $\mathcal{M}^*$ para uma escolha adequada de c e $\mathcal{V}^* (\subset \mathcal{V})$, o que confirma a unicidade de W_r como visto no Lema 4.

Vimos que um elemento de H , $\{\theta, r\}$, pode ser representado da maneira (2.2.68), então para todo θ :

$$\{\theta, e\} = \{\theta_1, e\}^n, \quad (3.2.13)$$

onde $\theta_1 = \frac{\theta}{n}$ e $|\theta| < c$. Desta forma, por (3.2.3), temos

$$W(\theta, e) = (V(\theta_1, e))^n = (e^{i\theta_1} U_e)^n, \quad (3.2.14)$$

como $U_e = 1$ e $\theta_1 = \frac{\theta}{n}$

$$W(\theta, e) = e^{i\frac{\theta}{n}n} = e^{i\theta}. \quad (3.2.15)$$

Definindo $U'_r = W(0, r)$, ou seja, o setor da representação que não depende de θ , por (2.2.68), $W_r(\theta, r)$ se torna

$$W(\theta, r) = W(\theta, e) \circ W(0, r). \quad (3.2.16)$$

Então para todo r

$$W(\theta, r) = e^{i\theta} U'_r. \quad (3.2.17)$$

Se $r \in \mathcal{V}^*$, $U'_r = U_r$. Além disso, vejamos o produto $\{0, r\} \cdot \{0, s\}$:

$$\{0, r\} \circ \{0, s\} = \{0 + 0 + \delta(r, s), rs\} = \{\delta(r, s), rs\}, \quad (3.2.18)$$

o que nos leva a

$$W(0, r)W(0, s) = U'_r U'_s = e^{i\delta(r,s)} U'_{rs} = \omega(r, s) U'_{rs} \quad (3.2.19)$$

e a propriedade de representação então é obtida.

Por fim, precisamos conferir se estes representativos $U'_r \in \mathbf{U}_r$. Como G e H são conexos e simplesmente conexos, podemos escrever $r = r_1 \cdots r_n$ com $r_k \in \mathcal{V}^*$, o que nos leva a $U'_{r_k} \in \mathbf{U}_{r_k}$. A relação (3.2.19) nos informa que se $U'_r \in \mathbf{U}_r$ e $U'_s \in \mathbf{U}_s$ então $U'_{rs} \in \mathbf{U}_{rs}$. Já que $U'_{r_k} \in \mathbf{U}_{r_k}$, tem-se

$$U'_r \in \mathbf{U}_{r_1} \cdots \mathbf{U}_{r_n} = \mathbf{U}_r. \quad (3.2.20)$$

Conclui-se que qualquer conjunto U'_r com as propriedades necessárias define uma representação $W(\theta, r) = e^{i\theta} U'_r$ de H , por (3.2.12), (3.2.17) e (3.2.19), que é unicamente determinada. $\square$

Neste momento, os representativos de continuidade forte, para grupos conexos e simplesmente conexos, são definidos por todo o grupo removendo possíveis problemas na atuação dos mesmos.

3.2.2 Extensão de Expoentes Locais

Como último passo, precisamos encontrar uma maneira de estender os expoentes definidos em uma vizinhança de G para expoentes definidos por todo o grupo. Começemos pela seguinte definição:

Definição 8. Um expoente δ_1 de G é chamado de extensão de um expoente local δ de G se $\delta_1(r, s) = \delta(r, s)$ em alguma vizinhança.

Teorema 7. Sejam δ e δ' dois expoentes locais equivalentes de um grupo conexo e simplesmente conexo G , tal que $\delta' = \delta + \Delta(x)$ em alguma vizinhança, e assumamos os expoentes δ_1 e δ'_1 extensões de δ e δ' respectivamente. Então, para todo $r, s \in G$, $\delta'_1(r, s) = \delta_1(r, s) + \Delta_{r,s}(x_1)$, onde $x_1(r)$ é contínua em r e $x_1 = x$ em alguma vizinhança $\mathcal{V}^*$.

Prova: Estes dois expoentes δ_1 e δ'_1 definem dois grupos locais conexos e simplesmente conexos H_1 e H'_1 , com elementos $\bar{r}$ e $\bar{r}'$ respectivamente. Para estes elementos a multiplicação de grupo é dada por (2.2.53). Uma parametrização diferente de H_1 , utilizada para prova do Lema 3, será novamente inserida, está é definida por

$$\theta' = \theta - x(r), \quad r' = r. \quad (3.2.21)$$

Esta equação define também um mapeamento local isomorfo $\bar{r}' = f(\bar{r})$ de H_1 em H'_1

$$f(\bar{r}) = f(\theta, r) = \{\theta - x(r), r\} \quad (r \in \mathcal{V}_1^2), \quad (3.2.22)$$

se $\mathcal{V}_1$ for adequadamente escolhida tal que $\delta_1 = \delta$ e $\delta'_1 = \delta'$ e $\delta' = \delta + \Delta(x)$ sejam satisfeitas. Assim como na extensão das representações, o isomorfismo (3.2.22) pode ser estendido para um isomorfismo $f_1(\bar{r}) = f_1(\theta, r) = \bar{r}'$ do grupo todo H_1 em H'_1 tal que $f_1(\bar{r})$ coincida com $f(r)$ em alguma vizinhança $\mathcal{M}^*$ ($-c < \theta < c, r \in \mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}$) de H_1 .

Por (3.2.22), temos que

$$f_1(\theta, e) = f(\theta, e) = \{\theta - x(e), e\}, \quad (3.2.23)$$

com $x(e) = 0$, $f_1(\theta, e) = \{\theta, e\}$ para todo θ . Podemos escrever o elemento $f_1(0, r)$ como

$$f_1(0, r) = \{-x_1(r), g(r)\}, \quad (3.2.24)$$

onde x_1 é uma função contínua em r e $g(r)$ é um elemento do grupo G a ser determinado. Desta forma a relação (2.2.68) nos leva a

$$f_1(\theta, r) = f_1(\theta, e)f_1(0, r) = \{\theta - x_1(r), r\}. \quad (3.2.25)$$

Computando $f_1(0, r)f_1(0, s)$:

$$f_1(0, r)f_1(0, s) = \{-x_1(r), g(r)\} \circ \{-x_1(s), g(s)\}, \quad (3.2.26)$$

$$f_1(0, r)f_1(0, s) = \{\delta'_1 - x_1(r) - x_1(s), g(r)g(s)\}. \quad (3.2.27)$$

Como f_1 é um isomorfismo

$$f_1(0, r)f_1(0, s) = f_1[(0, r) \cdot (0, s)] = f_1(\delta_1, rs), \quad (3.2.28)$$

logo

$$f_1(0, r)f_1(0, s) = \{\delta_1 - x_1(rs), rs\}. \quad (3.2.29)$$

Isso nos leva a

$$g(rs) = g(r)g(s). \quad (3.2.30)$$

Utilizando (3.2.22), podemos determinar $g(r)$ em (3.2.25)

$$f(0, r) = f_1(0, r), \quad (3.2.31)$$

então

$$\{-x(r), r\} = \{-x_1(r), g(r)\} \quad \therefore \quad g(r) = r, \quad (3.2.32)$$

se $r \in \mathcal{V}^*$. Assim, (3.2.27) e (3.2.29) levam a

$$\{\delta'_1 - x_1(r) - x_1(s), rs\} = \{\delta_1 - x_1(rs), rs\}. \quad (3.2.33)$$

A igualdade do primeiro termo resulta em

$$\delta'_1 = \delta_1 + x_1(r) + x_1(s) - x_1(rs) \quad (3.2.34)$$

e por fim

$$\delta'_1 = \delta_1 + \Delta_{r,s}(x_1). \quad (3.2.35)$$

Então temos $\delta'_1 = \delta_1 + \Delta_{r,s}(x_1)$ por todo o grupo, uma vez que os isomorfismos $f(\bar{r})$ e $f_1(\bar{r})$ coincidam em alguma vizinhança $\mathcal{M}^*$. Por (3.2.22), $x_1(r) = x(r)$ em alguma vizinhança $\mathcal{V}^*$ tal que $r \in \mathcal{V}^*$. $\square$

Note que o processo para tais extensões pode acabar soando repetitivo, mas o mesmo só elucidado quão crucial é o Teorema 6 enunciado e provado por Pontrjagin. Este teorema permite a manipulação de vizinhanças entre as duas aplicações necessárias para obtenção das extensões. O tema e o processo acabam por ser de difícil visualização. Boa parte dos conceitos utilizados, além de abstratos, são bem amplos. Por isso a percepção comentada após o Teorema 6 tem o intuito de auxiliar a visualização de tal teorema e ilustrar os processos matemáticos realizados durante a seção.

Todos os resultados obtidos localmente foram, com sucesso, estendidos para grupos conexos e simplesmente conexos o que já permite um avanço da formulação da teoria. Note que a motivação inicial da análise das fases parece ter ficado de lado, porém, o avanço matemático e a busca por generalizar resultados visa dotar a teoria de robustez para a aplicação futura em grupos responsáveis por sistemas físicos usuais.

O capítulo a seguir dá início ao estudo dos fundamentos já comentados sob a ótica dos grupos de Lie, grupos em que os parâmetros variam continuamente. Elementos destes grupos representam alguns

operadores amplamente utilizados em Mecânica Quântica como os operadores de momento angular.

4 TEORIA SOB A ÓTICA DOS GRUPOS DE LIE

Nesta seção serão apresentados os conceitos preliminares para compreensão dos grupos de Lie e sua importância culminando no estudo dos expoentes locais e nas implicações causadas por se trabalhar com estes grupos na teoria em questão.

4.1 NOÇÕES PRELIMINARES

Esta seção se encarrega de expor as noções necessárias para progressão do trabalho, de acordo com os capítulos VI e IX de (PONTYAGIN; LEHMER, 1946). Vejamos então o que é um grupo de Lie local:

Definição 9. *Um grupo de Lie local G' é um conjunto de elementos $r \in G'$ que possuem uma correspondência um-a-um com os pontos de uma esfera aberta $\mathcal{E}$ centrada na origem de um espaço euclidiano real n -dimensional.*

Isso nos permite coordenatizar qualquer elemento $r \in G'$ através de coordenadas $\rho^1 \cdots \rho^n$, desde que:

$$|r| = \left[\sum_{i=1}^n (\rho^i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} < c. \quad (4.1.1)$$

O elemento unitário $e \in G'$, também denotado por, 0 é o elemento tal que possui todas as coordenadas ρ^i nulas, ou seja, a origem. A multiplicação de elementos de G' , $t = rs$, definida para os elementos r , s em alguma vizinhança $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{E}$ ($\mathcal{V}_0$ é a vizinhança em que $|r| < \kappa_0 < c$), é dada pelas n equações:

$$\tau^i = f^i(\rho^1, \dots, \rho^n; \sigma^1, \dots, \sigma^n) = f^i(r, s), \quad (4.1.2)$$

tal que $rs \in \mathcal{E}$, onde ρ^i , σ^i e τ^i são as coordenadas de r , s e t , respectivamente. Outra condição referente às coordenadas introduzidas em G' é que as mesmas sejam diferenciáveis (PONTYAGIN; LEHMER, 1946). Se os elementos rs e st pertencerem a $\mathcal{V}_0$ vale a lei de associatividade $(rs)t = r(st)$. Com a definição (4.1.2) e o elemento unitário podemos escrever:

$$re = f^i(r, e) = f^i(\rho^1, \dots, \rho^n, 0, \dots, 0) = r = er. \quad (4.1.3)$$

Derivando $f^i(r, s)$ em relação a r , temos

$$\frac{\partial f^i(r, s)}{\partial r} = \frac{\partial(f^i(\rho^1, \dots, \rho^n; \sigma^1, \dots, \sigma^n))}{\partial(\rho^1, \dots, \rho^n)} \quad (4.1.4)$$

e em relação a s

$$\frac{\partial f^i(r, s)}{\partial s} = \frac{\partial(f^i(\rho^1, \dots, \rho^n; \sigma^1, \dots, \sigma^n))}{\partial(\sigma^1, \dots, \sigma^n)}. \quad (4.1.5)$$

Fazendo $r = s = e$, chegamos à seguinte relação

$$\frac{\partial f^i(e, e)}{\partial \rho^j} = \frac{\partial f^i(e, e)}{\partial \sigma^j} = \delta_j^i. \quad (4.1.6)$$

Um subgrupo local de um parâmetro de G é definido por:

Definição 10. *Seja $r \in G'$ um elemento que depende continuamente de um parâmetro real μ , tal que $|\mu| < \gamma$, se $r(\mu)$ é definido para todos os valores $|\mu| < \gamma$ e:*

- $r(0) = e$;
- $r(\mu_1) r(\mu_2) = r(\mu_1 + \mu_2)$, se $|\mu_1| < \gamma$, $|\mu_2| < \gamma$ e $|\mu_1 + \mu_2| < \gamma$,

então $r(\mu)$ é dito subgrupo local de um parâmetro.

Em outras palavras, $r(\mu)$ é uma curva contínua em uma vizinhança $\mathcal{V}_0$ da forma $(-\gamma < \mu_1, \mu_2, \mu_1 + \mu_2 < \gamma)$.

Uma curva $r(\mu)$ possui uma tangente no sistema de coordenadas se existe

$$\frac{d\rho^i(0)}{d\mu} = \alpha^i. \quad (4.1.7)$$

o que nos permite escrever um subgrupo a um parâmetro como

$$r(\mu) = \mu a, \quad (4.1.8)$$

onde a é um elemento tangente com coordenadas dadas por α^i . Um sistema de coordenadas onde

$$\rho^k(\mu) = \mu \alpha^k, \quad (4.1.9)$$

é chamado de canônico. Ou seja, coordenadas canônicas são aquelas que para cada ρ^k há um subgrupo local de um parâmetro ($r(\mu) = \mu a$ em $\mathcal{V}_0$) associado. Além disso, para coordenadas canônicas as funções f^i de (4.1.2) são analíticas em uma vizinhança adequadamente escolhida do elemento unitário que contenha¹ $\mathcal{V}_0$. Isso caracteriza também $\mathcal{V}_0$ como uma vizinhança canônica.

Definição 11. *Um espaço vetorial $\mathbb{V}$ munido de uma operação bilinear $\diamond: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, tal que:*

1. $a \diamond (b \diamond c) = (a \diamond b) \diamond c$, $a, b, c \in \mathbb{V}$;
2. Existe $\mathbb{1}$ tal que $a \diamond \mathbb{1} = \mathbb{1} \diamond a = a$, $\forall a \in \mathbb{V}$.

O par $(\mathbb{V}, \diamond)$ é chamado de álgebra.

Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G' , em termos das coordenadas canônicas, pode ser descrita por um espaço vetorial real n -dimensional formado pelos vetores a que geram os subgrupos locais de um parâmetro

¹ Definição 38 de (PONTYAGIN; LEHMER, 1946), página 181.

de G' , como visto em (4.1.8). A operação binária definida nesse espaço vetorial é o colchete de Lie (ou comutador):

$$[\ , \] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad (4.1.10)$$

que associa um vetor de $\mathfrak{g}$ a um par ordenado $a, b \in \mathfrak{g}$. Essa operação é bilinear e antissimétrica, ou seja,

$$[a, b] = -[a, b] \quad (4.1.11)$$

e satisfaz a identidade de Jacobi:

$$[[a, a'], a''] + [[a', a''], a] + [[a'', a], a'] = 0, \quad (4.1.12)$$

para quaisquer três elementos a, a' e a'' em $\mathfrak{g}$. Fazendo $b \rightarrow a$ em (4.1.11), temos:

$$[a, a] = -[a, a] \quad \therefore \quad [a, a] = 0, \quad \forall a \in \mathfrak{g}. \quad (4.1.13)$$

Para dois elementos a e b fixos pertencentes a $\mathfrak{g}$, sejam $r(\mu) = \mu a$ e $s(\mu) = \mu b$ dois subgrupos locais de um parâmetro. Perceba que $r^{-1} = -r$ já que são subgrupos a um parâmetro, desta forma o comutador $q(r, s) = rs - sr = rsr^{-1}s^{-1}$. Para um μ não nulo e suficientemente pequeno o comutador $q(\mu a, \mu b)$ é definido e pertence a $\mathcal{V}_0$, e temos:

$$[a, b] = \lim_{\mu \rightarrow 0} \mu^{-2} q(\mu a, \mu b). \quad (4.1.14)$$

A i -ésima componente do comutador é o limite da i -ésima componente de $\mu^{-2} q(\mu a, \mu b)$.

O colchete $[a_i, a_j]$, onde a_i e a_j são dois elementos quaisquer de um conjunto de n vetores linearmente independentes a_i ($1 \leq i \leq n$) que formam uma base em $\mathfrak{g}$, é dado por

$$[a_i, a_j] = \sum_{m=1}^n c^m_{ij} a_m, \quad (4.1.15)$$

onde c^m_{ij} são as constantes de estrutura do grupo de Lie G' . Através de (4.1.11), vemos que:

$$[a_i, a_j] = -[a_j, a_i] \Rightarrow \sum_{m=1}^n c^m_{ij} a_m = - \sum_{m=1}^n c^m_{ji} a_m,$$

portanto

$$c^m_{ij} = -c^m_{ji}. \quad (4.1.16)$$

Vamos aplicar a identidade de Jacobi em a_i, a_j e a_k :

$$[[a_i, a_j], a_k] = \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n c^m_{ij} c^l_{mk} a_l,$$

$$[[a_j, a_k], a_i] = \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n c^m_{jk} c^l_{mi} a_l,$$

$$[[a_k, a_i], a_j] = \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n c^m_{ki} c^l_{mj} a_l.$$

A soma desses três termos nos leva a

$$J^l_{kij} = \sum_{m=1}^n (c^l_{mk} c^m_{ij} + c^l_{mi} c^m_{jk} + c^l_{mj} c^m_{ki}) = 0. \quad (4.1.17)$$

Para uma base padrão, ou seja, dado um conjunto de coordenadas canônicas o vetor a_i é o vetor com a i -ésima componente 1 e a j -ésima componente 0, com $j \neq i$, as constantes de estrutura são dadas por:

$$c^m_{ij} = \left(\frac{\partial^2 f^m}{\partial \rho^i \partial \sigma^i} - \frac{\partial^2 f^m}{\partial \rho^j \partial \sigma^i} \right)_{[\rho^k = \sigma^k = 0]}. \quad (4.1.18)$$

Esta relação permanece válida se as coordenadas canônicas forem trocadas por coordenadas arbitrárias $p'^i = \phi^i(\rho^1, \dots, \rho^n)$ desde que as funções ϕ^i tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $\frac{\partial \phi^i}{\partial \rho^j} = \delta^i_j$ para a origem. Para constantes de estrutura dadas, satisfazendo (4.1.16) e (4.1.17), um grupo de Lie local G' pode ser construído com constantes de estrutura que se referem à base padrão de um sistema de coordenadas canônicas.

4.2 EXPOENTES LOCAIS

4.2.1 Expoentes locais diferenciáveis

Uma vez que o grupo G , antes arbitrário, torna-se um grupo de Lie buscamos alguma nova propriedade para os expoentes locais já vistos. A partir do presente momento G irá denotar um grupo de Lie fixo e $\mathcal{V}_0$ uma vizinhança canônica fixa em G . A primeira das relações novas para expoentes locais está exposta no seguinte lema:

Lema 5. *Em um grupo de Lie todo expoente local é equivalente a um expoente local diferenciável.*

Prova: Uma função diferenciável é aquela que em alguma vizinhança, $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}_0$, possui derivadas parciais contínuas de todas as ordens com respeito às coordenadas canônicas dos elementos do grupo que ela depende. Seja agora δ um expoente local definido e limitado em $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_0$, e escolha duas vizinhanças $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$, tais que $\mathcal{V}_1^2 \subset \mathcal{V}$ e $\mathcal{V}_2^2 \subset \mathcal{V}_1$. Vamos denotar um elemento de integração invariante à esquerda e à direita em G (assim como dt foi introduzida para prova do².) Teorema 3 por dr e dr^* , respectivamente. Vamos também introduzir duas funções reais $\nu(r)$ e $\nu^*(r)$ em G com as seguintes propriedades:

1. ν e ν^* são diferenciáveis em $\mathcal{V}$;
2. ν e ν^* desaparecem fora de uma vizinhança esférica $\mathcal{V}_3$ ($|r| < \alpha$) contida em $\mathcal{V}_2$;
3. $\int_G \nu(r) dr = \int_G \nu^*(r) dr^* = 1$.

² A existência de uma medida de Haar em grupos localmente compactos implica a existência de tal medida invariante em grupos de Lie, (RACZKA; BARUT, 1986), p. 111

Note que as integrais na propriedade 3 se estendem somente por $\mathcal{V}_3$, uma vez que $\nu = \nu^* = 0$ fora dela. Uma possível realização destas funções reais é $\nu(r) = \gamma\phi(r)$ e $\nu^*(r) = \gamma^*\phi(r)$, com

$$\phi(r) = \begin{cases} \exp(-(\alpha^2 - |r|^2)^{-1}), & r \in \mathcal{V}_3 \\ 0, & r \notin \mathcal{V}_3. \end{cases} \quad (4.2.1)$$

As constantes γ e γ^* são escolhidas de forma que a propriedade 3 valha. Serão definidos agora, de acordo com (IWASAWA, 1949):

$$\begin{aligned} \delta'(r, s) &= \delta(r, s) + \Delta_{r,s}(x), & (r, s \in \mathcal{V}_1) \\ x(r) &= - \int_G \delta(r, t)\nu(t)dt, & (r \in \mathcal{V}_1^2) \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

$$\begin{aligned} \delta''(r, s) &= \delta'(r, s) + \Delta_{r,s}(x'), & (r, s \in \mathcal{V}_2) \\ x'(r) &= - \int_G \delta'(u, r)\nu^*(u)d^*u. & (r \in \mathcal{V}_2^2) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Estas expressões são válidas nos domínios indicados e ainda

$$x(e) = - \int_G \delta(e, t)\nu(t)dt = 0, \quad (4.2.4)$$

já que $\delta(e, t) = 0$. O mesmo vale para

$$x'(e) = - \int_G \delta'(u, e)\nu^*(u)d^*u = 0, \quad (4.2.5)$$

pelo mesmo argumento. Logo $x(e) = x'(e) = 0$, como exigido das funções $x(r)$.

Utilizando a forma de $x(r)$ de (4.2.2) e $\Delta_{r,s} = x(r) + x(s) - x(rs)$ temos

$$\Delta_{r,s}(x) = - \int_G \delta(r, t)\nu(t)dt - \int_G \delta(s, t)\nu(t)dt + \int_G \delta(rs, t)\nu(t)dt, \quad (4.2.6)$$

então

$$\delta'(r, s) = \delta(r, s) + \left\{ \int_G \delta(rs, t)\nu(t)dt - \int_G \delta(r, t)\nu(t)dt - \int_G \delta(s, t)\nu(t)dt \right\}. \quad (4.2.7)$$

Pela propriedade 3 de ν e como $\delta(r, s)$ não é função de t , podemos escrevê-lo como $\delta(r, s) = \int_G \delta(r, s)\nu(t)dt$, logo

$$\delta'(r, s) = \int_G \{\delta(r, s) - \delta(r, t) - \delta(s, t) + \delta(rs, t)\}\nu(t)dt. \quad (4.2.8)$$

Notemos que δ é definido em $\mathcal{V}$. Então nesta integral $rs \in \mathcal{V}$ e também $st \in \mathcal{V}$, por (2.2.23)

$$\delta'(r, s) = \int_G \{\delta(rs, t) - \delta(r, t)\}\nu(t)dt. \quad (4.2.9)$$

Fazendo um reescalonamento $t \rightarrow s^{-1}t$, temos

$$\delta'(r, s) = \int_G \delta(r, t) \{ \nu(s^{-1}t) - \nu(t) \} dt \quad (r, s \in \mathcal{V}_1). \quad (4.2.10)$$

Realizando o mesmo processo para $\delta''(r, s)$ pela forma de $x'(r)$ dada (4.2.3), temos

$$\delta''(r, s) = \delta'(r, s) + \int_G \left\{ \delta'(u, rs) - \delta'(u, r) - \delta'(u, s) \right\} \nu^*(u) d^*u. \quad (4.2.11)$$

Novamente utilizando a propriedade 3 das funções ν e ν^* , ficamos com

$$\delta''(r, s) = \int_G \left\{ \delta'(r, s) - \delta'(u, r) - \delta'(u, s) + \delta'(u, rs) \right\} \nu^*(u) d^*u. \quad (4.2.12)$$

Por (2.2.23) e fazendo o reescalonamento $u \rightarrow ur^{-1}$, obtemos

$$\delta''(r, s) = \int_G \delta'(u, t) \{ \nu^*(ur^{-1}) - \nu^*(u) \} d^*u \quad (r, s \in \mathcal{V}_2). \quad (4.2.13)$$

Inserindo (4.2.10) em (4.2.13), temos finalmente

$$\delta''(r, s) = \int_G \left[\int_G \delta(u, t) \{ \nu(s^{-1}t) - \nu(t) \} dt \right] \{ \nu^*(ur^{-1}) - \nu^*(u) \} d^*u. \quad (4.2.14)$$

Através das construções feitas por Iwasawa para as funções $x'(r)$ e $x(r)$ e a comparação com a equação (4.2.14) temos o seguinte conjunto de relações:

$$\begin{aligned} \delta''(r, s) &= \delta(r, s) + \Delta_{r,s}(x''), & (r, s \in \mathcal{V}_2) \\ x''(r) &= x(r) + x'(r), & (r \in \mathcal{V}_2^2) \\ \delta''(r, s) &= \int_G \int_G \delta(u, t) \{ \nu(s^{-1}t) - \nu(t) \} \{ \nu^*(ur^{-1}) - \nu^*(u) \} dt d^*u. \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Nesta última integral notemos que apenas ν e ν^* dependem dos elementos r e s , logo a diferenciabilidade de δ'' com respeito as coordenadas de r e s segue da diferenciabilidade, por definição, de ν e ν^* e da analiticidade da multiplicação de grupo na vizinhança $\mathcal{V}_0$. $\square$

Veja que a construção de Iwasawa consiste na determinação de uma forma para as funções $x(r)$ e $x'(r)$ que leva a equivalência entre expoentes locais e expoentes diferenciáveis.

4.2.2 Expoentes locais diferenciáveis equivalentes

Sejam δ_1 e δ_2 dois expoentes diferenciáveis equivalentes, seja também $\mathcal{V}(\mathcal{V}^2 \subset \mathcal{V}_0)$ uma vizinhança adequadamente escolhida tal que a função $\chi = \delta_2 - \delta_1 = \Delta(x)$ seja diferenciável em $\mathcal{V}$ e a função $x(r)$ seja contínua e limitada na vizinhança dos produtos. Então

$$\eta(r) = \int_G \chi(r, t) \nu(t) dt, \quad (4.2.16)$$

onde $\nu(r)$ é definida como anteriormente e $x_1(r) = \eta(r) - x(r)$. A função $\eta(r)$ depende de ν e de χ , e da definição sabemos que ν é diferenciável. Como os expoentes que constituem χ são diferenciáveis por si só, χ também o é, uma vez que a subtração não altera a diferenciabilidade. Portanto, ao escrever $\eta(r) = x_1(r) + x(r)$ temos que x é diferenciável em $\mathcal{V}$. Para qualquer vizinhança $\mathcal{V}_1(\mathcal{V}_1^2 \subset \mathcal{V})$ essa análise prova o lema:

Lema 6. *Se dois expoentes diferenciáveis δ_1 e δ_2 de um grupo de Lie são equivalentes, então, em alguma vizinhança $\mathcal{V}_1$, $\delta_2 = \delta_1 + \Delta(x)$ com a função $x(r)$ diferenciável.*

4.2.3 Expoentes locais de um grupo de um parâmetro

Para um grupo G de um parâmetro, a vizinhança esférica aberta $\mathcal{V}$ é um intervalo aberto ($|\rho| < \gamma$), e a operação que define o grupo é a adição ordinária; isto se deve ao fato de que um grupo a um parâmetro é uma reta. Portanto, um expoente local δ_0 definido em $\mathcal{V}$ é uma função contínua $\delta_0(\rho, \sigma)$ ($-\gamma < \rho, \sigma < \gamma$) que, de acordo com (2.2.22) e (2.2.23), satisfaz

$$\delta_0(0, 0) = 0, \quad (4.2.17)$$

$$\delta_0(\mu_1, \mu_2) + \delta_0(\mu_1 + \mu_2, \mu_3) = \delta_0(\mu_2, \mu_3) + \delta_0(\mu_1, \mu_2 + \mu_3), \quad (4.2.18)$$

onde μ_1, μ_2, μ_3 corresponde a r, s, t e $-\gamma < \mu_i, \mu_1 + \mu_2, \mu_2 + \mu_3 < \gamma$. Utilizando a equação (2.2.24) e considerando que o elemento unitário e é representado pelas coordenadas $(\rho^1, \dots, \rho^n)$ com $\rho^1 = \dots = \rho^n = 0$, tem-se $\delta_0(\mu, 0) = 0$.

Lema 7. *Todo expoente local de um grupo a um parâmetro é equivalente a zero.*

Prova: Pelo Lema 5, podemos assumir o expoente δ_0 diferenciável. Seja então:

$$\psi(\mu, \sigma) = \frac{\partial \delta_0(\mu, \sigma)}{\partial \sigma}. \quad (4.2.19)$$

Ao derivar (4.2.18) com relação a μ_3 em $\mu_3 = 0$ temos quatro termos. A derivada do primeiro termo do lado esquerdo é nula, restando:

$$\psi(\mu_1 + \mu_2, 0) = \psi(\mu_2, 0) + \psi(\mu_1, \mu_2) \quad (-\gamma < \mu_1, \mu_2, \mu_1 + \mu_2 < \gamma). \quad (4.2.20)$$

Defina agora

$$x_0(\mu) = \int_0^\mu \psi(\sigma, 0) d\sigma = \int_0^1 \mu \psi(\sigma \mu, 0) d\sigma \quad (|\mu| < \gamma). \quad (4.2.21)$$

É fácil notar que $x_0(0) = 0$. Para $|\mu_i| < \frac{1}{2}\gamma$ temos:

$$\Delta_{\mu_1, \mu_2}(x_0) = x_0(\mu_1) + x_0(\mu_2) - x_0(\mu_1 + \mu_2) \quad (4.2.22)$$

e utilizando (4.2.21)

$$\Delta_{\mu_1, \mu_2}(x_0) = \int_0^{\mu_1} \psi(\sigma, 0) d\sigma + \int_0^{\mu_2} \psi(\sigma, 0) d\sigma - \int_0^{\mu_1 + \mu_2} \psi(\sigma, 0) d\sigma. \quad (4.2.23)$$

A fim de termos duas integrais com limites independentes podemos escrever a primeira integral como

$$\int_0^{\mu_1} \psi(\sigma, 0) d\sigma = - \int_{\mu_1}^0 \psi(\sigma, 0) d\sigma, \quad (4.2.24)$$

$$-\Delta_{\mu_1, \mu_2}(x_0) = \int_{\mu_1}^{\mu_1 + \mu_2} \psi(\sigma, 0) d\sigma - \int_0^{\mu_2} \psi(\sigma, 0) d\sigma. \quad (4.2.25)$$

Apenas a primeira integral depende de μ_1 e podemos contabilizar esta contribuição por $\psi(\mu_1 + \sigma, 0)$.

Assim

$$-\Delta_{\mu_1, \mu_2}(x_0) = \int_0^{\mu_2} \{ \psi(\mu_1 + \sigma, 0) - \psi(\sigma, 0) \} d\sigma, \quad (4.2.26)$$

ou ainda

$$-\Delta_{\mu_1, \mu_2}(x_0) = \int_0^{\mu_2} \psi(\mu_1, \sigma) d\sigma = \int_0^{\mu_2} \left(\frac{\partial \delta_0(\mu_1, \sigma)}{\partial \sigma} \right) d\sigma = \delta_0(\mu_1, \mu_2) - \delta_0(\mu_1, 0). \quad (4.2.27)$$

Por (2.2.24), $\delta_0(\mu_1, 0) = 0$, então

$$\delta_0(\mu_1, \mu_2) + \Delta_{\mu_1, \mu_2}(x_0) = 0 \quad \therefore \quad \delta_0 \equiv 0. \quad \square \quad (4.2.28)$$

4.2.4 Expoentes locais canônicos

De posse dos últimos resultados no campo dos expoentes locais, iremos partir para o estudo dos mesmos em coordenadas canônicas. Iniciamos com a seguinte definição

Definição 12. *Um expoente local δ de um grupo de Lie G definido em uma vizinhança canônica $\mathcal{V}$ é dito canônico se:*

1. δ é diferenciável em $\mathcal{V}$;
2. $\delta(r, s) = 0$ se r e s são elementos do mesmo subgrupo local de um parâmetro em $\mathcal{V}$.

Temos então o lema:

Lema 8. *Todo expoente local δ de um grupo de Lie é equivalente a um expoente local canônico.*

Prova: Novamente, de acordo com o Lema 5 podemos assumir δ como diferenciável em uma vizinhança $\mathcal{V}'$ ($|r| < \kappa$) na qual ele é definido. Fazendo a escolha de outra vizinhança $\mathcal{V}_\infty$ ($|r| < \kappa_1$) tal que $\mathcal{V}_1^2 \subset \mathcal{V}$, se $r \in \mathcal{V}_1$, o produto $r \cdot r \in \mathcal{V}_1$. Para as coordenadas canônicas o produto $r \cdot r = 2r$, então o limite da vizinhança é dado por $\kappa_1 \leq \frac{1}{2}\kappa$.

Façamos a definição de uma nova função para dois elementos r e r' com coordenadas ρ^k e ρ'^k , respectivamente:

$$\chi_k(r, r') = \frac{\partial \delta(r, r')}{\partial \rho'^k} \quad (r, r' \in \mathcal{V}) \quad (4.2.29)$$

e também

$$x(r) = \int_0^1 \sum_{k=1}^n \rho^k \chi_k(\omega r, 0) d\omega \quad (r \in \mathcal{V}), \quad (4.2.30)$$

$$\delta'(r, s) = \delta(r, s) + \Delta_{r,s}(x) \quad (r, s \in \mathcal{V}_1). \quad (4.2.31)$$

Como já visto, $x(r)$ é diferenciável e $x(e) = 0$ por definição. Logo δ' é diferenciável em $\mathcal{V}_1$. Seja então $r(\mu) = \mu a$ um subgrupo local a um parâmetro fixo na vizinhança $\mathcal{V}_1$. Mostrar que

$$\delta'(\mu_1 a, \mu_2 a) = 0 \quad (\mu_i a \in \mathcal{V}_1), \quad (4.2.32)$$

significa provar que δ' é um expoente local canônico. Para $a = 0$ isto é trivial. Vamos então assumir $a \neq 0$. Se o parâmetro μ é limitado por γ , ou seja, $|\mu| < \gamma = \frac{\kappa}{|a|}$ então $r(\mu) \in \mathcal{V}$, e se o subgrupo pertence à vizinhança $\mathcal{V}_1$, então $|\mu| < \frac{\kappa_1}{|a|} \leq \frac{1}{2}\gamma$. Seja $\delta(\mu_1 a, \mu_2 a) = \delta_0(\mu_1, \mu_2)$ com $(|\mu_i| < \gamma)$. Ao denotar as coordenadas do vetor a por α^k , a função apresentada em (4.2.19) se torna

$$\psi(\mu, \sigma) = \frac{\partial \delta_0(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} = \frac{\partial \delta(\mu a, \sigma a)}{\partial \sigma} = \sum_{k=1}^n \alpha^k \chi_k(\mu a, \sigma a). \quad (4.2.33)$$

Por (4.2.21) e (4.2.30) temos

$$\psi(\mu, \sigma) = \sum_{k=1}^n \alpha^k \chi_k(\mu a, \sigma a), \quad (4.2.34)$$

então

$$\psi(\sigma \mu, 0) = \sum_{k=1}^n \alpha^k \chi_k(\sigma \mu a, 0). \quad (4.2.35)$$

De (4.2.21), $x_0(\mu) = \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^n \mu \alpha^k \chi_k(\sigma \mu a, 0) \right] d\sigma$, portanto

$$x_0(\mu) = x(\mu a). \quad (4.2.36)$$

Se $\mu_i a \in \mathcal{V}_1$, então o parâmetro é limitado por $|\mu_i| \leq \frac{1}{2}\gamma$, tem-se

$$\delta'(\mu_1 a, \mu_2 a) = \delta(\mu_1 a, \mu_2 a) + x(\mu_1 a) + x(\mu_2 a) - x[(\mu_1 + \mu_2)a], \quad (4.2.37)$$

$$\delta'(\mu_1 a, \mu_2 a) = \delta_0(\mu_1, \mu_2) + x_0(\mu_1) + x_0(\mu_2) - x_0(\mu_1 + \mu_2) = \delta_0(\mu_1, \mu_2) + \Delta_{\mu_1, \mu_2}(x_0). \quad (4.2.38)$$

Pelo resultado obtido em (4.2.28)

$$\delta'(\mu_1 a, \mu_2 a) = 0. \quad (4.2.39)$$

Isso estabelece (4.2.32) e finaliza a prova do Lema 8. $\square$

4.2.5 Expoentes locais canônicos equivalentes

Para a análise da equivalência dessa classe de expoentes, comecemos pelo seguinte lema:

Lema 9. *Sejam δ_1 e δ_2 dois expoentes locais equivalentes de um grupo de Lie G , e assuma δ_1 canônico. Então δ_2 é canônico se e somente se em alguma vizinhança $\delta_2 = \delta_1 + \Delta[\Lambda]$ onde $\Lambda(r)$ é uma forma linear nas coordenadas canônicas de r .*

Prova: Realizaremos a prova em dois passos, primeiramente analisando a necessidade desta condição envolvendo a forma linear e em um segundo momento checando a suficiência da mesma.

1. **Necessidade da Condição.** Pelo Lema 6, provado anteriormente, existe uma vizinhança $\mathcal{V}(|r| < \kappa)$ na qual δ_2 e δ_1 são canônicos e

$$\delta_2(r, s) = \delta_1(r, s) + \Delta_{r,s}(x) \quad (r, s \in \mathcal{V}), \quad (4.2.40)$$

com a função $x(r)$ diferenciável definida para $r \in \mathcal{V}^2$. Assumindo $r = \mu_1 a$ e $s = \mu_2 a$, temos a relação (4.2.39) e $\delta_2 = \delta_1 = 0$, nos levando a

$$\Delta_{r,s}(x) = x(\mu_1 a) + x(\mu_2 a) - x[(\mu_1 + \mu_2)a] = 0 \quad (\mu_i a \in \mathcal{V}). \quad (4.2.41)$$

Assumindo $|a| < \kappa$, ou seja, o vetor tangente pertencendo à vizinhança $\mathcal{V}$, a relação anterior vale se $|\mu_i| \leq 1$ e $|\mu_1 + \mu_2| \leq 1$. A equação (4.2.41) sugere duas possibilidades, a primeira caso $x(\mu a) = \mu x(a)$, assim

$$x(\mu_1 a) + x(\mu_2 a) = x[(\mu_1 + \mu_2)a] = (\mu_1 + \mu_2)x(a). \quad (4.2.42)$$

A outra advém do caminho inverso, se $x(\mu_1 a) + x(\mu_2 a) = x[(\mu_1 + \mu_2)a]$, então:

$$x(\mu_1 a) + x(\mu_2 a) = (\mu_1 + \mu_2)x(a). \quad (4.2.43)$$

Como checagem de consistência, seja $\mu = N$ um número inteiro. Como $x(a)$ é uma função real diferenciável, temos

$$x(a) = x\left(N \frac{a}{n}\right) = x\left(\frac{a}{N} + \frac{a}{N} + \cdots + \frac{a}{N}\right), \quad (4.2.44)$$

da diferenciabilidade,

$$x\left(N \frac{a}{n}\right) = x\left(\frac{a}{N}\right) + x\left(\frac{a}{N}\right) + \cdots + x\left(\frac{a}{N}\right), \quad (4.2.45)$$

$$x(a) = Nx\left(\frac{a}{N}\right) \quad \therefore \quad x\left(\frac{a}{N}\right) = \frac{1}{N}x(a). \quad (4.2.46)$$

Rebatizando $\frac{1}{N} = m = \mu$, temos

$$x(\mu a) = \mu x(a), \quad (4.2.47)$$

com $N \neq 0$. A generalização para números reais é mais complexa envolvendo tópicos de análise real. Derivando (4.2.47) com respeito a μ em $\mu = 0$, tem-se:

$$\left. \frac{\partial x(\mu a)}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} = \left\{ \mu \left. \frac{\partial x(a)}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} + \left. \frac{\partial \mu}{\partial \mu} x(a) \right|_{\mu=0} \right\}. \quad (4.2.48)$$

Utilizando a regra da cadeia no primeiro membro

$$x(a) = \left. \frac{\partial x(\mu a)}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} = \left[\frac{\partial x(\mu a)}{\partial(\mu a)} \cdot \frac{\partial(\mu a)}{\partial \mu} \right] \Big|_{\mu=0} = a \left. \frac{\partial x(\mu a)}{\partial(\mu a)} \right|_{\mu=0}. \quad (4.2.49)$$

A linearidade da derivada, a relação (4.2.47) e a forma coordenatizada de a dada por α^k nos leva a

$$x(a) = \sum_{k=1}^n \alpha^k \lambda_k, \quad (4.2.50)$$

onde $\lambda_k \equiv \frac{\partial x}{\partial \alpha^k}$. Como $x(a)$ e α^k são lineares e λ_k é um coeficiente, então:

$$x(a) = \sum_{k=1}^n \alpha^k \lambda_k = \Lambda(a). \quad (4.2.51)$$

2. Suficiência da Condição. Se $x(r) = \Lambda(r)$ para $r \in \mathcal{V}_1^2 \subset \mathcal{V}$, como δ_1 e $\Delta[\Lambda]$ são diferenciáveis então $\delta_2 = \delta_1 + \Delta[\Lambda]$ é diferenciável na vizinhança $\mathcal{V}_1$. A relação (4.2.41) vale se $\mu_i a \in \mathcal{V}_1$ e $\delta_1(\mu_1 a, \mu_2 a) = 0$ implica $\delta_2(\mu_1 a, \mu_2 a) = 0$. Portanto, δ_2 é canônico. $\square$

4.2.6 Grupo Local e Expoentes Infinitesimais

A partir desta seção veremos as implicações de toda a teoria estudada até aqui no grupo local H visto anteriormente. Para um expoente local canônico δ de um grupo de Lie de dimensão n , G , os elementos do grupo local H são $\bar{r} = \{\theta, r\}$ com θ sendo um número real e r um elemento de G . A multiplicação de grupo é definida pela relação (2.2.53). Por outro lado, os elementos $\bar{r}$ são descritos por $n+1$ coordenadas $\rho^0, \rho^1, \dots, \rho^n$ onde $\rho^0 = \theta$ e $\rho^1, \rho^2, \dots, \rho^n$ são as coordenadas de r em G . Como anteriormente podemos introduzir vizinhanças esféricas em H por:

$$|\bar{r}| = \left(\sum_{k=0}^n (\rho^k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = [(\rho^0)^2 + |r|^2]^{\frac{1}{2}} < \kappa. \quad (4.2.52)$$

Ao assumir $\delta(r, s)$ canônico para $|r| < \kappa$, $|s| < \kappa$ em uma vizinhança $\mathcal{M}(|\bar{r}| < \kappa)$, pode-se escolher uma vizinhança $\mathcal{M}_1(|\bar{r}| < \kappa_1)$ tal que $\bar{r}\bar{s} \in \mathcal{M}$ se $\bar{r}, \bar{s} \in \mathcal{M}_1$. Se ρ^i, σ^i, τ^i ($0 \leq i \leq n$ são as coordenadas dos elementos $\bar{r}, \bar{s}$ e $\bar{t} = \bar{r}\bar{s}$ respectivamente) a relação de definição (2.2.53) nos leva a

$$\tau^i = \bar{f}^i(\bar{r}, \bar{s}) \quad (0 \leq i \leq n; \bar{r}, \bar{s} \in \mathcal{M}_1), \quad (4.2.53)$$

sendo

$$\begin{aligned} \tau^0 &= \bar{f}^0(\bar{r}, \bar{s}) = \rho^0 + \sigma^0 + \delta(r, s), \\ \tau^i &= \bar{f}^i(\bar{r}, \bar{s}) = f^i(r, s), \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (4.2.54)$$

É claro que as funções $\bar{f}^i(\bar{r}, \bar{s})$ herdam a diferenciabilidade de $\delta(r, s)$ e $f^i(r, s)$ na vizinhança $\mathcal{M}_1(0 \leq i \leq n)$. Isto implica H ser um grupo de Lie local de dimensão $(n+1)$.

A partir da definição de coordenadas canônicas podemos checar que as coordenadas ρ^i são canônicas em $\mathcal{M}_1$. Partindo de $\bar{r}(\mu) = \mu\bar{a}$ com $\bar{a} = \{\alpha^0, a\}$, tem-se

$$\bar{r}(\mu) = \{\mu\alpha^0, \mu a\} = \{\mu\alpha^0, r(\mu)\}. \quad (4.2.55)$$

Como δ é canônico, da relação (2.2.53) tem-se

$$\bar{r}(\mu_1)\bar{r}(\mu_2) = \{(\mu_1 + \mu_2)\alpha^0 + \delta(\mu_1 a, \mu_2 a), r(\mu_1)r(\mu_2)\} = \bar{r}(\mu_1 + \mu_2), \quad (4.2.56)$$

se $|\mu_i a| < \kappa$ (ou seja, se pertence à vizinhança $\mathcal{M}_1$). Portanto $\rho^i = \mu\alpha^i$, ou seja ρ^i são coordenadas canônicas em $\mathcal{M}_1$.

Sob uma ótica diferente, assumir as coordenadas definidas por (2.2.53) canônicas para um expoente diferenciável δ , leva-nos a afirmação de que δ é um expoente local canônico. Como mencionado anteriormente, para um sistema de coordenadas canônicas a função $\bar{f}^i(r, s)$ é analítica em alguma vizinhança $\mathcal{M}'$, o que implica δ analítico em alguma vizinhança $\mathcal{V}'$ de G . Estes argumentos provam o lema a seguir:

Lema 10. *Um expoente local canônico $\delta(r, s)$ de um grupo de Lie G é, em alguma vizinhança $\mathcal{V}'$, uma função analítica das coordenadas canônicas de r e s .*

Como o grupo H é um grupo de Lie local, a álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ é formada pelos $(n+1)$ -dimensional vetores $\bar{a}$ com componentes α^k ($0 \leq k \leq n$) vistas anteriormente, estes expressos por $\bar{a} = \{\alpha^0, a\}$, onde $a = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ é um elemento da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G . Seja o comutador, já definido $\bar{q}(\bar{r}, \bar{s}) = \bar{r}\bar{s}\bar{r}^{-1}\bar{s}^{-1}$ por (4.1.14). O colchete $[\bar{a}, \bar{b}] = [\{\alpha^0, a\}, \{\beta^0, b\}]$ entre dois elementos da álgebra $\mathfrak{h}$ é dado pelo limite $\lim_{\mu \rightarrow 0} \mu^{-2} \bar{q}(\mu\bar{a}, \mu\bar{b})$. Por (2.2.53),

$$(\mu\bar{a})(\mu\bar{b}) = \{\mu(\alpha^0 + \beta^0) + \delta(\mu a, \mu b), (\mu a)(\mu b)\} \quad (4.2.57)$$

e como em um subgrupo a um parâmetro $r^{-1} = -r$, temos

$$(\mu\bar{a})^{-1}(\mu\bar{b})^{-1} = (-\mu\bar{a})(-\mu\bar{b}) = \{-\mu(\alpha^0 + \beta^0) + \delta(-\mu a, -\mu b), (\mu a)^{-1}(\mu b)^{-1}\}. \quad (4.2.58)$$

De posse destas duas relações, o colchete $[\bar{a}, \bar{b}]$ fica

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \lim_{\mu \rightarrow 0} \mu^{-2} \{\mu(\alpha^0 + \beta^0) + \delta(\mu a, \mu b), (\mu a)(\mu b)\} \{-\mu(\alpha^0 + \beta^0) + \delta(-\mu a, -\mu b), (\mu a)^{-1}(\mu b)^{-1}\}, \quad (4.2.59)$$

ou ainda, o primeiro termo é

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \mu^{-2} \left[\delta((\mu a, \mu b), (\mu a)^{-1}(\mu b)^{-1}) + \delta(\mu a, \delta b) + \delta(-\mu a, -\mu b) \right] = \Xi(a, b), \quad (4.2.60)$$

este é o expoente infinitesimal. O segundo termo,

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \mu^{-2} (\mu a)(\mu b)(\mu a)^{-1}(\mu b)^{-1} = [a, b], \quad (4.2.61)$$

como já visto é o colchete da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \{\Xi(a, b), [a, b]\}. \quad (4.2.62)$$

Sejam a, a', b, b' de $\mathfrak{g}$ e λ e λ' números reais, da antissimetria do colchete temos

$$[\bar{b}, \bar{a}] = \{\Xi(b, a), [b, a]\} = \{-\Xi(a, b), -[a, b]\} = -[\bar{a}, \bar{b}],$$

ou seja

$$\Xi(a, b) = -\Xi(b, a),$$

isto é, $\Xi(a, b)$ é antissimétrico. Já a linearidade, fornece

$$[\lambda\bar{a} + \lambda'\bar{a}', \bar{b}] = [\lambda\bar{a}, \bar{b}] + [\lambda'\bar{a}', \bar{b}] = \lambda[\bar{a}, \bar{b}] + \lambda'[\bar{a}', \bar{b}]$$

e por (4.2.62)

$$[\lambda\bar{a} + \lambda'\bar{a}', \bar{b}] = \lambda\{\Xi(a, b), [a, b]\} + \lambda'\{\Xi(a', b), [a', b]\},$$

esta relação nos permite concluir que $\Xi(\lambda a + \lambda' a', b) = \lambda\Xi(a, b) + \lambda'\Xi(a', b)$, ou seja, $\Xi(a, b)$ é linear na primeira entrada. Vejamos o que ocorre se $\bar{b} \rightarrow \lambda\bar{b} + \lambda'\bar{b}'$

$$[\bar{a}, \lambda\bar{b} + \lambda'\bar{b}'] = [\bar{a}, \lambda\bar{b}] + [\bar{a}, \lambda'\bar{b}'] = \lambda[\bar{a}, \bar{b}] + \lambda'[\bar{a}, \bar{b}'],$$

novamente utilizando (4.2.62)

$$[\bar{a}, \lambda\bar{b} + \lambda'\bar{b}'] = \lambda\{\Xi(a, b), [a, b]\} + \lambda'\{\Xi(a, b'), [a, b']\}.$$

Portanto, tem-se que $\Xi(a, \lambda b + \lambda' b') = \lambda\Xi(a, b) + \lambda'\Xi(a, b')$ e $\Xi(a, b)$ é linear na segunda entrada. Então um expoente infinitesimal possui as propriedades a seguir

$$\Xi(a, b) = -\Xi(b, a); \quad \Xi(\lambda a + \lambda' a', b) = \lambda\Xi(a, b) + \lambda'\Xi(a', b), \quad (4.2.63)$$

$$\Xi(a, \lambda b + \lambda' b') = \lambda\Xi(a, b) + \lambda'\Xi(a, b'). \quad (4.2.64)$$

Isto é, o expoente infinitesimal $\Xi(a, b)$ é uma forma bilinear antissimétrica de valor real em $\mathfrak{g}$. Além disso, outra condição se segue da identidade de Jacobi $\bar{j} = [[\bar{a}, \bar{a}']\bar{a}''] + [[\bar{a}', \bar{a}''], \bar{a}] + [[\bar{a}'', \bar{a}], \bar{a}'] = 0$, para quaisquer três elementos de $\mathfrak{h}$. Através de (4.2.62) tem-se, por exemplo,

$$[[\bar{a}', \bar{a}''], \bar{a}] = [\{\Xi(a', a''), [a', a'']\}\{\alpha^0, a\}] = \{\Xi([a', a''], a), [[a', a''], a]\} \quad (4.2.65)$$

e similarmente para os outros dois elementos. Definindo, para qualquer forma bilinear antissimétrica Ξ , $d\Xi(a, a', a'') = \Xi([a, a'], a'') + \Xi([a', a''], a) + \Xi([a'', a], a')$, temos que $d\Xi$ é linear nos três argumentos e antissimétrica em quaisquer dois. Desta forma, tomando $\bar{j} = \{d\Xi(a, a', a''), j\}$, com $j = [[a, a']a''] +$

$[[a', a''], a] + [[a'', a], a'] = 0$ em $\mathfrak{g}$, $\bar{j} = 0$ é equivalente a

$$d\Xi(a, a', a'') = 0. \quad (a, a', a'' \in \mathfrak{g}) \quad (4.2.66)$$

A fim de estabelecer formalmente um expoente infinitesimal, segue a próxima definição.

Definição 13. *Qualquer forma bilinear antissimétrica de valor real Ξ definida na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ para a qual $d\Xi(a, a', a'') = 0$ será chamada expoente infinitesimal de $\mathfrak{g}$. Se o expoente infinitesimal for dado por (4.2.60) o mesmo é dito corresponder ao expoente local canônico δ de G .*

Para a base de $\mathfrak{g}$ dada pelo conjunto de vetores $a_1, \dots, a_n$, vamos definir $\beta_{ij} = \Xi(a_i, a_j)$ para um expoente infinitesimal qualquer. Desta forma, para dois vetores quaisquer de $\mathfrak{g}$ $a = \sum_{i=1}^n \gamma^i a_i$ e $a' = \sum_{i=1}^n \gamma'^i a_i$, temos

$$\Xi(a, a') = \sum_{i,j=1}^n \beta_{ij} \gamma^i \gamma'^j \quad (4.2.67)$$

e β_{ij} carrega a antissimetria da forma bilinear. Assim, ao substituir a, a', a'' por a_i, a_j, a_k respectivamente em (4.2.66) e utilizando (4.1.15) temos, por exemplo

$$\Xi([a_i, a_j], a_k) = \sum_{m=1}^n c^m_{ij} \Xi(a_m, a_k) = \sum_{m=1}^n \beta_{mk} c^m_{ij}. \quad (4.2.68)$$

Logo (4.2.66) implica

$$I_{kij} = \sum_{m=1}^n (\beta_{mk} c^m_{ij} + \beta_{mi} c^m_{jk} + \beta_{mj} c^m_{ik}) = 0 \quad (i \leq k, i, j \leq n). \quad (4.2.69)$$

É válido ressaltar que para qualquer expoente infinitesimal de $\mathfrak{g}$ a equação (4.2.62) define uma álgebra de Lie de dimensão $(n+1)$.

Para uma base padrão em $\mathfrak{h}$ podemos associar as constantes de estrutura aos expoentes infinitesimais. Seguindo a ideia de base padrão mostrada no início da seção que culminou em (4.1.18), a base padrão em $\mathfrak{h}$ em coordenadas canônicas $\rho^0, \rho^1, \dots, \rho^n$ em H é $\bar{a}_0 = \{1, 0\}$; $\bar{a}_i = \{0, a_i\}$. Desta forma as constantes de estrutura $\bar{c}^m_{ij}$ de H são encontradas como

$$\begin{aligned} \bar{c}^0_{ij} &= \beta_{ij} = \Xi(a_i, a_j) & (1 \leq i, j \leq n), \\ \bar{c}^m_{ij} &= c^m_{ij} & (1 \leq m, i, j \leq n), \\ \bar{c}^m_{i0} &= \bar{c}^m_{0j} = 0 & (0 \leq m, i \leq n). \end{aligned} \quad (4.2.70)$$

As equações obtidas no processo para $\mathfrak{g}$ em (4.1.18) aplicadas em H implicam

$$\bar{c}^0_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \bar{f}^0}{\partial \rho^i \partial \sigma^i} - \frac{\partial^2 \bar{f}^0}{\partial \rho^j \partial \sigma^i} \right)_{[\rho^k = \sigma^k = 0]} \quad (1 \leq i, j \leq n). \quad (4.2.71)$$

Ao escrever as funções $\bar{f}^0$ como em (4.2.54) obtemos a seguinte relação para os expoentes infinitesimais

com δ canônico

$$\Xi(a_i, a_j) = \beta_{ij} = \left(\frac{\partial^2 \delta}{\partial \rho^i \partial \sigma^i} - \frac{\partial^2 \delta}{\partial \rho^j \partial \sigma^i} \right)_{[\rho^k = \sigma^k = 0]} \quad (1 \leq i, j \leq n). \quad (4.2.72)$$

Assim como feito anteriormente com expoentes locais diferenciáveis e canônicos, vejamos agora a equivalência entre expoentes infinitesimais. Faremos o estudo para um expoente local canônico da forma $\delta = \Delta[\Lambda]$. Recorrendo à linearidade de Λ , ao se calcular (4.2.60) para um expoente desta forma tem-se

$$\Xi(a, b) = -\lim \mu^{-2} \Lambda(q(\mu a, \mu b)) = -\Lambda(\lim \mu^{-2} q(\mu a, \mu b)) = -\Lambda([a, b]). \quad (4.2.73)$$

Neste caso iremos escrever $\Xi = -d[\Lambda]$. Para vetores a_i de uma base $\mathfrak{g}$, batizando $\Lambda(a_i) = \lambda_i$, temos

$$\Xi(a_i, a_j) = \sum_{m_1}^n c_{ji}^m \Lambda(a_m) = \sum_{m_1}^n c_{ji}^m \lambda_m = \beta_{ij}. \quad (4.2.74)$$

Todo Ξ da forma (4.2.73) é um expoente infinitesimal de $\mathfrak{g}$ uma vez que é bilinear, antissimétrico e a linearidade de Λ não altera a identidade de (4.2.66). A relação (4.2.73) e o Lema 6 nos levam a definição a seguir:

Definição 14. *Dois expoentes infinitesimais Ξ e Ξ' de $\mathfrak{g}$ são ditos equivalentes se $\Xi' = \Xi - d[\Lambda]$ e podemos escrever $\Xi' \equiv \Xi$, onde $\Lambda(a)$ é uma forma linear real, definida em $\mathfrak{g}$.*

4.2.7 Correspondência entre expoentes locais e infinitesimais

Como fechamento de toda a teoria exposta vejamos a correspondência entre os expoentes já vistos. Para todo expoente local canônico δ de G corresponde, de acordo com (4.2.60), um expoente infinitesimal Ξ de $\mathfrak{g}$ unicamente determinado. Essa correspondência é expressa por

$$\delta \rightarrow \Xi, \quad (4.2.75)$$

claramente linear. Além disso, se para dois expoentes locais canônicos o expoente infinitesimal correspondente coincidir, isto implica a coincidência entre os próprios expoentes locais em alguma vizinhança $\mathcal{V}$. Como visto em (4.2.70) os expoentes infinitesimais determinam unicamente as constantes de estrutura do grupo local e consequentemente determinam as funções $\bar{f}^i$ vistas em (4.2.54), que, por sua vez, determinam δ em uma vizinhança suficientemente pequena. A correspondência de (4.2.75) nos sugere o seguinte lema:

Lema 11. *Dois expoentes locais canônicos δ e δ' são equivalentes se, e somente se, os correspondentes expoentes infinitesimais Ξ e Ξ' são equivalentes.*

Prova: Esta prova será feita primeiramente assumindo $\delta' \equiv \delta$.

Como visto no Lema 9, $\delta' = \delta + \Delta[\Lambda]$ em alguma vizinhança $\mathcal{V}$. Fazendo a substituição de δ por δ' na

relação (4.2.60) e utilizando a forma $\Xi = -d[\Lambda]$ tem-se

$$\Xi' = \Xi - d[\Lambda], \quad (4.2.76)$$

portanto $\Xi' \equiv \Xi$.

Agora iremos assumir a equivalência entre os expoentes infinitesimais, ou seja, $\Xi' = \Xi - d[\Lambda]$. A correspondência (4.2.75) para δ' nos fornece $\delta + \Delta[\Lambda] \rightarrow \Xi'$ e a unicidade da correspondência devido (4.2.60) nos leva a

$$\delta' = \delta + \Delta[\Lambda], \quad (4.2.77)$$

em alguma vizinhança $\mathcal{V}$. Portanto $\delta' \equiv \delta$. □

Os resultados obtidos pelo Lema 8 e pelo Lema 11 combinados nos levam ao

Corolário 2. *Se para um grupo G todos os expoentes infinitesimais são equivalentes a zero, então todos os expoentes locais canônicos, e, portanto todos os expoentes locais, são equivalentes a zero.*

Vejamos o lema a seguir referente a correspondência direta entre um expoente local e um expoente infinitesimal.

Lema 12. *Para todo expoente infinitesimal Ξ de $\mathfrak{g}$ existe um expoente local canônico δ de G tal que $\delta \rightarrow \Xi$.*

Prova: Como já visto, um expoente infinitesimal define uma álgebra de Lie de dimensão $(n + 1)$, $\mathfrak{h}$, com constantes de estrutura da forma (4.2.70) e portanto define também um grupo de Lie local H de dimensão $(n + 1)$. Para as coordenadas canônicas as funções analíticas $\bar{f}^i(\bar{r}, \bar{s})$ definidas em alguma vizinhança de H tem a forma necessária mostrada em (4.2.54). Isso mostra que o expoente associado δ é canônico e, portanto é um expoente local de G uma vez que a lei de associatividade para a multiplicação (2.2.53) é equivalente a (2.2.23) que define expoentes locais.

A partir das implicações advindas do expoente infinitesimal é possível caminhar até a definição de um expoente local canônico. □

Do ponto de vista das classes de equivalência dos expoentes, temos o

Lema 13. *Existe uma correspondência linear um-a-um entre as classes de equivalência de expoentes locais de um grupo de Lie G e as classes de equivalência de expoentes infinitesimais da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G .*

Prova: Pelo Lema 8 é permitido (e suficiente) considerarmos expoentes locais canônicos. De acordo com os Lemas 11 e 12 a correspondência entre os expoentes é fornecida por (4.2.75). Então, não só cada classe de equivalência de δ determina unicamente uma classe de equivalência de Ξ como cada classe de equivalência de Ξ determina unicamente uma classe de equivalência de δ . Essa correspondência é dada por uma aplicação do espaço linear gerado pelos expoentes locais no espaço linear gerado pelos expoentes infinitesimais.

O espaço gerado pelos expoentes locais é denotado por v , então a correspondência é dada por:

$$\varphi : v \rightarrow \mathcal{B}^*. \quad (4.2.78)$$

Por consequência, a dimensão de v para um grupo de Lie é h^* . Todos os resultados obtidos, referentes aos grupos de Lie e suas particularidades, são condensados no seguinte teorema central.

- Teorema 8.** 1. *Em um grupo de Lie G , todo expoente local $\delta(r, s)$ é equivalente a um expoente local canônico $\delta'(r, s)$ que, em alguma vizinhança canônica $\mathcal{V}$, é analítico nas coordenadas canônicas de r e s e desaparece se r e s pertencem ao mesmo subgrupo de um parâmetro. Dois expoentes locais canônicos são equivalentes se e somente se $\delta' = \delta + \Delta[\Lambda]$ em alguma vizinhança canônica, onde $\Lambda(r)$ é uma forma linear nas coordenadas canônicas de r .*
2. *A todo expoente local canônico de G corresponde unicamente um expoente infinitesimal $\Xi(a, b)$ da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G , ou seja, uma forma bilinear antissimétrica que satisfaz a identidade de Jacobi. A correspondência é linear.*
3. *Dois expoentes locais canônicos δ e δ' são equivalentes se, e somente se, os correspondentes Ξ e Ξ' forem equivalentes.*
4. *Existe uma correspondência linear um-a-um entre as classes de equivalência dos expoentes locais de G e as classes de equivalência dos expoentes infinitesimais de $\mathfrak{g}$.*

O trabalho com grupos de Lie é extenso e requer uma destreza matemática acima da anteriormente utilizada. Porém, percebe-se que todos os Lemas e Teoremas são válidos localmente. Assim como anteriormente, faremos uso de grupos conexos e simplesmente conexos para avaliar a possibilidade e o processo de extensão de tais funções para o grupo todo. Este assunto será investigado na seção a seguir.

4.3 EXTENSÃO DE EXPOENTES LOCAIS

Esta seção terá como objetivo provar o teorema a seguir:

Teorema 9. *Seja G um grupo de Lie conexo e simplesmente conexo. Então para todo expoente local δ de G existe um expoente δ_0 definido em todo o grupo G que é uma extensão de δ . Se δ é diferenciável, δ_0 pode ser escolhido como diferenciável.*

Prova: Esta prova irá seguir os passos de (BARGMANN, 1954) que é uma adaptação do método de (IWASAWA, 1949).

1. Seja $\hat{\delta}$ um expoente local canônico de G e H o grupo local construído a partir do mesmo por (2.2.53). Usaremos um teorema exposto e provado em (PONTRYAGIN; LEHMER, 1946)³. Este teorema assegura que para um grupo infinitesimal R arbitrário existe um segundo grupo G que é isomorfo ao mesmo. Então existe um grupo conexo e simplesmente conexo H_1 que é localmente isomorfo a H em alguma vizinhança $\mathcal{M} \in H$. Os elementos de H_1 serão denotados por $\bar{r}$ e, devido ao isomorfismo, em $\mathcal{M}$ tais elementos podem ser identificados pelos elementos de H . Dizemos que H forma uma parte de H_1 .

Fazendo a ilustração já mencionada referente a folha de papel, neste presente momento existem duas folhas. Uma (f_1) correspondente ao grupo H e outra (f_2) correspondente a H_1 . Porém,

³ Teorema 84, pp 278-279.

existe uma aplicação que associa pontos de uma folha com a outra ($\varphi : f_1 \rightarrow f_2$) e em uma pequena seção da folha f_1 ela se assemelha a f_2 . Nesta seção os elementos de H_1 podem ser identificados pelos elementos de H e então a percepção de que H forma parte de H_1 está estabelecida.

2. Como mencionado durante a prova da Proposição 4, H possui um subgrupo central a um parâmetro T com elementos $\{\theta, e\}$ tal que o grupo quociente H/T é localmente isomorfo a G (Lema 2). Podemos definir o homomorfismo $g : H \rightarrow G$ por:

$$g(\bar{r}) = g(\theta, r) = r, \quad (4.3.1)$$

com $\bar{r} \in \mathcal{M}$ e $r \in G$. Há outro teorema exposto e provado em (PONTRYAGIN; LEHMER, 1946)⁴ que assegura a possibilidade de extensão de um subgrupo normal local de G para um subgrupo normal por todo o grupo, desde que G seja conexo e simplesmente conexo. Com este teorema pretendemos estender o subgrupo local T para um subgrupo local T_1 de H_1 que é também conexo e simplesmente conexo. Para isso é necessário verificar se T é subgrupo normal de H , sendo um subgrupo normal (PONTRYAGIN; LEHMER, 1946) aquele em que para todo elemento $h \in H$ e $t \in T$ tem-se $tH = Ht$. Seja $\{\theta, r\} \in H$ e $\{\theta', e\} \in T$, então

$$tH = \{\theta', e\} \circ \{\theta, r\} = \{\theta + \theta' + \delta(e, r), er\}. \quad (4.3.2)$$

Façamos $\theta_1 = \theta + \theta'$ e utilizando (2.2.24) temos

$$tH = \{\theta_1, r\} \in H. \quad (4.3.3)$$

Para Ht

$$Ht = \{\theta, r\} \circ \{\theta', e\} = \{\theta + \theta' + \delta(r, e), re\} \quad (4.3.4)$$

e novamente por (2.2.24) e $\theta_1 = \theta + \theta'$

$$Ht = \{\theta_1, r\} \in H \quad \therefore \quad tH = Ht. \quad (4.3.5)$$

Logo, T é um grupo normal de H e a extensão é permitida. Os elementos de T_1 são da forma $\bar{t}(\theta)(-\infty < \theta < \infty)$ em que $\bar{t}(\theta)$ é uma função analítica de θ . Além disso,

$$\bar{t}(\theta)\bar{t}(\theta') = \bar{t}(\theta + \theta') \quad (4.3.6)$$

e $\bar{t}(\theta) \neq \bar{t}(\theta')$ se $\theta \neq \theta'$. O isomorfismo local do grupo quociente H/T com G se estende para um isomorfismo entre H_1/T_1 e G , então o mapeamento definido por (4.3.1) se estende para o mapeamento homomorfo $g_1 : H_1 \rightarrow G$:

$$g_1(\bar{r}) = r, \quad (4.3.7)$$

⁴ Teorema 85, pp 279.

com $\bar{r} \in H_1$ e $r \in G$. A vizinhança $\mathcal{M}$, onde H e H_1 são isomorfos pode ser escolhida de modo que $g_1(\bar{r}) = g(\bar{r})$ em $\mathcal{M}$. A igualdade $g_1(\bar{r}) = g_1(\bar{r}')$ implica $\bar{r}' = \bar{t}(\theta)\bar{r} = \bar{r}\bar{t}(\theta)$ com um θ unicamente determinado, já que T_1 é subgrupo normal de H_1 .

Agora assumindo $\mathcal{M}$ uma vizinhança esférica limitada por κ ($|\bar{r}| < \kappa$), denote uma vizinhança esférica $|r| < \kappa$, agora em G , por $\mathcal{V}$. Definimos um mapeamento $\bar{h} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$ como:

$$\bar{h}(r) = \{0, r\}, \quad (4.3.8)$$

com $r \in \mathcal{V}$. Note que

$$g(\bar{h}(r)) = g(\{0, r\}) = r, \quad (4.3.9)$$

uma vez que $g : H \rightarrow G$ e $\bar{h} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}$. O mapeamento definido por (4.3.8) leva o elemento de uma vizinhança de G para uma de H e o mapeamento de (4.3.1), por sua vez, realiza o caminho inverso.

3. Os conjuntos de produtos rs sendo $s \in \mathcal{V}$ serão denotados por $r\mathcal{V}$. Estes conjuntos abertos cobrem o grupo G por inteiro. Sendo assim podemos escolher uma sequência r_k tal que $r_k\mathcal{V}$ cubra G com $k = 0, 1, 2 \dots$. Perceba que podemos assumir o elemento r_0 da sequência como a identidade e e, portanto construir uma união dos conjuntos abertos onde o termo r_{k+1} não é contabilizado,

$$\mathcal{U}_k = r_0\mathcal{V} \bigcup r_1\mathcal{V} \bigcup \dots \bigcup r_k\mathcal{V}. \quad (4.3.10)$$

Seja $\mathcal{L}_k$ um conjunto não vazio contido em $\mathcal{V}$, façamos $\mathcal{L}_0 = \mathcal{V}$ e $r_k\mathcal{L}_k = \mathcal{U}_k - \mathcal{U}_{k-1}$ com $k \geq 1$. Devido esta última condição os conjuntos $r_k\mathcal{L}_k$ ($k = 0, 1, 2 \dots$) são disjuntos, e assim como $r\mathcal{V}$ cobrem G .

Agora vamos selecionar a sequência $\bar{r}_k$ ($k = 0, 1, 2 \dots$) em H_1 de forma que $\bar{r}_0 = \bar{e}$ e $g_1(\bar{r}_k) = r_k$. Definindo um mapeamento $\bar{h}_1 : G \rightarrow H_1$ como: se $r \in r_k\mathcal{L}_k$,

$$\bar{h}_1(r) = \bar{r}_k\bar{h}(r_k^{-1}r) = \bar{r}_k\bar{h}(r'), \quad (4.3.11)$$

com $r' \in \mathcal{L}_k \subset \mathcal{V}$, note que $\bar{h}_1$ leva elementos do grupo G nos elementos dos conjuntos que o recobrem. Note também que se $r \in \mathcal{V}$, temos $\bar{h}_1(r) = \bar{h}(r)$ e então para todo r

$$g_1(\bar{h}_1(r)) = g_1(\bar{r}_k\bar{h}(r')), \quad (4.3.12)$$

ou ainda

$$g_1(\bar{h}_1(r)) = g_1(\bar{r}_k)g_1(\bar{h}(r')). \quad (4.3.13)$$

A atuação $g_1(\bar{r}_k)$ é determinada por (4.3.7) e $g_1(\bar{h}(r')) = g_1(\{0, r'\})$ também, então

$$g_1(\bar{h}_1(r)) = r_k r' = r_k(r_k^{-1}r) = r. \quad (4.3.14)$$

Realizando o mesmo processo, vejamos $g_1(\bar{h}_1(r)\bar{h}_1(s))$:

$$g_1(\bar{h}_1(r)\bar{h}_1(s)) = g_1(\bar{h}_1(r))g_1(\bar{h}_1(s)), \quad (4.3.15)$$

$$g_1(\bar{h}_1(r)\bar{h}_1(s)) = g_1(\bar{r}_k)g_1(\bar{h}(r'))g_1(\bar{s}_k)g_1(\bar{h}(s')), \quad (4.3.16)$$

$$g_1(\bar{h}_1(r)\bar{h}_1(s)) = rs, \quad (4.3.17)$$

e agora $g_1(\bar{h}_1(rs))$

$$g_1(\bar{h}_1(rs)) = g_1(\bar{r}_k\bar{s}_k)g_1(\bar{h}(r's')) = rs, \quad (4.3.18)$$

portanto $g_1(\bar{h}_1(r)\bar{h}_1(s)) = g_1(\bar{h}_1(rs))$. Como a igualdade entre $g_1(\bar{r}')$ e $g_1(\bar{r})$ implica $\bar{r}' = \bar{t}(\theta)\bar{r}$, temos

$$\bar{h}_1(r)\bar{h}_1(s) = \bar{t}(\theta_{r,s})\bar{h}_1(rs). \quad (4.3.19)$$

Note, entretanto, que a aplicação h_1 definida por (4.3.8) seleciona apenas os elementos com $\theta = 0$, pelo produto definido em (2.2.53) temos $\theta_{rs} = 0 + 0 + \delta_1(r, s)$ com $r, s \in G$ e então

$$\bar{h}_1(r)\bar{h}_1(s) = \bar{t}(\delta_1(r, s))\bar{h}_1(rs), \quad (4.3.20)$$

onde a função $\delta_1(r, s)$ é real e unicamente definida para todos $r, s \in G$ com as seguintes propriedades:

$$(i) \quad \delta_1(r, s) = \hat{\delta}(r, s), \quad (4.3.21)$$

onde $r, s \in \mathcal{V}_1$ sendo $\mathcal{V}_1$ uma vizinhança fixa de G escolhida de tal maneira que $\mathcal{V}_1^2 \subset \mathcal{V}$.

$$(ii) \quad \delta_1(e, e) = 0, \quad (4.3.22)$$

esta propriedade decorre de (4.3.21), uma vez que $\hat{\delta}(r, s)$ se comporta de tal maneira.

$$(iii) \quad \delta_1(r, s) + \delta_1(rs, t) = \delta_1(s, t) + \delta_1(r, st), \quad (4.3.23)$$

com $r, s, t \in G$. Portanto, δ_1 satisfaz as relações de definição para um expoente de G .

4. Agora façamos uma substituição de δ_1 por δ_1'' , este diferenciável, para verificar se a extensão de fato pode ser escolhida como diferenciável. O expoente δ_1'' é definido por:

$$\begin{aligned} \delta_1'(r, s) &= \delta_1(r, s) + \Delta_{r,s}(x), & (r, s \in \mathcal{V}_1) \\ x(r) &= - \int_G \delta_1(r, t)\nu(t)dt, & (r \in \mathcal{V}_1^2) \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

$$\begin{aligned} \delta_1''(r, s) &= \delta_1'(r, s) + \Delta_{r,s}(x'), & (r, s \in \mathcal{V}_2) \\ x'(r) &= - \int_G \delta_1'(u, r)\nu^*(u)d^*u, & (r \in \mathcal{V}_2^2) \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

exatamente de acordo com as propriedades definidas para o Lema 5. Então, por (4.2.15), temos

$$\delta_1''(r, s) = \delta_1(r, s) + \Delta_{r,s}(x''), \quad (4.3.26)$$

recaindo nos mesmos argumentos utilizados para a prova deste Lema citado. Note que δ_1'' da forma (4.3.26) cumpre as propriedades (4.3.22) e (4.3.23), sendo então um expoente diferenciável definido em todo o grupo. Além disso, para uma vizinhança suficientemente pequena $\mathcal{V}'$, a equação (4.3.21) nos leva a

$$\delta_1''(r, s) = \hat{\delta}(r, s) + \Delta_{r,s}(x''). \quad (4.3.27)$$

5. Para finalizar a prova, seja δ um expoente local de G e $\hat{\delta}$ um expoente local canônico equivalente a δ , então na vizinhança $\mathcal{V}'$ temos

$$\hat{\delta} = \delta + \Delta(\hat{x}) \quad (4.3.28)$$

e pelo Lema 5, a função $\hat{x}$ é diferenciável se δ for. Agora vamos construir uma função similar a função $\phi(r)$ em (4.2.1). Começemos assumindo $\mathcal{V}'$ uma vizinhança esférica $|r| < \kappa'$, e definindo outras duas vizinhanças $\mathcal{V}'_1(|r| < \kappa'_1)$ e $\mathcal{V}'_2(|r| < \kappa'_2)$ onde $\kappa'_1 < \kappa'_2 < \kappa'$. Seja $\psi(r)$ uma função com as seguintes propriedades:

- $\psi(r)$ é diferenciável em todo o grupo G ;
- $\psi(r) = 1$ se $r \in \mathcal{V}'_1$;
- $\psi(r) = 0$ se r está fora de $\mathcal{V}'_2$.

De (4.3.26) podemos escrever o expoente responsável pela extensão, agora δ_0 , por

$$\delta_0(r, s) = \delta_1''(r, s) - \Delta_{r,s}(x_0), \quad (4.3.29)$$

e

$$x_0(r) = \begin{cases} \psi(r)(\hat{x}(r) + x''(r)), & r \in \mathcal{V}' \\ 0, & r \notin \mathcal{V}'. \end{cases} \quad (4.3.30)$$

Note que x_0 é sempre contínua, uma vez que depende diretamente de $\psi(r)$. Além disso, é diferenciável em todo o grupo se δ , e então $\hat{x}$, for diferenciável em $\mathcal{V}'$. A reunião das relações (4.3.21), (4.3.22), (4.2.23) e a definição de $\psi(r)$ levam a $\delta_0 = \delta$ em uma vizinhança suficientemente pequena. Esta igualdade se estabelece, pois em tal vizinhança δ_1'' é dado em função de $\hat{\delta}$. O expoente δ_0 é definido em todo o grupo, isto é, uma extensão de um expoente local δ e ainda é diferenciável se δ for. $\square$

Este teorema finaliza o trabalho com a teoria sobre os grupos de Lie e também a deixa pronta para ser aplicada em grupos de interesse na teoria quântica. O trabalho de (BARGMANN, 1954) possui uma seção com exemplos de diversos grupos relevantes.

A construção vista aqui é sutil e caminha a pequenos passos, mas veja que partindo de uma fase local amplamente trabalhada nos capítulos anteriores a teoria evoluiu ao ponto de termos a extensão de uma fase para grupos que estão diretamente relacionados a transformações de interesse em física.

Além disso, mesmo que não tenha sido mencionado, o pontapé inicial de todo estudo foi apenas a necessidade de que a probabilidade de transição entre dois estados fosse conservada, isto é, a exigência básica da natureza de que a física permaneça imutável sob certas transformações de referenciais.

5 CONCLUSÃO

A partir de um trabalho brilhante de Eugene Wigner (WIGNER, 1939) no âmbito das representações do grupo de Poincarè, Valentine Bargmann publica um trabalho fundamentando a teoria matemática utilizada. Este Trabalho de Graduação teve como objetivo realizar os passos dados por Bargmann com a máxima descrição possível dentro dos limites dos conceitos já vistos.

Na introdução é apresentada a motivação para análise do problema, uma relação demonstrada em (WIGNER, 1939) a qual abre uma porta para esta teoria. A construção tem início no estabelecimento da correspondência entre objetos matemáticos e estados quânticos, que dá origem a uma nova percepção das operações em Mecânica Quântica. Apesar do trabalho possuir um objetivo de generalizar resultados, os primeiros passos são dados localmente com poucas definições, culminando no fundamental teorema demonstrado por Wigner (Teorema 1), este, como mencionado, permitindo que a atuação dos operadores seja feita sem problemas de descontinuidade localmente. A definição das fases $\omega(r, s)$ e $\delta(r, s)$ nos fornece ferramental necessário para o Teorema 2, acerca de representações de grupos de dimensão finita e a combinação dos Teoremas 1 e 2 dão cabo de parte importante do ferramental de Mecânica Quântica utilizada frequentemente em cursos de graduação, porém localmente.

De posse de variados resultados locais, recorremos a um minucioso teorema de (PONTRYAGIN; LEHMER, 1946) para verificar a possibilidade de extensões dos resultados locais para globais em grupos conexos e simplesmente conexos. Este teorema nos permite estender as representações locais, os expoentes locais e até mesmo os importantíssimos representativos que cumprem o teorema de Wigner, promovendo assim a teoria, até então local, ao funcionamento global para tais grupos.

Com os resultados iniciais válidos por todo o grupo, um último passo foi reavaliar a teoria sob a ótica dos grupos de Lie em busca de relações de ampla relevância para tratamento de estruturas algébricas, tão importantes em física. Este estudo utiliza métodos extremamente detalhados, carregados de rigor, mas com uma beleza quase que fundamental, dentre eles as funções construídas por (IWASAWA, 1949). Utilizando conceitos introduzidos nas seções anteriores, os colchetes de Lie para o grupo local definem uma forma bilinear antissimétrica, esta em correspondência direta com os expoentes locais do grupo. O Teorema 8 é a concatenação de todos os resultados obtidos através dos lemas mencionados e provados ao longo da seção.

Por fim, foi realizada a extensão dos expoentes locais do grupo de Lie através de um processo análogo à construção de Iwasawa, porém com alguns truques adicionais. Após a prova deste último teorema, a teoria de representações projetivas possui ferramental suficiente para aplicação em grupos úteis em teoria quântica, permitindo a análise de fases quando estas não são facilmente removidas como mostrado no Teorema 2.

O trabalho é árduo e necessita muitas vezes de ferramental pouco visto usualmente em física, porém após certa abstração, perceber que a conexão entre a natureza e uma linguagem tão potente como a matemática nos leva a resultados tão minuciosos soa como um prêmio pela dedicação.

REFERÊNCIAS

- BARATA, J. C. A. **Notas para um Curso de Física-Matemática**. 2023. Disponível em: <http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/capitulos.html>.
- BARGMANN, V. On unitary ray representations of continuous groups. **Annals of Mathematics**, Annals of Mathematics, v. 59, n. 1, p. 1–46, 1954. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1969831>>.
- IWASAWA, K. On some types of topological groups. **Annals of Mathematics**, Annals of Mathematics, v. 50, n. 3, p. 507–558, 1949. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1969548>>.
- NACHBIN, L. **The Haar Integral**. [S.l.]: R. E. Krieger Publishing Company, 1976. (University series in higher mathematics).
- PONTRYAGIN, L.; LEHMER, E. **Topological Groups ... Translated from the Russian by Emma Lehmer**. [S.l.]: Princeton University Press, 1946. ([Princeton Mathematical Series. vol. 2.]).
- RACZKA, R.; BARUT, A. **Theory Of Group Representations And Applications**. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 1986.
- SAKURAI, J. J. **Modern Quantum Mechanics, Revised Edition**. [S.l.]: Addison - Wesley Publishing Company, 1994.
- SCHAAF, N. van der. **Classical and Quantum Particles in Galilean and Poincaré Spacetime**. 2017. Disponível em: <<https://www.math.ru.nl/~landsman/Nesta.pdf>>.
- SILVA, J. M. H. da; ROCHA, G. M. C. da. Strongly continuous representations in the hilbert space: A far-reaching concept. **Universe**, MDPI AG, v. 7, n. 8, p. 285, aug 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/universe7080285>>.
- WEINBERG, S. **The Quantum Theory of Fields**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. v. 1.
- WIGNER, E. On unitary representations of the inhomogeneous lorentz group. **Annals of Mathematics**, Annals of Mathematics, v. 40, n. 1, p. 149–204, 1939. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1968551>>.
- WIGNER, E. P. **Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren**. [S.l.]: Braunschweig, 1931.