

IFT/TE-M-96

IFT - D 002/92

20

Geração de Massa em (2+1) Dimensões

Jeferson de Lima Tomazelli



Dissertação de Mestrado apresentada
no Instituto de Física Teórica da UNESP.

Orientador: Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar.

São Paulo
agosto/92

Capítulo

1. O primeiro capítulo do livro trata da história da literatura portuguesa, desde os primeiros séculos até ao século XIX. O autor aborda a evolução da prosa e da poesia, destacando os principais autores e obras de cada período. A análise é feita de forma crítica e objetiva, permitindo ao leitor compreender o contexto histórico e cultural em que se desenvolveram estas obras.

2. No segundo capítulo, o autor dedica-se ao estudo da literatura do século XX, abordando o movimento modernista e a sua influência na produção literária portuguesa. São analisados os principais autores e obras deste período, bem como o papel da literatura na sociedade portuguesa da época.

3. O terceiro capítulo trata da literatura contemporânea, desde o final do século XX até aos dias atuais. O autor analisa as tendências e movimentos literários mais recentes, bem como o papel da literatura na sociedade portuguesa atual.

4. O quarto capítulo trata da literatura portuguesa no estrangeiro, analisando a produção literária dos autores portugueses que viveram e escreveram no exterior. São abordados temas como a emigração, a identidade cultural e a influência da literatura estrangeira na produção literária portuguesa.

À Fátima
e ao pequeno Victor

Resumo

Calcula-se o tensor de polarização do vácuo a nível de um "loop" para a eletrodinâmica quântica tridimensional (QED_3) e cromodinâmica quântica (QCD_3), utilizando a técnica de regularização analítica implementada de forma a preservar a invariância de gauge, e mostra-se assim que o bóson de gauge adquire massa, em contraste com o resultado obtido usando a regularização de Pauli-Villars. Considera-se também um tratamento alternativo para o processo de polarização do vácuo na QED_3 , onde os operadores de campo satisfazem equações de movimento de Heisenberg e conclui-se que massa é gerada para o fóton até a segunda ordem na carga elétrica.

Index

Abstract

We evaluate the one-loop vacuum polarization tensor for three-dimensional quantum electrodynamics (QED_3) and quantum chromodynamics (QCD_3), using the analytic regularization technique, constrained to preserve gauge invariance, and show thus that the gauge boson acquires mass, in contrast to the result obtained using the Pauli-Villars regularization. We also consider an alternative approach to the vacuum polarization process in QED_3 , where the field operators satisfy Heisenberg equations of motion and conclude that mass is generated for the photon to second order in the electric charge.

Índice

Introdução	1
1 Teorias de Gauge em (2+1) Dimensões	4
1.1 Uma Teoria Abelianas: a QED_3	4
1.1.1 Simetrias Discretas em (2+1) Dimensões	6
1.1.2 Propagadores e Regras de Feynman	7
1.2 Uma Teoria Não-Abeliana: a QCD_3	10
1.2.1 Propagadores e Regras de Feynman	11
2 O Tensor de Polarização do Vácuo	13
2.1 Regularização de Pauli-Villars	15
2.2 Regularização Analítica	18
2.2.1 O Caso Abelianas	21
2.2.2 O Caso Não-Abeliano	26
3 Equações de Movimento na Presença de um Campo Ex-	32
terno	
3.1 O Tensor de Polarização do Vácuo Transversal	35
3.2 Cálculo de $\Pi_{\mu\nu}(k)$ na Representação de Heisenberg (HP)	36

4	Considerações Finais	44
A	As representações λ	46
B	Algumas Integrais Úteis	48
C	A Álgebra das Matrizes Gama em (2+1)-Dimensões	50
D	Condições sobre os Coeficientes e Massas dos Reguladores	52
	Referências	55

Introdução

Acompanhando a evolução da eletrodinâmica quântica (QED) ao longo da história da teoria quântica de campos, detenhamo-nos no final da década de quarenta. Foi nesse período, quando tanto a QED quanto a física de partículas experimentaram avanços significativos, que os trabalhos pioneiros de Schwinger^[1] sobre correções radiativas na QED incorporaram-se a este cenário.

Desde então, criou-se uma dificuldade devida à ocorrência de produtos de funções singulares na teoria, levando à divergências em cálculos perturbativos até segunda ordem. Wentzel^[2] foi o primeiro a apontar que a aplicação da técnica de integração de Schwinger à expressão resultante para a auto-energia do fóton fornece um resultado não nulo, embora este não seja invariante de gauge. Entretanto, para chegar a este resultado insatisfatório, foi necessário lidar com um objeto quadraticamente divergente, o qual prescinde significado de um ponto de vista matemático.

Com o objetivo de superar tal falta de rigor no formalismo, devemos adotar um esquema de regularização, onde aquelas integrais de fato divergentes são mantidas finitas e bem definidas no transcurso do cálculo. Por outro lado, deve ser mencionado que uma teoria regularizada geralmente viola alguma hipótese física, tal como a invariância de gauge, que no caso da auto-energia do fóton segue da conservação da corrente.

Há mais de quatro décadas Pauli e Villars propuseram um método de regularização^[3] o qual preserva a invariância de gauge na QED. Mais tarde, outras técnicas de regularização foram introduzidas, entre elas a regularização dimensional^[4] e a regularização analítica^[5]. Nesse intervalo, Feynman associava uma representação gráfica^[6] a cada produto normal na expansão de Dyson da matriz S ^[7], estabelecendo intuitivamente um conjunto de regras de acordo com as quais podemos desenhar imediatamente esses gráficos e convertê-los em termos analíticos. Ao longo dos anos, este algoritmo tem sido largamente utilizado na determinação de seções de choque em física de partículas. Infelizmente, o uso abusivo das regras de Feynman vez por outra dificulta a interpretação de certos processos como, por exemplo, a polarização do vácuo.

Na década de sessenta a Teoria Quântica de Campos passou a ser estudada no contexto das chamadas Teorias de Gauge, sendo o modelo unificado de Weinberg-Salam para as interações eletrofracas e a cromodinâmica quântica (QCD) exemplos dessas teorias (vide, por ex., ref.[8]).

A partir do início da última década, tem-se dado atenção às teorias de gauge em $(2+1)$ dimensões^[9], pela sua conexão com fenômenos a altas temperaturas em quatro dimensões^[10], o efeito Hall quântico^[11], etc. Examinando-se cuidadosamente as características matemáticas dessas teorias nos deparamos com uma ambigüidade no resultado físico: partindo com férmions massivos e bósons de gauge sem massa, massa ao campo de gauge pode ser radiativamente induzida a nível de um "loop", dependendo da escolha da regularização para as integrais divergentes na região ultravioleta (UV). Tal massa é também denominada massa topológica.

Até aqui, todos os cálculos de correções radiativas para o propagador do bóson de gauge em três dimensões tem sido feitos através da expansão da matriz S na representação de interação. Entretanto, segundo o teorema de Haag^[12], os campos livres e os campos interagentes pertencem a espaços de Hilbert ortogonais entre si e, portanto, a representação de interação

não constitui uma representação equivalente para os campos interagentes. Desta forma, para tentar resolver a controvérsia com respeito à geração de massa para o campo de gauge, construiremos o tensor de polarização do vácuo em outra representação, a representação de Heisenberg.

No capítulo 1 introduzimos a eletrodinâmica quântica em três dimensões (QED_3) e suas simetrias, bem como a teoria não-Abeliana correspondente, a cromodinâmica quântica tridimensional (QCD_3). No capítulo 2 definimos o tensor de polarização do vácuo, $\Pi_{\mu\nu}$, da QED_3 , mostrando como este modifica o propagador do fóton em ordens superiores da teoria de perturbação. Em seguida calculamos $\Pi_{\mu\nu}$, construído a partir das regras de Feynman estabelecidas no capítulo anterior, utilizando dois métodos de regularização distintos, as regularizações de Pauli-Villars e analítica. Argumenta-se que esta última deve ser implementada de forma a preservar a invariância de gauge tanto no caso Abelian quanto no caso não-Abeliano. No capítulo 3 calculamos o tensor de polarização do vácuo na representação de Heisenberg, definido via equações de movimento dos campos na presença de uma fonte externa, comparando com os resultados obtidos na representação de interação.

Finalmente, no Capítulo 4 tecemos algumas considerações sobre os nossos resultados e discutimos outras aplicações do formalismo introduzido nos capítulos anteriores. Nos apêndices exibimos relações e propriedades importantes que foram utilizadas ao longo deste trabalho, cuja demonstração foi postergada para que a continuidade da exposição não fosse comprometida.

Capítulo 1

Teorias de Gauge em (2+1) Dimensões

1.1 Uma Teoria Abeliana: a QED_3

A QED descreve essencialmente os processos de interação entre elétrons e fótons, constituindo um exemplo simples de uma teoria de gauge Abeliana. Em três dimensões, a densidade Lagrangeana da eletrodinâmica espinorial coincide com aquela do caso quadridimensional, sendo dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{D} + e\cancel{A} - m)\psi , \quad (1.1)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \quad (1.2)$$

As equações de movimento correspondentes

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -j^\nu , \quad (1.3)$$

$$(i\cancel{D} + e\cancel{A} - m)\psi = 0 , \quad (1.4)$$

onde

$$j^\nu = e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi , \quad (1.5)$$

assim como \mathcal{L} , são invariantes sob as transformações de gauge

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\Lambda(x) , \quad (1.6)$$

$$\psi \rightarrow e^{ie\Lambda(x)}\psi . \quad (1.7)$$

Na densidade Lagrangeana da teoria quantizada devemos incluir o termo de fixação de gauge

$$\mathcal{L}_{gf}^A = -\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A^\mu)(\partial_\nu A^\nu) , \quad (1.8)$$

enquanto que os operadores de campo devem obedecer o ordenamento normal, ou seja, num produto de operadores, aqueles que contém somente operadores de criação devem aparecer à esquerda daqueles que contém somente operadores de aniquilação. Desta forma, o valor esperado no vácuo de um operador que corresponde a uma certa quantidade observável, construído a partir dos operadores de campo, se anula.

No espaço-tempo tridimensional a álgebra para as matrizes gama de Dirac é realizada usando-se as matrizes de Pauli

$$\gamma^0 = \sigma^3 , \quad \gamma^1 = i\sigma^1 , \quad \gamma^2 = i\sigma^2 , \quad (1.9)$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\epsilon^{\mu\nu\alpha}\gamma_\alpha , \quad g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1) . \quad (1.10)$$

No caso de férmions não massivos devemos salientar que, para a representação SU_2 das matrizes γ , não existe simetria quiral, uma vez que nenhuma matriz anti-comuta com todas as matrizes de Pauli.

1.1.1 Simetrias Discretas em (2+1) Dimensões

Em (2+1) dimensões os campos transformam-se sob conjugação da carga (C) de acordo com

$$CA_\mu C^{-1} = -A_\mu , \quad (1.11)$$

$$C\psi C^{-1} = \sigma^1 \psi^\dagger . \quad (1.12)$$

Em duas dimensões espaciais a paridade (P) corresponde à inversão de um dos eixos, uma vez que a inversão de ambos resultaria numa rotação de um ângulo π . Assim, sob a operação de paridade, as transformações dos campos são dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}A^0(t, \vec{r})\mathcal{P}^{-1} &= A^0(t, \vec{r}') , \\ \mathcal{P}A^1(t, \vec{r})\mathcal{P}^{-1} &= -A^1(t, \vec{r}') , \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}A^2(t, \vec{r})\mathcal{P}^{-1} &= A^2(t, \vec{r}') , \\ \mathcal{P}\psi(t, \vec{r})\mathcal{P}^{-1} &= \sigma^1 \psi(t, \vec{r}') , \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\vec{r} = (x, y) , \quad \vec{r}' = (-x, y) . \quad (1.15)$$

Sob reversão temporal (T) temos

$$\begin{aligned} TA^0(t, \vec{r})T^{-1} &= A^0(-t, \vec{r}) , \\ T\vec{A}(t, \vec{r})T^{-1} &= -\vec{A}(-t, \vec{r}) , \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$T\psi(t, \vec{r})T^{-1} = \sigma^2 \psi(-t, \vec{r}) . \quad (1.17)$$

A conjugação da carga deixa as equações de movimento invariantes. Entretanto, o termo de massa na Lagrangeana é ímpar sob P e T. A combinação da inversão espacial e reversão temporal deixa o termo de massa invariante e, portanto, a simetria CPT é válida em (2+1) dimensões.

1.1.2 Propagadores e Regras de Feynman

Os propagadores de Feynman para o campo fermiônico e para o campo de gauge, respectivamente, são definidos no espaço dos momentos por

$$S(p) \equiv i \int d^3x e^{ipx} \langle 0 | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | 0 \rangle , \quad (1.18)$$

$$D_{\mu\nu}(k) \equiv \int d^3x e^{ikx} \langle 0 | T \{ A_\mu(x) A_\nu(0) \} | 0 \rangle . \quad (1.19)$$

Para campos livres estes podem ser escritos como

$$S(p) = \frac{m + \not{p}}{m^2 - p^2 - i\epsilon} , \quad (1.20)$$

$$D(k) = -iP_{\mu\nu} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} - \frac{i\alpha}{(k^2 + i\epsilon)^2} k_\mu k_\nu , \quad (1.21)$$

onde

$$P_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} . \quad (1.22)$$

Fazendo $\alpha = 1$, obtemos o propagador do fóton no gauge de Feynman, o qual assume a forma simples

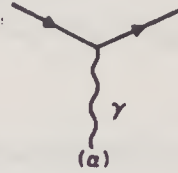
$$D_F(k) = -ig_{\mu\nu} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} . \quad (1.23)$$

No caso de campos interagentes, desde que a constante de acoplamento entre os mesmos seja suficientemente pequena, podemos calcular perturbativamente até certa ordem um determinado processo, representado pelos respectivos gráficos de Feynman, uma vez conhecidos os propagadores dos campos livres e os vértices desse gráfico, correspondentes às interações entre os campos considerados.

As regras de Feynman que nos permitem construir as amplitudes invariantes para os processos descritos pela QED_3 podem ser assim sintetizadas:

1. Para cada vértice, escrevemos um fator

$$ie\gamma^\alpha .$$



2. Para cada linha do fóton interna, indexada pelo momento k , escrevemos um fator

$$D_{F\alpha\beta}(k) = -i \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon} .$$



3. Para cada linha fermiônica interna, indexada pelo momento p , escrevemos um fator

$$-iS(p) = i \frac{1}{\not{p} - m + i\epsilon} .$$



4. Para cada linha externa, escrevemos um dos seguintes fatores:

(a) para cada elétron inicial: $u_r(\vec{p})$



(b) para cada elétron final: $\bar{u}_r(\vec{p})$



(c) para cada pósitron inicial: $\bar{v}_r(\vec{p})$



(d) para cada pósitron final: $v_r(\vec{p})$



(e) para cada fóton inicial: $\epsilon_{r\alpha}(\vec{k})$



(f) para cada fóton final: $\epsilon_{r\alpha}(\vec{k})$



Nas expressões acima \vec{p} e \vec{k} denotam os momentos das partículas externas e $r(= 1, 2)$ seus estados de spin e polarização.

5. Para cada "loop" fermiônico tomamos o traço e multiplicamos por um fator (-1).

6. Os tri-momentos associados às linhas em cada vértice satisfazem a conservação de energia-momento. Para cada tri-momento q não fixado pela conservação de energia-momento efetuamos uma integração

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q .$$

Cada integração desse tipo com respeito a uma variável de momento interno q ocorre para cada "loop".

No caso da interação com um campo eletromagnético estático externo $\mathcal{A}_\alpha^{(ext)}(\vec{x})$ devemos incluir a seguinte regra de Feynman:

7. Para cada interação de uma partícula carregada com um campo estático externo $\mathcal{A}_\alpha^{(ext)}(\vec{x})$ escrevemos um fator

$$\mathcal{A}_\alpha^{(ext)}(\vec{q}) = \int d^2\vec{x} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \mathcal{A}_\alpha^{(ext)}(\vec{x}) ,$$



onde \vec{q} é o momento transferido da fonte do campo (x) para a partícula.

1.2 Uma Teoria Não-Abeliana: a QCD_3

A QCD é a teoria que descreve a interação entre quarks e glúons, quanta do campo fermiônico e do campo de Yang-Mills, respectivamente. Este último é um campo de gauge não-Abeliano e neste caso os glúons também interagem entre si. Tal como em quatro dimensões, a densidade Lagrangeana da QCD_3 , incluindo o termo de fixação de gauge

$$\mathcal{L}_{gf}^{NA} = -\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\alpha^\mu)(\partial_\nu A_\alpha^\nu) \quad (1.24)$$

bem como a densidade Lagrangeana do campo de “ghost” de Fadeev-Popov e sua interação com o campo de gauge, é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} \text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + \bar{\psi}(i\cancel{D} - \cancel{A} - m)\psi + \mathcal{L}_{gf}^{NA} + \mathcal{L}_{gh} \ , \quad (1.25)$$

onde

$$A_\mu = gT^a A_\mu^a \ , \ F_{\mu\nu} = gT^a F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \ . \quad (1.26)$$

As matrizes T^a da representação de $SU(N)$ geram a álgebra de Lie do grupo de gauge sob o qual os campos fermiônicos se transformam. As constantes de estrutura do grupo C^{abc} são definidas por

$$[T^a, T^b] = C^{abc}T^c \ . \quad (1.27)$$

Na representação fundamental dos quarks, onde

$$\text{Tr}(T^a T^b) = -\frac{1}{2}\delta^{ab} \ , \quad (1.28)$$

estas são normalizadas de acordo com

$$C^{abc}C^{a'bc} = N\delta^{aa'} \ . \quad (1.29)$$

1.2.1 Propagadores e Regras de Feynman

Na QCD, além dos propagadores para os campos livres (1.20) e (1.21), temos o propagador do campo de “ghost” livre, dado por


$$G^{ab}(k) = i\delta^{ab} \frac{1}{k^2 + i\epsilon}, \quad (1.30)$$

e o vértice que corresponde à interação entre este campo e o campo de Yang-Mills. Além desse vértice, temos dois outros devido às auto-interações do campo de gauge não-Abeliano. Lembrando que para obtermos o vértice da QCD devemos efetuar as substituições

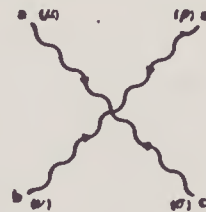
$$ie\gamma^\alpha \rightarrow -ig\gamma^\alpha T^a, \\ D_{F\alpha\beta}(k) \rightarrow D_{F\alpha\beta}^{ab}(k) = -i\delta^{ab} \frac{g_{\alpha\beta}}{k^2 + i\epsilon},$$

respectivamente, nas regras de Feynman (1) e (2) da seção anterior, devemos ainda acrescentar as seguintes regras às aquelas já enunciadas:

8. Para cada vértice triplo, correspondente a um termo de auto-interação de terceira ordem do campo de gauge, escrevemos um fator

$$gC^{abc}[g_{\mu\nu}(k-q)_\sigma + g_{\nu\sigma}(q-r)_\mu + g_{\sigma\mu}(r-k)_\nu].$$


9. Para cada vértice quádruplo, correspondente a um termo de auto-interação de quarta ordem do campo de gauge, escrevemos um fator

$$-ig^2[C^{abc}C^{cde}(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}) \\ + \left(\begin{matrix} b \leftrightarrow c \\ \mu \leftrightarrow \rho \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} b \leftrightarrow d \\ \mu \leftrightarrow \sigma \end{matrix} \right)].$$


10. Para cada vértice da interação entre o campo de gauge e o campo de "ghost", escrevemos um fator

$$gC^{abc}q_\mu .$$



11. Para cada linha de "ghost" interna, indexada pelo momento k , escrevemos um fator

$$G^{ab}(k) = i\delta^{ab} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} .$$



12. Para cada "loop" de glúon que contribui junto com um "loop" fermiônico e um "loop de ghost", escrevemos um fator de simetria^[13] igual a $\frac{1}{2}$.

Capítulo 2

O Tensor de Polarização do Vácuo

Consideremos o espalhamento elástico de elétrons por um campo externo estático^[14] $\mathcal{A}_\mu^{ext}(\vec{x})$, cujo diagrama de Feynman em ordem mais baixa da teoria de perturbação está ilustrado na Fig. 2.1.

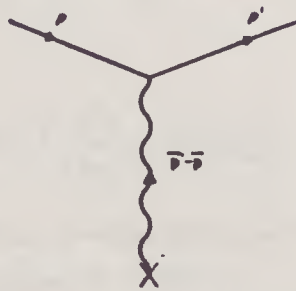


Figura 2.1: Espalhamento de um elétron por um campo externo em mais baixa ordem.

Aplicando as regras de Feynman da seção 1.1.2, temos que a amplitude de Feynman para este processo é dada por

$$\mathcal{M}^{(0)} = ie\bar{u}(\vec{p}')\mathcal{A}^{(ext)}(\vec{p}' - \vec{p})u(\vec{p}) . \quad (2.1)$$

Uma das contribuições em segunda ordem para o processo considerado pode ser obtida inserindo-se um “loop” fermiônico, correspondente à auto-energia do fóton em mais baixa ordem, na linha do fóton emitido pela fonte externa, conforme mostra a Fig. 2.2.

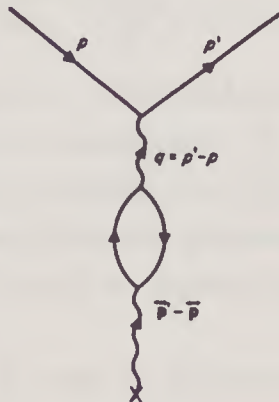


Figura 2.2: Correção de segunda ordem para o espalhamento por um campo externo.

Desta forma, a amplitude de Feynman (2.1) torna-se

$$\mathcal{M}^{(2)} = ie\bar{u}(\vec{p}')\gamma^\lambda u(\vec{p})D_{F\lambda\mu}(k)ie^2\Pi^{\mu\nu}(k)\mathcal{A}_\nu^{(ext)}(\vec{p}' - \vec{p}), \quad (2.2)$$

onde

$$ie^2\Pi^{\mu\nu}(k) = (ie^2)^2(-1)\text{Tr} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\gamma^\mu(-iS(p + \frac{1}{2}k))\gamma^\nu(-iS(p - \frac{1}{2}k)) \quad (2.3)$$

é a amplitude correspondente ao diagrama de “loop” da Fig. 2.3, conhecido como diagrama de polarização do vácuo.

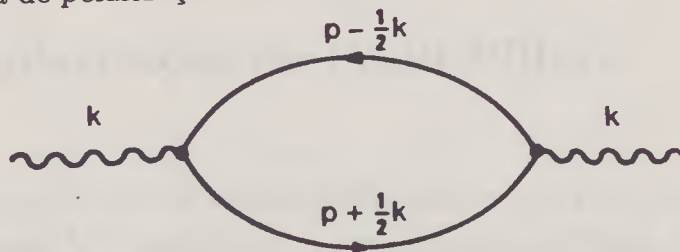


Figura 2.3: Diagrama de polarização do vácuo.

O tensor $\Pi^{\mu\nu}(k)$ é denominado tensor de polarização do vácuo e, como veremos mais adiante, em três dimensões pode ser escrito sob a forma

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \Pi^{(1)}(k^2)(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) + im\epsilon_{\mu\nu\alpha} k^\alpha \Pi^{(2)}(k^2) , \quad (2.4)$$

Em três dimensões o tensor de polarização do vácuo é linearmente divergente e, portanto, deve ser regularizado. É importante observar que a presença do pseudo-tensor totalmente anti-simétrico $\epsilon_{\mu\nu\alpha}$ dificulta a implementação da técnica de regularização dimensional^[15], uma vez que este objeto está intrinsecamente ligado ao espaço-tempo tridimensional (vide Apêndice C).

Considerando-se a soma de todas as inserções próprias de auto-energia do fóton no propagador do fóton, o tensor de polarização leva ao propagador do fóton modificado

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 + e^2\Pi(k^2)} \left\{ g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} + i\epsilon_{\mu\nu\alpha} \frac{k^\alpha}{k^2} \mathcal{M}(k^2) \right\} , \quad (2.5)$$

onde

$$\tilde{\Pi}(k^2) \equiv \Pi^{(1)}(k^2) - m\Pi^{(2)}(k^2)\mathcal{M}(k^2) \quad (2.6)$$

e

$$\mathcal{M}(k^2) \equiv \frac{e^2 m \Pi^{(2)}(k^2)}{1 + \frac{e\Pi^{(1)}(k)}{k}} . \quad (2.7)$$

2.1 Regularização de Pauli-Villars

Entre as diversas técnicas de regularização disponíveis para tratarmos integrais divergentes UV encontra-se a regularização de Pauli-Villars, que consiste na introdução de um número suficiente \underline{n} de campos auxiliares ou reguladores com massas M_i ($i=1,2,\dots,n$), para remover as divergências nas

auto-energias do fóton e do elétron. No final do cálculo a regularização é removida fazendo $M_i \rightarrow \infty$ (para maiores detalhes vide Apêndice D).

No caso da polarização do vácuo, o estado intermediário é constituído de estados eletrônicos virtuais e, portanto, apenas n_f campos fermiônicos auxiliares devem ser adicionados. Além disso, devemos regularizar um “loop” fermiônico como um todo, para que a invariância de gauge seja preservada.

Assim, a expressão regulada para o tensor de polarização do vácuo é dada por

$$\Pi_{\mu\nu}^M = -\frac{i}{(2\pi)^3} \sum_{i=0}^{n_f} c_i \int d^3p \frac{P(M_i)}{(M_i^2 - p_1^2)(M_i^2 - p_2^2)} , \quad (2.8)$$

onde

$$M_0 = m \quad , \quad c_0 = 1 \quad , \quad (2.9)$$

$$p_{1,2} = p \mp \frac{1}{2}k \quad (2.10)$$

e

$$\begin{aligned} P(M_i) &= \text{Tr}\{\gamma_\mu(\not{p}_1 + M_i)\gamma_\nu(\not{p}_2 + M_i)\} \\ &= 2[M_i^2 g_{\mu\nu} + p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\mu} - g_{\mu\nu}(p_1 \cdot p_2) - iM_i \epsilon_{\mu\nu\alpha} k^\alpha] . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Utilizando a parametrização de Feynman

$$\frac{1}{(M_i^2 - p_1^2)(M_i^2 - p_2^2)} = \int_0^1 d\xi \frac{1}{[M_i^2 - p_1^2 - (p_2^2 - p_1^2)\xi]^2} \quad (2.12)$$

e efetuando o “shift” $p_\mu \rightarrow p_\mu + (\frac{1}{2} - \xi)k_\mu$, obtemos

$$\Pi_{\mu\nu}^M = (g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2})\Pi_1^M(k^2) + im\epsilon_{\mu\nu\alpha} k^\alpha \Pi_2^M(k^2) + \Pi_{GB}^M(k) , \quad (2.13)$$

onde

$$\Pi_1^M(k^2) \equiv -4ik^2 \sum_{i=0}^{n_f} c_i \int_0^1 d\xi \xi(1-\xi) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(Q_i^2 - p^2)^2} , \quad (2.14)$$

$$\Pi_2^M(k^2) \equiv \frac{2i}{m} \sum_{i=0}^{n_j} c_i M_i \int_0^1 d\xi \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(Q_i^2 - p^2)^2}, \quad (2.15)$$

$$\Pi_{GB}^M(k) \equiv -\frac{2}{3} i g_{\mu\nu} \sum_{i=0}^{n_j} c_i \{I_i^1 + I_i^2\}, \quad (2.16)$$

com I_i^1 , I_i^2 e Q_i^2 sendo definidos por

$$I_i^1 \equiv 3 \int_0^1 d\xi \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(Q_i^2 - p^2)}, \quad (2.17)$$

$$I_i^2 \equiv 2 \int_0^1 d\xi \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{(Q_i^2 - p^2)^2} \quad (2.18)$$

e

$$Q_i^2 \equiv M_i^2 - \xi(1-\xi)k^2. \quad (2.19)$$

Como

$$\int_0^1 d\xi \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(Q_i^2 - p^2)} = (i)^{\frac{1}{2}} (\pi)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty dx x^{-\frac{3}{2}} e^{-ixQ^2} \quad (2.20)$$

e

$$\int_0^1 d\xi \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{(Q_i^2 - p^2)^2} = -\frac{3}{2} (i)^{\frac{1}{2}} (\pi)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty dx x^{-\frac{3}{2}} e^{-ixQ^2} \quad (2.21)$$

segue-se que $\Pi_{GB}^M \equiv 0$.

Podemos tomar $c_1 = 1$, $c_2 = -2$ e os demais coeficientes $c_j = 0$, com $j > 2$, de modo que as condições para a convergência da expressão (2.8) sejam satisfeitas, a saber

$$\sum_{i=0}^{n_j} c_i = 0, \quad (2.22)$$

$$\sum_{i=0}^{n_j} c_i M_i = 0. \quad (2.23)$$

No limite $M_1, M_2 \rightarrow \infty$,

$$\Pi_1^M(k^2) \rightarrow \Pi^{(1)}(k^2) = \frac{k^2}{(2\pi)} \int_0^1 d\xi \xi(1-\xi) \frac{1}{(M^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.24)$$

onde

$$M^2 \equiv m^2 - \xi(1 - \xi)k^2 . \quad (2.25)$$

A equação (2.8) pode ser reescrita como

$$\Pi_2^M = -\frac{1}{4\pi m} \int_0^1 d\xi \left\{ \frac{m}{[m^2 - \xi(1 - \xi)k^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{M_1}{[M_1^2 - \xi(1 - \xi)k^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{2M_2}{[M_2^2 - \xi(1 - \xi)k^2]^{\frac{1}{2}}} \right\} . \quad (2.26)$$

Tomando-se o limite $M_1, M_2 \rightarrow \infty$, resulta

$$\Pi_2^M(k^2) \rightarrow \Pi^{(2)}(k^2) = -\frac{k^2}{4\pi m} \int_0^1 d\xi \xi(1 - \xi) \frac{1}{(M^2)^{\frac{1}{2}} [m + (M^2)^{\frac{1}{2}}]} . \quad (2.27)$$

Desta forma, o tensor de polarização do vácuo torna-se

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \Pi^{(1)}(k^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + im \epsilon_{\mu\nu\alpha} k^\alpha \Pi^{(2)}(k^2) , \quad (2.28)$$

onde $\Pi^{(1)}$ e $\Pi^{(2)}$ são dados pelas Eqs.(2.24) e (2.27), respectivamente. Da Eq.(2.27), verificamos que em $k = 0$

$$\Pi^{(2)}(0) = 0 . \quad (2.29)$$

2.2 Regularização Analítica

O método de regularização analítica consiste essencialmente em considerar-se uma extensão analítica para o propagador fermiônico para assegurar a convergência nas amplitudes de Feynman. Entretanto, deve-se tomar cuidado, pois a implementação errônea desta técnica pode violar a identidade de Ward^[16], requerindo, portanto, um certo critério para que a invariância de gauge da teoria seja preservada.

Consideremos a contribuição para um dado gráfico de Feynman de um “loop” fermiônico contendo $n+1$ vértices ($n=1,2,3,\dots$), onde ao menos a um desses vértices uma linha de fóton pode ser associada e os outros vértices podem conter eventualmente matrizes arbitrárias $\Gamma_j \in \{1, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}, \gamma_5 \gamma_\mu, \gamma_5\}$. Esta contribuição será proporcional a

$$\Pi_{n+1} \equiv \Pi_{(\mu|}^k(k_1 \cdots k_n) = \int d^3p \text{Tr}\{\gamma_\mu S(p_1) \Gamma_1 S(p_2) \cdots \Gamma_n S(p_{n+1})\} , \quad (2.30)$$

onde

$$k = p_{n+1} - p_1 , \quad k_j = p_j - p_{j+1} . \quad (2.31)$$

Inserindo a expressão para o propagador fermiônico

$$S(p) \equiv \frac{m + \not{p}}{m^2 - p^2 - i\epsilon} \quad (2.32)$$

e aplicando a fórmula de Feynman generalizada ao denominador da expressão resultante obtemos

$$\Pi_{n+1} = \int d^3p \left(\prod_i \int d\xi_i \right) \delta(1 - \sum_i \xi_i) \frac{n! P(m)}{(m^2 - \sum_i \xi_i p_i^2 - i\epsilon)^{n+1}} , \quad (2.33)$$

onde

$$P(m) \equiv \text{Tr}\{\gamma_\mu(m + \not{p}_1) \Gamma_1(m + \not{p}_2) \cdots \Gamma_n(m + \not{p}_{n+1})\} . \quad (2.34)$$

Esta equação pode ser reescrita sob a forma

$$\begin{aligned} \Pi_{n+1} &= \int d^3p \left(\prod_i \int d\xi_i \right) \delta(1 - \sum_i \xi_i) \\ &\times \left[\left(\frac{d}{dz} \right)^n \frac{P(m)}{(m^2 - z - i\epsilon)} \right]_{z=\sum \xi_i p_i^2} . \end{aligned} \quad (2.35)$$

Definimos um outro polinômio

$$Q(\kappa^2) = \frac{\{(m + \kappa)P(\kappa) - (m - \kappa)P(-\kappa)\}}{2\kappa} , \quad (2.36)$$

tal que

$$P(m) = Q(\kappa^2)|_{\kappa=m} . \quad (2.37)$$

A função

$$f(z) = \frac{Q(z)}{(m^2 - z)}$$

possui um polo simples em $z = m^2$. Na sua vizinhança, essa função pode ser expandida na série de Laurent

$$f(z) = \frac{Q(m^2)}{(m^2 - z)} + Q'(m^2) + \frac{Q''(m^2)}{2!}(m^2 - z) + \dots , \quad (2.38)$$

onde $Q(m^2)$ é o resíduo de $f(z)$ no ponto $z = m^2$. O primeiro termo na equação (2.30) é dominante, de forma que a Eq.(2.27) torna-se

$$\begin{aligned} \Pi_{n+1} &= \int d^3p \left(\prod_i \int d\xi_i \right) \delta(1 - \sum_i \xi_i) \\ &\times \left[\left(\frac{d}{dz} \right)^n \left(\frac{S(\kappa)P(\kappa) - S(-\kappa)P(-\kappa)}{2\kappa} \right)_{\kappa^2=z} \right]_{z=\sum \xi_i p_i^2} . \end{aligned} \quad (2.39)$$

O propagador fermiônico estendido é dado por

$$S^{(\lambda)}(p) = m^{2\lambda} f(\lambda) \frac{\not{p} + m}{(m^2 - p^2 - i\epsilon)^{1+\lambda}} , \quad (2.40)$$

onde $f(\lambda)$ é uma função regular arbitrária de λ , com $f(0) = 1$.

Se substituirmos o propagador fermiônico (2.32) por sua forma modificada (2.40) na Eq.(2.30) e calcularmos Π_{n+1} , veremos que a expressão resultante não é invariante de gauge. A razão para isto é que o propagador modificado não satisfaz a identidade de Ward.

Se, ao invés disso, substituirmos o propagador fermiônico (2.32) por sua expressão regulada (2.40) na Eq.(2.39), Π_{n+1} se transformará de acordo com

$$\begin{aligned} \Pi_{n+1} &\rightarrow \Pi_{n+1}^{(\lambda)} = \int d^3p \left(\prod_i \int d\xi_i \right) \delta(1 - \sum_i \xi_i) \\ &\times \left[\left(\frac{d}{dz} \right)^n \left(\frac{S^{(\lambda)}(\kappa)P(\kappa) - S^{(\lambda)}(-\kappa)P(-\kappa)}{2\kappa} \right)_{\kappa^2=z} \right]_{z=\sum \xi_i p_i^2} . \end{aligned} \quad (2.41)$$

A soma de todas n permutações cíclicas dos momentos k_j e matrizes Γ_j na Eq.(2.30) é formalmente invariante de gauge. O mesmo é válido para a expressão (2.41), cujo integrando conserva as propriedades de gauge formais do integrando na Eq.(2.30).

As integrações nos momentos são efetuadas tomando-se λ suficientemente grande. As correspondentes integrais são então convergentes e podem ser calculadas com o auxílio das representações integrais

$$\frac{1}{(A + i\epsilon)^{1+\lambda}} = \frac{(-i)^{1+\lambda}}{\Gamma(1 + \lambda)} \int_0^\infty dx x^\lambda e^{ix(A+i\epsilon)} , \quad (2.42)$$

$$\frac{1}{(A - i\epsilon)^{1+\lambda}} = \frac{(i)^{1+\lambda}}{\Gamma(1 + \lambda)} \int_0^\infty dx x^\lambda e^{-ix(A-i\epsilon)} . \quad (2.43)$$

2.2.1 O Caso Abeliano

Consideremos agora o diagrama de polarização do vácuo para a QED, representado na Fig. 2.3. A expressão regulada para o tensor de polarização é dada por

$$\Pi_{\mu\nu}^{(\lambda)}(k) = -\frac{i}{(2\pi)^3} \Pi_2^{(\lambda)}(k | k_1 = -k) , \quad (2.44)$$

onde

$$\begin{aligned} \Pi_2^{(\lambda)}(k | -k) &= \int d^3p \int_0^1 d\xi_2 \int_0^1 d\xi_1 \delta(1 - \xi_2 - \xi_1) \\ &\times \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{S^{(\lambda)}(\kappa)P(\kappa) - S^{(\lambda)}(-\kappa)P(-\kappa)}{2\kappa} \right) \right]_{\kappa^2=z} \Big|_{z=\xi_1 p_1^2 + \xi_2 p_2^2} , \quad (2.45) \end{aligned}$$

com

$$S^{(\lambda)}(\kappa) \equiv m^{2\lambda} f(\lambda) \frac{m + \kappa}{(m^2 - \kappa^2 - i\epsilon)^{1+\lambda}} , \quad (2.46)$$

$$P(\kappa) \equiv Tr\{\gamma_\mu(\kappa + \not{p}_1)\gamma_\nu(\kappa + \not{p}_2)\} . \quad (2.47)$$

As funções $S^{(\lambda)}(\kappa)$ e $P(\kappa)$ consistem, respectivamente, de uma soma de termos pares e ímpares na variável κ , podendo-se decompô-las em

$$S^{(\lambda)}(\kappa) = S_+^{(\lambda)}(\kappa) + S_-^{(\lambda)}(\kappa) , \quad (2.48)$$

onde

$$S_+^{(\lambda)}(\kappa) = S_+^{(\lambda)}(-\kappa) \equiv m^{2\lambda} f(\lambda) \frac{m}{(m^2 - \kappa^2 - i\epsilon)^{1+\lambda}} , \quad (2.49)$$

$$S_-^{(\lambda)}(\kappa) = -S_-^{(\lambda)}(-\kappa) \equiv m^{2\lambda} f(\lambda) \frac{\kappa}{(m^2 - \kappa^2 - i\epsilon)^{1+\lambda}} \quad (2.50)$$

e

$$P(\kappa) = P_+(\kappa) + P_-(\kappa) , \quad (2.51)$$

onde definimos

$$P_+(\kappa) = P_+(-\kappa) \equiv \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) \kappa^2 + \text{Tr}(\gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu \not{p}_2) , \quad (2.52)$$

$$P_-(\kappa) = -P_-(-\kappa) \equiv \{\text{Tr}(\gamma_\mu \not{p}_1 \gamma_\nu) + \text{Tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \not{p}_2)\} \kappa . \quad (2.53)$$

Assim, a expressão

$$F(\kappa^2 = z) \equiv \left(\frac{S^{(\lambda)}(\kappa)P(\kappa) - S^{(\lambda)}(-\kappa)P(-\kappa)}{2\kappa} \right)_{\kappa^2=z} \quad (2.54)$$

pode ser reescrita como

$$F(z) = \left(\frac{S_-^{(\lambda)}(\kappa)P_+(\kappa) + S_+^{(\lambda)}(\kappa)P_-(\kappa)}{\kappa} \right)_{\kappa^2=z} .$$

Efetuando os traços nas Eqs.(2.52) e (2.53) e substituindo o resultado junto com a forma explícita de $S_+^{(\lambda)}$ e $S_-^{(\lambda)}$ na expressão acima, obtemos

$$F(z) = 2 \frac{m^{2\lambda} f(\lambda)}{(m^2 - z - i\epsilon)^{1+\lambda}} [g_{\mu\nu} z + p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{1\nu} p_{2\mu} - g_{\mu\nu} (p_1 \cdot p_2) - im \epsilon_{\mu\nu\alpha} k^\alpha] . \quad (2.55)$$

Após diferenciarmos $F(z)$ em $z = \xi_1 p_1^2 + \xi_2 p_2^2$, efetuamos a integração com respeito à variável auxiliar ξ_1 na Eq.(2.45). Finalmente, transladando o momento interno $p_\mu \rightarrow p_\mu + (\frac{1}{2} - \xi_2)k_\mu$ e utilizando a identidade

$$\int d^3p p_\mu p_\nu f(p^2) = \frac{1}{3} \int d^3p p^2 g_{\mu\nu} f(p^2) \quad (2.56)$$

obtemos para $\Pi_{\mu\nu}^{(\lambda)}(k)$

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{(\lambda)}(k) = & -2im^{2\lambda} f(\lambda) \int_0^1 d\xi \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(M^2 - p^2 - i\epsilon)^{2+\lambda}} \\ & \times \{g_{\mu\nu}(M^2 - p^2 - i\epsilon) + (1 + \lambda) \\ & \times [\frac{2}{3}p^2 g_{\mu\nu} - 2\xi(\xi - 1)k^2(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) - im\epsilon_{\mu\nu\alpha} k^\alpha]\} , \end{aligned} \quad (2.57)$$

onde definimos M^2 como na Eq.(2.25), ou seja,

$$M^2 = m^2 - \xi(1 - \xi)k^2 .$$

É conveniente reescrever a Eq.(2.57) na forma

$$\Pi_{\mu\nu}^{(\lambda)}(k) = \Pi^{(1)}(k^2)(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) + im\epsilon_{\mu\nu\alpha} k^\alpha \Pi^{(2)}(k^2) ,$$

onde

$$\Pi^{(1)}(k^2) \equiv 4im^{2\lambda} f(\lambda)(1 + \lambda)k^2 \int_0^1 d\xi \xi(\xi - 1) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(M^2 - p^2 - i\epsilon)^{2+\lambda}} , \quad (2.58)$$

$$\Pi^{(2)}(k^2) \equiv 2im^{2\lambda} f(\lambda)(1 + \lambda) \int_0^1 d\xi \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(M^2 - p^2 - i\epsilon)^{2+\lambda}} . \quad (2.59)$$

Restam ainda dois termos os quais reescrevemos como

$$\Pi_{GB}^{(\lambda)} = \Pi_{GB}^{(1)} + \Pi_{GB}^{(2)} , \quad (2.60)$$

onde

$$\Pi_{GB}^{(1)} \equiv -2im^{2\lambda} f(\lambda)g_{\mu\nu} \int_0^1 d\xi \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(M^2 - p^2 - i\epsilon)^{1+\lambda}} \quad (2.61)$$

e

$$\Pi_{GB}^{(2)} \equiv -\frac{4}{3} i m^{2\lambda} f(\lambda) (1 + \lambda) g_{\mu\nu} \int_0^1 d\xi \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{(M^2 - p^2 - i\epsilon)^{2+\lambda}} . \quad (2.62)$$

O termo que quebra a invariância de gauge, $\Pi_{GB}^{(\lambda)}$, é identicamente zero, isto é, o tensor de polarização regulado $\Pi_{\mu\nu}^{(\lambda)}$ já é invariante de gauge mesmo *antes* de fazermos o limite $\lambda \rightarrow 0$.

Calculemos as integrais de momento nas Eqs.(2.61) e (2.62) lançando mão das representações (2.42) e (2.43). Temos

$$\begin{aligned} \int d^3 p \frac{1}{(M^2 - p^2 - i\epsilon)^{1+\lambda}} &= 4\pi \int_0^\infty dq q \int_0^\infty d\omega \frac{1}{(M^2 - \omega^2 + q^2 - i\epsilon)^{1+\lambda}} \\ &= 4\pi \frac{(i)^{\lambda+1}}{\Gamma(\lambda+1)} \int_0^\infty dx x^\lambda e^{-ix(M^2-i\epsilon)} \int_0^\infty dq q e^{-ixq^2} \int_0^\infty d\omega e^{ix\omega^2} \\ &= i(\pi)^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\lambda - \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda+1)} \frac{1}{(M^2 - i\epsilon)^{\lambda - \frac{1}{2}}} . \end{aligned} \quad (2.63)$$

Então, podemos escrever $\Pi_{GB}^{(1)}$ como

$$\Pi_{GB}^{(1)} = 2 \frac{(\pi)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^3} m^{2\lambda} f(\lambda) \frac{\Gamma(\lambda - \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda+1)} g_{\mu\nu} \int_0^1 d\xi \frac{1}{(M^2 - i\epsilon)^{\lambda - \frac{1}{2}}} . \quad (2.64)$$

Analogamente,

$$I \equiv \int d^3 p \frac{p^2}{(M^2 - p^2 - i\epsilon)^{2+\lambda}} = 4\pi(I_1 - I_2) , \quad (2.65)$$

onde

$$I_1 \equiv \int_0^\infty dq q \int_0^\infty d\omega \frac{\omega^2}{(M^2 - \omega^2 + q^2 - i\epsilon)^{2+\lambda}} , \quad (2.66)$$

$$I_2 \equiv \int_0^\infty dq q^3 \int_0^\infty d\omega \frac{1}{(M^2 - \omega^2 + q^2 - i\epsilon)^{2+\lambda}} . \quad (2.67)$$

Se usarmos as representações integrais (2.42) e (2.43) obteremos

$$I_1 = -i \frac{(\pi)^{\frac{1}{2}} \Gamma(\lambda - \frac{1}{2})}{8 \Gamma(\lambda + 2)} \frac{1}{(M^2 - i\epsilon)^{\lambda - \frac{1}{2}}} , \quad (2.68)$$

$$I_2 = i \frac{(\pi)^{\frac{1}{2}} \Gamma(\lambda - \frac{1}{2})}{4 \Gamma(\lambda + 2)} \frac{1}{(M^2 - i\epsilon)^{\lambda - \frac{1}{2}}} , \quad (2.69)$$

ou seja,

$$I = -\frac{3i}{2} (\pi)^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\lambda - \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda + 2)} \frac{1}{(M^2 - i\epsilon)^{\lambda - \frac{1}{2}}} \quad (2.70)$$

e, conseqüentemente,

$$\Pi_{GB}^{(2)} = -2 \frac{(\pi)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^3} m^{2\lambda} f(\lambda) \frac{\Gamma(\lambda - \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda + 1)} g_{\mu\nu} \int_0^1 d\xi \frac{1}{(M^2 - i\epsilon)^{\lambda - \frac{1}{2}}} . \quad (2.71)$$

Assim, os termos $\Pi_{GB}^{(1)}$ e $\Pi_{GB}^{(2)}$ cancelam-se, dando para o termo que quebra a invariância de gauge

$$\Pi_{GB}^{(\lambda)} \equiv 0 . \quad (2.72)$$

Da Eq.(2.58) verificamos que $\Pi^{(1)}(0) = 0$. Como resultado, a única contribuição para a massa do bóson de gauge vem do termo $\Pi^{(2)}(0)$. As Eqs.(2.25) e (2.59) fornecem

$$\Pi^{(2)}(0) = 2im^{2\lambda} f(\lambda)(1 + \lambda) \int_0^1 d\xi \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(m^2 - p^2 - i\epsilon)^{2+\lambda}} . \quad (2.73)$$

Mas

$$\begin{aligned} \int d^3p \frac{1}{(m^2 - p^2 - i\epsilon)^{2+\lambda}} &= 4\pi \int_0^\infty dq q \int_0^\infty d\omega \frac{1}{(m^2 - \omega^2 + q^2 - i\epsilon)^{2+\lambda}} \\ &= i(\pi)^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda + 2)} \frac{1}{(m^2 - i\epsilon)^{\lambda + \frac{1}{2}}} . \end{aligned} \quad (2.74)$$

Combinando as Eqs.(2.73) and (2.74) resulta

$$\Pi^{(2)}(0) = -2 \frac{(\pi)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi)^3} m^{2\lambda} f(\lambda) \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda + 1)} \int_0^1 d\xi \frac{1}{(m^2 - i\epsilon)^{\lambda + \frac{1}{2}}} . \quad (2.75)$$

Para $\lambda \rightarrow 0$ obtemos finalmente

$$\Pi^{(2)}(0) = -\frac{1}{4\pi m} , \quad (2.76)$$

de modo que uma massa de origem topológica é induzida a nível de um “loop”, em contraste com o método de regularização de Pauli-Villars onde, conforme a Eq.(2.27), $\Pi^{(2)}(0) = 0$.

2.2.2 O Caso Não-Abeliano

A generalização para o caso não-Abeliano não apresenta dificuldade pois até o nível de um “loop”, além dos diagramas de Feynman análogos ao da Fig. 2.3 temos as contribuições dos diagramas ilustrados na Fig. 2.4, cujas amplitudes de Feynman correspondentes podem ser regularizadas por intermédio do mesmo formalismo que preserva a invariância de gauge. Entretanto, neste caso a única contribuição para o termo de massa topológica é proveniente de um “loop” fermiônico. Assim, o cálculo não-Abeliano é formalmente o mesmo, a única diferença sendo uma outra constante de acoplamento assim como fatores globais devido ao grupo de cor.

Até a ordem considerada, o propagador do bóson de gauge é corrigido por um “loop” fermiônico (Fig. 2.3), um “loop” de “ghost” (Fig. 2.4(a)) e dois “loops” do bóson de gauge, correspondendo às auto-interações cúbica e quártica do campo de gauge (Figs. 2.4(b)-(c)).

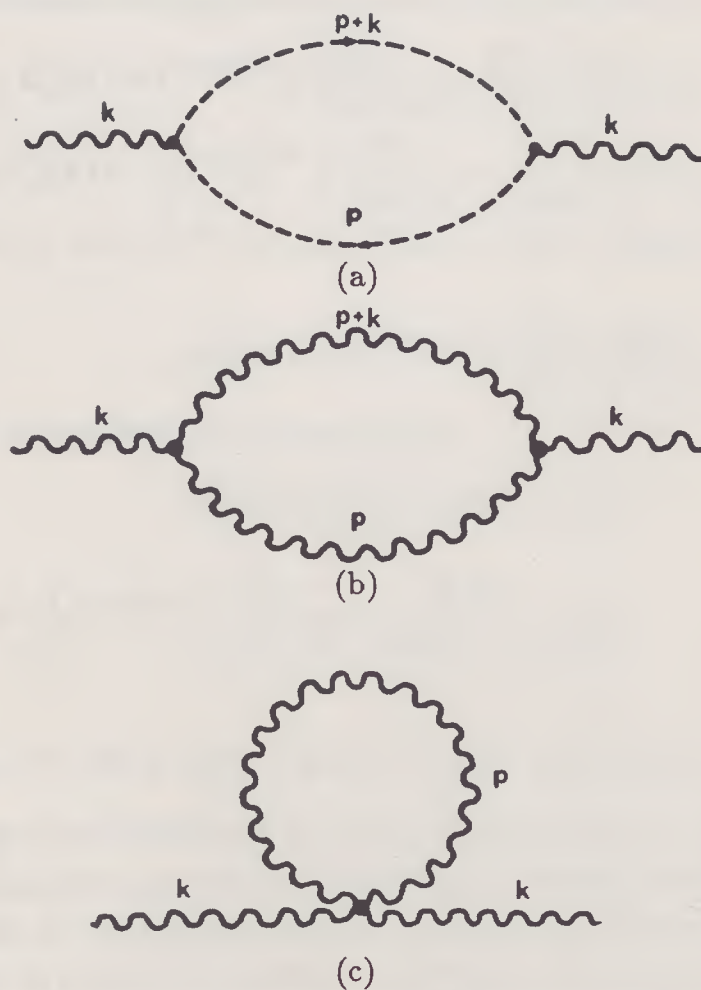


Figura 2.4: Contribuições adicionais para o tensor de polarização do vácuo no caso não-Abeliano.

As três últimas contribuições são dadas, respectivamente, por

$${}_{gh}\Pi_{\mu\nu}^{ab}(k) \equiv C^{acd}C^{bcd} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{(p+k)_\mu p_\nu}{(p^2+i\epsilon)[(p+k)^2+i\epsilon]}, \quad (2.77)$$

$${}_{3pt}\Pi_{\mu\nu}^{ab}(k) \equiv -\frac{1}{2}C^{acd}C^{bcd} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2+i\epsilon)[(p+k)^2+i\epsilon]} \\ \times [g_{\mu\nu}(5k^2+2p\cdot k+2p^2) - 3k_\mu k_\nu + 3(p_\mu k_\nu + p_\nu k_\mu) + 6p_\mu p_\nu], \quad (2.78)$$

$${}_{4pt}\Pi_{\mu\nu}^{ab}(k) \equiv 2C^{acd}C^{bcd} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{g_{\mu\nu}}{(p^2+i\epsilon)}. \quad (2.79)$$

Somando as contribuições acima obtemos

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(k) \equiv {}_{gh}\Pi_{\mu\nu}^{ab} + {}_{3pt}\Pi_{\mu\nu}^{ab} + {}_{4pt}\Pi_{\mu\nu}^{ab} \\ = -\frac{1}{2}C^{acd}C^{bcd} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\Omega(p)}{(p^2+i\epsilon)[(p+k)^2+i\epsilon]}, \quad (2.80)$$

onde

$$\Omega(p) \equiv g_{\mu\nu}(k^2 - 6k\cdot p - 2p^2) - 3k_\mu k_\nu + 4p_\mu p_\nu + 3p_\mu k_\nu + p_\nu k_\mu. \quad (2.81)$$

Tanto a integral correspondente ao “loop” fermiônico quanto esta última divergem linearmente e, portanto, $\Pi_{\mu\nu}^{ab}$ também deve ser regularizado. Neste caso, o método de regularização analítica pode ser implementado da forma usual, não sendo necessário regularizar a integral como um todo.

Utilizando a fórmula de Feynman generalizada, temos que

$$\mathcal{F} \equiv \frac{1}{(p^2+i\epsilon)[(p+k)^2+i\epsilon]} = \int_0^1 d\xi_1 \int_0^1 d\xi_2 \delta(1-\xi_1-\xi_2) \frac{1}{(z+i\epsilon)^2}, \quad (2.82)$$

onde $z = \xi_2 p^2 + \xi_1 (p+k)^2$. A fim de estabelecermos uma analogia com a Eq.(2.45), podemos reescrever a expressão acima como

$$\mathcal{F} = (-1) \int_0^1 d\xi_1 \int_0^1 d\xi_2 \delta(1-\xi_1-\xi_2) \left[\left(\frac{d}{dz} D(\kappa) \right)_{\kappa^2=z} \right]_{z=\xi_2 p^2 + \xi_1 (p+k)^2}, \quad (2.83)$$

onde

$$D(\kappa) \equiv \frac{1}{(\kappa^2 + i\epsilon)} . \quad (2.84)$$

Fazendo a substituição

$$D(\kappa) \rightarrow D^{(\lambda)}(\kappa) = f(\lambda) \frac{1}{(\kappa^2 + i\epsilon)^{1+\lambda}} , \quad (2.85)$$

com $f(0) = 1$, obtemos

$$\mathcal{F}^{(\lambda)} = (-1) \int_0^1 d\xi_1 \int_0^1 d\xi_2 \delta(1 - \xi_1 - \xi_2) \left[\left(\frac{d}{dz} D^{(\lambda)}(\kappa) \right)_{\kappa^2=z} \right]_{z=\xi_2 p^2 + \xi_1 (p+k)^2} . \quad (2.86)$$

Após diferenciarmos $D^{(\lambda)}(\kappa)$ em $z = \xi_2 p^2 + \xi_1 (p+k)^2$, efetuando a integração com respeito a uma das variáveis auxiliares, podemos escrever a expressão (2.86) como

$$\mathcal{F}^{(\lambda)} = (1 + \lambda) f(\lambda) \int_0^1 d\xi \frac{1}{[p^2 + i\epsilon + \xi(k^2 + 2p \cdot k)]^{2+\lambda}} . \quad (2.87)$$

Efetuando o "shift" $p_\mu \rightarrow p_\mu - k_\mu \xi$ resulta, após integração simétrica,

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab(\lambda)}(k) = (g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}) \Pi_{nf}^{(1)}(k^2) + \Pi_{GB}(k) , \quad (2.88)$$

onde

$$\begin{aligned} \Pi_{nf}^{(1)}(k^2) &\equiv 2k^2 C^{acd} C^{bcd} (1 + \lambda) f(\lambda) \int_0^1 d\xi (\xi^2 - \xi - \frac{3}{4}) \\ &\quad \times \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(Q^2 + p^2)^{2+\lambda}} , \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\Pi_{GB}(k) = g_{\mu\nu} (1 + \lambda) f(\lambda) C^{acd} C^{bcd} (\Pi_1 + \Pi_2) , \quad (2.90)$$

com

$$\Pi_1 \equiv -k^2 \int_0^1 d\xi (\xi^2 + \xi - 1) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(Q^2 + p^2)^{2+\lambda}} , \quad (2.91)$$

$$\Pi_2 \equiv \frac{1}{3} \int_0^1 d\xi \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{(Q^2 + p^2)^{2+\lambda}} \quad (2.92)$$

e

$$Q^2 \equiv \xi (1 - \xi) k^2 . \quad (2.93)$$

Seguindo o mesmo raciocínio que levou às Eqs.(2.63) e (2.70), temos que

$$\int d^3 p \frac{1}{(Q^2 + p^2)^{2+\lambda}} = -(\pi)^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda + 2)} \frac{1}{(Q^2)^{\lambda + \frac{1}{2}}} , \quad (2.94)$$

$$\int d^3 p \frac{p^2}{(Q^2 + p^2)^{2+\lambda}} = -\frac{3}{2} (\pi)^{\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\lambda - \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda + 2)} \frac{1}{(Q^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}} . \quad (2.95)$$

Utilizando a representação integral da função beta,

$$B(m, n) = \int_0^1 d\xi \xi^{m-1} (1 - \xi)^{n-1} , \quad (2.96)$$

podemos reescrever as Eqs.(2.91) e (2.92) como

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{(k^2)^{\frac{1}{2}-\lambda} \Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{8(\pi)^{\frac{3}{2}} \Gamma(2 + \lambda)} \\ &\times [B(\frac{5}{2} - \lambda, \frac{1}{2} - \lambda) + B(\frac{3}{2} - \lambda, \frac{1}{2} - \lambda) - B(\frac{1}{2} - \lambda, \frac{1}{2} - \lambda)] , \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\Pi_2 = -\frac{(k^2)^{\frac{1}{2}-\lambda} \Gamma(\lambda - \frac{1}{2})}{16(\pi)^{\frac{3}{2}} \Gamma(2 + \lambda)} B(\frac{3}{2} - \lambda, \frac{3}{2} - \lambda) . \quad (2.98)$$

As funções beta e gama, por sua vez, satisfazem

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} , \quad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) . \quad (2.99)$$

Assim,

$$\begin{aligned} &B(\frac{5}{2} - \lambda, \frac{1}{2} - \lambda) + B(\frac{3}{2} - \lambda, \frac{1}{2} - \lambda) - B(\frac{1}{2} - \lambda, \frac{1}{2} - \lambda) = \\ &\frac{\Gamma^2(\frac{1}{2} - \lambda)}{\Gamma(3 - 2\lambda)} [(\frac{3}{2} - \lambda)(\frac{1}{2} - \lambda) + (\frac{1}{2} - \lambda)(2 - 2\lambda) - (2 - 2\lambda)(1 - 2\lambda)] = \\ &\quad -B(\frac{3}{2} - \lambda, \frac{3}{2} - \lambda) . \end{aligned} \quad (2.100)$$

Substituindo a igualdade (2.100) na Expressão (2.97) obtemos

$$\Pi_1 = -\frac{(k^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}{8(\pi)^{\frac{3}{2}}}(\lambda - \frac{1}{2})\frac{\Gamma(\lambda - \frac{1}{2})}{\Gamma(2 + \lambda)}B(\frac{3}{2} - \lambda, \frac{3}{2} - \lambda) , \quad (2.101)$$

de modo que $\Pi_{GB}(k)$ torna-se

$$\Pi_{GB}(k) = -\lambda f(\lambda)g_{\mu\nu}C^{acd}C^{bcd}\frac{(k^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}{8(\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{\Gamma(\lambda - \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda + 1)}B(\frac{3}{2} - \lambda, \frac{3}{2} - \lambda) . \quad (2.102)$$

Portanto, tomando-se o limite $\lambda \rightarrow 0$ resulta

$$\Pi_{GB}(k) \rightarrow 0 , \quad (2.103)$$

enquanto que

$$\Pi_{nf}^{(1)}(k^2) = -\frac{(k^2)^{\frac{1}{2}}}{4(\pi)^{\frac{3}{2}}}C^{acd}C^{bcd}\int_0^1 d\xi \frac{(\xi^2 - \xi - \frac{3}{4})}{[\xi(1-\xi)]^{\frac{1}{2}}} . \quad (2.104)$$

O cálculo da contribuição proveniente do “loop” fermiônico é completamente análogo ao da seção precedente, bastando efetuar a correspondência

$$(ie)^2 \Leftrightarrow (-ig)^2 Tr(T^a T^b) , \quad (2.105)$$

entre os fatores associados aos vértices do diagrama em questão. Assim, da Eq.(1.28),

$$\Pi_f^{(1)}(k^2) = -\delta^{ab}\frac{k^2}{4\pi}\int_0^1 d\xi \xi(1-\xi)\frac{1}{(M^2 - i\epsilon)^{\frac{1}{2}}} , \quad (2.106)$$

$$\Pi^{(2)}(k^2) = \delta^{ab}\frac{1}{8\pi}\int_0^1 d\xi \frac{1}{(M^2 - i\epsilon)^{\frac{1}{2}}} , \quad (2.107)$$

com M^2 dado pela Eq.(2.25), enquanto que fatores e^2 que aparecem no propagador corrigido do bóson de gauge devem ser substituídos por g^2 .

Capítulo 3

Equações de Movimento na Presença de um Campo Externo

Nos capítulos anteriores calculamos o tensor de polarização do vácuo aplicando as regras de Feynman previamente introduzidas, obtendo resultados diferentes para a parte imaginária desse tensor, conforme a regularização utilizada para tratar a divergência linear na integral de “loop” fermiônico.

Para tentar remover essa ambigüidade, calcularemos o tensor de polarização do vácuo a partir das equações de movimento dos campos na representação de Heisenberg, contornando possíveis problemas de convergência das amplitudes para processos em ordens superiores da teoria de perturbação, obtidas através da expansão de Dyson da matriz S na representação de interação.

As equações de movimento para os operadores de campo na representação de Heisenberg são formalmente as mesmas equações da teoria clássica. Assim, de acordo com as Eqs.(1.3) e (1.4), essas podem ser escritas

como

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) = -e(\mathcal{A}(x) + \mathcal{A}^{ext}(x))\psi(x) , \quad (3.1)$$

$$\square A_\mu(x) = -j_\mu(x) , \quad (3.2)$$

onde introduzimos a interação com um campo externo não quantizado \mathcal{A}_μ^{ext} e escolhemos um gauge no qual a condição de Lorentz

$$\partial^\mu A_\mu = 0$$

é satisfeita.

Ao invés de definirmos o operador de corrente através da Eq.(1.5), tomaremos^[17]

$$j_\mu(x) = \frac{e}{2}[\bar{\psi}(x)\gamma_\mu, \psi(x)] , \quad (3.3)$$

com a notação

$$[\bar{\psi}(x)\gamma_\mu, \psi(x)] = [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu\psi(x)] \quad (3.4)$$

$$= \sum_{\alpha,\beta} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} (\bar{\psi}_\alpha(x)\psi_\beta(x) - \bar{\psi}_\beta(x)\psi_\alpha(x)) . \quad (3.5)$$

No caso do campo de Dirac livre este operador satisfaz

$$\langle 0|j_\mu(x)|0 \rangle = 0 . \quad (3.6)$$

Podemos substituir as Eqs.(3.1) e (3.2) pelas respectivas equações integrais, dadas por

$$\psi(x) = \psi^{(0)}(x) - \int dx' S_\tau(x-x')e[\mathcal{A}(x') + \mathcal{A}^{ext}(x')]\psi(x') , \quad (3.7)$$

$$A_\mu(x) = A_\mu^{(0)}(x) + \int dx' D_\tau(x-x')\frac{e}{2}[\bar{\psi}(x')\gamma_\mu, \psi(x')] , \quad (3.8)$$

onde os operadores $\psi^{(0)}(x)$ e $A_\mu^{(0)}(x)$ são soluções das equações de campo livre

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi^{(0)}(x) = 0 , \quad (3.9)$$

$$\square A_\mu^{(0)}(x) = 0 . \quad (3.10)$$

As funções $S_r(x)$ e $D_r(x)$ são as funções de Green retardadas dos campos de Dirac e eletromagnético, respectivamente, sendo definidas pelas seguintes expressões:

$$S_r(x) = -S(x)\Theta(x^0) ,$$

$$D_r(x) = -D(x)\Theta(x^0) ,$$

onde $S(x)$ e $D(x)$ definem, respectivamente, as relações de anti-comutação e comutação covariantes

$$\{\bar{\psi}^{(0)}(x), \psi^{(0)}(x')\} = -iS(x' - x) , \quad (3.11)$$

$$[A_\mu^{(0)}(x), A_\nu^{(0)}(x')] = -ig_{\mu\nu}D(x' - x) , \quad (3.12)$$

enquanto $\Theta(t)$ é a função de Heaviside,

$$\Theta(t) \equiv \begin{cases} 1 ; & t > 0 \\ 0 ; & t < 0 \end{cases} .$$

Analogamente, podemos introduzir as funções de Green avançadas,

$$S_a(x) = S(x)\Theta(-x^0) ,$$

$$D_a(x) = D(x)\Theta(-x^0) .$$

Em três dimensões, as funções $S_r(x)$ e $S_a(x)$ possuem as representações integrais

$$S_r(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{ipx} (\not{p} + m) [PV \frac{1}{m^2 - p^2} + i\pi\varepsilon(p)\delta(m^2 - p^2)] \quad (3.13)$$

e

$$S_a(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{ipx} (\not{p} + m) [PV \frac{1}{m^2 - p^2} - i\pi\varepsilon(p)\delta(m^2 - p^2)] . \quad (3.14)$$

Nas expressões acima, PV denota o valor principal enquanto $\varepsilon(p)$ representa a função sinal

$$\varepsilon(p) = \frac{p}{|p|} . \quad (3.15)$$

Mostraremos na seção 3.2 que no caso de um campo externo \mathcal{A}_μ^{ext} atuando no vácuo, haverá uma corrente induzida dada por

$$\langle 0|j_\mu(x)|0 \rangle = \int dx' e^2 \Pi_{\mu\nu}(x-x') \mathcal{A}_\nu^{ext}(x') . \quad (3.16)$$

O kernel $\Pi_{\mu\nu}(x-x')$ caracteriza a resposta linear do vácuo . O tensor de polarização do vácuo é justamente a transformada de Fourier desse kernel. Assim, em três dimensões, temos

$$\Pi_{\mu\nu}(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{ik(x-x')} \Pi_{\mu\nu}(k) . \quad (3.17)$$

A definição acima terá necessariamente as propriedades transversais. Partindo das equações de movimento de Heisenberg para os operadores de campo, Källén calculou explicitamente o tensor de polarização do vácuo^[18] no contexto de renormalização da carga para a QED em quatro dimensões. Neste mesmo espírito, calcularemos o tensor de polarização do vácuo para a QED tridimensional^[19], impondo *a priori* conservação da carga, confrontando o resultado com aqueles obtidos na representação de interação (IP), aplicando as regras de Feynman usuais.

3.1 O Tensor de Polarização do Vácuo Transversal

Da conservação de carga segue-se que

$$\frac{\partial j_\mu(x)}{\partial x_\mu} = 0 , \quad (3.18)$$

ou, usando as Eqs.(3.16) e (3.17),

$$k^\mu \Pi_{\mu\nu}(k) = 0 . \quad (3.19)$$

Um tensor covariante de segunda ordem, $\Pi_{\mu\nu}(k)$, pode ser construído a partir de objetos covariantes, como k_μ e $g_{\mu\nu}$, e o pseudo-tensor totalmente anti-simétrico $\epsilon_{\mu\nu\alpha}$, tal que a Eq.(3.19) seja satisfeita. Neste sentido, o tensor de polarização do vácuo deve ser da forma

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = G(k^2)k_\mu k_\nu + H(k^2)g_{\mu\nu} + im\epsilon_{\mu\nu\alpha}k^\alpha \Pi^{(2)}(k^2) . \quad (3.20)$$

Ao contrário do caso quadridimensional, $\Pi_{\mu\nu}(k)$ possui uma parte anti-simétrica devido a $\epsilon_{\mu\nu\alpha}$. Da Eq.(3.19), segue-se

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = \Pi^{(1)}(k^2)\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + im\epsilon_{\mu\nu\alpha}k^\alpha \Pi^{(2)}(k^2) , \quad (3.21)$$

onde definimos

$$\Pi^{(1)}(k^2) \equiv -k^2 G(k^2) . \quad (3.22)$$

Se contrairmos $\Pi_{\mu\nu}(k)$ com $g^{\mu\nu}$ e $\epsilon^{\mu\nu\rho}$, obteremos, respectivamente,

$$\Pi^{(1)}(k^2) = \frac{1}{2}\Pi_{\mu\mu}(k) , \quad (3.23)$$

$$\Pi^{(2)}(k^2) = -\frac{i}{2m} \frac{k_\rho}{k^2} \epsilon^{\mu\nu\rho} \Pi_{\mu\nu}(k) , \quad (3.24)$$

com

$$\Pi_{\mu\mu}(k) \equiv g^{\mu\nu} \Pi_{\mu\nu}(k) . \quad (3.25)$$

3.2 Cálculo de $\Pi_{\mu\nu}(k)$ na Representação de Heisenberg (HP)

Uma vez que a constante de acoplamento α entre os campos campos fermiônico e eletromagnético é pequena, seus operadores podem ser expandidos em série de potências de \underline{e} . Podemos, portanto, escrevê-los como

$$\psi(x) = \psi^{(0)}(x) + e\psi^{(1)}(x) + e^2\psi^{(2)}(x) + \dots , \quad (3.26)$$

$$A_\mu(x) = A_\mu^{(0)}(x) + eA_\mu^{(1)}(x) + e^2A_\mu^{(2)}(x) + \dots . \quad (3.27)$$

Substituindo estas equações no segundo membro da Eq.(3.7), obtemos

$$\psi(x) = \psi^{(0)}(x) - e \int dx' S_r(x-x') [A^{(0)}(x') + A^{ext}(x')] \psi^{(0)}(x') + \dots, \quad (3.28)$$

Se tomarmos o conjugado Hermitiano de ambos os lados da equação acima e multiplicarmos à direita por γ_0 , levando em conta as representações (3.13) e (3.14), resultará

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^{(0)}(x) - e \int dx' \bar{\psi}^{(0)}(x') [A^{(0)}(x') + A^{ext}(x')] S_a(x'-x) + \dots. \quad (3.29)$$

Desta forma, a expansão correspondente para o operador de corrente dado pela Eq.(3.3) é expressa como

$$j_\mu(x) = j_\mu^{(0)}(x) + e j_\mu^{(1)}(x) + \dots, \quad (3.30)$$

onde

$$j_\mu^{(0)}(x) = \frac{e}{2} [\bar{\psi}^{(0)}(x) \gamma_\mu \psi^{(0)}(x)], \quad (3.31)$$

$$j_\mu^{(1)}(x) = -\frac{e}{2} \int dx' (A_\nu^{(0)}(x') + A_\nu^{ext}(x')) \times [\Delta_{\mu\nu}^{(r)}(x', x) + \Delta_{\mu\nu}^{(a)}(x', x)], \quad (3.32)$$

com

$$\Delta_{\mu\nu}^{(r)}(x', x) = [\bar{\psi}^{(0)}(x) \gamma_\mu S_r(x-x') \gamma_\nu \psi^{(0)}(x')], \quad (3.33)$$

$$\Delta_{\mu\nu}^{(a)}(x', x) = [\bar{\psi}^{(0)}(x') \gamma_\nu S_a(x'-x) \gamma_\mu \psi^{(0)}(x)]. \quad (3.34)$$

Considerando a expansão de $j_\mu(x)$ até o termo de primeira ordem em e e tomando o seu valor esperado no vácuo resulta a Eq.(3.16), com $\Pi_{\mu\nu}(x-x')$ dado pela expressão

$$\Pi_{\mu\nu}(x-x') = \frac{1}{2} \{ Tr[\gamma_\mu S_r(x-x') \gamma_\nu S^{(1)}(x-x')] + Tr[\gamma_\mu S^{(1)}(x-x') \gamma_\nu S_a(x'-x)] \}, \quad (3.35)$$

onde utilizamos a função

$$S_{\beta\alpha}^{(1)}(x' - x) = \langle 0 | [\bar{\psi}_\alpha(x), \psi_\beta(x')] | 0 \rangle ,$$

cuja representação integral é

$$S^{(1)}(x' - x) = \frac{i}{(2\pi)^2} \int d^3p e^{ip(x'-x)} (\not{p} + m) \delta(m^2 - p^2) . \quad (3.36)$$

Assim, utilizando as representações (3.13), (3.14) e (3.36), bem como a Eq.(3.17), resulta para o tensor de polarização do vácuo na HP

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}(k) &= \frac{1}{2(2\pi)^2} \int \int d^3p_1 d^3p_2 \delta(k - p_1 + p_2) \\ &\times Tr \{ \gamma_\mu (\not{p}_1 + m) \gamma_\nu (\not{p}_2 + m) \} [\Pi^-(p_1, p_2) + \Pi^+(p_2, p_1)] , \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde

$$\Pi^-(p_1, p_2) \equiv \delta(m^2 - p_1^2) [PV \frac{1}{m^2 - p_2^2} - i\pi\varepsilon(p_2)\delta(m^2 - p_2^2)] , \quad (3.38)$$

$$\Pi^+(p_2, p_1) \equiv \delta(m^2 - p_2^2) [PV \frac{1}{m^2 - p_1^2} + i\pi\varepsilon(p_1)\delta(m^2 - p_1^2)] . \quad (3.39)$$

Por razões práticas, calculemos inicialmente a parte anti-simétrica de $\Pi_{\mu\nu}(k)$. Após efetuarmos o traço e a integração em p_2 na Eq.(3.37), substituímos a expressão resultante para $\Pi_{\mu\nu}(k)$ na Eq.(3.24). Deste modo, $\Pi^{(2)}(k^2)$ torna-se

$$\Pi^{(2)}(k^2) = \mathcal{R}e \Pi^{(2)} + i\mathcal{I}m \Pi^{(2)} , \quad (3.40)$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{R}e \Pi^{(2)} &\equiv -\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3p [\delta(m^2 - p^2) PV \frac{1}{m^2 - (p-k)^2} \\ &+ \delta[m^2 - (p-k)^2] PV \frac{1}{m^2 - p^2}] , \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}m \Pi^{(2)} &\equiv -\frac{1}{4\pi} \int d^3p \delta(m^2 - p^2) \\ &\times \delta[m^2 - (p-k)^2] \{ \varepsilon(p) - \varepsilon(p-k) \} . \end{aligned} \quad (3.42)$$

Utilizando as representações

$$\delta(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega a} , \quad (3.43)$$

$$PV \frac{1}{b} = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\omega}{|\omega|} e^{i\omega b} , \quad (3.44)$$

segue-se que

$$PV \left\{ \frac{\delta(a)}{b} + \frac{\delta(b)}{a} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega \int_0^1 d\alpha e^{i\omega[\alpha a + (1-\alpha)b]} . \quad (3.45)$$

Da Eq.(3.45), após a mudança $p \rightarrow p + (1 - \alpha)k$, podemos reescrever a Eq.(3.41) para a parte real de $\Pi^{(2)}(k^2)$ como

$$\mathcal{R}e \Pi^{(2)} = \frac{i}{(2\pi)^3} \int_0^1 d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega \int d^3p e^{i\omega(M^2 - p^2)} , \quad (3.46)$$

onde

$$M^2 \equiv m^2 - \alpha(1 - \alpha)k^2 . \quad (3.47)$$

Podemos facilmente calcular as integrais em p e ω na Eq.(3.46) com o auxílio das representações (2.42) and (2.43).

Então, substituindo a Eq.(3.47) para M^2 , obtemos finalmente

$$\mathcal{R}e \Pi^{(2)} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^1 d\alpha \frac{1}{[m^2 - \alpha(1 - \alpha)k^2]^{\frac{1}{2}}} . \quad (3.48)$$

A parte imaginária de $\Pi^{(2)}(k^2)$ é dada pela Eq.(3.42), ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}m \Pi^{(2)} = & -\frac{1}{4\pi} \int d^2\vec{p} \int dp_0 \delta(m^2 - p_0^2 + \vec{p}^2) \\ & \times \delta(m^2 - p_0^2 + \vec{p}^2 + 2p_0k_0 - 2\vec{p}\cdot\vec{k} - k^2) \left[\frac{p_0}{|p_0|} - \frac{p_0 - k_0}{|p_0 - k_0|} \right] . \end{aligned} \quad (3.49)$$

Integrando com respeito a p_0 na expressão acima num sistema de referência onde $\vec{k} = 0$, leva a

$$\mathcal{I}m \Pi^{(2)} = -\frac{1}{16} \int_0^{\infty} da \frac{1}{\sqrt{m^2 + a}} \delta\left(a - \frac{k_0^2}{4} + m^2\right) \Delta(a) , \quad (3.50)$$

onde

$$\Delta(a) \equiv \frac{\sqrt{m^2 + a} + k_0}{|\sqrt{m^2 + a} + k_0|} - \frac{\sqrt{m^2 + a} - k_0}{|\sqrt{m^2 + a} - k_0|} . \quad (3.51)$$

Notamos que para o setor físico $k^2 < 4m^2$, onde a energia do campo externo aplicado é insuficiente para a criação de um par elétron-pósitron,

$$\mathcal{I}m \Pi^{(2)} = 0 . \quad (3.52)$$

Da covariância de $\Pi_{\mu\nu}(k)$, a Eq.(3.52) permanece válida em um referencial arbitrário.

Embora $\Pi^{(1)}(k^2)$ divirja, seu cálculo a partir da Eq.(3.23) é análogo ao anterior. Assim, a partir das Eqs.(3.23), (3.25) e (3.37), obtemos

$$\Pi^{(1)}(k^2) = \mathcal{R}e \Pi^{(1)} + i\mathcal{I}m \Pi^{(1)} , \quad (3.53)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{R}e \Pi^{(1)} \equiv & \frac{1}{2(2\pi)^2} \int d^3p \{3m^2 - p(p-k)\} [\delta(m^2 - p^2)PV \frac{1}{m^2 - (p-k)^2} \\ & + \delta[m^2 - (p-k)^2]PV \frac{1}{m^2 - p^2}] , \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}m \Pi^{(1)} \equiv & \frac{1}{8\pi} \int d^3p \{3m^2 - p(p-k)\} \delta(m^2 - p^2) \\ & \times \delta[m^2 - (p-k)^2] \{\varepsilon(p) - \varepsilon(p-k)\} . \end{aligned} \quad (3.55)$$

Como no caso anterior, temos que

$$\mathcal{I}m \Pi^{(1)} = 0 . \quad (3.56)$$

Da Eq.(3.45), após a mudança $p \rightarrow p + (1 - \alpha)k$, podemos reescrever a Eq.(3.54) como

$$\begin{aligned} \mathcal{R}e \Pi^{(1)} = & \frac{i}{2(2\pi)^3} \int_0^1 d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega \\ & \times \int d^3p \{p^2 - \alpha(1 - \alpha)k^2 - 3m^2\} e^{i\omega(M^2 - p^2)} , \end{aligned} \quad (3.57)$$

com M^2 definido pela Eq.(3.47). Na expressão acima omitimos termos ímpares em p , uma vez que estes se anulam por integração simétrica.

A Eq.(3.57) para a parte real de $\Pi^{(1)}(k^2)$ possui uma parte divergente dada por

$$\mathcal{D} = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int_0^1 d\alpha (I_1 - I_2) , \quad (3.58)$$

onde

$$I_1 \equiv \int_0^\infty d\omega \omega e^{i\omega M^2} \int d^3p p^2 e^{-i\omega p^2} ,$$

$$I_2 \equiv \int_0^\infty d\omega \omega e^{-i\omega M^2} \int d^3p p^2 e^{i\omega p^2} .$$

Podemos efetuar a integração em p com o auxílio das representações (2.42) e (2.43), obtendo desta forma

$$I_1 = \frac{3}{2}(\pi)^{\frac{3}{2}}(-i)^{\frac{1}{2}} J_1 ,$$

$$I_2 = \frac{3}{2}(\pi)^{\frac{3}{2}}(i)^{\frac{1}{2}} J_2 ,$$

onde

$$J_1 \equiv \int_0^\infty d\omega \omega^{-\frac{3}{2}} e^{i\omega M^2} ,$$

$$J_2 \equiv \int_0^\infty d\omega \omega^{-\frac{3}{2}} e^{-i\omega M^2} .$$

Integrando J_1 e J_2 por partes e substituindo as expressões resultantes para I_1 e I_2 na Eq.(3.58), obtemos

$$\mathcal{D} = -\frac{3}{8\pi} \int_0^1 d\alpha (M^2)^{\frac{1}{2}} + \mathcal{S} , \quad (3.59)$$

com \mathcal{S} dado por

$$\mathcal{S} \equiv \frac{3(i\pi)^{\frac{3}{2}}}{2(2\pi)^3} \int_0^1 d\alpha \left\{ \left[\frac{ie^{i\omega M^2}}{\omega^{\frac{1}{2}}} \right]_{\omega=0} + \left[\frac{e^{-i\omega M^2}}{\omega^{\frac{1}{2}}} \right]_{\omega=0} \right\} . \quad (3.60)$$

Podemos regularizar $\mathcal{R}e \Pi^{(1)}$ introduzindo um número suficiente de reguladores. Assim, efetuando as expansões

$$\frac{e^{i\omega M^2}}{(i\omega)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(i\omega)^{\frac{1}{2}}} + \mathcal{O}[(i\omega)^{\frac{1}{2}}] ,$$

$$\frac{e^{-i\omega M^2}}{(-i\omega)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(-i\omega)^{\frac{1}{2}}} + \mathcal{O}[(-i\omega)^{\frac{1}{2}}] ,$$

em torno de $\omega = 0$, segue-se que

$$\mathcal{S}^{(reg)} = -\frac{3i(\pi)^{\frac{3}{2}}}{2(2\pi)^3} \int_0^1 d\alpha \sum_i c_i \left[\frac{1}{(i\omega)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(-i\omega)^{\frac{1}{2}}} \right]_{\omega=0} .$$

Da condição

$$\sum_i c_i = 0 ,$$

resulta finalmente

$$\mathcal{S}^{(reg)} = 0 .$$

Levando em conta as demais contribuições finitas para $\mathcal{R}e \Pi^{(1)}$ obtemos, a partir da Eq.(3.57),

$$\Pi^{(1)}(k^2) = \mathcal{R}e \Pi^{(1)}(k^2) = \frac{k^2}{2\pi} \int_0^1 d\alpha \alpha(1-\alpha) \frac{1}{[m^2 - \alpha(1-\alpha)k^2]^{\frac{1}{2}}} . \quad (3.61)$$

Portanto, em $k^2 = 0$ temos

$$\Pi^{(1)}(0) = 0 . \quad (3.62)$$

Por outro lado, verificamos a partir das Eqs.(3.48) and (3.52) que

$$\Pi^{(2)}(0) = -\frac{1}{4\pi m} . \quad (3.63)$$

Como conseqüência da Eq.(3.63), massa é gerada para o fóton nesse nível de correção radiativa, pois a parte anti-simétrica do tensor de polarização do vácuo modifica o polo original no propagador do fóton em $k^2 = 0$.

Este resultado está de acordo com aquele obtido na IP, onde a integral de Feynman correspondente é regularizada através do método de regularização analítica, implementado de forma a preservar a invariância de gauge^[20]. Deve ser enfatizado que enquanto $\Pi^{(1)}(k^2)$ diverge na região ultravioleta (UV), $\Pi^{(2)}(k^2)$ permanece finito e bem definido ao longo dos passos intermediários do cálculo acima.

Capítulo 4

Considerações Finais

Originalmente endereçado a teorias de gauge em quatro dimensões, o formalismo de regularização analítica incorporando a invariância de gauge por construção revelou que o propagador do fóton corrigido radiativamente a nível de um “loop” possui um polo deslocado, de forma que podemos atribuir massa não nula ao fóton real. Isto contrasta com a regularização de Pauli-Villars, onde um termo de massa topológica no tensor de polarização do vácuo regularizado não contribui para a massa do fóton. De fato, cálculos perturbativos para teorias de gauge Abelianas e não-Abelianas em $(2+1)$ dimensões até a ordem de dois “loops” utilizando o esquema de regularização de Pauli-Villars^[21] demonstraram que gráficos até essa ordem dão uma contribuição nula para o termo de massa do campo de gauge.

Na IP, a amplitude de Feynman para a auto-energia do fóton é divergente UV. No entanto, como vimos, $\Pi^{(2)}(0)$ pode ou não anular-se, dependendo da escolha da regularização para a amplitude como um todo. Esta ambigüidade no resultado físico é removida se trabalharmos na HP, impondo a conservação da corrente.

O cálculo do tensor de polarização do vácuo no caso de estados fer-

miônicos intermediários não massivos pode ser efetuado empregando-se o método de regularização usual, tal como originalmente concebido. Para a teoria Abelian, obtemos o resultado

$$\Pi_{\mu\nu}(k) = (g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2})\Pi(p^2) ,$$

com

$$\Pi(p^2) = \frac{\sqrt{-p^2}}{128} ,$$

o qual é invariante de gauge. Se utilizarmos o método de regularização de Pauli-Villars para “loops” fermiônicos não massivos, o bóson de gauge adquire massa. Entretanto, como o termo de massa da densidade Lagrangeana (1.1) é ímpar sob a transformação de paridade definida na seção 1.1.1, isso viola esta simetria da teoria.

Do mesmo modo, se ao final do cálculo do propagador corrigido (2.2), implementando-se a regularização analítica da seção 2.2.1 para “loops” fermiônicos massivos, tomássemos o limite $m \rightarrow 0$, estaríamos violando a paridade. O argumento acima é igualmente válido para o caso não-Abeliano.

O método de regularização apresentado na seção 2.2 pode ser utilizado no estudo de anomalias de triângulo^[22,23]. Este também pode ser feito através das equações de movimento dos campos na representação de Heisenberg, investigando-se a estrutura da teoria quantizada e sua renormalizabilidade, uma vez que a representação de interação não está bem definida. Tal estudo, através de ambos prismas, encontra-se em andamento.

Outras aplicações de interesse do formalismo apresentado nos capítulos 2 e 3, respectivamente, são o cálculo das correções radiativas para o espalhamento Møller, no estudo da supercondutividade de pares elétron-elétron, e o cálculo da auto-energia do elétron em três dimensões, relacionada com o fator de ocupação dos níveis de Landau, para o efeito Hall quântico.

Apêndice A

As representações λ

As representações λ (2.42) e (2.43) podem ser obtidas a partir da definição da função gama^[24]

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} t^{z-1}, \quad \mathcal{R}e z > 0. \quad (\text{A.1})$$

Efetuada a mudança de variável $t \rightarrow pt$, onde p é um número real positivo, na integral acima resulta

$$\int_0^{\infty} dt e^{-pt} t^{z-1} = \frac{\Gamma(z)}{p^z}. \quad (\text{A.2})$$

Pelo o princípio da continuação analítica, podemos estender este resultado para um número complexo arbitrário p , com $\mathcal{R}e p > 0$.

Assim, empregando a mesma notação do Capítulo 2, temos

$$\int_0^{\infty} dx x^{\lambda} e^{-xp} = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{p^{\lambda+1}}, \quad \mathcal{R}e p > 0; \quad \mathcal{R}e(1 + \lambda) > 0. \quad (\text{A.3})$$

Se escrevermos $p = \epsilon + iA$, onde ϵ e A são números reais, com $\epsilon > 0$, obteremos

$$\int_0^{\infty} dx x^{\lambda} e^{-ix(A-i\epsilon)} = \frac{\Gamma(1 + \lambda)}{[i(A - i\epsilon)]^{1+\lambda}},$$

ou seja,

$$\frac{1}{(A - i\epsilon)^{1+\lambda}} = \frac{(i)^{1+\lambda}}{\Gamma(1 + \lambda)} \int_0^\infty dx x^\lambda e^{-ix(A-i\epsilon)} .$$

A Eq.(2.43) é obtida de maneira análoga, substituindo-se $p = \epsilon - iA$ na Eq.(A.3).

Apêndice B

Algumas Integrais Úteis

Este apêndice contém algumas integrais úteis que são frequentemente utilizadas em cálculos de física teórica. As integrais são apresentadas em ordem crescente de complexidade e são derivadas de fontes confiáveis.

$$\int_0^\infty dx x^\lambda e^{-\alpha x} = \frac{\Gamma(1+\lambda)}{\alpha^{1+\lambda}} \quad (\text{para } \alpha > 0, \lambda > -1)$$

$$\int_0^\infty dx x^\lambda e^{-\alpha x} \ln x = -\frac{\Gamma(1+\lambda)}{\alpha^{1+\lambda}} \left(\psi(1+\lambda) + \ln \alpha \right) \quad (\text{para } \alpha > 0, \lambda > -1)$$

onde $\psi(x)$ é a função gama digama. Outras integrais importantes incluem:

$$\int_0^\infty dx x^\lambda e^{-\alpha x} \ln^2 x = \frac{\Gamma(1+\lambda)}{\alpha^{1+\lambda}} \left(\psi^2(1+\lambda) + 2\psi(1+\lambda)\ln \alpha + \ln^2 \alpha \right) \quad (\text{para } \alpha > 0, \lambda > -1)$$

Apêndice B

Algumas Integrais Úteis

No transcurso dos capítulos 2 e 3 nos deparamos com integrais na variável de momento interno p , as quais podem ser calculadas com o auxílio das representações (2.42) e (2.43). Assim, nas etapas intermediárias do cálculo de integrais do tipo

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(M^2 - p^2 - i\epsilon)^\lambda} = 4\pi \int_0^\infty dq q \int_0^\infty dw \frac{1}{(M^2 - \omega^2 + q^2 - i\epsilon)^\lambda} \quad (\text{B.1})$$

e

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{(M^2 - p^2 - i\epsilon)^\lambda} = 4\pi \int_0^\infty dq q \int_0^\infty dw \frac{\omega^2 - q^2}{(M^2 - \omega^2 + q^2 - i\epsilon)^\lambda} \quad (\text{B.2})$$

surgem integrais de funções Gaussianas com argumento imaginário. Essas, por sua vez, são efetuadas utilizando-se novamente as representações mencionadas anteriormente.

As integrais que ocorrem no cálculo das integrais acima encontram-se relacionadas a seguir:

$$1. \quad \int_0^\infty dq e^{\pm i x q^2} = \frac{1}{2} \frac{(\pm i \pi)^{\frac{1}{2}}}{x} ; \quad (\text{B.3})$$

$$2. \quad \int_0^{\infty} dq q e^{\pm i x q^2} = \pm \frac{i}{2x} ; \quad (\text{B.4})$$

$$3. \quad \int_0^{\infty} dq q^2 e^{\pm i x q^2} = \frac{1}{4} \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{(\mp i x)^{\frac{3}{2}}} ; \quad (\text{B.5})$$

$$4. \quad \int_0^{\infty} dq q^3 e^{\pm i x q^2} = -\frac{1}{2x^2} . \quad (\text{B.6})$$

As integrais (B.3) e (B.4) podem ser calculadas utilizando-se as Eqs. (2.42) e (2.43), após a substituições $q = \sqrt{q'}$, $dq = \frac{dq'}{2\sqrt{q}}$. No caso das integrais (B.5) e (B.6), basta derivarmos (B.3) e (B.4), respectivamente, com relação ao argumento x da exponencial.

Apêndice C

A Álgebra das Matrizes Gama em (2+1) Dimensões

No Capítulo 1, introduzimos a representação SU_2 para as matrizes gama em 3 dimensões,

$$\gamma^0 = \sigma^3, \quad \gamma^1 = i\sigma^1, \quad \gamma^2 = i\sigma^2, \quad (\text{C.1})$$

onde

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Neste caso,

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\epsilon^{\mu\nu\alpha} \gamma_\alpha, \quad (\text{C.3})$$

com

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Definindo $\epsilon^{012} = 1$, temos que o pseudo-tensor totalmente anti-simétrico satisfaz

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha} \epsilon^{\gamma\delta\lambda} = \begin{vmatrix} \delta_\mu^\gamma & \delta_\nu^\gamma & \delta_\alpha^\gamma \\ \delta_\mu^\delta & \delta_\nu^\delta & \delta_\alpha^\delta \\ \delta_\mu^\lambda & \delta_\nu^\lambda & \delta_\alpha^\lambda \end{vmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

de modo que

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha}\epsilon^{\gamma\delta\alpha} = \delta_{\mu}^{\gamma}\delta_{\nu}^{\delta} - \delta_{\mu}^{\delta}\delta_{\nu}^{\gamma} , \quad (\text{C.5})$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 3! . \quad (\text{C.6})$$

Das Eqs.(C.2) e (C.3) segue-se imediatamente que

$$\text{Tr}(\gamma_{\mu}) = 0 , \quad (\text{C.7})$$

$$\text{Tr}(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}) = 2g_{\mu\nu} . \quad (\text{C.8})$$

Aplicando a Eq.(C.3) de maneira sucessiva e utilizando as duas últimas equações, obtemos

$$\text{Tr}(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{\rho}) = -i\epsilon_{\mu\nu\alpha}\text{Tr}(\gamma^{\alpha}\gamma_{\rho}) = -2i\epsilon_{\mu\nu\rho} , \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{\rho}\gamma_{\sigma}) &= 2g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - \epsilon_{\mu\nu\alpha}\epsilon_{\rho\sigma\beta}\text{Tr}(\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}) = \\ &= 2(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) . \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Em contraste com o caso quadridimensional, verificamos que o traço do produto de um número ímpar de matrizes gama não é identicamente nulo.

Apêndice D

Condições sobre os Coeficientes e Massas dos Reguladores

Consideremos a integral correspondente a um “loop” fermiônico contendo n vértices^[25,26], aos quais associamos n linhas de fóton externas, com momentos k_i ($i=1, 2, \dots, n$), conforme ilustrado na figura abaixo. Esta integral

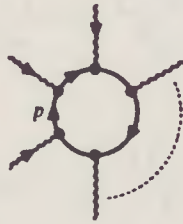


Figura D.1: “Loop” fermiônico de ordem n .

é proporcional a

$$\int d^3p \frac{\text{Tr}[\gamma_{\mu_1}(m + \not{p})\gamma_{\mu_2}(m + \not{p} + \not{k}_1)\dots\gamma_{\mu_n}(m + \not{p} + \not{k}_{n-1})]}{(m^2 - p^2 - i\epsilon)[m^2 - (p + k_1)^2 - i\epsilon]\dots[m^2 - (p + k_{n-1})^2 - i\epsilon]}. \quad (\text{D.1})$$

Para p grande o integrando comporta-se como p^{-n} e para $n < 4$ esta integral diverge como

$$\int_0^\infty \frac{p^2 dp}{p^n} \sim \int_0^\infty \frac{dp}{p^{n-2}} .$$

O integrando de (D.1) pode ser escrito como

$$I \equiv \frac{P_n(p) + mP_{n-1}(p) + m^2P_{n-2}(p) + \dots + m^n}{P_{2n}(p) + m^2P_{2n-2}(p) + \dots + m^{2n}} , \quad (D.2)$$

onde $P_i(p)$ representa um polinômio de grau i nas componentes de p .

Podemos reescrever o denominador de I sob a forma

$$P_{2n} \left(1 + m^2 \frac{P_{2n-2}(p)}{P_{2n}(p)} + \dots + m^{2n} \frac{1}{P_{2n}(p)} \right)$$

e, para p grande, efetuar a expansão

$$\frac{1}{\left(1 + m^2 \frac{P_{2n-2}(p)}{P_{2n}(p)} + \dots + m^{2n} \frac{1}{P_{2n}(p)} \right)} \sim 1 - \frac{P_{2n-2}(p)}{P_{2n}} m^2 + \dots ,$$

de modo que nessa região o integrando I se comporta como

$$I \sim \frac{P_n}{P_{2n}} - \frac{P_n P_{2n-2}}{P_{2n} P_{2n}} m^2 + \frac{P_{n-1}}{P_{2n}} m - \frac{P_{n-1} P_{2n-2}}{P_{2n} P_{2n}} m^3 + \frac{P_{n-2}}{P_{2n}} m^2 + \dots ,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} I &\sim \frac{P_n}{P_{2n}} + \frac{P_{n-1}}{P_{2n}} m + \frac{P_n}{P_{2n}} \left[\frac{P_{n-2}}{P_n} - \frac{P_{2n-2}}{P_{2n}} \right] m^2 + \\ &\quad \frac{P_{n-1}}{P_{2n}} \left[\frac{P_{n-3}}{P_{n-1}} - \frac{P_{2n-2}}{P_{2n}} \right] m^3 + \dots \\ &= \sum_k a_{-(n+k)}(p) m^k , \end{aligned} \quad (D.3)$$

onde

$$a_{-(n+k)}(p) \sim p^{-(n+k)} .$$

Portanto, ao efetuarmos a substituição

$$I(m) \rightarrow \sum_M c_M I(M)$$

devemos impor, no caso da polarização do vácuo, em que $n = 2$, as condições

$$\sum_M c_M = 0 , \quad (D.4)$$

$$\sum_M c_M M = 0 , \quad (D.5)$$

a fim de eliminarmos as divergências lineares e logarítmicas, respectivamente.

Referências

- [1] J. Schwinger, Phys. Rev. **75** (1949) 651.
- [2] G. Wentzel, Phys. Rev. **74** (1948) 1070.
- [3] W. Pauli and F. Villars, Revs. Mod. Phys. **21** (1949) 434.
- [4] C. G. Bollini, J. J. Giambiagi, Nuovo Cimento **B 12** (1972) 20; G. t'Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. **B 44** (1972) 189.
- [5] C. G. Bollini, J. J. Giambiagi and A. Gonzales Dominguez, Nuovo Cimento **31** (1964) 550.
- [6] R. P. Feynman, Phys. Rev. **76** (1949) 749, 769.
- [7] F. J. Dyson, Phys. Rev. **75** (1949) 486, 1736.
- [8] F. Halzen and A. D. Martin, "Quarks & Leptons", John Wiley & Sons, New York (1988).
- [9] R. Jackiw and S. Templeton, Phys. Rev. **D 23** (1981) 2291; S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Ann. Phys. (NY) **140** (1982) 372.
- [10] S. Weinberg, in "Understanding the Fundamental Constituents of Matter" (A. Zichichi, Ed.), Plenum, New York (1978); A. Linde, Rep. Progr. Phys. **42** (1979) 389; D. Gross, R. Pisarsky and L. Yaffe, Rev.

- Mod. Phys. **53** (1981) 43; S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 975.
- [11] R. E. Prange and S. M. Girvin, "The Quantum Hall Effect", Springer-Verlag, New York (1987).
- [12] R. Haag, Dan. Mat. Fys. Medd. **29** (1955) 12; A. S. Wightman and Schweber, Phys. Rev. **98** (1955) 812; R. F. Streater, A. S. Wightman, "PCT, Spin and Statistics, and All That", Benjamin/Cummings, Advanced Book Program, Reading, Massachusetts (1978).
- [13] T. Muta, "Foundations of Quantum Chromodynamics", World Scientific, Singapore (1987).
- [14] F. Mandl and G. Shaw, "Quantum Field Theory", John Wiley & Sons, New York (1984).
- [15] C. P. Martin, Phys. Lett. B **241** (1990) 513.
- [16] P. Breitenlohner and H. Mitter, Nucl. Phys. B **7** (1968) 443.
- [17] G. Källén, "Quantum Electrodynamics", Springer-Verlag, New York (1972).
- [18] G. Källén, Helv. Phys. Acta **22** (1949) 637.
- [19] B. M. Pimentel, A. T. Suzuki, J. L. Tomazelli, " QED_3 Radiative Corrections in the Heisenberg Picture", preprint IFT-P.011/92, de abril/92.
- [20] B. M. Pimentel, A. T. Suzuki, J. L. Tomazelli, "Vacuum Polarization Tensor in Three-Dimensional Quantum Electrodynamics", a ser publicado na Int. Jour. Mod. Phys. A.
- [21] Y -C. Kao, M. Suzuki, Phys. Rev. D **31** (1985) 2137.

- [22] J. S. Bell and R. Jackiw, *Nuovo Cimento* **60 A** (1969) 37.
- [23] S. Adler, *Phys. Rev.* **177** (1969) 2426. "Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory", Brandeis (1970), eds. S. Deser, M. Grisaru and H. Pendleton.
- [24] N. N. Lebedev, "Special Functions and their Applications", Prentice-Hall (1965).
- [25] N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, "Introduction to the Theory of Quantized Fields", Third Edition, John Wiley & Sons, New York (1980).
- [26] C. Itzykson and J. B. Zuber, "Quantum Field Theory", McGraw-Hill, Singapore (1986).

